Filtration nilpotente, catégories de foncteurs et étude du centre d'une algèbre instable noethérienne sur l'algèbre de Steenrod

Ouriel Bloede

▶ To cite this version:

Ouriel Bloede. Filtration nilpotente, catégories de foncteurs et étude du centre d'une algèbre instable noethérienne sur l'algèbre de Steenrod. Algèbre commutative [math.AC]. Université d'Angers, 2021. Français. NNT : 2021ANGE0059 . tel-03638356

HAL Id: tel-03638356
https://theses.hal.science/tel-03638356

Submitted on 12 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : Mathématiques

Ouriel BLOEDE

Filtration nilpotente, catégories de foncteurs et étude du centre d'une algèbre instable noethérienne sur l'algèbre de Steenrod

Thèse présentée et soutenue à l'Université d'Angers, le 22 octobre 2021
Unité de recherche : LAREMA UMR CNRS 6093
Thèse N° : 190340

Rapporteurs avant soutenance :

Hans-Werner HENN	Professeur, Université de Strasbourg
Nicholas KUHN	Professor, University of Virginia

Composition du Jury :

Examinateurs :	Christian AUSONI	Professeur, Université Sorbonne Paris Nord
	Vincent FRANJOU	Professeur, Université de Nantes
	Hans-Werner HENN	Professeur, Université de Strasbourg
	Christine VESPA	Maître de conférences, Université de Strasbourg
Dir. de thèse :	Geoffrey POWELL	Directeur de recherche CNRS, Université d'Angers

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de quatre années de recherche au sein du LAREMA qui m'ont donné l'occasion d'intéragir avec de nombreuses personnes que je souhaiterais remercier ici.

Je souhaite bien sûr commencer par remercier Geoffrey Powell. D'abord, pour m'avoir fait découvrir, lors de mon mémoire de Master 2 il y a quatre ans, les opérations cohomologiques et la théorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod. Ensuite, pour m'avoir aidé à m'approprier ce sujet pendant ces quatre ans. Enfin, je tiens à le remercier tout particulièrement pour sa très grande disponibilité, pour l'attention toute particulière avec laquelle il a relu et corrigé cette thèse et plus généralement pour la qualité de sa supervision, trois raisons pour lesquelles je suis particulièrement chanceux de l'avoir eu comme directeur de thèse.

Je souhaite ensuite remercier messieurs Hans-Werner Henn et Nicholas Kuhn pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que pour leurs retours, qui m'auront permis je l'espère de rendre cette thèse plus accessible, notamment son chapitre 5. Je tiens également à remercier les autres membres de mon Jury, Christian Ausoni, Vincent Franjou et Christine Vespa. J'aimerais également remercier Christine Vespa pour avoir bataillé, il y a maintenant six ans, avec le département de maths de l'ENS Cachan pour que je puisse faire mon stage de Master 1 sous sa supervision, ce qui fut ma porte d'entrée dans le monde de la topologie algébrique.

Il me faut maintenant remercier tous les membres du LAREMA, pour le soutien de ses membres lors de mes premières années d'enseignement et pour la chaleur de ce laboratoire. Je garderai un grand plaisir au souvenir des problèmes de maths partagés en salle cafet. Je tiens à remercier particulièrement Alexandra, d'abord pour avoir été la première personne à m'accueillir au LAREMA, et puis pour avoir été une alliée sans faille à chaque fois que je me suis trouvé incapable de traiter les tâches administratives qui m'incombaient.

Je veux aussi, bien sûr, remercier mes camarades doctorants pour être devenus des amis bien plus que des collègues et pour tant d'autres choses. Pour avoir supporté mes mauvaises blagues pendant quatre ans. Pour tous ces verres au Joker's avec Johan, Ann, Théo, Sofia, Axel, Jérôme, Thomas et Sinan à qui a été décerné le titre de doctorant émérite. Pour nos parties de Bridge

avec Marine, Alexis, Théo, David, Maxime, Antoine et François. Pour nos discussions politiques et nos parties d'échecs avec Axel et Jérôme. Pour les parties de Squash avec Théo et Sofia.

Je voudrais aussi vous adresser des remerciements individuels. Johan, mon grand-frère de thèse, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire ainsi qu'au Joker's. Alexis pour avoir si souvent chanté le générique d'Evangelion avec moi. Ann, pour toutes les discussions de musique, de physique, de philo et sur tant d'autres sujets. Marine pour m'avoir accepté dans ton bureau, et pour ton combat avec Stéphane Loiseau qui profitera probablement encore des années aux doctorants de ce laboratoire. Axel, pour les soirées passées chez toi et m'avoir fait découvrir Dominion. Jérôme pour toutes les soirées également passées chez toi et m'avoir fait découvrir Bak XIII. Antoine, pour avoir accepté si souvent de me servir de cobaye pour que j'expose mes idées. Sofia, pour la recette de la pâte à pizza et surtout pour m'avoir fait découvrir De André. Maxime pour nos parties d'échecs. François, pour n'avoir finalement PAS organisé de tournoi de free fight entre nous. Eunice pour m'avoir ouvert les yeux sur Harry Potter. David, pour m'avoir supporté quand je m'agaçais pour une mauvaise enchère au Bridge. Thomas, pour me supporter alors que je veux tout le temps parler de politique. Et enfin Théo, pour avoir été un parfait camarade de mauvaises blagues et de citations Kaamelott. D'ailleurs Théo, tu as une banane dans l'oreille... Non, je dis que tu as une banane dans l'oreille... Bon, laisse tomber.

J'aimerais aussi remercier toutes les personnes que j'ai rencontré à Angers, en dehors du monde des mathématiques, et qui m'ont tant fait apprécier mon séjour dans cette ville. Nico, pour toutes ces soirées passées ensemble. Hugo, Marine et Antoine pour m'avoir accepté dans la secte des adorateurs de Bernard Friot. Auxane et Téva, pour l'un des plus beaux karaoke de ma vie, enfin peut-être pas musicalement. Esteline, qui m'a tout appris sur le récolement. Maëlle, Audrey et Juliette, encore une fois pour toutes ces soirées passées au Joker's. Lindsay, pour ne m'avoir finalement pas volé ma thèse. Enfin, si tu comptes encore le faire il faut se dépêcher, à l'heure ou j'écris ces remerciements il ne te reste plus longtemps. Manon et Audrey pour les parties de Squash. Gabrielle pour m'avoir laissé utiliser ta douche dans un moment de grande détresse. Et surtout Julie, pour supporter mes ronflements, pour tes suggestions audacieuses quant à la rédaction de ma thèse (que je me suis empressé de ne pas suivre), pour tous nos rires et pour tous nos baisers.

Enfin, je souhaite aussi remercier tous les proches qui me soutiennent depuis des années, bien avant que je commence cette thèse, et pour qui je ne saurais sélectionner une raison en particulier de les remercier. Mes parents Nathalie et François, mes soeurs Salomé et Naomi, Mymy, tonton Serge et tonton Denis, Grégory, Margaux et Aurore, et toutes mes tantes, tous mes oncles, cousins, cousines et petits cousins que je n'aurais le courage d'énumérer mais auxquels je pense très fort à cet instant.

Résumé

Le but de cette thèse est d'appliquer à l'étude du centre d'une algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod, des outils provenant d'une équivalence de catégorie entre la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod localisée en ses objets n-nilpotents et certaines catégories de foncteur.

Nous commençons par donner une description alternative de cette équivalence de catégorie, déjà classique, et nous précisons son comportement vis à vis des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod. Plus précisément, nous introduisons une catégorie d'algèbre instable dans la catégorie de foncteur déjà mentionnée, et justifions qu'elle est équivalente à la catégorie des algèbres instables localisée en les morphismes dont les noyaux et conoyaux sont n-nilpotents.

Pour $n = 1$, cette équivalence se spécialise en une équivalence de catégorie vers la catégorie des foncteurs contravariants de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie dans celle des ensembles profinis. Nous introduisons un foncteur décalage dans cette catégorie de foncteur, correspondant au foncteur T de Lannes dans la catégorie des algèbres instables.

Après avoir introduit, une notion de centralité dans les différentes catégories de foncteur étudiées, de telle sorte que le centre d'une algèbre instable nil_n-fermée corresponde au centre du foncteur qui lui est associé, nous en déduisons un raffinement du centre d'une algèbre instable faisant intervenir la filtration nilpotente.

Enfin, nous appliquons ces résultats à l'étude du problème de classification des algèbres instables, noethériennes, nil-fermées, connexes, munies d'une structure de $H^*(V)$-comodule dont l'algèbre des éléments primitifs est une algèbre instable P fixée.

Table des matières

Notations **11**

Introduction **12**

0.1 Le foncteur T et la filtration nilpotente 14
0.2 Localisation des catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ loin des n-nilpotents 14
0.3 Décomposition en composante connexe de $T_V(K)^0$ 16
0.4 Centre d'une algèbre instable 18

1 Modules et Algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod **23**

1.1 Les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ 23
1.1.1 L'algèbre de Steenrod 23
1.1.2 La catégorie $\mathcal{U}$ 26
1.1.3 La catégorie $\mathcal{K}$ 27
1.1.4 Les projectifs et injectifs standards dans $\mathcal{U}$ 29
1.1.5 Les foncteurs Φ et Ω 32
1.2 Le foncteur T de Lannes 33
1.2.1 Foncteurs de division dans la catégorie $\mathcal{U}$ 33
1.2.2 Foncteurs de division dans la catégorie $\mathcal{K}$ 35
1.2.3 Le foncteur T et la filtration nilpotente 36
1.2.4 La filtration de Krull 40

2 Les catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ **43**

2.1 Le cas $n = 1$ 43
2.1.1 La catégorie $\mathcal{F}$ 43
2.1.2 La catégorie $\mathcal{F}_\omega$ 45
2.1.3 L'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{F}_\omega$ 48
2.1.4 Foncteurs de Schur et nil-fermeture 50

2.2 Le cas n quelconque 53
2.2.1 Structure de $H^*(V)$-comodule 53
2.2.2 Les catégories $\mathcal{U}^{<k}$ 57
2.2.3 Les catégories $\mathcal{F}^{<k}$ 62
2.2.4 Objets de $\mathcal{U}^{<k}$ et nil_k-fermeture 65
2.2.5 Les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ 67
2.3 Algèbre homologique dans les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ 72
2.3.1 Cogénérateurs injectifs 72
2.3.2 Générateurs projectifs et foncteur décalage 72
2.3.3 Suite spectrale de Grothendieck 75
2.3.4 Relation avec la filtration de Krull 76
2.4 Exemples de calculs de $m^{<n}$ 77
2.4.1 Objet engendré par un foncteur analytique en degré n 77
2.4.2 Calcul de $m^{<2}$ 78
2.4.3 Un calcul de $m^{<3}$ 80

3 Les catégories $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_n$ et $(K-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$ 83
3.1 Localisation d'algèbres instables loin des n-nilpotents 83
3.1.1 Les catégories $\mathcal{KF}^{<n}$ et $\mathcal{KF}^{<n}_{\omega}$ 84
3.1.2 L'équivalence de catégorie 84
3.2 Localisation de K-modules instables loin des n-nilpotents 88
3.3 La structure d'algèbre de Boole sur $T_V(K)^0$ 90
3.3.1 Décomposition en composante connexe d'une algèbre de Boole 90
3.3.2 Décomposition en composantes connexes du foncteur T_V 91
3.3.3 Objets injectifs dans $K-\mathcal{U}$ 94
3.3.4 Décomposition en composantes connexes de $f^{<n}(K)$ 95
3.4 Les catégories $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ 98
3.4.1 La catégorie de Rector 98
3.4.2 Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(K, H^*(\_))$ 98
3.4.3 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ 100
3.4.4 Foncteur décalage dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ 103
3.4.5 Raffinement 107
3.4.6 Hom interne dans la catégorie $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ 109
3.4.7 $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}})$ et $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$ 111
3.5 Les catégories $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ 113
3.5.1 Les catégories $K_{f.g.}-\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sf(K)$ 113
3.5.2 Décalage dans la catégorie $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ 115

4 Centre d'une algèbre instable **121**
4.1 Morphismes centraux . . . 121
4.1.1 Définitions . . . 121
4.1.2 Groupe des éléments centraux de degré 1 . . . 126
4.1.3 Calcul du centre de $H^*(G)$ . . . 128
4.1.4 Centralité et K-algèbres . . . 129
4.2 Centralité et nil-fermeture . . . 131
4.2.1 Centre d'un objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}\mathcal{I})^{\mathrm{op}}}$ . . . 131
4.2.2 Relations entre $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ et $\mathbf{C}(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$ . . . 133
4.2.3 M-centralité et *nil*-fermeture . . . 134
4.2.4 $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ et la filtration nilpotente . . . 137
4.2.5 Exemples de calculs du centre pour K non nil-fermée . . . 140

5 Un problème de classification des $H^*(V)$-comodules dans $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_1$ **145**
5.1 Quotients noethériens dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ . . . 145
5.2 Dimension de Krull d'un foncteur . . . 148
5.3 Cas des algèbres intègres . . . 150
5.3.1 Centralité et structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ . . . 151
5.3.2 Comparaison avec les algèbres d'invariants . . . 155
5.3.3 Une généralisation du théorème 5.3.16 . . . 163

Notations

$\mathcal{V}^f$	La catégorie des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{F}_2$,
$\mathcal{V}$	La catégorie de tous les espaces vectoriels,
$\mathcal{A}$	L'algèbre de Steenrod modulo 2,
$\mathcal{A}_p$	L'algèbre de Steenrod modulo p,
$\mathcal{U}$	La catégorie des modules instables sur $\mathcal{A}$,
$\mathcal{K}$	La catégorie des algèbres instables sur $\mathcal{A}$,
BV	Pour V un espace vectoriel, l'espace classifiant de V,
$H^*(V)$	Pour V un espace vectoriel, la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ de BV,
$H^*(X)$	Pour X un espace topologique, la cohomologie singulière de X à coefficients dans $\mathbb{F}_2$,
$\mathfrak{S}_n$	Groupe des permutations à n éléments.

INTRODUCTION

La cohomologie singulière est un invariant important en topologie algébrique. Si l'idée de cohomologie était déjà en germe dans les travaux de Henri Poincaré à la fin du XIXème siècle, il faudra attendre 1944 pour que Samuel Eilenberg donne la définition moderne de la cohomologie singulière. La cohomologie singulière à coefficient dans un groupe abélien G est un foncteur contravariant $H^*(\_;G)$ de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des groupes abéliens gradués. Si R est un anneau commutatif, $H^*(\_;R)$ est à valeurs dans les R-modules gradués. Qui plus est, pour X un espace topologique, $H^*(X;R)$ est muni d'un cup-produit, dont la définition moderne est également due à Eilenberg, et qui munit $H^*(X;R)$ d'une structure de R-algèbre graduée-commutative.

Pour p un nombre premier, l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$, introduite suite au travaux de Norman Steenrod (1947) et Henri Cartan (1955), est l'algèbre des opérations cohomologiques stables pour la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, c'est à dire des transformations naturelles entre les foncteurs $H^i(\_;\mathbb{F}_p)$ pour i parcourant $\mathbb{N}$ vérifiant une certaine condition de stabilité. Elle permet de caractériser plus précisément la structure de la cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{F}_p$ d'un espace topologique, pour X un espace topologique $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre sur $\mathcal{A}_p$ vérifiant une condition dite d'instabilité.

Pour cette raison, fut introduite la catégorie $\mathcal{U}_p$ des modules instables à gauche sur l'algèbre de Steenrod et sa sous-catégorie $\mathcal{K}_p$ des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod dont une étude détaillée est faite dans le livre de Lionel Schwartz [Sch94]. Ces catégories jouent un rôle important dans la démonstration, en 1984, de la conjecture de Sullivan par Haynes Miller [Mil84]. Le résultat de Miller est le suivant, pour X un CW-complexe connexe et de dimension finie et pour G un groupe fini, alors $[BG,X]$, l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de l'espace classifiant de G dans X, est trivial. L'idée de la preuve est de considérer, pour tout p premier, le morphisme de $[BG,X]$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(H^*(X;\mathbb{F}_p),H^*(BG;\mathbb{F}_p))$ et de justifier qu'il suffit de montrer que pour tout p, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(H^*(X;\mathbb{F}_p),H^*(BG;\mathbb{F}_p))$ est trivial.

Si le calcul de $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$, pour G un groupe topologique quelconque, est un problème difficile, en 1971, Daniel Quillen en a donné une approximation dans le cas où G est un groupe fini ou un groupe de Lie compact. Plus précisément, il a construit un morphisme $q_G : H^*(BG;\mathbb{F}_p) \to \varprojlim_{E\in A_G} H^*(BE;\mathbb{F}_p)$, où A_G est une catégorie dont les objets sont les p-sous-groupes abéliens élémentaires de G (dont le calcul de la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ est quant à lui connu), et il a montré que les noyaux et conoyaux de ce morphisme étaient nilpotents, c'est à dire que tout élément x vérifie que $x^{p^n} = 0$ à partir d'une certaine valeur de n. En 1982, D. Rector propose une généralisation de cette construction aux algèbres instables noethériennes K, pour cela il introduit la catégorie de Rector $\mathcal{R}(K)$, qui est équivalente à A_G dans le cas où $K \cong H^*(BG;\mathbb{F}_p)$.

Une question de grand intérêt est de savoir, étant donnée $K \in \mathcal{K}_p$, si K peut-être réalisée comme la cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{F}_p$ d'un espace topologique. Dans [BRS17], Georg Biedermann, Georgios Raptis et Manfred Stelzer définissent des obstructions à cette réalisabilté, vivant dans la cohomologie d'André-Quillen de K (en fait, ils s'intéressent plutôt à la question duale de la réalisabilité de coalgèbres instables par l'homologie d'espaces topologiques). Cette approche reste cependant difficile à utiliser en pratique, pour cause la difficulté que représente le calcul de la cohomologie d'André-Quillen d'une algèbre instable quelconque. Si nous n'aborderons pas directement ces questions, elles ont motivé un certain nombre des considérations de ma thèse.

Abordons maintenant le contenu de ma thèse. Les catégories $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{K}_p$ sont symétriques monoïdales, conséquence de la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{A}_p$ et la catégorie $\mathcal{U}_p$ est abélienne et contient suffisamment d'injectifs et de projectifs. Présentons certains objets injectifs dans $\mathcal{U}_p$ qui joueront un rôle important dans tout le reste de cette thèse. D'abord, la catégorie $\mathcal{U}_p$ contient une famille de cogénérateurs injectifs $(J(n))_{n\in\mathbb{N}}$, les $J(n)$ sont caractérisés par l'existence d'un isomorphisme naturel en M :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(M, J(n)) \cong (M^n)^\sharp,$$

où M est un module instable sur $\mathcal{A}_p$ et où $(M^n)^\sharp$ désigne le dual linéaire de la composante de degré n de M. Par ailleurs, pour V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et BV l'espace classifiant de V, $H^*(V) := H^*(BV;\mathbb{F}_p)$ est un injectif dans $\mathcal{U}_p$ et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$ et V un espace vectoriel, $H^*(V) \otimes J(n)$ est injectif dans $\mathcal{U}_p$. Le théorème 1.1.58, démontré par Jean Lannes et Lionel Schwartz donne une description exhaustive des injectifs de $\mathcal{U}_p$.

0.1 Le foncteur T et la filtration nilpotente

Parmi les ingrédients importants du premier chapitre, présentons également le foncteur T_V, défini par Jean Lannes, et sur lequel reposera la majorité des constructions que nous utiliserons. Le foncteur T_V est défini comme l'adjoint à gauche du foncteur qui à un module instable N associe $H^*(V) \otimes N$. C'est un foncteur exact et qui commute avec le produit tensoriel. Par adjonction avec le produit tensoriel par $H^*(V)$, on a l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(M, H^*(V) \otimes J(i)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(T_V(M), J(i)) \cong (T_V(M)^i)^\sharp.$$

On définit $\mathcal{N}il_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, comme l'ensemble des objets de $\mathcal{U}_p$ vérifiant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(M, H^*(V) \otimes J(n)) \cong 0$ pour tout $i < n$ et pour tout V. De manière équivalente, $M \in \mathcal{N}il_n$ si et seulement si $T_V(M)^i \cong 0$ pour tout $i < n$ et pour tout V. Les $\mathcal{N}il_n$ forment une filtration de la catégorie $\mathcal{U}_p$. Cette filtration joue notamment un rôle important dans des conjectures de Nick Kuhn sur la réalisabilité de modules et d'algèbres instables par la cohomologie d'espaces topologiques, confère [CGPS16].

Les classes $\mathcal{N}il_n$ forment une classe de Serre de la catégorie $\mathcal{U}$, on peut ainsi définir une catégorie localisée au sens de [Gab62], $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$. On a alors une adjonction

$$r_n : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{U}/\mathcal{N}il_n : s_n,$$

qui nous permet d'introduire la notion de nil_n-fermeture : un module instable M est nil_n-fermé si $M \cong s_n(r_n(M))$, on appellera $l_n(M) := s_n(r_n(M)) \in \mathcal{U}$ la nil_n-fermeture de M. En particulier, le morphisme définit par Quillen $q_G \; : \; H^*(BG; \mathbb{F}_p) \to \varprojlim_{E \in A_G} H^*(BE; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$.

0.2 Localisation des catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ loin des n-nilpotents

Le second chapitre sera consacré à l'étude de la localisation de $\mathcal{U}_p$ loin de $\mathcal{N}il_n$ et à l'étude de la nil_n-fermeture. Dans [HLS93], Hans Werner Henn, Jean Lannes et Lionel Schwartz construisent une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}_p/\mathcal{N}il_1$ et la catégorie $\mathcal{F}_\omega$, qui est une catégorie de foncteurs de $\mathcal{V}^f$, la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$ de dimensions finies, dans la catégorie $\mathcal{V}$ des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimensions quelconques, vérifiant une certaine condition d'analycité. Cette équivalence de catégorie est donnée par le foncteur qui à $M \in \mathcal{U}$ associe le foncteur $V \mapsto T_V(M)^0$, pour V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Dans [HLS95], les mêmes auteurs raffinent cette construction pour définir une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}_p/\mathcal{N}il_n$ vers des catégories

$\mathcal{F}_{\omega}^{<n}$. Après avoir rappelé la construction de [HLS95], nous proposerons une équivalence de catégorie alternative. Notons que si la majorité de nos résultats devraient se généraliser pour p impair, nous ne nous intéresserons en détail qu'au cas $p = 2$. Nous utiliserons les notations $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ pour désigner $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{K}_2$.

Les $f^{<n}$ sont définis par Henn, Lannes et Schwartz comme les foncteurs qui à un module instable M associent le foncteur de la catégorie $\mathcal{V}^f$ des espaces vectoriels de dimensions finies vers la catégorie $\mathcal{U}^{<n}$, des modules instables tronqués en degré plus petit que n, défini de la manière suivante :

$$f^{<n}(M)(V) := T_V(M)^{<n},$$

où $T_V(M)^{<n}$ désigne le module obtenu en quotientant $T_V(M)$ par ses éléments homogènes de degré supérieur ou égal à n. Notons que par définition de la filtration nilpotente, $M \in \mathcal{N}il_n$ si et seulement si $f^{<n}(M) = 0$.

Pour $n > 0$ et pour $H^{*<n}(V)$ le quotient de $H^*(V)$ par ses éléments homogènes de degrés supérieurs ou égaux à n, $f^{<n}(M)(V)$ est muni d'une structure de $H^{*<n}(V)$-comodule provenant de l'adjonction entre le foncteur T_V est le produit tensoriel par $H^*(V)$. Cette structure de $H^{*<n}(V)$-comodule ne peut pas être naturelle en V, puisque le foncteur qui à V associe $H^*(V)$ est contravariant. En utilisant que $H^*(V)$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée sur $\mathbb{F}_2$ à l'algèbre symétrique sur $V^\sharp$, $S^*(V^\sharp)$ et en utilisant la dualité dans la catégorie des espaces vectoriels, $f^{<n}(M)(V)$ admet en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$ une structure de $\Gamma^*(V)$-module, où $\Gamma^*(V)$ est l'algèbre aux puissances divisées engendrée par V. Cette structure de $\Gamma^*(V)$-module est quant à elle naturelle en V. On définira (confère la définition 2.2.25) un adjoint à gauche $\widetilde{(\_)}$: $\mathcal{U}^{<n} \to \mathcal{U}$ de la troncature en degrés strictement plus petits que n de telle sorte que la structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $f^{<n}(M)(V)$ induise une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $\widetilde{f^{<n}(M)(V)}$ dans la catégorie des $\mathcal{A}$-modules.

Définition 2.2.51. Soit ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs F, de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}^{<n}$ tels que $\widetilde{F(V)}$ est muni pour tout V d'une structure de $\Gamma^*(V)$-module dans $\mathcal{A}$-mod, $\theta_{F,V}$: $\Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \to \widetilde{F(V)}$. Et dont les morphismes sont les transformations naturelles compatibles avec cette structure de module sur $\widetilde{F(V)}$.
Soit également ${}_m\mathcal{F}_{\omega}^{<n}$ sa sous-catégorie pleine des foncteurs analytiques en tout degré.

Théorème 2.2.53. *Les catégorie $\mathcal{F}^{<n}$ (resp. $\mathcal{F}_{\omega}^{<n}$) et ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ (resp. ${}_m\mathcal{F}_{\omega}^{<n}$) sont équivalentes.*

Il est important de noter que $\Gamma^*(V)$ est muni à priori d'une structure de module à droite sur l'algèbre de Steenrod et non à gauche, il faudra donc discuter le comportement de cette structure de module vis à vis de l'algèbre de Steenrod, et ce que l'on gagnera en naturalité on le perdra en simplicité de ce point de vue. L'un de mes objectifs non aboutis, en introduisant les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<n}$, était d'étudier une cohomologie d'André-Quillen pour les algèbres dans ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ dans l'espoir de mettre à jour des obstructions à la réalisation d'algèbres instables sur $\mathcal{A}$ loin des n-nilpotents qui seraient plus faciles à calculer que les obstructions établies dans [BRS17].

Une des raisons d'étudier les catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ provient de la difficulté que représente le calcul de foncteur dérivés, en particulier des groupes Ext dans la catégorie $\mathcal{U}$. On espère pouvoir tirer des informations intéressantes du calcul de foncteur dérivés dans les catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ et donc dans ${}_m\mathcal{F}^{<n}$. Nous n'irons pas bien loin dans cette direction, mais nous justifierons quand même que les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ possèdent assez d'injectifs et de projectifs, ce qui permettra d'envisager des calculs d'algèbre homologique dans ces catégories.

Nous conclurons le chapitre 2 avec quelques calculs de nil_n-fermeture de modules instables rendus possibles par le formalisme de ${}_m\mathcal{F}^{<n}$.

Le chapitre 3 sera consacré au comportement des algèbres instables vis à vis des foncteurs $f^{<n}$. Nous commencerons par définir une notion d'algèbre instable dans $\mathcal{F}^{<n}$ et définirons les catégories $\mathcal{K}\mathcal{F}^{<n}$ et $\mathcal{K}\mathcal{F}^{<n}_\omega$ des algèbres instables respectivement dans ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ et ${}_m\mathcal{F}^{<n}_\omega$ et démontrerons le théorème suivant, dans lequel $\mathcal{K}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$ désigne la localisation au sens de [KS] de $\mathcal{K}$ par les morphismes d'algèbres instables dont les noyaux et conoyaux linéaires sont des objets de $\mathcal{N}il_n$.

Théorème 3.1.19. *On a une équivalence de catégorie :*

$$f^{<n} : \mathcal{K}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right] \rightleftarrows \mathcal{K}\mathcal{F}^{<n}_\omega : m^{<n}.$$

0.3 Décomposition en composante connexe de $T_V(K)^0$

Nous nous attarderons ensuite sur une partie de la structure de $f^{<n}(K)(V)$, pour K une algèbre instable. Toute algèbre instable concentrée en degré 0 est une algèbre de Boole, en particulier, pour K une algèbre instable, $T_V(K)^0$ est muni d'une structure d'algèbre de Boole sur $\mathbb{F}_2$. Pour tout espace vectoriel V, $T_V(K)$ est muni d'une structure de module sur cette algèbre de Boole, il en est de même pour M un K-module dans $\mathcal{U}$. On peut alors utiliser la décomposition en composantes connexes d'une algèbre de Boole et des modules sur une algèbre de Boole présentée dans [HLS93].

Pour $\mathcal{B}$ la catégorie des algèbres de Boole sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{P}fin$ la catégorie des ensembles profinis, le foncteur spec $: \mathcal{B} \to (\mathcal{P}fin)^{op}$, qui à une algèbre B associe son spectre $\mathrm{spec}(B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{F}_p)$, est une équivalence de catégorie dont l'inverse est le foncteur qui à un ensemble profini S associe l'algèbre des applications continues de S dans $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p^S$.

En particulier, pour B une algèbre de Boole de spectre fini, on a un isomorphisme de B-algèbre $B \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{spec}(B)} \mathbb{F}_p(\phi)$, où $\mathbb{F}_p(\phi)$ désigne $\mathbb{F}_p$ dont la structure de B-module est donnée par le morphisme d'algèbre de Boole $\phi \ : \ B \to \mathbb{F}_p$.

Pour M un B-module, on définit $M_\phi := M \otimes_B \mathbb{F}_p(\phi)$, alors

$$M \cong M \otimes_B B \cong M \otimes_B \bigoplus_{\phi \in \mathrm{spec}(B)} \mathbb{F}_p(\phi) \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{spec}(B)} M_\phi.$$

Pour $p = 2$ et $K \in \mathcal{K}$, on a

$$\mathrm{spec}(T_V^0(K)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)).$$

Si K est finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est fini pour tout V et $T_V(K)$ hérite d'une décomposition en tant que $T_V^0(K)$-module de la forme

$$T_V(K) \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))} T_{(V,\phi)}(K).$$

Plus généralement, pour M un K-module dans $\mathcal{U}$,

$$T_V(M) \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))} T_{(V,\phi)}(M).$$

Cette décomposition en induira une sur les foncteurs $f^{<n}(K)$ et $f^{<n}(M)$ de la forme

$$f^{<n}(K)(V) \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))} g^{<n}(K)(V, \phi)$$

et

$$f^{<n}(M)(V) \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))} g^{<n}(M)(V, \phi).$$

L'existence de cette décomposition motive l'étude du foncteur qui à un espace vectoriel V associe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. Comme cela a été montré dans [HLS93], il définit un foncteur qui capture toute l'information sur la nil_1-fermeture de K ce qui induit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{K}\left[\mathcal{W}_1^{-1}\right]$ et la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{fin}_\omega^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, qui est la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{V}^f$ vers la catégorie des ensembles profinis vérifiant une certaine condition d'analycité (Théorème 3.4.10).

On définira, pour $F \in \mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\phi \in F(V)$, un objet $\Sigma_{(V,\phi)}F$ de tel sorte que $\Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ soit naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_))$. On aimerait, en s'inspirant d'idées déjà présentes dans [HLS93], se ramener, pour K une algèbre noethérienne, à l'étude du foncteur

$$V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(V)) := \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))\ ;\ \phi \text{ fait de } H^*(V) \text{ un } K\text{-module finiment engendré}\},$$

qui est un foncteur sur la catégorie $\mathcal{VI}$ des espaces vectoriels de dimension finie et des morphismes injectifs d'espaces vectoriels. Cette approche a l'avantage de nous faire manipuler des foncteurs "plus petits", notamment pour K noethérienne, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(V))$ est trivial dès que V est de dimension assez grande, mais l'absence des morphismes non injectifs dans $\mathcal{VI}$ sera une difficulté pour la définition des foncteurs décalages dans ce contexte. On rappellera la définition de [HLS93] d'un foncteur noethérien et nous montrerons comment associer (non fonctoriellement) à $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ un foncteur sur $\mathcal{VI}$, qui conserve toute l'information de F, si F est noethérien. Dans le cas où F sera le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$, on retrouvera le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\_))$. Enfin, nous définirons un analogue de $\Sigma_{(V,\phi)}F$, pour les foncteurs sur $\mathcal{VI}$, de telle sorte qu'on ait un isomorphisme naturel $\bar{\Sigma}_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\_)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_))$.

0.4 Centre d'une algèbre instable

Dans [Hea21] l'auteur utilise le centre d'une algèbre instable, introduit dans [DW92], pour donner une borne aux invariants $d_0(K)$ et $d_1(K)$, où pour M un module instable, $d_0(M)$ est la borne inférieure (éventuellement infinie) des entiers tels que M ne contient aucun sous-module n-nilpotent et $d_1(M)$ est la borne inférieure des entiers tels que M est nil_n-fermé. Ces résultats sont des généralisations des travaux de Nicholas Kuhn dans le cas où K est la cohomologie d'un groupe fini ou d'un groupe de Lie, confère [Kuh07] et [Kuh13]. Dans [Hea20], Drew Heard utilise également le centre d'une algèbre instable K pour donner des bornes à sa profondeur.

Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. On définit, à partir de l'adjonction entre T_V et le produit tensoriel par $H^*(V)$ un morphisme naturel en K et V, $\rho_{K,V} : K \to T_V(K)$, qui passe au quotient pour donner un morphisme $\rho_{K,(V,\phi)} : K \to T_{(V,\phi)}(K)$. Alors, on dit que (V, ϕ) est central si $\rho_{K,(V,\phi)}$ est un isomorphisme. Dans [DW92], William G. Dwyer et Clarence W. Wilkerson ont montré que sous certaines hypothèses de finitude, l'existence d'éléments centraux pour K est liée à l'existence de structure de $H^*(V)$-comodules sur K de la façon suivante.

