



HAL
open science

Accès massif pour l'IoT dans la 5G et au delà

Mohamed Ali Adjif

► **To cite this version:**

Mohamed Ali Adjif. Accès massif pour l'IoT dans la 5G et au delà. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Limoges, 2022. Français. NNT : 2022LIMO0063 . tel-03783230

HAL Id: tel-03783230

<https://theses.hal.science/tel-03783230>

Submitted on 22 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Limoges

ED 610 - Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques, Informatique
(SISMI)

Laboratoire Xlim- Axe Systèmes et réseaux Intelligents

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Limoges
Electronique des Hautes Fréquences, Photonique et Systèmes

Présentée et soutenue par
Mohamed Ali ADJIF

Le 12 juillet 2022

Accès massif pour l'loT dans la 5G et au-delà

Thèse dirigée par Jean Pierre CANCES et Oussama HABACHI

JURY :

Président du jury

M. Iyad DAYOUB, Professeur des universités, Polytechnique Hauts-de-France

Rapporteurs

M. Essaid SABIR

M. Iyad DAYOUB

Examineurs

M. Gérard CHALHOUB

M. Jean-Pierre CANCES

M. Oussama HABACHI



À mes chers parents,
À mes chères sœurs,

*La personnalité créatrice doit penser et juger par elle-même
car le progrès moral de la société dépend exclusivement de son indépendance.*
Albert Einstein

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de Laboratoire XLIM, site de l'ENSIL, dans l'équipe RUBIH "Réseaux ubiquitaires adaptatif Hauts Débits". Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Monsieur Jean Pierre CANCES, professeur à université de Limoges et Monsieur Oussama HABACHI, professeur à université de Clermont Auvergne. Je les remercie d'une part de m'avoir encadré et orienté et d'autre part pour la confiance qu'ils m'ont accordée.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Iyad DAYOUB professeur à Polytechnique Hauts-de-France, Monsieur Essaid SABIR professeur à ENSEM Casablanca et Monsieur Gérard CHALHOUB maître de conférence-HDR à université de Clermont Auvergne, qui ont accepté de juger ce travail en qualité de rapporteurs et membres de jury.

Je tiens à remercier aussi tous les membres de l'équipe de recherche RUBIH avec qui j'ai travaillé, je pense aux permanents Monsieur Vahid MEDHDADI, Madame Anne JULIEN-VERGONJANNE et aussi à tous mes collègues à savoir : Imad EL KACHKECH, Karim Yazbeck et Wael SAIDANI.

Mes sincères remerciements à tous les enseignants chercheurs de l'ut Réseaux et Télécommunications de Clermont Auvergne avec qui j'ai travaillé cette année en tant que ATER et je les remercie pour m'avoir accueilli dans leur département, je pense à Monsieur Joel Toussaint, Monsieur Antonio FREITAS, Madame Frédérique JACQUET et Monsieur Sébastien HERMANDEZ.

Ma reconnaissance à toute ma famille pour leur soutien constant, leur patience et la confiance qu'ils m'ont accordées durant toutes ces années d'études. Merci mes chers parents, mes sœurs, je vous aime.

Droits d'auteurs

Cette création est mise à disposition selon le Contrat :

« **Attribution-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de modification 3.0 France** »

disponible en ligne : <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/>



Table des matières

Introduction générale.....	11
Chapitre I. État de l’art	14
I.1. Techniques d’accès multiples	14
I.1.1. Techniques d’accès multiples orthogonales.....	14
I.1.2. Techniques d’accès multiples non orthogonales (NOMA).....	16
I.1.2.1. Techniques NOMA basées sur l’étalement	16
I.1.2.1.1. Multiplexage par Code basé sur l’étalement à faible densité (LDS).....	17
I.1.2.1.1.1. Accès multiple par code à faible densité (SCMA)	17
I.1.2.1.1.2. Accès multiple par répartition de motifs (PDMA)	22
I.1.2.1.1.3. Multi User Shared Access (MUSA).....	27
I.1.2.1.1.4. Interleaved Division Multiple Access (IDMA).....	31
I.1.2.2. Techniques PD-NOMA basées sur la séparation par la puissance des utilisateurs.....	32
I.1.2.2.1. Liaison montante.....	34
I.1.2.2.2. Liaison descendante.....	35
Chapitre II. Allocation de ressources et de contrôle de puissance en liaison montante pour les réseaux PD-NOMA	36
II.1. Système de modèle	37
II.2. Allocation rapide de ressources basées sur les CSI des utilisateurs	38
II.2.1. Allocation rapide de ressources	39
II.2.2. Allocation de ressources à base d’apprentissage fédéré	41
II.2.2.1. Modèle de trafic	42
II.2.2.2. Algorithme d’apprentissage fédéré	42
II.2.2.3. Apprentissage du modèle de trafic	43
II.2.2.4. Allocation des ressources et adaptation du trafic	44
II.3. Allocation de ressources et contrôle de puissance : Approche de Multi-Armed Bandit	46
II.3.1. La formulation du problème et solution proposée	47
II.3.1.1. ϵ -MAB-NOMA et ϵ -décroissante MAB-NOMA	49
II.3.1.1.1. ϵ -MAB-NOMA	49
II.3.1.1.2. ϵ -décroissante MAB-NOMA	50
II.3.1.2. Algorithmes des limites supérieures de confiance	50
II.3.1.2.1. Algorithme MAB-NOMA-UCB1	50
II.3.1.2.2. Algorithme MAB-NOMA-UCB2.....	51
II.4. Résultats de simulation.....	52
II.4.1. Allocation rapide de ressources basées sur les CSI.....	52
II.4.2. Approches basées sur le MAB pour l’allocation de ressources dans NOMA	54
II.5. Conclusion	57
Chapitre III. Allocation de ressources et de contrôle de puissance en liaison descendante pour les réseaux PD-NOMA.....	58
III.1. Modèle de système	59
III.2. Technique d’allocation de ressources et de contrôle de puissance de transmission pour les liaisons descendantes	60
III.2.1. Formulation du problème	60
III.2.2. Allocation de puissance.....	61
III.2.3. Les algorithmes de regroupement des utilisateurs	62
III.2.3.1. Algorithme FAF : Les utilisateurs éloignés en premier.....	62

III.2.3.2. Algorithme RBC : Allocation basée sur la maximisation du débit.....	63
III.2.3.3. Algorithme RC : Allocation aléatoire d'utilisateurs	64
III.2.4. Décodeur SIC au niveau de MTD.....	65
III.3. Politiques d'allocation de puissance aléatoires dans les systèmes IoT en liaison descendante.....	66
III.3.1.1. P_i' suit une loi uniforme sur l'intervalle $[P_{\min}, P_{\max}]$	67
III.3.1.2. P_i' suit une loi gaussienne de moyenne P_0 et de variance σ_P^2	68
III.3.2. Analyse du taux d'erreur binaire TEB moyen	69
III.3.2.1. Probabilités d'avoir un, deux et trois MTDs par cluster	69
III.3.2.2. Probabilité d'erreur dans le cas d'un seul paquet transmis dans le cluster	70
III.3.2.2.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme	70
III.3.2.2.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne.....	72
III.3.2.3. Probabilité d'erreur dans le cas de transmission de deux paquets.....	73
III.3.2.3.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme	74
III.3.2.3.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne.....	74
III.3.2.4. Probabilité d'erreur dans le cas d'un cluster de trois utilisateurs	75
III.3.2.4.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme	75
III.3.2.4.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne.....	77
III.3.3. Analyse du débit utile moyen.....	78
III.3.3.1. Probabilité de capture dans le cas de transmission d'un seul paquet.....	78
III.3.3.1.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1)$ en utilisant la loi uniforme	78
III.3.3.1.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1)$ en utilisant la loi gaussienne.....	79
III.3.3.2. Probabilité de capture dans le cas de transmission de deux paquets	80
III.3.3.2.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2)$ en utilisant la loi uniforme.....	80
III.3.3.2.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2)$ en utilisant la loi gaussienne.....	80
III.3.3.3. Probabilité de capture dans le cas de transmission de trois paquets	81
III.3.3.3.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2, s_3)$ en utilisant la loi uniforme.....	81
III.3.3.3.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2, s_3)$ en utilisant la loi gaussienne	81
III.3.4. Résultats de simulation	82
III.3.4.1. Techniques de groupement d'utilisateurs en des clusters	82
III.3.4.2. Techniques d'allocation aléatoire des puissances de transmission.....	84
III.3.5. Conclusion	87
Conclusion.....	88
Références bibliographiques.....	90
Annexes	

Table des illustrations

Figure 1 : Principles of multiple access schemes: TDMA, FDMA, CDMA and OFDMA.....	15
Figure 2 : Encodeur SCMA.....	17
Figure 3 : Graphe de Tanner factoriel pour l'interconnexion entre les utilisateurs et les blocs de ressources	20
Figure 4 : Exemples de matrices PDMA	23
Figure 5 : Exemples de matrices PDMA pour un système localisé.....	24
Figure 6 : Graphe bi-partite équivalent au schéma de transmission de la matrice $S_{dm}^{((3 \times 7))}$	25
Figure 7 : Turbo-décodeur utilisant le PDMA.....	25
Figure 8 : capacité « sum-rate » des schémas PDMA et comparaison avec les systèmes OMA.....	27
Figure 9 : Schéma d'une transmission IDMA (Emetteur et Récepteur)	32
Figure 10 : Accès multiple non-orthogonal par multiplexage de puissance en liaison descendante (1) et montante (2).....	33
Figure 11 : Comparaison de la capacité des techniques OMA et NOMA dans le cas de deux utilisateurs dans le système [25].....	34
Figure 12 : Le modèle du système.....	37
Figure 13: Allocation de ressources dans l'approche proposée. Les RBs en rouge sont réservés pour la contention	41
Figure 14: Diagramme de transition d'état du modèle de chaîne de Markov décrivant le comportement temporel du utilisateur.....	42
Figure 15: Diagramme de transition d'état du modèle de chaîne de Markov décrivant le comportement temporel de l'utilisateur en mode alarme et en mode normal respectivement.	42
Figure 16: Autoadaptation des utilisateurs au sein d'une trame.....	46
Figure 17 : Procédure d'entraînement de l'approche NOMA basée sur MAB	48
Figure 18: La probabilité d'allocation en fonction du nombre de utilisateurs.....	53
Figure 19: Le débit moyen pour différents N et K.	54
Figure 20 Débit en fonction de la probabilité d'accès pour les différentes stratégies MAB par rapport à la stratégie NM-NOMA.	55
Figure 21 Débit en fonction du nombre de bras pour les différentes stratégies MAB par rapport au NM-ALOHA.....	56
Figure 22 Débit des algorithmes basés sur MAB en fonction de la durée de la période d'apprentissage.	57
Figure 23 Transmission en liaison descendante dans une cellule contenant une station de base et plusieurs utilisateurs.....	59
Figure 24 La zone d'intégration avec $\gamma \geq 1$	74
Figure 25 : La probabilité d'allocation en fonction du nombre de utilisateurs.....	83

Figure 26 : Le débit utile moyen pour différents N et K	83
Figure 27 : La réponse du canal modulée par la densité de puissance.....	84
Figure 28 : Taux d'erreur moyen avec une allocation de puissance suivant une loi uniforme et une loi gaussienne avec une connaissance parfaite de la localisation des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $= \delta 1$ bits/s/Hz, [K = 1, K=3]).....	85
Figure 29 Efficacité du débit lorsque l'allocation de puissance suit une loi uniforme avec une connaissance parfaite de l'emplacement des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $= \delta 1$ bits/s/Hz, K = 1)	86
Figure 30 Efficacité du débit lorsque l'allocation de puissance suit la loi gaussienne avec une connaissance parfaite de l'emplacement des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $\delta = 1$ bits/s/Hz, K = 1)	86
Figure 31 Efficacité du débit avec l'allocation de puissance selon la loi uniforme comparée à la loi gaussienne avec une connaissance parfaite de la localisation des utilisateurs ($E_b/N_0 = 25$ dB, $\delta = 1$ bits/s/Hz, [K = 1, K=3 et K=6])	87

Table des tableaux

Tableau 1 : Alphabet des mots de code pour l'exemple de la Figure 2	19
---	----

Introduction générale

Les systèmes de télécommunications ont connu un changement de paradigme au cours des dernières décennies. La cinquième génération (5G) s'intéresse notamment à la convergence de plusieurs types de réseaux offrant divers types de services tels que l'Internet des objets (IoT) et les réseaux véhiculaire (VANET). Plus spécifiquement, la mise en œuvre d'un réseau de type machine à machine (MTC), caractérisée par une évolution drastique du nombre d'appareils connectés, nécessite un système qui supporte un trafic de plus en plus important et qui garantit en même temps des performances fiables et une meilleure qualité de service (QoS). Afin de satisfaire un débit élevé et une latence faible, et garantir en même temps la connectivité massive d'objets moins sophistiqués dans un trafic très sporadique, la 5G et les futures générations de communication sans-fil doivent proposer des techniques d'accès multiples capable de supporter cette demande croissante et explosive de trafic contrairement aux techniques d'accès multiple orthogonal (OMA) dans lesquelles les utilisateurs occupent les ressources de manière exclusive. En effet, les techniques OMA souffrent d'un problème de congestion en raison de la largeur de bande de transmission extrêmement limitée. Ainsi, face à ces principaux défis de la 5G, les techniques d'accès multiple non orthogonal (NOMA) sont considérées comme des solutions prometteuses pour répondre à la demande d'accès massif et à l'évolution de la demande de bande passante. En effet, les techniques NOMA permettent à plusieurs utilisateurs d'accéder à la même ressource temps-fréquence en exploitant soit le multiplexage de puissance soit le multiplexage de code. Cependant, pour mettre en place ces nouvelles fonctionnalités, une nouvelle conception des couches physique (PHY) et contrôle d'accès au support (MAC) est indispensable. En effet, afin de séparer les signaux superposés, qui partagent la même ressource, la mise en œuvre de techniques de détection d'utilisateurs multiples (MUD : Multi-User Detection) et de séparation successive d'interférences (SIC), au niveau du récepteur, devient une urgence. Concernant les techniques NOMA exploitant le domaine de puissance (PD-NOMA), le principe consiste à superposer plusieurs utilisateurs avec des différents niveaux de puissance et d'exploiter au niveau du récepteur une annulation successive d'interférences pour récupérer les différents signaux. Par ailleurs, l'accès multiple non-orthogonal à multiplexage de code utilise les techniques bien connues d'étalement de spectre avec des formes d'onde de signature à faible densité en exploitant un algorithme de détection comme l'algorithme de passage de message (MPA : Message Passing Algorithm). Pour les réseaux de type MTC exigeant une connectivité massive, des objets autonomes et indépendants énergétiquement ont besoin de transmettre des paquets de petite taille sur une base temporelle relativement peu fréquente. Par conséquent, la fusion de NOMA avec les protocoles d'accès aléatoire (RA), comme ALOHA par exemple, est considérée comme une clé prometteuse pour les réseaux IoT. En effet, les techniques RA n'ont pas besoin de l'établissement d'une connexion initiale pour établir la signalisation et la réservation de ressources. Chaque utilisateur envoie ses données sans avoir besoin de l'autorisation préalable de la station de base (BS), ce qui est considéré comme un grand avantage pour éviter la surcharge du réseau par le trafic de signalisation quand le nombre d'objets connectés augmente. Par ailleurs, libérer la station de base de la tâche d'allocation de ressources relâche une contrainte forte sur le nombre d'utilisateurs que le système est capable de supporter. Les transmissions dans les communications RA ont lieu soit d'une manière asynchrone, où les utilisateurs envoient directement, soit d'une manière

synchrone dans lesquelles toutes les transmissions ont lieu dans une structure temporelle appelée Intervalle de temps (TS : Time Slot). Les techniques RA sont considérées comme des techniques peu complexes, néanmoins, elles souffrent d'un énorme problème de congestion dû aux collisions des paquets envoyés par les utilisateurs qui transmettent simultanément. L'association du RA et du NOMA est présentée comme une approche visant à améliorer l'efficacité spectrale et offrir plusieurs avantages tels que la faible complexité, sans exiger un processus d'ordonnancement sophistiqué. Il convient de noter que le RA-NOMA est un système économe en termes d'énergie, comme les utilisateurs ne sont pas censés écouter le canal en continuité. Cependant, avant la mise en place des techniques NOMA, nous avons besoin de repenser la couche MAC pour assurer le multiplexage adéquat des paquets. Cette technique est considérée actuellement comme la meilleure candidate pour inclure l'IoT dans les futures générations de systèmes de communication et adresser le défi d'accès massif.

Motivations et contributions

Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement au cadre de ville intelligente dans laquelle un grand nombre des objets connectés, autonomes et à faible coûts, doivent transmettre un trafic sporadique en utilisant des batteries, le plus souvent non rechargeables et qui doivent opérer pour des longues durées, environ une dizaine d'années pour les capteurs environnementaux. Dans ce contexte, nous considérons que les MTDs ont une connaissance parfaite de leurs propres coefficients de canal (CSI : Channel State Information), comme la BS a la capacité d'estimer les CSI et les envoyer aux utilisateurs dans la zone de couverture à travers l'utilisation des signaux pilotes. Ainsi, nous avons appliqué les techniques NOMA dans le domaine de puissance pour des transmissions en liaisons montantes et descendantes. En règle générale, les utilisateurs ayant des gains de canal très différents sont affecté dans un cluster à travers des algorithmes d'appariements. Parmi les différents algorithmes d'appariements proposés, il y a le groupement des utilisateurs les plus éloignés tout d'abord en les affectant à leurs meilleurs canaux de transmission, le groupement des utilisateurs les plus éloignés de la BS en les allouant au cluster leur donnant le meilleur débit, et enfin le groupement aléatoire d'utilisateurs. Pour garantir le niveau requis de QoS dans le réseau, les algorithmes d'appariement doivent tenir comptes de la capacité globale du réseau ainsi de l'équité entre les utilisateurs. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'appariement des utilisateurs pour permettre d'établir une connectivité massive. Ainsi, nous proposons des techniques d'allocation de ressources et de contrôle de puissance pour améliorer les performances du système en termes de débit utile et nombre d'utilisateurs connectés. Pour surmonter le problème des collisions dû aux interférences inter-cellulaire, nous auront recours aux techniques d'apprentissage par renforcement afin d'optimiser l'allocation des ressources, en termes de sous-porteuse, intervalle de temps, niveaux de puissances, dans les liaisons montantes. Nous investiguons deux scénarios : un premier scénario nécessitant l'intervention de la BS dans la formation des clusters d'utilisateurs, tandis que le deuxième scénario ne nécessite aucune synchronisation préliminaire pour effectuer la réservation de ressources. Les utilisateurs sont autonomes et choisissent les ressources adéquates afin d'envoyer leurs signaux sans aucune autorisation de la BS. Par la suite, nous nous focalisons sur les transmissions en liaison descendante et nous étudions le partage du budget de puissance entre les clusters, le groupement des utilisateurs en des clusters,

et enfin nous proposons une technique d'allocation aléatoire de puissance de transmission au sein d'un cluster.

Structure de thèse

Dans ce manuscrit, nous présentons le travail effectué pendant la thèse à travers trois chapitres organisés comme décrits ci-dessous :

- Le premier chapitre a comme objectif de présenter les techniques d'accès multiples, particulièrement les techniques non-orthogonales. Nous abordons tout d'abord les techniques opérant dans le domaine de puissance et nous montrons l'importance du SIC pour séparer les signaux. Dans ce cadre-là, nous investiguons les protocoles d'accès aléatoire qui permettent d'accéder au canal sans répétition, comme Regular-ALOHA et le Slotted-ALOHA, ainsi que les techniques avec répétition (CRDSA et IRSA). Par ailleurs, nous introduisons les techniques NOMA dans le domaine de code tels que SCMA, PDMA et MUSA. Enfin, nous présentons les techniques PD-NOMA et nous illustrons l'efficacité des techniques de superposition et de décodage pour les approches à multiplexage de puissance.
- Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la sélection conjointe des sous-porteuses et au contrôle de puissance dans les liaisons montantes. Nous proposons d'abord une approche basée sur l'apprentissage fédéré, qui prend en compte le mode de trafic de chaque utilisateur pour garantir une satisfaction d'allocation massive. Ensuite, nous proposons une deuxième approche qui se base sur la technique Multi-Armed Bandit (MAB) pour offrir aux utilisateurs plus d'autonomie en termes de sélection de ressources et de contrôle de puissance.
- Le troisième chapitre focalisera plutôt sur les transmissions en liaison descendante. Nous étudions tout d'abord l'organisation des utilisateurs en des clusters, où nous proposons trois algorithmes de clustering. Par la suite, nous nous intéressons à l'allocation de puissance de transmission au sein des clusters et nous proposons une technique d'allocation aléatoire de faible complexité basée sur les lois de probabilité uniforme et gaussienne.
- Une conclusion résumera les contributions effectuées dans le cadre de cette thèse et présentera quelques perspectives intéressantes qui méritent d'être investigués dans le futur.

Chapitre I. État de l'art

Jusqu'à maintenant les techniques d'accès multiple orthogonales (OMA : Orthogonal Multiple Access) ont été utilisées dans les différentes générations de radiocommunication cellulaires : GSM, UMTS et LTE. La réutilisation de fréquence, la diversité de polarisation, le partage des porteuses en OFDMA sont autant de techniques qui permettent d'obtenir une bonne capacité du réseau tout en maintenant des niveaux d'interférences raisonnables. Cependant, le passage à la 5G, avec la nécessité de prendre en compte le déploiement des réseaux de capteurs à grande échelle et une variété de nouveaux services dans les échanges M2M (Machine To Machine), change la donne et conduit à examiner le cas des techniques d'accès multiple non orthogonales (NOMA : Non Orthogonal Multiple Access). Dans les systèmes NOMA, on tolère que des blocs de ressource temps-fréquence puissent se superposer à condition, bien sûr, de pouvoir traiter les interférences générées de façon efficace à la réception. Ce premier chapitre sera consacré à un état de l'art portant sur les techniques d'accès multiple utilisées dans la 5ème génération. Nous présentons tout d'abord les techniques OMA utilisées dans les différentes générations de communication, et nous nous focalisons par la suite sur les techniques NOMA utilisées dans la 5G qui autorisent la superposition de plusieurs utilisateurs sur la même bande passante dans un intervalle de temps donné. Spécifiquement, nous introduisons les deux principaux types de techniques NOMA : les techniques de multiplexage basées sur la séparation par codes et les techniques de multiplexage basées sur la séparation en puissance.

I.1. Techniques d'accès multiples

L'accès multiple permet à plusieurs utilisateurs de partager efficacement un canal de communication. Les utilisateurs transmettent leurs signaux indépendamment vers un récepteur commun via leurs canaux respectifs. Les transmissions doivent se faire dans la largeur de bande totale du système avec des contraintes de puissance pour chaque utilisateur. En général, les transmissions des utilisateurs sont coordonnées et synchronisées par les stations de base, de sorte que les signaux reçus soient décodés de manière cohérente. L'accès multiple peut être classé en deux catégories : l'accès multiple orthogonal et l'accès multiple non orthogonal.

I.1.1. Techniques d'accès multiples orthogonales

Dans les systèmes de communication numérique, il existe trois techniques de base d'accès multiple partageant les médias sans fil, respectivement appelées accès multiple à multiplexage temporel TDMA (Time Division Multiple Access), accès multiple à multiplexage fréquentiel FDMA (Frequency Division Multiple Access) et accès multiple à multiplexage de code CDMA (Code Division Multiple Access). Le principe du TDMA consiste à diviser l'axe du temps en des créneaux temporels à l'intérieur d'un motif répétitif appelé trame. A l'intérieur d'une trame, on affecte chaque utilisateur à un ou plusieurs créneaux temporels en faisant bien attention qu'il n'y ait jamais deux utilisateurs sur un même créneau temporel [1]. Pour établir une communication entre un émetteur et un récepteur, chacune des deux liaisons montante et descendante se voit attribuer des positions de créneaux temporels bien précises. Dans le cadre du FDMA, c'est la bande passante totale du système qui est divisée en sous-bandes (qui ne se chevauchent pas). Par la suite, chaque utilisateur se voit attribuer une sous-bande de fréquence bien précise [2]. Il faut signaler qu'en général, on utilise plutôt un mixe entre TDMA et FDMA pour pouvoir disposer de la plus large ressource radioélectrique possible. C'est ainsi que dans

le MF-TDMA (Multi Frequency TDMA), les utilisateurs disposent sur un même créneau temporel de plusieurs bandes passantes fréquentielles. La troisième technique, appelée CDMA, consiste à multiplier les données de chaque utilisateur par une séquence plus rapide appelée code d'étalement [3]. Si les codes attribués aux différents utilisateurs sont orthogonaux au sens de l'inter-corrélation, on peut facilement superposer plusieurs utilisateurs sur une même bande de fréquence. Le fait que la séquence d'étalement soit cadencée à un rythme plus élevé que la séquence des données transmises entraîne un élargissement de la bande passante des signaux des utilisateurs, ce qui explique pourquoi on parle d'étalement de spectre avec la technique CDMA. Il faut signaler également que le CDMA est associé soit à la technique FDMA (cas du mode FDD de l'UMTS), soit à la technique TDMA (cas du mode TDD de l'UMTS). Par ailleurs, une nouvelle technique d'accès multiple révolutionnaire a fait le succès de la 4G, c'est l'accès multiple par division orthogonale de fréquences (OFDMA : Orthogonal Frequency Division Multiple Access) [4]. L'OFDMA est bien évidemment basée sur l'utilisation de l'OFDM, technique de modulation multi-porteuses qui permet de convertir un canal sélectif en fréquence en un ensemble de canaux non-sélectifs en fréquence. Cependant, contrairement à l'OFDM où l'ensemble des porteuses est attribué à un utilisateur, dans le contexte de l'OFDMA, les porteuses sont partagées entre plusieurs utilisateurs. Ce partage en fréquence, associé à un partage des émissions dans le domaine temporel, conduit tout naturellement à la notion de bloc de ressources (RB : Ressources Block) qui sont des blocks de temps-fréquence attribués aux différents utilisateurs en fonction de la qualité de service (QoS) qu'ils requièrent. La technique OFDMA est actuellement utilisée dans les systèmes de liaison descendante LAN sans fil, WiMAX (IEEE 802.16) et LTE [5].

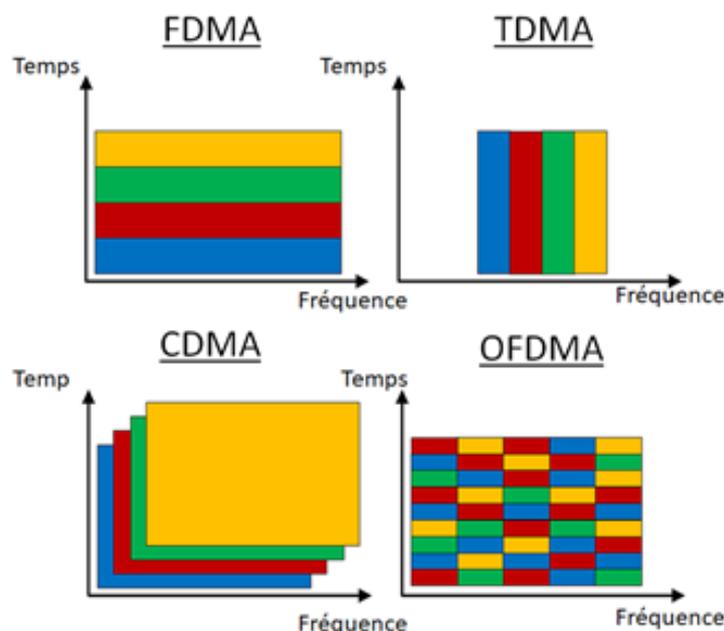


Figure 1 : Principe des techniques d'accès multiple es: TDMA, FDMA, CDMA et OFDMA

Un des gros avantages de l'OFDMA réside dans sa faculté à s'adapter aux fluctuations temporelles du canal de propagation. C'est ainsi que dans les bandes de fréquences où le canal est très atténué, on peut attribuer des modulations résistantes à faible efficacité spectrale aux porteuses concernées, tandis que dans les zones où le canal est fort, on peut attribuer des

modulations à haute efficacité spectrale (QAM 16-32-64) aux porteuses concernées. De nombreux algorithmes comme le water-filling existent pour optimiser l'allocation de ressources (puissance et modulation) dans le cadre des modulations multi-porteuses. Les techniques d'accès multiple mentionnées précédemment sont représentées sur la figure 1

I.1.2. Techniques d'accès multiples non orthogonales (NOMA)

Les techniques NOMA ont été conçues pour faire face à l'accroissement du nombre d'appareils connectés dans le cadre de la 5G et au-delà [6][7]. En effet, ces techniques avaient pour but de tolérer un certain niveau d'interférences entre les utilisateurs, en attribuant des ressources communes à plusieurs utilisateurs au même instant, à condition de pouvoir décoder correctement à la réception chacun de ces utilisateurs avec la qualité de service requise. La conséquence est que l'on reporte la complexité de cette technique au niveau des récepteurs qui devront être capables d'effectuer du traitement de signal afin d'annuler les interférences. La technique NOMA permet donc à plusieurs utilisateurs de partager des ressources en temps et en fréquence et en espace par simple superposition linéaire ou par multiplexage. Du côté du récepteur, les informations des différents utilisateurs (appelés encore User Equipment ou UE) peuvent être récupérées par des récepteurs avancés tels que les récepteurs à annulation d'interférence ou à détection itérative. Cependant, pour permettre au récepteur de détecter les signaux multi-utilisateurs dans de bonnes conditions, il faut introduire une bonne séparabilité entre les utilisateurs. Cette séparabilité peut être obtenue dans le domaine de puissances. Dans ce cas, les utilisateurs se voient attribuer des niveaux de puissance différents qui tiennent compte de la qualité de leurs canaux de propagation. Ces écarts de puissance à la réception permettent alors à un récepteur à annulation d'interférences successives (SIC receiver : Serial Interference Canceler Receiver) de récupérer l'ensemble des signaux transmis. Cette séparabilité peut également être obtenue dans le domaine des codes. En effet, en attribuant des séquences d'étalement particulières à chaque utilisateur, nous pouvons concevoir un récepteur performant capable de décoder l'ensemble des utilisateurs. C'est le cas par exemple des systèmes d'accès multiple à étalement de code SCMA (Sparse Code Multiple Access) [8] [9] où le récepteur utilise un algorithme puissant de décodage par propagation de croyance qui approxime au mieux le Maximum de Vraisemblance. Il faut également signaler que la séparabilité des utilisateurs peut être obtenue spatialement, si on dispose d'antennes suffisamment directives. Dans ce cas, on peut profiter de la réutilisation de fréquence entre faisceaux suffisamment disjoints. Cela dit, cette technique d'un point de vue traitement du signal s'apparente à de la séparabilité en termes de puissance.

I.1.2.1. Techniques NOMA basées sur l'étalement

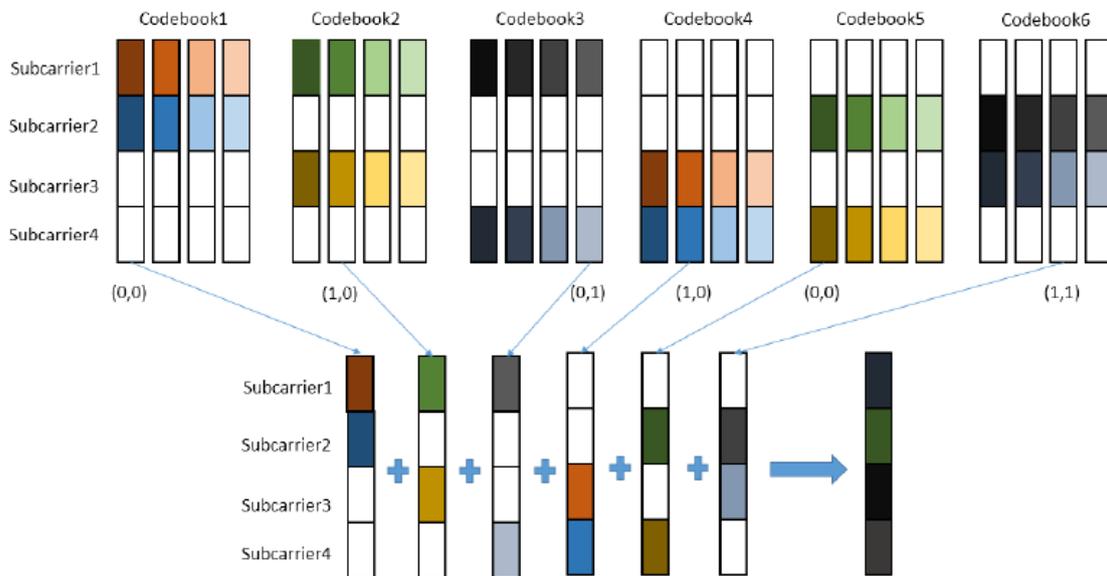
Les systèmes NOMA basés sur l'étalement se caractérisent par l'attribution de différents codes d'étalement aux différents utilisateurs pour les distinguer. Ces systèmes NOMA peuvent être classés en deux catégories. Les systèmes NOMA basés sur l'étalement à faible densité (LDS : Low density spreading) et les systèmes non basés sur le LDS. Les systèmes NOMA basés sur l'étalement LDS utilisent des récepteurs sophistiqués à propagation de croyance (BP). Parmi ces systèmes, on peut citer l'accès multiple par code clairsemé (SCMA : Sparse Code Multiple Access), l'accès multiple par motif (PDMA : Pattern Division Multiple Access) et l'extension de vecteur de signature à faible densité (LDS-SVE : Low Density Spreading Signature Vector

Extension). D'autre part, les systèmes comme l'accès partagé par plusieurs utilisateurs (MUSA : Multi User Shared Access) et l'accès codé non orthogonal (NOCA : Non Orthogonal Coded Access) n'utilisent pas des codes d'étalement basés sur le LDS et se servent des récepteurs tels que le SIC ou le PIC (Parallel Interference Canceler).

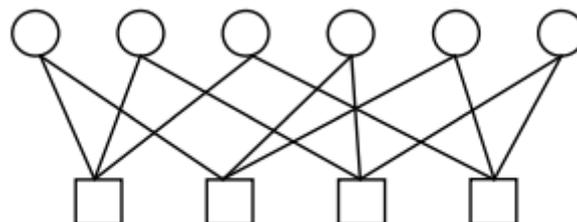
I.1.2.1.1. Multiplexage par Code basé sur l'étalement à faible densité (LDS)

I.1.2.1.1.1. Accès multiple par code à faible densité (SCMA)

La technique SCMA, se basant sur des codes à faible densité afin de multiplexer les utilisateurs, s'appuie sur la technique LDS-CDMA (étalement de spectre avec des codes à faible densité i.e. présentant beaucoup de chips égaux à zéros et peu de chips égaux à un) qu'elle combine avec un mapping multidimensionnel sophistiqué afin de produire des mots de code qui pourront être traités efficacement à la réception par un algorithme de propagation de croyance. La technique SCMA associe donc les bits d'information aux mots de code à faible densité, extraits d'un livre de codes multidimensionnels, qui seront multiplexés sur un groupe bien défini de ressources temps-fréquence orthogonales, comme on peut le voir dans la figure ci-dessous.



2a) mapping bits/mots de code



2b) Graphe factoriel équivalent

Figure 2 : Encodeur SCMA

Dans le cadre d'un système de transmission SCMA, la chaîne de transmission se divise en deux parties : l'encodeur et le décodeur :

- Au niveau de l'encodeur, on doit faire correspondre à un ensemble de $\log_2(M)$ bits un mot de code de taille M et à K dimensions, K correspondant aux nombres de sous-porteuses disponibles. Le mot de code de dimension K est un vecteur avec $N < K$ composantes non nulles. Les utilisateurs ne peuvent pas transmettre de données à travers les sous-porteuses représentées par les autres $(N - K)$ composantes nulles. En théorie, on peut allouer plusieurs mots de code à un seul utilisateur et chaque mot de code peut être utilisé par plusieurs utilisateurs. La Figure 2 représente un exemple d'encodeur SCMA avec six couches qui comportent chacune quatre mots de code qui sont représentés sous forme de nœuds de variable et quatre sous porteuses qui sont représentées sous forme de nœuds de fonction ou nœuds de contrainte (Figure 2b). Sur la Figure 2a), chaque ligne représente une dimension et chaque colonne représente un vecteur de dimension quatre. Pour chaque groupe de deux bits on dispose d'une liste de quatre mots de code. Dans cette figure, les parties en blanc sur les mots de code représentent des zéros dans les mots de code correspondants. Par exemple, pour la liste des mots de code correspondants au couple de bits (0,0), on a quatre mots de code et seules les deux premières lignes sont non nulles, ce qui entraîne que seuls les sous-porteuses 1 et 2 sont utilisées tandis que les porteuses 3 et 4 sont éteintes. Le design de l'alphabet ou de l'ensemble des mots de code multi-dimensionnels est la partie la plus délicate qui conditionne les performances des techniques de transmissions en SCMA. De nombreux travaux de recherche [10-12] ont proposé différentes méthodes pour obtenir des constellations multi-dimensionnelles présentant de bonnes propriétés de séparabilité. D'une façon générale, la conception de mots de code dans les systèmes SCMA est réalisé en trois étapes :

- La première étape consiste à concevoir la matrice de mapping qui va déterminer le nombre de couches qui vont interférer sur chaque sous-porteuse. Par exemple, dans l'exemple de la Figure 2, on peut voir sur la construction du mapping que chaque couche pourra interférer avec deux autres couches.
- La deuxième étape consiste à construire la constellation multi-dimensionnelle de base et d'en déduire les points correspondants dans la constellation. Pour cette étape, il faudra tout d'abord trouver une constellation de base qui maximise les distances euclidiennes entre les points. Puis on peut appliquer des transformations à base de matrices de rotation sur cette matrice de départ pour dupliquer les mots de code.
- La troisième étape consiste à construire les mots de code susceptibles d'interférer en utilisant des opérations de conjugaison, rotation, permutation. Dans l'exemple de la Figure 2, nous avons six couches de données qui correspondent à six utilisateurs, quatre blocs de ressources temps-fréquence disponibles avec la possibilité de faire interférer deux autres utilisateurs pour chaque utilisateur donné et quatre mots de code disponibles pour chacun des six alphabets correspondant à une couche de données. L'optimisation des mots de code conduit à l'alphabet suivant (Tableau 1).

Les paramètres cités dans le tableau ci-dessous sont respectivement :

- $F=4$ le nombre de blocs de ressources temps-fréquence disponibles,

- $V=6$ le nombre de couches de données (ou le nombre d'utilisateurs qui se partagent les quatre ressources),
- $df=3$ le nombre d'utilisateurs qui utilisent un même bloc de ressources temps-fréquence,
- $dv=2$ le nombre de blocs de ressources temps-fréquence utilisés par chaque utilisateur (ou couche de données),
- $M=4$ le nombre de mots de code dans chacun des six alphabets.

Tableau 1 : Alphabet des mots de code pour l'exemple de la Figure 2

Codebook in Storage ($V=6, F=4, df=3, dv=2, M=4$)

SCMA Codebook index	SCMA codebook for each layer
CB ₁	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1815 - 0.1318i & -0.6351 - 0.4615i & 0.6351 + 0.4615i & 0.1815 + 0.1318i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7851 & -0.2243 & 0.2243 & -0.7851 \end{bmatrix}$
CB ₂	$\begin{bmatrix} 0.7851 & -0.2243 & 0.2243 & -0.7851 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1815 - 0.1318i & -0.6351 - 0.4615i & 0.6351 + 0.4615i & 0.1815 + 0.1318i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
CB ₃	$\begin{bmatrix} -0.6351 + 0.4615i & 0.1815 - 0.1318i & -0.1815 + 0.1318i & 0.6351 - 0.6415i \\ 0.1392 - 0.1759i & 0.4873 - 0.6156i & -0.4873 + 0.6156i & -0.1392 + 0.1759i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
CB ₄	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7851 & -0.2243 & 0.2243 & -0.7851 \\ -0.0055 - 0.2242i & -0.0193 - 0.7848i & 0.0193 + 0.7848i & 0.0055 + 0.2242i \end{bmatrix}$
CB ₆	$\begin{bmatrix} -0.0055 - 0.2242i & -0.0193 - 0.7848i & 0.0193 + 0.7848i & 0.0055 + 0.2242i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6351 + 0.4615i & 0.1815 - 0.1318i & -0.1815 + 0.1318i & 0.6351 - 0.4615i \end{bmatrix}$
CB ₇	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.73 & -0.2243 & 0.2242 & -0.7851 \\ 0.1392 - 0.1759i & 0.4873 - 0.6156i & -0.4873 + 0.6156i & -0.1392 + 0.1759i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans ces conditions, le graphe de Tanner représentant les interconnexions entre les blocs de ressources temps-fréquence et les différentes couches de données peut être représenté sous une forme plus détaillée qu'en Figure 2 (voir Figure 3).

