



Diffusion et relaxation pour des systèmes de particules avec contraintes cinétiques

Anatole Ertul

► To cite this version:

Anatole Ertul. Diffusion et relaxation pour des systèmes de particules avec contraintes cinétiques. Physique mathématique [math-ph]. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1270 . tel-03701634

HAL Id: tel-03701634

<https://theses.hal.science/tel-03701634>

Submitted on 22 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N°d'ordre NNT :



2021LYSE1270

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale N° 512
Informatique et Mathématiques de Lyon (InfoMaths)

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 01/12/2021, par :
Anatole ERTUL

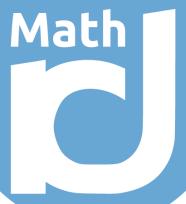
**Diffusion et relaxation pour des
systèmes de particules avec contraintes
cinétiques**

Devant le jury composé de :

M. Christophe Sabot Professeur des Universités, Université Lyon 1 Président

Mme. Ellen Saada, Directrice de recherches CNRS, Université de Paris Rapporteure
M. Justin Salez, Professeur des Universités, Université Paris-Dauphine Rapporteur
Mme. Marielle Simon, Chargée de recherches INRIA, Université de Lille Examinatrice

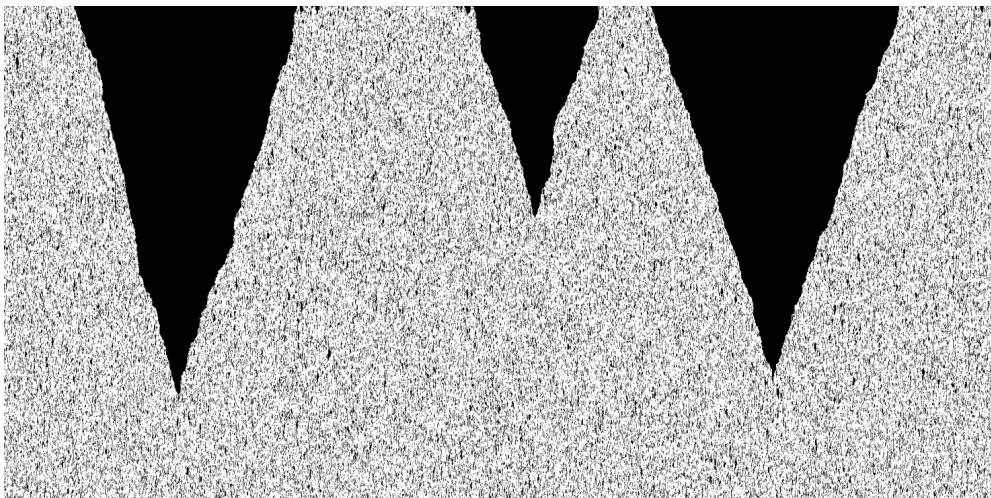
Mme. Oriane Blondel, Chargée de recherches CNRS, Université Lyon 1 Directrice de thèse
M. Fabio Toninelli, Professeur, Technical University of Vienna Co-directeur de thèse



**Institut
Camille
Jordan**

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

Diffusion et relaxation pour des systèmes de particules avec contraintes cinétiques



Anatole Ertul

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1



Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre 2021LYSE1270

Diffusion et relaxation pour des systèmes de particules avec contraintes cinétiques

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 1^{er} décembre 2021 par

Anatole Ertul

devant le Jury composé de :

Mme. Oriane Blondel
Mme. Ellen Saada
M. Christophe Sabot
M. Justin Salez
Mme. Marielle Simon
M. Fabio Toninelli

Chargée de recherches CNRS, Université Lyon 1
Directrice de recherches CNRS, Université de Paris
Professeur des Universités, Université Lyon 1
Professeur des Universités, Université Paris-Dauphine
Chargée de recherches INRIA, Université de Lille
Professeur, Technical University of Vienna

Directrice de thèse
Rapporteuse
Président du Jury
Rapporteur
Examinateuse
Directeur de thèse

Table des matières

Remerciements	3
1 Introduction générale	5
1.1 Motivations physiques	5
1.2 Généralités sur le mélange d'un processus de Markov réversible	8
1.3 Définition générale des KCSM	12
1.3.1 Générateur	13
1.3.2 Construction graphique	14
1.3.3 Propriétés élémentaires	15
1.4 Définition générale des KCLG	16
1.5 Motivations de la thèse	18
2 Relaxation pour les modèles KCSM	19
2.1 Ergodicité et trou spectral	19
2.2 Comportements hors équilibre	21
2.3 Cut-off pour Est	23
2.4 Cutoff pour FA-1f	25
2.4.1 Processus de contact	26
2.4.2 Relaxation vers l'équilibre	28
2.4.3 Le front dans FA-1f	29
2.4.4 Stratégie de la preuve	30
2.4.5 Perspectives	34
3 Diffusion pour le modèle KA-jf	36
3.1 Ergodicité, temps de relaxation	36
3.2 Diffusion	38
3.3 Coefficient de diffusion pour KA	39
3.3.1 Formule variationnelle	40
3.3.2 Le processus auxiliaire	40
3.3.3 Arguments de chemins	43
3.3.4 borne supérieure et conclusion	44
4 Cutoff for FA-1f	47
4.1 Introduction	47
4.2 Definitions and main result	48
4.2.1 FA-1f processes	48
4.2.2 Main result	50
4.3 Coupling with a contact process and consequences	51
4.3.1 Graphical construction	51
4.3.2 Contact process	52

4.3.3	Zeros Lemmas	53
4.4	Relaxation results	56
4.5	Central limit theorem for FA-1f on \mathbb{Z}_+	57
4.5.1	A Central Limit Theorem	58
4.5.2	Proof of Theorem 4.14	62
4.6	Cut-off for FA-II	63
4.6.1	Configurations with macroscopic particle clusters	64
4.6.2	Conclusion	72
	Appendix A. Convergence behind the front	73
5	Self-diffusion Coefficient in the KA model	80
5.1	Introduction	80
5.2	Model and main result	80
5.3	Proof of the lower bound	83
5.4	Upper bound	91
5.5	Further questions	93
	Bibliographie	96

Remerciements

Le travail achevé avec ce manuscrit est le résultat de trois années de travail. En regardant en arrière, la liste des gens qui ont joué un rôle dans cette thèse est longue et j'entends ici leur rendre une partie de ce qu'ils m'ont donné. Avec la plupart d'entre vous, les liens ont été rompus brutalement à cause de la pandémie mondiale qui nous a tous pris de court. Je me rappelle distinctement de cette dernière sortie entre doctorants la veille de l'annonce du premier confinement, date depuis laquelle j'ai perdu de vue un bon nombre d'amis et collègues. Si vous lisez ces lignes, j'espère que vous vous portez bien !

Je souhaite tout d'abord remercier tous les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de vous intéresser à mon travail. Merci Ellen Saada et Justin Salez pour votre lecture attentive de mes travaux et vos rapports positifs. Je dois aussi mentionner les membres du comité de suivi à savoir Vincent Calvez et Ellen Saada qui m'ont grandement aidé à trouver un second souffle au milieu de la thèse.

Ma pensée se tourne maintenant naturellement vers toi Oriane. Tu m'as fait confiance pour encadrer la thèse, et tu as fait preuve d'une patience extraordinaire jour après jour, rendez-vous après rendez-vous, pour m'aider à surmonter tous les problèmes que j'ai pu rencontrer. Sans toute ta bienveillance, cette thèse n'aurait jamais abouti. Je te dois aussi beaucoup Fabio. Tout d'abord pour avoir éveillé en moi l'intérêt pour les questions de mélange de processus de Markov en stage en 2016, puis avoir accepté d'encadrer ma thèse. Tes conseils ont toujours été très pertinents pendant toutes ces années.

Je tiens à remercier Assaf Shapira pour le travail que nous avons effectué ensemble et tout ce que tu m'as fait découvrir concernant les modèles KA. J'espère que tu as apprécié autant que moi tes séjours à Lyon !

J'ai eu la chance de partager un bureau avec des personnes fantastiques. Merci à Kévin, Uran, Dimitri et Benjamin pour tous ces bons moments passés ensemble. Je voudrais aussi remercier tous les doctorantes et doctorants qui ont contribué à la belle ambiance du labo (pardon si j'en oublie) : mes vieux amis Félix et Octave, les grimpeurs Coline, Caterina, Simon Z., Simon A., Mickaël, Gauthier et Marina ainsi que Garry, Marion, Shmuel, Thomas, Théo, Rémi, Benjamin C., David... Merci aussi aux membres permanents de l'ICJ qui m'ont chaleureusement accueilli ne serait-ce qu'avec un grand sourire lorsqu'on se croisait dans le couloir. Merci à Guillaume pour toutes nos soirées jeux très conviviales, elles me manquent !

Je souhaite aussi remercier les très nombreuses personnes que je n'ai pas ou peu rencontrées pendant ces trois années mais qui m'ont permis d'être dans les meilleures dispositions pour travailler. Je pense ainsi à tout le personnel administratif de l'Université Lyon 1, du laboratoire, de l'école doctorale, mais aussi au service informatique et au personnel d'en-

tretien.

Je tiens à remercier mes amis Tony, Michel, Steph, Maroš, François et tous les autres avec qui j'ai passé tant d'heures depuis le confinement.

Merci enfin à mes parents, mes frères et Rozenn pour leur soutien indéfectible.

1 Introduction générale

1.1 Motivations physiques

Les modèles que nous allons étudier tout au long de cette thèse ont été inventés dans les années 1980 pour modéliser des problèmes physiques épineux que sont l'état du verre, et les transitions de phase vitreuses. Le verre est un matériau bien connu de tous, très intéressant pour de nombreuses propriétés mécaniques : transparence, résistance face à certains composés chimiques, résistance aux radiations... Il est fabriqué par l'homme depuis au moins une centaine de milliers d'années, et pourtant sa structure et sa formation restent aujourd'hui mal comprises d'un point de vue physique pour plusieurs raisons que nous allons expliquer de manière très superficielle maintenant. Pour une introduction au sujet plus complète, on peut se référer par exemple à [14] pour le point de vue physique, et [40] pour un aperçu plus mathématique des modèles dont nous allons parler.

Tout d'abord prenons un point de vue statique, et observons du verre (typiquement de la silice SiO_2). A température ambiante et à l'échelle macroscopique, il s'agit d'un matériau ayant les propriétés d'un solide, donc rigide. A l'échelle microscopique cependant, on remarque une absence de structure cristalline qui est pourtant l'état stable du matériau en dessous de sa température de fusion. On observe à l'inverse des molécules très désordonnées, on parle de matière amorphe (voir Figure 1), qui est indistinguabile d'un liquide à l'échelle microscopique.

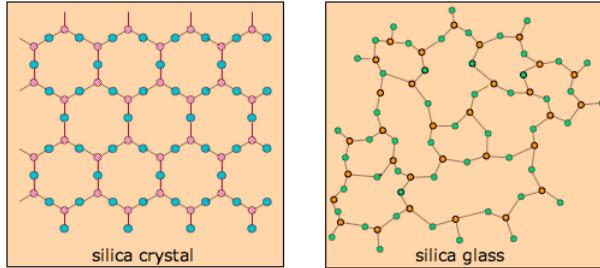


FIGURE 1 – Vision schématique de la structure cristalline (à gauche) et amorphe (à droite) de la silice. Le verre vu au microscope ressemble à l'image de droite. ([lien](#))

La spécificité du verre vient en fait de son procédé de fabrication. Pour former du verre, on porte le matériau au delà de sa température de fusion T_f puis on le refroidit rapidement. Si on laissait le matériau se refroidir lentement, on obtiendrait une forme cristalline. En écourtant cette phase de refroidissement, on réalise une transition *vitreuse* (c'est-à-dire liquide-verre) : les molécules qui étaient désordonnées en phase liquide n'ont "pas le temps" de s'organiser et restent en quelque sorte piégées dans un état désordonné. Plus précisément, on observe qu'à la température de fusion, le matériau entre dans un état instable

appelé *liquide surfondu*. Là où une transition de phase devrait être marquée par exemple par la discontinuité de l'enthalpie H du système comme lors d'une solidification habituelle, on n'observe pas de tel changement lors d'une transition vitreuse. En revanche, on observe une telle transition à une température $T_v < T_f$ où le matériau rentre dans un véritable état de verre. Une caractéristique importante de cette température de transition vitreuse T_v est qu'elle dépend de la vitesse à laquelle le système est refroidi. Ce phénomène est donc véritablement dynamique.

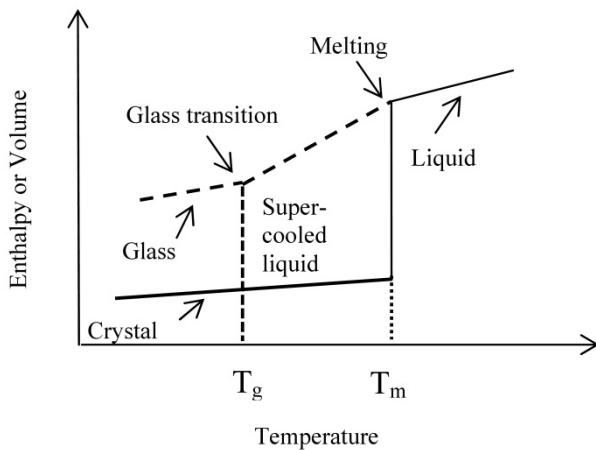


FIGURE 2 – Diagramme Enthalpie/Température d'un matériau avec une transition vitreuse. Ici T_g (resp. T_m) est la température appelée T_v (resp. T_f) précédemment. L'image est tirée de l'article [41] ([lien](#))

Citons une autre particularité de la transition vitreuse qui sera pertinente pour la suite. Lors de la phase de refroidissement du verre, on observe une hétérogénéité spatiale : il existe des grandes zones mésoscopiques où les molécules sont mobiles, et d'autres zones où les molécules sont figées. Plus précisément, il semble il y avoir un *effet de cage* : les zones ne semblent devenir mobiles que si elles sont entourées de zones elles-mêmes mobiles (voir Figure 3).

Le phénomène de transition vitreuse est extrêmement riche physiquement et appelle à être modélisé pour expliquer toutes ses particularités à l'aide des principes physiques fondamentaux. Encore aujourd'hui, il n'existe pas de théorie satisfaisante qui apporte une réponse à toutes les questions que soulève ce problème de la physique. Pour cette raison, ont été créés des modèles mathématiques qui ont vocation à capturer les nombreuses propriétés de la transition vitreuse. Dans cette thèse, nous nous intéressons à une famille de tels modèles appelés *modèles de particules avec contraintes cinétiques* (Kinetically Constrained Models, ou KCM en anglais). L'idée principale est de modéliser l'effet de cage mentionné plus tôt. Dans ces modèles, on étudie une dynamique markovienne de particules sur un

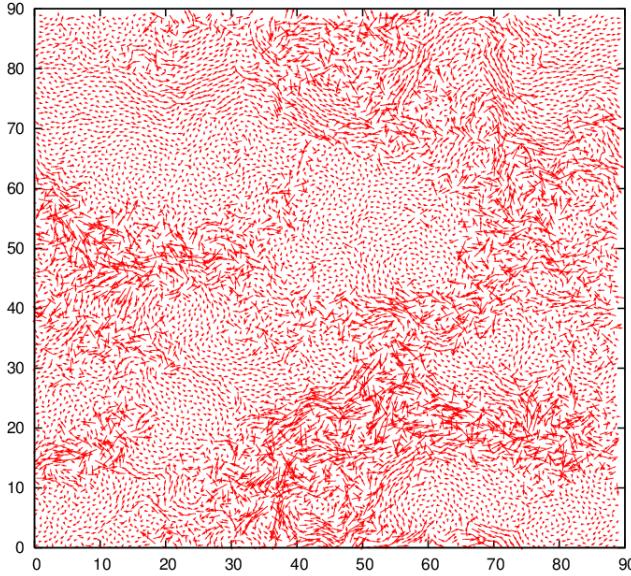


FIGURE 3 – Une simulation tirée de [6] montrant le déplacement des particules pendant un pas de temps de l'ordre du temps de relaxation. Cette simulation capture les corrélations spatiales (ici de vitesses des particules) que l'on observe effectivement lors d'une transition vitreuse.

graphe \mathbb{Z}^d avec une contrainte "hard-core" : chaque sommet du graphe contient au plus une seule particule. La donnée du graphe et des positions des particules est appelée *configuration*. Contrairement à ce que l'appellation "particule" pourrait laisser penser, chaque sommet du graphe modélise en fait une zone mésoscopique du liquide/verre, et la présence ou non d'une particule témoigne de la mobilité ou l'immobilité de la zone correspondante. Chaque zone peut changer d'état (mobile/immobile donc) en fonction de son voisinage : on ne peut changer d'état que s'il y a suffisamment de zones mobiles autour de soi. Le choix du voisinage en question est l'un des paramètres de nos modèles, et on pourra observer une grande richesse de comportements des modèles en fonction de ce choix. Une autre propriété fondamentale des modèles KCM est l'absence de corrélation à l'équilibre. Nous ne rentrerons pas dans les détails des raisons physiques qui poussent à faire ce choix, mais on considère que les lois produits doivent être réversibles pour toutes les dynamiques KCM. Mentionnons d'ailleurs que ce choix nous permet d'identifier l'énergie d'une configuration et sa mesure d'équilibre, qui peut donc s'écrire sous la forme $\frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(\frac{1}{T} \sum_i \sigma(i))$ (où $\sigma(i)$ est la variable d'occupation), ce qui fournit après de simples calculs une relation entre la température T du système, et p la densité de particules à l'équilibre :

$$p = \frac{1}{1 + e^{-1/T}}.$$

A cet égard, il est intéressant d'étudier la dépendance de nos modèles en fonction du paramètre p , ce qui est l'objet de nombreux problèmes liés aux KCM. On retiendra dans la suite qu'un paramètre p croissant signifie une densité de particules croissante, et une température décroissante.

D'un point de vue mathématique, l'étude des KCM est très riche. On peut dans un premier temps la rapprocher d'autres modèles fondamentaux de mécanique statistique comme le modèle d'Ising, les processus d'exclusion, les processus de contact, mais certaines de leurs propriétés les rendent singuliers. Par exemple, nous verrons que contrairement à la dynamique de Glauber sur le modèle d'Ising, les modèles FA entre autres (ce sont des KCM que nous définirons plus tard) n'ont pas une dynamique attractive. Cette simple différence complique considérablement l'étude des KCM à de nombreux égards.

La présente thèse est divisée en cinq parties. Tout d'abord, nous continuons le travail introductif au modèles KCM dans cette section 1, en rappelant des bases de théorie sur les processus de Markov, puis en définissant les modèles à proprement parler. Les sections 3 et 4 s'attardent sur deux modèles en particulier : FA puis KA pour lesquels nous expliquerons les résultats qui ont été démontrés durant la thèse, ainsi que toutes les notions nécessaires à leur compréhension. Enfin, les sections 4 et 5 sont respectivement les versions détaillées de ces deux résultats.

1.2 Généralités sur le mélange d'un processus de Markov réversible

Pour commencer, nous introduisons dans cette partie des notions importantes autour de la convergence vers l'équilibre d'un processus de Markov. Les motivations pour étudier cette convergence peuvent être variées. Par exemple, certains processus de Markov sont construits dans le but d'échantillonner une loi de probabilité complexe, difficile à calculer par un ordinateur, par exemple pour des modèles de systèmes de particules (Ising, Potts, etc.) ou des problèmes de pavages aléatoires. Les processus ainsi construits ont alors deux propriétés intéressantes : leurs transitions sont faciles à calculer, et leur loi converge vers la mesure d'équilibre que l'on cherche à simuler. L'enjeu devient alors d'estimer la vitesse de convergence pour savoir à partir de quand la loi du processus de Markov est raisonnablement proche de la mesure d'équilibre. Dans un contexte comme celui des modèles KCM, estimer la vitesse de convergence en fonction des paramètres d'un modèle de mécanique statistique a plutôt pour but d'apporter des réponses à des questions d'origine physique : il nous est donné un processus qui modélise un phénomène physique, et on voudrait avoir des informations sur son évolution en temps long.

Étant donné un processus de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ de mesure invariante μ , il y a plusieurs manières de regarder l'évolution de sa loi. Une première notion est celle d'ergodicité. L'ergodicité est un thème très vaste qui couvre bien plus que le champ des probabilités. Nous ne

rentrerons pas dans les détails de cette notion puisque c'est en fait la manière la plus faible de définir un processus qui "mélange". En fait, dans tout ce qui va suivre, les processus ergodiques auront toujours une propriété de mélange plus forte. Dans toute cette partie, on se fixe un processus de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$. Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé, c'est-à-dire la famille d'opérateurs sur une partie de $L^2(\mu)$ définie par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)].$$

Dans le cas des modèles de particules, les fonctions tests sont souvent des fonctions locales, c'est-à-dire qui dépendent d'un nombre fini de sites du graphe. On rappelle que le générateur du processus est alors le générateur de ce semi-groupe, i.e.

$$\forall f \in \text{Dom}(\mathcal{L}), \quad \mathcal{L}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)$$

où $\text{Dom}(\mathcal{L})$ est le domaine du générateur, qui est simplement l'ensemble des fonctions pour lesquelles la limite ci-dessus existe.

La définition d'une mesure ergodique est la suivante.

Définition 1.1. *On dit qu'une mesure μ est ergodique si pour toute fonction f :*

$$[\forall t \geq 0, \quad P_t f = f] \Rightarrow f = \text{cste } \mu\text{-p.s.}$$

En prenant l'exemple des fonctions indicatrices, on comprend que l'ergodicité traduit le fait que le processus visite en temps fini tous les ensembles non négligeables sous μ .

Un autre point de vue est celui de l'espace $L^2(\mu)$. Pour mesurer la distance de la loi de X_t à la mesure d'équilibre, on regarde alors la quantité $\text{Var}(P_t f)$ pour une fonction $f \in L^2(\mu)$ quelconque, où la variance est par rapport à la mesure μ . Dans cette optique, on introduit alors le *trou spectral* γ du processus, défini par

$$\gamma = \inf_{\substack{f \in \text{Dom} \mathcal{L} \\ f \neq \text{cste}}} \frac{-\mu(f \cdot \mathcal{L} f)}{\text{Var} f}.$$

Le trou spectral est un indicateur important de la relaxation vers l'équilibre d'un processus. Dans le cadre des chaînes de Markov, il correspond à l'écart entre 1 et le plus grand module d'une valeur propre (différente de 1) de la matrice de transition. En général, un premier enjeu est de déterminer s'il est strictement positif ou nul. S'il est strictement positif, alors on montre facilement que dans $L^2(\mu)$, le processus converge exponentiellement rapidement vers la mesure d'équilibre μ au sens suivant :

Proposition 1.2. *Si $\gamma > 0$, alors $\forall f, \forall t \geq 0$,*

$$\text{Var}(P_t f) \leq \exp(-2\gamma t) \text{Var}(f).$$

Au passage, définissons l'inverse du trou spectral, que l'on appelle le temps de relaxation $t_{\text{rel}} := 1/\gamma$ qui est donc le temps caractéristique de cette décroissance exponentielle. Si $\gamma = 0$, alors il peut y avoir plusieurs cas de figure. Les modèles KA présentés plus loin sont un exemple de processus à trou spectral nul qui présentent une relaxation vers l'équilibre dans L^2 , mais à une vitesse sous-exponentielle (polynomiale en l'occurrence). Pour la dynamique de Glauber sur le modèle d'Ising à basse température en revanche, il est possible que $\text{Var}(P_t f)$ ne tende pas vers zéro. Étudier le trou spectral d'un processus est un problème difficile en toute généralité, et peut nécessiter des techniques très variées selon le contexte. Notons toutefois qu'il s'agit d'une étude du processus *à l'équilibre*, c'est-à-dire où les événements sont vus sous la mesure d'équilibre μ .

Lorsque le processus de Markov est défini sur un espace d'état fini Ω , on introduit généralement une autre métrique sur les mesures qui est la distance en variation totale :

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|. \quad (1)$$

Cette distance est en fait une norme sur l'espace des mesures finies sur Ω . Pour cette raison, on adoptera plutôt la notation "en norme" : $\|\mu - \nu\|_{TV} := d_{TV}(\mu, \nu)$. On peut réécrire la définition (1) de plusieurs manières équivalentes. Une autre définition possible, très importante, fait appel à la notion de couplage. On résume ce point de vue dans la définition-proposition suivante.

Proposition 1.3. *Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur un espace Ω . Un couplage de μ et ν est un couple de variables aléatoires (X, Y) définies sur un même espace de probabilité tel que X suit la loi μ , et Y suit la loi ν .*

La distance en variation totale entre μ et ν peut alors s'écrire :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \inf_{\substack{X \sim \mu \\ Y \sim \nu}} \mathbb{P}(X \neq Y),$$

où l'infimum est pris sur tous les couplages (X, Y) des lois μ et ν .

Pour de multiples raisons, cette distance peut être utile pour étudier la convergence vers l'équilibre d'un processus.

Pour tout $x \in \Omega$, on introduit $d_x(t) = \|P_x^t - \mu\|_{TV}$, où P_x^t désigne la loi du processus au temps t , initialement à l'état x . Usuellement, on généralise l'étude à $d(t) := \sup_{x \in \Omega} d_x(t)$, c'est-à-dire la distance à l'équilibre au temps t "dans le pire des cas". Notons ici un point important. Contrairement à ce que nous avons introduit à propos de l'étude L^2 où l'on travaille avec le processus à l'équilibre, ici on se doit de regarder les comportements en partant de toutes les configurations initiales possibles. En ce sens, on dit qu'on regarde le processus *hors équilibre*, ce qui demande a priori une connaissance plus fine du modèle. Citons quelques propriétés élémentaires de $d(t)$:

Proposition 1.4. Si $\bar{d}(t) := \sup_{x,y \in \Omega} \|P_x^t - P_y^t\|_{TV}$, alors on a :

- $\forall t \geq 0, d(t) \leq \bar{d}(t) \leq 2d(t)$,
- $\forall t, s \geq 0, \bar{d}(t+s) \leq \bar{d}(t)\bar{d}(s)$,
- si $\gamma > 0$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, d(t) \leq C \exp(-\gamma t). \quad (2)$$

Puisque l'on cherche à quantifier la décroissance vers zéro de $d(t)$, on introduit naturellement le temps de mélange :

$$t_{mix}(\varepsilon) := \inf\{t \geq 0 \mid d(t) \leq \varepsilon\}.$$

En poussant un petit peu plus loin que les propriétés ci-dessus, on peut avoir une première estimation du temps de mélange d'un processus dont le trou spectral est strictement positif :

$$t_{mix}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{1}{\varepsilon \mu_{\min}}\right),$$

où $\mu_{\min} = \min_{x \in \Omega} \mu(x)$.

Notons que la constante $\mu_{\min} > 0$ dépend des paramètres du modèle, et notamment de $|\Omega|$. Il faut garder à l'esprit que la dépendance de t_{mix} en la taille de l'espace d'états est souvent critique dans les problèmes de mélange. C'est le cas par exemple lorsqu'on regarde les modèles de particules sur $\Omega = \{0, 1\}^{[1, L]^d}$ et qu'on fait tendre $L \rightarrow \infty$ pour cerner le comportement du modèle en volume infini. A cet égard, on va dans la suite mettre en évidence un phénomène particulier appelé *cut-off*. En 1986, Aldous et Diaconis [1] ont montré qu'une certaine chaîne de Markov présentait un profil de $d(t)$ particulier (voir Figure 8). Il s'agit d'un modèle simple de mélange de cartes, à valeurs dans le groupe symétrique S_n . Contrairement à ce que l'estimation (2) laisse paraître, on observe que $d(t)$ décroît de manière nette autour d'une valeur $t = n \log n$. Plus précisément, les auteurs en viennent à la définition suivante :

Définition 1.5. Soit $(X_t^L)_{t \geq 0}$ une famille de processus de Markov indexée par l'entier L définis sur des espaces d'états Ω_L de sorte que $|\Omega_L| \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} \infty$. On note $t_{mix}^L(\varepsilon)$ le temps de mélange associé au processus $(X_t^L)_{t \geq 0}$.

On dit que cette famille de processus présente un phénomène de *cut-off* si, de manière équivalente,

- $\forall \varepsilon \in]0, 1[, \frac{t_{mix}^L(\varepsilon)}{t_{mix}^L(1-\varepsilon)} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} 1$,
- il existe $T_L > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon > 0, t_{mix}^L(\varepsilon) = T_L + o_\varepsilon(T_L)$.

Plus précisément, on dit qu'il y a cut-off au temps T_L avec une fenêtre d'ordre w_L si on a :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \liminf_{L \rightarrow \infty} d(T_L - aw_L) = 1,$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \liminf_{L \rightarrow \infty} d(T_L + aw_L) = 0.$$

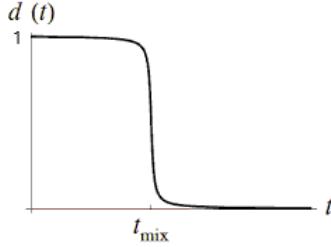


FIGURE 4 – Le profil de $d(t)$ lorsqu'il y a cut-off.

Un modèle qui suit un cut-off a donc un temps de mélange t_{mix} qui est indépendant de ε au premier ordre (mais dépendant de L). C'est évidemment une caractéristique très importante lorsque l'on souhaite estimer le temps nécessaire pour qu'une chaîne de Markov soit proche de l'équilibre. Quand il y a un cut-off, non seulement le système est proche de l'équilibre après la fenêtre de décroissance de $d(t)$, mais il est aussi loin de l'équilibre avant. Dans certains exemples, ce temps caractéristique apparaît comme l'espérance d'un certain événement critique qui détermine le bon mélange du processus. Dans l'exemple du mélange de cartes de Aldous et Diaconis, cet événement est l'instant où *toutes* les cartes du jeu ont été déplacées au moins une fois de manière aléatoire. Depuis ce premier exemple de cut-off, le phénomène a été étudié pour de très nombreux processus. En 2004, Peres a émis la conjecture que si $t_{rel}^L = o(t_{mix}^L)$, alors on doit observer un phénomène de cut-off. Il a alors été construit un contre-exemple à cette conjecture, mais il a été aussi montré que dans de larges classes de modèles (qui n'incluent pas ceux étudiés dans cette thèse), cette condition, appelée "product condition" est suffisante [4]. Mis à part cette condition, il n'existe pas aujourd'hui de caractérisation générale du phénomène de cut-off, et il est donc nécessaire d'étudier individuellement chaque modèle pour savoir s'il présente un cut-off.

1.3 Définition générale des KCSM

Nous introduisons maintenant une première famille de modèles appartenant à la famille des KCM : les modèles de particules à spin avec contrainte cinétique (Kinetically Constrained Spin Model, KCSM en anglais). Les KCSM sont des processus de Markov d'espace d'états $\Omega_G = \{0, 1\}^G$, où $G = (V, E)$ est un graphe connexe, fini ou infini. La plupart du temps, et dans toute la suite, on étudie ces dynamiques sur le graphe \mathbb{Z}^d ou un hypercube

$\Lambda = [1, L]^d$. Il est bien entendu que $[1, L]$ désigne ici un intervalle discret. Pour une configuration $\sigma \in \Omega$, on interprète $\sigma(x) = 1$ comme la présence d'une particule au site x et $\sigma(x) = 0$ comme l'absence de particule. Pour une configuration $\sigma \in \Omega_\Lambda$ et $x \in \Lambda$, on note σ^x la configuration égale à σ partout sauf en x où la valeur est inversée.

1.3.1 Générateur

Pour définir la dynamique sur \mathbb{Z}^d , il faut se donner pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$ une *classe d'influence* \mathcal{C}_x du site x . Une classe d'influence \mathcal{C}_x est une collection finie de sous-ensembles de V qui doit vérifier les conditions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $A \in \mathcal{C}_x$, $x \notin A$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_0 + x$,
3. Il existe $r \geq 0$ tel que tout élément de \mathcal{C}_x est inclus dans la boule de centre x de rayon r au sens de la distance de graphe.

La classe d'influence de x représente l'ensemble des sites (ou régions) qui vont influencer les changements de spin au site x . Ces classes ne contiennent pas le site x lui-même, ce qui implique que la valeur de la configuration au site x n'influence pas son prochain état. Elles sont aussi invariantes par translation et de rayon borné. Chaque choix de telles classes définit un modèle différent, comme nous le verrons dans les exemples à suivre. Ayant fait ce choix, on définit alors la *contrainte cinétique* $c_x(\sigma)$ du site x dans une configuration σ par :

$$c_x(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists A \in \mathcal{C}_x, \forall y \in A, \sigma(y) = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la contrainte du site x est satisfaite dans la configuration σ si au moins l'un des ensembles de sa classe d'influence est entièrement vide. Le modèle KCSM associé aux classes \mathcal{C}_x (ou de manière équivalente aux contraintes (c_x)) sur $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ de paramètre $p \in (0, 1)$ est alors le processus de Markov défini par le générateur agissant sur les fonctions locales :

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{x \in \Lambda} c_x(\sigma)(p\sigma(x) + (1-p)(1-\sigma(x))[f(\sigma^x) - f(\sigma)].$$

Si Λ a un bord, alors il faut aussi fixer une valeur de spin pour chaque $y \in \mathbb{Z}^d$ tel que $d(y, \Lambda) \leq r$ pour que les contraintes soient bien définies. La dynamique change donc l'état d'un seul site à la fois, et chaque site fait une transition $0 \rightarrow 1$ à taux p , et une transition $1 \rightarrow 0$ à taux $q = 1 - p$ seulement si la contrainte cinétique $c_x(\sigma)$ est vérifiée. Dans toute la suite, lorsque le modèle, et le paramètre p seront clairs dans le contexte, on notera P_σ^t la loi du processus au temps t avec configuration initiale σ .

Afin de cerner les comportements variés des KCSM, on donne ici trois exemples typiques :

- Le modèle *Est* (*East* en anglais) est celui sur \mathbb{Z} avec la classe $\mathcal{C}_x = \{\{x - 1\}\}$. Un site peut se mettre à jour seulement si celui à sa gauche est libre. C'est un modèle asymétrique et le plus étudié.
- Le modèle *Fredrickson-Andersen j spin facilitated* (FA-jf) sur \mathbb{Z}^d est le modèle avec la classe $\mathcal{C}_x = \{A \subset \mathcal{N}_x \mid \#A \geq j\}$ où $\mathcal{N}_x = \{y \mid d(x, y) = 1\}$ désigne le voisinage de x dans le graphe. Ici, il faut et il suffit que d des sites voisins de x soient libres pour que la contrainte soit satisfaite.
- Le modèle *Nord-Est* (*North-East* en anglais) sur \mathbb{Z}^2 est l'analogue de Est en dimension deux : $\mathcal{C}_x = \{\{x - (1, 0), x - (0, 1)\}\}$: il faut que les deux voisins au "sud" et à "l'ouest" de x soient libres.

1.3.2 Construction graphique

On peut définir un processus KCSM via une construction explicite appelée *construction graphique*, qui permet de mieux appréhender la dynamique. Pour chaque site $x \in \Lambda$, on définit un processus de Poisson N^x de paramètre 1 appelé "horloge", et on dira que l'horloge au point x "sonne" au temps t lorsque $N_t^x - N_{t^-}^x = 1$. On définit aussi une suite de variables aléatoires $(\beta_n^x)_{n \geq 1}$ de loi $\text{Ber}(p)$ toutes indépendantes entre elles et indépendantes des processus de Poisson. Si Λ est de volume fini, étant donnée une configuration initiale σ_0 , à chaque incrément t d'un processus de Poisson, disons le $n^{\text{ème}}$ au site x , on vérifie si la contrainte cinétique en x est vérifiée. Si oui, alors on définit $\sigma_t(x) = \beta_n^x$. Sinon, la configuration reste inchangée : $\sigma_t(x) = \sigma_{t^-}(x)$. Presque sûrement, aucune horloge ne sonne simultanément, et on construit ainsi tout le processus $(\sigma_t)_{t \geq 0}$.