Corollaire 4.1.20. *Soit K une algèbre instable connexe dont le module des indécomposables $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini. Alors, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est tel que (V, f) est central si et seulement si K est munie d'une structure κ de $H^*(V)$-comodule tel que le diagramme suivant com-*

mute :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & K \otimes H^*(V) \arrow[d, "\epsilon_K \otimes id"] \\ & H^*(V), \end{tikzcd}$$

où ϵ_K est la counité de K.

Pour K une algèbre instable connexe, on définira son centre comme un élément central (C, f), avec $f : K \to H^*(C)$, maximal au sens suivant : pour tout élément central (V, ϕ) il existe $\alpha : V \to C$ tel que ϕ est la composée suivante

$$K \xrightarrow{f} H^*(C) \xrightarrow{\alpha^*} H^*(V).$$

On définira $G(K)$ l'ensemble des éléments centraux (V, ϕ) avec $\dim(V) = 1$. Alors, $G(K)$ est muni d'une structure de 2-groupe abélien élémentaire et on a le résultat suivant.

Proposition 4.1.36. *Soit K une algèbre instable noethérienne connexe. Soit (C, ϕ) le centre de K, alors C est isomorphe à $G(K)$.*

L'objectif du chapitre 4 est d'étudier le centre d'une algèbre instable noethériennes connexes, plus précisément, nous en donnerons un raffinement en utilisant la filtration nilpotente.

Notons que pour $F \in \mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on peut définir une transformation naturelle $\rho_{F,(V,\phi)}$ entre $\Sigma_{(V,\phi)}F$ et F, de telle sorte que, lorsqu'on passe aux foncteurs, $\rho_{K,(V,\phi)}$ devienne $\rho_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(\_)),(V,\phi)}$. Alors, pour K nil_1-fermée, (V, ϕ) est central si et seulement si $\rho_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(\_)),(V,\phi)}$ est un isomorphisme.

Cela nous amène à définir une notion de centralité pour les foncteurs. On dira que (V, ϕ) est central, avec $\phi \in F(V)$, et on notera $(V, \phi) \in \mathbf{C}(F)$, si $\rho_{F,(V,\phi)}$ est un isomorphisme. On dira qu'un foncteur F est connexe, si il existe une unique transformation naturelle ϵ_F de $\star$, l'objet final de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, vers F. On démontrera alors un analogue du résultat de Dwyer et Wilkerson pour les foncteurs, où π_0^V dénote la projection de V sur 0.

Théorème 4.2.5. *Soient $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ connexe et tel que pour tout espace vectoriel V $(V, \epsilon_{F,V})$ soit central, et $\phi \in F(W)$. Alors, (W, ϕ) est central si et seulement si le groupe $Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ agit naturellement (en V) sur $F(V)$, de telle sorte que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F \times Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \arrow[r, "\mu"] & F \\ Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

dans lequel, l'application verticale est celle qui à $\alpha \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V,W)$ associe $(\epsilon_{F,V},\alpha)$, et dont le morphisme de $Hom_{\mathbb{F}_2}(V,W)$ dans $F(V)$ est le morphisme associé à ϕ par l'isomorphisme de Yoneda.

Dans ce théorème, la condition de connexité pour les foncteurs est vérifiée pour les foncteurs provenant d'algèbres connexes, par ailleurs la condition que pour tout espace vectoriel V $(V,\epsilon_{F,V})$ soit central est un analogue pour les foncteurs de la condition $\mathcal{Q}(K)$ localement fini et sera vérifiée par tous les foncteurs noethériens.

Par la suite, on définira une notion de centralité pour les objets de $\mathcal{KF}^{<n}$ et on définira $\mathbf{C}_n(K)$ comme l'ensemble des éléments centraux pour $f^{<n}(K)$. On montrera que l'ensemble des éléments centraux pour K est précisément $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{C}_n(K)$. Nous définirons également une notion de centralité pour les $f^{<n}(K)$-modules dans la catégorie $\mathcal{F}^{<n}$ et on montrera le résultat suivant, où $\lambda_n : l_{n+1}(M) \to l_n(l_{n+1}(M)) \cong l_n(M)$ est la nil_n-localisation.

Théorème 4.2.23. *Soient K une algèbre instable et $(V,\phi)\in\mathcal{S}(K)$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le couple (V,ϕ) appartient à $\boldsymbol{C}_{n+1}(K)$.*
2. *Le couple (V,ϕ) appartient à $\boldsymbol{C}_n(K)$ et il est $f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$-central et $f^{<n+1}(coker(\lambda_n))$-central.*

Soit M un $H^*(V)$-comodule, on dira que $x\in M$ est un élément primitif si x s'envoie sur $x\otimes 1$, par le morphisme de structure de M dans $M\otimes H^*(V)$. La dernière partie du chapitre 4 sera consacrée à la question suivante. Étant donnée une algèbre instable P nil_1-fermée connexe, comment classifier les algèbres instables K nil_1-fermées, connexes, noethérienne et munies d'une structure de $H^*(V)$-comodule dans $\mathcal{K}$ dont l'algèbre des éléments primitifs pour cette structure de comodule est précisément P. Par ce qu'on a dit plus haut et en utilisant le théorème 4.2.5, on se ramènera à la question suivante, étant donnée $Q\in\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ comment classifier les foncteurs F noethériens connexes dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, munis d'une action naturelle en W de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W,V)$ sur $F(W)$, dont le quotient soit naturellement isomorphe à Q.

On commencera par justifier le résultat technique suivant.

Proposition 5.1.7. *Soit $F\in\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethérien, soit $H\in\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et soit $q : F\twoheadrightarrow H$ une surjection naturelle. Alors, si pour tout $\alpha : W\to S$ et pour tout $s\in H(S)$, $\alpha^*q^{-1}(\{s\}) = q^{-1}(\{\alpha^*s\})\cap\alpha^*(F(S))$, le foncteur H est également noethérien.*

En particulier, dans notre contexte on aura que F noethérien implique Q noethérien, en vertu du corollaire suivant, où $\mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ désigne la sous-catégorie des objets en groupe dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $F\in G-\mathcal{S}\mathrm{et}$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dont les objets sont munis d'une action naturelle de $G\in\mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Corollaire 5.1.8. *Soit $G \in \mathcal{G}rp^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et $F \in G - \mathcal{S}et$ noethériens. Alors, le foncteur F/G est noethérien.*

On supposera que K est une algèbre intègre. Dans ce cas, comme établi dans [HLS93], un théorème d'Adam-Wilkerson nous permettra d'affirmer qu'il existe une surjection du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ vers le foncteur F, pour V un espace vectoriel de dimension assez grande. On démontrera alors le théorème suivant, où par définition le degré de transcendance d'une algèbre K est $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si d est la borne supérieur des cardinaux d'ensembles finis d'éléments homogènes de K algébriquement indépendants et où V_d est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension d.

Théorème 5.3.8. *Soit K une algèbre instable noethérienne, connexe, intègre, de degré de transcendance d, nil-fermée et munie d'une structure de comodule $K \to K \otimes H^*(V)$ pour V un sous-espace vectoriel de V_d. Soit $\phi : K \to H^*(V_d)$ un plongement. Alors, la sous-algèbre P des primitifs de K pour cette structure de comodule, est l'intersection de K avec $H^*(V_d/V)$ où on a identifié $H^*(V_d/V)$ à son image dans $H^*(V_d)$ par le morphisme induit par la projection de V_d sur V_d/V.*

On pourra préciser ce résultat dans la situation où $\dim(V_d/V) = 1$. Pour $\phi : K \to H^*(V)$ un morphisme d'algèbre instable, on rappelle la définition de $\mathrm{Gal}(\phi)$ de [HLS93], qui est défini comme le sous-groupe de $GL(V)$ dont les éléments sont les isomorphismes α de V tels que $\alpha^*\phi = \phi$. $H^*(V)^{\mathrm{Gal}(\phi)}$ est alors l'algèbre des éléments de $H^*(V)$ stables sous l'action de $\mathrm{Gal}(\phi)$. On montrera le théorème suivant.

Théorème 5.3.17. *Soit K une algèbre instable, nil-fermée, connexe et intègre de degré de transcendance d. Soit $\phi : K \hookrightarrow H^*(V_d)$ le plongement garanti par le théorème d'Adam-Wilkerson. Et soit V un sous-espace vectoriel de V_d de codimension 1. Alors, le morphisme de $H^*(V_d) \to H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ induit par l'addition de $V_d \oplus V$ dans V_d induit une structure de $H^*(V)$-comodule sur K dont l'ensemble des éléments primitifs est précisément $H^*(V_d/V)$ si et seulement si, pour tout $g \in Gal(\phi)$ et pour tout $v \in V$ $gv = v$ et $\pi \circ g = \pi$ où π dénote la projection de V_d sur V_d/V, et si $\phi(K) = H^*(V_d)^{Gal(\phi)}$.*

Notons, que les hypothèses du théorème 5.3.17 ne sont pas restrictives, on saura ramener n'importe quelle algèbre instable, noethérienne, connexe, intègre munie d'une structure de $H^*(V)$-comodule dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à $H^*(\mathbb{F}_2)$ à cette situation.

Ce théorème n'est par contre pas vrai pour V_d/V de dimension plus grande que 1 et on montrera (exemple 5.3.19) que l'algèbre instable

$$\mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)(x+z)(x+y+z)\right] + \mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)\right] y$$

en est un contre-exemple.

On s'intéressera ensuite à généraliser le théorème 5.3.17 au cas où V est de codimension quelconque. Pour ce faire, on introduira un invariant plus fin que $\mathrm{Gal}(\phi)$. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, V un sous-espace vectoriel de V_d et supposant fixée un isomorphisme $V \oplus V_d/V \cong V_d$ dont la restriction à V est l'identité et dont la restriction à V_d/V est une section de la projection $V_d \twoheadrightarrow V_d/V$, on considérera $\mathrm{Gr}(V_d/V)$ la catégorie dont les objets sont les sous-espaces vectoriels de V_d/V et dont les morphismes sont les inclusions de sous-espaces vectoriels. Alors, pour I un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $\mathrm{Gr}(V_d/V)$ dans la catégorie des groupes abéliens, on introduira l'algèbre $H^*(V_d)^I$. On aura alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.3. *Soit K une algèbre instable, intègre, nil-fermée, noethérienne, connexe, de degré de transcendance d. Soient $\phi : K \hookrightarrow H^*(V_d)$ un plongement d'Adam-Wilkerson et V un sous-espace vectoriel de V_d tel que le morphisme $H^*(V_d) \to H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ induit par l'addition de $V \oplus V_d$ dans V_d induise une structure de $H^*(V)$-comodule sur K. Alors il existe un sous-foncteur I de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $Gr(V_d/V)$ dans la catégorie des groupes abéliens tel que $K \cong H^*(V_d)^I$.*

Chapitre 1

Modules et Algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod

L'algèbre de Steenrod a été introduite à la suite de la définition des carrés de Steenrod, comme l'algèbre des opérations cohomologiques stables sur la cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{F}_2$. Elle agit ainsi naturellement sur $H^*(X)$, la cohomologie à coefficient dans $\mathbb{F}_2$ de tout espace topologique X, donnant à $H^*(X)$ une structure dite d'algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par rappeler une présentation de l'algèbre de Steenrod ainsi que les définitions et les constructions classiques relatives aux catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$, respectivement des modules et algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod, qui sont étudiées en détails dans [Sch94].

Ensuite, nous introduirons le foncteur T de Lannes, qui sera un outil majeur pour mettre en relation les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$ avec certaines catégories de foncteurs que nous étudierons par la suite.

1.1 Les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$

1.1.1 L'algèbre de Steenrod

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Steenrod modulo 2, définie comme le quotient de la $\mathbb{F}_2$-algèbre unitaire graduée libre engendrée par les générateurs Sq^i de degré i pour tout entier $i > 0$ et dont l'unité est notée Sq^0, par l'idéal engendré par les $\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-j+1}{a-2j}\mathrm{Sq}^{a+b-j}\mathrm{Sq}^j$ pour tout entiers positifs a et b tels que $a < 2b$. La relation $\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-j+1}{a-2j}\mathrm{Sq}^{a+b-j}\mathrm{Sq}^j = 0$ dans $\mathcal{A}$ est appelée relation d'Adem.

On rappelle le théorème suivant démontré dans [SE62].

Théorème 1.1.2. *Pour tout espace topologique X, $H^*(X)$ est muni naturellement d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche gradué.*

Remarque 1.1.3. L'homologie de X à coefficient dans $\mathbb{F}_2$ $H_*(X)$ est muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module à droite telle qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{A}$-module à gauche $H^*(X) \cong (H_*(X))^\sharp$, où $(H_*(X))^\sharp$ désigne le dual vectoriel de $H_*(X)$ et où, pour ϕ une forme linéaire sur $H_*(X)$, l'action à gauche de $\mathcal{A}$ sur ϕ est induite par $\mathrm{Sq}^i\phi(x) = \phi(x\mathrm{Sq}^i)$ pour x un élément de $H_*(X)$.

Les propositions suivantes, qui décrivent des familles de générateurs de $\mathcal{A}$, sont également démontrées dans [SE62].

Proposition 1.1.4 (Théorème I.4.3. dans [SE62])**.** *L'algèbre de Steenrod est engendrée en tant qu'algèbre par les Sq^{2^h} avec $h \geq 0$.*

Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.5. *Le carré de Steenrod Sq^i est indécomposable dans $\mathcal{A}$ si et seulement si i est une puissance de 2.*

Définition 1.1.6. Soit $I = (i_1, ..., i_n)$ une famille d'entiers naturels. I est dite admissible si pour tout h tel que $1 \leq h \leq n-1$, $i_h \geq 2i_{h+1}$.
On définit $\mathrm{Sq}^I = \mathrm{Sq}^{i_1}...\mathrm{Sq}^{i_n}$ et on dit que le monôme Sq^I est admissible si I est admissible.

Proposition 1.1.7. *[SE62, Théorème I.3.1] Les monômes admissibles forment une base de $\mathcal{A}$.*

Définition 1.1.8. Soit $\mathcal{A}$-mod, la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules à gauche gradués et les morphismes, les morphismes de $\mathcal{A}$-modules gradués de degré 0.

Proposition 1.1.9. *[SE62, II.1] L'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}$, est munie d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative dont l'application diagonale Δ est donnée par $\Delta(Sq^i) = \sum_{k=0}^{i} Sq^k \otimes Sq^{i-k}$.*

Remarque 1.1.10. Cette structure d'algèbre de Hopf induit, pour M et N des $\mathcal{A}$-modules, une structure de $\mathcal{A}$-module sur $M \otimes N$, donnée par $\mathrm{Sq}^i(m \otimes n) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^k m \otimes \mathrm{Sq}^{i-k} n$.

Remarque 1.1.11. $\mathcal{A}$ est une algèbre graduée connexe et l'unique augmentation de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathbb{F}_2$, muni le corps $\mathbb{F}_2$ d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche.

Corollaire 1.1.12. *Le triplet $(\mathcal{A}\text{-mod}, \otimes, \mathbb{F}_2)$ est une catégorie monoïdale symétrique.*

Nous allons maintenant définir le foncteur de suspension.

Définition 1.1.13. Soit $\Sigma : \mathcal{A}\text{-mod} \to \mathcal{A}\text{-mod}$, le foncteur de suspension, défini de la manière suivante, pour M un module sur $\mathcal{A}$, $(\Sigma M)^n = M^{n-1}$ et l'action de Sq^i entre $(\Sigma M)^n$ et $(\Sigma M)^{n+i}$ est la même qu'entre M^{n-1} et M^{n+i-1}.

Proposition 1.1.14. *Σ est une équivalence de catégories.*

Remarque 1.1.15. Pour M un $\mathcal{A}$-module, on a un isomorphisme $\Sigma M \cong \Sigma\mathbb{F}_2 \otimes M$ naturel en M.

Définition 1.1.16. Soit M un module sur l'algèbre de Steenrod, on définit $\Sigma^{-1}M$ comme l'unique module sur $\mathcal{A}$ tel que $\Sigma\Sigma^{-1}M \cong M$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\Sigma^n M$ le $\mathcal{A}$-module obtenu en appliquant n fois le foncteur Σ à M. Soit également $\Sigma^{-n}M$ le $\mathcal{A}$-module obtenu en appliquant n fois le foncteur Σ^{-1} à M.

Remarque 1.1.17. Pour M un $\mathcal{A}$-module, on a un isomorphisme naturel en M, $\Sigma^{-1}M \cong \Sigma^{-1}\mathbb{F}_2 \otimes M$.

Remarque 1.1.18. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Sigma^n\mathcal{A}$ est le $\mathcal{A}$-module libre engendré par un unique élément en degré n.

Proposition 1.1.19. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et pour tout module M, $Hom_{\mathcal{A}\text{-}mod}(\Sigma^n\mathcal{A}, M)$ est naturellement isomorphe à M^n.*

Démonstration. Cet isomorphisme envoie $x \in M^n$, sur l'unique morphisme de $\Sigma^n\mathcal{A}$ dans M qui envoie $\Sigma^n\mathrm{Sq}^0$ sur x. $\square$

Corollaire 1.1.20. *Les $\Sigma^n\mathcal{A}$ forment une famille de générateurs projectifs de $\mathcal{A}$-mod.*

Dans ce document, nous n'étudierons en détail que le cas $p = 2$. Il existe cependant, pour p un nombre premier impair, une notion d'algèbre de Steenrod sur $\mathbb{F}_p$, $\mathcal{A}_p$ pour laquelle la majorité des outils que nous exposons devraient pouvoir se généraliser.

Définition 1.1.21. Soit $\mathcal{A}_p$ l'algèbre de Steenrod modulo p, définie comme le quotient de la $\mathbb{F}_p$-algèbre unitaire graduée libre engendrée par les générateurs P^i de degré $2i(p-1)$ pour tout entier $i > 0$ et β de degré 1 et dont l'unité est notée P^0, par l'idéal engendré par les

$$P^aP^b - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor}(-1)^{a+j}\binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj}P^{a+b-j}P^j$$

pour tous les entiers strictement positifs a et b tels que $a < pb$ et les

$$P^a\beta P^b - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor}(-1)^{a+j}\binom{(p-1)(b-j)}{a-pj}\beta P^{a+b-j}P^j - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a-1}{p} \rfloor}(-1)^{a+j-1}\binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1}P^{a+b-j}\beta P^j$$

pour tous les entiers strictement positifs a et b tels que $a \leq pb$.

1.1.2 La catégorie $\mathcal{U}$

Pour X un espace topologique, $H^*(X)$ a plus de structure que juste une structure de module sur $\mathcal{A}$, en premier lieu, elle est munie d'une structure d'algèbre par le cup-produit, et en second lieu sa structure de module sur l'algèbre de Steenrod vérifie une condition dite d'instabilité. C'est cette raison qui nous pousse à introduire ici la catégorie $\mathcal{U}$.

Définition 1.1.22. 1. Soit M un $\mathcal{A}$-module gradué, alors M est instable si, pour tout élément homogène x et pour tout $i > |x|$, $\mathrm{Sq}^i x = 0$, où $|x|$ désigne le degré de x.

2. Soit $\mathcal{U}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$-mod dont les objets sont les modules instables.

Proposition 1.1.23. *La catégorie $\mathcal{U}$ est abélienne.*

Lemme 1.1.24. *Si M et N sont des modules instables, $M \otimes N$ est également instable.*

Démonstration. En effet, pour $i > |m| + |n|$ et pour tout $k \leq i$, $k > |m|$ ou $i - k > |n|$ et donc $\mathrm{Sq}^i(m \otimes n) = \sum\limits_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^k m \otimes \mathrm{Sq}^{i-k} n = 0$. □

Corollaire 1.1.25. *Le triplet $(\mathcal{U}, \otimes, \mathbb{F}_2)$ est une catégorie monoïdale symétrique.*

Définition 1.1.26. Soit $I = (i_1, ..., i_n)$ admissible. On définit l'excès de I par $e(I) := (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + ... + (i_{n-1} - 2i_n) + i_n$.

Remarque 1.1.27. Soit M un module instable, $x \in M^n$ et Sq^I un monôme admissible tel que $e(I) > n$. Alors $\mathrm{Sq}^I x = 0$.

Proposition 1.1.28. *Le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{A}$-mod possède un adjoint à gauche, que l'on notera $\mathcal{D}$, le foncteur déstabilisation.*

Pour tout module instable M, on a un isomorphisme naturel en M, $\mathcal{D}(M) \cong M/(Sq^I x;\ e(I) > |x|)$.

Remarque 1.1.29. Dans le cas p impair, on peut définir la catégorie $\mathcal{U}_p$ dont les objets sont les $\mathcal{A}_p$-modules M qui vérifient la condition d'instabilité suivante : pour tout $x \in M^i$, pour tout $e \in \{0, 1\}$ et pour tout j tels que $i < e + 2j$, $\beta^e P^j x = 0$. $\mathcal{A}_p$ est aussi muni d'une structure d'algèbre de Hopf, donnée par $\delta(P^i) = \sum\limits_{k=0}^{i} P^k \otimes P^{i-k}$ et $\delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$, structure d'algèbre de Hopf qui fait de $(\mathcal{U}_p, \otimes, \mathbb{F}_p)$ une catégorie symétrique monoïdale.

1.1.3 La catégorie $\mathcal{K}$

Remarque 1.1.30. Une algèbre commutative K dans $(\mathcal{A}\text{-mod}, \otimes, \mathbb{F}_2)$ est une algèbre commutative sur $\mathbb{F}_2$ munie d'une structure de $\mathcal{A}$-module telle que, pour tout x et y dans K, $\mathrm{Sq}^i(xy) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^k x \mathrm{Sq}^{i-k} y$. On appelle cette égalité la formule de Cartan.

Définition 1.1.31.
1. Soit K une algèbre commutative unitaire dans $(\mathcal{U}, \otimes, \mathbb{F}_2)$, on dit que K est une algèbre instable, si K est dans $\mathcal{U}$ et que pour tout x élément homogène de K, $\mathrm{Sq}^{|x|}x = x^2$.
2. Soit $\mathcal{K}$, la catégorie dont les objets sont les algèbres instables et dont les morphismes sont les morphismes d'algèbre compatibles avec les structures de $\mathcal{A}$-module.

Remarque 1.1.32. La catégorie $\mathcal{K}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des algèbres commutatives dans $(\mathcal{A}\text{-mod}, \otimes, \mathbb{F}_2)$.

Proposition 1.1.33. *Le produit tensoriel de deux algèbres instables K et R et naturellement une algèbre instable, dont le produit est donné par le produit tensoriel des produits de K et R.*

Démonstration. Le fait que $K \otimes R$ reste une algèbre commutative sur $\mathcal{A}$ est une propriété générale des produits tensoriels d'algèbres commutatives sur une algèbre de Hopf. Il faut vérifier que ce produit tensoriel vérifie la condition d'instabilité. Soit $k \otimes r \in K \otimes R$, alors

$$\mathrm{Sq}^{|k|+|r|} k \otimes r = \sum_{j=0}^{|k|+|r|} \mathrm{Sq}^{|k|+|r|-j} k \otimes \mathrm{Sq}^j r,$$

si $j \neq |r|$, soit $j < |r|$ et $\mathrm{Sq}^{|k|+|r|-j} k = 0$, soit $j > |r|$ et $\mathrm{Sq}^j r = 0$. Donc par hypothèse

$$\mathrm{Sq}^{|k|+|r|} k \otimes r = \mathrm{Sq}^{|k|} k \otimes \mathrm{Sq}^{|r|} r = k^2 \otimes r^2 = (k \otimes r)^2.$$

□

Théorème 1.1.34. *[SE62] Pour X un espace topologique, $H^*(X)$ muni du cup-produit est une algèbre instable.*

Soit V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie, on notera $H^*(V)$ l'anneau de cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ de BV, l'espace classifiant de V. On notera également $H_*(V)$ l'homologie singulière de BV.

Remarque 1.1.35. Pour $\mathbb{F}_2[x_1, ..., x_n]$ une algèbre de polynômes graduée dans laquelle les x_i sont tous en degré 1, la condition d'instabilité et la formule de Cartan garantissent l'existence d'une unique structure d'algèbre instable sur $\mathbb{F}_2[x_1, ..., x_n]$.

Proposition 1.1.36. *[SE62] En tant qu'algèbre instable, $H^*(V)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_2[x_1, ...x_n]$ pour $(x_1, ..., x_n)$ une base de $V^\sharp$, et où les x_i sont tous en degré* 1.

Introduisons ici les foncteurs algèbre tensorielle, algèbre symétrique et puissance divisée.

Définition 1.1.37. Soit Θ^*, le foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{V}^f$, où $\mathcal{V}^f$ désigne la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimensions finies, qui a un espace vectoriel V associe son algèbre tensorielle $\Theta^*(V)$. Soit $\Theta^k(V) := V^{\otimes k}$, la composante homogène de degré k de $\Theta^*(V)$.

On note le foncteur algèbre tensorielle Θ^* pour éviter des confusions futures avec le foncteur T de Lannes.

Définition 1.1.38. Soit S^*, le foncteur puissance symétrique, qui à un espace vectoriel V associe l'algèbre commutative unitaire libre engendrée par V. Pour tout espace vectoriel de dimension finie V, $S^*(V) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} S^k(V)$, où S^k est la composante homogène de degré k de S^* défini par $S^k(V) := \Theta^k(V)/\mathfrak{S}_k$, où le groupe de permutation à k éléments $\mathfrak{S}_k$ agit sur $\Theta^k(V) = V^{\otimes k}$ par permutation des facteurs.

Si, pour $(v_1, ..., v_k) \in V^k$, on note $v_1...v_k$ la classe de $v_1 \otimes ... \otimes v_k$ dans $S^k(V)$, le produit de $S^*(V)$ est donné par $v_1...v_k \cdot u_1...u_l = v_1...v_k u_1...u_l$.

D'après la proposition 1.1.36, $H^*(V)$ est naturellement isomorphe en tant qu'algèbre à $S^*(V^\sharp)$. Le foncteur $S^*(V^\sharp)$ hérite ainsi d'une structure naturelle en V de module instable sur l'algèbre de Steenrod.

Définition 1.1.39. Soit $\Gamma^*(V)$ le sous-espace vectoriel de l'algèbre tensorielle de V, engendrée par les éléments homogènes de degré n, pour n parcourant $\mathbb{N}$, stables par permutation des facteurs. Soit $\Gamma^n(V)$ son sous module constitué des éléments homogènes de degré n, $\Gamma^n(V) = \Theta^n(V)^{\mathfrak{S}_k}$.

$\Gamma^*(V)$ est naturellement isomorphe à $S^*(V^\sharp)^\sharp$ et puisque $H_*(V) \cong H^*(V)^\sharp$, $\Gamma^*(V) \cong H_*(V)$, ce qui en fait un module à droite sur $\mathcal{A}$.
Notons qu'un morphisme d'algèbre instable entre $H^*(V)$ et $H^*(W)$ est un morphisme d'algèbre entre $\mathbb{F}_2[x_1, ..., x_n]$ et $\mathbb{F}_2[y_1, ..., y_k]$ pour $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_k)$ des bases de $V^\sharp$ et $W^\sharp$, il est donc déterminé par le morphisme induit entre les éléments homogènes de degré 1, qui est le dual d'une application linéaire entre W et V, on a donc un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V), H^*(W)) \cong \mathrm{Hom}(W, V)$.
Citons ici le théorème d'Adams-Gunawardena-Miller :

Théorème 1.1.40. *Pour V et W deux espaces vectoriels de dimensions finies,*

$$Hom_{\mathcal{U}}(H^*(W), H^*(V)) \cong \mathbb{F}_2[Hom(V, W)].$$

Dans le cas p impair, on définit $\mathcal{K}_p$ comme la catégorie des algèbres commutatives graduées K dans $(\mathcal{U}_p, \otimes, \mathbb{F}_p)$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tout $(x,y) \in K^2$, $\begin{cases} P^i(xy) &= \sum_{j=0}^{i} P^j(x)P^{i-j}(y) \\ \beta(xy) &= \beta(x)y + (-1)^{|x|}x\beta(y). \end{cases}$
2. Pour tout x de degré pair, $P^{\frac{|x|}{2}}x = x^p$.

Alors, pour tout espace topologique X, sa cohomologie singulière à coefficient dans $\mathbb{F}_p$ $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est un objet de $\mathcal{K}_p$. En particulier, pour V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et $H^*(V)$ la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ de BV, $H^*(V)$ est un objet de K.

Définition 1.1.41. Pour V un $\mathbb{F}_p$ espace vectoriel, soit $E(V)$ l'algèbre extérieure engendrée par V.

Alors, en tant qu'algèbre, pour V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, $H^*(V) \cong E(V_1^\sharp) \otimes S^*(V_2^\sharp)$ où V_1 est une copie de V concentrée en degré 1 et V_2 une copie de V concentrée en degré 2.
On a alors un théorème d'Adams-Gunawardena-Miller sur $\mathbb{F}_p$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(H^*(V), H^*(W)) \cong \mathbb{F}_p\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(W,V)\right].$$

1.1.4 Les projectifs et injectifs standards dans $\mathcal{U}$

Remarque 1.1.42. Si $M \in \mathcal{U}$, alors ΣM est également instable.

Définition 1.1.43. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F(n)$ le module instable défini par

$$F(n) := \mathcal{D}(\Sigma^n \mathcal{A}),$$

on notera $x(n)$ son générateur de degré n.

Remarque 1.1.44. Pour $n < 0$, $F(n)$ est trivial.

Proposition 1.1.45. *Les $F(n)$ sont projectifs et il existe un isomorphisme naturel en M entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$ et M^n.*

De plus, si on note $Sq(i) : F(n+i) \to F(n)$ le morphisme de module instable qui envoie $x(n+i)$ sur $Sq^i x(n)$, l'action de Sq^i de $M^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$ dans $M^{n+i} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n+i), M)$ coïncide avec la précomposition par $Sq(i)$.

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence directe de la proposition 1.1.19, de la proposition 1.1.28 et de l'exactitude du foncteur qui à M associe M^n. La deuxième partie est la conséqence du calcul suivant, $x \in M^n$ s'envoie, par l'isomorphisme naturel entre M^n et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$, sur l'unique morphisme de $F(n)$ dans M qui envoie $x(n)$ sur x. Ce morphisme précomposé avec $\mathrm{Sq}(i)$, envoie $x(n+i)$ sur $\mathrm{Sq}^i x$, ce qui conclût la preuve. □

Remarque 1.1.46. Plus précisément, $F(n)$ est un recouvrement projectif de $\Sigma^n\mathbb{F}_2$ dans la catégorie $\mathcal{U}$.
Pour $y \in M^n$, on notera $\tilde{y}$ le morphisme de $F(n)$ dans M associé à y par l'isomorphisme $M^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$. De sorte que le morphisme $\mathrm{Sq}(i)\ :\ F(n+i) \to F(n)$ est $\widetilde{\mathrm{Sq}^i x(n)}$.

Corollaire 1.1.47. *La catégorie $\mathcal{U}$ a assez de projectifs.*

Remarque 1.1.48. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Hopf cocommutative, le foncteur $\Gamma^n(M) := (M^{\otimes n})^{\mathcal{S}_n}$ est à valeur dans $\mathcal{U}$, pour $M \in \mathcal{U}$.

Proposition 1.1.49. *[Sch94, Proposition 1.6.3] Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $F(n)$ est isomorphe à $\Gamma^n(F(1))$ dans $\mathcal{U}$.*

De même que nous avons défini une famille de générateurs projectifs de $\mathcal{U}$ en trouvant des représentants aux foncteurs qui à M associent M^n, pour n parcourant $\mathbb{N}$, nous allons définir les modules de Brown-Gitler comme les représentants des foncteurs qui à un module instable M associe le dual de M^n.

Nous allons démontrer le lemme suivant qui nous permettra non seulement de justifier l'existence des modules de Brown-Gitler mais qui nous permettra également de justifier l'existence d'adjoints à de nombreux foncteurs sur la catégorie $\mathcal{U}$.

Lemme 1.1.50. *[LZ86, Proposition 2.1] Soit R un foncteur contravariant de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}^f$, la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$ et des applications linéaires, alors R est représentable si et seulement si il est exact à droite et transforme les sommes directes en produits.*

Démonstration. Le fait que R soit représentable implique que R est exact à droite et transforme les sommes directes en produits. Nous allons justifier que si il vérifie ces deux hypothèses alors il est représentable. Pour ce faire, on va construire un module instable candidat à représenter le foncteur R. On considère $B(R)$ le module instable sur l'algèbre de Steenrod défini par $B(R)^n := R(F(n))$ et $\mathrm{Sq}^i(x) = R(\mathrm{Sq}(i))x$ pour $x \in B(R)^n$.
Démontrons que R est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\_, B(R))$. Soit M un module instable. On considère $\gamma_M\ :\ R(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, B(R))$ défini de la manière suivante. Pour $x \in R(M)$ et $y \in M^n$, on définit $\gamma_M(x)(y) = R(\tilde{y})(x) \in R(F(n)) = B(R)^n$. C'est une transformation naturelle, justifions que c'est un isomorphisme. Soit $P_1 \to P_0 \to M$ le début d'une résolution projective de M telle que P_0 et P_1 soient des sommes directes de modules instables dans $\{F(n)|n \in \mathbb{N}\}$ $F(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme R et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\_, B(R))$ transforment les sommes directes en produits et que $\gamma_{F(n)}$ est un isomorphisme pour tout n, par définition de $B(R)$, γ_{P_0} et γ_{P_1} sont des isomorphismes. Par ailleurs, R et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\_, B(R))$ étant tous les deux exacts à

droite, on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} R(P_1) \arrow[d, "\gamma_{P_1}"] & R(P_0) \arrow[l] \arrow[d, "\gamma_{P_0}"] & R(M) \arrow[l] \arrow[d, "\gamma_M"] & 0 \arrow[l] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(P_1, B(R)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(P_0, B(R)) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, B(R)) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Par le lemme des cinq, on conclût que γ_M est un isomorphisme. □

Corollaire 1.1.51. *Le foncteur H_i de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}^f$ qui à M un module instable associe $(M^i)^\sharp$, le dual linéaire de sa composante de degré n, est représentable.*

Définition 1.1.52. On définit $J(i)$ le i-ème module de Brown-Gitler, comme le représentant du foncteur H_i.