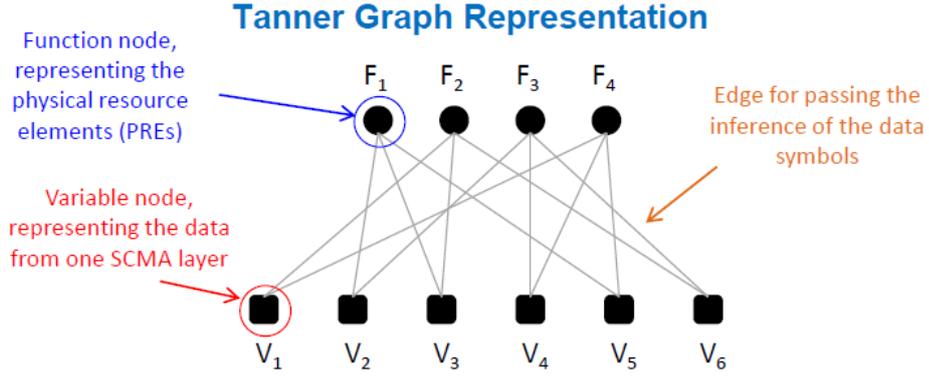


Figure 3 : Graphe de Tanner factoriel pour l'interconnexion entre les utilisateurs et les blocs de ressources

- Au niveau du décodeur, on utilise l'algorithme de propagation de croyance (BP : Belief Propagation) ou l'algorithme de passage de message (MPA : Message Passing Algorithm) permettant d'approximer le Maximum de Vraisemblance. L'étape d'initialisation des probabilités conditionnelles au niveau des nœuds de fonction (au nombre de six car six utilisateurs) dans l'exemple de la Figure 2, consiste à calculer les différentes quantités :

$$f_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n) = \frac{-1}{N_{0,n}} \left\| y_n - (h_{n,1}C_{1,n}(m_1) + h_{n,2}C_{2,n}(m_2) + h_{n,3}C_{3,n}(m_3)) \right\|^2$$

$$m_1 = 1, \dots, M \quad m_2 = 1, \dots, M \quad m_3 = 1, \dots, M \quad n = 1, \dots, F$$

(1)

La complexité de cette étape est telle que pour chaque nœud n , on doit tester : $F \times F \times F$ combinaisons de signaux, ce qui nécessite de stocker en tout : $F \times F \times F \times M$ valeurs. Ainsi, on en déduit la probabilité conditionnelle à priori suivante des combinaisons de mots de code :

$$P(y_n | x_1, x_2, x_3) \cdots \phi_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n) = \exp(f_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n))$$

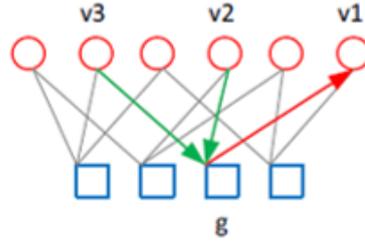
(2)

Concernant les probabilités à priori d'émettre chaque mot de code, on prend la même valeur pour tous les mots :

$$P(x_1), P(x_2), P(x_3) \cdots I_{v_1 \rightarrow g}^{init}(m_1) = I_{v_2 \rightarrow g}^{init}(m_2) = I_{v_3 \rightarrow g}^{init}(m_3) = \frac{1}{M}$$

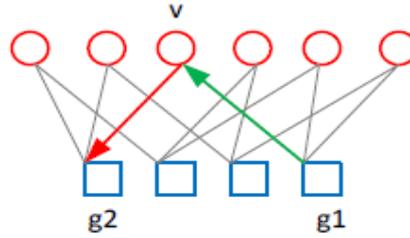
(3)

Après cette première étape d'initialisation, on arrive à la seconde étape qui consiste à la mise à jour des messages au niveau des nœuds de contrainte. Le nœud de contrainte g élabore le message rouge vers v_1 à partir des deux informations extrinsèques v_2 et v_3 , illustrées en vert sur le schéma de la figure ci-dessous. Le message transmis à v_1 contient les estimées de g à partir de toutes les valeurs possibles de v_1 . Nous pouvons résumer cette étape à partir des équations ci-dessous :



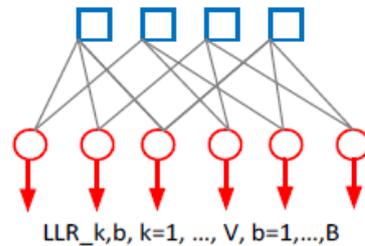
$$\begin{aligned}
 I_{v_1 \rightarrow g}(m_1) &= \sum_{m_2=1}^M \sum_{m_3=1}^M \phi_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n) (I_{v_2 \rightarrow g}(m_2) I_{v_3 \rightarrow g}(m_3)) \quad m_1 = 1, \dots, M \\
 I_{v_2 \rightarrow g}(m_2) &= \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_3=1}^M \phi_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n) (I_{v_1 \rightarrow g}(m_1) I_{v_3 \rightarrow g}(m_3)) \quad m_2 = 1, \dots, M \\
 I_{v_3 \rightarrow g}(m_3) &= \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \phi_n(y_n, m_1, m_2, m_3, N_{0,n}, H_n) (I_{v_1 \rightarrow g}(m_1) I_{v_2 \rightarrow g}(m_2)) \quad m_3 = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{4}$$

De la même façon, nous allons mettre à jour les messages au niveau des nœuds de variable et compléter ainsi la première itération de l'algorithme MPA. Pour cette étape, nous avons les équations de mise à jour suivantes :



$$\begin{aligned}
 I_{v \rightarrow g_1}(m) &= \text{normalize}(ap_v(m) I_{g_2 \rightarrow v}(m)) \quad m = 1, \dots, M \\
 I_{v \rightarrow g_2}(m) &= \text{normalize}(ap_v(m) I_{g_1 \rightarrow v}(m)) \quad m = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{5}$$

Après N itérations de cet algorithme entre les nœuds de variable et les nœuds de fonction, nous obtenons une estimation des mots de code transmis sous la forme du produit suivant :



$$Q_v(m) = ap_v(m) I_{g_1 \rightarrow v}(m) I_{g_2 \rightarrow v}(m) \quad m = 1, \dots, M \tag{6}$$

Enfin, nous pouvons calculer le rapport de vraisemblance logarithmique (LLR) de chaque bit transmis

$$\begin{aligned}
LLR_x &= \log \left(\frac{P(b_x = 0)}{P(b_x = 1)} \right) \\
LLR_x &= \log \left(\frac{\sum_{m, b_{m,x}=0} Q_v(m)}{\sum_{m, b_{m,x}=1} Q_v(m)} \right) = \log \left(\sum_{m, b_{m,x}=0} Q_v(m) \right) - \log \left(\sum_{m, b_{m,x}=1} Q_v(m) \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

On peut ainsi prendre une décision finale sur les bits transmis.

Pour conclure sur cette partie, nous pouvons donc affirmer que le SCMA est doté d'un multiplexage multi-utilisateur dense qui assure un débit élevé et une connectivité massive. Il utilise un étalement de spectre à base de séquences de signatures à faible densité combiné à un mapping multi-dimensionnel très efficace ce qui permet de développer en réception des algorithmes de détection multi-utilisateurs de type MPA qui approximent le Maximum de Vraisemblance de façon très efficace. Les résultats de simulation fournis dans [13] [14] montrent que la technique SCMA est capable de traiter des réseaux surchargés (dans le cas où le nombre d'utilisateurs est plus important que le facteur d'étalement). Les comparaisons par rapport à la technique OFDMA employée couramment dans la 4G font apparaître un gain en capacité de l'ordre de 2.5-3 ce qui représente une excellente performance [15] [16].

I.1.2.1.1.2. Accès multiple par répartition de motifs (PDMA)

L'accès multiple par répartition de motifs (PDMA : Pattern Division Multiple Access) est une nouvelle technologie non orthogonale conçue pour exploiter au mieux les performances d'un annuleur successif d'interférences [17], [18] et [19]. La technique PDMA sépare les utilisateurs à l'émission sur un même block de ressources en utilisant soit des puissances différentes, soit des codes d'étalement différents ou encore en utilisant des canaux de propagation différents avec des antennes multiples. En effet, toute combinaison efficace de ces trois techniques de séparation est possible. A la réception, on utilise une détection basée sur un annuleur successif d'interférences ou un décodeur de type MPA qui approxime le maximum de vraisemblance (cf technique SCMA décrite précédemment). En général, un système de transmission PDMA est décrit par une matrice (pattern matrix) qui indique la répartition des signaux dans le domaine temporel ou fréquentiel. A titre d'exemple, nous allons considérer le cas d'un système avec K utilisateurs qui se partagent N ($N < K$) ressources radioélectriques : ce sont des chips quand on est en étalement de spectre (CDMA) et des bandes de fréquence quand on est en OFDMA. Le facteur de surcharge α est défini comme le rapport entre le nombre d'utilisateurs et le nombre de ressources radioélectriques $\alpha = \frac{K}{N}$. La matrice de motif PDMA \mathbf{S} est décrite par :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_K]^T \text{ avec: } \mathbf{s}_k = [s_{1,k}, s_{2,k}, \dots, s_{N,k}]^T \tag{8}$$

où $\mathbf{s}_k = [s_{1,k}, s_{2,k}, \dots, s_{N,k}]^T$ désigne le motif de l'utilisateur k . L'ensemble des positions où la matrice \mathbf{S} est non nulle sur la ligne n correspond à la contribution (superposition) des utilisateurs sur la ressource radioélectrique n . Généralement, pour que le récepteur SIC puisse opérer dans de bonnes conditions, on montre que la matrice de motif \mathbf{S} doit satisfaire aux propriétés suivantes :

1. Le nombre de sous-ensembles ou groupes d'utilisateurs ayant des nombres d'éléments non-nuls différents doit être maximum,
2. Les interférences à l'intérieur d'un même groupe d'utilisateurs doivent être minimisées,
3. La taille de chaque groupe est maximisée en tenant compte des contraintes de complexité calculatoire.

La notion de groupe d'utilisateurs va être illustrée à l'aide d'exemples concrets extraits de [14]. Il s'agit en fait d'utilisateurs qui ont le même nombre d'éléments non nuls dans la matrice S . Le nombre maximal d'utilisateurs K , que l'on peut englober dans un système PDMA avec N ressources radioélectriques orthogonales, est donné par la formule :

$$K = CN^1 + C_N^2 + \dots + C_N^k + \dots + C_N^N = 2^N - 1 \quad (9)$$

où la quantité $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ représente le nombre de combinaison possibles d'ensembles à k éléments dans un ensemble à N éléments.

A partir de ces définitions, nous pouvons donner plusieurs exemples de construction en distinguant différents scénarii. Nous allons montrer dans ces scenarii comment la conception du système permet de privilégier la détection de tel ou tel utilisateur. Dans le premier scénario, on construit un schéma PDMA distribué pour l'ensemble des ressources répertoriées dans le système, tandis que dans le second scénario on construit un schéma pour un sous-ensemble particulier localisé de ressources :

- Pour le premier scénario, on propose les matrices de motif suivantes pour $N = 2$ and $N = 3$ avec respectivement $K = 3$ et $K = 7$ utilisateurs.

$$S_{dm}^{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} \text{frequency} & \text{user1} & \text{user2} & \text{user3} \\ f_i & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ f_{i+d} & \underbrace{1}_{\text{group1 with size of } 1(=C_2^2)} & 0 & \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{group 2 with size of } 2(=C_2^2)} \end{bmatrix}$$

$$S_{dm}^{(3 \times 7)} = \begin{bmatrix} \text{frequency} & \text{user1} & \text{user2} & \text{user3} & \text{user4} & \text{user5} & \text{user6} & \text{user7} \\ f_i & 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ f_{i+d} & 1 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ f_{i+2d} & \underbrace{1}_{\text{group1 with size of } 1(=C_3^2)} & 0 & \underbrace{\sqrt{3/2} \quad \sqrt{3/2}}_{\text{group 2 with size of } 3(=C_3^2)} & 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad \sqrt{3}}_{\text{group 3 with size of } 3(=C_3^2)} \end{bmatrix}$$

Figure 4 : Exemples de matrices PDMA

La notation f_k dans les matrices ci-dessus désigne la sous-porteuse k et d est l'écartement fréquentiel entre les porteuses attribuées à un même utilisateur. Lorsque d est assez grand, on parle de PDMA distribué, tandis que pour d égale à 1, on parle de PDMA localisé. Les schémas de transmission PDMA sont conçus de telle sorte que chaque groupe a un nombre d'éléments non-nuls différent, ce qui revient à dire que l'ordre de diversité des utilisateurs est différent entre les groupes. Par exemple, si on prend le cas des utilisateurs avec la matrice

$\mathbf{S}_{dm}^{(3 \times 7)}$, on peut les diviser en trois groupes, chaque groupe ayant un ordre de diversité donné :

- Nous avons d'abord le groupe 1 qui est composé du seul utilisateur 1, ce groupe bénéficie d'une diversité de trois (trois termes non nuls dans la colonne de l'utilisateur 1),
- Le groupe deux avec trois utilisateurs bénéficie d'un ordre de diversité égal à 2,
- Le groupe 3 avec trois utilisateurs bénéficie d'un ordre de diversité égal à un (un seul élément non nul dans la colonne des utilisateurs 5, 6 et 7).

Notez que le facteur de surcharge α est égal à 150 pour cent pour $\mathbf{S}_{dm}^{(2 \times 3)}$ et à 233 pour cent pour $\mathbf{S}_{dm}^{(3 \times 7)}$.

- Dans le second scénario, nous construisons un schéma PDMA localisé en se servant de la corrélation entre canaux adjacents et en construisant une matrice PDMA pour réduire au maximum les interférences.

$$\mathbf{S}_{dm}^{(3 \times 7)} = \begin{bmatrix} & \text{user1} & \text{user2} & \text{user3} & \text{user4} & \text{user5} & \text{user6} & \text{user7} \\ \text{frequency} & 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ f_i & 1 & -\sqrt{3/2} & 0 & -\sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ f_{i+1} & \underbrace{1}_{\text{group 1 with size of } 1(=C_1^3)} & 0 & -\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ f_{i+2} & & \underbrace{0 \quad -\sqrt{3/2} \quad \sqrt{3/2}}_{\text{group 2 with size of } 3(=C_2^3)} & & \underbrace{0 \quad 0 \quad \sqrt{3}}_{\text{group 3 with size of } 3(=C_3^1)} & & & \end{bmatrix}$$

Figure 5 : Exemples de matrices PDMA pour un système localisé

Comme on peut le voir sur la matrice de la Figure 5, l'utilisateur 1 est orthogonal aux utilisateurs 2, 3 et 4, et il a une corrélation faible avec les utilisateurs 5, 6 et 7. Par ailleurs, les utilisateurs 2, 3 et 4 présentent une inter-corrélation assez forte (plus forte que l'utilisateur 1) avec les utilisateurs 5, 6 et 7. Au niveau du démodulateur, c'est l'utilisateur 1 qui sera d'abord détecté en premier car c'est lui qui présente l'ordre de diversité le plus élevé. Ça sera ensuite au tour des utilisateurs 2, 3 et 4 d'être détectés avec un ordre de diversité égal à 2. Enfin, ce sont les utilisateurs 5, 6 et 7 qui seront détectés à la fin car ils possèdent l'ordre de diversité le plus faible. Les mêmes remarques peuvent être faites pour le système proposé dans $\mathbf{S}_{dm}^{(2 \times 3)}$.

En ce qui concerne les algorithmes de décodage on privilégie souvent, comme dans le cas du SCMA, l'utilisation du détecteur multi-utilisateurs basé sur l'algorithme de propagation de croyance. A titre d'exemple, nous illustrons dans la Figure 6 ci-dessous le graphe biparti correspondant au schéma de transmission de la matrice $\mathbf{S}_{dm}^{(3 \times 7)}$.

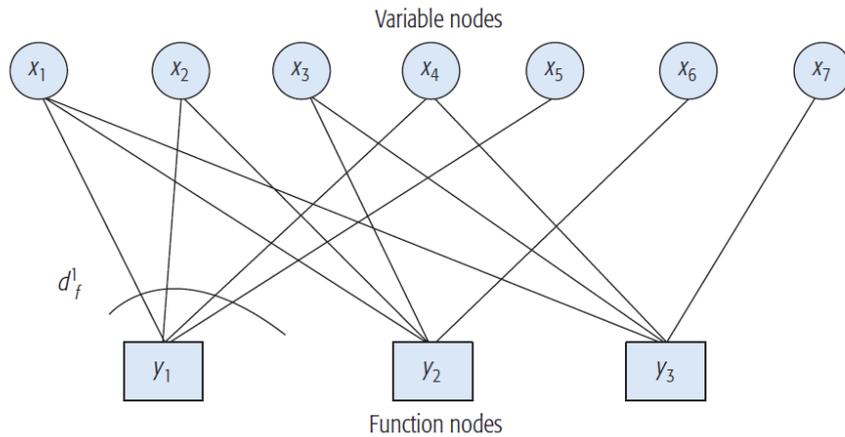


Figure 6 : Graphe bi-partite équivalent au schéma de transmission de la matrice $S_{dm}^{(3 \times 7)}$

Une fois de plus, les nœuds de variable correspondent aux différents utilisateurs et les nœuds de fonction ou nœuds de contrainte correspondent aux ressources physiques (fréquences) à attribuer aux différents utilisateurs. L’algorithme de propagation de croyance consiste (comme dans le cas du SCMA) à mettre à jour de façon itérative des informations extrinsèques en sortie des nœuds de variable et des nœuds de fonction en calculant des rapports de vraisemblance logarithmique. Les performances de ce type de détection peuvent être fortement améliorées si on peut mettre en place une boucle externe où les informations extrinsèques du décodeur multi-utilisateurs de la Figure 6 sont envoyés sur les décodeurs de canal de chacun des utilisateurs. Nous obtenons ainsi un turbo-décodeur avec de très bonnes performances au prix d’une forte complexité de détection. En ce qui concerne la complexité de l’algorithme de détection multi-utilisateurs basé sur l’algorithme de propagation de croyance, celle-ci dépend du nombre maximal d_f^n d’utilisateurs connectés à chaque ressource physique. Dans l’exemple, nous avons considéré, $d_f^n = 4$ dans le cas du système PDMA $S_{dm}^{(3 \times 7)}$. Ainsi, nous pouvons écrire la complexité de l’algorithme de décodage multiutilisateurs sous la forme : $\vartheta(|X|^{d_f^{max}(S)})$. La quantité $|X_k|$ représente la taille de la modulation utilisée.

Il est possible de quantifier l’efficacité des systèmes PDMA en utilisant le critère de la capacité « sum-rate » atteignable pour ces systèmes. La figure ci-dessous illustre le fonctionnement d’un turbo-décodeur utilisant la technique PDMA.

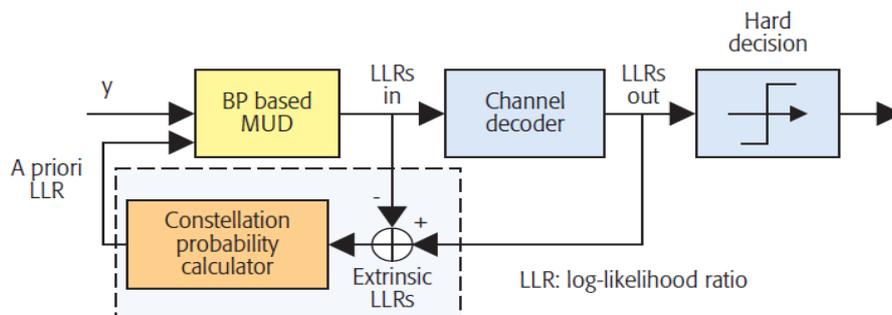


Figure 7 : Turbo-décodeur utilisant la technique PDMA

Pour un système à K utilisateurs le vecteur de symboles reçus à la station de base peut se mettre sous la forme suivante :

$$Y = H \odot Sx + n = H_{ef} x + n \quad (10)$$

où on a par définition : $H = [h_1, h_2, \dots, h_K]^T$ et $H_{ef} = H \odot S$. H_{ef} représente la matrice de canal équivalente pour l'ensemble des utilisateurs $x = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T$. Le symbole \odot désigne le produit de matrice élément par élément, appelé également produit de Hadamard. Classiquement, n est un vecteur de bruit avec des échantillons Gaussiens de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 I$. Ainsi, pour le système PDMA de type $\mathbf{S}_{dm}^{(2 \times 3)}$, nous pouvons écrire :

$$y = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

La capacité « sum-rate » d'un tel système peut se calculer avec la formule suivante :

$$I(x, y) = I(x_1, y) + I(x_2 : y | x_1) + I(x_3 : y | x_1, x_2)$$

avec, par définition :

$$I(x, y) = H(y) - H(y | x_1)$$

$$H(y) = - \int p(y) \log_2 |dy, p(y) = \frac{1}{\prod_{k=1}^3 |X_k|^x} \sum p(y | x) \quad (12)$$

La quantité $|X_k|$ représente, une fois de plus, la taille de la modulation utilisée, par exemple 4 dans le cas d'une modulation QPSK. Les capacités des systèmes de type $\mathbf{S}_{dm}^{(2 \times 3)}$ et $\mathbf{S}_{dm}^{(4 \times 6)}$ sont alors illustrées comme suit :

$$\mathbf{S}_{dm}^{(4 \times 6)} = \begin{bmatrix} \text{user1} & \text{user2} & \text{user3} & \text{user4} & \text{user5} & \text{user6} \\ \sqrt{4/3} & 0 & \sqrt{4/3} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{4/3} & \sqrt{4/3} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{4/3} & \sqrt{4/3} & \sqrt{4/3} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \underbrace{0 \quad \sqrt{4/3} \quad \sqrt{4/3}}_{\text{group1}} & \underbrace{0 \quad 0 \quad \sqrt{2}}_{\text{group1}} \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne le système $\mathbf{S}_{dm}^{(4 \times 6)}$, nous avons la matrice de motif équivalente, illustrée ci-dessus. Il faut signaler que les deux systèmes $\mathbf{S}_{dm}^{(2 \times 3)}$ et $\mathbf{S}_{dm}^{(4 \times 6)}$ présentent le même taux de surcharge, qui est égal à 150%.

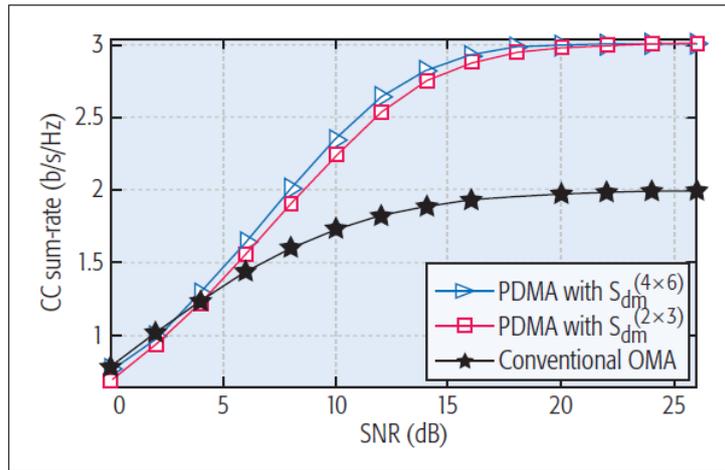


Figure 8 : Capacité « sum-rate » des schémas PDMA et comparaison avec les systèmes OMA

Les deux schémas PDMA permettent d'obtenir une efficacité spectrale de 3bits/s/Hz à forts SNR, ce qui confère au PDMA un accroissement de capacité de 50% par rapport au système OMA. La capacité « sum-rate » du système $S_{dm}^{(2 \times 3)}$ est légèrement inférieure à celle du système $S_{dm}^{(4 \times 6)}$ (écart de l'ordre de 3%) car l'ordre de diversité moyen des utilisateurs dans le système $S_{dm}^{(2 \times 3)}$ est inférieur à celui du système $S_{dm}^{(4 \times 6)}$. Cependant, la complexité de l'algorithme de décodage multiutilisateur dans le cas du système $S_{dm}^{(4 \times 6)}$ est en $\vartheta(|X|^4)$ (car $d_f^n = 4$) contre $\vartheta(|X|^2)$ pour le système $S_{dm}^{(2 \times 3)}$ (car $d_f^n = 2$).

En conclusion, nous pouvons donc affirmer que le PDMA est une méthode d'accès multiple qui vise à créer des ordres de diversité différents entre les utilisateurs. Ces déséquilibres sont mis à profit par le détecteur multiutilisateur qui va d'abord détecter les utilisateurs avec l'ordre de diversité élevé et ensuite détecter les utilisateurs à degré de diversité moins élevé. L'algorithme le plus souvent utilisé est, comme pour le SCMA, l'algorithme de propagation de croyance. Cependant, sa complexité élevée, en $\vartheta(|X|^{d_f^{max}(S)})$, le rend encore difficile à implémenter pour les systèmes à déploiement massif (i.e. avec un grand nombre d'utilisateurs).

I.1.2.1.1.3. Multi User Shared Access (MUSA)

L'accès multiple MUSA a été développé spécifiquement pour le déploiement massif de l'IoT. Il combine des transmissions de paquets en mode « grant free » avec l'utilisation de l'étalement de spectre et des modulations multi-porteuses [20], [21] et [22]. Les séquences d'étalement utilisées sont de longueur courte mais sont calculées dans un alphabet étendu avec des chips complexes. L'augmentation de la capacité du système va ici beaucoup dépendre de la faculté du récepteur SIC à bien séparer les utilisateurs. Autrement dit, il va falloir mettre en place des algorithmes de gestion optimale de la puissance de transmission pour permettre un bon fonctionnement du récepteur SIC. Nous allons maintenant montrer comment on obtient un modèle mathématique équivalent suffisamment puissant afin qu'il permette de modéliser le système correctement pour développer des algorithmes efficaces d'allocation de ressources.

a) Dans le cas d'un système SISO (Single Input Single Output)

Nous considérons ici le cas d'un système de communication en voie montante avec J utilisateurs qui transmettent sur K porteuses orthogonales. Les utilisateurs actifs se partagent les ressources disponibles selon le schéma MUSA en mode « grant free ». Les bits d'informations des utilisateurs sont groupés en vecteurs afin de les transformer en symboles modulés complexes avec par exemple une modulation MDP- N . Les symboles modulés sont alors multipliés par des séquences d'étalement et sont répartis sur les différentes porteuses disponibles. Les séquences d'étalement s_j , $\forall j \in \{1, \dots, J\}$ sont telles que $s_j \in \{a + jb\}^K$, avec $(a, b) \in \{-1, 0, 1\}^2$. Le signal reçu sur la sous-porteuse k de chaque symbole OFDM s'écrit alors sous la forme suivante :

$$y_k = \sum_{j=1}^J \sqrt{p_j} h_{kj} s_{kj} x_j + n_k \quad (13)$$

où h_{kj} et s_{kj} sont respectivement les $k^{\text{ième}}$ composantes du canal et de la séquence d'étalement de l'utilisateur j , le canal et la séquence d'étalement étant notés \mathbf{h}_j et s_j . De plus, x_j et p_j sont le symbole transmis et la puissance allouée à l'utilisateur j et n_k est la composante de bruit additif Gaussien présent sur la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse, on a dans ce cas $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_K)$ avec \mathbf{I}_K qui représente la matrice identité de taille K . L'ensemble des signaux multiplexés sur les K sous-porteuses peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (14)$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_J) \in \mathbb{R}_{J \times J}^+$ représente la matrice d'allocation des puissances et $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_J]^T$ est le vecteur des symboles modulés transmis. Nous supposons que $\mathbb{E}[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] = \mathbf{I}_J$ et enfin \mathbf{G} est la matrice équivalente du canal qui prend en compte les séquences d'étalement. On a alors :

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \odot \mathbf{S} \quad (14)$$

où les matrices \mathbf{H} et \mathbf{S} représentent les contributions de l'ensemble des J utilisateurs : $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_J]$, $\mathbf{S} = [s_1, \dots, s_J]$, et où \odot désigne le produit de Hadamard des matrices élément par élément, on a dans ce cas : $g_{kj} = h_{kj} s_{kj}$.

b) Dans le cas d'un système SIMO (Single Input Multiple Output)

On reprend le système précédent mais on suppose maintenant que l'on dispose de N_r antennes à la réception. Dans ces conditions et en considérant d'abord l'antenne de réception 1, le signal reçu sur la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse de chaque symbole OFDM s'écrit :

$$y_k^1 = \sum_{j=1}^J \sqrt{p_j} h_{kj}^1 s_{kj} x_j + n_k \quad (15)$$

Si on écrit le signal reçu sur l'antenne de réception numéro m , nous avons l'expression :

$$y_k^m = \sum_{j=1}^J \sqrt{p_j} h_{kj}^m s_{kj} x_j + n_k \quad (16)$$

Pour obtenir la représentation complète du signal au niveau de la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse, nous concaténons les différentes composantes $y_k^1, \dots, y_k^m, \dots, y_k^{N_r}$ dans un seul vecteur de taille $N_r \times 1$, ce qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ \vdots \\ y_k^{N_r} \end{pmatrix}_{N_r \times 1} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} h_{k1}^1 s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^1 s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^1 s_{kJ} \\ \sqrt{p_1} h_{k1}^2 s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^2 s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^2 s_{kJ} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{p_1} h_{k1}^{N_r} s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^{N_r} s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^{N_r} s_{kJ} \end{pmatrix}_{N_r \times J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{pmatrix}_{J \times 1} + \begin{pmatrix} n_{k,1} \\ n_{k,2} \\ \vdots \\ n_{k,N_r} \end{pmatrix}_{N_r \times 1} \quad (17)$$

On note alors : $\mathbf{y}_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^{N_r})^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_J)^T$ et $\mathbf{n}_k = (n_{k,1}, n_{k,2}, \dots, n_{k,N_r})^T$, ce qui permet d'écrire matriciellement :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x} + \mathbf{n}_k \quad (18)$$

avec : $\mathbf{P}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_J})$. Nous pouvons facilement vérifier cela avec la décomposition matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{p_1} h_{k1}^1 s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^1 s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^1 s_{kJ} \\ \sqrt{p_1} h_{k1}^2 s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^2 s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^2 s_{kJ} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{p_1} h_{k1}^{N_r} s_{k1} & \sqrt{p_2} h_{k2}^{N_r} s_{k2} & \cdots & \sqrt{p_J} h_{kJ}^{N_r} s_{kJ} \end{pmatrix}_{N_r \times J} = \begin{pmatrix} h_{k1}^1 s_{k1} & h_{k2}^1 s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^1 s_{kJ} \\ h_{k1}^2 s_{k1} & h_{k2}^2 s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^2 s_{kJ} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{k1}^{N_r} s_{k1} & h_{k2}^{N_r} s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^{N_r} s_{kJ} \end{pmatrix}_{N_r \times J} \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{p_J} \end{pmatrix}_{J \times J} \quad (19)$$

De même, en ce qui concerne la matrice \mathbf{G}_k , définie ci-après :

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} h_{k1}^1 s_{k1} & h_{k2}^1 s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^1 s_{kJ} \\ h_{k1}^2 s_{k1} & h_{k2}^2 s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^2 s_{kJ} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{k1}^{N_r} s_{k1} & h_{k2}^{N_r} s_{k2} & \cdots & h_{kJ}^{N_r} s_{kJ} \end{pmatrix} \quad (20)$$

on peut toujours l'écrire sous la forme $\mathbf{G}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{S}_k$ avec :

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} h_{k1}^1 & h_{k2}^1 & \cdots & h_{kJ}^1 \\ h_{k1}^2 & h_{k2}^2 & \cdots & h_{kJ}^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{k1}^{N_r} & h_{k2}^{N_r} & \cdots & h_{kJ}^{N_r} \end{pmatrix}_{N_r \times J} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} s_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{k2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{kJ} \end{pmatrix}_{J \times J} \quad (21)$$

En effet, on a :

$$\begin{pmatrix} s_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{k2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{kJ} \end{pmatrix}_{J \times J} \begin{pmatrix} h_{k1}^1 & h_{k2}^1 & \cdots & h_{kJ}^1 \\ h_{k1}^2 & h_{k2}^2 & \cdots & h_{kJ}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1}^{N_r} & h_{k2}^{N_r} & \cdots & h_{kJ}^{N_r} \end{pmatrix}_{N_r \times J} \begin{pmatrix} s_{k1}h_{k1}^1 & s_{k2}h_{k2}^1 & \cdots & s_{kJ}h_{kJ}^1 \\ s_{k1}h_{k1}^2 & s_{k2}h_{k2}^2 & \cdots & s_{kJ}h_{kJ}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1}h_{k1}^{N_r} & s_{k2}h_{k2}^{N_r} & \cdots & s_{kJ}h_{kJ}^{N_r} \end{pmatrix}_{N_r \times J} = \mathbf{G}_k \quad (22)$$

Maintenant, nous concaténons l'ensemble des différents vecteurs \mathbf{y}_k avec $1 \leq k \leq K$ dans un seul vecteur $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_K)^T$ de taille $N_r K \times 1$. On obtient l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times J} \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{p_J} \end{pmatrix}_{J \times J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{pmatrix}_{J \times 1} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times 1} \quad (23)$$

avec : $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_K)^T_{KN_r \times J}$ et $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_K)^T_{KN_r \times 1}$, on aboutit à :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times J} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_K \mathbf{S}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times J} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0}_{N_r \times J} & \cdots & \mathbf{0}_{N_r \times J} \\ \mathbf{0}_{N_r \times J} & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{0}_{N_r \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_r \times J} & \mathbf{0}_{N_r \times J} & \cdots & \mathbf{H}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times KJ} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_K \end{pmatrix}_{KJ \times J} \quad (24)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_{KN_r \times KJ} \mathbf{S}_{KJ \times J}$$

avec :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0}_{N_r \times J} & \cdots & \mathbf{0}_{N_r \times J} \\ \mathbf{0}_{N_r \times J} & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{0}_{N_r \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_r \times J} & \mathbf{0}_{N_r \times J} & \cdots & \mathbf{H}_K \end{pmatrix}_{KN_r \times KJ} \quad \text{et. } \mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_K)^T \quad (25)$$

On obtient enfin le modèle mathématique équivalent :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{G} \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x} + \mathbf{n} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (26)$$

Ce modèle équivalent mathématique permet de développer des algorithmes d'optimisation d'allocation de puissance à l'émission.

c) Détection multi-utilisateur en MUSA :

Le récepteur SIC offre une faible complexité de décodage par rapport aux autres algorithmes MUD, à savoir l'algorithme de passage de message ou l'algorithme du maximum a posteriori car ici on se contente d'utiliser un récepteur simple à annulation d'interférences de type SIC. Cependant, les performances du SIC dépendent des puissances reçues par les utilisateurs et le récepteur est plus performant lorsque les puissances reçues sont suffisamment différentes. Le

MUSA est généralement utilisée avec le SIC ordonné conjointement avec un récepteur de détection linéaire tel que le récepteur à erreur quadratique moyenne minimale (MMSE). La matrice MMSE est calculée selon la formule donnée ci-dessous (où l'on a repris bien évidemment toutes les notations précédentes)

$$\mathbf{W}^H = \left(\mathbf{P}_2^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{P}_2^{\frac{1}{2}} + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{P}_2^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}^H \quad (27)$$

La technique de réception SIC ordonnée consiste à estimer successivement le symbole de l'utilisateur, de reconstruire le brouillage généré puis de le soustraire du signal reçu. Les symboles des utilisateurs sont décodés dans l'ordre décroissant de leurs SINR. En supposant que le signal reçu à la $j^{\text{ième}}$ itération est de la forme suivante :

$$y^j = \sqrt{p_j} g_j x_j + \sum_{i=j+1}^J \sqrt{p_i} g_i x_i + n^j \quad (28)$$

où g_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice \mathbf{G} . Ensuite, le SINR de l'utilisateur j sélectionné à décoder est le suivant :

$$\beta_j(p) = \frac{p_j |w_j^H g_j|^2}{\sum_{i=j+1}^J p_i |w_j^H g_i|^2 + \sigma^2 \|w_j^H\|^2} \quad (29)$$

où w_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice MMSE \mathbf{W} . Ensuite, le symbole de l'utilisateur est estimé en multipliant le vecteur de ligne w_j^H par le signal de colonne reçu comme suit :

$$\hat{x}_j = w_j^H y \quad (30)$$

L'interférence générée par le $j^{\text{ième}}$ utilisateur est reconstruite puis soustraite du signal reçu qui est mis à jour comme suit :

$$y = y - g_j \hat{x}_j \quad (31)$$

Après chaque itération, la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice \mathbf{G} , correspondant à l'utilisateur j décodé, est supprimée et la matrice MMSE est recalculée. Ce processus est répété jusqu'à ce que tous les utilisateurs soient décodés.

1.1.2.1.4. Interleaved Division Multiple Access (IDMA)

La technique IDMA [23] [24] visait à l'origine à améliorer les performances des systèmes d'accès multiple par répartition en code (CDMA) asynchrones en s'appuyant sur l'utilisation de matrices d'entrelacement-désentrelacement propres à chaque utilisateur et en comptant sur de faibles produits d'inter-corrélation entre utilisateurs interférents si on a choisi judicieusement les séquence d'étalement. En d'autres termes, on se base ici sur les matrices d'entrelacement-désentrelacement pour séparer les utilisateurs. Des études ont révélé que l'IDMA présente une forte robustesse à l'asynchronisme et une tolérance à la surcharge des utilisateurs. Parallèlement, un récepteur IDMA de type turbo, qui utilise un algorithme d'annulation des interférences conjointement avec des décodeurs de canal propres à chaque utilisateur, permet une détection multi-utilisateur très efficace. La Figure 9 illustre un système IDMA pour M utilisateurs qui comprend M émetteurs respectifs et un récepteur. Chaque utilisateur du système IDMA utilise un entrelaceur unique associé à un motif d'entrelacement différent des autres utilisateurs. Au niveau de l'émetteur, le signal d'entrée de longueur N de l'utilisateur m est désigné par $x_m = [c_m(1), \dots, c_m(i), \dots, c_m(J)]^T$, où T représente l'opération de transposition. Le flux de données d'entrée est codé par un code à faible débit $c_m = [c_m(1), \dots, c_m(i), \dots, c_m(J)]^T$. Les bits codés c_m sont entrelacés par un entrelaceur Π_m . Une séquence $y_m = [y(1), \dots, y_m(i), \dots, y_m(J)]^T$ est produite après le processus d'entrelacement. Les entrelaceurs sont créés de manière indépendante et aléatoire et doivent être différents pour

chaque utilisateur. Le récepteur comprend un bloc de détection multi-utilisateurs et une banque de K décodeurs (DEC) qui fournissent des probabilités à postériori en se basant sur la structure du codeur de canal attribué à chaque utilisateur. Bien que performants, les systèmes de type IDMA ont l'inconvénient d'une complexité prohibitive.

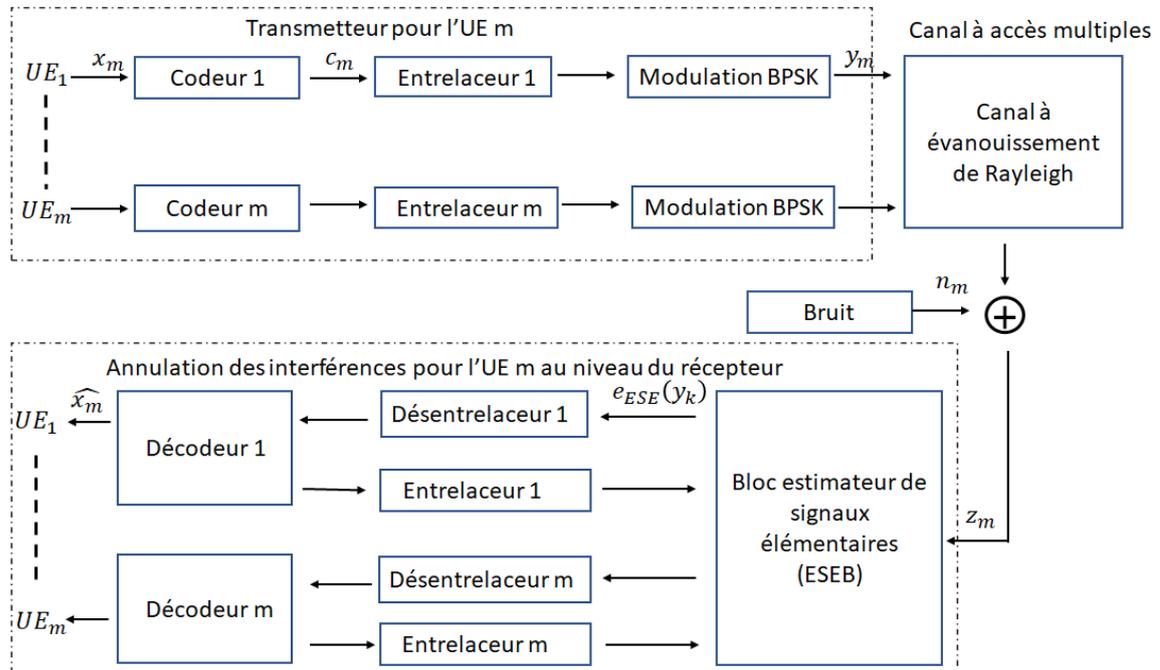


Figure 9 : Schéma d'une transmission IDMA (Émetteur et Récepteur)

I.1.2.2. Techniques PD-NOMA basées sur la séparation par la puissance des utilisateurs

La deuxième famille des techniques NOMA se base sur les coefficients de puissance afin de séparer les signaux des utilisateurs superposés dans une trame NOMA. Cette deuxième famille de techniques NOMA a l'avantage d'avoir une faible complexité du côté du récepteur car l'exécution du SIC est le seul traitement requis. Ainsi, nous ne sommes pas obligés d'utiliser de l'étalement de spectre pour multiplexer plusieurs utilisateurs sur un même créneau temporel ou une même bande de fréquence en se contentant d'une séparation au niveau des puissances. Cette famille de techniques NOMA s'appelle le PD-NOMA (Power Domain Non Orthogonal Multiple Access). Notez que PD-NOMA a été utilisée aussi bien pour les transmissions en liaison descendante que pour les liaisons montantes. Cette technique se base sur un multiplexage dans le domaine de puissance au niveau des émetteurs et un décodage du signal basé sur le SIC au niveau des récepteurs. La Figure 10 illustre le multiplexage et le démultiplexage des techniques PD-NOMA en liaison montante et descendante. En effet, comme on peut le voir sur la figure (partie 1), on alloue un coefficient de puissance plus élevé pour l'utilisateur 2 (UE_2) que pour l'utilisateur 1 (UE_1). Par la suite, à la réception, UE_2 décode le signal reçu en considérant le signal de UE_1 comme interférence, cependant, UE_1 doit décoder tout d'abord le signal de l'utilisateur 2, le soustraire du signal reçu et par la suite décoder son signal. En liaison montante, chaque utilisateur transmet son message, comme on peut voir sur la figure (partie 2), si les signaux reçus sont suffisamment éloignés, disons le signal de UE_2 est plus fort que celui de UE_1 , la station de base commence par le décodage du signal du deuxième

utilisateur en considérant le premier comme interférence, soustrait ce signal du signal reçu et par la suite, décode le signal de l'utilisateur 1. Aussi intéressante que cette approche puisse l'être, plusieurs défis tels que la connaissance parfaite du canal pour effectuer le SIC, le contrôle de puissance pour déterminer les coefficients de puissances à utiliser pour chaque utilisateur, l'arrangement des utilisateurs dans des clusters, le partage des coefficients de puissance entre les émetteurs et les récepteurs. Dans le cadre de cette thèse, nous adressons certaines de ces problématiques à la fois pour les communications en liaisons montantes et descendantes.

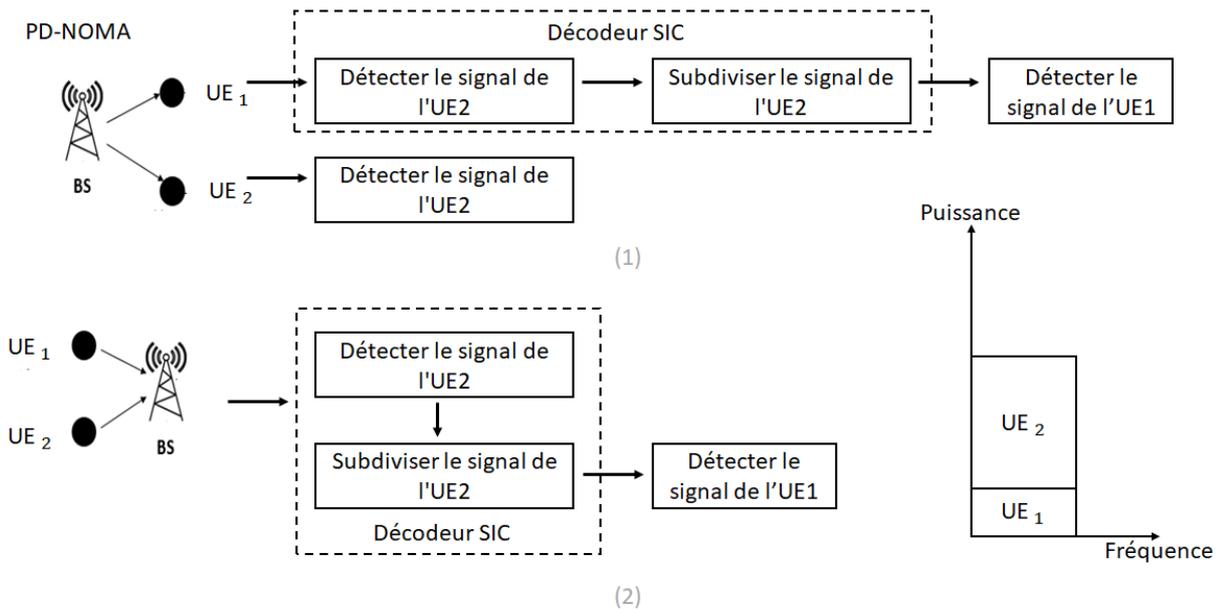


Figure 10 : Accès multiple non-orthogonal par multiplexage de puissance en liaison descendante (1) et montante (2)

Plusieurs études dans la littérature, comme [25], [26] et [27], ont montré que la technique NOMA avec multiplexage de puissance peut être très intéressante en termes d'efficacité spectrale et du débit global par rapport aux techniques OMA, en considérant bien entendu une connaissance parfaite des informations sur l'état du canal (CSI). La Figure 11 compare les capacités des systèmes NOMA en multiplexage de puissance et des systèmes OMA dans le cas de deux utilisateurs. On peut voir que NOMA est très efficace en termes de débit lorsque les canaux des utilisateurs sont différents. Ainsi, NOMA est considéré comme une technique prometteuse pour les futurs réseaux de communication sans-fil.