Si Λ est infini, cette construction se heurte au fait que le temps $t = 0$ est presque sûrement un point d'accumulation de l'ensemble des sonneries des processus de Poisson. Il est alors impossible de définir un premier site à mettre à jour. Pour contourner ce problème, on utilise l'argument suivant. Si au temps $t > 0$, il existe une composante connexe de sites C telle qu'aucun des sites à distance au plus r de C n'ait sonné entre les temps 0 et t , alors l'évolution de la configuration dans C jusqu'au temps t ne dépend pas de l'évolution à l'extérieur de C , et on peut alors utiliser la construction ci-dessus (voir Figure 5). Or, un résultat simple de percolation garantit qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, presque-sûrement, au temps t_0 , tout site est contenu dans un ensemble fini dont tous les sites à distances $\leq r$ n'a pas sonné. Ainsi, on peut construire la configuration jusqu'au temps t_0 sur Λ tout entier. Il suffit alors de poursuivre cette construction par incrément de temps t_0 .

1.3.3 Propriétés élémentaires

Présentons maintenant quelques propriétés élémentaires des KCSM. La première chose à remarquer c'est qu'il peut exister des configurations bloquées. Pour tous les modèles KCSM, la configuration toute remplie $\mathbf{1}$ est stable, et ne peut pas être atteinte depuis

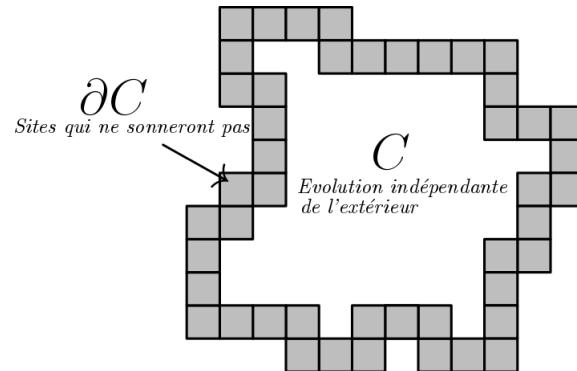


FIGURE 5 – Une illustration de l’argument de percolation. Ici, la portée r vaut 1, et il faut imaginer que les sites grisés ne sonnent pas entre $t = 0$ et $t = t_0$. La construction de $\sigma_{t_0}|_C$ est alors indépendante de tout le reste de la configuration.

une autre configuration (sauf dans le cas d’une contrainte vide). La mesure $\delta_{\mathbb{1}}$ est donc toujours invariante par la dynamique. Selon le choix du modèle, il peut exister d’autres familles de configurations déconnectées par la dynamique. Par exemple, pour FA-1f sur \mathbb{Z} , la configuration $\mathbb{1}$ est la seule configuration isolée. Pour FA-2f sur \mathbb{Z}^2 , toute configuration comportant deux lignes adjacentes entièrement remplies ne pourra pas être mise à jour dans ces deux lignes. Enfin, pour FA-3f sur \mathbb{Z}^2 , n’importe quelle configuration où un carré de 2×2 sites est rempli ne pourra pas être modifiée sur ces quatre sites (cf figure [6]). Dans les cas où le blocage vient d’une structure infinie de sites remplis, on peut rendre le processus de Markov irréductible en se restreignant à une boîte finie $\Lambda = [0, L]^d$ et en imposant des conditions au bord libre : $\forall x \notin \Lambda, d(x, \Lambda) \leq r, \sigma(x) := 0$. De cette manière, les processus Est et FA-1f sur $[0, L]$ avec condition au bord libre sont irréductibles.

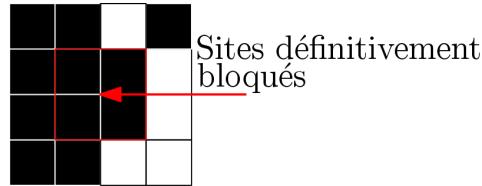


FIGURE 6 – Un exemple de quatre sites qui ne pourront jamais être mis à jour dans la dynamique FA-3f.

Par ailleurs, tous les processus KCSM sur une partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ admettent la mesure $\mu^p = \mu := \otimes_{x \in \Lambda} \text{Ber}(p)$ comme mesure réversible. On vérifie cela par la relation de "detailed balance" :

$$r(\sigma, \sigma^x) = h^x(\sigma) r(\sigma^x, \sigma),$$

où $r(\sigma, \sigma^x)$ est le taux de transition de σ à σ^x et $h^x(\sigma)$ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure μ^x , image de μ par $\sigma \mapsto \sigma^x$. Cela tient au fait que les taux de transitions $r(\sigma, \sigma^x)$ ne dépendent pas du site x qui est modifié. Comme nous l'avons vu ci-dessus, cette mesure n'est pas la seule mesure invariante dans le cas où $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ puisque ne serait-ce que $\delta_{\mathbb{1}}$ est aussi invariante et même réversible. Cependant, μ va jouer un rôle bien particulier puisqu'en volume fini pour les processus irréductibles, c'est l'unique mesure invariante et donc c'est la mesure vers laquelle va converger la loi du processus. C'est cette relaxation vers l'équilibre qui sera au cœur de l'étude des sections 2 et 4.

Notons un dernier point important. Grâce à la construction graphique expliquée au paragraphe précédent, on peut définir un couplage naturel entre les lois de deux processus $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ et $(\eta_t)_{t \geq 0}$ suivant le même modèle. Définissons des processus de Poisson $(N^x)_{x \in \Lambda}$ de paramètre 1 et des variables de Bernoulli $(\beta_n^x)_{n \geq 0, x \in \Lambda}$ de paramètre p . On construit alors $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ et $(\eta_t)_{t \geq 0}$ tous les deux avec ces mêmes variables aléatoires. Autrement dit, les tentatives de mises à jours ont lieu en même temps et sur les mêmes sites pour σ_t et η_t , et si la mise à jour est possible pour les deux configurations, alors la nouvelle valeur en ce site sera identique. Ce couplage sera très important dans la suite, et nous l'appelons couplage *standard*. Cependant, il faut noter que ce couplage n'est pas monotone, c'est-à-dire que sous ce couplage, $\sigma_0 \leq \eta_0$ n'implique pas $\sigma_t \leq \eta_t$ (pour aucun $t > 0$). Cela vient du fait qu'une configuration moins remplie aura l'occasion de faire des transitions $0 \rightarrow 1$ parce que les contraintes sont plus facilement vérifiées (cf Figure 17).

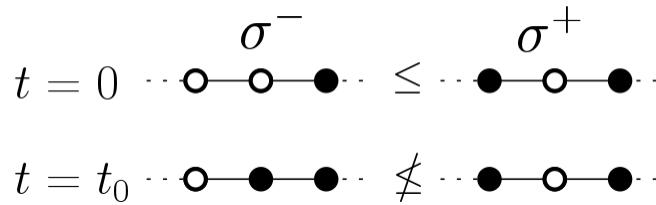


FIGURE 7 – Un exemple de non-monotonie via le couplage standard. Le site au milieu a pu se mettre à jour dans σ^- mais pas dans σ^+ .

1.4 Définition générale des KCLG

Les modèles dits *KCLG* sont le pendant conservatif des modèles que nous avons introduits précédemment. On les étudie ici sur \mathbb{Z}^d ou tout sous-ensemble de la forme $[1, L]^d$, et on interprète aussi $\sigma(x) = 1$ comme la présence d'une particule en x , et $\sigma(x) = 0$ comme l'absence de particule. Si $\sigma \in \Omega_\Lambda$, on note σ^{xy} la configuration égale à σ partout sauf en x et y où les valeurs sont permutées.

Contrairement aux KCSM, au lieu de changer la valeur de la configuration site par site, on ne fait que permute la valeur de deux sites adjacents. A nouveau, ces permutations ont lieu à un taux constant tant qu'une contrainte cinétique locale est satisfaite. Les contraintes portent maintenant sur des arêtes du graphe, ou de manière équivalente sur des couples de sites adjacents. On définit à nouveau, pour tout site $x \in \Lambda$ une classe d'influence \mathcal{C}_x qui a les mêmes propriétés que pour les KCSM, à savoir qu'elle est invariante par translation, à portée fini et qu'aucun ensemble de \mathcal{C}_x ne contient le site x . On définit alors la contrainte d'une arête $x \sim y$ par :

$$c_{xy}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists A \in \mathcal{C}_x, \forall z \in A \setminus \{y\}, \sigma(z) = 0 \text{ et } \exists B \in \mathcal{C}_y, \forall z \in B \setminus \{x\}, \sigma(z) = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La contrainte en $x \sim y$ est donc satisfaite si un voisinage adéquat de x et un voisinage adéquat de y sont libres. Ces voisinages ne comptent pas ni x , ni y . Pour un choix de contrainte, on définit alors le KCLG associé par son générateur :

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \sim x} c_{xy}(\sigma) \sigma(x) (1 - \sigma(y)) [f(\sigma^{xy}) - f(\sigma)].$$

Le processus peut se construire graphiquement de manière analogue aux KCSM. A chaque arête, on associe un processus de Poisson de paramètre 1, tous indépendants entre eux. A chaque incrément d'un de ces processus, on vérifie si la contrainte est satisfaite sur l'arête correspondante. Si elle l'est, on permute les valeurs des deux extrémités de l'arête, sinon, la configuration reste inchangée. A nouveau, cette construction nécessite le même argument de percolation que pour les KCSM pour être correcte. Voyons deux exemples de contraintes.

- Pour la contrainte triviale $\forall \sigma \in \Omega, \forall x, y \in \Lambda, c_{xy}(\sigma) = 1$, le processus est en fait un processus d'exclusion symétrique simple (SSEP). Ce processus occupe une place importante dans le paysage des modèles de mécanique statistique, mais il n'est évidemment pas intéressant en tant que modèle avec contrainte cinétique. On verra cependant que certains modèles avec des contraintes non triviales partagent des propriétés avec le processus d'exclusion.
- Les modèles de Kob-Andersen sont des modèles dépendant d'un paramètre $k \in [2, 2d-1]$, abrégés en KA- k f qui correspondent à la contrainte

$$c_{xy}(\sigma) = \mathbb{1}_{\sum_{z \sim x, z \neq y} (1 - \sigma(z)) \geq k-1} \mathbb{1}_{\sum_{z \sim y, z \neq x} (1 - \sigma(z)) \geq k-1}.$$

Autrement dit, deux sites $x \sim y$ peuvent permute seulement si au moins $k-1$ voisins de x , *différents de y* , sont libres, *et* au moins $k-1$ voisins de y *différents de x* sont libres. Le cas $k=1$ serait à nouveau le processus d'exclusion simple.

Comme annoncé, le nombre de particules au cours du processus est constant. Généralement, on étudie son évolution avec une configuration initiale tirée selon la loi produit $\mu = \otimes_{x \in \mathbb{Z}^d} \text{Ber}(p)$.

1.5 Motivations de la thèse

Dans cette thèse, nous étudions les KCM sous deux aspects. Tout d'abord, nous étudions en détail la relaxation vers l'équilibre dans le modèle FA-1f. Nous montrerons que le modèle FA-1f sur $[1, L]$ présente un phénomène de cut-off. Ce résultat se distingue du cut-off pour le modèle Est prouvé dans [23] notamment parce que ce dernier repose sur un argument de couplage monotone qui n'est pas valide pour FA-1f. Pour cette raison entre autres, la démonstration est considérablement plus difficile. De fait, on montrera un résultat assez précis sur la convergence du processus vers l'équilibre selon sa condition initiale en distinguant deux classes de configurations.

Parallèlement, on se penchera sur le modèle KA sur \mathbb{Z}^d en étudiant la diffusion d'une particule marquée. En 2018, il a été montré que le coefficient de diffusion est toujours strictement positif. A l'aide du formalisme introduit par Shapira (voir notamment [44]), nous avons pu donner une estimation précise de ce coefficient lorsque la densité de particule tend vers 1.

2 Relaxation pour les modèles KCSM

2.1 Ergodicité et trou spectral

Comme nous l'avons vu en introduction, le choix de la contrainte dans un modèle KCSM a une grande influence sur son comportement. En effet, certains modèles n'admettent que la configuration 1 comme configuration bloquée. D'autres admettent des structures bloquées, mais qui sont infinies alors que d'autres modèles encore admettent des clusters bloqués finis. Cette différence est importante puisque sous la mesure d'équilibre μ , certains de ces clusters ont une probabilité nulle d'apparaître, comme les deux droites pleines pour FA-2f, alors que d'autres ont une probabilité strictement positive d'être présents comme le carré 2×2 pour FA-3f. En fait, la mesure (sous μ) de ces structures bloquées caractérise même l'ergodicité des KCSM, comme on va l'expliquer maintenant.

Pour caractériser les structures bloquées par la dynamique, on introduit un automate cellulaire déterministe appelé *bootstrap percolation* défini comme suit. Étant donné un modèle KCSM avec une contrainte c et une configuration initiale $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, on note $A_0 = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \sigma(x) = 0\}$. On définit ensuite les ensembles A_n , $n \geq 1$ par récurrence par :

$$\forall n \geq 1, A_n = A_{n-1} \cup \{x \in \mathbb{Z}^d \mid c_x(\sigma) = 1\}.$$

Enfin, on se donne la suite de configurations $(\sigma^{(n)})_{n \geq 0}$ définie par $\sigma^{(0)} = \sigma_0$:

$$\forall n \geq 1, \sigma^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A_n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A chaque étape, cet automate vide les sites dont la contrainte est satisfaite, et laisse en place tous les autres. Autrement dit, l'automate fait apparaître à chaque étape des zéros sur tous les sites qui pourraient faire une transition $1 \rightarrow 0$ par la dynamique. Par décroissance, on voit que, partant de $\sigma \in \Omega$ fixé, la suite $(\sigma^{(n)})_{n \geq 1}$ converge (ponctuellement) vers une configuration limite dont les sites occupés sont $\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)^c$. Si cet ensemble est non trivial, alors les sites occupés restants forment une structure bloquée sous la dynamique du KCSM. On regarde maintenant le résultat de la percolation bootstrap en partant d'une configuration tirée sous la mesure $\mu^p = \otimes_{x \in \Lambda} \text{Ber}(p)$. Toujours par un argument de monotonie, la loi de la configuration $\sigma^{(n)}$ converge vers une loi limite μ_∞^p . De manière analogue à la percolation, on définit un paramètre critique de la percolation bootstrap par :

$$p_{bp} = \sup\{p \in [0, 1] \mid \mu_\infty^p(\sigma(0) = 0) = 1\}.$$

Ce paramètre est donc le plus grand p tel que, presque-sûrement en partant de la loi μ^p , la configuration finale est entièrement vide.

On en vient au résultat important suivant :

Théorème 2.1. [12] Un KCSM est ergodique pour tout $p < p_{bp}$, et n'est pas ergodique pour $p > p_{bp}$.

En d'autres mots, le paramètre critique qui caractérise l'ergodicité du modèle coïncide avec le paramètre critique de la percolation bootstrap correspondant. Les KCSM sont donc ergodiques dès lors que, avec probabilité 1, dans une configuration tirée sous μ , tous les sites peuvent être mis à jour, ou pourront l'être en un nombre fini d'étapes. C'est une condition qui est de toute façon nécessaire, et ce théorème nous montre donc qu'elle est suffisante. Voyons les conséquences sur les exemples que nous avons introduits en section 1.

- Il est facile de voir que le seul "blocage" que le modèle FA-1f sur \mathbb{Z} peut rencontrer est la configuration 1. Cette configuration n'est atteignable par la dynamique que si elle est la configuration initiale. Comme elle est de mesure nulle sous tout μ^p avec $p < 1$, alors on en déduit que la mesure μ est ergodique pour le modèle FA-1f sur \mathbb{Z} pour tout $p \in [0, 1[$. De manière similaire, le modèle Est n'est bloqué que s'il existe une demi-droite (orientée vers la gauche) qui est entièrement remplie, ce qui aboutit à la même conclusion.
- Le modèle FA-3f sur \mathbb{Z}^2 ne peut pas se mettre à jour sur des sites dès lors qu'ils appartiennent à un carré de taille 2 qui est occupé. Pour tout $p > 0$, il est clair que la probabilité que $\sigma(0, 0) = \sigma(0, 1) = \sigma(1, 0) = \sigma(1, 1) = 1$ est strictement positive. Ainsi, presque sûrement sous μ^p , il existe des sites qui ne seront pas vidés par la percolation bootstrap. Ce processus n'est donc pas ergodique.
- Le modèle FA-2f sur \mathbb{Z}^2 présente aussi des clusters bloqués, par exemple les réunions de deux droites adjacentes. Ceux-ci en revanche ont une probabilité nulle d'être présents sous μ^p . En étudiant précisément toutes les structures bloquées possibles, on peut ainsi montrer que la mesure μ est ergodique pour tout $p < 1$ malgré l'existence de nombreuses configurations bloquées. En fait, en étudiant de plus près la percolation bootstrap associée aux modèles FA, on en arrive à la conclusion que le modèle FA-jf sur \mathbb{Z}^d est ergodique pour tout $p < 1$ si $j \leq d$, et jamais ergodique sinon ([43], [49]).
- Enfin, on peut voir que les configurations bloquées pour le modèle Nord-Est sont celles qui présentent un chemin infini "down-left" de sites occupés, c'est à dire un chemin de sites adjacents (x_n) tel que $x_{n+1} \in \{x_n - (1, 0), x_n - (0, 1)\}$. La probabilité qu'un tel chemin existe sous la mesure μ^p est un problème connu sous le nom de *percolation orientée*. Il se trouve que dans ce cas précis, il est connu que le paramètre critique p_{bp} n'est ni 0 ni 1 [17].

On poursuit notre étude des KCSM par le trou spectral. En 2002, Aldous et Diaconis ont montré que le modèle Est admet un trou spectral strictement positif pour tout $p < 1$ [2]. Ce résultat, assez spécifique à la dimension 1 et à l'orientation du modèle, a été très largement généralisé par Cancrini, Martinelli, Roberto et Toninelli. Nous en donnons une version adaptée aux modèles que l'on a introduit jusqu'ici :

Théorème 2.2 ([12]). *Pour le modèle Est, le modèle Nord-Est et tous les modèles FA-jf sur \mathbb{Z}^d avec $d \geq j$, on a*

$$\forall p < p_{bp}, \gamma > 0.$$

Plus précisément, les auteurs donnent des bornes explicites pour γ selon les modèles, ce qui a apporté d'ailleurs des réponses à des conjectures physiques sur le comportement du modèle lorsque $p \nearrow p_{bp}$.

Plus récemment, Hartarsky, Marêché, Martinelli, Morris et Toninelli ont prolongé l'analogie entre la percolation bootstrap et la relaxation des KCSM en dimension 2. Dans les deux articles [27] [26], les auteurs donne une estimation précise et complète du temps de relaxation et de l'espérance du premier temps où une particule est présente en l'origine, sous la loi initiale μ pour les modèles sans transition de phase. Cette étude s'appuie entre autres sur la notion de direction stable de la percolation bootstrap.

2.2 Comportements hors équilibre

La partie précédente nous a donné un aperçu de la connaissance des KCSM à l'équilibre, qui est en grande partie générale vis-à-vis des modèles choisis. Comme nous l'avons expliqué en introduction, l'étude hors équilibre est une tâche ardue et pour l'instant beaucoup plus spécifique à chaque modèle. Nous parlerons ici essentiellement des cas de Est et FA-1f sur \mathbb{Z} . Pour rappel, l'impact des configurations bloquées est minimal pour ces deux modèles puisque les processus associés en volume fini avec condition au bord libre sont irréductibles.

Commençons par énoncer un résultat intéressant par sa généralité. Il annonce que pour tous les KCSM sur \mathbb{Z} ayant un trou spectral strictement positif, si la configuration initiale est tirée selon une loi ν proche de μ , alors on obtient une convergence vers l'équilibre. Évidemment, ce résultat s'applique aux modèles Est et FA-1f.

Théorème 2.3 ([13] Theorem 2.1). *Pour tout KCSM sur \mathbb{Z} de trou spectral strictement positif, il existe $\lambda, m > 0$ tels que, pour tout mesure ν vérifiant*

$$\sup_{\ell} \max_{\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_\ell} e^{-\lambda\ell} \frac{\nu(\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_\ell)}{\mu(\sigma_{-\ell}, \dots, \sigma_\ell)} < \infty,$$

alors pour toute fonction locale f , il existe $C = C(f)$ tel que, pour t assez grand :

$$|\mathbb{E}_\nu[f(\sigma_t)] - \mu(f)| \leq Ce^{-mt}.$$

Dans le même article que le résultat ci-dessus, les auteurs obtiennent un résultat encore meilleur pour le cas du modèle Est. Par exemple, il est montré que si la configuration de départ est tirée selon une mesure produit de Bernoulli de paramètre $p' \neq p$, alors on a une convergence vers l'équilibre similaire au théorème précédent. L'idée de prendre une configuration initiale avec une densité différente de la loi d'équilibre est intéressante vis-à-vis

du problème physique initial. En effet, rappelons que p est une fonction décroissante de la température, et donc si $p' \leq p$, on modélise un système à une température T' qui est rapidement refroidi dans un environnement à température $T \leq T'$. Le caractère orienté du modèle Est est en fait d'une précieuse aide pour étudier la convergence à l'équilibre grâce à une notion appelée "zéro distingué". En quelques mots, il est possible de construire un processus auxiliaire à valeurs dans \mathbb{Z} , se déplaçant au plus d'un site à la fois, toujours vers la gauche, qui est tel que si le système est à l'équilibre à sa droite initialement, alors il est à l'équilibre à tout temps. Cette propriété très forte, identifiée initialement dans [2], est cependant spécifique à ce modèle, ce qui explique pourquoi les résultats sont plus complets pour le modèle Est par rapport à FA-1f.

Un autre faisceau de résultats donne la vitesse de convergence vers l'équilibre en partant d'une configuration fixée. Les sites vides d'une configuration permettent à leurs voisins de satisfaire leur contrainte, ce qui permet au processus d'évoluer plus rapidement, il est donc naturel que la quantité initiale de zéros ait une influence sur la convergence vers l'équilibre. En étudiant cela de plus près, on se rend compte que c'est plus précisément la distance maximale entre deux zéros consécutifs dans la configuration initiale qui est le paramètre pertinent. Pour le modèle Est, il a été montré le résultat suivant :

Théorème 2.4 ([23] Proposition 2.3 [7]). *Pour le modèle Est sur l'intervalle $[1, L]$ avec condition au bord libre, il existe $c, m > 0$ indépendants de p et L vérifiant la propriété suivante. Pour tout $\sigma \in \{0, 1\}^{[1, L]}$,*

$$\|P_\sigma^t - \mu\|_{TV} \leq L \left(\frac{c}{1-p} \right)^{\Delta(\sigma)} e^{-t(\gamma \wedge m)},$$

où $\Delta(\sigma)$ est le maximum de la distance entre deux zéros consécutifs de σ et du zéro le plus à droite de σ et L .

En fait, en étudiant de près ces hypothèses, on peut facilement se rendre compte que ce résultat contient le Théorème 2.3. Pour le modèle FA-1f, l'étude est différente mais on a des résultats suivant la même idée. Citons maintenant un résultat très important pour la suite, qui est une version simplifiée d'une proposition de l'article [8] :

Théorème 2.5 ([9] Corollary 3.3.). *Pour $x, y \in \mathbb{Z}$ et $\ell > 0$, on définit l'ensemble*

$$\mathcal{H}(x, y, \ell) := \{\sigma \in \{0, 1\}^\Lambda \mid \forall x \in [a, b - \ell + 1], \exists y \in [x, x + \ell - 1], \sigma(y) = 0\}.$$

Pour le modèle FA-1f sur \mathbb{Z} de paramètre $p < 1/2$, on se donne $K, t > 0$ et f une fonction locale de support contenu dans $[-K, K]$ telle que $\mu(f) = 0$.

Alors, si il existe $\alpha < 1/2$ et tel que $K \leq e^{t\alpha}$, il existe $c > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{H}(-K - \bar{v}t, K + \bar{v}t, \sqrt{t}), |\mathbb{E}_\sigma[f(\sigma_t)]| \leq 1/c \|f\|_\infty e^{-c\sqrt{t}},$$

où $\bar{v} > 0$ est une constante indépendante de tous les paramètres de ce théorème.

A nouveau, la présence de zéros dans la configuration initiale conditionne la vitesse de convergence vers l'équilibre. Notons que contrairement au résultat sur Est, on est ici déjà restreint à un régime particulier $p < 1/2$. Cette restriction vient d'arguments techniques de la preuve, alors qu'il ne semble pas y avoir d'obstacle à ce que ce résultat soit vrai pour tout $p < 1$. Les résultats que nous verrons en détail dans la sous-section 2.4 seront eux aussi valides uniquement pour un paramètre p restreint à un intervalle $]0, \bar{p}]$, avec $\bar{p} < 1/2$.

2.3 Cut-off pour Est

Nous allons maintenant exposer dans ses grandes lignes le résultat le plus précis que l'on connaît aujourd'hui sur la relaxation vers l'équilibre pour le modèle Est, à savoir le phénomène de cut-off. Dans l'article [23], les auteurs aboutissent au phénomène de cut-off en suivant une ligne d'arguments que l'on aura l'occasion de revoir en détail pour le modèle FA-1f. Premièrement, il faut introduire la notion de *front*.

Pour les modèles Est et FA-1f sur la droite \mathbb{Z} , il y a une famille de configurations qui est isolée des autres, ce sont les configurations avec une demi-droite $[X, +\infty[$ entièrement remplie. Appelons cet ensemble LO (pour *Left-Oriented*¹) :

$$LO = \{\sigma \in \Omega \mid \exists X \in \mathbb{Z}, \forall y \geq X, \sigma(y) = 1\}.$$

En effet, afin de mettre à jour n'importe quel site $y \geq X$ de cette demi-droite, il faudra d'abord au moins que tous les sites entre X et y aient été mis à jour. De ce fait, on observe que LO est une composante stable du processus : si $\sigma_0 \in LO$, alors $\forall t, \sigma_t \in LO$. Comme le montrent les quelques résultats de relaxation hors équilibre énoncés plus haut, la présence de sites occupés, de surcroît des sites consécutifs, est un obstacle à la convergence vers l'équilibre. Il est donc naturel de se pencher sur les configurations ayant des grandes composantes remplies, et les configurations dans LO . Pour tout $\sigma \in LO$, on appelle *front* le site vide le plus à droite, et on le note généralement $X(\sigma)$ ou X . L'étude du mouvement du front permet naturellement d'avoir des informations sur l'évolution des grandes composantes remplies. La trajectoire du front a été étudiée de près pour les modèles Est et FA-1f dans plusieurs articles [7] [3] [23] [9]. Nous énonçons ici un résultat qui aboutit de ces différents travaux et qui est très parlant :

Théorème 2.6 ([23],[9]). *Soit $\sigma_0 \in LO$. Il existe $v > 0$ et $s \geq 0$ tels que*

$$\frac{X_t - vt}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, s^2).$$

Cette convergence a lieu en loi, X_t désigne ici le front de σ_t . Ce résultat est valide pour tout $p \in]0, 1[$ pour le modèle Est, et pour tout $p < \bar{p}$ pour le modèle FA-1f pour un certain $0 < \bar{p} < 1/2$.

1. il serait judicieux de l'appeler plutôt "Right-oriented" avec le choix de notre orientation du modèle Est, mais on préfère conserver la notation la plus courante.

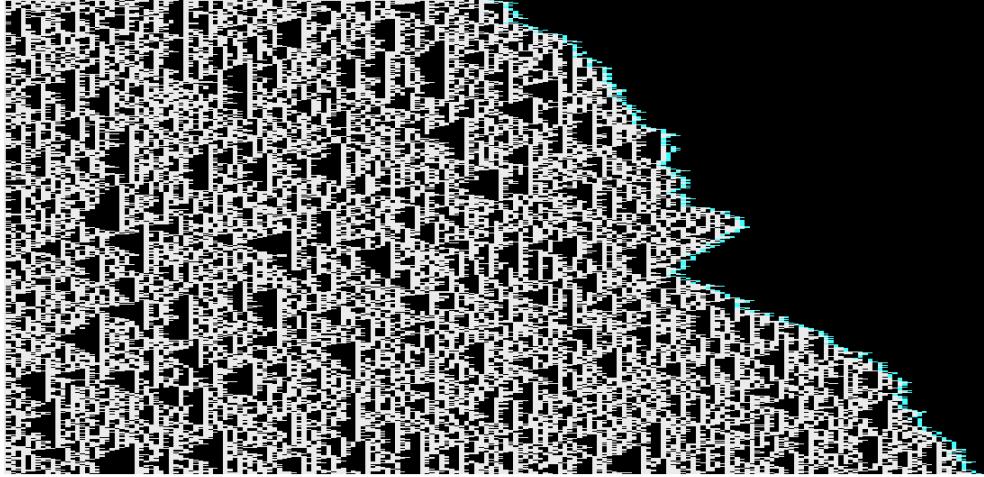


FIGURE 8 – [3] L'avancement du front pour un processus Est. Ici, l'évolution temporelle du processus se lit de haut en bas, chaque point noir symbolise la présence d'une particule. Le front, coloré en bleu, se déplace globalement vers la droite.

Le front admet donc un mouvement *vers la droite*, à vitesse linéaire v , et les variations vérifient un théorème central limite. Bien évidemment, ce résultat cache de nombreux résultats intermédiaires. Par exemple, on montre par des arguments assez simples que le front a une vitesse *au plus* linéaire \bar{v} , puis, plus finement, qu'il a une vitesse *au moins* linéaire \underline{v} . Nous verrons ces différents arguments plus tard dans cette section. L'existence de v et la convergence en loi sont par contre plus ardues : ils nécessitent d'étudier la loi du processus immédiatement derrière le front, en s'appuyant d'ailleurs sur les Théorèmes 2.4 et 2.5.

Avec ce résultat de TCL sur le front, on peut maintenant faire une observation cruciale, expliquée dans [23]. On se place en volume fini $\Lambda = [1, L]$, et on regarde le modèle Est sur Λ avec condition au bord libre ($\sigma(0) = 0$). Pour toutes les configurations initiales $\eta \in \Omega_\Lambda$, on va construire un processus $(\sigma_t^\eta)_{t \geq 0}$ (avec $\sigma_0^\eta = \eta$) de manière couplée. Pour ce faire, on utilise le couplage standard que l'on a défini au paragraphe 1.2.2 : tous les processus $(\sigma_t^\eta)_{t \geq 0}$ sont construits avec les mêmes variables exponentielles et Bernoulli. On différencie la condition initiale $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}(x) = 1$, $\forall x \in \Lambda$) qui joue un rôle particulier.

Observation 2.7. *Pour le modèle Est, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\eta \in \Omega_\Lambda$,*

$$\forall x \in [1, X(\sigma_t^1)], \sigma_t^\eta(x) = \sigma_t^1(x).$$

On vérifie cet énoncé de manière itérative. C'est évidemment vrai au temps initial puisque le front est en l'origine, et on vérifie que cela reste vrai à chaque déplacement du front grâce au couplage standard.

Maintenant, remarquons qu'en volume fini, le front $X(\sigma_t^1)$ atteint le bord de l'intervalle L en un temps fini presque sûrement T dont on peut avoir une estimation précise grâce au Théorème 2.6. Plus précisément, le TCL peut nous fournir deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

— Au temps $t_1 = L/v - \alpha\sqrt{L}$, le front est loin du bord droit avec grande probabilité :

$$\mathbb{P}\left(X(\sigma_{t_1}^1) \leq L - \sqrt{L}\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

— Au temps $t_2 = L/v + \beta\sqrt{L}$, le front a touché le bord droit avec grande probabilité :

$$\mathbb{P}(T \leq t_2) \geq \mathbb{P}\left(\sigma_{t_1}^\eta = \sigma_{t_1}^{\eta'}, \forall \eta, \eta'\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Au temps t_1 , la configuration $\sigma_{t_1}^1$ est encore loin de l'équilibre puisqu'elle a un segment de taille macroscopique \sqrt{L} qui est entièrement rempli. On a donc

$$d(t_1) \geq 1 - \varepsilon - p^{\sqrt{L}}. \quad (3)$$

Au temps t_2 , le front est arrivé au bord de l'intervalle et donc toutes les configurations sont couplées et donc le processus est proche de l'équilibre :

$$d(t_2) \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) ensemble montrent précisément qu'on a un phénomène de cutoff au temps L/v , avec un fenêtre d'ordre \sqrt{L} .

Concluons cette section par une remarque concernant le modèle FA-1f. Comme énoncé dans le Théorème 2.6, il existe un TCL pour la trajectoire du front pour le modèle FA. Nous verrons même une version légèrement améliorée de ce résultat plus tard. En revanche, l'Observation 2.7 tombe en défaut (cf Figure 9). Pour démontrer le cut-off pour FA-1f, on va donc devoir utiliser une stratégie complètement différente, bien plus longue.

2.4 Cutoff pour FA-1f

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, l'argument de couplage qui aboutit au cut-off pour Est ne peut pas être utilisé pour le processus FA-1f. Pour contourner ce problème, on étudie plus en détail la relaxation vers l'équilibre selon la configuration initiale. Nous allons développer dans cette sous-section les principaux arguments qui ont été développés lors de la thèse pour aboutir au cut-off pour le processus FA-1f. Citons tout d'abord le résultat à retenir de ce travail :

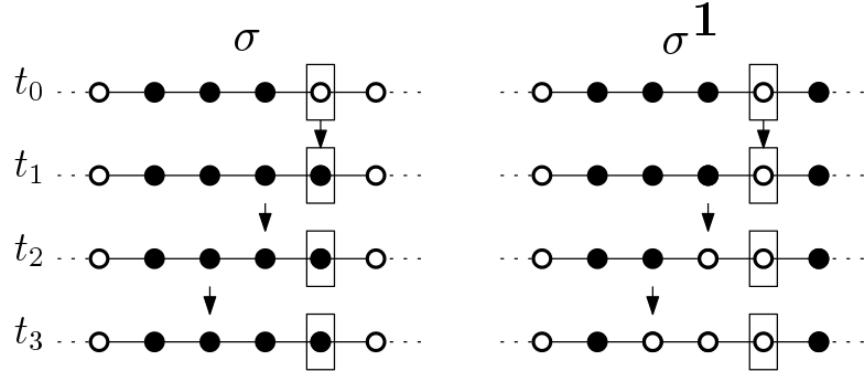


FIGURE 9 – Un exemple de non-couplage pour le modèle FA-1f. Initialement, les deux configurations σ et σ^1 sont égales partout à gauche du front (site encadré). Après cette suite de transitions, les configurations ne sont plus égales à gauche du front. Les sites qui ont sonné sont pointés par une flèche.

Théorème 2.8 ([19] Theorem 2.2). *Pour le modèle FA-1f sur \mathbb{Z} , il existe un paramètre critique $p_{cp} > 0$ tel que pour tout $p < p_{cp}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) > 0$ indépendants de L tels que, pour tout $L > 0$ suffisamment grand :*

$$d \left(\frac{L}{2v} - \alpha(\varepsilon)\sqrt{L} \right) \geq 1 - \varepsilon,$$

$$d \left(\frac{L}{2v} + \beta(\varepsilon)\sqrt{L} \right) \leq \varepsilon.$$

2.4.1 Processus de contact

Un premier ingrédient clé est le couplage de FA avec un processus de contact à seuil. Cet argument est déjà présent pour démontrer le TCL pour le front dans l'article [9]. Sur l'espace d'états Ω_Λ , on définit le processus de contact de paramètre p (le même que celui du modèle FA) par le générateur :

$$\mathcal{L}_c f(\sigma) = \sum_{x \in \Lambda} (p\sigma(x) + c_x(\sigma)(1-p)(1-\sigma(x))[f(\sigma^x) - f(\sigma)],$$

où $c_x(\sigma)$ désigne la contrainte liée au modèle FA-1f, c'est-à-dire

$$c_x(\sigma) = \mathbf{1}_{\sigma(x-1)=0 \text{ ou } \sigma(x+1)=0}.$$

A nouveau, il convient de définir des conditions au bord si Λ n'est pas \mathbb{Z} . Ces conditions seront toujours "libres", c'est-à-dire avec les bords de Λ fixés à la valeur 0.

