



Géométrie asymptotiquement hyperbolique complexe et contraintes de courbure

Alan Pinoy

► To cite this version:

Alan Pinoy. Géométrie asymptotiquement hyperbolique complexe et contraintes de courbure. Géométrie métrique [math.MG]. Université de Montpellier, 2022. Français. NNT : 2022UMONS024 . tel-03851410

HAL Id: tel-03851410

<https://theses.hal.science/tel-03851410>

Submitted on 14 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et modélisation

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

**Unité de recherche : Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UMR 5149 CNRS
Université de Montpellier**

Géométrie asymptotiquement hyperbolique complexe et contraintes de courbure

Présentée par Alan PINOY

Le 6 juillet 2022

**Sous la direction de Marc HERZLICH
et Philippe CASTILLON**

Devant le jury composé de

Gilles CARRON	Professeur	Université de Nantes	Président du jury
Philippe CASTILLON	Maître de conférences	Université de Montpellier	Directeur
Carla CEDERBAUM	Professeure	Universität Tübingen	Examinatrice
Romain GICQUAUD	Maître de conférences	Université de Tours	Examineur
Colin GUILLARMOU	Directeur de recherche	Université Paris-Saclay	Examineur
Marc HERZLICH	Professeur	Université de Montpellier	Directeur

et après rapport de

Gilles CARRON	Professeur	Université de Nantes	Rapporteur
John M. LEE	Professeur	University of Washington	Rapporteur



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**

*Oh ! les gens bienheureux !... Tout à coup, dans l'espace,
Si haut qu'il semble aller lentement, un grand vol
En forme de triangle arrive, plane et passe.
Où vont-ils ? Qui sont-ils ? Comme ils sont loin du sol !*

[...]

*Qu'est-ce que vous avez, bourgeois ? Soyez donc calmes.
Pourquoi les appeler, sot ? Ils n'entendront pas.
Et d'ailleurs, eux qui vont vers le pays des palmes,
Crois-tu que ton fumier ait pour eux des appas ?*

[...]

*Regardez-les passer ! Eux, ce sont les sauvages.
Ils vont où leur désir le veut, par-dessus monts,
Et bois, et mers, et vents, et loin des esclavages.
L'air qu'ils boivent ferait éclater vos poumons.*

[...]

*Ils sont maigres, meurtris, las, harassés. Qu'importe !
Là-haut chante pour eux un mystère profond.
À l'haleine du vent inconnu qui les porte
Ils ont ouvert sans peur leurs deux ailes. Ils vont.*

[...]

*Là-bas, c'est le pays de l'étrange et du rêve,
C'est l'horizon perdu par delà les sommets,
C'est le bleu paradis, c'est la lointaine grève
Où votre espoir banal n'abordera jamais.*

*Regardez-les, vieux coq, jeune oie édifiante !
Rien de vous ne pourra monter aussi haut qu'eux.
Et le peu qui viendra d'eux à vous, c'est leur fiente.
Les bourgeois sont troublés de voir passer les gueux.*

Jean RICHEPIN

« Les oiseaux de passage », *La chanson des gueux*

Remerciements



Le présent document est l'aboutissement de quatre années de thèse. Bien qu'il soit signé de mon nom, il a bénéficié du concours, direct ou indirect, de nombreuses personnes. J'espère que ces modestes remerciements suffiront à leur signifier ma reconnaissance.

Les premiers remerciements de cette thèse sont naturellement adressés à Marc et Philippe, mes directeurs. Dès mon stage de fin d'études, et durant quatre années, Marc a su me transmettre avec patience et pédagogie son intérêt pour la géométrie asymptotique, dont je ne soupçonnais ni la richesse, ni la beauté. Philippe a toujours su se montrer disponible et enthousiaste pour répondre à mes questions et dissiper mes doutes, et j'ai encore récemment été émerveillé par nos discussions portant sur l'analyse géométrique. Merci à vous deux d'avoir accepté d'encadrer mes travaux. C'est avec plaisir que je vous exprime ici ma plus sincère gratitude.

Ce manuscrit a grandement bénéficié des lectures avisées de Gilles Carron et de Jack Lee, et de la pertinence de leurs remarques. Qu'ils aient accepté de rapporter cette thèse est pour moi un immense honneur, et je les en remercie chaleureusement. Je voudrais également remercier Carla Cederbaum, Colin Guillarmou et Romain Gicquaud d'avoir accepté d'évaluer mon travail en siégeant au sein du jury. Je vous en suis profondément reconnaissant.

Les trois premières années de cette thèse ont été effectuées au sein de l'Institut Montpellierain Alexander Grothendieck. Je souhaite adresser mes remerciements à plusieurs membres de ce laboratoire, et en premier lieu aux différents acteurs de la recherche et de l'enseignement supérieur qui ne pratiquent pas directement les mathématiques, mais sans qui celles-ci ne seraient pas grand chose. Merci donc à Baptiste Chapuisat, Bernadette Lacan, Brigitte Labric, Catherine Araspin, Carmella Madiona, Éric Hugounenq, Jean-Baptiste Brisson, Nathalie Collain et Sophie Cazanave-Pin. Les activités du laboratoire reposent avant tout sur votre patience et votre savoir-faire.

Tous les vendredis (ou presque), j'ai eu plaisir à discuter autour d'un café, d'un tableau ou d'un repas, avec les membres du séminaire Darboux. Merci à Jérémie Brioussel et à Thomas Haettel d'avoir animé ce séminaire durant toutes ces années. Merci à chacun de

Remerciements

ses membres, à ses orateurs et à ses oratrices.

Pendant trois ans, mon quotidien était rythmé par les humeurs joyeuses, voire festives, des doctorantes, doctorants, ATER et postdocs de l'IMAG. Vous avez été des compagnons de route remarquables, et je ne crois pas pouvoir retrouver une telle ambiance ~~de café~~ de travail de sitôt. Merci infiniment à Abel, Alain, Amandine, Bart, Emmanuel, Florent, Gautier, Guillaume, Iro, Iván, Julien, Juliette, Morgane, Nathan, Pascal, Radia, Raph, Solange, Sonia, Tibo, Thiziri, Victor, Zaineb, Zak... et toutes celles et ceux que j'oublie. Pardonnez-moi le format austère de l'énumération. Mention spéciale à Tom : merci d'avoir partagé la responsabilité du SemDoc et le COVID avec moi. Surtout, merci à mes co-bureaux d'avoir partagé votre quotidien avec le mien durant ces belles années. Un immense merci donc à Lamine, Steven et Meriem pour l'atmosphère joyeuse qui a régné dans le bureau 122, et pardon pour le bordel que j'y ai laissé. Merci Florian et Hermès d'avoir accepté le fardeau d'être les gardiens de la bande originale de Titanic.

C'est Julien Vovelle qui, par un coup de fil surprise un après-midi de mai, m'a annoncé que la dernière année de cette thèse se ferait depuis l'ENS de Lyon. J'ai apprécié enseigner au sein du département qu'il dirigeait, et je lui exprime ici toute ma gratitude. Merci à Pierre Dehornoy, Emmanuel Jacob et Bertrand Rémy de m'avoir donné une grande liberté quant aux enseignements qu'ils m'avaient confiés. Merci à Ghani Zeghib pour son enthousiasme quant à mes travaux. Merci à Damien Gaboriau pour sa sympathie constante. Un labo de maths, c'est aussi des personnes avec qui l'on discute de tout sauf de maths. Merci à Amine pour son engagement et ses petites blagues, à Simon pour sa sympathie (et pour l'AMAP!), et à Valentine pour sa bonne humeur permanente. J'ai terminé cette thèse dans un bureau plein de bienveillance et de blagues douteuses : merci à Clément de m'avoir supporté durant cette année rocambolesque (et aussi pour les pizzas). Je suis fier de te présenter aujourd'hui ce début de certificat d'*adultery* ! Enfin, j'ai eu l'immense honneur d'enseigner quelques semaines aux côtés de Claude Danthony. J'en garde un souvenir très ému.

L'université n'est pas toujours un lieu d'émancipation : elle peut aussi être un lieu de conflit, habilement entretenu par des petites phrases et par un certain mépris. Je ne remercie pas ceux qui, par une infantilisation humiliante, trouvent opportun de nous proposer d'« aller dire à [nos] petits copains que ce sont des fils de personne », ou de travailler bénévolement car « cela sera bien sur [notre] CV ». En revanche, merci aux différents syndicats de lutter chaque jour pour nos droits, et au comob d'avoir essayé jusqu'au bout de lutter contre la LPPR. J'admire l'engagement de Constantin Vernicos, et je le remercie pour cela. Merci à Matthieu d'avoir eu le cran d'écrire ce que beaucoup d'entre nous n'osent exprimer. Merci également pour les balades en campagne.

Au quotidien, des dizaines de personnes œuvrent silencieusement afin que l'université puisse remplir sa mission de service public. Elles nettoient nos bureaux et nos salles de cours, vident nos poubelles, lavent nos couloirs, essuient nos tableaux et assainissent nos sanitaires dans une honteuse indifférence, alors même que leurs conditions de travail sont rendues toujours plus difficiles. Je remercie profondément toutes ces personnes sans qui l'enseignement supérieur et la recherche ne serait tout simplement pas.

Merci à la multitude d'élèves que j'ai pu croiser durant ces quatre dernières années, et particulièrement à Simon d'avoir échangé sa copie à corriger contre un verre au Broc.

Si je soutiens aujourd'hui une thèse de doctorat, c'est aussi grâce à l'implication constante de centaines de personnels de l'Éducation Nationale. Je voudrais les remercier tous ici. J'adresse une pensée particulière à François Moschetti, Stéphane Repovic et Jean Graziani, dont les encouragements ont su porter leurs fruits. Merci à Christine Monteil du rectorat de Versailles pour ses conseils avisés, et sans qui j'aurais probablement dû rédiger la première lettre de démission de ma carrière. Plus généralement, je voudrais vivement remercier tous les agents du service public. Votre dévouement est un bien précieux.

J'ai débuté cette thèse dans une ville que je connaissais peu, et j'aurais pu éprouver des difficultés à y trouver mes marques. Cela n'a pas été le cas, et c'est grâce à la rencontre fortuite de Scoolpa, Carmen et Morgan. Merci de m'avoir accueilli au sein de la grande Mama famille. Merci Patoche, Mat, Chloé, Seb, Clara, et tous les autres. Montpellier sera toujours pour moi associée à la joie de vivre que vous répandez librement dans ses rues et villages alentours. Merci à Didier Super d'avoir essayé de nous jouer ses morceaux ! C'est aussi grâce à mes colocs et leurs ramifications que j'ai pu prendre mes aises dans ce nouvel environnement. Un immense merci à Matou et Matthieu pour leur accueil au Plein Sud. Je n'oublie pas non plus Thib et Ludo pour leur canapé (et pour la garderie de mon skate).

À chaque fois que j'ai ressenti le besoin de m'évader, c'est grâce à la Géosphère que j'ai pu le faire à moindres frais. Merci Magali pour ce magnifique lieu. Anna, mille mercis pour tes conseils lecture toujours adéquats, et merci de m'avoir confié le bar des Arlettes ! Je serai là en avril prochain, promis. Lorsque la Géosphère était fermée, c'est le BDM qui avait la lourde charge de s'occuper de moi. Josh, Léo, Carole, merci à vous. J'ai adoré être votre voisin.

Il est temps de rendre justice à celles et ceux qui me supportent depuis des années. Merci à Jerem et Alex d'être restés les amis que j'ai toujours voulu garder depuis le collège. Merci Zap, Audrey, Annaïg, Baptiste, et tous les autres déjantés de la bande. Kurt, j'aurais aimé que tu lises ces remerciements.

Mes premiers étonnement mathématiques ont eu lieu à Marseille, entre un dürüm et une boîte vocale, aux côtés de Shahram, Valentin et Victor. Je vous laisse déterminer lequel d'entre vous j'ai choisi de remercier ! Merci également à Jérémy, grâce à qui je connais l'intégralité de San Antonio sans jamais en avoir lu un seul tome.

À Lyon, j'ai eu la chance de rencontrer une multitude de personnes exceptionnelles. Merci à toute l'équipe d'Ajas, puis de la colonie Bernadette. Particulièrement, j'aimerais remercier Antoine pour sa chatoyante gouleyance, Ulysse pour le puits sans fond de ses connaissances et Matthias pour m'avoir transmis le goût d'une bière bien choisie. Merci Alice pour à peu près tout, sauf pour le talc ! Merci à Benti, Valou et Roro pour votre créativité.

C'est à Montpellier que j'écris ces remerciements, c'est donc à Montpellier que je terminerai cette ronde de l'amitié. Pas merci à Lucie d'être antivax malgré toi ! Merci à Guinness d'avoir été une colocataire incroyable. Un immense merci à Lisou de s'être

Remerciements

investie autant dans la préparation du pot d'un ami que tu ne connais que depuis peu. Merci à Valentine d'être tellement chouette : ton amitié est inestimable. Merci Yann pour les courses, et désolé pour ton canapé... Enfin, merci Damien d'avoir eu la délicatesse de naître quelques minutes après moi !

Merci à Pascal, Nathalie et les sœurs Bar de m'accueillir avec toujours la même bonne humeur. J'adresse mes plus grands remerciements à PM : le temps que tu as consacré à relire mes brouillons m'a beaucoup touché.

Durant les presque trente ans qui séparent cette thèse de ma naissance, j'ai pu compter sur les encouragements continus et sans faille de mes parents et de ma grande sœur. C'est à cette dernière qu'est dédiée cette thèse : merci infiniment. Merci à mes frères de faire de moi un heureux grand frère !

Enfin, ce manuscrit n'aurait pu exister sans le soutien inconditionnel et indéfectible de Maëlys. Je lui dois bien plus que ces remerciements peuvent exprimer. Merci pour tout.

Table des matières

Remerciements	v
Table des matières	ix
Liste des symboles	xiii
Introduction	1
Variétés asymptotiquement symétriques	2
Espaces symétriques non compacts de rang 1	2
Variétés asymptotiquement symétriques	5
Des notions extrinsèques ?	6
Domaines complexes à bord	8
Une obstruction géométrique	8
Pseudoconvexité	9
Métriques kähleriennes sur les domaines à bord	10
Variétés kähleriennes non plongées	11
Résultats pré-existants	11
Résultats obtenus dans cette thèse	13
Discussion sur les résultats	15
Plan de la thèse	17
English introduction	19
Asymptotically symmetric manifolds	20
Non compact rank 1 symmetric spaces	20
Asymptotically symmetric manifolds	22
Are there intrinsic notions?	24
Complex domains with boundary	25
A geometric obstruction	25
Pseudoconvexity	26
Kähler metrics on complex domains	26
Non embedded Kähler manifolds	27
Already known results	27
Main results	29

Table des matières

Discussion of the results	31
Outline of the manuscript	33
I Préliminaires géométriques	35
I.1 Géométrie différentielle	36
I.1.1 Notations et conventions	36
I.1.2 Orientabilité, forme volume	36
I.1.3 Distribution tangente, structure de contact	36
I.1.4 Variétés à bord	38
I.2 Géométrie riemannienne	38
I.2.1 Métrique riemannienne et connexion de Levi-Civita	38
I.2.2 Géodésiques	40
I.2.3 Application exponentielle	40
I.2.4 Courbure	41
I.2.5 Champs de Jacobi	43
I.2.6 Géométrie extrinsèque des hypersurfaces	44
I.2.7 Convexité	46
I.3 Géométrie kählérienne	46
I.3.1 Structure presque complexe	46
I.3.2 Variétés complexes	47
I.3.3 Métrique kählérienne	48
I.3.4 Courbure sectionnelle holomorphe	49
I.4 Géométrie CR	51
I.4.1 Variétés CR	51
I.4.2 Domaines complexes	52
II Géométrie asymptotique en courbure négative	55
II.1 Sphère à l'infini des variétés de Hadamard	56
II.1.1 Variétés de Hadamard	56
II.1.2 Un premier exemple à courbure sectionnelle constante	56
II.1.3 Un second exemple à courbure sectionnelle holomorphe constante	58
II.2 Sous-ensembles essentiels	59
II.2.1 Définition et premières propriétés	59
II.2.2 Bord de Gromov	63
II.3 Compactification conforme des variétés asymptotiquement localement hyperboliques	63
III Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds	67
Introduction	68
Structure of the paper	70
III.1 Preliminaries	70
III.1.1 Notations	70
III.1.2 Contact and CR manifolds	72

III.1.3 Some analysis results	72
III.2 Asymptotically locally complex hyperbolic manifolds	74
III.2.1 The ALCH and ALS conditions	74
III.2.2 First consequences	75
III.2.3 A volume growth lower bound	76
III.3 Normal Jacobi fields estimates	79
III.3.1 Radially parallel orthonormal frame	80
III.3.2 The Jacobi system	80
III.3.3 The local 1-forms	85
III.3.4 Normal Jacobi estimates	86
III.3.5 A volume growth upper bound	87
III.3.6 The local coframe	88
III.3.7 Asymptotic development of the metric	90
III.4 The contact structure	91
III.4.1 Order one estimates	92
III.4.2 The contact form	95
III.4.3 Regularity of the Carnot-Carathéodory metric	99
III.5 The almost complex structure	102
III.5.1 Notations	102
III.5.2 Shape operator estimates	104
III.5.3 Convergence	105
III.5.4 Integrability	106
A Curvature computations	113
Bibliographie	117

Liste des symboles

Géométrie différentielle

M	Variété différentielle
TM, T^*M	Fibré tangent, fibré cotangent
$\mathfrak{X}(M)$	Espace des champs de vecteurs
d	Différentielle extérieure
$[\cdot, \cdot]$	Crochet de Lie
$\mathcal{L}$	Dérivée de Lie

Géométrie riemannienne

(M, g)	Variété riemannienne
g	Métrique riemannienne
$\ \cdot\ _g$	Norme induite sur les tenseurs
d_g	Distance riemannienne
∇	Connexion de Levi-Civita
R	Tenseur de courbure de Riemann
$\sec$	Courbure sectionnelle
v_g	Forme volume riemannienne
S	Opérateur de Weingarten
R_{∂_r}	Opérateur de courbure le long des géodésiques radiales

Géométrie complexe

(M, g, J)	Variété kählérienne
J	Structure presque complexe
$TM \otimes \mathbb{C}$	Fibré tangent complexifié

Liste des symboles

R^0	Tenseur de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1
Géométrie CR	
(M, H, J)	Variété CR
$(\mathbb{S}, H, J)$	Sphère CR standard
γ	Forme de Levi
Espaces symétriques non compacts de rang 1	
$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$	Espace hyperbolique réel (de dimension n)
$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$	Espace hyperbolique complexe (de dimension $2n$)
$\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^n$	Espace hyperbolique quaternionien (de dimension $4n$)
$\mathbf{H}_{\mathbb{O}}^2$	Plan hyperbolique de Cayley (de dimension 16)
Variétés ALCH	
$K, \partial K$	Sous-ensemble essentiel et son bord
r	Fonction distance à K
E	Application exponentielle normale
γ_p	Géodésique radiale
∂_r	Champ de vecteurs radial
$\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$	Repère local radialement parallèle
λ	Densité volumique
u, v, w	Champs de vecteurs sur ∂K
Y_u, Y_v, Y_w	Champ de Jacobi normal associé à u, v, w
$\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$	Corepère local associé
η	Forme de contact canonique
ξ	Champ de Reeb associé
H	Structure de contact canonique
γ_H	Métrique de Carnot-Carathéorody canonique
J_H	Structure presque complexe canonique

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux propriétés géométriques asymptotiques d'une classe de variétés kähleriennes complètes et non compactes, que l'on appelle *variétés asymptotiquement localement hyperboliques complexes* (ALCH) ^[1]. Leur géométrie locale à l'infini est modelée sur celle de l'espace hyperbolique complexe. Sous des hypothèses de nature géométrique, nous montrons que cette condition de courbure assure l'existence d'un bord à l'infini qui est une variété de Cauchy-Riemann (CR) strictement pseudoconvexe.

Cette étude est motivée par deux questions issues de domaines différents des mathématiques. La première s'inscrit dans le cadre de l'étude géométrique de certaines variétés riemanniennes complètes non compactes, connues sous le nom de *variétés asymptotiquement symétriques*. La seconde appartient au champ de l'analyse et de la géométrie complexes, où l'étude des domaines bornés dans $\mathbb{C}^n$ (et plus généralement dans les variétés complexes) est fortement reliée à l'étude géométrique de leurs bords.

Sommaire

Variétés asymptotiquement symétriques	2
Espaces symétriques non compacts de rang 1	2
Variétés asymptotiquement symétriques	5
Des notions extrinsèques ?	6
Domaines complexes à bord	8
Une obstruction géométrique	8
Pseudoconvexité	9
Métriques kähleriennes sur les domaines à bord	10
Variétés kähleriennes non plongées	11
Résultats pré-existants	11
Résultats obtenus dans cette thèse	13
Discussion sur les résultats	15
Plan de la thèse	17

[1] Par variété *asymptotiquement symétrique*, on désigne une variété dont la métrique est asymptotique à celle d'un espace symétrique dans une carte à l'infini. On réservera l'usage du terme *asymptotiquement localement symétrique* lorsque seule la courbure est asymptotique à celle de l'espace symétrique.

Variétés asymptotiquement symétriques

Les variétés non compactes forment une classe très large de variétés différentielles, dont la topologie et la géométrie peuvent s'avérer très diverses.

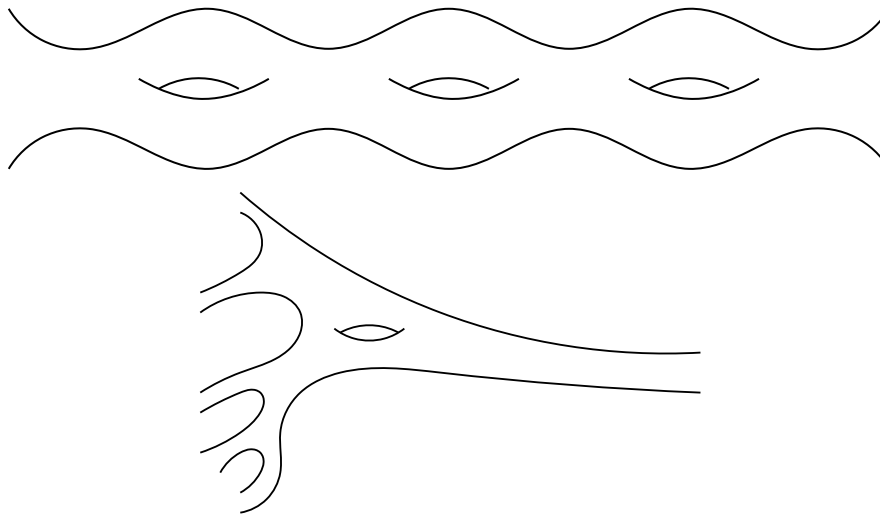


FIGURE 1: Deux surfaces non compactes.

Compte tenu de l'extrême complexité topologique et géométrique de ces variétés, il n'est pas raisonnable d'aborder le sujet par une théorie générale, d'autant plus que les nombreux exemples « simples » se révèlent déjà complexes. Une première approche consiste à étudier des variétés non compactes dont le comportement géométrique est modelé sur un espace que l'on connaît déjà explicitement. L'idée sous-jacente est la suivante : si l'on perturbe légèrement la métrique d'un espace dont on connaît beaucoup de propriétés, on peut espérer savoir dire si oui ou non celles-ci sont préservées. Cela permet en outre d'appliquer des techniques de géométrie de comparaison. Par exemple, si l'on sait qu'une variété simplement connexe est à courbure négative ou nulle, alors on sait que le volume des boules géodésiques est supérieur ou égal à celui des boules euclidiennes. Passé ce premier exemple de comparaison avec les espaces euclidiens, et plus généralement avec les espaces à courbure constante, les espaces symétriques non compacts forment une classe particulièrement intéressante de modèles.

Espaces symétriques non compacts de rang 1

Une variété riemannienne est dite symétrique si, en tout point, il existe une involution isométrique fixant ce point, et dont l'application linéaire tangente en ce point fixe est l'opposée de l'application identité de l'espace tangent. Ces isométries involutives généralisent les symétries centrales des espaces euclidiens. Cela impose, entre autres, que le tenseur de courbure de Riemann de la variété est parallèle ; une variété riemannienne

vérifiant cette dernière propriété est appelée localement symétrique. De manière surprenante, l'existence de ces symétries involutives a des conséquences extrêmement fortes : on peut décrire tout espace symétrique comme des quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe d'isotropie K . Ces espaces sont, en particulier, homogènes. En fait, leur géométrie locale est totalement encodée dans les algèbres de Lie sous-jacentes, ce qui contraint fortement la topologie et la géométrie de ces variétés. Cette interaction entre algèbre et géométrie a permis la classification des espaces symétriques, achevée par Élie CARTAN dans les années 1920 [Car26, Car27].

Le rang d'un espace symétrique peut être défini de deux manières équivalentes grâce à la correspondance entre algèbre et géométrie citée plus haut. D'une part, il s'agit de la dimension maximale d'un sous-groupe de Lie abélien et diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de G . D'autre part, il s'agit de la dimension maximale d'une sous-variété plate totalement géodésique, c'est à dire la dimension maximale d'un tore plat, d'un espace euclidien isométriquement plongé ou d'un produit de tels espaces. Le lien entre ces deux définitions est fait par l'application exponentielle de l'algèbre de Lie. Les variétés non compactes modèles qui nous intéressent dans cette thèse sont les espaces symétriques non compacts de rang 1, c'est-à-dire ceux dont les seules sous-variétés plates totalement géodésiques sont les géodésiques. On les appelle communément « espaces hyperboliques ». Ils figurent parmi les objets classiques de la géométrie riemannienne : il s'agit des espaces hyperboliques réels $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n = \mathrm{SO}(1, n)/\mathrm{SO}(n)$, de dimension réelle n , des espaces hyperboliques complexes $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$, de dimension réelle $2n$, des espaces hyperboliques quaternioniens $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^n = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, de dimension réelle $4n$ ainsi que du plan hyperbolique de Cayley $\mathbf{H}_{\mathbb{O}}^2 = \mathrm{F}_4^{-20}/\mathrm{Spin}(9)$, de dimension 16. Ce sont des variétés à courbure négative ou nulle, et puisque le rang de ces espaces symétriques est 1, la courbure sectionnelle de ces variétés est $\frac{1}{4}$ -pincée : nous adopterons ici comme convention qu'elle est comprise entre -1 et $-\frac{1}{4}$. Seul l'espace hyperbolique réel est à courbure sectionnelle constante.

En tant que variétés de Hadamard, c'est-à-dire simplement connexes, complètes, et à courbure négative ou nulle, les espaces hyperboliques sont difféomorphes, *via* leur application exponentielle en un point arbitraire, à leur espace tangent. Ces espaces sont donc, en particulier, difféomorphes à des boules : on peut donc les munir d'un *bord à l'infini*, qui est une sphère. Un développement asymptotique de la métrique au voisinage de l'infini permet d'induire une structure géométrique sur ce bord.

L'exemple le plus célèbre est celui de l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$. En coordonnées polaires dans une carte exponentielle en un point $o \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$, la métrique hyperbolique réelle est donnée par la formule

$$(\exp_o)^* g_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n} = dr \otimes dr + \sinh^2(r) \dot{g}. \quad (1)$$

Les sphères géodésiques de rayon r de l'espace hyperbolique réel sont donc isométriques à des sphères euclidiennes de rayon $\sinh(r)$. En renormalisant correctement la métrique de ces sphères, et en faisant tendre le rayon r vers l'infini, on obtient une métrique appartenant à la classe conforme de la sphère ronde. En changeant l'origine depuis laquelle on regarde la métrique, on trouve une autre métrique sur la sphère à l'infini, toujours

Introduction

conforme à la métrique ronde. En ce sens, la géométrie du bord à l'infini n'est pas riemannienne, mais conforme, et on dit que $(\mathbb{S}^{n-1}, [\hat{g}])$ est le *bord conforme* de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$. Il est remarquable que le groupe des automorphismes conformes de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, aussi connu sous le nom de groupe de Möbius, soit naturellement isomorphe au groupe des isométries de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$.

La description de la métrique de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ est plus délicate, car sa géométrie est anisotrope, et les sphères géodésiques ne sont, en particulier, pas conformes à la sphère ronde. Soit $\mathbb{S}^{2n-1}$ la sphère unité de l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$, et soit $H = (T\mathbb{S}^{2n-1}) \cap (iT\mathbb{S}^{2n-1})$ la distribution d'hyperplans induite par la structure complexe ambiante, calibrée par sa forme de contact canonique θ . Soit J la structure presque complexe induite sur H par la multiplication par i dans les fibres. Soit enfin $\gamma = d\theta|_{H \times H}(\cdot, J\cdot)$, la forme de Levi associée, qui est une métrique définie positive sur H : on dit que c'est une métrique de Carnot-Carathéodory. Alors en coordonnées polaires dans une carte exponentielle en un point $o \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$, la métrique hyperbolique complexe est donnée par la formule

$$(\exp_o)^* g_{\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n} = dr \otimes dr + 4 \sinh^2(r) \theta \otimes \theta + 4 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \gamma. \quad (2)$$

C'est une métrique kählérienne complète, de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 . On rappelle que la courbure sectionnelle holomorphe est la courbure sectionnelle des droites complexes. Les plans totalement réels, c'est-à-dire ceux orthogonaux à leur image par la structure presque complexe, sont quant à eux de courbure sectionnelle égale à $-\frac{1}{4}$. Les sphères géodésiques ne sont pas conformes à des sphères rondes : leur géométrie est typique des sphères de Berger, dont la métrique explose le long des fibres de la fibration de Hopf. De la même manière que la métrique hyperbolique réelle induit une structure conforme et non riemannienne sur son bord à l'infini, la donnée géométrique induite ici n'est pas tant la forme de contact θ et la forme de Levi γ , que leurs classes conformes $[\theta]$ et $[\gamma]$. La structure de contact H et la structure complexe J sont quand à elles de vraies données géométriques. La géométrie induite sur la sphère à l'infini est ainsi celle de la variété de Cauchy-Riemann $(\mathbb{S}^{2n-1}, H, J)$. Là encore, les groupes d'automorphismes de l'espace hyperbolique complexe et de son bord sont isomorphes. Il est à nouveau remarquable que les groupes d'automorphismes de ces deux géométries coïncident.

Pour les autres espaces symétriques non compacts de rang 1, la métrique prend une forme similaire. La seule différence est que la forme de contact est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ (respectivement $\mathbb{R}^7$), son noyau étant alors une distribution de codimension 3 (respectivement 7) dans le cas quaternionien (respectivement le cas du plan hyperbolique de Cayley). La correspondance entre la géométrie du bord à l'infini et la géométrie de l'espace symétrique est également vraie pour ces autres espaces symétriques non compacts de rang 1. Elle permet, entre autres choses, d'étudier la géométrie riemannienne de l'espace symétrique non compact à partir de la géométrie induite sur son bord à l'infini, qui est une variété compacte.

Variétés asymptotiquement symétriques

Les variétés conformément compactes fournissent un premier exemple de variétés dont le comportement asymptotique est fortement contraint. Elles se sont notamment révélées très importantes en géométrie conforme grâce au travail de C. FEFFERMAN et R. GRAHAM [FG85]. Soit (M, g) une variété riemannienne complète, non compacte. On suppose qu'il existe une variété compacte $\overline{M}$ à bord $\partial\overline{M}$, telle que $M = \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$. On appelle bord à l'infini de M la variété $\partial_\infty M = \partial\overline{M}$. On suppose qu'il existe une *fonction définissante du bord* $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ telle que $\rho^{-1}(\{0\}) = \partial\overline{M}$ et $d\rho$ ne s'annule pas au bord. On dit que (M, g) est *conformément compacte de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$* si $\rho^2 g$ s'étend en une métrique $\overline{g}$ de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ à $\overline{M}$. La classe conforme de la métrique $\overline{g}|_{\partial_\infty M}$ ne dépend pas du choix de la fonction ρ , et on dit que $(\partial_\infty M, [\overline{g}])$ est le *bord conforme* de (M, g) . On retrouve la construction du bord conforme de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$, avec pour fonction définissante du bord $\rho(x) = \frac{1-\|x\|^2}{2}$, où $\|x\|$ est la distance euclidienne à l'origine dans le modèle de la boule.

Dans un voisinage tubulaire du bord à l'infini de la forme $(0, \varepsilon) \times \partial_\infty M$, on peut écrire la métrique g de la forme

$$g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\rho \otimes d\rho + \overline{g}}{\rho^2} + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (3)$$

Avec le changement de variables $\rho = e^{-r}$, on obtient une nouvelle forme asymptotique de la métrique

$$g \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} dr \otimes dr + e^{2r} \overline{g} + o(e^{2r}). \quad (4)$$

Si $\overline{g}$ s'étend de manière $\mathcal{C}^2$, alors la restriction au bord de $\|d\rho\|_{\overline{g}}$ est indépendante du choix de ρ , et on a l'estimée pour la courbure sectionnelle près du bord suivante

$$\sec_g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} -\|d\rho\|_{\overline{g}}^2 + \mathcal{O}(\rho) \quad (5)$$

Si $\|d\rho\|_{\overline{g}} \equiv 1$ au bord, alors la courbure sectionnelle de (M, g) tend vers -1 au bord, et la géométrie locale à l'infini est proche de celle de l'espace hyperbolique. Dans ce cas, on dit que (M, g) est *asymptotiquement hyperbolique*.

Le sujet a connu une forte impulsion avec la découverte de nombreuses métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques et dont le bord conforme était prescrit. Dans [GL91], R. GRAHAM et J. LEE construisent des métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques sur la boule $\mathbb{B}^{n+1}$, dont l'infini conforme est prescrit dans un voisinage de la structure conforme de la métrique ronde sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Les invariants riemanniens de la métrique fournissent alors « gratuitement » des invariants conformes du bord.

Des notions similaires existent pour traiter des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes, quaternioniennes et octonioniennes. Dans le cas complexe, une variété riemannienne (M, g) est dite *asymptotiquement hyperbolique complexe* si elle est l'intérieur d'une variété $\overline{M}$ à bord CR $(\partial_\infty M, H, J_H)$, telle que dans un voisinage tubulaire du bord $(0, \varepsilon) \times \partial_\infty M$, la métrique s'écrive

$$g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\rho \otimes d\rho}{\rho^2} + \frac{\theta \otimes \theta}{\rho^2} + \frac{\gamma_H}{\rho} + o(1), \quad (6)$$

Introduction

ou, avec le changement de variable $\rho = e^{-r}$,

$$g \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} dr \otimes dr + e^{2r} \theta \otimes \theta + e^r \gamma_H + o(1). \quad (7)$$

Dans ces deux dernières équations, θ est une forme de contact calibrant la structure de contact H , compatible avec J_H (c'est-à-dire que $d\theta|_{H \times H}(J_H \cdot, J_H \cdot) = d\theta|_{H \times H}$), telle que la forme de Levi $\gamma_H = d\theta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot)$ est une métrique sur la distribution de contact H . On appelle pour cette raison γ_H la métrique de Carnot-Carathéodory. Dans ce cas, on dit que $(\partial_\infty M, H, J_H)$ est le bord à l'infini de (M, g) [2].

À nouveau, seules les classes conformes $[\theta]$ et $[\gamma_H]$ sont des invariants géométriques. De ce fait, le bord à l'infini est parfois nommé bord conforme. Le développement de la métrique (7) est l'analogue complexe du cas réel (4). En prolongeant J_H en décrétant que $J\partial_r$ est le champ de Reeb de θ , on obtient une variété presque complexe $(r_0, +\infty) \times \partial_\infty M$ dont la courbure sectionnelle des J -plans tend vers -1 au bord, tandis que celle des plans P orthogonaux à JP tend vers $-\frac{1}{4}$ au bord. La géométrie locale à l'infini est donc proche de celle de l'espace hyperbolique complexe.

La même forme est requise pour la définition des variétés asymptotiquement hyperboliques quaternioniennes et octonioniennes, où la seule différence réside dans le fait que la structure de contact est de codimension 3 et 7 respectivement, calibrée par une forme de contact η à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^7$.

Dans [Biq00], O. BIQUARD étudie l'existence de métrique d'Einstein asymptotiquement symétrique à bord prescrit. L'auteur construit, à l'aide d'un procédé perturbatif et du théorème d'inversion locale, une métrique d'Einstein g sur la boule unité $\mathbb{B}^{2n}$, dont le bord à l'infini est prescrit dans un voisinage de la structure CR standard de la sphère. Cette métrique est en outre unique, modulo les difféomorphismes de la boule fixant le bord point par point. Des résultats analogues sont obtenus dans les cas quaternionien et octonionien. Par souci d'exhaustivité, mentionnons qu'un résultat essentiellement similaire dans le cas hyperbolique complexe est indépendamment et simultanément obtenu par J. C. ROTH dans sa thèse de doctorat [Rot99], bien que non publié.

Ces variétés asymptotiquement symétriques ont connu un grand succès, la recherche de nouvelles métriques d'Einstein étant un sujet moteur de la géométrie riemannienne. Les sciences physiques se sont également tournées vers leur étude, grandement motivées par la *correspondance* AdS/CFT [3] postulant l'existence d'une correspondance exacte entre la géométrie [4] de l'intérieur et la géométrie conforme du bord à l'infini (les « champs conformes »).

Des notions extrinsèques ?

Dans ce qui précède, la définition de la notion de variété asymptotiquement symétrique repose sur l'existence d'un bord *ad hoc*. Elle impose de surcroît des contraintes

[2] Certains auteurs n'imposent pas à la structure presque complexe d'être intégrable.

[3] Pour *anti-de Sitter* et *conformal field theory*.

[4] Précisons qu'il s'agit ici de géométrie lorentzienne.

géométriques fortes, comme l'existence d'une forme explicite de la métrique dans une carte donnée de l'infini.

Il est naturel de se demander s'il existe des conditions géométriques sur une variété riemannienne (M, g) qui assurent l'existence d'un bord à l'infini et du caractère asymptotiquement symétrique de la métrique. Par condition géométrique, on entend des conditions sur la courbure, le volume, *etc.* Beaucoup d'efforts ont été déployés pour définir ce que serait pour une variété d'avoir un comportement similaire à celui d'un espace hyperbolique, avec beaucoup de succès. On peut citer par exemple la notion de d'hyperbolicité au sens de Gromov, ou bien la notion d'espaces $CAT(0)$ et $CAT(-1)$. Ces définitions reposent sur la comparaison des triangles géodésiques avec ceux d'espaces modèles, respectivement un arbre, le plan euclidien ou le plan hyperbolique. Elles offrent des notions synthétiques de courbure négative ou nulle, et de courbure négative uniformément majorée.

Entre 1983 et 1985, M. ANDERSON et R. SCHOEN ont étudié la question sous une autre approche. Dans [And83, AS85], ils montrent qu'une variété de Hadamard dont la courbure sectionnelle est pincée négativement possède toujours un bord à l'infini muni d'une structure conforme. Ce bord, qui n'est pas rattaché à la variété de départ, est de faible régularité : si la courbure vit dans $[-b^2, -a^2]$, avec $0 < a \leq b$, alors le bord est de classe $\mathcal{C}^{\frac{a}{b}}$. Ce bord est construit par identification à un certain espace de fonctions harmoniques, qui sont construites en résolvant le problème de Dirichlet « à l'infini ». Ce résultat est donc un premier pas vers une construction géométrique d'un bord conforme : l'existence d'un bord conforme similaire au cas de l'espace hyperbolique réel est assurée avec faible régularité sous des conditions de courbure relativement peu exigeantes. Il suggère que des conditions intrinsèques sur la courbure peuvent permettre de retrouver un bord à l'infini. Lorsque la courbure est asymptotique à celle de l'espace modèle, on parle de variété *asymptotiquement localement symétrique*. Mentionnons au passage que d'autres notions existent pour définir un bord géométrique, comme le bord visuel ou le bord de Martin.

Le second résultat dans cette direction, utilisant des notions géométriques, est dû à Y. SHI et G. TIAN [ST05]. C'est un résultat d'unicité, énonçant que si la courbure d'une variété asymptotiquement localement hyperbolique réelle sur la boule unité converge très rapidement vers -1 au bord [5], alors il s'agit de la métrique hyperbolique réelle. Pour se faire, les auteurs montrent qu'une telle métrique induit la structure conforme standard sur la sphère à l'infini, ce qui leur permet de conclure. Les conditions géométriques portent sur la courbure sectionnelle (convergeant exponentiellement vite vers -1 au bord) et sur le volume (courbure de Ricci minorée). Comme corollaire, on obtient que l'unique métrique de Poincaré-Einstein induisant la structure conforme standard de la sphère est la métrique hyperbolique.

Un peu plus tard, T. MARSH et E. BAHUAUD [BM08, Bah08] ont étendu le résultat de M. ANDERSON et R. SCHOEN à des variétés non simplement connexes, sous la condition (géométrique) d'existence d'un « cœur » convexe, appelé *sous-ensemble essentiel*, dont

[5] Plus précisément, l'hypothèse est que la courbure sectionnelle est de la forme $\sec = -1 + \mathcal{O}(e^{-ar})$, avec $a > 2$ et $r = d_g(\cdot, o)$ avec o un pôle.

Introduction

le complémentaire est de courbure strictement négative. Notons que l'existence de ce convexe est assurée dans les variétés de Hadamard (toute boule suffisamment petite) et dans les variétés conformément compactes (le complémentaire d'un voisinage tubulaire de l'infini). Elle assure de plus que la variété riemannienne (M, g) ne possède aucun bout de volume fini, et en particulier aucun cusp. En outre, le bord à l'infini est identifié au bord de ce convexe, et peut être attaché à la variété de départ en conservant la régularité du bord de M . ANDERSON et R. SCHOEN. Dans le cas où la courbure sectionnelle tend exponentiellement vite vers -1 (on dit que la variété est *asymptotiquement localement hyperbolique*), ils montrent que la compactification obtenue gagne en régularité (essentiellement $\mathcal{C}^{0,1}$), et retrouvent un développement de la métrique similaire à l'équation (4). Par la suite, E. BAHUAUD et R. GICQUAUD ont amélioré ces résultats en trouvant des conditions sur le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes sous lesquelles la régularité obtenue était supérieure (c'est-à-dire $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, $\mathcal{C}^{1,1}$, etc.) [BG11]. Les techniques employées dans ces articles reposent sur l'étude des équations d'évolution de la métrique et de la seconde forme fondamentale de certaines hypersurfaces dans des coordonnées adaptées (les coordonnées de Fermi). Ce sont des équations différentielles ordinaires. Le cas des métriques d'Einstein est également parcouru : cette fois, les techniques employées sont plus analytiques, et reposent notamment sur de l'analyse d'équations aux dérivées partielles elliptiques dans de bonnes coordonnées harmoniques [HH97]. Cette analyse permet de se passer d'hypothèses portant sur les dérivées covariantes de la courbure. Dans [Gic13], R. GICQUAUD montre en fait que l'on peut généralement se passer d'hypothèse sur les dérivées covariantes de la courbure et aboutir à une compactification conforme de régularité semblable. Mentionnons que cette question a aussi été abordée par X. HU, J. QING et Y. SHI [HQS12], où il est également question de rigidité. Ces résultats fournissent une caractérisation géométrique des variétés asymptotiquement hyperboliques réelles.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'analogue kählerien de ces résultats. Nous nous posons donc la question suivante.

Question 1. Peut-on caractériser géométriquement les variétés complètes et non compactes qui sont asymptotiquement hyperboliques complexes ?

En d'autres termes, nous nous demandons s'il existe des conditions géométriques (sur la courbure, le volume, etc.) qui assurent le caractère asymptotiquement hyperbolique complexe d'une variété complète et non compacte.