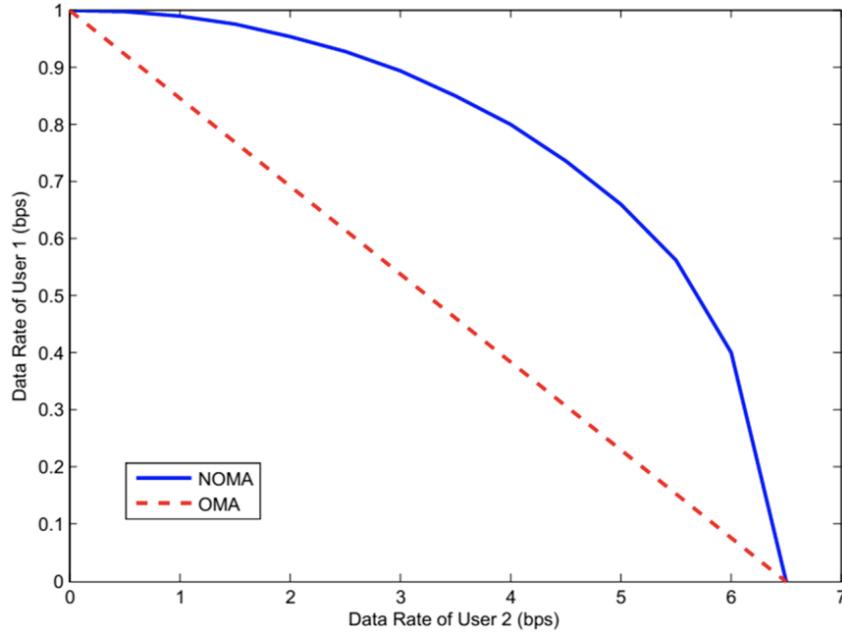


Figure 11 : Comparaison de la capacité des techniques OMA et NOMA dans le cas de deux utilisateurs dans le système [25]

Considérons un système général NOMA à liaison descendante à m utilisateurs qui bénéficient de gains de canaux distincts. Dans ce système, un émetteur unique (BS) émet de manière non orthogonale m signaux différents sur les mêmes ressources radioélectriques, alors que les m récepteurs reçoivent l'ensemble des signaux souhaités et les interférences. Le signal reçu par le récepteur i est donné par :

$$y_i = h_i \sum_{k=1}^m \sqrt{P_k} S_k + \eta_0 \quad (32)$$

où h_i est le coefficient du canal du récepteur i , P_k est le niveau de puissance utilisé pour la transmission, S_k est le symbole à envoyer et η_0 est le bruit blanc gaussien additif (AWGN) de moyenne nulle et de variance σ^2 . Afin d'obtenir le signal désiré, chaque récepteur SIC décode d'abord les interférences dominantes et les soustrait du signal superposé. Par conséquent, l'intensité du signal reçu des signaux d'interférence doit être suffisamment faible par rapport à celle du signal utile pour être annulée par le traitement SIC à l'extrémité du récepteur. Puisque chaque utilisateur reçoit tous les signaux (signaux souhaités et signaux interférant) sur le même spectre radioélectrique (le canal), le multiplexage de différents signaux avec différents niveaux de puissance est crucial pour diversifier chaque signal et effectuer le traitement SIC dans un récepteur donné.

I.1.2.1.2. Liaison montante

Dans le cas du PD-NOMA en liaison montante, le canal est différent pour chaque utilisateur et les signaux reçus au niveau de la station de base sont différents même si les utilisateurs utilisent la même puissance de transmission. Le signal reçu par la station de base peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y = \sum_{k=1}^m h_k \sqrt{P_k} S_k + \eta_0 \quad (33)$$

Cette fois-ci, en considérant la théorie de Shannon, la capacité du canal correspondante pour l'utilisateur m est égale à :

$$R_m = \log_2 \left(1 + \frac{P_m |h_m|^2}{\sum_{k=1}^{m-1} P_k |h_k|^2 + \eta_0} \right) \approx \log_2 \left(1 + \frac{P_m |h_m|^2}{\sum_{k=1}^{m-1} P_k |h_k|^2} \right) \quad (34)$$

On voit bien ici que le canal apporte une diversité de puissance très appréciable qui peut être mise à profit pour la détection multiutilisateurs.

I.1.2.1.3. Liaison descendante

Dans le cas du PD-NOMA en liaison descendante, les signaux superposés sont reçus sur le canal de chaque utilisateur et donc on ne peut pas profiter de la diversité des canaux des utilisateurs pour espacer les signaux reçus. Ainsi, c'est à la station de base d'attribuer des niveaux de puissance différents aux utilisateurs pour permettre aux récepteurs SIC des différents utilisateurs de décoder les signaux qui leur sont destinés. C'est la théorie de Shannon qui permet de quantifier l'efficacité de la détection multi-utilisateurs. En effet, si on considère que l'utilisateur m est l'utilisateur de plus forte puissance, la capacité du canal correspondant à cet utilisateur est égale à :

$$R_m = \log_2 \left(1 + \frac{P_m |h_i|^2}{\sum_{k=1}^{m-1} P_k |h_i|^2 + \eta_0} \right) \approx \log_2 \left(1 + \frac{P_m}{\sum_{k=1}^{m-1} P_k} \right) \quad (35)$$

A chaque fois que la valeur R_m est supérieure ou égale à l'efficacité spectrale de la modulation utilisée, on sait que l'on pourra démoduler le signal de l'utilisateur m .

Après avoir introduit les différentes techniques d'accès multiple, et détaillé le principe de fonctionnement des différentes classes des techniques d'accès multiple non orthogonal, nous allons nous focaliser dans le chapitre suivant à l'allocation de ressources dans les techniques PD-NOMA.

Chapitre II. Allocation de ressources et de contrôle de puissance en liaison montante pour les réseaux PD-NOMA

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la problématique de sélection conjointe des canaux et du contrôle de la puissance de transmission en liaison montante pour les réseaux de capteurs. En effet, nous nous basons sur la technique NOMA avec multiplexage de puissance pour améliorer l'efficacité spectrale et garantir un accès massif aux utilisateurs. Plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature pour multiplexer les utilisateurs en se basant sur les niveaux de puissances, tels que [28] et [29]. La technique de transmission multi-utilisateurs par superposition (MUST : Multiuser superposition transmission), proposée dans [30], a été intégrée dans LTE-A pour permettre à deux utilisateurs de transmettre simultanément sur la même sous-porteuse OFDMA. Une autre application intéressante de PD-NOMA, le multiplexage par division de couche (LDM : Layer Division Multiplexing) [31], a été incluse dans la télévision numérique standard (ATSC 3.0) afin de délivrer plusieurs flux multimédias d'une façon superposée. Dans [32], les auteurs ont proposé un schéma d'allocation de puissance en liaison descendante et montante avec deux utilisateurs afin de répondre de manière plus flexible à diverses exigences de qualité de service. Les auteurs de [33] ont proposé une technique d'allocation de puissance pour un système NOMA sous des contraintes de QoS. Ils ont montré que le problème de maximisation de l'efficacité énergétique peut être irréalisable, et ils ont déterminé les conditions de faisabilité. Ensuite, dans une région réalisable, ils ont résolu le problème pseudo-concave en utilisant l'algorithme de Dinkelbach. D'autre part, le groupement d'utilisateurs en des clusters a été largement étudié dans la littérature ces dernières années. Par exemple, dans [34], les auteurs ont proposé un schéma de groupement d'utilisateurs sous-optimal de faible complexité, puis ils ont optimisé leurs allocations de puissance respectives. Par ailleurs, le papier [35] a étudié le problème combinatoire de l'appariement d'utilisateurs pour atteindre un débit total maximal pour divers scénarios, et a proposé certains algorithmes optimaux et sous-optimaux avec une complexité polynomiale.

Les techniques NOMA ont été appliquées également pour les liaisons descendantes à antennes multiples MIMO (Multi-Input Multi-Output). Par exemple, les auteurs de [36] ont étudié l'optimisation de la matrice de covariance afin de maximiser la capacité ergodique en se basant sur des statistiques sur les informations des canaux de transmission dans le cas de deux utilisateurs dans le système. En plus de son potentiel à maximiser le débit total des utilisateurs, les techniques NOMA sont très prometteuses dans le contexte de l'accès massif, notamment dans les réseaux IoT.

Ainsi, dans le cadre de ce chapitre, nous nous intéressons à l'intérêt des techniques NOMA dans le contexte d'accès massif, et nous investiguons comment allouer plus d'utilisateurs avec la même ressource temps/fréquence. Dans la première partie de ce chapitre, nous considérons un scénario où plusieurs capteurs ont besoin de transmettre périodiquement un certain nombre de paquets et nous proposons une approche simplifiée qui assure une allocation rapide des ressources gérées par la BS. Par la suite, afin d'aller plus loin dans l'efficacité spectrale, nous proposons un schéma d'allocation massif de ressources basé sur l'apprentissage fédéré (FL) qui prend en compte le modèle de trafic des utilisateurs afin d'étendre la capacité du système. En effet, chaque utilisateur estime son modèle de trafic et transmet ses paramètres à la BS qui agrège le modèle de trafic global et alloue à chaque utilisateur le bloc de ressource et la

puissance d'émission appropriés. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons au cas décentralisé où la BS n'est pas responsable de l'allocation de ressource et nous proposons quatre algorithmes d'apprentissage par renforcement basés sur le Multi-Armed Bandit (MAB) afin de permettre aux utilisateurs de déterminer de manière autonome la ressource temps-fréquence et le niveau de puissance appropriés pour la transmission. Ces algorithmes sont considérés comme évolutifs vu que la prise de décision est totalement distribuée, et qu'ils ne nécessitent pas de communication entre les utilisateurs et la BS. Afin d'illustrer les performances des techniques proposées, nous présentons une étude comparative avec d'autres techniques de la littérature à travers des simulations et nous montrons que les techniques proposées surpassent largement les techniques de base.

II.1. Système de modèle

Les techniques d'allocation de ressources et de contrôle de puissance ont été étudiées dans plusieurs travaux, comme [37],[38] et [39], où l'objectif était d'améliorer les performances du système PD-NOMA. La plupart des techniques PD-NOMA prennent l'hypothèse que les utilisateurs connaissent les caractéristiques du canal de transmission (CSI) des autres utilisateurs afin de séparer les signaux reçus en exploitant le SIC. Dans ce chapitre, nous considérons que cette hypothèse est irréaliste et que la BS informe les utilisateurs de leurs CSI, et de ceux des membres de leur groupe. La Figure 12 illustre un système NOMA typique, composé de M utilisateurs et d'une BS. Cette dernière est située au centre de la cellule et les utilisateurs sont uniformément répartis dans le disque de rayon r . Les utilisateurs sont déployés dans le disque de couverture de la BS selon un Processus de Poisson ponctuel (PPP) homogène Φ_M avec une densité λ_M . En effet, dans un scénario impliquant des transmetteurs autonomes, ne nécessitant pas forcément une intervention humaine, il est tout à fait raisonnable de choisir le PPP pour modéliser le trafic généré par les équipements autonomes tels que les capteurs d'environnement.

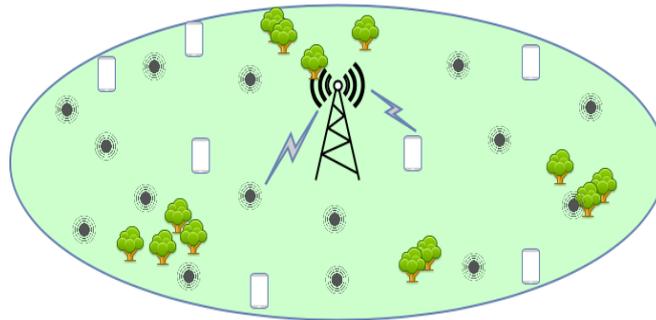


Figure 12 : Le modèle du système.

Ainsi, parmi les M utilisateurs de la cellule, nous considérons qu'il y a N qui seront actifs à l'intervalle de temps t . Ils seront déterminés selon un processus de fonction de masse de probabilité de Poisson (pmf) :

$$N \sim \min(M, p_\lambda(n)) = \min\left(M, \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}\right), \quad (36)$$

où λ représente le paramètre de Poisson ou l'intensité ($\lambda = \frac{M p_a}{K}$) et p_a est la probabilité d'accès qui contrôle l'activité de chaque utilisateur au début de chaque intervalle de temps. La bande

passante disponible est divisée en K sous-porteuses, et chaque sous-porteuse est divisée en W bloc de ressources (RBs) de durée τ .

Nous nous intéressons à l'accès non orthogonal, où plusieurs utilisateurs partagent le même bloc de ressources. Par conséquent, le signal reçu par la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse au niveau de la station de base est donné par l'expression suivante :

$$y_k = \sum_{i=1}^M h_{i,k} \sqrt{p_{i,k}} s_{i,k} + \sigma, \quad (37)$$

où $s_{i,k}$ est le symbole émis par l'utilisateur i sur la sous-porteuse k , $p_{i,k}$ est le coefficient de puissance alloué par l'utilisateur i sur la sous-porteuse k , P_{max} est la puissance de transmission maximale pour tous les utilisateurs et σ désigne le bruit blanc additif à la station de base. La réponse du canal entre le $i^{\text{ième}}$ utilisateur et la station de base sur la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse, qui est supposée être une variable aléatoire gaussienne complexe à symétrie circulaire de moyenne nulle avec une variance σ^2 , est notée par $h_{i,k} = \frac{g_{i,k}}{l_i}$ où $g_{i,k}$ et l_i désignent respectivement l'évanouissement de Rayleigh et l'affaiblissement du chemin. Ce dernier est modélisé par le modèle d'affaiblissement sur un trajet en espace libre [40], c'est-à-dire que $l_i = \left(\frac{\lambda \sqrt{G_l}}{4\pi d} \right)$ où G_l est le produit des diagrammes de rayonnement des antennes d'émission et de réception dans la direction de la ligne de vue directe (LOS), λ est la longueur d'onde du signal et d est la distance entre l'utilisateur et la BS.

Afin de séparer les signaux reçus, l'élimination successive d'interférence (SIC) est exécutée au niveau de la BS. Nous supposons que chaque utilisateur connaît parfaitement son canal de transmission. En effet, dans le mode de duplexage par répartition temporelle, la BS envoie un signal de balise au début de chaque trame de temps afin de synchroniser les transmissions de la liaison montante. Ce signal balise peut être utilisé comme un signal pilote afin de permettre à chaque utilisateur d'estimer son CSI. Par la suite, considérons que l'utilisateur i est multiplexé sur la $k^{\text{ième}}$ sous-porteuse et que le symbole de cet utilisateur est modulé sur une séquence d'étalement s_i . Ainsi, le signal reçu par la BS peut alors être exprimé comme suit :

$$y = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M h_{i,k} \sqrt{p_{i,k}} s_{i,k} + \sigma \quad (38)$$

La BS applique ensuite le SIC afin de séparer les signaux superposés. Par conséquent, il y a une question intéressante à laquelle nous devons répondre : comment la BS devra allouer les RB et la puissance d'émission aux différents utilisateurs, ou comment ces utilisateurs doivent-ils s'arranger sur les RB, afin que cette dernière puisse séparer les signaux reçus sur la liaison montante tout en maximisant la capacité du système. Dans les sections suivantes, nous proposons des techniques d'allocation de ressources qui permettent de répondre aux défis susmentionnés.

II.2. Allocation rapide de ressources basées sur les CSI des utilisateurs

Dans cette partie, nous nous intéressons aux schémas d'allocation des ressources dans le cas où il y'a une coopération entre les utilisateurs et la station de base. Ainsi, deux schémas d'allocation rapide de ressources seront proposés. Le premier se base sur l'information de l'état du canal et la puissance de transmission de chaque utilisateur afin de garantir une séparation des signaux superposés en utilisant le SIC, et finalement affecte chaque utilisateur dans un groupe ou cluster. Dans la deuxième approche, nous proposons une technique basée sur

l'apprentissage fédéré qui exploite l'estimation de modèle du trafic de chaque utilisateur. Pour étendre davantage la capacité du système, nous considérons que la BS prend en compte le modèle de trafic des utilisateurs pour séparer les signaux superposés en se basant sur le multiplexage temporel en plus du multiplexage par puissance. Plus spécifiquement, le modèle de trafic de chaque utilisateur suppose que ces derniers fonctionnent en mode normal jusqu'à ce qu'un événement se produise dans leur environnement, où ils se déclenchent en mode alarme. Nous considérons que les épïcètres des événements sont représentés par un PPP homogène Φ_E avec une densité λ_E dans le plan euclidien. Par conséquent, les processus Φ_M et Φ_E sont supposés indépendants.

II.2.1. Allocation rapide de ressources

Nous proposons, dans cette partie, une technique d'accès rapide en liaison montante à faible complexité dans les réseaux PD-NOMA en mode TDD, appelée FUA pour Fast Uplink Access, comme l'illustre l'Algorithme 1. Tout d'abord, nous supposons que la BS envoie un signal de balise au début de chaque intervalle de temps pour synchroniser les transmissions. Le créneau temporel est donc divisé en trois parties : la balise, la phase de liaison montante et la phase de liaison descendante. Ce signal de balise peut être utilisé comme un signal pilote pour permettre à chaque utilisateur d'estimer les informations de son canal de transmission. Par la suite, nous considérons que Wc blocs de ressources sont réservés pour la contention, comme illustre la Figure 13. En effet, ils sont utilisés par les utilisateurs lorsqu'ils rejoignent la cellule pour la première fois, ou lorsque l'allocation actuelle ne répond pas à la qualité de service requise par les utilisateurs. Les blocs de ressources restants sont utilisés pour la transmission. La station de base crée un groupe d'utilisateur, appelé cluster également, pour chaque bloc de ressources, puis elle attribue les utilisateurs à un ou plusieurs groupes. En outre, l'utilisation des blocs réservés à la contention nous permet d'éviter les problèmes d'interférences causés par les utilisateurs qui rejoignent le système après une période d'inactivité notamment. Notez que les interférences causées par ces utilisateurs peuvent être très nocives aux communications NOMA puisqu'elles causent généralement l'échec de la procédure SI, typiquement appelé la propagation d'erreur dans le SIC.

Algorithme 1 Fast Uplink access (FUA)

```

- Initialisation : La station de base initialise la table d'allocation CL comme suit  $0_{C_{max} \times K}$  où  $C_{max}$  est
la taille maximale du cluster
La station de base envoie une balise au début de chaque intervalle de temps
Tant que que (un nouveau MTD  $i$  rejoint la cellule.) faire
    backoff=0
    transmitted=false
    tant que (!transmitted) faire
        i envoie son CSI à la station de base en utilisant un  $W_c$  bloc de ressources si (!transmitted) alors
            backoff=backoff+1
            attend(round(aléatoire( $2^{backoff}$ )))
        fin
    fin
    pour  $k=1 : K$  faire
         $\rho(i, k) = \frac{\log(1+(p \cdot HH(k,i)/(sig)))}{\max(\log(1+(p \cdot HH(1:K,i)/(sig)))}$ 
    fin
    Tant que !empty( $\rho(i, :)$ ) faire
         $k = \arg \max(\rho(i, :))$ 
        pour  $t = 1 : T$  faire
            pour  $p = p_{min} : p_{max}$  faire
                Trouvez le premier  $j$  tel que  $CL(k, t, j) = 0$ 
                 $CL(k, t, j) = \{i, CSI, p\}$ 
                si ( $SIC(CL(k, t, :)) \neq 0$ ) alors
                    envoie  $CL(k, t, :)$  à l'utilisateur  $i$  et sortir
                sinon
                     $CL(k, t, j) = \{\}$ 
                fin
            fin
             $\rho(i, k) = 0$ 
        fin
    fin
fin
Envie NO_ALLOC à MTD  $i$ 

```

Le schéma d'allocation rapide des ressources basé sur les informations des canaux de transmission des utilisateurs est décrit comme suit :

- **L'accès basé sur la contention** : Lorsqu'un utilisateur demande l'allocation de ressources, il doit tenter de rejoindre la station de base par l'intermédiaire des blocs de ressources réservés W_c en envoyant son CSI. Il est à noter que l'accès basé sur la contention n'est effectué que la première fois que l'utilisateur rejoint la station de base ou lorsqu'il ne remplit pas ses besoins en termes de qualité de service. Si la BS ne parvient pas à décoder le signal de l'utilisateur, il doit le retransmettre dans le créneau temporel suivant.
- **L'allocation des ressources** : La procédure d'allocation des ressources est décrite dans l'algorithme 1. Une fois que la BS reçoit le signal de l'utilisateur i , elle détermine son CSI, sélectionne pour lui son meilleur canal et le niveau de puissance le plus bas et vérifie s'il peut être alloué à l'un des clusters utilisant ce canal en exécutant le SIC. En cas d'échec, la station de base augmente la puissance de transmission de l'utilisateur jusqu'à atteindre P_{max} . Ensuite, la station de base sélectionne le deuxième meilleur canal pour cet utilisateur et retente une allocation. L'utilisateur est alloué au premier cluster pour lequel le SIC est exécuté avec succès, c'est la meilleure allocation que la BS peut lui offrir. Ensuite, l'allocation de l'utilisateur est sauvegardée dans la table d'allocation de la BS et les informations du groupe correspondant (CSI et niveau de puissance de tous les utilisateurs du groupe) sont renvoyées à l'utilisateur. Ces informations sont envoyées à l'utilisateur pour lui permettre d'exécuter le SIC sur la liaison descendante. Une mise à jour est envoyée à tous les membres du groupe lorsqu'un nouvel

utilisateur rejoint le groupe. Si la station de base ne parvient pas à allouer l'utilisateur à tous les clusters, un retour de non-allocation est renvoyé et ce dernier qui doit attendre une période donnée avant de tenter de rejoindre à nouveau la station de base.

- **La phase de liaison montante :** Chaque utilisateur qui a reçu une allocation de la part de la BS utilise l'allocation reçue (sous-porteuse, puissance de transmission) pour envoyer ses données sur la liaison montante.
- **La phase de liaison descendante :** La station de base envoie des signaux superposés à tous les utilisateurs du même groupe. Ils sont en mesure d'exécuter le SIC puisqu'ils ont reçu dans la phase d'initialisation les CSI et la puissance de transmission de tous les utilisateurs de leur groupe.

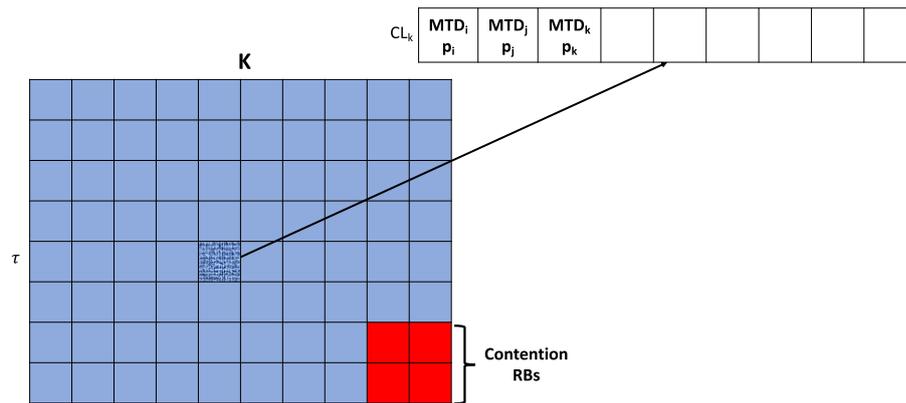


Figure 13: Allocation de ressources dans l'approche proposée. Les RBs en rouge sont réservés pour la contention

Pour conclure, cette technique d'allocation de ressource permet d'améliorer considérablement l'efficacité spectrale par rapport aux techniques OMA, en allouant un cluster d'utilisateurs à chaque bloc de ressources temps/fréquence au lieu de servir un seul utilisateur. La considération des blocs de contention et l'absence d'interférence inter-cluster permettent d'améliorer les performances obtenues considérablement. Dans la section suivante, nous visons augmenter davantage la capacité du système NOMA en essayant de pousser un peu plus la limite en essayant d'allouer un peu plus d'utilisateurs, en prenant compte du modèle de trafic des utilisateurs. Bien entendu, une attention particulière sera portée à la complexité des solutions proposées afin de permettre une potentielle implémentation sur des équipements de faible capacité comme les réseaux de capteurs sans-fil.

II.2.2. Allocation de ressources à base d'apprentissage fédéré

Dans cette section, nous abordons le défi de l'allocation massive d'utilisateurs en permettant un utilisateur de rejoindre un cluster même si la procédure SIC, introduite dans Algorithme 1, échoue. En effet, nous allons pousser la barre un peu plus en relâchant la contrainte, considérée dans Algorithme 1, que la procédure SIC devra s'appliquer avec succès sur les utilisateurs de chaque cluster, puisque les utilisateurs ne sont pas toujours actifs, et donc ne transmettent pas tous en même temps. Ainsi, nous prenons en compte le modèle de trafic des utilisateurs et nous utilisons une approche basée sur l'apprentissage fédéré afin de permettre à la BS d'allouer les utilisateurs.

II.2.2.1. Modèle de trafic

Dans cette section, puisqu'on s'intéresse à un réseau de capteurs sans-fil, nous considérons le modèle de trafic, introduit dans [41], où l'état d'un utilisateur évolue selon deux modes, à savoir le mode alarme et le mode régulier ou normal. Ainsi, l'état d'un utilisateur suit une chaîne de Markov, comme illustré dans la Figure 14.

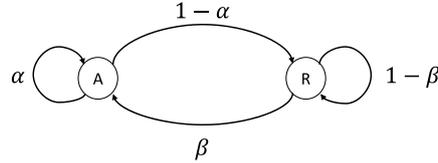


Figure 14: Diagramme de transition d'état du modèle de chaîne de Markov décrivant le comportement temporel du utilisateur.

La matrice de transition est exprimée comme suit :

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{bmatrix} \quad (39)$$

Cette chaîne de Markov est ergodique, et admet une probabilité stationnaire $\pi_x = [\pi_x^a; \pi_x^r]$ où π_x^a (respectivement π_x^r) est la probabilité d'être dans l'état d'alarme (respectivement régulier). Par ailleurs, nous supposons que l'utilisateur génère un paquet quand il est dans l'état d'alarme (respectivement régulier) suivant un processus de Markov, comme nous pouvons voir dans la Figure 15.

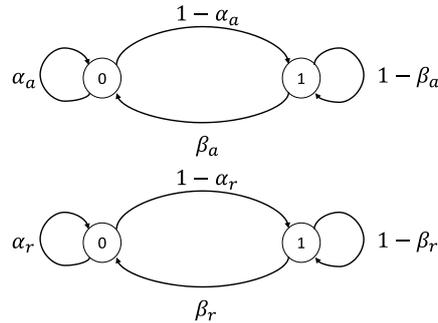


Figure 15: Diagramme de transition d'état du modèle de chaîne de Markov décrivant le comportement temporel de l'utilisateur en mode alarme et en mode normal respectivement.

La matrice d'état est illustrée comme suit :

$$P_A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_a & \alpha_a \\ 1 - \beta_a & \beta_a \end{bmatrix} \quad P_R = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_r & \alpha_r \\ 1 - \beta_r & \beta_r \end{bmatrix} \quad (40)$$

Ainsi, nous pouvons en déduire la probabilité qu'un utilisateur soit actif, i.e. a des paquets à transmettre, qui peut s'exprimer comme suit :

$$\pi_{act} = \frac{\beta_a}{1 + \beta_a + \alpha_a} + \frac{\beta_r}{1 + \beta_r + \alpha_r} \quad (41)$$

II.2.2.2. Algorithme d'apprentissage fédéré

L'algorithme proposé est divisé en trois étapes dont deux sont mises en œuvre du côté des utilisateurs et une est exécutée par la station de base, comme l'illustre l'Algorithme 2. En effet, le modèle de trafic est estimé en utilisant un algorithme d'apprentissage au niveau de chaque utilisateur. Par la suite, chaque utilisateur n'envoie que les paramètres de son modèle à la station de base qui leur alloue à la fois les RBs et les puissances d'émission correspondant à leurs

caractéristiques de trafic. Il est à noter que l'apprentissage du modèle de trafic du côté des utilisateurs réduit la complexité du côté de la station de base, ce qui augmente l'évolutivité de la technique proposée, tout en ayant une complexité raisonnable au niveau des utilisateurs pour être mis en œuvre sur des équipements de faible capacité. En outre, la période d'apprentissage du modèle de trafic dépend fortement du phénomène détecté et peut être différente d'un utilisateur à l'autre. Il est donc très difficile de développer un apprentissage centralisé du modèle de trafic. La sélection conjointe des canaux et le contrôle de la puissance sont mis en œuvre par la station de base qui a une connaissance globale du réseau. Comme on s'attend à ce que les utilisateurs aient une période d'inactivité relativement longue, la station de base peut augmenter l'efficacité spectrale en attribuant aux utilisateurs interférents les mêmes ressources en fonction de leurs modèles de trafic. Enfin, les utilisateurs utilisent un algorithme basé sur le backoff pour éviter les collisions. L'algorithme proposé est expliqué ci-dessous.

Algorithme 2 Massive MTD Allocation

```

- Initialisation : La station de base initialise la table d'allocation CL comme suit  $0_{C_{max} \times |W - W_c|}$  où
 $C_{max}$  est la taille maximale du cluster
La station de base envoie une balise au début de chaque intervalle de temps
Tant que (un nouveau MTD  $i$  rejoint la cellule.) faire
    backoff=0
    transmitted=false
     $i$  observe son environnement pendant une période de test ( $T_{tr}$  Intervalles de temps) et estime sa probabilité d'activité  $\pi_{act}$ 
    tant que (!transmitted) faire
         $i$  envoie son CSI et  $\pi_{act}$  à la station de base en utilisant un  $W_c$  bloc de ressources
        si (!transmitted) alors
            backoff=backoff+1
            attend(round(aléatoire( $2^{backoff}$ )))
        fin
    fin
    pour  $p = p_{min} : p_{max}$  faire
        pour  $w = 1 : |W - W_c|$  faire
            Trouvez le premier  $j$  tel que  $CL(w, j) = 0$  et mettre que  $CL(w, j) = \{i, CSI, p, \pi_{act}\}$ 
            si ( $SIC(CL(w, :)) \neq 0$ ) alors
                envoie  $CL(w, i)$  à  $i$ 
                Quitter l'algorithme
            sinon
                 $T_{coll} = T_{coll} \cup \{CL(m)\}$ 
                pour  $m=1 : length(CL)$  faire
                    si ( $SIC(T_{coll}(1), CL(m)) \neq 0$ ) alors
                         $T_{coll} = T_{coll} \cup CL(m)$ 
                    fin
                fin
                si  $sum(T_{coll}, \pi_{act}) < Prob_{act-max}$  alors
                    envoie  $CL(w, i)$  à  $i$ 
                    Quitter l'algorithme
                sinon
                     $CL(w, j) = \{\}$ 
                fin
            fin
        fin
    fin
    Envoie NO_ALLOC à MTD  $i$ 

```

II.2.2.3. Apprentissage du modèle de trafic

Chaque utilisateur surveille son environnement afin d'estimer les paramètres de son modèle de trafic, à savoir $\alpha, \beta, \alpha_a, \beta_a, \alpha_r$ et β_r . ces paramètres sont ensuite transmis à la BS qui va agréger le modèle de trafic de tous les utilisateurs. Notez qu'une fois que l'utilisateur est alloué, il doit s'assurer que le trafic généré n'est pas supérieur à celui annoncé à la BS. Par conséquent, si un utilisateur veut augmenter son trafic, ou si le modèle de trafic appris n'était pas exact, il doit lancer une nouvelle demande d'allocation à la station de base avec le nouveau modèle de

trafic, soit il essaie de se conformer au modèle de trafic en utilisant son tampon d'émission pour retarder la transmission de certains paquets.

II.2.2.4. Allocation des ressources et adaptation du trafic

Une fois que la station de base reçoit le signal de l'utilisateur, elle détermine son CSI, sélectionne pour lui le niveau de puissance le plus bas et essaie de l'attribuer à l'un des groupes. En effet, elle suppose que l'utilisateur est alloué à ce cluster en utilisant ce niveau de puissance et exécute le SIC. Si le SIC échoue, la station de base détermine l'ensemble des utilisateurs en collision avec celui qui a été ajouté. Ensuite, la station de base vérifie si la somme des probabilités d'activité des utilisateurs en collision est supérieure à $\text{Prob}_{\text{act-max}}$. Si c'est le cas, l'utilisateur ajouté ne peut pas être attribué à ce groupe. Si la station de base ne parvient pas à allouer l'utilisateur à tous les groupes, elle augmente son niveau de puissance de transmission et recommence le processus. Si l'allocation est réussie, l'allocation de l'utilisateur est sauvegardée dans la table d'allocation de la station de base, le bloc de ressources et le niveau de puissance de transmission correspondants sont renvoyés à l'utilisateur. La station de base envoie également le CSI de tous les utilisateurs qui se sont vus attribuer le même cluster afin de lui permettre d'effectuer le SIC pour les données en liaison descendante. Une mise à jour est également envoyée à tous les membres du cluster lorsqu'un nouvel utilisateur rejoint le cluster. Dans le cas contraire, un retour de non-allocation est envoyé à l'utilisateur qui doit entrer dans une phase de backoff avant de tenter de rejoindre à nouveau la station de base pour éviter de dégrader les performances des autres membres du cluster. Notez qu'à l'issue de cette phase de backoff, l'utilisateur doit tenter de rejoindre la BS à nouveau en utilisant les blocs de contention.

Algorithme 3 Synchronisation des MTDs

```

Données : historique des observations  $h$ ,  $\text{frame\_size}$ 
Résultat : Le retard supplémentaire de MTD  $i$ 
tant que MTD  $i$  a des paquets à transmettre, faire
     $i$  envoie le paquet et attend le retour de la BS
    si (!transmitted) then
         $T_s = NB_s \cup \{0\}$ , // état de transmission du nœud  $i$ 
         $P_d = \sum_{i \in \text{length}(T_s)} T_s(i)$ , //
         $D(i) = \text{mod}(\text{round}(2^{h-P_d}), \text{frame\_size})$  // nombre de transmissions réussies pendant la période de l'historique
    sinon
         $T_s = T_s \cup \{1\}$ 
    fin
end

```

Il est à noter que même si le schéma proposé augmente la capacité du système, il entraîne des interférences entre les utilisateurs d'un même cluster puisque les utilisateurs qui transmettent dans un cluster donné peuvent entrer en collision en utilisant les mêmes niveaux de puissance. Par conséquent, nous concevons une technique d'adaptation du trafic, basée sur l'apprentissage, décrite dans Algorithme 3. L'idée est que la station de base n'attribue pas d'utilisateur engendrant un échec du SIC au sein d'un cluster si la somme des probabilités d'activité des utilisateurs en collision est supérieure à $\text{Prob}_{\text{act-max}}$. Ainsi, si le SIC échoue et comme les utilisateurs sont au courant de cette procédure, ils doivent s'organiser dans la trame, en ajoutant un certain délai, afin de pouvoir transmettre dans le même cluster. En effet, si un utilisateur est confronté à une collision lors de l'envoi de ses données, il doit ajouter un retard aléatoire afin d'éviter la collision avec d'autres utilisateurs dans le même cluster, comme illustré sur la Figure 16. Notons que la synchronisation des utilisateurs n'est pas du tout triviale puisque le résultat

du SIC est un retour unique pour tous les utilisateurs. En effet, si l'utilisateur i engendre un échec du SIC, tous les utilisateurs plus faibles échoueront également au SIC, même s'ils sont bien synchronisés, et modifier leur délai initial en réaction à l'échec du SIC peut entraîner un autre échec du SIC à l'avenir. Par conséquent, nous proposons que seul le premier utilisateur qui échoue au SIC et les utilisateurs qui entrent en collision avec lui modifient leurs délais dans l'intervalle de temps suivant, les autres ignorent l'échec du SIC. La synchronisation des utilisateurs est décrite dans Algorithme 3. Notez que l'ensemble des utilisateurs en collision peut être facilement déterminé, comme nous pouvons le voir dans Algorithme 4, puisque les utilisateurs disposent des CSI et des puissances d'émission des membres de leur cluster. En effet, à l'inverse des techniques NOMA classiques où un utilisateur décode les signaux des utilisateurs plus fort que lui uniquement afin d'exécuter le SIC et considère les autres comme interférence, nous supposons dans Algorithme 4 que chaque utilisateur décode tous les messages superposés et ainsi, ils peuvent détecter facilement quels sont les utilisateurs qui sont en collision. Sans que ceci ait une complexité élevée, il permettra à l'utilisateur d'améliorer considérablement les performances de leur algorithme d'apprentissage.

Algorithme 4 Détection de collision

Données : Cluster CL
 Résultat : L'ensemble des MTDs en collision
 $CL_{tmp} = \{\}$
 pour $m=1 : \text{length}(CL)$ faire
 si ($SIC(CL) \neq 0$) alors
 | $U = CL(1)$
 sinon
 | $CL = CL \setminus \{CL(1)\}$
 fin
 fin
 pour $m=2 : \text{length}(CL)$ faire
 si ($\neg SIC(U, CL(m))$) alors
 | $CL_{tmp} = CL_{tmp} \cup \{CL(m)\}$
 fin
 end

Afin d'augmenter la stabilité de la technique proposée, nous proposons que plus les utilisateurs transmettent avec succès, plus la probabilité qu'ils modifient le délai de transmission après une collision est faible. En effet, nous considérons que le nouvel utilisateur qui rejoint le cluster doit s'adapter aux créneaux horaires disponibles dans la trame. Bien sûr, s'il échoue pendant plusieurs intervalles de temps, tous les utilisateurs en collision seront incités à modifier leur délai afin de permettre à tous les utilisateurs en collision de s'insérer dans la trame. Il est à noter que les utilisateurs savent qu'il existe un moyen de s'arranger dans la trame puisque les stations de base n'allouent pas les utilisateurs en conflit au même groupe si leur probabilité d'activité est supérieure à $\text{Prob}_{\text{act-max}}$, et que les utilisateurs s'assurent que le trafic qu'ils génèrent est cohérent avec le modèle envoyé. Cette collaboration implicite entre la station de base et les utilisateurs fait la force de la technique proposée.

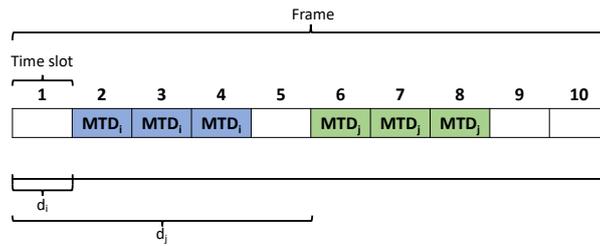


Figure 16: Autoadaptation des utilisateurs au sein d'une trame.

Dans le scénario de la Figure 16, les utilisateurs i et j utilisent le même bloc de ressources et ont la même puissance reçue, mais pas aux mêmes intervalles de temps. En effet, ils utilisent des délais différents dans la trame afin d'éviter les collisions : i transmet 1 slot après le début de la trame et j transmet à partir du sixième slot temporel. S'il existe un autre utilisateur ayant une probabilité d'activité $\pi_{act} < 0.2$, il peut s'insérer dans le cluster (slots temporels 9 et 10), sinon, i et j doivent modifier leurs délais de départ afin de permettre au prochain utilisateur de transmettre avec eux.

Dans cette partie, nous avons montré que l'implication des utilisateurs dans la procédure d'allocation de ressource permet d'alléger considérablement la charge de la BS lui permettant de gérer plus d'utilisateurs. Par ailleurs, la coopération implicite entre les utilisateurs et entre les utilisateurs et la station de base permet à l'ensemble de se coordonner sans avoir besoin d'une complexité prohibitive ni d'une surcharge de signalisation sur le système. Il est à noter que ce genre de techniques, appelées « semi grant-free » où la tâche d'allocation de ressources est partagée entre les utilisateurs et la station de base étant donné son importance à garantir une QoS acceptable pour les utilisateurs d'un système NOMA. D'un autre côté, les techniques « grant-free » dans lesquels la station de base ne participe pas du tout dans le processus d'allocation de ressources, comme les techniques basées sur l'ALOHA par exemple, permettent de concevoir des systèmes très scalables et de faible complexité, par contre, ne permettent pas de garantir généralement une QoS minimale pour les utilisateurs et souffrent d'une forte dégradation de performances à forte charge. Nous continuons dans ce sens, dans la section suivante, en permettant aux utilisateurs de gérer eux-mêmes l'allocation de ressources sans aucune l'intervention de la station de base en utilisant une approche basée sur l'outil d'apprentissage par renforcement : le multi-armed bandit.

II.3. Allocation de ressources et contrôle de puissance : Approche de Multi-Armed Bandit

Dans cette partie, nous considérons le même système d'accès multiple présenté dans la section précédente et nous proposons d'alléger davantage la charge de la station de base en transformant l'allocation de ressource en un problème totalement décentralisé. En effet, chaque utilisateur choisit, dans le cadre du MAB, d'utiliser un bloc de ressources temps/fréquence/puissance afin de maximiser sa récompense suite à une politique de prise de décision pour les problèmes d'allocation de ressources dynamiques. En effet, nous considérons que les utilisateurs choisissent un parmi L niveaux de puissance de transmission $P = \{P_1, P_2, \dots, P_L | P_1 < P_2 < \dots < P_L\}$.

Un utilisateur actif i doit décider quels blocs de ressources il va utiliser, et pour le bloc de ressources k (sous – porteuse k), il doit déterminer la puissance de transmission

correspondante $P_{i,k} \in \{P_1, P_2, \dots, P_L\}$. La station de base trie les paires ($\{i \in C_k, P_{i,k} \times |h_{i,k}|\}$) en utilisant sa deuxième coordonnée dans un ordre croissant obtenant un vecteur $\{\bar{i}(1), \bar{i}(2), \dots, \bar{i}(|C_k|)\}$. La capacité du $j^{\text{ème}}$ utilisateur sur le $k^{\text{ème}}$ bloc de ressources peut être exprimée comme suit :

$$R_{\bar{i}(j),k} = \log_2 \left(1 + \frac{P_{\bar{i}(j),k} \times |h_{\bar{i}(j),k}|^2}{\sum_{l=1}^{j-1} P_{\bar{i}(l),k} |h_{\bar{i}(l),k}|^2 + \sigma_k^2} \right) \quad (42)$$

Il convient de noter que la capacité atteignable du $j^{\text{ème}}$ utilisateur sur le $k^{\text{ème}}$ bloc de ressources dépend essentiellement de l'interférence qu'il a avec les autres utilisateurs partageant avec lui le même bloc de ressources. En effet, pour décoder avec succès les signaux qu'il a reçu, la condition suivante doit être remplie :

$$R_{i,k} \geq \bar{R}_{th} \quad (43)$$

où \bar{R}_{th} est le débit de données cible. Il est à noter qu'en dessous de ce seuil de débit de données, on considère que l'interférence est suffisamment forte pour entraver le décodage du signal.