Concrètement, ce processus fait des transitions $1 \rightarrow 0$ à taux q avec la contrainte cinétique, et des transitions $0 \rightarrow 1$ à taux p sans contrainte. Ce modèle s'interprète bien comme une modélisation de la propagation d'une infection, 1 représentant ici un site sain. Chaque site peut être infecté s'il a au moins un voisin infecté, et peut se rétablir spontanément sans contrainte sur son voisinage. Ce processus peut être construit graphiquement de manière analogue au paragraphe 1.2.2, et cette construction peut même être couplée avec celle de FA-1f pour avoir un couplage standard entre le processus de contact et FA-1f. Ce couplage est intéressant car il établit une monotonie entre les deux modèles, au sens suivant :

Observation 2.9. Soit σ^- , $\sigma^+ \in \Omega_\Lambda$ tel que $\sigma^- \leq \sigma^+$. Soit $(\sigma_t^-)_{t \geq 0}$ un processus de contact avec condition initiale σ^- , et soit $(\sigma_t^+)_{t \geq 0}$ le processus FA-1f avec condition initiale σ^+ obtenu par couplage standard avec $(\sigma_t^-)_{t \geq 0}$. Alors

$$\forall t \geq 0, \sigma_t^- \leq \sigma_t^+.$$

On se rappelle qu'au vu de la Proposition 2.5, il est intéressant d'étudier l'apparition de sites vides en partant d'une configuration quelconque. Grâce à cette observation, on peut donc déplacer le problème au processus de contact. Or ce genre de résultat existe déjà bel et bien pour ces modèles, que l'on résume sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 2.10 ([9] Theorem B.1). Soit $\sigma_0 \in \Omega_\mathbb{Z}$ avec $\sigma_0(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, \sigma_0(x) = 1$. Il existe un paramètre $p_{cp} \in]0, 1[$ qui vérifie la propriété suivante.

Soit $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un processus de contact partant de σ_0 . Soit $X_t = \max\{x \mid \sigma_t(x) = 0\}$ le front de la configuration au temps t . Enfin, soit $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid \sigma_t \equiv 1\}$. Alors, si $p < p_{cp}$:

- $\mathbb{P}_{\sigma_0}(\tau = \infty) > 0$,
- Il existe $v_{cp} > 0$ et $C, c > 0$, tous indépendants de p tels que

$$P_{\sigma_0}(X_t < v_{cp}t \mid \tau = \infty) \leq Ce^{-ct},$$

- Il existe $C, c > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$, si $I \subset [-v_{cp}t, v_{cp}t]$ est un intervalle de taille $\ell \in \mathbb{N}$, alors

$$P_{\sigma_0}(\sigma_{t|I} \equiv 1 \mid \tau = \infty) \leq Ce^{-c(t \wedge \ell)}.$$

Ce résultat est adapté des études faites sur les processus de contact, notamment [18]. Il existe donc un paramètre critique p_{cp} non trivial tel que si $p < p_{cp}$, le processus "survit" avec une probabilité strictement positive. Cette contrainte en le paramètre p se répercute donc pour le processus FA-1f dans tout ce qui va suivre. Il faut noter que cette restriction n'a aucune raison a priori de cerner réellement le comportement du modèle FA. Ce paramètre critique caractérise la survie du processus de contact, mais dans le cas de FA, une configuration ne peut pas se remplir entièrement de particules : il n'y a pas de question de survie. Il est vraisemblable que p_{cp} ne corresponde à aucun paramètre critique pour FA, mais on ne peut pas étudier la région $p \geq p_{cp}$ pour ces raisons purement techniques.

Cependant, les 2^e et 3^e points de la Proposition 2.10 donnent une information importante vis-à-vis du front pour le modèle FA-1f : puisqu'il y a la propriété de monotonie 2.7, on voit que le front de FA avance au moins aussi vite que celui d'un processus de contact qui survit. Après quelques arguments subtils de couplage, on montre qu'il a donc une vitesse au moins linéaire v_{cp} . On note désormais cette vitesse $\underline{v} := v_{cp}$. D'autre part, le dernier point de la proposition 2.10 nous indique qu'un zéro dans la configuration initiale crée au temps $t > 0$ un intervalle de taille $2\underline{v}t$ dans lequel on contrôle le nombre de zéros. Ce fait aboutit directement à la proposition suivante :

Proposition 2.11 ([9] Corollary 4.3). *Soit $p < p_{cp}$, $\sigma \in \Omega_{\mathbb{Z}}$ et $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma(x) = 0$. Si $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ est un processus FA-1f avec condition initiale σ , alors pour tout $\ell > 0$:*

$$\mathbb{P}_{\sigma}(\sigma_t \notin \mathcal{H}(x - \underline{v}t, x + \underline{v}t, \ell)) \leq Cte^{-c(t \wedge \ell)},$$

pour des constantes $C, c > 0$ indépendantes de σ .

Pour rappel, l'ensemble $\mathcal{H}(a, b, \ell)$ désigne l'ensemble des configurations qui n'ont pas d'intervalle de taille $\geq \ell$ entièrement remplis entre les sites a et b :

$$\mathcal{H}(x, y, \ell) := \{\sigma \in \{0, 1\}^{\Lambda} \mid \forall x \in [a, b - \ell + 1], \exists y \in [x, x + \ell - 1], \sigma(y) = 0\}.$$

2.4.2 Relaxation vers l'équilibre

Il est maintenant intéressant de combiner ce dernier résultat au Théorème de relaxation 2.5 vu précédemment. En effet, le résultat de relaxation permet de majorer efficacement la distance à l'équilibre au temps t pour une configuration dont les zéros sont initialement espacés de \sqrt{t} . Grâce à la Proposition 2.11, on peut laisser une configuration évoluer un premier temps t_1 pour que les zéros soient espacés d'une distance a , puis utiliser la Proposition 2.5 pour obtenir une distance à l'équilibre faible au bout d'un temps $t_1 + a^2$. En optimisant le choix de a , nous obtenons le nouveau résultat suivant :

Proposition 2.12 ([19] Proposition 4.2). *Soit $p < p_{cp}$, $0 < \beta < 1/2$, $L, \ell > 0$ et f une fonction bornée à support dans $[1, L]$ telle que $\mu(f) = 0$. Si $L \leq e^{\ell^{\alpha}}$ pour un $\alpha < \beta$, alors il existe $C, c > 0$ ne dépendant que de α et p tels que pour tout $\sigma \in \mathcal{H}(0, L + 1, \ell)$, si $t = \frac{\ell}{2\underline{v}} + \ell^{\beta}$,*

$$|\mathbb{E}_{\sigma}[f(\sigma_t)]| \leq C \|f\|_{\infty} L e^{-c\ell^{\beta/2}}.$$

Cette proposition montre donc qu'une configuration pour laquelle la distance entre deux zéros consécutifs est ℓ relaxe vers l'équilibre en un temps d'ordre $\ell/(2\underline{v})$ au plus. Cela nous donne une première estimation du temps de mélange du processus, mais celle-ci n'est en fait pas exactement du bon ordre. Cette proposition viendra plutôt comme un argument intermédiaire dans la preuve.

2.4.3 Le front dans FA-1f

Comme nous l'avons déjà vu, il existe plusieurs résultats décrivant la trajectoire du front pour une configuration dans LO [9]. Dans [19], on poursuit dans cette direction, en montrant un TCL sur le front, avec deux généralisations par rapport à la version de Blondel, Deshayes et Toninelli. D'abord, on étudie le processus sur la demi-droite \mathbb{Z}_+ , avec condition au bord vide². On définit donc l'ensemble

$$LO_+ := \{\sigma \in \Omega_{\mathbb{Z}_+} \mid \exists X \geq 0, \forall x \geq X, \sigma(x) = 1\}$$

l'ensemble des configurations sur \mathbb{Z}_+ qui présentent un front. L'intérêt de cette restriction est le suivant. Lorsque l'on étudie le processus en volume fini $\Lambda = [1, L]$ en partant d'une configuration avec une grande composante connexe de sites remplis, on veut pouvoir interpréter les bords de cette composante comme un front. En effet, tant que les bords de ce cluster ne se sont pas rencontrés, ils ont la même loi que le processus sur la demi-droite, où on a prolongé le cluster à l'infini (cf Figure 11). Pour que cet argument fonctionne, il nous faut donc un résultat pour les processus sur la demi-droite, ce qui n'est pas couvert pas les résultats existants. Cette modification n'est cependant pas difficile, il s'agit essentiellement de vérifier que la présence d'un bord ne modifie aucun argument des différentes preuves.

La deuxième précision apportée au résultat de Blondel, Deshayes et Toninelli est une uniformité de la convergence vis-à-vis de la configuration initiale. Cet ajout est crucial parce que nous auront besoin d'obtenir des bornes indépendantes de la configuration initiale lorsqu'on utilisera le TCL. On aboutit donc au résultat suivant :

Théorème 2.13 ([19] Theorem 5.1). *Soit $p < p_{cp}$. Il existe $v > 0$ et $s \geq 0$ tels que pour tout $\sigma \in LO_+$, il y ait la convergence en loi :*

$$\frac{X_t - X_0 - vt}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, s^2).$$

De plus, cette convergence est uniforme en la configuration initiale σ au sens suivant :

$$\forall a < b, \sup_{\sigma \in LO_+} \left| \mathbb{P}_\sigma \left(a \leq \frac{X_t - X_0 - vt}{\sqrt{t}} \leq b \right) - \mathbb{P}(a \leq N \leq b) \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

avec $N \sim \mathcal{N}(0, s^2)$.

Nous n'expliquerons pas ici comment on arrive à ce résultat, mais on peut donner des arguments montrant que la vitesse du front est minorée par une vitesse linéaire \underline{v} et majorée par une autre vitesse finie $\bar{v} > \underline{v}$. Tout d'abord, la borne supérieure de la vitesse

2. Le choix d'étudier sur la demi-droite \mathbb{Z}_+ diffère de celui de l'article [19], où le front se déplace vers la gauche. Il est présenté ainsi ici par soucis d'harmonisation avec ce qui a été vu pour le modèle Est, et aussi pour avoir des équations plus lisibles. Bien évidemment, cela ne change en aucun cas les résultats.

de propagation du front vient d'une propriété liée aux processus de Poisson qui définissent les sonneries en chaque site. Il est très élémentaire de vérifier que l'événement

{il existe une chaîne ordonnée de sonneries entre les sites x et y pendant un temps t }

a une probabilité bornée par $e^{-|x-y|}$ si $|x-y| > \bar{v}t$ pour une certaine constante numérique \bar{v} . Étant donné que la progression du front d'un site x à un site y nécessite la sonnerie dans l'ordre de tous les sites entre x et y , il résulte que le front progresse à une vitesse inférieure à \bar{v} au sens :

$$\forall c > \bar{v}, P(|X_t - X_0| > ct) \leq e^{-ct}.$$

On appelle généralement cette propriété la "vitesse finie de propagation de l'information". Par ailleurs, les propriétés que nous avons introduites à propos du processus de contact à seuil (Proposition 2.10) nous montrent assez facilement que le front du processus FA-1f progresse plus vite que celui d'un processus de contact qui survit (c'est-à-dire tel que $\tau = \infty$). Or nous avons vu dans le paragraphe 4.1.1 que le front de ce processus auxiliaire avance à vitesse linéaire $\underline{v} = v_{cp}$ si $p < p_{cp}$. Finalement, on montre sans entrer dans trop de détails que pour n'importe quelle configuration initiale σ ,

$$\mathbb{P}_\sigma(\underline{v}t \leq X_t - X_0 \leq \bar{v}t) \geq 1 - e^{-ct},$$

pour une certaine constante $c > 0$ indépendante de σ, p .

2.4.4 Stratégie de la preuve

Nous allons maintenant expliquer le raisonnement qui amène au résultat principal de cette section.

Rappelons trois résultats qui sont les ingrédients clé de la démonstration.

1. Une configuration ayant initialement des zéros espacés de ℓ relaxe vers l'équilibre en un temps au plus $\ell/2\underline{v} + o(\sqrt{\ell})$.
2. Le front d'une configuration sur la demi-droite se déplace à vitesse linéaire v , selon un TCL.
3. Derrière son front, une configuration de LO_+ crée des zéros (voir Figure 10). Pour le voir, il faut appliquer la proposition 2.11 astucieusement au front du processus à des temps intermédiaires. On en arrive alors à ce qu'on appelle le *lemme des zéros*, énoncé maintenant.

Lemme 2.14 ([19] Lemma 3.6). *Soit $p < p_{cp}$. Soit $s, \ell > 0$ et $\eta \in LO_+$. Supposons que $\eta \in \mathcal{H}(y, X_0, \ell)$ pour un certain $y \in [0, X_0]$, où X_0 désigne le zéro le plus à droite de η . Alors, si $2\underline{v}s \geq \ell$,*

$$P_\eta(\eta_s \notin \mathcal{H}(y, X_s, \ell)) \leq C(1 + |X_0|) \frac{s^2}{\ell} \exp(-c(s \wedge \ell)).$$

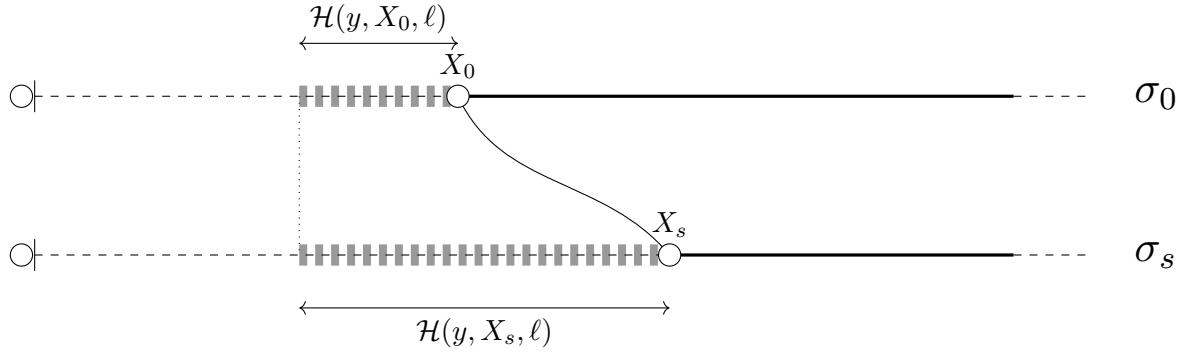


FIGURE 10 – L'évolution des zéros derrière le front grâce au lemme de zéros.

Commençons par étudier le cas où la configuration initiale est entièrement remplie. Initialement, il n'y a que deux sites vides : les bords 0 et $L + 1$. On voit que pendant un certain temps, l'évolution des parties gauche et droite de la configuration sont certainement indépendantes (elles ne se "voient pas"), et on peut considérer que l'évolution du site vide le plus à droite et $\leq L/2$ est celle d'un front d'une configuration sur \mathbb{Z}_+ qui est entièrement remplie initialement (cf Figure 11). Plus précisément, ce couplage est exact au moins tant qu'aucun de ces fronts n'a franchi le milieu de l'intervalle $L/2$. Tant que cet événement n'a pas eu lieu, on va appeler X_t le front de gauche (initialement en l'origine) et Y_t le front de droite (initialement en L). On va pouvoir alors mettre en marche tous nos ingrédients.

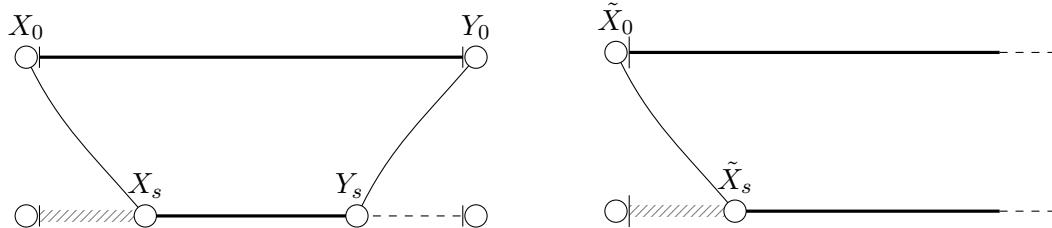


FIGURE 11 – Couplage standard entre deux processus FA-1f. A gauche, en volume fini en partant de la configuration entièrement remplie. A droite, en volume infini en partant de la demi-droite entièrement remplie. Tant que "X_s et Y_s ne se sont pas rencontrés", les deux configurations sont égales dans la zone hachurée, c'est-à-dire à gauche du front de la configuration définie sur la demi-droite.

Tout d'abord, grâce au TCL, on peut donner un encadrement précis de la position des fronts. En l'occurrence, on peut voir qu'après un temps $t_1 = \frac{L}{2v} + \alpha\sqrt{L}$, avec grande probabilité, le front de gauche est dans une boîte $[L/2 - 3a\sqrt{L}, L/2 - a\sqrt{L}]$ pour des

constants $a, \alpha > 0$ convenables. De même pour le front de droite qui sera après ce même temps t_1 dans la boîte $[L/2+a\sqrt{L}, L/2+3a\sqrt{L}]$. A ce stade, le lemme des zéros garantit que derrière chaque front, des zéros sont apparus. Au temps t_1 , on a alors avec une probabilité grande (qui tend vers 1 lorsque $L \rightarrow \infty$), une configuration où l'espace entre deux zéros consécutifs est au plus $6a\sqrt{L}$, ce qui correspond à l'espace maximum possible entre les deux fronts, qui sont maintenant proche du milieu de l'intervalle (cf Figure 12).

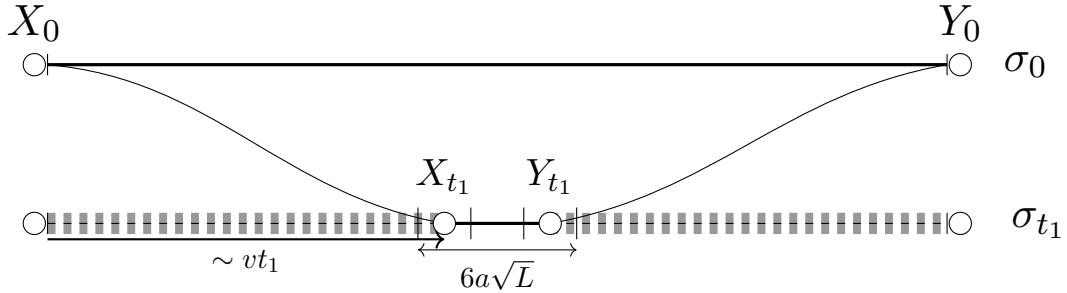


FIGURE 12 – L'évolution de la configuration pendant un temps t_1 lorsque les événements favorables ont lieu. Derrière chaque front, la configuration n'a pas d'intervalle entièrement rempli de taille $\geq 6a\sqrt{L}$.

En mettant bout à bout le raisonnement que l'on vient d'expliquer, et en faisant les calculs, on aboutit à une estimation de la forme :

$$\mathbb{P}_1(\sigma_{t_1} \in \mathcal{H}(0, L, 6a\sqrt{L})) \geq 1 - e^{-c\sqrt{L}} - F(L),$$

où $F(L)$ tend vers zéro lorsque $L \rightarrow \infty$.

On peut alors appliquer notre résultat de relaxation (Proposition 2.12) et voir qu'après un second temps $t_2 \propto \sqrt{L}$, la configuration est proche de l'équilibre. Donc après un temps total $t_1 + t_2 = L/2v + O(\sqrt{L})$, la configuration initialement entièrement remplie est proche de l'équilibre.

S'il existait un argument de couplage analogue à celui vu pour le cut-off pour le modèle Est, on aurait essentiellement terminé la démonstration du cut-off pour FA. En effet, un tel couplage monotone impliquerait que le temps de mélange depuis la configuration entièrement remplie domine le temps de mélange depuis n'importe quelle configuration initiale. Comme nous l'avons vu en introduction cependant, le modèle FA-1f n'a pas de telle propriété. Ainsi, malgré le caractère intuitif de l'argument, on ne peut pas montrer à ce jour que la configuration 1 est la plus lente à atteindre l'équilibre³. Pour montrer un cut-off, il a donc fallu étudier précisément le temps de relaxation à l'équilibre en partant de n'importe quelle configuration initiale. Avec une telle stratégie, il est clair que le résultat que l'on

3. Nous aurons une réflexion à ce sujet cependant dans le paragraphe suivant.

obtient finalement est plus riche qu'une simple propriété de cut-off, mais nous avons fait ce travail dans le but premier de mettre en évidence un phénomène de cut-off.

La stratégie de l'article [19] est donc plus profonde, mais s'appuie tout de même sur le raisonnement que l'on vient de voir. En fait, on montre que, étant donné une configuration initiale σ , la temps nécessaire pour atteindre l'équilibre dépend en premier lieu de la taille de la plus grande composante connexe entièrement remplie. La taille de cette plus grande composante est désignée par $B(\sigma)$. A quelques détails près, le comportement de la configuration dans cette composante remplie s'étudie de la même manière que ce que l'on a vu ci-dessus, et donc on montre qu'après un temps t_1 de l'ordre de $B(\sigma)/2v$, la configuration a créé suffisamment de zéros dans cette composante pour relaxer rapidement. Rappelons que le temps $B(\sigma)/2v$ s'interprète comme le temps nécessaire aux deux extrémités (deux fronts) de l'intervalle pour se rejoindre. Le reste de la configuration est géré de deux manières. Il y a les zones où il y a déjà beaucoup de zéros, de l'ordre de ce qui est nécessaire pour appliquer directement le résultat de relaxation. Celles-ci vont avec grande probabilité conserver un grand nombre de sites vides jusqu'au temps t_1 . Il y a ensuite des composantes remplies, plus petites que $B(\sigma)$, pour lesquelles on applique aussi le raisonnement des fronts. La technicité de la preuve réside en grande partie dans la gestion de ces multiples composantes remplies qui en parallèle se font "grignoter" à chaque bord.

Il est judicieux de définir une taille "seuil" de $B(\sigma)$ à partir de laquelle on applique ce principe. En effet, lorsque $B(\sigma)$ est petit, il n'y a pas besoin de faire un tel raisonnement puisqu'on peut appliquer le résultat de relaxation directement. En étudiant cette question de près, on aboutit au fait que les configurations doivent être séparées entre celles qui ont un intervalle rempli *macroscopique*, et les autres. Plus précisément, pour $\delta > 0$ et $L > 0$ fixés, on distingue les configurations qui appartiennent ou non à l'ensemble

$$\Omega^\delta := \mathcal{H}(1, L, \delta L).$$

Citons pour finir le résultat précis obtenu dans l'article [19].

Théorème 2.15 ([19] Theorem 2.1). *Pour tout $L > 0$, on note $\Omega_L = \Omega_{[1,L]}$. On définit pour toute configuration $\sigma \in \Omega_L$, la taille du plus grand intervalle entièrement rempli $B(\sigma) := \max\{h \geq 0 \mid \exists x \in [0, L-h], \sigma|_{[x+1, x+h]} \equiv 1\}$.*

Pour tous $p < p_{cp}$, $\delta \in (0, 1)$ et $\varepsilon > 0$, nous avons le résultat suivant. Il existe $a = a(\varepsilon) > 0$ telle que, en définissant les temps suivants pour tout $\sigma \in \Omega_L$:

$$\begin{aligned} t_1(\sigma) &= \left(\frac{B(\sigma)}{2v} + (B(\sigma))^{1/4} \right) \vee \left(\frac{(\log L)^9}{2v} + (\log L)^{9/4} \right), \\ t_2(\sigma) &= \frac{B(\sigma)}{2v} + \frac{7a}{v\delta} \sqrt{L}, \\ t_3(\sigma) &= \frac{B(\sigma)}{2v} - \frac{2a}{v} \sqrt{B(\sigma)}, \end{aligned}$$

alors :

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in \Omega_L^\delta} \|\mu_{t_1(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} = 0, \quad (5)$$

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in (\Omega_L^\delta)^c} \|\mu_{t_2(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2}. \quad (6)$$

De plus, pour tout fonction Φ telle que $\Phi(L) \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

$$\liminf_{L \rightarrow +\infty} \inf_{\sigma \in \mathcal{H}(0, L, \Phi(L))^c} \|\mu_{t_3(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} \geq 1 - \varepsilon. \quad (7)$$

2.4.5 Perspectives

Le résultat cité ci-dessus appelle plusieurs perspectives.

Tout d'abord, il paraît très improbable que la restriction au régime $p < p_{cp}$ soit pertinente pour le modèle FA-1f. On rappelle que les raisons qui nous forcent à étudier ce régime sont purement techniques : c'est un régime pour lequel on sait comparer le modèle FA-1f à un autre modèle et en extraire des propriétés intéressantes (création de zéros, front). Pour les processus de contact, le paramètre p_{cp} est caractéristique de la survie ou non de l'infection, c'est-à-dire ici de la survie des sites libres. Cette propriété de p_{cp} est donc propre au processus de contact et n'a absolument aucune interprétation pour FA-1f. Il me paraît donc vraisemblable que le Théorème 2.15 soit valide pour une gamme de paramètre p plus large, voire pour tout $p \in]0, 1[$. Prouver cela nécessiterait cependant des techniques très différentes de celles de la démonstration actuelle en presque tout point.

Comme nous l'avons mentionné plusieurs fois, une manière de rendre la démonstration du cut-off plus simple serait d'avoir un couplage standard monotone comme pour Est. Il n'est pas difficile de fabriquer un contre-exemple à la monotonie du couplage standard, cependant il est tout de même intéressant de s'y intéresser de plus près. On peut par exemple regarder le cas suivant. Sur \mathbb{Z}_+ , on effectue un couplage standard entre la configuration initialement remplie $\mathbf{1}$ et une configuration initiale quelconque σ . Notons $(\sigma_t^1)_{t \geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ les processus ainsi obtenus, et X_t le front de σ_t^1 . De manière surprenante, les simulations laissent penser que le couplage préserve tout de même les configurations sur un intervalle $[0, X(\sigma_t^1) - \ell]$ avec ℓ dépendant de t , mais "petit". Si un tel couplage était effectivement vrai avec grande probabilité pour un ℓ négligeable devant t , cela pourrait permettre de simplifier la démonstration actuelle. En revanche, ça ne changerait rien au problème du domaine du paramètre p puisque l'on dépendrait encore du TCL.

Enfin, on peut se poser la question des modèles FA en dimension supérieure. La question du cut-off peut évidemment se poser pour n'importe quel modèle, mais on peut d'abord

s'intéresser à généraliser nos résultats sur le front. Il n'y a pas de définition vraiment naturelle de ce que pourrait être le front d'une configuration dans \mathbb{Z}^2 avec, par exemple, un zéro initial en l'origine. Une notion intéressante pourrait par exemple être d'étudier l'ensemble \mathcal{A}_t des sites x qui ont sonné au moins une fois avant le temps t tout en ayant $c_x(\sigma_t) = 1$. Cet ensemble est strictement croissant, ne peut pas progresser trop vite à cause de la vitesse finie de propagation, et est fortement corrélé à l'évolution de la configuration σ_t . Là encore, on peut effectuer des simulations et constater qu'il semble bien y avoir une forme prise par l'ensemble \mathcal{A}_t , dont le diamètre progresse linéairement avec le temps (cf Figure 13). Une question similaire pourrait aussi se poser avec un modèle comme Nord-Est de la section 1.3.1.

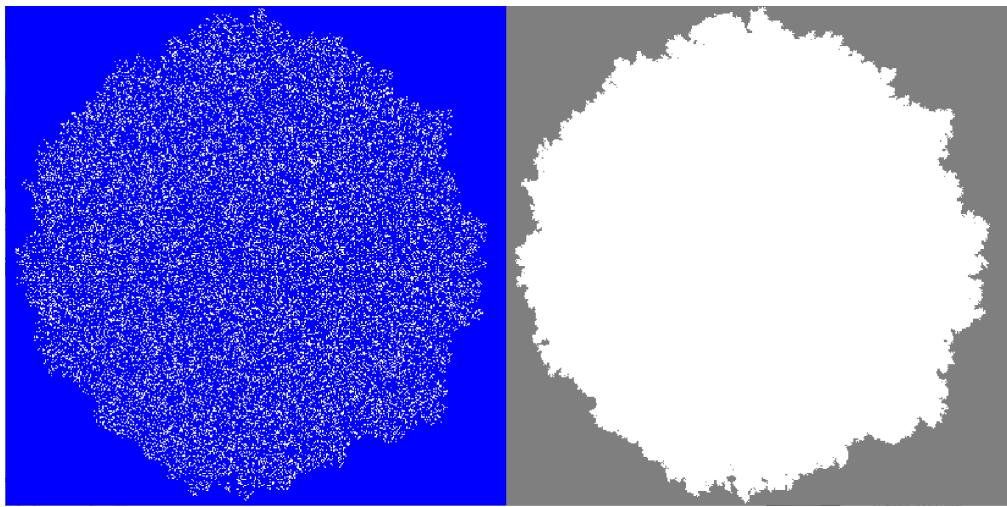


FIGURE 13 – Une configuration après 2.10^7 transitions pour le modèle FA-1f sur \mathbb{Z}^2 avec $p = 0.2$. A gauche, la configuration σ_t , les sites vides sont en blanc. A droite, l'ensemble \mathcal{A}_t correspondant en blanc.

3 Diffusion pour le modèle KA-jf

3.1 Ergodicité, temps de relaxation

Comment nous l'avons vu en introduction, les modèles avec contraintes cinétiques ont pour but de modéliser des phénomènes physiques où une particule est contrainte dans son déplacement. On cherche en particulier à observer des transitions de phase dans la dynamique en fonction de la densité de particule p . Il existe une première dichotomie pertinente parmi les modèles KCLG. Pour l'expliquer, on introduit la notion de *cluster mobile*.

Définition 3.1 ([48]). *Pour un modèle donné, un cluster mobile est un ensemble de sites du graphe $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}^d$ tel que :*

1. *Pour toute configuration $\sigma \in \Omega$ telle que $\sigma|_{\mathcal{C}} \equiv 0$, pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$, il existe une suite de transitions légales transformant σ en une configuration σ' telle que $\sigma'|_{\mathcal{C}+u} \equiv 0$,*
2. *Pour toute configuration σ et tous sites voisins $x \sim y$, il existe $u \in \mathbb{Z}^d$ tel que :*
 - $x \notin \mathcal{C} + u, y \notin \mathcal{C} + u$,
 - *Pour toute configuration σ , si σ' est la configuration égale à σ partout sauf sur $\mathcal{C} + u$ où elle vaut 0, alors $c_{xy}(\sigma') = 1$.*

Un modèle pour lequel il est possible de construire un cluster mobile est dit non coopératif. Inversement, un modèle est dit coopératif si un tel cluster mobile n'existe pas.

Intuitivement, l'existence d'un cluster mobile rend la dynamique plus simple à étudier car il est toujours possible pour deux sites de s'échanger quitte à déplacer le cluster dans son voisinage. En ce sens, les modèles non coopératifs se comportent essentiellement comme un processus d'exclusion avec une échelle différente pour laquelle un cluster mobile représente un site vide. Ils ne devraient donc être plus faciles à étudier, mais moins riches en propriétés typiques que l'on cherche à mettre en évidence par nos motivations physiques. En revanche, on peut montrer que tous les modèles KA sont coopératifs, en construisant des configurations où un ensemble de sites occupés ne peut jamais se vider quel que soit son voisinage.

Tous les modèles KCLG sont construits de sorte que la mesure produit $\mu = \otimes_{x \in \mathbb{Z}^d} \text{Ber}(p)$ est réversible. Cependant, pour les modèles coopératifs, elle n'est pas la seule à cause des configurations ayant des sites bloqués. A nouveau, on peut faire l'étude de l'ergodicité et du temps de relaxation. Notons tout d'abord que si $k > d$, le processus KA présente des structures *finies* bloquées. Comme pour le cas des KCSM, nous exclurons ces modèles puisqu'ils n'ont d'emblée aucune chance d'être ergodique (pour aucune densité p). On se restreint donc désormais à $k \in [2, d]$. Dans [48], il est montré que pour tout $k \in [2, d]$, toutes les mesures produits avec $p \in]0, 1[$ sont ergodiques. Ce résultat vient contredire des conjectures qui s'appuyaient sur des simulation numériques selon lesquelles il y aurait une transition de phase ergodique/non ergodique pour un paramètre critique $p_c < 1$ [31].

Montrons brièvement que le trou spectral des modèles KA sur \mathbb{Z}^d est nul pour tout $p > 0$. Pour tout $L > 0$, soit

$$f_L : \sigma \mapsto \#\{x \in [1, L]^d \mid \sigma(x) = 0\}$$

la fonction qui donne la quantité de sites vides dans la boîte $[1, L]^d$. Cette fonction est locale et non constante. Calculons alors $\mu(-f_L \cdot \mathcal{L} f_L)$ et $\text{Var}(f_L)$.

— On calcule

$$\mu(-f_L \cdot \mathcal{L} f_L) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \sim x} \mu(\sigma) c_{xy}(\sigma) \sigma(x) (1 - \sigma(y)) [f_L(\sigma^{xy}) - f_L(\sigma)]^2.$$

Les seuls termes potentiellement non nuls de cette somme correspondent à des couples $x \sim y$ qui modifient la quantité de particules dans $[1, L]^d$. Il s'agit donc des arêtes qui traversent le bord de la boîte. On peut donc grossièrement majorer tous les termes non nuls par 1 pour obtenir : $\mu(-f_L \cdot \mathcal{L} f_L) \leq d \# \partial [1, L]^d \leq CL^{d-1}$ pour une constante C indépendante de L . Donc

$$\mu(-f_L \cdot \mathcal{L} f_L) \leq CL^{d-1}.$$

— En outre, $\text{Var}(f) = p(1-p)L^d$ par indépendance des $\sigma(x)$.

On voit donc que le quotient $\frac{\mu(-f_L \cdot \mathcal{L} f_L)}{\text{Var}(f_L)}$ tend vers zéro lorsque $L \rightarrow \infty$. Le trou spectral des modèles KA en volume infini est donc nul, mais il est intéressant d'un point de vue physique d'avoir une estimation du trou spectral, ou de manière équivalente le temps de relaxation, pour le modèle sur un domaine fini $[1, L]^d$. Le temps de relaxation tend vers $+\infty$ lorsque $L \rightarrow \infty$, mais on peut se poser plusieurs questions à propos de cette convergence. Quelle est la vitesse de cette convergence en fonction de L ? Comment évolue-t-elle lorsque $p \rightarrow 1$? Après plusieurs estimations ([48]), Martinelli, Shapira et Toninelli ont montré un encadrement précis dans [37]. Citons le résultat :

Théorème 3.2 ([37] Theorem 1). *Notons $q = 1 - p$ la densité de sites libres. Pour tout $q \in]0, 1[$, il existe deux constantes $C_-(q), C_+(q) > 0$ telles que*

$$C_-(q)L^2 \leq T_{\text{rel}} \leq C_+(q)L^2,$$

avec, lorsque $q \rightarrow 0$,

$$C_+(q) = \begin{cases} \exp_{(k-1)}(c/q^{1/d-k-1}) & \text{si } 3 \leq k \leq d, \\ \exp(c \log(q)^2/q^{1/d-1}) & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

$$C_-(q) = \begin{cases} \exp_{(k-1)}(c'/q^{1/d-k-1}) & \text{si } 3 \leq k \leq d, \\ \exp(c'/q^{1/d-1}) & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

avec c, c' des constantes numériques. $\exp_{(\ell)}$ désigne la ℓ -ème itérée de la fonction exponentielle.