Avant de détailler les contributions principales de cette thèse, faisons un détour du côté de la géométrie et de l'analyse complexes.

Domaines complexes à bord

Une obstruction géométrique

L'étude des domaines complexes à bord trouve son origine dans le théorème de représentation conforme. Ce résultat bien connu affirme qu'un ouvert strict du plan complexe

non vide est biholomorphe (en particulier, conforme) au disque unité, dès lors qu'il est simplement connexe.

En dimension supérieure, les hypersurfaces réelles de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, portent une structure géométrique qui n'apparaît pas en dimension complexe 1. Si $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$ est une telle hypersurface réelle, alors $H = T\Sigma \cap (iT\Sigma)$ est un champ orientable d'hyperplans, muni par restriction de la multiplication par i d'une structure presque complexe J , qui est intégrable. Autrement dit, (Σ, H, J) est une variété CR. Le bord des domaines porte donc une structure géométrique directement induite par la structure complexe ambiante. De plus, un biholomorphisme entre deux ouverts à bords lisses, qui se prolonge aux bords, induit par restriction un difféomorphisme CR entre les bords.

En essayant de généraliser le théorème de l'application conforme à la dimension complexe 2 [Poi07], Henri POINCARÉ exhibe une obstruction à ce que deux domaines de $\mathbb{C}^2$ à bords lisses soient biholomorphes. Cette obstruction apparaît sous la forme d'un système d'équations, appelées *équations tangentielles de Cauchy-Riemann*, qui doivent être vérifiées au bord des domaines. Ces dernières sont de nature géométrique : la structure complexe ambiante de $\mathbb{C}^2$ induit sur les bords des structures CR. Les équations tangentielles ont des solutions exactement lorsque les deux structures CR sont équivalentes. Ce dernier résultat s'étend à toutes les dimensions supérieures. La géométrie CR des domaines à bord fournit donc une obstruction géométrique à la généralisation du théorème de représentation conforme.

Pseudoconvexité

Il existe en analyse complexe plusieurs notions qui étendent la notion usuelle de convexité au cadre des domaines à bord. L'une de ces notions est celle de *pseudoconvexité*, qui stipule l'existence d'une fonction *pluri-sous-harmonique* ayant certaines propriétés que nous ne détaillerons pas ici. Lorsque le bord est suffisamment régulier (au moins de classe $\mathcal{C}^2$), cette notion coïncide avec une propriété géométrique de la structure CR du bord. On dit alors que la structure CR est pseudoconvexe.

Une variété CR (M, H, J) est dite pseudoconvexe si H est une distribution de contact et s'il existe une forme de contact θ calibrant H telle que

- (1) θ et J sont compatibles, i.e $d\theta|_{H \times H}(J \cdot, J \cdot) = d\theta$,
- (2) la forme de Levi $\gamma := d\theta|_{H \times H}(\cdot, J \cdot)$ est une métrique positive sur H .

Elle est dite strictement pseudoconvexe lorsque de plus, la forme de Levi est définie positive. Par la suite, nous dirons qu'un domaine à bord est (strictement) pseudoconvexe lorsque son bord est une variété CR (strictement) pseudoconvexe, faisant fi des exemples de régularité inférieure à $\mathcal{C}^2$.

Dans [Fef74], C. FEFFERMAN montre qu'un biholomorphisme entre deux domaines bornés strictement pseudoconvexes et à bords lisses de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) s'étend en un difféomorphisme jusqu'aux bords. La restriction au bord induit alors un difféomorphisme CR. La réciproque de ce théorème est vraie [Boc43] : un difféomorphisme CR entre les bords de deux domaines strictement pseudoconvexes se prolonge en un biholomorphisme des domaines qu'ils bordent. On dispose ainsi d'une correspondance entre les domaines

bornés strictement pseudoconvexes, à biholomorphisme près, et leurs bords, à CR difféomorphisme près. La géométrie complexe d'un domaine strictement pseudoconvexe peut ainsi se lire exhaustivement dans la géométrie CR de son bord [6].

Métriques kähleriennes sur les domaines à bord

L'idée géométrique suivante a connu un large succès dans l'étude des domaines à bord : il s'agit de construire une métrique complète sur le domaine, qui envoie donc le bord à l'infini, et d'analyser la géométrie asymptotique de la variété riemannienne alors obtenue.

L'une de ces métriques est la métrique de Bergman, définie à partir du noyau éponyme [KY96, Kra01]. Elle est invariante par biholomorphisme, et capture donc l'information sur la géométrie complexe du domaine.

Dans [CY80], S.-Y. CHENG et S. YAU montrent que tout domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ (en fait, d'une variété Stein), avec $n \geq 2$, possède une unique (à homothétie près) métrique complète qui soit à la fois kählérienne et d'Einstein. On appelle cette métrique la métrique de Kähler-Einstein, dont l'étude a été un moteur de l'analyse complexe pendant des décennies.

Dans le cas de la boule unité de l'espace hermitien, ces deux métriques coïncident avec la métrique hyperbolique complexe, et dans le cas général, elles sont toutes deux asymptotiquement hyperboliques complexes, au sens où la métrique s'écrit de la forme (6), avec ρ une fonction définissante du bord. La courbure sectionnelle holomorphe de ces métriques converge de vers -1 au bord.

Mentionnons que des résultats analogues existent lorsque le bord du domaine a une régularité plus faible. En régularité $\mathcal{C}^2$, la métrique de Bergman est toujours asymptotiquement hyperbolique complexe, et sa courbure sectionnelle holomorphe converge vers -1 au bord [Kle78]. La métrique de Kähler-Einstein ne jouit quant à elle de cette propriété que si le bord est de régularité $\mathcal{C}^k$, avec k minoré par une fonction linéaire de la dimension [CY80].

Puisque ces métriques encodent de l'information sur la géométrie complexe du domaine, on peut raisonnablement penser qu'il existe un lien entre la géométrie complexe et la courbure de certaines métriques complètes. Il est alors naturel de se demander si une réciproque partielle à ces résultats existe. Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^k$, pour k assez grand. Supposons qu'il existe une métrique kählérienne complète sur Ω dont la courbure sectionnelle holomorphe tend vers -1 au bord. Peut-on en déduire que Ω est strictement pseudoconvexe ? A. ZIMMER a répondu positivement à cette question dans le cas lisse [Zim18], tandis que J. FORNÆSS et E. FORNÆSS WOLD ont montré que la réponse était négative dans le cas $\mathcal{C}^2$ [FFW18]. Par la suite, F. BRACCI, H. GAUSSIER et A. ZIMMER ont généralisé ces résultats en montrant qu'un domaine Ω à bord $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $\alpha \in]0, 1[$, était strictement pseudoconvexe si et seulement si on peut le munir d'une métrique kählérienne complète dont la courbure sectionnelle est pincée entre $-1 - \varepsilon$ et $-1 + \varepsilon$ en dehors d'un

[6] Du moins dans le cas lisse.

compact [BGZ18]. La constante $\varepsilon > 0$ est universelle et ne dépend que de α et de la dimension de Ω . Le cas $\mathcal{C}^2$ y est de plus mis en défaut.

Il est donc effectivement possible d’obtenir des informations sur la géométrie du bord d’un ouvert strictement pseudoconvexe à partir de la courbure des métriques kähleriennes complètes dont on peut le munir. Cette remarque est l’une des motivations principales de cette thèse, dans laquelle nous essayons d’obtenir un maximum d’information sur la géométrie à l’infini à partir de contraintes sur la courbure.

Variétés kähleriennes non plongées

Les résultats de A. ZIMMER, F. FORNÆSS et E. FORNÆSS WOLD, et de F. BRACCI, H. GAUSSIER et A. ZIMMER concernent des domaines à bord dans un espace hermitien. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la question analogue dans le cas des variétés kähleriennes, complètes et non compactes, qui ne sont pas plongées en tant qu’ouverts d’un espace hermitien. Celles-ci ne possèdent pas de bord *a priori*, et on se pose alors la question suivante.

Question 2. Une variété kählérienne complète et non compacte, dont la courbure sectionnelle holomorphe tend suffisamment vite vers -1 à l’infini, possède-t-elle une notion de bord strictement pseudoconvexe ?

Résultats pré-existants

Dans deux articles parus dans les années 1980 [Bla85, Bla89], J. BLAND tente de déterminer des conditions assurant qu’une variété kählérienne complète et non compacte se plonge de manière bornée dans un espace hermitien $\mathbb{C}^N$. Son point de vue est analytique, et sa stratégie est la suivante : il s’agit de construire, en nombre suffisant, des fonctions holomorphes bornées non triviales. Pour ce faire, l’auteur construit un bord CR, et par un procédé de prolongement, en déduit l’existence de telles fonctions holomorphes. Dans cette section, nous exposons les résultats obtenus qui sont en rapport avec les questions que nous nous posons dans cette thèse. On note R^0 le tenseur de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 sur M , et $T = R - R^0$ la différence entre la courbure de (M, g) et ce dernier tenseur [7].

Dans [Bla85], J. BLAND se concentre sur le cas des variétés de Hadamard. Soit $p \in M$ un pôle, $S \subset T_p M$ la sphère unité de l’espace tangent en ce pôle. Soit $V \subset S$ un ouvert sur lequel sont définies des coordonnées locales $(\theta^1, \dots, \theta^{2n-1})$. Soit $r = d_g(\cdot, p)$ la fonction distance au pôle p , de sorte que $(r, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1})$ définissent des coordonnées sur le secteur angulaire défini par $\mathbb{R}_+^* \times V$ dans M . Soit de plus $\rho = 1 - e^{-r}$, de sorte que

[7] Dans [Bla85, Bla89], la courbure sectionnelle holomorphe de l’espace modèle avec lequel l’auteur effectue une comparaison est normalisée à -2 . Cela implique que des facteurs $\sqrt{2}$ apparaissent naturellement dans les estimées de croissance des différentes quantités géométriques considérées. Pour cette raison, chaque « $e^{\sqrt{2}r}$ » présent dans les articles de J. BLAND se traduit, avec la normalisation que nous choisissons dans cette thèse, en « e^r ».

Introduction

$(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1}) \in (0, 1) \times V$ définissent des coordonnées, appelées *coordonnées exponentielles généralisées*. La sphère à l'infini de (M, g) , en tant que variété de Hadamard, est identifiée avec le lieu $\{\rho = 1\}$. Finalement, considérons la condition $(\star)$ suivante :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad (1-\rho)T \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times V). \quad (\star)$$

Autrement dit, la condition $(\star)$ stipule que dans ces coordonnées exponentielles généralisées, les composantes de $T = R - R^0$, renormalisées par un facteur $(1-\rho)$, se prolongent de manière lisse jusqu'au bord. Sous cette condition, l'auteur montre le résultat suivant.

Théorème ([Bla85, Théorème 2.6]). *Soit (M^{2n}, g, J) une variété kählérienne complète et non compacte, à courbure sectionnelle négative ou nulle ($n \geq 2$). Supposons que la condition $(\star)$ est vérifiée dans un système de coordonnées exponentielles modifiées. Alors M possède une compactification par une structure CR non dégénérée, lisse dans ces coordonnées. De plus, les fonctions CR du bord sont obtenues par restriction de fonctions holomorphes sur M , et réciproquement.*

Dans son second article [Bla89], l'auteur améliore ce dernier résultat. Premièrement, la condition de simple connexité est relaxée comme suit. L'auteur suppose que pour tout compact $\tilde{K}$, il existe un compact $K \supset \tilde{K}$, dont le bord est une hypersurface lisse ∂K . En tout point $p \in \partial K$, il suppose qu'existe un angle $\alpha_p > 0$, tel que tout le secteur géodésique de sommet p , et d'ouverture α_p autour de la normale extérieure à ∂K en p définisse des coordonnées exponentielles généralisées $(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1}) \in (0, 1) \times V$. On appellera cette condition (K). Cette dernière généralise sa construction de coordonnées depuis un pôle, et permet d'éviter la formation de bout de volume fini, tel les cusps [8]. Deuxièmement, l'auteur remplace la condition $(\star)$ en la condition $(\star')$ suivante :

$$\exists k > 0, \forall i, j \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad (1-\rho)T \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \in \mathcal{C}^k([0, 1] \times V). \quad (\star')$$

En d'autres termes, il suppose désormais que les composantes de $T = R - R^0$ dans les coordonnées exponentielles généralisées, et correctement renormalisées, se prolongent au bord de manière $\mathcal{C}^k$ pour un certain $k > 0$. J. BLAND montre alors le résultat suivant.

Théorème ([Bla89, théorème 1]). *Soit (M^{2n}, g, J) une variété kählérienne complète et non compacte ($n \geq 2$). Supposons que M vérifie la condition (K), et qu'il existe $k > 0$ tel que pour chaque secteur de cette condition, pour chaque choix de coordonnées exponentielles modifiées sur ce secteur, la condition $(\star')$ est vérifiée. Alors M possède une compactification par un bord CR strictement pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.*

[8] On notera que cette condition, bien que distincte, peut-être mise en parallèle avec l'existence de sous-ensembles essentiels supposée dans les articles de E. BAHUAUD, T. MARSH et R. GICQUAUD.

Ces deux résultats de J. BLAND fournissent donc une réponse partielle à la question 1. Toutefois, les hypothèses ne sont pas tellement géométriques, puisqu'elles s'énoncent dans un certain choix de coordonnées et présupposent une forte régularité du prolongement de $T = R - R^0$ au bord. Pour exprimer en termes purement géométriques les conditions $(\star)$ et $(\star')$, il est nécessaire de connaître *a priori*, même grossièrement, le comportement asymptotique des champs de vecteurs tangents aux coordonnées exponentielles généralisées. Ceci est aisé pour le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \rho}$: puisque l'on a $\frac{\partial}{\partial \rho} = e^r \frac{\partial}{\partial r}$, avec $\frac{\partial}{\partial r}$ unitaire, alors $\|\frac{\partial}{\partial \rho}\|_g = e^r$. Néanmoins, ce n'est plus du tout le cas pour les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$, $i \in \{1, \dots, 2n-1\}$. En lisant attentivement les articles de J. BLAND, on obtient les estimées *a posteriori* $\|\frac{\partial}{\partial \theta^i}\|_g = \mathcal{O}(e^r)$ [9], directement obtenues à partir des conditions $(\star)$ et $(\star')$. Aussi ne semble-t-il pas possible de traduire en termes géométriques (et sans coordonnées) les hypothèses de J. BLAND. Grâce aux estimées *a posteriori* de la croissance des champs de vecteurs tangents aux coordonnées exponentielles généralisées, on remarque néanmoins que les conditions $(\star)$ et $(\star')$ impliquent l'estimée *a posteriori* suivante sur le tenseur de courbure :

$$\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-3r}), \quad (8)$$

où r est la fonction distance à n'importe quel compact. Les estimées sur les coefficients de Christoffel obtenues par J. BLAND montrent que la même décroissance est impliquée pour les dérivées covariantes de la courbure, à tout ordre sous la condition $(\star)$, et jusqu'à l'ordre k sous la condition $(\star')$. Nous verrons par la suite, et ce sera l'objet du théorème D, que des résultats comparables à ceux de J. BLAND peuvent être obtenus à partir d'une décroissance bien moins rapide de la courbure.

Résultats obtenus dans cette thèse

Dans cette thèse, nous apportons une réponse aux questions 1 et 2. On considère une variété kählerienne complète et non compacte (M, g, J) , de dimension réelle supérieure ou égale à 4. Suivant [BM08, Bah08], on suppose qu'il existe un compact $K \subset M$ de codimension 0, totalement convexe, appelé *essential subset* par T. MARSH et E. BAHUAUD, dont le bord ∂K est une hypersurface lisse co-orientée par une normale extérieure, de sorte que l'application exponentielle normale associée induise un difféomorphisme $E: \mathbb{R}_+ \times \partial K \xrightarrow{\sim} M \setminus K$. L'hypothèse de totale convexité permet notamment d'éviter des comportements asymptotiques singuliers, comme la formation de *cusps*. D'après [BM08, théorème 1.1], le bord à l'infini de (M, g) est homéomorphe à ∂K , ce qui permet de le munir d'une structure différentiable. On note R^0 le tenseur de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 , qui est égal au tenseur de courbure de Riemann si $(M, g, J) = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$.

[9] En fait, ces estimées sont optimales, dans le sens où l'on montrera au chapitre III que les champs de vecteurs dont la croissance n'est pas exactement de l'ordre de $\mathcal{O}(e^r)$ sont tangents à une structure de contact. Puisque les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ sont tangents à des coordonnées, la moitié au moins de ceux-ci ne sont pas tangents à cette structure de contact, et par conséquent, leur croissance est exactement de cet ordre.

Théorème A. Soit (M, g, J) une variété kählérienne complète, non compacte, de dimension réelle supérieure ou égale à 4. Soit K un sous-ensemble essentiel et E son application exponentielle normale. Supposons que la courbure sectionnelle de $\overline{M \setminus K}$ est strictement négative. Si $\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$, où r est la fonction distance à K et $a > 1$ est une constante, alors

$$E^*g = dr \otimes dr + e^{2r}\eta \otimes \eta + e^r\gamma_H + h_r, \quad (9)$$

avec η une forme différentielle de degré 1 continue ne s'annulant pas sur ∂K , γ_H un champ continu de formes bilinéaires symétriques positives, définies positives sur $H = \ker \eta$, et où h_r est un terme correctif tel que

$$\|h_r\|_g \underset{r \rightarrow +\infty}{=} \begin{cases} \mathcal{O}(e^{(2-a)r}) & \text{si } 1 < a < \frac{3}{2}, \\ \mathcal{O}\left(re^{\frac{r}{2}}\right) & \text{si } a = \frac{3}{2}, \\ \mathcal{O}\left(e^{\frac{r}{2}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons un développement de la métrique au voisinage de l'infini ayant une ressemblance claire avec les métriques asymptotiquement hyperboliques complexes : η correspond à la forme de contact et γ_H correspond à la forme de Levi, que l'on appelle métrique de *Carnot-Carathéodory*. Néanmoins, rien n'assure que les objets η et γ_H ainsi construits soient issus d'une géométrie CR portée par le bord.

En supposant que la dérivée covariante de la courbure décroît exponentiellement vite vers 0, ce qui équivaut à posséder une géométrie à l'infini « presque » localement symétrique, on montre toutefois que η est une structure de contact.

Théorème B. Soit (M, g, J) une variété kählérienne complète et non compacte satisfaisant les hypothèses du théorème A. Supposons de plus qu'il existe $b > 1$ tel que $\|\nabla R\|_g = \mathcal{O}(e^{-br})$. Alors η est une forme de contact de classe $\mathcal{C}^1$.

En remarquant que le tenseur R^0 est parallèle, l'hypothèse sur la dérivée covariante de la courbure peut être lue comme une hypothèse sur la dérivée covariante de $R - R^0$. Dans le cas où les exposants a et b sont plus grands, on montre de plus que la forme γ_H gagne également en régularité.

Théorème C. Soit (M, g, J) une variété kählérienne complète et non compacte satisfaisant les hypothèses du théorème B. Supposons que $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$. Alors la métrique de *Carnot-Carathéodory* γ_H est de classe $\mathcal{C}^1$.

Afin de disposer d'une structure CR, il ne manque plus qu'à exhiber une structure presque complexe intégrable sur $H = \ker \eta$ faisant le lien entre la forme de contact η et la métrique de Carnot-Carathéodory γ_H . C'est chose faite grâce au théorème suivant.

Théorème D. *Soit (M, g, J) une variété kählérienne complète et non compacte satisfaisant les hypothèses du théorème C. Alors il existe une structure presque complexe J_H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H = \ker \eta$, intégrable, telle que $\gamma_H = d\eta(\cdot, J_H \cdot)$. En particulier, $(\partial K, H, J_H)$ est une variété CR strictement pseudoconvexe de classe $\mathcal{C}^1$.*

Puisque le bord à l'infini est identifié à ∂K , on dit que $(\partial K, H, J_H)$ est le bord à l'infini de (M, g, J) . Dans le cas particulier de la dimension réelle 4, l'intégrabilité de J_H est immédiate, puisque c'est une structure presque complexe vivant sur une distribution de dimension 2, et la preuve est considérablement réduite.

On peut résumer le théorème D de la manière suivante : une variété asymptotiquement localement hyperbolique complexe dont on contrôle la courbure à l'ordre 1 est en fait une variété asymptotiquement hyperbolique complexe.

Concluons avec le fait que la lecture de ces résultats mène naturellement à la question suivante.

Question 3. Quelle est la décroissance minimale de la courbure et de sa dérivée covariante assurant un contrôle asymptotique de la métrique kählérienne de la forme (9) ?

Discussion sur les résultats

L'hypothèse kählérienne

Les nombreuses métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques complexes construites par O. Biquard ne sont pas kählériennes. La caractéristique kählérienne est néanmoins crucial à plusieurs étapes de nos démonstrations :

- (1) La construction de la forme de contact η et de la métrique de Carnot-Carathéodory γ_H (théorème A) repose avant tout sur le fait que le champ de vecteurs $J\partial_r$ est radialement parallèle, où ∂_r est le champ de vecteur radial ;
- (2) Durant nos calculs, nous utilisons à de nombreuses reprises l'égalité $\nabla J = 0$;
- (3) La construction de la structure presque complexe à l'infini J_H repose sur l'existence d'un J -repère orthonormé radialement parallèle ;
- (4) L'hypothèse sur la dérivée covariante de la courbure est en fait une comparaison avec le tenseur de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 : ce dernier est parallèle dans une variété kählérienne. Ce n'est plus le cas dans une variété riemannienne munie d'une structure presque complexe.

En imposant seulement des conditions de décroissance sur $\|\nabla J\|_g$ et $\|\nabla(R - R^0)\|_g$, il semble possible de mimer notre étude au niveau des points (2) et (4). Cela ne semble toutefois pas suffisant pour contourner les difficultés liées aux points (1) et (3), ce qui nous mène naturellement à la question suivante, sans réponse à l'heure actuelle.

Question 4. Que peut-on dire des variétés riemanniennes presque complexes (M, g, J) , complètes et non compactes, dont la courbure sectionnelle des J -plans tend vers -1 au voisinage de l’infini ?

Décroissance exponentielle et exposants critiques

Les démonstrations de chacun des théorèmes présentés requièrent une compréhension fine de la croissance de certains champs de Jacobi le long de géodésiques partant à l’infini. Nous obtenons à la proposition III.3.11 des estimées précises portant sur ces champs de Jacobi : dans une direction, leur croissance est exactement nulle ou proportionnelle à e^r , et dans les directions orthogonales, elle est exactement nulle ou proportionnelle à $e^{\frac{r}{2}}$. Il est donc nécessaire d’imposer une décroissance exponentielle de la courbure (et de sa dérivée covariante) du type $\mathcal{O}(e^{-\omega r})$ afin d’assurer la convergence de certains termes de notre analyse. Notons que les métriques construites par O. Biquard, lorsqu’elles sont d’Einstein, satisfont aux hypothèses de nos théorèmes.

Les minoration des exposants a et b obtenues dans les résultats annoncés sont optimales en l’état : les techniques employées ne permettent pas de conclure dans les cas d’égalité. H. Boualem et M. Herzlich [Her98, BH02] ont montré que sous des conditions asymptotiques très fortes^[10], un phénomène de rigidité apparaît : une convergence trop rapide vers le modèle implique que la variété de base est en réalité isométriquement biholomorphe à l’espace hyperbolique complexe. Ce phénomène de rigidité apparaît lorsque la métrique est proche de la métrique hyperbolique complexe jusqu’à l’ordre $\mathcal{O}(e^{-\omega r})$ avec $\omega > m + \frac{1}{4}$, avec m la dimension complexe de la variété. Nos bornes inférieures sur les exposants a et b sont donc assez basses pour s’éloigner de ce phénomène de rigidité.

Classe de variétés ALCH

Le théorème D est à mettre en lien avec le résultat de [BGZ18], qui annonce qu’un domaine à bord $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ est strictement pseudoconvexe si, et seulement si, il possède une métrique kählerienne à courbure sectionnelle holomorphe pincée près du bord. Notre cas étend l’un des sens de cette dernière équivalence aux cas des variétés non plongées. Pour cette première raison, la classe des variétés à laquelle s’applique notre étude est non vide : elle contient tous les domaines bornés strictement pseudoconvexes des espace hermitiens. En fait, elle contient également des perturbations faibles de ces domaines, même lorsqu’ils ne sont plus plongeables.

Comparaison avec les résultats de J. Bland

Un développement asymptotique de la métrique similaire à celui du théorème A peut être obtenu à partir des résultats de J. Bland. En effet, un résultat similaire à celui que nous montrons à la proposition III.3.11 (qui est l’ingrédient clé pour prouver le

[10] Plus précisément, les auteurs supposent un biholomorphisme entre le complémentaire d’un compact et le complémentaire d’une boule dans $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$, une proximité asymptotique des deux structures presque complexes, et un contrôle de la courbure scalaire.

théorème A) est montré. Cependant, le développement asymptotique final de la métrique que nous obtenons au théorème D est beaucoup plus précis que celui que l'on peut obtenir à partir des travaux de J. BLAND, ces derniers ne faisant apparemment pas le lien entre le développement asymptotique de la métrique et la structure CR à l'infini. Par exemple, rien n'y est dit concernant la métrique de Carnot-Carathéodory et son lien avec la structure de contact et la structure presque complexe.

Les résultats de cette thèse diffèrent également de ceux de J. BLAND par plusieurs aspects, que nous développons maintenant. Tout d'abord, nos résultats sont obtenus à partir d'hypothèses purement géométriques, tandis que ceux de J. BLAND s'énoncent à partir de conditions qui ne le sont pas vraiment, comme nous l'avons détaillé plus haut. Les conditions $(\star)$ et $(\star')$ présupposent en outre une forte régularité du prolongement de $T = R - R^0$ dans des coordonnées déjà compactifiées, et ce dans toutes les directions. En particulier, son hypothèse n'est pas équivalente à une estimée asymptotique sur la convergence de la courbure et de ses dérivées covariantes. Ceci permet à J. BLAND de ne pas se soucier des détails hautement techniques induits par l'anisotropie de la métrique. Cette anisotropie se reflète dans la différence de croissance des champs de Jacobi le long des géodésiques partant à l'infini selon que la direction considérée est tangente ou non à la structure de contact. Nous verrons au chapitre III que le contrôle des dérivées dans les directions transverses n'est pas évident du tout. En outre, notons que les résultats de J. BLAND ne permettent d'obtenir, à partir d'un contrôle de la courbure à l'ordre 1, une structure à l'infini qui n'est que continue. Avec un contrôle au même ordre et plus faible, nous obtenons une structure à l'infini qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

Concluons enfin en mentionnant que O. Biquard et M. Herzlich ont montré que le développement asymptotique de la courbure d'une variété de Kähler-Einstein asymptotiquement hyperbolique complexe de dimension 4 comprend un terme d'ordre e^{-2r} , dont le coefficient est proportionnel au tenseur de Cartan de la structure CR à l'infini [BH05]. Ce tenseur s'annule exactement lorsque la structure CR est localement difféomorphe à la structure CR standard de la sphère : on dit alors que la structure CR est sphérique. Les hypothèses de J. BLAND imposent un développement asymptotique de la courbure de la forme $R = R^0 + \mathcal{O}(e^{-3r})$, qui ne comprend donc en particulier aucun terme proportionnel à e^{-2r} . Dans le cas Einstein, et en dimension réelle 4, les conditions $(\star)$ et $(\star')$ imposent donc *a posteriori* que la structure CR exhibée à l'infini est sphérique. Les résultats principaux de [Bla85, Bla89] ne concernent donc, dans ce cas particulier, qu'une classe restreinte de variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. Ce n'est pas le cas des résultats de cette thèse, puisque le contrôle de la courbure requis y est d'ordre inférieur à $\mathcal{O}(e^{-2r})$.

Plan de la thèse

Cette thèse est organisée comme suit. Nous proposons tout d'abord une introduction en langue anglaise. Le chapitre I qui suit est réservé à des rappels de géométrie (différentielle, riemannienne, kählérienne et CR) et on y fixe les notations qui seront utilisées tout au long du manuscrit. Dans le chapitre II, nous exposons la notion de bord

Introduction

à l'infini dans le cas des variétés de Hadamard puis nous la généralisons au cadre des variétés possédant un *sous-ensemble essentiel*. Nous y détaillons les résultats obtenus dans [BM08, Bah08, BG11], qui sont à la base de l'étude que nous mènerons dans le dernier chapitre. Le chapitre III est enfin consacré à l'étude des variétés asymptotiquement localement hyperboliques complexes. Nous y détaillons l'analyse asymptotique de la géométrie de ces variétés et donnons les démonstrations des théorèmes A, B, C et D. Des calculs utiles à ces démonstrations sont développés en appendice A.

English introduction

In this thesis, we investigate the asymptotic geometric properties of a class of complete and non-compact Kähler manifolds we call *asymptotically locally complex hyperbolic manifolds* (ALCH) ^[11]. The local geometry at infinity of such a manifold is modeled on that of the complex hyperbolic space, in the sense that its curvature is asymptotic to that of the model space. Under natural geometric assumptions, we show that this constraint on the curvature ensures the existence of a rich geometry at infinity: we can endow it with a strictly pseudoconvex CR boundary at infinity.

Two questions coming from distinct areas of mathematics underlie this study. The first one originates from the study of “asymptotically symmetric” manifolds. The second question is related to complex analysis and complex geometry, where the study of complex domains is connected to the geometric structure of its boundary.

Contents

Asymptotically symmetric manifolds	20
Non compact rank 1 symmetric spaces	20
Asymptotically symmetric manifolds	22
Are there intrinsic notions?	24
Complex domains with boundary	25
A geometric obstruction	25
Pseudoconvexity	26
Kähler metrics on complex domains	26
Non embedded Kähler manifolds	27
Already known results	27
Main results	29
Discussion of the results	31
Outline of the manuscript	33

[11] By *asymptotically locally symmetric* space, we will always mean a Riemannian manifold whose curvature is asymptotic to that of the corresponding symmetric space. The term *asymptotically symmetric* will be used only for a Riemannian manifold whose metric in a chart at infinity is asymptotic to that of the corresponding symmetric space.

Asymptotically symmetric manifolds

Non compact manifolds form a broad class of manifolds, whose topology and geometry can be very diverse.

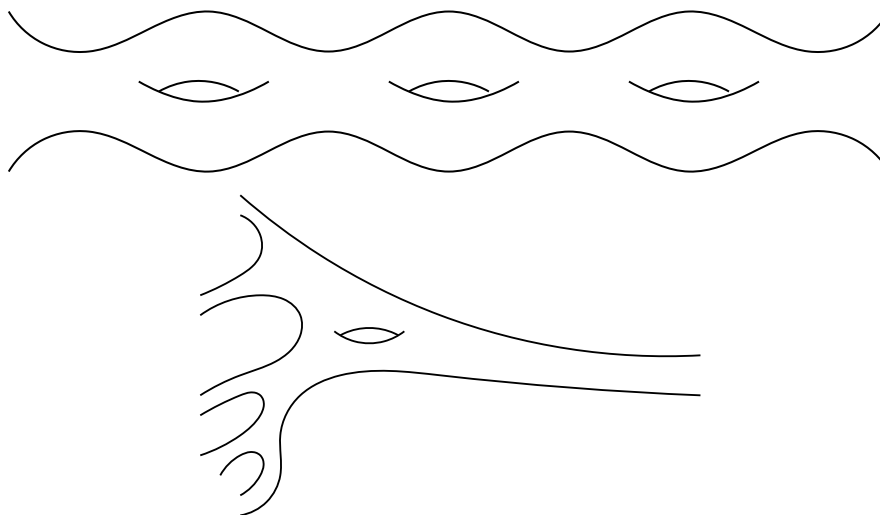


Figure 2: Two non-compact surfaces.

Trying to approach the subject with a general theory is not reasonable due to the extreme topological and geometrical complexity of these manifolds, especially since the numerous simple examples already prove to be complex.

Given a reference manifold whose geometry is known, a first approach is to study non-compact manifolds that are modeled on it. The underlying idea is that if we perturb slightly the metric of a space of which we know many properties, we can hope to know whether or not they are preserved. This also allows using geometric comparison techniques. Euclidean and more generally constant curvature spaces are obvious candidates for the model reference. Beyond these first examples, non-compact symmetric spaces form a particularly interesting class of models.

Non compact rank 1 symmetric spaces

A Riemannian manifold is *symmetric* if at any point there exists an isometric involution fixing this point, whose differential is the opposite of the identity map of the tangent space. These involutions generalize central symmetries in euclidean spaces. As a consequence of the existence of these maps, the Riemann curvature tensor of such a Riemannian manifold is parallel. A Riemannian manifold whose curvature tensor is parallel is referred to as a locally symmetric space. Surprisingly, the existence of these involutory symmetries has strong topological and geometrical consequences: a symmetric space can be described as a quotient of two Lie groups G/H , and is in particular a homogeneous

space. The local geometry of a symmetric space is totally encoded in the Lie algebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ of these Lie groups. This interaction between algebra and geometry is the key ingredient to the classification of Riemannian symmetric spaces, completed by Élie CARTAN in the 1920s [Car26, Car27].

The rank of a symmetric space can be defined in two equivalent ways. First, it is the dimension of a maximal abelian Lie subgroup of G which is diagonalizable over $\mathbb{R}$. It is also the maximal dimension of a totally geodesic flat submanifold, that is of a flat torus, a euclidean subspace or a product of such subspaces. These two definitions are related thanks to the exponential map. For our purpose, we focus on the non-compact rank 1 setting, that is non-compact symmetric spaces whose only totally geodesic submanifolds are geodesics. These spaces, also called *hyperbolic spaces*, are typical objects in Riemannian geometry: they are namely the real hyperbolic space $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n = \mathrm{SO}(1, n)/\mathrm{SO}(n)$ of real dimension n , the complex hyperbolic space $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$ of real dimension $2n$, the quaternionic hyperbolic space $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^n = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ of real dimension $4n$, and the Cayley hyperbolic plane $\mathbf{H}_{\mathbb{O}}^2 = \mathrm{F}_4^{-20}/\mathrm{Spin}(9)$ of real dimension 16. These spaces are non-positively curved, with $\frac{1}{4}$ -pinched sectional curvature. We will always normalize the sectional curvature to lie in $[-1, -\frac{1}{4}]$.

As Hadamard manifolds, hyperbolic spaces are diffeomorphic to a ball, and we can compactify them by endowing them with a *sphere at infinity*. An asymptotic development of the metric allows one to endow the sphere at infinity of a non-compact rank 1 symmetric space with a geometric structure inherited from the inner geometry.

Consider the real hyperbolic space $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$. In polar coordinates in an exponential chart, its metric reads

$$(\exp_o)^* g_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n} = dr \otimes dr + \sinh^2(r) \dot{g}. \quad (10)$$

where $\dot{g}$ is the round metric of the sphere. Geodesic spheres of radius r are then isometric to euclidean spheres of radius $\sinh(r)$. By normalizing their metrics with an accurate factor, we get a family of spheres converging to a metric belonging in the conformal class of the round metric. We say that $(\mathbb{S}^{n-1}, [\dot{g}])$ is the *conformal boundary* of $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$. It is worth noticing that the automorphisms groups of $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ and $(\mathbb{S}^{n-1}, [\dot{g}])$ are isomorphic.

The case of $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ is more intricate due to the metric being anisotropic. Consider $\mathbb{S}^{2n-1}$ the unit sphere of $\mathbb{C}^n$, and let $H = (T\mathbb{S}^{2n-1}) \cap (iT\mathbb{S}^{2n-1})$ be the maximal complex subdistribution of its tangent bundle. It is the standard contact structure of the odd dimensional sphere, calibrated by its standard contact form θ . Let J be the almost complex structure on H induced by the multiplication by i in the fibers. Finally, let $\gamma = d\theta|_{H \times H}(\cdot, J\cdot)$ be the associated Levi form, which is symmetric positive definite H . We say that γ is a Carnot-Carathéodory metric. Then in polar coordinates in an exponential chart based at a point $o \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$, the complex hyperbolic metric reads

$$(\exp_o)^* g_{\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n} = dr \otimes dr + 4 \sinh^2(r) \theta \otimes \theta + 4 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \gamma. \quad (11)$$

It is a complete Kähler metric with constant holomorphic sectional curvature equal to -1 . We recall that the holomorphic sectional curvature is the sectional curvature of complex lines, *i.e* tangent planes invariant by the almost complex structure. Totally real

Introduction

planes, which are tangent planes P that are orthogonal to JP , have constant sectional curvature $-\frac{1}{4}$. Geodesic spheres are no longer conformal to round spheres, but rather look like Berger spheres: the metric explodes in the direction of the fibers of the Hopf fibration.

The objects θ and γ are not invariant under a change of origin, but so are their conformal classes. The geometric structure induced on the sphere at infinity is thus that given by the data of H and J : the conformal boundary at infinity is in that case $(\mathbb{S}^{2n-1}, H, J)$. It is a strictly pseudoconvex CR manifold. It is again worth noticing that the isometry group of $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ is isomorphic to the group of CR automorphisms of its boundary.

The metrics of the remaining hyperbolic spaces are described similarly. The main difference is that the contact form takes values in $\mathbb{R}^3$ in the quaternionic setting, $\mathbb{R}^7$ in the octonionic case, with respective contact distribution of codimension 3 and 7. In any case, the isometry group of the inner space is in correspondence with the group of automorphisms of the geometric structure induced on the sphere at infinity.

Asymptotically symmetric manifolds

A first example of Riemannian manifolds with constrained asymptotic behavior is given by the class of *conformally compact manifolds*. These spaces have proved to be of importance in conformal geometry thanks to the work of R. GRAHAM and C. FEFERMAN [FG85]. Let (M, g) be a complete non-compact Riemannian manifold. Suppose M is the interior of a compact manifold $\overline{M}$ with boundary $\partial\overline{M}$, which we call the boundary at infinity of M . Assume there exists a *boundary defining function* $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$, that is such that $\rho^{-1}(\{0\}) = \partial\overline{M}$ and $d\rho$ does not vanish on the boundary. Then (M, g) is called *conformally compact of class $\mathcal{C}^{k,\alpha}$* , if $\rho^2 g$ extends as a metric $\overline{g}$ of class $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ on all of $\overline{M}$. In that case, the conformal class of $\overline{g}|_{\partial_\infty M}$ does not depend on the choice of a boundary defining function. We then call $(\partial_\infty M, [\overline{g}])$ the *conformal boundary* of (M, g) . This generalizes the construction of the conformal boundary of $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$, where the defining function can be defined as $\rho(x) = \frac{1-\|x\|^2}{2}$ in the ball model.

In a tubular neighborhood of infinity of the form $(0, \varepsilon) \times \partial_\infty M$, the metric of a conformally compact manifold reads

$$g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\rho \otimes d\rho + \overline{g}}{\rho^2} + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (12)$$

Setting $\rho = e^{-r}$, we have the equivalent form

$$g \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} dr \otimes dr + e^{2r} \overline{g} + o(e^{2r}). \quad (13)$$

When $\overline{g}$ is of class $\mathcal{C}^2$, $\|d\rho\|_{\overline{g}}$ restricted to the boundary is independent of the choice of the defining function. We then have the following sectional curvature estimate near the boundary

$$\sec_g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} -\|d\rho\|_{\overline{g}}^2 + \mathcal{O}(\rho) \quad (14)$$

If in addition, $\|\mathrm{d}\rho\|_{\bar{g}} \equiv 1$ on the boundary, then the sectional curvature of (M, g) approaches -1 near the boundary, and the local geometry near infinity is close to that of the hyperbolic space. We say that (M, g) is *asymptotically hyperbolic*.

The discovery of numerous asymptotically hyperbolic Einstein metrics, also called Poincaré-Einstein metrics, with prescribed conformal boundary, has motivated the subject for a long time. In [GL91], R. GRAHAM and J. LEE build Poincaré-Einstein metrics on the ball $\mathbb{B}^{n+1}$, with prescribed conformal boundary at infinity in a small neighborhood of the conformal class of the round sphere. In that case, Riemannian invariants of the metric furnish conformal invariants of the boundary for free.

Similar notions exist with other symmetric models at infinity. A Riemannian manifold (M, g) is called *asymptotically complex hyperbolic* if it is the interior of a compact manifold with CR boundary $(\partial_\infty M, H, J_H)$, such that in a tubular neighborhood of the boundary of the form $(0, \varepsilon) \times \partial_\infty M$, the metric g reads

$$g \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathrm{d}\rho \otimes \mathrm{d}\rho}{\rho^2} + \frac{\theta \otimes \theta}{\rho^2} + \frac{\gamma_H}{\rho} + o(1), \quad (15)$$

or, setting $\rho = e^{-r}$, reads as

$$g \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + e^{2r} \theta \otimes \theta + e^r \gamma_H + o(1). \quad (16)$$

Here, θ is a contact form calibrating the contact distribution H , which is compatible with J_H (that is $\mathrm{d}\theta(J_H \cdot, J_H \cdot) = \mathrm{d}\theta$), and such that the Levi form $\gamma_H = \mathrm{d}\theta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot)$ is a metric on H which we call the Carnot-Carathéodory metric. We call $(\partial_\infty M, H, J_H)$ the CR boundary at infinity of (M, g) [12].

Once again, only the conformal classes $[\theta]$ and $[\gamma_H]$ are geometrically invariant. Hence, we sometimes call the boundary at infinity a conformal boundary. Note that (16) is the exact complex analog of (13). Extending J_H by requiring $J\partial_r$ to be the Reeb vector field of θ , we get an almost complex manifold $(r_0, +\infty) \times \partial_\infty M$ whose curvature near infinity is close to that of $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Its local geometry at infinity is in particular asymptotic to that of the complex hyperbolic space.

Similar forms of the metric are required in the definition of asymptotically symmetric spaces modeled on $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^n$ and $\mathbf{H}_{\mathbb{O}}^2$, with a contact form taking values in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^7$ respectively.

In [Biq00], O. BIQUARD investigates the existence of asymptotically symmetric Einstein metrics with prescribed conformal infinity. The author shows that the ball $\mathbb{B}^{2n}$ can be endowed with such a metric with prescribed conformal infinity in a neighborhood of the standard CR structure of $\mathbb{S}^{2n-1}$. Moreover, such a metric is unique up to a diffeomorphism of the ball inducing the identity map on the sphere. Similar results are obtained in the quaternionic and octonionic cases. Let us note that an essentially similar result in the complex hyperbolic setting, yet unpublished, has been independently and simultaneously obtained by J. C. ROTH in his PhD thesis [Rot99].

[12] Some authors do not require for the almost complex structure to be integrable in this definition.

Asymptotically symmetric manifolds have drawn attention especially since the discovery of new Einstein metrics is a driving issue in Riemannian geometry. Physicists have also taken up the subject due to the so-called *AdS/CFT correspondence* ^[13] which supposes an exact correspondence between the Lorentzian geometry of a model space and the conformal geometry of its boundary (the “conformal fields”).

Are there intrinsic notions?

The definition of asymptotically symmetric spaces given above is extrinsic in the sense that it supposes the existence of a boundary at infinity already endowed with the suitable structure. An explicit form of the metric in a chart at infinity is also required.

It is natural to ask whether there are geometric conditions on a Riemannian manifold which ensure the existence of a boundary at infinity and a suitable development of the metric. By geometric conditions, we mean conditions on the curvature, the volume, *etc.* Many efforts have been made to define what it would be for a manifold to have a behavior similar to that of a hyperbolic space, with much success. One can mention for example the notion of hyperbolicity in the sense of Gromov, or the notion of CAT(0) and CAT(−1) spaces. These definitions are based on the comparison of geodesic triangles with those of model spaces, respectively a tree, the euclidean plane or the hyperbolic plane. They give synthetic notions of non-positive and uniformly negative curvature.