II.3.1. La formulation du problème et solution proposée

Dans cette section, nous utilisons l'outil d'apprentissage par renforcement « le multi-armed bandit » pour résoudre le problème de sélection de canal conjointement avec le contrôle de puissance pour les transmissions non-orthogonales sur la liaison montante. Dans ce contexte, nous proposons quatre algorithmes basés sur le MAB pour optimiser l'allocation des ressources et améliorer les performances du système. En effet, chaque utilisateur choisit un bras (un couple de bloc de ressource et de puissance de transmission) à chaque intervalle de temps et reçoit une certaine récompense (équivalente au débit de données obtenu). Notez que la récompense dépend des actions des autres utilisateurs, en plus de l'utilisateur qui prend la décision, qui ne sont pas connus à l'avance. Par conséquent, les stratégies des autres utilisateurs doivent être prises en compte afin d'optimiser le problème d'allocation de ressource. Par ailleurs, l'utilisateur peut perdre une partie de la récompense en choisissant un bras sous-optimal. Nous faisons référence à cette perte par le regret qui est défini comme la différence entre la récompense obtenue et la récompense qui aurait été obtenue en sélectionnant le bras optimal. La stratégie MAB est particulièrement bien adaptée au contexte de la liaison montante NOMA avec multiplexage de puissance puisque chaque utilisateur a une connaissance limitée de son environnement. En effet, nous supposons qu'un utilisateur ne connaît que son sous-canal et sa puissance de transmission. Pour les informations du canal, nous supposons que chaque utilisateur estime son CSI en considérant le signal de balise transmis par la station de base. En effet, au début d'un intervalle de temps, l'utilisateur i sélectionne le bloc de ressources à utiliser W , ainsi que le niveau de puissance d'émission correspondant au bras qui maximise son utilité :

$$\{k | i \in C_k\} \subset W \quad (44)$$

$$\{P_{i,k} | i \in C_k\} \subset P \quad (45)$$

$$A_j = W \times P \quad (46)$$

La prise de décision optimale pour chaque utilisateur repose essentiellement sur la politique utilisée afin de résoudre le problème MAB susmentionné, en réalisant un compromis entre choisir le meilleur bras qui permet d'obtenir la meilleure utilité attendue ou prendre un risque et tester un autre bras, entre un gain immédiat ou une exploration en vue d'un gain meilleur

dans le futur. Ce dilemme est bien connu sous le nom du dilemme d'exploration-exploitation. Par ailleurs, un processus d'entraînement est effectué pendant une période de T créneaux temporels. L'objectif de cette période d'entraînement est de converger vers la meilleure stratégie d'allocation de ressources, ce qui améliore les performances du système en termes de débit moyen. Durant cette période d'entraînement, chaque utilisateur teste tous les bras possibles dans un ordre aléatoire afin de construire une base de connaissances qui facilitera la convergence dans le futur. Notez bien que longueur de la période d'entraînement, le nombre de bras dans le système, qui dépend de la granularité de discrétisation de l'espace de puissance de transmission, ainsi que le compromis entre l'exploration et l'exploitation, sont des paramètres à prendre en compte et à optimiser selon le type d'utilisateur dans le système. Par exemple, un utilisateur de faible capacité énergétique et de calcul, avec des périodes d'activité très courtes, ne peut pas exécuter un MAB avec un nombre élevé de bras et/ou avec des périodes d'entraînement importantes.

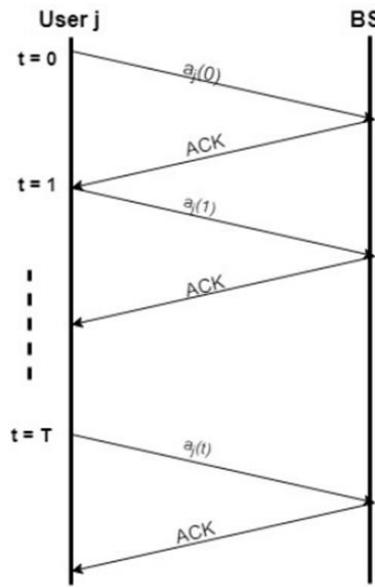


Figure 17 : Procédure d'entraînement de l'approche NOMA basée sur MAB

La Figure 17 illustre le processus d'allocation de ressources entre l'utilisateur j et la station de base pendant la période d'entraînement. Tout d'abord, l'utilisateur i choisit un bras $a_i(t) \in A_i$ et transmet un signal pilote à la station de base en utilisant le niveau de puissance de transmission et les blocs de ressources déterminés par le bras choisi. Si la station de base reçoit avec succès le signal de l'utilisateur i , elle renvoie un paquet ACK à cet utilisateur, avec le débit de données atteint. Nous supposons que si le débit atteint ne remplit pas la condition (43), la station de base n'envoie pas d'ACK et l'utilisateur obtient une utilité de 0. À l'issue de cette période d'entraînement, les utilisateurs sélectionnent les bras qui leur permettent de maximiser leur fonction d'utilité.

Dans cette partie, notre objectif est de maximiser le débit moyen des utilisateurs dans un système utilisant les techniques NOMA. Par conséquent, nous considérons la fonction d'utilité suivante pour l'utilisateur i :

$$U_i(a_i(t)) = \begin{cases} \sum_{(i,p_{i,k}) \in a_i(t)} R_{i,k} & \text{if } R_{i,k} > \bar{R}_{th} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (47)$$

où le débit de données $R_{i,k}$ de l'utilisateur i au bloc de ressources k est calculé après itération du SIC au niveau de la station de base. Les performances de chacune des stratégies MAB sont évaluées par le regret total attendu. Ce regret détermine la perte d'opportunité totale, et il est donné par :

$$R_T = \sum_{t=1}^T \max_{a_i(t) \in A_i} U_i(a_i(t)) - \sum_{t=1}^T U_i(a_i(t)) \quad (48)$$

qui correspond à la perte du $i^{\text{ième}}$ utilisateur lors de l'utilisation des bras ($a_j(t), t \in \{1, \dots, T\}$) au lieu d'utiliser la politique optimale (meilleurs bras). En effet, plus l'horizon T est élevé, plus un gain optimal dans les intervalles de temps futurs couvre largement le regret d'un choix non optimal au début pour des fins d'exploration.

Par ailleurs, le débit attendu de l'utilisateur i lors de l'utilisation de l'algorithme MAB-NOMA peut être exprimé comme suit :

$$T_{MA-NOMA} = E[\sum_{t=1}^T U_i(a_i)] \quad (49)$$

Dans les sections suivantes, nous proposons des approches NOMA basées sur le MAB afin d'optimiser le débit de données attendu.

II.3.1.1. ϵ -MAB-NOMA et ϵ -décroissante MAB-NOMA

Dans cette partie, nous allons proposer deux techniques MAB-NOMA basée sur l'utilisation d'un seuil qui définit le compromis entre l'exploration et l'exploitation.

II.3.1.1.1. ϵ -MAB-NOMA

L'approche ϵ -MAB est l'une des stratégies les plus simples et les plus utilisées pour résoudre les problèmes MAB. L'idée de cette approche est que chaque utilisateur choisit un bras au hasard avec une probabilité de ϵ et sélectionne le bras qui lui accorde la récompense la plus élevée avec une probabilité $1 - \epsilon$, pour des valeurs relativement faibles de ϵ bien entendu. Cette approche est détaillée dans Algorithme 5. En effet, plus epsilon est élevé, plus l'utilisateur fera de l'exploration en testant des bras arbitraires. Bien sûr, un ϵ plus grand signifie également un regret plus élevé et une convergence lente. Le paramètre ϵ est appelé paramètre d'exploration. Ainsi, il y a un compromis à faire dans le choix de ce paramètre afin de converger rapidement sans pour autant converger vers une solution très éloignée de l'optimale.

Algorithme 5 ϵ -greedy MAB-NOMA (fixed ϵ) et ϵ -decreasing MAB-NOMA

$$\left(\epsilon(t) = \min \left(1, \frac{c}{t} \right) \right)$$

```

pour m=1 : T faire
  pour m=1 : N faire
    Identification de la ressource greedy indexée j:
     $a_j = \arg \max_{a_j \in A_j} Q_j(a_j, t)$  (Avec une probabilité de  $1-\epsilon$ )
     $a_j = \text{random}(A_j)$  (Avec une probabilité de  $\epsilon$ )
    Parameters update:  $\forall 1 \leq j \leq L$ :
    -  $s_j(a_j, t+1) = s_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j} \times U_j(a_j)$ 
    -  $n_j(a_j, t+1) = n_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j}$ 
    -  $Q_j(a_j, t+1) = \frac{s_j(a_j, t+1)}{n_j(a_j, t+1)}$ 
    Go back to the beginning of current section
  fin
  t = t + 1
fin

```

II.3.1.1.2. ϵ -décroissante MAB-NOMA

Si la valeur de ϵ est fixée comme une constante, la politique d'allocation est sous-optimale. En effet, les utilisateurs continuent à choisir des bras au hasard même si l'algorithme a convergé. Comme nous l'avons évoqué avant, il serait plus intéressant d'explorer plus au début, afin de converger vers une solution optimale, et d'annuler ou réduire le quota d'exploration après la convergence. Par conséquent, nous introduisons, dans cette partie, une nouvelle version de l'algorithme ϵ -MAB-NOMA dans lequel ϵ est décroissant en fonction du temps et la valeur de ce paramètre est donné par l'expression suivante : $\epsilon(t) = \min(1, \frac{c}{t})$ où $c > 0$ est le paramètre d'exploration définit au début de l'algorithme. L'avantage d'utiliser cette version de l'algorithme ϵ -MAB est que nous pouvons utiliser un paramètre d'exploration très grand au début afin d'explorer l'espace des bras. Ensuite, le paramètre d'exploration diminue continuellement afin de minimiser le regret après la convergence de l'algorithme. Il convient de rappeler que ce regret devient négligeable en moyenne si l'horizon de l'apprentissage T est élevé.

II.3.1.2. Algorithmes des limites supérieures de confiance

Dans cette section, nous nous intéressons à la classe d'algorithmes de borne de confiance supérieure (UCB) qui permettent de réaliser un regret attendu uniformément logarithmique dans le temps [42-43]. De plus, il permet de maintenir une distinction entre une phase d'exploration et une phase d'exploitation en maximisant la fonction de décision suivante pour l'utilisateur i :

$$a_i = \operatorname{argmax} U_i(a_i) + \gamma_i \quad (50)$$

où $U_i(a_i)$ est la récompense moyenne du bras a_i et γ_i est la fonction de remplissage qui représente approximativement l'incertitude de la récompense moyenne. Nous désignons la récompense attendue du bras optimal par U_i^* . Définissons maintenant la fonction de déviation $\Delta_i(a_i) = U_i^* - U_i(a_i)$ qui mesure le regret instantané en jouant le bras a_i . Nous proposons dans la suite deux algorithmes basés sur UCB permettant d'optimiser la fonction d'utilité introduite au début de cette partie.

II.3.1.2.1. Algorithme MAB-NOMA-UCB1

Dans cette section, nous introduisons l'algorithme MAB-NOMA-UCB1 appartenant à la famille des algorithmes de bornes de confiance supérieures. Le pseudo-code de cet algorithme est détaillé ci-dessous.

Algorithme 6 MAB-NOMA-UCB1

Initialisation : générer une permutation aléatoire de A_j , pendant $|A_j|$ les premières itérations, Jouer itérativement les ressources et mettre à jour les paramètres en conséquence.

```
pour  $t = 1 : T$  faire
  pour  $m = 1 : N$  faire
    Identification de la greedy Ressource indexée  $j$ 
     $a_j = \arg \max_{a_j \in A_j} \left( Q_j(a_j, t) + \sqrt{\frac{2 \times \log(t)}{n_j(a_j, t)}} \right)$ 
    Mise à jour des paramètres :  $\forall 1 \leq j \leq L$ :
    -  $s_j(a_j, t + 1) = s_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j} \times U_j(a_j)$ 
    -  $n_j(a_j, t + 1) = n_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j}$ 
    -  $Q_j(a_j, t + 1) = \frac{s_j(a_j, t + 1)}{n_j(a_j, t + 1)}$ 
    Revenir au début de la section actuelle
  fin
   $t = t + 1$ 
fin
```

Lors de l'étape d'initialisation, l'algorithme proposé teste tous les bras, puis à chaque intervalle de temps, l'agent sélectionne le bras qui maximise la fonction de décision suivante pour l'utilisateur i :

$$a_i = \arg \max_{a \in A_i} U_i(a) + \sqrt{\frac{2 \times \ln(t)}{n_i(a)}} \quad (51)$$

où $n_i(a_i)$ désigne le nombre de créneaux temporels où le bras a_i a été joué, et A_i est l'espace de bras de l'utilisateur i .

L'algorithme proposé a une limite stricte sur le regret au temps t , pour les bras de Bernoulli, exprimée comme suit :

$$R_t \geq \bar{g} \times \left[\sum_{i|U_i(a_i) < U_i^*} \left(\frac{\ln(t)}{\Delta_i(a_i)} \right) \right] + \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right) \left(\sum_{j=1}^L A_j |\Delta_j(a_j)| \right) \quad (52)$$

II.3.1.2.2. Algorithme MAB-NOMA-UCB2

Nous proposons de mettre en œuvre l'algorithme MAB-UCB2 pour résoudre la problématique d'allocation de ressources dans les réseaux NOMA. En effet, MAB-UCB2 appartient à la famille des algorithmes de borne de confiance supérieure et peut être considéré comme une amélioration de MAB-UCB1. En effet, MAB-UCB2 réduit le regret global au prix d'une complexité légèrement supérieure. Plus précisément, il réduit le terme constant de la fraction lorsque le bras joué n'est pas optimal. En outre, le bras sélectionné est joué pendant des intervalles de temps de taille variable $(1 + \alpha)^{n_i(a_i)+1} - (1 + \alpha)^{n_i(a_i)}$. Ceci permettra à l'utilisateur d'estimer le résultat de la politique choisie (le bras) sur différents choix des autres utilisateurs. Notez que $n_i(a_i)$ est le nombre d'intervalles de temps où le bras a_i a été sélectionné et $0 < \alpha < 1$ un paramètre qui influence le taux d'apprentissage. Le pseudo-code de MAB-UCB2 est détaillé dans l'Algorithme 7.

Algorithme 7 MAB-NOMA-UCB2

Initialisation : générer une permutation aléatoire de A_j , pendant $|A_j|$ les premières itérations, Jouer itérativement les ressources et mettre à jour les paramètres en conséquence.

```
pour  $t = 1 : T$  faire
  pour  $m = 1 : N$  faire
    Identification de la greedy Ressource indexée  $j$ 
    
$$a_j = \arg \max_{a_j \in A_j} \left( Q_j(a_j, t) + \left[ \frac{(1+\alpha) \ln \left( \frac{en}{(1+\alpha)^{n_j(a_j, t)}} \right)}{2(1+\alpha)^{n_j(a_j, t)}} \right] \right)$$

    Play arm  $a_j$  during
    
$$\left[ (1 + \alpha)^{n_j(a_j, t)+1} - (1 + \alpha)^{n_j(a_j, t)} \right]$$

    Mise à jour des paramètres :  $\forall 1 \leq j \leq L$ :
    -  $s_j(a_j, t + 1) = s_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j} \times U_j(a_j)$ 
    -  $n_j(a_j, t + 1) = n_j(a_j, t) + \mathbb{1}_{g=j}$ 
    -  $Q_j(a_j, t + 1) = \frac{s_j(a_j, t+1)}{n_j(a_j, t+1)}$ 
    Revenir au début de la section actuelle
  fin
   $t = t + 1$ 
fin
```

L'expression suivante définit la borne supérieure du regret total d'un utilisateur pour les intervalles de temps $t \geq \max_{a_i \in A_i} \frac{1}{2\Delta_i(a_i)^2}$:

$$R_t \geq \sum_{i|U_j(a_j) < U_j^*} \frac{(1+\alpha)(1+4\alpha) \ln(2e\Delta_i^2 t)}{2\Delta_i} + \frac{C_\alpha}{\Delta_i} \quad (53)$$

où e est la constante d'Euler et C_α est exprimée comme suit :

$$C_\alpha = 1 + \frac{(1+\alpha)e}{\alpha^2} + \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{(1+\alpha)} + \left(1 + \frac{11(1+\alpha)}{5\alpha^2 \ln(1+\alpha)}\right).$$

II.4. Résultats de simulation

Dans cette section, nous utilisons des simulations basées sur Matlab afin d'évaluer les performances des techniques d'allocation des ressources proposées dans ce chapitre. En outre, nous avons considéré la technique d'accès multiple non-orthogonal basée sur Aloha, NM-ALOHA, proposée dans [44], comme une technique de référence pour la comparaison. En effet, cette technique s'est avérée efficace par rapport aux techniques OMA. Nous avons considéré une cellule de rayon 100 m avec $N = 600$ utilisateurs distribués selon le processus PPP de paramètre $\lambda_M = 0.01$. Ces utilisateurs transmettent leurs paquets à la BS à travers $K = 10$ sous-porteuses. Sauf indication contraire, nous considérons que la période d'activité moyenne d'un utilisateur est fixée à 26%. Par ailleurs, nous avons considéré qu'une trame est composée de 30 intervalles de temps.

II.4.1. Allocation rapide de ressources basées sur les CSI

Dans la première partie, nous varions le nombre de sous-porteuses de 1 à 10 et le nombre de utilisateurs de 1 à 600. Nous illustrons la probabilité d'allocation des utilisateurs pour la technique d'accès rapide sur la liaison montante (FUA) et pour l'allocation massive basée sur l'apprentissage (MMA). Nous ne considérons pas ici la technique NM-ALOHA car avec cette dernière, tous les utilisateurs sont autorisés à transmettre de manière aléatoire. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 18, la capacité du système est améliorée jusqu'à 20 fois par rapport

à l'allocation OMA, pour 200 utilisateurs et 10 sous-canaux. Par ailleurs, la technique MMA atteint une meilleure capacité que le FUA. Il est à noter que l'amélioration de la capacité observée de MMA par rapport à FUA est obtenue en tenant compte du modèle de trafic des utilisateurs. Comme nous avons considéré une période d'activité moyenne de 26%, nous pouvons allouer jusqu'à 3 utilisateurs sur la même trame sans interférence NOMA. Ces résultats nous permettent de réaliser le potentiel des techniques NOMA par rapport aux techniques d'accès orthogonales.

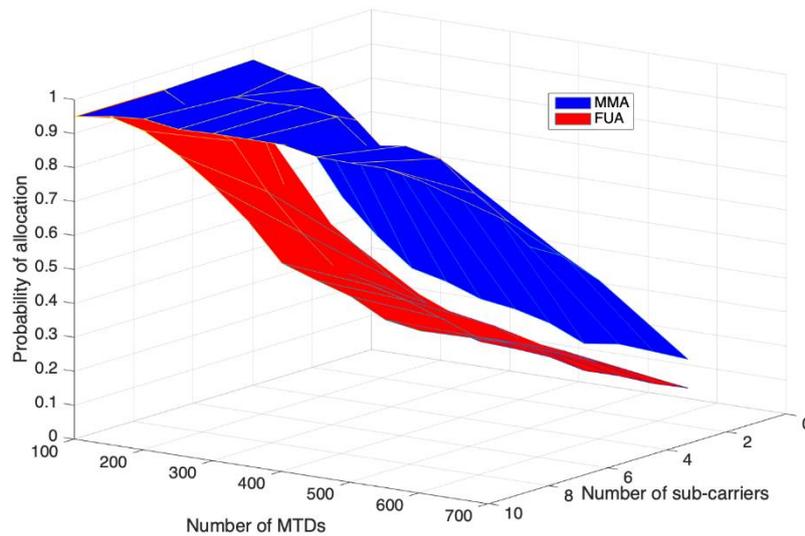


Figure 18: La probabilité d'allocation en fonction du nombre de utilisateurs.

La Figure 19 illustre le débit moyen obtenu avec les techniques FUA, MMA et NM-ALOHA. Nous pouvons observer que même si le NM-ALOHA permet à tous les utilisateurs de transmettre contre un nombre limité pour FUA et MMA, ces dernières permettent d'obtenir un débit moyen par utilisateur largement supérieur. Ce résultat est en quelque sorte attendu puisque l'interférence NOMA est contrôlée dans FUA et MMA. Par ailleurs, la technique MMA, qui profite des techniques d'apprentissage afin de prendre en compte le modèle de trafic des utilisateurs, permet d'obtenir un débit moyen plus intéressant que la technique FUA, particulièrement pour un nombre important d'utilisateurs dans le système. Nous sommes tout à fait conscients que les techniques que nous avons proposés dans cette partie sont de type « grant-based » dans lesquelles la station de base effectue l'allocation des ressources, et donc la comparaison n'est pas équitable avec les techniques aléatoires comme NM-ALOHA. Par contre, ce gain de performance et la faible complexité des techniques proposées justifient leur intérêt pour les réseaux IoT.

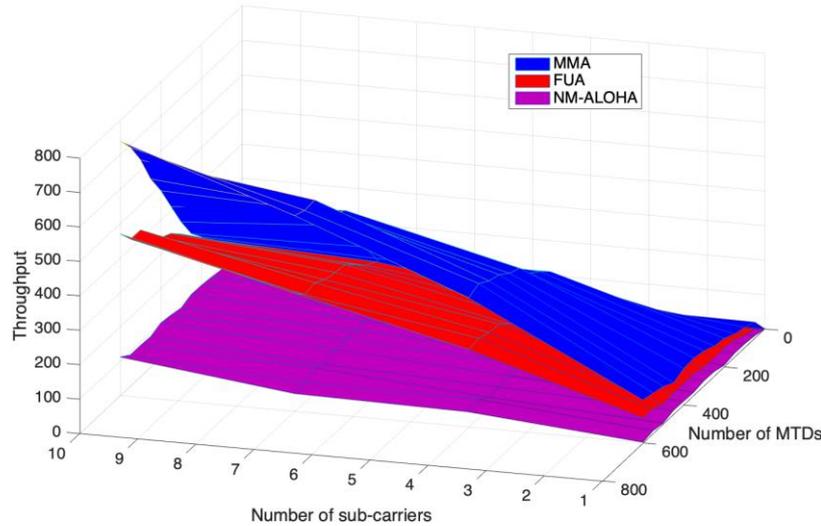


Figure 19: Le débit moyen pour différents N et K.

II.4.2. Approches basées sur le MAB pour l'allocation de ressources dans NOMA

Dans cette partie, nous focalisons sur les approches décentralisées basées sur le MAB afin d'allouer les ressources pour les techniques NOMA. Nous considérons une cellule de 100 m de rayon. La station de base est située au centre de la cellule, et $M = 200$ utilisateurs sont uniformément répartis dans la cellule. Nous considérons que nous avons $K = 6$ sous-canaux et que nous avons $L = 4$ niveaux de puissance d'émission. Ainsi, nous avons un espace d'action A composé de 24 bras pour chaque utilisateur. Nous avons évalué les performances des techniques ε -MAB-NOMA, ε -décroissant MAB-NOMA, MAB-NOMA-UCB1 ainsi que la technique MAB-NOMA-UCB2. Comme pour la section précédente, nous avons considéré la technique NM-ALOHA comme technique de référence.

La Figure 20 illustre le débit moyen des utilisateurs pour les techniques NM-ALOHA et les techniques NOMA basées sur le MAB que nous avons proposé. Nous avons considéré comme paramètres $\varepsilon = 0.01$, $C = 10^{-3}$ et $T_s = 100$, et nous illustrons le débit pour différentes valeurs de la probabilité d'accès p_a . La probabilité d'accès est la probabilité avec laquelle un utilisateur transmet un paquet durant l'intervalle de temps actuel. Nous pouvons clairement voir que les techniques basées sur MAB surpassent la technique de base NM-ALOHA. De plus, les algorithmes simples ε -MAB-NOMA et ε -décroissant MAB-NOMA surpassent les algorithmes sophistiqués basés sur UCB quand la probabilité d'accès augmente. En effet, à forte charge du système, les modèles basés sur l'UCB ont besoin de plus d'intervalles de temps pour converger vers de bonnes performances, car elles sont encore en phase d'exploration, alors que les techniques basées sur ε continuent à profiter de la diversité des utilisateurs pour augmenter le débit. Par ailleurs, nous remarquons que pour une charge modérée, les algorithmes MAB-UCB-2 et ε -décroissant MAB-NOMA permettent d'avoir des performances supérieures aux autres techniques. En effet, le fait de tester le même bras pendant un certain nombre de slots de temps, pour l'évaluer face à différente action des autres utilisateurs, s'est avéré bénéfique pour le débit moyen, quand l'horizon d'apprentissage est suffisamment long, prenons en compte le nombre de bras et le nombre d'utilisateurs dans le système.

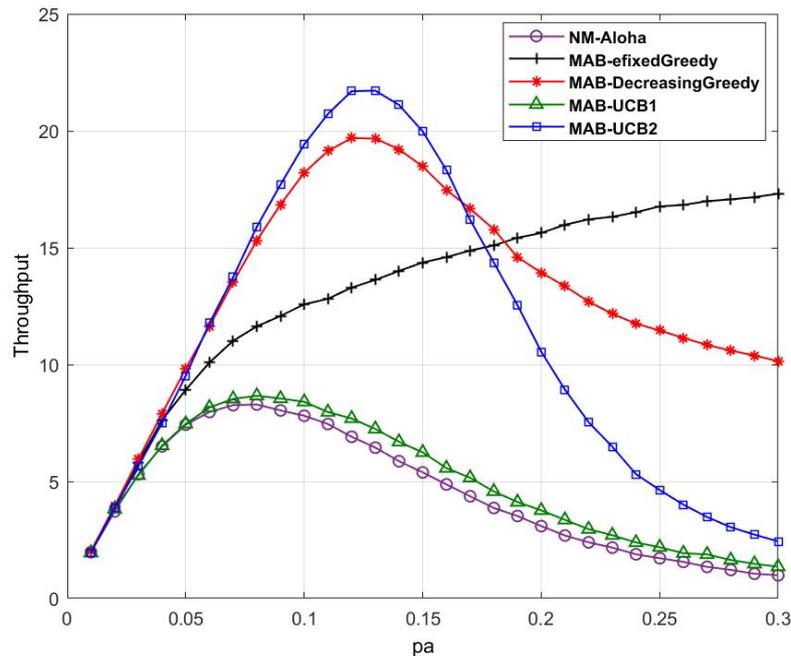


Figure 20 Débit en fonction de la probabilité d'accès pour les différentes stratégies MAB par rapport à la stratégie NM-NOMA.

Considérons maintenant une période d'apprentissage $T = 200$ intervalles de temps et une probabilité d'accès $p_a = 0.3$ afin d'étudier l'impact du nombre de bras sur les performances de l'apprentissage. Nous illustrons, dans la Figure 21, le débit moyen en fonction du nombre de bras. La première observation est plutôt intuitive : le débit moyen est croissant avec le nombre de bras dans le système. En effet, plus de bras signifie qu'il y a plus de possibilités pour les utilisateurs pour s'arranger en choisissant des niveaux de puissance permettant au SIC de s'exécuter avec succès. Bien entendu, un comportement asymptotique est attendu, en convergeant vers le débit obtenu si on avait considéré un espace continu de puissance à la place d'un espace discret. Ainsi, à un certain niveau, ce n'est plus bénéfique d'augmenter le nombre de bras puisque cela augmente la complexité et le temps de convergence sans apporter plus de débit pour les utilisateurs.

Par ailleurs, il est clair que les algorithmes basés sur MAB sont plus performants que le NM-ALOHA. De plus, nous observons que les techniques MAB-NOMA-UCB2 surpassent toutes les autres techniques lorsque le nombre de bras augmente. Par ailleurs, nous pouvons constater que pour un nombre très élevé de bras, la période d'entraînement devient trop courte pour permettre d'entraîner tous les bras, ce qui fait que les algorithmes à seuil basés sur MAB convergent vers des politiques sous-optimales. Si les périodes d'apprentissage étaient plus longues, on aurait observé un comportement asymptotique comme c'est le cas pour les algorithmes basés sur l'UCB.

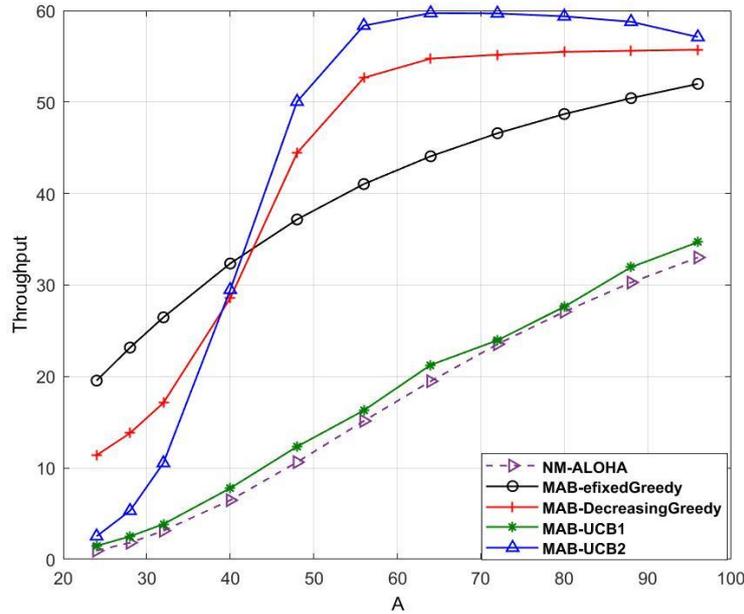


Figure 21 Débit en fonction du nombre de bras pour les différentes stratégies MAB par rapport au NM-ALOHA.

Considérons maintenant l'impact de la période d'entraînement sur les performances des algorithmes basés sur MAB. La Figure 22 illustre le débit de différents algorithmes MAB en fonction de la durée de la période d'entraînement. Nous avons considéré une probabilité d'accès $p_a = 0.1$ et $|A| = 24$ bras. Nous pouvons observer que NOMA-MAB-UCB1 est l'algorithme le plus rapide en termes de vitesse de convergence. En effet, il converge rapidement vers une valeur sous-optimale, comme il utilise une probabilité d'exploration très faible. Ainsi, les bras testés aléatoirement au début commencent à avoir une utilité plus importante qui leur permet d'être resélectionné dans les futurs intervalles de temps. A l'inverse, les techniques NOMA-MAB-UCB2 et ϵ – décroissant MAB-NOMA, illustré avec les courbes bleu et rouge dans Figure 22, utilise une probabilité d'exploration importante au début permettant d'explorer l'espace d'action, mais converge lentement. D'un autre côté, les techniques NOMA basées sur l'UCB, NOMA-MAB-UCB1 et NOMA-MAB-UCB2 ont convergé en moins de 60 intervalles de temps. En outre, comme dans le cas où les autres scénarios, les algorithmes MAB-UCB-2 et ϵ – décroissant MAB-NOMA permettent d'avoir des performances supérieures aux autres techniques.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que même avant de converger, les performances obtenues sont très intéressantes et justifient l'intérêt d'utiliser les techniques basées sur l'apprentissage pour l'allocation de ressources dans les réseaux NOMA. En effet, afin d'adresser les défis d'accès massif, il serait très difficile de justifier l'utilisation de technique classique, centralisé et « grant-based » pour les techniques NOMA.

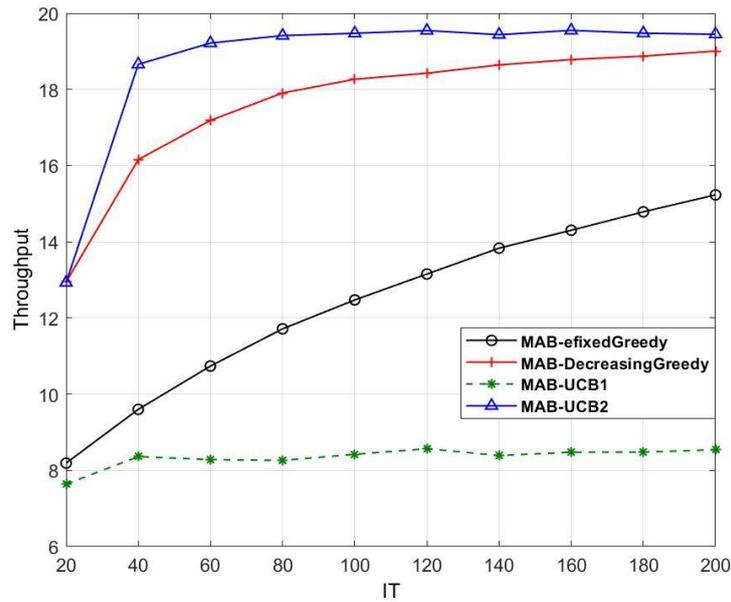


Figure 22 Débit des algorithmes basés sur MAB en fonction de la durée de la période d'apprentissage.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des techniques « grant-free » et « grant-based » d'allocation de ressources afin d'allouer conjointement les canaux et les niveaux de puissance de transmission dans les systèmes PD-NOMA en liaison montante. Ces techniques ont permis, entre autres, d'illustrer l'intérêt des algorithmes d'apprentissage dans l'allocation de ressources, particulièrement pour les réseaux très denses. Dans la première partie de ce chapitre, nous avons proposé une technique d'accès multiple non-orthogonal permettant à la station de base d'allouer un nombre important d'utilisateurs en utilisant le SIC pour séparer les signaux superposés. Ensuite, afin de permettre à la station de base de gérer plus d'utilisateurs, nous avons proposé une nouvelle approche basée sur l'apprentissage fédéré, dans laquelle la station de base et les utilisateurs collaborent pour estimer le modèle de trafic et atteindre une allocation massive. Ces techniques ont été prouvées efficace par rapport aux techniques de référence existant dans la littérature. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons considéré les algorithmes d'allocation de ressources totalement décentralisés, et nous avons développé quatre techniques d'apprentissage basées sur le MAB pour résoudre le problème conjoint de sélection de canal et de contrôle de puissance. Par ailleurs, nous avons étudié l'impact des paramètres d'exploration ainsi que la durée de la période d'entraînement sur la convergence des algorithmes proposés. Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser aux communications en liaisons descendantes et nous allons investiguer la problématique d'allocation de ressources pour les techniques NOMA.

Chapitre III. Allocation de ressources et de contrôle de puissance en liaison descendante pour les réseaux PD-NOMA

Les techniques NOMA pour les transmissions en liaison descendante ont été étudiées récemment en tant que technologie d'accès radio candidate pour les réseaux mobiles de prochaine génération. Par exemple, les auteurs de [45] se sont concentrés sur les problèmes d'allocation de puissance et de sélection d'ensembles d'utilisateurs dans les systèmes NOMA de liaison descendante dans le but de fournir une équité proportionnelle. La solution théorique d'allocation de puissance optimale pour un ensemble d'utilisateurs candidats est dérivée et un schéma de sélection d'ensembles d'utilisateurs a été également proposé. Les auteurs de [46] ont étudié la sélection des utilisateurs et l'allocation de puissance entre les utilisateurs pour un cadre PD-NOMA. Ils ont proposé une méthode de faible complexité pour la sélection des utilisateurs en supprimant les utilisateurs qui ne satisfont pas la condition dérivée. Une expression analytique pour une allocation de puissance optimale aux utilisateurs choisis est dérivée en maximisant le débit total pondéré des utilisateurs. Le papier [47] a étudié les performances au niveau du système de l'accès multiple non orthogonal en liaison descendante. Il a proposé un groupement d'utilisateurs prédéfini et une allocation de puissance fixe par groupe pour réduire le temps système associé à la signalisation d'allocation de puissance. Par ailleurs, [48] a étudié la distribution de puissance optimale qui garantit la QoS pour la maximisation pondérée du débit total dans les réseaux NOMA en liaison descendante. Il a proposé un algorithme d'allocation de puissance de faible complexité. Les auteurs de [49] ont considéré un système NOMA en liaison descendante et ont proposé un schéma de sélection d'utilisateurs et d'allocation de puissance pour réduire la latence de la couche physique et atteindre les débits de données cibles tout en maximisant le débit total. Le groupement d'utilisateurs en des clusters a été, tout comme pour le cas des liaisons montantes, très investigué pour les communications en liaison descendante. Par exemple, dans [50] les auteurs ont proposé un algorithme de groupement d'utilisateurs pour l'accès multiple non orthogonal prenant en compte la corrélation de canal entre les utilisateurs et le gain de canal. Ils ont investigué le cas particulier de groupement de deux utilisateurs dans un seul cluster pour desservir les utilisateurs de manière non orthogonale. Dans [51], les auteurs ont introduit une technique NOMA en liaison pour les réseaux IoT ont proposé un cadre coopératif dynamique contenant deux étapes. Lors de la première étape, le clustering dynamique des appareils IoT est résolu pour réduire la complexité du système et le délai pour les appareils IoT avec de meilleures conditions de canal. Lors de la deuxième étape, la gestion de l'énergie basée sur l'allocation de puissance est résolue à l'aide de la solution de négociation Nash dans chaque cluster pour garantir l'équité entre les appareils IoT. Les auteurs de [52] ont étudié l'optimisation du regroupement d'utilisateurs dans un scénario NOMA, avec comme objectif de maximiser le débit total du système sous des contraintes de débit minimal par utilisateur. Contrairement à la plupart des littératures existantes, les auteurs n'ont pas considéré de limite au nombre d'utilisateurs dans chaque cluster. Les résultats montrent que le schéma proposé peut réduire considérablement la complexité de calcul et avoir de bonnes performances.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la sélection conjointe des canaux et du contrôle de la puissance de transmission afin d'améliorer les performances du réseau en termes de débit utile et du nombre d'utilisateurs alloués dans les liaisons descendantes. Ainsi, nous

allons considérer un système NOMA en liaison descendante où les utilisateurs sont arrangés dans des clusters. La station de base superpose les messages des utilisateurs d'un même cluster ensemble, ils doivent appliquer le SIC pour les décoder. Par contre, les signaux de différents clusters sont transmis sur des sous-porteuses orthogonales, et du coup, il n'y a pas d'interférence inter-cluster. Ainsi, comme la station de base dispose d'un budget de puissance de transmission, nous allons investiguer tout d'abord la façon avec laquelle la station de base partage la puissance de transmission entre les différents clusters. Par la suite, nous allons étudier le groupement des utilisateurs en des clusters et nous proposons trois algorithmes de clustering. Une fois le clustering est effectué, nous allons nous focaliser sur l'allocation de puissance pour les utilisateurs au sein d'un même cluster. En effet, nous considérons un système basé sur une allocation aléatoire de puissance. Nous proposons cette approche dans l'objectif d'exploiter la faible complexité de l'allocation aléatoire et l'efficacité de la technique PD-NOMA avec le SIC pour améliorer l'efficacité spectrale et la gestion de l'interférence entre les utilisateurs. Spécifiquement, nous considérons des schémas d'allocation de puissance qui suivent une loi uniforme et une loi gaussienne. Ensuite, nous développons des études théoriques basées sur des modèles de Rayleigh et nous dérivons les expressions du débit utile et du taux d'erreur binaire. Finalement, nous évaluons les performances des modèles proposés avec des résultats de simulations.

III.1. Modèle de système

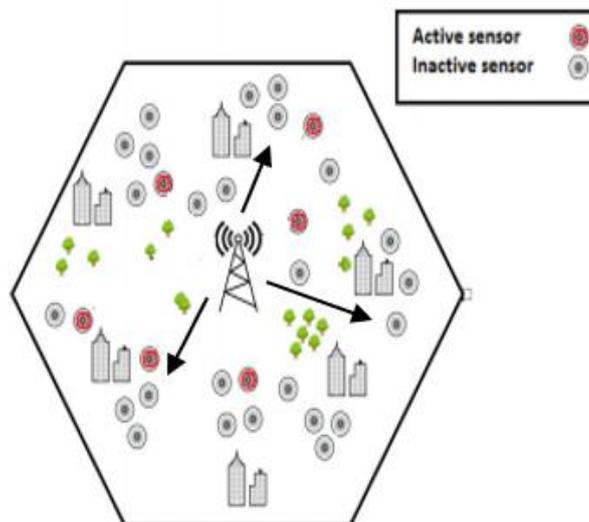


Figure 23 Transmission en liaison descendante dans une cellule contenant une station de base et plusieurs utilisateurs

Considérons un système NOMA en liaison descendante, illustré dans la Figure 23, composé de N MTDs et d'une station de base. Cette dernière est située au centre de la cellule et les MTDs sont uniformément répartis dans le disque de rayon r . Les MTDs sont déployés dans le disque de couverture de la station de base selon un processus de Poisson homogène Φ_M avec une densité λ_M . Nous supposons que la largeur de bande disponible est divisée en K sous-porteuses et que chaque sous-porteuse est divisée en W RBs de durée τ . La station de base envoie un signal par le biais du bloc de ressources j à un groupe d'utilisateurs, appelé cluster C_j . Par

conséquent, le signal reçu par le MTD m sur le $j^{\text{ième}}$ bloc de ressources peut être exprimé comme suit :

$$y_m = \sum_{\substack{i \in C_j \\ m \in C_j}} h_{j,m} \sqrt{P_{j,i}} s_{i,j} + n_j \quad (54)$$

où $P_{i,j}$ et $s_{i,j}$ représentent respectivement le niveau de puissance de transmission et l'information du signal du MTD i , par l'intermédiaire de la $j^{\text{ième}}$ sous-porteuse, et n_j est le bruit blanc additif gaussien. Nous désignons par $h_{j,m} = \langle h_{j,m} \rangle \tilde{h}_{j,m}$ la réponse du canal de la station de base à l'utilisateur i sur la $j^{\text{ième}}$ sous-porteuse, où $\langle h_{i,j} \rangle$ représente l'évanouissement à grande échelle et $\tilde{h}_{i,j}$ représente l'évanouissement à petite échelle. Nous supposons que $\tilde{h}_{j,m}$ est une variable aléatoire complexe qui suit une loi gaussienne avec une moyenne nulle et une variance égale à 0.5, de sorte que $|\tilde{h}_{j,m}|^2$ suit une loi exponentielle, c'est-à-dire, $\rho_{|\tilde{h}_{j,m}|^2}(x) = e^{-x}$ for $x > 0$.

III.2. Technique d'allocation de ressources et de contrôle de puissance de transmission pour les liaisons descendantes

Dans cette partie, nous nous intéressons aux techniques de sélection de canal de transmission afin d'améliorer les performances du système PD-NOMA en liaison descendante tout en étant peu complexe et très évolutif. L'objectif est de minimiser l'interférence entre les MTDs qui accèdent au spectre simultanément, à travers la sélection des canaux et le contrôle de puissance, pour permettre au récepteur de séparer les signaux en exploitant le SIC. Nous proposons ainsi une méthode de décodage SIC pour les MTDs dans le cas où les niveaux de puissances sont connus à l'avance.