Ce résultat montre donc une croissance très forte du temps de relaxation, et donc un grand ralentissement de la dynamique lorsque la densité de particules approche 1. La preuve s'appuie notamment sur des arguments de chemins que nous aurons l'occasion de voir en section 3.

3.2 Diffusion

Un autre problème inspiré de la physique consiste à suivre l'évolution d'une particule marquée dans la dynamique. On conditionne la configuration initiale à avoir une particule en 0, et on note $(X_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire décrite par celle-ci au cours du temps. $(X_t)_{t \geq 0}$ n'est pas un processus de Markov en soi puisque son évolution dépend de l'environnement autour de lui. Cependant, le couple (X_t, σ_t) en est un et son générateur est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d f(X, \sigma) = & \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \neq X}} \sum_{z \sim y} c_{yz}(\sigma) \sigma(y) (1 - \sigma(z)) [f(X, \sigma^{yz}) - f(X, \sigma)] \\ & + \sum_{y \sim X} c_{Xy}(\sigma) \sigma(X) (1 - \sigma(y)) [f(y, \sigma^{Xy}) - f(X, \sigma)]. \end{aligned}$$

Précisons un détail important. Lorsque l'on regarde l'évolution d'une particule, on considère que le seul moyen qu'elle a de se déplacer est de "sauter" vers un site adjacent vide. En d'autres mots, on ignore toutes les transitions qui consistent à échanger deux sites *occupés*. Les seuls vrais mouvements sont lorsqu'un site vide et un site occupé sont échangés. Notons que le processus marginal $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ n'en est pas moins un processus KA exactement comme on l'a défini précédemment.

Plus précisément, on est intéressé par la trajectoire de la particule après un changement d'échelle. On modifie l'échelle spatiale de sorte que le graphe \mathbb{Z}^2 se contracte pour former, à la limite, l'espace continu \mathbb{R}^2 . Pour cela, on étudie simplement $(\varepsilon X_{t(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$. Il faut ensuite trouver l'échelle de temps (t dépendant de manière décroissante de ε) de sorte que les trajectoires finales soient non triviales. Ici, la bonne échelle est celle dite "diffusive" : on regarde donc le processus $(\varepsilon X_{\varepsilon^{-2}t})_{t \geq 0}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

En 2018, dans [10], les autrices ont montré que ce processus admet une limite non triviale en un sens suivant :

Théorème 3.3 ([10]). *Pour tout $p \in]0, 1[$, il existe un scalaire $D(p)$ strictement positif tel que*

$$\varepsilon X_{\varepsilon^{-2}t} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{2D(p)} B_t, \quad (8)$$

où B_t est un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R}^d . Cette convergence est une convergence faible sur l'espace des chemins de $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.

En fait, ce résultat vient en deux temps. Tout d'abord, une adaptation facile d'un travail fait pour le processus d'exclusion [45] montre qu'il y a bien la convergence (8). L'apport de Blondel et Toninelli a été de montrer la positivité du coefficient de diffusion D pour tout paramètre $p \in]0, 1[$. Comme pour les problèmes d'ergodicité, il avait été prédit que cette propriété de diffusivité n'était valide que pour p inférieur à un paramètre critique différent de 1 (voir [32] par exemple). Cette supposée transition de phase a donc été déjugeée par le théorème ci-dessus.

Très schématiquement, la démonstration de ce résultat repose sur la construction d'un processus auxiliaire diffusif, pour lequel il est facile de montrer que le coefficient de diffusion D_{aux} est strictement positif (en s'appuyant sur des résultats déjà connus). L'enjeu est ensuite de comparer les deux coefficients en montrant une inégalité de type $D(p) \geq C.D_{aux}$ pour une constante $C > 0$. Dans l'article [20] écrit en collaboration avec Shapira, nous avons reproduit ce schéma de démonstration, avec un processus auxiliaire légèrement différent, qui nous a permis notamment d'obtenir une borne inférieure explicite du coefficient de diffusion $D(p)$ lorsque $p \rightarrow 1$.

3.3 Coefficient de diffusion pour KA

Dans cette sous-section, nous expliquons dans les grandes lignes le raisonnement qui a amené au résultat de l'article [20]. Dans cet article, nous donnons une estimation précise du coefficient de diffusion d'une particule marquée dans le processus KA sur \mathbb{Z}^d . Pour simplifier les explications, nous allons nous restreindre au cas de la dimension 2, avec un paramètre $k = 2$, le seul possible dans cette dimension. Pour rappel, dans ce cadre, les particules peuvent se déplacer vers un site adjacent libre à taux 1 seulement si le site initial et le site final ont 1 voisin libre, à l'exception des deux sites en jeu.

Citons d'abord le résultat final, dans le cas $d = k = 2$:

Théorème 3.4 ([20] Theorem 2.3). *Soit $q = 1 - p$. Il existe des constantes $c, c' > 0$ indépendantes de p telles que, si q est suffisamment petit,*

$$\exp\left(-c\frac{\log(1/q)^2}{q}\right) \leq D(q) \leq \exp\left(-c'\frac{1}{q}\right)$$

La preuve se décompose en plusieurs parties. Tout d'abord, nous verrons que la constante de diffusion satisfait une formule variationnelle. Ensuite, nous définirons un processus auxiliaire au processus KA, ce qui nécessitera l'introduction de quelques notions géométriques. Pour aboutir à une borne inférieure du coefficient de diffusion, il faudra enfin faire le lien entre le processus auxiliaire et KA. Enfin, la borne supérieure sera obtenue par des arguments indépendants de ce qui a été vu avant.

Dans toute la suite de cette sous-section, $p \in]0, 1[$ est fixé, et on note $q = 1 - p$. Les configurations de $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ seront généralement notées η . On note enfin $\mu_0 = \mu(\cdot \mid \eta(0) = 1)$, $\tau_z \eta = \eta(z + \cdot)$ la configuration translatée de z et $[L]$ l'intervalle $[1, L]$.

3.3.1 Formule variationnelle

Commençons par compléter le théorème de convergence de la trajectoire de la particule marquée énoncé précédemment (Théorème 3.3). Ce théorème est tiré de [10], mais est en fait adapté d'un résultat similaire pour le processus d'exclusion simple [45]. Cette adaptation repose essentiellement sur le fait que le processus KA est ergodique pour tout $p < 1$. Au delà de la convergence de la trajectoire, le théorème donne aussi une formule variationnelle pour le coefficient de diffusion qui est la suivante.

Théorème 3.5 ([10]). *Le coefficient de diffusion pour le modèle KA est caractérisé par :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad u.D(q)u = \inf_f \mu_0 \left[\sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} c_{xy}(\eta)(f(\eta^{xy}) - f(\eta))^2 + \sum_{y \sim 0} c_{0y}(\eta)(u.y + f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta))^2 \right], \quad (9)$$

où la borne inférieure porte sur l'ensemble des fonctions locales de Ω .

Notons ici que le coefficient $D(q)$ est vu comme une matrice 2×2 , ce qui est effectivement le cas en toute généralité. Pour ce modèle cependant, il est simple de voir que les symétries imposent à cette matrice d'être scalaire. Dans toute la suite, on verra donc $D(q)$ comme un nombre réel, ce qui ne change pas la correction de la formule variationnelle (9) : le membre de gauche est tout simplement égal à $D(q)\|u\|^2$.

Cette formulation variationnelle est l'argument central de la démonstration à venir. En fait, nous verrons que le processus auxiliaire que nous définirons est lui aussi diffusif, avec un coefficient qui satisfait une formule variationnelle similaire, que l'on comparera à (9) afin de comparer les deux coefficients de diffusion.

3.3.2 Le processus auxiliaire

Pour construire le processus auxiliaire, il nous faut définir un nouveau graphe construit à partir de \mathbb{Z}^2 . Soit

$$\ell = c \frac{\log(1/q)}{q}, \quad L = q^{-\lambda\ell},$$

pour des constantes $c, \lambda > 0$ que l'on fixera plus tard. On suppose pour l'instant simplement que c et λ sont tels que L, ℓ et L/ℓ sont des entiers.

Définition 3.6 (Bloc, carré). *On appelle bloc tout ensemble de la forme $(L+1)i + [L]^2$ où $i \in \mathbb{Z}^2$.*

Un bloc se subdivise en carrés de la forme $(L+1)i + \ell a + [\ell]^2$ avec $i \in \mathbb{Z}^2$ et $a \in [0, L/\ell - 1]$. On appelle enfin face externe d'un carré toute composante connexe de la frontière extérieure du carré. Voir figure 14.

On définit alors le surgraphe \mathbb{Z}_L^2 de la manière suivante :

- Les sommets de \mathbb{Z}_L^2 sont les sites $(L+1)i$, $i \in \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire les coins (extérieurs) des blocs. $i \in \mathbb{Z}_L^2$ désignera dorénavant le site $(L+1)i \in \mathbb{Z}^2$.
- Les arêtes de \mathbb{Z}_L^2 connectent deux sommets $(L+1)i$ et $(L+1)j$ si et seulement si $\|i - j\|_1 = 1$.

Afin d'éviter des confusions, on réservera dorénavant les lettres x, y, \dots aux *sites* de \mathbb{Z}^2 , et i, j, \dots aux sommets du surgraphe \mathbb{Z}_L^2 . On définit maintenant quelques propriétés sur les blocs et les carrés.

Définition 3.7 (Carré arrangeable, encadrable). *Un carré $(L+1)i + \ell a + [\ell]^2$ est dit encadrable pour une configuration $\eta \in \Omega$ s'il existe une suite de transitions légales de la dynamique KA ayant lieu dans ce carré telle que η devienne une configuration η' avec :*

$$\forall x \in [\ell], \quad \eta'((L+1)i + \ell a + (1, x)) = \eta'((L+1)i + \ell a + (x, 1)) = 0.$$

Autrement dit, dans η' , deux bords adjacents du carré sont entièrement vides de particules. Un carré est dit arrangeable s'il contient au moins deux sites vides par ligne et colonne.

Comme nous le verrons plus tard, ces deux propriétés caractérisent la propension à permettre aux particules de se déplacer dans le carré. Les propriétés d'être encadrable et arrangeable ne sont pas comparables strictement. Il existe des configurations encadrables et non arrangeables comme par exemple une configuration qui est déjà "encadrée" et pleine partout en dehors de ces deux bords. Bien qu'il n'existe pas vraiment de caractérisation simple du caractère encadrable d'un carré, nous savons en estimer la probabilité sous μ . Retenons simplement pour l'instant qu'avec le choix de nos échelles ℓ et L , la probabilité qu'un carré donné soit arrangeable tend vers 1 lorsque $q \rightarrow 0$ (donc lorsque la densité de particule tend vers 1). La probabilité qu'un carré soit encadrable est minorée par $q^{2\ell}$, qui tend vers zéro lorsque $q \rightarrow 0$, mais en dominant $1/L$ si l'on choisit la constante λ assez grande. Être encadrable est donc bien moins probable qu'être arrangeable.

Définition 3.8 (Connexion par bloc). *Soit $i \in \mathbb{Z}^2$ et $j = i + (L+1, 0)$ et une configuration $\eta \in \Omega$. On dit que les sommets $i, j \in \mathbb{Z}_L^2$ sont connectés par bloc (dans η) si :*

1. *Il existe un chemin de carrés arrangeables adjacents reliant le carré $(L+1)i + [\ell]^2$ au carré $(L+1)i + \ell(\frac{L}{\ell} - 1) + [\ell]^2$, de longueur au plus $3L$, et comprenant au moins un carré encadrable,*

2. Les deux faces externes du carré initial qui sont adjacentes au site $(L+1)i$ contiennent au moins deux sites vides,
3. Les deux faces externes du carré final qui sont adjacentes au site $(L+1)j$ contiennent au moins deux sites vides.

Évidemment, on adapte cette définition facilement pour deux sites i et j de $(0, L+1)$.

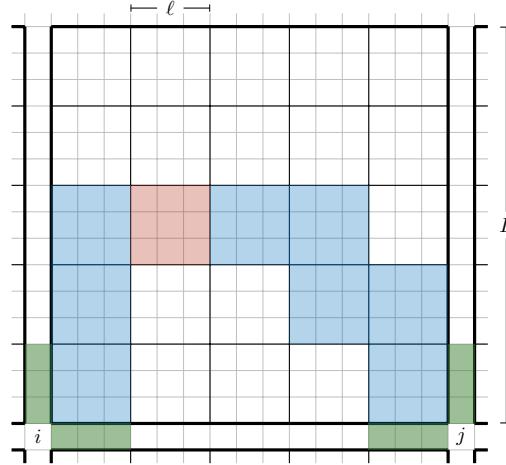


FIGURE 14 – [20] Des sommets i et j connectés par bloc. Les carrés bleus sont arrangeables, le carré rouge encadrable et les faces externes vertes contiennent 2 sites libres.

Cette notion de connexion par bloc permet maintenant de définir une percolation sur le surgraphe \mathbb{Z}_L^2 . Étant donnée une configuration $\eta \in \Omega$ tirée sous la mesure μ , on retire toutes les arêtes du graphe \mathbb{Z}_L^2 qui reliaient deux sommets qui ne sont pas connectés par bloc dans η . Pour une configuration η et deux sommets adjacents i, j de \mathbb{Z}_L^2 , on note $\bar{\eta}_{ij} = 1$ si les sommets i et j sont connectés, 0 sinon. Soit $\bar{\mu}$ la mesure ainsi induite par μ_0 sur les configurations sur le surgraphe. Grâce à notre choix des échelles ℓ, L et aux estimations des probabilités qu'un carré soit arrangeable ou encadrable, on montre que la probabilité que deux sites adjacents sont connectés par bloc tend vers 1 lorsque $q \rightarrow 0$. Pour q suffisamment petit, sous $\bar{\mu}$ il existe donc presque sûrement un cluster de percolation infini. On note alors $\bar{\mu}^* = \bar{\mu}(\cdot | 0 \leftrightarrow \infty)$ la mesure μ conditionnée à ce que l'origine soit dans le cluster de percolation.

Maintenant, nous pouvons définir une marche aléatoire simple sur ce cluster infini. Là encore, il est connu que cette marche aléatoire admet une limite diffusive, et que son coefficient de diffusion D_{aux} est caractérisé par une formule variationnelle :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, u.D_{aux}u = \inf_f \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_L^2 \\ i \sim 0}} \bar{\mu}^\star \left(\bar{\eta}_{0i} [u \cdot i + f(\tau_i \eta^{0i}) - f(\eta)]^2 \right). \quad (10)$$

Ce coefficient est de plus strictement positif, uniformément en p .

3.3.3 Arguments de chemins

Il s'agit maintenant de comparer les deux formules variationnelles (9) et (10). Une première étape consiste à ramener la formule variationnelle (10) sur le graphe initial. Cette étape est élémentaire, nous ne citons que le résultat :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, u.D_{aux}u \leq \bar{\mu}(0 \leftrightarrow \infty)^{-1} \inf_f \left\{ \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_L^2 \\ i \sim 0}} \mu_0 \left(\bar{\eta}_{0i} [u \cdot i + f(\tau_i \eta^{0i}) - f(\eta)]^2 \right) \right\} \quad (11)$$

L'argument principal de la démonstration arrive maintenant. Partant de cette expression (11), on construit pour chaque η avec $\eta(0) = 1$, et chaque $i \in \mathbb{Z}_L^2$ qui est connecté par bloc à l'origine dans η , une suite de configurations *explicite* $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(T)}$ telle que $\eta^{(0)} = \eta$ et $\eta^{(T)} = \eta^{0i}$, et telle que chaque configuration successive est reliée à la suivante par une transition légale dans KA. Autrement dit, pour tout $t \leq T - 1$, les configurations $\eta^{(t)}$ et $\eta^{(t+1)}$ ne diffèrent qu'en deux sites adjacents x_t, y_t tels que $c_{x_t y_t}(\eta^{(t)}) = 1$. Cette suite de configurations est donc un chemin de configurations valide dans le processus KA qui transporte la particule initialement à l'origine en un site particulier i qui lui est connecté par bloc.

Muni d'un tel chemin, on peut alors décomposer la somme dans le membre de droite de (11) en une somme sur toutes les configurations intermédiaires $\eta^{(t)}, 0 \leq t \leq T$ et retrouver des termes de la forme de la formule variationnelle initiale (9). Sans rentrer dans les détails de ce calcul, mentionnons qu'il vient naturellement plusieurs quantités qu'il faut estimer. Une première est la grandeur T : il faut pouvoir estimer la longueur d'un tel chemin. Ensuite, il apparaît une autre grandeur plus subtile que l'on appelle *l'information* d'une transition. Elle correspond essentiellement à la quantité, étant donné $\eta' \in \Omega$, $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{Z}^2$ fixés :

$$2^{\text{Loss}} := \sum_{\eta} \mathbf{1}_{\eta^{(t-1)} = \eta'} \mathbf{1}_{\eta^{(t)} = \eta'^{xy}}. \quad (12)$$

2^{Loss} mesure donc la quantité de configurations initiales η pour lesquelles le chemin de configurations fait la transition $\eta' \rightarrow \eta'^{xy}$ à la $(t - 1)^{\text{e}}$ étape.

Dans l'article de Blondel et Toninelli, la construction des chemins de configurations est implicite, ce qui amène à des bornes assez grossières pour ces deux quantités. Typiquement, sans construction explicite, la quantité (12) est bornée par le nombre total de configurations

dans un grand ensemble autour des sites 0 et i . Dans notre article [20], nous avons modifié légèrement le processus auxiliaire des autrices de [10] afin de pouvoir nous appuyer sur des constructions explicites déjà introduites par Shapira (voir [44]) ainsi que des estimations de T et 2^{Loss} pour avoir une borne inférieure finale de $D(q)$ satisfaisante.

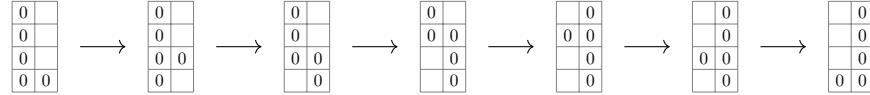


FIGURE 15 – Le déplacement d'une colonne vide.

Expliquons maintenant brièvement la construction de ce chemin à la lumière des définitions vues dans le paragraphe précédent. Dans un carré encadrable, il est possible en faisant une suite de transitions légales de créer une ligne de sites vides. Cette suite est la seule qui n'est pas vraiment explicite, mais étant donné qu'elle se déroule dans un carré de taille ℓ , qui est de l'ordre de $C \log L$, le nombre d'étapes et l'information perdue ici ne sont pas dommageables. C'est d'ailleurs l'introduction de cette échelle intermédiaire ℓ qui marque une différence avec la démonstration de Blondel et Toninelli. Une fois la ligne vide formée, on constate que celle-ci peut se déplacer dans le carré librement pour peu qu'il y ait au moins un site vide dans toutes les lignes (cf Figure 23). On peut aussi la transposer en une colonne vide. Mieux encore, si cette ligne vient se coller à la frontière d'un carré arrangeable, elle peut rentrer dans ce carré, et le traverser intégralement. Enfin, l'intérêt de cette ligne vide mobile est qu'elle permet de transporter avec elle une particule marquée. En mettant bout à bout tous ces arguments, on construit donc un chemin précis qui est schématisé en Figure 25. En estimant T et Loss sur ces mouvements "élémentaires" (la formation d'une ligne vide, son déplacement, et le déplacement d'une particule), on peut, en concaténant ces mouvements, arriver à une estimation globale sur tout le chemin. L'estimation ainsi obtenue est :

$$D(q) \geq \exp(-c\ell^2/q) = \exp(-c \log(1/q)^2/q).$$

Cette borne ne coïncide pas exactement avec la borne supérieure que nous donnons juste après. Il est conjecturé que l'équivalent correct de $D(q)$ est plutôt $\exp(-c/q)$.

3.3.4 Borne supérieure et conclusion

Pour obtenir une borne supérieure de $D(q)$, il suffit de trouver une fonction test f pour laquelle la formule

$$\mu_0 \left[\sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} c_{xy}(\eta) (f(\eta^{xy}) - f(\eta))^2 + \sum_{y \sim 0} c_{0y}(\eta) (u.y + f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta))^2 \right] \quad (13)$$

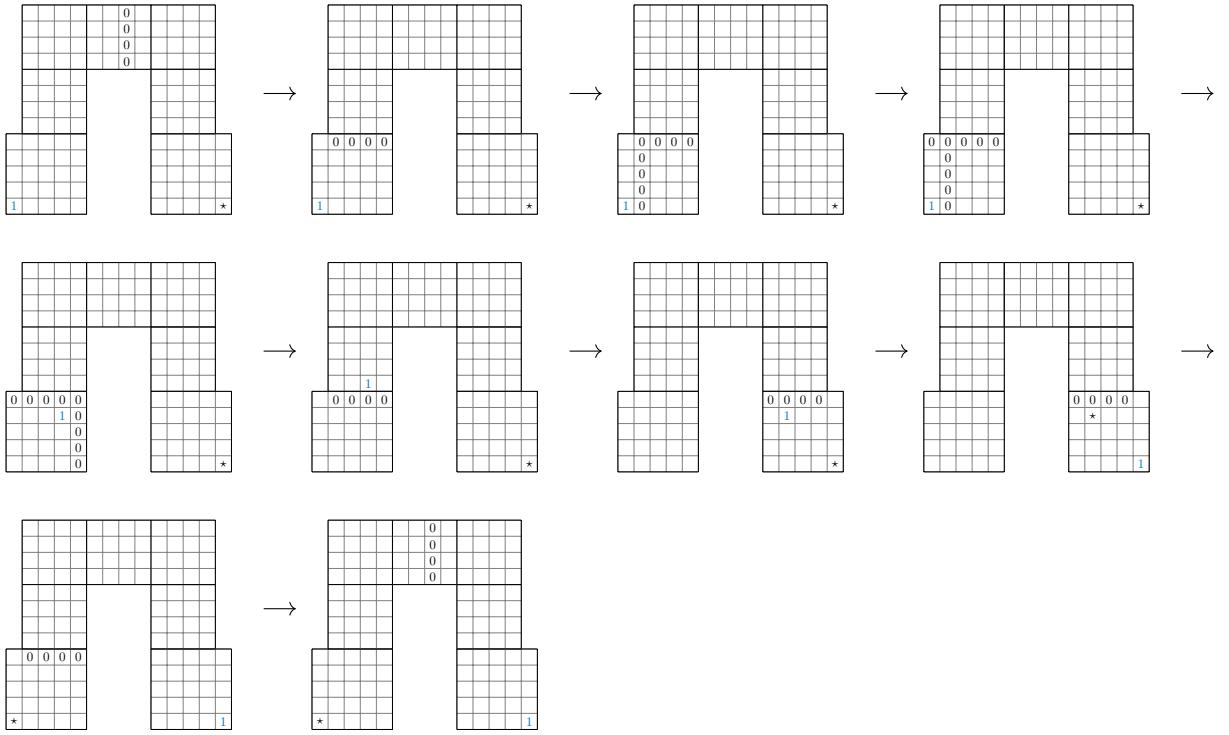


FIGURE 16 – Le chemin permettant de permute la particule marquée en l'origine avec le site \star .

a l'ordre de grandeur recherché.

Pour cela, on utilise la percolation bootstrap vue au paragraphe 2.1. A chaque étape de cet automate cellulaire, les sites libres restent libres, et les sites occupés ayant au moins 2 voisins libres deviennent libres. En partant d'une configuration initiale η , on obtient à la limite une configuration η^∞ . On définit le cluster de l'origine $\mathcal{C}_0(\eta)$ comme l'ensemble des sites libres dans η^∞ reliés à l'origine par un chemin de sites libres. On choisit alors

$$f(\eta) = \max \{x \in [-\ell, \ell] \mid \exists y \in [-\ell, \ell], (x, y) \in \mathcal{C}_0(\eta)\},$$

c'est-à-dire l'abscisse du site de $\mathcal{C}_0(\eta)$ le plus à droite dans la boîte $[-\ell, \ell]^2$, avec $\ell = c/q$ pour une certaine constante c . Pour contrôler la première somme de l'expression (13), on constate d'abord deux choses :

1. Tout d'abord, pour $\eta \in \Omega$, si $x, y \in [-\ell, \ell]^2$ et $c_{xy}(\eta) = 1$, alors $f(\eta) = f(\eta^{xy})$. En effet, si $\eta(x) = \eta(y) = 1$, alors $\eta = \eta^{xy}$. Si au moins l'un des sites x, y est libre, alors l'autre a 2 voisins libres, et donc dans η comme dans η^{xy} , les deux sites sont libérés après une étape de la percolation bootstrap. Les arêtes qui contribuent dans la somme

traversent donc la frontière de $[-\ell, \ell]^2$.

2. Si $x \sim y$ avec $x \in [-\ell, \ell]^2$ et $y \notin [-\ell, \ell]^2$, alors $f(\eta) \neq f(\eta^{xy})$ implique que $x \in \mathcal{C}_0(\eta)$ ou $x \in \mathcal{C}_0(\eta^{xy})$. Autrement dit, le cluster de l'origine atteint au moins le bord du carré $[-\ell, \ell]^2$ pour η ou η^{xy} .

Il reste donc à estimer la probabilité sous μ que $\mathcal{C}_0(\eta)$ ait un point de norme $\geq \ell$, ce qui est un résultat classique du domaine. Pour le terme de droite de (13), on procède un peu plus grossièrement, et on obtient finalement :

$$D(q) \leq \exp(-c/q).$$

4 Cutoff for FA-1f

Cette section est tirée de l'article [19], soumis pour publication à la date de l'écriture de ce manuscrit.

Résumé

The Fredrickson-Andersen one spin facilitated model belongs to the class of Kinetically Constrained Spin Models. It is a non attractive process with positive spectral gap. In this paper we give a precise result on the relaxation for this process on an interval $[1, L]$ starting from any initial configuration. A consequence of this result is that this process exhibits cutoff at time $L/(2v)$ with window $O(\sqrt{L})$ for a certain positive constant v . The key ingredient is the study of the evolution of the leftmost empty site in a filled infinite half-line called the front. In the process of the proof, we improve recent results about the front motion by showing that it evolves at speed v according to a uniform central limit theorem.

4.1 Introduction

The Fredrickson–Andersen one spin facilitated model (FA-1f) model is an interacting particle system that belongs to the class of kinetically constrained spin models (KCSM). These models are Markov processes that were first introduced in the 1980's by physicists to model liquid-glass transitions (see [22] and [28]) and that have some analogy with the Glauber dynamics of the Ising model. In a KCSM on a graph G , each vertex can either have a particle or be empty. At rate 1, each site tries to update according to a Bernoulli measure, but does so only if a local constraint is satisfied. On the graph \mathbb{Z} , the constraint can for example be that the site immediately to the right is empty, in which case we get the *East model*. Another possible constraint is to have either of the adjacent neighboring sites empty, which defines the FA-1f model.

Since the 2000's, the dynamics of KCSM both at and out of equilibrium have been thoroughly studied by the mathematical community. In 2002, Aldous and Diaconis [2] proved that the East model has a positive spectral gap. This result has been generalized to a large class of models in [12]. Starting out of equilibrium studies are made more difficult by the lack of attractiveness of the processes, preventing usual monotonicity and coupling arguments. Some results can be found for example in [13] for the East model and [39, 8] for FA-1f at low density. For the East model and the FA-1f model on \mathbb{Z} , an interesting topic of study is the motion of the front, i.e. the rightmost empty site of a configuration filled on an infinite half-line. First, Blondel [3] showed that the front has a linear speed in the East model. Based on this work, Ganguly, Lubetzky and Martinelli showed in [23] a central limit theorem for the front, which was followed by the proof that the East model exhibits cutoff thanks to a simple coupling argument. In [9], it was shown that the front for the FA-1f process also behaves according to a CLT when the density is below a certain threshold. The

aim of this paper is to use this last result to prove a cutoff for the FA-1f process. It will require much more work than for East because the main coupling argument [23, Section 4.2] no longer holds for FA-1f.

The cutoff phenomenon was first exhibited by Aldous and Diaconis in the context of card shuffling [1]. It consists of a sharp drop of the total variation distance to the equilibrium measure of a Markov process (see [34] for an introduction to this phenomenon). Since then, examples and counter-examples of cutoff have been shown for a wide variety of processes, but a universal criterion is missing. In 2004, Peres conjectured that a process exhibits cutoff if and only if it satisfies the *product condition* $t_{rel} = o(t_{mix})$, where t_{rel} is the inverse of the spectral gap and t_{mix} is the total variation mixing time of the process. This condition turned out not to be sufficient in general but sufficient for a large class of processes (see [4] and more recently [42]). Recently, several cutoff results have been shown for particle systems like the Ising model [36], the Asymmetric Simple Exclusion Process [33] or a stratified random walk on the hypercube [5].

In this paper, we will study in detail the relaxation of the FA-1f process depending on the initial configuration. We mainly rely on a result giving a bound on the mixing time for a configuration with many empty sites. The core of our study will thus be to see how quickly any initial configuration can create enough empty sites. For that, we study the big intervals that are initially filled with particles, and interpret the endpoint of those as fronts going inward at speed v . Thanks to another result referred to as "Zeros Lemma", we will be able to show that the configuration becomes suitable for relaxation after roughly the time it takes for the fronts of the biggest particle cluster to meet. Finally, our main result gives precise bounds on the mixing time of the process for *any* initial configuration, which is a more complete result than just a cutoff statement.

First, we give the definition of the model and our main result in Section 4.2, then an important coupling with a threshold contact process in Section 4.3 and results about relaxation to equilibrium in Section 4.4. In Section 4.5, we extend the central limit theorem proved in [9] in order to fit the actual proof of the main result, which appears in Section 4.6.

4.2 Definitions and main result

4.2.1 FA-1f processes

We will encounter three types of FA-1f processes, depending on their state space. Fix $q \in [0, 1]$. The FA-1f process of parameter q on an interval $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is given by the generator :

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{x \in \Lambda} r(x, \sigma)(f(\sigma^x) - f(\sigma)),$$

for any local function f and $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, where σ^x is the configuration equal to σ everywhere except at site x . The rate $r(x, \sigma)$ is given by :

$$r(x, \sigma) = (1 - \sigma(x-1)\sigma(x+1))(q\sigma(x) + (1-q)(1-\sigma(x))).$$

$\sigma(x) = 1$ is to be interpreted as the presence of a particle at x , and $\sigma(x) = 0$ as an empty site. In words, every site makes a flip $0 \rightarrow 1$ at rate $1 - q$ and $1 \rightarrow 0$ at rate q but only if it satisfies the kinetic constraint $c_x(\sigma) := (1 - \sigma(x-1)\sigma(x+1))$ is equal to 1, that is if it has at least one empty neighbor. If Λ has boundaries, we set the configuration to be fixed at 0 at the (outer) boundaries. We now fix some notations and conventions used throughout the paper.

- FA-1f processes on \mathbb{Z} are generally denoted by the letter σ . Their state space is $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. We define $LO = \{\sigma \in \Omega \mid \exists X, \forall x < X, \sigma(x) = 1\}$ the set of configurations equal to one on an infinite left-oriented half line.
- FA-1f processes on $\mathbb{Z}_- := \{-1, -2, \dots\}$ are generally denoted by the letter η . Their state space is $\Omega_- := \{\eta \in \Omega \mid \eta(0) = 0, \forall x \geq 0, \eta(x) = 1\}$. We define $LO_- = LO \cap \Omega_-$.
- For a finite interval $\Lambda = [1, L]$, we define $\Omega_L = \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(0) = \sigma(L+1) = 0, \forall x \notin [0, L+1], \sigma(x) = 1\}$.

For $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ and $x \in \mathbb{Z}$, we define the shifted configuration $\theta_x \sigma$ by :

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \theta_x \sigma(y) = \sigma(y+x).$$

For any $\sigma \in LO$, we define the front $X(\sigma)$ (or sometimes simply written X) as the leftmost zero in σ . Note that if the process is defined on an interval $\Lambda \neq \mathbb{Z}$, the front can be an outer boundary of Λ . When $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ is a process, we will write X_t instead of $X(\sigma_t)$ when σ_t clear from the context. We also denote by $\tilde{\sigma}$ the configuration seen from the front, namely $\theta_{X(\sigma)} \sigma$.

We also define μ_t^σ (resp. $\tilde{\mu}_t^\sigma$) the law of the FA-1f process (resp. seen from the front) at time t starting from σ . Whether the process takes place in \mathbb{Z} or \mathbb{Z}_- is implicitly given by the configuration σ . We denote by μ_Λ^p the Bernoulli product law of parameter p on $\{0, 1\}^\Lambda$. The FA-1f process on Λ with parameter q is reversible with respect to μ_Λ^{1-q} . In the following, we shall write μ instead of μ_Λ^{1-q} when q and Λ are clearly fixed.

Finally we define, for $I = [a, b] \subset \Lambda$ an interval and $\ell \geq 10$ the set :

$$\mathcal{H}(I, \ell) = \mathcal{H}(a, b, \ell) := \{\sigma \in \{0, 1\}^\Lambda \mid \forall x \in [a, b - \ell + 1], \exists y \in [x, x + \ell - 1], \sigma(y) = 0\}.$$

If $J = \bigcup_k I_k$ is a union of disjoint non adjacent intervals, then we define $\mathcal{H}(J, \ell) := \bigcap_k \mathcal{H}(I_k, \ell)$. In words, in a configuration in $\mathcal{H}(I, \ell)$, every site is at distance at most $\ell - 1$ to either the right boundary of I or to an empty site to its right. In such a configuration, two consecutive empty sites are within distance ℓ .

4.2.2 Main result

We denote $\Omega_L^\delta = \{\sigma \in \Omega_L \mid \sigma \in \mathcal{H}(1, L, \delta L)\}$. We also define, for $\sigma \in \Omega_L$,

$$B(\sigma) := \max\{h \geq 0 \mid \exists x \in [0, L-h], \sigma|_{[x+1, x+h]} \equiv 1\}$$

the size of the largest component of occupied sites in σ . The most precise result about the relaxation of the FA-1f process in a finite interval proved in this paper is the following. Recall the usual notations for real numbers : $a \wedge b = \max(a, b)$, $a \vee b = \min(a, b)$.

Théorème 4.1. *There exists $\bar{q} < 1$ such that for every $q > \bar{q}$, $\delta \in (0, 1)$ and $\varepsilon > 0$, the following holds. There exist three constants $a = a(\varepsilon, q) > 0$ and $0 < \underline{v} = \underline{v}(q) < v = v(q)$ such that, if we first define the following three times for any $\sigma \in \Omega_L$:*

$$\begin{aligned} t_1(\sigma) &= \left(\frac{B(\sigma)}{\underline{v}} \right) \vee \left(\frac{(\log L)^9}{\underline{v}} \right), \\ t_2(\sigma) &= \frac{B(\sigma)}{2v} + \frac{a}{\underline{v}\delta} \sqrt{B(\sigma)}, \\ t_3(\sigma) &= \frac{B(\sigma)}{2v} - \frac{a}{v} \sqrt{B(\sigma)}, \end{aligned}$$

then :

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in \Omega_L^\delta} \|\mu_{t_1(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} = 0, \quad (14)$$

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in (\Omega_L^\delta)^c} \|\mu_{t_2(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2}. \quad (15)$$

Moreover, for any function Φ such that $\Phi(L) \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

$$\liminf_{L \rightarrow +\infty} \inf_{\sigma \in \mathcal{H}(1, L, \Phi(L))^c} \|\mu_{t_3(\sigma)}^\sigma - \mu\|_{TV} \geq 1 - \varepsilon. \quad (16)$$

Let us give some comments about this statement. First, the two constants \underline{v} and v have the following interpretations. The constant \underline{v} is the speed of the infection propagation for a threshold contact process defined in the following Section. The constant v corresponds to the speed of the front for the FA-1f process on \mathbb{Z} starting with an infinitely filled half-line, that is with initial configuration in LO . Both \underline{v} and v depend on q that we chose here to be greater to a certain threshold \bar{q} necessary for the threshold contact process to survive. As we will see, the value \bar{q} is roughly equal to 0.76 [11]. The first two equations (14) and (15) of Theorem 4.1 give an upper bound on the time at which the process is well mixed. The first one works nicely for initial configurations that already have enough empty sites.