In the 1980s, M. ANDERSON and R. SCHOEN chose another approach to tackle the problem. In [And83, AS85], they show that a Hadamard manifold with negatively pinched curvature can be endowed with a notion of conformal boundary at infinity. This boundary, which is not attached to the original manifold, has low regularity: typically, if the curvature lies in $[-b^2, -a^2]$, with $0 < a \leq b$, then the boundary has regularity $\mathcal{C}^{\frac{a}{b}}$. It is identified with a space of harmonic functions that are solutions to the Dirichlet problem at infinity. This result is a first step towards a more general construction of boundary at infinity. The existence of such a boundary is proved under relatively undemanding curvature conditions. This result suggests that assumptions on the curvature is sufficient to recover information on the boundary at infinity. When only the curvature is asymptotic to that of a symmetric space, we will say that the underlying manifold is *asymptotically locally symmetric* to emphasize the difference with the asymptotically symmetric case, which is a strong assumption. Let us mention that other notions of boundary at infinity exist, such as the visual boundary or the Martin’s boundary.

The second result in this direction that uses geometric constructions is due to Y. SHI and G. TIAN [ST05]. It is a rigidity result, stating that if a complete metric on the ball has sectional curvature converging fast enough to -1 near the boundary, then it is isometric to the hyperbolic metric. In particular, it states that no Poincaré-Einstein metric on the ball but the hyperbolic metric induces the conformal class of the round sphere at infinity ^[14]. The sectional curvature and the volume are the geometric data that play an important role in the proof.

[13] For *anti-de Sitter* and *conformal field theory*.

[14] This result was already known before in a neighborhood of the hyperbolic metric, but the proof was much more analytical.

Later on, T. MARSH and E. BAHUAUD [BM08, Bah08] have extended M. ANDERSON and R. SCHOEN's result for manifold with topology. To that end, they require the following geometric conditions. They assume the existence of a convex “core” whose complement has negative sectional curvature. This convex core always exists in the Hadamard case: take for instance a sufficiently small geodesic ball. In the particular case where the sectional curvature decays exponentially fast towards -1 (these manifolds are named *asymptotically locally hyperbolic manifolds*), the author shows that there is a gain in regularity for the conformal boundary (typically $\mathcal{C}^{0,1}$), and the metric has a development near the boundary similar to (13). Next, E. BAHUAUD and R. GICQUAUD have improved this result, with a gain in regularity (typically $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, $\mathcal{C}^{1,1}$, *etc.*) by requiring estimates up to order two on the curvature tensor [BG11]. The techniques used are mainly classical ODE theory applied to a system of evolution equations on the metric and the second fundamental form of some equidistant hypersurfaces in Fermi coordinates. The Einstein case is also covered [BG11]. In this latter case, the proof relies on the elliptic regularity of Einstein metrics, using PDE techniques in harmonic coordinates [HH97], and allows one to remove the assumptions on the covariant derivatives of the curvature tensor. In fact, these assumptions can be removed in the general case, as it is shown in [Gic13]. Let us mention that similar studies have been addressed by X. HU, J. QING et Y. SHI [HQS12] [HQS12], where some questions about rigidity phenomenons are also covered. All these results give geometric characterizations of asymptotically hyperbolic manifolds.

In this thesis, we investigate the complex counterpart of the study initiated by T. MARSH, E. BAHUAUD and R. GICQUAUD. We therefore ask the following question.

Question 1. Can we geometrically characterize asymptotically complex hyperbolic manifolds?

In other words, we ask whether there exist geometric conditions on the volume, the curvature, *etc.* that ensure the existence of a boundary at infinity and of a suitable development of the metric near this boundary.

Before we give details of our main contributions to the subject, let us take a detour in the realm of complex geometry and analysis.

Complex domains with boundary

A geometric obstruction

The study of complex domains with boundary has its origin in an attempt of a generalization of the well-known conformal mapping Theorem. This Theorem states that any two non trivial simply connected open subsets of $\mathbb{C}$ are biholomorphic to each other. As a consequence, they are all biholomorphic to the unit disk.

In higher complex dimension, real hypersurfaces carry a geometric structure that does not appear in dimension 1. Let $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$ be such a hypersurface. Then $H = T\Sigma \cap (iT\Sigma)$ is an orientable distribution of hyperplanes, and the multiplication by i in the fibers

Introduction

endows it with an integrable almost complex structure. In other words, a real hypersurface of a complex manifold carries a CR structure, including boundaries of complex domains. Moreover, any biholomorphism between two such domains which extends to their boundaries induces a CR diffeomorphism: it then seems that the geometry of the boundary plays a role in the study of biholomorphisms.

In an attempt to generalize the conformal mapping Theorem in the complex dimension 2 [Poi07], Henri POINCARÉ finds an obstruction to the existence of a biholomorphism between two domains with $\mathcal{C}^2$ boundaries. This obstruction appears as a system of equations, called *tangential Cauchy-Riemann equations*. They are in fact of geometric nature: these equations are verified if and only if the induced CR structures are isomorphic. This latter result is true in all higher dimensions.

Pseudoconvexity

Several notions extend that of convexity for complex domains in complex analysis. One of them is the notion of *pseudoconvexity*, which relies on the existence of some particular *pluri-subharmonic functions*. If the boundary has at least $\mathcal{C}^2$ regularity, then this notion coincides with a geometric property of the CR structure, which we then call pseudoconvexity as well. A CR manifold (M, H, J) is said to be *pseudoconvex* if H is a contact distribution, and if there exists a calibrating contact form θ such that the Levi form $\gamma := d\theta|_{H \times H}(\cdot, J\cdot)$ is non-negative on H . It is moreover called *strictly pseudoconvex* if the Levi form is positive definite on H . We henceforth call a domain (strictly) pseudoconvex if its boundary is a (strictly) pseudoconvex CR manifold, ignoring the low regularity examples.

In [Fef74], C. FEFFERMAN shows that a biholomorphism between two strictly pseudoconvex domains with smooth boundaries always extends to the boundaries as a CR diffeomorphism. The converse is true [Boc43]: any CR diffeomorphism between the smooth boundaries of strictly pseudoconvex domains can be filled with a biholomorphism. We then have a correspondence between the complex geometry of strictly pseudoconvex domains and the CR geometry of their boundaries.

Kähler metrics on complex domains

The following idea has proven to be fruitful in the understanding of complex domains. By endowing such a domain with a complete Kähler metric (and hence sending the boundary to infinity), one can try to read information on the CR geometry of its boundary in some suitable development of the metric near infinity.

The Bergman metric, defined thanks to the eponymous kernel [KY96, Kra01], is such a metric. It is invariant under biholomorphisms and thus encodes much information on the complex geometry of the domain.

In [CY80], S.-Y. CHENG and S. YAU shows that given a strictly pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$ (in fact, in any Stein manifold), with $n \geq 2$, there exists a unique, up to homothety, Kähler metric that is also Einstein. We therefore call this metric the Kähler-Einstein metric, which has been at the heart of complex geometry for decades. In the case of

the unit ball, these two metrics both coincide with the complex hyperbolic metric. In the general setting, they are both asymptotically complex hyperbolic in the sense that they have a development near the boundary of the form (15). The holomorphic sectional curvature of these metrics goes to -1 near the boundary. Let us mention that these results stay true in lower regularity. In the $\mathcal{C}^2$ setting, the Bergman metric is still asymptotically complex hyperbolic, with holomorphic sectional curvature converging to -1 near the boundary [Kle78]. The same holds for the Kähler-Einstein metric in regularity $\mathcal{C}^k$, with k greater than a linear function of the dimension [CY80].

Since these metrics carry information on the complex geometry of the domain, one can reasonably argue that there is a link between the existence of some asymptotically complex hyperbolic metrics on the domain and the CR geometry of the boundary. More precisely, it is natural to ask whether a converse statement holds: let Ω be a complex domain with $\mathcal{C}^k$ boundary, with k arbitrary. Assume that there exists a complete Kähler metric whose holomorphic sectional curvature converges towards -1 near the boundary. Is Ω strictly pseudoconvex? A. ZIMMER gave a positive answer to this question in the smooth setting [Zim18], while J. FORNÆSS and E. FORNÆSS WOLD showed that this is no longer true in $\mathcal{C}^2$ regularity [FFW18]. Later on, F. BRACCI, H. GAUSSIER and A. ZIMMER have shown that in regularity $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $\alpha \in]0, 1[$, a domain is strictly pseudoconvex if and only if there exists a complete Kähler metric whose sectional curvature is pinched between $-1 - \varepsilon$ and $-1 + \varepsilon$ outside of a compact subset [BGZ18]. The constant $\varepsilon > 0$ is universal, only depending on α and on the dimension.

It then appears that there is a closed link between the existence of suitable Kähler metric and the strict pseudoconvexity of domains. This latter remark is one of the main motivations of this thesis.

Non embedded Kähler manifolds

The above cited results are about complex domains, which are embedded into hermitian spaces. In this thesis, we investigate the case of Kähler manifolds which are not embedded, and thus do not have a boundary. Hence, this naturally leads us to ask the following question.

Question 2. Let (M, g, J) be a complete Kähler manifold whose holomorphic sectional curvature goes to -1 near infinity with a sufficiently fast decay. Can we endow it with a notion of strictly pseudoconvex boundary at infinity?

Already known results

In the 80's, J. BLAND determined conditions under which complete non-compact Kähler manifolds can be embedded in some hermitian space $\mathbb{C}^N$ [Bla85, Bla89]. The point of view is analytical, and the strategy is to construct a sufficient number of bounded holomorphic functions. To do so, the author first builds a CR boundary in some compactified coordinate system, which has numerous CR functions. He then uses a filling procedure to extend these CR functions into bounded holomorphic maps on the Kähler manifold.

Introduction

In this section, we give details on the results from these two papers that are linked to the questions raised in this thesis. In what follows, R^0 denotes the constant -1 holomorphic sectional curvature tensor, $T = R - R^0$ is the difference between this tensor and the curvature of the Kähler manifold ^[15].

In [Bla85], J. BLAND focuses on the case of Hadamard manifolds. Let $p \in M$ be a pole, $S \subset T_p M$ the unit sphere of the tangent space at this pole. Let $V \subset S$ be an open subset on which are defined local coordinates $(\theta^1, \dots, \theta^{2n-1})$. If $r = d_g(\cdot, p)$ is the distance function from the pole p , then $(r, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1})$ define local coordinates on the angular sector defined by $\mathbb{R}_+^* \times V$ in M . Let $\rho = 1 - e^{-r}$, so that $(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1}) \in (0, 1) \times V$ define local coordinates, called *modified exponential coordinates*. The sphere at infinity is identified with the set $\{\rho = 1\}$. Define the $(\star)$ condition as follows :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad (1-\rho)T \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times V). \quad (\star)$$

In other words, condition $(\star)$ says that in the modified exponential coordinates, the components of the tensor $T = R - R^0$, normalized by a $(1-\rho)$ factor, are smooth up to the boundary. Under this condition, the author shows the following Theorem.

Theorem ([Bla85, Theorem 2.6]). *Let (M^{2n}, g, J) be a complete non-compact and simply-connected Kähler manifold with nonpositive sectional curvature ($n \geq 2$). Assume that condition $(\star)$ is satisfied in some modified exponential coordinates. Then M has a smooth CR compactification in these coordinates. Furthermore, CR maps on the boundary are obtained as restriction of bounded holomorphic functions on M , and conversely.*

In his second article [Bla89], J. BLAND improves this result by relaxing the assumptions. First, the Hadamard assumption is weakened in the following way. Suppose that for any compact subset $\tilde{K}$, there exists a bigger compact $K \supset \tilde{K}$ with smooth hypersurface boundary ∂K . Assume that at any point $p \in \partial K$, there exists some angle $\alpha_p > 0$, such that one can define modified exponential coordinates $(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{2n-1}) \in (0, 1) \times V$ on the geodesic sector composed of points lying on geodesics rays emanating from p and making an angle with the outward unit normal at p lesser than α_p . We call that condition (K). It prevents from the formation of finite volume ends, such as cusps ^[16]. Second, the $(\star)$ condition is replaced by the weaker $(\star')$ condition :

$$\exists k > 0, \forall i, j \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad (1-\rho)T \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \in \mathcal{C}^k([0, 1] \times V). \quad (\star')$$

[15] In [Bla85, Bla89], the curvature of the model space with whom the comparison is done is normalized to be -2 . This implies that the constant $\sqrt{2}$ appears in many computations. This is not the case in this thesis. With our normalization, any “ $e^{\sqrt{2}r}$ ” from J. BLAND’s papers becomes “ e^r ”, etc.

[16] Note that although it is different, this condition can be compared with the existence of essential subsets required by E. BAHUAUD, T. MARSH and R. GICQUAUD.

In other words, a suitable normalization of the tensor $T = R - R^0$ extends in modified exponential coordinates as a $\mathcal{C}^k$ tensor, $k > 0$, up to the boundary. Then the author shows the following result.

Theorem ([Bla89, Theorem 1]). *Let (M^{2n}, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold ($n \geq 2$). Assume that M satisfies the (K) condition, and furthermore, suppose that there exists some $k > 0$ such that condition $(\star')$ is satisfied in any geodesic sector defined by (K). Then M has a $\mathcal{C}^{k-1}$ CR compactification.*

These two results gives a partial answer to question 1. However, the assumptions are not really geometrical. First, they are expressed in a preferred coordinate system and assumed a strong regularity of the extension up to the coordinate boundary. To express this condition in geometric terms, one has to have *a priori* estimates on the growth of the vectors fields tangent to the coordinate system. This is easy to give one for the first basis vector $\frac{\partial}{\partial \rho}$, since one has $\frac{\partial}{\partial \rho} = e^r \frac{\partial}{\partial r}$ with $\frac{\partial}{\partial r}$ a unit vector field. This is not the case for the remaining basis vectors $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$, $i \in \{1, \dots, 2n-1\}$. Reading carefully the computations made by J. BLAND, one can derive from conditions $(\star)$ and $(\star')$ the *a posteriori* estimates $\|\frac{\partial}{\partial \theta^i}\|_g = \mathcal{O}(e^r)$ [17]. It seems thus impossible to express in a purely geometric manner the conditions $(\star)$ and $(\star')$. Nevertheless, it is possible to derive from these *a posteriori* estimates the following geometric estimate on the curvature:

$$\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-3r}), \quad (17)$$

where r is the distance function from any compact set. Similar estimates obtained by J. BLAND for Christoffel symbols show that a same decay rate is obtained for $\|\nabla^j R\|_g$, for any j if condition $(\star)$ is assumed, and up to order k if condition $(\star')$ is assumed. We will show, and this will be the purpose of Theorem D, that a result comparable to J. BLAND's Theorems can be obtained with a much lower decay on the curvature and its covariant derivative.

Main results

In this thesis, we give an answer to questions 1 and 2. Consider a complete non-compact Kähler manifold (M, g, J) of real dimension greater than or equal to 4. Following [BM08, Bah08], suppose there exists a compact codimension 0 submanifold $K \subset M$, which is totally convex, and has orientable smooth boundary. Assume furthermore that the sectional curvature of its complement is negative. Such a subset is called an *essential subset*. Then the normal exponential map emanating from its boundary ∂K , gives a

[17] These estimates are in some sense optimal, since we will see in chapter III that such a vector field has growth of order exactly $\mathcal{O}(e^r)$, unless it is tangent to the contact structure at infinity. The vector fields $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ being tangent to coordinates, at least half of them are not tangent to the contact structure, and consequently, have growth exactly of order $\mathcal{O}(e^r)$

diffeomorphism $\mathbb{R}_+ \times \partial K \xrightarrow{\sim} \overline{M \setminus K}$. Note that the existence of such a subset is of geometric nature. It rules out the formation of exotic asymptotic behavior like cusps. Then from [BM08, Theorem 1.1], the Gromov boundary of (M, g) is homeomorphic to ∂K , allowing us to endow the boundary at infinity with a differentiable structure. We denote by R^0 the constant -1 holomorphic sectional curvature tensor, which in the case of $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ is equal to the usual curvature tensor. Then we prove the following.

Theorem A. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold of real dimension greater than or equal to 4. Assume K is an essential subset, and let E be the normal exponential map emanating from ∂K . Let $r = d_g(\cdot, K)$. If $\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$, for some constant $a > 1$, then*

$$E^*g = dr \otimes dr + e^{2r}\eta \otimes \eta + e^r\gamma_H + h_r, \quad (18)$$

with η a continuous 1-form that does not vanish on ∂K , γ_H a continuous metric on $H = \ker \eta$, and with h_r satisfying

$$\|h_r\|_g \underset{r \rightarrow +\infty}{=} \begin{cases} \mathcal{O}(e^{(2-a)r}) & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2}, \\ \mathcal{O}\left(re^{\frac{r}{2}}\right) & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ \mathcal{O}\left(e^{\frac{r}{2}}\right) & \text{else.} \end{cases}$$

The asymptotic development obtained is similar to (15). Here, η corresponds to the contact form and γ_H to the Levi form. We henceforth call γ_H the Carnot-Carathéodory metric. At this point, there is no reason for these objects to come from a CR structure on the boundary at infinity ∂K .

If we further assume that the metric is asymptotically locally symmetric, we prove that η is indeed a contact form.

Theorem B. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem A. Assume furthermore that $\|\nabla R\|_g = \mathcal{O}(e^{-br})$ for some constant $b > 1$. Then η is a contact form of class $\mathcal{C}^1$.*

Since R^0 is parallel, the asymptotically symmetric assumption is in fact an order 1 estimate on $R - R^0$. In case a and b are greater, we show that the Carnot-Carathéodory metric gains in regularity.

Theorem C. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem B. Assume that $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$. Then the Carnot-Carathéodory metric γ_H is of class $\mathcal{C}^1$.*

In order to the metric to be asymptotic to a CR structure on the boundary, we now have to show the existence of an integrable almost complex structure on $H = \ker \eta$. This complex structure should also be the link between η and γ_H . This is the purpose of our last result.

Theorem D. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem C. Then there exists an integrable almost complex structure J_H of class $\mathcal{C}^1$ on $H = \ker \eta$, such that $\gamma_H = d\eta(\cdot, J_H \cdot)$. In particular, $(\partial K, H, J_H)$ is a strictly pseudoconvex CR manifold of class $\mathcal{C}^1$.*

We say that $(\partial K, H, J_H)$ is the CR boundary at infinity of (M, g, J) . In the specific case of dimension 4, the integrability of J_H is automatic, which considerably reduces the proof of Theorem D. This last result can be summarized in the following claim : an asymptotically locally complex hyperbolic manifold whose curvature is controlled at order 1 is in fact an asymptotically complex hyperbolic manifold with strictly pseudoconvex boundary.

Let us conclude with the fact that these results naturally lead to the following question.

Question 3. What are the minimal decay rates one has to impose on the curvature and its covariant derivative in order to have such an asymptotic control of the asymptotically locally complex hyperbolic metric?

Discussion of the results

The Kähler assumption

The numerous asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics built by O. BIQUARD are not Kähler. However, the Kähler assumption appears crucial at different levels of our study:

- (1) The existence of η and γ_H mainly relies on the fact that the vector field $J\partial_r$ is parallel in the radial direction, where ∂_r is the radial vector field,
- (2) The equality $\nabla J = 0$ is used dozens of times,
- (3) The construction of J_H relies on the existence of a radially parallel J -orthonormal frame,
- (4) The assumption $\nabla R \rightarrow 0$ is in fact an assumption on $\nabla(R - R^0)$.

Requiring that $\|\nabla J\|_g$ and $\|\nabla(R - R^0)\|_g$ goes sufficiently fast towards 0 seems to bypass the difficulties raised by (2) and (4). However, it is not sufficient to bypass those implied by (1) and (3). This naturally leads us to ask the following still unanswered question.

Question 4. Can we define a notion of CR boundary at infinity for Riemannian almost complex manifolds (M, g, J) whose tangent planes stabilized by J have sectional curvature converging towards -1 at infinity?

Exponential decays and critical exponents

The proofs of each of these Theorems rely on a sharp understanding of the growth of some naturally associated Jacobi fields. These estimates are obtained in Proposition III.3.11: the growth of these Jacobi fields is of order e^r in the direction of $\mathcal{J}\partial_r$, and of order $e^{\frac{r}{2}}$ in the orthogonal directions. Our estimates on $\|R - R^0\|_g$ and $\|\nabla R\|_g$ then need to have exponential decay in order for several quantities to converge. Let us mention that the Einstein metrics built by O. Biquard, when they are Kähler, satisfy the assumptions of our results.

The lower bounds on the exponents a and b seem to be optimal, at least for our techniques, which cannot produce conclusions in the limit cases. H. Boualem and M. Herzlich [Her98, BH02] have shown that under really strong conditions^[18], a rigidity phenomenon appears: a too fast decay rate in the estimates forces the original space to be biholomorphically isometric to the complex hyperbolic space. This rigidity phenomenon appears when the metric is close to that of the model one at order $\mathcal{O}(e^{-\omega r})$ with $\omega > m + \frac{1}{4}$, m being the complex dimension of the manifold. Our lower bounds are thus small enough to prevent this rigidity phenomenon from appearing.

ALCH manifolds

Theorem D has to be compared with the main result of [BGZ18], stating that a complex domain with $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ boundary is strictly pseudoconvex if and only if there exists a complete Kähler metric whose holomorphic sectional curvature is negatively pinched and close to -1 near the boundary. Our study extends this result in the case of general Kähler manifolds. For this reason, it applies to a non empty class of manifolds. It also applies to small perturbations of strictly pseudoconvex domains that are no more embeddable.

Comparison with J. Bland's results

An asymptotic expansion similar to that obtained in Theorem A can be obtained from J. Bland's results. However, our final development of the metric (Theorem D) is much more precise than what can be derived from J. Bland's work, in which no link between the asymptotics of the metric and the CR structure at infinity seems to be made. For example, no Carnot-Carathéodory metric is exhibited, nor its relation with the almost complex structure at infinity.

The contributions of this thesis also differ from J. Bland's work in many aspects that we detail now. First, our results are derived from purely geometric assumptions, while the required conditions in J. Bland's work cannot be expressed geometrically. In particular, the conditions $(\star)$ and $(\star')$ are not equivalent to any decay on the tensor $T = R - R^0$ and some of its covariant derivatives. This allows the author not to worry about the highly technical details induced by the anisotropy of the metric, which appear through a differentiated growth of the Jacobi fields according to the considered direction.

[18] Namely, the complement of a compact has to be diffeomorphic to the complement of a ball in $\mathbf{H}_\mathbb{C}^n$. One also has to assume a lower bound on the scalar curvature and an exponential decay of many objects.

We will see in chapter [III](#) that controlling the derivatives of the several geometric objects in the directions transverse to the radial one is really intricate. Moreover, let us remark that J. BLAND's results allow one to build a $\mathcal{C}^0$ CR structure at infinity from an order 1 control on the curvature, while ours build a $\mathcal{C}^1$ CR structure from less strict control at the same order.

To conclude, let us mention that O. BICQUARD and M. HERZLICH have shown in [[BH05](#)] that the curvature tensor of an asymptotically complex hyperbolic Einstein manifold, of real dimension 4, has a term of order e^{-2r} in its asymptotic expansion that is proportional to the Cartan tensor of the CR structure at infinity. The vanishing of this tensor characterizes spherical CR structures, that is, CR structures that are locally CR diffeomorphic to the standard structure of the sphere. Recall that the assumptions $(\star)$ and $(\star')$ imply a control of the curvature of the form $R = R^0 + \mathcal{O}(e^{-3r})$. Therefore, when specialized to the Einstein case and to the real dimension 4, these conditions imply that the CR structure at infinity is spherical. In the Einstein case and in real dimension 4, the main results of [[Bla85](#), [Bla89](#)] therefore only apply to a smaller class of Kähler manifolds than expected. But in contrast, the main results of this thesis apply to a more general framework since the control of the curvature is of order strictly less than $\mathcal{O}(e^{-2r})$.

Outline of the manuscript

This thesis is organized as follows. Chapter [I](#) is dedicated to the geometric background that is necessary to understand our study. We also fix therein most of our notations. In chapter [II](#), we give details on the construction of the conformal boundary in the real and complex hyperbolic cases using the curvature tensor as the only data. We also highlight the role of the shape operator. Chapter [III](#) is finally dedicated to the proof of Theorems [A](#), [B](#), [C](#) and [D](#). Useful calculations can be found in Appendix [A](#).

Préliminaires géométriques

Dans ce chapitre introductif, nous listons les différents résultats de géométrie qui seront utiles à la lecture de cette thèse. Sauf mention explicite du contraire, tous les objets considérés sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Sommaire

I.1	Géométrie différentielle	36
I.1.1	Notations et conventions	36
I.1.2	Orientabilité, forme volume	36
I.1.3	Distribution tangente, structure de contact	36
I.1.4	Variétés à bord	38
I.2	Géométrie riemannienne	38
I.2.1	Métrique riemannienne et connexion de Levi-Civita	38
I.2.2	Géodésiques	40
I.2.3	Application exponentielle	40
I.2.4	Courbure	41
I.2.5	Champs de Jacobi	43
I.2.6	Géométrie extrinsèque des hypersurfaces	44
I.2.7	Convexité	46
I.3	Géométrie kählérienne	46
I.3.1	Structure presque complexe	46
I.3.2	Variétés complexes	47
I.3.3	Métrique kählérienne	48
I.3.4	Courbure sectionnelle holomorphe	49
I.4	Géométrie CR	51
I.4.1	Variétés CR	51
I.4.2	Domaines complexes	52

I.1 Géométrie différentielle

On rappelle les notions de géométrie différentielle qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Pour une introduction détaillée du sujet, on pourra consulter les références [KN96a, Lee12], ainsi que les chapitres introductifs de [dC92, GHL04].

I.1.1 Notations et conventions

Soit M une variété différentielle. On note TM son fibré tangent, T^*M son fibré cotangent. Si E est un fibré vectoriel au-dessus de M , on notera $\Gamma(E)$ le $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module des sections de E . L'espace des champs de vecteurs sur M est quant à lui noté $\mathfrak{X}(M)$.

Nous adoptons la convention suivante^[1] : si α est une forme différentielle de degré 1, et si X et Y sont deux champs de vecteurs, alors la différentielle extérieure $d\alpha$ est donnée par

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad (\text{I.1.1})$$

Lorsque f est une application lisse entre variétés, on note parfois f_* sa différentielle. On note f^* le *tiré en arrière* (*pull-back*) par f^* . On rappelle si f est un difféomorphisme et si X et Y sont deux champs de vecteurs, alors on a $f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]$: on parle de *naturalité* du crochet de Lie. De la même manière, pour toute forme différentielle α , on a $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$.

I.1.2 Orientabilité, forme volume

Le fibré $\Lambda^n M$ des formes différentielles de degré maximal $n = \dim M$ est un fibré en droites, qui est trivial si, et seulement si, il possède une section qui ne s'annule pas. Dans ce cas, on dit que M est *orientable*, et l'on appelle *forme volume* toute forme différentielle de degré maximal qui ne s'annule pas. Deux formes volumes sont multiples l'une de l'autre par une fonction lisse ne s'annulant pas. Une orientation de M est le choix d'une classe de formes volumes modulo la multiplication par une fonction lisse à valeurs strictement positives. Une variété orientable connexe possède donc deux choix d'orientation. Étant donnée une orientation induite par une forme volume ω , une base $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace tangent $T_p M$ est dite *positivement orientée* si $\omega_p(e_1, \dots, e_n) > 0$.

Exemple I.1.1. Soit la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. La forme différentielle ω définie par

$$\forall p \in \mathbb{S}^{n-1}, \forall v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p \mathbb{S}^{n-1}, \quad \omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1}) \quad (\text{I.1.2})$$

est une forme volume, et la sphère est alors orientable.

I.1.3 Distribution tangente, structure de contact

Une *distribution tangente* $\mathcal{D}$ sur M , ou simplement *distribution*, est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent TM . Le rang de $\mathcal{D}$ est la dimension des fibres. Une distribution

[1] On trouve parfois un facteur $\frac{1}{2}$ dans la littérature, notamment celle traitant des variétés *almost contact metric* [Sas60, SH61].

$\mathcal{D}$ est dite *involutive* lorsque l'espace des champs de vecteurs partout tangents à $\mathcal{D}$ est stable par le crochet de Lie. Une sous variété connexe immergée $\iota: N \rightarrow M$ est appelée *sous-variété intégrale* de la distribution $\mathcal{D}$ si pour tout $q \in N$, $d\iota(q)T_q N = \mathcal{D}_{\iota(q)}$. La distribution $\mathcal{D}$ est dite *complètement intégrable* si en tout point passe une sous-variété intégrale. Le théorème suivant fait le lien entre ces définitions.

Théorème I.1.2 (FROBENIUS). *Une distribution est involutive si et seulement si elle est complètement intégrable.*

Une distribution complètement intégrable induit un *feuilletage régulier*, c'est à dire que les sous-variétés intégrales maximales au sens de l'inclusion forment une partition de M en sous-variétés immergées de même dimension.

Remarque I.1.3. Soit H une distribution d'hyperplans complètement intégrables. Localement, on peut écrire $H = \ker \alpha$, avec α une 1-forme qui ne s'annule pas. Soient X et Y deux champs de vecteurs tangents à H . Puisque H est totalement intégrable, le théorème de Frobenius assure que $[X, Y]$ est tangent à H . D'après l'équation (I.1.1), on a

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0, \quad (\text{I.1.3})$$

et la forme différentielle de degré 2 $d\alpha$ s'annule sur H .

Une *structure de contact* $H \subset TM$ est une distribution d'hyperplans qui est localement le noyau d'une *forme de contact* α , c'est-à-dire telle que $d\alpha|_{H \times H}$ est non dégénérée. D'après la remarque I.1.3, une distribution de contact est à l'opposé d'être complètement intégrable : on dit qu'elle est *complètement non-intégrable*, et la variété (M, H) est une *variété de contact*. Puisque $d\alpha|_{H \times H}$ est une 2-forme non dégénérée, H est nécessairement de dimension paire. Il vient que M est de dimension impaire : écrivons $\dim M = 2n + 1$. Lorsque M est orientable, il existe une 1-forme de contact globale $\alpha \in \Omega^1(M)$ telle que $H = \ker \alpha$ et l'on dit que H est *calibrée* par α . Dans ce cas, $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume. Deux formes de contact calibrant la même structure de contact sont multiples l'une de l'autre par une fonction lisse ne s'annulant pas. Par abus de langage, on dit parfois que (M, α) est une variété de contact. Pour toute forme de contact α calibrant H , il existe un unique champ de vecteurs X_α tel que $\alpha(X_\alpha) = 1$ et $d\alpha(X_\alpha, \cdot) = 0$. On l'appelle champ de Reeb.

L'exemple suivant est fondamental. Dans $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, considérons la forme différentielle $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x^j dy^j - y^j dx^j$, où les coordonnées sont données par $z^j = x^j + iy^j$. Alors $d\alpha = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j$. Soit $\iota: \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'inclusion de la sphère unité, et $\theta = \iota^* \alpha$ la 1-forme induite par α sur la sphère. Alors $\theta \wedge d\theta^{n-1} = \frac{1}{2}\omega$, où ω est la forme volume introduite à l'exemple I.1.1, et θ est une forme de contact. Son champ de Reeb est donné, en coordonnées complexes ambiantes, par $X_\theta(z) = 2iz$.

Définition I.1.4. On appelle θ la forme de contact standard de la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$, et $H = \ker \theta$ sa structure de contact standard.

I.1.4 Variétés à bord

Soit M une variété différentielle à bord, dont on note ∂M le bord. Soit $p \in \partial M$. Un vecteur $v \in T_p M \setminus T_p \partial M$ *pointe vers l'intérieur* s'il existe une courbe $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ et $\gamma(t) \notin \partial M$ si $t > 0$. Il *pointe vers l'extérieur* si $-v$ pointe vers l'intérieur. On a donc une partition de l'espace tangent $T_p M = T_p \partial M \cup T_p M^{\text{in}} \cup T_p M^{\text{out}}$, où $T_p M^{\text{in}}$ est l'ensemble des vecteurs tangents pointant vers l'intérieur, et $T_p M^{\text{out}}$ l'ensemble des vecteurs tangents pointant vers l'extérieur. Si M est orientable, alors ∂M est orientable, et le choix d'une orientation de M induit une orientation de son bord de la manière suivante. Soit ω une forme volume sur M définissant son orientation. Soient $p \in \partial M$ et v un vecteur tangent en p pointant vers l'extérieur. Une base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de $T_p \partial M$ est dite positivement orientée si $\omega_p(v, v_1, \dots, v_{n-1}) > 0$.

Exemple I.1.5. La sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est le bord de la boule unité centrée en l'origine $\mathbb{B}^n$. Si $\mathbb{B}^n$ est orientée par la forme volume $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, alors l'orientation induite sur $\partial \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ coïncide avec celle définie par la forme volume de l'exemple I.1.1.

I.2 Géométrie riemannienne

On rappelle les définitions de géométrie riemannienne nécessaires à la compréhension de cette thèse. Pour une introduction détaillée du sujet, on pourra consulter les références [dC92, GHL04, Pet06, Bes07, Lee19]. Tout au long de cette section, M désigne une variété différentielle fixée, de dimension n .

I.2.1 Métrique riemannienne et connexion de Levi-Civita

Une *métrique riemannienne* g est une section du fibré $S^2 T^* M$ des tenseurs de type $(0, 2)$ symétriques sur M . En tout point $p \in M$, g définit un produit scalaire g_p sur $T_p M$. On dit que (M, g) est une *variété riemannienne*.

On note $\|\cdot\|_g$ la norme induite sur les tenseurs. Par exemple, si $p \in M$, $v \in T_p M$, $\alpha \in T_p M^*$ et $A \in \text{End}(T_p M)$, alors

$$\|v\|_g = \sqrt{g_p(v, v)}, \quad \|\alpha\|_g = \sup_{v \in T_p M \setminus \{0\}} \frac{|\alpha(v)|}{\|v\|_g}, \quad \|A\|_g = \sup_{v \in T_p M \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_g}{\|v\|_g}. \quad (\text{I.2.1})$$

La longueur d'un chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ est donc

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt. \quad (\text{I.2.2})$$

Elle ne dépend pas du paramétrage. Si M est connexe, alors on définit

$$d_g(p, q) = \inf_{\gamma} \text{long}(\gamma), \quad (\text{I.2.3})$$

où γ parcourt l'ensemble des chemins lisses reliant p à q . On vérifie aisément que d_g est une distance sur M , appelée *distance induite* par la métrique riemannienne g .

Si $N \subset M$ est une sous-variété de la variété riemannienne (M, g) , alors elle dispose d'une métrique riemannienne induite $g|_N$, définie par restriction de g au fibré tangent de N .

La *connexion de Levi-Civita* sur M est l'unique application bilinéaire $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ telle que pour tous champs de vecteurs X, Y et Z et toute fonction lisse f ,

- (1) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$ et $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY$,
- (2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$,
- (3) $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$.

La connexion de Levi-Civita est explicitement déterminée par la formule de Koszul

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad 2g(\nabla_XY, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). \quad (\text{I.2.4})$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, on étend l'action de ∇_X à l'algèbre tensorielle de M par la règle de Leibniz :

- Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors $\nabla_X f$ est la fonction lisse $\nabla_X f = Xf$,
- Si $\alpha \in \Omega^1(M)$, alors $\nabla_X \alpha$ est la forme différentielle de degré 1 définie par la relation $(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$,
- Si T et T' sont deux tenseurs, alors $\nabla_X(T \otimes T') = (\nabla_X T) \otimes T' + T \otimes (\nabla_X T')$.

Si $T \in \Gamma(T^{k,l}M)$, la *dérivée covariante* de T , notée ∇T , est le tenseur de type $(k, l+1)$ défini par la relation $\nabla T(X; X_1, \dots, X_l) = (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_l)$. Un champ de tenseurs T tels que $\nabla T = 0$ est appelé *parallèle*.

Soit $\gamma: I \rightarrow M$ un chemin. Un champ de tenseurs de type (k, l) le long de γ est une section du fibré $\gamma^*(T^{k,l}M)$, c'est à dire une application lisse $T: I \rightarrow T^{k,l}M$ telle que pour tout $t \in I$, $T(t) \in T_{\gamma(t)}^{k,l}M$. On dit que c'est la restriction d'un champ de tenseurs sur M s'il existe un champ de tenseurs $\bar{T}$ sur M tel que pour tout $t \in I$, $T(t) = \tilde{T}_{\gamma(t)}$. Un champ de tenseur le long de γ n'est pas toujours obtenu de la sorte : néanmoins, c'est toujours le cas localement.

Grâce à cette dernière propriété, on définit la *dérivée covariante le long de γ* comme étant la dérivation $\nabla_{\gamma'}$ de l'algèbre des champs de tenseurs le long de γ tels que si T est la restriction de $\tilde{T}$ le long de γ , alors pour tout $t \in I$, $(\nabla_{\gamma'} T)(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \tilde{T}^{[2]}$. On a alors l'égalité, pour tous champs de vecteurs X et Y le long de γ

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g(\nabla_{\gamma'} X, Y) + g(X, \nabla_{\gamma'} Y). \quad (\text{I.2.5})$$

Un champ de tenseurs T le long de γ est dit *parallèle le long de γ* si $\nabla_{\gamma'} T = 0$. Étant donné $t_0 \in I$ et $T_0 \in T_{\gamma(t_0)}^{k,l}M$, il existe un unique champ de tenseurs T le long de γ qui

[2] On trouve dans la littérature les notations ∇_t et $\frac{\nabla}{dt}$. Dans cette thèse, la majorité des tenseurs le long des chemins étant obtenus comme restriction de champs de tenseurs ambiants, et nous ne distinguons pas les notations.

I. Préliminaires géométriques

soit parallèle et qui coïncide avec T_0 en t_0 : on l'appelle le *transport parallèle* de T_0 le long de γ .

Si M est orientée, la *forme volume riemannienne* est l'unique forme volume v_g valant 1 sur toute base orthonormée directe. On peut toujours écrire

$$v_g = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n, \quad (\text{I.2.6})$$

où $\theta^i = g(\cdot, X_i)$, et $\{X_1, \dots, X_n\}$ est un repère orthonormé direct local.

I.2.2 Géodésiques

Une *géodésique* est une courbe paramétrée $\gamma: I \rightarrow M$ dont le vecteur tangent γ' est parallèle le long de γ . Autrement dit, c'est une courbe paramétrée γ vérifiant l'*équation des géodésiques*

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0. \quad (\text{I.2.7})$$

En dérivant la fonction $\|\gamma'\|_g^2$, on remarque qu'une géodésique est nécessairement paramétrée à vitesse constante.

L'équation des géodésiques définit localement une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Ainsi, étant donnés $(p, v) \in TM$, il existe une unique solution maximale à l'équation des géodésiques satisfaisant $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. On la note $\gamma_{p,v}$.

Soit γ une géodésique paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire telle que $\|\gamma'\|_g = 1$. Alors localement, on a $d_g(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$, c'est-à-dire que γ réalise le plus court chemin de $\gamma(t)$ à $\gamma(s)$: on dit que les géodésiques sont localement minimisantes. Un *segment géodésique* $[p, q]$ est une géodésique définie sur un segment $[a, b]$ telle que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, et qui minimise la distance entre chacun de ses points. Un *rayon géodésique* est une géodésique $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ telle que pour tous $t, s \in \mathbb{R}_+$, $d_g(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$.

I.2.3 Application exponentielle

Pour $(p, v) \in TM$, soit $I_{p,v}$ l'intervalle maximal sur lequel est définie $\gamma_{p,v}$. Soit $U_p = \{v \in T_p M \mid 1 \in I_{p,v}\}$. C'est un ouvert non vide de $T_p M$, étoilé par rapport à 0. L'application exponentielle au point p est l'application lisse

$$\exp_p: \begin{cases} U_p & \longrightarrow & M \\ v & \longmapsto & \gamma_{p,v}(1) \end{cases} \quad (\text{I.2.8})$$

En identifiant canoniquement $T_0 U_p$ avec $T_p M$, on a $d\exp_p(0) = \text{Id}_{T_p M}$. Le théorème d'inversion locale assure que $\exp_p$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0. L'application exponentielle fournit alors une carte centrée en p , uniquement déterminée par la structure riemannienne de (M, g) .

Soit $\varepsilon > 0$ un réel assez petit de sorte que l'application exponentielle $\exp_p$ soit un difféomorphisme de la boule $B_\varepsilon(0) \subset T_p M$ sur son image. Alors la métrique g induit sur $B_\varepsilon(0)$ la métrique riemannienne $\exp_p^* g$, telle que si $u \in B_\varepsilon(0)$ et si $v, w \in T_u B_\varepsilon(0) \simeq T_p M$,

$$(\exp_p^* g)_u(v, w) = g_{\exp_p(u)}(d\exp_p(u)v, d\exp_p(u)w). \quad (\text{I.2.9})$$

Théorème I.2.1 (Lemme de Gauss). *L'application exponentielle est une isométrie radiale sur $B_\varepsilon(0)$, c'est-à-dire que*

$$\forall u \in B_\varepsilon(0), \forall v \in T_p M, \quad (\exp_p^* g)_u(u, v) = g_p(u, v). \quad (\text{I.2.10})$$

Soit $\phi: (0, \varepsilon) \times \mathbb{S} \rightarrow B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ le difféomorphisme défini par $\phi(r, u) = ru$. Alors $\exp_p \circ \phi: (0, \varepsilon) \times \mathbb{S} \rightarrow M$ est un difféomorphisme sur son image. On dit que (r, u) sont des *coordonnées polaires* au voisinage de p .

Corollaire I.2.2. *Il existe une famille lisse $(g_r)_{r \in (0, \varepsilon)}$ de métriques riemanniennes sur la sphère $\mathbb{S}$ telle que, en coordonnées polaires au voisinage de p , on a*

$$\exp_p^* g = dr^2 + g_r. \quad (\text{I.2.11})$$

Les coordonnées polaires fournissent donc une « bonne carte » lorsque la géométrie des sphères géodésiques est bien comprise.

Exemple I.2.3. En coordonnées polaires, la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de la forme $g_{\text{eucl}} = dr^2 + r^2 \mathring{g}$, où $\mathring{g} = g_{\text{eucl}}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est la métrique induite sur la sphère unité, appelée *métrique ronde*.

I.2.4 Courbure

Le concept central de la géométrie riemannienne est celui de *courbure*, trouvant son origine dans la remarque suivante. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on montre facilement que $\nabla^2 f$ est un champ de tenseurs de type $(0, 2)$, symétrique. En d'autres termes, pour deux champs de vecteurs X et Y , on a $\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_{Y,X}^2 f$, où

$$\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_X(\nabla_Y f) - (\nabla_X Y)f. \quad (\text{I.2.12})$$

Cependant, si T est un champ de tenseurs quelconque, le tenseur $\nabla^2 T$ n'est plus symétrique. La *courbure* mesure le défaut de commutation des dérivées covariantes.

Définition I.2.4. Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Le *tenseur de courbure de Riemann* R est le champ de tenseurs de type $(1, 3)$ défini par

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z)). \quad (\text{I.2.13})$$

Par abus de notation, on note toujours R le champ de tenseur de type $(0, 4)$ défini par

$$\forall X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M), \quad R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T). \quad (\text{I.2.14})$$

Dans cette thèse, nous adoptons la notation dite « de Besse » [Bes07, GHL04]. La convention de signe opposée est aussi fréquente [dC92, Lee19] [3]. Peu importe la convention, le tenseur de Riemann possède les symétries suivantes.

[3] Il y a un quasi-consensus dans la littérature anglo-saxonne sur cette convention concernant le tenseur de courbure de type $(1, 3)$.