III.2.1. Formulation du problème

Le problème conjoint de groupement d'utilisateurs et d'allocation de puissance pour la maximisation du débit dans la liaison descendante NOMA peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\beta, \alpha}{\text{maximiser}} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \log_2 \left(1 + \frac{\alpha_i P_{t_{C_j}} \gamma_{i,j}}{\gamma_{i,j} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{k,j} \alpha_k P_{t_{C_j}} + 1} \right) \\ \text{Sujet à : } & \mathbf{C1:} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \alpha_i P_{t_{C_j}} \leq P_T \\ & \mathbf{C2:} \sum_{j=1}^K \beta_{i,j} \log_2 \left(1 + \frac{\alpha_i P_{t_{C_j}} \gamma_{i,j}}{\gamma_{i,j} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{k,j} \alpha_k P_{t_{C_j}} + 1} \right) \geq R_{th}, \forall i \\ & \mathbf{C3:} \beta_{i,j} \in \{0,1\}, \forall i, j \end{aligned} \quad (55)$$

où N est le nombre total de MTDs dans chaque cluster, R_{th} représente le débit de données minimal requis et $\gamma_i = \frac{|h_{i,j}|^2}{\sigma}$ représente le gain de canal normalisé. Ce problème d'optimisation est soumis aux contraintes suivantes :

- **La contrainte C₁** représente la contrainte de budget total de puissance de la station de base.
- **La contrainte C₂** garantit les exigences minimales de débit de données en liaison descendante de chaque MTD.

- **La contrainte C₃** indique si l'utilisateur i est sélectionné dans le $j^{\text{ième}}$ cluster ou non. Il est à noter qu'un utilisateur peut être servi dans plusieurs clusters dans le même intervalle de temps afin qu'il puisse garantir ses exigences de QoS.

Nous supposons que la station de base alloue un budget de puissance de transmission maximal $P_{t_{C_j}}$ au cluster C_j . Par conséquent, la contrainte de puissance de transmission est exprimée comme suit :

$$P_{t_{C_j}} = \sum_{i \in C_j} \alpha_{i,j} P \quad (56)$$

$$P_i = \alpha_i P_{t_{C_j}} \quad (57)$$

$$P_T = \sum_{j=1}^K P_{t_{C_j}} \quad (58)$$

où P_T est le budget total de puissance de transmission de la station de base sur toutes les sous-porteuses. Nous supposons que la station de base est capable d'estimer les CSI de chaque MTD, en mode de duplexage par répartition dans le temps. En effet, nous supposons que chaque MTD envoie un signal pilote au début d'un intervalle de temps par le biais d'une ou plusieurs sous-porteuses pour synchroniser les transmissions en liaison descendante. Ces signaux pilotes peuvent être utilisés par la station de base pour estimer les CSI de chaque MTD. Par ailleurs, nous considérons que le MTD i reçoit les symboles transmis à tous les MTDs alloués dans le cluster C_j puis il exécute le SIC afin de séparer les signaux superposés. Par conséquent, nous nous intéressons principalement à la manière avec laquelle la station de base peut grouper les MTDs en différents clusters et au schéma d'allocation de puissances à chaque utilisateur. En effet, le groupement d'utilisateurs et les niveaux de puissance utilisés par ceux-ci sont déterminant dans le succès du SIC. Nous commençons tout d'abord par la répartition de puissance à un cluster d'utilisateurs dans la section suivante, et nous nous intéressons au groupement d'utilisateurs en des clusters dans la section d'après.

III.2.2. Allocation de puissance

Dans cette section, nous étudions la distribution du budget de puissance de transmission entre les clusters, et nous déterminons, dans les sections suivantes, les coefficients de puissance qui permettent aux utilisateurs d'atteindre le débit maximal. Il existe plusieurs façons d'allouer les puissances aux clusters. Par exemple, il serait intéressant d'allouer un budget de puissance aux clusters proportionnellement au nombre d'utilisateurs dans chaque cluster. Un partage équitable entre les clusters est envisageable également. Notez qu'idéalement, l'allocation de puissance aux différents clusters peut être obtenue en résolvant le problème d'optimisation introduit dans (55). Cependant, ce problème d'optimisation (55) étant très difficile à résoudre, plusieurs heuristiques plus simples ont été proposées. On distingue principalement deux approches :

- On effectue tout d'abord le groupement d'utilisateurs en des clusters, et par la suite, on partage le budget de puissance entre les clusters de sorte que le SIC puisse s'exécuter avec succès. Des algorithmes comme le water-filling ont été proposés pour ces approches. Notez que cette approche introduit implicitement un compromis puisqu'un cluster de grande taille risque de se voir alloué une puissance nulle comme le SIC ne peut pas s'exécuter avec succès de toutes façons.
- On partage le budget de puissance entre les clusters, de façon égale par exemple, et par la suite, on effectue le groupement des utilisateurs dans ces clusters tout en s'assurant que le SIC puisse s'exécuter avec succès avec ce budget de puissance de transmission. En effet, le budget de

puissance alloué au cluster conditionne implicitement le nombre maximal d'utilisateurs pouvant le rejoindre.

Nous supposons, dans cette partie, que la station de base alloue à tous les clusters un budget de puissance d'émission égal $P_{t_{C_j}}$ de façon équitable comme suit :

$$P_{t_{C_j}} = \frac{P_T}{K} \quad (59)$$

Dans la section suivante, nous allons considérer que le cluster C_j dispose d'un budget de puissance $P_{t_{C_j}}$ et nous investiguons comment les utilisateurs peuvent être affecté à ces clusters. Par la suite, nous allons étudier comment $P_{t_{C_j}}$ va être partagé entre les membres du cluster C_j .

III.2.3. Les algorithmes de regroupement des utilisateurs

Dans cette section, nous proposons des techniques de groupement d'utilisateurs à faible complexité pour les systèmes NOMA en liaison descendante. Les schémas proposés exploitent le gain du canal et les niveaux de puissance de transmission entre les utilisateurs afin de maximiser le débit total de données. Dans tous les schémas proposés, le nombre de clusters est fixe et est égal au nombre de sous-porteuses, puisque nous supposons qu'il n'y a pas d'interférence entre les clusters NOMA. Nous considérons que la BS estime les CSI de tous les utilisateurs qui lui envoient leurs pilotes. Nous considérons que C_{max} est la taille maximale de chaque cluster. La taille maximale d'un cluster est déterminée par la puissance de transmission totale allouée au cluster. Comme nous avons considéré dans la section précédente que le budget de puissance égal pour tous les clusters, la taille maximale est la même pour tous les clusters.

III.2.3.1. Algorithme FAF : Les utilisateurs éloignés en premier

Dans ce schéma, nous donnons la priorité aux utilisateurs ayant de mauvaises conditions de canal afin de leur permettre de choisir le meilleur cluster à rejoindre. En effet, le MTD qui a les meilleures conditions de canal sera le dernier à choisir un cluster à rejoindre. En effet, comme cet utilisateur est proche de la station de base, il pourrait transmettre même s'il va subir les interférences des utilisateurs lointains. En utilisant cet algorithme, nous visons à maximiser l'équité entre les utilisateurs en permettant aux MTDs qui sont éloignés de la station de base de transmettre leurs paquets comme les utilisateurs qui sont proches.

Notez qu'un utilisateur qui rejoint la station de base choisit également son ordre de décodage également, ainsi, les utilisateurs qui rejoignent le même cluster ultérieurement ne le gêneront pas comme ils doivent s'assurer que le SIC s'exécutera avec succès. En effet, nous considérons l'allocation de puissance, introduite dans [34], ou le coefficient de puissance α_i pour l'utilisateur ayant un ordre de décodage i dans un groupe de m utilisateurs est donné par l'expression suivante :

$$P_i \leq \frac{P_{t_{C_j}}}{2^{m-1}} \quad (60)$$

En effet, dans la liaison descendante en PD-NOMA, nous attribuons la puissance de transmission maximale à l'utilisateur ayant le meilleur canal. Dans le cas d'un cluster avec deux utilisateurs où $\gamma_2 < \gamma_1$, nous avons :

$$P_2 \leq \frac{P_{t_{C_j}} - \delta}{2} \quad (61)$$

avec $\delta = \frac{P_{tol}}{\gamma_1}$ est la différence minimale nécessaire pour le bon fonctionnement du SIC. Notez qu'une nouvelle procédure d'allocation de puissance aléatoire sera présentée dans la dernière partie de ce chapitre afin de réduire davantage la complexité au niveau de la station de base.

Algorithme 8 Far users First (FAF)

- Initialisation : $CL = 0_{c_{max} \times K}$
- Chaque utilisateur envoie son CSI à la station de base.
- La station de base trie les coefficients de canal des utilisateurs par ordre décroissant en fonction de leurs sous-porteuses, obtenant ainsi un vecteur des éléments triés $V_{N \times K}$ et un vecteur de l'arrangement de ces éléments $I_{N \times K}$

```

pour j = 1 : K faire
    pour m = 1 : N faire
        Trouvez m correspondant à  $\min(V_{(:,j)})$ 
         $CL(j, :) = CL(j, :) \cup \{I_{(j,m)}\}$ 
        Calculer  $P(CL(j, :))$  en utilisant (61)
        si  $SIC(CL(j, :)) = 0$ 
             $CL(j, :) = CL(j, :) \setminus \{I_{(j,m)}\}$ 
        fin
    fin
fin

```

L'algorithme 8 propose un groupement des MTDs peu complexe. Tout d'abord, la station de base trie les gains des canaux des utilisateurs par ordre décroissant en fonction de leurs sous-porteuses, ce qui permet d'obtenir un vecteur des MTDs triés, les éléments $V_{N \times K}$ et le vecteur de disposition de ces éléments $I_{N \times K}$. Par la suite, la BS recherche le MTD m correspondant à la valeur minimale de $V(:, j)$. Dans l'étape suivante, la station de base ajoute le MTD m dans le cluster j , calcule le niveau de puissance d'émission de tous les MTD dans ce cluster en respectant l'équation (61) présentée en III.2.2, puis vérifie si le SIC peut encore s'exécuter avec succès ou pas. Si le SIC est exécuté correctement, la BS rajoute définitivement le MTD m dans sa table d'allocation, sinon elle le retire du cluster j . Ce processus sera appliqué à tous les clusters afin de maximiser le débit de données.

III.2.3.2. Algorithme RBC : Allocation basée sur la maximisation du débit

Nous continuons dans la philosophie d'optimiser l'équité entre les utilisateurs en essayant de donner un avantage aux utilisateurs éloignés, mais cette fois-ci, en essayant de maximiser leur débit attendu, même si cela ne correspond pas à leur meilleur canal, qui peut être déjà surchargé. Ainsi, nous proposons, dans cette section, un deuxième schéma de groupement d'utilisateurs qui se base sur le débit de données attendu. Cette approche est détaillée dans Algorithme 9. Tout d'abord, la BS trie les coefficients des canaux des utilisateurs en fonction des sous-porteuses dans un ordre descendant, obtenant un vecteur d'éléments triés $V_{N \times K}$ et un vecteur d'arrangement de ces éléments $I_{N \times K}$. Ensuite, pour chaque cluster, la station de base sélectionne le premier élément, i.e. l'utilisateur le plus éloigné, dans le vecteur des utilisateurs en attente, et évalue son débit de données attendu dans chaque cluster. Par la suite, la BS affecte cet utilisateur au cluster qui maximise son utilité. Enfin, cet utilisateur est supprimé du vecteur d'utilisateurs en attente dans tous les autres clusters.

Algorithme 9 Rate-based clustering (RBC)

- Initialisation : La station de base initialise la table d'allocation CL comme suit $0_{C_{max} \times K}$ où C_{max} est la taille maximale du cluster
- Chaque utilisateur envoie son CSI à la station de base.
- BS trie les coefficients de canal d'utilisateur selon les sous-porteuses dans un ordre décroissant obtenant un vecteur des éléments triés V_{NxK} et un vecteur de l'arrangement de ces éléments I_{NxK}

```
pour i=1 : N faire
  pour j=1 : K faire
    R = {}
    pour m=1 : K faire
       $V_{pos}(m) = \text{trouver}(I(:, m) = I(i, j))$ 
       $CL_{tmp}(m, :) = CL(m, :) \cup I(V_{pos}(m), m)$ 
      Calculer  $P(CL_{tmp}(m, :), m)$  en utilisant (61)
      Calculer  $R(CL_{tmp}(m, V_{pos}(m)), m)$ 
    fin
     $CL(\text{argmax}(R), :) = CL(\text{argmax}(R), :) \cup I(i, j)$ 
    si  $(SIC(CL(i, :))=0)$  alors
      pour m=1 : K faire
         $I(V_{pos}(m), m) = 0$ 
         $V(V_{pos}(m), m) = 0$ 
      fin
    sinon
       $CL(\text{argmax}(R), :) = CL(\text{argmax}(R), :) \setminus I(i, j)$ 
       $V(I(i, j), \text{argmax}(R)) = 0$ 
    fin
  fin
fin
```

L'inconvénient principal avec les approches FAF et RBC est que dans le cas d'un réseau très dense, avec beaucoup d'utilisateurs éloignés de la station de base, cette approche risque de n'allouer que d'utilisateurs ayant des faibles conditions de canaux, les utilisateurs proches de la BS trouveront les clusters surchargés quand leur tour arrivera, ce qui résulte dans un débit total sous-optimal.

III.2.3.3. Algorithme RC : Allocation aléatoire d'utilisateurs

Dans cette section, nous considérons une politique aléatoire de groupement d'utilisateurs qui est à la fois de faible complexité, et permet de s'assurer que le SIC pourra s'exécuter avec succès. Notez bien que cette technique est très adaptée aux réseaux extrêmement denses, ou les approches proposées dans les sections précédentes peuvent être coûteuses au niveau de la station de base. Ainsi, nous proposons un troisième algorithme de groupement d'utilisateurs se basant sur une approche aléatoire résultant en une moindre complexité au niveau de la station de base. Cette technique est détaillée dans Algorithme 10. En effet, la station de base choisit un utilisateur au hasard. Ensuite, elle sélectionne la sous-porteuse qui correspond au meilleur canal de ce dernier et évalue son débit de données attendu. La station de base alloue cet utilisateur à ce cluster si le SIC est réussi, sinon elle évalue la deuxième meilleure sous-porteuse et ainsi de suite. Ce processus sera appliqué à tous les utilisateurs et à toutes les sous-porteuses afin de maximiser le débit de données, tant qu'il y a encore de la place dans les différents clusters. En effet, la sélection des utilisateurs étant faite d'une manière aléatoire, cet algorithme est caractérisé d'une complexité extrêmement faible, tout en étant capable de maîtriser les interférences et garantir que le SIC puisse s'exécuter avec succès.

Algorithme 10 Random Clustering (RC)

-Initialisation : La station de base initialise la table d'allocation CL comme suit $0_{(C_{max} \times K)}$ où C_{max} est la taille maximale du cluster.

-Chaque utilisateur envoie son CSI à la station de base.

```
pour i=1 : N faire
  m=rand(N)
  pour j=1 : K faire
    Trouver sc correspondant à max (H (m, :))
    l (m, sc) =Index (H (m, sc))
    CL (sc, :) = CL (sc, :) U {l (m, sc)}
    Calculer P (CL (sc, :)) en utilisant (61)
    si (SIC (CL (sc, :))) =0
      CL (sc, :) = CL (sc, :) \ l (m, sc)
    fin
  fin
fin
```

Une fois qu'on a étudié la formation des clusters et l'allocation de puissance pour les utilisateurs y appartenant, on s'intéressera dans la section qui suit au décodage des messages superposés par les utilisateurs en utilisant le SIC.

III.2.4. Décodeur SIC au niveau de MTD

Dans cette section, nous étudions le décodage SIC du côté des MTDs et nous supposons qu'un utilisateur alloué reçoit de la station de base un symbole superposé contenant les symboles de tous les utilisateurs du cluster auquel il appartient :

$$y_m = \sum_{i=1}^M h_m \sqrt{P_i} S_i + n_i \quad (62)$$

Nous considérons que chaque utilisateur est capable de déterminer tous les coefficients de puissance selon l'équation (61) présentée en III.2.2. Par ailleurs, nous supposons que chaque trame contient une en-tête qui aide les MTDs à identifier leurs trames. La méthode de décodage proposée est décrite dans Algorithme 11. Tout d'abord, l'utilisateur m suppose qu'il n'y a qu'un seul utilisateur dans ce cluster, puis détermine le niveau de puissance correspondant et effectue le maximum de vraisemblance (décision difficile) pour décoder la trame et vérifier l'en-tête. Si ce n'est pas son paquet, il suppose qu'il y a 2 MTDs dans le cluster et détermine leurs niveaux de puissance de transmission et essaie de décoder et ainsi de suite. Notez que de son côté, la station de base commence avec le niveau de puissance le plus fort, elle décode la trame et vérifie l'en-tête. Si l'opération s'est déroulée avec succès, elle le soustrait de Y_m et décode le signal avec le niveau de puissance le plus faible jusqu'à ce que tous les messages soient décodés. Notez bien qu'avec cette approche, sans rendre la complexité très élevée, nous pourrions réduire les échanges de signalisation entre la station de base et les utilisateurs qui n'ont pas besoin de savoir ni combien d'utilisateurs partagent le cluster avec lui, ni les informations correspondant à ces utilisateurs. En effet, avec un nombre important d'utilisateurs, réduire le trafic de signalisation réduit largement la complexité au niveau de la station de base et évite le gaspillage inutile des ressources réseau.

Algorithme 11 Décodeur SIC

Entrée : Y_m , C (Constellation QPSK)Sortie : Y_{MLH} , Decoding_Phase

Phase de décodage=FALSE

Contrôle=0

```
pour p=1 :  $C_{max}$  faire
     $Y_{MLH}=\{\}$ 
     $Y_{R1} = Y_m$ 
    Obtenez  $\alpha_p$  selon (61)
     $P = \alpha_p P_t$ 
    pour k=1 : longueur(P) faire
        pour j=1 : longueur(paquet) faire
             $|Val_{min}, Index_{min}| = \left\| \min(Y_{R1}(j)\sqrt{P(p-k+1)}H(M)C) \right\|^2$ 
             $Y_{MLH}(j) = C(Index_{min})$ 
        fin
        [check]=check_Header( $Y_{MLH}$ )
         $Y_{R1} = Y_{R1} - Y_{MLH}\sqrt{P(p-k+1)}H(M)$ 
        si (check==1)
            Phase de décodage =TRUE
            rupture
        fin
    fin
fin
```

Dans cette partie, nous avons proposé des techniques de faible complexité afin d'effectuer une allocation conjointe de clusters et de puissances pour les MTDs dans un système NOMA en liaison descendante. Bien en étant de faible complexité, les algorithmes proposés dans cette section nécessitent un trafic de signalisation non négligeable et une complexité qui augmente avec le nombre d'utilisateurs dans le système. Le déploiement massif de l'IoT qui a commencé avec la 5G et qui devrait s'intensifier avec les prochaines générations, rendra rapidement ces approches obsolètes face au trafic et au nombre d'objets attendus. C'est ainsi qu'on s'intéressera, dans la section suivante, à l'étude de l'allocation aléatoire des puissances dans les systèmes IoT.

III.3. Politiques d'allocation de puissance aléatoires dans les systèmes IoT en liaison descendante

Une fois que nous avons arrangé nos utilisateurs dans des clusters, et que nous avons partagé le budget de puissance de transmission de la station de base entre ces clusters, nous focalisons dans cette section au partage de ce budget de puissance entre les utilisateurs qui partagent ce cluster. Ainsi, dans cette partie, nous investiguons la technique NOMA dans le domaine de puissance pour les transmissions en liaison descendante, et nous considérons une politique d'allocation de ressources basée sur des techniques aléatoires. En effet, l'objectif de cette partie est d'exploiter la faible complexité des techniques aléatoire avec l'efficacité spectrale qu'offre NOMA dans le domaine de puissance avec SIC. Plus spécifiquement, nous proposons dans cette partie une technique d'allocation aléatoire de puissance basée sur la densité de probabilité afin d'améliorer la capacité de notre système. Au cours des dernières années, plusieurs études théoriques basées sur des modèles mathématiques ont été proposées pour modéliser un canal Rayleigh avec des lois de probabilité qui contrôlent l'allocation de puissance et qui déterminent les expressions du débit moyen utile et du TEB.

Considérons un réseau IoT très dense dans lequel les utilisateurs sont déjà arrangés en des clusters. Nous considérons que la station de base alloue les puissances de transmission pour les utilisateurs en utilisant des distributions de probabilité et nous dérivons les expressions du taux

d'erreur binaire ainsi que le débit moyen attendu. Par ailleurs, nous nous limiterons dans cette étude au cas d'un cluster composé d'au plus trois MTDs. Ainsi, il y'a trois cas possibles : le cas d'un seul MTD ayant un paquet à recevoir de la BS, les cas de deux ou trois MTDs à qui la BS transmet des paquets superposés au sein du même cluster. En considérant la liaison descendante, le signal reçu au niveau du 1er MTD peut s'écrire comme une superposition de 3 paquets comme suit :

$$y = \langle h_1 \rangle \tilde{h}_1 [\sqrt{P_1} s_1 + \sqrt{P_2} s_2 + \sqrt{P_3} s_3] + n \quad (63)$$

Dans ce scénario, nous supposons que les évanouissements à grande échelle sont connus par

les MTDs. Remplaçons les coefficients de puissance $\sqrt{P_i}$ $i = 1, 2, \dots, n$, par : $\sqrt{P_i} = \frac{\sqrt{P'_i}}{\langle h_1 \rangle}$, le signal reçu peut alors être exprimé comme suit :

$$y = \tilde{h}_1 [\sqrt{P'_1} s_1 + \sqrt{P'_2} s_2 + \sqrt{P'_3} s_3] + n \quad (64)$$

Ainsi, le SINR de l'utilisateur d'intérêt (MTD 1) peut s'écrire sous la forme :

$$\text{SINR}_1 = \frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_s}{|\tilde{h}_1|^2 (P'_2 + P'_3) E_s + N_0}, \quad (65)$$

avec $E_s = \mathbb{E}[|s_i|^2]$ représente l'énergie moyenne par symbole transmis. Afin de pouvoir décoder correctement le signal de l'utilisateur 1, nous devons respecter la condition de Shannon, à savoir :

$$\log_2(1 + \text{SINR}_1) \geq \delta, \quad (66)$$

ce qui conduit à :

$$\text{SINR}_1 \geq 2^\delta - 1 = \gamma \quad (67)$$

Concernant le choix de l'allocation des puissances au niveau de la BS, nous allons étudier deux alternatives. La première consiste à utiliser pour chaque P'_i une loi uniforme sur l'intervalle $[P_{\min}, P_{\max}]$ et la seconde consiste à utiliser pour chaque P'_i une loi Gaussienne de moyenne P_0 et de variance σ_p^2 . Notez bien que la valeur de P_{\max} est définie selon le budget de puissance alloué au cluster pour lequel la station de base est en train d'allouer les puissances de transmission.

III.3.1.1. P'_i suit une loi uniforme sur l'intervalle $[P_{\min}, P_{\max}]$

Pour des fins de présentation, nous posons : $a = P_{\min}, b = P_{\max}$. Nous essayons de déterminer la loi de la VAR : $P'_2 + P'_3 + \dots + P'_n$. Commençons par le cas de deux utilisateurs dans le cluster, avec deux puissances de transmission, soit :

$$Z = P'_2 + P'_3 \quad (68)$$

Comme les deux VARs P'_2 et P'_3 sont indépendantes, la loi de la VAR Z est le produit de convolution des PDFs de P'_2 et P'_3 . On obtient donc :

$$g_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{P'_2}(u) f_{P'_3}(x-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{P'}(u) f_{P'}(x-u) du \quad (69)$$

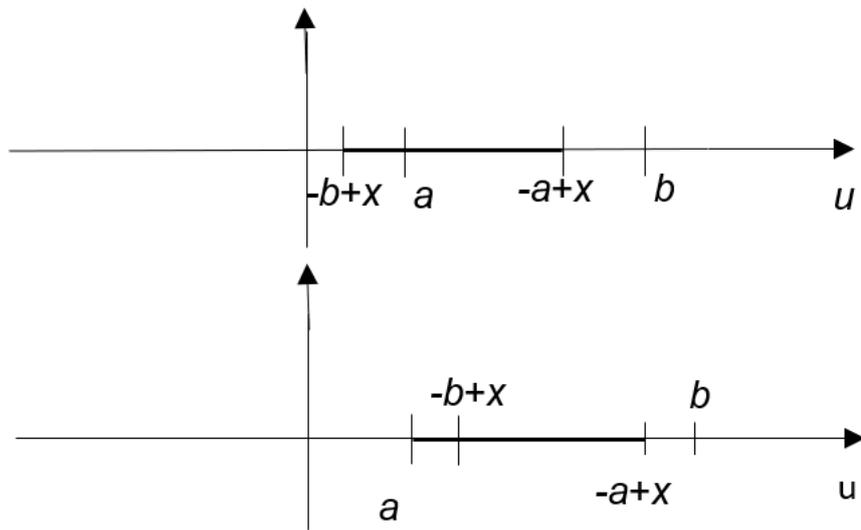
avec :

$$f_p(u) = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} = \frac{1}{b-a} \text{ si } u \in [a, b] \quad (70)$$

$$f_p(u) = 0 \text{ ailleurs}$$

Nous avons ainsi deux possibilités :

- le produit $f_p(u)f_p(x-u)$ est non nul pour $u \in [a, -a+x]$ avec $-a+x \leq b$ et $a \leq -a+x$, soit encore : $2a \leq x \leq a+b$.
- le produit $f_p(u)f_p(x-u)$ est non nul pour $u \in [-b+x, b]$ avec $a \leq -b+x$ et $-b+x \leq b$, soit encore : $a+b \leq x \leq 2b$.



Nous obtenons donc finalement l'expression suivante de $g_Z(x)$:

1- Pour $2a \leq x \leq a+b$

$$g_Z(x) = \int_a^{-a+x} \frac{1}{(b-a)^2} du = \frac{x-2a}{(b-a)^2} \quad (71)$$

2- Pour $a+b \leq x \leq 2b$

$$g_Z(x) = \int_{-b+x}^b \frac{1}{(b-a)^2} du = \frac{2b-x}{(b-a)^2} \quad (72)$$

3- Pour $x < 2a$ et $x > 2b$, $g_Z(x) = 0$

III.3.1.2. P_i' suit une loi gaussienne de moyenne P_0 et de variance σ_p^2

Dans le cas où les puissances de transmission choisies au niveau de la station de base, notées P_i' , suivent une distribution gaussienne, la VAR $Z = P_2' + P_3'$ suit également une distribution gaussienne de moyenne $2m$ et de variance $\sigma' = \sqrt{2}\sigma$, on obtient donc par moyenne sur la PDF de $P_2' + P_3'$:

$$g_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-2m)^2}{4\sigma^2}} du \quad (73)$$

III.3.2. Analyse du taux d'erreur binaire TEB moyen

Dans cette partie, nous analysons les performances du système d'allocation de puissance aléatoire pour des clusters opérant avec la technique PD-NOMA en termes de taux d'erreur moyen en utilisant des allocations de puissance basées sur une loi uniforme et une loi gaussienne. À cette fin, nous déterminons tout d'abord les expressions du taux d'erreur dans le cas où la BS décide de transmettre un seul paquet (c'est-à-dire ne pas utiliser NOMA). Ensuite, nous considérons que la station de base envoie deux paquets dans un cluster d'utilisateurs, et ensuite trois paquets superposés. Par la suite, nous déduisons la probabilité moyenne d'erreur en pondérant chacune des probabilités ci-dessus :

- P_1 : la probabilité de transmission d'un seul paquet dans un cluster.
- P_2 : la probabilité de transmission de deux paquets superposés dans un cluster.
- P_3 : la probabilité de transmission de trois paquets superposés dans un cluster.

Dans le cas de transmission de deux paquets superposés, la probabilité $P_{e,2}(s_2)$ concerne la probabilité d'erreur du paquet ayant la plus forte puissance. Il reste alors un paquet à décoder, après soustraction du message de l'utilisateur avec la puissance la plus forte, pour lequel il faut lui appliquer la probabilité d'erreur $P_{e,1}(s_1)$. Nous pouvons refaire le même raisonnement avec la transmission de trois-quatre paquets superposés, etc. Nous obtiendrons ainsi (dans le cas d'un maximum de transmission trois paquets superposés) :

$$P_e = P_3(P_{e,3}(s_3) + [1 - P_{e,3}(s_3)]P_{e,2}(s_2) + [1 - P_{e,3}(s_3)][1 - P_{e,2}(s_2)]P_{e,1}(s_1)) \\ \dots + P_2(P_{e,2}(s_2) + [1 - P_{e,2}(s_2)]P_{e,1}(s_1)) + P_1P_{e,1}(s_1) \quad (74)$$

Nous allons investiguer dans la section suivante les probabilités d'avoir au plus un paquet par cluster, puis les probabilités d'avoir au plus deux paquets et enfin trois. Par la suite, nous allons focaliser sur les probabilités d'erreur $P_{e,1}(s_1)$, $P_{e,2}(s_2)$ et $P_{e,3}(s_3)$.

III.3.2.1. Probabilités d'avoir un, deux et trois MTDs par cluster

Pour calculer les probabilités P_1 , P_2 et P_3 , nous considérons un modèle de trafic modélisé par une probabilité d'activité p_a . En effet, nous supposons que la BS reçoit un paquet pour un MTD donné avec une probabilité de p_a . Ainsi, le nombre de MTDs actifs, i.e. pour lesquels la BS a des paquets à transmettre pendant l'intervalle de temps actuel, est représenté par N , avec $\mathbb{E}[M] = Bp_a$ et $\mathbb{E}[N] = \frac{Bp_a}{K}$. Pour un nombre élevé de MTDs, nous pouvons utiliser une loi de Poisson pour la variable aléatoire N qui s'écrit sous la forme :

$$N \sim p_\lambda(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (75)$$

où λ désigne l'intensité moyenne du trafic ou le nombre de MTDs sélectionnés par la BS par unité de temps. Nous avons : $\lambda = \mathbb{E}[N] = \frac{\mathbb{E}[M]}{K} = \frac{Bp_a}{K}$.

B : Nombre total des utilisateurs

N : Nombre des utilisateurs actifs par sous-canal

M : Nombre des utilisateurs actifs

Tout d'abord, nous calculons la probabilité que la BS transmette au plus un seul paquet par cluster, i.e. P_1 :

$$P_1 = \sum_{i=0}^K p_a^i (1 - p_a)^{M-i} \quad (76)$$

En effet, la BS attribue une sous-porteuse pour un paquet d'un seul MTD si le nombre de MTD actif dans chaque cluster égal au nombre de sous-porteuses disponibles qui est égal K. Par analogie, nous pouvons en déduire ainsi la probabilité que la station de base transmette jusqu'à deux paquets par sous-porteuse, i.e. P_2 :

$$P_2 = \sum_{i=0}^{2K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i} \quad (77)$$

En effet, la BS attribue au plus deux paquets de deux MTDs à une sous-porteuse si le nombre de paquets à transmettre peut être supérieur au nombre de sous-porteuses, mais inférieur à deux fois le nombre de sous-porteuses. Finalement, en suivant le même raisonnement, la probabilité de transmission d'au plus trois paquets superposés par sous-porteuse est :

$$P_3 = \sum_{i=0}^{3K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i} \quad (78)$$

A partir de là, nous pouvons calculer :

$$\bar{P}_1 = \mathbb{E}[P_1] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^K p_a^i (1 - p_a)^{M-i}\right] \quad (79)$$

Lorsque la BS transmet jusqu'à deux paquets superposés, la quantité \bar{P}_2 doit être évaluée :

$$\bar{P}_2 = \mathbb{E}[P_2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{2K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i}\right] \quad (80)$$

Et nous trouverions la même chose pour le cas où la BS transmet jusqu'à trois paquets superposés :

$$\bar{P}_3 = \mathbb{E}[P_3] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{3K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i}\right] \quad (81)$$

Après avoir exprimé P_1 , P_2 et P_3 , dans section suivante, nous allons déterminer les expressions des probabilités $P_{e,1}$, $P_{e,2}$ et $P_{e,3}$.

III.3.2.2. Probabilité d'erreur dans le cas d'un seul paquet transmis dans le cluster

Dans cette sous-partie, nous dérivons l'expression du taux d'erreur dans le cas d'un cluster contenant un seul utilisateur. Le signal reçu par le MTD est alors :

$$y = \tilde{h}_1 \sqrt{P'_1} s_1 + n \quad (82)$$

Nous pouvons en déduire le taux d'erreur avec un seul paquet, c'est-à-dire la réception du paquet sans collision :

$$P_{e,1}(s_1 | |\tilde{h}_1|^2 P'_1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{N_0}} \right) \quad (83)$$

Supposons que nous sommes dans le cas particulier de la modulation NRZ 2-PSK où $E_s = E_b$. Pour avoir la probabilité d'erreur complète, nous faisons la moyenne de la fonction de densité de $|\tilde{h}_1|^2 P'_1$, on obtient :

$$P_{e,1}(s_1) = \frac{1}{2} \int \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) g_{|\tilde{h}_1|^2 P'_1}(x) dx \quad (84)$$

En notant que la densité de probabilité de P'_1 dépend d'abord de la loi uniforme puis de la loi gaussienne, l'objectif de cette partie est d'avoir accès à la loi de la variable $|\tilde{h}_1|^2 P'_1$.

III.3.2.2.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme

Nous parcourons la fonction de distribution en utilisant les probabilités conditionnelles. Nous pouvons en déduire que :

$$F(X|P'_1) = \text{Proba}(|\tilde{h}_1|^2 P'_1 \leq X|P'_1) = \text{Proba}(|\tilde{h}_1|^2 \leq X/P'_1|P'_1) = \int_0^{X/P'_1} e^{-u} du \quad (85)$$

et on obtient :

$$F(X|P'_1) = [-e^{-u}]_0^{X/P'_1} = 1 - e^{-X/P'_1} \quad (86)$$

Dans les parties suivantes, nous allons dériver $P_{e,1}$ en calculant d'abord dans le cas où la densité de probabilité de P'_1 dépend de la loi uniforme. Nous commençons par faire une moyenne sur la densité de probabilité de P'_1 :

$$F(X) = \text{Proba}(|h|^2 \leq X/P'_1) = \int (1 - e^{-X/u}) p_p(u) du$$

$$F(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (1 - e^{-X/u}) du = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-X/u} du \quad (87)$$

Où $a = P_{min}$ et $b = P_{max}$.

Ainsi, nous obtenons la CDF de notre canal modulé la fonction de densité de puissance basée sur la loi uniforme :

$$F(X) = 1 - \frac{b}{b-a} e^{-X/b} + \frac{a}{b-a} e^{-X/a} + \frac{X}{b-a} [EI_1(X/b) - EI_1(X/a)] \quad (88)$$

où $EI_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La PDF $g_{|\tilde{h}_1|^2 P'_1}$ est obtenu par dérivation et $F(X)$ nous obtenons :

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \frac{1}{b-a} [EI_1(X/b) - EI_1(X/a)] \quad (89)$$

Nous pouvons ainsi calculer l'expression de $P_{e,1}$ en utilisant (89), ce qui nous donne :

$$P_{e,1} = \frac{1}{2(b-a)} \int_0^{+\infty} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) [EI_1(x/b) - EI_1(x/a)] dx \quad (90)$$

Preuve en Annexe 1

$$P_{e,1}(s_1) \approx \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)} \left[\frac{\ln(b/a)}{4(b-a)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} k k! (k+1)!} \left[\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k} \right] \right] \quad (91)$$

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} J_k}{k k!} \left[\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k} \right]$ converge absolument si le rapport d'Alembert est inférieur à

1. Nous avons donc :

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{J_{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \left[\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}} \right] \frac{nn!}{J_n \left[\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right]} \quad (92)$$

$$\rho_n = \left(\frac{N_0}{E_b} \right) \frac{n(2n+3)(2n+4)}{4(n+1)^3} \frac{1}{a} \frac{1 - \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}}{1 - \frac{a^n}{b^n}} \quad (93)$$

On peut facilement en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = \frac{1}{a(E_b/N_0)}$. La condition de convergence absolue s'écrit donc comme suit : $\frac{1}{a(E_b/N_0)} < 1$, ou bien : $a > \frac{1}{E_b/N_0}$.

III.3.2.2.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne

En suivant la même logique, nous pouvons avoir accès à la loi de la variable : $|\tilde{h}_1|^2 P'_1$. Cela se fait par l'intermédiaire de la fonction de distribution en utilisant les probabilités conditionnelles en utilisant la distribution gaussienne :

$$F(X \mid |\tilde{h}_1|^2) = \text{Proba}(|\tilde{h}_1|^2 P'_1 \leq X \mid P'_1) = \text{Proba}(P'_1 \leq X/|\tilde{h}_1|^2 \mid |\tilde{h}_1|^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{X/|\tilde{h}_1|^2} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du \quad (94)$$

La PDF de la réponse du canal modulé par la distribution de puissance basée sur la loi gaussienne est détaillée dans Annexe 1, et peut s'exprimer comme suit :

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^{+\infty} e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du \right] \quad (95)$$

$$f(X) = f_1(X) + f_2(X)$$

où

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m}{\sigma} \right)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{X^k}{m^k} I_k(a) \right] \quad (96)$$

et

$$f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} X^n J_{n+1,a}(X) \quad (97)$$

$$J_{n,a}(X) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma(n-1)} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{a^{n-1} X^{n-1}} - \frac{1}{\sigma^2(n-1)} J_{n-2,a}(X) + \frac{m}{\sigma^2(n-1)} J_{n-1,a}(X) \quad (98)$$

Nous pouvons ainsi déduire du taux d'erreur avec un seul paquet, c'est-à-dire sans collision en faisant la moyenne de la distribution $|\tilde{h}_1|^2 P'_1$. Nous obtenons :

$$P_{e,1}(s_1 \mid |\tilde{h}_1|^2 P'_1) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{N_0}} \right) \quad (99)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & P_{e,1}(s_1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{1/a}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx \right] \frac{e^{-u}}{u} \\ & \quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) e^{-(xu-m)^2/2\sigma^2} dx \right] \frac{e^{-1/u}}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \left(P_{e,1}^{(1)}(a_n) + P_{e,1}^{(2)}(a_n) \right) \end{aligned} \quad (100)$$

$P_{e,1}^{(1)}$ est donné comme suit :

$$P_{e,1}^{(1)}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{m^k \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k}(2n+1-k)!(k!)^2} I_{k-1}(a) \quad (101)$$

Concernant $P_{e,1}^{(2)}$, nous obtenons :

$$P_{e,1}^{(2)}(s_1) \geq \frac{a(1-e^{-1/a})}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \quad (102)$$

Les dérivations de $P_{e,1}^{(1)}(s_1)$ et de $P_{e,1}^{(2)}(s_1)$ sont présentées dans l'Annexe 1

III.3.2.3. Probabilité d'erreur dans le cas de transmission de deux paquets

Dans cette sous-partie, nous étudions le taux d'erreur dans le cas de deux utilisateurs dans le même cluster. Le signal reçu est donc :

$$y = \tilde{h}_1[\sqrt{P'_1}s_1 + \sqrt{P'_2}s_2] + n \quad (103)$$

Ainsi, nous détectons l'utilisateur avec un niveau de puissance plus élevé si la condition exprimée ci-dessous est satisfaite :

$$\log_2\left(1 + \frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{|\tilde{h}_1|^2 P'_2 E_b + N_0}\right) \geq \delta \quad (104)$$

Avec en δ bits par seconde et par hertz, qui s'écrit comme suit :

$$\frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{|\tilde{h}_1|^2 P'_2 E_b + N_0} \geq 2^\delta - 1 = \gamma \quad (105)$$

Sur la base de (56), la probabilité d'erreur dans la fonction $P_{e,2}(s_2|P'_1, P'_2, |\tilde{h}_1|^2)$ est définie comme suit :

$$P_{e,2}(s_2|P'_1, P'_2, |\tilde{h}_1|^2) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{P'_1 |\tilde{h}_1|^2 E_b}{P'_2 |\tilde{h}_1|^2 E_b + N_0}}\right) \quad (106)$$

Pour simplifier les calculs, nous ferons l'hypothèse que le système est limité avant tout par les interférences et nous négligerons donc l'influence du bruit thermique, nous arrivons alors à la condition:

$$\frac{P'_1}{P'_2} \geq \gamma \Rightarrow P'_1 \geq \gamma P'_2 \quad (107)$$

Le graphique ci-dessous montre la zone d'intégration

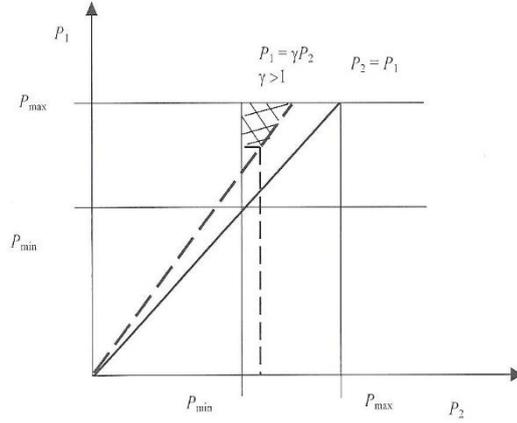


Figure 24 La zone d'intégration avec $\gamma \geq 1$

Nous pouvons remarquer que le domaine d'intégration n'est pas vide si et seulement si :

$P_{\max} \geq \gamma P_{\min}$, ou sinon $\frac{P_{\min}}{P_{\max}} \leq 1/\gamma$, ce qui donne :

$$P_{e,2}(s_2|P'_1, P'_2) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P'_1 E_b}{P'_2 E_b}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P'_1}{P'_2}}\right) \quad (108)$$

III.3.2.3.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme

Dans cette partie, nous dérivons l'expression de $P_{e,2}$ en faisant d'abord la moyenne sur la distribution de P'_1 :

$$P_{e,2}(s_2|P'_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} \int_{\gamma P'_2}^b \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{P'_2}}\right) dx \quad (109)$$

Il reste à faire la moyenne de la distribution de P'_2 :

$$P_{e,2}(s_2) = \int P_{e,2}(a_n|P'_2) f(P'_2) dP'_2 \quad (110)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{e,2}(s_2) &= -\frac{1}{8(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - x^2 \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] \\ &\dots + \frac{1}{2(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - x \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] + \frac{1}{2(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] + \frac{1}{4\sqrt{\pi}(1-x)^2} [x^{3/2} e^{-1/x} - e^{-1}] \\ &\dots + \frac{1}{6\sqrt{\pi}(1-x)^2} [x e^{-1/x} - e^{-1}] + \frac{1}{3\sqrt{\pi}(1-x)^2} [\sqrt{x} e^{-1/x} - e^{-1}] + \frac{(1+x)}{4(1-x)} \left[\frac{\sqrt{\gamma} e^{-\gamma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \end{aligned} \quad (111)$$

La dérivation de $P_{e,2}(a_n|P'_2)$ et de $P_{e,2}$ est détaillée l'Annexe 2

III.3.2.3.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne

Avec la même démarche de la première partie, nous allons dériver l'expression de $P_{e,2}$ en faisant d'abord la moyenne de la densité de P'_1 en exploitant la loi gaussienne. Nous définissons donc l'expression de $P_{e,2}(a_n|P'_2)$ comme suit :

$$P_{e,2}(s_2|P'_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\gamma P'_2}^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{P'_2}}\right) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \quad (112)$$

Il reste alors à faire une moyenne sur la distribution de probabilité de P'_2 . La dérivation de $P_{e,2}(a_n|P'_2)$ et de $P_{e,2}$ est détaillée dans l'Annexe 2.

$$\begin{aligned} & P_{e,2}(s_2) \\ &= -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma) (2 - \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma)) \dots \\ &\dots + \frac{1}{2\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{n+k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} I J_k(-m/\sqrt{2}\sigma)}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n! (2n+1)} \dots \\ &\dots + \frac{1}{2\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^n C_{2n+1}^k (-1)^{n+k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} I J_p(-m/\sqrt{2}\sigma)}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1) n!} \end{aligned} \quad (113)$$

III.3.2.4. Probabilité d'erreur dans le cas d'un cluster de trois utilisateurs

Nous considérons maintenant que le cluster comporte trois utilisateurs dont les paquets sont superposés, nous avons :

$$y = \tilde{h}_1 [\sqrt{P'_1} s_1 + \sqrt{P'_2} s_2 + \sqrt{P'_3} s_3] + n \quad (114)$$

Détecter l'utilisateur avec la plus grande puissance en premier est possible si la condition suivante est vérifiée :

$$\log_2 \left(1 + \frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{|\tilde{h}_1|^2 P'_2 E_b + |\tilde{h}_1|^2 P'_3 E_b + N_0} \right) \geq \delta \quad (115)$$

Ce qui donne

$$1. \frac{|\tilde{h}_1|^2 P'_1 E_b}{|\tilde{h}_1|^2 P'_2 E_b + |\tilde{h}_1|^2 P'_3 E_b + N_0} \geq 2^\delta - 1 = \gamma \quad (116)$$

Pour simplifier les calculs, nous ferons l'hypothèse exprimée dans section précédente où nous négligeons l'influence du bruit thermique :

$$\frac{P'_1}{P'_2 + P'_3} \geq 2^\delta - 1 = \gamma \quad (117)$$

ce qui donne :

$$P_{e,3}(a_n|P'_1, P'_2, P'_3) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P'_1}{P'_2 + P'_3}}\right) \quad (118)$$

Ainsi, nous allons commencer par faire la moyenne de la densité de P'_1 .