Indeed, in this case $B(\sigma)$ is smaller than δL , making up for the loss in the constant $1/(2v)$ instead of the expected $1/(2v)$. The time t_1 has to be bounded from below by $(\log L)^9$ for technical reasons we will see later. This bound is most likely not optimal but still offers a precise upper bound on the mixing time. The second equation handles the configurations that have macroscopic components of occupied sites and has the optimal leading behaviour $\frac{B(\sigma)}{2v}$ one can expect as shown in the last equation [16]. The last equation gives a lower bound on the mixing time for configurations with at least an interval of size $\Phi(L)$ occupied. Since it is only required that $\Phi(L)$ goes to infinity, this hypothesis is not really restrictive. It is however necessary for our argument (Theorem 4.14) to work. As a consequence of this theorem, we can conclude that the FA-1f process exhibits a cutoff.

Théorème 4.2. *Let $d(t) = \sup_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \|\mu_t^\sigma - \mu\|_{TV}$. Then for all $q > \bar{q}$ and $\varepsilon > 0$, there exist $\alpha(\varepsilon, q), \beta(\varepsilon, q) > 0$ independent of L , such that for L large enough :*

$$\begin{aligned} d\left(\frac{L}{2v} - \alpha(\varepsilon)\sqrt{L}\right) &\geq 1 - \varepsilon, \\ d\left(\frac{L}{2v} + \beta(\varepsilon)\sqrt{L}\right) &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

4.3 Coupling with a contact process and consequences

4.3.1 Graphical construction

Although we can easily define the FA-1f process through its generator, we also provide a more convenient construction called the graphical construction. For each site $x \in \mathbb{Z}$, define a Poisson process T^x of parameter 1 and an infinite sequence of Bernoulli random variables $(\beta_n^x)_{n \geq 1}$ of parameter $1 - q$, all of these variables being independent. Given an initial configuration σ_0 , at each increment t of a Poisson process, say the n^{th} increment at site x , we check if the constraint $c_x(\sigma)$ is satisfied, that is if the site x has at least one empty neighbor. If it does, then we set $\sigma_t(x) = \beta_n^x$. Otherwise, $\sigma_t(x)$ is unchanged.

From this construction, we can define the *standard coupling* which simply consists in taking the same set of random variables $(T^x)_{x \in \mathbb{Z}}$ and $(\beta_n^x)_{n \geq 1}$ for different initial configurations. Note that this coupling is not monotone : one can have $\sigma_0 \leq \sigma'_0$ and $\sigma_t \not\leq \sigma'_t$ even if $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ and $(\sigma'_t)_{t \geq 0}$ follow the standard coupling (see Figure 17). This is an important reason why this dynamics can be difficult to study.

Using the graphical construction, it is standard to show that there is a finite speed of propagation :

Proposition 4.3 ([9, Lemma 2.5]). *Let $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ be a FA-1f process. For $t \geq 0$ and two sites $x < y$, we define the events :*

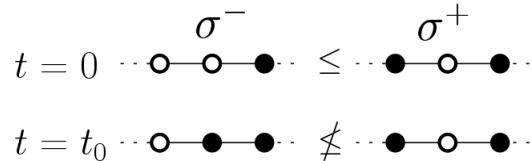


FIGURE 17 – An example of non monotonicity via the standard coupling. The middle site could update in σ_- but not in σ_+ .

$$F(x, y, t) = \{ \text{there is a sequence of successive rings linking } x \text{ and } y \text{ in a time interval of length } t \},$$

$\tilde{F}(x, y, t) = \{ \exists z \in [x, y] \text{ s.t. } F(x, z, t) \cap F(y, z, t) \}.$
Then there exists a constant $\bar{v} > 0$ such that if $|x - y| \geq \bar{v}t$, then

$$\mathbb{P}(F(x, y, t)) \leq \mathbb{P}(\tilde{F}(x, y, t)) \leq e^{-|x-y|}.$$

This implies a maximum speed for the front :

Corollaire 4.4. For all $\sigma \in LO$ or $\eta \in LO_-$, and $c \geq \bar{v}$, $\mathbb{P}(X_t - X_0 < -ct) \leq e^{-ct}$.

4.3.2 Contact process

In [25], Harris introduced the contact process on \mathbb{Z} . It is a process on $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ that allows sites to flip from 0 (infected site) to 1 at rate 1, and from 1 to 0 at a rate depending on the amount of empty adjacent sites. Based on this process, we introduce the same *threshold contact process* as in [9], denoted here by $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ and given by the following generator :

$$\forall f \text{ local, } \forall \zeta \in \Omega, \mathcal{L}'f(\zeta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} r'(x, \zeta)(f(\zeta^x) - f(\zeta)),$$

where $r(x, \zeta) = (1 - \zeta(x-1)\zeta(x+1))q\zeta(x) + (1 - q)(1 - \zeta(x))$. Note that we took here the convention that 0 is an infected site, which is not the most common one.

This process differs from both FA-1f and Harris' process in its constraint : a site is free to flip from 0 to 1 at rate p but has to have at least one empty neighbor to flip from 1 to 0 at rate q . This threshold contact process is the one well suited to a coupling with FA-1f as we will explain later. Let \bar{q} be the same parameter than in [9, Appendix B] such that whenever $q \geq \bar{q}$, then the threshold contact process starting from a single infected site had a positive probability of surviving and will create infected sites in an interval scaling linearly with time.

Let $\eta_0 \in LO_-$ and $(\eta_t)_{t \geq 0}$ be a FA-1f process starting from η_0 . Let $\zeta_0 = \delta_{X_0}$ where X_0 is the front of η_0 and δ_{X_0} is the configuration (on \mathbb{Z}) equal to 0 in site X_0 and equal to 1 everywhere else. Define $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ the contact process starting from configuration ζ_0 , evolving with respect to the standard coupling with $(\eta_t)_{t \geq 0}$. Then $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}_-, \eta_t(x) \leq \zeta_t(x)$. Indeed, this inequality holds for $t = 0$. Then, for each ring of a site $x \in \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$, assuming $\forall y \in \mathbb{Z}_-, \eta_{t-}(y) \leq \zeta_{t-}(y)$, there are three cases :

- The kinetic constraint at x is not satisfied in η_{t-} , in which case it is not satisfied in ζ_{t-} either. In this case, the value $\eta_t(x)$ does not change and the only possible change for $\zeta_t(x)$ is $0 \rightarrow 1$, which preserves the order.
- The kinetic constraint at x is satisfied in η_{t-} but not in ζ_{t-} . In this case, a $0 \rightarrow 1$ flip is possible for both configurations, and a $1 \rightarrow 0$ flip is only possible for $\eta_t(x)$, which does not break the inequality.
- The constraint is satisfied for both configurations, and then by construction of the coupling, $\eta_{t-}(x) = \zeta_{t-}(x)$, which again does not change the inequality.

Note also that the behavior of ζ on \mathbb{Z}_+ influences the behavior on \mathbb{Z}_- only through the $x = 0$ site. Since $\forall t, \eta_t(0) = 0$, we clearly have $\eta_t(0) \leq \zeta_t(0)$.

Thanks to this observation, and to the known results on the contact process [9, Appendix B], we can now state a first important lemma which provides a minimal speed for the front.

Lemma 4.5. *Let $q > \bar{q}$. There exists $\underline{v} > 0$ and $A, B > 0$ such that for every $\eta \in LO_-$, and $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X_t - X_0 > -\underline{v}t) \leq Ae^{-Bt}$$

The proof of the result is based on the comparison explained above. Hence, it is identical to the proof of Corollary 4.2 in [9].

4.3.3 Zeros Lemmas

Next, we state a crucial lemma based on the coupling explained above and on results for surviving contact processes. It is the same result as [9, Corollary 4.3], only extended to the FA-1f process on \mathbb{Z}_- and $[1, L]$, and it follows from the same coupling argument.

Lemma 4.6. *Let $q > \bar{q}$. There exist $c_1, c_2 > 0$ such that for any $\eta_0 \in \Omega_-$ and $x \leq 0$ such that $\eta_0(x) = 0$,*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(\eta_t \notin \mathcal{H}(x - \underline{v}t, (x + \underline{v}t) \wedge 0, \ell)) \leq c_1 t \exp(-c_2(t \wedge \ell)).$$

For $L > 0$, if $\sigma_0 \in \Omega_L$ and $x \in [0, L + 1]$ is such that $\sigma_0(x) = 0$, then similarly,

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(\sigma_t \notin \mathcal{H}((x - \underline{v}t) \vee 0, (x + \underline{v}t) \wedge (L + 1), \ell)) \leq c_1 t \exp(-c_2(t \wedge \ell)).$$

This last lemma can be used with x being the front of a configuration $\eta \in LO_-$ (or its boundary). This idea leads to a result we will now refer to as the "Zeros Lemma". We give here two versions of this result. The first one matches Lemma 4.4 in [9] while the second one is more specific to our needs later on.

Lemma 4.7 (Zeros Lemma). *Let $q > \bar{q}$. Let $s, \ell, M, L > 0$ and $\eta \in LO_-$.*

— *If $L + M \leq 2\underline{v}s$, there exists $c > 0$ depending only on q such that :*

$$\mathbb{P}_\eta(\tilde{\eta}_s \notin \mathcal{H}(L, (L + M) \wedge (-X_s), \ell)) \leq (L + M)^2 \exp(-c(L \wedge \ell)).$$

— *If $L + M > 2\underline{v}s$ and $\tilde{\eta}_0 \in \mathcal{H}(0, (L + M) \wedge (-X_0), 2\underline{v}s)$, then there exists $c > 0$ such that :*

$$\mathbb{P}_\eta(\tilde{\eta}_s \notin \mathcal{H}(L, (L + M) \wedge -X_s, \ell)) \leq \frac{s^2}{L} \exp(-c(L \wedge \ell)) + Ms \exp(-c(s \wedge \ell)).$$

Démonstration. It is identical to the proof in [9], just taking into account the boundary. \square

Lemma 4.8 (Zeros Lemma II). *Let $q > \bar{q}$. Let $s, \ell > 1$ and $\eta \in LO_-$. Assume $\eta \in \mathcal{H}(X_0, y, \ell)$ for some $y \in [X_0, 0]$, where X_0 denotes the leftmost zero of η . Then, there exists $C > 0$ depending only on q such that if $2\underline{v}s \geq \ell$,*

$$P_\eta(\eta_s \notin \mathcal{H}(X_s, y, \ell)) \leq C(1 + |X_0|) \frac{s^2}{\ell} \exp(-c(s \wedge \ell)).$$

Remark 4.9. *From now on and all throughout the proofs of this paper, the letters c, C, c', C' always denote generic positive constants that may differ from line to line. Consequently, any equation such as*

$$\text{“ } \mathbb{P}(A_t) \leq Ce^{-ct} \text{ ”}$$

should be understood as

$$\text{“ } \exists C, c > 0, \mathbb{P}(A_t) \leq Ce^{-ct} \text{ ”}.$$

The dependency of these constants on the various parameters appearing in this paper should be explicit or clear from the context.

Démonstration. In the same way as the proof of [9, Lemma 4.4], we use Lemma 4.6 at intermediate times. Let us fix s and define :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\ell}{2(\bar{v} - \underline{v})} \wedge s, \\ n &= \left\lceil \frac{(s - \Delta)(\bar{v} - \underline{v})}{2\underline{v}\Delta} \right\rceil, \\ \Delta' &= \frac{s - \Delta}{n} \text{ if } n > 0, \\ s_i &= i\Delta' \text{ for } i \in [0, n]. \end{aligned}$$

For $i \in [0, n]$, by Lemma 4.6 and Markov property applied at time s_i , there exist $c, C > 0$ such that :

$$\mathbb{P}_\eta(\eta_s \notin \mathcal{H}(X_{s_i} - \underline{v}(s - s_i), 0 \wedge (X_{s_i} + \underline{v}(s - s_i)), \ell/2)) \leq C(s - s_i)e^{-c((s - s_i) \wedge (\ell/2))} \quad (17)$$

In words, each position of the fronts on the times s_i provides an interval at time s where it is likely to find enough empty sites. Moreover, we can control the front evolution during the intervals $[s_i, s_{i+1}]$ with Corollary 4.4 and Lemma 4.5 to find that :

$$\mathbb{P}_\eta(0 \leq X_{s_i} - X_{s_{i+1}} \leq \bar{v}\Delta') \geq 1 - e^{-c\Delta'}, \quad (18)$$

$$\mathbb{P}_\eta(0 \leq X_s - X_{s_n} \leq \bar{v}\Delta) \geq 1 - e^{-c\Delta}. \quad (19)$$

Our choice of Δ and Δ' ensures that under these events, the intervals at time s appearing in (17) overlap, that is to say :

$$\bigcup_{i=0}^n [X_{s_i} - \underline{v}(s - s_i), X_{s_i} + \underline{v}(s - s_i)] \supset [X_s + \ell/2, X_0 + \underline{v}s].$$

We now take into account the zeros of the initial configuration to make this interval go all the way to the boundary. Let $x_0 = X_0 < x_1 < \dots < x_m \leq y$ be empty sites in η_0 between X_0 and y . We choose them so that for all i , $x_{i+1} - x_i \leq \ell$ and $y - x_m \leq \ell$, and their cardinality m is minimal. This way we can have $m \leq \frac{2|X_0|}{\ell}$.

By Lemma 4.6, we have for all i ,

$$\mathbb{P}_\eta(\eta_s \notin \mathcal{H}(x_i - \underline{v}s, 0 \wedge (x_i + \underline{v}s), \ell/2)) \leq Cse^{-c(s \wedge (\ell/2))} \quad (20)$$

Now since $2\underline{v}s \geq \ell$, then $(x_{i+1} - \underline{v}s) - (x_i + \underline{v}s) \leq 0$ which guarantees that the intervals $[x_i - \underline{v}s, x_i + \underline{v}s]$ overlap.

We can now conclude from equations (17), (18), (19) and (20) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\eta(\tilde{\eta}_s \notin \mathcal{H}(0, -X_s + y, \ell)) &\leq C(n+1)se^{-c(s \wedge (\ell/2))} + e^{-c\Delta} + ne^{-c\Delta'} + Cmse^{-c(s \wedge (\ell/2))} \\ &\leq C(1 + |X_0|)\frac{s^2}{\ell}e^{-c(s \wedge \ell)}. \end{aligned}$$

In the last line, we bounded $n \leq C\frac{s}{\ell}$ with C depending only on q . Also note that we artificially added a factor $s > 1$ to the last three terms of the first line so we have a nicer expression in the end. While non optimal, this result will be precise enough for our needs. \square

4.4 Relaxation results

We give here several results of relaxation starting out of equilibrium. They build upon the results of [8]. First, let us recall a proposition about the relaxation of the FA-1f process on a finite interval with zero boundary conditions.

Proposition 4.10 ([9, Corollary 3.3]). *Let $q > 1/2$, $L > 0$ and f a bounded function with support contained in $[1, L]$ such that $\mu(f) = 0$. If $L \leq e^{t^\alpha}$ for some $\alpha < 1/2$, then there exists $c' = c'(\alpha, q) > 0$ such that, if $\sigma_0 \in \mathcal{H}(0, L + 1, \sqrt{t})$,*

$$|\mathbb{E}_{\sigma_0}[f(\sigma_t)]| \leq \frac{1}{c'} \|f\|_\infty e^{-c'\sqrt{t}}$$

In words, this proposition states that if the process starts in $\mathcal{H}(0, L + 1, \ell)$, then it is mixed after a time ℓ^2 . Note that this holds for $q > 1/2$ which covers a larger regime than $q > \bar{q}$ because it does not rely on the coupling with the threshold contact process. Actually, we can combine this proposition with Lemma 4.6 to get a better relaxation speed for the supercritical regime and have a mixing after a time $\sim \frac{\ell}{2\underline{v}}$ instead of ℓ^2 :

Proposition 4.11. *Let $q > \bar{q}$, $0 < \beta < 1/2$, $L > 0$, $\ell > 0$ and f a bounded function with support contained in $[1, L]$ such that $\mu(f) = 0$. If $L \leq e^{\ell^\alpha}$ for some $\alpha < \beta$, then there exist $c, C > 0$ depending only on q and α such that, if $\sigma_0 \in \mathcal{H}(0, L + 1, \ell)$ and $t = \frac{\ell}{2\underline{v}} + \ell^\beta$,*

$$|\mathbb{E}_{\sigma_0}[f(\sigma_t)]| \leq C \|f\|_\infty L e^{-c\ell^{\beta/2}}.$$

Démonstration. Set $t_1 = \frac{\ell}{2\underline{v}}$. Let $0 = x_1 < \dots < x_p = L + 1$ a sequence of sites in $[0, L + 1]$ such that :

- $\forall 1 \leq i \leq p$, $\sigma_0(x_i) = 0$,
- $\forall 1 \leq i \leq p - 1$, $x_{i+1} - x_i \leq \ell$,
- $p \leq \lceil \frac{2L}{\ell} \rceil$.

Thanks to Lemma 4.6, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sigma_{t_1} \notin \mathcal{H}(0, L + 1, \ell^{\beta/2})\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^p \{\sigma_{t_1} \notin \mathcal{H}((x_i - \underline{v}t_1) \vee 0, (x_i + \underline{v}t_1) \wedge (L + 1), \ell^{\beta/2}/2)\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^p \mathbb{P}\left(\sigma_{t_1} \notin \mathcal{H}(x_i - \underline{v}t_1, x_i + \underline{v}t_1, \ell^{\beta/2}/2)\right) \\ &\leq Cpt_1 e^{-c(t_1 \wedge (\ell^{\beta/2}/2))} \\ &\leq C'L e^{-c'\ell^{\beta/2}}. \end{aligned}$$

Now we can use Proposition 4.10 (with $\sigma_{t_1} \in \mathcal{H}(0, L+1, \sqrt{\ell^\beta})$, and $L < e^{\ell^\beta}$ with $\beta < 1/2$) and Markov property :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{\sigma_0}[f(\sigma_t)]| &\leq \left| \mathbb{E}_{\sigma_0}[f(\sigma_t) \mathbf{1}_{\sigma_{t_1} \in \mathcal{H}(0, L+1, \ell^{\beta/2})}] \right| + \|f\|_\infty \mathbb{P}(\sigma_{t_1} \notin \mathcal{H}(0, L, \ell^{\beta/2})) \\ &\leq \mathbb{E}_{\sigma_0}[\mathbf{1}_{\sigma_{t_1} \in \mathcal{H}(0, L+1, \ell^{\beta/2})} |\mathbb{E}_{\sigma_{t_1}}[f(\sigma_{t-t_1})]|] + C' \|f\|_\infty L e^{-c' \ell^{\beta/2}} \\ &\leq \frac{1}{c''} \|f\|_\infty e^{-c'' \ell^{\beta/2}} + C' \|f\|_\infty L e^{-c' \ell^{\beta/2}}. \end{aligned}$$

□

A notable result comes from the particular case $\ell = L+1$ and $\beta = 1/4$. Indeed, any configuration $\sigma_0 \in \Omega_L$ belongs to $\mathcal{H}(0, L+1, L+1)$.

Corollaire 4.12. *There exist $c, C > 0$, such that for any $L > 0$, if $t = \frac{L+1}{2\underline{v}} + (L+1)^{1/4}$,*

$$\sup_{\sigma_0 \in LO_{[0,L]}} \|\mu_t^{\sigma_0} - \mu\|_{TV} \leq C L e^{-c L^{1/8}}.$$

Remark 4.13. *This results proves that the mixing time is always bounded by $\frac{L}{2\underline{v}} + o(L)$. This gives a first scale for t_{mix} but the constant $\frac{1}{2\underline{v}}$ will turn out to be too large in general, as we will see in the final section.*

4.5 Central limit theorem for FA-1f on \mathbb{Z}_-

We now aim to prove a central limit theorem for the front of the FA-1f process on \mathbb{Z}_- . Our result differs from the one proved in [9, Theorem 2.2] in two ways. First, it studies an FA-1f process on the half-line as opposed to \mathbb{Z} . This change forces us to take into account the boundary condition in the origin, tough we will see that the front gets far from the origin so this barely makes a difference in the proof. The second change is a *uniformity* result with respect to the initial configuration. This requires to study carefully the original proof and tweak a few key arguments. For a first read, one can take Theorem 4.14 for granted and skip to the next section in order to get to the main result.

Théorème 4.14. *Let $q > \bar{q}$. There exist $v > 0$ and $s \geq 0$ such that for all $\eta \in LO_-$, and all real numbers $a < b$,*

$$\sup_{\eta \in LO_-} \left| \mathbb{P}_\eta \left(a \leq \frac{X_t - vt}{\sqrt{t}} \leq b \right) - \mathbb{P}(a \leq N \leq b) \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad (21)$$

with $N \sim \mathcal{N}(0, s^2)$. The constants v and s are the same as in [9, Theorem 2.2].

Remark 4.15. In this theorem, the variance s^2 of the normal law can be zero. For this more favorable case, the law $\mathcal{N}(0, 0)$ is simply δ_0 , so that we have

$$\sup_{\eta \in LO_-} \left| \mathbb{P}_\eta \left(-a \leq \frac{X_t - vt}{\sqrt{t}} \leq a \right) - 1 \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

for all $a > 0$.

To prove this theorem, we first need to study the convergence of the law behind the front, which is the topic of the following theorem.

Théorème 4.16. Let $q > \bar{q}$. The process seen from the front has a unique invariant measure ν . This measure is the same as in [9, Theorem 2.1]. There exist $d^*, c > 0$ such that for all $\eta_0 \in LO_-$, for t large enough,

$$\|\tilde{\mu}_t^{\eta_0} - \nu\|_{[0, d^* t]} \leq \exp(-ce^{(\log t)^{1/4}}),$$

where $\tilde{\mu}_t^{\eta_0}$ is the distribution of the configuration seen from the front at time t , starting from η_0 and $\|\cdot - \cdot\|_\Lambda$ is the total variation distance on Λ .

The proof of this result is almost identical to the original proof in [9]. It relies on a rather technical coupling argument that only requires tiny adjustments due to the presence of a boundary in \mathbb{Z}_- . The adapted version of the proof can be found in Appendix 4.6.2.

4.5.1 A Central Limit Theorem

From Theorem 4.16, we will now get a central limit theorem as in [9]. Here, we state a general central limit theorem that we will apply to the increments of the front in the next paragraph. It resembles [9, Theorem A.1] but adds a uniformity result.

Théorème 4.17. Let (σ_t) be a Markov process (in continuous time) on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and (\mathcal{F}_t) the adapted filtration. Let $(X_i)_{i \geq 1}$ be real random variables satisfying the following hypotheses :

1. (a) $\sup_{\sigma \in \Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\sigma[X_n^2] < \infty$;
- (b) for every $i \geq 1$, X_i is measurable w.r.t. \mathcal{F}_i ;
- (c) for every $k, n \geq 1$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ measurable such that $\sup_{\sigma} \mathbb{E}_\sigma[f(X_1, \dots, X_n)] < \infty$,
for all initial σ , we have the Markov property

$$\mathbb{E}_\sigma[f(X_k, \dots, X_{k+n-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}_{\sigma_{k-1}}[f(X_1, \dots, X_{n-1})]; \quad (22)$$

2. There exists a decreasing function Φ , constants $C, c^* \geq 1$ and $v \in \mathbb{R}$ and a measure ν such that

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\log n)^2} \Phi(n) = 0$;
(b) for every $i \geq 1$, $\mathbb{E}_\nu[X_i] = v$;
(c) for every k , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $e^{-|x|} f^2(x) \in L^1(\mathbb{R})$, we have $\sup_\sigma \mathbb{E}_\sigma[f^2(X_1)] < \infty$
and

$$\sup_\sigma |\mathbb{E}_\sigma[f(X_k)] - \mathbb{E}_\nu[f(X_1)]| \leq C(f)\Phi(k); \quad (23)$$

- (d) for every k, n and f such that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $e^{-|x|} f^2(x) \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\sup_\sigma |\text{Cov}_\sigma[f(X_k), f(X_n)] - \text{Cov}_\nu[f(X_1), f(X_{n-k+1})]| \leq C(f)\Phi(k); \quad (24)$$

$$\sup_\sigma |\text{Cov}_\sigma[f(X_k), f(X_n)]| \leq C \sup_\sigma \mathbb{E}_\sigma[f(X_1)^2]^{1/2} \Phi(n-k); \quad (25)$$

- (e) for every k, n such that $k \geq c^*n$ and any bounded function $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sup_\sigma |\mathbb{E}_\sigma[F(X_k, \dots, X_{k+n-1})] - \mathbb{E}_\nu[F(X_1, \dots, X_n)]| \leq C\|F\|_\infty \Phi(k). \quad (26)$$

Then there exists $s \geq 0$ such that

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - vn}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, s^2).$$

Moreover, this convergence holds uniformly in the initial configuration in the following sense :

$$\forall a < b, \sup_\sigma |\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - vn}{\sqrt{n}} \leq b\right) - \mathbb{P}(a \leq N \leq b)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $N \sim \mathcal{N}(0, s^2)$.

Note that the hypothesis 2.(d) differs from the one in [9]. It is the correct hypothesis and should be corrected in the original article. It was however verified in the application therein, see [9, Lemma 7.3].

Démonstration. We first focus on bounded random variables. Let $(X_i)_{i \geq 1}$, satisfying the hypotheses. Let us define like in [9] $Y_i := X_i - \mathbb{E}_\nu[X_1]$, $\ell_n = n^{1/3}$, $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, $S_{j,n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{|k-j| \leq \ell_n} Y_i$ and finally $\alpha_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\sigma[Y_i S_{j,n}]$. and assume each Y_i is bounded. We follow the same line of arguments, replacing the "Bolthausen Lemma" [9, Lemma A.3] with an adapted version :

Lemma 4.18. *Let $(\nu_n^\sigma)_{n \geq 0}$ be a family of probability measures on \mathbb{R} such that :*

1. $\sup_\sigma \sup_n \int |x|^2 d\nu_n^\sigma(x) < \infty$

$$2. \forall R > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma} \sup_{|\lambda| \leq R} \left| \int (i\lambda - x) e^{i\lambda x} d\nu_n^\sigma(x) \right| = 0$$

Then for all $\sigma \in \Omega$, $(\nu_n^\sigma)_{n \geq 0}$ converges to the standard normal law. Furthermore, for all continuous bounded function f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma} |\nu_n^\sigma(f) - \mu(f)| = 0, \quad (27)$$

where $\mu = \mathcal{N}(0, 1)$.

Moreover, for all real numbers $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma} |\nu_n^\sigma(\mathbb{1}_{[a,b]}) - \mu(\mathbb{1}_{[a,b]})| = 0 \quad (28)$$

Proof of Lemma 4.18. Suppose that there is no uniformity in (27). Then there exist $\varepsilon > 0$, an increasing sequence of integers (k_n) and a sequence (σ_n) such that :

$$|\nu_{k_n}^{\sigma_n}(f) - \mu(f)| > \varepsilon$$

Then the sequence of measures $(\nu_{k_n}^{\sigma_n})$ clearly satisfies the hypothesis of the original Lemma [9, Lemma A.3] so should converge to a standard normal law, which is a contradiction with the above equation. \square

Looking at the proof of Theorem A.1 in [9], the distributions of $(\frac{S_n}{\sqrt{\alpha_n}})_{n \geq 0}$ satisfy the stronger hypotheses (in particular item 2) of the above Lemma. Consequently, we have the conclusion of Theorem 4.17 for bounded variables.

We now give details on how to extend the bounded case to the general case. We no longer assume the $(Y_i)_{i \geq 0}$ to be bounded. Let $a \in \mathbb{R}$ be a real number and $\varepsilon > 0$. Let $N \geq 0$ be an integer that will be fixed later, and define the truncation operator $T^N(x) := \max\{\min(x, N), -N\}$, and the remainder $R^N(x) := x - T^N(x)$.

Then we can estimate :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right) &= \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n (T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T^N(Y_i)]) + (R^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[R^N(Y_i)])}{\sqrt{n}} \geq a \right) \\ &\leq \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n (T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T^N(Y_i)])}{\sqrt{n}} \geq a - \varepsilon \right) + 2\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{|R^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[R^N(Y_i)]|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (29)$$

We first handle the last term :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{|R^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[R^N(Y_i)]|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 n} \text{Var}_\sigma \left(\sum_{i=1}^n R^N(Y_i) \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 n} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}_\sigma(R^N(Y_i)) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}_\sigma(R^N(Y_i), R^N(Y_j)) \right).\end{aligned}$$

— For any i , note that we can easily bound $\mathbb{E}_\sigma[R^N(Y_i)^2]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\sigma(R^N(Y_i)^2) &= \mathbb{E}_\sigma[(Y_i - N)^2 \mathbf{1}_{Y_1 \geq N}] + \mathbb{E}_\sigma[(Y_i + N)^2 \mathbf{1}_{Y_1 \leq -N}] \\ &\leq 4\sqrt{2}(\mathbb{E}_\sigma[Y_i^4] + N^4)^{1/2} \mathbb{P}_\sigma(|Y_i| \geq N)^{1/2} \\ &\leq 4\sqrt{2}(C + N^4)^{1/2} \mathbb{P}_\sigma(|Y_i| \geq N)^{1/2} \\ &\leq C'(C + N^4)^{1/2} e^{-N/4},\end{aligned}$$

where C does not depend on σ or i . The variables Y_i have a bounded forth moment thanks to hypothesis 2.(c). The last bound comes from the exponential Chebychev inequality and hypothesis 2.(c).

From this we can conclude that

$$\frac{1}{\varepsilon^2 n} \sum_{i=1}^n \text{Var}_\sigma(R^N(Y_i)) \leq C\varepsilon^{-2} e^{-cN},$$

with $c, C > 0$ independent of n, N, σ .

— From assumption 2.(d) (equation (25)), we get that :

$$\begin{aligned}\sum_{i \neq j}^n \text{Cov}_\sigma(R^N(Y_i), R^N(Y_j)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^\infty \sup_\sigma \mathbb{E}_\sigma[R^N(Y_1)^2] \Phi(|j-i|) \\ &\leq C e^{-cN} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^\infty \Phi(|j-i|) \\ &\leq C' n e^{-cN},\end{aligned}$$

where we used the bound on $\mathbb{E}_\sigma[R^N(Y_1)^2]$ previously found for the second inequality, and the fact that $\sum_j \Phi(j) < \infty$ for the last one.

Putting the last two inequalities into (29), we get :

$$\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right) \leq \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n (T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T^N(Y_i)])}{\sqrt{n}} \geq a - \varepsilon \right) + C\varepsilon^{-2} e^{-cN}.$$

Let N be such that $C\varepsilon^{-2}e^{-cN} \leq \varepsilon$. We now use our theorem on the bounded variables $(T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T_N(Y_i)])$ to find :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_\sigma \left(\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right) - \mathbb{P}(N \geq a - \varepsilon) \right) \leq \varepsilon,$$

which in turn shows that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_\sigma \left(\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right) - \mathbb{P}(N \geq a) \right) \leq 0.$$

It now remains to prove the reverse inequality. $\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right)$ can be bounded below by :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T^N(Y_i)]}{\sqrt{n}} \geq a + \varepsilon \text{ and } \left| \frac{\sum_{i=1}^n R^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[R^N(Y_i)]}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon \right) \\ & \geq \mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n T^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[T^N(Y_i)]}{\sqrt{n}} \geq a + \varepsilon \right) - \mathbb{P}_\sigma \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n R^N(Y_i) - \mathbb{E}_\nu[R^N(Y_i)]}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

From here, we bound the last term as we have done previously, and find this time :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_\sigma \left(\mathbb{P}_\sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}} \geq a \right) - \mathbb{P}(N \geq a) \right) \geq 0,$$

which concludes the proof. \square

4.5.2 Proof of Theorem 4.14

The aim of the following four lemmas is to justify the various hypotheses of Theorem 4.17 on the increments $\xi_n := X_n - X_{n-1}$, where X_n denotes the front at time n of an FA-1f process on \mathbb{Z}_- started at an arbitrary configuration $\eta \in LO_-$. They can be proved in the exact same way as in [9], with a minor change explained in the proof of Lemma 4.20. In the following, ν denotes the measure defined in Theorem 4.16.

Lemma 4.19. *For $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $e^{-|x|} f(x)^2 \in L^1$, we have*

$$\sup_{\eta \in LO_-} \mathbb{E}_\eta[f(\xi_1)^2] = c(f) < \infty. \quad (30)$$

Lemma 4.20. *There exists $\gamma > 0$ such that for $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ with $e^{-|x|} f(x)^2 \in L^1(\mathbb{R})$,*

$$\sup_{\eta \in LO_-} |\mathbb{E}_\eta[f(\xi_n)] - \mathbb{E}_\nu[f(\xi_1)]| \leq C(f) e^{-\gamma e^{(\log n)^{1/4}}}. \quad (31)$$

Démonstration. Here, we define as in [9], the configuration $\Phi_t(\eta)$ to be equal to η on $[X(\eta), X(\eta) + d^*t]$ and 1 elsewhere (except at the origin). Let X , (resp. \tilde{X}) the front of the configuration starting from η (resp. $\Phi_t(\eta)$), both being coupled via the standard coupling. In our case, it is possible that the interval $[X(\eta), X(\eta) + d^*t]$ contains the origin, which can mess up the original argument. To prevent this, let us note the following fact : if $t \geq 0, \eta \in LO_-$, the event $X \neq \tilde{X}$ is a subset of $\mathcal{A}_t := F(0, d^*t, 1) \cup \{X_t \geq -\underline{v}t\}$. For $\eta \in LO_-$, f an appropriate function, and $n \geq 0$, we get :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\eta[f(\xi_1)] - \mathbb{E}_{\Phi_{n-1}(\eta)}[f(\xi_1)] &= \mathbb{E}[(f(X) - f(\tilde{X}))\mathbb{1}_{X \neq \tilde{X}}] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(f(X) - f(\tilde{X}))^2]} \sqrt{\mathbb{P}(\mathcal{A}_{n-1})}.\end{aligned}$$

Now note that $\mathbb{P}(\mathcal{A}_{n-1}) \leq e^{-\frac{d^*(n-1)}{2}} + Ae^{-B(n-1)} = O(e^{-cn})$.

From there, we can conclude like in [9]. \square

Lemma 4.21. *There exists $\gamma > 0$ such that, for $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, e^{-|x|}f(x)^2 \in L^1(\mathbb{R})$ and $j < n$ two positive integers,*

1. $\sup_{\eta \in LO_-} |\text{Cov}_\eta[f(\xi_j), f(\xi_n)]| \leq C(f)e^{-\gamma e^{(\log(n-j))^{1/4}}}$, and the same holds for the covariance under ν ;
2. for $j \geq \frac{\bar{v}}{d^*}(n-j)$,

$$\sup_{\eta \in LO_-} |\text{Cov}_\eta[f(\xi_j), f(\xi_n)] - \text{Cov}_\nu[f(\xi_1), f(\xi_{n-j+1})]| \leq C(f)e^{-\gamma e^{(\log j)^{1/4}}}.$$

Lemma 4.22. *For any $k, n \in \mathbb{N}$ such that $d^*(k-1) \geq \bar{v}n$ and any bounded function $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\sup_{\eta \in LO_-} |\mathbb{E}_\eta[F(\xi_k, \dots, \xi_{k+n-1})] - \mathbb{E}_\nu[F(\xi_1, \dots, \xi_n)]| = O\left(\|F\|_\infty e^{-\gamma e^{(\log k)^{1/4}}}\right).$$

From here, we can apply Theorem 4.17 and conclude exactly like in [9].