I. Préliminaires géométriques

Proposition I.2.5. *Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, T et W , on a :*

- (1) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$,
- (2) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$,
- (3) $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W) = 0$.

La condition (2) s'appelle *identité de Bianchi (algébrique)*, et la condition (3) *identité de Bianchi différentielle*. Elles sont en fait valables pour toute permutation circulaire de trois variables. Elles sont des conséquences de l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie. On dit d'un champ de tenseurs de type $(0, 4)$ vérifiant les symétries (1) et (2) que c'est un *tenseur de courbure*.

Définition I.2.6. Soit $P = \text{vect}\{u, v\} \subset TM$ un plan tangent. La *courbure sectionnelle* de P est donnée par

$$\text{sec}(P) = \frac{R(u, v, u, v)}{\|u\|^2\|v\|^2 - g(u, v)^2}. \quad (\text{I.2.15})$$

Remarque I.2.7. On notera parfois $\text{sec}(u, v)$ la courbure sectionnelle du plan $\text{vect}\{u, v\}$. Lorsque $\{u, v\}$ sont orthonormés, alors $\text{sec}(u, v) = R(u, v, u, v)$.

La courbure sectionnelle contient beaucoup d'information sur la géométrie locale : par exemple, la forme des triangles géodésiques est déterminée par la courbure.

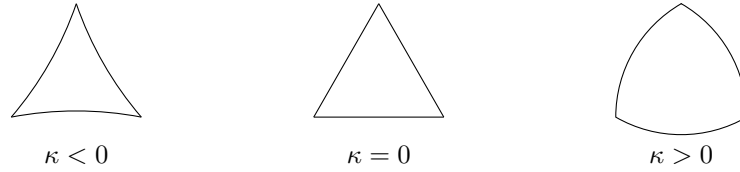


FIGURE I.1: Forme des petits triangles en fonction du signe de la courbure.

En fait, elle contient bien plus d'information géométrique, comme le montre le théorème suivant.

Théorème I.2.8. *La courbure sectionnelle détermine complètement le tenseur de courbure de Riemann.*

Démonstration. La condition (1) de la proposition I.2.5 implique qu'en un point $p \in M$, R_p induit une forme bilinéaire symétrique b_p sur $\Lambda^2 T_p M$, définie par

$$\forall u, v, w, t \in T_p M, \quad b_p(u \wedge v, w \wedge t) = R_p(u, v, w, t). \quad (\text{I.2.16})$$

De plus, R_p est uniquement déterminé par b_p . Par polarisation, b_p est caractérisée par la forme quadratique associée, et donc par la courbure sectionnelle. $\square$

Corollaire I.2.9. *Si la courbure sectionnelle de (M, g) est constante égale à $\kappa \in \mathbb{R}$, alors*

$$\forall X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M), \quad R(X, Y, Z, T) = \kappa(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z)). \quad (\text{I.2.17})$$

Exemple I.2.10. Soit $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité et $g_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n}$ la métrique riemannienne définie par

$$g_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{j=1}^n dx^j \otimes dx^j, \quad (\text{I.2.18})$$

où $|x|$ est la distance euclidienne à l'origine. Alors $(\mathbb{B}^n, g_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n})$ est une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à -1 . On l'appelle *espace hyperbolique réel*.

I.2.5 Champs de Jacobi

Soit $\gamma: I \rightarrow M$ une géodésique. Le tenseur le long de γ induit par la courbure, noté $R_{\gamma'}$, est défini par la relation $R_{\gamma'} = R(\gamma', \cdot)\gamma'$. Il vérifie que pour tout champ de vecteurs X le long de γ , $g(R_{\gamma'}X, X) = \|X\|_g^2 \sec(\gamma', X)$.

Définition I.2.11. Un *champ de Jacobi* le long de γ est un champ de vecteurs Y le long de γ solution de l'équation des champs de Jacobi

$$\nabla_{\gamma'}(\nabla_{\gamma'}Y) + R_{\gamma'}Y = 0. \quad (\text{I.2.19})$$

Un champ de Jacobi est uniquement déterminé par les conditions initiales $Y(t_0)$ et $\nabla_{\gamma'}Y(t_0)$ pour $t_0 \in I$ fixé. La proposition suivante permet de caractériser les champs de Jacobi en tant que *variation géodésique*.

Proposition I.2.12. *Soit $\gamma_0: I \rightarrow M$ une géodésique, et Y un champ de vecteurs le long de γ_0 . Alors Y est un champ de Jacobi si et seulement si il existe une famille lisse $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ telle que :*

- (1) *pour tout $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(s, \cdot): t \in I \mapsto \gamma(s, t)$ est une géodésique, et $\gamma(0, \cdot) = \gamma_0$,*
- (2) *pour tout $t \in I$, $Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \gamma(s, t)$.*

Corollaire I.2.13. *Soit $(p, v) \in TM$ et γ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Soit $w \in T_pM$. Alors le champ de vecteurs $Y(t) = \text{dexp}_p(tv)tw$ est un champ de Jacobi le long de γ , de conditions initiales $Y(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'}Y(0) = w$.*

Les champs de Jacobi semblables à celui défini au corollaire I.2.13 permettent de calculer la différentielle du difféomorphisme induit par les coordonnées polaires en un point. En effet, soit

$$f: \begin{array}{ccc} (0, \varepsilon) \times \mathbb{S} & \longrightarrow & M \\ (r, u) & \longmapsto & \exp_p(ru), \end{array} \quad (\text{I.2.20})$$

où $\varepsilon > 0$ est assez petit, de sorte que f soit un difféomorphisme sur son image. Soit $(r, u) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}$, et $v \in T_u\mathbb{S}$. Alors $df(r, u)v = \text{dexp}_p(ru)rv$ est égal à $Y(r)$, où

I. Préliminaires géométriques

Y est le champ de Jacobi le long de la géodésique $\gamma: t \mapsto f(t, u)$ vérifiant $Y(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'} Y(0) = v$. Ces derniers champs de Jacobi sont les ingrédients principaux pour démontrer le théorème suivant.

Théorème I.2.14 (HOPF-RINOW). *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe, sans bord. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe $p \in M$ tel que $\exp_p$ est définie sur $T_p M$,*
- (2) *Pour tout $p \in M$, $\exp_p$ est définie sur $T_p M$,*
- (3) *Les géodésiques maximales sont définies sur $\mathbb{R}$,*
- (4) *(M, d_g) est un espace métrique complet.*

Si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, pour tous $p, q \in M$, il existe un segment géodésique $[p, q]$, et l'application exponentielle en tout point est surjective.

Définition I.2.15. Une variété riemannienne connexe (M, g) est *complète* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème de Hopf-Rinow.

En particulier, une variété riemannienne compacte sans bord est toujours complète.

I.2.6 Géométrie extrinsèque des hypersurfaces

Nous poursuivons cet inventaire de géométrie riemannienne en exposant les objets liés à la géométrie extrinsèque des hypersurfaces. Soit $M \subset \overline{M}$ une *hypersurface*, c'est-à-dire une sous-variété de dimension $n - 1$. Si $\bar{g}$ est une métrique riemannienne sur $\overline{M}$, elle induit une métrique riemannienne $g = \bar{g}|_M$. Soient $\bar{\nabla}$ et ∇ les connexions de Levi-Civita respectives de $(\overline{M}, \bar{g})$ et (M, g) . La proposition suivante fait le lien entre ces deux connexions.

Proposition I.2.16. *Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Alors*

$$\forall p \in M, \quad \nabla_X Y(p) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p))^\top, \quad (\text{I.2.21})$$

où $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ étendent X et Y , et $(\cdot)^\top$ représente la projection orthogonale sur $T_p M \subset T_p \overline{M}$.

La seconde forme fondamentale du plongement isométrique $(M, g) \hookrightarrow (\overline{M}, \bar{g})$ est la différence entre ces deux connexions.

Définition I.2.17. La seconde *forme fondamentale* de (M, g) à valeurs dans le fibré normal $TM^\perp$ est définie par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \mathbb{I}(X, Y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p))^\perp \quad (\text{I.2.22})$$

où $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ étendent X et Y , et $(\cdot)^\perp$ représente la projection orthogonale sur $T_p M^\perp \subset T_p \overline{M}$.

Localement, M possède toujours une normale unitaire ν , qui trivialisait localement le fibré normal $TM^\perp$. On montre grâce à cela que la seconde forme fondamentale est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique.

Proposition I.2.18. *La seconde forme fondamentale est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire et symétrique.*

Démonstration. Fixons U un ouvert de $\overline{M}$ et ν un champ de vecteurs sur U tel que ν est unitaire, et orthogonal à TM le long de M . Soient X et Y des champs de vecteurs sur M , étendus en $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sur $\overline{M}$. Alors on a

$$g(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \nu) - g(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, \nu) = g([\overline{X}, \overline{Y}], \nu). \quad (\text{I.2.23})$$

Puisque M est une sous-variété $[\overline{X}, \overline{Y}]$ est tangent à M le long de M , donc orthogonal à ν . Sur $U \cap M$, on a l'égalité $\mathbb{I}(X, Y) = g(\mathbb{I}(X, Y), \nu)\nu$, on en déduit que

$$\mathbb{I}(X, Y) - \mathbb{I}(Y, X) = 0, \quad (\text{I.2.24})$$

c'est-à-dire que $\mathbb{I}$ est symétrique. Puisque la connexion de Levi-Civita est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire en la première variable, $\mathbb{I}$ aussi. Par symétrie, $\mathbb{I}$ est donc $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire. $\square$

On suppose désormais que M est *co-orientée* par une normale unitaire ν . On étend ν dans un voisinage de M en un champ de vecteur unitaire, normal aux hypersurfaces de niveau au-dessus de M .

Définition I.2.19. On appelle *opérateur de Weingarten* (*shape operator* en anglais) le champ d'endomorphismes autoadjoints S sur M défini par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad g(SX, Y) = -g(\mathbb{I}(X, Y), \nu). \quad (\text{I.2.25})$$

On a une expression exacte de l'opérateur de Weingarten en fonction de la normale unitaire ν .

Proposition I.2.20. *On a l'égalité*

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall p \in M, \quad SX(p) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nu(p) \quad (\text{I.2.26})$$

pour n'importe quelle extension $\overline{X}$ de X .

Démonstration. Remarquons que pour $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, on a

$$-\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \nu) = -\overline{X}\overline{g}(\overline{Y}, \nu) + \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\nu) \quad (\text{I.2.27})$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M , et $\overline{X}, \overline{Y}$ des extensions arbitraires. Alors $g(\overline{Y}, \nu)|_M = 0$, et le résultat découle de l'équation (I.2.27). $\square$

Remarquons que la seconde forme fondamentale est définie pour toute sous-variété tandis que l'opérateur de Weingarten n'est défini que pour des sous-variétés co-orientées.

Exemple I.2.21. Soit $M = \mathbb{S}_r(0)$ la sphère de centre 0 de rayon r dans l'espace euclidien. Alors le champ de vecteurs $\nu(p) = \frac{p}{r}$ est un champ normal unitaire, dont l'opérateur de Weingarten associé est $S = \frac{1}{r} \text{Id}_{T\mathbb{S}_r(0)}$.

I.2.7 Convexité

Nous concluons cette section de rappels sur la géométrie riemannienne en présentant différentes notions de convexité.

Définition I.2.22. Soit $K \subset M$ une partie.

- On dit que K est *géodésiquement convexe* si pour toute paire de points $p, q \in K$, il existe un segment géodésique $[p, q]$ inclus dans K .
- On dit que K est *totalement convexe* si pour toute paire de points $p, q \in K$ et toute géodésique $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ joignant p à q , on a $\gamma([a, b]) \subset K$.

Définition I.2.23. Soit N une hypersurface co-orientée par un vecteur normal ν . On dit que N est (*strictement*) *convexe* relativement à ν si l'opérateur de Weingarten S associé est partout un opérateur autoadjoint (défini) positif.

La proposition suivante fait le lien entre ces deux définitions.

Proposition I.2.24. Soit $K \subset M$ une sous-variété de codimension 0, de bord $N = \partial K$. On suppose que N est co-orienté par un champ de vecteur ν pointant vers l'extérieur de K . Alors si K est géodésiquement convexe, N est convexe relativement à ν .

I.3 Géométrie kählérienne

Cette section est dédiée à un rappel des définitions et résultats de géométrie kählérienne qui seront nécessaires à la compréhension de cette thèse. Notre point de vue est essentiellement un point de vue riemannien. Pour une introduction détaillée au sujet, on pourra consulter [KN96b].

I.3.1 Structure presque complexe

Soit M une variété et E un fibré vectoriel (réel). Une *structure presque complexe* sur E est un champ d'endomorphismes $J \in \Gamma(\text{End}(E))$ vérifiant $J^2 = -\text{Id}_E$. Une structure presque complexe sur M est par définition une structure presque complexe sur son fibré tangent. Dans ce cas, on dit que (M, J) est une *variété presque complexe*.

Remarque I.3.1. Si E possède une structure presque complexe, alors nécessairement, E est un fibré de rang pair. En particulier, une variété presque complexe est de dimension paire. Par ailleurs, les fibres de E sont canoniquement orientées de la manière suivante. Toute base $\{e_1, Je_1, \dots, e_\ell, Je_\ell\}$ de la fibre E_p au dessus de $p \in M$ est décrétée positivement orientée. Par conséquent, une variété presque complexe est orientée.

Soit $E \otimes \mathbb{C}$ le fibré complexe associé à E , sur lequel on étend J par $\mathbb{C}$ -linéarité. Alors dans les fibres, J est diagonalisable, et on a la décomposition $E \otimes \mathbb{C} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$ où $E^{1,0} = \{X - iJX \mid X \in E\}$, où $E^{1,0} = \{X - iJX \mid X \in E\}$ est le sous-fibré vectoriel associé à la valeur propre i , et $E^{0,1} = \overline{E^{1,0}} = \{X + iJX \mid X \in E\}$ est celui associé à la valeur propre $-i$. On étend le crochet de Lie à $\mathfrak{X}(M) \otimes \mathbb{C}$ par $\mathbb{C}$ -linéarité. Lorsque E est un sous-fibré du fibré tangent TM , on définit l'intégrabilité de J de la manière suivante.

Définition I.3.2. La structure presque complexe J sur E est dite *intégrable* [4] si $E^{1,0}$ est stable par le crochet de Lie.

Soit $E \subset TM$ un sous-fibré du fibré tangent de M , muni d'une structure presque complexe J . Soit F un supplémentaire de E dans TM , c'est-à-dire un sous-fibré tel que $E \oplus F = TM$ [5]. Alors $TM \otimes \mathbb{C} = E^{1,0} \oplus E^{0,1} \oplus F \otimes \mathbb{C}$. Étendons J à tout $TM \otimes \mathbb{C}$ en décrétant que $J|_F = 0$. Un champ de vecteurs complexe $V \in \Gamma(TM \otimes \mathbb{C})$ s'écrit, dans cette décomposition, $V = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \oplus V^F$, et on vérifie que l'on a $V + iJV = 2V^{0,1} + V^F$. Ainsi, V est tangent à $E^{1,0}$ si, et seulement si, $V + iJV = 0$. Si $V = [X - iJX, Y - iJY]$, la bilinéarité du crochet de Lie montre alors que l'on a $V + iJV = N_J(X, Y) + iJN_J(X, Y)$, avec

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]. \quad (\text{I.3.1})$$

Définition I.3.3. Le *tenseur de Nijenhuis* associé à la structure presque complexe J sur E est le tenseur $N_J \in \Gamma(E^* \otimes E^* \otimes TM)$ défini par l'équation (I.3.1).

Remarque I.3.4. Le tenseur de Nijenhuis est à valeurs dans $\mathfrak{X}(M)$, pas nécessairement dans $\Gamma(E)$.

On déduit de l'égalité $[X - iJX, Y - iJY] = N_J(X, Y) + iJN_J(X, Y)$ le théorème suivant.

Théorème I.3.5. Soit E un sous-fibré de TM et J une structure presque complexe sur E . Alors J est intégrable si et seulement si $N_J = 0$.

Corollaire I.3.6. Si E est de rang 2, alors J est toujours intégrable.

I.3.2 Variétés complexes

Une *variété complexe* est une variété différentielle dont les cartes sont à valeurs dans des ouverts de $\mathbb{C}^n$, et dont les fonctions de transitions sont des fonctions holomorphes. Soit M une variété complexe et $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{C}^n$ une carte d'un atlas complexe. On définit sur U une structure presque complexe J par $JX = \phi^*(i\phi_*X)$. Le caractère holomorphe des fonctions de transitions assure que cette construction est en fait indépendante du choix de la carte (ϕ, U) .

Définition I.3.7. La structure presque complexe J ainsi définie est appelée la *structure presque complexe induite* par la structure complexe de M .

On vérifie dans ce cas que le tenseur de Nijenhuis N_J est identiquement nul. La non intégrabilité d'une structure presque complexe est par conséquent une obstruction au fait

[4] Le mot *intégrable* fait ici référence au théorème de Frobenius.

[5] Par exemple, $F = E^\perp$ pour une métrique riemannienne arbitraire.

I. Préliminaires géométriques

qu'elle soit induite par un atlas complexe. En fait, c'est équivalent, comme le montre le théorème (difficile) suivant.

Théorème I.3.8 (NEWLANDER-NIRENBERG). *Soit (M, J) une variété presque complexe. Alors J est induite par une structure complexe si et seulement si J est intégrable, si et seulement si $N_J = 0$.*

I.3.3 Métrique kählérienne

Soit M une variété différentielle, munie d'une métrique riemannienne g , et d'une structure presque complexe J compatible avec g , au sens où pour tous champs de vecteurs X et Y , $g(X, Y) = g(JX, JY)$ ^[6]. Soit ω la 2-forme sur M définie par $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$.

Proposition I.3.9. *Soit (M, g, J) une variété riemannienne munie d'une structure presque complexe compatible. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) J est parallèle,
- (2) $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ est fermée et J est intégrable.

Démonstration. Soient X, Y et Z trois champs de vecteurs. Alors

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \\ &= Xg(JY, Z) + Yg(JZ, X) + Zg(JX, Y) \\ &\quad - g(J[X, Y], Z) - g(J[Y, Z], X) - g(J[Z, X], Y). \end{aligned} \tag{I.3.2}$$

Similairement, on a

$$\begin{aligned} d\omega(X, JY, JZ) &= Xg(J^2Y, JZ) + (JY)g(J^2Z, X) + (JZ)g(JX, JY) \\ &\quad - g(J[X, JY], JZ) - g(J[JY, JZ], X) - g(J[JZ, X], JY) \\ &= Xg(JY, Z) - (JY)g(Z, X) + (JZ)g(X, Y) \\ &\quad - g([X, JY], Z) + g([JY, JZ], JX) - g([JZ, X], Y). \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

Par définition du tenseur de Nijenhuis, et en utilisant la compatibilité de la structure presque complexe avec la métrique, on montre également que l'on a

$$g(N_J(Y, Z), JX) = g([Y, Z], JX) + g([JY, Z], X) + g([Y, JZ], X) - g([JY, JZ], JX). \tag{I.3.4}$$

On remarque alors, par la formule de Koszul (I.2.4), que l'on a l'égalité

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X(JY), Z) + 2g(\nabla_X Y, JZ) &= d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ) \\ &\quad - g(N_J(Y, Z), JX), \end{aligned} \tag{I.3.5}$$

[6] Une telle métrique existe toujours : on peut considérer par exemple $g(X, Y) = h(X, Y) + h(JX, JY)$ pour h une métrique riemannienne arbitraire.

que l'on peut réécrire

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ) - g(N_J(Y, Z), JX). \quad (\text{I.3.6})$$

Il vient que si ω est fermée, et si J est intégrable, alors J est parallèle.

Réciproquement, puisque la connexion de Levi-Civita est sans torsion, on a l'égalité

$$N_J(Y, Z) = J((\nabla_Y J)Z - (\nabla_Z J)Y) - ((\nabla_{JY} J)Z - (\nabla_{JZ} J)Y). \quad (\text{I.3.7})$$

Ainsi, si J est parallèle, alors J est intégrable. On déduit alors de l'équation (I.3.6) que ω est fermée. $\square$

Définition I.3.10. Une *variété kählérienne* (M, g, J) est une variété munie d'une métrique riemannienne g et d'une structure presque complexe J compatible, et qui vérifie l'une des assertions équivalentes de la proposition I.3.9.

Dans cette thèse, le point de vue que nous porterons sur la géométrie kählérienne est essentiellement riemannien, et nous utiliserons principalement le fait que la structure presque complexe est parallèle.

Remarque I.3.11. Par définition, le tenseur de Nijenhuis d'une variété kählérienne est identiquement nul. Le théorème de Newlander-Nirenberg assure donc que M est une variété complexe.

L'exemple qui suit est fondamental, et est l'analogie du modèle de la boule de Poincaré en géométrie kählérienne.

Exemple I.3.12. Soit $\mathbb{B}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ la boule unité, munie de la structure complexe induite par celle de $\mathbb{C}$. On note $(z^1, \dots, z^n)$ les coordonnées complexes canoniques. Alors la métrique définie par

$$g_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \left((1 - |z|^2) \sum_{j=1}^n dz^j d\bar{z}^j - \left(\sum_{j=1}^n \bar{z}^j dz^j \right) \left(\sum_{j=1}^n z^j d\bar{z}^j \right) \right) \quad (\text{I.3.8})$$

est une métrique kählérienne complète, où $|z|$ désigne la distance euclidienne à l'origine. On appelle $(\mathbb{B}^{2n}, g_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n})$ l'*espace hyperbolique complexe*.

I.3.4 Courbure sectionnelle holomorphe

Soit (M, g, J) une variété kählérienne. Une *droite complexe* est un plan tangent stable par la structure presque complexe. Un *plan totalement réel* est un plan tangent P orthogonal à JP . Le théorème I.2.8 montre que la courbure sectionnelle d'une variété riemannienne détermine son tenseur de courbure. On peut se demander quelle information géométrique porte la courbure sectionnelle des droites complexes.

Définition I.3.13. On appelle *courbure sectionnelle holomorphe* la courbure sectionnelle des droites complexes.

I. Préliminaires géométriques

Proposition I.3.14. *L'espace hyperbolique complexe $(\mathbb{B}^{2n}, g_{\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n})$ (voir l'exemple I.3.12) est à courbure sectionnelle holomorphe constante, égale à -1 .*

En géométrie riemannienne, la courbure sectionnelle détermine le tenseur de courbure. On a le résultat analogue en géométrie kählérienne.

Théorème I.3.15. *La courbure sectionnelle holomorphe d'une variété kählérienne détermine son tenseur de courbure.*

Démonstration. La preuve que nous donnons repose sur une observation de R. BISHOP et S. GOLDBERG [BG64, équation (6.1)]. Soient X et Y deux champs de vecteurs. Alors on vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= \frac{1}{32} (3Q(X + JY) + 3Q(X - JY) \\ &\quad - Q(X + Y) - Q(X - Y) \\ &\quad - 4Q(X) - 4Q(Y)), \end{aligned} \quad (\text{I.3.9})$$

où $Q(Z) = R(Z, JZ, Z, JZ)$. La courbure sectionnelle est donc uniquement déterminée par la courbure sectionnelle holomorphe. D'après le théorème I.2.8, le tenseur de courbure est ainsi uniquement déterminé par la courbure sectionnelle holomorphe. $\square$

Corollaire I.3.16. *Soit (M, g, J) une variété kählérienne et $\kappa \in \mathbb{R}$. Si la courbure sectionnelle holomorphe de (M, g, J) est constante égale à κ , alors son tenseur de courbure est donné par*

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, T) &= \frac{\kappa}{4} (g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z) \\ &\quad + g(X, JZ)g(Y, JT) - g(X, JT)g(Y, JZ) \\ &\quad + 2g(X, JY)g(Z, JT)) \end{aligned} \quad (\text{I.3.10})$$

Corollaire I.3.17. *Soit (M, g, J) est à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à $\kappa \in \mathbb{R}$. Alors si $\kappa = 0$, la courbure est constante égale à 0. Si $\kappa > 0$, alors $\frac{\kappa}{4} \leq \sec(P) \leq \kappa$. Si $\kappa < 0$, alors $\kappa \leq \sec(P) \leq \frac{\kappa}{4}$. En outre, les cas d'égalité avec les bornes caractérisent les droites complexes et les plans totalement réels.*

Démonstration. D'après le corollaire I.3.17, dès lors que $\|X\|_g = \|Y\|_g = 1$ et $g(X, Y) = 0$, on a

$$R(X, Y, X, Y) = \frac{\kappa}{4} (1 + 3g(X, JY)^2). \quad (\text{I.3.11})$$

Le résultat suit immédiatement. $\square$

En particulier, il n'existe pas de variété kählérienne à courbure constante non nulle. Néanmoins, les variétés kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante sont à courbure $\frac{1}{4}$ -pincée.

I.4 Géométrie CR

I.4.1 Variétés CR

Soit $\overline{M}$ une variété complexe et $\overline{J}$ sa structure presque complexe. Soit $M \subset \overline{M}$ une hypersurface réelle. Alors $H = TM \cap (\overline{J}TM)$ définit une distribution d'hyperplans sur M . La restriction de $\overline{J}$ à H , que l'on note J , est une structure presque complexe sur H . Elle hérite de l'intégrabilité de $\overline{J}$, et on vient de mettre en évidence une structure géométrique particulière (M, H, J) .

Définition I.4.1. Une *structure de Cauchy-Riemann*, ou *structure CR*, sur une variété M est la donnée d'une distribution orientable d'hyperplans H , appelée *champ de Levi*, et d'une structure presque complexe J sur H , intégrable. On dit que (M, H, J) est une *variété CR*.

Deux variétés CR (M, H, J) et (M', H', J') sont dites *CR-difféomorphes* s'il existe un difféomorphisme $f: M \rightarrow M'$ tel que $f^*H' = H$ et $f^*J' = J$.

La géométrie CR est donc la géométrie naturelle des hypersurfaces réelles dans les variétés complexes. Lorsque la variété CR M est orientable, alors on peut trouver une 1-forme θ dont le noyau est exactement H . Lorsque $d\theta(JX, JY) = d\theta(X, Y)$ pour tous champs de vecteurs tangents à H , on dit que (M, θ, J) est une variété *pseudo-hermitienne*. La *forme de Levi* est $\gamma = d\theta|_{H \times H}(\cdot, J\cdot)$. On dit que (M, θ, J) est (*strictement*) *pseudo-convexe* lorsque la forme de Levi est (définie) positive.

Définition I.4.2. Une variété CR est dite *strictement pseudoconvexe* si elle possède une structure pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe.

Remarque I.4.3. Dans ce cas, la distribution de Levi H est de contact.

Exemple I.4.4. Soit $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ la sphère unité et θ sa forme de contact standard (voir définition I.1.4). Alors $H = \ker \theta$ coïncide avec la distribution de Levi induite par le plongement dans $\mathbb{C}^n$. Soit J la structure presque complexe induite, qui correspond à la multiplication par i dans les fibres. En coordonnées ambiantes $(z^1, \dots, z^n)$ avec $z^j = x^j + iy^j$, on vérifie que

$$d\theta = \left(\sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j \right) |_{T\mathbb{S}^{2n-1}}, \quad (\text{I.4.1})$$

d'où l'on déduit l'expression de la forme de Levi

$$\gamma = \left(\sum_{j=1}^n dx^j \otimes dx^j + dy^j \otimes dy^j \right) |_{H \times H}. \quad (\text{I.4.2})$$

Ainsi, la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$ est naturellement munie d'une structure CR strictement pseudo-convexe.

I.4.2 Domaines complexes

Le théorème de l'application conforme énonce que tous les ouverts stricts de $\mathbb{C}$, non vides et simplement connexes sont biholomorphes. H. POINCARÉ remarque que ce résultat ne s'étend pas en dimensions 2 et supérieures [Poi07]. Une obstruction est donnée dans le cadre plus restreint des domaines strictement pseudoconvexes par C. FEFFERMAN [Fef74]. Une ouvert borné Ω de bord $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 2$) est dit (strictement) pseudoconvexe si $\partial\Omega$ muni de la structure CR induite par son plongement dans $\mathbb{C}^n$ est une variété (strictement) pseudoconvexe [7].

Théorème I.4.5 ([Fef74]). *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, à bords lisses CR strictement pseudoconvexes. Alors tout biholomorphisme $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ se prolonge en un difféomorphisme $f: \overline{\Omega}_1 \rightarrow \overline{\Omega}_2$ de variétés à bord, dont la restriction au bord induit un CR-difféomorphisme.*

La classe de CR-difféomorphisme du bord d'un domaine fournit alors une obstruction à la généralisation du théorème de l'application conforme en dimension supérieure.

Pour étudier les domaines complexes, une idée fructueuse est de les munir de métriques kähleriennes complètes, envoyant ainsi le bord à l'infini. Un développement limité de la métrique au voisinage de l'infini fait apparaître des invariants, reliés à la géométrie CR du bord.

Soit donc Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et $L^{2,h}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable. Pour $z \in \Omega$, l'application $f \in L^{2,h}(\Omega) \mapsto f(z)$ est une forme linéaire continue, et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction holomorphe $h_z \in L^{2,h}(\Omega)$ telle que pour tout f , $f(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) \overline{h_z(\zeta)} d\zeta$. Le noyau de Bergman $K_{\Omega}: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $K_{\Omega}(z, \zeta) = \overline{h_z(\zeta)}$. C'est une fonction holomorphe en la première variable, anti-holomorphe en la seconde. Finalement, pour $z \in \Omega$, et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on définit $g_{i\bar{j}}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log K_{\Omega}(z, z)$. On vérifie que lorsque Ω est borné, alors $g_{i\bar{j}}$ définit une métrique kählerienne sur Ω .

Définition I.4.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné. La *métrique de Bergman* de Ω est la métrique kählerienne induite par le noyau de Bergman.

Une autre métrique importante est donnée par la métrique de Kähler-Einstein.

Théorème I.4.7 ([CY80]). *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) un domaine borné strictement pseudoconvexe. Alors il existe une unique métrique kählerienne qui soit d'Einstein sur Ω , à homothétie près.*

Dans le cas de la boule $\mathbb{B}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$, ces deux métriques coïncident (à un facteur constant près) avec la métrique hyperbolique complexe. Dans le cas d'un domaine strictement

[7] Si le bord est de régularité plus faible, on peut définir la (stricte) pseudoconvexité en termes de fonctions pluri-sous-harmoniques. Cette notion ne sera pas utilisée dans cette thèse.

pseudoconvexe, alors la courbure sectionnelle holomorphe de ces métriques converge vers -1 au bord [Kle78, CY80]. De plus, un développement asymptotique de la métrique près du bord fait apparaître la structure CR du bord. On dit qu'elles sont asymptotiques à la structure CR du bord.

Chapitre II

Géométrie asymptotique en courbure négative

Dans ce deuxième chapitre, nous nous intéressons aux variétés riemanniennes complètes à courbure sectionnelle négative (ou nulle). Cette hypothèse sur la courbure a de fortes conséquences sur la topologie et la géométrie. Nous discutons la notion de bord à l'infini, qui est une sphère lorsque la variété est simplement connexe. Nous illustrons la géométrie de ce bord grâce aux exemples de l'espace hyperbolique et de l'espace hyperbolique complexe.

Dans un second temps, nous exposons certaines tentatives de généralisation de ces structures pour des variétés que l'on appelle *asymptotiquement symétriques*, et plus particulièrement les résultats obtenus dans [BM08, Bah08, BG11, Gic13]. Ces derniers résultats sont à l'origine de l'étude que nous mènerons au chapitre III.

Sommaire

II.1	Sphère à l'infini des variétés de Hadamard	56
II.1.1	Variétés de Hadamard	56
II.1.2	Un premier exemple à courbure sectionnelle constante	56
II.1.3	Un second exemple à courbure sectionnelle holomorphe constante	58
II.2	Sous-ensembles essentiels	59
II.2.1	Définition et premières propriétés	59
II.2.2	Bord de Gromov	63
II.3	Compactification conforme des variétés asymptotiquement localement hyperboliques	63

II.1 Sphère à l'infini des variétés de Hadamard

II.1.1 Variétés de Hadamard

Soient (M, g) une variété riemannienne complète et $p \in M$. Soient $u, v \in T_p M$ des vecteurs tangents, avec $u \neq 0$. D'après le corollaire I.2.13, la différentielle de $\exp_p$ en u appliquée à v est donnée par

$$\mathrm{dexp}_p(u)v = Y(1), \quad (\text{II.1.1})$$

où Y est le champ de Jacobi le long de la géodésique $\gamma: t \mapsto \exp_p(tu)$, ayant pour conditions initiales $Y(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'} Y(0) = v$. Soit donc F la fonction lisse définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \frac{1}{2} \|Y(t)\|_g^2$. Un calcul immédiat, utilisant l'équation de Jacobi (I.2.19) donne

$$F'' = \|\nabla_{\gamma'} Y\|_g^2 - \sec(\gamma', Y) \|\gamma'\|_g^2 \|Y\|_g^2. \quad (\text{II.1.2})$$

Puisque la courbure sectionnelle est supposée négative ou nulle, F est une fonction convexe, positive ou nulle. Si $\mathrm{dexp}_p(u)v = 0$, alors $F(0) = F(1) = 0$, et F est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Alors $F'(0) = 0$, et il vient que $v = 0$.

Cette courte étude montre que l'exponentielle est un difféomorphisme local en tout point. D'après le théorème de Hopf-Rinow, elle est surjective. On en déduit le théorème suivant.

Théorème II.1.1 (CARTAN-HADAMARD). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et $p \in M$. Alors l'application exponentielle en p est un revêtement. En particulier, si M est simplement connexe, M est difféomorphe à $T_p M$.*

Remarque II.1.2. Le théorème de Cartan-Hadamard fournit une première obstruction (topologique) à l'existence de métriques à courbure négative ou nulle. Par exemple, la sphère ne peut posséder de telles métriques, puisqu'elle n'est pas revêtue par un espace vectoriel.

On appelle *variété de Hadamard* toute variété riemannienne simplement connexe, complète, et à courbure sectionnelle négative ou nulle. D'après le théorème de Cartan-Hadamard, ces variétés sont difféomorphes à la boule unité d'un espace euclidien. On peut ainsi considérer la compactification topologique qui consiste à recoller une sphère. On parle de la *sphère à l'infini*. Aucune géométrie particulière n'est portée par cette sphère. Nous allons cependant voir à travers les prochains exemples que l'on peut parfois munir cette sphère à l'infini d'une géométrie.

II.1.2 Un premier exemple à courbure sectionnelle constante

Soit (M, g) une variété complète, non compacte et simplement connexe. On suppose que sa courbure sectionnelle est constante, égale à -1 . Soit $o \in M$. Puisque (M, g) est

une variété de Hadamard, l'application exponentielle $\exp_o: T_oM \rightarrow M$ est un difféomorphisme. Ainsi, en coordonnées polaires $(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S} \simeq T_oM \setminus \{0\}$, on peut écrire la métrique g de la manière suivante

$$\exp_o^* g = dr \otimes dr + g_r, \quad (\text{II.1.3})$$

où $(g_r)_{r \geq 0}$ est une famille lisse de métriques sur la sphère unité $\mathbb{S}$ de T_oM . On se propose de déterminer cette famille de métriques.

Soit $u \in \mathbb{S}$, et $v, w \in T_u\mathbb{S}$. Pour $r \geq 0$, on a $g_r(v, w) = g(\text{dexp}_o(ru)rv, \text{dexp}_o(ru)rw)$. Or, on sait que $r \mapsto \text{dexp}_o(ru)rv$ est l'unique champ de Jacobi Y le long de $\gamma: r \mapsto \exp_o(ru)$ avec $Y(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'} Y(0) = v$ (voir le corollaire I.2.13). Puisque la courbure sectionnelle est constante égale à -1 , l'équation de Jacobi (I.2.19) se réduit dans le cas présent à

$$\nabla_{\gamma'}(\nabla_{\gamma'} Y) = Y. \quad (\text{II.1.4})$$

La solution recherchée est

$$\forall r \geq 0, \quad Y(r) = \sinh(r)v^{\parallel}, \quad (\text{II.1.5})$$

où $v^{\parallel}$ est le transport parallèle de v le long de γ . On en déduit donc que

$$\forall r > 0, \quad g_r(v, w) = \sinh^2(r)\mathring{g}(v, w), \quad (\text{II.1.6})$$

avec $\mathring{g}$ la métrique ronde de la sphère induite par le produit scalaire g_o sur T_oM . La métrique g est alors donnée par

$$\exp_o^* g = dr \otimes dr + \sinh^2(r)\mathring{g}. \quad (\text{II.1.7})$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S})$ telle que la famille de métrique $(f^2 \sinh^2(r)\mathring{g})_r$ sur la sphère $\mathbb{S}$ converge vers une métrique. Alors on peut montrer que cette dernière est forcément dans la classe conforme de la métrique ronde. Pour cette raison, on peut munir la sphère à l'infini de (M, g) de cette structure, indépendamment du choix de l'origine et de la renormalisation.

Définition II.1.3. On définit le bord à l'infini de (M, g) comme étant $(\mathbb{S}, [\mathring{g}])$.

Grossièrement, la structure à l'infini est héritée par la géométrie riemannienne des sphères géodésiques concentriques qui feuilletent $M \setminus \{o\}$, et « s'écrasent » contre la sphère à l'infini.

Remarque II.1.4. Nous avons montré au passage que toute variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle constante égale à -1 est isométrique à l'espace hyperbolique réel.

II.1.3 Un second exemple à courbure sectionnelle holomorphe constante

Soit (M, g, J) une variété kählérienne complète, non compacte et simplement connexe. On suppose que la courbure sectionnelle holomorphe est constante, égale à -1 . D'après le corollaire I.3.17, la courbure des plans totalement réels est donc constante égale à $-\frac{1}{4}$, et les autres plans ont une courbure comprise entre ces deux valeurs. En particulier, (M, g) est une variété de Hadamard. Nous montrons que la métrique g est uniquement déterminée par cette propriété de courbure. Soit $o \in M$ un point quelconque et soit $u \in T_o M$ un vecteur unitaire. On appelle γ_u la géodésique vérifiant $\gamma_u(0) = o$ et $\gamma'_u(0) = u$. En coordonnées polaires, la métrique $\exp_o^* g$ s'écrit

$$\exp_o^* g = dr \otimes dr + g_r, \quad (\text{II.1.8})$$

avec (g_r) une famille lisse de métriques sur la sphère unité $\mathbb{S} \subset T_o M$, donnée par $g_r(v, w) = g(\text{dexp}_o(ru)rv, \text{dexp}_o(ru)rw)$, avec $v, w \in T_u \mathbb{S}$. D'après le corollaire I.2.13, le champ de vecteurs $r \mapsto \text{dexp}_o(ru)rv$ est le champ de Jacobi le long de γ_u tel que $Y(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'_u} Y = v$.

Premier cas : $v = Ju$.

Puisque la métrique est kählérienne et que γ_u est une géodésique, le champ de vecteurs $J\gamma'_u$ est parallèle le long de γ_u . De plus, γ'_u et $J\gamma'_u$ engendrent une droite complexe, et l'on a donc $-R_{\gamma'_u} J\gamma'_u = J\gamma'_u$. Le champ de vecteurs $Z(r) = \sinh(r)J\gamma'_u(r)$ est ainsi solution de l'équation de Jacobi le long de γ_u avec comme conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'_u} Z(0) = Ju$. On a alors $Y = Z$.

Deuxième cas : $v \in \{u, Ju\}^\perp$.

On note toujours v le transport parallèle de v de long de γ_u . Dans ce cas, γ'_u et v engendrent un plan totalement réel, et l'on a donc $-R_{\gamma'_u} v = \frac{1}{4}v$. Le champ de vecteurs $Z(r) = 2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right)v$ le long de γ_u est alors solution de l'équation de Jacobi le long de γ_u , avec pour conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\nabla_{\gamma'_u} Z(0) = v$. On a alors $Y = Z$.

Cas général.

Dans le cas général, écrivons $v = g(v, Ju)Ju + v^\perp$, et notons toujours $v^\perp$ le transport parallèle de $v^\perp$ le long de γ_u . Puisque l'équation de Jacobi est linéaire, on a alors

$$\forall r \geq 0, \quad \text{dexp}_o(ru)v = 2 \sinh(r) \frac{g(v, Ju)}{2} J\gamma'_u + 2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) v^\perp, \quad (\text{II.1.9})$$

et la métrique s'écrit par conséquent

$$\exp_o^* g = dr \otimes dr + 4 \sinh^2(r) \theta \otimes \theta + 4 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \gamma. \quad (\text{II.1.10})$$

où $\theta_u(v) = \frac{g(v, Ju)}{2}$ est la forme de contact standard de la sphère unité de T_oM , et $\gamma(v, w) = g(v^\perp, w^\perp) = d\theta(v, Jw)$ (voir l'exemple I.4.4).

Ce développement de la métrique fait apparaître la structure de contact canonique H de la sphère (via sa forme de contact standard θ) ainsi que la structure complexe standard J définie sur H (via la métrique de Carnot-Carathéodory γ). La structure induite à l'infini est donc la structure CR standard de la sphère $\mathbb{S} \subset (T_oM, g, J)$.

Définition II.1.5. On définit le bord à l'infini de (M, g, J) comme étant la sphère CR $(\mathbb{S}, H, J)$.

Bien que pour de petits rayons, les sphères géodésiques aient une métrique proche des sphères euclidiennes de même rayon, la métrique des sphères géodésiques de rayon r explose dans la direction du champ de Reeb lorsque r tend vers l'infini. Ce comportement est typique des *sphères de Berger*. C'est ce phénomène qui induit la structure CR de la sphère à l'infini.

Remarque II.1.6. Nous avons montré au passage que toute variété kählerienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 est isométrique à l'espace hyperbolique complexe.

II.2 Sous-ensembles essentiels

La notion de sous-ensemble essentiel permet de reproduire la décomposition polaire des exemples précédents. La définition suivante est due à [BM08].

II.2.1 Définition et premières propriétés

Définition II.2.1. Soit (M, g) une variété riemannienne. Un *sous-ensemble essentiel* $K \subset M$ est une sous-variété de codimension 0, à bord ∂K convexe relativement à la normale extérieure ν , telle que l'application exponentielle normale définie par

$$E: \begin{array}{l|l} \mathbb{R}_+ \times \partial K & \longrightarrow \overline{M \setminus K} \\ (r, p) & \longmapsto \exp_p(r(\nu(p))) \end{array} \quad (\text{II.2.1})$$

est un difféomorphisme sur son image.

Concrètement, un sous-ensemble essentiel est un « cœur » contenant l'information topologique de la variété, depuis lequel on peut étudier la géométrie à l'infini de (M, g) via l'application exponentielle normale. Dans ce cas, $\overline{M \setminus K}$ est feuilletée par les hypersurfaces équidistantes à ∂K , toutes difféomorphes entre elles. Elles jouent le rôle des sphères géodésiques concentriques des deux exemples précédents. En ce sens, un sous-ensemble essentiel permet de mimer la décomposition polaire dans une carte exponentielle.

On note $\partial_r = E_* \frac{d}{dr}$ le champ de vecteurs radial induit par la carte exponentielle normale. Les géodésiques radiales issues de ∂K sont les géodésiques $\gamma_p: r \mapsto E(r, p)$ avec $p \in \partial K$.

II. Géométrie asymptotique en courbure négative

Définition II.2.2. Si $v \in \mathfrak{X}(\partial K)$, on note $Y_v = E_*(0, v)$ (voir figure II.1).