III.3.2.4.1. Répartition de puissance selon la loi uniforme

Nous définissons l'expression du taux d'erreur $P_{e,3}(a_n|P'_2, P'_3)$ comme suit :

$$P_{e,3}(s_3|P'_2, P'_3) = \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} \int_{\gamma(P'_2+P'_3)}^b \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{P'_2+P'_3}}\right) dx \quad (119)$$

Remarque : ce calcul n'est valable que si et seulement si :

$$P_{\max} \geq \gamma(P'_2 + P'_3) \text{ et } 2P_{\min} \leq (P'_2 + P'_3) \leq \frac{P_{\max}}{\gamma} \quad (120)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{P_{\min}}{P_{\max}} \leq \frac{1}{2\gamma} \quad (121)$$

Nous allons donc commencer par faire une moyenne de la densité de P'_1 en exploitant la loi uniforme. Nous définissons l'expression du taux d'erreur $P_{e,3}(a_n | P'_2, P'_3)$:

$$P_{e,3}(s_3 | P'_2, P'_3) = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \left[\frac{1}{2} [P_{\max} \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{P_{\max}}{P'_2 + P'_3}}) - (P'_2 + P'_3)\gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[(P'_2 + P'_3)\sqrt{\gamma} e^{-\gamma} - \sqrt{P'_2 + P'_3} \sqrt{P_{\max}} e^{-\frac{P_{\max}}{P'_2 + P'_3}} \right] + \frac{1}{4} [(P'_2 + P'_3)\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - (P'_2 + P'_3)\operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{P_{\max}}{P'_2 + P'_3}})] \right] \quad (122)$$

Nous devons trouver la loi de VAR : $P'_2 + P'_3 + \dots + P'_n$. Commençons par raisonner avec deux puissances :

$$Z = P'_2 + P'_3 \quad (123)$$

Comme les deux VAR et P'_2 et P'_3 sont indépendants, la loi de VAR Z est le produit de convolution des PDFs de P'_2 et P'_3 est donné par (71) et (72). Nous en déduisons le calcul de $P_{e,3}$:

$$P_{e,3}(s_3) = I_p - J_p - K_p + L_p \quad (124)$$

Si on exprime cette intégrale en termes de rapport $x = \frac{a}{b}$:

$$J_p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-x)^3} \left[\frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{4}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] + \frac{8}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right] \dots \\ \dots - \frac{2x}{2\sqrt{\pi}(1-x)^3} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right] \quad (125)$$

avec : $\delta_1 = \gamma$ et $\delta_2 = 1/2x$

$$I_p = \frac{1}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \dots \\ - \frac{2x}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \quad (126)$$

Avec $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$ et $\delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$$\begin{aligned}
K_P = & \frac{1}{2(1-x)^3} \left[\frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \dots \right. \\
& \dots - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \dots \\
& - \frac{x}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] \right. \\
& \left. \dots - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]
\end{aligned} \tag{127}$$

avec $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$: $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$$L_P = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 2x\right)\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{x}{\gamma} - 2x^2\right)}{3(1-x)^3} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \tag{128}$$

La preuve est disponible dans l'Annexe 3.

III.3.2.4.2. Répartition de puissance selon la loi gaussienne

Nous appliquons le même raisonnement utilisé dans les sections précédentes en utilisant la loi gaussienne. On définit donc d'abord l'expression $P_{e,3}(a_n | P'_2, P'_3)$ en faisant la moyenne de P'_1

$$P_{e,3}(s_3 | P'_2, P'_3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\gamma(P'_2+P'_3)}^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{P'_2+P'_3}}\right) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \tag{129}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
P_{e,3}(s_3 | P'_2, P'_3) = & -\frac{1}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{(\gamma(P'_2+P'_3)-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \dots \\
& \dots + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (P'_2+P'_3)^k \Gamma(k+1/2, \gamma)
\end{aligned} \tag{130}$$

On sait que la variable aléatoire $P'_2 + P'_3$ suit une distribution gaussienne de moyenne $2m$ et de variance $\sigma' = \sqrt{2}\sigma$, on obtient donc par moyenne sur la PDF de $P'_2 + P'_3$:

$$\begin{aligned}
P_{e,3}(s_3) = & -\frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{(\gamma x - m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx + \dots \\
& \dots + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx
\end{aligned} \tag{131}$$

cela donne enfin :

$$\begin{aligned}
P_{e,3}(s_3) &= P_{e,3}^{(1)}(a_n) + P_{e,3}^{(2)}(a_n) \\
P_{e,3}(s_3) &= -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})(1 - \operatorname{erf}(m/\sigma)\operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma))\dots \\
&\dots + \frac{1}{2\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n! (2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)\dots \\
&\dots + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} 2^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \sum_{p=0}^k C_k^p \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sigma)
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\text{Avec : } IJ_p(-m/\sigma) = \frac{(-1)^k}{2} \Gamma(k/2 + 1/2, m^2/\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(k/2 + 1/2)$$

La preuve est disponible dans l'Annexe 3.

III.3.3. Analyse du débit utile moyen

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'analyse du débit moyen attendu. En effet, il est plus pertinent, pour une technique d'allocation aléatoire de puissances, de quantifier l'efficacité du débit plutôt que le TEB. Nous dérivons ainsi une borne inférieure pour l'efficacité du débit. Nous supposons que la BS doit servir M MTDs actifs dans la cellule et que la BS sélectionne chaque MTD actif dans une sous-porteuse indépendamment et uniformément au hasard. La limite inférieure de l'efficacité du débit est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
\eta(M, K) &\geq \eta_1(M, K) = \left[\sum_{i=0}^K p_a^i (1 - p_a)^{M-i} P_{cap}(i) \operatorname{Proba}(\text{select}(i))\dots \right. \\
&\dots + \sum_{i=K}^{2K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i} P_{cap}(i) \operatorname{Proba}(\text{select}(i, j))\dots \\
&\left. \dots + \sum_{i=2K}^{3K} p_a^i (1 - p_a)^{M-i} P_{cap}(i) \operatorname{Proba}(\text{select}(i, j, k)) \right]
\end{aligned} \tag{133}$$

Le premier terme correspond au cas où la BS sert un seul MTD par cluster et le second terme est lié au cas où la BS sert deux MTDs et le troisième terme pour trois utilisateurs par cluster. Il reste maintenant à déterminer $P_{cap}(s_1)$, $P_{cap}(s_1, s_2)$ et $P_{cap}(s_1, s_2, s_3)$ dans le cas d'une allocation de puissance basée sur la loi uniforme ou la loi gaussienne.

III.3.3.1. Probabilité de capture dans le cas de transmission d'un seul paquet

III.3.3.1.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1)$ en utilisant la loi uniforme

Essayons de déterminer la probabilité $P_{cap}(s_1)$ lorsque la fonction de densité de $|\tilde{h}_1|^2 P_1$ suit une loi uniforme :

$$\begin{aligned}
P_{cap}(s_1) &= \text{Proba}\left(\frac{|\tilde{h}_1|^2 P_1'}{N_0} \geq \gamma\right) = \text{Proba}\left(|\tilde{h}_1|^2 P_1' \geq \gamma N_0\right) \\
P_{cap}(s_1) &= \int_{\gamma N_0}^{+\infty} \frac{1}{b-a} [EI_1(x/b) - EI_1(x/a)] dx \\
P_{cap}(s_1) &= \frac{1}{1-x} \left[\frac{\gamma N_0}{b} [EI_1(\gamma N_0/bx) - EI_1(\gamma N_0/b)] + e^{-\gamma N_0/b} - x e^{-\gamma N_0/bx} \right]
\end{aligned} \tag{134}$$

Avec : $x = \frac{a}{b}$.

III.3.3.1.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1)$ en utilisant la loi gaussienne

Lorsque la fonction de densité de $|\tilde{h}_1|^2 P_1'$ suit une loi gaussienne, $P_{cap}(s_1)$ peut être exprimée ainsi :

$$\begin{aligned}
P_{cap}(s_1) &= \text{Proba}\left(\frac{|\tilde{h}_1|^2 P_1'}{N_0} \geq \gamma\right) = \text{Proba}\left(|\tilde{h}_1|^2 P_1' \geq \gamma N_0\right) \\
P_{cap}(s_1) &= \int_{\gamma N_0}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\gamma N_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du \right) dx
\end{aligned} \tag{135}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
P_{cap}(s_1) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^a \text{erfc}((\gamma N_0 u - m) / \sqrt{2}\sigma) \frac{e^{-1/u}}{u^2} du + \int_a^{+\infty} \text{erfc}((\gamma N_0 u - m) / \sqrt{2}\sigma) \frac{e^{-1/u}}{u^2} du \right] \\
P_{cap}(s_1) &= \frac{1}{2} [P_{cap}^{(1)}(X_1) + P_{cap}^{(2)}(X_1)]
\end{aligned} \tag{136}$$

Avec :

$$P_{cap}^{(1)}(s_1) = e^{-1/a} \left(1 + \text{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} C_{2n+1}^k \gamma^k N_0^k m^{2n+1-k} I_{k-1}(a) \tag{137}$$

$$I_{k-1}(a) = \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \frac{(k-m-2)!}{(k-1)!} a^{m-1} e^{-1/a} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} EI_1(1/a) \tag{138}$$

Il reste à calculer :

$$P_{cap}^{(2)}(s_1) = \int_a^{+\infty} \text{erfc}((\gamma N_0 u - m) / \sqrt{2}\sigma) \frac{e^{-1/u}}{u^2} du \tag{139}$$

et cela donne :

$$P_{cap}^{(2)}(s_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{n+1} \frac{\text{erfc}((\gamma N_0 a - m) / \sqrt{2}\sigma)}{a^{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(\gamma N_0)^{n+1}}{n+1} J_{n+1,a}(\gamma N_0) \right] \tag{140}$$

On le rapporte dans l'expression $P_{cap}(s_1)$, qui devient :

$$\begin{aligned}
P_{cap}(s_1) &= \frac{1}{2} [P_{cap}^{(1)}(X_1) + P_{cap}^{(2)}(X_1)] \\
P_{cap}(s_1) &= \frac{1}{2} \left[e^{-1/a} (1 + \operatorname{erf}(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma})) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} C_{2n+1}^k \gamma^k N_0^k m^{2n+1-k} I_{k-1}(a) \right] + \dots \\
&\dots + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{n+1} \frac{\operatorname{erfc}((\gamma N_0 a - m) / \sqrt{2}\sigma)}{a^{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(\gamma N_0)^{n+1}}{n+1} J_{n+1,a}(\gamma N_0) \right]
\end{aligned} \tag{141}$$

Notez qu'il y aura convergence de la série si $P_{cap}(s_1) : \frac{\gamma N_0}{m} a < 1$, ou si, $a < \frac{m}{\gamma N_0}$. De même, il y

aura convergence absolue de la série au terme général si $\left[\gamma N_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{J_{n+1,a}(\gamma N_0)}{J_{n,a}(\gamma N_0)} \right| < 1 \right]$

III.3.3.2. Probabilité de capture dans le cas de transmission de deux paquets

Dans cette partie, nous allons déterminer l'expression de la probabilité de capture dans le cas où deux utilisateurs sont actifs dans un même cluster.

III.3.3.2.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2)$ en utilisant la loi uniforme

Considérons que la fonction de densité de $|\tilde{h}_1|^2 P_1'$ et de $|\tilde{h}_2|^2 P_2'$ suivent une loi uniforme, la probabilité de capture peut s'exprimer comme suit :

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \frac{b}{b-a} - \frac{\gamma(b+a)}{2(b-a)} = \frac{1}{1-x} - \frac{\gamma(1+x)}{2(1-x)} \tag{142}$$

Donc, on a :

$$P_{cap}(s_1, s_2 | P_2') = \frac{1}{b-a} \int_{\gamma P_2'}^b dx = \frac{b - \gamma P_2'}{b-a} \tag{143}$$

Enfin, nous faisons une moyenne sur P_2' :

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \frac{b}{b-a} - \frac{\gamma(b+a)}{2(b-a)} = \frac{1}{1-x} - \frac{\gamma(1+x)}{2(1-x)} \tag{144}$$

III.3.3.2.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2)$ en utilisant la loi gaussienne

Considérons maintenant une loi gaussienne pour les fonctions de densité de $|\tilde{h}_1|^2 P_1'$ et de $|\tilde{h}_2|^2 P_2'$, nous avons :

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \operatorname{Proba} \left(\frac{P_1'}{P_2'} \geq \gamma \right) = \operatorname{Proba}(P_1' \geq \gamma P_2') \tag{145}$$

Donc, on a :

$$P_{cap}(s_1, s_2 | P_2') = \int_{\gamma P_2'}^{+\infty} \frac{e^{-(u-m)/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} du \tag{146}$$

Enfin nous faisons la moyenne sur P_2' :

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}((\gamma u - m) / \sqrt{2\sigma}) e^{-(u-m)^2/2\sigma^2} du \quad (147)$$

Donc, finalement, nous avons :

-Si $\gamma \neq 1$

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} C_{2n+1}^k \frac{2^{k/2} \sigma^k}{\gamma^k} m^{2n+1-k} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^{2n+1-k} IJ_k(-m / \sqrt{2\sigma}) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{4} \operatorname{erf}(m / \sqrt{2\sigma})(1 + \operatorname{erf}(m / \sqrt{2\sigma})) \quad (148)$$

$$\text{avec : } IJ_k(-m / \sqrt{2\sigma}) = \frac{(-1)^k}{2} \Gamma_{\text{inc}}(k/2 + 1/2, m^2/2\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(k/2 + 1/2)$$

-Si $\gamma = 1$

$$P_{cap}(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} [\Gamma(n+1) - \Gamma_{\text{inc}}(n+1, m^2/2\sigma^2)] + \frac{1}{4} \operatorname{erf}(m / \sqrt{2\sigma})(1 + \operatorname{erf}(m / \sqrt{2\sigma})) \quad (149)$$

III.3.3.3. Probabilité de capture dans le cas de transmission de trois paquets

Nous nous intéressons finalement au cas d'un cluster avec trois utilisateurs actifs et nous déterminons les expressions de la probabilité de capture.

III.3.3.3.1. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2, s_3)$ en utilisant la loi uniforme

Dans le cas d'une loi uniforme, la probabilité de capture s'exprime comme suit :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3) = \operatorname{Proba}\left(\frac{P_1'}{P_2' + P_3'} \geq \gamma\right) \quad (150)$$

Nous avons d'abord :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3 | P_2' + P_3') = \frac{1}{b-a} \int_{\gamma(P_2'+P_3')}^b dx = \frac{b - \gamma(P_2' + P_3')}{b-a} \quad (151)$$

Enfin, nous faisons une moyenne sur $P_2' + P_3'$:

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} (b - \gamma x)(x - 2a) dx$$

Ainsi, nous obtenons :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3) = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 2x\right) \left[\left(\frac{1}{\gamma} + 2x\right) \left(\frac{1}{2}\right) - 2x - \frac{\gamma}{3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2x}{\gamma} + 4x^2\right) + \gamma x \left(\frac{1}{\gamma} + 2x\right)\right]}{(1-x)^3} \quad (152)$$

III.3.3.3.2. Probabilité de capture $P_{cap}(s_1, s_2, s_3)$ en utilisant la loi gaussienne

Dans le cas d'une loi gaussienne, la probabilité de capture s'exprime comme suit :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3) = \operatorname{Proba}\left(\frac{P_1'}{P_2'+P_3'} \geq \gamma\right) \quad (153)$$

D'abord, nous avons :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3 | P_2' + P_3') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\gamma(P_2' + P_3')}^{+\infty} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2} dt \quad (154)$$

Enfin, on fait la moyenne sur $P_2' + P_3'$ en utilisant (73), on fait la moyenne et $P_2' + P_3'$ on arrive enfin :

$$P_{cap}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} C_{2n+1}^k \frac{2^{k/2} \sigma^k}{\gamma^k} m^{2n+1-k} \left(2 - \frac{1}{\gamma}\right)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{4} \operatorname{erf}(m/\sigma)(1 + \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma)) \quad (155)$$

avec

$$IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma) = \frac{(-1)^k}{2} \Gamma_{\text{inc}}(k/2 + 1/2, m^2/2\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(k/2 + 1/2) \quad (156)$$

III.3.4. Résultats de simulation

Cette section sera dédiée à l'évaluation des performances des techniques d'allocation des ressources proposées dans ce chapitre en se basant sur des simulations réalisées avec Matlab. Nous avons considéré que la cellule est de rayon 100m et que le nombre de MTDs, distribués aléatoirement dans la cellule, peut aller jusqu'à 600 utilisateurs selon le processus PPP et que la trame est composée de 30 time-slots.

III.3.4.1. Techniques de groupement d'utilisateurs en des clusters

Dans cette section, nous faisons varier le nombre de sous-canaux K de 1 à 10 et le nombre de MTD de 1 à 600. Nous illustrons la probabilité d'allocation des MTDs en utilisant les algorithmes de clustering FAF, RBC et RC introduits dans Algorithmes 8, 9 et 10. Nous pouvons observer, dans la Figure 25, que le système est capable d'allouer jusqu'à 80% avec l'algorithme FAF contre 95% des MTDs en exploitant les algorithmes RBC et RC, pour 200 MTDs actifs et 10 sous-canaux. Nous pouvons remarquer également que l'algorithme FAF atteint une meilleure capacité en allouant 95% des MTDs par rapport aux algorithmes RBC et RC qui allouent respectivement 80% et 60% des MTDs dans le cas de 400 MTDs actifs et 4 sous-canaux.

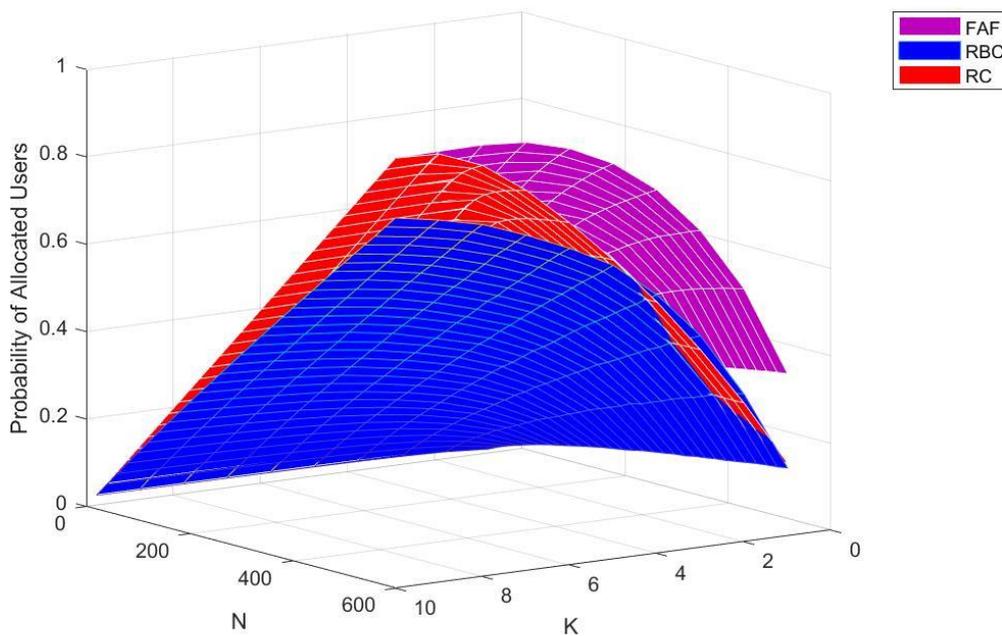


Figure 25 : La probabilité d'allocation en fonction du nombre de utilisateurs

La Figure 26 illustre le débit utile moyen des algorithmes proposés par rapport à une technique d'affectation totalement aléatoire des utilisateurs dans les clusters. Nous pouvons remarquer que les algorithmes que nous avons proposés obtiennent des résultats largement meilleurs par rapport au à la technique de référence qui se sature rapidement dans le cas du nombre de MTDs élevés. On peut observer aussi, que l'algorithme FAF donne les meilleurs résultats en fonction de N et K.

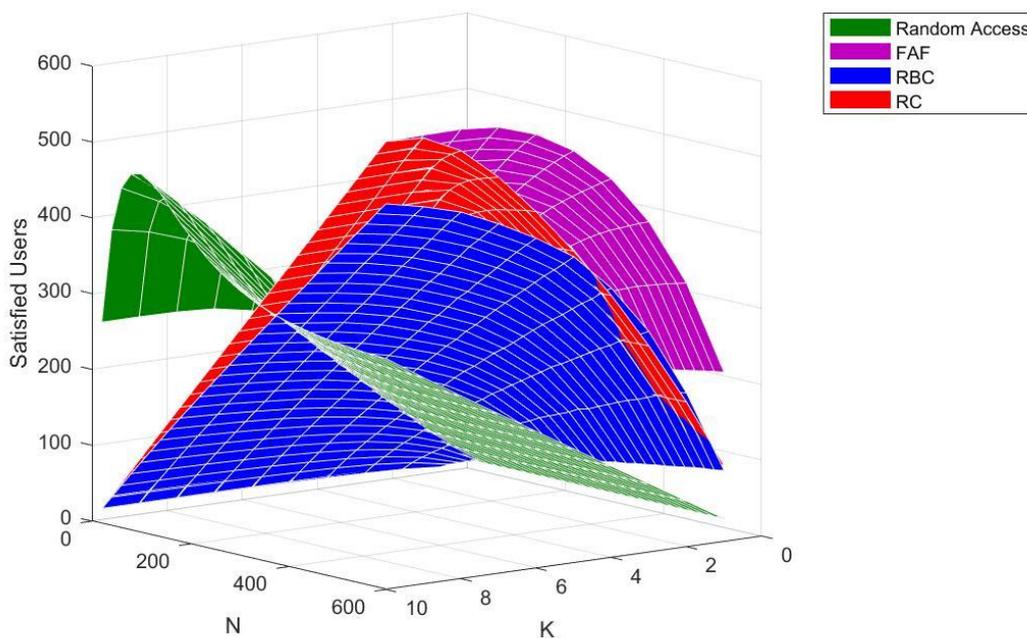


Figure 26 : Le débit utile moyen pour différents N et K

III.3.4.2. Techniques d'allocation aléatoire des puissances de transmission

Dans cette partie, nous focalisons sur l'approche aléatoire que nous avons proposée dans la deuxième partie de ce chapitre pour allouer les puissances de transmission pour les utilisateurs d'un cluster en utilisant des densités de probabilité uniforme et gaussienne. Nous considérons que la BS est située au centre de la cellule et que $N=50$ MTDs sont uniformément répartis dans la cellule. L'activité des utilisateurs varie en fonction de la probabilité de recevoir un paquet à destination d'un MTD donné p_a . On considère une trame composée de 100 intervalles de temps. Les paramètres de la loi uniforme sont $P_{max} = 0.99$, $P_{min} = 0.12$ et $x = 0.12$, tandis que les paramètres de la loi gaussienne sont $m = 0.55$, $\sigma = 0.25$ et $a = 1$. Nous considérons que l'efficacité spectrale cible est δ égale à 1 bit/s/Hz et nous utilisons un SNR très élevé d'où une valeur (E_b/N_0) égale 25dB. La Figure 27 illustre la PDF de la réponse du canal modulé par la distribution de puissance suivant respectivement la loi uniforme et la loi gaussienne en comparant les expression (89) et (95).

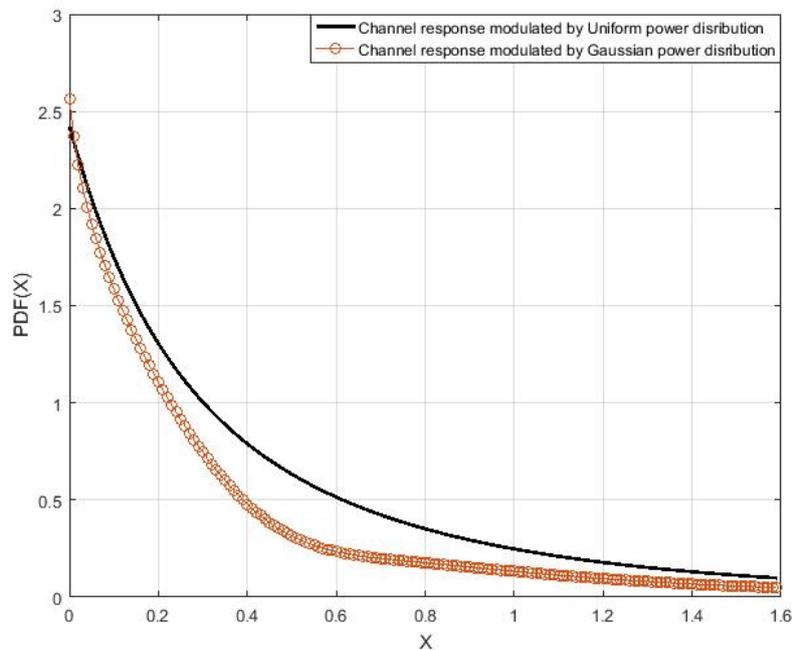


Figure 27 : La réponse du canal modulée par la densité de puissance

La Figure 28 illustre le TEB en fonction de p_a , nous comparons les résultats de la simulation avec l'expression (74). Nous comparons les résultats donnés par l'allocation de puissance basée sur la loi uniforme et la loi gaussienne pour $K=1$ et $K=3$. Nous pouvons clairement voir que l'allocation de puissance basée sur la loi gaussienne donne de meilleurs résultats en termes de taux d'erreur binaire.

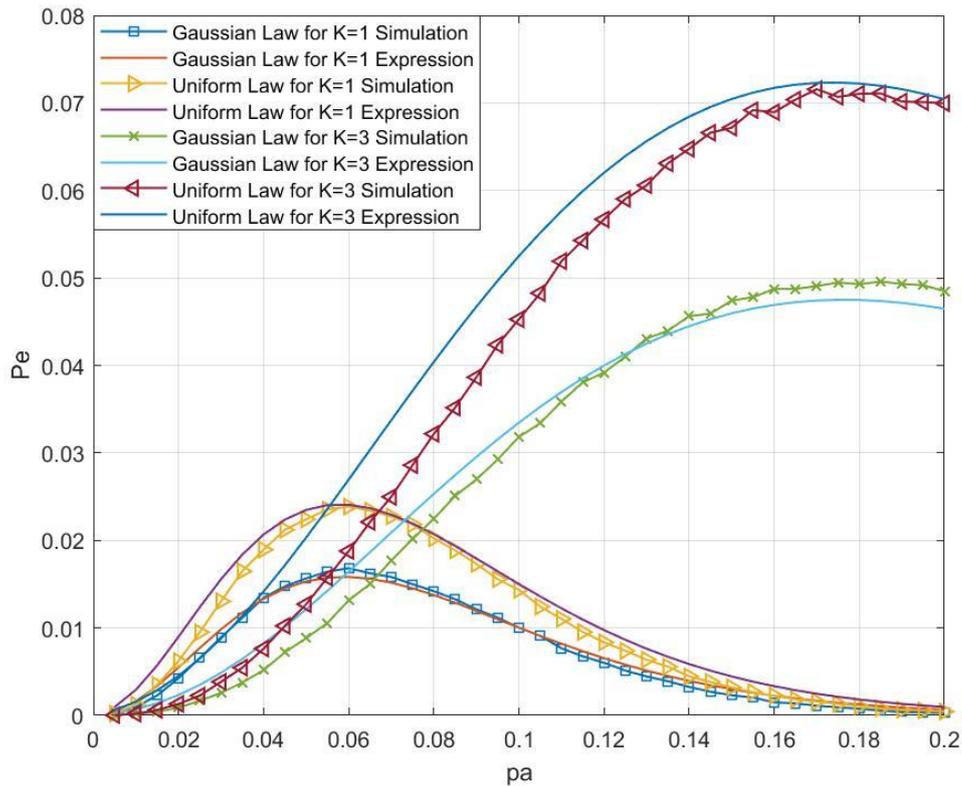


Figure 28 : Taux d'erreur moyen avec une allocation de puissance suivant une loi uniforme et une loi gaussienne avec une connaissance parfaite de la localisation des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $= \delta 1$ bits/s/Hz, $[K = 1, K=3]$)

Maintenant, fixons $K=1$ et étudions l'impact du SIC. Nous illustrons, dans la Figure 29, l'efficacité du débit lorsqu'il n'y a pas d'effet de capture, une capture avec deux paquets, une capture avec trois paquets et l'efficacité moyenne totale du débit, et nous comparons les résultats obtenus avec l'expression (133) avec les résultats de la simulation. Dans le cas où il n'y a pas d'effet de capture, nous avons une efficacité de débit égale à 37%. Par conséquent, l'implémentation de NOMA en utilisant SIC augmente la performance de notre système à 54%, dans le cas d'une capture avec deux paquets. La capture avec trois paquets donne une efficacité égale à 20% et l'efficacité moyenne totale du débit atteint 98%. La Figure 30 illustre les mêmes performances que la Figure 29 sont obtenues pour une allocation de puissance suivant une distribution gaussienne. Par exemple, nous pouvons voir que l'efficacité du débit avec la capture avec trois paquets donne une efficacité égale à 17% et une efficacité moyenne totale du débit atteignant 92%.

Par ailleurs, la Figure 31 illustre l'efficacité moyenne du débit total où l'allocation de puissance suit la loi uniforme surpasse celle donnée par la loi gaussienne. En conclusion, les résultats montrent que l'approche gaussienne donne de meilleures performances en termes de TEB tandis que l'approche uniforme est plus performante en termes d'efficacité du débit total moyen.

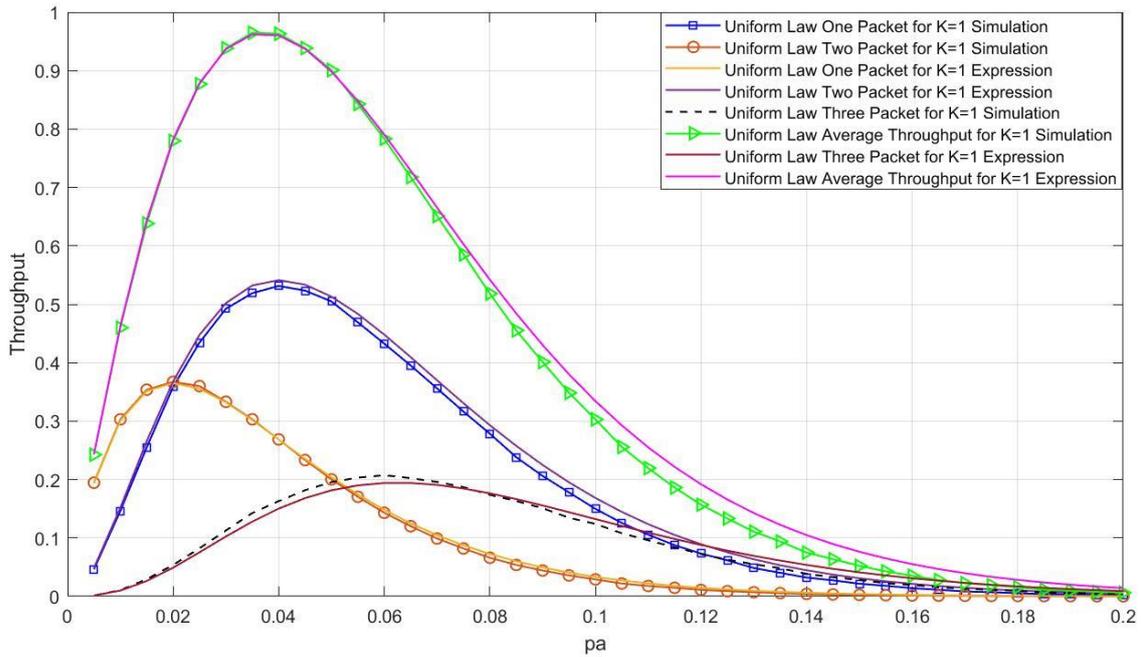


Figure 29 Efficacité du débit lorsque l'allocation de puissance suit une loi uniforme avec une connaissance parfaite de l'emplacement des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $\delta = 1$ bits/s/Hz, $K = 1$)

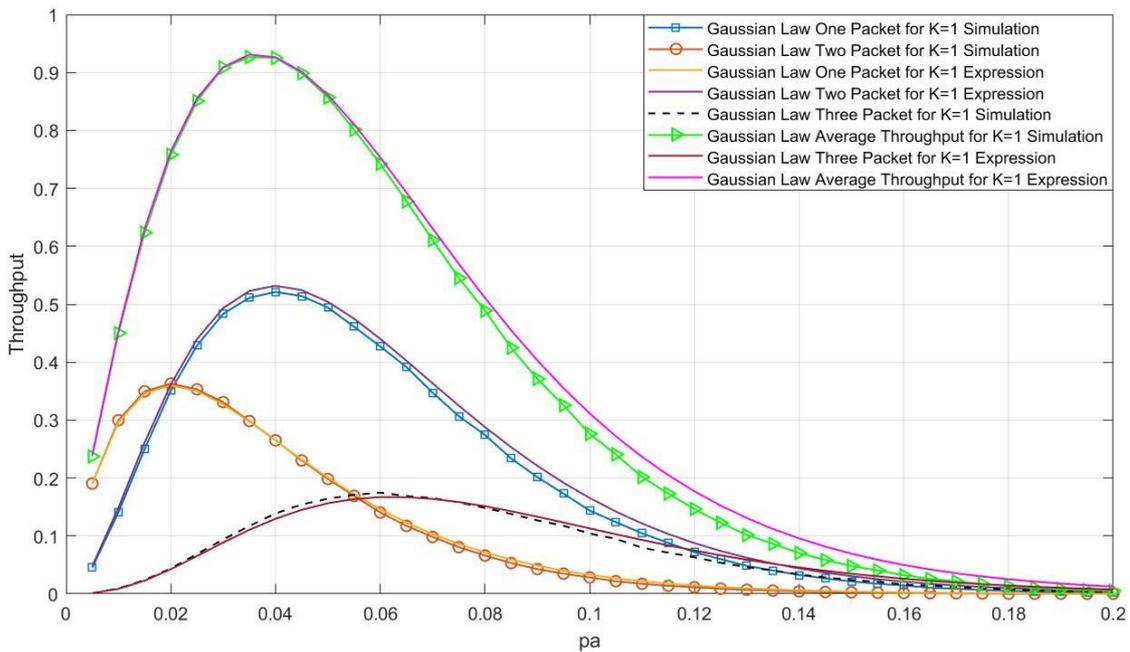


Figure 30 Efficacité du débit lorsque l'allocation de puissance suit la loi gaussienne avec une connaissance parfaite de l'emplacement des utilisateurs ($E/N_{b0} = 25$ dB, $\delta = 1$ bits/s/Hz, $K = 1$)

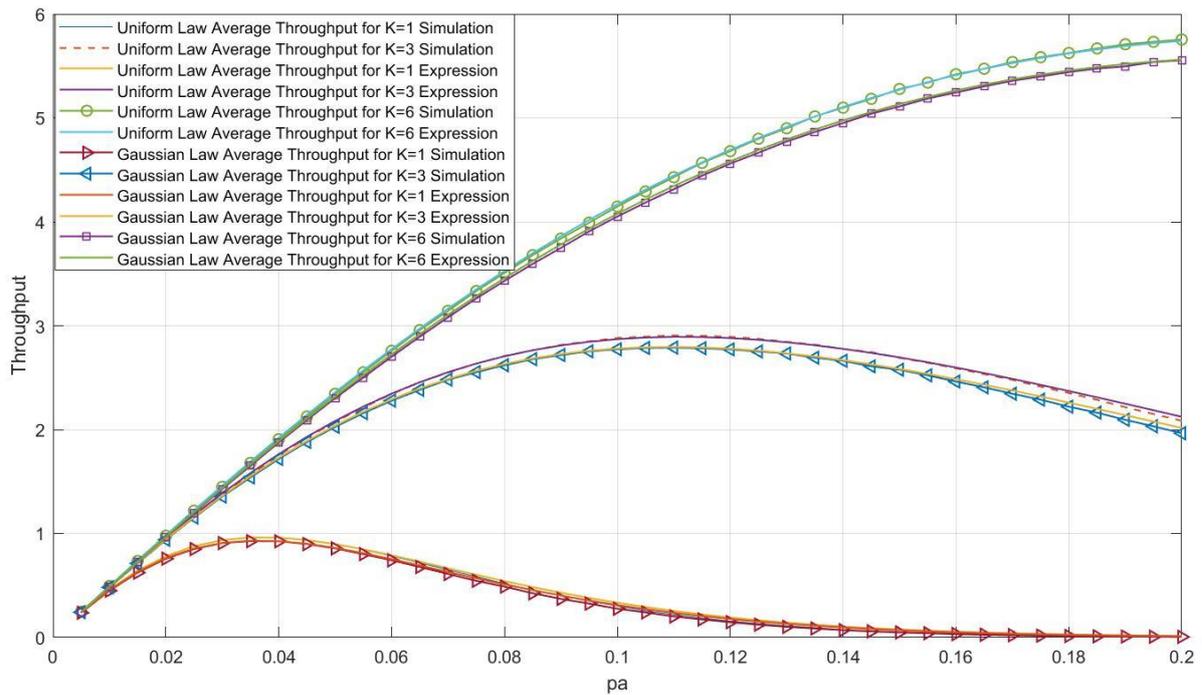


Figure 31 Efficacité du débit avec l'allocation de puissance selon la loi uniforme comparée à la loi gaussienne avec une connaissance parfaite de la localisation des utilisateurs ($E_b/N_0 = 25$ dB, $\delta = 1$ bits/s/Hz, [$K = 1, K=3$ et $K=6$])

III.3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les communications en liaison descendante dans le cadre des techniques NOMA. Dans un premier temps, nous avons défini le partage du budget de puissance de transmission de la BS entre les différents clusters et par la suite nous avons proposé trois algorithmes de clustering pour grouper les utilisateurs : FAF, CRB et CR. Un algorithme de décodage de faible complexité et ne nécessitant pas d'énorme trafic de signalisation, a été proposé. Enfin, nous avons proposé une technique d'allocation aléatoire de puissance de transmission au sein d'un cluster, où il y a moins de trafic de signalisation avec la BS. En effet, l'allocation de puissance est affectée de manière aléatoire et la répartition de puissance est générée selon des lois uniforme et gaussienne. Cette solution est intéressante de par la simplicité de l'allocation aléatoire et la faible complexité avec un nombre important de MTDs dans le système, surtout dans le cas de faible probabilité accès.

Conclusion

Cette thèse a étudié l'utilisation des techniques d'accès multiple non-orthogonale afin d'adresser des défis tels que l'accès massif en respectant les contraintes de QoS qui sont de plus en plus strictes et hétérogènes dans les réseaux de communication sans fil. Ainsi, nous nous sommes intéressés au débit utile des réseaux de capteurs dans le contexte d'une connectivité massive avec un trafic sporadique en liaison montante et descendante. Nous avons investigué deux contextes : l'accès « grant-based » où l'intervention de la BS est indispensable afin d'effectuer l'allocation des ressources, et l'accès multiple « grant-free » où les utilisateurs ont plus d'autonomie pour choisir eux-mêmes les ressources à utiliser. Nous avons ainsi proposé des schémas d'allocation de ressources et de contrôle de puissance pour le PD-NOMA qui apportent des résultats meilleurs que les techniques existantes dans la littérature en termes de débit utile et qui garantissent également un minimum de QoS pour satisfaire un nombre important des utilisateurs sollicitant la BS. En effet, nous avons étudié le problème de la sélection conjointe de sous-porteuse et du contrôle de puissance dans le cadre d'accès multiple grant-based, où la BS effectue l'allocation de ressource aux MTDs à travers un algorithme rapide et peu complexe. Par la suite, nous avons considéré le cas où il y a une coopération entre la BS et les utilisateurs et nous avons proposé un schéma dans lequel chaque utilisateur estime son modèle de trafic et transmet ses paramètres à la BS qui se charge de l'allocation de ressources (sous-porteuse, niveau de puissance). Par ailleurs, nous avons étudié le cas où les utilisateurs ont plus d'autonomie dans l'allocation de ressource en exploitant les techniques d'apprentissage par renforcement basé sur le MAB. Par la suite, nous avons focalisé sur la transmission en liaison descendante.

Nous avons proposé une approche de partage du budget de puissance de transmission de la BS entre les différents clusters et par la suite nous avons proposé trois algorithmes de clustering pour grouper les utilisateurs. Un algorithme de décodage de faible complexité et ne nécessitant pas d'énorme trafic de signalisation, a été également proposé. Enfin, nous avons proposé une technique d'allocation aléatoire de puissance de transmission au sein d'un cluster, où il y a moins de trafic de signalisation avec la BS, ce qui est très adapté pour le scénario d'accès massif. Les travaux de recherche qui ont été effectués dans le cadre de cette thèse nous ont permis de réaliser l'importance des techniques d'accès multiple non-orthogonal en termes d'efficacité spectrale et la nécessité d'investiguer davantage ces techniques afin de rendre possible l'inclusion de l'IoT dans les futures générations de communication.

L'étude des techniques d'accès multiple n'étant qu'à leur début, plusieurs perspectives intéressantes devraient être considérées afin de pouvoir implémenter l'accès multiple non-orthogonal dans la pratique. D'un côté, quasiment dans toutes les techniques qui proposent d'appliquer NOMA, on considère que les informations des canaux sont parfaitement connues par la BS qui effectue l'allocation de ressource mais ceci semble être une hypothèse difficile à satisfaire dans la pratique, surtout quand le nombre d'utilisateurs augmente. Ainsi, proposer des techniques d'allocation de ressources qui se basent sur des statistiques sur les informations des canaux plutôt qu'une connaissance parfaite semble être une idée intéressante. Les techniques d'apprentissage profond et fédéré sont également des pistes intéressantes afin d'obtenir les informations des canaux quand le nombre d'utilisateurs dans le système augmente.