Puisque les foncteurs H_i sont exacts, on a la proposition suivante.

Proposition 1.1.53. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $J(i)$ est injectif.*

Corollaire 1.1.54. *Les $J(i)$ forment une famille de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{U}$.*

Remarque 1.1.55. Pour tout $(i,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), J(i)) \cong J(i)^n \cong (F(n)^i)^\sharp$. Comme $F(n)^i$ est trivial, pour $i < n$, $J(i)$ est concentré en degrés inférieurs ou égaux à i.

En particulier, $J(0) \cong \mathbb{F}_2$.

Le résultat suivant nous permettra de justifier l'exactitude du foncteur T_V, que nous définirons, pour V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$, dans la section 1.2.

Théorème 1.1.56. *[Sch94, Théorème 3.1.1]*

Pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V de dimension finie et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $H^*(V) \otimes J(i)$ est injectif dans $\mathcal{U}$.

Remarque 1.1.57. En particulier, $H^*(V) \cong H^*(V) \otimes J(0)$ est injectif dans $\mathcal{U}$.

On peut aller plus loin et donner une description explicite de tous les objets injectifs de $\mathcal{U}$. On rappelle ici un théorème démontré à l'origine dans [LS89].

Théorème 1.1.58. *[Sch94, Théorème 3.11.1] Soit $\mathcal{L}$ un ensemble contenant exactement un élément de chaque classe d'isomorphisme de facteur indécomposable en tant que module instable de $H^*(\mathbb{F}_2^n)$ avec n parcourant $\mathbb{N}$. Alors, pour tout I module instable injectif, il existe une unique famille de cardinaux $(a_{L,i})_{(L,i)\in\mathcal{L}\times\mathbb{N}}$ telle que $I \cong \bigoplus_{(L,i)} (L \otimes J(i))^{\oplus a_{L,i}}$.*

Remarque 1.1.59. Tous les résultats de cette partie, se généralisent dans le cas p impair, en définissant des modules $F(n)$ et $J(n)$ dans $\mathcal{U}_p$ comme les représentants et coreprésentants des foncteurs qui à $M \in \mathcal{U}_p$ associent M^n et $(M^n)^\sharp$.

1.1.5 Les foncteurs Φ et Ω

On rappelle ici la définition des foncteurs Φ et Ω étudiés dans la partie 1.7 de [Sch94].

Définition 1.1.60. Pour M un $\mathcal{A}$-module, soit ΦM le $\mathcal{A}$-module tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair $(\Phi M)^n \cong 0$ et si n est pair $(\Phi M)^n \cong M^{\frac{n}{2}}$ et tel que pour $x \in M^{\frac{n}{2}}$, $\mathrm{Sq}^i \Phi x = \Phi \mathrm{Sq}^{\frac{i}{2}} x$ où Φx désigne l'image de x sous cet isomorphisme et où $\mathrm{Sq}^{\frac{i}{2}} := 0$ quand i est impair.

Définition 1.1.61. Pour tout module $\mathcal{A}$-module M, soit λ_M, le morphisme d'espace vectoriel de ΦM dans M qui à Φx associe $\mathrm{Sq}_0 x$, où $\mathrm{Sq}_0 x := \mathrm{Sq}^{|x|} x$.

Proposition 1.1.62. *Soit M un module instable, alors λ_M est un morphisme de $\mathcal{A}$-module.*

Dans la section 3.1.2, il nous sera utile de pouvoir exprimer la condition d'instabilité pour les algèbres dans $\mathcal{U}$ en termes de transformations naturelles de ΦK vers K, pour K une algèbre commutative dans $(\mathcal{U}, \otimes, \mathbb{F}_2)$. La condition d'instabilité est équivalente à ce que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Phi K \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_M"'] & S^2(K) \arrow[d, "\mu"] \\ K \arrow[r, "\mathrm{id}_K"] & K, \end{tikzcd}$$

où μ, la multiplication de K, est bien un morphisme de $S^2(K)$ vers K, puisque K est une algèbre commutative, et où le morphisme horizontal $\Phi K \to S^2(K)$ est le morphisme qui à Φx associe x^2 (la classe de $x \otimes x$ modulo l'action du groupe symétrique).

Proposition 1.1.63. *[Sch94, Proposition 1.7.3] Le diagramme suivant est une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$-mod :*

$$0 \to \Phi F(n) \xrightarrow{\lambda_{F(n)}} F(n) \xrightarrow{\widetilde{\Sigma x(n-1)}} \Sigma F(n-1) \to 0,$$

où $\widetilde{\Sigma x(n-1)}$ désigne l'unique morphisme de $\mathcal{A}$-modules qui envoie $x(n)$ sur $\Sigma x(n-1)$.

Si M est un module instable, $\Sigma^{-1} M$ n'est pas nécessairement instable. C'est le cas si et seulement si $\mathrm{Sq}^{|x|} x = 0$ pour tout $x \in M$. Nous allons introduire un adjoint à gauche au foncteur Σ dans la catégorie $\mathcal{U}$.

Proposition 1.1.64. *Le foncteur Σ a un adjoint à gauche noté Ω et appelé foncteur de lacet.*

Définition 1.1.65. Pour tout module instable M, on a un isomorphisme naturel en M, $\Omega M \cong \mathcal{D}(\Sigma^{-1} M)$.

Proposition 1.1.66. *[Sch94, Proposition 1.7.5] Pour M un module instable, on a une suite exacte naturelle*

$$0 \to \Sigma\Omega_1 M \to \Phi M \xrightarrow{\lambda_M} M \xrightarrow{\xi_M} \Sigma\Omega M \to 0,$$

où Ω_i désigne le ième foncteur dérivé du foncteur Ω et ξ_M est l'unité de l'adjonction entre Σ et Ω. De plus, $\Omega_i M = 0$ pour tout $i > 1$.

Démonstration. Nous allons uniquement justifier que le noyau de λ_M est isomorphe à $\Sigma\Omega_1 M$. On se donne ... $\to P_1 \to P_0 \to M$ une résolution de M par des sommes directes de $F(n)$. D'après la proposition 1.1.63, on a une suite exacte courte de complexes de chaînes de la forme

$$0 \to \Phi P_* \to P_* \to \Sigma\Omega P_* \to 0,$$

qui donne lieu à une suite exacte longue en homologie. Cette suite exacte longue donne lieu à des suites exacte de la forme

$$0 \to \mathbb{L}_1(\Sigma\Omega)M \to \Phi M \to M \to \Sigma\Omega M \to 0$$

et pour tout $n > 1$

$$0 \to \mathbb{L}_n(\Sigma\Omega)(M) \to \mathbb{L}_{n-1}(\Phi)(M) \to 0.$$

Comme Σ est exact, $\mathbb{L}_1(\Sigma\Omega) \cong \Sigma\Omega_1$, et donc la première suite exacte est

$$0 \to \Sigma\Omega_1 M \to \Phi M \xrightarrow{\lambda_M} M \xrightarrow{\xi_M} \Sigma\Omega M \to 0,$$

et comme Φ est exact, les secondes nous donnent $\mathbb{L}_n(\Sigma\Omega) \cong 0$. $\square$

1.2 Le foncteur T de Lannes

1.2.1 Foncteurs de division dans la catégorie $\mathcal{U}$

Théorème 1.2.1. *[Lan87, Proposition 2.1] Soit $L \in \mathcal{U}$ un module instable sur l'algèbre de Steenrod, le foncteur $- \otimes L$ a un adjoint à gauche $(- : L)_{\mathcal{U}}$.*

Ce théorème est le théorème 3.2.1 de [Sch94].
On appellera le foncteur $(- : L)_{\mathcal{U}}$ foncteur de division par L.

Exemple 1.2.2. Par construction, on a un isomorphisme naturel $\Omega \cong (- : \Sigma\mathbb{F}_2)_{\mathcal{U}}$.

Le foncteur T de Lannes étudié dans [Lan87] est un autre exemple de foncteur de division.

Définition 1.2.3. Pour V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie, le foncteur

$$T_V := (- : H^*(V))_{\mathcal{U}}$$

est l'adjoint à gauche du produit tensoriel par $H^*(V)$.

Remarque 1.2.4. On notera T le foncteur $T_{\mathbb{F}_2}$. Alors, comme $H^*(V) \cong (H^*(\mathbb{F}_2))^{\otimes \dim(V)}$, $T_V \cong T^{\dim(V)}$, où T^n dénote le foncteur T itéré n fois.

Par ailleurs, si on note $\overline{H^*(V)}$ la cohomologie singulière de BV à coefficient dans $\mathbb{F}_2$ réduite, la décomposition $H^*(\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \overline{H^*(\mathbb{F}_2)}$ dans $\mathcal{U}$ induit une décomposition du foncteur T en $T(M) \cong M \oplus \bar{T}(M)$ où $\bar{T}$ est le foncteur de division $(- : \overline{H^*(\mathbb{F}_2)})_{\mathcal{U}}$.

La proposition suivante a également était montrée à l'origine dans [Lan87].

Théorème 1.2.5. *Le foncteur T_V est exact et naturel en V.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'injectivité de $H^*(V) \otimes J(i)$ pour tout entier i (confère le théorème 1.1.56). □

Proposition 1.2.6. *Pour N_1 et N_2 deux modules instables, on a un isomorphisme naturel $(- : N_1 \otimes N_2)_{\mathcal{U}} \cong (- : N_2)_{\mathcal{U}} \circ (- : N_1)_{\mathcal{U}}$.*

Donnons quelques exemples de calcul du foncteur T.

Proposition 1.2.7. *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels, naturel en V,*

$$T_V(F(n)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} F(i) \otimes \Gamma^{n-i}(V).$$

Démonstration. On utilise l'isomorphisme d'adjonction entre $(T_V(F(n))^i)^\sharp \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(F(n)), J(i))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), H^*(V) \otimes J(i)) \cong (H^*(V) \otimes J(i))^n$ et l'isomorphisme suivant :

$$J(i)^j = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(j), J(i)) \cong (F(j)^i)^\sharp.$$

□

Le carré de Steenrod Sq^k agit sur la composante $F(i) \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ de $T_V(F(n))$ comme $\mathrm{Sq}^k \otimes \mathrm{id}$.

Recensons ici les propriétés importantes du foncteur T.

Proposition 1.2.8. *On a l'isomorphisme naturel suivant $\Omega T_V \cong T_V \Omega$.*

Démonstration. En effet, par la proposition 1.2.6, le foncteur $T_V\Omega$ est adjoint au produit tensoriel par $\Sigma\mathbb{F}_2 \otimes H^*(V)$, qui est isomorphe au produit tensoriel par $H^*(V) \otimes \Sigma\mathbb{F}_2$ dont l'adjoint à gauche est ΩT_V. □

Proposition 1.2.9. *[Sch94, Proposition 3.3.4]*

Pour M un module instable, on a un isomorphisme naturel entre $\Sigma T_V(M)$ et $T_V(\Sigma M)$.

Définition 1.2.10. On dit d'un module instable M qu'il est localement fini, si pour tout $x \in M$, $\mathcal{A}x$, l'ensemble des éléments de la forme ax avec $a \in \mathcal{A}$, est fini.

Proposition 1.2.11. *[Sch94, Proposition 3.3.6]*
Si M est localement fini, alors $T_V(M) \cong M$.

Proposition 1.2.12. *[Sch94, Proposition 3.4.3]*
Pour tout module instable M, on a un isomorphisme naturel $\Phi T_V(M) \cong T_V(\Phi M)$.

Théorème 1.2.13. *[Sch94, Théorème 3.5.1]*
Pour M et N deux modules instables, il existe un isomorphisme de modules instables naturel $T_V(M \otimes N) \cong T_V(M) \otimes T_V(N)$.
De plus, l'adjoint du morphisme de $T_V(M \otimes N) \cong T_V(M) \otimes T_V(N) \stackrel{\alpha\otimes\beta}{\to} P \otimes R$ (pour P et R des modules instables et $\alpha : T_V(M) \to P$ et $\beta : T_V(N) \to R$ des morphismes de $\mathcal{U}$) est donné par la composition

$$M\otimes N \xrightarrow{\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\beta}} P\otimes H^*(V)\otimes R\otimes H^*(V) \xrightarrow{id_P\otimes T\otimes id_{H^*(V)}} P\otimes R\otimes H^*(V)\otimes H^*(V) \xrightarrow{id_{P\otimes R}\otimes\Delta_V^*} P\otimes R\otimes H^*(V),$$

où $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont les adjoints de α et β, et $T : H^*(V) \otimes R \to R \otimes H^*(V)$ est le morphisme qui envoie $h \otimes r$ sur $r \otimes h$.

1.2.2 Foncteurs de division dans la catégorie $\mathcal{K}$

Proposition 1.2.14. *[Sch94, Proposition 3.8.2] Soit $K \in \mathcal{K}$ de type fini, alors le foncteur $-\otimes K$ a un adjoint à gauche $(- : K)_{\mathcal{K}}$.*

Proposition 1.2.15. *[Sch94, Proposition 3.8.4] Soit K une algèbre instable, alors $T_V(K)$ est munie de manière naturelle d'une structure d'algèbre instable pour laquelle $T_V(K) \cong (K : H^*(V))_{\mathcal{K}}$.*

Remarque 1.2.16. La multiplication de $T_V(K)$ est donnée par le morphisme $T_V(K)\otimes T_V(K) \cong T_V(K \otimes K) \stackrel{T_V(\mu)}{\to} T_V(K)$, où μ désigne la multiplication de K et où l'isomorphisme $T_V(K) \otimes T_V(K) \to T_V(K \otimes K)$ provient du théorème 1.2.13.

Exemple 1.2.17. [Sch94, 3.9.1] Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions finies, alors on a un isomorphisme d'algèbre instable naturel en V et W, $T_V(H^*(W)) \cong H^*(W)\otimes\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}(V,W)}$. Notons que $\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}(V,W)}$ est une algèbre de Boole sur $\mathbb{F}_2$ et que toute algèbre de Boole sur $\mathbb{F}_2$ concentrée en degré 0 possède une unique structure d'algèbre instable donnée par $\mathrm{Sq}^0 x = x = x^2$ pour tout x et $\mathrm{Sq}^i x = 0$ pour $i > 0$.

En degré 0, on retrouve $(T_V^0(H^*(W))^\sharp \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*(W), H^*(V)) \cong \mathbb{F}_2\,[\mathrm{Hom}(V, W)]$.

Remarque 1.2.18. Tous les résultats précédents sur le foncteur T_V se généralisent au cas p impair, on renvoie à [Sch94] pour le détails des constructions dans ce cas. Signalons, une différence qui sera importante dans le chapitre 2. Dans la proposition 1.2.7, on a utilisé que pour V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, $H^*(V) \cong S^*(V^\sharp)$, dans le cas p impair, on a à la place $H^*(V) \cong E(V_1^\sharp) \otimes S^*(V_2^\sharp)$ pour V_1 et V_2 des copies de V concentrées en degrés 1 et 2. Dans, ce cas, on obtient $T_V(F(n)) \cong \bigoplus_{i,j,k\ ;\ i+2j+k=n} F(k) \otimes E^i(V_1) \otimes \Gamma^j(V_2)$.

1.2.3 Le foncteur T et la filtration nilpotente

Nous allons rappeler la définition de la filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$ qui nous sera importante par la suite. Elle est étudiée en détail dans le chapitre 6 de [Sch94].

Définition 1.2.19. Soit M un module instable, on dit que M est réduit si M ne contient aucune suspension non triviale.

Remarque 1.2.20. Soit M un module instable, alors M est une suspension si et seulement si $\mathrm{Sq}_0 x = 0$ pour tout $x \in M$. M est réduit si et seulement si $\mathrm{Sq}_0 x \neq 0$ pour tout $x \in M$ différent de 0. En effet, si x appartient à une suspension incluse dans M, $\mathrm{Sq}_0 x = 0$ donc si pour tout $x \in M$ différent de 0, $\mathrm{Sq}_0 x \neq 0$, M est réduit. Et réciproquement, si M est réduit, soit $x \in M$ tel que $\mathrm{Sq}_0 x = 0$, alors le sous-module engendré par x est une suspension et donc $x = 0$.

Définition 1.2.21. Soit M un module instable, M est dit nilpotent si pour tout $x \in M$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Sq}_0^t x = 0$.

Remarque 1.2.22. Puisque les élément x d'une suspension vérifient que $\mathrm{Sq}_0 x = 0$, tout objet de $\mathcal{U}$ qui est une suspension est nilpotent, par ailleurs, si M est nilpotent, et x est un élément de M, alors pour t le plus petit entier tel que $\mathrm{Sq}_0^t x = 0$, le sous-module de M engendré par $\mathrm{Sq}_0^{t-1} x$ est une suspension. Un module réduit ne contient donc pas de sous-module nilpotent.

Proposition 1.2.23. *[Sch94, Corollaire 3.14.3] Soit M un module instable, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- *M est nilpotent,*
- *pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V, $Hom_{\mathcal{U}}(M, H^*(V)) \cong 0$,*
- *pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V, $T_V^0(M) = 0$.*

Définition 1.2.24. On définit $\mathcal{N}il_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les modules nilpotents.

Définition 1.2.25. Soit A une catégorie abélienne, C une sous-catégorie pleine de A est une classe de Serre si pour toute suite exacte $0 \to B' \to B \to B" \to 0$ dans C, B est dans C si et seulement si B' et $B"$ sont dans C.

Proposition 1.2.26. *$\mathcal{N}il_1$ est une classe de Serre.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 1.2.23 et de l'exactitude du foncteur T_V^0 (confère le théorème 1.2.5). □

Il mérite d'être mentionné que $\mathcal{N}il_1$ est la plus petite classe de Serre qui contient toutes les suspensions.

On rappelle la définition de la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$. L'étude générale des catégories abéliennes localisées par une classe de Serre est faite dans [Gab62].

Définition 1.2.27. On définit $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{U}$ et où pour M et N dans U, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1}(M,N) := \varinjlim_{(M',N')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M', N/N')$ où la colimite est prise sur les couples (M',N') avec N' un sous module nilpotent de N et M' un sous module de M tel que M/M' est nilpotent.

La proposition suivante est une reformulation, dans le cas particulier de la catégorie $\mathcal{U}$ et de sa classe de Serre $\mathcal{N}il_1$, du corollaire 2 dans [Gab62] valable pour toute localisation d'une catégorie abélienne par une classe de Serre.

Proposition 1.2.28. *[Gab62, Corollaire 2] On a une adjonction de foncteurs*

$$r_1 : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{U}/\mathcal{N}il_1 : s_1,$$

avec r_1 le foncteur oubli de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$. De plus, la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ est abélienne, r_1 est exact, et la catégorie $\mathcal{U}/Nil_1$ vérifie la propriété universelle suivante, pour tout foncteur exact F de $\mathcal{U}$ dans une catégorie abélienne C tel que $F(M) = 0$ pour $M \in \mathcal{N}il_1$, il existe un unique foncteur $\tilde{F}$ tel que $\tilde{F} \circ r_1 = F$.

Corollaire 1.2.29. *Le foncteur s_1 est exact à gauche.*

Dans la suite, nous allons définir d'autres classes de Serres $\mathcal{N}il_n$ dans $\mathcal{U}$, pour $n \in \mathbb{N}$, nous aurons alors, pour tout entier n, une adjonction de foncteur similaire à celle de la proposition 1.2.28.

Proposition 1.2.30. *Soit f un morphisme dans $\mathcal{U}$, alors $r_1(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ si et seulement si le noyau et le conoyau de f sont dans $\mathcal{N}il_1$.*

Définition 1.2.31. Soit $l_1 := s_1 \circ r_1$, la localisation loin des nilpotents. On dira d'un module instable M qu'il est *nil*-fermé, si l'unité de l'adjonction $M \to l_1(M)$ est un isomorphisme.

Comme pour la proposition 1.2.28, le critère de *nil*-fermeture suivant n'est pas spécifique à la *nil*-fermeture dans la catégorie $\mathcal{U}$, mais est démontré dans [Gab62] en toute généralité pour la fermeture relative à une classe de Serre dans une catégorie abélienne.

Proposition 1.2.32. *[Gab62, Lemme 1] M est nil-fermé si et seulement si M est réduit et pour toute suite exacte $0 \to M \to P \to N \to 0$ avec $N \in \mathcal{N}il_1$ la suite exacte est scindée. Cette condition est équivalente à ce que pour tout $N \in \mathcal{N}il_1$ $Ext^0_{\mathcal{U}}(N, M) = Ext^1_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$.*

Notons que pour M' un sous-module nilpotent de M, M' est dans le noyau de l'unité de l'adjonction $M \to l_1(M)$, puisque d'après la proposition 1.2.32 la composition $M' \to M \to l_1(M)$ est égale à 0. De plus, en appliquant le foncteur r_1 à $M \to l_1(M)$, on obtient l'identité de $r_1(M)$. Par la proposition 1.2.30, le noyau de l'unité de l'adjonction est donc le plus grand sous-module nilpotent contenu dans M.

On a donc la proposition suivante.

Proposition 1.2.33. *Un module injectif réduit est nil-fermé.*

Corollaire 1.2.34. *Pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie V, $H^*(V)$ est nil-fermé.*

Proposition 1.2.35. *Le foncteur oubli de $\mathcal{N}il_1$ dans $\mathcal{U}$ a un adjoint à droite, le foncteur nil_1 : $\mathcal{U} \to \mathcal{N}il_1$ qui à M associe le noyau de l'unité de l'adjonction $M \to l_1(M)$, c'est à dire le plus grand sous-module nilpotent de M.*

Remarque 1.2.36. Le module instable M est réduit si et seulement si l'unité de l'adjonction $M \to l_1(M)$ est injective.

Proposition 1.2.37. *Le module $M/nil_1(M)$ est réduit.*

Démonstration. Puisque la suite suivante est exacte $0 \to \mathrm{nil}_1(M) \to M \to M/\mathrm{nil}_1(M) \to 0$ que $\mathrm{nil}_1(M)$ est nilpotent et que r_1 est exact, le morphisme induit entre $r_1(M)$ et $_1(M/\mathrm{nil}_1(M))$ est un isomorphisme, et donc $l_1(m) \to l_1(M/nil_1(M))$ est un isomorphisme. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & l_1(M) \arrow[d, "\cong"] \\ M/nil_1(M) \arrow[r] & l_1(M/nil_1(M)), \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont données par l'unité de l'adjonction entre r_1 et s_1. Alors, comme le noyau de la composition $M \to l_1(M) \xrightarrow{\cong} l_1(M/nil_1(M))$ est $nil_1(M)$, $M/\mathrm{nil}_1(M) \to l_1(M/nil_1(M))$ est injective et donc $M/\mathrm{nil}_1(M)$ est réduit. □

La catégorie $\mathcal{N}il_1$ est le premier rang de la filtration nilpotente, une filtration de $\mathcal{U}$ par des classes de Serre.

Proposition 1.2.38. *[Sch94, Définition 6.1.1] Soit M un module instable et $l \geq 0$ un entier. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *M est la colimite de modules instables munis d'une filtration finie et dont les quotients sont des l-suspensions,*

— *$\Omega^k M$ est nilpotent pour tout $0 \leq k \leq l-1$,*
— *$Hom_{\mathcal{U}}(M, H^*(V) \otimes J(n)) = 0$ pour $0 \leq n \leq l-1$,*
— *$T_V^n(M) = 0$ pour $0 \leq n \leq l-1$.*

Définition 1.2.39. Si M vérifie l'une des condition équivalentes de la proposition 1.2.38, on dit que M est l-nilpotent.

Définition 1.2.40. Soit $\mathcal{N}il_l$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les modules instables l-nilpotents.

Corollaire 1.2.41. *$\mathcal{N}il_l$ est une classe de Serre.*

Définition 1.2.42. On définit $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_l$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{U}$ et où pour M et N dans U, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}/\mathcal{N}il_l}(M, N) := \varinjlim_{(M',N')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M', N/N')$ où la colimite est prise sur les couples (M', N') avec N' un sous module l-nilpotent de N et M' un sous module de M tel que M/M' est l-nilpotent.

Comme précédemment, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.43. *[Gab62, Corollaire 2] On a une adjonction de foncteur*

$$r_l : \mathcal{U} \rightleftarrows \mathcal{U}/\mathcal{N}il_l : s_l,$$

avec r_l le foncteur oubli de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_l$. De plus, la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_l$ est abélienne, r_l est exact, et la catégorie $\mathcal{U}/Nil_l$ vérifie la propriété universelle suivante, pour tout foncteur exact F de $\mathcal{U}$ dans une catégorie abélienne C tel que $F(M) = 0$ pour $M \in \mathcal{N}il_l$, il existe un unique foncteur $\tilde{F}$ tel que $\tilde{F} \circ r_l = F$.

Corollaire 1.2.44. *Le foncteur s_l est exact à gauche.*

Définition 1.2.45. Soit $l_l := s_l \circ r_l$, le foncteur de localisation loin des l-nilpotents.

Proposition 1.2.46. *[Gab62, Lemme 1] M est nil_l-fermé si et seulement si tous les sous-modules nilpotents de M sont triviaux et pour toute suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$ avec $P \in \mathcal{N}il_l$ la suite exacte est scindée. Cette condition est équivalente à ce que pour tout $N \in \mathcal{N}il_l$ $Ext^0_{\mathcal{U}}(N, M) = Ext^1_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$.*

Proposition 1.2.47. *Le foncteur oubli de $\mathcal{N}il_l$ dans $\mathcal{U}$ a un adjoint à droite $nil_l : \mathcal{U} \to \mathcal{N}il_l$, qui associe à un module M son plus grand sous module l-nilpotent. Le module $nil_l(M)$ est le noyau de l'unité de l'adjonction $M \to l_l(M)$.*

Proposition 1.2.48. *On a une filtration de $\mathcal{U}$ par les catégories $\mathcal{N}il_l$, $\mathcal{U} = \mathcal{N}il_0 \supset \mathcal{N}il_1 \supset \ldots \supset \mathcal{N}il_l$.*

Pour tout module instable, les $\mathrm{nil}_l(M)$ définissent une filtration de M, telle qu'on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.49. *[Sch94, Lemme 6.1.4] Pour tout module instable M, le quotient $nil_n(M)/nil_{n+1}(M)$ est la n-suspension d'un module réduit.*

Théorème 1.2.50. *[Sch94, Théorème 6.1.2] Pour tout $l \geq 0$, les foncteurs Σ et Ω induisent une équivalence de catégorie :*

$$\Sigma : \mathcal{N}il_l/\mathcal{N}il_{l+1} \rightleftarrows \mathcal{N}il_{l+1}/\mathcal{N}il_{l+2} : \Omega.$$

En particulier, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a une équivalence de catégorie entre les catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{N}il_l/\mathcal{N}il_{l+1}$.

Remarque 1.2.51. Ces constructions ne sont pas non plus spécifiques au cas $p = 2$ et les résultats précédents sont montrés en toute généralité dans [Sch94]. Notons que dans le cas p impair, P_0 est l'opération qui à $x \in M$, où M est un objet de $\mathcal{U}_p$, associe $P^{\frac{|x|}{2}}x$. Alors, un module dans $\mathcal{U}_p$ est nilpotent si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe n tel que $P_0^n x = 0$.

1.2.4 La filtration de Krull

Nous rappelons ici la définition de la filtration de Krull de $\mathcal{U}$, la filtration de Krull d'une catégorie abélienne étant introduite dans [Gab62], ainsi que des résultats de [Sch94] faisant le lien entre la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ et le foncteur T. L'étude de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ a été étudiée plus en détail par Kuhn dans [Kuh]. Par ailleurs, dans [Kuh95b], Kuhn fait le lien entre la filtration nilpotente d'un module instable M, la filtration de Krull de $\mathcal{U}$ et la question de savoir si M peut être réalisé comme la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ d'un espace topologique.

Définition 1.2.52. Soit $\mathcal{U}_{-1} \subset \mathcal{U}_0 \subset ... \subset \mathcal{U}_n \subset ...$, la suite de sous-catégories de $\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}_{-1}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ ne contenant que l'objet 0, et où $\mathcal{U}_n$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$, définie à partir de $\mathcal{U}_{n-1}$ par $M \in \mathcal{U}_n$ si l'image de M dans $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ appartient à la plus petite classe de Serre de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ stable par colimite et qui contient tous les objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$. $\mathcal{U}_0 \subset ... \subset \mathcal{U}_n \subset ...$ s'appelle la filtration de Krull de $\mathcal{U}$.

Théorème 1.2.53. *[Sch94, Théorème 6.2.4] Soit M un module instable, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$M \in \mathcal{U}_n$,*
2. *$Hom_{\mathcal{U}}(M, \overline{H}^*(\mathbb{F}_2)^{\otimes n+1} \otimes J(m)) = 0$ pour tout m,*

3. $\bar{T}^{n+1}(M) = 0$.

Exemple 1.2.54. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n) \in \mathcal{U}_n \backslash \mathcal{U}_{n-1}$. En effet, par récurrence, $\bar{T}^i(F(n)) \cong \bigoplus_{j=0}^{n-i} F(j)$, pour tout $i \in [0, n]$.

Notons que les objets simples de $\mathcal{U}$ sont les modules instables de la forme $\Sigma^k \mathbb{F}_2$. Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème 6.2.1 dans [Sch94].

Théorème 1.2.55. *Soit M un module instable, $M \in \mathcal{U}_0$ si et seulement si M est localement fini (confère la définition 1.2.10).*

Chapitre 2

Les catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$

L'objectif de ce chapitre est de présenter des catégories de foncteurs équivalentes aux catégories $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$. Le cas $n = 1$, étudié dans [HLS93], est déjà bien connu. Dans ce cas, le foncteur qui, à un module instable M, associe le foncteur qui à V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie associe $T_V(M)^0$, définit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et la catégorie $\mathcal{F}_\omega$, qui est la catégorie des foncteurs dits analytiques de la catégorie $\mathcal{V}^f$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$ de dimensions finies, vers la catégorie $\mathcal{V}$ de tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$. La première partie de ce chapitre sera consacrée à des rappels sur cette équivalence de catégorie.

Dans le cas n quelconque, étudié dans [HLS95], Henn, Lannes et Schwartz définissent une généralisation de cette équivalence de catégorie, pour n quelconque, vers des catégories $\mathcal{F}_\omega^{<n}$, dont les objets sont des foncteurs F de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}$ à valeurs dans les modules concentrés en degrés strictement plus petits que n et tels que pour tout V, $F(V)$ soit muni d'une structure de $H^*(V)$-comodule. Cette structure de $H^*(V)$-comodule n'est pas naturelle en V, aussi, après avoir rappelé dans la section 2.2.3 les construction de [HLS95], nous définirons dans la section 2.2.5 des catégories de foncteurs ${}_m\mathcal{F}_\omega^{<n}$, ne faisant intervenir que des structures naturelles en $V \in \mathcal{V}^f$, dont nous montrerons dans le théorème 2.2.53 qu'elles sont équivalentes aux catégories $\mathcal{F}^{<n}$ définies dans [HLS95].

2.1 Le cas $n = 1$

Cette section est consacrée à des rappels sur l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et la catégorie $\mathcal{F}_\omega$ établie dans [HLS93].

2.1.1 La catégorie $\mathcal{F}$

Définition 2.1.1. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{V}$.

Proposition 2.1.2. *La catégorie $\mathcal{F}$ est abélienne.*

Cette structure de catégorie abélienne est obtenue de la façon suivante, pour η et ϵ deux transformations naturelles entre les foncteurs F et G, le morphisme $\eta_V + \epsilon_V$ est naturel en V, ce qui définit une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G)$. Et pour η une transformation naturelle entre F et G, les objets $\ker(\eta_V)$, $\mathrm{Im}(\eta_V)$ et $\mathrm{coker}(\eta_V)$ sont fonctoriels en V et définissent un noyau, une image et un conoyau de η.

Définition 2.1.3. Soient F et G deux foncteurs dans $\mathcal{F}$, on définit le foncteur $F \otimes G$ par $F \otimes G(V) := F(V) \otimes G(V)$ et on note $\mathbb{F}_2$ le foncteur constant égal à $\mathbb{F}_2$.

Proposition 2.1.4. *Le triplet* $(\mathcal{F}, \otimes, \mathbb{F}_2)$ *est une catégorie symétrique monoïdale.*

Définition 2.1.5. Pour $V \in \mathcal{V}^f$, soit $P_V := \mathbb{F}_2\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, \_)\right]$ où $\mathbb{F}_2\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, \_)\right]$ est l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, \_)$.