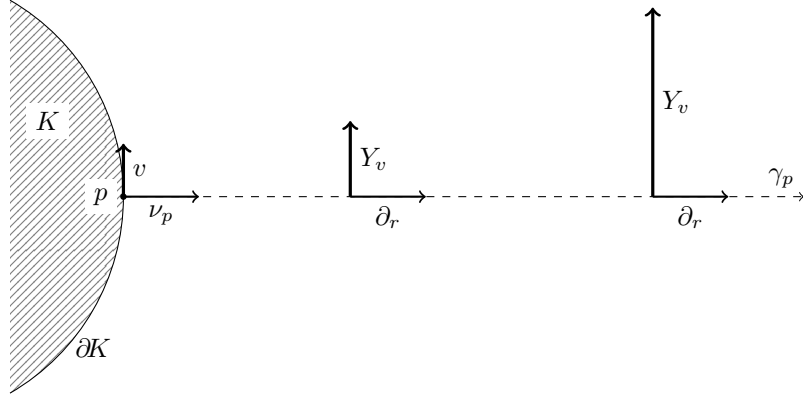


FIGURE II.1: Carte exponentielle normale.

D'après le lemme de Gauss, la métrique g s'écrit, dans cette carte,

$$E^*g = dr \otimes dr + g_r, \quad (\text{II.2.2})$$

avec $(g_r)_{r \geq 0}$ une famille lisse de métriques sur ∂K , telle que pour $u, v \in \mathfrak{X}(\partial K)$, on a la relation $g_r(u, v) = g(Y_u, Y_v)$.

Le champ de vecteurs radial est le gradient de la fonction distance à K sur $\overline{M \setminus K}$. Il est donc unitaire et orthogonal aux hypersurfaces de niveau au-dessus de ∂K . Soit $S = \nabla \partial_r$. D'après la proposition I.2.20, S est la collection des opérateurs de Weingarten de ces hypersurfaces. On l'appelle encore opérateur de Weingarten. Il est relié à la métrique par la formule suivante.

Proposition II.2.3. *On a l'équation d'évolution pour la métrique*

$$\mathcal{L}_{\partial_r} g = 2g(S \cdot, \cdot). \quad (\text{II.2.3})$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour X et Y deux champs de vecteurs, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\partial_r} g)(X, Y) &= \partial_r g(X, Y) - g([\partial_r, X], Y) - g(X, [\partial_r, Y]) \\ &= g(\nabla_{\partial_r} X - [\partial_r, X], Y) + g(X, \nabla_{\partial_r} Y - [\partial_r, Y]) \\ &= g(SX, Y) + g(X, SY), \end{aligned} \quad (\text{II.2.4})$$

et de conclure grâce à la symétrie de S . □

L'opérateur S suit quant à lui l'équation d'évolution suivante.

Proposition II.2.4. *L'opérateur S est solution de l'équation de Riccati*

$$\nabla_{\partial_r} S = \mathcal{L}_{\partial_r} S = -S^2 - R_{\partial_r}. \quad (\text{II.2.5})$$

Démonstration. Pour X un champ de vecteurs, on a

$$(\mathcal{L}_{\partial_r} S)X = [\partial_r, SX] - S[\partial_r, X] = \nabla_{\partial_r}(SX) - \nabla_{SX}\partial_r - S(\nabla_{\partial_r}X) + S\nabla_X\partial_r. \quad (\text{II.2.6})$$

En remarquant que $\nabla_{SX}\partial_r = S\nabla_X\partial_r$, on obtient donc que $\mathcal{L}_{\partial_r}S = \nabla_{\partial_r}S$. Remarquons ensuite que l'on a

$$\begin{aligned} R_{\partial_r}X &= R(\partial_r, X)\partial_r = \nabla_{[\partial_r, X]}\partial_r - \nabla_{\partial_r}(\nabla_X\partial_r) + \nabla_X\nabla_{\partial_r}\partial_r \\ &= S(\nabla_{\partial_r}X - SX) - \nabla_{\partial_r}(SX) \\ &= -S^2X - (\nabla_{\partial_r}S)X, \end{aligned} \quad (\text{II.2.7})$$

où l'on a utilisé l'égalité $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$, qui est vérifiée car ∂_r est le champ tangent aux géodésiques γ_p . Cette remarque conclut la preuve. $\square$

Proposition II.2.5. *Si $v \in \mathfrak{X}(\partial K)$, alors on a l'égalité $\nabla_{\partial_r}Y_v = SY_v$. De surcroît, la restriction de Y_v le long de toute géodésique radiale est un champ de Jacobi.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $[\partial_r, Y_v] = E_*([\frac{d}{dr}, v]) = E_*0 = 0$ pour obtenir $\nabla_{\partial_r}Y_v = SY_v$. On déduit enfin de l'équation de Riccati l'égalité $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{\partial_r}Y_v) = -R_{\partial_r}Y_v$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Corollaire II.2.6. — *L'opérateur de Weingarten d'une sphère $\mathbb{S}(r)$ de rayon r dans l'espace hyperbolique réel est donné par*

$$S = \coth(r) \text{Id}_{T\mathbb{S}(r)}. \quad (\text{II.2.8})$$

— *L'opérateur de Weingarten d'une sphère $\mathbb{S}(r)$ de rayon r dans l'espace hyperbolique complexe est donné par*

$$S = \coth(r) \text{Id}_{\mathbb{R}J\nu} + \frac{1}{2} \coth\left(\frac{r}{2}\right) \text{Id}_{\{\nu, J\nu\}^\perp}, \quad (\text{II.2.9})$$

où ν est la normale extérieure.

Remarque II.2.7. À la vue de l'équation (II.2.3), on peut deviner le comportement asymptotique de la métrique à partir de celui de S :

- Dans le cas de la métrique hyperbolique, les coefficients diagonaux de la métrique sont solution d'une équation différentielle du type $y' = 2(1 + \mathcal{O}(e^{-2r}))y$. Les solutions de cette équation sont de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{2r})$,
- Dans le cas hyperbolique complexe, la métrique suit une équation différentielle du type $y' = 2(1 + \mathcal{O}(e^{-2r}))y$ dans la direction $J\nu$. On peut heuristiquement espérer que la métrique a une croissance de l'ordre $\mathcal{O}(e^{2r})$ dans cette direction. Dans les directions orthogonales, le comportement de la métrique est plutôt donné par une équation différentielle du type $y' = (1 + \mathcal{O}(e^{-r}))y$, et le comportement asymptotique attendu est plutôt d'ordre $\mathcal{O}(e^r)$.

II. Géométrie asymptotique en courbure négative

Proposition II.2.8. *Soit $K \subset M$ un sous-ensemble essentiel, et supposons que la courbure sectionnelle de $\overline{M \setminus K}$ est négative (respectivement strictement négative). Alors les hypersurfaces de niveau au-dessus de ∂K sont convexes (respectivement strictement convexes).*

Démonstration. Soit $X \in T_{\gamma_{p_0}(r_0)}M$ pour $(r_0, p_0) \in \mathbb{R}_+ \times \partial K$. Puisque E est un difféomorphisme sur son image, soit $v \in \mathfrak{X}(\partial K)$ tel que $Y_v(\gamma_p(r)) = X$. Soit $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(r) = g(SY_v(\gamma_{p_0}(r)), Y_v(\gamma_{p_0}(r)))$. D'après l'équation de Riccati pour S et l'égalité $\nabla_{\partial_r} Y_v = SY_v$, on a $F' = -g(R_{\partial_r} Y_v, Y_v) + g(SY_v, SY_v) = -\sec(Y_v, \partial_r) \|Y_v\|_g^2 + \|SY_v\|_g^2$. Si la courbure de $\overline{M \setminus K}$ est négative (respectivement strictement négative), alors F est croissante (respectivement strictement croissante). Puisque ∂K est une hypersurface convexe, $F(0) = g(Sv, v) \geq 0$. On en conclut donc que $F(r_0) = g(SX, X) \geq 0$ (respectivement $F(r_0) = g(SX, X) > 0$), et le résultat suit. $\square$

Supposons désormais que M et ∂K sont orientées. On dispose de deux formes volumes naturelles sur $\mathbb{R}_+ \times \partial K$: E^*v_g et $dr \wedge v_{g|_N}$. Il existe donc une fonction lisse $\lambda: \mathbb{R}_+ \times \partial K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $E^*v_g = \lambda dr \wedge v_{g|_N}$. On l'appelle *densité volumique*.

Proposition II.2.9. *La densité volumique est solution de l'équation différentielle*

$$\forall (r, p) \in \mathbb{R}_+ \times N, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial r}(r, p) = \text{trace}(S_{\gamma_p(r)})\lambda(r, p). \quad (\text{II.2.10})$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un champ repère orthonormé direct local. On note, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ la forme duale associée à e_j par $\theta^j = g(\cdot, e_j)$. Alors localement, $v_g = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$. Il vient que l'on a

$$\mathcal{L}_{\partial_r} v_g = \sum_{j=1}^n \theta^1 \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_{\partial_r} \theta^j \wedge \dots \wedge \theta^n. \quad (\text{II.2.11})$$

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $\mathcal{L}_{\partial_r} \theta^j = (\mathcal{L}_{\partial_r} g)(\cdot, e_j) + g(\cdot, [\partial_r, e_j])$. D'après la proposition II.2.3, on a l'égalité $\mathcal{L}_{\partial_r} g = 2g(S\cdot, \cdot)$. En outre, puisque la connexion de Levi-Civita est sans torsion, on a l'égalité $[\partial_r, e_j] = \nabla_{\partial_r} e_j - S e_j$. Il vient que l'on a $\mathcal{L}_{\partial_r} \theta^j = g(\cdot, S e_j) + \alpha_j^j$, avec $\alpha_j = g(\cdot, \nabla_{\partial_r} e_j)$. Or, on remarque en dérivant l'égalité $\|e_j\|_g^2 = 1$ dans la direction radiale que $\nabla_{\partial_r} e_j$ est orthogonal à e_j . Il suit que α_j^j est combinaison linéaire des θ^k avec $k \neq j$, et l'on a donc finalement

$$\mathcal{L}_{\partial_r} v_g = \sum_{j=1}^n \theta^1 \wedge \dots \wedge (\theta^j \circ S) \wedge \dots \wedge \theta^n. \quad (\text{II.2.12})$$

En évaluant sur le repère local $\{e_1, \dots, e_n\}$, on remarque alors que l'on a l'égalité

$$\mathcal{L}_{\partial_r} v_g = (\text{trace } S) v_g. \quad (\text{II.2.13})$$

Le résultat suit en tirant en arrière cette égalité par le difféomorphisme E . $\square$

Si (M, g) est une variété de Hadamard, alors toute boule géodésique de rayon assez petit est un sous-ensemble essentiel. Plus largement, le théorème suivant assure l'existence de telles parties.

Théorème II.2.10 ([BM08, théorème 3.1]). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Soit $K \subset M$ une sous-variété de codimension 0, à bord lisse, co-orienté par une normale extérieure ν . Si K est totalement convexe (voir la définition I.2.22), et si la courbure sectionnelle de $\overline{M} \setminus K$ est strictement négative, alors K est un sous-ensemble essentiel.*

II.2.2 Bord de Gromov

Si $K \subset (M, g)$ est un sous-ensemble essentiel, alors on peut faire une analogie entre les sphères concentriques des espaces hyperboliques et les hypersurfaces de niveau au-dessus de K . La géométrie du bord à l'infini de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ et $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ étant induite par la celle des sphères concentriques qui viennent « s'écraser » contre le bord, on peut tenter de poursuivre l'analogie. Pour cela, il nous manque une notion de bord à l'infini. La notion de *bord de Gromov* permet de palier ce problème. Le bord de Gromov $M(\infty)$ d'une variété riemannienne (M, g) est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques unitaires, pour la relation d'équivalence suivante

$$\gamma \sim \sigma \iff \sup_{t \in \mathbb{R}_+} d_g(\gamma(t), \sigma(t)) < +\infty. \quad (\text{II.2.14})$$

Schématiquement, une classe $[\gamma] \in M(\infty)$ correspond à un « point à l'infini », qui est visuellement une « direction de fuite » de certaines géodésiques. Dans une variété de Hadamard, on peut montrer qu'il est en bijection avec la sphère à l'infini. Plus généralement, on a le théorème suivant.

Théorème II.2.11 ([BM08, proposition 4.4]). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et non compacte, et soit $K \subset M$ un sous-ensemble essentiel. Alors $M(\infty)$ est en bijection avec ∂K par l'application $p \mapsto [\gamma_p]$.*

Il suit qu'un sous-ensemble essentiel permet de reconstruire le bord de Gromov à partir de données géométriques.

II.3 Compactification conforme des variétés asymptotiquement localement hyperboliques

Soit (M, g) une variété de Hadamard à courbure pincée, c'est-à-dire à courbure sectionnelle vérifiant $-b^2 \leq \sec \leq -a^2 < 0$. Alors on peut munir la sphère à l'infini de (M, g) d'une structure conforme de classe $\mathcal{C}^{\frac{a}{b}}$ [And83, AS85]. Dans cette section, nous

II. Géométrie asymptotique en courbure négative

présentons les résultats qui ont été obtenus dans le cadre plus général où l'on autorise la variété M à avoir de la topologie [BM08, Bah08, BG11, Gic13]. Dans ces papiers, les auteurs construisent un bord conforme pour des variétés possédant un sous-ensemble essentiel, et dont la courbure sectionnelle converge rapidement vers -1 à l'infini. Ces variétés sont appelées *asymptotiquement localement hyperboliques*.

L'hypothèse sur la courbure sectionnelle peut être reformulée de la manière suivante. Soit R^0 le tenseur de courbure sectionnelle constante égale à -1 défini par

$$R^0(X, Y, Z, T) = g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T), \quad (\text{II.3.1})$$

(voir corollaire I.2.9). Alors on a $\sec \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -1 \iff \|R - R^0\|_g \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, et la vitesse de convergence est la même. Il s'agit par conséquent d'une condition portant sur le tenseur de courbure.

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, non compacte, et K un sous-ensemble essentiel. Soit $(x^1, \dots, x^n)$ des coordonnées locales sur ∂K . En les prolongeant de manière constante le long des courbes intégrales de r , $(r, x^1, \dots, x^n)$ sont des coordonnées locales sur $\overline{M \setminus K}$, nommées *coordonnées de Fermi*. Dans ces coordonnées, les équations d'évolutions de la métrique et de l'opérateur de Weingarten deviennent

$$\begin{cases} \partial_r g_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\gamma} S_{\beta}^{\gamma}, \\ \partial_r S_{\alpha}^{\beta} = -S_{\alpha}^{\gamma} S_{\gamma}^{\beta} - (R_{\partial_r})_{\alpha}^{\beta}, \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

où les indices en alphabet grec correspondent aux coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$, et où la convention de sommation d'Einstein est utilisée. Ce sont des équations différentielles ordinaires, et l'on peut estimer le comportement asymptotique des solutions dès lors que l'on a des estimées de courbure suffisamment précises. Ce sont les ingrédients principaux pour montrer les résultats suivants.

Théorème II.3.1 ([BM08, théorème 1.1]). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Soit $K \subset M$ une partie totalement convexe, telle que la courbure sectionnelle de $\overline{M \setminus K}$ est strictement négative, pincée entre $-b^2$ et $-a^2$, avec $0 < a \leq b$. Alors K est un sous-ensemble essentiel, et $M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{\frac{a}{b}}$. L'union $M \cup M(\infty)$ est une variété de même régularité.*

Remarque II.3.2. Ce théorème est l'exacte généralisation du résultat principal de [AS85], où l'hypothèse de simple connexité est relaxée, au détail près que cette fois-ci, le bord peut être rattaché.

Théorème II.3.3 ([Bah08, théorème 1]). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Soit $K \subset M$ une partie totalement convexe, telle que la courbure sectionnelle de $\overline{M \setminus K}$ est strictement négative. Supposons que $\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-r})$ et $\|\nabla R\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$, où $r = d_g(\cdot, K)$ et $a > 1$ est une constante. Alors $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{0,1}$.*

Remarque II.3.4. Les hypothèses de décroissance exponentielle des estimées sont nécessaires lors des calculs menés pour prouver ces théorèmes. En fait, ces hypothèses ne peuvent pas être relaxées : outre l'impossibilité de généraliser la preuve donnée lorsque la convergence est plus faible, un exemple vérifiant les hypothèses avec $a = 1$ n'ayant pas de compactification lipschitzienne est détaillé à la suite de ce théorème.

En augmentant la vitesse de convergence de $\|R - R^0\|_g$ vers 0, on obtient un gain de régularité pour la compactification.

Théorème II.3.5 ([BG11, théorème A]). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète et non compacte. Soit $K \subset M$ une partie totalement convexe, telle que la courbure sectionnelle de $\overline{M \setminus K}$ est strictement négative. Supposons que $\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$ et $\|\nabla R\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$, où $r = d_g(\cdot, K)$ et a est une constante. Alors :*

- si $0 < a < 1$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{1,a}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{0,a}$,
- si $a = 1$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{0,\alpha}$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$,
- si $a > 1$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{0,1}$.

Lorsque la courbure est contrôlée à l'ordre 2, la régularité obtenue est même encore meilleure.

Théorème II.3.6 ([BG11, théorème B]). *Soit (M, g) vérifiant les hypothèses du théorème II.3.5. Si de plus $\|\nabla^2 R\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$, alors :*

- si $1 < a < 2$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{2,a-1}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{1,a-1}$,
- si $a = 2$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$,
- si $a > 2$, $M \cup M(\infty)$ est une variété de classe $\mathcal{C}^{2,1}$, et $e^{-2r}g$ s'étend au bord en une métrique de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.

Insistons sur le fait que ces résultats reposent uniquement sur une connaissance intrinsèque de la variété riemannienne (M, g) , et que le bord à l'infini est entièrement reconstruit à partir de la géométrie interne. Ils offrent ainsi une caractérisation des variétés asymptotiquement hyperboliques par leur géométrie : les variétés asymptotiquement localement hyperboliques sont asymptotiquement hyperboliques au sens des variétés conformément compactes. Dans le cas des métriques d'Einstein, on peut montrer que la régularité de la compactification est encore meilleure [BG11, Gic13].

Dans le prochain chapitre, nous étendons cette étude au cas kählerien : nous reconstruisons un bord à l'infini, muni de la structure espérée, à partir de données géométriques

II. Géométrie asymptotique en courbure négative

internes de la variété kählérienne considérée. La comparaison est effectuée avec le tenseur de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -1 (voir le corollaire [I.3.17](#)).

Chapitre

III

Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Ce chapitre, écrit en langue anglaise, reprend l'essentiel de la prépublication [Pin22]. Les résultats obtenus dans cette thèse sont démontrés ici.

Abstract

Given a complete non-compact Kähler manifold whose curvature tensor is asymptotic to that of the complex hyperbolic space, we endow its boundary at infinity with a strictly pseudoconvex CR structure.

Contents

Introduction	68
Structure of the paper	70
III.1 Preliminaries	70
III.1.1 Notations	70
III.1.2 Contact and CR manifolds	72
III.1.3 Some analysis results	72
III.2 Asymptotically locally complex hyperbolic manifolds	74
III.2.1 The ALCH and ALS conditions	74
III.2.2 First consequences	75
III.2.3 A volume growth lower bound	76
III.3 Normal Jacobi fields estimates	79
III.3.1 Radially parallel orthonormal frame	80
III.3.2 The Jacobi system	80
III.3.3 The local 1-forms	85
III.3.4 Normal Jacobi estimates	86
III.3.5 A volume growth upper bound	87

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

III.3.6	The local coframe	88
III.3.7	Asymptotic development of the metric	90
III.4	The contact structure	91
III.4.1	Order one estimates	92
III.4.2	The contact form	95
III.4.3	Regularity of the Carnot-Carathéodory metric	99
III.5	The almost complex structure	102
III.5.1	Notations	102
III.5.2	Shape operator estimates	104
III.5.3	Convergence	105
III.5.4	Integrability	106

Introduction

The study of the asymptotic geometry of complete non-compact Riemannian manifolds has proven to be fruitful in the understanding of the geometry of complex domains. By endowing a complete metric in the interior of such a domain, which sends the boundary to infinity, one can read much geometric information in the asymptotic development of the metric, see [Fef74, Fef76, Hir00]. The induced structure on the boundary at infinity leads to geometric invariants of the domain. The Bergman metric and the Kähler-Einstein metric are examples of such metrics and have been at the center of complex geometry for decades. The example of the unit ball in the standard Hermitian space is particularly interesting and leads to the complex hyperbolic space, which is the Kähler counterpart of the real hyperbolic space. In an exponential chart centered at any point, and in polar coordinates, the complex hyperbolic metric reads

$$dr^2 + 4 \sinh^2(r) \theta \otimes \theta + 4 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) \gamma \quad (\text{III.0.1})$$

where θ is the standard contact form on the odd dimensional unit sphere, and $\gamma = d\theta(\cdot, i\cdot)$ is the Levi form induced on the contact distribution $H = \ker \theta$ (notice that we have normalized the metric so that the holomorphic sectional curvature is constant equal to -1). This expression of the metric reveals the geometric structure of the odd dimensional unit sphere, which is a strictly pseudoconvex Cauchy-Riemann (CR) manifold. We say that the boundary at infinity of the complex hyperbolic space is the odd dimensional CR sphere. This example is a particular case of non-compact rank one symmetric spaces, namely the real hyperbolic, complex hyperbolic, quaternionic hyperbolic and Cayley hyperbolic spaces, which all admit a sphere at infinity endowed with a particular geometric structure [GL91]. In [Biq00], O. BIQUARD has built asymptotically symmetric Einstein metrics with a prescribed boundary at infinity which is modeled on the geometry of non-compact rank one symmetric spaces.

In a series of papers [BM08, Bah08, BG11, Gic13], T. MARSH, E. BAHUAUD and R. GICQUAUD have studied a sort of converse problem in the real hyperbolic setting. They

give geometric conditions for a complete non-compact Riemannian manifold whose sectional curvature decays sufficiently fast to -1 near infinity to have a conformal boundary at infinity, modeled on that of the real hyperbolic space, generalizing a result of M. Anderson and R. Schoen [AS85]. These conditions are the existence of a suitable codimension 0 convex submanifold, called an *essential subset*, and the convergence of the sectional curvature to -1 and of some covariant derivatives of the curvature tensor to 0 near infinity, with controlled exponential decays. The existence of the essential subset allows to mimic the polar decomposition of the model case. The regularity of the conformal compactification is closely related to the decay rate.

In this paper, we study the Kähler counterpart of the latter study. It is more intricate because of the anisotropic nature of the geometry. We consider a complete non-compact Kähler manifold (M, g, J) whose Riemann curvature tensor R is asymptotic to R^0 , the curvature tensor of constant holomorphic sectional curvature -1 . We first prove that if R is exponentially close to R^0 near infinity, then the metric tensor has an asymptotic development at infinity that is similar to that of the complex hyperbolic space.

Theorem A. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold with an essential subset K . Suppose that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is negative and that there exists $a > 1$ such that $\|R - R^0\|_g = \mathcal{O}(e^{-ar})$. Then ∂K is endowed with a nowhere vanishing continuous differential 1-form η and a continuous field of symmetric positive semi-definite bilinear forms γ_H , positive definite on the distribution $H = \ker \eta$, such that the metric reads in an exponential chart*

$$dr^2 + e^{2r} \eta \otimes \eta + e^r \gamma_H + \text{lower order terms.} \quad (\text{III.0.2})$$

See section III.3.7 for a precise statement. In view of the computations, the decay rate of the curvature is a reasonable assumption. Such a Kähler manifold will be referred to as an asymptotically locally complex hyperbolic manifold. The local condition on the curvature tensor is thus a sufficient condition to recover a development of the metric similar to that of the model space. The differential form η is called the canonical 1-form at infinity, and the field of symmetric bilinear forms γ_H is called the Carnot-Carathéodory metric at infinity. Under the extra condition that the metric is asymptotically locally symmetric, we can moreover prove the following.

Theorem B. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem A. Assume furthermore that there exists $b > 1$ such that $\|\nabla R\|_g = \mathcal{O}(e^{-br})$. Then the canonical 1-form at infinity η is a contact form of class $\mathcal{C}^1$.*

Under higher exponential decays, the Carnot-Carathéodory metric also gains one order of regularity.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Theorem C. *Suppose (M, g, J) is a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem B. Assume furthermore that $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$. Then the Carnot-Carathéodory metric at infinity γ_H is of class $\mathcal{C}^1$.*

We then show that under the assumptions of Theorem C, the contact distribution H is endowed with a canonical integrable almost complex structure J_H having the same properties as that of the model space.

Theorem D. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold satisfying the assumptions of Theorem C. Then the contact distribution at infinity $H = \ker \eta$ is endowed with an integrable almost complex structure J_H at infinity of class $\mathcal{C}^1$ such that the Carnot-Carathéodory metric at infinity is given by $\gamma_H = d\eta(\cdot, J_H \cdot)$. In particular, $(\partial K, H, J_H)$ is a strictly pseudoconvex CR manifold of class $\mathcal{C}^1$.*

Structure of the paper

In section III.1, we detail the notations and the setting. In section III.2, we define the *asymptotically locally complex hyperbolic* (ALCH) and *asymptotically locally symmetric* (ALS) conditions and give a lower bound on the volume growth. In section III.3, we study the asymptotic behavior of normal Jacobi fields, and then prove Theorem A. Section III.4 is devoted to the proof of Theorems B and C. Section III.5 is finally dedicated to the definition of the almost complex structure at infinity and to the proof of Theorem D. Useful curvature computations can be found in the Appendix A.

III.1 Preliminaries

III.1.1 Notations

Let (M^{2n+2}, g, J) be a complete, non-compact Kähler manifold of real dimension $2n + 2$, $n \geq 1$. We denote by ∇ its Levi-Civita connection. We recall that (M, g, J) is Kähler if the almost complex structure J is parallel and satisfies $g(JX, JY) = g(X, Y)$ for all tangent vectors X and Y . The Riemann curvature tensor R is defined by

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - (\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z)) \quad (\text{III.1.1})$$

and by abuse of notation, its contraction with the metric is still denoted the same: $R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$. Please note that our convention is that of [GHL04, Bes07], which is opposite to that of [dC92, Lee19]. In that case, the sectional curvature of a linear plane P with orthonormal basis $\{X, Y\}$ is $\sec(P) = \sec(X, Y) = R(X, Y, X, Y)$ and the holomorphic sectional curvature is given by $R(X, JX, X, JX)$.

Let $K \subset M$ be a compact codimension 0 submanifold with hypersurface boundary ∂K oriented by a unit normal ν . The associated outward normal exponential map $E: \mathbb{R} \times$

$\partial K \rightarrow M$ is defined by $E(r, p) = \gamma_p(r)$, where γ_p is the unit speed geodesic with initial data $\gamma_p(0) = 0$ and $\gamma'_p(0) = \nu(p)$. Following [BM08], the submanifold K is called an *essential subset* if ∂K is convex with respect to ν , meaning that its shape operator is non-negative (see Proposition I.2.24), and if $E: \mathbb{R}_+ \times \partial K \rightarrow M \setminus \overline{K}$ is a diffeomorphism. In that case, the visual boundary of (M, g) is homeomorphic to ∂K . If K is totally convex and if the sectional curvature outside of K is negative, then K is an essential subset (see [BM08, Theorem 3.1]).

Suppose $K \subset M$ is an essential subset. The *radial vector field* ∂_r is the vector field on $M \setminus \overline{K}$ defined by $\partial_r(\gamma_p(r)) = E(r, p)_* \frac{d}{dr} = \gamma'_p(r)$. A tensor defined on $M \setminus \overline{K}$ is said to be *radially parallel* if its covariant derivative in the ∂_r direction vanishes. Since $(\gamma_p)_{p \in \partial K}$ are geodesics, ∂_r is radially parallel. The shape operator S and the Jacobi operator R_{∂_r} are the fields of symmetric endomorphisms defined by $SX = \nabla_X \partial_r$ and $R_{\partial_r}X = R(\partial_r, X)\partial_r$. They are related by the Riccati equation

$$\mathcal{L}_{\partial_r} S = \nabla_{\partial_r} S = -S^2 - R_{\partial_r}, \quad (\text{III.1.2})$$

see Proposition II.2.4. They both vanish on ∂_r and take values in $\{\partial_r\}^\perp$. From the Riccati equation is derived the following: if ∂K is convex and the sectional curvature of $M \setminus \overline{K}$ is non-positive, then the level hypersurfaces above ∂K are convex (see Proposition II.2.8).

If $v \in T_p \partial K$ is a tangent vector, the associated *normal Jacobi field* along γ_p is defined as $Y_v(r) = E(r, p)_* v$. If v is a (local) vector field on ∂K , we write $Y_v(\gamma_p(r)) = Y_{v(p)}(r)$, which is still called a normal Jacobi field.

Lemma III.1.1. *If v is a (local) vector field on ∂K , then:*

- (1) *The vector fields Y_v and ∂_r commute,*
- (2) *$\nabla_{\partial_r} Y_v = SY_v$,*
- (3) *Y_v is everywhere orthogonal to ∂_r ,*
- (4) *The restriction of Y_v along any radial geodesic γ_p is a Jacobi field.*

Proof. (1) Since E is a diffeomorphism onto its image, the naturality of the Lie bracket yields $[\partial_r, Y_v] = E_*[\frac{d}{dr}, v] = E_*0 = 0$.

(2) The Levi-Civita connection is torsion-free, hence $SY_v - \nabla_{\partial_r} Y_v = [\partial_r, Y_v]$. The result follows by (1).

(3) The equation of geodesics, together with (2) give $\partial_r(g(Y_v, \partial_r)) = g(SY_v, \partial_r)$. This last expression identically vanishes since S has range in $\{\partial_r\}^\perp$. The function $g(Y_v, \partial_r)$ is constant along radial geodesics, and the result follows from the initial condition $g(v, \nu) = 0$.

(4) From (2), it holds that $\nabla_{\partial_r} Y_v = SY_v$. Finally, it holds that $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{\partial_r} Y_v) = \nabla_{\partial_r}(SY_v) = (\nabla_{\partial_r} S)Y_v + S\nabla_{\partial_r} Y_v$, and the result follows from the Riccati equation.

□

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Recall that (M, g, J) is assumed Kähler. We define the *constant -1 holomorphic sectional curvature tensor* R^0 by

$$\begin{aligned} R^0(X, Y, Z, T) = & \frac{1}{4}(g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T)) \\ & + g(X, JT)g(Y, JZ) - g(X, JZ)g(Y, JT) \\ & + 2g(X, JY)g(T, JZ), \end{aligned} \quad (\text{III.1.3})$$

see Corollary I.3.17. It is a parallel tensor having the symmetries of a curvature tensor. In case (M, g, J) is the complex hyperbolic space, then $R = R^0$. Note that this definition differs from that of [KN96b, IX.7] by its sign: the reason is that we require for R^0 to have -1 holomorphic sectional curvature. For any orthonormal family $\{X, Y\}$, $R^0(X, Y, X, Y) = -\frac{1}{4}(1 + 3g(JX, Y)^2)$, from which is deduced the fundamental pinching

$$-1 \leq R^0(X, Y, X, Y) \leq -\frac{1}{4}. \quad (\text{III.1.4})$$

If $P = \text{span}\{X, Y\}$, the lower bound is achieved exactly when $P = JP$ (we say that P is a *complex line*) while the upper bound is achieved exactly when $P \perp JP$ (we say that P is a *totally real plane*).

III.1.2 Contact and CR manifolds

A contact form on an odd dimensional manifold M is a differential form of degree 1 α such that $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ everywhere ($\dim M = 2n + 1$). The associated contact structure is $H = \ker \alpha$. We say that (M, H) is a contact manifold, and that α calibrates H . Note that for H fixed, α is not unique. The Reeb vector field of α is the unique vector field X_α such that $\alpha(X_\alpha) = 1$ and $d\alpha(X_\alpha, \cdot) = 0$.

An almost complex structure on H is a section of the bundle $\text{End}(H)$ such that $J^2 = -\text{Id}_H$. The complexified bundle $H \otimes \mathbb{C}$ then splits into the eigenspaces of the complex linear extension of J , that is $H \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, where $H^{1,0} = \{X - iJX \mid X \in H\}$ and $H^{0,1} = \{X + iJX \mid X \in H\}$. The almost complex structure J is said to be integrable if the sections of $H^{1,0}$ form a linear subalgebra of the sections of $TM \otimes \mathbb{C}$, that is if $[X, Y] \in \Gamma(H^{1,0})$ whenever $X, Y \in \Gamma(H^{1,0})$.

A *CR manifold* (M, H, J) is a contact manifold (M, H) endowed with an integrable almost complex structure on H . When $H = \ker \alpha$ and $d\alpha(\cdot, J\cdot)$ is positive definite on H , (M, α, J) is called a *strictly pseudoconvex CR manifold*. CR geometry is the natural geometry of real hypersurfaces in complex manifolds. The toy model is $\mathbb{S}$, the unit sphere of $\mathbb{C}^n$, with contact distribution $H = T\mathbb{S} \cap (iT\mathbb{S})$ and with almost complex structure J given by the multiplication by i in the fibers. Endowed with its natural contact form, it is a strictly pseudoconvex CR manifold.

III.1.3 Some analysis results

Throughout the paper, we will several times use the two following Theorems from real analysis.

Theorem 1 (GRÖNWALL'S inequality). *Let $I = [t_0, T) \subset \mathbb{R}$ be an interval with $T \in (t_0, +\infty]$ and let φ, α and $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ be respectively continuous, non-decreasing, and non-negative continuous functions. Assume that*

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) \varphi(s) \, ds. \quad (\text{III.1.5})$$

Then it holds that

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \leq \alpha(t) \exp \left(\int_{t_0}^t \beta(s) \, ds \right). \quad (\text{III.1.6})$$

An inequality of the form (III.1.5) will be referred to as a “Grönwall-like inequality”.

Theorem 2 (RADEMACHER'S Theorem). *Let $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz function defined on an interval I , and let $t_0 \in I$ be fixed. Then φ is almost everywhere differentiable, and it holds that*

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi'(s) \, ds, \quad (\text{III.1.7})$$

where the latter integral is the Lebesgue integral of the almost everywhere defined function φ' .

Theorem 2 will be applied to the restriction of the norm of tensors restricted along radial geodesics γ_p .

The following Lemma will be useful in order to estimate the growth of normal Jacobi fields.

Lemma III.1.2. *Let $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^2$ function. Suppose that there exist three positive constants α, β and γ such that*

$$\forall t \geq 0, \quad |f''(t) + \alpha f'(t)| \leq \gamma e^{-\beta t}.$$

Then f has a limit $f_\infty \in \mathbb{R}$ when $t \rightarrow +\infty$ and it holds that

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad |f'(t)| &\leq \begin{cases} \left(|f'(0)| + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \right) e^{-\beta t} & \text{if } \beta < \alpha, \\ |f'(0)| + \gamma t e^{-\alpha t} & \text{if } \beta = \alpha, \\ \left(|f'(0)| + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \right) e^{-\alpha t} & \text{if } \beta > \alpha, \end{cases} \\ \forall t \geq 0, \quad |f(t) - f_\infty| &\leq \begin{cases} \left(|f'(0)| + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \right) \frac{e^{-\beta t}}{\beta} & \text{if } \beta < \alpha, \\ \frac{\alpha |f'(0)| + \gamma(\alpha + 1)}{\alpha^2} e^{-\alpha t} & \text{if } \beta = \alpha, \\ \left(|f'(0)| + \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \right) \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} & \text{if } \beta > \alpha. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.1.8})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Proof. Write $e^{\alpha t}(f''(t) + \alpha f'(t)) = (e^{\alpha t}f'(t))'$. Integrating on $[0, t]$ and using the assumption yields

$$\forall t \geq 0, \quad |f'(t)| \leq e^{-\alpha t}|f'(0)| + \gamma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)x} dx. \quad (\text{III.1.9})$$

There are three cases to consider depending on $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ or $\beta > \alpha$. In any case, equation (III.1.9) shows that f' is integrable and hence that f converges. The result follows from a straightforward integration. $\square$

We finally give a Lemma that will be applied to give a uniform bound on the norm of the shape operator.

Lemma III.1.3. *Let $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz function. Let C and a be positive constants such that the following inequality holds almost everywhere*

$$\sigma' \leq -\sigma^2 + 1 + Ce^{-at}. \quad (\text{III.1.10})$$

Then there exists a constant $C' > 0$ depending only on C and a such that

$$\forall t \geq 0, \quad \sigma(t) \leq 1 + (\sigma(0) + C') \begin{cases} e^{-at} & \text{if } 0 < a < 2, \\ (t+1)e^{-2t} & \text{if } a = 2, \\ e^{-2t} & \text{if } a > 2. \end{cases} \quad (\text{III.1.11})$$

Proof. Let $\varsigma = \sigma - 1$. Then ς is locally Lipschitz and almost everywhere differentiable, and it follows from the assumption on σ and from the fact that $\varsigma^2 \geq 0$, that

$$\varsigma'(t) \leq -2\varsigma + Ce^{-at} \quad a.e. \quad (\text{III.1.12})$$

Thus, it holds that

$$(\varsigma(t)e^{2t})' \leq Ce^{(2-a)t} \quad a.e. \quad (\text{III.1.13})$$

Integrating this last inequality yields

$$\forall t \geq 0, \quad \varsigma(t) \leq \varsigma(0)e^{-2t} + C \begin{cases} \frac{e^{-at} - e^{-2t}}{2-a} & \text{if } 0 < a < 2, \\ re^{-2t} & \text{if } a = 2, \\ \frac{e^{-2t} - e^{-at}}{a-2} & \text{if } a > 2. \end{cases} \quad (\text{III.1.14})$$

The result now follows from comparing the exponents. $\square$

III.2 Asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

III.2.1 The ALCH and ALS conditions

We define the two following asymptotic conditions.

Definition III.2.1 ((ALCH) and (ALS) manifolds). Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold, $K \subset M$ be a compact subset and $r = d_g(\cdot, K)$ be the distance function to K .

- (1) (M, g, J) is said to be *asymptotically locally complex hyperbolic*, (ALCH) in short, of order $a > 0$, if there exists a constant $C_0 > 0$ such that

$$\|R - R^0\|_g \leq C_0 e^{-ar}. \quad (\text{III.2.1})$$

- (2) (M, g) is said to be *asymptotically locally symmetric*, (ALS) in short, of order $b > 0$, if there exists a constant $C_1 > 0$ such that

$$\|\nabla R\|_g \leq C_1 e^{-br}. \quad (\text{III.2.2})$$

Remark III.2.2. These two definitions do not depend on the choice of the compact subset $K \subset M$.

In practice, K will refer to an essential subset. The complex hyperbolic space is of course (ALCH) and (ALS) of any order since in that case, $R = R^0$ and $\nabla R = 0$.

III.2.2 First consequences

We fix (M, g, J) an (ALCH) manifold of order $a > 0$. The following Lemmas are direct consequences of the definition of R^0 .

Lemma III.2.3. *The norm of the Riemann curvature tensor of an (ALCH) manifold of order $a > 0$ is uniformly bounded.*

Lemma III.2.4. *Let $p \in M$ and $P \subset T_p M$ be a tangent plane. Then*

$$-1 - C_0 e^{-ar(p)} \leq \sec P \leq -\frac{1}{4} + C_0 e^{-ar(p)}. \quad (\text{III.2.3})$$

We now assume that $K \subset M$ is an essential subset and that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is non-positive. In that case, the shape operator S is positive semi-definite on $\overline{M \setminus K}$, and its operator norm at a point $\gamma_p(r) \in \overline{M \setminus K}$ is given by its largest eigenvalue.

Proposition III.2.5. *There exists a constant $C > 0$ independent of (r, p) such that*

$$\|S_{\gamma_p(r)}\|_g \leq 1 + C \begin{cases} e^{-ar} & \text{if } 0 < a < 2, \\ (r+1)e^{-2r} & \text{if } a = 2, \\ e^{-2r} & \text{if } a > 2. \end{cases} \quad (\text{III.2.4})$$

In particular, $\|S\|_g$ is uniformly bounded on $\overline{M \setminus K}$, and $\|S\|_g - 1$ is bounded above by an integrable function on $\overline{M \setminus K}$.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Proof. Let $p \in \partial K$ and $\sigma_{\max}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $\sigma(r) = \|S_{\gamma_p(r)}\|_g$. Since S is positive semi-definite, $\sigma(r)$ is the largest eigenvalue of $S_{\gamma_p(r)}$. Identify all tangent spaces along γ_p thanks to the parallel transport, and let $(S_r)_{r \geq 0}$ and $(R_r)_{r \geq 0}$ be the associated endomorphisms of $T_p \partial K$ obtained from S and R_{∂_r} . Therefore, σ is given by the expression $\sigma(r) = \sup_{X \in T_p \partial K, \|X\|_g=1} g(S_r X, X)$. In this identification, the Riccati equation reads $S'_r = -S_r^2 - R_r$. Let $X \in T_p \partial K$ be a unit vector, $r \geq 0$ and $h > 0$. Then

$$\begin{aligned} g(S_{r+h} X, X) &= g((S_r + hS'_r + o(h))X, X) \\ &= g((S_r - hS_r^2)X, X) + h(-g(R_r X, X) + o(1)). \end{aligned} \quad (\text{III.2.5})$$

For small enough $h > 0$, $S_r - hS_r^2$ is positive semi-definite and its largest eigenvalue is given by $\sigma(r) - h\sigma(r)^2$. In addition, $g(R_r X, X)$ is the sectional curvature of the tangent plane spanned by ∂_r and the parallel transport of X along γ_p evaluated at $\gamma_p(r)$, which is bounded below by $-1 - C_0 e^{-ar}$ (Lemma III.2.4). It then follows that

$$g(S_{r+h} X, X) \leq \sigma(r) - h\sigma(r)^2 + h(1 + C_0 e^{-ar} + o(1)). \quad (\text{III.2.6})$$

Taking the supremum over all unit vectors X of this last inequality yields

$$\sigma(r+h) \leq \sigma(r) - h\sigma(r)^2 + h(1 + C_0 e^{-ar} + o(1)) \quad (\text{III.2.7})$$

from which is deduced the inequality

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(r+h) - \sigma(r)}{h} \leq -\sigma(r)^2 + 1 + C_0 e^{-ar}. \quad (\text{III.2.8})$$

Since S is smooth and $\|\cdot\|$ is Lipschitz, σ is locally Lipschitz, and by Rademacher's Theorem, σ is almost everywhere differentiable. It then follows from (III.2.8) that

$$\sigma' \leq -\sigma^2 + 1 + C_0 e^{-ar} \quad a.e. \quad (\text{III.2.9})$$

According to Lemma III.1.3, there exists $C' > 0$ depending only on C_0 and a such that

$$\|S_{\gamma_p(r)}\|_g \leq 1 + (\|S_p\|_g + C') \begin{cases} e^{-ar} & \text{if } 0 < a < 2, \\ (r+1)e^{-2r} & \text{if } a = 2, \\ e^{-2r} & \text{if } a > 2. \end{cases} \quad (\text{III.2.10})$$

The result now follows by defining $C = C' + \sup_{p \in \partial K} \|S_p\|_g$ which is finite by compactness of ∂K . $\square$

III.2.3 A volume growth lower bound

The (ALCH) assumption implies two bounds on the sectional curvature. The lower bound $\sec - \geq 1 + \mathcal{O}(e^{-ar})$ forces the largest eigenvalue of the shape operator, and thus its operator norm, to be uniformly bounded. We shall now show that the upper bound $\sec \leq -\frac{1}{4} + \mathcal{O}(e^{-ar})$ forces the trace of the shape operator to be bounded from below. We

then derive a lower bound on the volume density function thanks to equation (III.2.21). Our study is inspired by [CE08] and [HK78].

We first show the following general Lemma from geometric comparison analysis. It is very similar to different results stated in [HK78]. The author could not find a precise proof of the exact formulation given below and therefore decided to give one, relying on classical Jacobi fields techniques.