D'un autre côté, il serait très intéressant d'étudier le scénario des réseaux MIMO denses, où une station de base à antennes multiples dessert plusieurs utilisateurs ayant une seule antenne (capteurs environnementaux) ou plusieurs antennes (URLLC). En effet, le groupement d'utilisateurs, l'allocation de puissance, la conception de faisceaux, le précodage et l'attribution de sous-porteuses sont couplés afin servir plusieurs utilisateurs. Bien entendu, résoudre ce problème d'optimisation nous permet d'allouer de manière optimale les ressources afin de répondre aux exigences d'accès massif et de QoS, mais souffre de complexité et de signalisation prohibitives. En effet, l'utilisation d'une configuration à antennes multiples ajoute un degré de liberté supplémentaire au problème d'allocation des ressources, qui est déjà difficile à résoudre. Par conséquent, l'allocation distribuée des ressources dans les réseaux NOMA a attiré une attention considérable. De nombreuses recherches se sont concentrées sur le contexte MIMO massif avec OMA et ont montré qu'une efficacité spectrale intéressante peut être obtenue. Cependant, lorsque le nombre d'utilisateurs approche ou dépasse le nombre de chaînes RF à la station de base, ce qui est un cas d'utilisation très attendu dans les futurs systèmes de communication avec l'intégration de l'IoT, les systèmes MIMO basés sur OMA ne sont plus en mesure d'obtenir des performances acceptables. En outre, NOMA est une technologie prometteuse qui peut permettre au MIMO massif de gérer le scénario dense et de répondre aux besoins de connectivité massive des réseaux sans fil de nouvelle génération. En effet, les utilisateurs peuvent être organisés en des clusters qui seront desservis par différents faisceaux par la station de base MIMO. Par exemple, le MIMO basé sur NOMA peut résoudre le scénario 3D-MIMO où les utilisateurs à différents étages d'un bâtiment sont desservis avec différents faisceaux. En utilisant un nombre d'antennes limité, l'idée est de former des faisceaux suffisamment étroits pour limiter les interférences entre faisceaux. NOMA est un candidat intéressant pour atténuer ce problème étant donné que les utilisateurs d'un même faisceau peuvent être séparés en utilisant SIC, ainsi les faisceaux peuvent être plus larges sans réduire le débit global.

Références bibliographiques

Rubrique 1

- [1] K. Raith, J. Uddenfeldt, Capacity of digital cellular TDMA systems, *IEEE Transactions on Vehicular Technologies*, Volume: 40, Issue: 2, May 1991, pp. 323-332.
- [2] S.T. Shah, J. Gu, S.F. Hasan, M.Y. Chung, SC-FDMA based resource allocation and power control scheme for D2D communications using LTE-A uplink resource, *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2015, article number 137.
- [3] T. Anwar, Performance Analysis of 3G Communication Network, *ITB Journal of Information and Communication Technology* 2(2), pp.130-157.
- [4] Doufexi, Armour, Centre for Communications Research, University of Bristol, UK, Design Considerations and Physical Layer Performance Results for a 4G OFDMA System Employing Dynamic Subcarrier Allocation, 2005 IEEE 16th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), 11-14 Sept. 2005, Berlin.
- [5] K. Khurshid, I.A. Khokhar, Comparison survey of 4G competitors (OFMA, MC-CDMA, UWB, IDMA), 2013 International Conference on Aerospace Science & Engineering (ICASE), 21-23 Aug. 2013.
- [6] Z. Ding, X. Lei, G. Karagiannidis, R. Schober, J. Yuan, V. Bhargava, "A survey on non-orthogonal multiple access for 5G networks: Research challenges and future trends" *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 35(10), 2181-2195, 2017.
- [7] Y. Chen, A. Bayesteh, Y. Wu, B. Ren, S. Kang, S. Sun, Q. Xiong, C. Qian, B. Yu, Z. Ding, S. Wang, S. Han, X. Hou, H. Lin, R. Visoz, R. Razavi, Towards the Standardization of Non-orthogonal Multiple Access for Next Generation Wireless Networks, *IEEE Communications Magazine*, Mar. 2018.
- [8] H Nikopour, H Baligh, Sparse Code Multiple Access, 2013 IEEE 24th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications (PIMRC), 8-11 Sept. 2013, London.
- [9] L Yu, Z Liu, M Wen, D Cai, S Dang, Y Wang, P Xiao, Sparse Code Multiple Access for 6G Wireless Communication Networks: Recent advances and future direction, *IEEE Communications Standards Magazine*, Vol 5, Issue 2, pp. 92-99, June 2021.
- [10] M Taherzadeh, H Nikopour, A Bayesteh, H Baligh, SCMA Codebook Design, 2014, IEEE 80th Vehicular Technology Conference (VTC), 14-17 Sept. 2014
- [11] Y Zhou, Q Yu, W Meng, C Li, SCMA codebook design based on constellation rotation, 2017 International Conference on Communications (ICC), 21-25 May 2017.
- [12] J Peng, W Chen, B Bai, X Guo, C Sun, Joint optimization of constellation with mapping matrix for SCMA codebook design.
- [13] L Lu, Y Chen, W Guo, H Yang, Y Wu, S Xing, Prototype for 5G new air interface technology SCMA and performance evaluation, *China Communications*, Vol. 12, Issue Supplement Dec. 2015.
- [14] B Wang, K Wang, Z Lu, T Xie, J Quan, Comparison study of non-orthogonal multiple access schemes for 5G, 2015 IEEE International Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting, 17-19 June 2015.
- [15] J.V.C Evangelista, Z. Sattar, G Kaddoum, Analysis of contention based SCMA in mMTC Networks, 2019 IEEE Latin-American Conference on Communications (LATINCOM), 11-13 Nov. 2019.
- [16] S. Jaber, W Chen, K Wang, Q Wu, SCMA spectral and energy efficiency with QoS, *GLOBECOM 2020 - 2020 IEEE Global Communications Conference*, 7-11 Dec. 2020, Taipei, Taiwan.

- [17] S Chen, B Ren, Q Gao, S Kang, S Sun, K Niu, Pattern Division Multiple Access: a novel non-orthogonal multiple access for fifth generation radio networks, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* (Volume: 66, Issue: 4, April 2017), pp. 3185 – 3196.
- [18] X Dai, Z Zhang, B Bai, S Chen, S Sun, Pattern Division Multiple Access: a new multiple access technology for 5G, *IEEE Wireless Communications* (Volume: 25, Issue: 2, April 2018), pp. 54-60.
- [19] J Jiang, P Li, Z Ding, FC Zheng, M Ma, X You, Joint Transmitter and Receiver design for Pattern Division Multiple Access, *IEEE Transactions on Mobile Computing* (Volume: 18, Issue: 4, April 1 2019), pp. 885 – 895.
- [20] Z Yuan, G Yu, W Li, Y Yuan, X Wang, J Xu, Multi-User Shared Access for Internet of Things, 2016 IEEE 83rd Vehicular Technology Conference (VTC Spring), 15-18 May 2016 Nanjing, China.
- [21] T Sivalingam, S Ali, N Huda Mahmood, N Rajatheva, M Latva-Ah, Deep neural network-based blind multiple user detection for grant free multiuser shared access, 2021 IEEE 32nd Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), 13-16 Sept. 2021, Helsinki Finland.
- [22] E M Eid; M. M. Fouda, Adly S. Tag Eldien; Mohsen M. Tantawy, Performance analysis of MUSA with different spreading codes using ordered SIC methods, 2017 12th International Conference on Computer Engineering and Systems (ICCES), 19-20 Dec. 2017, Cairo, Egypt.
- [23] L Ping, L Liu, K Wu, W.K. Leung, Interleave Division Multiple Access, *IEEE Transactions on Wireless Communications* (Volume: 5, Issue: 4, April 2006), pp. 938 – 947.
- [24] Li Ping, Lihai Liu, W.K. Leung, A simple approach to near optimal multiuser detection: interleave division multiple access, 2003 IEEE Wireless Communications and Networking, 2003. WCNC 2003, 16-20 March 2003, New Orleans, LA, USA.
- [25] S. M. R. Islam, N. Avazov, O. A. Dobre and K. Kwak, "Power-Domain Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) in 5G Systems: Potentials and Challenges," in *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 19, no. 2, pp. 721-742, Secondquarter 2017, doi: 10.1109/COMST.2016.2621116.
- [26] WU, Zhanji, LU, Kun, JIANG, Chengxin, et al. Comprehensive study and comparison on 5G NOMA schemes. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, p. 18511-18519.
- [27] YANG, Shan, CHEN, Peng, LIANG, Lin, et al. Uplink multiple access schemes for 5G: A survey. *ZTE Communications*, 2017, vol. 15, no S1, p. 31-40.
- [28] Y. Liu, Z. Qin, M. ElKashlan, Z. Ding, A. Nallanathan, and L. Hanzo, "Nonorthogonal multiple access for 5G and beyond," *Proc. IEEE*, vol. 105, no. 12, pp. 2347–2381, Dec. 2017.
- [29] Z. Ding, X. Lei, G. K. Karagiannidis, R. Schober, J. Yuan, and V. Bhargava, "A survey on non-orthogonal multiple access for 5G networks: Research challenges and future trends," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 35, no. 10, pp. 2181–2195, Oct. 2017.
- [30] H. Lee, S. Kim, and J.-H. Lim, "Multiuser superposition transmission (MUST) for LTE–A systems," in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, May 2016, pp. 1–6.
- [31] L. Zhang et al., "Layered-division-multiplexing: Theory and practice," *IEEE Trans. Broadcast.*, vol. 62, no. 1, pp. 216–232, Mar. 2016.
- [32] Z. Yang, Z. Ding, P. Fan and N. Al-Dhahir, "A General Power Allocation Scheme to Guarantee Quality of Service in Downlink and Uplink NOMA Systems," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 11, pp. 7244-7257, Nov. 2016, doi: 10.1109/TWC.2016.2599521.

- [33] M. Zeng, A. Yadav, O. A. Dobre and H. V. Poor, "Energy-Efficient Power Allocation for Uplink NOMA," 2018 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), 2018, pp. 1-6, doi: 10.1109/GLOCOM.2018.8647478.
- [34] M. S. Ali, H. Tabassum and E. Hossain, "Dynamic User Clustering and Power Allocation for Uplink and Downlink Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) Systems," in IEEE Access, vol. 4, pp. 6325-6343, 2016, doi: 10.1109/ACCESS.2016.2604821.
- [35] M. A. Sedaghat and R. R. Müller, "On User Pairing in Uplink NOMA," in IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 17, no. 5, pp. 3474-3486, May 2018, doi: 10.1109/TWC.2018.2815005.
- [36] Q. Sun, S. Han, I. Chin-Lin, and Z. Pan, "On the ergodic capacity of MIMO NOMA systems," IEEE Wireless Commun. Lett., vol. 4, no. 4, pp. 405–408, Aug. 2015.
- [37] ZHANG, Jun, ZHU, Lipeng, XIAO, Zhenyu, et al. Optimal and sub-optimal uplink NOMA: joint user grouping, decoding order, and power control. IEEE Wireless Communications Letters, 2019, vol. 9, no 2, p. 254-257.
- [38] JING, Zewei, YANG, Qinghai, QIN, Meng, et al. Proactive Online Power Allocation for Uplink NOMA-IoT Networks With Delayed Gradient Feedback. IEEE Wireless Communications Letters, 2020, vol. 10, no 4, p. 869-872.
- [39] PISCHELLA, Mylene et LE RUYET, Didier. NOMA-relevant clustering and resource allocation for proportional fair uplink communications. IEEE Wireless Communications Letters, 2019, vol. 8, no 3, p. 873-876.
- [40] Andrea Goldsmith. Wireless Communications. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2005.
- [41].H. Thomsen, C. N. Manchon, and B. H. Fleury. A traffic model for machine-type communications using spatial point processes. In 2017 IEEE 28th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications (PIMRC), pages 1–6, Oct 2017.
- [42] A. Feki and V. Capdevielle. Autonomous resource allocation for dense lte networks: A multi armed bandit formulation. In 2011 IEEE 22nd International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, pages 66–70, Sep. 2011.
- [43] Ramon Lawrence Giuseppe Burtini, Jason Loepky. A survey of online experiment design with the stochastic multi-armed bandit. In arXiv:1510.00757, 2015.
- [44]J. Choi. Noma-based random access with multichannel aloha. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 35(12):2736–2743, Dec 2017.
- [45] F. Liu, P. Mähönen and M. Petrova, "Proportional fairness-based power allocation and user set selection for downlink NOMA systems," 2016 IEEE International Conference on Communications (ICC), 2016, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICC.2016.7510916.
- [46] G. Nain, S. S. Das and A. Chatterjee, "Low Complexity User Selection With Optimal Power Allocation in Downlink NOMA," in IEEE Wireless Communications Letters, vol. 7, no. 2, pp. 158-161, April 2018, doi: 10.1109/LWC.2017.2762303.
- [47] A. Benjebbovu, A. Li, Y. Saito, Y. Kishiyama, A. Harada and T. Nakamura, "System-level performance of downlink NOMA for future LTE enhancements," 2013 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps), 2013, pp. 66-70, doi: 10.1109/GLOCOMW.2013.6824963.
- [48] S. P., D. K.S. and A. H. K.M., "A Novel Low Complexity Power Allocation Algorithm for Downlink NOMA Networks," 2018 IEEE Recent Advances in Intelligent Computational Systems (RAICS), 2018, pp. 36-40, doi: 10.1109/RAICS.2018.8635048.
- [49] I. -H. Lee and H. Jung, "User Selection and Power Allocation for Downlink NOMA Systems With Quality-Based Feedback in Rayleigh Fading Channels," in IEEE Wireless Communications Letters, vol. 9, no. 11, pp. 1924-1927, Nov. 2020, doi: 10.1109/LWC.2020.3008174.

- [50] Jongmok Kim, Jeongwan Koh, J. Kang, Kwangeog Lee and J. Kang, "Design of user clustering and precoding for downlink non-orthogonal multiple access (NOMA)," MILCOM 2015 - 2015 IEEE Military Communications Conference, 2015, pp. 1170-1175, doi: 10.1109/MILCOM.2015.7357604.
- [51] X. Shao, C. Yang, D. Chen, N. Zhao and F. R. Yu, "Dynamic IoT Device Clustering and Energy Management With Hybrid NOMA Systems," in IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 14, no. 10, pp. 4622-4630, Oct. 2018, doi: 10.1109/TII.2018.2856776.
- [52] H. You, Z. Pan, N. Liu and X. You, "User Clustering Scheme for Downlink Hybrid NOMA Systems Based on Genetic Algorithm," in IEEE Access, vol. 8, pp. 129461-129468, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3009018.

Annexe 1. Répartition de puissance selon la loi gaussienne

Annexe1.1

Dans cette Partie, on va calculer le taux d'erreur dans le cas où la BS va envoyer un seul paquet dont l'allocation de puissance suit une loi uniforme, à partir de l'équation (90) de la partie III.3.2.2.1 représenté ci-dessous on va commencer la démonstration pour déterminer l'équation (91) de la même partie.

$$P_{e,1}(a_n) = \frac{1}{2(b-a)} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) [EI_1(x/b) - EI_1(x/a)] dx$$

On intègre par parties en utilisant le fait que:

$$\int_0^u EI_1(x) dx = [x EI_1(x)]_0^u - \int_0^u x \left(-\frac{e^{-x}}{x} \right) dx = u EI_1(u) + \int_0^u e^{-x} dx$$

$$\int_0^u EI_1(x) dx = u EI_1(u) + [-e^{-x}]_0^u = u EI_1(u) + 1 - e^{-u}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) EI_1(x/a) dx = \sqrt{\frac{E_b}{\pi N_0}} \int_0^{+\infty} (x EI_1(x/a) - a e^{-x/a} + a) \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx$$

On peut maintenant utiliser le développement en série entière de la fonction $EI_1(x/a)$, on a :

$$EI_1(x/a) = -\varepsilon - \ln(x/a) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{a^k k k!}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} EI_1(x/a) e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \int_0^{+\infty} [-\sqrt{x} \varepsilon - \sqrt{x} \ln(x/a) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1/2}}{a^k k k!}] e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx$$

Le premier type d'intégrale à calculer prend la forme:

$$J_k = \int_0^{+\infty} x^{k+1/2} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \int_0^{+\infty} u^{k+1/2} e^{-u} du = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \Gamma(k+3/2)$$

On a:

$$\int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-u} du = (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \dots (k - n + \frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}$$

$$\text{On en déduit : } \Gamma(k+3/2) = \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi} .$$

Il reste donc à calculer J_k :

$$J_k = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi}$$

Le second type d'intégrale à calculer prend la forme:

$$I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \ln(x) e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u N_0 / E_b) e^{-u} du$$

$$I = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{3/2} \left[\ln(N_0 / E_b) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du \right]$$

Pour l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$, on peut procéder de la façon suivante:

$$K = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du = \int_0^1 \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du + \int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

$$K = \int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du + \int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

En effet, on a :

$$\int_0^1 \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du = \int_{-\infty}^0 e^{t/2} t e^{-e^t} e^t dt = \int_{-\infty}^0 t e^{-e^t} e^{3t/2} dt = \int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du$$

Pour calculer K il faut maintenant utiliser le développement en série entière de la fonction

$$f(u) = e^{-e^{-u}}, \text{ on a : } f(u) = e^{-e^{-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nu}}{n!}$$

cela conduit à :

$$\int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du = \int_0^{+\infty} u e^{-3u/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nu}}{n!} du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u e^{-u(n+3/2)} du$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} \Gamma(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2}$$

Pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$ on procède d'abord par intégration par parties avec :

$$\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du = \int_0^{\sqrt{x}} (-t) - 2t e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du = [-t e^{-t^2}]_0^{\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc, une primitive possible de la fonction $\sqrt{x} e^{-x}$ est : $-\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$. On vérifie

bien que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x} e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} = \sqrt{x} e^{-x}$$

Dans ces conditions, on peut calculer :

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

$$= [(-\sqrt{u} e^{-u} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{u})) \ln(u)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} (-\sqrt{u} e^{-u} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{u})) \frac{1}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du$$

Concernant l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$, on a assez facilement:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(1)$$

Quant à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du$, on peut procéder par encadrement et écrire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du$$

Et on a :

$$\int_0^x \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{erfc}(t)}{t} 2t dt = 2\sqrt{x} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} [e^{-x} - 1]$$

Dans ces conditions on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \left[2\sqrt{u} \operatorname{erfc}(\sqrt{u}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u} \right]_1^{+\infty} = -2\operatorname{erfc}(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(t)}{t^2} dt = 2 \left[-\frac{\operatorname{erfc}(t)}{t} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du = 2\operatorname{erfc}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} EI_1(1)$$

Et finalement, il reste :

$$2\operatorname{erfc}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} EI_1(1) \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq -2\operatorname{erfc}(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1}$$

Numériquement, cela donne :

$$0.0671 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq 0.1005$$

Une simulation sous Matlab donne comme valeur approchée : $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du = 0.0818$. En

fait on voit qu'une excellente approximation est obtenue en faisant la valeur moyenne quadratique des bornes sup et inf, ce qui donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \approx 2 \sqrt{\left[\operatorname{erfc}(1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} EI_1(1) \right] \left[-\operatorname{erfc}(1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]} = \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) = 0.0821$$

Cela conduit à :

$$I = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)^{3/2}} \left[-\ln(E_b / N_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} + \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) \right]$$

Le dernier type d'intégrale à calculer est :

$$L = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \sqrt{u} e^{-u} \frac{du}{\frac{E_b}{N_0}} = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$$

Et on a :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Et finalement : } L = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour évaluer le taux d'erreur il manque alors à calculer les intégrales :

$$M = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{N_0}{E_b} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{N_0}{E_b} \sqrt{u}}} du = \sqrt{\frac{N_0}{E_b}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{N_0}{E_b}}$$

$$N_a = \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(\frac{E_b}{N_0} + 1/a)}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{aN_0}{aE_b + N_0} \sqrt{u}}} \frac{aN_0}{aE_b + N_0} du = \sqrt{\pi} \left[\frac{aN_0}{N_0 + aE_b} \right]^{1/2}$$

$$N_a = \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{N_0}{aE_b} + 1 \right)^{1/2}} \approx \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Si on revient au calcul initial on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) E I_1(x/a) dx = \sqrt{\frac{E_b}{\pi N_0}} \left[-\varepsilon L - I + \ln(a) L + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} J_k}{a^k k k!} - a N_a + a M \right]$$

Avec :

$$L = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \left[-\ln(E_b / N_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} + \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) \right]$$

$$\text{Et : } \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) = 2 \sqrt{\left[\operatorname{erfc}(1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} E I_1(1) \right] \left[-\operatorname{erfc}(1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]} = 0.0821$$

$$J_k = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{k+3/2}} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi}$$

$$N_a = \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{N_0}{aE_b} + 1 \right)^{1/2}} \approx \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right) = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$M = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}}$$

Dans cette Partie on va calculer le taux d'erreur dans le cas ou la BS va envoyer un seul paquet dont l'allocation de puissance suit une loi uniforme, à partir de équation (90) de la partie III.3.2.2.1 représenté ci-dessous on va commencer la démonstration pour déterminer l'équation (91) de la même partie.

$$P_{e,1}(a_n) = \frac{1}{2(b-a)} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) [EI_1(x/b) - EI_1(x/a)] dx$$

Pour résoudre cette équation il faut déterminer $\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) [EI_1(x/a)] dx$

On intègre par parties en utilisant le fait que:

$$\int_0^u EI_1(x) dx = [x EI_1(x)]_0^u - \int_0^u x \left(-\frac{e^{-x}}{x} \right) dx = u EI_1(u) + \int_0^u e^{-x} dx$$

$$\int_0^u EI_1(x) dx = u EI_1(u) + [-e^{-x}]_0^u = u EI_1(u) + 1 - e^{-u}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) EI_1(x/a) dx = \sqrt{\frac{E_b}{\pi N_0}} \int_0^{+\infty} (x EI_1(x/a) - a e^{-x/a} + a) \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx$$

On peut maintenant utiliser le développement en série entière de la fonction $EI_1(x/a)$, on a :

$$EI_1(x/a) = -\varepsilon - \ln(x/a) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{a^k k k!}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} EI_1(x/a) e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \int_0^{+\infty} [-\sqrt{x} \varepsilon - \sqrt{x} \ln(x/a) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1/2}}{a^k k k!}] e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx$$

Le premier type d'intégrale à calculer prend la forme:

$$J_k = \int_0^{+\infty} x^{k+1/2} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \int_0^{+\infty} u^{k+1/2} e^{-u} du = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \Gamma(k+3/2)$$

On a:

$$\int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-u} du = (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \dots (k - n + \frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}$$

$$\text{On en déduit : } \Gamma(k+3/2) = \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi} .$$

Il reste donc à calculer J_k :

$$J_k = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{k+3/2} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi}$$

Le second type d'intégrale à calculer prend la forme:

$$I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \ln(x) e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u N_0 / E_b) e^{-u} du$$

$$I = \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{3/2} \left[\ln(N_0 / E_b) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du \right]$$

Pour l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$, on peut procéder de la façon suivante:

$$K = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du = \int_0^1 \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du + \int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

$$K = \int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du + \int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

En effet, on a :

$$\int_0^1 \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du = \int_{-\infty}^0 e^{t/2} t e^{-e^t} e^t dt = \int_{-\infty}^0 t e^{-e^t} e^{3t/2} dt = \int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du$$

Pour calculer K il faut maintenant utiliser le développement en série entière de la fonction

$$f(u) = e^{-e^{-u}}, \text{ on a : } f(u) = e^{-e^{-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nu}}{n!}$$

cela conduit à :

$$\int_0^{+\infty} u e^{-e^{-u}} e^{-3u/2} du = \int_0^{+\infty} u e^{-3u/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nu}}{n!} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} u e^{-u(n+3/2)} du$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+3/2)^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+3/2)^2} \Gamma(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+3/2)^2}$$

Pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$ on procède d'abord par intégration par parties avec :

$$\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du = \int_0^{\sqrt{x}} (-t) - 2t e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du = [-t e^{-t^2}]_0^{\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc, une primitive possible de la fonction $\sqrt{x} e^{-x}$ est : $-\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$. On vérifie

bien que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\sqrt{x} e^{-x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x} e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} = \sqrt{x} e^{-x}$$

Dans ces conditions, on peut calculer :

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{u} \ln(u) e^{-u} du$$

$$= [(-\sqrt{u} e^{-u} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{u})) \ln(u)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} (-\sqrt{u} e^{-u} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{u})) \frac{1}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du$$

Concernant l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$, on a assez facilement:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(1)$$

Quant à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du$, on peut procéder par encadrement et écrire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du$$

Et on a :

$$\int_0^x \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{erfc}(t)}{t} 2t dt = 2\sqrt{x} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} [e^{-x} - 1]$$

Dans ces conditions on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \left[2\sqrt{u} \operatorname{erfc}(\sqrt{u}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u} \right]_1^{+\infty} = -2\operatorname{erfc}(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(t)}{t^2} dt = 2 \left[-\frac{\operatorname{erfc}(t)}{t} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u^{3/2}} du = 2\operatorname{erfc}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} EI_1(1)$$

Et finalement, il reste :

$$2\operatorname{erfc}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} EI_1(1) \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq -2\operatorname{erfc}(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1}$$

Numériquement, cela donne :

$$0.0671 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \leq 0.1005$$

Une simulation sous Matlab donne comme valeur approchée : $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du = 0.0818$. En

fait on voit qu'une excellente approximation est obtenue en faisant la valeur moyenne quadratique des bornes sup et inf, ce qui donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{u})}{u} du \approx 2 \sqrt{\left[\operatorname{erfc}(1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} EI_1(1) \right] \left[-\operatorname{erfc}(1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]} = \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) = 0.0821$$

Cela conduit à :

$$I = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)^{3/2}} \left[-\ln(E_b / N_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} + \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) \right]$$

Le dernier type d'intégrale à calculer est :

$$L = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \sqrt{u} e^{-u} \frac{du}{\frac{E_b}{N_0}} = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0} \right)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$$

Et on a :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Et finalement : } L = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour évaluer le taux d'erreur il manque alors à calculer les intégrales :

$$M = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{N_0}{E_b} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{N_0}{E_b} \sqrt{u}}} du = \sqrt{\frac{N_0}{E_b}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{N_0}{E_b}}$$

$$N_a = \int_0^{+\infty} e^{-x/a} \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(\frac{E_b}{N_0} + 1/a)}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{aN_0}{aE_b + N_0} \sqrt{u}}} \frac{aN_0}{aE_b + N_0} du = \sqrt{\pi} \left[\frac{aN_0}{N_0 + aE_b} \right]^{1/2}$$

$$N_a = \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{N_0}{aE_b} + 1 \right)^{1/2}} \approx \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Si on revient au calcul initial on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) E I_1(x/a) dx = \sqrt{\frac{E_b}{\pi N_0}} \left[-\varepsilon L - I + \ln(a) L + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} J_k}{a^k k k!} - a N_a + a M \right]$$

Avec :

$$L = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{3/2}} \left[-\ln(E_b / N_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+3/2)^2} + \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) \right]$$

$$\text{Et : } \operatorname{Int}_{\operatorname{erfc}}(1) = 2 \sqrt{\left[\operatorname{erfc}(1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} E I_1(1) \right] \left[-\operatorname{erfc}(1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right]} = 0.0821$$

$$J_k = \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{k+3/2}} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+2} (k+1)!} \sqrt{\pi}$$

$$N_a = \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{N_0}{aE_b} + 1 \right)^{1/2}} \approx \sqrt{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right) = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{a \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$M = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}}$$

Annexe1.2

Dans cette partie on calcule la réponse de canal modulé par la distribution de puissance basé sur la loi gaussienne (94) exprimé dans la partie III.3.2.2.2

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^{+\infty} e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du \right]$$

$$f(X) = f_1(X) + f_2(X)$$

Concernant la première fonction $f_1(X)$, on utilise un développement en série entière, ce qui donne :

$$\int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n \sigma^{2n} n!} \int_1^{+\infty} \frac{(X/u-m)^{2n} e^{-u}}{u} du$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m}{\sigma}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{X^k}{m^k} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{k+1}} du$$

Les intégrales de la forme $I_n(a) = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx$ se calculent par récurrence avec la formule :

$$I_n(a) = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx = a^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t/a}}{t^{n+1}} dt$$

ce qui donne :

$$I_n(a) = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx = a^n \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t/a}}{t^{n+1}} dt = a^n \frac{e^{-1/a}}{n} - \frac{1}{n} I_{n-1}(a)$$

avec

$$I_n(a) = a^n \frac{e^{-1/a}}{n} - \frac{1}{n} \left[\frac{a^{n-1}}{n-1} e^{-1/a} - \frac{1}{(n-1)} I_{n-2}(a) \right]$$

$$I_n(a) = (-1)^{n-n} a^n \frac{e^{-1/a}}{n} + (-1)^{n-(n-1)} a^{n-1} \frac{e^{-1/a}}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-(n-k)} a^{n-k} \frac{e^{-1/a}}{n(n-1)\dots(n-k)} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t/a}}{t} dt$$

Avec : $I_0(a) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t/a}}{t} dt = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = EI_1(1/a)$. On en déduit dans notre cas particulier ici :

$$I_n(a) = \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{n!} a^{n-k} e^{-1/a} + \frac{(-1)^n}{n!} EI_1(1/a)$$

Donc en l'appliquant à l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{k+1}} du = I_k(1)$, il vient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{k+1}} du = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{(k-1-n)!}{k!} e^{-1} + \frac{(-1)^k}{k!} EI_1(1)$$

On peut donc écrire :

$$\int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m}{\sigma}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{X^k}{m^k} I_k(1)$$

Et finalement on obtient:

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_1^{+\infty} e^{-(X/u-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m}{\sigma}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{X^k}{m^k} I_k(1) \right]$$

Et pour a quelconque, on obtient :

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m}{\sigma}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \frac{X^k}{m^k} I_k(a) \right]$$

Remarque importante : on constate parfois une divergence de la série, ceci s'explique par le fait que l'on a :

$$\int_{1/a}^{+\infty} \left(\frac{1}{t^k} - \frac{1}{t^{k-1}} \right) dt \leq \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt \leq \int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{t^k} dt \text{ soit encore : } \left[\frac{t^{-k+1}}{-k+1} - \frac{t^{-k+2}}{-k+2} \right]_{1/a}^{+\infty} \leq \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt \leq \left[\frac{t^{-k+1}}{-k+1} \right]_{1/a}^{+\infty}$$

Soit :

$$\frac{a^{k-1}}{k-1} - \frac{a^{k-2}}{k-2} \leq \int_{1/a}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt \leq \frac{a^{k-1}}{k-1}$$

Et donc : $(-1)^k \frac{X^k}{m^k} I_k(a) \approx (-1)^k \frac{X^k}{m^k} \frac{a^{k-1}}{k-1} = (-1)^k X^k \frac{a^k}{m^k (k-1)a}$; il y aura convergence

absolue de la série si (en appliquant le critère de d'Alembert): $\left| X \frac{a}{m} \right| < 1$ soit : $|X| < \frac{m}{a}$.

-En ce qui concerne la deuxième intégrale $f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^{+\infty} e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du$

on a le développement en série entière :

$$f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^{+\infty} e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du$$

Avec :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u} du + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du$$

Or, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du = \sqrt{2\sigma} X^n \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt$$

En effet :

$$t = (Xu - m) / \sqrt{2\sigma} \text{ et } u = \frac{\sqrt{2\sigma}t + m}{X}$$

Ce qui donne :

$$f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} X^n \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt$$

Ce qui donne

$$f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} X^n J_{n+1,a}(X)$$

En posant : $J_{n,a}(X) = \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^n} dt$ et en intégrant par parties, on montre la

récurrence suivante :

$$J_{n,a}(X) = \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^n} dt = \left[-\frac{1}{(n-1)\sqrt{2\sigma}(\sqrt{2\sigma t + m})^{n-1}} e^{-t^2} \right]_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} - \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{2te^{-t^2}}{(n-1)\sqrt{2\sigma}(\sqrt{2\sigma t + m})^{n-1}} dt$$

$$J_{n,a}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}(n-1)} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{a^{n-1}X^{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{2\sigma}(n-1)} \int_{(Xa-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2\sigma t + m} - m)e^{-t^2}}{\sqrt{2\sigma}(\sqrt{2\sigma t + m})^{n-1}} dt$$

$$J_{n,a}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}(n-1)} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{a^{n-1}X^{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{2\sigma}(n-1)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_{(aX-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n-2}} dt - \frac{m}{\sqrt{2\sigma}} \int_{(aX-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n-1}} dt \right]$$

$$J_{n,a}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}(n-1)} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{a^{n-1}X^{n-1}} - \frac{1}{\sigma^2(n-1)} J_{n-2,a}(X) + \frac{m}{\sigma^2(n-1)} J_{n-1,a}(X)$$

On obtient finalement la relation de récurrence :

$$-\frac{1}{\sigma^2} J_{n-2,a}(X) + \frac{m}{\sigma^2} J_{n-1,a}(X) + \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{a^{n-1}X^{n-1}} = (n-1)J_{n,a}(X)$$

$$J_{n,a}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-(aX-m)^2/2\sigma^2}}{(n-1)a^{n-1}X^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)\sigma^2} J_{n-2,a}(X) + \frac{m}{(n-1)\sigma^2} J_{n-1,a}(X)$$

Annexe 1.3

Nous intéressons maintenant au calcul la probabilité d'erreur $P_{e,1}(s_1)$ dans la partie III.3.2.2.2 dans le cas ou la BS envoie un paquet un MTD dont l'allocation de puissance suit la lois gaussienne

$$P_{e,1}(s_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{1/a}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx \right] \frac{e^{-u}}{u}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) e^{-(xu-m)^2/2\sigma^2} dx \right] \frac{e^{-1/u}}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \left(P_{e,1}^{(1)}(a_n) + P_{e,1}^{(2)}(a_n) \right)$$

Par la suite, on va déterminer $P_{e,1}^{(1)}(a_n)$ et $P_{e,1}^{(2)}(a_n)$

Pour déterminer $P_{e,1}^{(1)}(a_n)$, on commence donc par calculer les intégrales dépendant de x ; on peut procéder de la façon suivante :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx = \frac{\sigma u}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} \left((x/u-m)/\sqrt{2\sigma} \right) \frac{e^{-\frac{x E_b}{N_0}}}{\sqrt{x}} dx + \sigma u \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \left(m/\sqrt{2\sigma} \right)$$

Car on a :

$$\int_0^x e^{-(t/u-m)^2/2\sigma^2} dt = \sqrt{2\sigma} u \int_{-m/\sqrt{2\sigma}}^{(x/u-m)/\sqrt{2\sigma}} e^{-z^2} dz = \sigma u \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \left((x/u-m)/\sqrt{2\sigma} \right) + C^{ste}$$

On utilise ensuite le D.S.E :

$$\operatorname{erf}((x/u-m)/\sqrt{2}\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x/u-m)^{2n+1}}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma u}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} C_{2n+1}^k m^{2n+1-k} \frac{1}{u^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1/2} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx + \sigma u \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma) \end{aligned}$$

L'intégrale : $\int_0^{+\infty} x^{k-1/2} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx$ à calculer prend la forme :

$$J_k = \int_0^{+\infty} x^{k-1/2} e^{-\frac{x E_b}{N_0}} dx = \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{k+1/2} \int_0^{+\infty} t^{k-1/2} e^{-t} dt = \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{k+1/2} \Gamma(k+1/2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-u} du &= \Gamma(k+1/2) = (k-1/2)\Gamma(k-1/2) = (k-1/2)(k-3/2)\Gamma(k-3/2) \\ \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-u} du &= (k-1/2)(k-3/2)\dots(k-n+1/2)\dots\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

On en déduit : $\Gamma(k+1/2) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}$. Donc, il reste :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{1}{u^{k-1}} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} + \sigma u \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma) \end{aligned}$$

Pour terminer, il reste à intégrer par rapport à u :

$$\begin{aligned} & \int_{1/a}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) e^{-(x/u-m)^2/2\sigma^2} dx \right) \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_{1/a}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{1}{u^{k-1}} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} \frac{e^{-u}}{u} du + \dots \\ & \dots + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma) \int_{1/a}^{+\infty} e^{-u} du \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} (2n+1)n!} \left[-m^{2n+1} e^{-1/a} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} m^{2n+1-k} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} I_{k-1}(a) \right] + \dots \\ & \dots + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma) e^{-1/a} \end{aligned}$$

Avec : $I_{k-1}(a) = \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \frac{(k-m-2)!}{(k-1)!} a^{k-1-m} e^{-1/a} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} EI_1(1/a)$

On obtient donc au final :

$$P_{e,1}^{(1)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n} (2n+1)n!} \left[-m^{2n+1} e^{-1/a} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} m^{2n+1-k} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} I_{k-1}(a) \right]$$

$$\dots + \frac{1}{4} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma) e^{-1/a}$$

Avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n m^{2n+1}}{2^{n+1/2} \sigma^{2n} (2n+1)n!} = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Donc, finalement :

$$P_{e,1}^{(1)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{m^k \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} I_{k-1}(a) \quad (58)$$

Concernant la seconde probabilité d'erreur $P_{e,1}^{(2)}(a_n)$, on commence par intégrer par rapport à u :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) e^{-(xu-m)^2/2\sigma^2} dx \right] \frac{e^{-1/u}}{u} du$$

On a déjà montré que :

$$f_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{+\infty} e^{-(xu-m)^2/2\sigma^2} \frac{e^{-1/u}}{u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-(Xu-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} X^n J_{n+1,a}(X)$$

Avec : $J_{n,a}(X) = \int_{(Xu-m)/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2}\sigma t + m)^n} dt$. Il reste donc à calculer :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(x) dx$$

On peut essayer également de déterminer d'abord par intégration par parties une primitive de

$u \rightarrow u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right)$, on a :

$$\int_0^x u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) du = 2 \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{n+1} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x} t^{2n+1} \operatorname{erfc}(t) dt$$

Avec :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+1} \operatorname{erfc}(t) dt = \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2n+2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+2} e^{-t^2} dt$$

On a :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+2} e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} + \frac{(2n+1)}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

Donc, si on reporte, il reste :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+1} \operatorname{erfc}(t) dt = \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2n+2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} + \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+1} \operatorname{erfc}(t) dt \\ &= \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2n+2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} + \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \int_0^x u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}u}\right) du = 2 \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{n+1} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n+1} \operatorname{erfc}(t) dt \\ &= 2 \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{n+1} \left[\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2n+2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} + \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi}(2n+2)} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} + \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{n+1} \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi}(n+1)} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

On peut utiliser l'encadrement :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} dt \leq \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^n x^n e^{-t^2} dt$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} &\leq \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) \\ \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^{n+1/2} \frac{x^{n+1/2}}{2n+1} e^{-\frac{E_b}{N_0}x} &\leq \int_0^{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}} t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}x}\right) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b x}{N_0}} \leq \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{n+1} \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi(n+1)}} \int_0^{\sqrt{\frac{E_b x}{N_0}}} t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(2n+1)}{2n+2} x^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x\right)$$

Et donc :

$$\int_0^x u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) du \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b x}{N_0}} + \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(2n+1)}{2n+2} x^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x\right)$$

Et :

$$\int_0^x u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) du \geq \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} x^{n+1/2} e^{-\frac{E_b x}{N_0}} + \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi(n+1)}} e^{-\frac{E_b x}{N_0}}$$

$$\int_0^x u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) du \geq \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} x\right)$$

On obtient donc pour le calcul de : $\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du$

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du \geq \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u)\right]_0^{+\infty} + \frac{a}{\sqrt{2\sigma} a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du$$

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du \geq \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2\sigma} a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

On a à calculer: $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right)$, or on a :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt$$

$$\text{Et : } \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt \leq \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{u^{n+1} a^{n+1}} dt = \frac{1}{a^{n+1} u^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2\sigma})$$

$$\text{Donc : } 0 < \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2\sigma}) = 0$$

Ce qui donne : $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) = 0$ et à plus forte raison :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) = 0$$

De même, on a à calculer : $\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right)$, on a :

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) = \lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} \left[\int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma}t+m)^{n+1}} dt \right]$$

Or on a :

$$e^{-(m-au)^2/2\sigma^2} \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{dt}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} \leq \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} du \leq \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{dt}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}}$$

Et l'on a :

$$\int_0^{(m-au)/\sqrt{2}\sigma} \frac{dt}{(m-\sqrt{2}\sigma t)^{n+1}} = \left[\frac{1}{n\sqrt{2}\sigma} \frac{1}{(m-\sqrt{2}\sigma t)^n} \right]_0^{(m-au)/\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{n\sqrt{2}\sigma} \left[\frac{1}{a^n u^n} - \frac{1}{m^n} \right]$$

Donc il vient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} u^{n+1} \int_0^{(m-au)/\sqrt{2}\sigma} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2}\sigma t)^{n+1}} du \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{n+1} u^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{2}\sigma} \left[\frac{1}{a^n u^n} - \frac{1}{m^n} \right] = 0$$

Et :

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} \int_0^{(m-au)/\sqrt{2}\sigma} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2}\sigma t)^{n+1}} dt \geq \lim_{x \rightarrow 0} u^{n+1} \frac{e^{-(m-au)^2/2\sigma^2}}{n\sqrt{2}\sigma} \left[\frac{1}{a^n u^n} - \frac{1}{m^n} \right] = 0$$

Ce qui donne : $\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) = 0$ et ainsi : $\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1} J_{n+1,a}(u) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) = 0$ (on a

$$\lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) = 1).$$

Il reste donc :

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du \geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

Et :

$$\int_0^x e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du = \frac{\sqrt{2}\sigma}{a} \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{(ax-m)/\sqrt{2}\sigma} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{2}\sigma}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{(ax-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) + C^{ste}$$

$$\int_0^x e^{-(t/u-m)^2/2\sigma^2} dt = \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{(ax-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) + C^{ste}$$

Avec :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \\ &= \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{(au-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \right]_0^{+\infty} + \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{(au-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \frac{e^{-\frac{uE_b}{N_0}}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{\sigma}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{(au-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \frac{e^{-\frac{uE_b}{N_0}}}{\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

On utilise ensuite le D.S.E :

$$\operatorname{erf}\left(\frac{(au-m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (au-m)^{2n+1}}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!}$$

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_b}{N_0} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1/2} \sigma^{2p} (2p+1)p!} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^{k+1} C_{2p+1}^k m^{2p+1-k} a^{k-1} \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-\frac{uE_b}{N_0}} du + \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

L'intégrale : $\Gamma(k+1/2) = \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-\frac{uE_b}{N_0}} du$ a déjà été calculée et on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p \sigma^{2p} (2p+1)p!} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^{k+1} m^{2p+1-k} a^{k-1} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} + \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma)$$

Ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du \geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du$$

$$\geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p \sigma^{2p} (2p+1)p!} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^{k+1} m^{2p+1-k} a^{k-1} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2} + \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma)$$

Avec :

$$\frac{1}{a} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} m^{2p+1}}{2^p \sigma^{2p} (2p+1)p!}$$

$$= -\sqrt{2} \frac{\sigma}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p m^{2p+1}}{2^{p+1/2} \sigma^{2p+1} (2p+1)p!} = -\frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Il reste donc :

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du$$

$$\geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p \sigma^{2p} (2p+1)p!} \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k+1} m^{2p+1-k} a^{k-1} \frac{1}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)^k} \frac{(2n+1)!(2k)!}{2^{2k} (2n+1-k)!(k!)^2}$$

En ce qui concerne la borne supérieure, on a :

$$\int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du$$

$$\leq \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}u\right) J_{n+1,a}(u) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \left[\left[u^{n+1/2} e^{\frac{E_b u}{N_0}} J_{n+1,a}(u) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u^{n+1/2} e^{\frac{E_b u}{N_0}} \frac{a}{\sqrt{2}\sigma a^{n+1}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du \right] + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(2n+1)}{2n+2} \left[\left[u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}u\right) J_{n+1,a}(u) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}u\right) \frac{a}{\sqrt{2}\sigma a^{n+1}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u^{n+1}} du \right]$$

On a à calculer: $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) e^{\frac{E_b u}{N_0}}$, on a :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} \int_{(au-m)/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2}\sigma t + m)^{n+1}} dt$$

$$\text{Et : } \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt \leq \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{u^{n+1} a^{n+1}} dt = \frac{1}{a^{n+1} u^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2\sigma})$$

$$\text{Donc : } 0 < \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2\sigma}) = 0$$

Ce qui donne : $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) = 0$ et à plus forte raison :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) e^{-\frac{E_b u}{N_0}} = 0$$

On a maintenant à calculer: $\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) e^{-\frac{E_b u}{N_0}}$, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} \left[\int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-u^2}}{(m-\sqrt{2\sigma}u)^{n+1}} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt \right] \end{aligned}$$

Or on a :

$$e^{-(m-au)^2/2\sigma^2} \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{dt}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} \leq \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} dt \leq \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{dt}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}}$$

Et l'on a :

$$\int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{du}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} = \left[\frac{1}{n\sqrt{2\sigma}} \frac{1}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^n} \right]_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} = \frac{1}{n\sqrt{2\sigma}} \left[\frac{1}{a^n u^n} - \frac{1}{m^n} \right]$$

Donc il vient :

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} \int_0^{(m-au)/\sqrt{2\sigma}} \frac{e^{-t^2}}{(m-\sqrt{2\sigma}t)^{n+1}} du \leq \lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} \frac{1}{n\sqrt{2\sigma}} \left[\frac{1}{a^n u^n} - \frac{1}{m^n} \right] = 0$$

On arrive donc à : $\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) e^{-\frac{E_b u}{N_0}} = 0$

On a, pour finir, à calculer :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u)$$

$$\text{Avec : } \lim_{u \rightarrow +\infty} u^n J_{n+1,a}(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^n \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt$$

$$\text{Et : } \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2\sigma t + m})^{n+1}} dt \leq \int_{(au-m)/\sqrt{2\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{u^{n+1} a^{n+1}} dt = \frac{1}{a^{n+1} u^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2\sigma})$$

$$\text{Donc : } 0 < \lim_{u \rightarrow +\infty} u^n \int_{(au-m)/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2}\sigma t + m)^{n+1}} dt \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2u} \operatorname{erfc}((au-m)/\sqrt{2}\sigma) = 0$$

$$\text{Et il vient bien : } \lim_{u \rightarrow +\infty} u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u) = 0$$

Et enfin, il reste à calculer : $\lim_{u \rightarrow 0} u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u)$. Or on a :

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \approx_{u \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u^{1/2}$$

Donc la limite à calculer se transforme en : $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u)$ et on montre que :

$\lim_{u \rightarrow 0} u^{n+1/2} J_{n+1,a}(u) = 0$, en effet on vient de le calculer sur la page précédente. En

conclusion, on a : $\lim_{u \rightarrow 0} u^n \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) J_{n+1,a}(u) = 0$.