Définition 2.1.6. Pour $V \in \mathcal{V}^f$, soit $I_V := \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)}$

Pour V, W et U des espaces vectoriels de dimensions finies, les isomorphismes de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V \oplus W, U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, U) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, U)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(U, V \oplus W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(U, V) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(U, W)$ induisent les isomorphismes naturels suivants : $P_{V \oplus W} \cong P_V \otimes P_W$ et $I_{V \oplus W} \cong I_V \otimes I_W$.

Par le lemme de Yoneda, pour $V \in \mathcal{V}^f$, le foncteur P_V est un coreprésentant du foncteur de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{V}$, qui à un foncteur F associe $F(V)$, en conséquence P_V est projectif dans $\mathcal{F}$.

De même on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.7. *Pour* $V \in \mathcal{V}^f$, *le foncteur* I_V *représente le foncteur de* $\mathcal{F}$ *dans* $\mathcal{V}$ *qui à* F *associe* $F(V^\sharp)^\sharp$, *où pour* W *un espace vectoriel,* $W^\sharp$ *désigne son dual linéaire.*

Corollaire 2.1.8. *Le foncteur* I_V *est injectif dans* $\mathcal{F}$.

Ainsi, tout foncteur F est le quotient d'une somme directe de foncteurs P_V et s'injecte dans un produit de foncteurs I_V avec V parcourant $\mathcal{V}^f$. La catégorie $\mathcal{F}$ a donc assez de projectifs et d'injectifs.

Définition 2.1.9. Soit f, le foncteur de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{F}$ qui à un module instable M associe le foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{V}$ défini par $f(M)(V) = T_V^0(M)$ pour V un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 2.1.10.

1. D'après la proposition 1.2.7, $f(F(n)) \cong \Gamma^n$.
2. D'après l'exemple 1.2.17, $f(H^*(W)) \cong \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W)}$.

Le foncteur T_V étant exact pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, et une suite de foncteurs étant exacte si et seulement si son évaluation en V est exacte pour tout V, le foncteur f est exact.

Proposition 2.1.11. 1. *Le foncteur f commute avec les colimites.*

2. *Le foncteur f est symétrique monoïdal.*

3. *Soit M un module instable, alors $f(M) = 0$ si et seulement si M est nilpotent.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence de ce que T_V est un adjoint à gauche. Le second est une conséquence de la proposition 1.2.6. Et pour le troisième, d'après la proposition 1.2.23, M est nilpotent si et seulement si $T_V^0(M) \cong 0$ pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V. □

Puisque le foncteur f est exact et qu'il envoie les modules nilpotents sur 0, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.12. *Le foncteur f se factorise de manière unique à travers r_1 en*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "r_1"'] & & \mathcal{F} \\ & \mathcal{U}/\mathcal{N}il_1 \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd},$$

avec f' un foncteur exact et pleinement fidèle.

2.1.2 La catégorie $\mathcal{F}_\omega$

Nous allons rappeler la définition de la catégorie $\mathcal{F}_\omega$ des foncteurs analytiques, cette catégorie est introduite dans [HLS93]. Dans [Kuh94a], Kuhn introduit cette catégorie différemment, à partir de la notion de foncteurs localement finis.

Définition 2.1.13. Pour V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie, soit Δ_V le foncteur de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ défini par $\Delta_V(F)(W) = F(V \oplus W)$ et $\Delta_V(F)(\alpha) = F(\mathrm{id}_V \oplus \alpha)$ pour $F \in \mathcal{F}$, $W \in \mathcal{V}^f$ et α un morphisme dans $\mathcal{V}^f$. On appellera Δ_V le foncteur décalage par V.

Un morphisme $\alpha : V \to U$ dans $\mathcal{V}^f$, donne lieu à une transformation naturelle entre Δ_V et Δ_U.

Définition 2.1.14. Soit $\bar{\Delta} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, le foncteur qui à un foncteur F associe le noyau de la transformation naturelle en V de $\Delta_{\mathbb{F}_2}F(V)$ dans $F(V)$ induite par la projection de $V \oplus \mathbb{F}_2$ sur V.

Par définition, on a une suite exacte $0 \to \bar{\Delta}F \to \Delta F \to F \to 0$. L'existence d'une section naturelle $F \to \Delta F$, induite par l'injection de V dans $V \oplus \mathbb{F}_2$, donne lieu à un isomorphisme naturel $\Delta F \cong F \oplus \bar{\Delta}(F)$.

Donnons quelques exemples d'évaluations du foncteur $\bar{\Delta}$.

Exemple 2.1.15. Pour Γ^n et S^n les foncteurs aux n-ièmes puissances divisées et aux n-ièmes puissances symétriques, on a les deux résultats suivants.

1. $\bar{\Delta}S^n \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} S^i$.
2. $\bar{\Delta}\Gamma^n \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \Gamma^i$.

Les deux exemples précédents sont des applications d'un résultat plus général.

Définition 2.1.16. Soit $F \in \mathcal{F}$, on dit que F est exponentiel si pour toute paire d'espaces vectoriels (V, W), on a un isomorphisme naturel en V et W $F(V \oplus W) \cong F(V) \otimes F(W)$.

Par exemple, les foncteurs S^* et Γ^* sont exponentiels.

Proposition 2.1.17. *Soit F un foncteur exponentiel, alors on a les isomorphismes naturels suivants $\Delta F \cong F \otimes F(\mathbb{F}_2)$ et $\bar{\Delta}F \cong F \otimes (F(\mathbb{F}_2)/F(0))$.*

Définition 2.1.18. Soit F dans $\mathcal{F}$, F est polynomial de degré au plus k, si $\bar{\Delta}^{k+1}F = 0$. On dira d'un foncteur F qu'il est polynomial, si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F est polynomial de degré au plus k.

On rappele que Θ^n désigne le foncteur n-ième puissance tensorielle.

Exemple 2.1.19. Les foncteurs Θ^n, S^n et Γ^n sont polynomiaux de degré n.

Proposition 2.1.20. *Si F et G sont polynomiaux de degrés respectifs k et l, alors $F \otimes G$ est polynomial de degré $k + l$.*

Démonstration. C'est une conséquence de l'isomorphisme naturel en F et G :

$$\bar{\Delta}(F \otimes G) \cong (\bar{\Delta}F \otimes G) \oplus (F \otimes \bar{\Delta}G) \oplus (\bar{\Delta}F \otimes \bar{\Delta}G).$$

□

Définition 2.1.21.
1. Un foncteur F est dit analytique, si il est la colimite de ses sous-foncteurs polynomiaux.
2. Soit $\mathcal{F}_\omega$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ dont les objets sont les foncteurs analytiques.

Mentionnons ici une notion alternative à celle de foncteur analytique, utilisée par Kuhn dans [Kuh94a].

Définition 2.1.22. Soit $F \in \mathcal{F}$. F est dit :

1. simple si ses seuls sous foncteurs sont 0 et F,
2. fini si il possède une série de composition finie dont les sous-quotients sont simples,

3. localement fini si il est la réunion de ses sous-foncteurs finis.

Dans [Kuh94a], l'auteur justifie qu'un foncteur polynomial à valeurs dans les espaces vectoriels de dimension finie est fini.

Proposition 2.1.23. *[Kuh94a, Proposition A.2] F est localement fini si et seulement si F est un foncteur analytique.*

Nous introduisons ici le Hom interne dans la catégorie $\mathcal{F}$. L'existence de ce Hom interne nous sera utile par la suite.

Proposition 2.1.24. *La catégorie $\mathcal{F}_\omega$ est stable par le produit tensoriel de $\mathcal{F}$.*

Proposition 2.1.25. *Le foncteur $\underline{Hom}_{\mathcal{F}}$, défini par $\underline{Hom}_{\mathcal{F}}(F,G)(V) := Hom_{\mathcal{F}}(F, \Delta_V(G))$ est un Hom interne dans $\mathcal{F}$, c'est à dire que pour tout F dans $\mathcal{F}$, le foncteur $\underline{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \_)$ est l'adjoint à droite du foncteur $\_ \otimes F$.*

Démonstration. En effet, pour H et G dans $\mathcal{F}$, on définit un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(H \otimes F, G)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(H, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(F,G))$ de la manière suivante. À ϕ, un morphisme de $H \otimes F$ dans G, on associe $\tilde{\phi}$, où pour $h \in H(V)$, $\tilde{\phi}_V(h)$ est la transformation naturelle de F dans $\Delta_V(G)$ définie par $(\tilde{\phi}_V(h))_W(f) = \phi(H(\iota_V^{V\oplus W})(h) \otimes F(\iota_W^{V\oplus W})(f))$ où f est un élément de $F(W)$ et où $\iota_V^{V\oplus W}$ désigne l'inclusion naturelle de V dans $V \oplus W$. Son inverse est l'application linéaire de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(H, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(F,G))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(H \otimes F, G)$ qui à une transformation naturelle γ associe $\hat{\gamma}$ définie de la façon suivante, pour $h \in H(V)$ et $f \in F(V)$ $\hat{\gamma}(h \otimes f) = G(+_V)((\gamma_V(h))_V(f))$ où $+_V \ : \ V \oplus V \to V$ est l'addition de V. Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{\tilde{\phi}}_V(h \otimes f) &= G(+_V)((\tilde{\phi}_{V_1}(h))_{V_2}(f)) \\
&= G(+_V)(\phi_{V\oplus V}(H(\iota_{V_1}^{V_1\oplus V_2})(h) \otimes F(\iota_{V_2}^{V_1\oplus V_2})(f))) \\
&= \phi_V(H(+_V)(H(\iota_{V_1}^{V_1\oplus V_2})(h)) \otimes F(+_V)(F(\iota_{V_2}^{V_1\oplus V_2})(f)) \\
&= \phi_V(h \otimes f).
\end{aligned}$$

L'égalité entre $\tilde{\hat{\gamma}}$ et γ se montre de manière similaire. $\square$

Corollaire 2.1.26. *1. On a les isomorphismes suivant :*

$$Hom_{\mathcal{F}}(P_V, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(F,G)) \cong Hom_{\mathcal{F}}(P_V \otimes F, G) \cong Hom_{\mathcal{F}}(F, \Delta_V G).$$

En particulier, le foncteur $P_V \otimes \_$ est adjoint à gauche du foncteur Δ_V.

2. Pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a un isomorphisme $\Delta_V(F) \cong \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, F)$.

2.1.3 L'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{F}_\omega$

Dans cette partie, nous rappelons l'identification de l'image essentielle de $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$, faite dans [HLS93]. Cette catégorie sera alors équivalente à la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ par le foncteur $f' : \mathcal{U}/\mathcal{N}il_1 \to \mathcal{F}$, introduit dans la proposition 2.1.12.

Proposition 2.1.27. *Soient $M \in \mathcal{U}$ et $V \in \mathcal{V}^f$, alors on a un isomorphisme naturel en V et M, $\Delta_V f(M) \cong f(T_V(M))$.*

Démonstration. En effet, par définition $\Delta_V f(M)(W) = f(M)(V \oplus W) = T_{V\oplus W}(M)^0$ et comme $T_{V\oplus W}$ est défini comme l'adjoint à gauche du produit tensoriel par $H^*(V \oplus W) \cong H^*(V) \otimes H^*(W)$, $T^0_{V\oplus W}(M) \cong T_W(T_V(M))^0 = f(T_V(M))(W)$. □

Proposition 2.1.28. *Soit $M \in \mathcal{U}$, alors $f(M) \in \mathcal{F}_\omega$.*

Démonstration. En effet, tout module instable M peut-être obtenu comme colimite d'un diagramme dont tous les objets sont des $F(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Or, f commute avec les colimites et pour tout n, $f(F(n)) \cong \Gamma^n$ est polynomial. Donc $f(M)$ est une colimite de foncteurs polynomiaux et donc $f(M)$ est analytique. □

En particulier, le foncteur $I_V := \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_,V)} \cong f(H^*(V))$ est analytique. Le foncteur P_V n'est par contre pas analytique lorsque $V \neq 0$.

Théorème 2.1.29. *[Sch94, Théorème 5.2.6] Le foncteur f' induit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et la catégorie $\mathcal{F}_\omega$.*

Sans rentrer dans les détails de la preuve, qui se trouve dans [Sch94], donnons l'idée de la construction qui pour F un foncteur dans $\mathcal{F}_\omega$ permet d'obtenir un module instable M tel que $f(M) \cong F$. Pour cela, on affirme le lemme suivant.

Lemme 2.1.30. *Tout foncteur $G \in \mathcal{F}_\omega$ est la colimite d'un diagramme de foncteurs $(G(d))_{d\in D}$ tel que pour tout $d \in D$, $G(d)$ est le noyau d'un morphisme naturel de la forme $\bigoplus_{a\in A} I_{V_a} \to \bigoplus_{b\in B} I_{V_b}$ où A et B sont des ensembles finis.*

D'après la proposition 2.1.7, un morphisme naturel de la forme $\bigoplus_{a\in A} I_{V_a} \to \bigoplus_{b\in B} I_{V_b}$, correspond à un élément ϕ de $\bigoplus_{a\in A, b\in B} \mathbb{F}_2 [\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_b, V_a)]$. En particulier, pour $d \in D$, par exactitude du foncteur f et par naturalité en V de l'isomorphisme $f(H^*(V)) \cong I_V$, l'image par f de $M(d)$, le noyau du morphisme $\phi^* : \bigoplus_{a\in A} H^*(V_a) \to \bigoplus_{b\in B} H^*(V_b)$, est isomorphe à $G(d)$. En justifiant que les morphismes de $G(d)$ dans $G(d')$ apparaissant dans le diagramme D peuvent être obtenus en appliquant le foncteur f à un morphisme de $M(d)$ dans $M(d')$, et comme le foncteur f conserve les colimites, la colimite du diagramme $(M(d))_{d\in D}$ dans $\mathcal{U}$ ainsi obtenu, est un antécédent de G par f.

Définition 2.1.31. Soit $m : \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{U}$ la composition d'un inverse de f' par le foncteur s_1, introduit dans le corollaire 1.2.28.

Proposition 2.1.32. *m est adjoint à droite au foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_\omega$. En conséquence, m est exact à gauche.*

Pour F un foncteur analytique, on a un isomorphisme naturel en F, $F \cong f \circ m(F)$. De même, on a un isomorphisme naturel en M, pour M un module instable, $m \circ f(M) \cong l_1(M)$. En particulier, M est nil-fermé si et seulement si l'unité de l'adjonction $M \to m \circ f(M)$ est un isomorphisme. C'est une injection si et seulement si M est réduit.

On peut donner une description explicite du foncteur m. Cette description du foncteur m permet de faire le lien entre les modules instables localisés par les modules nilpotents et ce que N. Kuhn appelle une théorie de représentation générique, ce qu'il fait dans ses articles [Kuh94a], [Kuh94b] et [Kuh95a].

Remarque 2.1.33. On a obtenu l'isomorphisme $f(F(n))(V) \cong \Gamma^n(V)$ en utilisant $T_V^0(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), H^*(V))^\sharp \cong H^n(V)^\sharp \cong H_n(V) \cong \Gamma^n(V)$. La précomposition par $T_V(\mathrm{Sq}(i))$ correspond donc au dual de l'action à gauche de Sq^i sur $H^*(V)$, c'est à dire à l'action à droite de Sq^i sur $\Gamma^*(V)$. Par cette action à droite des Sq^i sur Γ^*, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \_)$ est à valeurs dans $\mathcal{U}$.

Proposition 2.1.34. *Pour F un foncteur dans $\mathcal{F}_\omega$, on a un isomorphisme naturel en F, $m(F) \cong Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F)$, où la graduation de $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F)$ est donnée par $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, F)$ et où l'action de l'algèbre de Steenrod est induite par l'action à droite des Sq^i sur Γ^*.*

Démonstration. En effet, soit $F \in \mathcal{F}_\omega$, $m(F)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), m(F))$. Par adjonction, et en utilisant $f(F(n)) \cong \Gamma^n$, $m(F)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, F)$, et l'action à gauche de Sq^i de $m(F)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), m(F))$ dans $m(F)^{n+i} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n+i), m(F))$ est induite par la précomposition par $\mathrm{Sq}(i)$, c'est à dire par l'action à droite de Sq^i sur Γ^{n+i} sous l'isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n+i), m(F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{n+i}, F)$. □

On rappelle le résultat suivant, exposé dans [Kuh94a].

Proposition 2.1.35. *Pour F un foncteur dans $\mathcal{F}$, $T_V(m(F)) \cong m(\Delta_V(F))$.*

Démonstration. Commençons par affirmer les isomorphismes suivants : $m(\Delta_V(I_W)) \cong m(I_W(V) \otimes I_W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, I_W \otimes I_W(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, I_W) \otimes I_W(V) \cong H^*(W) \otimes I_W(V) \cong T_V(m(I_W))$. Alors, en utilisant le lemme 2.1.30 et le fait que les foncteurs Δ_V et T_V commutent avec les colimites, il suffit de justifier le résultat pour tout foncteur isomorphe au noyau d'un morphisme naturel $\bigoplus_{a \in A} I_{V_a} \to \bigoplus_{b \in B} I_{V_b}$, où A et B sont finis. Pour F le noyau d'un tel morphisme,

$\Delta_V(F)$ est le noyau de $\bigoplus_{a\in A} \Delta_V(I_{V_a}) \to \bigoplus_{b\in B} \Delta_V(I_{V_b})$, alors par exactitude à gauche du foncteur m, $m(F)$ est le noyau du morphisme $\bigoplus_{a\in A} H^*(V_a) \to \bigoplus_{b\in B} H^*(V_b)$ induit par $\bigoplus_{a\in A} I_{V_a} \to \bigoplus_{b\in B} I_{V_b}$ et $m(\Delta_V(F))$ est le noyau de $\bigoplus_{a\in A} T_V(H^*(V_a)) \to \bigoplus_{b\in B} T_V(H^*(V_b))$. Alors, comme T_V est exact, $T_V(m(F)) \cong m(\Delta_V(F))$. □

Corollaire 2.1.36. *Soit M un module instable nil-fermé, alors $T_V(M)$ est nil-fermé.*

Remarque 2.1.37. Le théorème 2.1.29 démontré dans [Sch94] et [HLS93] n'est pas spécifique au cas $p = 2$, pour p un nombre premier quelconque $\mathcal{N}il_1$ est une classe de Serre dans $\mathcal{U}_p$ et le foncteur f définit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}_p/\mathcal{N}il_1$ et la catégorie $\mathcal{F}_\omega(p)$ des foncteurs analytiques de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimensions finies vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, où la notion de foncteur analytique pour p impair est similaire à cette même notion pour $p = 2$.

Notons que pour p impair, $T_V(F(n)) \cong \bigoplus_{i,j,k\ ;\ i+2j+k=n} F(i) \otimes E^k(V) \otimes \Gamma^i(V)$. En particulier, $f(F(n))(V) \cong (E^* \otimes \Gamma^{*/2})^n(V)$, où $\Gamma^{i/2}(V) := 0$ pour i impair. Le calcul de m est plus délicat dans ce cas, dans [Kuh94a], Kuhn donne une formule explicite pour le calcul de l'adjoint à f restreint aux modules de $\mathcal{U}_p$ concentrés en degrés pairs.

2.1.4 Foncteurs de Schur et *nil*-fermeture

Finissons cette partie en énonçant quelques résultats généraux sur la préservation de la *nil*-fermeture par des foncteurs de Schur.

Définition 2.1.38.

1. Soit R un $\mathfrak{S}_n$-module à droite de dimension finie en tant qu'espace vectoriel, on définit le foncteur F_R de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, qui à V associe $R \otimes_{\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]} \Theta^n(V)$, où $\Theta^n(V)$ désigne la n-ième puissance tensorielle de V.
2. De même, soit R un $\mathfrak{S}_n$-module à gauche de dimension finie en tant qu'espace vectoriel, on définit le foncteur F^R de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, qui à V associe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]\text{-mod}}(R, \Theta^n(V))$.

Exemple 2.1.39. Pour $R = \mathbb{F}_2$ muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_n$, $F_{\mathbb{F}_2} \cong S^n$ et $F^{\mathbb{F}_2} \cong \Gamma^n$.

Puisque $(\mathcal{U}, \otimes, \mathbb{F}_2)$ est symétrique monoïdale, les foncteurs Θ^n définissent des foncteurs de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, où le degré de $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ dans $M^{\otimes n}$ pour M un module instable est $|x_1| + ... + |x_n|$ et où l'action de Sq^i sur $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ se déduit de la formule de Cartan. Alors, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{Sq}^i(\sigma \cdot (x_1 \otimes ... \otimes x_n)) = \sigma \cdot \mathrm{Sq}^i(x_1 \otimes ... \otimes x_n)$ ce qui implique que la structure de module instable sur $\Theta^n(M)$ induit une telle structure sur $F_R(M)$ et $F^R(M)$.

Remarque 2.1.40. Les foncteurs F_R et F^R appartiennent à $\mathcal{F}_\omega$, plus précisément ce sont des foncteurs polynomiaux de degré n, et par composition ils induisent des foncteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, qui se restreignent à des foncteurs de $\mathcal{F}_\omega$ dans $\mathcal{F}_\omega$.

Proposition 2.1.41. *Soient R un $\mathfrak{S}_n$-module à droite de dimension finie en tant qu'espace vectoriel et M un module instable, alors on a des isomorphismes naturels $f(F_R(M)) \cong F_R(f(M))$ et $f(F^R(M)) \cong F^R(f(M))$.*

Démonstration. Soit M un module instable sur l'algèbre de Steenrod. On a les suites exactes suivantes :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(M) \overset{\phi_M}{\to} R \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(M) \to F_R(M) \to 0$$

et

$$0 \to F^R(M) \to R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(M) \overset{\psi_M}{\to} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(M),$$

où ϕ_M est définie sur le sous-espace indexé par $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, par

$$\phi_M(r \otimes t) = (\sigma.r) \otimes t - r \otimes (\sigma.t),$$

où on a identifié $R^\sharp \otimes \Theta^n(V)$ avec les morphismes d'espaces vectoriels de R dans $\Theta^n(V)$, puisque R est de dimension finie, et où ψ_M est le morphisme qui à un morphisme d'espace vectoriel $f : R \to \Theta^n(V)$ associe l' élément dans $\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Hom}(R, \Theta^n(V))$ dont la composante sur σ est $f \circ \sigma - \sigma \circ f$.

Sachant que le foncteur f est exact et commute naturellement avec le produit tensoriel, on a les suites exactes :

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(f(M)) \overset{\phi_{f(M)}}{\to} R \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(f(M)) \to f(F_R(M)) \to 0$$

et

$$0 \to f(F^R(M)) \to R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(f(M)) \overset{\phi_{f(M)}}{\to} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(f(M)).$$

On en déduit que $f(F_R(M)) \cong F_R(f(M))$ et $F^R(f(M)) \cong f(F^R(M))$. □

Proposition 2.1.42. *Soit $F \in \mathcal{F}_\omega$, et R un $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]$-module de dimension finie en tant qu'espace vectoriel. Alors, on a un isomorphisme naturel $m(F^R(F)) \cong F^R(m(F))$.*

Démonstration. Soit $F \in \mathcal{F}_\omega$, alors on a une suite exacte dans $\mathcal{F}$

$$0 \to F^R \circ F \to R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n \circ F \overset{\psi_M}{\to} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n \circ F.$$

Comme le foncteur m est exact à gauche et symétrique monoïdal, on obtient la suite exacte dans $\mathcal{U}$

$$0 \to m(F^R \circ F) \to R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(m(F)) \overset{\psi_M}{\to} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} R^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta^n(m(F))$$

et donc $m(F^R \circ F) \cong F^R(m(F))$.

$\square$

Corollaire 2.1.43. *Soit M un module instable nil-fermé, alors $F^R(M)$ est également nil-fermé.*

Exemple 2.1.44. Si M est un module instable nil-fermé, $\Gamma^n(M)$ est nil-fermé.

Une conséquence de ce résultat est la nil-fermeture des $F(n)$ et le calcul des modules instables $m(\Gamma^n)$.

Proposition 2.1.45. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ est nil-fermé.*

Démonstration. D'après la proposition 1.1.49, $F(n) \cong \Gamma^n(F(1))$. En utilisant le corollaire 2.1.43, il suffit donc de justifier que $F(1)$ est nil-fermé. $f(F(1)) \cong \Gamma^1$, et par dualité $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, \Gamma^1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S^n)^\sharp$. Or, une transformation naturelle de S^1 dans S^n ne peut envoyer un vecteur x dans $S^1(V) = V$ que sur 0 où x^n. Et par naturalité, si $s : S^1 \to S^n$ est une transformation naturelle, telle qu'il existe x dans V tel que $s_V(x) = x^n$, alors $s_W(y) = y^n$ pour tout espace vectoriel W et pour tout $y \in W$. Mais, si $\dim(V) \geq 2$, l'application qui à x associe x^n n'est linéaire que si n est une puissance de 2. On en déduit que $l_1(F(1))$ contient un élément non trivial en tout degré de la forme 2^k et n'en contient nulle part ailleurs. On conclût en constatant que Sq^i agit trivialement sur γ_n, le dual de la transformation qui envoie x sur x^{2^n}, pour i différent de 0 ou 2^{n-1} et que $\gamma_n \mathrm{Sq}^{2^{n-1}} = \gamma_{n-1}$.

$\square$

Corollaire 2.1.46. *On a un isomorphisme de modules instables $F(n) \cong Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Gamma^n)$, qui envoie $x(n)$ sur l'identité de Γ^n.*

Remarque 2.1.47. Le foncteur m n'étant pas exact à droite, en général $F_R(M)$ n'est pas isomorphe à $l_1(F_R(M))$ et donc M nil-fermé n'implique pas que $F_R(M)$ soit nil-fermé.

Un exemple de ce point, comme nous allons le voir, est que en général $m(S^n \circ G)$ n'est pas isomorphe à $S^n(m(G))$ pour G un foncteur analytique.
Dans l'article [Kuh98], l'auteur étudie la question générale suivante. Étant donné un foncteur F dans $\mathcal{F}_\omega$, peut on identifier un foncteur U_F de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ tel que pour tout $G \in \mathcal{F}_\omega$, $m(F \circ G) \cong U_F(m(G))$.

Théorème 2.1.48. *[Kuh98, Théorème 2.6] Soit U_F un foncteur de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ tel que :*

- *U_F préserve les modules nil-fermés,*
- *Pour tout module instable M, le foncteur $f(U_F(M))$ est isomorphe au foncteur $F \circ f(M)$.*

Alors, pour tout $G \in \mathcal{F}_\omega$, $U_F(m(G)) \cong m(F \circ G)$.

Définition 2.1.49. Soit $\mathcal{U}^2$ la catégorie des modules bigradués sur l'algèbre bigraduée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, instables respectivement à chaque graduation.
Pour $M \in \mathcal{U}^2$, on définit l'opération Sq_0 bigraduée par $\mathrm{Sq}_0 x = \mathrm{Sq}^i \otimes \mathrm{Sq}^j x$, pour x en bidegré (i,j).

Définition 2.1.50. Soit U^2 le foncteur de $\mathcal{U}^2$ dans $\mathcal{U}^2$ qui à un objet M associe $S^*(M)/(x^2 - \mathrm{Sq}_0 x)$.

Théorème 2.1.51. *[Kuh98, Théorème 1.9]*
L'algèbre de Steenrod agissant naturellement sur $S^*(V)$ via l'isomorphisme $S^*(V) \cong H^*(V^\sharp)$, pour tout $G \in \mathcal{F}_\omega$, $m(S^* \circ G)$ est naturellement un objet de $\mathcal{U}^2$ et on a un isomorphisme naturel $m(S^* \circ G) \cong U^2(m(G) \otimes F(1))$.

2.2 Le cas n quelconque

Dans cette section nous nous intéressons aux généralisations de l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{F}_\omega$ aux cas où $n \neq 1$. Notons que le foncteur $f^{<n}$, qui à un module instable M associe le foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{V}$ défini par $V \mapsto T_V(M)^{<n}$, où $T_V(M)^{<n}$ désigne le module $T_V(M)$ tronqué en degré plus petit que n, vérifie, d'après la proposition 1.2.38, que $f^{<n}(M) = 0$ si et seulement si $M \in \mathcal{N}il_n$. Il est à valeur dans les foncteurs de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}^{<n}$, la catégorie des modules instables concentrés en degrés strictement inférieurs à n. Les foncteurs $f^{<n}(M)$, pour $M \in \mathcal{U}$, vérifient une condition d'analycité similaire à celle de $f(M)$, mais pour $n \neq 1$, ça ne suffit pas à décrire l'image essentielle de $f^{<n}$. Les $f^{<n}(M)$, avec $M \in \mathcal{U}$ ont plus de structure.

L'objectif principal de cette partie sera de donner deux descriptions différentes de cette structure supplémentaire. Nous rappellerons d'abord l'approche de Henn, Lannes et Schwartz dans [HLS95], qui caractérisent les $f^{<n}(M)$ avec $M \in \mathcal{U}$ par l'existence d'une structure de $H^{*<n}(V)$-comodule sur $f^{<n}(M)(V)$, où $H^{*<n}(V)$ désigne le quotient de $H^*(V)$ par ses éléments de degrés plus grand que n. Cette structure de $H^*(V)$-comodule n'est pas naturelle en V. Après, avoir rappelé les constructions de [HLS95] et l'équivalence de catégorie qui en découle, nous prendrons un point de vu dual, et caractériserons les foncteurs de la forme $f^{<n}(M)$ par l'existence d'une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $f^{<n}(M)(V)$. Cette structure sera cette fois-ci naturelle en V.

Nous conclurons cette partie en posant les bases de l'algèbre homologique dans les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<n}$ et en donnant des exemples de calculs de nil_n-fermeture.

2.2.1 Structure de $H^*(V)$-comodule

Dans le cas général, nous allons rappeler l'existence d'une équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ et des catégories de foncteurs $\mathcal{F}^{<n}$, définies dans [HLS95], à valeur dans des objets

ayant plus de structure qu'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$. Une partie de cette structure supplémentaire est donnée par une structure de comodule sur l'algèbre $H^*(V)$ tronquée en degré plus petit que n. Cette structure provient du fait que, pour M un module instable, $T_V(M)$ est naturellement muni d'une structure de $H^*(V)$-comodule. Nous allons exposer la construction de cette structure de $H^*(V)$-comodule.

Proposition 2.2.1. *Soit V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension fini et D_V et ∇_V les applications diagonales et codiagonales de V. Alors, D_V^* et ∇_V^* définissent dans $\mathcal{U}$ une structure d'algèbre de Hopf bicommutative sur $H^*(V)$.*

En particulier, $H^*(V)$ est une coalgèbre cocommutative.

Pour M un module instable, $T_V(M)$ a naturellement une structure de comodule sur $H^*(V)$ que nous décrivons ici.

Définition 2.2.2. Soit $\kappa_{M,V} : T_V(M) \to T_V(M) \otimes H^*(V)$ le morphisme naturel en M défini comme l'adjoint vis à vis du facteur $H^*(V)$ de droite, de la composition $M \to T_V(M) \otimes H^*(V) \to T_V(M) \otimes H^*(V) \otimes H^*(V)$ dont la première flèche est l'unité de l'adjonction entre les foncteurs T_V et $- \otimes H^*(V)$ et la deuxième est $\mathrm{id}_{T_V(M)} \otimes \nabla_V^*$.

Le résultat suivant est bien connu, nous en donnons une démonstration pour illustrer les constructions du reste de ce chapitre.

Proposition 2.2.3. *Le morphisme $\kappa_{M,V} : T_V(M) \to T_V(M) \otimes H^*(V)$ définit une structure de $H^*(V)$-comodule de $T_V(M)$.*

Démonstration. Montrons d'abord la coassociativité. On note $\phi_{X,Y}$ l'isomorphisme naturel entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y \otimes H^*(V))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(X), Y)$ fournit par l'adjonction entre T_V et $\_ \otimes H^*(V)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, T_V(M) \otimes H^*(V)) \arrow[r, "\cong", "\phi_{M,T_V(M)}"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(id, id\otimes\nabla_V^*)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(M), T_V(M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(id, \kappa_{M,V})"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, T_V(M) \otimes H^*(V) \otimes H^*(V)) \arrow[r, "\cong", "\phi_{M,T_V(M)\otimes H^*(V)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(M), T_V(M) \otimes H^*(V)).
\end{tikzcd}$$

Définissons les transformations naturelles Δ^1 et Δ^2, entre $\_ \otimes H^*(V)^{\otimes 2}$ et $\_ \otimes H^*(V)^{\otimes 3}$, de la manière suivante, pour B un module instable :

$$\Delta_B^1 : B \otimes H^*(V)^{\otimes 2} \xrightarrow{id_B \otimes \Delta_{H^*(V)} \otimes id_{H^*(V)}} B \otimes H^*(V)^{\otimes 3}$$

$$\Delta_B^2 : B \otimes H^*(V)^{\otimes 2} \xrightarrow{id_B \otimes id_{H^*(V)} \otimes \Delta_{H^*(V)}} B \otimes H^*(V)^{\otimes 3}.$$

On obtient pour $i \in \{1,2\}$, les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, T_V(M) \otimes H^*(V)^{\otimes 2}) \arrow[r, "\cong", "\phi_{M,T_V(M)\otimes H^*(V)}"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(id,\Delta^i_{T_V(M)})"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(M), T_V(M) \otimes H^*(V)) \arrow[d, "\gamma_i"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, T_V(M) \otimes H^*(V)^{\otimes 3}) \arrow[r, "\cong", "\phi_{M,T_V(M)\otimes H^*(V)^{\otimes 2}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(M), T_V(M) \otimes H^*(V)^{\otimes 2}),
\end{tikzcd}$$

où $\gamma_1 := (id_{T_V(M)} \otimes \Delta_{H^*(V)})_*$ et $\gamma_2 := (\kappa_{M,V} \otimes id_{H^*(V)})_*$. Puisque $H^*(V)$ est une coalgèbre coassociative, on a

$$\Delta^1_{T_V(M)} \circ (id \otimes \Delta_{H^*(V)}) = \Delta^2_{T_V(M)} \circ (id \otimes \Delta_{H^*(V)})$$

et donc

$$\gamma_1 \circ \kappa_{M,V} = \gamma_2 \circ \kappa_{M,V},$$

c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T_V(M) \arrow[r, "\kappa_{M,V}"] \arrow[d, "\kappa_{M,V}"'] & T_V(M) \otimes H^*(V) \arrow[d, "\kappa_{M,V}\otimes id_{H^*(V)}"] \\
T_V(M) \otimes H^*(V) \arrow[r, "id_{T_V(M)}\otimes\Delta_{H^*(V)}"'] & T_V(M) \otimes H^*(V)^{\otimes 2}.
\end{tikzcd}$$

Donc $\kappa_{M,V}$ est coassociative. La counitarité se prouve de manière similaire en remplaçant $\Delta^1_{T_V(M)}$ et $\Delta^2_{T_V(M)}$ par la composition sur l'un des facteurs par la counité de $H^*(V)$.