Lemma III.2.6. *Let (M^{m+1}, g) be a complete Riemannian manifold, $N \subset M$ be a hypersurface co-oriented by a unit normal ν , $p \in \partial K$, and $\kappa > 0$ such that*

- (1) *N is convex with respect to ν ,*
- (2) *There exists $R > 0$ such that the normal exponential map E is a diffeomorphism from $[0, R) \times N$ onto its image,*
- (3) *The sectional curvature on this image is non-positive,*
- (4) *There exists $r_0 \in [0, R)$ such for all $r \in [r_0, R)$, the sectional curvature of any tangent plane base at $\gamma_p(r)$ is bounded above by $-\kappa^2$.*

Then it holds that

$$\forall r \in [r_0, R), \quad \text{trace}(S_{\gamma_p(r)}) \geq m\kappa \tanh(\kappa(r - r_0)). \quad (\text{III.2.11})$$

Proof. The proof is quite long and goes in two steps. We first bound from below the trace of S by an integral related to the norm of some Jacobi fields. Then, we compare the situation with its counterpart in the hyperbolic space of dimension $m + 1$ and sectional curvature $-\kappa^2$, where N is replaced by an isometrically embedded m dimensional hyperbolic space of the same sectional curvature.

Let $\{\partial_r, E_1, \dots, E_m\}$ be an orthonormal frame along γ_p obtained thanks to the parallel transport of an orthonormal basis $\{\nu, e_1, \dots, e_m\}$ of $T_p M$. Let $r \in [r_0, R)$ be fixed. For $j \in \{1, \dots, m\}$, let Y_j^r be the unique Jacobi field along γ_p such that $Y_j^r(r) = E_j(r)$ and $\nabla_{\partial_r} Y_j^r(r) = S_{\gamma_p(r)} E_j(r)$. It is shown similarly to the proof of Lemma III.1.1 that the equality $\nabla_{\partial_r} Y_j^r = S Y_j^r$ holds all along γ_p . By assumptions (2) and (3) and by the convexity of N , S is a positive definite operator and it follows that, for $j \in \{1, \dots, m\}$

$$g(SY_j^r(r), Y_j^r(r)) \geq g(SY_j^r(r), Y_j^r(r)) - g(SY_j^r(r_0), Y_j^r(r_0)) = \int_{r_0}^r \frac{d}{dt} g(SY_j^t, Y_j^t). \quad (\text{III.2.12})$$

The equation of Jacobi fields yields the equality

$$\frac{d}{dt} g(SY_j^t, Y_j^t) = \|\nabla_{\partial_r} Y_j^t\|_g^2 - \sec(\partial_r, Y_j^t) \|Y_j^t\|_g^2. \quad (\text{III.2.13})$$

Since $\text{trace}(S_{\gamma_p(r)}) = \sum_{j=1}^m g(SE_j(r), E_j(r))$, the initial conditions for the Jacobi fields Y_j^r and the assumption (4) now gives

$$\text{trace}(S_{\gamma_p(r)}) \geq \sum_{j=1}^m \int_{r_0}^r \|\nabla_{\partial_r} Y_j^t\|_g^2 + \kappa^2 \|Y_j^t\|_g^2. \quad (\text{III.2.14})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

We now compare the right-hand side of (III.2.14) with a similar situation in the space form of curvature $-\kappa^2$. Let $(\widetilde{M}, \widetilde{g}) = \mathbb{R}H^{m+1}(-\kappa^2)$ be that space form, $\widetilde{\nabla}$ its Levi-Civita connection, $\widetilde{N} = \mathbb{R}H^m(-\kappa^2) \hookrightarrow \widetilde{M}$ be isometrically embedded, for instance as the equatorial hyperplane in the ball model, with a unit normal $\widetilde{\nu}$, and shape operator $\widetilde{S}$. Let $\{\widetilde{\partial}_r, \widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}_m\}$ be an orthonormal frame along a radial geodesic $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}$ obtained thanks to the parallel transport of an orthonormal basis $\{\widetilde{\nu}, \widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_m\}$ of $T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$. For $j \in \{1, \dots, m\}$, let $\widetilde{Y}_j$ be the unique Jacobi field along $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}$ such that $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j = \widetilde{S} \widetilde{Y}_j$ and $\widetilde{Y}_j(r - r_0) = \widetilde{E}_j(r - r_0)$ and let X_j be defined by

$$\forall t \in [0, r - r_0], \quad X_j(t) = \sum_{k=1}^m g(Y_j^r(r_0 + t), E_k(r_0 + t)) \widetilde{E}_k(t). \quad (\text{III.2.15})$$

Then it follows that

$$\forall t \in [0, r - r_0], \quad \|X_j(t)\|_{\widetilde{g}} = \|Y_j^r(r_0 + t)\|_g, \quad \|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} X_j(t)\|_{\widetilde{g}} = \|\nabla_{\partial_r} Y_j^r(r_0 + t)\|_g. \quad (\text{III.2.16})$$

Expanding the inequality $\|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r}(\widetilde{Y}_j - X_j)\|_{\widetilde{g}}^2 + \kappa^2 \|\widetilde{Y}_j - X_j\|_{\widetilde{g}}^2 \geq 0$, and integrating the developed expression on $[0, r - r_0]$ yields

$$\begin{aligned} \int_0^{r-r_0} \|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} X_j\|_{\widetilde{g}}^2 + \kappa^2 \|X_j\|_{\widetilde{g}}^2 &\geq 2 \int_0^{r-r_0} \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} X_j) + \kappa^2 \widetilde{g}(\widetilde{Y}_j, X_j) \\ &\quad - \int_0^{r-r_0} \|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j\|_{\widetilde{g}}^2 + \kappa^2 \|\widetilde{Y}_j\|_{\widetilde{g}}^2. \end{aligned} \quad (\text{III.2.17})$$

Since $\widetilde{Y}_j$ is a Jacobi field, the integrands of the right-hand side satisfy

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} X_j) + \kappa^2 \widetilde{g}(\widetilde{Y}_j, X_j) &= \frac{d}{dt} \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}} \widetilde{Y}_j, X_j), \text{ and} \\ \|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j\|_{\widetilde{g}}^2 + \kappa^2 \|\widetilde{Y}_j\|_{\widetilde{g}}^2 &= \frac{d}{dt} \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j, \widetilde{Y}_j). \end{aligned} \quad (\text{III.2.18})$$

Recall that $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \widetilde{Y}_j = \widetilde{S} \widetilde{Y}_j$. Since N is isometrically embedded, it holds that $\widetilde{S}_{\widetilde{p}} = 0$. Also, recall that at $r - r_0$, $\widetilde{Y}_j(r - r_0) = X_j(r - r_0)$. Hence, (III.2.17) yields

$$\int_0^{r-r_0} \|\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} X_j\|_{\widetilde{g}}^2 + \kappa^2 \|X_j\|_{\widetilde{g}}^2 \geq \widetilde{g}(\widetilde{S} \widetilde{E}_j(r - r_0), \widetilde{E}_j(r - r_0)). \quad (\text{III.2.19})$$

It now follows from equations (III.2.14), (III.2.16) and (III.2.19) that we have the inequality $\text{trace}(S_{\gamma_p(r)}) \geq \text{trace}(\widetilde{S}_{\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}(r-r_0)})$. Note that $\Sigma_{\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}(t)} = \kappa \tanh(\kappa t) \text{Id}_{\{\widetilde{\gamma}_{\widetilde{p}}(t)\}^\perp}$ satisfies the Riccati equation

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\partial}_r} \Sigma = -\Sigma^2 - \widetilde{R}_{\widetilde{\partial}_r} \quad (\text{III.2.20})$$

with initial data $\Sigma_{\widetilde{p}} = 0$, so that $\widetilde{S} = \Sigma$. This concludes the proof. $\square$

The Kähler manifold (M, g, J) is canonically oriented, and so is the co-oriented hypersurface ∂K . Let v_g and $v_{g|_{\partial K}}$ be the Riemannian volume forms induced by the metrics g and $g|_{\partial K}$. Since E is a diffeomorphism, E^*g and $dr \wedge v_{g|_{\partial K}}$ are two volume forms on $\mathbb{R}_+ \times \partial K$, and they are proportional. The *volume density function* λ is the unique positive function $\lambda: \mathbb{R}_+ \times \partial K \rightarrow \mathbb{R}$ such that $E^*g = \lambda dr \wedge v_{g|_{\partial K}}$. It is clear that $\lambda|_{\{0\} \times \partial K} = 1$. The volume density function and the shape operator are related by the following differential equation

$$\frac{\partial \lambda(r, p)}{\partial r} = \lambda(r, p) \operatorname{trace}(S_{\gamma_p(r)}), \quad (\text{III.2.21})$$

see Proposition II.2.9. We shall now derive from Lemma III.2.6 a lower bound on the volume density function.

Proposition III.2.7. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > 0$ with an essential subset K , such that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is negative. Let $\varepsilon \in (0, n + \frac{1}{2})$ be fixed. Then there exists $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ and $\Lambda_- = \Lambda_-(\varepsilon) > 0$ such that the volume density function λ satisfies*

$$\forall (r, p) \in [r_0, +\infty) \times \partial K, \quad \lambda(r, p) \geq \Lambda_- e^{(n+\frac{1}{2}-\varepsilon)r}. \quad (\text{III.2.22})$$

Proof. Let $\kappa = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2n+1} > 0$ and $r_0 = \max \left\{ \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\frac{1}{4}-\kappa^2}{C_0} \right), 1 \right\} > 0$. By definition of r_0 ,

$$\forall r \geq r_0, \quad -\frac{1}{4} + C_0 e^{-ar} \leq -\kappa^2 < 0. \quad (\text{III.2.23})$$

According to Lemma III.2.4, the sectional curvature of linear planes based at points $\gamma_p(r)$, with $r \geq r_0$, have sectional curvature bounded above by $-\kappa^2$. Hence, Lemma III.2.6 yields the inequality

$$\forall (r, p) \in [r_0, +\infty) \times \partial K, \quad \operatorname{trace}(S_{\gamma_p(r)}) \geq (2n+1)\kappa \tanh(\kappa(r-r_0)). \quad (\text{III.2.24})$$

The differential equation (III.2.21) satisfied by λ and S now yields

$$\forall (r, p) \in [r_0, +\infty) \times \partial K, \quad \frac{\partial_r \lambda(r, p)}{\lambda(r, p)} \geq (2n+1)\kappa \tanh(\kappa(r-r_0)). \quad (\text{III.2.25})$$

Integrating this last inequality yields

$$\forall (r, p) \in [r_0, +\infty) \times \partial K, \quad \lambda(r, p) \geq \lambda(r_0, p) \cosh^{2n+1}(\kappa(r-r_0)). \quad (\text{III.2.26})$$

The result now follows by setting $\Lambda_- = \frac{e^{-(2n+1)\kappa r_0}}{2^{2n+1}} \min_{p \in \partial K} \lambda(r_0, p)$, which exists and is positive since ∂K is compact and λ positive and continuous, and by noticing that $(2n+1)\kappa = n + \frac{1}{2} - \varepsilon$. $\square$

III.3 Normal Jacobi fields estimates

In this section, we study the asymptotic behavior of normal Jacobi fields. The geometric structure we wish to highlight being of contact nature, we choose not to work in coordinates. Instead, we define some natural moving frames, which we call radially parallel orthonormal frames, in which the computations are convenient.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

III.3.1 Radially parallel orthonormal frame

To the radial vector field ∂_r is naturally associated the vector field $\mathcal{J}\partial_r$. Since the metric is Kähler, $\mathcal{J}\partial_r$ is radially parallel. It can be obtained thanks to the parallel transport of $J\nu$ along the radial geodesics $(\gamma_p)_{p \in \partial K}$.

Definition III.3.1 (Radially parallel orthonormal frame). Let $\{J\nu, e_1, \dots, e_{2n}\}$ be an orthonormal frame defined on an open subset $U \subset \partial K$. For $j \in \{1, \dots, 2n\}$, let E_j be vector fields obtained by the parallel transport of e_j along radial geodesics. The orthonormal frame $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ on the cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$ is called the *radially parallel orthonormal frame* associated to $\{J\nu, e_1, \dots, e_{2n}\}$.

A radially parallel orthonormal frame is composed of radially parallel vector fields. It is worth noting that $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r\}$ spans a complex line while $\{\partial_r, E_j\}$ spans a totally real plane if $j \in \{1, \dots, 2n\}$. Moreover, $\{E_1, \dots, E_{2n}\}$ is an orthonormal frame of the J -invariant subbundle of TM $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r\}^\perp$.

Lemma III.3.2. Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > 0$ with an essential subset K , and let $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame. Then the following holds

$$\begin{cases} |\sec(\partial_r, \mathcal{J}\partial_r) + 1| \leq C_0 e^{-ar}, \\ |R(\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, \partial_r, E_j)| \leq C_0 e^{-ar}, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}, \\ |\sec(\partial_r, E_j) + \frac{1}{4}| \leq C_0 e^{-ar}, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}, \\ |R(\partial_r, E_i, \partial_r, E_j)| \leq C_0 e^{-ar}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 2n\}, i \neq j. \end{cases} \quad (\text{III.3.1})$$

Proof. Let X and Y be unit vector fields. The (ALCH) condition gives

$$|R(\partial_r, X, \partial_r, Y) - R^0(\partial_r, X, \partial_r, Y)| \leq C_0 e^{-ar}. \quad (\text{III.3.2})$$

The result follows from a direct computation of $R^0(\partial_r, X, \partial_r, Y)$ for the different values of X and Y in $\{\mathcal{J}\partial_r, E_j\}$ and their orthogonal properties. $\square$

III.3.2 The Jacobi system

Since K is an essential subset, for $r \geq 0$, $E(r, \cdot)$ is a diffeomorphism between ∂K and the level hypersurface at distance r above ∂K .

Definition III.3.3 (Local 1-forms). Let $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on the cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. We define on U the family of 1-forms $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ by

$$\begin{aligned} \forall r \geq 0, \quad \eta_r &= e^{-r} E(r, \cdot)^* (g(\cdot, \mathcal{J}\partial_r)|_{\partial_r^\perp}), \\ \forall j \in \{1, \dots, 2n\}, \forall r \geq 0, \quad \eta_r^j &= e^{-\frac{r}{2}} E(r, \cdot)^* (g(\cdot, E_j)|_{\partial_r^\perp}). \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

In other words, $\eta_r(v) = e^{-r}g(Y_v, J\partial_r)$ and $\eta_r^j(v) = e^{-\frac{r}{2}}g(Y_v, E_j)$. Note that η_r is defined on all of ∂K and does not depend on the choice of a radially parallel orthonormal frame. With these notations, a normal Jacobi field $Y_v = E_*v$ along a radial geodesic γ_p reads

$$Y_v = \eta_r(v)e^r J\partial_r + \sum_{j=1}^{2n} \eta_r^j(v)e^{\frac{r}{2}} E_j. \quad (\text{III.3.4})$$

On the cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$, we also define the following $(2n+1)^2$ functions $\{u_k^i\}_{i,k \in \{0, \dots, 2n\}}$ by

$$u_k^i = - \begin{cases} \sec(\partial_r, J\partial_r) + 1 & \text{if } i = k = 0, \\ e^{-\frac{r}{2}} R(\partial_r, J\partial_r, \partial_r, E_k) & \text{if } i = 0, k \in \{1, \dots, 2n\}, \\ e^{\frac{r}{2}} R(\partial_r, E_i, \partial_r, J\partial_r) & \text{if } i \in \{1, \dots, 2n\}, k = 0, \\ R(\partial_r, E_i, \partial_r, E_k) & \text{if } i, k \in \{1, \dots, 2n\}, i \neq k, \\ \sec(\partial_r, E_i) + \frac{1}{4} & \text{if } i = k \in \{1, \dots, 2n\}. \end{cases} \quad (\text{III.3.5})$$

For the rest of the section, we shall fix the vector v . We henceforth drop out the variable v and write $\eta(r)$ and $\eta^j(r)$ in order to emphasis the dependence in r . Derivatives of functions will denote the partial derivative in the radial direction. Finally, for easier reading, when a summation is involved, we will denote $\eta_r(v)$ by $\eta^0(r)$.

Lemma III.3.4. *The functions $\{\eta_r^i(v)\}_{i \in \{0, \dots, 2n\}}$ are solutions of the linear second order differential system*

$$\begin{cases} \eta''(r) + 2\eta'(r) = \sum_{k=0}^{2n} u_k^0 \eta^k(r), \\ (\eta^j)''(r) + (\eta^j)'(r) = \sum_{k=0}^{2n} u_k^j \eta^k(r), \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}. \end{cases} \quad (\text{III.3.6})$$

Proof. Since the vectors of the radially parallel orthonormal frame are radially parallel, it follows that

$$\nabla_{\partial_r}(\nabla_{\partial_r} Y_v) = (\eta'' + 2\eta' + \eta)e^r J\partial_r + \sum_{j=1}^{2n} \left((\eta^j)'' + (\eta^j)' + \frac{1}{4}\eta^j \right) e^{\frac{r}{2}} E_j. \quad (\text{III.3.7})$$

Since Y_v is a Jacobi field along γ_p , it holds that

$$\nabla_{\partial_r}(\nabla_{\partial_r} Y_v) = -\eta e^r R(\partial_r, J\partial_r)\partial_r - \sum_{j=1}^{2n} \eta^j e^{\frac{r}{2}} R(\partial_r, E_j)\partial_r. \quad (\text{III.3.8})$$

The result then follows from an identification of the coefficients in the orthonormal frame $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$. $\square$

We now give a reformulation of the Jacobi system (III.3.6) with integrals.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Lemma III.3.5. *The functions $\{\eta^i(r)\}_{i \in \{0, \dots, 2n\}}$ are solutions of the integral system*

$$\begin{cases} \eta(r) &= \eta(0) + \eta'(0) \frac{1 - e^{-2r}}{2} \\ &+ \int_0^r \sum_{k=0}^{2n} u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) \frac{1 - e^{-2(r-s)}}{2} ds, \\ \eta^j(r) &= \eta^j(0) + (\eta^j)'(0)(1 - e^{-r}) \\ &+ \int_0^r \sum_{k=0}^{2n} u_k^j(\gamma_p(s)) \eta^k(s) (1 - e^{-(r-s)}) ds, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}. \end{cases} \quad (\text{III.3.9})$$

Proof. We give details for the first equation, the other ones being proven similarly. The differential equation satisfied by $\eta_r(v)$ (see equation (III.3.6)) reads

$$(\eta'(r)e^{2r})' = \sum_{k=0}^{2n} e^{2r} u_k^0 \eta^k(r) \quad (\text{III.3.10})$$

which integrates as

$$\eta'(r) = \eta'(0)e^{-2r} + \int_0^r \sum_{k=0}^{2n} u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(r-s)} ds. \quad (\text{III.3.11})$$

A second integration now gives

$$\eta(r) = \eta(0) + \eta'(0) \frac{1 - e^{-2r}}{2} + \sum_{k=0}^{2n} \int_0^r \int_0^t u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(t-s)} ds dt. \quad (\text{III.3.12})$$

The function $(s, t) \in [0, r]^2 \mapsto u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}$ is measurable and bounded on a compact domain, and hence integrable. It now follows from Fubini's Theorem that for $k \in \{0, \dots, 2n\}$, it holds that

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^t u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(t-s)} ds dt &= \int_{[0, r]^2} u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} ds dt \\ &= \int_{[0, r]^2} u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{-2(t-s)} \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} dt ds \\ &= \int_0^r u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) e^{2s} \left(\int_s^r e^{-2t} dt \right) ds \\ &= \int_0^r u_k^0(\gamma_p(s)) \eta^k(s) \frac{1 - e^{-2(r-s)}}{2} ds. \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

The proof is now complete. $\square$

Let $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ be defined by $u(r) = \max_{i,k \in \{0, \dots, 2n\}} |u_k^i(\gamma_p(r))|$.

Lemma III.3.6. *The following upper bound holds*

$$\forall r \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(r)| \leq ((2n+1)\|S_p\| + n+1)\|v\| \exp\left((2n+1) \int_0^r u(s) ds\right). \quad (\text{III.3.14})$$

Proof. First, note that

$$\forall 0 \leq s \leq r, \quad \max \left\{ \left| \frac{1-e^{-2r}}{2} \right|, |1-e^{-r}|, \left| \frac{1-e^{-2(r-s)}}{2} \right|, |1-e^{-(r-s)}| \right\} \leq 1. \quad (\text{III.3.15})$$

The triangle inequality applied to the integral system (III.3.9) thus yields

$$\begin{cases} |\eta(r)| \leq |\eta(0)| + |\eta'(0)| + \int_0^r u(s) \sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(s)| ds, \\ |\eta^j(r)| \leq |\eta^j(0)| + |(\eta^j)'(0)| + \int_0^r u(s) \sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(s)| ds, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}. \end{cases} \quad (\text{III.3.16})$$

Summing all these inequalities now yields the Grönwall-like inequality

$$\sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(r)| \leq \left(\sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(0)| + |(\eta^i)'(0)| \right) + \int_0^r (2n+1)u(s) \sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(s)| ds. \quad (\text{III.3.17})$$

Applying Grönwall's inequality to $\sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(r)|$ thus shows that

$$\sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(r)| \leq \left(\sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(0)| + |(\eta^i)'(0)| \right) \exp\left((2n+1) \int_0^r u(s) ds\right). \quad (\text{III.3.18})$$

Since $\eta(0) = g(v, J\nu)$, $(\eta)'(0) = g(S_p v - v, J\nu)$, $\eta^k(0) = g(v, e_k)$, $(\eta^k)'(0) = g(Sv - \frac{1}{2}v, e_k)$ for $k \in \{1, \dots, 2n\}$, the result directly follows from Cauchy-Schwarz inequality. $\square$

We shall now show that if M is (ALCH) of order $a > \frac{1}{2}$, then the components $\{\eta_r^j(v)\}_{j \in \{0, \dots, 2n\}}$ converge as $r \rightarrow \infty$ with a well understood decay.

Proposition III.3.7. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > \frac{1}{2}$ with an essential subset K . Let $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$, $p \in U$ and $v \in T_p \partial K$. Let $Y_v = E_* v$ be the normal Jacobi field along γ_p associated to v . If $\{\eta_r^j(v)\}_{j \in \{0, \dots, 2n\}}$ are the component functions of Y_v defined by equation (III.3.4), then there exists a constant $C > 0$ depending only on C_0 and a ,*

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

and constants $\eta(\infty)$ and $\{\eta^j(\infty)\}_{j \in \{1, \dots, 2n\}}$ such that

$$\begin{aligned} \max\{|\eta'(r)|, |\eta(r) - \eta(\infty)|\} &\leq C\|v\|_g \begin{cases} e^{-ar} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-\frac{3}{2}r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-\frac{3}{2}r} & \text{if } a > \frac{3}{2}, \end{cases} \\ \max\{|(\eta^j)'(r)|, |\eta^j(r) - \eta^j(\infty)|\} &\leq C\|v\|_g \begin{cases} e^{-(a-\frac{1}{2})r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-r} & \text{if } a > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (\text{III.3.19}) \\ &\forall j \in \{1, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Proof. According to Lemma III.3.2, the definition of the functions $\{u_k^i\}_{i,k \in \{0, \dots, 2n\}}$ yields $0 \leq u(r) \leq C_0 e^{-(a-\frac{1}{2})r}$ for all $r \geq 0$. Therefore, u is integrable on $\mathbb{R}_+$ with $\int_{\mathbb{R}_+} u \leq \frac{2C_0}{2a-1}$. Since ∂K is compact, $\sup_{p \in \partial K} \|S_p\|_g < +\infty$. It follows from Lemma III.3.6 that

$$\forall r \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{2n} |\eta^i(r)| \leq c\|v\|_g \quad (\text{III.3.20})$$

with $c = ((2n+1) \sup_{p \in \partial K} \|S_p\|_g + n+1) \exp\left(\frac{(4n+2)C_0}{2a-1}\right)$, which only depends on a and C_0 . Putting this upper bound in the Jacobi system (III.3.6) yields

$$\begin{cases} |\eta''(r) + 2\eta'(r)| \leq c\|v\|_g \sum_{k=0}^{2n} |u_k^0|, \\ |(\eta^j)''(r) + (\eta^j)'(r)| \leq c\|v\|_g \sum_{k=0}^{2n} |u_k^j|, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}. \end{cases} \quad (\text{III.3.21})$$

Looking back at the definitions of the functions $\{u_k^i\}_{i,k \in \{0, \dots, 2n\}}$, Lemma III.3.2 gives

$$\begin{cases} |\eta''(r) + 2\eta'(r)| \leq c'\|v\|_g e^{-ar}, \\ |(\eta^j)''(r) + (\eta^j)'(r)| \leq c'\|v\|_g e^{-(a-\frac{1}{2})r}, \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\}, \end{cases} \quad (\text{III.3.22})$$

with $c' = (2n+1)C_0c$, which only depends on C_0 and a . The result now follows from applying Lemma III.1.2 to each inequality of the decoupled system (III.3.22), and recalling that we have upper bounds on the initial data $|\eta^i(0)|$ and $|(\eta^i)'(0)|$ that are linear in $\|v\|_g$. Notice that a uniform constant $C > 0$ in (III.3.19) can be obtained by taking the maximum of the $(2n+1)$ constants given by Lemma III.1.2, which depends only on a and C_0 . $\square$

Proposition III.3.7 yields a pointwise convergence of the coefficients of normal Jacobi fields with a sharp estimate on the behavior. The following section focuses on the local and global behavior of these coefficients.

III.3.3 The local 1-forms

We now change our point of view on the coefficients of normal Jacobi fields Y_v in a radially parallel orthonormal frame and consider them as functions of v and r . We henceforth write the component functions $\eta_r(v)$ and $\eta_r^j(v)$. The limits given by Proposition III.3.7 are simply denoted by $\eta(v)$ and $\eta^j(v)$. In these terms, Proposition III.3.7 becomes the following.

Proposition III.3.8. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > \frac{1}{2}$, with an essential subset K . Then there exists a continuous 1-form η on ∂K and a constant $C > 0$ depending only on C_0 and a such that $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall (p, v) \in T\partial K$*

$$\max \{ |\partial_r \eta_r(v)|, |\eta_r(v) - \eta(v)| \} \leq C \|v\|_g \begin{cases} e^{-ar} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-\frac{3}{2}r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-\frac{3}{2}r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.23})$$

Moreover, if $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ is a radially parallel orthonormal frame on the cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$, for all $j \in \{1, \dots, 2n\}$, there exists a continuous 1-form η^j on U such that $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall (p, v) \in TU$

$$\max \{ |\partial_r \eta_r^j(v)|, |\eta_r^j(v) - \eta^j(v)| \} \leq C \|v\|_g \begin{cases} e^{-(a-\frac{1}{2})r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.24})$$

Proof. Let $\eta(v) = \eta(\infty)$ and $\eta^j(v) = \eta^j(\infty)$ for $j \in \{1, \dots, 2n\}$ be defined pointwise, where $\eta(\infty)$ and $\{\eta^j(\infty)\}_{j \in \{1, \dots, 2n\}}$ are given by Proposition III.3.7. The claimed estimates (III.3.23) and (III.3.24) are obtained as a straightforward translation of Proposition III.3.7.

In addition, (III.3.23) shows that $(\eta_r)_{r \geq 0}$ uniformly converges to η on any compact subset of $T\partial K$ as $r \rightarrow \infty$. Therefore, η is continuous. It is furthermore linear in the fibers as a pointwise limit of 1-forms. It follows that η is a continuous 1-form on ∂K . The exact same proof shows that if $j \in \{1, \dots, 2n\}$, then $(\eta_r^j)_{r \geq 0}$ uniformly converges to η^j on every compact subset of TU as $r \rightarrow \infty$. Therefore, η^j is a continuous 1-form on U . The proof is now complete. $\square$

Corollary III.3.9. *Under the assumptions of Proposition III.3.8, there exists $c > 0$ depending only on a and C_0 such that*

$$\forall (p, v) \in T\partial K, \quad |\eta(v)| \leq c \|v\|_g \quad (\text{III.3.25})$$

and

$$\forall j \in \{1, \dots, 2n\}, \forall (p, v) \in TU, \quad |\eta^j(v)| \leq c \|v\|_g. \quad (\text{III.3.26})$$

Proof. Equation (III.3.20) gives the existence of c depending only on a and C_0 such that

$$\forall r \geq 0, \forall (p, v) \in TU, \quad |\eta_r(v)| + \sum_{j=1}^{2n} |\eta_r^j(v)| \leq c \|v\|_g \quad (\text{III.3.27})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

The result follows by taking the limit as $r \rightarrow \infty$. Note that c does not depend on p or U , so that the upper bound is true on all of ∂K for η . $\square$

III.3.4 Normal Jacobi estimates

Regarding Proposition III.3.8, we henceforth suppose $a > \frac{1}{2}$. Consider a radially parallel orthonormal frame $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$ and $\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}$ be the continuous 1-forms given by Proposition III.3.8.

Definition III.3.10 (Asymptotic vector fields). For $(r, p) \in \mathbb{R}_+ \times U$, $v \in T_p \partial K$, define the vectors $Z_v(\gamma_p(r)), Z'_v(\gamma_p(r)) \in T_{\gamma_p(r)} M$ by

$$\begin{aligned} Z_v(\gamma_p(r)) &= \eta(v)e^r \mathcal{J}\partial_r + \sum_{j=1}^{2n} \eta^j(v)e^{\frac{r}{2}} E_j, \\ Z'_v(\gamma_p(r)) &= \eta(v)e^r \mathcal{J}\partial_r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \eta^j(v)e^{\frac{r}{2}} E_j. \end{aligned} \tag{III.3.28}$$

If v is a vector field on U , we refer to Z_v and Z'_v as the *asymptotic vector fields* related to the vector fields Y_v and SY_v .

Proposition III.3.11. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > \frac{1}{2}$ and essential subset K . Let $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. Then there exists $C > 0$ depending only on a and C_0 such that for any vector field v on U ,*

$$\max\{\|Y_v - Z_v\|_g, \|SY_v - Z'_v\|_g\} \leq C\|v\|_g \begin{cases} e^{-(a-1)r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{III.3.29}$$

Proof. By their very definition, it holds that

$$Y_v - Z_v = (\eta_r(v) - \eta(v))e^r \mathcal{J}\partial_r + \sum_{j=1}^{2n} (\eta_r^j(v) - \eta^j(v))e^{\frac{r}{2}} E_j. \tag{III.3.30}$$

and since $SY_v = \nabla_{\partial_r} Y_v$, it also holds that

$$SY_v - Z'_v = (\partial_r \eta_r(v) + \eta_r(v) - \eta(v))e^r \mathcal{J}\partial_r + \sum_{j=1}^{2n} \left(\partial_r \eta_r^j(v) + \frac{1}{2} (\eta_r^j(v) - \eta^j(v)) \right) e^{\frac{r}{2}} E_j. \tag{III.3.31}$$

The result follows from the triangle inequality and from Proposition III.3.8. $\square$

We conclude this section by stating an important upper bound on the growth of normal Jacobi fields.

Lemma III.3.12. *There exists a constant $c > 0$ depending only on a and C_0 such that for any local vector fields v on ∂K , it holds that*

$$\forall r \geq 0, \forall p, \quad \max \{ \|Y_v(\gamma_p(r))\|_g, \|SY_v(\gamma_p(r))\|_g \} \leq c \|v\|_g e^r. \quad (\text{III.3.32})$$

If moreover, $\eta|_p(v) = 0$, then

$$\forall r \geq 0, \quad \max \{ \|Y_v(\gamma_p(r))\|_g, \|SY_v(\gamma_p(r))\|_g \} \leq c \|v\|_g e^{\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.3.33})$$

Proof. By the triangle inequality, $\|Y_v\|_g \leq \|Z_v\|_g + \|Y_v - Z_v\|_g$, and the result follows from Corollary III.3.9 and Proposition III.3.11. The same proof applies for SY_v . $\square$

III.3.5 A volume growth upper bound

In this section, we compute a pointwise upper bound on the volume density function λ defined in section III.2.3 thanks to the normal Jacobi fields estimates derived earlier. The proof relies on an adapted choice for a basis of the tangent space $T_p \partial K$ and on Hadamard's inequality on determinants.

Proposition III.3.13. *Let (M, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > \frac{1}{2}$ with an essential subset K . Let $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ be the local continuous 1-forms associated to a radially parallel orthonormal frame $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. Let $p \in U$ and k_p be the rank of the family $\{\eta|_p, \eta^1|_p, \dots, \eta^{2n}|_p\}$ as linear forms on $T_p \partial K$.*

- If $\eta|_p = 0$ then, there exists a constant $\Lambda_+ = \Lambda_+(p) > 0$ independent of r such that

$$\forall r \geq 0, \quad \lambda(r, p) \leq \Lambda_+ \begin{cases} e^{(\frac{k_p}{2} - (a-1)(2n+1-k_p))r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \\ (r+1)^{2n+1-k_p} e^{(k_p-n-\frac{1}{2})r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{(k_p-n-\frac{1}{2})r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.34})$$

- If $\eta|_p \neq 0$, then there exists a constant $\Lambda_+ = \Lambda_+(p) > 0$ independent of r such that

$$\forall r \geq 0, \quad \lambda(r, p) \leq \Lambda_+ \begin{cases} e^{(\frac{k_p+1}{2} - (a-1)(2n+1-k_p))r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \\ (r+1)^{2n+1-k_p} e^{(k_p-n)r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{(k_p-n)r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.35})$$

Proof. We first show the case where $\eta|_p = 0$. Without loss of generality, one can suppose that $\{\eta^1|_p, \dots, \eta^{k_p}|_p\}$ generates the family $\{\eta|_p, \eta^1|_p, \dots, \eta^{2n}|_p\}$. Let $\{v_1, \dots, v_{2n+1}\}$ be a basis of $T_p \partial K$ such that $\eta^i|_p(v_j) = \delta_j^i$ for $(i, j) \in \{1, \dots, k_p\}^2$, and $v_{k_p+1}, \dots, v_{2n+1} \in \cap_{i=1}^{k_p} \ker \eta^i|_p$. The volume density function is given by the relation

$$\forall (r, p) \in \mathbb{R}_+ \times \partial K, \quad \lambda(r, p) = |\det dE(r, p)| \quad (\text{III.3.36})$$

where the determinant is taken in any orthonormal bases. It follows that

$$\forall r \geq 0, \quad \lambda(r, p) = \frac{|\det(\partial_r, Y_1, \dots, Y_{2n+1})|}{|\det(\nu, v_1, \dots, v_{2n+1})|} \quad (\text{III.3.37})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

where $Y_j = Y_{v_j}(\gamma_p(r))$, and all determinants are taken in orthonormal bases. Hadamard's inequality on determinants now yields

$$\forall r \geq 0, \quad \lambda(r, p) \leq \frac{1}{|\det(\nu, v_1, \dots, v_{2n+1})|} \prod_{i=1}^{2n+1} \|Y_i\|_g. \quad (\text{III.3.38})$$

According to Proposition III.3.11, there exists $C > 0$ such that

$$\forall i \in \{k_p + 1, 2n + 1\}, \quad \|Y_i\|_g \leq C \|v_i\|_g \begin{cases} e^{-(a-1)r} & \text{if } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } a > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (\text{III.3.39})$$

while Lemma III.3.12 provides the existence of $c > 0$ such that

$$\forall i \in \{1, \dots, k_p\}, \quad \|Y_i\|_g \leq c \|v_i\|_g e^{\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.3.40})$$

The claimed upper bound (III.3.34) now holds with $\Lambda_+ = C^{2n+1-k_p} c^{k_p} \frac{\prod_{i=1}^{2n+1} \|v_i\|_g}{|\det(v_1, \dots, v_{2n+1})|}$.

In case $\eta|_p \neq 0$, the proof is similar. Without loss of generality, one can suppose that $\{\eta|_p, \eta^1|_p, \dots, \eta^{k_p-1}|_p\}$ generates the whole family. In that case, the first vector of the considered basis will have growth of order at most e^r , hence the extra $\frac{r}{2}$ term in the exponent of the upper bound. $\square$

III.3.6 The local coframe

We shall now compare the two bounds on the volume growth given by Propositions III.2.7 and III.3.13. Note that these two bounds have been derived from considerations on the curvature of different nature.

Proposition III.3.14. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > 1$, with an essential subset $K \subset M$, such that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is non-positive. Then the continuous 1-form η is non-vanishing. Furthermore, if $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ is a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$, then $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ is a continuous coframe on U .*

Proof. Let $p \in \partial K$ and let $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$, with $p \in U \subset \partial K$. Let $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ be the continuous local 1-forms on U given by Proposition III.3.8, and k_p be the rank of this family as linear forms on $T_p \partial K$. Let $\varepsilon \in (0, \min\{a-1, \frac{1}{2}\})$. Propositions III.2.7 and III.3.13 yield the existence of $r_0 = r_0(\varepsilon, a, C_0) > 0$, $\Lambda_- = \Lambda_-(\varepsilon, a, C_0) > 0$ and $\Lambda_+ = \Lambda_+(a, C_0, p) > 0$ such that

— If $\eta|_p = 0$, then for $r \geq r_0$, we get

$$\Lambda_- e^{(n+\frac{1}{2}-\varepsilon)r} \leq \lambda(r, p) \leq \Lambda_+ \begin{cases} e^{(\frac{k_p}{2}-(a-1)(2n+1-k_p))r} & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2} \\ (r+1)^{2n+1-k_p} e^{(k_p-n-\frac{1}{2})r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{(k_p-n-\frac{1}{2})r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.41})$$

— If $\eta|_p \neq 0$, then for $r \geq r_0$, we get

$$\Lambda_- e^{(n+\frac{1}{2}-\varepsilon)r} \leq \lambda(r, p) \leq \Lambda_+ \begin{cases} e^{(\frac{k_p+1}{2}-(a-1)(2n+1-k_p))r} & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2} \\ (r+1)^{2n+1-k_p} e^{(k_p-n)r} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{(k_p-n)r} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.42})$$

By contradiction, assume that $k_p < 2n+1$. Then if $\eta|_p = 0$, a straightforward asymptotic comparison of the lower and upper bounds of (III.3.41) yields

$$n + \frac{1}{2} - \varepsilon \leq \begin{cases} n - (a-1) & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2}, \\ n - \frac{1}{2} & \text{if } a \geq \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (\text{III.3.43})$$

while if $\eta|_p \neq 0$, the same study in (III.3.42) yields

$$n + \frac{1}{2} - \varepsilon \leq \begin{cases} n + \frac{1}{2} - (a-1) & \text{if } , 1 < a < \frac{3}{2} \\ n & \text{if } a \geq \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.44})$$

Since $\varepsilon \in (0, \min\{a-1, \frac{1}{2}\})$, all cases lead to a contradiction. It follows that $k_p = 2n+1$, and $\{\eta|_p, \eta^1|_p, \dots, \eta^{2n}|_p\}$ is a linearly independent family. This being true for all $p \in U$, $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ is a coframe. In particular, η does not vanish on U . The result follows. $\square$

Remark III.3.15. Notice that the limit case $a = 1$ would not have allowed us to draw a conclusion in the case $\eta|_p \neq 0$.

Corollary III.3.16. *Under the assumptions of Proposition III.3.14, there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\forall (p, v) \in T\partial K, \forall r \geq 0, \quad \|Y_v\|_g \geq c \|v\|_g e^{\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.3.45})$$

Proof. For $r \geq 0$, we define a field of quadratic forms Q_r on ∂K by the relation

$$Q_r(v) = e^{-2r} g(Y_v, \mathcal{J}\partial_r)^2 + e^{-r} \|Y_v^\perp\|_g^2 \quad (\text{III.3.46})$$

where $Y_v^\perp$ denotes the orthogonal projection of Y_v onto $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r\}^\perp$. In a radially parallel orthonormal frame, Q_r reads $Q_r = \eta_r^2 + \sum_{j=1}^{2n} (\eta_r^j)^2$. It follows from Proposition III.3.8 that Q_r locally uniformly converges on ∂K , to a field of quadratic forms Q_∞ . Since ∂K is compact, the convergence is uniform. The limit locally reads $Q_\infty = \eta \otimes \eta + \sum_{j=1}^{2n} \eta^j \otimes \eta^j$, which is then positive definite by Proposition III.3.14. Let $U\partial K \subset T\partial K$ be the unit sphere bundle. Then $(r, u) \in [0, +\infty] \times U\partial K \mapsto Q_r(u)$ is continuous on the compact set $[0, +\infty] \times U\partial K$ and achieves its minimum at a point $(r_{\min}, u_{\min})$. Since $Q_{r_{\min}}$ is positive definite, this minimum is positive. It follows by homogeneity that for any tangent vector v on ∂K , it holds

$$\|Y_v\|_g^2 \geq e^r Q_r(v) \geq e^r \|v\|_g^2 Q_{r_{\min}}(u_{\min}). \quad (\text{III.3.47})$$

The result then follows. $\square$

In particular, if $(g_r)_{r \geq 0}$ denotes the family of Riemannian metrics induced by the normal exponential chart on ∂K and if (M, g, J) is (ALCH) of order $a > 1$, then there exists $c, C > 0$ such that $ce^r g_0 \leq g_r \leq Ce^{2r} g_0$.

III.3.7 Asymptotic development of the metric

We are now able to state again our first Theorem.

Theorem A. *Let (M^{2n+2}, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > 1$ with an essential subset K , such that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is negative. Then there exist a continuous non-vanishing 1-form η and a continuous Carnot-Carathéodory metric γ_H on ∂K , such that*

$$E^*g = dr^2 + e^{2r}\eta \otimes \eta + e^r\gamma_H + h_r, \quad (\text{III.3.48})$$

where $(h_r)_{r \geq 0}$ is a smooth family of symmetric bilinear forms on ∂K such that there exists $C > 0$ with

$$\forall r \geq 0, \forall u, v, \quad |h_r(u, v)| \leq C\|u\|_g\|v\|_g \begin{cases} e^{(2-a)r} & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{\frac{r}{2}} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{\frac{r}{2}} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.49})$$

Moreover, γ_H is a continuous positive-definite metric on $H = \ker \eta$.

Proof. Let us first notice that Gauss Lemma yields the existence of a smooth family of metrics $(g_r)_{r \geq 0}$ on ∂K such that in the normal exponential chart, the metric reads $E^*g = dr^2 + g_r$. Let us fix $p \in \partial K$. Let $U \subset \partial K$ be an open neighborhood of p on which is defined the local coframe $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ given by Proposition III.3.14. Let u and v be two tangent vectors at p . Notice that $g_r(u, v) = g(Y_u, Y_v)$, and therefore, that $g(Z_u, Z_v) = e^{2r}\eta(u)\eta(v) + e^r \sum_{j=1}^{2n} \eta^j(u)\eta^j(v)$. Meanwhile, write $h_r(u, v)$ as $h_r(u, v) = g(Z_u, Y_v - Z_v) + g(Y_u - Z_u, Z_v) + g(Y_u - Z_u, Y_v - Z_v)$. It now follows from the triangle inequality, Cauchy-Schwarz inequality and Proposition III.3.11, that there exists a constant $C > 0$ independent of r, p, u and v such that

$$|h_r(u, v)| \leq C\|u\|_g\|v\|_g \begin{cases} e^{(2-a)r} & \text{if } 1 < a < \frac{3}{2}, \\ (r+1)e^{\frac{r}{2}} & \text{if } a = \frac{3}{2}, \\ e^{\frac{r}{2}} & \text{if } a > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.3.50})$$

Let γ_H be defined by the relation $\gamma_H = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r}(g_r - e^{2r}\eta \otimes \eta)$. Since we have the equality $g_r = e^{2r}\eta \otimes \eta + e^r \sum_{j=1}^{2n} \eta^j \otimes \eta^j + h_r$, it follows from (III.3.50) that γ_H locally reads $\gamma_H = \sum_{j=1}^{2n} \eta^j \otimes \eta^j$, and γ_H is hence continuous and positive semi-definite. Since $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ is a local coframe, γ_H is thus non-degenerate on $H = \ker \eta$. This concludes the proof. $\square$

Corollary III.3.17. *Under the assumptions of Theorem A, there exists a unique continuous vector field ξ on ∂K such that*

$$(1) \quad \eta(\xi) = 1,$$

$$(2) \quad \gamma_H(\xi, \cdot) = 0.$$

Proof. Let us locally define the vector field ξ as the first vector of the dual basis of the local coframe $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$. Then ξ is uniquely characterized by (1) and (2), so that ξ does not depend on the choice of the radially parallel orthonormal frame defining the coframe, and is defined on all of ∂K . Since the local coframe is continuous, so is ξ . This concludes the proof. $\square$

Definition III.3.18 (Canonical elements at infinity). Under the assumptions of Theorem A, we call η the *canonical 1-form at infinity*, $H = \ker \eta$ the *canonical distribution at infinity*, γ_H the *canonical Carnot-Carathéodory metric at infinity* and ξ the *canonical vector field at infinity*.