Il reste donc maintenant:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} u^n \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{uE_b}{N_0}}\right) J_{n+1,a}(u) du \\ & \leq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ & \dots + \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(2n+1)}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^n} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \end{aligned}$$

Concernant l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(a^2 u^2 - 2aum + m^2)/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du = e^{\frac{\sigma^2}{2a^2} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^2 - \frac{m E_b}{a N_0}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(au - (m - \frac{\sigma^2 E_b}{a N_0}))^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du$$

On pose alors : $m' = m - \frac{\sigma^2}{a} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du = e^{\frac{\sigma^2}{2a^2} \left(\frac{E_b}{N_0}\right)^2 - \frac{m E_b}{a N_0}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(au-m')^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du$$

On pose : $t = (au - m')/\sqrt{2}\sigma$ $u = \frac{\sqrt{2}\sigma t + m'}{a}$ $du = \frac{\sqrt{2}\sigma}{a} dt$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(au-m')^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{2}{a}} \sigma \int_{-m'/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\sqrt{2}\sigma t + m')^{1/2}} dt$$

On a au final :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{n+1,a}(x) dx$$

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \int_0^{+\infty} x^{2p} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2p+1,a}(x) dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} x^{2m+1} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2m+2,a}(x) dx$$

Et on a, $\forall p, \forall m$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2p} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2p+1,a}(x) &\leq \frac{1}{(2p+1)\sqrt{2}\sigma a^{2p}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \dots \\ &\dots - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2p+1)} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2p}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ &\dots + \left(\frac{N_0}{E_b} \right) \frac{(4p+1)}{4p+2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2p}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \end{aligned}$$

Et

$$\int_0^{+\infty} x^{2p} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2p+1,a}(x) \geq \frac{1}{(2p+1)\sqrt{2}\sigma a^{2p}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

Pour la partie négative :

$$-\int_0^{+\infty} x^{2m+1} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2m+2,a}(x) dx \leq -\frac{1}{(2m+2)\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

Et :

$$\begin{aligned} -\int_0^{+\infty} x^{2m+1} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}} \right) J_{2m+2,a}(x) dx &\geq -\frac{1}{(2m+2)\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\sqrt{\pi}(2m+2)} \left(\frac{N_0}{E_b} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ &\dots - \left(\frac{N_0}{E_b} \right) \frac{(4m+3)}{4m+4} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u \right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{e,1}^{(2)}(a_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \int_0^{+\infty} x^{2p} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) J_{2p+1,a}(x) dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} x^{2m+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) J_{2m+2,a}(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \left[\frac{1}{(2p+1)\sqrt{2\sigma a^{2p}}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots \right. \\
&\quad \dots - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2p+1)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma a^{2p}}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b}{N_0} u} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\
&\quad \dots + \left. \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(4p+1)}{4p+2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma a^{2p}}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \right] + \dots \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\frac{1}{(2m+2)\sqrt{2\sigma a^{2m+1}}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \right]
\end{aligned}$$

On obtient donc pour la borne sup :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{1}{\sqrt{2\sigma a^n}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots \\
&\dots - \frac{1}{\pi} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b}{N_0} u} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\
&\dots + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+1)}{(2p)!(4p+2)} \frac{1}{a^{2p}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du + \dots
\end{aligned}$$

Il reste à calculer les trois séries entières :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{1}{a^n}, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+1)}{(2p)!(4p+2)} \frac{1}{a^{2p}}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{6a^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} + \dots \\
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{6a^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!} + \dots\right) = 1 - e^{-1/a}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} = a(1 - e^{-1/a})$$

Quant à la série S_2 , elle rassemble tous les termes paires de la série S_1 , sa somme est donc la partie paire de la fonction : $f(a) = a(1 - e^{-1/a})$, soit :

$$S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}} = \frac{1}{2}(f(a) + f(-a))$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(a(1 - e^{-1/a}) - a(1 - e^{1/a})) = \frac{1}{2}a(e^{1/a} - e^{-1/a}) = \frac{1}{2}a \sinh(1/a)$$

Pour la série S_3 , on peut écrire :

$$S_3 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+1)}{(2p)!(4p+2)} \frac{1}{a^{2p}}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+1)}{(2p)!(2p+1)} \frac{1}{a^{2p}} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+2-1)}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \frac{1}{a^{2p}} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}}$$

La quantité $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \frac{1}{a^{2p}}$ représente la partie paire du développement en série entière de

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{a^p} \text{ soit : } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \frac{1}{a^{2p}} = \frac{1}{2} (e^{1/a} + e^{-1/a}) = \cosh(1/a)$$

Quant à la quantité $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}}$, on peut encore l'écrire : $a \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p+1}}$ et donc

cela conduit à : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{a^{2p}} = a \sinh(1/a)$; on obtient donc finalement :

$$S_3 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(4p+1)}{(2p)!(2p+1)} \frac{1}{a^{2p}} = \cosh(1/a) - \frac{1}{2} a \sinh(1/a)$$

Avec les définitions suivantes : $\cosh(1/a) = \frac{1}{2} (e^{1/a} + e^{-1/a})$ et : $\sinh(1/a) = \frac{1}{2} (e^{1/a} - e^{-1/a})$.

Finalement, la borne sup est égale à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} a(1 - e^{-1/a}) \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots \\ & \dots - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} a \sinh(1/a) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b}{N_0}u} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\frac{N_0}{E_b}\right) [\cosh(1/a) - \frac{1}{2} a \sinh(1/a)] \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \end{aligned}$$

Quant à la borne inférieure, on a :

$$\begin{aligned} P_{e,1}^{(2)}(a_n) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \int_0^{+\infty} x^{2p} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) J_{2p+1,a}(x) dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^{+\infty} x^{2m+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x E_b}{N_0}}\right) J_{2m+2,a}(x) dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \left[\frac{1}{(2p+1)\sqrt{2}\sigma a^{2p}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \right] + \dots \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\frac{1}{(2m+2)\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du + \dots \right. \\ & \quad \dots - \frac{1}{\sqrt{\pi}(2m+2)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b}{N_0}u} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ & \quad \left. \dots + \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(4m+3)}{4m+4} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma a^{2m+1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{e,1}^{(2)}(a_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{(n+1)\sqrt{2\sigma a^n}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma a^n}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \frac{(2n+1)}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma a^n}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \right] \right] \\
P_{e,1}^{(2)}(a_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} \\
&\quad \dots - \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{a^n(n+1)!}
\end{aligned}$$

Et pour la borne inférieure, on a :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!}$$

Donc au final :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!}$$

Et :

$$\begin{aligned}
P_{e,1}^{(2)}(a_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} \\
&\quad \dots - \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b u}{N_0}} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{a^n(n+1)!}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{a^n(n+1)!} = \sum_n \frac{(-1)^n(2n+2-1)}{a^n(n+1)!} = 2 \sum_n \frac{(-1)^n}{a^n n!} - \sum_n \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{6a^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} + \dots \\
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}(n+1)!} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{6a^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!} + \dots\right) = 1 - e^{-1/a}
\end{aligned}$$

Donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n(n+1)!} = a(1 - e^{-1/a})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P_{e,1}^{(2)}(a_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} a(1 - e^{-1/a}) \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du \\ &\dots - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right)^{1/2} a(1 - e^{-1/a}) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E_b}{N_0}u} \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{u}} du + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{N_0}{E_b}\right) \left[2e^{-1/a} - a(1 - e^{-1/a})\right] \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) \frac{e^{-(au-m)^2/2\sigma^2}}{u} du \end{aligned}$$

Et :

$$P_{e,1}^{(2)}(a_n) \geq \frac{a(1 - e^{-1/a})}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} u\right) e^{-(au-m)^2/2\sigma^2} du$$

Annexe2

Annexe2.1

Pour déterminer la Probabilité d'erreur $P_{e,2}(a_n)$ dans le cas ou la BS envoie un paquet superposé à deux MTD en utilisant la loi uniforme la forme de l'équation de départ a été cité en (109) dans la partie III.3.2.3.1 et il reste à moyenner sur la distribution de P_2' :

$P_{e,2}(a_n) = \int P_{e,2}(a_n | P_2') f(P_2') dP_2'$, on a à calculer des intégrales du type :

$$I_{P_2'} = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}\right) dx$$

Pour le calcul de $I_{P_2'}$ on pose : $u = \sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}$ $u^2 = \frac{P_{\max}}{x}$ $x = \frac{P_{\max}}{u^2}$ $dx = -2 \frac{P_{\max}}{u^3} du$ d'où :

$$I_{P_2'} = \frac{2P_{\max}}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du$$

Concernant l'intégrale $P = \int_1^{\sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du$, on peut intégrer par parties : (avec $\delta_1 = 1$ et

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}})$$

$$P = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du = \left[-\frac{1}{2u^2} \operatorname{erfc}(u) \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du$$

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du$$

Pour l'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du$ on utilise l'intégration par parties :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du = \left[-\frac{e^{-u^2}}{u} \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u} 2ue^{-u^2} du = \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - 2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{-u^2} du$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du = \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

On obtient donc l'expression de P :

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

Ce qui donne directement la valeur de I_{P_2} :

$$I_{P_2} = \frac{2P_{\max}}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du$$

$$I_{P_2} = \frac{1}{1-x} [\operatorname{erfc}(1) - x \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} [e^{-1} - \sqrt{x} e^{-1/x}] + 2[\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})]$$

On a également à calculer une intégrale de la forme :

$$J_{P_2} = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \sqrt{x} e^{-\frac{P_{\max}}{x}} dx = \frac{(P_{\max})^{3/2}}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$$

Où on a utilisé le changement de variable : $u = \frac{P_{\max}}{x}$ $x = \frac{P_{\max}}{u}$ $dx = -\frac{P_{\max}}{u^2} du$. Concernant

l'intégrale $\int_1^{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$, on a rapidement :

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du = \left[-\frac{2}{3} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} - \frac{2}{3} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} du = \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\gamma_1^{3/2}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\gamma_2^{3/2}} \right] - \frac{2}{3} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} du$$

Avec :

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} du = \left[-2 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} - 2 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}} \right] - 2 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

Quant à l'intégrale $\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$, on a par simple changement de variable :

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \int_{\sqrt{\gamma_1}}^{\sqrt{\gamma_2}} \frac{e^{-t^2}}{t} 2tdt = 2 \int_{\sqrt{\gamma_1}}^{\sqrt{\gamma_2}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_2})]$$

On obtient donc finalement :

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du = \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\gamma_1^{3/2}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\gamma_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_2})]$$

Ce qui donne directement la valeur de J_{P_2} :

$$J_{P_2} = \frac{(P_{\max})^{3/2}}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$$

$$J_{P_2} = \frac{(P_{\max})^{3/2}}{P_{\max} - P_{\min}} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\gamma_1^{3/2}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\gamma_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_2})] \right]$$

$$\text{Avec : } \gamma_1 = 1 \text{ et } \gamma_2 = \frac{P_{\max}}{P_{\min}}$$

La dernière forme un peu délicate à calculer est la suivante :

$$K_{P_2} = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}\right) dx$$

Pour le calcul de K_{P_2} , on pose : $u = \sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}$ $u^2 = \frac{P_{\max}}{x}$ $x = \frac{P_{\max}}{u^2}$ $dx = -2 \frac{P_{\max}}{u^3} du$, il vient :

$$K_{P_2} = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\sqrt{P_{\max}/P_{\min}}} \frac{P_{\max}}{u^2} \operatorname{erfc}(u) 2 \frac{P_{\max}}{u^3} du$$

$$K_{P_2} = \frac{2P_{\max}^2}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\sqrt{P_{\max}/P_{\min}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$$

Concernant l'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$, on intègre par parties : ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \sqrt{P_{\max}/P_{\min}}$)

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du = \left[-\frac{1}{4u^4} \operatorname{erfc}(u) \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du$$

Quant à l'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du$, on obtient :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du = \left[-\frac{1}{3u^3} e^{-u^2} \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{2}{3} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du = \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{2}{3} \left[\left[-\frac{e^{-u^2}}{u} \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - 2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u} u du \right]$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du = \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] + \frac{2}{3} \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

On en déduit donc :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] + \frac{2}{3} \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

Finalement, on peut obtenir l'intégrale K_{P_2} sous la forme :

$$K_{P_2} = \frac{2P_{\max}^2}{P_{\max} - P_{\min}} \int_1^{\sqrt{P_{\max}/P_{\min}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$$

$$K_{P_2'} = \frac{P_{\max}^2}{P_{\max} - P_{\min}} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{2}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

Avec : $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \sqrt{P_{\max} / P_{\min}}$

Pour le calcul de la probabilité d'erreur, il reste alors :

$$P_{e,2}(a_n | P_2') = \frac{P_{\max}}{2(P_{\max} - P_{\min})} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{P_2'}}\right) - \frac{\sqrt{P_{\max}}}{2\sqrt{\pi}(P_{\max} - P_{\min})} \sqrt{P_2'} e^{-\frac{P_{\max}}{P_2'}} - \frac{1}{4(P_{\max} - P_{\min})} P_2' \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{P_2'}}\right) + \dots$$

$$\dots \frac{1}{2(P_{\max} - P_{\min})} P_2' \left(\frac{\sqrt{\gamma} e^{-\gamma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right)$$

$$P_{e,2}(a_n) = \frac{P_{\max}}{2(P_{\max} - P_{\min})} I_{P_2'} - \frac{\sqrt{P_{\max}}}{2\sqrt{\pi}(P_{\max} - P_{\min})} J_{P_2'} - \frac{1}{4(P_{\max} - P_{\min})} K_{P_2'} + \dots$$

$$\dots + \frac{(P_{\max} + P_{\min})}{4(P_{\max} - P_{\min})} \left(\frac{\sqrt{\gamma} e^{-\gamma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right)$$

Avec :

$$\frac{P_{\max}}{2(P_{\max} - P_{\min})} I_{P_2'} = \frac{P_{\max}^2}{2(P_{\max} - P_{\min})^2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + 2[\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

Avec $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = \sqrt{\frac{P_{\max}}{P_{\min}}}$, on pose : $x = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} < 1$; il vient :

$$\frac{P_{\max}}{2(P_{\max} - P_{\min})} I_{P_2'} = \frac{1}{2(1-x)^2} \left[3\operatorname{erfc}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-1/x} - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})(x+2) \right]$$

Quant à la seconde quantité, on a :

$$\frac{\sqrt{P_{\max}}}{2\sqrt{\pi}(P_{\max} - P_{\min})} J_{P_2'} = \frac{P_{\max}^2}{2\sqrt{\pi}(P_{\max} - P_{\min})^2} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\gamma_1^{3/2}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\gamma_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{e^{-\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma_2})] \right]$$

on pose : $x = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} < 1$; il vient :

$$\frac{\sqrt{P_{\max}}}{2\sqrt{\pi}(P_{\max} - P_{\min})} J_{P_2'} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-x)^2} \left[\frac{2}{3} [e^{-1} - x^{3/2} e^{-1/x}] - \frac{4}{3} [e^{-1} - \sqrt{x} e^{-1/x}] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] \right]$$

Quant à la troisième quantité, on a :

$$\frac{1}{4(P_{\max} - P_{\min})} K_{P_2'} = \frac{P_{\max}^2}{2(P_{\max} - P_{\min})^2} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

on pose : $x = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} < 1$; il vient :

$$\frac{1}{4(P_{\max} - P_{\min})} K_{e_2}$$

$$= \frac{1}{2(1-x)^2} \left[\frac{1}{4} [\operatorname{erfc}(1) - x^2 \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} [e^{-1} - x^{3/2} e^{-1/x}] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} [x e^{-1/x} - e^{-1}] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] \right]$$

Cela conduit à :

$$P_{e,2}(a_n) = \frac{1}{2(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - x \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} [e^{-1} - \sqrt{x} e^{-1/x}] + 2[\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})]] + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-x)^2} \left[\frac{2}{3} [e^{-1} - x^{3/2} e^{-1/x}] - \frac{4}{3} [e^{-1} - \sqrt{x} e^{-1/x}] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] \right] + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{2(1-x)^2} \left[\frac{1}{4} [\operatorname{erfc}(1) - x^2 \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} [e^{-1} - x^{3/2} e^{-1/x}] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} [x e^{-1/x} - e^{-1}] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{(1+x)}{4(1-x)} \left[\frac{\sqrt{\gamma} e^{-\gamma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \quad (23)$$

$$P_{e,2}(a_n) = -\frac{1}{8(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - x^2 \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] + \frac{1}{2(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - x \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2(1-x)^2} [\operatorname{erfc}(1) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{x})] + \frac{1}{4\sqrt{\pi}(1-x)^2} [x^{3/2} e^{-1/x} - e^{-1}] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{6\sqrt{\pi}(1-x)^2} [x e^{-1/x} - e^{-1}] + \frac{1}{3\sqrt{\pi}(1-x)^2} [\sqrt{x} e^{-1/x} - e^{-1}] + \frac{(1+x)}{4(1-x)} \left[\frac{\sqrt{\gamma} e^{-\gamma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) - \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right]$$

Annexe 2.2

Pour déterminer la Probabilité d'erreur $P_{e,2}(a_n)$ dans le cas où la BS envoie un paquet superposé à deux MTD en utilisant la loi gaussienne la forme de l'équation de départ a été citée en (112) dans la partie III.3.2.3.2, on a que à évaluer les intégrales suivants:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

On intègre par parties avec :

$$\int_0^x e^{-(u-m)^2/2\sigma^2} du = \sqrt{2}\sigma \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{(x-m)/\sqrt{2}\sigma} e^{-t^2} dt = \sqrt{2}\sigma \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}((x-m) / \sqrt{2}\sigma) + Cste$$

$$\int_0^x e^{-(u-m)^2/2\sigma^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \operatorname{erf}((x-m) / \sqrt{2}\sigma) + Cste$$

Il vient donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \operatorname{erf}((x-m) / \sqrt{2}\sigma) \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) \right]_0^{+\infty} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(\gamma x - m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \operatorname{erfc}(m / \sqrt{2}\sigma) (2 - \operatorname{erfc}(m / \sqrt{2}\sigma)) - \gamma \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(\gamma x - m)^2/2\sigma^2} dx$$

Puis on calcule :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-m)/\sqrt{2}\sigma) e^{-(\gamma x-m)^2/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}\sigma}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt \\
&= \frac{2}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma) &= \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt = \frac{(-1)^k m^{2/2\sigma^2}}{2} \int_0^{m^2/2\sigma^2} t^{k/2-1/2} e^{-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{k/2-1/2} e^{-t} dt \\
IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma) &= \frac{(-1)^k}{2} \Gamma(k/2+1/2, m^2/2\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(k/2+1/2)
\end{aligned}$$

Il reste donc :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x-m)/\sqrt{2}\sigma) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma) (2 - \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma)) \dots \\
&\dots - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)
\end{aligned}$$

Donc pour le premier terme dans le calcul de la probabilité d'erreur :

$$\begin{aligned}
P_{e,2}^{(1)}(a_n) &= -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma) (2 - \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma)) \dots \\
&\dots + \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)
\end{aligned}$$

Le second terme de la probabilité d'erreur s'écrit :

$$P_{e,2}^{(2)}(a_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

Puis il reste à calculer les intégrales :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \\
&= \sqrt{2}\sigma \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma t + m)^k e^{-t^2} dt \\
&= \sqrt{2}\sigma \sum_{p=0}^k C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} t^p e^{-t^2} dt = \sqrt{2}\sigma \sum_{p=0}^k C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sqrt{2}\sigma)
\end{aligned}$$

$$\text{Avec : } IJ_p(-m/\sqrt{2}\sigma) = \frac{(-1)^p}{2} \Gamma(p/2+1/2, m^2/2\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(p/2+1/2)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
P_{e,2}^{(2)}(a_n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \frac{\sqrt{2}\sigma \sum_{p=0}^k C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \\
&= \frac{1}{2\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \sum_{p=0}^k C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sqrt{2}\sigma)
\end{aligned}$$

Donc, finalement, on obtient :

$$P_{e,2}(a_n) = P_{e,2}^{(1)}(a_n) + P_{e,2}^{(2)}(a_n)$$

$$P_{e,2}(a_n)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma) (2 - \operatorname{erfc}(m/\sqrt{2}\sigma)) \dots \\
&\dots + \frac{1}{2\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{n+k+1} m^{2n+1-k} (\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n! (2n+1)} \dots \\
&\dots + \frac{1}{2\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^n C_{2n+1}^k (-1)^{n+k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) C_k^p 2^{p/2} \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sqrt{2}\sigma)}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!}
\end{aligned}$$

Annexe3

Annexe3.1

Pour déterminer la Probabilité d'erreur $P_{e,3}(a_n)$ dans le cas où la BS envoie un paquet superposé à trois MTD en utilisant la loi uniforme la forme de l'équation de départ a été citée en (122) dans la partie III.3.2.4.1. Pour la suite, on cherche à déterminer I_P, J_P, K_P et L_P , par commodité on pose : $a = P_{\min}$ et $b = P_{\max}$, on doit alors calculer les intégrales suivantes :

$$I_P = \frac{1}{P_{\max} - P_{\min}} \frac{1}{2} P_{\max} \int_{2a}^{b/\gamma} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}\right) \frac{(x - 2P_{\min})}{(P_{\max} - P_{\min})^2} dx$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
I_P &= \frac{b}{2(b-a)} \int_{2a}^{b/\gamma} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} dx = \frac{b}{2(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx - \frac{ab}{(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx \\
I_P &= \frac{b}{2(b-a)^3} I_{P,1} - \frac{ab}{(b-a)^3} I_{P,2}
\end{aligned}$$

La première intégrale à calculer est de la forme : $I_{P,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx$; on utilise d'abord le

changement de variable : $u = \sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}$ $u^2 = \frac{P_{\max}}{x}$ $x = \frac{P_{\max}}{u^2}$ $dx = -2 \frac{P_{\max}}{u^3} du$, il vient :

$$I_{P,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx = \int_{\sqrt{\frac{b}{2a}}}^{\sqrt{\frac{b}{\gamma}}} \frac{b}{u^2} \operatorname{erfc}(u) 2 \frac{b}{u^3} du = 2b^2 \int_{\sqrt{\frac{b}{\gamma}}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$$

L'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{erfc(u)}{u^5} du$ a déjà été calculée précédemment et l'on a :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{erfc(u)}{u^5} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} erfc(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} erfc(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [erfc(\delta_1) - erfc(\delta_2)]$$

Avec donc ici : $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$ et $\delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$. Il vient donc :

$$I_{P,1} = 2b^2 \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{erfc(u)}{u^5} du$$

$$I_{P,1} = 2b^2 \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} erfc(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} erfc(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [erfc(\delta_1) - erfc(\delta_2)] \right]$$

La seconde intégrale à calculer est de la forme : $I_{P,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} erfc\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}\right) dx$; on utilise d'abord

le changement de variable : $u = \sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}$ $u^2 = \frac{P_{\max}}{x}$ $x = \frac{P_{\max}}{u^2}$ $dx = -2 \frac{P_{\max}}{u^3} du$; il vient donc :

$$I_{P,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} erfc\left(\sqrt{\frac{P_{\max}}{x}}\right) dx = 2b \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{erfc(u)}{u^3} du$$

L'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{erfc(u)}{u^3} du$ a déjà été calculée et on a obtenu :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{erfc(u)}{u^3} du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} erfc(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} erfc(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [erfc(\delta_1) - erfc(\delta_2)]$$

Il vient donc ici :

$$I_{P,2} = 2b \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{erfc(u)}{u^3} du = 2b \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} erfc(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} erfc(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [erfc(\delta_1) - erfc(\delta_2)] \right]$$

Avec donc ici : $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$ et $\delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$.

On a donc : $I_P = \frac{b}{2(b-a)^3} I_{P,1} - \frac{ab}{(b-a)^3} I_{P,2}$

Avec :

$$I_{P,1} = 2b^2 \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{erfc(u)}{u^5} du$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{erfc(u)}{u^5} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} erfc(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} erfc(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [erfc(\delta_1) - erfc(\delta_2)]$$

$$\text{Et : } \delta_1 = \sqrt{\gamma} \text{ et } \delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

$$I_{P,2} = 2b \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^3} du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

$$\text{Et : } \delta_1 = \sqrt{\gamma} \text{ et } \delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

$$I_P = \frac{b}{2(b-a)^3} I_{P,1} - \frac{ab}{(b-a)^3} I_{P,2}$$

$$I_P$$

$$= \frac{b^3}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \dots$$

$$- \frac{2ab^2}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

Si on exprime cette intégrale en fonction du rapport $x = \frac{a}{b}$, il reste :

$$I_P$$

$$= \frac{1}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \dots$$

$$- \frac{2x}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1^2} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^2} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \quad (27)$$

$$\text{Et : } \delta_1 = \sqrt{\gamma} \text{ et } \delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

On doit alors calculer l'intégrale suivante : $J_P = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)} \int_{2a}^{b/\gamma} \sqrt{x} \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} e^{-\frac{P_{\max}}{x}} dx$, ce qui

s'écrit encore :

$$J_P = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} x^{3/2} e^{-\frac{b}{x}} dx - \frac{2a\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} \sqrt{x} e^{-\frac{b}{x}} dx$$

$$J_P = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} J_{P,1} - \frac{2a\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} J_{P,2}$$

Concernant l'intégrale $J_{P,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x^{3/2} e^{-\frac{b}{x}} dx$, on pose : $u = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{u}$ $dx = -\frac{b}{u^2} du$ et :

$$J_{P,1} = \int_{\gamma}^{b/2a} \frac{b^{3/2}}{u^{3/2}} e^{-u} \frac{b}{u^2} du = b^{5/2} \int_{\gamma}^{b/2a} \frac{e^{-u}}{u^{7/2}} du$$

Concernant l'intégrale : $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{7/2}} du$, on obtient en intégrant par parties :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{7/2}} du = \left[-\frac{2}{5} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{2}{5} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du = \frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{2}{5} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$$

L'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$ a déjà été calculée et on obtient donc :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du = \frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{4}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] + \frac{8}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})]$$

On obtient donc finalement :

$$J_{P,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x^{3/2} e^{-\frac{b}{x}} dx$$

$$J_{P,1} = b^{5/2} \left[\frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{4}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] + \frac{8}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right]$$

Avec : $\delta_1 = \gamma$ et $\delta_2 = b/2a$

Concernant l'intégrale $J_{P,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} \sqrt{x} e^{-\frac{b}{x}} dx$, on pose : $u = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{u}$ $dx = -\frac{b}{u^2} du$ et :

$$J_{P,2} = \int_{\gamma}^{b/2a} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{u}} e^{-u} \frac{b}{u^2} du = b^{3/2} \int_{\gamma}^{b/2a} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$$

L'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du$ a déjà été calculée et on obtient donc :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u}}{u^{5/2}} du = \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})]$$

Avec : $\delta_1 = \gamma$ et $\delta_2 = b/2a$

Finalement, on obtient :

$$J_P = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} J_{P,1} - \frac{2a\sqrt{b}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} J_{P,2}$$

$$J_P = \frac{\sqrt{bb^{5/2}}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} \left[\frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{4}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] + \frac{8}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right] \dots$$

$$\dots - \frac{2a\sqrt{bb^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}(b-a)^3} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right]$$

Avec : $\delta_1 = \gamma$ et $\delta_2 = b/2a$

Si on exprime cette intégrale en fonction du rapport $x = \frac{a}{b}$, il reste :

$$J_p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-x)^3} \left[\frac{2}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{5/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{5/2}} \right] - \frac{4}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] + \frac{8}{15} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right] \dots$$

$$\dots - \frac{2x}{2\sqrt{\pi}(1-x)^3} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\delta_1^{3/2}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\delta_2^{3/2}} \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1}}{\sqrt{\delta_1}} - \frac{e^{-\delta_2}}{\sqrt{\delta_2}} \right] + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} [\operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_1}) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta_2})] \right] \quad (28)$$

Avec : $\delta_1 = \gamma$ et $\delta_2 = 1/2x$

On doit alors calculer l'intégrale suivante : $K_p = \frac{1}{4(b-a)} \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} dx$, on peut

écrire :

$$K_p = \frac{1}{4(b-a)} \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} dx$$

$$K_p = \frac{1}{4(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} x^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx - \frac{2a}{4(b-a)^3} \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx$$

$$K_p = \frac{1}{4(b-a)^3} K_{p,1} - \frac{2a}{4(b-a)^3} K_{p,2}$$

On a donc d'abord à évaluer l'intégrale : $K_{p,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx$, on pose:

$$u = \sqrt{\frac{b}{x}} \quad u^2 = \frac{b}{x} \quad x = \frac{b}{u^2} \quad dx = -2 \frac{b}{u^3} du, \text{ il vient donc :}$$

$$K_{p,1} = \int_{2a}^{b/\gamma} x^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) dx = 2 \int_{\sqrt{\frac{b}{2a}}}^{\sqrt{\frac{b}{\gamma}}} \frac{b^3}{u^7} \operatorname{erfc}(u) du = 2b^3 \int_{\sqrt{\frac{b}{\gamma}}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^7} du$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^7} \operatorname{erfc}(u) du = \frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^6} e^{-u^2} du$$

Et l'on a :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^6} e^{-u^2} du = \left[-\frac{1}{5u^5} e^{-u^2} \right]_{\delta_1}^{\delta_2} - \frac{2}{5} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^4} e^{-u^2} du = \frac{1}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] - \frac{2}{5} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^4} e^{-u^2} du$$

Quant à l'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du$, elle a déjà été calculée, on obtient :

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-u^2}}{u^4} du = \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{2}{3} \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^7} \operatorname{erfc}(u) du \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{5} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] - \frac{2}{5} \left[\frac{1}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{2}{3} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{2}{3} \sqrt{\pi} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \right] \\
& \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^7} \operatorname{erfc}(u) du \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \\
& \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{u^7} \operatorname{erfc}(u) du = \frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \dots \\
& \quad \dots - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)]
\end{aligned}$$

On obtient finalement pour l'intégrale $K_{p,1}$:

$$\begin{aligned}
K_{p,1} &= 2b^3 \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{1}{u^7} \operatorname{erfc}(u) dx \\
K_{p,1} &= 2b^3 \left[\frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \delta_1 = \sqrt{\gamma} \text{ et } \delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

Quant à l'intégrale $K_{p,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{b}{x}}) dx$, on pose $u = \sqrt{\frac{b}{x}}$ $u^2 = \frac{b}{x}$ $x = \frac{b}{u^2}$ $dx = -2\frac{b}{u^3}$, il

vient donc :

$$K_{p,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{b}{x}}) dx = 2b^2 \int_{\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\frac{b}{2a}}} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$$

L'intégrale $\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du$ a déjà été calculée, on a trouvé :

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\operatorname{erfc}(u)}{u^5} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \\
& K_{p,2} = \int_{2a}^{b/\gamma} x \operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{b}{x}}) dx \\
& K_{p,2} = 2b^2 \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]
\end{aligned}$$

Avec : $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$ $\delta_2 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$

On peut maintenant en déduire K_p :

$$K_p = \frac{1}{4(b-a)^3} K_{p,1} - \frac{2a}{4(b-a)^3} K_{p,2}$$

$$K_p = \frac{b^3}{2(b-a)^3} \left[\frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \dots \\ - \frac{ab^2}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

Si on exprime cette intégrale en fonction du rapport $x = \frac{a}{b}$, il reste :

$$K_p = \frac{1}{2(1-x)^3} \left[\frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{erfc}(\delta_1)}{\delta_1^6} - \frac{\operatorname{erfc}(\delta_2)}{\delta_2^6} \right] - \frac{1}{15\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^5} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^5} \right] + \frac{2}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{4}{45\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} \right] + \frac{4}{45} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right] \dots \quad (29) \\ - \frac{x}{(1-x)^3} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_1^4} \operatorname{erfc}(\delta_1) - \frac{1}{\delta_2^4} \operatorname{erfc}(\delta_2) \right] - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1^3} - \frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2^3} \right] - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\delta_2^2}}{\delta_2} - \frac{e^{-\delta_1^2}}{\delta_1} \right] - \frac{1}{3} [\operatorname{erfc}(\delta_1) - \operatorname{erfc}(\delta_2)] \right]$$

Avec : $\delta_1 = \sqrt{\gamma}$ $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

Il reste encore à calculer l'intégrale :

$$L_p = \frac{1}{(b-a)^3} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \int_{2a}^{b/\gamma} x(x-2a) dx$$

Avec :

$$\int_{2a}^{b/\gamma} x(x-2a) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{b^3}{\gamma^3} - 8a^3 \right] - a \left[\frac{b^2}{\gamma^2} - 4a^2 \right]$$

Il reste donc :

$$L_p = \frac{1}{b-a} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \int_{2a}^{b/\gamma} x \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} dx \\ L_p = \frac{\left(\frac{b}{\gamma} - 2a \right) \left(\frac{b^2}{\gamma^2} - \frac{ab}{\gamma} - 2a^2 \right)}{3(b-a)^3} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right]$$

Si on exprime cette intégrale en fonction du rapport $x = \frac{a}{b}$, il reste :

$$L_p = \frac{1}{b-a} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right] \int_{2a}^{b/\gamma} x \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} dx$$

$$L_p = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - 2x\right) \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{x}{\gamma} - 2x^2\right)}{3(1-x)^3} \left[-\frac{1}{2} \gamma \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} e^{-\gamma} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \right]$$

Annexe3.2

Pour déterminer la Probabilité d'erreur $P_{e,3}(a_n)$ dans le cas où la BS envoie un paquet superposé à trois MTD en utilisant la loi gaussienne la forme de l'équation de départ a été cité en (131) dans la partie III.3.2.4.1. Pour la suite, on cherche à calculer $P_{e,3}^{(1)}(a_n)$ et $P_{e,3}^{(2)}(a_n)$.

Pour évaluer le premier terme de la probabilité d'erreur $P_{e,3}^{(1)}(a_n)$, il est indispensable de commencer à évaluer l'intégrale suivant :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx$$

On intègre par parties avec :

$$\int_0^x e^{-(u-2m)^2/4\sigma^2} du = 2\sigma \int_{-m/\sigma}^{(x-2m)/2\sigma} e^{-t^2} dt = 2\sigma \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) + Cste$$

$$\int_0^x e^{-(u-2m)^2/4\sigma^2} du = \sigma \sqrt{\pi} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) + Cste$$

Il vient donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx$$

$$= [\sigma \sqrt{\pi} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma)]_0^{+\infty} - \sigma \sqrt{\pi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) e^{-(\gamma x - m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \sigma \sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf}(m/\sigma) \operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma)) - \sqrt{2}\gamma \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) e^{-(\gamma x - m)^2/2\sigma^2} dx$$

Puis on calcule :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((x-2m)/2\sigma) e^{-(\gamma x - m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sigma}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} \int_{-m/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)$$

Il reste donc :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \sigma\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf}(m/\sigma)\operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma))\dots$$

$$\dots - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)$$

Donc pour le premier terme dans le calcul de la probabilité d'erreur :

$$P_{e,3}^{(1)}(a_n) = -\frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf}((\gamma x - m) / \sqrt{2}\sigma) e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx$$

$$P_{e,3}^{(1)}(a_n) = -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})(1 - \operatorname{erf}(m/\sigma)\operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma))\dots$$

$$\dots + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sigma^{2n} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)$$

Puis il reste à calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx$$

$$= 2^{k+1} \sigma \sum_{p=0}^k C_k^p \sigma^p m^{k-p} \int_{-m/\sigma}^{+\infty} t^p e^{-t^2} dt = 2^{k+1} \sigma \sum_{p=0}^k C_k^p \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sigma)$$

On obtient donc :

$$P_{e,3}^{(2)}(a_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} \int_0^{+\infty} x^k e^{-(x-2m)^2/4\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} 2^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \sum_{p=0}^k C_k^p \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sigma)$$

Donc, finalement :

$$P_{e,3}(a_n) = P_{e,3}^{(1)}(a_n) + P_{e,3}^{(2)}(a_n)$$

$$P_{e,3}(a_n)$$

$$= -\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})(1 - \operatorname{erf}(m/\sigma)\operatorname{erf}(m/\sqrt{2}\sigma))\dots$$

$$\dots + \frac{1}{2\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} \gamma^{2n+1} n!(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k 2^{k/2} \sigma^k (-1)^{k+1} m^{2n+1-k} (2\gamma-1)^{2n+1-k} IJ_k(-m/\sqrt{2}\sigma)\dots$$

$$\dots + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1/2} \sigma^{2n+1} (2n+1)n!} \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^{k+1} 2^{k+1} m^{2n+1-k} \Gamma(k+1/2, \gamma) \sum_{p=0}^k C_k^p \sigma^p m^{k-p} IJ_p(-m/\sigma) \quad (71)$$

$$\text{Avec : } IJ_p(-m/\sigma) = \frac{(-1)^k}{2} \Gamma(k/2 + 1/2, m^2/\sigma^2) + \frac{1}{2} \Gamma(k/2 + 1/2)$$

Résumé

L'intégration de l'internet des objets dans les futures générations de systèmes de communication sans-fil a émergé des défis techniques très intéressants, particulièrement pour la couche MAC où les techniques d'allocation de ressources existantes deviennent très rapidement inefficaces avec le nombre d'objets connectés attendu. En effet, l'évolution drastique du nombre de appareils connectés nécessite un système qui supporte un trafic sporadique et qui garantit en même temps des performances fiables et une meilleure qualité de service. Dans ce contexte, les techniques d'accès classiques basées sur un multiplexage orthogonal des utilisateurs ne sont plus en mesure de faire face à cette demande croissante et explosive de trafic en raison de la largeur de bande de transmission extrêmement limitée. Ainsi, les techniques d'accès multiples non orthogonales (NOMA) sont considérées comme des solutions prometteuses pour répondre à la demande d'accès massive et à l'évolution de la demande de bande passante en permettant à plusieurs utilisateurs d'accéder à la même ressource temps-fréquence. Dans cette thèse, nous considérons les techniques NOMA dans le domaine de puissance pour des transmissions en liaisons montantes et descendantes. Pour garantir le niveau requis de QoS dans le réseau, les algorithmes d'appariement des utilisateurs en des clusters que nous avons proposé tiennent compte de la capacité globale du réseau ainsi l'équité entre les utilisateurs, et permettent en même temps d'établir une connectivité massive. Ainsi, nous proposons des techniques d'allocation de ressources et de contrôle de puissance pour améliorer les performances du système en termes de débit utile et nombre d'utilisateurs connectés. Pour surmonter le problème de collisions dû aux interférences inter-cellulaire, nous aurons recours aux techniques d'apprentissage par renforcement afin d'optimiser l'allocation des ressources. Les techniques proposées montrent l'intérêt des techniques NOMA par rapport à l'accès classique orthogonal, et pointent des futures directions de recherche à investiguer afin de rendre possible l'intégration de cette technique, qui est plutôt à ses débuts, dans les futurs systèmes de communication.

Mots-clés : NOMA, groupement d'utilisateurs, contrôle de puissance, IoT, accès massif, apprentissage par renforcement.

Abstract :

The integration of the Internet of Things in next generations of wireless communication systems has raised very interesting technical challenges, particularly at the MAC layer, where existing resource allocation techniques become inefficient with the increasing number of devices. Indeed, the drastic evolution of the number of connected devices requires a system that is able to support sporadic traffic and at the same time guarantees reliable performance and stringent quality of service. In this context, conventional orthogonal multiple access techniques are no longer able to cope with this increasing and explosive traffic demand due to the extremely limited transmission bandwidth. Thus, non-orthogonal multiple access (NOMA) is considered as a promising approach to meet the massive access demand and bursty traffic by allowing multiple users to access the same time-frequency resource. In this thesis, we consider NOMA multiplexing in the power domain for uplink and downlink transmissions. To guarantee the required level of quality of service in the network, the clustering algorithms that we have proposed take into account the global capacity of the network as well as the fairness



between the users, and at the same time allow to establish a massive connectivity. Indeed, we propose resource allocation and power control techniques to improve system performance in terms of throughput and number of connected users. To overcome the problem of collisions due to inter-cellular interference, we use reinforcement learning techniques to optimize the resource allocation. The proposed techniques show the interest of NOMA compared to the classic orthogonal access and point out future directions of research to be investigated in order to make possible the integration of this technique, which is rather in its infancy, in the future communication systems.

Keywords : NOMA, user clustering, power control, IoT, massive access, reinforcement learning.