□

Remarque 2.2.4. Nous avons construit cette structure de comodule à droite, mais $H^*(V)$ étant cocommutative, on a une équivalence de catégorie entre les comodules à gauche et à droite sur $H^*(V)$, sous cette équivalence de catégorie, $T_V(M)$ est également un comodule à gauche.

Remarque 2.2.5. Le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}^f$ associe $H^*(V)$ est contravariant en V, plus précisément $H^*(V) \cong S^*(V^\sharp)$, le morphisme $T_V(M) \to T_V(M) \otimes H^*(V)$ n'est donc pas naturel en V. Il vérifie cependant la condition de compatibilité suivante : pour tout morphisme $\alpha : V \to W$

de $\mathcal{V}^f$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_V(M) \arrow[r, "\kappa_{M,V}"] \arrow[dd, "\alpha_*"'] & H^*(V)\otimes T_V(M) \arrow[dr, "id\otimes\alpha_*"] & \\
& & H^*(V)\otimes T_W(M) \\
T_W(M) \arrow[r, "\kappa_{M,W}"] & H^*(W)\otimes T_W(M) \arrow[ur, "\alpha^*\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

On rappelle que $x(i) \in F(i)^i$ est le générateur de $F(i)$ en tant que $\mathcal{A}$-module.

Proposition 2.2.6. *Soit $V \in \mathcal{V}^f$, la structure de $H^*(V)$-comodule de $T_V(F(n)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} F(i) \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ est l'unique morphisme de module instable qui envoie $x(i)\otimes\gamma \in F(i)\otimes\Gamma^{n-i}(V)$ sur $\sum_{t=0}^{i} \sum_{b\in\mathcal{B}(H^{i-t}(V))} (x(t)\otimes b^\sharp\gamma)\otimes b$, où $\mathcal{B}(H^{i-t}(V))$ désigne une base de $H^{i-t}(V)$ et on a identifié $H^{n-i}(V)$ au dual linéaire de $\Gamma^{n-i}(V)$, et où $b^\sharp\gamma$ est le produit dans $\Gamma^*(V)$ de γ par $b^\sharp$, où $(b^\sharp)_{b\in\mathcal{B}(H^{i-t}(V))}$ est la base duale de $\mathcal{B}(H^{i-t}(V))$.*

Démonstration. Soit N un module instable et n un entier naturel. L'isomorphisme d'adjonction entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V(F(n)), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\oplus_{i=0}^{n} F(i)\otimes\Gamma^{n-i}(V), N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), N\otimes H^*(V)) \cong (N\otimes H^*(V))^n$ est donné, pour $n\otimes h \in N^i\otimes H^{n-i}(V)$, par

$$\Phi^{-1}_{F(n),N}(n\otimes h)(x(j)\otimes\gamma) = \begin{cases} h(\gamma)n & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En particulier, l'unité de l'adjonction de $F(n)$ dans $T_V(F(n))\otimes H^*(V)$ envoie $x(n)$ sur $\sum_{i=0}^{n} \sum_{b\in\mathcal{B}(H^{n-i}(V))} (x(i)\otimes b^\sharp)\otimes b$. L'application structurelle de $T_V(M)$ dans $T_V(M)\otimes H^*(V)$ est alors l'adjoint du morphisme de module instable qui envoie $x(n)$ sur $\sum_{i=0}^{n} \sum_{b\in\mathcal{B}(H^{n-i}(V))} (x(i)\otimes b^\sharp)\otimes\Delta_{H^*(V)}(b)$. Cet adjoint est le morphisme de module instable qui envoie $x(i)\otimes\gamma$ sur $\sum_{t=0}^{i} \sum_{b\in\mathcal{B}(H^{i-t}(V))} (x(t)\otimes b^\sharp\gamma)\otimes b$. $\square$

Proposition 2.2.7. *$T_V(Sq(i))(x(l)\otimes\gamma) = \sum_{j=0}^{i} Sq(j)(x(l))\otimes\gamma Sq^{i-j}$, pour $\gamma\in\Gamma^{n+i-l}(V)$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.1.46, on a un isomorphisme entre $F(n)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Gamma^n)$, par lequel $\mathrm{Sq}(i)$ s'identifie avec la composition par le produit à droite par Sq^i. Par la proposition

2.1.35, en appliquant le foncteur T_V, on obtient un isomorphisme

$$T_V(\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Gamma^n)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Delta_V(\Gamma^n)).$$

Par exponentialité du foncteur Γ^*, $\Delta_V(\Gamma^n) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \Gamma^i \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ et cet isomorphisme est un isomorphisme de module à droite sur l'algèbre de Steenrod pour $\bigoplus_{i=0}^{n} \Gamma^i \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ muni de l'action diagonale. Explicitement, l'action à droite de Sq^i sur $\gamma \otimes \delta \in \Gamma^i(W) \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ nous donne $\sum_{j=0}^{i} \gamma \mathrm{Sq}^j \otimes \delta \mathrm{Sq}^{i-j}$. Et donc

$$T_V(\mathrm{Sq}(i)) : \bigoplus_{l=0}^{n+i} F(l) \otimes \Gamma^{n+i-l}(V) \to \bigoplus_{l=0}^{n} F(l) \otimes \Gamma^{n-l}(V)$$

envoie $x(l) \otimes \gamma \in F(l) \otimes \Gamma^{n+i-l}(V)$ sur $\sum_{j=0}^{i} \mathrm{Sq}(j)(x(l)) \otimes \gamma \mathrm{Sq}^{i-j}$. □

Définition 2.2.8. Soient $f^k : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$, défini pour $k \in \mathbb{N}$ par $f^k(M)(V) := T_V(M)^k$.

Proposition 2.2.9. *Pour tout entier k et tout module instable M, $f^k(M)$ est un foncteur analytique.*

Démonstration. En effet, $T_V(\_)^k$ commute avec les colimites (c'est un adjoint à gauche) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_V(F(n))^k = \bigoplus_{i=0}^{n} F(i)^k \otimes \Gamma^{n-i}(V)$ donc $f^k(F(n))$ est polynomial, puisque pour tout entier j, Γ^j est polynomial de degré j. Or, pour tout module instable M, M est le conoyau d'une application de la forme $\bigoplus_{i \in I} F(n_i) \to \bigoplus_{j \in J} F(m_j)$ donc $f^k(M)$ est le conoyau de $\bigoplus_{i \in I} f^k(F(n_i)) \to \bigoplus_{j \in J} f^k(F(m_j))$, ce qui conclût la preuve. □

2.2.2 Les catégories $\mathcal{U}^{<k}$

Dans cette sous-section, nous détaillons les principales propriétés de le catégorie $\mathcal{U}^{<k}$.

Définition 2.2.10. Pour k un entier naturel, soit $\mathcal{U}^{<k}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ des modules instables concentrés en degrés strictement inférieurs à k.

Définition 2.2.11. Soit $(\_)^{<k} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{<k}$, le foncteur défini par $M^{<k} = M/(x; k \leq |x|)$.

Proposition 2.2.12. *$(\_)^{<k}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli O_k de $\mathcal{U}^{<k}$ dans $\mathcal{U}$.*

Proposition 2.2.13. *$\mathcal{U}^{<k}$ est une catégorie abélienne et les $F(n)^{<k}$ avec $n < k$ et les $J(i)$ avec $i < k$ forment respectivement des familles de générateurs projectifs et de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{U}^{<k}$. En conséquence, $\mathcal{U}^{<k}$ contient suffisamment d'injectifs et de projectifs.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{U}^{<k}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ qui est abélienne, $\mathcal{U}^{<k}$ est enrichie en groupes abéliens de telle sorte que la composition est bilinéaire. De plus, pour $f : A \to B$ un morphisme dans $\mathcal{U}^{<k}$, le noyau, l'image et le conoyau de f dans $\mathcal{U}$ sont dans $\mathcal{U}^{<k}$. De même l'objet zéro de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}^{<k}$ et la somme directe de deux objets A et B de $\mathcal{U}^{<k}$ est dans $\mathcal{U}^{<k}$ et est un biproduit de A et B dans $\mathcal{U}^{<k}$. Donc $\mathcal{U}^{<k}$ est abélienne.

De plus, par l'adjonction entre le foncteur oubli et la troncature, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(n)^{<k}, M) = M^n$, donc les $F(n)^{<k}$ sont projectifs dans $\mathcal{U}^{<k}$.

Enfin, chacun des $J(i)$ pour $i < k$ est un objet de $\mathcal{U}^{<k}$ et sont donc injectifs dans $\mathcal{U}^{<k}$ qui est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$. □

On définit un produit tensoriel sur $\mathcal{U}^{<k}$ de la façon suivante.

Définition 2.2.14. Pour M et N deux objets de $\mathcal{U}^{<k}$, $M \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} N := (O_k(M) \otimes O_k(N))^{<k}$.

Plus explicitement, si $j < k$, $(M \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} N)^j = \bigoplus_{i+l=j} M^i \otimes N^l$ et l'action de Sq^t sur $m \otimes \nu \in M^i \otimes N^l$, pour $t + i + l < k$ est l'action diagonale.

Lemme 2.2.15. *Pour M, N et Q trois modules instables, on a les isomorphismes naturels suivants :*

$$(M^{<k} \otimes N^{<k})^{<k} \cong (M \otimes N)^{<k},$$

$$((M \otimes N)^{<k} \otimes Q^{<k})^{<k} \cong (M \otimes N \otimes Q)^{<k} \cong (M^{<k} \otimes (N \otimes Q)^{<k})^{<k}.$$

Remarque 2.2.16. Dans le lemme 2.2.15, on utilise de manière cruciale que $M^t = 0$, pour $M \in \mathcal{U}$ et $t < 0$.

Proposition 2.2.17. *La catégorie $(\mathcal{U}^{<k}, \otimes_{\mathcal{U}^{<k}}, \mathbb{F}_2)$ est symétrique monoïdale et le foncteur $(\_)^{<k} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^{<k}$ est monoïdal.*

Proposition 2.2.18. *Si A est une algèbre dans $\mathcal{U}$ (resp. une coalgèbre), $A^{<k}$ est une algèbre (resp. une coalgèbre) dans $\mathcal{U}^{<k}$. De plus, si M est un module (resp. un comodule) sur A, $M^{<k}$ est un module (resp. un comodule) sur $A^{<k}$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas de A une algèbre dans $\mathcal{U}$. Soit $\mu : A \otimes A \to A$ et $\eta : \mathbb{F}_2 \to A$ définissant une structure d'algèbre sur A. En appliquant le foncteur $(\_)^{<k}$, on obtient des morphismes $\mu^{<k} : (A \otimes A)^{<k} \to A^{<k}$ et $\eta^{<k} : \mathbb{F}_2 \to A^{<k}$ (pour $k \geq 1$). Par le lemme 2.2.15, $\mu^{<k} : (A^{<k} \otimes A^{<k})^{<k} \to A^{<k}$. Montrons que $\mu^{<k}$ est associative, les autres propriétés se montrent de manière similaire. Comme (A, μ, η) forme une algèbre dans $\mathcal{U}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[dd] & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & A \\
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id \otimes \mu"] & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"] &
\end{tikzcd} .$$

Donc, le diagramme suivant commute également :

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes A) \otimes A)^{<k} \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[dd] & (A \otimes A)^{<k} \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & A^{<k} \\
(A \otimes (A \otimes A))^{<k} \arrow[r, "id \otimes \mu"] & (A \otimes A)^{<k} \arrow[ur, "\mu"] &
\end{tikzcd} .$$

Or, par le lemme 2.2.15, $((A \otimes A) \otimes A)^{<k} \cong ((A^{<k} \otimes A^{<k}) \otimes A^{<k})^{<k}$ et $(A \otimes A)^{<k} \cong (A^{<k} \otimes A^{<k})^{<k}$. Donc $\mu^{<k}$ est bien associative dans $\mathcal{U}^{<k}$.

Traitons maintenant le cas de C une coalgèbre dans $\mathcal{U}$. Soit $\nu : C \to C \otimes C$ et $\epsilon : C \to \mathbb{F}_2$ définissant une structure de coalgèbre sur C. En appliquant le foncteur $(\_)^{<k}$, on obtient des morphismes $\nu^{<k} : C^{<k} \to (C \otimes C)^{<k}$ et $\epsilon^{<k} : C^{<k} \to \mathbb{F}_2$ (pour $k \geq 1$). Par le lemme 2.2.15, $\nu^{<k} : C^{<k} \to (C^{<k} \otimes C^{<k})^{<k}$. Montrons que $\nu^{<k}$ est coassociative, les autres propriétés se montrent de manière similaire. Comme (C, ν, ϵ) forme une coalgèbre dans $\mathcal{U}$, la coassociativité de ν_C implique que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(C \otimes C) \otimes C \arrow[dd] & C \otimes C \arrow[l, "\nu \otimes id"'] & \\
 & & C \arrow[ul, "\nu"'] \arrow[dl, "\nu"] \\
C \otimes (C \otimes C) & C \otimes C \arrow[l, "id \otimes \nu"] &
\end{tikzcd} .$$

Donc, le diagramme suivant commute également :

$$\begin{tikzcd}
((C \otimes C) \otimes C)^{<k} \arrow[dd] & (C \otimes C)^{<k} \arrow[l, "\nu\otimes id"'] & \\
& & C^{<k} \arrow[ul, "\nu"'] \arrow[dl, "\nu"] \\
(C \otimes (C \otimes C))^{<k} & (C \otimes C)^{<k} \arrow[l, "id\otimes\nu"] &
\end{tikzcd}.$$

Or, par le lemme 2.2.15, $((C\otimes C)\otimes C)^{<k} \cong ((C^{<k}\otimes C^{<k})\otimes C^{<k})^{<k}$ et $(C^{<k}\otimes C^{<k})^{<k} \cong (C\otimes C)^{<k}$. Donc $\nu^{<k}$ est bien coassociative dans $\mathcal{U}^{<k}$.
Le cas des modules ou comodules se traitent de manière similaire. □

Remarque 2.2.19. On notera que si pour A une algèbre dans $\mathcal{U}$, $A^{<k}$ reste une algèbre dans $\mathcal{U}$, ce n'est pas le cas pour les coalgèbres. En effet, pour $i < k$ et j tels que $i+j > k$, et pour $x \in C^i$, $\mathrm{Sq}^j x$ est toujours nul dans $C^{<k}$, mais pour $\nu(x) =: \bigoplus\limits_{l\in\mathcal{J}} a_l \otimes b_l$, $\mathrm{Sq}^j \nu(x) = \bigoplus\limits_{n=0}^{j} \bigoplus\limits_{l\in\mathcal{J}} \mathrm{Sq}^n a_l \otimes \mathrm{Sq}^{j-n} b_l$ n'est pas nécessairement nul dans $C^{<k} \otimes C^{<k}$.

Corollaire 2.2.20. *Si H est une algèbre de Hopf bicommutative, la sous-catégorie des $H^{<k}$-comodules dans $\mathcal{U}^{<k}$ est symétrique monoïdale.*

Nous allons construire un adjoint à gauche au foncteur $(\_)^{<k}$.

Soit M un module instable et $n < k$, alors, d'après la proposition 2.2.13,

$$M^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(n)^{<k}, M^{<k}).$$

Définition 2.2.21. Soit Z un module dans $\mathcal{U}^{<k}$, on définit $\mathcal{D}_Z$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{U}^{<k}$ de la forme $F(n)^{<k} \to K$, avec $n < k$, et dont les morphismes sont donnés par les triangles commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F(n)^{<k} \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& Z \\
F(m)^{<k} \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

dans $\mathcal{U}^{<k}$.

Remarque 2.2.22. Pour $Z \in \mathcal{U}^{<k}$ on a l'isomorphisme $Z \cong \operatorname*{colim}\limits_{\mathcal{D}_Z} F(n)^{<k}$.

Définition 2.2.23. Pour $Z \in \mathcal{U}^{<k}$, soit $\tilde{Z}^{(k)} := \operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n) \in \mathcal{U}$.

Lemme 2.2.24. *L'application de Ob($\mathcal{U}^{<k}$) dans Ob($\mathcal{U}$) qui à Z associe $\tilde{Z}^{(k)}$ définit un foncteur.*

Démonstration. Notons d'abord que $(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n))^{<k} \cong Z$. En effet, pour $l < k$

$$\begin{aligned}
((\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n))^l)^\sharp &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n), J(l)) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), J(l)) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(n)^{<k}, J(l)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)^{<k}, J(l)) \\
&\cong (Z^l)^\sharp.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)$ est engendré sous l'action de $\mathcal{A}$ par ses éléments de degrés plus petits que k. Soient alors Z et Y deux objets de $\mathcal{U}^{<k}$ et $\phi : Z \to Y$ un morphisme de module instable. Pour $n < k$, tout morphisme de $F(n)^{<k}$ dans $(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Y} F(n))^{<k} \cong Y$ s'étend de manière unique en un morphisme de $F(n)$ dans $\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Y} F(n)$, ϕ s'étend donc de manière unique en un morphisme $\tilde{\phi}^{(k)}$ de $\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)$ dans $\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Y} F(n)$ dont la restriction en degrés plus petits que k est ϕ. Cette construction est compatible avec la composition et comme $\widetilde{\mathrm{id}_Z}^{(k)}$ est l'unique extension à $\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)$ de l'identité en degrés plus petits que k, $\widetilde{\mathrm{id}_Z}^{(k)} = \mathrm{id}_{\tilde{Z}^{(k)}}$ ce qui conclût la preuve. $\square$

Définition 2.2.25. Soit $\widetilde{(\_)}^{(k)}$ le foncteur de $\mathcal{U}^{<k}$ dans $\mathcal{U}$, qui à Z associe $\tilde{Z}^{(k)} := \operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)$. $\tilde{(\_)}^{(k)}$ est l'extension de Kan à droite de l'identité le long du foncteur $(\_)^{<k}$.

Par abus de notation, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la valeur de k, nous noterons simplement $\tilde{Z}$.

Proposition 2.2.26. *Le foncteur $\widetilde{(\_)}^{(k)}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $(\_)^{<k}$.*

De plus, pour Z un objet de $\mathcal{U}^{<k}$, l'unité de l'adjonction $Z \to \tilde{Z}^{<k}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(Z, M^{<k}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n)^{<k}, M^{<k}),\\
&\cong \lim_{\mathcal{D}_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(n)^{<k}, M^{<k}),\\
&\cong \lim_{\mathcal{D}_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M),\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\operatorname*{colim}_{\mathcal{D}_Z} F(n), M),\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\tilde{Z}, M).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.27. $((\widetilde{M^{<k}}))^{<k} \cong \widetilde{M^{<k}}$ qui, pour M n'appartenant pas à $\mathcal{U}^{<k}$ ne peut pas être isomorphe à $M^{<k}$ et M, donc la counité de l'adjonction $\widetilde{M^{<k}} \to M$ n'est en général pas un isomorphisme.

2.2.3 Les catégories $\mathcal{F}^{<k}$

Nous allons rappeler la définition des catégories $\mathcal{F}^{<k}$ introduites dans [HLS95]. Dans la suite du chapitre, nous utiliserons la notation $H^{*<k}(V) := (H^*(V))^{<k}$.

Définition 2.2.28. Soit $\mathcal{F}^{<k}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs F de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}^{<k}$, tels que, pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, $F(V)$ est muni d'une structure de comodule sur $H^{*<k}(V)$ vérifiant que pour tout $\alpha : V \to W$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "\kappa^{<k}_{F,V}"] \arrow[dd, "F(\alpha)"'] & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(V) \arrow[dr, "id\otimes F(\alpha)"] & \\
 & & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(W) \\
F(W) \arrow[r, "\kappa^{<k}_{F,W}"] & H^{*<k}(W) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(W). \arrow[ur, "\alpha^*\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

Et dont les morphismes sont les transformations naturelles $\phi : F \to G$, telles que, pour tout espace vectoriel de dimension finie V, ϕ_V soit un morphisme de $H^{*<k}(V)$-comodules.

Soit $\mathcal{F}^{<k}_\omega$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{<k}$ des foncteurs analytiques en tout degré.

Remarque 2.2.29. On a un foncteur oubli de $\mathcal{F}^{<k}$ dans $\mathcal{F}$, et un objet de $\mathcal{F}^{<k}$ est analytique dans $\mathcal{F}^{<k}$ si et seulement si son image par ce foncteur oubli est analytique dans $\mathcal{F}$.

Proposition 2.2.30. *La catégorie $\mathcal{F}^{<k}$ est abélienne. De plus, le produit tensoriel sur $\mathcal{U}^{<k}$ (confère la définition 2.2.14) induit une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{F}^{<k}$.*

Démonstration. La vérification que $\mathcal{F}^{<k}$ est abélienne est directe. Vérifions que $\otimes_{\mathcal{U}^{<k}}$ définit bien un produit tensoriel sur $\mathcal{F}^{<k}$. Ce qu'il faut vérifier c'est que pour deux objets de $\mathcal{F}^{<k}$, F et G, on peut munir $F(V) \otimes G(V)$ d'une structure de $H^{*<k}(V)$-comodule naturellement en F et G. C'est vrai en général pour deux $H^*(V)^{<k}$-comodules, d'après le corollaire 2.2.20, puisque $H^{*<k}(V)$ est une algèbre de Hopf. La structure de comodule est définie comme la composition suivante :

$$\kappa_{F\otimes G,V} : F(V) \otimes G(V) \xrightarrow{\kappa_{F,V}\otimes\kappa_{G,V}} F(V) \otimes G(V) \otimes H^{*<k}(V) \otimes H^{*<k}(V) \xrightarrow{id\otimes\Delta_V^*} F(V) \otimes G(V) \otimes H^{*<k}(V),$$

et vérifie la condition de compatibilité de la définition 2.2.28, puisque $\kappa_{F,V}$ et $\kappa_{G,V}$ la vérifient. $\square$

Définition 2.2.31. Soit $f^{<k} : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_\omega^{<k}$, le foncteur qui à un module instable M associe $f^{<k}(M)(V) := T_V(M)^{<k}$, muni de la structure de $H^{*<k}(V)$-comodule induite par la structure de $H^*(V)$-module sur $T_V(M)$ donnée par $\kappa_{M,V}$ et la proposition 2.2.18.

Le foncteur $f^{<k}$ envoie les k-nilpotents sur 0, il se factorise donc à travers un foncteur $\tilde{f}^{<k} : \mathcal{U}/Nil_k \to \mathcal{F}_\omega^{<k}$.

Théorème 2.2.32. *[HLS95, Théorème 2.1] Le foncteur $f^{<k}$ induit une équivalence de catégorie :*

$$\tilde{f}^{<k} : \mathcal{U}/Nil_k \rightleftarrows \mathcal{F}_\omega^{<k} : \tilde{m}^{<k} .$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2.33. *Le foncteur $f^{<k}$ a un adjoint à droite $m^{<k} := s_k \circ \tilde{m}^{<k}$, où s_k est le foncteur défini dans la proposition 1.2.43.*

Remarque 2.2.34. Encore une fois, ce théorème n'est pas spécifique à $p = 2$, il est démontré dans [HLS95] pour p un nombre premier quelconque, pour p impair les définitions de $\mathcal{N}il_k$, $f^{<k}$ et de la structure de comodule sur $f^{<k}(M)(V)$ pour $M \in \mathcal{U}_p$ et V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ se définissent comme dans le cas $p = 2$ à partir de l'adjonction entre le foncteur T_V et le produit tensoriel par $H^*(V)$.

Un module instable M est n-nilpotent si et seulement si $f^{<k+n}(M)$ est trivial en degré strictement plus petit que n, en effet, pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, $f^{<n}(M)(V)$ est isomorphe en tant que module instable à $(f^{<k+n}(M)(V))^{<n}$.

Sous l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_{k+n}$ et $\mathcal{F}_\omega^{<k+n}$, les sous-catégories $\mathcal{N}il_k/\mathcal{N}il_{k+n}$ s'identifient à $\mathcal{F}_\omega^{[k,k+n[}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_\omega^{<k+n}$ dont les objets sont les foncteurs triviaux en degrés strictement plus petits que k.

Puisque le foncteur T commute avec les foncteurs Σ et Ω d'après les proposition 1.2.8 et 1.2.9, pour M un module instable nous avons $f^{<n+1}(\Sigma M) \cong \Sigma f^{<n}(M)$ et $f^{<n}(\Omega M) \cong \Omega f^{<n+1}(M)$. On obtient ainsi une adjonction

$$\Omega : \ \mathcal{F}_\omega^{[k+1,k+1+n[} \rightleftarrows \mathcal{F}_\omega^{[k,k+n[} : \Sigma,$$

Cette adjonction s'identifie donc, via les équivalences de catégories $f^{<n+k}$ et $f^{<n+k+1}$, avec l'adjonction établie dans le théorème 1.2.50.

$$\Omega : Nil_{n+k+1}/Nil_{n+1} \rightleftarrows Nil_{n+k}/Nil_n : \Sigma.$$

Proposition 2.2.35. *L'adjonction*

$$\Omega : \ \mathcal{F}_\omega^{[k+1,k+1+n[} \rightleftarrows \mathcal{F}_\omega^{[k,k+n[} : \Sigma,$$

est une équivalence de catégorie dès lors que $n \leq k+1$.

Démonstration. En effet, la counité de l'adjonction $\Omega\Sigma F \to F$ est toujours un isomorphisme pour $F \in \mathcal{F}_\omega^{[k,k+n[}$ et pour $n \leq k+1$ et $F \in \mathcal{F}_\omega^{[k,k+n[}$, le Sq_0 agit trivialement sur F et donc l'unité de l'adjonction $F \to \Sigma\Omega F$ est un isomorphisme. □

Ce résultat est une généralisation à $n > 1$ du théorème 1.2.50.

Proposition 2.2.36. *$f^{<k}$ est exact et commute avec le produit tensoriel.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'exactitude du foncteur T_V et du fait que T_V commute avec le produit tensoriel (cf. [Sch94]). □

On donne ici une première description succincte du foncteur $m^{<k}$. Par la proposition 1.1.45, pour $G \in \mathcal{F}_\omega^{<<k}$ $(m^{<k}(G))^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), m^{<k}(G))$, alors par propriété d'adjonction, on a

$$(m^{<k}(G))^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)), G).$$

Or, par la proposition 1.2.7, $T_V(F(n)) = \bigoplus_{i=0}^n F(i) \otimes \Gamma^{n-i}(V)$, où l'algèbre de Steenrod agit sur le premier facteur, et dont la structure de comodule est donnée par la proposition 2.2.6, donc

$$(m^{<k}(G))^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(\bigoplus_{i=0}^n F(i)^{<k} \otimes \Gamma^{n-i}, G).$$

Par ailleurs, toujours par la proposition 1.1.45, l'action de Sq^i de $m^{<k}(G)^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), m^{<k}(G))$ dans $m^{<k}(G)^{n+i} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n+i), m^{<k}(G))$ s'interprète comme la précomposition par $\mathrm{Sq}(i)$, on en déduit le résultat suivant en utilisant la proposition 2.2.7.

Proposition 2.2.37. *On a un isomorphisme de modules instables :*

$$m^{<k}(G) = Hom_{\mathcal{F}^{<k}}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} F(i)^{<k} \otimes \Gamma^{*-i}, G),$$

où l'action des Sq^i est la précomposition par le morphisme de $\bigoplus_{i=0}^{k-1} F(i)^{<k} \otimes \Gamma^{*-i}$ dans lui même qui envoie $Sq^j x(l) \otimes \gamma$ sur $\sum_{t=0}^{i} (Sq^j Sq(t)(x(l))) \otimes \gamma Sq^{i-t}$.

Remarque 2.2.38. Pour $k = 1$, on retrouve l'isomorphisme $m(F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F)$.

Remarque 2.2.39. Notons que dans le cas p impair, puisque $T_V(F(l)) \cong \bigoplus_{i,j,k\ ;\ i+2j+k=l} F(i) \otimes E^k(V) \otimes \Gamma^j(V)$, la formule de $m^{<n}$ devient $m^{<n}(G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j,k\ ;\ 2j+k=i} F(i) \otimes E^{*-k} \otimes \Gamma^{*-2j}, G)$, il faudrait discuter dans ce cas de la structure de $\mathcal{A}_p$-module définie sur

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j,k\ ;\ 2j+k=i} F(i) \otimes E^{*-k} \otimes \Gamma^{*-2j}, G).$$

Nous donnerons des exemples de calculs explicites du foncteur $m^{<k}$ dans la partie 2.4.

2.2.4 Objets de $\mathcal{U}^{<k}$ et nil_k-fermeture

Concluons cette sous-partie en justifiant que tout module instable dans $\mathcal{U}^{<k}$ est nil_k-fermé.

Définition 2.2.40. Soit $c : \mathcal{U}^{<k} \to \mathcal{F}^{<k}$, le foncteur qui à un module instable tronqué M associe le foncteur constant égal à M muni de la structure de comodule triviale sur $H^*(V)^{<k}$ et soit $\mathrm{ev}_0 : \mathcal{F}^{<k} \to \mathcal{U}^{<k}$ qui a un foncteur F associe $F(0)$.

Proposition 2.2.41. *On a une adjonction de la forme*

$$ev_0 : \mathcal{F}^{<k} \rightleftarrows \mathcal{U}^{<k} : c.$$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{U}^{<k}$ un module instable tronqué et $F \in \mathcal{F}^{<k}$, on définit une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(0), M)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, cM)$ de la manière suivante. Pour V un espace vectoriel et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(0), M)$ on définit $\tilde{\phi}_V : F(V) \to M$ comme la composition de ϕ et de $F(\pi_V)$ où π_V est la projection de V sur 0. Cela définit bien un morphisme de $\mathcal{F}^{<k}$ car par

définition de $\mathcal{F}^{<k}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "\kappa^{<k}_{F,V}"] \arrow[dd, "F(0)"'] & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(V) \arrow[dr, "id\otimes F(0)"] & \\
& & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(0) \\
F(0) \arrow[r, "\kappa^{<k}_{F,0}"] & H^{*<k}(0) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} F(0). \arrow[ur, "0^*\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

Cette application est un isomorphisme naturel, en effet, pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, cM)$, la commutation de ce diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "F(\pi_V)"'] & cM(V) = M \arrow[d, "cM(\pi_V)=id"] \\
F(0) \arrow[r, "\phi_0"'] & cM(0) = M
\end{tikzcd}$$

garantit que $\phi = \tilde{\phi_0}$ et réciproquement pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(0), M)$, $\mathrm{ev}_0(\tilde{\phi}) = \phi$. □

Le théorème 1.2.55 garantit que M est un module instable localement fini si et seulement si $T_V(M)$ est isomorphe à M pour tout $V \in \mathcal{V}^f$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2.42. *Si* $M \in \mathcal{U}^{<k}$, $f^{<k}(M) \cong cM$.