4.6 Cut-off for FA-1f

We are now ready to prove the main result. Let $\Lambda = [1, L]$, we fix $q > \bar{q}$ the parameter of the FA-1f process. Every constant introduced in this section implicitly depends on q .

We split the proof into two cases. First, we tackle initial configurations with macroscopic sub-intervals of occupied sites. In this section, we shall call such an interval a *particle cluster*. To tackle these, we need to study closely the fronts of each particle cluster that are going inward. We will see that after the time it takes for them to meet, the configuration created enough empty sites to relax to equilibrium quickly. Next, we study the initial configurations with no such particle cluster, that is configurations in $\mathcal{H}(0, L+1, \ell)$ for a certain threshold $\ell(L)$. We handle the latter category with softer arguments using the coupling of FA-1f and the contact process.

4.6.1 Configurations with macroscopic particle clusters

Define, for any $L > 0$ and $0 < \delta < 1$,

$$\Omega^\delta = \{\sigma \in \Omega_\Lambda \mid \sigma \in \mathcal{H}(0, L + 1, \delta L)\}.$$

For $\sigma \in \Omega_\Lambda$, recall that $B(\sigma) := \max\{h \geq 0 \mid \exists x \in [0, L - h], \sigma|_{[x+1, x+h]} \equiv 1\}$ is the size of the largest particle cluster in σ . The following result holds.

Proposition 4.23. *Let $\delta > 0$, $\sigma_0 \in (\Omega^\delta)^c$ and $\varepsilon > 0$. There exists $a = a(\varepsilon) > 0$ such that, if $t = \frac{B(\sigma_0)}{2v} + \frac{7av}{\underline{v}\delta} \sqrt{L}$, then :*

$$\|\mu_t^{\sigma_0} - \mu\|_{TV} \leq \frac{v^2}{\underline{v}^2 \delta^2} \varepsilon + \phi(L),$$

with $\phi(L)$ independent of σ_0 and $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(L) = 0$.

The proof of this proposition is divided into four lemmas. To make things easier, let us first introduce the sketch of the proof in words. In the case we are studying now, the initial configuration has at least one macroscopic particle cluster of size $\geq \delta L$. If we watch the evolution of the process in such an interval during a short period of time, we see that the two endpoints of this particle cluster behave just like fronts of FA-1f processes in half-lines (one left-oriented, the other one right-oriented). As a consequence, thanks to the Central Limit Theorem 4.14 we can find an explicit time after which the fronts are much closer to each other, at a certain threshold distance d of order \sqrt{L} . At this point, the space between the original positions of the fronts and the current one should contain a lot of zeros thanks to the Zeros Lemma 4.7. We repeat this argument for every initial particle cluster, and thanks to appropriate choices of constants and coupling arguments handling the space in between the clusters, we end up with a configuration in $\mathcal{H}(\Lambda, d)$ with high probability. From there, it will only remain to apply the relaxation result from Section 4.4 to conclude.

Before diving into the proof, we need to set a general framework. The following lemmas aim to explain in detail how a configuration with some particle clusters can turn the smallest of them into an interval with a lot of zeros.

Let us fix an arbitrary set of disjoint intervals $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \subset \Lambda$. We define their endpoints : $\Lambda_k = [a_k, b_k]$. Fix $\varepsilon > 0$, and let $d = 6a\sqrt{L}$, with a a constant depending on ε that will be determined later.

We now define a class of configurations that we consider in our proof. We say that a configuration $\sigma \in \Omega_\Lambda$ is in the class \mathcal{C} if for all $1 \leq k \leq r$, there exist $X_k < Y_k \in \Lambda_k$ such that

1. $\sigma(X^k) = \sigma(Y^k) = 0$,
2. $\sigma|_{(X^k, Y^k)} \equiv 1$,

3. $\sigma \in \mathcal{H}(a_k, X^k, d) \cap \mathcal{H}(Y^k, b_k, d)$.

Note that X^k and Y^k are uniquely determined if $\sigma \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{H}(\Lambda_k, d)$. If $\sigma \in \mathcal{H}(\Lambda_k, d)$, there can be multiple choices of X^k and Y^k , but this case will be excluded in the following. Let us introduce a few functions on \mathcal{C} (see Figure 18). Fix $\sigma \in \mathcal{C}$.

- $\kappa(\sigma) = \{k \mid \sigma \notin \mathcal{H}(\Lambda_k, d)\}$ is the set of indices such that $Y^k - X^k > d$. We write κ if the configuration σ is clear from the context.
- $p(\sigma) = \#\kappa$ is the cardinality of κ ,
- $\ell(\sigma) = \min_{k \in \kappa} (Y^k - X^k)$,
- $t(\sigma) = \frac{\ell(\sigma)}{2v} - \frac{2a}{v} \sqrt{\ell(\sigma)}$. We set $t(\sigma) = 0$ if $p(\sigma) = 0$.

Having set that, we define the random variable $F(\sigma) = \sigma_{t(\sigma)}$. That is, $F(\sigma)$ is the result of the FA-1f process with initial configuration $\sigma \in \mathcal{C}$ after a time $t(\sigma)$. The aim of the random function F is to turn the smallest particle cluster $[X^k, Y^k]$ of size $\geq d$ into an interval in $\mathcal{H}(\cdot, d)$. Note that this construction depends on the family of intervals $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ that is for now arbitrary.

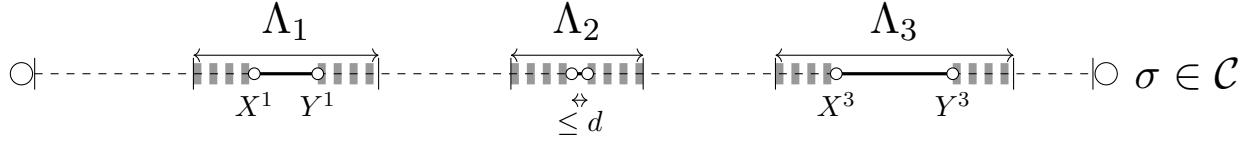


FIGURE 18 – A configuration in the set \mathcal{C} . Dashed zones represent zones in $\mathcal{H}(\cdot, d)$. Here, we have $\kappa(\sigma) = \{1, 3\}$, $p(\sigma) = 2$ and $\ell(\sigma) = Y^1 - X^1$.

Let $\sigma \in \mathcal{C}$ and $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ be a FA-1f process starting from σ . Define X_t^k (resp. Y_t^k) as the position of the rightmost (resp. leftmost) zero in $[0, M^k]$ (resp. $[M^k, L+1]$) in σ_t , with $M^k := \frac{1}{2}(X^k + Y^k)$. We have $X_0^k = X^k$ and $Y_0^k = Y^k$. As long as X_t^k and Y_t^k do not meet, we think of X_t^k as the "front" of a configuration on the (right oriented) half-line. Let $\mathcal{R}_t = \{\forall k \in \kappa, \forall s < t, X_s^k < M^k - 1 \text{ and } Y_s^k > M^k + 1\}$ the event that none of the "fronts" reaches the midpoint of the interval. In particular, under \mathcal{R}_t , the front have not met. The following Lemma localizes these fronts at time $t(\sigma)$ using Theorem 4.14.

Lemma 4.24. *There exists $a > 0$ depending only on ε and q such that, with the notations previously introduced, and $d = 6a\sqrt{L}$, the following holds. For all $\sigma \in \mathcal{C}$ such that $p(\sigma) \geq 1$,*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\forall k \in \kappa, X_{t(\sigma)}^k \in [X^k + vt(\sigma) - a\sqrt{\ell(\sigma)}, X^k + vt(\sigma) + a\sqrt{\ell(\sigma)}], \right. \\ &\quad \left. Y_{t(\sigma)}^k \in [Y^k + vt(\sigma) - a\sqrt{\ell(\sigma)}, Y^k + vt(\sigma) + a\sqrt{\ell(\sigma)}], \mathcal{R}_{t(\sigma)}\right) \geq 1 - r\varepsilon + r\phi(L) \quad (32) \end{aligned}$$

with $\phi(L)$ independent of σ such that $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(L) = 0$.

In particular, for k_0 such that $Y^{k_0} - X^{k_0} = \ell(\sigma)$, the event above implies that :

$$0 \leq Y_{t(\sigma)}^{k_0} - X_{t(\sigma)}^{k_0} \leq d$$

From now on, we call

$$I_k = [X^k + vt(\sigma) - a\sqrt{\ell(\sigma)}, X^k + vt(\sigma) + a\sqrt{\ell(\sigma)}]$$

and

$$J_k = [Y^k + vt(\sigma) - a\sqrt{\ell(\sigma)}, Y^k + vt(\sigma) + a\sqrt{\ell(\sigma)}].$$

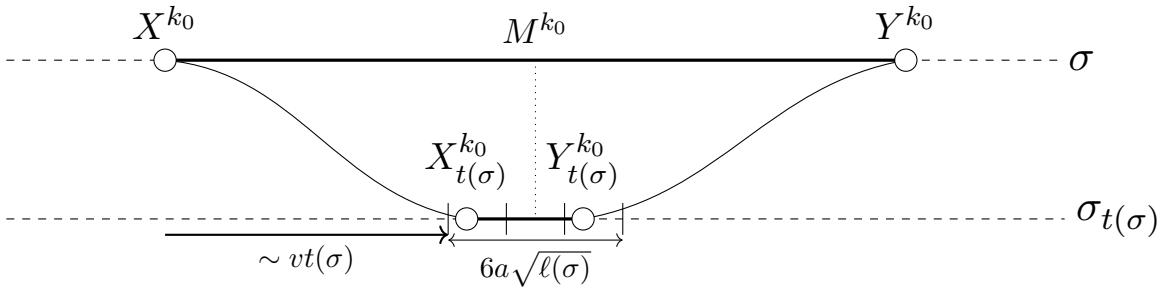


FIGURE 19 – The expected behaviour of the smallest cluster of σ during time $t(\sigma)$.

Démonstration. Define $\mathcal{R}_t^k = \{\forall s \leq t, X_s^k < M^k - 1 \text{ and } Y_s^k > M^k + 1\}$ such that $\mathcal{R}_t = \bigcap_{1 \leq k \leq p(\sigma)} \mathcal{R}_t^k$. The key remark for what follows is that if the event \mathcal{R}_t^k occurs, the fronts X_s^k, Y_s^k behave like independent fronts of FA-1f processes on \mathbb{Z}_- for all $s \leq t$. To justify that, let us define auxiliary processes $(\hat{\sigma}_t^k)_{t \geq 0}$ and $(\check{\sigma}_t^k)_{t \geq 0}$ on \mathbb{Z}_- as follows.

- $\forall x \leq 0, \hat{\sigma}_0^k(x) = \begin{cases} \sigma(-x) & \text{if } -x \leq X^k, \\ 1 & \text{if } -x > X^k. \end{cases}$
- $(\hat{\sigma}_t^k)_{t \geq 0}$ is the FA-1f process on \mathbb{Z}_- starting from $\hat{\sigma}_0^k$ constructed with the standard coupling with respect to $(\sigma_t(\cdot))_{t \geq 0}$. We denote by \hat{X}_t^k its front at time t .
- $\forall x \leq 0, \check{\sigma}_0^k(x) = \begin{cases} \sigma(x + L + 1) & \text{if } x + L + 1 \geq Y^k, \\ 1 & \text{if } x + L + 1 < Y^k. \end{cases}$
- $(\check{\sigma}_t^k)_{t \geq 0}$ is the FA-1f process on \mathbb{Z}_- starting from $\check{\sigma}_0^k$ constructed with the standard coupling with respect to $(\theta_{L+1}\sigma_t)_{t \geq 0}$. We denote by \check{Y}_t^k its front at time t .

Let $\hat{\mathcal{R}}_t^k = \{\forall s \leq t, \hat{X}_s^k > -M^k + 1\}$, and $\check{\mathcal{R}}_t^k = \{\forall s \leq t, \check{Y}_s^k > M^k - L\}$. Then, for all intervals $B, B' \subset \Lambda$, we have :

$$\mathbb{P}_\sigma \left(X_t^k \in B, Y_t^k \in B' \text{ and } \mathcal{R}_t^k \right) = \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k} \left(\hat{X}_t^k \in -B \text{ and } \hat{\mathcal{R}}_t^k \right) \mathbb{P}_{\check{\sigma}_0^k} \left(\check{Y}_t^k \in \theta_{-L-1}(B') \text{ and } \check{\mathcal{R}}_t^k \right). \quad (33)$$

We apply this with the intervals I_k and J_k . The two factors in the right hand side are similar so we only study $\mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k \text{ and } \hat{\mathcal{R}}_t^k)$. Note that

$$\mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k \text{ and } \hat{\mathcal{R}}_t^k) = \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k) - \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k \text{ and } (\hat{\mathcal{R}}_t^k)^c)$$

Thanks to Theorem 4.14, we have, for $N \sim \mathcal{N}(0, s^2)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k) &= \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}\left(\frac{\hat{X}_t^k - \hat{X}_0^k - vt(\sigma)}{\sqrt{\ell(\sigma)/(2v)}} \in [-2va, 2va]\right) \\ &\xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(N \in [-2va, 2va]) \end{aligned} \quad (34)$$

since $\ell(\sigma) \geq d \rightarrow \infty$ as $L \rightarrow \infty$. This convergence is furthermore uniform in σ . We choose a such that $\mathbb{P}(N \in [-2va, 2va]) \geq \sqrt{1-\varepsilon}$. Note that this choice only depends on ε and q (because the variance s^2 depends on q). This proves that

$$\mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k) = \sqrt{1-\varepsilon} + \phi_1(L) \quad (35)$$

with $\phi_1(L)$ independent of σ and $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi_1(L) = 0$. We handle the term in \check{Y}_t^k the same way and find the same kind of equation. Note here that if $s^2 = 0$, our estimate is even better as we would get $\mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k}(\hat{X}_t^k \in -I_k) = 1 - \phi_1(L)$.

Next, we show that if the fronts end up in the expected intervals at time $t(\sigma)$, then $\hat{\mathcal{R}}_{t(\sigma)}^k$ is very likely. We denote $\hat{M}^k = -M^k$ and we divide the time interval $[0, t(\sigma)]$ into intermediate times $0 < s_1 < \dots < s_n = t(\sigma)$ with $n = \left\lceil \frac{2\bar{v}t(\sigma)}{a\sqrt{\ell(\sigma)} - 2} \right\rceil$ such that $\Delta := s_{i+1} - s_i \leq \frac{a}{2\bar{v}}\sqrt{\ell(\sigma)} - \frac{1}{\bar{v}}$. Notice that :

$$\begin{aligned} &\{\exists s < t(\sigma), \hat{X}_s^k \leq \hat{M}^k + 1\} \subset \\ &\{\exists i, \hat{X}_{s_i}^k \leq \hat{M}^k + \frac{a}{2}\sqrt{\ell(\sigma)}\} \cup \{\exists s < t(\sigma), \hat{X}_s^k \leq \hat{M}^k + 1 \text{ and } \forall i, \hat{X}_{s_i}^k > \hat{M}^k + \frac{a}{2}\sqrt{\ell(\sigma)}\}. \end{aligned}$$

First, with Corollary 4.4 and with our choice of Δ , we have that the second event is

unlikely because of finite speed of propagation :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\sigma \left(\exists s < t(\sigma), \hat{X}_s^k \leq \hat{M}^k + 1 \text{ and } \forall i, \hat{X}_{s_i}^k > \hat{M}^k + \frac{a}{2} \sqrt{\ell(\sigma)} \right) \\
& \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_\sigma \left(\exists s \in [s_i, s_{i+1}], |\hat{X}_s^k - \hat{X}_{s_{i+1}}^k| \geq \frac{a}{2} \sqrt{\ell(\sigma)} - 1 \right) \\
& \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_\sigma \left(\exists s \in [s_i, s_{i+1}], |\hat{X}_s^k - \hat{X}_{s_{i+1}}^k| \geq \bar{v}(s_{i+1} - s_i) \right) \\
& \leq C e^{-c\sqrt{\ell(\sigma)}} \leq C e^{-c\sqrt{d}} \quad \text{for some } C, c > 0.
\end{aligned}$$

Then, by the Markov property at time s_i , the probability that $\hat{X}_{s_i}^k \leq \hat{M}^k + \frac{a}{2} \sqrt{\ell(\sigma)}$ while $\hat{X}_{t(\sigma)}^k$ is to the right of that is bounded by the probability that the front is going backward for a time at least Δ . This gives, thanks to Lemma 4.5 :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\sigma \left(\hat{X}_{t(\sigma)}^k \in -I_k \text{ and } \exists i, \hat{X}_{s_i}^k \leq \hat{M}^k + \frac{a}{2} \sqrt{\ell(\sigma)} \right) \\
& \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_\sigma (\hat{X}_{t(\sigma)}^k > \hat{X}_{s_i}^k) \leq n A e^{-B\Delta} \leq A e^{-B'\sqrt{d}}.
\end{aligned}$$

Combining the previous inequalities shows that :

$$\mathbb{P}_\sigma \left(\hat{X}_{t(\sigma)}^k \in -I_k \text{ and } (\hat{\mathcal{R}}_t^k)^c \right) \leq C e^{-c\sqrt{d}}, \quad (36)$$

with $C, c > 0$ independent of σ, L, ε .

Combining Equations (33), (35) and (36), since $d = 6a\sqrt{L}$, we get

$$\mathbb{P}_\sigma \left(X_t^k \in I_k, Y_t^k \in J_k \text{ and } \mathcal{R}_t^k \geq 1 - \varepsilon + \phi(L) \right) \geq 1 - \varepsilon + \phi(L),$$

with $\phi(L)$ going to 0 as $L \rightarrow \infty$, uniformly in σ . By a union bound over all boxes Λ_k for $k \in \kappa$, we get the expected result since the number of boxes is bounded by r . \square

We have now localised the fronts in $F(\sigma)$, so we can use Lemma 4.7 to show that behind those fronts, with high probability, there are a lot of zeros (see Figure 20).

Lemma 4.25. *Let $\sigma \in \mathcal{C}$ such that $p(\sigma) \geq 1$. With the previous notations, for all $k \in \kappa$,*

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\sigma \left(X_{t(\sigma)}^k \in I_k, Y_{t(\sigma)}^k \in J_k, \mathcal{R}_{t(\sigma)}^k \right. \\
& \quad \left. \text{and } \sigma_{t(\sigma)} \notin \left(\mathcal{H}(X^k, X_{t(\sigma)}^k, d) \cap \mathcal{H}(Y_{t(\sigma)}^k, Y^k, d) \right) \right) \leq C \exp(-c\sqrt{L})
\end{aligned}$$

for some $C, c > 0$ independent of every other parameter.

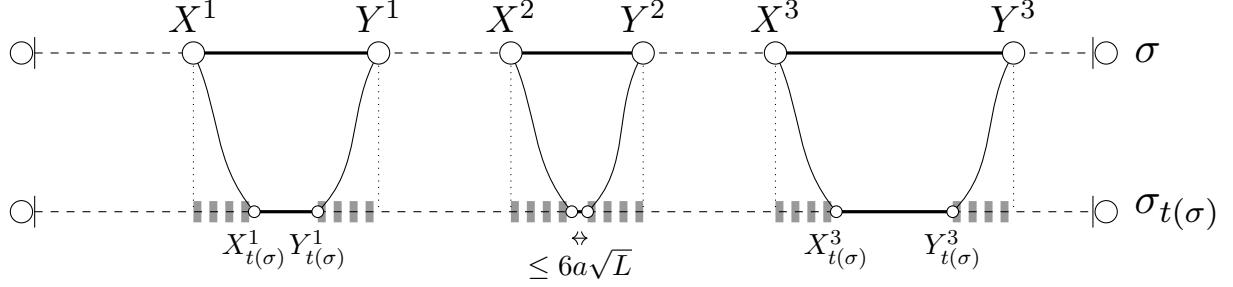


FIGURE 20 – The expected behaviour of the fronts during time $t(\sigma)$. Dashed zones are in $\mathcal{H}(., d)$. We see that at time $t(\sigma)$, the configuration lost at least one particle cluster.

Démonstration. Given the event $\mathcal{R}_{t(\sigma)}$, we can use the previous coupling argument to show that :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\sigma \left(X_{t(\sigma)}^k \in I_k, Y_{t(\sigma)}^k \in J_k, \mathcal{R}_{t(\sigma)} \text{ and } \sigma_{t(\sigma)} \notin \left(\mathcal{H}(X^k, X_{t(\sigma)}^k, d) \cap \mathcal{H}(Y_{t(\sigma)}^k, Y^k, d) \right) \right) = \\ \mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k} \left(\hat{X}_t^k \in -I_k, \hat{\sigma}_{t(\sigma)}^k \notin \mathcal{H}(\hat{X}_t^k, \hat{X}_0^k, d), \hat{\mathcal{R}}_{t(\sigma)} \right) \\ \mathbb{P}_{\check{\sigma}_0^k} \left(\check{Y}_t^k \in \theta_{-L}(J_k), \check{\sigma}_{t(\sigma)}^k \notin \mathcal{H}(\check{Y}_t^k, \check{Y}_0^k, d), \check{\mathcal{R}}_{t(\sigma)} \right). \quad (37) \end{aligned}$$

By Lemma 4.8 (with $y = \hat{X}_0^k$), we have that :

$$\mathbb{P}_{\hat{\sigma}_0^k} \left(\hat{\sigma}_{t(\sigma)}^k \notin \mathcal{H}(\hat{X}_t^k, \hat{X}_0^k, d) \right) \leq CL^{5/2} \exp(-c\sqrt{L}).$$

We can get rid of the $L^{5/2}$ factor by taking c smaller. The same inequality holds for $\check{\sigma}^k$ and therefore we get the claimed result. \square

Now, we show that if an interval already contains enough zeros, it most likely will also at time $t(\sigma)$. This will ensure that once a cluster has disappeared and has left a lot of empty sites, the region will keep as many empty sites during any other iteration of F . It is actually a very general result that only relies on Lemma 4.6.

Lemma 4.26. *Let $\sigma \in \Omega_\Lambda$, $x, y \in \Lambda$, $d > 0$ such that $\sigma \in \mathcal{H}(x, y, d)$. Then :*

$$\mathbb{P}_\sigma(F(\sigma) \notin \mathcal{H}(x, y, d)) \leq CL \exp(-c\sqrt{L}), \quad (38)$$

with c, C independent of d, x, y, σ .

Démonstration. We simply use the comparison with a supercritical contact process (Lemma 4.6) for every initial zero in $\sigma|_{(x,y)}$ with $\ell = d/2$. \square

So far, we have proved that with high probability after a time $t(\sigma)$, every front moves by a distance $\sim \frac{\ell(\sigma)}{2v}$ (Lemma 4.24), while creating zeros behind it (Lemma 4.25). This results in one box k_0 initially "blocked" ($Y^{k_0} - X^{k_0} > d$) to become filled with zeros. Meanwhile, every box Λ_k that satisfies $\sigma \in \mathcal{H}(\Lambda_k, d)$ stays in $\mathcal{H}(\Lambda_k, d)$ after a time $t(\sigma)$ (Lemma 4.26). As illustrated in Figure 21, all of this combines into a nice result about $F(\sigma)$.

Lemma 4.27. *For any $\sigma \in \mathcal{C}$ such that $p(\sigma) \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(F(\sigma) \in \mathcal{C} \text{ and } p(F(\sigma)) < p(\sigma)) \geq 1 - r\varepsilon - r\phi_2(L)$$

with $\phi_2(L)$ independent of σ (but depending on r) and $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi_2(L) = 0$.

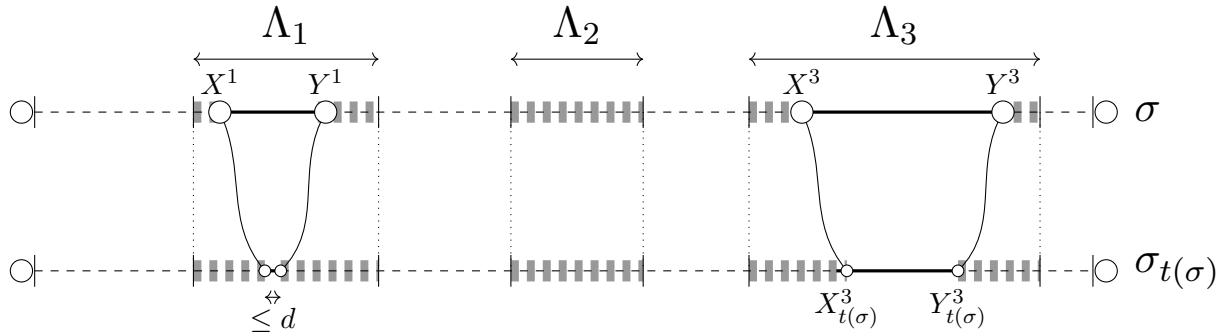


FIGURE 21 – The expected behaviour of the whole configuration during time $t(\sigma)$. Here, the interval Λ_2 kept its zeros and the particle cluster in Λ_1 shrunk to a size $\leq d$.

Before getting to the proof of Proposition 4.23, let us make a final remark. On the event appearing in Lemma 4.24, we can bound the size of every particle cluster in $F(\sigma)$:

$$\forall k \in \kappa, Y_{t(\sigma)}^k - X_{t(\sigma)}^k \leq Y^k - X^k - \ell(\sigma) + 2a\sqrt{\ell} \quad (39)$$

Note that it is possible that in one iteration of F , two or more particle clusters go from a size $> d$ to a size $\leq d$.

Let us now prove Proposition 4.23.

Proof of Proposition 4.23. Fix $\delta > 0$, $\sigma_0 \in (\Omega^\delta)^c$ and $\varepsilon > 0$. We also define a as in Lemma 4.24 and $d = 6a\sqrt{L}$. Throughout the proof, $\phi(L)$ will denote a function that may depend on δ but not on σ such that $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(L) = 0$. Let $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ be the particle clusters of σ_0 of size $\geq \underline{v}\frac{1}{v}B(\sigma_0)$ (with their neighboring sites that are empty in σ). More precisely, the intervals $\Lambda_k = [a_k, b_k]$ are such that $b_k - a_k \geq \frac{v}{\underline{v}}B(\sigma_0)$, $\sigma_0(a_k) = \sigma_0(b_k) = 0$ and $\sigma_0|_{(a_k, b_k)} \equiv 1$.

Defining the Λ_k defines the class \mathcal{C} and we have of course $\sigma_0 \in \mathcal{C}$. Note already that even though r now depends on σ , it can simply be bounded by $\frac{v}{\underline{v}\delta}$, which only depends on δ . We

aim to prove that after a time $\tau_1 = \frac{B(\sigma_0)}{2v} + 3ar\sqrt{\ell(\sigma_0)}$, the configuration is in $\mathcal{H}(\Lambda, d)$. To do that, we first focus on the particle clusters.

We define now the iterations of F starting from σ_0 . For all $1 \leq k \leq r$, $\sigma^{(i)} := F(\sigma^{(i-1)})$ with $\sigma^{(0)} := \sigma_0$. If we ever have $\sigma^{(i)} \notin \mathcal{C}$, then set for example $F(\sigma^{(i+1)}) = \sigma^{(i)}$ and $t(\sigma^{(i)}) = 0$. We will not encounter this case later on.

By Lemma 4.27, we have by induction that

$$\mathbb{P}(p(\sigma^{(r)}) = 0) \geq 1 - r^2\varepsilon + \phi(L).$$

Note that $p(\sigma^{(r)}) = 0$ simply means that $\sigma^{(r)} \in \bigcap_{k=1}^r \mathcal{H}(\Lambda_k, d)$.

Let $T = \sum_{i=0}^{r-1} t(\sigma^{(i)})$, that is the time at which we reach the configuration $\sigma^{(r)}$. Our goal now is to bound T from above. To do that, we use Equation (39) and by induction we get

$$\mathbb{P}\left(T \leq \frac{B(\sigma_0)}{2v} + 2ar\sqrt{\ell(\sigma_0)}\right) \geq 1 - r^2\varepsilon + \phi(L).$$

Now using the exact same argument as in Lemma 4.26, as long as $T \leq \frac{B(\sigma_0)}{2v} + 2ar\sqrt{\ell(\sigma_0)}$ and $\sigma_T \in \bigcap_{k=1}^r \mathcal{H}(\Lambda_k, d)$, then with high probability these zeros will remain at time $\tau_1 = \frac{B(\sigma_0)}{2v} + 3ar\sqrt{\ell(\sigma_0)}$. This leads to the result we were looking for, that at time τ_1 , with high probability, every initial particle cluster contains a lot of zeros :

$$\mathbb{P}\left(\sigma_{\tau_1} \in \bigcap_{k=1}^r \mathcal{H}(\Lambda_k, d)\right) \geq 1 - r^2\varepsilon + \phi(L). \quad (40)$$

We can now handle the rest of Λ . Initially, we have zeros in $\Lambda \setminus \bigcup_{k=1}^r \Lambda_k$ that are spaced at most $\frac{v}{v}B(\sigma_0)$ apart. This threshold was precisely chosen so that we can again use the supercritical contact process to ensure that at time $t_0 = \frac{B(\sigma_0)}{2v}$, we have :

$$\mathbb{P}_{\sigma_0}\left(\sigma_{t_0} \notin \mathcal{H}(\Lambda \setminus \bigcup_{k=1}^r \Lambda_k, d)\right) \leq Crt_0 e^{-c\sqrt{L}}.$$

Again, since $t_0 \leq \tau_1$, this property persists at time t_1 . Putting this together with equation (40) finally gives :

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sigma_{\tau_1} \in \mathcal{H}(\Lambda, d)) \geq 1 - r^2\varepsilon. \quad (41)$$

Here, we used the fact that r is bounded (with L). More precisely, we have $r \leq \frac{vL}{\underline{v}B(\sigma_0)} \leq \frac{v}{\underline{v}\delta}$.

From there, it only remains to apply Proposition 4.11 with $\ell = d$ and $\beta = 1/4$ to find that for any local function f such that $\mu(f) = 0$, at time $t := \tau_1 + \frac{6a\sqrt{L}}{2\underline{v}} + (6a\sqrt{L})^{1/4}$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[f(\sigma_t)]| \leq r^2 \varepsilon.$$

Finally, we can bound this time replacing L with $B(\sigma_0)/\delta$ to get a consistent expression :

$$t \leq \frac{B(\sigma_0)}{2v} + \frac{\alpha\sqrt{B(\sigma_0)}}{\sqrt{\delta}},$$

with α depending only on ε and q . The fact that all the generic constants c, C used in the proof do not depend on σ_0 and that the CLT used is uniform in the initial configuration guarantees that the bound above is also uniform in σ_0 . \square

4.6.2 Conclusion

We can now prove Theorem 4.1.

Proof of Theorem 4.1. First, we proved Equation (15) with Proposition 4.23 in the previous subsection. Next, let $\delta > 0$, $\sigma \in \Omega_L^\delta$ and

$$t'_1(\sigma) = \left(\frac{B(\sigma)}{2\underline{v}} + (B(\sigma))^{1/4} \right) \vee \left(\frac{(\log L)^9}{2\underline{v}} + (\log L)^{9/4} \right).$$

If $B(\sigma) \leq (\log L)^9$, then we use the fact than $\sigma \in \mathcal{H}(\Lambda, (\log L)^9)$ to use Proposition 4.11 with $\ell = (\log L)^9$ and $\beta = 1/4$. This way, we get that for any local function f with support in Λ :

$$|\mathbb{E}_\sigma[f(\sigma_{\frac{(\log L)^9}{2\underline{v}} + (\log L)^{9/4}})]| \leq C\|f\|_\infty L e^{-c(\log L)^{9/8}},$$

which goes to zero as $L \rightarrow \infty$ uniformly in σ .

In this case, $t'_1(\sigma) = \left(\frac{(\log L)^9}{2\underline{v}} + (\log L)^{9/4} \right) \leq t_1(\sigma)$ so we get our result.

If $B(\sigma) > (\log L)^9$, then by using Proposition 4.11 with $\ell = B(\sigma)$ and $\beta = 1/4$, we have :

$$|\mathbb{E}_\sigma[f(\sigma_{\frac{B(\sigma)}{2\underline{v}} + B(\sigma)^{1/4}})]| \leq C\|f\|_\infty L e^{-cB(\sigma)^{1/8}} \leq C\|f\|_\infty L e^{-c(\log L)^{9/8}},$$

which again leads to our result.

Finally, let $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\Phi(L) \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Let $\sigma \in \mathcal{H}(0, L+1, \Phi(L))^c$. Let Λ_1 be the largest particle cluster in σ : $\Lambda_1 = [X+1, Y-1]$ with $\sigma(X) = \sigma(Y) = 0$, $\sigma|_{[X+1, Y-1]} \equiv 1$ and $Y - X \geq \Phi(L)$. Let $M = (X+Y)/2$. By Lemma 4.24, we see that with $t = \frac{B(\sigma)}{2v} - \frac{2a}{v}\sqrt{B(\sigma)}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\sigma & \left(X_t \in [M - 3a\sqrt{B(\sigma)}, M - a\sqrt{B(\sigma)}], \right. \\ & \left. Y_t \in [M + a\sqrt{B(\sigma)}, M + 3a\sqrt{B(\sigma)}] \right) \geq 1 - \varepsilon + \phi(L) - Ce^{-c\sqrt{B(\sigma)}}, \end{aligned} \quad (42)$$

with $\phi(L)$ going to 0 when $L \rightarrow +\infty$ uniformly in σ . Here, $r = 1$, we only have one particle cluster. This event implies that $\sigma_t|_{[M-a\sqrt{B(\sigma)}, M+a\sqrt{B(\sigma)}]} \equiv 1$. Now, note that :

$$\mu(\mathbf{1}_{\sigma_t|_{[M-a\sqrt{B(\sigma)}, M+a\sqrt{B(\sigma)}]} \equiv 1}) = (1-q)^{2a\sqrt{B(\sigma)}} \leq (1-q)^{2a\Phi(L)}, \quad (43)$$

which goes to zero when $L \rightarrow \infty$.

Putting together Equations (42) and (43) concludes the proof of Equation (16) and thus the proof of Theorem 4.1. \square

Now we can conclude the proof of the cutoff.

Proof of Theorem 4.2. The proof of the lower bound is straightforward by taking initial configuration $\mathbf{1}_L$ and applying Equation (16).

Let $\delta = \frac{\underline{v}}{v}$ and $\varepsilon > 0$. For every $\sigma \in \Omega_\Lambda^\delta$, we have that $t_1(\sigma) \leq \frac{\delta L}{2\underline{v}} + (\delta L)^{1/4} = \frac{L}{2v} + (\delta L)^{1/4}$. If $\sigma \in (\Omega_\Lambda^\delta)^c$, then $t_2(\sigma) \leq \frac{L}{2v} + 8a\sqrt{L}$. So in every case, for L large enough, if $t = \frac{L}{2v} + 8a\sqrt{L}$, we have :

$$d(t) \leq \varepsilon.$$

\square

Appendix A. Convergence behind the front

Before proving Theorem 4.16, we recall a result that deals with the relaxation for the FA-1f process far from the front.