We call these elements canonical since they are global and do not depend on the choice of any radially parallel orthonormal frame. The analogy with the model case is obvious: η corresponds to the contact form θ , γ_H corresponds to the Levi form γ and ξ corresponds to the Reeb vector field of θ . Notice that no assumption on ∇R has been made yet. In the following section, we shall pursue the study of this analogy, and show that under stronger assumptions on R and ∇R , the canonical elements at infinity have $\mathcal{C}^1$ regularity, and that η is indeed a contact form.

III.4 The contact structure

Let (M, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > 1$, with an essential subset K , such that the sectional curvature of $\overline{M} \setminus K$ is non-positive. We aim to show that the canonical 1-form η is a contact form of class $\mathcal{C}^1$. To do so, we show that the family of 1-forms $\{\eta_r\}_{r \geq 0}$ defined in Definition III.3.3 converges to η in $\mathcal{C}^1$ topology.

Let us first show the following Lemma.

Lemma III.4.1. *Let u and v be vector fields on ∂K and $r \geq 0$. Then*

$$(\mathcal{L}_u \eta_r)(v) = e^{-r} (g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) + g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r)). \quad (\text{III.4.1})$$

Proof. By basic properties of the Lie derivative, it holds that

$$(\mathcal{L}_u \eta_r)(v) = u \cdot \eta_r(v) - \eta_r([u, v]). \quad (\text{III.4.2})$$

Hence, the equalities $Y_u = E_* u$ and $Y_v = E_* v$ together with the naturality of the Lie bracket yield

$$(\mathcal{L}_u \eta_r)(v) = Y_u \cdot e^{-r} g(Y_v, J\partial_r) - e^r g([Y_u, Y_v], J\partial_r). \quad (\text{III.4.3})$$

Recall that Y_u and ∂_r are orthogonal. Since ∂_r is the gradient of the distance function r , it follows that $Y_u \cdot e^r g(Y_v, J\partial_r) = e^r Y_u \cdot g(Y_v, J\partial_r)$. The torsion-free property of the Levi-Civita connection concludes the proof. $\square$

Computations show that in order to estimate the asymptotic behavior of the Lie derivative $(\mathcal{L}_u \eta_r)(v)$, an upper-bound on the norm of $\nabla_{Y_v} Y_u$ is needed. This upper bound in itself is obtained by controlling the norm of $(\nabla_{Y_v} S)Y_u$. The following section takes on the tedious task of providing such upper bounds.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

III.4.1 Order one estimates

In this section, u and v are fixed vector fields on ∂K .

Lemma III.4.2. *The following holds*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_r\|(\nabla_{Y_v}S)Y_u\|_g^2 &= R(\partial_r, Y_v, SY_u, S(\nabla_{Y_v}S)Y_u) - R(\partial_r, SY_v, Y_u, (\nabla_{Y_v}S)Y_u) \\ &\quad - R(SY_v, Y_u, \partial_r, (\nabla_{Y_v}S)Y_u) - R(\partial_r, Y_u, SY_v, (\nabla_{Y_v}S)Y_u) \\ &\quad - (\nabla_{Y_v}R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, (\nabla_{Y_v}S)Y_u) - g(S(\nabla_{Y_v}S)Y_u, (\nabla_{Y_v}S)Y_u). \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

Proof. The extension of the covariant derivative to the whole tensor algebra gives the equality $(\nabla_{Y_v}S)Y_u = \nabla_{Y_v}(SY_u) - S\nabla_{Y_v}Y_u$. It then follows that

$$\nabla_{\partial_r}((\nabla_{Y_v}S)Y_u) = \nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}(SY_u)) - (\nabla_{\partial_r}S)\nabla_{Y_v}Y_u - S\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}Y_u). \quad (\text{III.4.5})$$

From Lemma III.1.1, $[\partial_r, Y_v] = 0$, $\nabla_{\partial_r}Y_u = SY_u$ and $\nabla_{\partial_r}(SY_u) = -R_{\partial_r}Y_u$. It follows from our convention on the Riemann curvature tensor (see (III.1.1)) that

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}(SY_u)) &= -R(\partial_r, Y_v)SY_u + \nabla_{Y_v}(-R_{\partial_r}Y_u) \\ &= -R(\partial_r, Y_v)SY_u - (\nabla_{Y_v}R)(\partial_r, Y_u)\partial_r \\ &\quad - R(SY_v, Y_u)\partial_r - R(\partial_r, \nabla_{Y_v}Y_u)\partial_r \\ &\quad - R(\partial_r, Y_u)SY_v. \end{aligned} \quad (\text{III.4.6})$$

as well as

$$\begin{aligned} S\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}Y_u) &= -SR(\partial_r, Y_v)Y_u + S\nabla_{Y_v}(SY_u) \\ &= -SR(\partial_r, Y_v)Y_u + S^2\nabla_{Y_v}Y_u + S(\nabla_{Y_v}S)Y_u. \end{aligned} \quad (\text{III.4.7})$$

The Riccati equation (III.1.2) for S yields

$$(\nabla_{\partial_r}S)\nabla_{Y_v}Y_u = -S^2\nabla_{Y_v}Y_u - R(\partial_r, \nabla_{Y_v}Y_u)\partial_r. \quad (\text{III.4.8})$$

Subtracting (III.4.7) and (III.4.1) to (III.4.6) now gives

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_r}((\nabla_{Y_v}S)Y_u) &= SR(\partial_r, Y_v)Y_u - R(\partial_r, Y_v)SY_u \\ &\quad - R(SY_v, Y_u)\partial_r - R(\partial_r, Y_u)SY_v \\ &\quad - (\nabla_{Y_v}R)(\partial_r, Y_u)\partial_r - S(\nabla_{Y_v}S)Y_u. \end{aligned} \quad (\text{III.4.9})$$

The result now follows from the symmetry of S and the equality

$$\frac{1}{2}\partial_r\|(\nabla_{Y_v}S)Y_u\|_g^2 = g(\nabla_{\partial_r}((\nabla_{Y_v}S)Y_u), (\nabla_{Y_v}S)Y_u). \quad (\text{III.4.10})$$

□

Proposition III.4.3. *If (M, g, J) is (ALCH) of order $a > \frac{1}{2}$ and (ALS) of order $b > 0$, then there exists $c > 0$ such that*

$$\|(\nabla_{Y_v} S)Y_u\|_g \leq c\|u\|_g\|v\|_g e^{2r}. \quad (\text{III.4.11})$$

Proof. Let $p \in \partial K$. Define $F(r) = \|((\nabla_{Y_v} S)Y_u)(\gamma_p(r))\|_g$. Since the norm is Lipschitz and the entries are smooth, F is locally Lipschitz. It follows from Rademacher's Theorem that F is almost everywhere differentiable, and Lemma III.4.2 yields the almost everywhere equality

$$\begin{aligned} F'F &= -g(S(\nabla_{Y_v} S)Y_u, (\nabla_{Y_v} S)Y_u) \\ &\quad + R(\partial_r, Y_v, SY_u, S(\nabla_{Y_v} S)Y_u) - R(\partial_r, SY_v, Y_u, (\nabla_{Y_v} S)Y_u) \\ &\quad - R(SY_v, Y_u, \partial_r, (\nabla_{Y_v} S)Y_u) - R(\partial_r, Y_u, SY_v, (\nabla_{Y_v} S)Y_u) \\ &\quad - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, (\nabla_{Y_v} S)Y_u). \end{aligned} \quad (\text{III.4.12})$$

Since S is positive, $g(S(\nabla_{Y_v} S)Y_u, (\nabla_{Y_v} S)Y_u) \geq 0$. Therefore, it follows that

$$F'F \leq +(4\|R\|_g\|S\|_g + \|\nabla R\|_g)\|Y_v\|_g\|Y_u\|_g F \quad a.e. \quad (\text{III.4.13})$$

Since $\|R\|_g$ (Lemma III.2.3), $\|\nabla R\|_g$ ((ALS) assumption) and $\|S\|_g$ (Lemma III.2.5) are uniformly bounded, and since there exists $c_1 > 0$ such that $\|Y_u\|_g \leq c_1\|u\|_g e^r$, $\|Y_v\|_g \leq c_1\|v\|_g e^r$ (Lemma III.3.12), it follows that there exists a constant $c > 0$ such that

$$F'F \leq c\|u\|_g\|v\|_g e^{2r} F \quad a.e. \quad (\text{III.4.14})$$

and therefore,

$$F' \leq c\|u\|_g\|v\|_g e^{2r} \quad a.e. \quad (\text{III.4.15})$$

The result follows from a straightforward integration. $\square$

Remark III.4.4. This bound is sharp, since $g((\nabla_{Y_v} S)Y_u, \partial_r) = -g(SY_v, SY_u)$ is equivalent to $-\eta(u)\eta(v)e^{2r}$. It is however worth noticing that it can be proven that the normal component $(\nabla_{Y_v} S)Y_u^\perp = (\nabla_{Y_v} S)Y_u - g((\nabla_{Y_v} S)Y_u, \partial_r)\partial_r$ can be bounded the following way if $\min\{a, b\} > \frac{1}{2}$

$$\|(\nabla_{Y_v} S)Y_u^\perp\|_g \leq \tilde{c}\|u\|_g\|v\|_g e^{\frac{3}{2}r}. \quad (\text{III.4.16})$$

The proof is more intricate, and relies on the study of the curvature terms. For example, the terms in $R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, S(\nabla_{Y_v} S)Y_u)$ are products of the form $g(X, J\partial_r)g(Y, JZ)$ with X, Y, Z normal to ∂_r , which kills the ∂_r direction.

We shall now give a bound on the growth of $\nabla_{Y_v} Y_u$. The proof is slightly different from that of Proposition III.4.3 as it requires the use of Grönwall's inequality.

Proposition III.4.5. *Let (M, g, J) be an (ALCH) and (ALS) manifold of order $a > \frac{1}{2}$ and $b > 0$. Then there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|(\nabla_{Y_v} Y_u)(\gamma_p(r))\|_g \leq c(\|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g + \|u\|_g\|v\|_g)e^{2r}. \quad (\text{III.4.17})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Proof. First, notice that $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}Y_u) = -R(\partial_r, Y_v)Y_u + \nabla_{Y_v}(SY_u)$ and moreover that $\nabla_{Y_v}(SY_u) = (\nabla_{Y_v}S)Y_u + S\nabla_{Y_v}Y_u$. Hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_r\|\nabla_{Y_v}Y_u\|_g^2 &= -R(\partial_r, Y_v, Y_u, \nabla_{Y_v}Y_u) + g((\nabla_{Y_v}S)Y_u, \nabla_{Y_v}Y_u) \\ &\quad + g(S\nabla_{Y_v}Y_u, \nabla_{Y_v}Y_u). \end{aligned} \quad (\text{III.4.18})$$

Let $p \in \partial K$ be fixed and let $G(r) = \|(\nabla_{Y_v}Y_u)(\gamma_p(r))\|_g$. Then G is almost everywhere differentiable and the triangle inequality together with Cauchy-Schwarz inequality applied to (III.4.18) yields the almost everywhere inequality

$$G'G \leq \|R\|_g\|Y_u\|_g\|Y_v\|_gG + \|(\nabla_{Y_v}S)Y_u\|_gG + \|S\|_gG^2 \quad a.e., \quad (\text{III.4.19})$$

from which is deduced the following almost everywhere inequality

$$G' \leq \|R\|_g\|Y_u\|_g\|Y_v\|_g + \|(\nabla_{Y_v}S)Y_u\|_g + \|S\|_gG \quad a.e. \quad (\text{III.4.20})$$

Estimates on the growth of normal Jacobi fields (Lemma III.3.12), a uniform bound on $\|R\|_g$ (Lemma III.2.3) together with Proposition III.4.3 give the existence of a constant $C > 0$ such that

$$G' - G \leq C\|u\|_g\|v\|_ge^{2r} + (\|S\|_g - 1)G \quad a.e. \quad (\text{III.4.21})$$

Multiplying both sides by e^{-r} and integrating gives the inequality

$$\forall r \geq 0, \quad G(r)e^{-r} \leq G(0) + C\|u\|_g\|v\|_g(e^r - 1) + \int_0^r (\|S\|_g - 1)(G(s)e^{-s}) \, ds. \quad (\text{III.4.22})$$

Finally, recall from Proposition III.2.5 that

$$\|S\|_g - 1 \leq \epsilon_a(r) = C' \begin{cases} e^{-ar} & \text{if } \frac{1}{2} < a < 2, \\ (r+1)e^{-2r} & \text{if } a = 2, \\ e^{-2r} & \text{if } a > 2, \end{cases} \quad (\text{III.4.23})$$

for some constant C' independent of (r, p, u, v) . Hence, Grönwall's inequality yields

$$\forall r \geq 0, \quad G(r)e^{-r} \leq (G(0) + C\|u\|_g\|v\|_ge^r) \exp\left(\int_0^r \epsilon_a(s) \, ds\right). \quad (\text{III.4.24})$$

It follows that there exists $c > 0$ such that

$$\|(\nabla_{Y_v}Y_u)(\gamma_p(r))\|_g \leq c(\|(\nabla_{Y_v}Y_u)(p)\|_g + \|u\|_g\|v\|_g)e^{2r}. \quad (\text{III.4.25})$$

□

Remark III.4.6. This bound is sharp since $g(\nabla_{Y_v}Y_u, \partial_r) = -g(SY_v, Y_u)$ is equivalent to $-\eta(u)\eta(v)e^{2r}$. Similarly to Proposition III.4.3, it is possible to give a sharper bound on the normal component, of order $e^{\frac{3}{2}r}$.

Since $\nabla_{Y_v} Y_u$ is not tensorial in u , one cannot hope to find a constant $c > 0$ independent of u such that $\|\nabla_{Y_v} Y_u\|_g \leq c\|u\|_g\|v\|_g e^{2r}$. However, when u and v are fixed vector fields, the constant in front of the exponential term is continuous with respect to p , and hence uniformly bounded on all compact subsets on which it is defined.

III.4.2 The contact form

From now on, we suppose that (M, g, J) is **(ALCH)** and **(ALS)** of orders $a > 1$ and $b > 0$, and also that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is negative. In this section, we prove that the canonical 1-form at infinity is of class $\mathcal{C}^1$ and is contact. We first show the following computational Proposition.

Proposition III.4.7. *Let (M, g, J) be an **(ALCH)** and **(ALS)** manifold of order a and b , with $\min\{a, b\} > 1$, with an essential subset K . Let u and v be local tangent vector fields on ∂K . Define*

$$f(r, p) = g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) + g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, Y_v). \quad (\text{III.4.26})$$

Then there exists a constant $c > 0$ independent of (r, p, u, v) and a continuous function $\alpha(p)$ such that

$$|f(r, p) - e^r \alpha(p)| \leq c(\|u\|_g\|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) \begin{cases} e^{(2-\min\{a,b\})r} & \text{if } 1 < \min\{a, b\} < 3, \\ (r+1)e^{-r} & \text{if } \min\{a, b\} = 3, \\ e^{-r} & \text{if } \min\{a, b\} > 3. \end{cases} \quad (\text{III.4.27})$$

Proof. Our convention on the curvature yields $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v} Y_u) = -R(\partial_r, Y_v)Y_u + \nabla_{Y_v}(SY_u)$ and $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_u} J\partial_r) = -R(\partial_r, Y_u)J\partial_r$. Therefore,

$$\begin{aligned} \partial_r f &= -R(\partial_r, Y_v, Y_u, J\partial_r) + g(\nabla_{Y_v}(SY_u), J\partial_r) \\ &\quad - R(\partial_r, Y_u, J\partial_r, Y_v) + g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, SY_v). \end{aligned} \quad (\text{III.4.28})$$

which turns out, by the Bianchi identity, to be equal to the following

$$\partial_r f = R(\partial_r, J\partial_r, Y_v, Y_u) + g(\nabla_{Y_v}(SY_u), J\partial_r) + g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, SY_v). \quad (\text{III.4.29})$$

Notice that

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_v}(SY_u)) &= -R(\partial_r, Y_v)SY_u + \nabla_{Y_v}(\nabla_{\partial_r}(SY_u)) \\ &= -R(\partial_r, Y_v)SY_u + \nabla_{Y_v}(-R\partial_r Y_u) \\ &= -R(\partial_r, Y_v)SY_u - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u)\partial_r - R(SY_v, Y_u)\partial_r \\ &\quad - R(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u)\partial_r - R(\partial_r, Y_u)SY_v. \end{aligned} \quad (\text{III.4.30})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

It then follows that

$$\begin{aligned}
\partial_r \partial_r f &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, J\partial_r, Y_v, Y_u) + R(\partial_r, J\partial_r, SY_v, Y_u) \\
&\quad + R(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) - R(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) \\
&\quad - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, J\partial_r) - R(SY_v, Y_u, \partial_r, J\partial_r) \\
&\quad - R(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) - R(\partial_r, Y_u, SY_v, J\partial_r) \\
&\quad - R(\partial_r, Y_u, J\partial_r, SY_v) - R(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r).
\end{aligned} \tag{III.4.31}$$

Note that $R(\partial_r, J\partial_r, SY_v, Y_u) - R(SY_v, Y_u, \partial_r, J\partial_r) = 0$ because of the symmetry of R . Similarly, notice that $-R(\partial_r, Y_u, SY_v, J\partial_r) - R(\partial_r, Y_u, J\partial_r, SY_v) = 0$. Hence, equation (III.4.31) becomes

$$\begin{aligned}
\partial_r \partial_r f &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, J\partial_r, Y_v, Y_u) - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, J\partial_r) \\
&\quad + R(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) - R(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) \\
&\quad - R(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) - R(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r).
\end{aligned} \tag{III.4.32}$$

Let $\mathbf{k}^0$ be defined as

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^0 &= R^0(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) - R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) \\
&\quad - R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) - R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r).
\end{aligned} \tag{III.4.33}$$

From Lemma A.0.1 in the Appendix, it holds that

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^0 &= -\frac{1}{2}g(SY_u, JY_v) - \frac{1}{4}g(SY_u, JY_v) + g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) + \frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r) \\
&= -\frac{3}{4}g(SY_u, JY_v) + \frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r) + g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r).
\end{aligned} \tag{III.4.34}$$

Note that $g(SY_u, JY_v) = g(\nabla_{Y_u} \partial_r, JY_v) = -g(J\nabla_{Y_u} \partial_r, Y_v) = -g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, Y_v)$. It surprisingly turns out that

$$\mathbf{k}^0 = g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) + g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, J\partial_r) = f. \tag{III.4.35}$$

Hence, f is a solution to the second order linear differential equation

$$\partial_r \partial_r f - f = h, \tag{III.4.36}$$

where h is given by

$$\begin{aligned}
h &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, J\partial_r, Y_v, Y_u) - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, J\partial_r) \\
&\quad + (R - R^0)(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) - (R - R^0)(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) \\
&\quad - (R - R^0)(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) - (R - R^0)(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r).
\end{aligned} \tag{III.4.37}$$

By classical ODE theory, f reads

$$f = \frac{e^r}{2} (f(0) + \partial_r f(0) + \int_0^r e^{-s} h(s) ds) + \frac{e^{-r}}{2} (f(0) - \partial_r f(0) - \int_0^r e^s h(s) ds). \quad (\text{III.4.38})$$

Since $\nabla_{Y_u} \mathcal{J} \partial_r = JSY_u$, it holds that $\|JSY_u\|_g = \|SY_u\|_g \leq \|S\|_g \|Y_u\|_g$, and equation (III.4.37) yields the following upper bound on h

$$|h| \leq (3\|R - R^0\|_g \|S\|_g + 2\|\nabla R\|_g) \|Y_u\|_g \|Y_v\|_g + \|R - R^0\|_g \|\nabla_{Y_v} Y_u\|_g. \quad (\text{III.4.39})$$

From the normal Jacobi estimates, the uniform bound on $\|S\|_g$, the (ALCH) and (ALS) conditions and Proposition III.4.5, it finally holds that there exists $c > 0$ such that

$$|h| \leq c(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) e^{(2-\min\{a,b\})r}. \quad (\text{III.4.40})$$

Let $\alpha(p)$ be defined as $\alpha(p) = \frac{1}{2} (f(0, p) + \partial_r f(0, p) + \int_0^{+\infty} e^{-s} h(s, p) ds)$, which is well defined by (III.4.40), and is continuous by the dominated convergence theorem applied on all compact subset where u and v are defined. Hence,

$$\begin{aligned} |f(r, p) - \alpha(p) e^r| &\leq \frac{e^r}{2} \int_r^{+\infty} e^{-s} |h(s, p)| ds \\ &\quad + \frac{e^{-r}}{2} (|f(0, p)| + |\partial_r f(0, p)| + \int_0^r e^s |h(s, p)| ds). \end{aligned} \quad (\text{III.4.41})$$

Finally, notice that $|f(0, p)| = |g((\nabla_{Y_v} Y_u)(p), \mathcal{J} \partial_r)| \leq \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g$. It now follow from (III.4.29) that

$$\begin{aligned} |\partial_r f(0, p)| &= |R(\nu(p), J\nu(p), v, u) + g((\nabla_{Y_v} S)_p u, \mathcal{J} \partial_r) \\ &\quad + g(S(\nabla_{Y_v} Y_u)(p), \mathcal{J} \partial_r) + g(JSu, Sv)| \\ &\leq \|R\|_g \|v\|_g \|u\|_g + \|(\nabla S)_p\|_g \|u\|_g \|v\|_g \\ &\quad + \|S\|_g \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g + \|S\|_g \|u\|_g \|v\|_g. \end{aligned} \quad (\text{III.4.42})$$

The quantities $\|R\|_g$, $\|S\|_g$, and $\|\nabla S\|_g$ are uniformly bounded on the compact set ∂K . Moreover, (III.4.40) yields

$$\int_r^{+\infty} e^{-s} |h(s, p)| ds \leq c(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) \frac{e^{(1-\min\{a,b\})r}}{\min\{a, b\} - 1} \quad (\text{III.4.43})$$

and

$$\int_0^r e^s |h(s, p)| ds \leq c(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) \begin{cases} \frac{e^{(3-\min\{a,b\})r}-1}{3-\min\{a,b\}} & \text{if } \min\{a, b\} \neq 3, \\ r & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{III.4.44})$$

The result then follows. $\square$

We shall now prove our second Theorem.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Theorem B. *Let (M, g, J) be an (ALCH) and (ALS) manifold of order a and b , with an essential subset K , such that the sectional curvature of $\overline{M} \setminus K$ is negative. If $\min\{a, b\} > 1$, then the canonical 1-form at infinity η is a contact form of class $\mathcal{C}^1$, with Reeb vector field ξ .*

Proof. Let $m = 2n + 1 = \dim \partial K$, $\{x^1, \dots, x^m\}$ be coordinates on $U \subset \partial K$, and let $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ and $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ be the associated tangent frame and coframe. For $r \geq 0$, the 1-form η_r and its partial derivatives locally read

$$\begin{aligned} \eta_r &= \sum_{j=1}^m (\eta_r)_j dx^j \\ \partial_i(\eta_r) &= \sum_{j=1}^m \partial_j(\eta_r)_i dx^j, \end{aligned} \tag{III.4.45}$$

with $\partial_i(\eta_r)_j = (\mathcal{L}_{\partial_i} \eta_r)(\partial_j)$. Write $Y_i = Y_{\partial_i}$ and $Y_j = Y_{\partial_j}$. Lemma III.4.1 then states that

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad \partial_i(\eta_r)_j = e^{-r} (g(\nabla_{Y_j} Y_i, J\partial_r) + g(\nabla_{Y_i} J\partial_r, Y_j)). \tag{III.4.46}$$

Proposition III.4.7 now yields the existence of continuous functions $\alpha_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ and a constant $c > 0$ such that if $i, j \in \{1, \dots, m\}$, then

$$|\partial_i(\eta_r)_j - \alpha_{ij}| \leq c(\|\partial_i\|_g \|\partial_j\|_g + \|\nabla_{\partial_j} \partial_i\|_g) \begin{cases} e^{(1-\min\{a,b\})r} & \text{if } 1 < \min\{a, b\} < 3, \\ (r+1)e^{-2r} & \text{if } \min\{a, b\} = 3, \\ e^{-2r} & \text{if } \min\{a, b\} > 3. \end{cases} \tag{III.4.47}$$

The family $(\partial_i(\eta_r)_j)_{r \geq 0}$ then locally uniformly converges to the continuous function α_{ij} on U , and it follows that the canonical 1-form η is of class $\mathcal{C}^1$ on U , and hence on ∂K .

We shall now show that η is a contact 1-form. Since $(\eta_r)_{r \geq 0}$ locally converges to η in $\mathcal{C}^1$ topology, it holds that

$$\forall p \in \partial K, \forall u, v \in T_p \partial K, \quad d\eta|_p(u, v) = \lim_{r \rightarrow \infty} d\eta_r|_p(u, v). \tag{III.4.48}$$

Let $r \geq 0$, $p \in \partial K$ and $u, v \in T_p \partial K$. Consider smooth local extensions of u and v that are still denoted the same way. Then

$$\begin{aligned} d\eta_r(u, v) &= u \cdot \eta_r(v) - v \cdot \eta_r(u) - \eta_r([u, v]) \\ &= e^{-r} (Y_u \cdot g(Y_v, J\partial_r) - Y_v \cdot g(Y_u, J\partial_r) - g([Y_u, Y_v], J\partial_r)) \\ &= e^{-r} g(\nabla_{Y_u} Y_v - \nabla_{Y_v} Y_u - [Y_u, Y_v], J\partial_r) \\ &\quad + e^{-r} (g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r) - g(Y_u, \nabla_{Y_v} J\partial_r)) \\ &= e^{-r} (g(Y_v, JSY_u) - g(Y_u, JSY_v)). \end{aligned} \tag{III.4.49}$$

Let $\{J\partial_r, \partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$ with $p \in U$. Since $e^{-r}g(Y_v, JSY_u) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \eta^i(v)\eta^j(u)g(E_i, JE_i)$, it follows that

$$d\eta(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} (\eta^i(v)\eta^j(u) - \eta^i(u)\eta^j(v))g(E_i, JE_j) \quad (\text{III.4.50})$$

from which is derived the equality

$$d\eta = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \omega_{ij} \eta^i \wedge \eta^j \quad (\text{III.4.51})$$

with constants $\omega_{ij} = g(E_i, JE_j) = g(e_i, Je_j)$. Suppose furthermore that the local orthonormal frame $\{\nu, e_1, \dots, e_{2n}\}$ on U is chosen such that we have $Je_{2k-1} = e_{2k}$ for $k \in \{1, \dots, n\}$. In that case, the constants ω_{ij} are given by

$$\omega_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } i = 2k - 1, j = 2k, \\ 1 & \text{if } i = 2k, j = 2k - 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{III.4.52})$$

Equation (III.4.51) then yields the equality

$$d\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{2k-1} \wedge \eta^{2k}. \quad (\text{III.4.53})$$

From this last expression is derived the equality $(d\eta)^n = (n!) \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^{2n}$. In conclusion, we have the expression $\eta \wedge (d\eta)^n = (n!) \eta \wedge \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^{2n}$. Since $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ is a local coframe, $\eta \wedge (d\eta)^n$ is a volume form on U . It follows that η is a contact form. Since $d\eta$ is a linear combination of wedge products of the local 1-forms (η^i) , it follows by the very definition of ξ that $\eta(\xi) = 1$ and $d\eta(\xi, \cdot) = 0$, hence ξ is the Reeb vector field of η . The proof is now complete. $\square$

III.4.3 Regularity of the Carnot-Carathéodory metric

We shall now study the regularity of the Carnot-Carathéodory metric γ_H . To do so, we show that the local differential forms $\eta^1, \dots, \eta^{2n}$, defined thanks to a radially parallel orthonormal frame, have such regularity. The condition $\min\{a, b\} > 1$ is too weak to ensure that it is of class $\mathcal{C}^1$, since the renormalization of η^j is of order $e^{-\frac{r}{2}}$ while that of η is of order e^{-r} . We shall now show that the condition $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$ is sufficient. The proof is very similar to that of Theorem B. We first give a bound on the growth of $\nabla_{Y_u} E_j$.

Lemma III.4.8. *Let (M, g, J) be an (ALCH) manifold of order $a > \frac{1}{2}$ with an essential subset K . Let X be a radially parallel vector field on $\overline{M} \setminus K$, that is such that $\nabla_{\partial_r} X = 0$ and assume that $\|X\|_g = 1$. Then there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|\nabla_{Y_u} X\|_g \leq c \|u\|_g e^r. \quad (\text{III.4.54})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Proof. Let $L = \|\nabla_{Y_u} X\|_g^2$, which is locally Lipschitz and hence almost everywhere differentiable. Since $\nabla_{\partial_r} X = 0$, it holds that $\nabla_{\partial_r}(\nabla_{Y_u} X) = -R(\partial_r, Y_u)X$, and therefore, applying ∂_r to $\frac{1}{2}L^2$ gives the almost everywhere inequality

$$L'L = -R(\partial_r, Y_u, X, \nabla_{Y_u} X) \quad a.e. \quad (\text{III.4.55})$$

Recall that $\|R\|_g$ is uniformly bounded (Lemma III.2.3), and that since $a > \frac{1}{2}$, there exists $c_1 > 0$ such that $\|Y_v\|_g \leq c_1\|u\|_g e^r$ (Lemma III.3.12). Hence, there exists $c > 0$ such that

$$L'L \leq c\|u\|_g\|X\|_g \quad (\text{III.4.56})$$

and since L is non-positive, it follows that

$$L' \leq c\|u\|_g e^r \quad a.e. \quad (\text{III.4.57})$$

The result follows from a straightforward integration. $\square$

In particular, this Lemma applies to the vectors of a radially parallel orthonormal frame.

Proposition III.4.9. *Let (M, g, J) be an (ALCH) and (ALS) manifold of order a and b , with $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$, with an essential subset K . Let $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. Let u and v be local vector fields on ∂K . For all $j \in \{1, \dots, 2n\}$, define*

$$f^j(r, p) = g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j) + g(\nabla_{Y_u} E_j, Y_v). \quad (\text{III.4.58})$$

Then there exists a constant $c > 0$ independent of (r, p, u, v) and a continuous function $\alpha^j(p)$ on U such that

$$|f^j(r, p) - e^{\frac{r}{2}} \alpha^j(p)| \leq c(\|u\|_g\|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) \begin{cases} e^{(2-\min\{a, b\})r} & \text{if } \min\{a, b\} < \frac{5}{2}, \\ (r+1)e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } \min\{a, b\} = \frac{5}{2}, \\ e^{-\frac{r}{2}} & \text{if } \min\{a, b\} > \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (\text{III.4.59})$$

Proof. The proof is a strict adaptation of that of Proposition III.4.7. The exact same computations show that

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_r f^j &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, E_j, Y_v, Y_u) + R(\partial_r, E_j, SY_v, Y_u) \\ &\quad + R(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) - R(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) \\ &\quad - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, E_j) - R(SY_v, Y_u, \partial_r, E_j) \\ &\quad - R(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) - R(\partial_r, Y_u, SY_v, E_j) \\ &\quad - R(\partial_r, Y_u, E_j, SY_v) - R(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j). \end{aligned} \quad (\text{III.4.60})$$

and the exact same cancellations due to the symmetries of the Riemann tensor yield

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_r f^j &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, E_j, Y_v, Y_u) - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, E_j) \\ &\quad + R(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) - R(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) \\ &\quad - R(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) - R(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j). \end{aligned} \quad (\text{III.4.61})$$

Define $\mathbf{k}^j$ as

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^j &= R^0(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) - R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) \\ &\quad - R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) - R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j) \end{aligned} \quad (\text{III.4.62})$$

so that equation (III.4.61) becomes

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_r f^j - \mathbf{k}^j &= (\nabla_{\partial_r} R)(\partial_r, E_j, Y_v, Y_u) - (\nabla_{Y_v} R)(\partial_r, Y_u, \partial_r, E_j) \\ &\quad + (R - R^0)(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) - (R - R^0)(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) \\ &\quad - (R - R^0)(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) \\ &\quad - (R - R^0)(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j). \end{aligned} \quad (\text{III.4.63})$$

From the computations of Lemma A.0.2 in the Appendix, it turns out that

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^j &= \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, JE_j) - \frac{1}{4}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r) \\ &\quad - \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, JE_j) - \frac{1}{2}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r) \\ &\quad + \frac{1}{4}g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j) \\ &\quad + \frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) + \frac{3}{4}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r) \\ &= \frac{1}{4}g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j) + \frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) \\ &= \frac{1}{4}f^j. \end{aligned} \quad (\text{III.4.64})$$

Thus, f^j is a solution to the second order linear ODE

$$\partial_r \partial_r f^j - \frac{1}{4}f^j = h^j \quad (\text{III.4.65})$$

with h^j being equal to the right-hand side of (III.4.63). From classical second order linear ODE considerations, f^j is given by

$$\begin{aligned} f^j(r, p) &= e^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{2}f^j(0, p) + \partial_r f^j(0, p) + \int_0^r e^{-\frac{s}{2}} h^j(s, p) ds \right) \\ &\quad + e^{-\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{2}f^j(0, p) - \partial_r f^j(0, p) - \int_0^r e^{\frac{s}{2}} h^j(s, p) ds \right). \end{aligned} \quad (\text{III.4.66})$$

The following upper bound is straightforward

$$\begin{aligned} |h^j| &\leq 2(\|R - R^0\|_g \|S\|_g + \|\nabla R\|_g) \|Y_u\|_g \|Y_v\|_g + \|R - R^0\|_g \|\nabla_{Y_v} Y_u\|_g \\ &\quad + \|R - R^0\|_g \|Y_v\|_g \|\nabla_{Y_u} E_j\|_g. \end{aligned} \quad (\text{III.4.67})$$

Lemma III.4.8 yields the existence of $c > 0$ such that $\|\nabla_{Y_u} E_j\|_g \leq c\|u\|_g e^r$. It now follows from the (ALCH) and (ALS) conditions together with Lemma III.3.12 and III.4.5 that there exists a constant $C > 0$ such that

$$|h^j| \leq C(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) e^{(2-\min\{a,b\})r}, \quad (\text{III.4.68})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

and therefore, we have the following upper bounds

$$\begin{aligned} |e^{-\frac{s}{2}} h^j(s, p)| &\leq C(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) e^{(\frac{3}{2} - \min\{a, b\})r}, \\ |e^{\frac{s}{2}} h^j(s, p)| &\leq C(\|u\|_g \|v\|_g + \|(\nabla_{Y_v} Y_u)(p)\|_g) e^{(\frac{5}{2} - \min\{a, b\})r}. \end{aligned} \quad (\text{III.4.69})$$

Let $\alpha^j(p) = \frac{1}{2} f^j(0, p) + \partial_r f^j(0, p) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{2}} h(s, p) ds$, which is continuous by the dominated convergence Theorem. The result follows from a strictly similar study than that of the proof of Proposition III.4.7. $\square$

Theorem C. *Let (M, g, J) be an (ALCH) and (ALS) manifold of order a and b , with $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$, with an essential subset K such that the sectional curvature of $\overline{M} \setminus K$ is negative. Then the canonical Carnot-Carathéodory metric γ_H has $\mathcal{C}^1$ regularity.*

Proof. Let $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ be the local coframe associated to a radially parallel orthonormal frame $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. Let $k \in \{1, \dots, 2n\}$ be fixed and $(\eta_r^k)_{r \geq 0}$ be the local family of 1-forms that locally uniformly converges to η^k in $\mathcal{C}^0$ topology. Let $\{x^1, \dots, x^{2n+1}\}$ be local coordinates on an open subset of U , and write $\eta_r^k = \sum_{j=1}^{2n+1} (\eta_r^k)_j dx^j$. The partial derivatives of η_r^k in these coordinates are given by

$$\partial_i(\eta_r^k)(\partial_i) = e^{-\frac{r}{2}} (g(\nabla_{Y_j} Y_i, E_k) + g(\nabla_{Y_i} E_k, Y_j)) \quad (\text{III.4.70})$$

and it follows from Proposition III.4.9 that they locally uniformly converges. Hence, η^k is of class $\mathcal{C}^1$.

The local coframe $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ has then been shown to be of class $\mathcal{C}^1$. Since the Carnot-Carathéodory metric is locally given by $\gamma_H = \sum_{i=1}^{2n} \eta^i \otimes \eta^i$ it follows that it has $\mathcal{C}^1$ regularity. This concludes the proof. $\square$

Remark III.4.10. It is worth noting that in that case, although η is not of class $\mathcal{C}^2$, its exterior differential $d\eta$ is of class $\mathcal{C}^1$, since it is locally expressed as a combination of $\{\eta^i \wedge \eta^j\}_{i,j \in \{1, \dots, 2n\}}$.

III.5 The almost complex structure

III.5.1 Notations

Throughout this section, (M, g, J) is assumed to satisfy the (ALCH) and (ALS) conditions of orders a and b with $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$, with an essential subset K such that the sectional curvature of $\overline{M} \setminus K$ is negative. From Theorem C, ∂K is endowed with a contact form η of class $\mathcal{C}^1$ with contact structure $H = \ker \eta$, and with a $\mathcal{C}^1$ Carnot-Carathéodory metric γ_H which is positive definite on H . Let $g_0 = g|_{\partial K}$ be the induced metric on ∂K , and recall that if $g_r = E(r \cdot)^* g|_{\{\partial_r\}^\perp}$, Corollary III.3.16 yields the existence of $c_0 > 0$ such that $g_0 \leq c_0 e^{-r} g_r$.

For $r \geq 0$, we set $S_r = E(r, \cdot)^* S$ the pull-back of the shape operator thought as a field of endomorphisms of $\{\partial_r\}^\perp$. To any radially parallel orthonormal frame $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ is associated a local coframe $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ which locally converges in $\mathcal{C}^1$ topology to the local coframe $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$. Moreover, there exists a constant $c > 0$ independent of the radially parallel orthonormal frame and from r , such that the differential forms $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ and $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ all have g_0 -norm less than c . By Proposition III.3.8, it holds that

$$\max\{e^r \|\eta_r - \eta\|_g, e^{\frac{r}{2}} \|\eta_r^1 - \eta^1\|_g, \dots, e^{\frac{r}{2}} \|\eta_r^{2n} - \eta^{2n}\|_g\} \leq ce^{-\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.5.1})$$

If v is a vector field tangent to ∂K and if Z_v and Z'_v are the vector fields asymptotic to Y_v and SY_v , then Proposition III.3.11 states that there exists $C > 0$ such that

$$\max\{\|Y_v - Z_v\|_g, \|SY_v - Z'_v\|_g\} \leq C\|v\|_g e^{-\frac{r}{2}} \quad (\text{III.5.2})$$

The dual frames of the local coframes $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ and $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ are denoted by $\{\xi^r, \xi_1^r, \dots, \xi_{2n}^r\}$ and $\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$. Remark that $\xi^r = E(r, \cdot)^*(e^r \mathcal{J}\partial_r)$ and $\xi_j^r = E(r, \cdot)^*(e^{\frac{r}{2}} E_j)$. Since $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ locally converges in $\mathcal{C}^1$ topology, so does $\{\xi^r, \xi_1^r, \dots, \xi_{2n}^r\}$. It follows that $\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$ is of class $\mathcal{C}^1$.

Let us define a field of endomorphisms on ∂K related to the ambient almost complex structure J . Since J does not preserve $\{\partial_r\}^\perp$, it is not possible to pull it back on ∂K by $E(r, \cdot)$. However, the tensor

$$\Phi = J - g(\cdot, \partial_r) \otimes \mathcal{J}\partial_r + g(\cdot, \mathcal{J}\partial_r) \otimes \partial_r \quad (\text{III.5.3})$$

stabilizes the distribution $\{\partial_r\}^\perp$.

Definition III.5.1. For $r \geq 0$, let ϕ_r be defined by $\phi_r = E(r, \cdot)^* \Phi$.

Since Φ satisfies the two equalities $\Phi^2 = -\text{Id} + g(\cdot, \partial_r) \otimes \partial_r + g(\cdot, \mathcal{J}\partial_r) \otimes \mathcal{J}\partial_r$ and $\Phi^3 = -\Phi$, we have the immediate Lemma.

Lemma III.5.2. For all $r \geq 0$, $\phi_r^2 = -\text{Id} + \eta_r \otimes \xi^r$, and $\phi_r^3 = -\phi_r$.

Lemma III.5.2 states that $(\partial K, \phi_r, \eta_r, \xi_r)$ is an *almost contact* manifold in the sense of [Sas60, SH61, Bla10]. The following estimates are worth noting.

Lemma III.5.3. There exists $c_1, c_2 > 0$ such that for all $r \geq 0$, it holds

- (1) $\|\phi_r\|_g \leq 1$,
- (2) $\|\phi_r \xi\|_g \leq c_1 e^{-r}$,
- (3) $\|\eta \circ \phi_r\|_g \leq c_2 e^{-r}$.

Proof. (1) Since $\Phi = \pi^\perp \circ J \circ \pi^\perp$, where $\pi^\perp$ is the orthogonal projection on $\partial_r^\perp$ and J is an isometry, Φ has an operator norm less than or equal to 1. The result follows.

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

(2) Since $\phi_r \xi_r = 0$, it holds that

$$\|\phi_r \xi\|_g = \|\phi_r(\xi - \xi_r)\|_g \leq \|\phi_r\|_g \|\xi - \xi_r\|_g \leq c_0 e^{-\frac{r}{2}} \|Y_\xi - e^r J \partial_r\|_g \leq c_0 C \|\xi\|_g e^{-r}, \quad (\text{III.5.4})$$

the inequalities being derived from (1) and from equation (III.5.2). To conclude, define $c_1 = c_0 C \sup_{\partial K} \|\xi\|_g < +\infty$.

(3) Since $\eta_r \circ \phi_r = 0$, it holds that

$$\|\eta \circ \phi_r\|_g = \|(\eta - \eta_r) \circ \phi_r\|_g \leq \|\eta - \eta_r\|_g \|\phi_r\|_g \leq c e^{-\frac{3}{2}r}, \quad (\text{III.5.5})$$

the latter inequality being derived from equation (III.5.1) and from (1). The result is then true with $c_2 = c$. $\square$

III.5.2 Shape operator estimates

We shall now give estimates on the asymptotic behavior of $(S_r)_{r \geq 0}$. We first prove that S_r is asymptotic to the tensor $\frac{1}{2}(\text{Id} + \eta \otimes \xi)$.