Démonstration. En effet, $M \in \mathcal{U}^{<k}$ est localement fini, donc $f^k(M)(V)$ est isomorphe à M pour tout V et le fait que la structure de $H^*(V)^{<k}$-comodule sur $f^{<k}(M)(V)$ soit trivial provient de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^{<k}(M)(V) \cong M \arrow[r, "\kappa^{<k}_{f^{<k}(M),V}"] \arrow[dd, "f^{<k}(M)(0)"'] & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} f^{<k}(M)(V) \arrow[dr, "id\otimes f^{<k}(M)(0)"] & \\
& & H^{*<k}(V) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} f^{<k}(M)(0) \\
f^{<k}(M)(0) \cong M \arrow[r, "\kappa^{<k}_{f^{<k}(M),W}"] & H^{*<k}(0) \otimes_{\mathcal{U}^{<k}} f^{<k}(M)(0). \arrow[ur, "0^*\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.2.43. *Soit* M *dans* $\mathcal{U}^{<k}$, *alors* M *est* nil_k*-fermé.*

Démonstration. Soit M dans $\mathcal{U}^{<k}$, alors par la proposition 2.2.42 $f^{<k}(M) \cong c(M)$, donc d'après la proposition 2.2.37, $(m^{<k} \circ f^{<k})(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(\bigoplus_{j=0}^{k-1} F(j)^{<k} \otimes \Gamma^{*-j}, cM)$, où l'action de

Sq^l sur le second membre est définie comme la précomposition par $f^{<k}(\mathrm{Sq}(l))$. En utilisant l'adjonction entre c et ev_0 on obtient $(m^{<k} \circ f^{<k})(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(\bigoplus_{j=0}^{k-1} F(j)^{<k}, M)$ où l'action de Sq^l sur le second membre est définie comme la précomposition par $f^{<k}(\mathrm{Sq}(l))_0$, c'est à dire $(\mathrm{Sq}(l))^{<k}$. On en déduit que $(m^{<k} \circ f^{<k})(M) \cong M$. □

Corollaire 2.2.44. *$J(i)$ est nil_k-fermé pour $i < k$.*

2.2.5 Les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$

Dans cette partie nous construisons une catégorie équivalente à $\mathcal{F}^{<k}$. L'objectif est de remplacer la structure de $H^{*<k}(V)$-comodule sur $F(V)$ qui n'est pas naturelle en $V \in \mathcal{V}^f$, par une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $F(V)$ dans la catégorie des espaces vectoriels gradués, cette fois-ci naturelle en V. L'idée est la suivante, comme, pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, $\Gamma^n(V)$ est le dual linéaire de $H^n(V)$ et que $\Gamma^n(V)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{gr\mathcal{V}}(N, H^*(V) \otimes M) \cong \mathrm{Hom}_{gr\mathcal{V}}(\Gamma^*(V) \otimes N, M)$ pour M et N des espaces vectoriels gradués sur $\mathbb{F}_2$. En particulier, pour tout objet gradué $F \in \mathcal{F}$, l'existence d'une structure de $H^{*<k}(V)$-comodule sur $F(V)$ dans $gr\mathcal{V}$ correspond à une structure de $\Gamma^{*<k}(V)$-module sur $F(V)$ dans $gr\mathcal{V}$.

Nous allons dans un premier temps caractériser le comportement vis à vis de l'algèbre de Steenrod des structures de $\Gamma^{*<k}(V)$-module dans $gr\mathcal{V}$ sur des objets de $\mathcal{U}^{<k}$, correspondant à des structures de $H^{*<k}(V)$-comodules dans $\mathcal{U}^{<k}$. Cela nous permettra de définir les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$, dont nous montrerons qu'elles sont équivalentes aux catégories $\mathcal{F}^{<k}$.

Comme $\mathcal{A}$ est une bialgèbre connexe, elle est munie d'une antipode χ qui en fait une algèbre de Hopf, de plus χ vérifie $\chi(\mathrm{Sq}^0) = \mathrm{Sq}^0$ et $\sum_{i=0}^{n} \chi(\mathrm{Sq}^i)\mathrm{Sq}^{n-i} = 0$ pour tout $n > 0$. L'antipode induit une équivalence de catégorie entre les modules à gauches et les modules à droite sur $\mathcal{A}$ de la façon suivante : à N un module à droite on associe le module à gauche dont l'espace vectoriel gradué sous-jacent est N, et dont l'action de $\mathcal{A}$ est donnée par $\mathrm{Sq}^n\gamma := \gamma\chi(\mathrm{Sq}^n)$.

Proposition 2.2.45. *Soit M et Z deux modules à gauche et N un module à droite sur $\mathcal{A}$, on suppose N de type fini. Alors $Hom_{\mathcal{A}-mod}(Z, N^\sharp \otimes M) \cong Hom_{\mathcal{A}-mod}(N \otimes Z, M)$, où $N^\sharp$ désigne le dual linéaire gradué de N et où la structure de module à gauche sur $N \otimes Z$ est la structure diagonale de celle de Z et de celle de N obtenue par l'équivalence de catégories décrite précédemment.*

Démonstration. Comme N est de type fini, nous avons tout d'abord un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués entre $N^\sharp \otimes M$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N, M)$ qui envoie $(\nu \otimes m)$ sur l'application $n \mapsto \nu(n)m$. Par ailleurs, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N, M)$ a une structure de bimodule à gauche sur l'algèbre de Steenrod : la première structure de module vient de l'action à droite de $\mathcal{A}$ sur N, la seconde de son action à gauche sur M. Via la diagonale de $\mathcal{A}$, on obtient une structure de module à gauche sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N,M)$ naturelle en N et M, qui fait de l'isomorphisme mentionné plus haut un isomorphisme de $\mathcal{A}$-module.

Alors un morphisme de $\mathcal{A}$-module de Z dans $N^\sharp \otimes M$ est équivalent à un morphisme de $\mathcal{A}$-module de Z dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N,M)$. Mais on a un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\mathcal{V}}(Z, \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N,M))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\mathcal{V}}(N \otimes Z, M)$ donné par l'évaluation. Or, la condition pour une application linéaire ϕ de Z dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(N,M)$ d'être un morphisme de module sur l'algèbre de Steenrod est équivalente à la condition que son image $\tilde{\phi}$ par cette isomorphisme vérifie pour tout $z \in Z$ et $\nu \in N$

$$\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^k \tilde{\phi}(\nu \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes z).$$

Montrons que cette condition est équivalente à exiger que $\tilde{\phi}$ soit un morphisme de module sur $\mathcal{A}$. En effet :

$$\tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^l(\nu \otimes z)) = \sum_{i=0}^{l} \tilde{\phi}(\nu\chi(\mathrm{Sq}^i) \otimes \mathrm{Sq}^{l-i} z),$$

$$\tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^l(\nu \otimes z)) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{l-i} \mathrm{Sq}^j \tilde{\phi}(\nu\chi(\mathrm{Sq}^i)\mathrm{Sq}^{l-i-j} \otimes z),$$

$$\tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^l(\nu \otimes z)) = \sum_{j=0}^{l} \mathrm{Sq}^j \tilde{\phi}(\nu(\sum_{i=0}^{l-j} \chi(\mathrm{Sq}^i)\mathrm{Sq}^{l-i-j}) \otimes z),$$

et donc, d'après les propriétés qu'on a rappelé sur l'antipode de $\mathcal{A}$,

$$\tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^l(\nu \otimes z)) = \mathrm{Sq}^l \tilde{\phi}(\nu \otimes z).$$

Réciproquement, soit $\tilde{\phi}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-modules entre $N \otimes Z$ et M et soit ν et z des éléments respectivement de N et Z. Alors,

$$\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{k=0}^{i} \sum_{t=0}^{i-k} \tilde{\phi}(\nu \mathrm{Sq}^t \chi(\mathrm{Sq}^{i-t-k}) \otimes \mathrm{Sq}^k z),$$

$$\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{t=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-t} \tilde{\phi}(\nu \mathrm{Sq}^t \chi(\mathrm{Sq}^{i-t-k}) \otimes \mathrm{Sq}^k z),$$

$$\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{k=0}^{i} \tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^{i-t}(\nu \mathrm{Sq}^t \otimes z)),$$

$$\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-t} \tilde{\phi}(\nu \mathrm{Sq}^t \otimes z).$$

□

Remarque 2.2.46. Dans la pratique, pour justifier qu'un morphisme de $N \otimes Z$ dans M est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules à gauche, on vérifiera la condition $\tilde{\phi}(\nu \otimes \mathrm{Sq}^i z) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^k \tilde{\phi}(\nu \mathrm{Sq}^{i-k} \otimes z)$.

Corollaire 2.2.47. *Pour tout $M \in \mathcal{U}$,*

$$Hom_{\mathcal{U}}(T_V(M), T_V(M) \otimes H^*(V)) \cong Hom_{\mathcal{A}-mod}(\Gamma^*(V) \otimes T_V(M), T_V(M)).$$

Corollaire 2.2.48. *Soit Z dans $\mathcal{U}^{<k}$ et M dans $\mathcal{U}$, alors $Hom_{\mathcal{U}^{<k}}(Z, (H^*(V) \otimes M)^{<k}) \cong Hom_{\mathcal{A}-mod}((\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}), M)$.*

Démonstration. C'est une application directe de la proposition 2.2.26. □

Lemme 2.2.49. *Une application linéaire $\phi : \Gamma^*(V) \otimes Z \to M^{<k}$ s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathcal{A}$-module $\tilde{\phi} : \Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z} \to M$, si et seulement si $\phi(\gamma \otimes Sq^i(z)) = \sum_{n=0}^{i} Sq^{i-n}\phi(\gamma Sq^n \otimes z)$, pour tout $z \in Z$ et pour tout i tel que $i + |z| < k$.*

Démonstration. Une application linéaire de $\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}$ dans M est $\mathcal{A}$-linéaire si et seulement si elle vérifie $\tilde{\phi}(\gamma \otimes \mathrm{Sq}^i(z)) = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-n}\tilde{\phi}(\gamma \mathrm{Sq}^n \otimes z)$, pour tout $z \in \tilde{Z}$ et pour tout i. Ce lemme est alors une conséquence du fait qu'un morphisme ϕ de $\Gamma^*(V) \otimes Z$ dans $M^{<k}$ tel que $\phi(\gamma \otimes \mathrm{Sq}^i(z)) = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-n}\phi(\gamma \mathrm{Sq}^n \otimes z)$, pour tout $z \in Z$ et pour tout i tel que $i + |z| < k$, s'étend de manière unique en un morphisme $\tilde{\phi}$ vérifiant $\tilde{\phi}(\gamma \otimes \mathrm{Sq}^i(z)) = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-n}\tilde{\phi}(\gamma \mathrm{Sq}^n \otimes z)$, pour tout $z \in \tilde{Z}$ et pour tout i. □

Lemme 2.2.50. *Si $M \in \mathcal{U}^{<k}$, on a un isomorphisme naturel entre $Hom_{\mathcal{A}-mod}((\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}), \tilde{M})$ et $Hom_{\mathcal{A}-mod}((\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}), M)$.*

Démonstration. La projection canonique $\tilde{M} \to \tilde{M}^{<k} \cong M$ induit un isomorphisme entre $(H^*(V) \otimes \tilde{M})^{<k}$ et $(H^*(V) \otimes M)^{<k}$. Par cet isomorphisme et le corollaire 2.2.48, on obtient que la composition par la troncature en degrés plus petits que k induit un isomorphisme naturel en M, entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-mod}((\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}), \tilde{M})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-mod}((\Gamma^*(V) \otimes \tilde{Z}), M)$. □

Définition 2.2.51. Soit ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs F, de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}^{<k}$ tels que $\widetilde{F(V)}$ est muni pour tout V d'une structure de $\Gamma^*(V)$-module dans $\mathcal{A}$-mod, $\theta_{F,V} : \Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \to \widetilde{F(V)}$. Et dont les morphismes sont les transformations naturelles compatibles avec cette structure de module sur $\widetilde{F(V)}$.
Soit également ${}_m\mathcal{F}^{<k}_\omega$ sa sous-catégorie pleine des foncteurs analytiques en tout degré.

Remarque 2.2.52. En utilisant les lemmes 2.2.49 et 2.2.50, la structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $\widetilde{F(V)}$, pour F un objet de ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ est déterminée par un morphisme $\theta_{F,V} \ : \ \Gamma^*(V) \otimes F(V) \to F(V)$ naturel en V tel que $\theta_{F,V}(\gamma \otimes \mathrm{Sq}^i(z)) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{Sq}^{i-k}\theta_{F,V}(\gamma \mathrm{Sq}^k \otimes z)$, pour tout $z \in Z$ et pour tout i tel que $i + |z| < k$.

Avant de montrer l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{F}^{<k}$ et ${}_m\mathcal{F}^{<k}$, expliquons pourquoi le comportement vis à vis de $\mathcal{A}$, impose de considérer une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $\widetilde{F(V)}$ et pourquoi on ne peut se contenter de considérer une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $F(V)$. Le problème vient de ce que $\Gamma^*(V)$, qui est concentré en degrés négatifs, n'est pas un module instable en tant que module à gauche sur l'algèbre de Steenrod. Plus précisément, pour M un objet de $\mathcal{U}^{<k}$, N un objet de $\mathcal{U}$ et $\phi \ : \ M \to (N \otimes H^*(V))^{<k}$, l'application $\mathbb{F}_2$-linéaire $\tilde{\phi}$ entre $\Gamma^*(V) \otimes M$ et N obtenue par l'isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{gr\mathcal{V}}(M, N \otimes H^*(V))$ et $\mathrm{Hom}_{gr\mathcal{V}}(M \otimes \Gamma^*(V), N)$ vérifie que pour tout $\gamma \otimes m$ de degré compris entre 0 et $k-1$ et pour tout entier naturel i, $\tilde{\phi}(\mathrm{Sq}^i(\gamma \otimes m)) = \mathrm{Sq}^i\tilde{\phi}(\gamma \otimes m)$, mais ce n'est pas vrai à priori pour $\gamma \otimes m$ de degré strictement négatif.

Par exemple, on pourrait avoir pour m de degré $k-1$ et γ dans $\Gamma^k(V)$ (c'est à dire de degré $-k$, pour sa structure de module à gauche sur $\mathcal{A}$) $\tilde{\phi}(\gamma\chi(\mathrm{Sq}^1) \otimes m) \neq 0$ pourtant $\gamma\chi(\mathrm{Sq}^1) \otimes m = \mathrm{Sq}^1(\gamma \otimes m)$, puisque m est de degré maximal dans M et $\tilde{\phi}(\gamma \otimes m) = 0$ puisque $\gamma \otimes m$ est de degré strictement négatif et que N est un module instable. Le morphisme $\Gamma^*(V) \otimes M \to N$ n'est donc pas $\mathcal{A}$-linéaire, mais le devient si on l'étend à $\Gamma^*(V) \otimes \tilde{M} \to N$, par le lemme 2.2.49.

Théorème 2.2.53. *Les catégorie $\mathcal{F}^{<k}$ (resp. $\mathcal{F}^{<k}_\omega$) et ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ (resp. ${}_m\mathcal{F}^{<k}_\omega$) sont équivalentes.*

Démonstration. On a un foncteur oubli de chacune des catégories $\mathcal{F}^{<k}$ et ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ vers la catégorie $\mathrm{Funct}(\mathcal{V}^f, \mathcal{U}^{<k})$. Pour $F \in \mathrm{Funct}(\mathcal{V}^f, \mathcal{U}^{<k})$, la donnée pour tout V d'un morphisme $\kappa_{F,V}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{<k}}(F(V), (\widetilde{F(V)} \otimes \widetilde{H^{*<k}(V)})^{<k})$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de $\mathcal{A}$-module $\tilde{\kappa}_{F,V}$ entre $\Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)}$ et $\widetilde{F(V)}$ par le corollaire 2.2.48 et la remarque 2.2.50.

Or, pour $\kappa_{F,V}$ une application de $F(V)$ dans $F(V) \otimes H^{*<k}(V)$ définie pour tout V, la condition que pour tout $\alpha : V \to W$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "\kappa_{F,V}"] \arrow[dd, "F(\alpha)"'] & (H^{*<k}(V) \otimes F(V))^{<k} \arrow[dr, "id \otimes F(\alpha)"] & \\
 & & (H^{*<k}(V) \otimes F(W))^{<k} \\
F(W) \arrow[r, "\kappa_{F,W}"] & (H^{*<k}(W) \otimes F(W))^{<k} \arrow[ur, "\alpha^* \otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

équivaut à la condition que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \arrow[r, "\tilde{\kappa}_{F,V}"] \arrow[d, "\Gamma^*(\alpha)\otimes\widetilde{F(\alpha)}"'] & \widetilde{F(V)} \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
\Gamma^*(W) \otimes \widetilde{F(W)} \arrow[r, "\tilde{\kappa}_{F,W}"] & \widetilde{F(W)},
\end{tikzcd}$$

c'est à dire que le morphisme $\tilde{\kappa}_{F,V}$ soit naturel, en effet si on note $\tilde{\phi}$ l'adjoint par la proposition 2.2.48 de $F(V) \to (H^*(V) \otimes F(W))^{<k}$ le premier diagramme implique d'une part que $\tilde{\phi} = F(\alpha) \circ \tilde{\kappa}_{F,V}$ et d'autre part que $\tilde{\phi}$ se factorise de la manière suivante

$$\Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \xrightarrow{\Gamma^*(\alpha)\otimes id} \Gamma^*(W) \otimes \widetilde{F(V)} \xrightarrow{id\otimes F(\alpha)} \Gamma^*(W) \otimes \widetilde{F(W)} \xrightarrow{\tilde{\kappa}_{F,W}} \widetilde{F(W)}.$$

Par ailleurs, la coassociativité du morphisme de structure $\kappa_{F,V} : F(V) \to (F(V) \otimes H^*(V))^{<k}$, équivaut à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^*(V) \otimes \Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \arrow[r, "id\otimes\tilde{\kappa}_{F,V}"] \arrow[d, "\nabla_{\Gamma^*(V)}\otimes id"'] & \Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \arrow[d, "\tilde{\kappa}_{F,V}"] \\
\Gamma^*(V) \otimes \widetilde{F(V)} \arrow[r, "\tilde{\kappa}_{F,V}"] & \widetilde{F(V)}.
\end{tikzcd}$$

On montre de même que la counitarité de $\kappa_{F,V}$ équivaut à l'unitarité de $\tilde{\kappa}_{F,V}$.

Donc $F \in \mathrm{Funct}(\mathcal{V}^f, \mathcal{U}^{<k})$, un foncteur muni d'une application de structure $\kappa_{F,V} : F(V) \to F(V) \otimes H^{*<k}(V)$ est un objet de $\mathcal{F}^{<k}$ si et seulement si F muni de $\tilde{\kappa}_{F,V}$ est un objet de ${}_m\mathcal{F}^{<k}$. Ce qui définit une équivalence entre ces deux catégories.

□

Par abus de notation, nous utiliserons aussi les notations $\mathcal{F}^{<k}$, $\mathcal{F}_\omega^{<k}$, $\mathcal{F}^{[k,k+n[}$ etc, pour signifier les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$, ${}_m\mathcal{F}_\omega^{<k}$, ${}_m\mathcal{F}^{[k,k+n[}$ etc.

Remarque 2.2.54. Les constructions de cette partie devraient se généraliser au cas p impair. L'ensemble des constructions reposent formellement sur l'adjonction entre le foncteur $(\_)^{<k}$ et l'extension de Kan $\widetilde{(\_)}$ qui ne fait intervenir que l'existence des générateurs projectifs $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et se généralise donc sans difficultés au cas p impair, et sur la proposition 2.2.45. Notons que dans le cas p impair la structure de $H^*(V)$-comodule sur $f^{<k}(M)(V)$ correspondrait à une structure de $E^*(V) \otimes \Gamma^{*/2}(V)$-modules sur $f^{<k}\widetilde{(M)}(V)$.

2.3 Algèbre homologique dans les catégories ${}_m\mathcal{F}^{<k}$

Un des intérêts à long terme de l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_k$ et la catégorie ${}_m\mathcal{F}_\omega^{<k}$ repose dans l'espoir de pouvoir approcher le calcul des groupes d'extension $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}(M, N)$ par des groupes d'extensions dans la catégorie des foncteurs. Dans cette partie, nous allons établir certains résultats élémentaires d'algèbre homologique dans les catégories ${}_m\mathcal{F}_\omega^{<k}$.

2.3.1 Cogénérateurs injectifs

Proposition 2.3.1. *Soit $F \in \mathcal{F}_\omega^{<k}$ et $i < k$, $Hom_{\mathcal{F}^{<k}}(F, f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))) \cong (F^i(V))^\sharp$.*

En conséquence, $\mathcal{F}_\omega^{<k}$ contient assez d'injectifs.

Démonstration. Puisque l'unité de l'adjonction $F \to f^{<k}(m^{<k}(F))$ est un isomorphisme,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k} \circ m^{<k}(F), f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))).$$

Alors, par adjonction entre les foncteurs $f^{<k}$ et $m^{<k}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(m^{<k}(F), m^{<k} \circ f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))),$$

mais, puisque $H^*(V) \otimes J(i)$ est nil_k-réduit et injectif d'après le théorème 1.1.56, $H^*(V) \otimes J(i)$ est nil_k-fermé et donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(m^{<k}(F), H^*(V) \otimes J(i)), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(F, f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))) & \cong & (F(V)^i)^\sharp. \end{array}$$

□

Puisque $J(i) \in \mathcal{U}^{<k}$, $f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i)) \cong H^*(V)^{<k} \otimes J(i) \otimes I_V$ où la structure de $H^*(W)$-comodule de $H^*(V)^{<k} \otimes J(i) \otimes I_V(W)$ est induite de celle de $H^*(V)^{<k} \otimes I_V(W)$.

2.3.2 Générateurs projectifs et foncteur décalage

Commençons par définir un foncteur décalage dans la catégorie ${}_m\mathcal{F}^{<k}$.

Définition 2.3.2. Pour V et W des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimensions finies, soit Δ_V : ${}_m\mathcal{F}^{<k} \to_m \mathcal{F}^{<k}$ le foncteur défini par $\Delta_V F(W) := F(V \oplus W)$ et dont le morphisme de structure $\theta_{\Delta_V(F),W}$: $\Gamma^*(W) \otimes \Delta_V(F)(W) \to \Delta_V(F)(W)$ est donné par la composition de $\theta_{F,V\oplus W}$ par l'injection canonique de W dans $V \oplus W$.

Soit également $\rho_{F,V}$: $F \to \Delta_V F$ le morphisme dans ${}_m\mathcal{F}^{<k}$ défini, pour W un espace vectoriel, par $F(\iota_V^{V\oplus W})$: $F(V) \to F(V \oplus W)$.

Proposition 2.3.3. *Le foncteur Δ_V est exact.*

Proposition 2.3.4. *Soit M un module instable et V un espace vectoriel. Alors on a un isomorphisme naturel $\Delta_V(f^{<k}(M)) \cong f^{<k}(T_V(M))$.*

Démonstration. En effet, $f^{<k}(T_V(M))(W) \cong [T_W(T_V(M))]^{<k} \cong T^{<k}_{V\oplus W}(M) \cong \Delta_V(f^{<k}(M))(W)$. Et cet isomorphisme est compatible avec les structures de $\Gamma^*(W)$-modules impliquées, en effet la structure de $\Gamma^*(W)$-module de $f^{<k}(T_V(M))(W) \cong [T_W(T_V(M))]^{<k}$ est la troncature en degré plus petit que k de l'application $\Gamma^*(W) \otimes T_W(T_V(M)) \to T_W(T_V(M))$. Or par construction de l'application naturelle $\theta_{M,V}$ de la proposition 2.2.3, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T_{V\oplus W}(M) \arrow[r, "\kappa_{M,V\oplus W}"] \arrow[d, "\cong"] & T_{V\oplus W}(M) \otimes H^*(V\oplus W) \arrow[d, "id\otimes H^*(\iota_W^{V\oplus W})"] \\
T_W(T_V(M)) \arrow[r, "\kappa_{T_V(M),W}"] & T_W(T_V(M)) \otimes H^*(W),
\end{tikzcd}$$

c'est à dire que l'application $\theta_{T_V(M),W} : \Gamma^*(W) \otimes T_W(T_V(M)) \to T_W(T_V(M))$ est donnée par la composition de $\Gamma^*(\iota_W^{V\oplus W})$ avec $\theta_{M,V\oplus W}$. □

Proposition 2.3.5. *Si M est nil_k-fermé, $T_V(M)$ est nil_k-fermé.*

Démonstration. Soit M un module nil_k-fermé, et soit $F_0 := f^{<k}(I_0)$ et $F_1 := f^{<k}(I_1)$, où I_0 et I_1 sont des sommes directes d'objets de $\mathcal{U}$ de la forme $H^*(W) \otimes J(i)$ avec $i < k$, tels que $0 \to f^{<k}(M) \to F_0 \to F_1$ soit exacte.

Alors, d'une part, comme le foncteur $m^{<k}$ est exact à gauche et que M est nil_k-fermé, $0 \to M \to I_0 \to I_1$ est exacte, et donc comme le foncteur T_V est exact, $0 \to T_V(M) \to T_V(I_0) \to T_V(I_1)$ l'est aussi.

D'autre part, par exactitude du foncteur Δ_V, $0 \to \Delta_V(f^{<k}(M)) \to \Delta_V(F_0) \to \Delta_V(F_1)$ est exacte. Remarquons que, pour F un foncteur de la forme $f^{<k}(H^*(W)) \otimes J(i) \cong H^{*<k}(W) \otimes J(i) \otimes I_W$ avec $i < k$, $\Delta_V(f^{<k}(H^*(W)) \otimes J(i)) \cong H^{*<k}(W) \otimes J(i) \otimes I_W(V) \otimes I_W$ et donc que $m^{<k}(\Delta_V(f^{<k}(H^*(W)) \otimes J(i))) \cong T_V(H^*(W) \otimes J(i))$. Alors, en appliquant le foncteur $m^{<k}$ on obtient la suite exacte $0 \to m^{<k}(\Delta_V(f^{<k}(M)) \to T_V(I_0) \to T_V(I_1)$. Par la proposition 2.3.4, $m^{<k}(\Delta_V(f^{<k}(M))$, est la nil_k-localisation de $T_V(M)$. Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_V(M) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & T_V(I_0) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & T_V(I_1) \arrow[d, "m"] \\
0 \arrow[r] & m^{<k}(\Delta_V(f^{<k}(M))) \arrow[r] & T_V(I_0) \arrow[r] & T_V(I_1),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales n et m sont des isomorphismes et où f est la nil_k-localisation. Par le lemme des cinq, on en déduit que f est un isomorphisme et donc que $T_V(M)$ est nil_k-fermé. □

Corollaire 2.3.6. *Soit F un foncteur de $\mathcal{F}^{<k}$, $m^{<k}(\Delta_V(F)) \cong T_V(m^{<k}(F))$.*

Démonstration. En effet, $m^{<k}(\Delta_V(F)) \cong m^{<k}(\Delta_V((f^{<k} \circ m^{<k})(F))) \cong (m^{<k} \circ f^{<k})(T_V(m^{<k}(F))$. Or $(T_V(m^{<k}(F))$ est nil_k-fermé d'après la proposition 2.3.5. □

Lemme 2.3.7. *Pour $G \in \mathcal{F}$ et $F \in \mathcal{F}^{<k}$, $\underline{Hom}_{\mathcal{F}}(G,F)$ est à valeurs dans $\mathcal{U}^{<k}$ où les Sq^i agissent par composition.*

De plus, on peut munir $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)(W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \Delta_W F)$ d'une structure de $\Gamma^*(W)$-module de sorte que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)$ soit un objet de ${}_m\mathcal{F}^{<k}$.

Définition 2.3.8. Pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(G, \Delta_W F)$, $g \in G(V)$ et $\gamma \in \Gamma^*(W)$, on définit une structure de $\Gamma^*(W)$-module sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)(W)$ par

$$(\theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F),W}(\gamma \otimes \phi))_V(g) := \theta_{F,V\oplus W}(\Gamma^*(\iota_W^{V\oplus W})(\gamma) \otimes \phi(g)).$$

C'est une structure de module dans $gr\mathcal{V}$, l'associativité de l'action de $\Gamma^*(W)$ et son unité sont des conséquences directes du fait que $\Gamma^*(W)$ est une algèbre associative unitaire.

Proposition 2.3.9. *$\underline{Hom}_{\mathcal{F}}(G,F)$ est un objet de ${}_m\mathcal{F}^{<k}$.*

Démonstration. Le morphisme $\theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F),W}$ est naturel en W. Il vérifie que

$$\theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F),W}(\gamma \otimes \mathrm{Sq}^i \phi) = \Sigma_{t=0}^{i} \mathrm{Sq}^t \theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F),W}(\gamma \mathrm{Sq}^{i-t} \otimes \phi),$$

c'est une conséquence de ce que $\theta_{F,V}$ vérifie la même condition. D'après le lemme 2.2.49, $\theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F),W}$ s'étend donc de manière unique, en un morphisme de $\Gamma^*(W) \otimes \widetilde{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)(W)}$ dans $\widetilde{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)(W)}$ $\mathcal{A}$-linéaire, donnant à $\widetilde{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)(W)}$ une structure de $\Gamma^*(W)$-module dans $\mathcal{A}$-mod naturelle en W. Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F)$ est un objet de $\mathcal{F}^{<k}$. □

Définition 2.3.10. Soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F}^{<k} \to \mathcal{F}^{<k}$ le foncteur ainsi défini.

Alors, pour V un espace vectoriel et $F \in \mathcal{F}^{<k}$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(P_V,F) \cong \Delta_V(F)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{F}^{<k}$.

Proposition 2.3.11. *Soit $G \in \mathcal{F}$ et soit $F \in \mathcal{F}^{<k}$. Alors, $F \otimes G$ appartient à $\mathcal{F}^{<k}$.*

Démonstration. $F \otimes G$ est un foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{U}^{<k}$. Par ailleurs, $\widetilde{F \otimes G} \cong \tilde{F} \otimes G$. La structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $\tilde{F}(V)$ induit donc une structure de $\Gamma^*(V)$-module sur $\widetilde{F \otimes G}(V)$ naturelle en V. □

Proposition 2.3.12. *Pour F_1 et F_2 deux objets de $\mathcal{F}^{<k}$ et $G \in \mathcal{F}$,*

$$Hom_{\mathcal{F}^{<k}}(F_1 \otimes G, F_2) \cong Hom_{\mathcal{F}^{<k}}(F_1, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(G, F_2)).$$

Démonstration. Si on oublie dans un premier temps que F_1 et F_2 sont des objets de $\mathcal{F}^{<k}$ pour ne considérer que leur structure d'objets de $\mathcal{F}$, la propriété 2.1.25 associe isomorphiquement à un objet ϕ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F_1 \otimes G, F_2)$ un objet $\tilde{\phi}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F_1, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G, F_2))$. Or comme les Sq^i agissent sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G, F_2)$ par composition, ϕ est un morphisme naturel dans $\mathcal{U}^{<k}$ si et seulement si c'est le cas pour $\tilde{\phi}$ et par définition de $\theta_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(G,F_2),W}$, ϕ est un morphisme dans $\mathcal{F}^{<k}$, si et seulement si $\tilde{\phi}$ est un morphisme dans $\mathcal{F}^{<k}$. □

Proposition 2.3.13. *Pour tout $n < k$ et V, $f^{<k}(F(n)) \otimes P_V$ est projectif dans $\mathcal{F}^{<k}$ et pour tout G dans $\mathcal{F}^{<k}$, $Hom_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)) \otimes P_V, G) \cong G(V)^n$.*

En conséquence, la catégorie $\mathcal{F}^{<k}$ contient assez de projectifs.

Démonstration.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)) \otimes P_V, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(P_V, G))$$

par l'adjonction entre les foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(P_V, \_)$ et $\_ \otimes P_V$,

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)), \Delta_V(G)),$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), m^{<k}(\Delta_V(G)))$$

par l'adjonction entre les foncteurs $f^{<k}$ et $m^{<k}$,

$$\cong T_V^n(m^{<k}(G)),$$

par le corollaire 2.3.6,

$$\cong G(V)^n.$$

De cet isomorphisme, on déduit que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(F(n)) \otimes P_V, \_)$ est exact et donc que $f^{<k}(F(n)) \otimes P_V$ est projectif.

□

2.3.3 Suite spectrale de Grothendieck

Dans cette partie, nous justifions l'existence d'une suite spectrale de Grothendieck reliant les groupes d'extensions dans $\mathcal{F}^{<k}$ de $f^{<k}(M)$ par F, pour M un module instable et F un objet de $\mathcal{F}^{<k}$ et les groupes $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(M, (\mathbf{R}^q m^{<k})(F))$. Cette suite spectrale, n'est cependant dans la pratique peu utilisable, les groupes d'extensions étant à priori plus faciles à calculer dans la catégorie $\mathcal{F}^{<k}$ que dans la catégorie $\mathcal{U}$. Cette partie est une application du théorème 5.8.3 dans [Wei].

Théorème 2.3.14. *Soit M un module instable et F un objet de $\mathcal{F}_\omega^{<k}$, il existe une suite spectrale $E^r_{p,q}$ qui converge vers $Ext^{p+q}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(M), F)$ et dont la page E^2 est $E^2_{p,q} \cong Ext^p_{\mathcal{U}}(M, (\boldsymbol{R}^q m^{<k})(F))$.*

Démonstration. On se donne une résolution injective I_* de F ne faisant intervenir que des sommes directes de $f^{<k}(H^*(V) \otimes J(i))$. $m^{<k}$ envoit les foncteurs apparaissant dans cette résolution sur des injectifs de $\mathcal{U}$ donc sur des objets acycliques pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \_)$. Par le théorème 5.8.3 dans [Wei] on a une suite spectrale de Grothendieck dont la page E^2 est celle annoncée et qui converge vers les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, m^{<k}(\_))$ c'est à dire, par adjonction, ceux de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<k}}(f^{<k}(M), F)$. □

2.3.4 Relation avec la filtration de Krull

On cherche à caractériser les éléments dans $(\mathcal{U}_n \cap Nil_k)/(\mathcal{U}_n \cap Nil_{m+k})$ à partir de leurs images dans $\mathcal{F}_\omega^{[k,m+k[}$. Le foncteur $\bar{T}$ est l'adjoint au produit tensoriel par $\overline{H^*(\mathbb{F}_2)}$. Le produit tensoriel dans $\mathcal{U}$ étant monoïdal symmétrique, on a un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\overline{H^*(\mathbb{F}_2)} \otimes (H^*(V) \otimes \_)$ et $H^*(V) \otimes (\overline{H^*(\mathbb{F}_2)} \otimes \_)$, d'où pour tout module instable M, $T_V(\bar{T}(M)) \cong \bar{T}(T_V(M))$ et cet isomorphisme est naturel en M. Mais $\bar{T}(T_V(M))$ est isomorphe au noyau de l'application $T_{V \oplus \mathbb{F}_2}(M) \cong T(T_V(M)) \to T_V(M)$ induite par la projection de $V \oplus \mathbb{F}_2$ sur V. On a donc le lemme suivant

Lemme 2.3.15. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\bar{\Delta}(f^k(M)) = f^k(\bar{T}(M))$.*
De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout espace vectoriel V, $\Delta_V(f^k(M)) = f^k(T_V(M))$.