Proposition 4.28 ([1, Theorem 5.1]). *Let $q > \bar{q}$, $\alpha < 1/2$ and $\delta > 0$. There exists $c > 0$ such that for all $t \geq 0$, for any $M \leq e^{\delta t^\alpha}$, any f with support in $[0, M]$, such that $\mu(f) = 0$ and $\|f\|_\infty \leq 1$, for all $\sigma_0 \in LO$ such that $\tilde{\sigma}_0 \in \mathcal{H}(\underline{v}t, M + (4\bar{v} - \underline{v})t, \sqrt{t})$, then*

$$|\mathbb{E}[f(\theta_{3\bar{v}t}\tilde{\sigma}_t)]| \leq e^{-c\sqrt{t}}.$$

The same kind of result holds for a process on \mathbb{Z}_- :

Proposition 4.29. *Let $q > \bar{q}$, $\alpha < 1/2$ and $\delta > 0$. There exists $c > 0$ such that for any f with support $[0, M]$, $\mu(f) = 0$ and $\|f\|_\infty \leq 1$, for any $t \geq 0$, $M \leq e^{\delta t^\alpha}$, for all $\eta_0 \in LO_-$ such that $\tilde{\eta}_0 \in \mathcal{H}(\underline{v}t, M + (4\bar{v} - \underline{v})t, \sqrt{t})$ and $X_0 \leq -M - (3\bar{v} - \underline{v})t$, then*

$$|\mathbb{E}[f(\theta_{3\bar{v}t}\tilde{\eta}_t)]| \leq e^{-c\sqrt{t}}.$$

Démonstration. The proof is almost identical to that of the previous proposition. However, in this case we have to make sure that the interval $[3\bar{v}t, 3\bar{v}t + M]$ seen from the front does not go out of the domain \mathbb{Z}_- . Recall that with probability $1 - O(e^{-Bt})$ we have $X_t - X_0 \leq -\underline{v}t$. Then as long as $-X_0 + \underline{v}t \geq 3\bar{v}t + M$, we have $X_t + 3\bar{v}t + M \leq 0$ with probability $1 - O(e^{-Bt})$. \square

We now prove Theorem 4.16. The proof relies on the same coupling as in [9]. Let us fix $\eta_0 \in LO_-$. We pick $\sigma_0 \in LO$ an arbitrary configuration such that $X(\eta_0) = X(\sigma_0)$. We will now prove that there exist $d^* > 0$ and $c > 0$ such that

$$\|\tilde{\mu}_t^{\eta_0} - \tilde{\mu}_t^{\sigma_0}\|_{[0, d^*t]} \leq \exp(-ce^{(\log t)^{1/4}}). \quad (44)$$

Throughout the proof, c, C denote generic constants independent of σ_0, η_0 . These constants may vary from line to line. Before diving into the complete coupling, we shall define a coupling that comes into play during the proof : the Λ -maximal coupling. If $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is finite, and μ, μ' are two probability measures on Ω_- , we define the *Λ -maximal coupling* between μ and μ' as follow :

1. we sample $(\sigma, \sigma')|_{\Lambda \times \Lambda}$ according to the maximal coupling, i.e. the one that achieves the total variation distance of the marginals of μ and μ' on Ω_Λ ,
2. we sample $\sigma|_{\mathbb{Z}_- \setminus \Lambda}$ and $\sigma'|_{\mathbb{Z}_- \setminus \Lambda}$ independently according to their conditional distributions $\mu(.|\sigma|_\Lambda)$ and $\mu'(.|\sigma'|_\Lambda)$.

Throughout this section, μ denotes the Bernoulli product measure on \mathbb{Z}_- : $\mu = \mu_{\mathbb{Z}_-}^{1-q}$.

For $t > 0$, let us define the following quantities :

- $\varepsilon = \frac{\bar{v}}{2(\bar{v} + \underline{v})}$,
- $t_0 = (1 - \varepsilon)t$,
- $\Delta_1 = \exp((\log t)^{1/4})$,
- $\Delta_2 = (\log t)^{3/4}$,
- $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

The time interval $[0, t]$ is divided in several sub-intervals. First, during a time $t_0 = (1 - \varepsilon)t$ (which is the longest phase), we aim to use the Zeros Lemma, which provides a good amount of empty sites behind the front. We then divide the remaining time εt into N steps of length

Δ , with $N = \lfloor \frac{\varepsilon t}{\Delta} \rfloor$ and a remainder step of length $\varepsilon t - N\Delta$. Each of these steps of length Δ consists in two steps of respective lengths Δ_1 and Δ_2 . We define $t_n = t_0 + n\Delta$ and $s_n = t_n + \Delta_1$, $n \leq N$.

We define the interval $\Lambda_n = [3\bar{v}\Delta_1, \underline{v}s_n - (\bar{v} + \underline{v})\Delta_1]$ and the distance $d_n = \underline{v}t_n - (\bar{v} + \underline{v})\Delta n$. Note that d_n slightly differs from the original proof. Lastly, let us introduce the following notation. For (A_n) a sequence of measurable subsets of $LO \times LO_-$, we write :

$$P_{A_n}(\cdot) := \sup_{(\tilde{\sigma}, \tilde{\eta}) \in A_n} \mathbb{P}(\cdot | (\tilde{\sigma}_{t_n}, \tilde{\eta}_{t_n}) = (\tilde{\sigma}, \tilde{\eta})).$$

Depending on the context, t_n can be replaced by s_n in the definition above.

We are now ready to explain the coupling between σ_t and η_t that will lead to Theorem 44.

- At time t_0 , we sample σ_{t_0} and η_{t_0} independently according to the laws $\mu_{t_0}^{\eta_0}$ and $\mu_{t_0}^{\sigma_0}$.
- Suppose the coupling at time t_n constructed. If the configurations $\tilde{\sigma}_{t_n}$ and $\tilde{\eta}_{t_n}$ coincide on the interval $[1, d_n]$, then we let the evolve according to the standard coupling until time t . If not, we proceed in two steps. With high probability, both configurations will have zeros behind the front. More precisely, let Z_n be the event :

$$Z_n = \{\tilde{\sigma}_{t_n}, \tilde{\eta}_{t_n} \in \mathcal{H}(\underline{v}\Delta_1, \underline{v}t_n, \sqrt{\Delta_1}) \text{ and } (X(\sigma_{t_n}) - X(\sigma_0)), (X(\eta_{t_n}) - X(\eta_0)) \leq -\underline{v}t_n\}.$$

Here, the event Z_n differs from the original proof to ensure that the interval $[\underline{v}\Delta_1, \underline{v}t_n]$ (seen from the front) does not go out of bounds.

From both the Zeros Lemma, Lemma 4.5 and their analogs in 9, we have for t large enough,

$$\mathbb{P}(Z_n) \geq 1 - 2(\underline{v}t_n)^2 e^{-c\sqrt{\Delta_1}} - Ce^{-c't_n} \geq 1 - Ct_n^2 e^{-c\sqrt{\Delta_1}}.$$

The last term of the first line comes from the fact that we ask for the inequalities $X(\sigma_{t_n}) \leq X(\sigma_0) - \underline{v}t_n$ and $X(\eta_{t_n}) \leq X(\eta_0) - \underline{v}t_n$. Note that none of the constants c, C depend on η_0 or σ_0 .

In the following, it will be useful to also introduce the event

$$Z'_n = \{\tilde{\sigma}_{t_n}, \tilde{\eta}_{t_n} \in \mathcal{H}(0, 3\bar{v}\Delta_1, 2\underline{v}\Delta_1)\}.$$

We can already note that $Z_n \subset Z'_n$ for t large enough.

- At time s_n , we sample $\tilde{\sigma}_{s_n}$ and $\tilde{\eta}_{s_n}$ according to the Λ_n -maximal coupling between the laws $\tilde{\mu}_{\Delta_1}^{\sigma_{t_n}}$ and $\tilde{\mu}_{\Delta_1}^{\eta_{t_n}}$. Let $Q_n = \{\tilde{\sigma}_{s_n} = \tilde{\eta}_{s_n} \text{ on } \Lambda_n\}$. First, note that by definition of the maximal coupling and by the Markov property, we have, for $(\sigma, \eta) \in LO \times LO_-$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_n^c | \sigma_{t_n} = \sigma, \eta_{t_n} = \eta) &= ||\tilde{\mu}_{\Delta_1}^\sigma - \tilde{\mu}_{\Delta_1}^\eta||_{\Lambda_n} \\ &\leq ||\tilde{\mu}_{\Delta_1}^\sigma - \mu||_{\Lambda_n} + ||\tilde{\mu}_{\Delta_1}^\eta - \mu||_{\Lambda_n}. \end{aligned}$$

Since the interval Λ_n is "far from the front", then these two distances are small uniformly in $\tilde{\sigma}_{t_n}, \tilde{\eta}_{t_n}$ as long as the event Z_n is satisfied. Let us justify this claim by applying Proposition 4.29.

Let $\eta \in LO_-$ be an initial configuration such that $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}(\underline{v}\Delta_1, \underline{v}t_n, \sqrt{\Delta_1})$. Assume also that $X(\eta) \leq -\underline{v}t_n$. Let us check the hypotheses of Proposition 4.29. Take

$$M = \underline{v}s_n - (\underline{v} + \bar{v})\Delta_1 - 3\bar{v}\Delta_1.$$

Then $M + (4\bar{v} - \underline{v})\Delta_1 = \underline{v}t_n - \underline{v}\Delta_1 \leq \underline{v}t_n$, which guarantees that we do have $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}(\underline{v}\Delta_1, M + (4\bar{v} - \underline{v})\Delta_1, \sqrt{\Delta_1})$. Next, since $X(\eta) \leq -\underline{v}t_n$, we find :

$$-M - (3\bar{v} - \underline{v})\Delta_1 = -\underline{v}t_n + (\bar{v} + \underline{v})\Delta_1 \geq -\underline{v}t_n \geq X(\eta).$$

Finally, we do have $M \leq e^{\Delta_1^\alpha}$ for $\alpha = 1/4$ for example.

We can now apply Proposition 4.29 that gives $\|\tilde{\mu}_{\Delta_1}^\eta - \mu\|_{\Lambda_n} \leq Ce^{-c\sqrt{\Delta_1}}$ with C, c independent of η . We can handle the term $\|\tilde{\mu}_{\Delta_1}^\sigma - \mu\|_{\Lambda_n}$ the same way in order to find in the end :

$$P_{Z_n}(Q_n^c) \leq Ce^{-c\sqrt{\Delta_1}}.$$

- Next, if the event Q_n occurs, we define \tilde{x} as the distance between the front and the leftmost zero of $\tilde{\sigma}_{s_n}$ (or $\tilde{\eta}_{s_n}$) located in Λ_n . If there is none, define \tilde{x} as the distance between the front and the right boundary of Λ_n . Let β be a Bernoulli random variable (independent of everything else constructed so far) such that $\mathbb{P}(\beta = 1) = e^{-2\Delta_2}$. The event $\{\beta = 1\}$ has the same probability as the event that two independent Poisson clocks do not ring during a time Δ_2 . We now construct the configurations at time t_{n+1} .
 - If $\beta = 1$, we consider that, seen from the front at time s_n , the clocks associated with the sites 0 and \tilde{x} do not ring during Δ_2 . First, we sample the configuration at the left of 0 according to the standard coupling, with empty boundary condition. Let ξ_{n+1} be the common increment of the front during this time, namely $\xi_{n+1} = X_{t_{n+1}} - X_{s_n}$. Next, we fix $\tilde{\sigma}_{t_{n+1}}(-\xi_{n+1}) = \tilde{\eta}_{t_{n+1}}(-\xi_{n+1}) := 0$ and $\tilde{\sigma}_{t_{n+1}}(\tilde{x} - \xi_{n+1}) = \tilde{\eta}_{t_{n+1}}(\tilde{x} - \xi_{n+1}) := \tilde{\sigma}_{s_n}(\tilde{x})$ and sample the configurations $\tilde{\sigma}_{t_{n+1}}$ and $\tilde{\eta}_{t_{n+1}}$ according to the maximal coupling on $[1 - \xi_{n+1}, \tilde{x} - 1 - \xi_{n+1}]$, with boundary conditions 0 on 0 and $\tilde{\sigma}_{s_n}(\tilde{x})$ on \tilde{x} . To the right of this interval, we sample the configurations according to the standard coupling with the appropriate boundary conditions.
 - If $\beta = 0$, then we let evolve $(\tilde{\sigma}_{s_n}, \tilde{\eta}_{s_n})$ for a time Δ_2 via the standard coupling conditioned to have at least one ring either at \tilde{x} or at 0.

First, let us notice that \tilde{x} is likely to be not too far right inside Λ_n . Indeed, under the event Z_n the law of the configuration in Λ_n is close to the product measure at time s_n . Let $B_n := \{\tilde{x} \leq 3\bar{v}\Delta_1 + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}\}$. Then, by Proposition 4.28 :

$$\mathcal{P}_{Z_n}(B_n^c \cap Q_n) \leq \mathcal{P}_{Z_n}\left(\left(\tilde{\sigma}_{s_n}\right)_{[3\bar{v}\Delta_1, 3\bar{v}\Delta_1 + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}]} \equiv 1\right) \quad (45)$$

$$\leq p^{\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}} + O(e^{-c\sqrt{\Delta_1}}). \quad (46)$$

Now, denote by Z''_n the event $\left\{\tilde{\sigma}_{s_n}, \tilde{\eta}_{s_n} \in \mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}, 3\bar{v}\Delta_1, \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}\right)\right\}$, and recall that $Z_n \subset Z'_n$. Using the second case of Zeros Lemma 4.7 and its equivalent [9, Lemma 4.4] (with $L = \sqrt{\Delta_2}/2$, $L + M = 3\bar{v}\Delta_1$, $\ell = L$), we find that :

$$P_{Z_n}((Z''_n)^c) \leq \frac{2\Delta_1^2}{\sqrt{\Delta_2}} \exp(-c\sqrt{\Delta_2}) + \Delta_1 \left(3\bar{v}\Delta_1 - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}\right) \exp(-c\Delta_2) \quad (47)$$

$$\leq O(e^{-c\sqrt{\Delta_2}}). \quad (48)$$

With the event Z''_n , we are now able to use Proposition 4.10 to couple the configuration at time t_n on the interval $J_n := [1 - \xi_{n+1}, \tilde{x} - \xi_{n+1} - 1]$.

First, note that $Z''_n \cap B_n \subset \{\tilde{\sigma}_{s_n}, \tilde{\eta}_{s_n} \in \mathcal{H}(0, \tilde{x}, \sqrt{\Delta_2})\}$. Let $L = 3\bar{v}\Delta_1 + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \leq e^{\Delta_2^{1/4}}$. Then by Proposition 4.10, we find that for any $y \in [3\bar{v}\Delta_1, 3\bar{v}\Delta_1 + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}]$:

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\sigma}_{t_{n+1}} \neq \tilde{\eta}_{t_{n+1}} \text{ on } [1 - \xi_{n+1}, y - \xi_{n+1} - 1] \mid \tilde{x} = y \text{ and } \tilde{\sigma}_{s_n}, \tilde{\eta}_{s_n} \in \mathcal{H}(0, y, \sqrt{\Delta_2})\right) = O(e^{-c\sqrt{\Delta_2}}). \quad (49)$$

Again, this bound does not depend on y or the initial configurations. This in turn shows that :

$$\mathbb{P}_{Z''_n, B_n}(\tilde{\sigma}_{t_{n+1}} \neq \tilde{\eta}_{t_{n+1}} \text{ on } J_n) = O(e^{-c\sqrt{\Delta_2}}). \quad (50)$$

Under the event Q_n , the configurations seen from the front at time s_n coincide on the interval Λ_n . On the right part of this interval, namely $[\tilde{x}, \underline{v}s_n - (\bar{v} + \underline{v})\Delta_1]$, we let the configurations evolve according to the standard coupling. The matching of the configurations will then persist on the sub-interval $[\tilde{x} - \xi_{n+1}, \underline{v}s_n - (\bar{v} + \underline{v})\Delta_1 - \xi_{n+1} - \bar{v}\Delta_2]$ w.h.p. thanks to Proposition 4.3. Note that $\underline{v}s_n - (\bar{v} + \underline{v})\Delta_1 - \bar{v}\Delta_2 = \underline{v}t_{n+1} - \bar{v}\Delta \geq d_{n+1}$. Denote by K_n the interval $[\tilde{x} - \xi_{n+1}, d_{n+1}]$. We found that :

$$P_{Q_n}(\tilde{\sigma}_{t_{n+1}} \neq \tilde{\eta}_{t_{n+1}} \text{ on } K_n \mid \beta = 1) \leq \mathbb{P}(F(0, \bar{v}\Delta_2, \Delta_2) + \mathbb{P}(\xi_{n+1} \geq 0) = O(e^{-c\Delta_2}). \quad (51)$$

Finally, notice that if the clock attached to the site 0 (i.e the front at time s_n) does not ring, and we let the configurations at the left of this site evolve according to the standard coupling, we naturally get :

$$P_{Q_n}(\tilde{\sigma}_{t_{n+1}} \neq \tilde{\eta}_{t_{n+1}} \text{ on } [0, -\xi_{n+1}] \mid \beta = 1) = 0. \quad (52)$$

From Equations (50), (51) and (52), we can conclude that :

$$P_{Q_n, Z''_n, B_n} (\tilde{\sigma}_{t_{n+1}} \neq \tilde{\eta}_{t_{n+1}} \text{ on } [1, d_{n+1}] \mid \beta = 1) = O(e^{-c\sqrt{\Delta_2}}). \quad (53)$$

We are now ready to estimate the probability that the coupling "succeeds". Let $M_n = \{\tilde{\sigma}_{t_n} = \tilde{\eta}_{t_n} \text{ on } [1, d_n]\}$. At time t_{n+1} , depending on the coupling at time t_n , we can write :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{n+1}^c) &\leq \mathbb{P}(M_{n+1}^c \cap M_n^c \cap Z_n) + \mathbb{P}(Z_n^c) + \mathbb{P}(M_{n+1}^c \cap M_n) \\ &\leq \mathbb{P}(M_{n+1}^c \mid M_n^c \cap Z_n) \mathbb{P}(M_n^c) + \mathbb{P}(Z_n^c) + \mathbb{P}(M_{n+1}^c \cap M_n). \end{aligned} \quad (54)$$

Let us focus on the term $\mathbb{P}(M_{n+1}^c \mid M_n^c \cap Z_n)$. We condition on the events that can happen at time s_n :

$$\mathbb{P}(M_{n+1}^c \mid M_n^c \cap Z_n) \leq P_{Z_n, M_n^c}(M_{n+1}^c \mid Z_n'' \cap Q_n \cap B_n) + P_{Z_n}((Z_n'')^c) + P_{Z_n}(Q_n^c) + P_{Z_n}(B_n^c \cap Q_n).$$

Out of all these terms, only the first one is (a priori) not vanishing when t goes to infinity according to equations (45), (47), (4.6.2). Thanks to equation (53), for t large enough :

$$P_{Z_n, M_n^c}(M_{n+1}^c \mid Z_n'' \cap Q_n \cap B_n) \leq 1 - \mathbb{P}(\beta = 1) (1 - P_{M_n^c \cap Z_n}(M_{n+1}^c \mid \{\beta = 1\} \cap Z_n'' \cap Q_n \cap B_n)) \quad (55)$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2} e^{-2\Delta_2}. \quad (56)$$

Back to the initial inequality (54), we can plug our estimate for the first term, and easily bound the remaining two terms to find :

$$\mathbb{P}(M_{n+1}^c) \leq \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2\Delta_2}\right) \mathbb{P}(M_n^c) + C e^{-c\Delta} \quad (57)$$

It only remains to solve this recursive equation with the values of N, Δ_1, Δ_2 we chose. We find :

$$\mathbb{P}(M_N^c) \leq \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2\Delta_2}\right)^N + C 2^{-N+1} e^{-c\Delta - 2(N-1)\Delta_2} \quad (58)$$

$$\leq O(e^{-c\Delta_1}). \quad (59)$$

Let us now conclude the proof. At time t_N , with probability $\mathbb{P}(M_N)$ the configurations $\tilde{\sigma}_{t_N}$ and $\tilde{\eta}_{t_N}$ match on the interval $[1, d_N]$. From time t_N to time t , we let the configurations evolve according to the standard coupling. In the same way as we did before, we can estimate the interval on which the configurations are equal at time t given the event M_N .

$$\mathbb{P}(\tilde{\sigma}_t = \tilde{\eta}_t \text{ on } [1, d^*t]) = \mathbb{P}(\tilde{\sigma}_t = \tilde{\eta}_t \text{ on } [1, d^*t] \mid M_N) \mathbb{P}(M_N) \quad (60)$$

$$\geq \mathbb{P}(\{X_t \leq X_{t_N}\} \cap F(d_N, d^*t, t - t_N)^c) \mathbb{P}(M_N). \quad (61)$$

It only remains to chose a d^* such that the event $F(d_N, d^*t, t - t_N)$ has low probability. Let $d^* = \frac{v}{4}$. Then using $t - t_N \leq \Delta$ and replacing ε and d^* by their values, we find :

$$d_N - d^*t \geq \frac{vt}{4} - \underline{v}t \geq \bar{v}\Delta \geq \bar{v}(t - t_N), \quad (62)$$

which implies $\mathbb{P}(F(d_N, d^*t, t - t_N)) = O(e^{-ct})$. The event $\{X_t \leq X_{t_N}\}$ has probability $1 - O(e^{-c\Delta})$ so we find in the end the announced estimate :

$$\mathbb{P}(\tilde{\sigma}_t \neq \tilde{\eta}_t \text{ on } [1, d^*t]) = O(e^{-c\Delta}). \quad (63)$$

The existence of an invariant measure ν comes from the compacity of the set of probability measures on Ω . The uniqueness and the convergence estimate of Theorem 4.16 come from Equation (63). \square

Acknowledgments. The author would like to thank Oriane Blondel for her many useful advice and Fabio Toninelli for his careful reading. This project has been supported by the ANR grant LSD (ANR-15-CE40-0020).

5 Self-diffusion Coefficient in the KA model

Cette section est issue de l'article co-écrit avec Assaf Shapira [20].

Résumé

The Kob-Andersen model is a fundamental example of a kinetically constrained lattice gas, that is, an interacting particle system with Kawasaki type dynamics and kinetic constraints. In this model, a particle is allowed to jump when sufficiently many neighboring sites are empty. We study the motion of a single tagged particle and in particular its convergence to a Brownian motion. Previous results showed that the path of this particle indeed converges in diffusive time-scale, and the purpose of this paper is to study the rate of decay of the self-diffusion coefficient for large densities. We find upper and lower bounds matching to leading behavior.

5.1 Introduction

Kinetically constrained lattice gases is a family of models devised by physicists in order to study glassy systems. It could be seen as the conservative version of kinetically constrained spin models, see e.g. [31, 40, 24]. In this paper we study one such model – the (k, d) -Kob-Andersen model. It is a Markov process living on the graph \mathbb{Z}^d , depending on a parameter $k \geq 2$. Each site of \mathbb{Z}^d may contain at most one particle, that can jump to an empty neighboring site if it has at least k empty neighbors both before and after the jump. When this constraint is satisfied the particle jumps at rate 1. For any $q \in (0, 1)$ this process is reversible with respect to the product Bernoulli measure of parameter $1 - q$.

At large times, the path of a marked particle converges to a Brownian motion with a coefficient called the self-diffusion, which is the subject of this paper. In [10] it has been proven that this coefficient is strictly positive for all $q \in (0, 1)$, in contrast to the conjecture in the physics literature that below some non-zero critical q the path of tagged particles is no longer diffusive. In this work we find the dependence of this diffusion coefficient in q . We show that it decays very fast when q is small, in a similar way to the spectral gap [37].

We start by introducing the model and our result, and then prove a lower and an upper bound on the diffusion coefficient. The main tool we use is a variational formula of [45] for the diffusion coefficient. In order to bound it from below, as in [10], we compare the Kob-Andersen dynamics with a random walk on an infinite percolation cluster. The upper bound is obtained by identifying an appropriate test function related to the bootstrap percolation, a process which is closely related to the Kob-Andersen model.

5.2 Model and main result

The model we study here is defined on the lattice \mathbb{Z}^d . We denote by (e_1, \dots, e_d) the standard orthonormal basis. The set of configurations is $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, where 0 stands for an empty site and 1 for an occupied site. Given two sites x, y we denote $x \sim y$ if they are nearest neighbors. We also denote by $[L]^d$ the cube $[1, L]^d$.

Fix an integer $k \in [2, d]$. For $\eta \in \Omega$ and $x \sim y$, we define the local constraint for the edge xy by

$$c_{xy}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{z \sim x, z \neq y} (1 - \eta(z)) \geq k - 1 \text{ and } \sum_{z \sim y, z \neq x} (1 - \eta(z)) \geq k - 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (64)$$

For $V \subset \mathbb{Z}^d$, and $\eta \in \{0, 1\}^V$, we define the constraint $c_{xy}(\eta) = c_{xy}(\eta')$ where $\eta' \in \Omega$ equals η on V and is entirely occupied elsewhere.

The generator of our Markov process describing the KA dynamics operating on a local function f is given by :

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \sim x} c_{xy}(\eta) \eta(x) (1 - \eta(y)) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)], \quad (65)$$

where η^{xy} is the configuration equal to η except that $\eta^{xy}(x) = \eta(y)$ and $\eta^{xy}(y) = \eta(x)$. In words, the only way a configuration can change is a particle (i.e. an occupied site) "jumping" to a neighboring empty site provided that each of those sites has at least $(k-1)$ other empty neighbors. We call this transition a *legal KA-kf transition*, or simply *legal transition* whenever context allows.

Observe that, from Formula 65, this process is reversible with respect to the product measure $\mu := \otimes_{x \in \mathbb{Z}^d} \text{Ber}(1-q)$ for any $q \in (0, 1)$.

We now consider the trajectory of a tagged particle. Let $\mu_0 = \mu(\cdot | \eta(0) = 1)$ and, under the initial distribution μ_0 , X_t the position at time t of the particle initially at 0. More precisely, $(X_t, \eta_t)_{t \geq 0}$ is the Markov process with generator :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{tagged}} f(X, \eta) = & \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \neq X}} \sum_{z \sim y} c_{yz}(\eta) \eta(y) (1 - \eta(z)) [f(X, \eta^{yz}) - f(X, \eta)] \\ & + \sum_{y \sim X} c_{Xy}(\eta) \eta(X) (1 - \eta(y)) [f(y, \eta^{Xy}) - f(X, \eta)] \end{aligned} \quad (66)$$

The following classic result gives a convergence for X_t :

Théorème 5.1. [45, 30] For any $q \in (0, 1)$, there exists a non-negative $d \times d$ matrix $D(q)$ such that

$$\varepsilon X_{\varepsilon^{-2}t} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{2D(q)} B_t,$$

where B_t is a d -dimensional Brownian motion process and the convergence holds in the sense of weak convergence of path measures on $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Furthermore, $D(q)$ is characterized by

the following variational formula :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \\ u \cdot D(q)u = \inf_f \mu_0 \left[\sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} c_{xy} (f(\eta^{xy}) - f(\eta))^2 + \sum_{y \sim 0} c_{0y} (u \cdot y + f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta))^2 \right], \quad (67)$$

where the infimum is taken over all local functions on Ω , and $\tau_y \eta$ is the configuration defined by $(\tau_y \eta)(z) = \eta(z - y)$ for all $z \in \mathbb{Z}^d$.

Remark 5.2. *A priori, the diffusion coefficient is a matrix. In our case, however, the model is invariant under permutation and inversion of the standard basis vectors. This forces the diffusion matrix to be scalar, and we may treat it as a real number.*

In [10], it was first proven that $D(q) > 0$ for all $q > 0$. We will give in this paper the appropriate scale of $D(q)$ when $q \rightarrow 0$. The main result is the following :

Théorème 5.3. *Let $d \geq 2$, $k \in [2, d]$. For $q \in (0, 1)$ let $D(q)$ be the diffusion coefficient given by Theorem 5.1. Then for q sufficiently small :*

if $k = 2$:

$$1/\exp\left(c(\log 1/q)^2 q^{-\frac{1}{d-1}}\right) \leq D(q) \leq 1/\exp\left(c'q^{-\frac{1}{d-1}}\right),$$

if $k \geq 3$:

$$1/\exp_{(k-1)}\left(cq^{-\frac{1}{d-k+1}}\right) \leq D(q) \leq 1/\exp_{(k-1)}\left(c'q^{-\frac{1}{d-k+1}}\right),$$

where $\exp_{(k-1)}$ denotes the exponential function iterated $(k-1)$ times, and c, c' are positive constants depending only on k and d .

The fact that D decays as q tends to 0 is not surprising – when q is small the constraint is difficult to satisfy, resulting in a lengthening of time scales related to the process. Indeed, for a particle to move around it must wait for sufficiently many vacancies to arrive at its vicinity. Single vacancies cannot move freely, so the dynamics is controlled by the displacement of structures containing many empty sites capable to propagate in space. We shall call such structures *droplets*. For example, in the case $k = d = 2$ an empty column of length $\ell \approx q^{-1}$ is likely to have a neighboring empty site to its right, allowing it to move to the right (see Figure 23). These droplets give rise to two important length scales – the scale ℓ of the droplet, and the scale L within which such a droplet can be found, i.e., $L \approx q^{-\ell}$. Hence, for $k = d = 2$ these scales behave roughly as $\ell \approx q^{-1}$ and $L \approx e^{1/q}$. For higher values of k and d the mechanism which allows a droplet to move is based on the fact that a $d-1$ dimensional layer parallel to the droplet could evolve like a $(k-1, d-1)$ -Kob-Andersen model since one of the k required empty neighbors comes from the droplet. Particles are thus allowed to move in this layer if its size reaches the scale L of the $(k-1, d-1)$ dynamics,

which is therefore equal ℓ of the (k, d) dynamics. This induction gives rise to the iterated exponential appearing in the theorem. The details of this argument can be found in [47] (see also [44]).

5.3 Proof of the lower bound

The proof of the lower bound will closely follow the proof of [10], Sections 4 and 5. However, we use more refined combinatorial properties of the KA model in order to obtain the correct scaling. Throughout the proof, c and λ denote generic positive constants which only depend on d and k .

We start by defining a coarse grained version of the lattice, depending on two scales :

$$\ell = \begin{cases} c \log(1/q) q^{-\frac{1}{d-1}} & \text{if } k = 2, \\ \exp_{(k-2)}(cq^{-\frac{1}{d-k+1}}) & \text{if } k \geq 3, \end{cases} \quad (68)$$

$$L = q^{-\lambda \ell}. \quad (69)$$

We will assume that λ and c are such that $L, \ell, \frac{L}{\ell}$ are integers.

Définition 5.4. A block is a set of the form $(L+1)i + [L]^d$, $i \in \mathbb{Z}^d$. A block is divided in boxes, which are sets of the form $(L+1)i + \ell a + [\ell]^d$, $i \in \mathbb{Z}^d, a \in [L/\ell]$.

We also call external face of a box any connected component of the set of vertices at (graph) distance 1 from the box. See Figure 22.

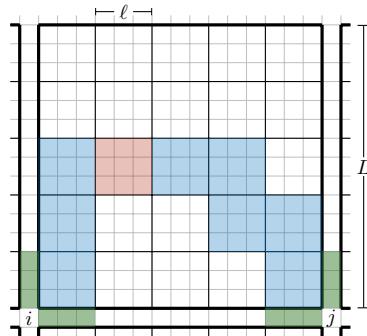


FIGURE 22 – Block-connected vertices i and j . The boxes in blue are (d, k) -good, and the external faces in green are $(d - 1, k - 1)$ -good. The red box is (d, k) -frameable.

We think of the blocks' corners $(L+1)i$ as vertices of a graph $\mathbb{Z}_L^d = (L+1)\mathbb{Z}^d$; with edges connecting a vertex $(L+1)i$ with a vertex $(L+1)j$ for $\|i - j\|_1 = 1$.

From now on, sites on the original lattice will be denoted using the letters x, y, \dots , while vertices of \mathbb{Z}_L^d will be denoted with the letters i, j, \dots . Similarly to [10], the purpose of this coarse grained lattice is to define an auxiliary dynamics that has diffusive behavior on a larger scale.

Let us now recall a few definitions in relation with the coarse grained lattice, introduced in [37, Section 3.1].

Définition 5.5. Let E be a subset of the standard basis with size $|E| \leq d - 1$, $V \subset \mathbb{Z}^d$ a set of sites, and fix a site $x \in V$. The $|E|$ -dimensional slice of V passing through x in the directions of E is defined as $V \cap (x + \text{span}(E))$, where $\text{span}(E)$ is the linear span of E .

Définition 5.6. Given the d -dimensional cube $\mathcal{C}_n = [n]^d$ and an integer $j \leq d$ we define the j^{th} frame of \mathcal{C}_n as the union of all $(j - 1)$ -dimensional slices passing through $(1, \dots, 1)$. We say that the box \mathcal{C}_n is frameable for the configuration $\eta \in \{0, 1\}^{\mathcal{C}_n}$ if η is connected by legal KA-kf transitions to a configuration for which the k^{th} frame of \mathcal{C}_n is empty.

Définition 5.7. Given a configuration η , we say that a box B is (d, k) -good for η if all $(d - 1)$ -dimensional slices of B are $(d - 1, k - 1)$ -frameable for all configurations η' that differ from η in at most two sites.

Note that this definition slightly differs from [37], allowing η' to differ from η at two sites rather than just one. This forces η to contain additional empty sites other than those required in [37]; the reason will be clarified in the proof of Lemma 5.17. Whenever context allows, we shall simply say that a box is good instead of (d, k) -good.

Example 5.8. A box is $(2, 2)$ -good if it contains at least three empty sites in each row and each column.

Proposition 5.9. Let $d \geq k \geq 2$ and ℓ be defined as in (68). Then with the appropriate choice of constants :

1. The μ -probability that the box $[\ell]^d$ is (d, k) -frameable is at least $q^{d\ell^{k-1}}$. In particular, it is much larger than $1/L$.
2. The μ -probability that the box $[\ell]^d$ is (d, k) -good tends to 1 when $q \rightarrow 0$.

Démonstration. The probability of being frameable is bounded by the probability that the frame is already empty. Since the size of the frame is less than $d\ell^{k-1}$, the first bound follows. The second bound is a consequence of [47], detailed Section 3.6 of [37]. The change in the definition of being good has no effect on the argument presented there. \square

The following definitions describes blocks that contain a droplet which is able to propagate. See Figure 22.

Définition 5.10. Let i, j be two adjacent sites in \mathbb{Z}_L^d with, suppose, $j = i + (L + 1)e_\alpha$. A geometric path connecting i and j is a sequence of adjacent boxes B_1, \dots, B_n in the block $i + [L]^d$ with $B_1 = i + [\ell]^d$ and $B_n = j - (\ell + 1)e_\alpha + [\ell]^d$. We say that a geometric path is (d, k) -super-good for a configuration η if :

1. For all m , the box B_m is (d, k) -good.
2. At least one of the boxes in the sequence is (d, k) -frameable

Définition 5.11. Let $i \in \mathbb{Z}_L^d$ and $j = i + (L+1)e_\alpha$. We say that i, j are (d, k) -block-connected for η if the following conditions hold :

1. There exists a (d, k) -super-good path connecting i and j whose length is at most $3L$.
2. All $(d-1)$ -dimensional external faces of the box $i + [\ell]^d$ that are adjacent to i are $(d-1, k-1)$ -good.
3. All $(d-1)$ -dimensional external faces of the box $j - (\ell+1)e_1 + [\ell+1]^d$ that are adjacent to j are $(d-1, k-1)$ -good.

We stress that being block-connected does not depend on the values of $\eta(i)$ and $\eta(j)$.

This notion of being block-connected defines a percolation process on \mathbb{Z}_L^d . Let $\bar{\eta}$ be the configuration on the edges of \mathbb{Z}_L^d that gives the value $\bar{\eta}_{ij} = 1$ to an edge $i \sim j$ if i and j are block-connected and 0 otherwise. We denote by $\bar{\mu}$ the measure on these configurations induced by μ .