Lemma III.5.4. *There exists a constant $c' > 0$ such that*

$$\forall r \geq 0, \quad \|S_r - \frac{1}{2}(\text{Id} + \eta \otimes \xi)\|_g \leq c' e^{-r}. \quad (\text{III.5.6})$$

Proof. Fix $v \in T\partial K$. From Corollary III.3.16, there exists $c_0 > 0$ such that

$$\|S_r v - \frac{1}{2}(v + \eta(v)\xi)\|_g \leq c_0 e^{-\frac{r}{2}} \|SY_v - \frac{1}{2}(Y_v + \eta(v)Y_\xi)\|_g. \quad (\text{III.5.7})$$

The local expressions of Z_v and Z'_v in a radially parallel orthonormal frame show that $\frac{1}{2}\eta(v)e^r J \partial_r = Z'_v - \frac{1}{2}Z_v$. Therefore, it holds that

$$SY_v - \frac{1}{2}(Y_v + \eta(v)e^r J \partial_r) = SY_v - Z'_v - \frac{1}{2}(Y_v - Z_v) + \frac{1}{2}\eta(v)(e^r J \partial_r - Y_\xi). \quad (\text{III.5.8})$$

By definition, $\eta(\xi) = 1$, and thus $e^r J \partial_r = Z_\xi$. It follows from the triangle inequality that

$$\|SY_v - \frac{1}{2}(Y_v + \eta(v)e^r J \partial_r)\|_g \leq \|SY_v - Z'_v\|_g + \frac{1}{2}\|Y_v - Z_v\|_g + \frac{1}{2}|\eta(v)|\|Y_\xi - Z_\xi\|_g. \quad (\text{III.5.9})$$

It now follows from the uniform bound on $\|\eta\|_g$ and from equation (III.5.2) that there exists $C > 0$ such that

$$\|SY_v - \frac{1}{2}(Y_v + \eta(v)e^r J \partial_r)\|_g \leq C\|v\|_g(1 + \|\xi\|_g)e^{-\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.5.10})$$

Finally, equation (III.5.7) yields

$$\|S_r v - \frac{1}{2}(v + \eta(v)\xi)\|_g \leq c_0 C(1 + \|\xi\|_g)\|v\|_g e^{-r}. \quad (\text{III.5.11})$$

The result follows by setting $c' = c_0 C(1 + \sup_{\partial K} \|\xi\|_g) < +\infty$ since ξ is a global vector field and ∂K is compact. $\square$

Remark III.5.5. In the model setting, the shape operator of concentric spheres is of the form $S = \coth r \operatorname{Id}_{\mathcal{J}\partial_r} + \frac{1}{2} \coth(\frac{r}{2}) \operatorname{Id}_{\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r\}^\perp}$, see Corollary II.2.6.

We shall now show that S_r and ϕ_r asymptotically commute.

Lemma III.5.6. *There exists $c'' > 0$ such that*

$$\forall r \geq 0, \quad \|S_r \phi_r - \phi_r S_r\|_g \leq c'' e^{-r}. \quad (\text{III.5.12})$$

Proof. First, write

$$\begin{aligned} S_r \phi_r &= (S_r - \frac{1}{2}(\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi))\phi_r + \frac{1}{2}\phi_r + \frac{1}{2}(\eta \circ \phi_r) \otimes \xi, \\ \phi_r S_r &= \phi_r (S_r - \frac{1}{2}(\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi)) + \frac{1}{2}\phi_r + \frac{1}{2}\eta \otimes (\phi_r \xi). \end{aligned} \quad (\text{III.5.13})$$

It now follows from the triangle inequality that

$$\|S_r \phi_r - \phi_r S_r\|_g \leq 2\|\phi_r\|_g \|S_r - \frac{1}{2}(\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi)\|_g + \|\eta \circ \phi_r\|_g \|\xi\|_g + \|\eta\|_g \|\phi_r \xi\|_g. \quad (\text{III.5.14})$$

The result follows from Lemmas III.5.3 and III.5.4. $\square$

III.5.3 Convergence

We now show that $(\phi_r)_{r \geq 0}$ converges in $\mathcal{C}^1$ topology to some tensor ϕ , and that the restriction of this tensor to H is an almost complex structure.

Proposition III.5.7. *The family $(\phi_r)_{r \geq 0}$ converges in $\mathcal{C}^1$ topology to a $\mathcal{C}^1$ tensor ϕ satisfying $\phi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi$, $\phi^3 = -\phi$, $\eta \circ \phi = 0$ and $\eta \xi = 0$. In particular, ϕ preserves $H = \ker \eta$ and $(\phi|_H)^2 = -\operatorname{Id}_H$.*

Proof. Let $\{\partial_r, \mathcal{J}\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$ be a radially parallel orthonormal frame on a cylinder $E(\mathbb{R}_+ \times U)$. By the very definition of Φ , it holds that

$$\Phi = \sum_{j=1}^{2n} g(\cdot, E_j) \otimes JE_j. \quad (\text{III.5.15})$$

Suppose that the radially parallel orthonormal frame is a J -frame, that is for any $k \in \{1, \dots, n\}$, it holds that $JE_{2k-1} = JE_{2k}$. Then Φ has the nice expression

$$\Phi = \sum_{k=1}^n g(\cdot, E_{2k-1}) \otimes E_{2k} - g(\cdot, E_{2k}) \otimes E_{2k-1} \quad (\text{III.5.16})$$

and it follows that

$$\forall r \geq 0, \quad \phi_r = \sum_{k=1}^n \eta_r^{2k-1} \otimes \xi_{2k}^r - \eta_r^{2k} \otimes \xi_{2k-1}^r. \quad (\text{III.5.17})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

From the convergence of the local coframe $\{\eta_r, \eta_r^1, \dots, \eta_r^{2n}\}$ to $\{\eta, \eta^1, \dots, \eta^{2n}\}$ and of the local frame $\{\xi^r, \xi_1^r, \dots, \xi_{2n}^r\}$ to $\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$ in $\mathcal{C}^1$ topology, it follows that on U , $(\phi_r)_{r \geq 0}$ converges in $\mathcal{C}^1$ topology to

$$\phi = \sum_{k=1}^n \eta^{2k-1} \otimes \xi_{2k} - \eta^{2k} \otimes \xi_{2k-1}. \quad (\text{III.5.18})$$

Notice that this does not depend on the chosen radially parallel J -orthonormal frame, and $\phi_r \rightarrow \phi$ in $\mathcal{C}^1$ topology on ∂K . Taking the limit as $r \rightarrow \infty$ in Lemmas III.5.2 and III.5.3 concludes the proof. $\square$

Definition III.5.8. The almost complex structure J_H on H is defined as the restriction of ϕ to H .

III.5.4 Integrability

Since J_H is an almost complex structure, the complexified bundle $H \otimes \mathbb{C}$ splits as $H \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, where $H^{1,0} = \ker\{J_H - i\text{Id}\} = \{X + iJ_H X \mid X \in H\}$ and $H^{0,1} = \ker\{J_H + i\text{Id}\}$. Since H and J_H are both of class $\mathcal{C}^1$, the Lie bracket of sections of $H^{1,0}$ makes sense. It is then possible to ask whether J_H is integrable, that is, if $H^{1,0}$ is stable under the Lie bracket. However, J_H is defined as the restriction of the limit of a family of tensors (ϕ_r) , which does not preserve H , and it is not clear what condition on $\phi_r|_{\ker \eta_r}$ would ensure that J_H is integrable. Considering the whole tensor ϕ is thus more convenient, as the following study shows.

Recall that ϕ satisfies $\phi^3 = -\phi$. The complexified tangent bundle $T\partial K \otimes \mathbb{C}$ then splits into the direct sum of the eigenspaces of ϕ as

$$T\partial K \otimes \mathbb{C} = \ker \phi \oplus \ker\{\phi - i\text{Id}\} \oplus \ker\{\phi + i\text{Id}\} = \mathbb{C}\xi \oplus H^{1,0} \oplus H^{0,1}. \quad (\text{III.5.19})$$

We still denote by ϕ and η the complex-linear extensions of ϕ and η . Any complex vector field $V \in \Gamma(T\partial K) \otimes \mathbb{C}$ reads $V = \eta(V)\xi + V^{1,0} + V^{0,1}$, with $\phi V^{1,0} = iV^{1,0}$ and $\phi V^{0,1} = -iV^{0,1}$. Since $\phi\xi = 0$, it follows that $V + i\phi V = \eta(V)\xi + 2V^{0,1}$. Hence, a complex vector field V on ∂K is a section of $H^{1,0}$ if and only if $V + i\phi V = 0$. Finally, it follows that $H^{1,0}$ is integrable if and only if

$$\forall u, v \in \Gamma(H), \quad [u - i\phi u, v - i\phi v] + i\phi[u - i\phi u, v - i\phi v] = 0. \quad (\text{III.5.20})$$

The Nijenhuis tensor N_A of a field of endomorphisms A is defined by

$$\forall X, Y, \quad N_A(X, Y) = -A^2[X, Y] - [AX, AY] + A[AX, Y] + A[X, AY]. \quad (\text{III.5.21})$$

The integrability of J_H is related to the Nijenhuis tensor of ϕ by the following Lemma.

Lemma III.5.9. For any vector fields u and v on ∂K , setting $V = [u - i\phi u, v - i\phi v]$, it holds that

$$V + i\phi V = N_\phi(u, v) + \eta([u, v])\xi + i\phi N_\phi(u, v) - i(\eta([\phi u, v]) + \eta([u, \phi v]))\xi. \quad (\text{III.5.22})$$

Proof. Extending the Lie bracket $\mathbb{C}$ -linearly, it holds that

$$\begin{aligned}
 V + i\phi V &= [u, v] - [\phi u, \phi v] - i[\phi u, v] - i[u, \phi v] \\
 &\quad + i\phi([u, v] - [\phi u, \phi v] - i[\phi u, v] - i[u, \phi v]) \\
 &= [u, v] - [\phi u, \phi v] + \phi[\phi u, v] + \phi[u, \phi v] \\
 &\quad + i(\phi[u, v] - \phi[\phi u, \phi v] - [\phi u, v] - [u, \phi v]).
 \end{aligned} \tag{III.5.23}$$

The equalities $\phi^2 = -\text{Id} + \eta \otimes \xi$ and $\phi^3 = -\phi$ now yield

$$\begin{aligned}
 V + i\phi V &= (-\phi^2 + \eta \otimes \xi)[u, v] - [\phi u, \phi v] + \phi[\phi u, v] + \phi[u, \phi v] \\
 &\quad + i(-\phi^3[u, v] - \phi[\phi u, \phi v] + (\phi^2 - \eta \otimes \xi)[\phi u, v] \\
 &\quad + (\phi^2 - \eta \otimes \xi)[u, \phi v]) \\
 &= -\phi^2[u, v] - [\phi u, \phi v] + \phi[\phi u, v] + \phi[u, \phi v] + \eta([u, v])\xi \\
 &\quad + i\phi(-\phi^2[u, v] - [\phi u, \phi v] + \phi[\phi u, v] + \phi[u, \phi v]) \\
 &\quad - i(\eta([\phi u, v]) + \eta([u, \phi v]))\xi.
 \end{aligned} \tag{III.5.24}$$

The result follows from the definition of the Nijenhuis tensor N_ϕ . $\square$

Proposition III.5.10. *The almost complex structure J_H is integrable if and only if the two following conditions are satisfied:*

- (1) $N_\phi|_{H \times H} = d\eta|_{H \times H} \otimes \xi$,
- (2) $d\eta|_{H \times H}(J_H \cdot, \cdot) = -d\eta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot)$.

Proof. Let u and v be tangent to the distribution H and $V = [u - i\phi u, v - i\phi v]$. Then, V is tangent to $H^{1,0}$ if and only if $V + i\phi V = 0$. Identifying the real and imaginary parts, Lemma III.5.9 then states that V is tangent to $H^{1,0}$ if and only if

$$\begin{cases} 0 &= N_\phi(u, v) + \eta([u, v])\xi, \\ 0 &= \phi N_\phi(u, v) - (\eta([\phi u, v]) + \eta([u, \phi v]))\xi. \end{cases} \tag{III.5.25}$$

Since $\phi\xi = 0$, this latter system is equivalent to

$$\begin{cases} N_\phi(u, v) &= -\eta([u, v])\xi, \\ \eta([\phi u, v]) &= -\eta([u, \phi v]). \end{cases} \tag{III.5.26}$$

By definition of u and v , $\eta(u) = \eta(v) = 0$. Moreover, since $\eta \circ \phi = 0$, it follows that $\eta(\phi u) = \eta(\phi v) = 0$. Therefore, it holds that

$$\begin{cases} d\eta([u, v]) = u \cdot \eta(v) - v \cdot \eta(u) - \eta([u, v]) = -\eta([u, v]), \\ d\eta([\phi u, v]) = (\phi u) \cdot \eta(v) - v \cdot \eta(\phi u) - \eta([\phi u, v]) = -\eta([\phi u, v]), \\ d\eta([u, \phi v]) = u \cdot \eta(\phi v) - (\phi v) \cdot \eta(u) - \eta([u, \phi v]) = -\eta([u, \phi v]). \end{cases} \tag{III.5.27}$$

Finally, V is tangent to $H^{1,0}$ if and only if $N_\phi(u, v) = d\eta(u, v)\xi$ and $d\eta(\phi u, v) = -d\eta(u, \phi v)$. $\square$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Lemma III.5.11. *There exists $\tilde{c} > 0$ such that*

$$\forall r \geq 0, \forall p \in \partial K, \forall u, v \in T_p \partial K, \quad |\mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) + \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v)| \leq \tilde{c} \|u\|_g \|v\|_g e^{-\frac{r}{2}}. \quad (\text{III.5.28})$$

Proof. Recall that equation (III.4.49) gives, for all $r \geq 0$ and u, v tangent to ∂K

$$\mathrm{d}\eta_r(u, v) = e^{-r} (g(Y_v, JSY_u) - g(Y_u, JSY_v)). \quad (\text{III.5.29})$$

Since J is skew-symmetric, it holds that

$$\mathrm{d}\eta_r(u, v) = e^{-r} (g(SY_u, JY_v) - g(SY_v, JY_u)). \quad (\text{III.5.30})$$

Notice that since Y_u and Y_v are normal to ∂_r , this latter expression reads

$$\mathrm{d}\eta_r(u, v) = e^{-r} (g(SY_u, \Phi Y_v) - g(SY_v, \Phi Y_u)). \quad (\text{III.5.31})$$

It thus holds that

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) &= e^{-r} (g(S\Phi Y_u, \Phi Y_v) - g(SY_v, \Phi^2 Y_u)) \\ \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v) &= e^{-r} (g(SY_u, \Phi^2 Y_v) - g(S\Phi Y_v, \Phi Y_u)). \end{aligned} \quad (\text{III.5.32})$$

The symmetry of S now yields

$$\mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) + \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v) = e^{-r} (g(SY_u, \Phi^2 Y_v) - g(SY_v, \Phi^2 Y_u)). \quad (\text{III.5.33})$$

Since $\Phi^2 Y_u = -Y_u + g(Y_u, J\partial_r) \otimes J\partial_r$, and similarly for Y_v , it follows that

$$\mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) + \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v) = e^{-r} (g(SY_v, J\partial_r)g(Y_u, J\partial_r) - g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, J\partial_r)). \quad (\text{III.5.34})$$

Using the symmetry of S and writing $SJ\partial_r = (SJ\partial_r - J\partial_r) + J\partial_r$ now shows that

$$\mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) + \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v) = \eta_r(u)g(Y_v, SJ\partial_r - J\partial_r) - \eta_r(v)g(Y_u, SJ\partial_r - J\partial_r). \quad (\text{III.5.35})$$

Recall that there exist constants $c_1, c_2 > 0$ such that $\|\eta_r\|_g \leq c_1$ and $\|Y_w\|_g \leq c_2 \|w\|_g e^r$ for any w . Thus

$$|\mathrm{d}\eta_r(\phi_r u, v) + \mathrm{d}\eta_r(u, \phi_r v)| \leq c \|u\|_g \|v\|_g \|Se^r J\partial_r - e^r J\partial_r\|_g. \quad (\text{III.5.36})$$

To conclude, it suffices to control $\|Se^r J\partial_r - e^r J\partial_r\|_g$. Recall that $e^r J\partial_r = Z_\xi = Z'_\xi$. It now follows from the triangle inequality, the fact that S is uniformly bounded, and equation (III.5.2) that there exists $c_3 > 0$ such that

$$\begin{aligned} \|Se^r J\partial_r - e^r J\partial_r\|_g &= \|S(Z_\xi - Y_\xi) + SY_\xi - Z'_\xi\|_g \\ &\leq \|S\|_g \|Y_\xi - Z_\xi\|_g + \|SY_\xi - Z'_\xi\|_g \\ &\leq c_3 \|\xi\|_g e^{-\frac{r}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.37})$$

The proof follows by setting $\tilde{c} = c_1 c_2 c_3 \sup_{\partial K} \|\xi\|_g < +\infty$ since ξ is a continuous vector field on ∂K compact. $\square$

Proposition III.5.12. *Let u and v be vector fields on ∂K . Then it holds that $d\eta(\phi u, v) = -d\eta(u, \phi v)$. In particular, $d\eta|_{H \times H}(J_H \cdot, \cdot) = -d\eta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot)$.*

Proof. Recall that $(\phi_r)_{r \geq 0}$ and $(d\eta_r)_{r \geq 0}$ locally uniformly converge to ϕ and $d\eta$. The result follows by taking the limit in Lemma III.5.11 as $r \rightarrow \infty$. $\square$

Proposition III.5.12 shows that the condition (2) of Proposition III.5.10 is satisfied. Let us show that the condition (1) is also satisfied.

Lemma III.5.13. *For all $r \geq 0$, $p \in \partial K$ and $u, v \in T_p \partial K$, we have*

$$N_{\phi_r}(u, v) = e^r \eta_r(v)(\phi_r S_r u - S_r \phi_r u) - e^r \eta_r(v)(\phi_r S_r v - S_r \phi_r v) + d\eta_r(u, v)\xi(r). \quad (\text{III.5.38})$$

Proof. For X and Y vector fields on $\overline{M \setminus K}$, it holds that

$$\begin{aligned} -\Phi^2[X, Y] &= -\Phi^2 \nabla_X Y + \Phi^2 \nabla_Y X, \\ -[\Phi X, \Phi Y] &= -\nabla_{\Phi X}(\Phi Y) + \nabla_{\Phi Y}(\Phi X) \\ &= -(\nabla_{\Phi X} \Phi)Y - \Phi \nabla_{\Phi X} Y + (\nabla_{\Phi Y} \Phi)X + \Phi \nabla_{\Phi Y} X, \\ \Phi[\Phi X, Y] &= \Phi \nabla_{\Phi X} Y - \Phi \nabla_Y(\Phi X) \\ &= \Phi \nabla_{\Phi X} Y - \Phi(\nabla_Y \Phi)X - \Phi^2 \nabla_X Y, \text{ and} \\ \Phi[X, \Phi Y] &= \Phi \nabla_X(\Phi Y) - \Phi \nabla_{\Phi Y} X \\ &= \Phi(\nabla_X \Phi)Y + \Phi^2 \nabla_X Y - \Phi \nabla_{\Phi Y} X. \end{aligned} \quad (\text{III.5.39})$$

Recall that $N_\Phi(X, Y) = -\Phi^2[X, Y] - [\Phi X, \Phi Y] + \Phi[\Phi X, Y] + \Phi[X, \Phi Y]$. Therefore,

$$N_\Phi(X, Y) = \Phi(\nabla_X \Phi)Y - (\nabla_{\Phi X} \Phi)Y + (\nabla_{\Phi Y} \Phi)X - \Phi(\nabla_{\Phi Y} X). \quad (\text{III.5.40})$$

Recall that $\nabla g = 0$, $\nabla J = 0$, $\nabla \partial_r = S$ and $\nabla J \partial_r = JS$. Hence, by the very definition of Φ , it holds that

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Phi)Y &= -g(Y, SX)J\partial_r - g(Y, \partial_r)JSX \\ &\quad + g(Y, JSX)\partial_r + g(Y, J\partial_r)SX. \end{aligned} \quad (\text{III.5.41})$$

Since $\Phi \partial_r = \Phi J \partial_r = 0$, it holds that

$$\Phi(\nabla_X \Phi)Y = -g(Y, \partial_r)\Phi JSX + g(Y, J\partial_r)\Phi SX. \quad (\text{III.5.42})$$

Similarly, the following equality holds

$$\begin{aligned} (\nabla_{\Phi X} \Phi)Y &= -g(Y, S\Phi X)J\partial_r - g(Y, \partial_r)JS\Phi X \\ &\quad + g(Y, JS\Phi X)\partial_r + g(Y, J\partial_r)S\Phi X. \end{aligned} \quad (\text{III.5.43})$$

It follows by the anti-symmetry in X and Y that

$$\begin{aligned} N_\Phi(X, Y) &= g(Y, J\partial_r)(\Phi SX - S\Phi X) - g(X, J\partial_r)(\Phi SY - S\Phi Y) \\ &\quad + (g(Y, S\Phi X) - g(X, S\Phi Y))J\partial_r \\ &\quad + (g(Y, JS\Phi X) - g(X, JS\Phi Y))\partial_r \\ &\quad - g(Y, \partial_r)JS\Phi X + g(X, \partial_r)JS\Phi Y. \end{aligned} \quad (\text{III.5.44})$$

III. Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds

Notice that $g(X, JS\Phi Y) = -g(JX, S\Phi Y)$. Suppose from now that X is orthogonal to ∂_r . Then JX is orthogonal to $J\partial_r$. Since $S\Phi Y$ is orthogonal to ∂_r , it follows that $g(JX, S\Phi Y) = g(\Phi X, S\Phi Y)$. In particular, if X and Y are both orthogonal to ∂_r , the terms in the third and fourth lines of equation (III.5.44) vanish. Hence, if u and v are vector fields on ∂K , it holds that

$$\begin{aligned} N_\Phi(Y_u, Y_v) &= g(Y_v, J\partial_r)(\Phi SY_u - S\Phi Y_u) - g(Y_u, J\partial_r)(\Phi SY_v - S\Phi Y_v) \\ &\quad + (g(Y_v, S\Phi Y_u) - g(Y_u, S\Phi Y_v))J\partial_r. \end{aligned} \quad (\text{III.5.45})$$

Recall from equation (III.4.49) that $d\eta_r(u, v) = e^{-r}(g(Y_v, JSY_u) - g(Y_u, JSY_v))$. In addition, notice that

$$g(Y_v, JSY_u) = -g(JY_v, SY_u) = -g(SJY_v, Y_u) = -g(S\Phi Y_v, Y_u). \quad (\text{III.5.46})$$

Hence, $g(Y_v, S\Phi Y_u) - g(Y_u, S\Phi Y_v) = e^r d\eta_r(u, v)$. The result now follows from the equality $E(r, \cdot)^* e^r J\partial_r = \xi(r)$, the definition of η_r and the properties of the pull-back. $\square$

Proposition III.5.14. *The restriction $N_\phi|_{H \times H}$ is equal to the tensor $d\eta \otimes \xi$.*

Proof. By the convergence in $\mathcal{C}^1$ topology of ϕ_r to ϕ , it follows that for all u, v , tangent to H , $N_{\phi_r}(u, v) \rightarrow N_\phi(u, v)$ as $r \rightarrow +\infty$. Since $H = \ker \eta$, it follows from equation (III.5.1) that there exists $c > 0$ such that $|e^r \eta_r(u)| \leq c \|u\|_g e^{-\frac{r}{2}}$ and $|\eta_r(v)| \leq c \|v\|_g e^{-\frac{r}{2}}$. It then follows from Lemma III.5.6 that there exists $c' > 0$ such that

$$\forall r \geq 0, \forall u, v \in \Gamma(H), \quad \|N_{\phi_r}(u, v) - d\eta_r(u, v)\|_g \leq c' \|u\|_g \|v\|_g e^{-\frac{3r}{2}}. \quad (\text{III.5.47})$$

The result follows by taking the limit as $r \rightarrow +\infty$. $\square$

We shall now highlight the link between the canonical form η , the Carnot-Carathéodory metric γ_H , and the almost-complex structure J_H .

Proposition III.5.15. *The Carnot-Carathéodory metric γ_H , the exterior differential of the canonical 1-form at infinity η and the tensor ϕ are related by the equality $\gamma_H = d\eta(\cdot, \phi \cdot)$. In particular, the restriction of γ_H to $H \times H$ is given by $d\eta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot)$.*

Proof. Fix a radially parallel J -orthonormal frame $\{\partial_r, J\partial_r, E_1, \dots, E_{2n}\}$. From equation (III.4.53), it holds that $d\eta$ locally reads

$$d\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{2k-1} \wedge \eta^{2k} = \sum_{k=1}^n \eta^{2k-1} \otimes \eta^{2k} - \eta^{2k} \otimes \eta^{2k-1} \quad (\text{III.5.48})$$

while γ_H is locally expressed by

$$\gamma_H = \sum_{j=1}^{2n} \eta^j \otimes \eta^j. \quad (\text{III.5.49})$$

Since the radially parallel orthonormal frame is chosen to be a J -orthonormal frame, it holds that for all $r \geq 0$, and for all $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{cases} \eta_r^{2k-1} \circ \phi_r &= -\eta_r^{2k}, \\ \eta_r^{2k} \circ \phi_r &= \eta_r^{2k-1}. \end{cases} \quad (\text{III.5.50})$$

Taking the limit as $r \rightarrow +\infty$ shows that for all $k \in \{1, \dots, n\}$, $\eta^{2k-1} \circ \phi = -\eta^{2k}$ and $\eta^{2k} \circ \phi = \eta^{2k-1}$. It follows that

$$d\eta(\cdot, \phi \cdot) = \sum_{k=1}^n \eta^{2k-1} \otimes \eta^{2k-1} + \eta^{2k} \otimes \eta^{2k} = \gamma_H \quad (\text{III.5.51})$$

which concludes the proof. $\square$

We are now able to prove the last of our main Theorems.

Theorem D. *Let (M, g, J) be a complete non-compact Kähler manifold with an essential subset K , such that the sectional curvature of $\overline{M \setminus K}$ is negative. Suppose that M is (ALCH) and (ALS) of order a and b with $\min\{a, b\} > \frac{3}{2}$. Then $(\partial K, H, J_H)$ is a strictly pseudoconvex CR manifold of class $\mathcal{C}^1$.*

Proof. Let η be the canonical form, γ_H be the Carnot-Carathéodory metric and ϕ be defined as in Definition III.5.8. From Proposition III.5.7, ϕ induces a $\mathcal{C}^1$ almost complex structure $J_H = \phi|_H$ on the distribution $H = \ker \eta$, which is contact (Theorem B). It follows from propositions III.5.12 and III.5.14 that ϕ satisfies

$$\forall u, v \in \Gamma(H), \quad \begin{cases} N_\phi(u, v) &= d\eta(u, v)\xi, \text{ and} \\ d\eta(\phi u, v) &= -d\eta(u, \phi v). \end{cases} \quad (\text{III.5.52})$$

It then follows from Proposition III.5.10 that J_H is integrable, and $(\partial K, H, J_H)$ is a CR manifold of class $\mathcal{C}^1$. From Proposition III.5.15, it holds that $d\eta|_{H \times H}(\cdot, J_H \cdot) = \gamma_H$, and since γ_H is positive definite on H , it follows that $(\partial K, H, J_H)$ is strictly pseudoconvex. This concludes the proof. $\square$

Remark III.5.16. If M has real dimension 4, then the contact structure on the boundary of M is of rank 2. Since almost complex structures (when they are at least of class $\mathcal{C}^1$) are always integrable in dimension 2, the proof of Theorem D is thus considerably reduced in that specific case.

Appendix A

Curvature computations

Lemma A.0.1.

$$R^0(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) = -\frac{1}{2}g(SY_u, JY_v), \quad (\text{A.0.1})$$

$$R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) = \frac{1}{4}g(SY_u, JY_v), \quad (\text{A.0.2})$$

$$R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) = -g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r), \text{ and} \quad (\text{A.0.3})$$

$$R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r) = -\frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r). \quad (\text{A.0.4})$$

Proof. Since $\partial_r \perp SY_u$, $\partial_r \perp Y_v$, $J\partial_r \perp JSY_u$ and $J\partial_r \perp JY_v$, it follows that

$$\begin{aligned} R^0(\partial_r, J\partial_r, Y_v, SY_u) &= \frac{1}{4}(g(\partial_r, SY_u)g(J\partial_r, Y_v) - g(\partial_r, Y_v)g(J\partial_r, SY_u) \\ &\quad + g(\partial_r, JSY_u)g(J\partial_r, JY_v) - g(\partial_r, JY_v)g(J\partial_r, JSY_u) \\ &\quad + 2g(\partial_r, J^2\partial_r)g(SY_u, JY_v)) \\ &= \frac{1}{4}(2g(\partial_r, -\partial_r)g(SY_u, JY_v)) \\ &= -\frac{1}{2}g(SY_u, JY_v) \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

Similarly,

$$\begin{aligned} R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, J\partial_r) &= \frac{1}{4}(g(\partial_r, J\partial_r)g(Y_v, SY_u) - g(\partial_r, SY_u)g(Y_v, J\partial_r) \\ &\quad + g(\partial_r, J^2\partial_r)g(Y_v, JSY_u) - g(\partial_r, JSY_u)g(Y_v, J^2\partial_r) \\ &\quad + 2g(\partial_r, JY_v)g(J\partial_r, SY_u)) \\ &= \frac{1}{4}(-g(Y_v, JSY_u)) \\ &= \frac{1}{4}g(SY_u, JY_v). \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

A. Curvature computations

In addition, since J is skew-symmetric,

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, J\partial_r) &= \frac{1}{4} (g(\partial_r, J\partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r) - g(\partial_r, \partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) \\
&\quad + g(\partial_r, J^2\partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) - g(\partial_r, J\partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) \\
&\quad + 2g(\partial_r, J\nabla_{Y_v} Y_u)g(J\partial_r, J\partial_r)) \\
&= \frac{1}{4} (-g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) - g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) - 2g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r)) \\
&= -g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r).
\end{aligned} \tag{A.0.7}$$

Finally, since J is skew-symmetric and parallel, it holds that

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r) &= \frac{1}{4} (g(\partial_r, \nabla_{Y_u} J\partial_r)g(Y_v, \partial_r) - g(\partial_r, \partial_r)g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r) \\
&\quad + g(\partial_r, J\nabla_{Y_u} J\partial_r)g(Y_v, J\partial_r) - g(\partial_r, J\partial_r)g(Y_v, \nabla_{Y_u} J\partial_r) \\
&\quad + 2g(\partial_r, JY_v)g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, J\partial_r)) \\
&= -\frac{1}{4}g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, Y_v) + \frac{1}{2}g(\partial_r, JY_v)g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, J\partial_r).
\end{aligned} \tag{A.0.8}$$

To conclude, note that since $\|J\partial_r\|_g^2 = 1$ is constant, then $g(\nabla_{Y_u} J\partial_r, J\partial_r) = 0$. $\square$

Lemma A.0.2.

$$R^0(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) = \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, JE_j) - \frac{1}{4}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r), \tag{A.0.9}$$

$$R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) = \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, JE_j) + \frac{1}{2}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r), \tag{A.0.10}$$

$$R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) = -\frac{1}{4}g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j), \text{ and} \tag{A.0.11}$$

$$R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j) = -\frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) - \frac{3}{4}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r). \tag{A.0.12}$$

Proof. Since $\partial_r \perp SY_u$, $\partial_r \perp Y_v$ and $\partial_r \perp JE_j$, it holds that

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, E_j, Y_v, SY_u) &= \frac{1}{4} (g(\partial_r, SY_u)g(E_j, Y_v) - g(\partial_r, Y_v)g(E_j, SY_u) \\
&\quad + g(\partial_r, JSY_u)g(E_j, JY_v) - g(\partial_r, JY_v)g(E_j, JSY_u) \\
&\quad + 2g(\partial_r, JE_j)g(SY_u, JY_v)) \\
&= \frac{1}{4} (g(\partial_r, JSY_u)g(E_j, JY_v) - g(\partial_r, Y_v)g(E_j, JSY_u)) \\
&= \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r) - \frac{1}{4}g(SY_u, JE_j).
\end{aligned} \tag{A.0.13}$$

Similarly, it holds that

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, Y_v, SY_u, E_j) &= \frac{1}{4}(g(\partial_r, E_j)g(Y_v, SY_u) - g(\partial_r, SY_u)g(Y_v, E_j) \\
&\quad + g(\partial_r, JE_j)g(Y_v, JSY_u) - g(\partial_r, JSY_u)g(Y_v, JE_j) \\
&\quad + 2g(\partial_r, JY_v)g(E_j, JSY_u)) \\
&= -\frac{1}{4}g(\partial_r, JSY_u)g(Y_v, JE_j) + \frac{1}{2}g(\partial_r, JY_v)g(E_j, JSY_u) \\
&= \frac{1}{4}g(SY_u, J\partial_r)g(Y_v, JE_j) + \frac{1}{2}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, JE_j).
\end{aligned} \tag{A.0.14}$$

Since in addition $\partial_r \perp J\partial_r$, it follows that

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, \nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r, E_j) &= \frac{1}{4}(g(\partial_r, E_j)g(\nabla_{Y_v} Y_u, \partial_r) - g(\partial_r, \partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j) \\
&\quad + g(\partial_r, JE_j)g(\nabla_{Y_v} Y_u, J\partial_r) - g(\partial_r, J\partial_r)g(\nabla_{Y_v} Y_u, JE_j) \\
&\quad + 2g(\partial_r, J\nabla_{Y_v} Y_u)g(E_j, J\partial_r)) \\
&= -\frac{1}{4}g(\nabla_{Y_v} Y_u, E_j).
\end{aligned} \tag{A.0.15}$$

Finally, since J is parallel and $g(\nabla_{Y_u} JE_j, \partial_r) = -g(SY_u, JE_j)$, it holds that

$$\begin{aligned}
R^0(\partial_r, Y_v, \partial_r, \nabla_{Y_u} E_j) &= \frac{1}{4}(g(\partial_r, \nabla_{Y_u} E_j)g(Y_v, \partial_r) - g(\partial_r, \partial_r)g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) \\
&\quad + g(\partial_r, J\nabla_{Y_u} E_j)g(Y_v, J\partial_r) - g(\partial_r, J\partial_r)g(Y_v, J\nabla_{Y_u} E_j) \\
&\quad + 2g(\partial_r, JY_v)g(\nabla_{Y_u} E_j, J\partial_r)) \\
&= -\frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) + \frac{1}{4}g(\partial_r, J\nabla_{Y_u} E_j)g(Y_v, J\partial_r) \\
&\quad + \frac{1}{2}g(\partial_r, JY_v)g(\nabla_{Y_u} E_j, J\partial_r) \\
&= -\frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) + \frac{3}{4}g(\nabla_{Y_u} JE_j, \partial_r)g(Y_v, J\partial_r) \\
&= -\frac{1}{4}g(Y_v, \nabla_{Y_u} E_j) - \frac{3}{4}g(SY_u, JE_j)g(Y_v, J\partial_r).
\end{aligned} \quad \square$$

Bibliographie

- [And83] Michael T. ANDERSON : The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, 18(4):701–721, 1983.
- [AS85] Michael T. ANDERSON et Richard SCHOEN : Positive Harmonic Functions on Complete Manifolds of Negative Curvature. *Annals of Mathematics*, 121(2):429–461, 1985.
- [Bah08] Eric BAHUAUD : Intrinsic characterization for Lipschitz asymptotically hyperbolic metrics. *Pacific Journal of Mathematics*, 239(2):231–249, 2008.
- [Bes07] Arthur L. BESSE : *Einstein Manifolds*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [BG64] Richard L. BISHOP et Samuel I. GOLDBERG : Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 112(3):508–535, 1964.
- [BG11] Eric BAHUAUD et Romain GICQUAUD : Conformal Compactification of Asymptotically Locally Hyperbolic Metrics. *Journal of Geometric Analysis*, 21(4):1085–1118, 2011.
- [BGZ18] Filippo BRACCI, Hervé GAUSSIER et Andrew M. ZIMMER : The geometry of domains with negatively pinched Kähler metrics. *arXiv :1810.11389*, 2018.
- [BH02] Hassan BOUALEM et Marc HERZLICH : Rigidity at infinity for even-dimensional asymptotically complex hyperbolic spaces. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 1(2):461–469, 2002.
- [BH05] Olivier BIQUARD et Marc HERZLICH : A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds. *Duke Mathematical Journal*, 126(1):53–100, 2005.
- [BH14] Olivier BIQUARD et Marc HERZLICH : Analyse sur un demi-espace hyperbolique et poly-homogénéité locale. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 51(3):813–848, 2014.
- [Biq00] Olivier BIQUARD : Métriques d’Einstein asymptotiquement symétriques. *Astérisque tome 265*, 2000.

Bibliographie

- [BL18] Eric BAHUAUD et John M. LEE : Low regularity Poincaré–Einstein metrics. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(5):2239–2252, 2018.
- [Bla85] John S. BLAND : On the existence of bounded holomorphic functions on complete Kähler manifolds. *Inventiones mathematicae*, 81:555–566, 1985.
- [Bla89] John S. BLAND : Bounded imbeddings of open Kähler manifolds in $\mathbb{C}^N$. *Duke Mathematical Journal*, 58(1):173–203, 1989.
- [Bla10] David E. BLAIR : *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Birkhäuser Boston, 2010.
- [BM08] Eric BAHUAUD et Tracey MARSH : Hölder Compactification for Some Manifolds with Pinched Negative Curvature Near Infinity. *Canadian Journal of Mathematics*, 60(6):1201–1218, 2008.
- [Boc43] Salomon BOCHNER : Analytic and Meromorphic Continuation by Means of Green’s Formula. *Annals of Mathematics*, 44(4):652, 1943.
- [Car26] Élie CARTAN : Sur une classe remarquable d’espaces de Riemann. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 54:214–264, 1926.
- [Car27] Élie CARTAN : Sur une classe remarquable d’espaces de Riemann. II. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 55:114–134, 1927.
- [CE08] Jeff CHEEGER et David G. EBIN : *Comparison theorems in Riemannian geometry*. AMS Chelsea Publishing, 2008.
- [CH03] Piotr T. CHRUSCIEL et Marc HERZLICH : The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 212(2):231–264, 2003.
- [CS14] Philippe CASTILLON et Andrea SAMBUSETTI : On asymptotically harmonic manifolds of negative curvature. *Mathematische Zeitschrift*, 277(3):1049–1072, 2014.
- [CY80] Shiu-Yuen CHENG et Shing-Tung YAU : On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman’s equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(4):507–544, 1980.
- [dC92] Manfredo Perdigão P. do CARMO : *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [DJ10] Satyaki DUTTA et Mohammad JAVAHERI : Rigidity of conformally compact manifolds with the round sphere as the conformal infinity. *Advances in Mathematics*, 224(2):525–538, 2010.
- [Fef74] Charles FEFFERMAN : The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. *Inventiones mathematicae*, 26(1):1–65, 1974.

- [Fef76] Charles L. FEFFERMAN : Monge-Ampere Equations, the Bergman Kernel, and Geometry of Pseudoconvex Domains. *Annals of Mathematics*, 103(3):395–416, 1976.
- [FFW18] John FORNÆSS et Erlend FORNÆSS WOLD : A non-strictly pseudoconvex domain for which the squeezing function tends to 1 towards the boundary. *Pacific Journal of Mathematics*, 297(1):79–86, 2018.
- [FG85] Charles L. FEFFERMAN et C. Robin GRAHAM : Conformal invariants. *Astérisque hors série Élie Cartan et les mathématiques d’aujourd’hui*, 1985.
- [FG11] Charles L. FEFFERMAN et C. Robin GRAHAM : *The Ambient Metric*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2011.
- [GHL04] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*. Springer Science & Business Media, troisième édition, 2004.
- [Gic13] Romain GICQUAUD : Conformal Compactification of Asymptotically Locally Hyperbolic Metrics II : Weakly ALH Metrics. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(8):1313–1367, 2013.
- [GL91] C. Robin GRAHAM et John M. LEE : Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball. *Advances in Mathematics*, 87(2):186–225, 1991.
- [Her98] Marc HERZLICH : Scalar curvature and rigidity of odd-dimensional complex hyperbolic spaces. *Mathematische Annalen*, 312(4):641–657, 1998.
- [Her16] Marc HERZLICH : Computing Asymptotic Invariants with the Ricci Tensor on Asymptotically Flat and Asymptotically Hyperbolic Manifolds. *Annales Henri Poincaré*, 17(12):3605–3617, 2016.
- [HH97] Emmanuel HEBEY et Marc HERZLICH : Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds. *Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni*, 17(4):569–605, 1997.
- [Hir00] Kengo HIRACHI : Construction of Boundary Invariants and the Logarithmic Singularity of the Bergman Kernel. *Annals of Mathematics*, 151(1):151–191, 2000.
- [HK78] Ernst HEINTZE et Hermann KARCHER : A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*, 11(4):451–470, 1978.
- [HQS12] Xue HU, Jie QING et Yuguang SHI : Regularity and rigidity of asymptotically hyperbolic manifolds. *Advances in Mathematics*, 230(4):2332–2363, 2012.
- [Kle78] Paul F. KLEMBECK : Kähler Metrics of Negative Curvature, the Bergmann Metric near the Boundary, and the Kobayashi Metric on Smooth Bounded Strictly Pseudoconvex Sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 27(2):275–282, 1978.

- [KN96a] Shoshichi KOBAYASHI et Katsumi NOMIZU : *Foundations of Differential Geometry, Volume 1*. Wiley, 1996.
- [KN96b] Shoshichi KOBAYASHI et Katsumi NOMIZU : *Foundations of Differential Geometry, Volume 2*. Wiley, 1996.
- [Kra01] Steven KRANTZ : *Function Theory of Several Complex Variables : Second Edition*. American Mathematical Society, 2001.
- [KY96] Steven G. KRANTZ et Jiye YU : On the Bergman invariant and curvatures of the Bergman metric. *Illinois Journal of Mathematics*, 40(2), 1996.
- [Lee12] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2012.
- [Lee19] John M. LEE : *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer International Publishing, 2019.
- [LM82] John M. LEE et Richard MELROSE : Boundary behavior of the complex Monge-Ampère equation. *Acta Mathematica*, 148:159–192, 1982.
- [Mat18] Yoshihiko MATSUMOTO : Einstein Metrics on Strictly Pseudoconvex Domains from the Viewpoint of Bulk-Boundary Correspondence. *In Geometric Complex Analysis*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pages 235–245. Springer, 2018.
- [Pet06] Peter PETERSEN : *Riemannian geometry*. Numéro 171 de Graduate texts in mathematics. Springer, seconde édition, 2006.
- [Pin22] Alan PINOY : Asymptotic strictly pseudoconvex CR structure for asymptotically locally complex hyperbolic manifolds. *arXiv :2201.12132*, 2022.
- [Poi07] Henri POINCARÉ : Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 23:185–220, 1907.
- [Rot99] John C. ROTH : *Perturbation of Kähler-Einstein metrics*. Thèse de doctorat, University of Washington, 1999.
- [Sas60] Shigeo SASAKI : On Differentiable Manifolds with Certain Structures Which Are Closely Related to Almost Contact Structure I. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 12(3):459–476, 1960.
- [SH61] Shigeo SASAKI et Yoji HATAKEYAMA : On Differentiable Manifolds with Certain Structures Which Are Closely Related to Almost Contact Structure. II. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 13(2):281–294, 1961.
- [ST05] Yuguang SHI et Gang TIAN : Rigidity of Asymptotically Hyperbolic Manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 259(3):545–559, 2005.
- [Zim18] Andrew M. ZIMMER : A gap theorem for the complex geometry of convex domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(10):7489–7509, 2018.