En conséquence, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.16. *Soit M un module instable, alors si $M \in \mathcal{U}_n$, $f^k(M)$ est polynomial de degré n pour tout n.*

Donc d'après le théorème 1.2.53, on a la proposition suivante.

Proposition 2.3.17. *L'équivalence de catégorie*

$$f^{[k,k+m[} : Nil_k/Nil_{m+k} \rightleftarrows \mathcal{F}_\omega^{[k,k+m[} : m^{[k,k+m[}$$

induit une équivalence de catégorie

$$f^{[k,k+m[} : (\mathcal{U}_n \cap Nil_k)/(\mathcal{U}_n \cap Nil_{m+k}) \rightleftarrows \mathcal{F}_n^{[k,k+m[} : m^{[k,k+m[},$$

où $\mathcal{F}_n^{[k,k+m[}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{[k,k+m[}$ dont les objets sont les foncteurs polynomiaux de degrés inférieurs ou égaux à n en chaque degré.

2.4 Exemples de calculs de $m^{<n}$

Nous allons maintenant recenser des exemples de calculs des foncteurs $m^{<n}$ avec n petit.

2.4.1 Objet engendré par un foncteur analytique en degré n

Définition 2.4.1. Pour n un entier , soit $(\_)_n\ :\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{<n+1}$, le foncteur qui à un foncteur $F \in \mathcal{F}$ associe l'objet de $\mathcal{F}^{<n+1}$ qui a F comme composante de degré n et 0 en degrés différents de n et qui est muni de l'action triviale de Γ^*.

Proposition 2.4.2. *Soit F un foncteur analytique. On considère le foncteur $F_n \in_m \mathcal{F}_\omega^{<n+1}$. On a un isomorphisme*

$$f^{<n+k} \circ m^{<n+1}(F_n) \cong \left[\Sigma^n \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F_n))\right]^{<n+k}.$$

Démonstration. En utilisant le calcul de $m^{<n+1}$ de la proposition 2.2.37, et la trivialité de F_n en degré strictement plus petit que n, on obtient :

$$\begin{aligned} m^{<n+1}(F_n) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-n}, F_n), \\ m^{<n+1}(F_n) &\cong \Sigma^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F_n). \end{aligned}$$

Par définition de $f^{<n+k}$:

$$f^{<n+k} \circ m^{<n+1}(F_n)(V) \cong T_V(\Sigma^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F_n))^{<n+k}.$$

Alors, puisque T_V commute avec le foncteur Σ :

$$f^{<n+k} \circ m^{<n+1}(F_n)(V) \cong \left[\Sigma^n T_V(\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F_n))\right]^{<n+k}.$$

Or, par la proposition 2.1.35, $T_V(m(F)) \cong m(\Delta_V(F))$ pour tout foncteur analytique F et tout espace vectoriel de dimension finie V.

$$f^{<n+k} \circ m^{<n+1}(F_n)(V) \cong \left[\Sigma^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Delta_V(F_n))\right]^{<n+k}.$$

Et donc, par définition du Hom interne :

$$f^{<n+k} \circ m^{<n+1}(F_n) \cong \left[\Sigma^n \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F_n))\right]^{<n+k}.$$

$\square$

Donnons maintenant deux exemples un peu moins élémentaires de calculs de $m^{<k}$.

2.4.2 Calcul de $m^{<2}$

Considérons un objet G de $\mathcal{F}_\omega^{<2}$. La structure de G est entièrement déterminée par la donnée de G_0, sa composante de degré 0, G_1 et la transformation naturelle de structure $\theta_{G,V} : \Gamma^1(V) \otimes G_1(V) \to G_0(V)$, en effet le seul carré de Steenrod à pouvoir agir sur G de façon non triviale est le Sq^0. Nous cherchons à calculer $m^{<2}(G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<2}}(F(0)^{<2} \otimes \Gamma^* \oplus F(1)^{<2} \otimes \Gamma^{*-1}, G)$.

Une telle transformation naturelle est uniquement déterminée par la donnée d'une transformation naturelle de foncteurs analytiques α_0, de Γ^* dans G_0 et d'une transformation naturelle α_1 de Γ^{*-1} dans G_1, telles que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^1 \otimes \Gamma^{*-1} \arrow[r, "id\otimes\alpha_1"] \arrow[d, "\nabla_{\Gamma^*}"'] & \Gamma^1 \otimes G_1 \arrow[d, "\theta"] \\
\Gamma^* \arrow[r, "\alpha_0"'] & G_0.
\end{tikzcd}$$

C'est équivalent, par adjonction entre les foncteurs $\Gamma^1 \otimes -$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \_)$, à imposer que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{*-1} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \Gamma^*) \cong \Gamma^{*-1} \arrow[r, "\alpha_0\circ_"'] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0).
\end{tikzcd}$$

Autrement dit une telle transformation naturelle est un couple (α_0, α_1) appartenant au pullback du diagramme suivant dans la catégorie des espaces vectoriels :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, G_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0)),
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est induite par $G_1 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0)$, l'adjoint de la restriction $\theta_{G,V}$ à $\Gamma^1 \otimes G_1$, et dont la flèche horizontale est le morphisme qui à $\alpha : \Gamma^* \to G_0$ associe

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \alpha) \ : \ \Gamma^{*-1} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \Gamma^*) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0).$$

De plus, le calcul de $T_V(\mathrm{Sq}(i))$ de la proposition 2.2.7 garantit que les morphismes qui à un élément de $m^{<2}(G)$ associent respectivement α_0 et α_1 sont des morphismes de modules instables, donc $m^{<2}(G)$ est le pullback dans $\mathcal{U}$ de ce diagramme.

On peut être plus précis que ça en identifiant les modules instables qui apparaissent dans ce diagramme. Par définition, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, G_0) \cong m(G_0)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1) \cong \Sigma m(G_1)$, en effet $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1)^i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, G_1)^{i-1} \cong m(G_1)^{i-1}$ et ces isomorphismes d'espaces vectoriels sont compatibles avec l'action de l'algèbre de Steenrod. Il nous reste à identifier

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0)).$$

Lemme 2.4.3. *Soit $G_0 \in \mathcal{F}$, alors on a un isomorphisme naturel $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0)) \cong \Sigma(m \circ f)(\Omega m(G_0))$.*

Démonstration. Calculons $f(\Omega m(G_0))$.

$$f(\Omega m(G_0))(V) \cong T_V(\Omega m(G_0))^0,$$

par commutation de T_V avec le foncteur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} &\cong [\Omega(T_V(m(G_0)))]^0\,, \\ &\cong [\Omega m(\Delta_V(G_0))]^0\,, \\ &\cong [m(\Delta_V(G_0))]^1\,. \end{aligned}$$

Par la proposition 1.1.45, on a donc

$$\begin{aligned} &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), m(\Delta_V(G_0))), \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, \Delta_V(G_0)), \end{aligned}$$

et donc

$$f(\Omega m(G_0)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0).$$

□

Pour M un module instable, l'unité de l'adjonction entre f et m nous donne un morphisme entre ΩM et $(m \circ f)(\Omega M)$. Ce morphisme, par adjonction entre Σ et Ω, nous donne un morphisme ξ_M entre M et $\Sigma(m \circ f)(\Omega m(G_0))$.

Proposition 2.4.4. *Le morphisme entre $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, G_0)$ et $Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0))$, s'identifie avec $\xi_{m(G_0)} : m(G_0) \to \Sigma(m \circ f)(\Omega m(G_0))$.*

Notons $\theta^*_{1,G}$ le morphisme de module instable de $\Sigma m(G_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_0))$ induit par adjonction par le morphisme de structure $\Gamma^1 \otimes G_1 \to G_0$.

Corollaire 2.4.5. $m^{<2}(G)$ *est isomorphe en tant que module instable au pullback du diagramme*

$$\begin{tikzcd} & \Sigma m(G_1) \arrow[d, "\theta^*_{1,G}"] \\ m(G_0) \arrow[r, "\xi_{m(G_0)}"'] & \Sigma(m \circ f)(\Omega m(G_0)). \end{tikzcd}$$

Exemple 2.4.6. Si $G_0 = 0$, $m^{<2}(G) \cong \Sigma m(G_1)$.

Exemple 2.4.7. Si $G_1 = 0$, $m^{<2}(G)$ est isomorphe au noyau de $\xi_{m(G_0)}$.

2.4.3 Un calcul de $m^{<3}$

Nous allons maintenant faire le calcul de $m^{<3}(G)$ pour G un objet de $\mathcal{F}^{<3}_{\omega}$ trivial en degré 0. Ce cas est assez similaire au cas précédent, la seule différence viendra de ce que le Sq^1 n'agit pas nécessairement trivialement. Comme, G est nul en degré 0, $m^{<3}(G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<3}}(F(1)^{<3} \otimes \Gamma^{*-1} \oplus F(2)^{<3} \otimes \Gamma^{*-2}, G)$. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<3}}(F(1)^{<3} \otimes \Gamma^{*-1} \oplus F(2)^{<3} \otimes \Gamma^{*-2}, G)$, comme ϕ_V doit être un morphisme de module instable tronqué pour tout espace vectoriel V, ϕ est entièrement déterminée par ses restrictions ϕ_1 et ϕ_2, respectivement à $x(1) \otimes \Gamma^{*-1}$ et $x(2) \otimes \Gamma^{*-2}$.

Réciproquement, si on se donne $\phi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1)$ et $\phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, G_2)$, on peut définir $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{V}^f, \mathcal{U}^{<3})}(F(1)^{<3} \otimes \Gamma^{*-1} \oplus F(2)^{<3} \otimes \Gamma^{*-2}, G)$ par $\phi(x(1) \otimes \gamma) := \phi_1(\gamma)$, $\phi(\mathrm{Sq}^1 x(1) \otimes \gamma) := \mathrm{Sq}^1\phi_1(\gamma)$ et $\phi(x(2) \otimes \gamma) := \phi_2(\gamma)$. La condition de compatibilité pour qu'un tel ϕ soit un morphisme dans $\mathcal{F}^{<3}$ se résume à ce que $\phi(\theta(\gamma(x(2) \otimes \beta))) = \theta_{G,V}(\gamma \otimes \phi(x(2) \otimes \beta))$ autrement dit à ce que

$$\theta_{G,V}(\gamma \otimes \phi_2(\beta)) = \phi_1(\gamma\beta).$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.4.8. $m^{<3}(G)$ *est isomorphe en tant qu'espace vectoriel au pullback du diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} & Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, G_2) \arrow[d] \\ Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_1)), \end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical est induit par l'application de structure $\theta_{G,V}$.

Remarque 2.4.9. Contrairement au cas précédent, les applications de $m^{<3}(G)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, G_2)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1)$ ne sont pas nécessairement des morphismes de modules instables. A priori, le pullback du diagramme précédent n'est donc isomorphe à $m^{<3}(G)$ qu'en tant qu'espace vectoriel, il nous faut décrire la structure de module de $m^{<3}(G)$.

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ un élément de $m^{<3}(G)$, on cherche à calculer $\mathrm{Sq}^i\phi$, qui est défini comme la composition suivante :

$$\begin{tikzcd} F(1)^{<3} \otimes \Gamma^{*-1} \oplus F(2)^{<3} \otimes \Gamma^{*-2} \arrow[r, "f^{<3}(\mathrm{Sq}(i))"] \arrow[dr, "\mathrm{Sq}^i\phi"'] & F(1)^{<3} \otimes \Gamma^{*-1} \oplus F(2)^{<3} \otimes \Gamma^{*-2} \arrow[d, "\phi"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Alors, pour i quelconque et $k = 0$ ou 1,

$$\mathrm{Sq}^i\phi(\mathrm{Sq}^k x(1) \otimes \beta) = \Sigma_{j=0}^i \phi(\mathrm{Sq}(j)(\mathrm{Sq}^k x(1)) \otimes \beta\mathrm{Sq}^{i-j}) = \phi(\mathrm{Sq}^k x(1) \otimes \beta\mathrm{Sq}^i) = \mathrm{Sq}^k\phi_1(\beta\mathrm{Sq}^i),$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}^i\phi(x(2) \otimes \beta) &= \Sigma_{j=0}^i \phi(\mathrm{Sq}(j)(x(2)) \otimes \beta\mathrm{Sq}^{i-j}) \\ &= \phi(\mathrm{Sq}^1 x(1) \otimes \beta\mathrm{Sq}^{i-1}) + \phi(x(2) \otimes \beta\mathrm{Sq}^i) \\ &= \mathrm{Sq}^1\phi_1(\beta\mathrm{Sq}^{i-1}) + \phi_2(\beta\mathrm{Sq}^i). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.10. *Soit ϕ un élément de $m^{<3}(G)$ et (ϕ_1, ϕ_2) son image dans*

$Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-1}, G_1) \times_{Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, \underline{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^1, G_1))} Hom_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, G_2)$, $Sq^i\phi$ a pour image $(Sq^i\phi_1, (Sq^1 \circ (Sq^{i-1}\phi_1)) + Sq^i\phi_2)$.

On remarque que le morphisme de $m^{<3}(G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^{*-2}, G_2)$ est un morphisme de module sur l'algèbre de Steenrod si et seulement si, pour tout $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ dans $m^{<3}(G)$ et pour tout β dans $\Gamma^{*-2}(V)$, $\mathrm{Sq}^i\phi(x(2) \otimes \beta) = \phi_2(\beta\mathrm{Sq}^i)$, c'est à dire $\mathrm{Sq}^1\phi_1(\beta\mathrm{Sq}^{i-1}) = 0$, donc si et seulement si, Sq^1 agit trivialement sur G.

Chapitre 3

Les catégories $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_n$ et $(K-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au comportement de la catégorie $\mathcal{K}$ vis à vis de la filtration nilpotente. Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons définir une catégorie $\mathcal{K}\mathcal{F}_\omega^{<n}$ d'algèbres instables dans ${}_m\mathcal{F}_\omega^{<n}$ et justifier que le foncteur $f^{<n}$ induit une équivalence de catégorie entre cette catégorie et la catégorie $\mathcal{K}$ localisée en les morphismes dont les noyaux et conoyaux sont dans $\mathcal{N}il_n$. Le cas $n = 1$, déjà étudié dans [HLS93] sera d'une importance particulière. En effet, d'après la proposition 1.2.15, pour K une algèbre instable $T_V(K)$ est une algèbre instable et donc $f(K)(V) := T_V(K)^0$ est une algèbre de Boole. Pour tout entier n et tout espace vectoriel V, $f^{<n}(K)(V)$ sera alors muni d'une structure d'algèbre sur l'algèbre de Boole $f(K)(V)$. Cette structure d'algèbre sur l'algèbre de Boole $f(K)(V)$ jouera un rôle central dans l'étude de problèmes de classification que nous étudierons dans le chapitre 5.

Pour $K \in \mathcal{K}$ on étudiera également la catégorie des K-modules dans $\mathcal{U}$ localisée en les objets dont le module instable sous-jacent est dans $\mathcal{N}il_n$.

3.1 Localisation d'algèbres instables loin des n-nilpotents

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement de l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ et $\mathcal{F}_\omega^{<n}$ vis à vis des algèbres instables. Rappelons la définition d'une catégorie localisée.

Définition 3.1.1. [KS] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{S}$ une famille de morphismes de $\mathcal{C}$. Une localisation de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{S}$ est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ et d'un foncteur $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ tels que

1. pour tout $s \in \mathcal{S}$, $Q(s)$ est un isomorphisme,
2. pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vérifiant que $F(s)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$ pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $F' : \mathcal{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right] \to \mathcal{D}$ tel que F est isomorphe à $F' \circ Q$,

3. pour tous foncteurs G_1 et G_2 de $\mathcal{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ vers une catégorie $\mathcal{D}$, l'application naturelle $\mathrm{Nat}(G_1,G_2)\to\mathrm{Nat}(G_1\circ Q,G_2\circ Q)$ est une bijection.

Nous allons établir que la catégorie $\mathcal{K}$ localisée en les morphismes dont les noyaux et conoyaux sont dans $\mathcal{N}il_n$ est équivalente (par le foncteur $f^{<n}$) à une catégorie d'algèbres instables dans $\mathcal{F}_\omega^{<n}$.

3.1.1 Les catégories $\mathcal{KF}^{<n}$ et $\mathcal{KF}_\omega^{<n}$

Commençons par rappeler que, d'après la proposition 2.2.30, le triplet $(\mathcal{F}^{<n},\otimes,c\mathbb{F}_2)$ forme une catégorie symétrique monoïdale.

Définition 3.1.2. Soit $\mathcal{AF}^{<n}$ la catégorie des algèbres dans $(\mathcal{F}^{<n},\otimes,c\mathbb{F}_2)$ et $\mathcal{AF}_\omega^{<n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{AF}^{<n}$ dont les objets sont dans $\mathcal{F}_\omega^{<n}$.

On rappelle la définition 1.1.61 pour M un module instable, $\lambda_M\ :\ \Phi M\to M$ désigne le morphisme de module instable qui à Φx associe $\mathrm{Sq}_0 x$. Soit aussi, si M est une algèbre commutative dans $\mathcal{U}$, $\iota_M\ :\ \Phi M\to M$ qui à Φx associe x^2.

On notera également $\Phi^{<n}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{<n}$ dans lui même, qui à un objet F de $\mathcal{F}^{<n}$ associe le foncteur qui à V associe $\Phi(F(V))^{<n}$ et dont le morphisme de structure est donnée par la composition de $\Phi(\theta_{F,V})^{<n}\ :\ \Phi(F(V))^{<n}\to\Phi(H^*(V))^{<n}\otimes\Phi(F(V))^{<n}$ par $\lambda^{<n}_{H^*(V)}\otimes id$.

Proposition 3.1.3. *Soit M un module instable et n un entier naturel, alors $f^{<n}(\Phi(M))\cong\Phi(f^{<n}(M))$.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que le foncteur Φ commute avec le foncteur T_V (confère la proposition 1.2.12). □

Définition 3.1.4. Pour F un objet dans $\mathcal{F}^{<n}$, soit $\lambda_F^{<n}\ :\ \Phi^{<n}F\to F$ la transformation naturelle définie par $(\lambda_F^{<n})_V(\Phi x)=\lambda_{F(V)}(\Phi x)$ pour $\Phi x\in\Phi^{<n}(F)(V)$.

Si $F\in\mathcal{AF}^{<n}$, soit également $\iota_F^{<n}\ :\ \Phi^{<n}F\to F$ défini par $(\iota_F^{<n})_V(\Phi x)=\iota_{F(V)}(\Phi x)$ pour $\Phi x\in(\Phi F)^{<n}(V)$.

Définition 3.1.5. Soit F dans $\mathcal{AF}^{<n}$ (resp. $\mathcal{AF}_\omega^{<n}$), F est une algèbre instable dans $\mathcal{F}^{<n}$ (resp. $\mathcal{F}_\omega^{<n}$) si $\lambda^{<n}_{F(V)}=\iota^{<n}_{F(V)}$.

Soit $\mathcal{KF}^{<n}$ (resp. $\mathcal{KF}_\omega^{<n}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{AF}^{<n}$ (resp. $\mathcal{AF}_\omega^{<n}$) dont les objets sont les algèbres instables.

3.1.2 L'équivalence de catégorie

Soit $\mathcal{AU}$ la catégorie des algèbres commutatives dans $(\mathcal{U},\otimes,\mathbb{F}_2)$.

Lemme 3.1.6. *Le foncteur $m^{<n}$ (introduit dans la proposition 2.2.33) est lax monoïdal symétrique.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{F}_2$ est *nil*-fermé et $f^{<n}(\mathbb{F}_2)$ est le foncteur constant égal à $\mathbb{F}_2$, $m^{<n}(\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$. Soient F et G deux objets de $\mathcal{F}^{<n}$, on définit une application $\mu_{F,G} \;:\; m^{<n}(F) \otimes m^{<n}(G) \to m^{<n}(F \otimes G)$ comme le morphisme :

$$\begin{array}{c}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, F) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, G) \\ \Big\downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, F \otimes G),\end{array}$$

qui à $\alpha \otimes \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, F) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, G)$ associe le morphisme qui à $(f, \gamma) \in F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}(V)$ associe $\alpha(f,\gamma) \otimes \beta(f,\gamma) \in F(V) \otimes G(V)$ et où on a utilisé que

$$m^{<n}(F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\bigoplus_{i=0}^{n-1} F(i)^{<n} \otimes \Gamma^{*-i}, F)$$

d'après la proposition 2.2.37. L'associativité, la commutativité et l'unitalité se montrent sans difficulté. □

Proposition 3.1.7. *$f^{<n}$ et $m^{<n}$ définissent des foncteurs respectivement de $\mathcal{AU}$ dans $\mathcal{AF}^{<n}$ et de $\mathcal{AF}^{<n}$ dans $\mathcal{AU}$.*

Démonstration. Pour $f^{<n}$, c'est une conséquence directe de ce que $f^{<n}$ commute avec le produit tensoriel ce qui implique que pour (A, μ, η) une algèbre dans $\mathcal{U}$, $(f^{<n}(A), f^{<n}(\mu), f^{<n}(\eta))$ désigne une algèbre dans $\mathcal{F}^{<n}$.

Pour le foncteur $m^{<n}$, si (F, ν, ξ) est une algèbre dans $\mathcal{F}^{<n}$, on définit une application $\mu \;:\; m^{<n}(F) \otimes m^{<n}(F) \to m^{<n}(F)$ comme la composée suivante :

$$m^{<n}(F) \otimes m^{<n}(F) \to m^{<n}(F \otimes F) \to m^{<n}(F),$$

dont la première flèche est $\mu_{F,F}$ définie dans le lemme 3.1.6 et dont la deuxième flèche est la composition par $m^{<n}(\nu)$. Alors $(m^{<n}(F), \mu, m^{<n}(\rho))$ est une algèbre dans $\mathcal{U}$. □

Lemme 3.1.8. *Soient M, N et P trois modules instables et h et g deux morphismes de modules instables de $M \otimes N$ dans $l_n(P)$ (cf définition 1.2.45). Alors $h = g$ si et seulement si $f^{<n}(h) = f^{<n}(g)$.*

Démonstration. Par adjonction, comme $l_n(M) \cong m^{<n} \circ f^{<n}(M)$ et que le foncteur $f^{<n}$ est monoïdal, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M \otimes N, l_n(P)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(f^{<n}(M) \otimes f^{<n}(N), f^{<n}(P))$, où on a utilisé $f^{<n}(M \otimes$

$N) \cong f^{<n}(M) \otimes f^{<n}(N)$ par le morphisme qui envoie $\gamma : M \otimes N \to l_n(P)$ sur $f^{<n}(\gamma)$. Donc deux applications h et g de $M \otimes N$ dans $l_n(P)$ sont égales si et seulement si $f^{<n}(h) = f^{<n}(g)$.
□

En particulier, pour (A, μ, η) une algèbre commutative dans $\mathcal{U}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\iota_A \otimes \iota_A"] \arrow[d, "\mu"] & l_n(A) \otimes l_n(A) \arrow[d, "l_n(\mu)"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"] & l_n(A), \end{tikzcd}$$

où $\iota_A : A \to l_n(A)$ désigne l'unité de l'adjonction et où, par abus de notation, nous avons désigné par $l_n(\mu)$ le produit de $l_n(A) \cong m^{<n}(f^{<n}(A))$ induit par la proposition 3.1.7. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.1.9. *Si (A, μ, η) est une algèbre commutative dans $\mathcal{U}$, $l_n(A)$ est également une algèbre commutative dans $\mathcal{U}$, pour la structure d'algèbre sur $l_n(A)$ induite par $l_n(\mu)$ et ι_A est un morphisme de $\mathcal{AU}$. En particulier, si A est nil-fermé, ι_A est un isomorphisme dans $\mathcal{AU}$.*

Définition 3.1.10. Soit $\mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n)$ la catégorie des algèbres commutatives dans $(\mathcal{U}/Nil_n, \otimes, \mathbb{F}_2)$.

En conséquence de la proposition 3.1.9 nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.1.11. *Les restrictions de r_n et s_n (cf définition 1.2.43) respectivement à $\mathcal{AU}$ et $\mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n)$ définissent une adjonction :*

$$r_n : \mathcal{AU} \rightleftarrows \mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n) : s_n.$$

Théorème 3.1.12. *L'adjonction suivante est une équivalence de catégorie :*

$$f^{<n} : \mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n) \rightleftarrows \mathcal{AF}_\omega^{<n} : m^{<n}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'équivalence entre $\mathcal{U}/Nil_n$ et $\mathcal{F}_\omega^{<n}$ (cf Théorème 2.2.32) et de la proposition 3.1.9. □

Au lieu de considérer des algèbres dans la catégorie des modules instables localisée loin des n-nilpotents, on pourrait vouloir localiser directement la catégorie $\mathcal{AU}$ par les morphismes dont les noyaux et conoyaux sont dans $\mathcal{N}il_n$, mais ces deux approches sont équivalentes.

Définition 3.1.13. Soit $\mathcal{W}_n$ la classe des morphismes dans $\mathcal{AU}$ dont les noyaux et conoyaux linéaires sont dans Nil_n.

On considère la catégorie définie de la manière suivante (cette construction est une généralisation de la construction de $\mathcal{K}/\mathcal{N}il$ dans [HLS93]).

— Les objets sont les même que ceux de $\mathcal{AU}$.
— Les morphismes de K vers L, pour K et L deux objets de $\mathcal{K}$, sont donnés par la colimite des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AU}}(K', L/L')$ qui parcourt toutes les paires (K', L') où K' est une sous-algèbre instable de K tel que le quotient (dans $\mathcal{U}$) K/K' soit n-nilpotent, et où L' est un idéal de L appartenant à $\mathcal{N}il_n$.
— Les compositions sont définies de la manière suivante : pour $\phi \ : \ J \to K$ et $\psi \ : \ K \to L$ on considère deux représentants $\phi' \ : J' \to K/K'$ et $\psi' \ : \ K" \to L/L"$, alors $K"/K" \cap K'$ est une sous-algèbre de K/K', on considère $\phi'^{-1}(K"/K" \cap K')$ son image réciproque par ϕ'. Comme $K/K"$ est n-nilpotent c'est également le cas pour $J'/\phi'^{-1}(K"/K" \cap K')$ et donc pour $J/\phi'^{-1}(K"/K" \cap K')$. On considère $\tilde{\phi}$, l'application induite par ϕ' de $\phi'^{-1}(K"/K" \cap K')$ dans $K"/K" \cap K'$. Enfin, pour $(\psi'(K" \cap K'))$ l'idéal engendré par $\psi'(K" \cap K')$ (qui est dans $\mathcal{N}il_n$) on définit $\tilde{\psi}$ l'application induite par ψ' de $K"/K" \cap K'$ dans $L/(\psi'(K" \cap K'))$. Alors, $\psi \circ \phi$ est défini comme l'image dans la colimite des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AU}}(J', L/L')$ de $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$.

Cette catégorie est une localisation de $\mathcal{AU}$ par $\mathcal{W}_n$, on la notera donc $\mathcal{AU}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$.

Proposition 3.1.14. *Il existe une équivalence de catégorie $\mathcal{AU}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right] \cong \mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n)$.*

Démonstration. Par propriété universelle de la localisation, on a un foncteur $\mathcal{AU}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right] \to \mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n)$. Ce foncteur est surjectif sur les objets et est pleinement fidèle. On a donc une équivalence de catégorie $\mathcal{AU}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right] \cong \mathcal{A}(\mathcal{U}/Nil_n)$. □

Nous allons voir que l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{AU}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$ et $\mathcal{AF}_\omega^{<n}$, induit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{K}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$ et la catégorie $\mathcal{KF}_\omega^{<n}$.

Proposition 3.1.15. *La restriction de $f^{<n}$ à $\mathcal{K}$ est à valeurs dans $\mathcal{KF}_\omega^{<n}$.*

Démonstration. En effet, les objets de $\mathcal{K}$, sont les objets A de $\mathcal{AU}$ tels que $\lambda_A = \iota_A$, et donc $f^{<n}(A) \in \mathcal{AF}_\omega^{<n}$ et de plus $\lambda_{f^{<n}(A)} = f^{<n}(\lambda_A) = \iota_{f^{<n}(A)}$ et donc $f^{<n}(A) \in \mathcal{KF}_\omega^{<n}$. □

Remarque 3.1.16. Pour M un module instable, $\Phi(\Sigma M) \cong \Sigma^2\Phi(M)$. Donc le foncteur Φ ne conserve pas la nil_n-fermeture dès que $n > 1$. En effet, si M est nil_1-fermé alors ΣM est nil_2-fermé, pourtant $\Sigma^2\Phi(M)$ est 2-nilpotent.

Soit F un objet de $\mathcal{F}^{<n}$. Alors, d'après la proposition 3.1.3, $f^{<n}(\Phi(m^{<n}(F))) \cong \Phi(F)$ et donc $m^{<n}(\Phi(F))$ est la localisation loin de Nil_n de $\Phi(m^{<n}(F))$. Par adjonction, le foncteur $f^{<n}$ induit l'isomorphime naturel suivant : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi(m^{<n}(F)), m^{<n}(F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{<n}}(\Phi(F), F)$.

Lemme 3.1.17. *Pour F un objet de $\mathcal{F}^{<n}$, le morphisme naturel $\lambda_{m^{<n}(F)}$ se factorise en*

$$\Phi(m^{<n}(F)) \xrightarrow{i_n} m^{<n}(\Phi^{<n}(F)) \xrightarrow{m^{<n}(\lambda_F)} m^{<n}(F),$$

où la première flèche est la nil_n-localisation de $\Phi(m^{<n}(F))$.

De même, pour F une algèbre de $\mathcal{F}^{<n}$, le morphisme naturel $\iota_{m^{<n}(F)}$ (qui est bien défini, par la proposition 3.1.7) se factorise en

$$\Phi(m^{<n}(F)) \xrightarrow{i_n} m^{<n}(\Phi^{<n}(F)) \xrightarrow{m^{<n}(\iota_F)} m^{<n}(F).$$

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de constater que $f^{<n}(\lambda_{m^{<n}(F)}) = \lambda_F$ est égal à la composée de $f^{<n}(i_n) = id$ par $f^{<n}(m^{<n}(\lambda_F)) = \lambda_F$ et pour le second, que $f^{<n}(\iota_{m^{<n}(F)}) = \iota_F$ est égal à la composée de $f^{<n}(i_n) = id$ par $f^{<n}(m^{<n}(\iota_F)) = \iota_F$. □

Proposition 3.1.18. *Le foncteur $m^{<n}$ envoie les algèbres instables dans $\mathcal{F}^{<n}$ sur des algèbres instables dans $\mathcal{U}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 3.1.17. □

Le théorème suivant est une généralisation à n quelconque du théorème 1.5 dans [HLS93].

Théorème 3.1.19. *On a une équivalence de catégorie :*

$$f^{<n} : \mathcal{K}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right] \rightleftarrows \mathcal{K}\mathcal{F}_\omega^{<n} : m^{<n}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des propositions 3.1.12, 3.1.15 et 3.1.18. □

On notera $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_n$ la catégorie $\mathcal{K}\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$.

Remarque 3.1.20. La généralisation de ce théorème au cas p impair pourrait se montrer plus subtile. L'équivalence de catégorie entre $\mathcal{AU}_p\left[\mathcal{W}_n^{-1}\right]$ et la catégorie des algèbres commutatives dans $\mathcal{F}_\omega^{<n}$ ne devrait être qu'une réécriture formelle du cas $p=2$, mais dans le cas p impair la condition pour qu'une algèbre commutative dans $\mathcal{U}_p$ soit instable ne s'exprime pas à partir de l'égalité de morphismes de ΦK vers K. On ne peut se contenter d'appliquer le même argument que dans le cas $p=2$ en utilisant la commutativité du foncteur T avec le foncteur Φ.

3.2 Localisation de K-modules instables loin des n-nilpotents

Pour K une algèbre instable, il nous sera utile par la suite de construire une localisation loin des n-nilpotents des K-modules dans $\mathcal{U}$. On peut reprendre les mêmes idées que celles utilisées dans la partie précédente.

Définition 3.2.1. Soit K une algèbre instable. On définit $K - \mathcal{U}$ la catégorie des K-modules dans $(\mathcal{U}, \otimes, \mathbb{F}_2)$.

Si, par abus de notation, on note $\mathcal{N}il_n$ la classe des objets de $K - \mathcal{U}$ dont le module instable sous-jacent est dans $\mathcal{N}il_n$, $\mathcal{N}il_n$ est une classe de Serre dans $K - \mathcal{U}$. On peut donc définir la catégorie quotient $(K - \mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$. On va chercher à identifier une sous-catégorie de $\mathcal{F}^{<n}$ qui soit équivalente par $f^{<n}$ à $(K - \mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$.

Définition 3.2.2. Pour $F \in \mathcal{AF}^{<n}$, soit $F - \mathcal{F}^{<n}$ la catégorie des modules sur F dans $(\mathcal{F}^{<n}, \otimes, \mathbb{F}_2)$.

Soit également $F - \mathcal{F}^{<n}_{\omega}$ la sous-catégorie pleine de $F - \mathcal{F}^{<n}$ dont les objets sont les objets de $F - \mathcal{F}^{<n}$ qui sont analytiques en tant qu'objets de $\mathcal{F}^{<n}$.