Lemme 5.12. $\bar{\mu}$ is a stationary ergodic measure, that stochastically dominates a supercritical Bernoulli bond percolation, whose parameter tends to 1 as q tends to 0.

Démonstration. The probability that an edge is open depends only on the sites in the blocks adjacent to it. There are $2d$ such blocks, and the diameter of a block is d , hence the percolation process is $2d^2$ -dependent. By [35], it suffices to prove that the probability to be block connected tends to 1 as q tends to 0.

The probability for a $(d-1)$ -dimensional face of a box to be good tends to 1 as q goes to 0 (see Proposition 5.9). We now need to prove that the probability that condition 1 in Definition 5.11 is satisfied is also large.

It will be convenient to restrict the super-good path that we seek to a two dimensional plane, as in [37]. We assume without loss of generality that $j = i + (L+1)e_1$.

By Proposition 5.9 and standard results in oriented percolation [17, Sections 3 and 14] the following paths exist with high probability :

1. an up-right path of good boxes connecting $i + [\ell]^d$ with $j + [\ell] \times [L] \times [\ell]^{d-2}$,
2. an up-left path of good boxes connecting $j + [\ell]^d - (\ell+1)e_1$ to $i + [\ell] \times [L] \times [\ell]^{d-2}$.

This provides a good path of boxes of length at most $3L$.

It is thus left to show that one of these boxes is super-good. This is a consequence of Proposition 5.9 and the FKG inequality (since both being good and being frameable are increasing events). \square

Following [10], we compare the KA dynamics to a simple random walk on the infinite connected cluster of \mathbb{Z}_L^d given by this percolation process, conditioned on the event that

0 is in this cluster. We will denote $\bar{\mu}^*(\cdot) = \bar{\mu}(\cdot|0 \leftrightarrow \infty)$. It is shown in [21, 16] that this dynamics has a diffusive limit, given by a strictly positive diffusion matrix.

Proposition 5.13. *Let D_{aux} be the symmetric matrix characterized by*

$$u \cdot D_{aux} u = \inf_f \left\{ \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_\ell^d \\ i \sim 0}} \bar{\mu}^* \left(\bar{\eta}_{0i} [u \cdot i + f(\tau_i \bar{\eta}) - f(\bar{\eta})]^2 \right) \right\}$$

for any $u \in \mathbb{R}^d$, where the infimum is taken over local functions f on $\{0, 1\}^{\mathcal{E}(\mathbb{Z}_\ell^d)}$. Then D_{aux} is bounded away from 0 uniformly in q .

Thus, for the rest of this section we will concentrate on proving an inequality of the form :

$$D(q) \geq \Delta(q)^{-1} e_1 \cdot D_{aux} e_1, \quad (70)$$

for $\Delta(q)$ proportional to the bound on the diffusion coefficient in Theorem 5.3.

First, in order to compare the KA dynamics and the auxiliary one, we should put them on the same space.

Lemme 5.14. *Fix $u \in \mathbb{R}^d$. Then*

$$u \cdot D_{aux} u \leq \bar{\mu}(0 \leftrightarrow \infty)^{-1} \inf_f \left\{ \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_\ell^d \\ i \sim 0}} \mu_0 \left(\bar{\eta}_{0i} [u \cdot i + f(\tau_i \eta^{0i}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

where now the infimum is taken over local functions on Ω .

Démonstration. The proof follows the exact same steps as that of [10, Lemma 5.2]. \square

The comparison of both dynamics will be via a path argument. We will use the construction of [37], by concatenating basic moves. The next definition describes a sequence of legal KA transitions which keeps track of the configuration η and the position of a marked particle z .

Définition 5.15. *Given $\mathcal{M} \subset \Omega$ and $V \subset \mathbb{Z}^d$, a T -step move M with domain $\text{Dom}(M) = \mathcal{M}$ is a function from $\text{Dom}(M)$ to Ω^{T+1} such that for any $\eta \in \text{Dom}(M)$ the sequence $M_t \eta := M(\eta)_t$ satisfies :*

1. $M_0 \eta = \eta$,
2. for any $t \in [T]$, the configurations $M_{t-1} \eta$ and $M_t \eta$ are either identical or linked by a legal KA transition contained in V .

For $t \in [T]$ and η , whenever $M_{t-1}\eta \neq M_t\eta$, a particle has jumped from a site to a neighbor. We denote by $x_t(\eta)$ (resp. $y_t(\eta)$) the initial (resp. final) position of the particle during the jump. More precisely, x_t and y_t are such that $M_{t-1}\eta(x_t) = M_t\eta(y_t) = 1$ and $M_{t-1}\eta(y_t) = M_t\eta(x_t) = 0$. If $M_{t-1}\eta = M_t\eta$, we set $x_t = y_t = 0$. For $z_0 \in V$ such that $\eta(z_0) = 1$, we define $z_t(\eta)$ by :

$$\forall t \geq 1, z_t = \begin{cases} z_{t-1} & \text{if } x_{t-1} \neq z_{t-1} \\ y_{t-1} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (71)$$

that is, z_t is the position at step t of the particle initially places at z_0 . The sequences x_t, y_t, z_t depend on the move M and the initial configuration η , but these will be clear from the context and omitted from the notation.

Définition 5.16. Given a T -step move M , its information loss $\text{Loss}(M)$ is defined as

$$2^{\text{Loss}(M)} = \sup_{\substack{\eta' \in \text{Dom}(M) \\ t \in [T]}} \#\{\eta \in \text{Dom}(M) | M_{t-1}\eta = M_{t-1}\eta', M_t\eta = M_t\eta'\}.$$

The next lemma constructs a T -step move that exchanges a marked particle at the origin with a block-connected site.

Lemme 5.17. There exists a T -step move M satisfying the following conditions :

1. $\text{Dom}(M) = \left\{ \bar{\eta}_{0,(L+1)e_1} = 1 \text{ and } \eta(0) = 1 \right\}$,
2. for all $\eta \in \text{Dom}(M)$, $M_T\eta = \eta^{0,(L+1)e_1}$ and with $z_0 = 0$, $z_T = (L+1)e_1$,
3. $T = O(L\ell^\lambda)$ for $k = 2$, and $T = O(L2^{\ell^d})$ for $k \geq 3$,
4. $\text{Loss}(M) = O(\ell \log_2(\ell))$ for $k = 2$, and $\text{Loss}(M) = O(\ell^{d-1})$ for $k \geq 3$.

Similar moves exist replacing e_1 by any of the vectors $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d$

Démonstration. The proof is based on the construction of [37], explained in [44, Proposition 5.2.41]. In that proposition, the T -step move is propagating a site through a super-good path. Note that propagating simply means that the values of the configuration in the initial and final sites are being swapped. This does not mean that the marked particle initially at 0 reached the site $(L+1)e_1$, since in [37, 44], the *permutation move* exchanges any two sites even if they are both occupied (see [44, Proposition 5.2.35]), which is not a legal KA transition.

We will show here briefly the idea of the proof when $k = d = 2$, repeating the construction of [37] with the appropriate adaptations. We will then explain how these adaptations apply to general k, d .

In order to construct the move M , we will construct a sequence of shorter, simpler, moves. The first of them is the *column exchange move* :

Claim 5.18. [37, Claim 3.19] Fix $y \in \mathbb{Z}^2$, and consider the configurations in which the column $y + \{0\} \times [\ell]$ is empty, and the column to its right contains at least one empty site. Then there exists a T-step move M whose domain consists of these configurations, and in the final state $M_T \eta$ the columns $y + \{0\} \times [\ell]$ and $y + \{1\} \times [\ell]$ are exchanged. Moreover, $\text{Loss}(M) = O(\log_2 \ell)$ and $T = O(\ell)$. See Figure 23.

The next move we will use is the *framing move* :

Claim 5.19. [37, Claim 3.21] Fix a box, and consider the configurations for which the box is good, and, in addition, its bottom row is empty. Then there exists a T-step move M whose domain consists of these configurations, and in the final state $M_T \eta$ the left column is also empty. Moreover, $\text{Loss}(M) = O(\ell \log_2 \ell)$ and $T = O(\ell^2)$.

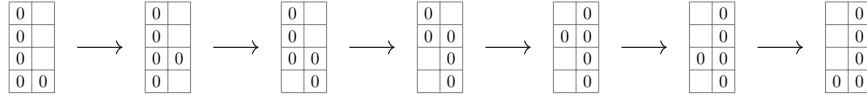


FIGURE 23 – Exchange an empty column with a good column.

When a box is framed, we are able to permute its sites :

Claim 5.20. Consider the box $[\ell]^2$, and fix any permutation σ of the sites $[2, \ell]^2$, which by convention fixes the sites outside $[2, \ell]^2$. Consider the configurations for which $[\ell]^2$ is framed and $[2, \ell]^2$ contain at least one empty site. Then there exists a T-step move M whose domain consists of these configurations, and in the final state $M_T(\eta)$ the sites are permuted according to σ , i.e., $(M_T \eta)(\sigma x) = \eta(x)$ for all $x \in [2, \ell]^2$. Moreover, the marked particle moves from its original position X to σX . The loss of information of M is at most $O(\log_2 \ell)$, and $T = O(\ell^8)$. See Figure 24.

One last ingredient before constructing the large move M is the *jump move*, that will allow us to hop a particle over a row of empty sites :

Claim 5.21. [37, Claim 3.20] Fix $y \in \mathbb{Z}^2$ and some site $\star \in y + \{-1\} \times [\ell]$. Consider the configurations in which the column $y + \{0\} \times [\ell]$ is empty, the column $y + \{-1\} \times [\ell]$ contains at least one empty site not counting \star , and the column $y + \{1\} \times [\ell]$ contains at least two empty sites. Then there exists a T-step move M whose domain consists of these configurations, and in the final state, $M_T(\eta)$ the sites \star and $\star + (2, 0)$ are exchanged, and $z_T(\eta, \star) = \star + (2, 0)$. Moreover, $\text{Loss}(M) = O(\log_2(\ell))$ and $T = O(\ell)$.

We are now ready to construct the move as shown in Figure 25, exchanging the marked particle initially at 0 with the particle/vacancy \star initially at $(L + 1)e$. Since we consider η in the domain of M , there is at least one super-good path connecting 0 and e ; let us choose

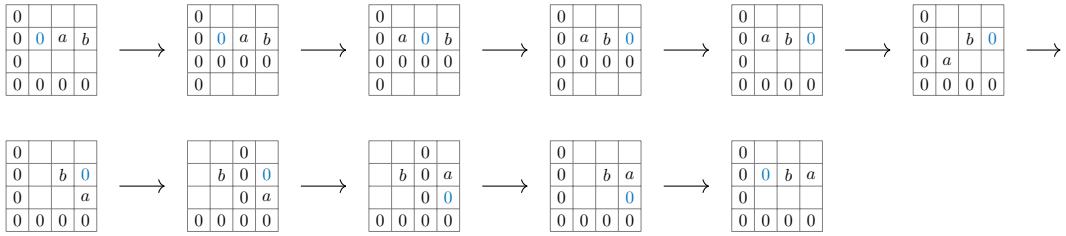


FIGURE 24 – Permutation move, exchanging a with b . Note that if a is 1 and b is the marked particle, we are not allowed to exchange them directly, which is the reason we introduce the blue 0. The loss $O(\log_2 \ell)$ is due to the unknown initial position of the blue 0, and the time $O(\ell^8)$ comes from the fact that, in general, exchanging the blue 0 with a neighboring site takes $O(\ell^2)$ steps, and any even permutation can be expressed as $O(\ell^6)$ such basic transpositions [29] ; while parity issues could be solved by exchanging any two sites which do not contain the marked particle in the beginning and in the end.

the minimal one, according to some arbitrary fixed order. This will be the path along which the exchange will take place.

First we use Claim 5.19 in order to frame the framable box in the super-good path. After that use Claim 5.18 in order to propagate the empty column, and then frame the box $[1, \ell] \times [0, \ell]$ using Claim 5.19. We can then frame the column $\{1\} \times [0, \ell]$, and apply the permutation move (Claim 5.20) in order to bring the marked particle to the position $(\ell - 1, \ell - 1)$. We then use the jump move (Claim 5.21), and clean up the modifications to the box $[0, \ell]^2$. Using again Claim 5.18, we can move the marked particle to the bottom right box, and apply the same framing procedure as before in order to exchange it with \star and move \star to $(0, 0)$. All that is left is to take the row of 0s back to its original position.

The bound on T is immediate, and the bound the loss relies on Observations 5.2.27 and 5.2.29 of [44]. Roughly speaking, in order to bound the loss we should, for fixed t , reconstruct η from $M_t \eta$. If t is right after an exchange move, permutation move, or jump move, we can reconstruct the configuration before that move has been executed with no loss of information. Hence Loss_M has three contribution – when t is in the middle of one these moves we could pay $O(\log_2(\ell))$ to reconstruct the configuration from which it has begun ; the framing moves we apply have additional cost $O(\ell \log_2(\ell))$; and recovering the original framable box on the super-good path adds $O(\log_2(L))$ to the loss. These contribution sum up to $O(\ell \log_2(\ell))$.

For general k, d the same proof as [37] will allow us to construct M , where the only modification is in the definition of the permutation move, which now takes into account the position of the marked particle. This is done in the exact same way as we have seen in Claim 5.20 (and Figure 24) for the case $k = d = 2$. The time T of the modified permutation move remains polynomial in the volume of the box ℓ^d , and the loss is logarithmic in this volume. This leads to the bounds given in the lemma. \square

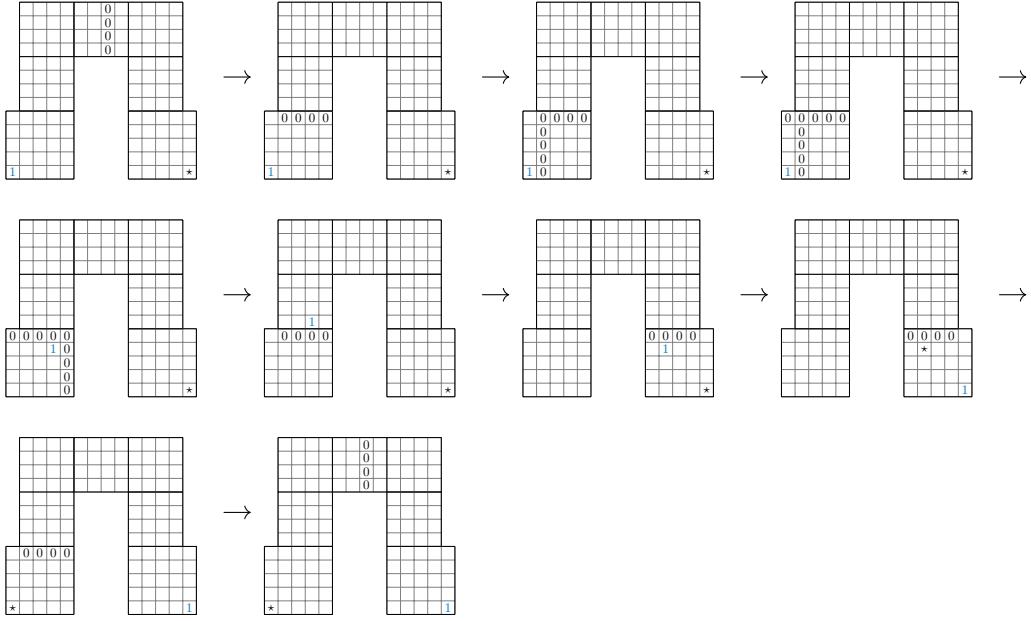


FIGURE 25 – Permuting the marked particle $\textcolor{blue}{1}$ with a site \star .

Définition 5.22. Let M be a T -step move and η such that $\eta(0) = 1$. Let $z_0 = 0$. Then the translated move M^τ is given by $M_t^\tau \eta = \tau_{z_t} M_t \eta$, as well as $x_t^\tau = x_t - z_t$ and $y_t^\tau = y_t - z_t$, so that for all t , $M_t^\tau \eta(0) = 1$.

Proof of inequality (70). We now use the move given in Lemma 5.17 in order to compare both diffusion matrices. First, note that for $\eta \in \text{Dom } M$ and $i \in \mathbb{Z}_L^d$ a neighbor of the origin,

$$e_1 \cdot i + f(\tau_i \eta^{0,i}) - f(\eta) = \sum_{t=1}^T \mathbb{1}_{x_t^\tau=0} e_1 \cdot y_t^\tau + f(M_t^\tau \eta) - f(M_{t-1}^\tau \eta).$$

By the Cauchy-Schwarz inequality

$$(e_1 \cdot i + f(\tau_i \eta^{0,i}) - f(\eta))^2 \leq T \sum_{t=1}^T c_{x_t^\tau y_t^\tau}(M_t^\tau \eta) (\mathbb{1}_{x_t^\tau=0} e_1 \cdot y_t^\tau + f(M_t^\tau \eta) - f(M_{t-1}^\tau \eta))^2,$$

where we have used the fact that, by definition of a move, $c_{x_t y_t}(M_t \eta) = 1$. Therefore,

$$\begin{aligned} \mu_0 \left[\bar{\eta}_{0i} (e_1 \cdot i + f(\tau_i \eta^{0,i}) - f(\eta))^2 \right] \\ \leq T \mu_0 \left[\bar{\eta}_{0i} \sum_{t=1}^T c_{x_t^\tau y_t^\tau}(M_t^\tau \eta) (\mathbb{1}_{x_t^\tau=0} e_1 \cdot y_t^\tau + f(M_t^\tau \eta) - f(M_{t-1}^\tau \eta))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T \sum_{\eta} \mu_0(\eta) \bar{\eta}_{0i} \sum_t \sum_{\eta'} \sum_{y \sim 0} \mathbb{1}_{\eta' = M_{t-1}^\tau \eta} \mathbb{1}_{0=x_t^\tau} \mathbb{1}_{y=y_t^\tau} c_{0y}(\eta') (e_1 \cdot y + f(\tau_y \eta'^{0y}) - f(\eta'))^2 \\
&\quad + T \sum_{\eta} \mu_0(\eta) \bar{\eta}_{0i} \sum_t \sum_{\eta'} \sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} \mathbb{1}_{\eta' = M_{t-1}^\tau \eta} \mathbb{1}_{x=x_t^\tau} \mathbb{1}_{y=y_t^\tau} c_{xy}(\eta') (f(\eta'^{xy}) - f(\eta'))^2 \\
&\leq T^2 2^{\text{Loss}M} \sum_{\eta'} \sum_{y \sim 0} \mu_0(\eta') c_{0y}(\eta') (e_1 \cdot y + f(\tau_y \eta'^{0y}) - f(\eta'))^2 \\
&\quad + T^2 2^{\text{Loss}M} \sum_{\eta'} \sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} \mu_0(\eta') c_{xy}(\eta') (f(\eta'^{xy}) - f(\eta'))^2.
\end{aligned}$$

In order to obtain the last inequality, we first replaced $\mu_0(\eta)$ with $\mu_0(\eta')$. Then, given η', t, x_t^τ and y_t^τ , we estimated the sum $\sum_{\eta} \mathbb{1}_{\eta' = M_{t-1}^\tau \eta} \mathbb{1}_{x=x_t^\tau} \mathbb{1}_{y=y_t^\tau} \leq 2^{\text{Loss}(M)}$. Next, the sum over t contributes in another factor T , and finally, we bound $\bar{\eta}_{0i} \leq 1$.

We have hence shown that $e_1 \cdot D_{\text{aux}} e_1 \leq T^2 2^{\text{Loss}M} D(q)$. Now, plugging the appropriate bounds for $\text{Loss}M$, L and ℓ yields :

— If $k = 2$,

$$T^2 2^{\text{Loss}M} \leq \exp(c \log(\ell) \ell) \leq \exp\left(c \log(1/q)^2 q^{-\frac{1}{d-1}}\right).$$

— If $k \geq 3$,

$$T^2 2^{\text{Loss}M} \leq \exp(c \ell^d) \leq \exp\left(c \exp(k-2)(q^{-\frac{1}{d-k+1}})^d\right) \leq \exp(k-1)(cq^{-\frac{1}{d-k+1}}).$$

This concludes the proof of the inequality (70). Together with Proposition 5.13, we obtain the lower bound of Theorem 5.3. \square

5.4 Upper bound

In order to find an upper bound, we will look for a suitable test function to plug in (67). Without loss of generality we consider $u = e_1$.

Let

$$\ell = \begin{cases} cq^{-\frac{1}{d-1}} & \text{if } k = 2, \\ \exp(k-2)(cq^{-\frac{1}{d-k+1}}) & \text{if } k \geq 3, \end{cases} \quad (72)$$

for $c > 0$ that may depend on d and k but not on q . We emphasize that, even though ℓ carries the same notation as ℓ of the previous section, and plays a similar role, it does not have the exact same value.

We now define the k neighbor bootstrap percolation on the box $[-\ell, \ell]^d$. It is usually seen as a deterministic process defined on $\Omega_\ell := \{0, 1\}^{[-\ell, \ell]^d}$, but for our needs it is sufficient to define the bootstrap percolation map $\text{BP} : \Omega_\ell \rightarrow \Omega_\ell$, given by :

$$\text{BP}(\eta)(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \eta(x) = 0, \\ 0 & \text{if } \sum_{y \sim x \in [-\ell, \ell]^d} (1 - \eta(y)) \geq k, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

That is, empty sites remain empty and occupied sites become empty if they have at least k empty neighbors. Let $\text{BP}^\infty(\eta)$ be the limiting configuration, that is :

$$\text{BP}^\infty(\eta)(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists t \in \mathbb{N}, \text{BP}^t(\eta)(x) = 0, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For more details about bootstrap percolation, see e.g. [38].

The following observation clarifies the relation between bootstrap percolation and the KA model.

Fact 5.23. Fix $\eta \in \Omega_\ell$. Let x, y be two sites in $[-\ell, \ell]^d$ such that $c_{xy}(\eta) = 1$. Then $\text{BP}^\infty(\eta) = \text{BP}^\infty(\eta^{xy})$.

Démonstration. Since in a legal KA move the particle has at least k empty neighbors both before and after the exchange, it would be emptied for both states. \square

We say that a site x is in the bootstrap percolation cluster of the origin if there is a nearest neighbor path $0, x_1, \dots, x_n = x$ such that $\text{BP}^\infty(\eta)(x_i) = 0$ for $i = 1, \dots, n$. For any $\eta \in \Omega$, let $f(\eta)$ be the first coordinate of the rightmost site in the bootstrap percolation cluster of the origin for $\eta|_{[-\ell, \ell]^d}$.

Définition 5.24. Fix $\eta \in \Omega_\ell$. We define \mathcal{B} as the event that the bootstrap percolation cluster of the origin contains a site of ∞ -norm at least $\ell - 1$.

Claim 5.25. There exists a constant $\gamma > 0$ such that $\mu(\mathcal{B}) \leq e^{-\gamma\ell}$.

Démonstration. This is a direct consequence of [15, Lemma 5.1] and the choice of ℓ in (72), as we set $c = \beta_-(d, k)$ following the notations of [15]. \square

Définition 5.26. Fix $x, y \in \mathbb{Z}^d$ and $\eta \in \Omega$. We say that the edge xy is pivotal for η if $c_{xy}(\eta) = 1$ and $f(\eta) \neq f(\eta^{xy})$.

Claim 5.27. Fix $x, y \in \mathbb{Z}^d$. The edge xy can only be pivotal if at least one of its endpoints is on the inner boundary of $[-\ell, \ell]^d$, and \mathcal{B} must occur for either η or η^{xy} .

Démonstration. If both x and y are outside $[-\ell, \ell]^d$, xy is not pivotal. If both are inside $[-\ell + 1, \ell - 1]^d$, then $c_{xy}(\eta) = c_{xy}(\eta|_{[-\ell, \ell]^d})$. By Observation 5.23, xy can not be pivotal.

Assume xy is pivotal. Then either x or y is in the bootstrap percolation cluster of the origin for either η or η^{xy} , hence \mathcal{B} must occur for either η or η^{xy} . \square

We can now estimate the right hand side of (67) for our choice of f . First,

$$\begin{aligned} \sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} \mu_0 \left[c_{xy} (f(\eta^{xy}) - f(\eta))^2 \right] &\leq \sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} \mu_0 \left[c_{xy} 4\ell^2 \mathbf{1}_{f(\eta^{xy}) \neq f(\eta)} \right] \\ &\leq 4\ell^2 \cdot 2d \# \{x \mid \|x\|_\infty = \ell\} \cdot \sup_{x,y} \mu_0 [\mathbf{1}_{x,y \text{ pivotal}}] \leq c\ell^{d+2} e^{-\gamma\ell}. \end{aligned}$$

For the second term, fix $y \sim 0$, and assume first that $\eta, \eta^{0y} \notin \mathcal{B}$, and $c_{0y} = 1$. In this case, the bootstrap percolation cluster of the origin for $\tau_y \eta^{0y}$ is a translation by $-y$ of the bootstrap percolation cluster for η . Therefore, the term $e_1 \cdot y + f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta)$ equals 0. In the other case we bound $|f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta)| \leq 2\ell$ and $|u \cdot y| \leq 1$, obtaining

$$\sum_{y \sim 0} \mu_0 \left[c_{0y} (u \cdot y + f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta))^2 \right] \leq 4d (2\ell + 1) \mu_0(\mathcal{B}) \leq c \ell e^{-\gamma \ell}.$$

Summing both contributions yields the expected bounds. \square

5.5 Further questions

Theorem 5.3 shows how the self-diffusion constant decays as $q \rightarrow 0$ up to a constant for $k \geq 3$ and logarithmic correction for $k = 2$. In [46, Equation (6.26)], it is conjectured for the case $k = d = 2$ that the true behavior is $D(q) \approx \exp(-\gamma q^{-1})$ for $\gamma = \frac{\pi^2}{9}$. In view of recent works related to the Fredrickson-Andersen model [47, 27], where similar scaling is observed and the exact constant γ could be identified, it seems reasonable that such a result could also be obtained for the Kob-Andersen model.

The methods used here could also be applied in other models for which the combinatorial structure allows a construction of a T -step move as in Lemma 5.17. In particular, it is natural to consider other kinetically constrained lattice gases, or even look for universality results on the self-diffusion coefficient.

Références

- [1] D. Aldous and P. Diaconis. Shuffling cards and stopping times. *The American Mathematical Monthly*, 93(5) :333–348, 1986.
- [2] D. Aldous and P. Diaconis. The asymmetric one-dimensional constrained Ising model : rigorous results. *Journal of Statistical Physics*, 107, 02 2002.
- [3] Oriane B. Front progression in the East model. *Stochastic Processes and their Applications*, 123(9) :3430 – 3465, 2013.
- [4] R. Basu, J. Hermon, and Y. Peres. Characterization of cutoff for reversible Markov chains. *Ann. Probab.*, 45(3) :1448–1487, 05 2017.
- [5] A. Ben-Hamou and Y. Peres. Cutoff for a stratified random walk on the hypercube. *Electron. Commun. Probab.*, 23 :10 pp., 2018.
- [6] L. Berthier and G. Biroli. Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials. *Reviews of Modern Physics*, 83(2) :587–645, Jun 2011.
- [7] O. Blondel. *Dynamiques de particules sur réseaux avec contraintes cinétiques*. PhD thesis, Université Paris VII, 2013.

- [8] O. Blondel, N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Fredrickson-Andersen one spin facilitated model out of equilibrium. *Markov Processes and Related Fields*, 19 :383–406, 2013.
- [9] O. Blondel, A. Deshayes, and C. Toninelli. Front evolution of the Fredrickson-Andersen one spin facilitated model. *Electron. J. Probab.*, 24 :32 pp., 2019.
- [10] O. Blondel and C. Toninelli. Kinetically constrained lattice gases : Tagged particle diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 54(4) :2335–2348, 11 2018.
- [11] R. Brower, M. Furman, and Moshe Moshe. Critical exponents for the Reggeon quantum spin model. *Physics Letters B*, 76(2) :213–219, 1978.
- [12] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Kinetically constrained spin models. *Probability Theory and Related Fields*, 140 :459–504, 2008.
- [13] N. Cancrini, F. Martinelli, R. Schonmann, and C. Toninelli. Facilitated oriented spin models : some non equilibrium results. *Journal of Statistical Physics*, 138, 11 2008.
- [14] A. Cavagna. Supercooled liquids for pedestrians. *Physics Reports*, 476(4-6) :51–124, Jun 2009.
- [15] R. Cerf and F. Manzo. The threshold regime of finite volume bootstrap percolation. *Stochastic Process. Appl.*, 101(1) :69–82, 2002.
- [16] A. De Masi, P. A. Ferrari, S. Goldstein, and W. D. Wick. Invariance principle for reversible Markov processes with application to diffusion in the percolation regime. In *Particle systems, random media and large deviations (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 41 of *Contemp. Math.*, pages 71–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [17] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4) :999–1040, 1984.
- [18] R. Durrett and D. Griffeath. Supercritical contact processes on \mathbb{Z} . *The Annals of Probability*, 11(1) :1–15, 1983.
- [19] A. Ertul. Cutoff for the Fredrickson-Andersen one spin facilitated model, 2021.
- [20] A. Ertul and A. Shapira. Self-diffusion coefficient in the Kob-Andersen model. *Electronic Communications in Probability*, 26 :1–12, 2021.
- [21] A. Faggionato. Random walks and exclusion processes among random conductances on random infinite clusters : homogenization and hydrodynamic limit. *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 73, 2217–2247, 2008.
- [22] G. Fredrickson and H. Andersen. Kinetic Ising model of the glass transition. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1244–1247, Sep 1984.
- [23] S. Ganguly, E. Lubetzky, and F. Martinelli. Cutoff for the East process. *Communications in Mathematical Physics*, 335, 2013.
- [24] J. Garrahan, P. Sollich, and C. Toninelli. *Kinetically constrained models*, volume 150. International Series of Monographs on Physics, 2011.

- [25] T. E. Harris. Contact Interactions on a Lattice. *The Annals of Probability*, 2(6) :969 – 988, 1974.
- [26] I. Hartarsky, L. Marêché, and C. Toninelli. Universality for critical kcm : infinite number of stable directions. *Probability Theory and Related Fields*, 178(1-2) :289–326, Jun 2020.
- [27] I. Hartarsky, F. Martinelli, and C. Toninelli. Universality for critical kcm : finite number of stable directions. 2020.
- [28] J. Jäckle and S. Eisinger. A hierarchically constrained kinetic Ising model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 84 :115–124, Feb 1991.
- [29] Wm. W. Johnson and W. Story. Notes on the "15" puzzle. *American Journal of Mathematics*, 2(4) :397–404, 1879.
- [30] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :1–19, 1986.
- [31] W. Kob and H. Andersen. Kinetic lattice-gas model of cage effects in high-density liquids and a test of mode-coupling theory of the ideal-glass transition. *Physical Review*, 48(6) :4364–4377, 1993.
- [32] J Kurchan, L Peliti, and M Sellitto. Aging in lattice-gas models with constrained dynamics. *Europhysics Letters (EPL)*, 39(4) :365–370, Aug 1997.
- [33] C. Labb   and H. Lacoin. Cutoff phenomenon for the asymmetric simple exclusion process and the biased card shuffling. *Ann. Probab.*, 47(3) :1541–1586, 05 2019.
- [34] D.A. Levin, Y. Peres, and E.L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Soc.
- [35] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1) :71–95, 1997.
- [36] E. Lubetzky and A. Sly. Universality of cutoff for the Ising model. *Ann. Probab.*, 45(6A) :3664–3696, 11 2017.
- [37] F. Martinelli, A. Shapira, and C. Toninelli. Diffusive scaling of the kob–Andersen model in \mathbb{Z}^d . *Annales de l’Institut Henri Poincar  , Probabilit  s et Statistiques*, 56(3) :2189–2210, Aug 2020.
- [38] R. Morris. Bootstrap percolation, and other automata. *European J. Combin.*, 66 :250–263, 2017.
- [39] T. Mountford and G. Valle. Exponential convergence for the Fredrickson–Andersen one-spin facilitated model. *Journal of Theoretical Probability*, 32, 03 2019.
- [40] F. Ritort and P. Sollich. Glassy dynamics of kinetically constrained models. *Advances in Physics*, 52(4) :219–342, 2003.

- [41] K. Ross, S. Arntfield, and S. Cenkowski. A polymer science approach to physico-chemical characterization and processing of pulse seeds. *IntechOpen*, Polymer Science, 2013.
- [42] J. Salez. Cutoff for non-negatively curved markov chains. 2021. arXiv preprint 2102.05597.
- [43] R. Schonmann. On the Behavior of Some Cellular Automata Related to Bootstrap Percolation. *The Annals of Probability*, 20(1) :174 – 193, 1992.
- [44] A. Shapira. *Bootstrap Percolation and Kinetically Constrained Models in Homogeneous and Random Environments*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2019.
- [45] H. Spohn. Tracer diffusion in stochastic lattice gases. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, 163 :134–139, 1990.
- [46] C. Toninelli. *Kinetically constrained models and glassy dynamics*. PhD thesis, La Sapienza University, 2003.
- [47] C. Toninelli, G. Biroli, and D. Fisher. Cooperative behavior of kinetically constrained lattice gas models of glassy dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 120(1) :167–238, Jul 2005.
- [48] C. Toninelli, N. Cancrini, F. Martinelli, and C. Roberto. Kinetically constrained lattice gases. *Communications in Mathematical Physics*, 297(2) :299–344, 2010.
- [49] A. Van Enter. Proof of Straley’s argument for bootstrap percolation. *Journal of Statistical Physics*, 48, 08 1987.

Diffusion et relaxation pour des systèmes de particules avec contraintes cinétiques

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions des modèles de particules en interaction particuliers appelés KCM (Kinetically Constrained Models). Il s'agit de processus de Markov sur un espace de configuration $\{0, 1\}^G$ où G est l'ensemble des sommets d'un graphe, le plus souvent \mathbb{Z}^d , qui ont été introduits dans les années 1980 par des physiciens pour répondre à des questions sur les transitions de phase vitreuses. L'étude se fait sur deux axes. Pour un premier modèle particulier, nous établissons un résultat précis sur la convergence du processus vers une mesure invariante, en démontrant au passage que ce modèle est un nouvel exemple de phénomène appelé *cut-off* : la distance en variation totale entre la loi du processus et la mesure d'équilibre chute brusquement autour d'une valeur critique qui dépend de la taille du système. Dans un second temps, nous étudions un autre modèle, conservatif, dans lequel on suit la trajectoire d'une particule marquée. Il avait été démontré en 2018 que cette trajectoire admet une limite diffusive, avec un coefficient de diffusion strictement positif. Nous prolongeons ici ce résultat en donnant des bornes précises de ce coefficient lorsque la densité de particule tend vers 1.

Mots clés : Processus de Markov ; contraintes cinétiques ; diffusion ; couplage ; cut-off.

Diffusion and relaxation for Kinetically Constrained Models.

Abstract : This PhD thesis focuses on Kinetically Constrained Models, also known as KCM. These models are continuous time Markov process on the state space $\{0, 1\}^G$ where G is the set of vertices of a graph, usually \mathbb{Z}^d . KCMs were introduced in the 1980's by physicists in order to model liquid/glass transition. The work presented here is split in two main results. First, we study a particular spin model called the Fredrickson-Andersen model, for which we establish a precise relaxation result. More precisely, we show that this process exhibits *cutoff* by giving an estimate on the mixing time starting from any initial configuration. Next, we focus on another model that is conservative, for which we follow the motion of a tagged particle. It was recently shown that the trajectory of the particle is diffusive, and that the diffusion coefficient is positive. Here, we push this result further by giving precise bounds on this coefficient when the particle density tends to 1.

Keywords : Markov process ; Kinetically constrained models ; diffusion ; coupling ; cutoff.