Proposition 3.2.3. *Pour $K \in \mathcal{K}$ et $F \in \mathcal{AF}^{<n}$, les foncteurs $f^{<n}$ et $m^{<n}$ définissent des foncteurs respectivement de $K - \mathcal{U}$ vers $f^{<n}(K) - \mathcal{F}^{<n}$ et de $F - \mathcal{F}^{<n}$ vers $m^{<n}(F) - \mathcal{U}$.*

Démonstration. Pour $f^{<n}$ c'est une conséquence de ce que le foncteur $f^{<n}$ est monoïdal.

Pour $m^{<n}$, l'idée de la preuve est la même que pour la proposition 3.1.7. Pour $G \in F - \mathcal{F}^{<n}$ on définit la composition

$$m^{<n}(F) \otimes m^{<n}(G) \to m^{<n}(F \otimes G) \to m^{<n}(G),$$

qui donne à $m^{<n}(G)$ une structure de $m^{<n}(F)$-module dans $\mathcal{U}$. □

Lemme 3.2.4. *Soit $M \in K - \mathcal{U}$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ l_n(K) \otimes l_n(M) \arrow[r] & l_n(M), \end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les morphismes de localisation de M et K et les morphismes horizontaux par la structure de K-module de M et par la structure de module sur $l_n(K) \cong m^{<n}(f^{<n}(K))$ de $l_n(M) \cong m^{<n}(f^{<n}(M))$ dont l'existence est garantie par la proposition 3.2.3.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.1.8. □

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.2.5. *Soit $M \in K - \mathcal{U}$, alors $l_n(M) \in l_n(K) - \mathcal{U}$, et donc par restriction $l_n(M) \in K - \mathcal{U}$. De plus, la nil_n-fermeture $M \to l_n(M)$ est un morphisme de $K - \mathcal{U}$ et si M est nil_n-fermé c'est un isomorphisme dans $K - \mathcal{U}$.*

Théorème 3.2.6. *On a une équivalence de catégorie :*

$$f^{<n} : (K-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n \rightleftarrows f^{<n}(K) - \mathcal{F}_\omega^{<n} : m^{<n}.$$

Démonstration. En effet, pour $M \in K-\mathcal{U}$, le morphisme de localisation loin des n-nilpotents $M \to l_n(M)$ est un morphisme de K-module, d'après le lemme 3.2.4 (où la structure de K-module sur $l_n(M)$ est induite par la structure de $l_n(K)$-module de $l_n(M)$ et par le morphisme de localisation $K \to l_n(K)$). C'est donc un isomorphisme dans $(K-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$. On conclut grâce à l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{U}/\mathcal{N}il_n$ et $\mathcal{F}_\omega^{<n}$. □

Corollaire 3.2.7. *Si K est isomorphe à K' loin des n-nilpotents, alors les catégories $(K-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$ et $(K'-\mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$ sont équivalentes.*

3.3 La structure d'algèbre de Boole sur $T_V(K)^0$

Toute algèbre instable K concentrée en degré 0 est une algèbre de Boole ; en effet, pour tout $x \in K$ on a $x = \mathrm{Sq}^0(x) = x^2$, d'après la condition d'instabilité. En particulier, pour tout V et toute algèbre instable K, $T_V(K)^0$ est naturellement une algèbre de Boole. Ainsi, $f(K)$ est un foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans la catégorie des algèbres de Boole. Par ailleurs, pour tout n, $f^{<n}(K)$ est une algèbre instable dans la catégorie $\mathcal{F}^{<n}$, en particulier, pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{F}_2$ de dimension finie, $f^{<n}(K)(V)$ est une algèbre sur son sous-module des éléments homogènes de degré 0, $f(K)(V)$. Dans cette partie, nous allons rappeler les constructions de[Rec84] et [HLS93] qui exploitent cette structure.

3.3.1 Décomposition en composante connexe d'une algèbre de Boole

Commençons par rappeler quelques généralités sur la décomposition en composante connexe d'une algèbre de Boole, et des modules et algèbres sur une algèbre de Boole.

Proposition 3.3.1. *[HLS93] Pour $\mathcal{B}$ la catégorie des algèbres de Boole sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{P}fin$ la catégorie des ensembles profinis, le foncteur spec : $\mathcal{B} \to (\mathcal{P}fin)^{op}$, qui à une algèbre B associe son spectre spec$(B) := Hom_{\mathcal{B}}(B, \mathbb{F}_p)$, est une équivalence de catégorie dont l'inverse est le foncteur qui à un ensemble profini S associe l'algèbre des applications continues de S dans $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p^S$.*

En particulier, si B est une algèbre de Boole sur $\mathbb{F}_p$ dont le spectre est fini, on a un isomorphisme d'algèbre de Boole $B \cong \prod_{\phi \in \mathrm{spec}(B)} \mathbb{F}_p \delta_\phi$, où δ_ϕ désigne la fonction caractéristique de ϕ de spec(B) dans $\mathbb{F}_2$.

Cette décomposition donne lieu à une décomposition des modules et des algèbres sur B.

Définition 3.3.2. Soient M un B-module et $\phi \in \text{spec}(B)$, on définit $M_\phi = M \otimes_B \mathbb{F}_p(\phi)$ où $\mathbb{F}_p(\phi)$ est le corps $\mathbb{F}_p$ muni d'une structure de B-algèbre par ϕ.

Lemme 3.3.3. *Soit M un B-module, avec B une algèbre de Boole de spectre fini, alors on a un isomorphisme de B-module $M \cong \bigoplus_{\phi \in spec(B)} M_\phi$.*

Dans le cas de A une algèbre commutative sur B, où d'un A-module dans la catégorie des modules sur B, cet isomorphisme est plus qu'un isomorphisme de B-modules.

Proposition 3.3.4. *Soit (A, μ, η) une algèbre sur une algèbre de Boole B. Supposons par ailleurs que spec(B) soit fini. Alors pour tout $\phi \in spec(B)$, A_ϕ est muni d'une structure d'algèbre de telle sorte que $A \cong \prod_{\phi \in spec(B)} A_\phi$ soit un isomorphisme d'algèbre.*

Démonstration. Par définition, $A_\phi = A \otimes_B \mathbb{F}_p(\phi)$, le produit tensoriel des multiplications de A et $\mathbb{F}_p(\phi)$ passe au quotient pour définir une structure d'algèbre commutative sur A_ϕ. Alors, on a un isomorphisme d'algèbre sur B,

$$A \cong A \otimes_B \prod_{\phi \in \text{spec}(B)} \mathbb{F}_p(\phi) \cong \prod_{\phi \in \text{spec}(B)} A_\phi.$$

$\square$

On montre de même le résultat suivant.

Proposition 3.3.5. *Soit (A, μ, η) une algèbre sur une algèbre de Boole B. Supposons par ailleurs que spec(B) soit fini. Soit également M un module sur A dans la catégorie des B-modules. Alors pour tout $\phi \in spec(B)$, M_ϕ est muni d'une structure de A_ϕ module de telle sorte que $M \cong \bigoplus_{\phi \in spec(B)} M_\phi$ soit un isomorphisme de modules sur $A \cong \prod_{\phi \in spec(B)} A_\phi$.*

3.3.2 Décomposition en composantes connexes du foncteur T_V

Puisque, pour tout $K \in \mathcal{K}$ et pour tout $M \in K - \mathcal{U}$, $T_V(K)^0$ est une algèbre de Boole et $T_V(K)$ et $T_V(M)$ sont des $T_V(K)^0$-modules, on peut appliquer dans ce contexte, les constructions de la section précédente.

Fixons ici quelques notations. Soit M un module instable et V un espace vectoriel de dimension finie.

— $\eta_{M,V} \;:\; M \to T_V(M) \otimes H^*(V)$ désigne l'unité de l'adjonction entre T_V et $- \otimes H^*(V)$.

— $\kappa_{M,V} \;:\; T_V(M) \to T_V(M) \otimes H^*(V)$, désigne le morphisme défini dans la définition 2.2.2.

— $\rho_{M,V}$, désigne la composition suivante

$$\rho_{M,V} \;:\; M \xrightarrow{\eta_{M,V}} T_V(M) \otimes H^*(V) \xrightarrow{id \otimes \epsilon_V} T_V(M),$$

où ϵ_V dénote l'augmentation de $H^*(V)$.

Remarque 3.3.6. Le morphisme $\rho_{M,V}$ s'identifie à $T_{\iota_0^V}(M) \ : \ M \cong T_0(M) \to T_V(M)$, le morphisme induit par naturalité de $T_V(M)$ en V par ι_0^V, l'injection de 0 dans V.

Lemme 3.3.7. *[Hea21, Lemme 2.13] Pour tout $V \in \mathcal{V}^f$ et tout morphisme de module instable $f \ : \ T_V(M) \to S$, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_{M,V}"] \arrow[d, "f^\sharp"] & T_V(M) \arrow[d, "f"] \\ H^*(V) \otimes S \arrow[r, "\epsilon_V \otimes id_S"] & S, \end{tikzcd}$$

où $f^\sharp$ dénote l'adjoint de f.

Pour K une algèbre instable, et M un K-module instable (c'est à dire un objet de $K-\mathcal{U}$), on rappelle la décomposition en composantes connexes de $T_V(K)$ et $T_V(M)$ telle qu'elle est exposée dans [Hea20] et [Hea21].

Lemme 3.3.8. *Pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est fini.*

Proposition 3.3.9. *Soit K une algèbre instable quelconque, alors $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ est muni d'une structure d'ensemble profini.*

Démonstration. En effet, K est la colimite de ses sous-algèbres finiment engendrées en tant qu'algèbres sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que pour $\mathcal{D}(K)$ la catégorie des sous-algèbres de K finiment engendrées en tant qu'algèbres sur $\mathcal{A}$ et des inclusions d'algèbres instables, $K \cong \varinjlim_{R \in \mathcal{D}(K)} R$. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)) \cong \varprojlim_{R \in \mathcal{D}(K)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(R, H^*(V))$. □

Le résultat suivant est dû à Lannes ([Lan87] et [LZ95]).

Proposition 3.3.10. *[Sch94] Soient $V \in \mathcal{V}^f$ et K une algèbre instable, alors on a un isomorphisme d'algèbre de Boole $T_V(K)^0 \cong \mathbb{F}_p^{Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))}$, où $\mathbb{F}_p^{Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))}$ dénote l'algèbre des applications continues de $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ dans $\mathbb{F}_p$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.3.1, puisque $\mathrm{spec}(T_V(K)^0)$ est l'ensemble des morphismes d'algèbres de Boole de $T_V(K)^0$ vers $\mathbb{F}_2$, qui est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. □

Définition 3.3.11. Pour $V \in \mathcal{V}^f$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$,

1. soit $T_{(V,\phi)}(K) := T_V(K) \otimes_{T_V(K)^0} \mathbb{F}_p(\phi)$, où la structure de $T_V(K)^0$-module sur $\mathbb{F}_p(\phi)$ est induite par le morphisme de $T_V(K)^0$ dans $\mathbb{F}_p$ adjoint à ϕ.
2. et pour M un K-module instable, soit
$$T_{(V,\phi)}(M) := T_V(M) \otimes_{T_V(K)^0} \mathbb{F}_p(\phi) \in T_{(V,\phi)}(K) - \mathcal{U}.$$

Remarque 3.3.12. Notons que, si K est une algèbre instable, K peut être considéré comme un objet de $K - \mathcal{U}$, auquel cas les deux définitions de $T_{(V,\phi)}(K)$ coïncident.

Proposition 3.3.13. *Pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $V \in \mathcal{V}^f$, on a l'isomorphisme naturel d'algèbres instables*
$$T_V(K) \cong \prod_{\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V,\phi)}(K).$$

Pour M un K-module instable, on a l'isomorphisme de K-modules instables
$$T_V(M) \cong \bigoplus_{\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V,\phi)}(M).$$

Proposition 3.3.14. *Soient $K \in \mathcal{K}$, $M \in K - \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$.*

1. *$\eta_{K,V} \ : \ K \to T_V(K) \otimes H^*(V)$ est un morphisme dans $\mathcal{K}$.*
2. *$T_V(M) \otimes H^*(V)$ est un $T_V(K) \otimes H^*(V)$-module et donc, par $\eta_{K,V}$ c'est un K-module, de telle sorte que $\eta_{M,V} \ : \ M \to M \otimes H^*(V)$ est un morphisme dans $K - \mathcal{U}$.*

Démonstration. Le 1, est une conséquence du fait que le foncteur T_V est aussi l'adjoint au produit tensoriel par $H^*(V)$ dans $\mathcal{K}$ (confère la proposition 1.2.15). Le 2 est une conséquence de la naturalité de $\eta_{M,V}$ en M et du fait que $\eta_{K \otimes M,V} \ : \ K \otimes M \to T_V(K) \otimes T_V(M) \otimes H^*(V)$ est la composition de $\eta_{K,V} \otimes \eta_{M,V} \ : \ K \otimes M \to K \otimes M \otimes H^*(V) \otimes H^*(V)$ par $id_{T_V(K) \otimes T_V(M)} \otimes \Delta_V^*$ (confère le théorème 1.2.13). □

Définition 3.3.15. Soient K une algèbre instable, $M \in K - \mathcal{U}$ et $V \in \mathcal{V}^f$. Pour $\pi_{(V,\phi)}$ la projection canonique de $T_V(K)$ sur $T_{(V,\phi)}(K)$,

1. soit $\eta_{M,(V,\phi)} \ : \ M \to T_{(V,\phi)}(M) \otimes H^*(V)$ la composée de $\eta_{M,V}$ par $\pi_{(V,\phi)} \otimes id_{H^*(V)}$,
2. soit $\kappa_{M,(V,\phi)} \ : \ T_{(V,\phi)}(M) \to T_{(V,\phi)}(M) \otimes H^*(V)$ le morphisme obtenu par restriction à $T_{(V,\phi)}(M)$ (qui peut être vu à la fois comme un quotient et un sous-module de $T_V(M)$) de la composée de $\kappa_{M,V}$ par $\pi_{(V,\phi)} \otimes id_{H^*(V)}$,
3. et soit $\rho_{M,(V,\phi)} \ : \ M \to T_{(V,\phi)}(M)$ la composée de $\rho_{M,V}$ par $\pi_{(V,\phi)}$.

Remarque 3.3.16.
1. Le morphisme $\eta_{K,(V,\phi)} : K \to T_{(V,\phi)}(K) \otimes H^*(V)$ induit une structure de K-module sur $T_{(V,\phi)}(M) \otimes H^*(V)$ de telle sorte que $\eta_{M,(V,\phi)}$ est un morphisme dans $K - \mathcal{U}$.
2. Le morphisme $\kappa_{K,(V,\phi)} : T_{(V,\phi)}(K) \to T_{(V,\phi)}(K) \otimes H^*(V)$ induit une structure de $T_{(V,\phi)}(K)$-module sur $T_{(V,\phi)}(M) \otimes H^*(V)$ de telle sorte que $\kappa_{M,(V,\phi)}$ est un morphisme dans $T_{(V,\phi)}(K) - \mathcal{U}$.
3. Le morphisme $\rho_{K,(V,\phi)} : K \to T_{(V,\phi)}(K)$ induit une structure de K-module sur $T_{(V,\phi)}(M)$ de telle sorte que $\rho_{M,(V,\phi)}$ est un morphisme dans $K - \mathcal{U}$.

Le lemme suivant nous sera utile quand on s'intéressera au centre d'une algèbre instable, plus précisément dans les sections 4.2.4 et 4.2.5.

Lemme 3.3.17. *Le morphisme $\rho_{M,(V,\phi)}$ est une transformation naturelle entre le foncteur identité sur $K - \mathcal{U}$ et le foncteur qui à M associe $T_{(V,\phi)}M$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la naturalité en M de $\rho_{M,V}$ et de la fonctorialité sur $T_V(K) - \mathcal{U}$ du produit tensoriel par $\mathbb{F}_2(\phi)$ au dessus de $T_V(K)^0$. $\square$

Lemme 3.3.18. *[Hea21, Lemme 2.11] Pour toute algèbre instable N, l'isomorphisme d'adjonction entre $Hom_{\mathcal{K}}(T_V(K), N)$ et $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V) \otimes N)$ induit un isomorphisme naturel entre $Hom_{\mathcal{K}}(T_{(V,\phi)}(K), N)$ et l'ensemble des $\gamma \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V) \otimes N)$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"] & H^*(V) \otimes N \arrow[d, "id\otimes\pi_{N^0}"] \\ H^*(V) \otimes \mathbb{F}_p \arrow[r, "id\otimes\xi_N"] & H^*(V) \otimes N^0, \end{tikzcd}$$

où ξ_N dénote l'unité de N et π_{N^0} la projection sur N^0.

Proposition 3.3.19. *Soient K une algèbre instable et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. Alors, $T_{(V,\phi)}$ définit un foncteur de la catégorie $K - \mathcal{U}$ dans la catégorie $T_{(V,\phi)}(K) - \mathcal{U}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que le foncteur T_V est monoïdal. $\square$

3.3.3 Objets injectifs dans $K - \mathcal{U}$

Définition 3.3.20. [LZ95] Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. On définit le foncteur $H^*(V)^\phi \otimes -$ de $T_{(V,\phi)}(K) - \mathcal{U}$ dans $K - \mathcal{U}$ comme le foncteur qui à M un objet $T_{(V,\phi)}(K) - \mathcal{U}$ associe $H^*(V) \otimes M$ muni de la structure de K-module induite par sa structure de $H^*(V) \otimes T_{(V,\phi)}(K)$-module et le morphisme d'algèbre instable $\eta_{K,(V,\phi)} : K \to H^*(V) \otimes T_{(V,\phi)}(K)$.

Proposition 3.3.21. *[LZ95] Le foncteur $T_{(V,\phi)}$ est adjoint à gauche du foncteur $H^*(V)^\phi \otimes -$.*

Dans l'article [LZ95], les auteurs introduisent des cogénérateurs injectifs de la catégorie $K-\mathcal{U}$.

Définition 3.3.22. [LZ95] Soit $J_K(n)$ l'objet de $K-\mathcal{U}$ déterminé à isomorphisme près par l'isomorphisme naturel en M, $\mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, J_K(n)) \cong (M^n)^\sharp$.

Théorème 3.3.23. *Les $(J_K(n))_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille de cogénérateurs injectifs de $K-\mathcal{U}$.*

Définition 3.3.24. [Hen96] Soit $I_{(V,\phi)}(n) := H^*(V) \otimes^\phi J_{T_{(V,\phi)(K)}(n)}$.

Proposition 3.3.25. *[Hen96] Les $I_{(V,\phi)}(n)$ sont injectifs et on a l'isomorphisme naturel en $M \in K-\mathcal{U}$ suivant, $Hom_{K-\mathcal{U}}(M, I_{(V,\phi)}(n)) \cong (T_{(V,\phi)}(M)^n)^\sharp$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition 3.3.22 et de la proposition 3.3.21. □

Proposition 3.3.26. *[Hen96, 1.8] Pour K une algèbre noethérienne et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, $I_{(V,\phi)}(n)$ est finiment engendrée en tant que K-module pour tout n.*

Corollaire 3.3.27. *Soient K une algèbre instable noethérienne et $M \in K-\mathcal{U}$ finiment engendré en tant que K-module, alors $Hom_{K-\mathcal{U}}(M, I_{(V,\phi)}(n))$ est fini et donc*

$$T_{(V,\phi)}(M)^n \cong Hom_{K-\mathcal{U}}(M, I_{(V,\phi)}(n))^\sharp.$$

Exemple 3.3.28. En particulier, pour $K \in \mathcal{K}$, $M \in K-\mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, $T_{(V,\phi)}(M)^0 \cong \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(V)(\phi))^\sharp$ où $H^*(V)(\phi)$ est $H^*(V)$ muni de la structure de K-algèbre induite par ϕ.

Remarque 3.3.29. Cette partie n'est pas spécifique au cas $p = 2$ et se généralise formellement au cas p impair, nous renvoyons le lecteur à [Hea21], [LZ86] et [LZ95] pour le cas p impair.

3.3.4 Décomposition en composantes connexes de $f^{<n}(K)$

L'objectif de cette section est de décrire le comportement des différentes parties de la structure des foncteurs $f^{<n}(K)$ et $f^{<n}(M)$, pour $K \in \mathcal{K}$ et $M \in K-\mathcal{U}$, vis à vis de la décomposition en composante connexe de $T_V(K)^0$. On veut justifier que toute la structure de $f^{<n}(K)(V)$ et $f^{<n}(M)(V)$, à savoir leurs structures de $\Gamma^*(V)$-module et leurs structures respectivement d'algèbre instable et de $f^{<n}(K)(V)$-module, se récupère à partir de leurs décompositions en composantes connexes sur $f(K)(V)$. Commençons par rappeler la définition de la catégorie $\mathcal{S}(K)$.

Définition 3.3.30. Pour K une algèbre instable, soit $\mathcal{S}(K)$ la catégorie dont les objets sont des couples (V,ϕ) avec V un espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ et dont les morphismes entre (V,ϕ) et (W,ψ) sont les morphismes d'espace vectoriel $\alpha : V \to W$ tels que $\phi = \alpha^*\psi$.

Définition 3.3.31. Soient K une algèbre instable et $M \in K-\mathcal{U}$

1. On définit $g^{<n}(K)$, le foncteur de la catégorie $\mathcal{S}(K)$ dans $\mathcal{U}^{<n}$ par $g^{<n}(K)(V,\phi) := T_{(V,\phi)}(K)^{<n}$, pour $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$.
2. On définit de même le foncteur $g^{<n}(M)$ de $\mathcal{S}(K)$ dans $\mathcal{U}^{<n}$ par $g^{<n}(M)(V,\phi) := T_{(V,\phi)}(M)^{<n}$, pour (V,ϕ) dans $\mathcal{S}(K)$.

Remarque 3.3.32. Pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, et V un espace vectoriel de dimension finie, on a un isomorphisme naturel de module instable tronqué $f^{<n}(K)(V) \cong \prod_{\phi\,:\,K\to H^*(V)} g^{<n}(K)(V,\phi)$ (confère la proposition 3.3.4).

De même, pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $M \in K-\mathcal{U}$, on a un isomorphisme de module instable tronqué

$$f^{<n}(M)(V) \cong \bigoplus_{\phi\,:\,K\to H^*(V)} g^{<n}(M)(V,\phi).$$

Proposition 3.3.33. *La structure d'algèbre de $f^{<n}(K)(V)$ induit une structure d'algèbre sur les $g^{<n}(K)(V,\phi)$ de telle sorte que $f^{<n}(K)(V) \cong \prod_{\phi\,:\,K\to H^*(V)} g^{<n}(K)(V,\phi)$ soit un isomorphisme d'algèbre.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 3.3.4. □

De même, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.34. *Pour $K \in \mathcal{K}$ finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, soit $M \in K-\mathcal{U}$ et soit $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$. Alors $g^{<n}(M)(V,\phi)$ est muni d'une structure de $g^{<n}(K)(V,\phi)$-module de telle sorte que l'isomorphisme de $T_V(K)^0$-module*

$$f^{<n}(M)(V) \cong \prod_{\phi\in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} g^{<n}(M)(V,\phi)$$

soit un isomorphisme de module sur $f^{<n}(K)(V) \cong \bigoplus_{\phi\in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} g^{<n}(K)(V,\phi)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 3.3.5. □

Lemme 3.3.35. *1. L'application de structure (confère définition 2.2.51) $\theta_{K,V} : \Gamma^*(V) \otimes f^{<n}(K)(V) \to f^{<n}(K)(V)$ restreinte à $g^{<n}(K)(V,\phi)$ est à valeur dans $g^{<n}(K)(V,\phi)$. On notera $\theta_{K,(V,\phi)}$ cette restriction.*

2. *L'application de structure* $\theta_{M,V} \ : \ \Gamma^*(V) \otimes f^{<n}(M)(V) \to f^{<n}(M)(V)$ *restreinte à* $g^{<n}(M)(V,\phi)$ *est à valeur dans* $g^{<n}(M)(V,\phi)$. *On notera* $\theta_{M,(V,\phi)}$ *cette restriction.*

Démonstration. On montre le 1, le 2 se montre de la même manière.

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^*(V) \otimes (f^{<n}(K)^0(V) \otimes f^{<n}(K)(V)) \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\theta_{K^{\otimes 2},V}"] & \Gamma^*(V) \otimes f^{<n}(K)(V) \arrow[d, "\theta_{K,V}"] \\
f^{<n}(K)^0(V) \otimes f^{<n}(K)(V) \arrow[r, "\mu"] & f^{<n}(K)(V),
\end{tikzcd}$$

en effet, puisque μ est la restiction à $f^{<n}(K)^0 \otimes f^{<n}(K)$ d'un morphisme de $\mathcal{F}^{<n}$. Donc, comme $\theta_{K^{\otimes 2},V}(\gamma \otimes \mu(a \otimes b)) = \mu(a \otimes \theta_{K,V}(\gamma \otimes b))$ lorsque a est en degré 0, on en déduit que si x est dans $g^{<n}(K)(V,\phi)$, c'est à dire si $x = ab$ avec $a \in \bigcap_{\substack{\gamma \ : \ f^{<n}(K)^0 \to \mathbb{F}_2; \\ \gamma \neq \phi}} \ker(\gamma)$, $\theta_{K,V}(\gamma \otimes x) = a\theta_{K,V}(\gamma \otimes b)$ et donc $x \in g^{<n}(K)(V,\phi)$. □

Remarque 3.3.36. La naturalité de $\theta_{K,V}$ et $\theta_{M,V}$, et le fait qu'elles induisent une structure de module dans $\mathcal{U}$ sur $f^{<n}\widetilde{(K)}(V)$ et $f^{<n}\widetilde{(M)}(V)$ sont conservés lorsqu'on les restreint à $g^{<n}(K)(V,\phi)$ et $g^{<n}(M)(V,\phi)$. On notera $\theta_{K,(V,\phi)}$ et $\theta_{K,(V,\phi)}$ ces restrictions.

Définition 3.3.37. Soit $\mathcal{K}^{<n}$ la sous-catégorie de $\mathcal{U}^{<n}$ dont les objets sont des algèbres instables et les morphismes des morphismes d'algèbres instables.

On en déduit les deux théorèmes suivant.

Théorème 3.3.38. *Soit* K *une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur* $\mathcal{A}$. *Alors* $g^{<n}(K)$ *est un foncteur de* $\mathcal{S}(K)$ *dans* $\mathcal{K}^{<n}$ *tel que pour tout* $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$, $g^{<n}\widetilde{(K)}(V,\phi)$ *est muni d'une structure de module naturelle en* (V,ϕ), $\Gamma^*(V) \otimes g^{<n}\widetilde{(K)}(V,\phi) \to g^{<n}\widetilde{(K)}(V,\phi)$ *de telle sorte que l'isomorphisme de modules instables tronqués* $f^{<n}(K)(V) \cong \prod_{\phi \ : \ K \to H^*(V)} g^{<n}(K)(V,\phi)$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{KF}^{<n}$.

Remarque 3.3.39. Notons que, pour $F \in \mathcal{KF}^{<n}$ tel que pour tout espace vectoriel $V \in \mathcal{V}^f$ $\mathrm{spec}(F^0(V))$ est fini, on peut définir pour $\phi \in \mathrm{spec}(F^0(V))$ $F(V,\phi) := F(V) \otimes_{F^0(V)} \mathbb{F}_2(\phi)$ et obtenir de la même manière un isomorphisme $\mathcal{KF}^{<n}$ $F(V) \cong \prod_{\phi \in \mathrm{spec}(F^0(V))} F(V,\phi)$.

Théorème 3.3.40. *Soit* K *une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur* $\mathcal{A}$ *et soit* $M \in K - \mathcal{U}$. *Alors* $g^{<n}(M)$ *est un foncteur de* $\mathcal{S}(K)$ *dans* $\mathcal{U}^{<n}$ *tel que pour tout* $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$, $g^{<n}(M)(V,\phi)$ *est muni d'une structure* $g^{<n}(K)(V,\phi)$*-module naturelle en* (V,ϕ) *et* $g^{<n}\widetilde{(M)}(V,\phi)$ *est muni d'une structure de module naturelle en* (V,ϕ), $\Gamma^*(V) \otimes g^{<n}\widetilde{(M)}(V,\phi) \to g^{<n}\widetilde{(M)}(V,\phi)$ *de telle sorte que l'isomorphisme de modules instables tronqués* $f^{<n}(M)(V) \cong$

$\prod_{\phi\,:\,M\to H^*(V)} g^{<n}(M)(V,\phi)$ *est un isomorphisme dans* $f^{<n}(K)-\mathcal{F}^{<n}$ *(la catégorie des* $f^{<n}(K)$*-modules dans* $\mathcal{F}^{<n}$*).*

3.4 Les catégories $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, pour K une algèbre instable et V un espace vectoriel de dimension finie, la structure d'algèbre de Boole de $f(K)(V)$ joue un rôle important dans l'étude de $f^{<n}(K)$. La proposition 3.3.1, nous permet de relier l'étude de f considéré comme un foncteur de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{B}$ à l'étude du foncteur, déjà étudié dans [HLS93], qui à une algèbre instable K et à un espace vectoriel V associe l'ensemble profini $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des foncteurs de $\mathcal{V}^f$ dans les ensembles, ces constructions ne sont pas propres à $p=2$, en général, $\mathcal{V}^f$ désignera la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimensions finies, pour p un nombre premier, quand on s'intéressera à des foncteurs quelconques de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{S}et$. On se restreindra au cas $p=2$, uniquement lorsqu'on étudiera des foncteurs provenant d'algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod.

3.4.1 La catégorie de Rector

On rappelle ici la définition de la catégorie de Rector introduite dans [Rec84] et utilisée par exemple dans [HLS93], [Hea20] et [Hea21], qui nous permettra par la suite, pour K une algèbre instable noethérienne, de réduire l'étude du foncteur qui à V associe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ à l'étude d'un foncteur ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non triviales.

Définition 3.4.1. Soit $\mathcal{R}(K)$ la catégorie de Rector définie comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}(K)$ dont les objets sont les couples (V,ϕ) tels que $H^*(V)$ est finiment engendré en tant que K-module pour la structure de K-module induite par $\phi : K \to H^*(V)$.

Remarque 3.4.2. Pour (V,ϕ) dans $\mathcal{R}(K)$ et $\alpha : W \to V$ un morphisme d'espace vectoriel, $(W, H^*(\alpha)\circ\phi)$ est dans $\mathcal{R}(K)$ si et seulement si α est injectif.

On va voir par la suite que, pour K une algèbre noetherienne, on peut reconstituer $\mathcal{S}(K)$ à partir de $\mathcal{R}(K)$.

3.4.2 Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_\_))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathbf{f.g.}}(K, H^*(\_\_))$

Définition 3.4.3. Soit $\mathcal{VI}$ la sous-catégorie de $\mathcal{V}^f$ contenant tous les objets de $\mathcal{V}^f$ et dont les morphismes sont les morphismes injectifs d'espaces vectoriels.

Définition 3.4.4.
1. Soient $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ les catégories de foncteurs contravariants respectivement de $\mathcal{V}^f$ et $\mathcal{VI}$ dans la catégorie des ensembles.

2. Soient $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$ les catégories de foncteurs contravariants respectivement de $\mathcal{V}^f$ et $\mathcal{VI}$ dans les ensemble finis.
3. Soient $\mathcal{P}\text{ro}(\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}})$ et $\mathcal{P}\text{ro}(\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}})$ les catégories de pro-objets dans les catégories $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$.
4. Soient, enfin, $\mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$ les catégories de foncteurs contravariants de $\mathcal{V}^f$ et $\mathcal{VI}$ dans les ensembles profinis.

Notons qu'il existe un diagramme commutatif de foncteurs, dans lequel les flèches verticales sont les foncteurs restrictions à $\mathcal{VI}$, que nous noterons $\mathcal{O}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}\text{ro}(\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}\text{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}} \arrow[d] \\
\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}} \arrow[r] & \mathcal{P}\text{ro}(\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}) \arrow[r] & \mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}} \arrow[r] & \mathcal{S}\text{et}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}.
\end{tikzcd}$$

Définition 3.4.5. Soit K une algèbre instable, on définit $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{f.g.}}(K, H^*(\_))$ respectivement dans $\mathcal{S}\text{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{S}\text{et}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$ qui à un espace vectoriel V associent respectivement les morphismes d'algèbres instables de K dans $H^*(V)$ et les morphismes d'algèbres instables ϕ de K dans $H^*(V)$ tels que ϕ fait de $H^*(V)$ un K-module finiment engendré.

Remarque 3.4.6. Si K est finiment engendrée en tant qu'algèbre sur l'algèbre de Steenrod, alors pour tout espace vectoriel V de dimension finie, $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est fini. Donc $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{f.g.}}(K, H^*(\_))$ sont respectivement dans $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$.
En particulier, si K est noethérienne $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{f.g.}}(K, H^*(\_))$ sont respectivement des objets de $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ et $\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}}$.

Proposition 3.4.7. *Soit K une algèbre instable quelconque, alors $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ est dans $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}})$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.3.9. □

Remarque 3.4.8. $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{f.g.}}(K, H^*(V))$ est fonctoriel sur $(\mathcal{VI})^{\text{op}}$, mais n'est pas fonctoriel en K. En effet, pour $\alpha : K \to R$ un morphisme d'algèbre instable et $\gamma : R \to H^*(V)$ induisant une structure de R-module finiment engendré sur $H^*(V)$, la composition $\gamma \circ \alpha$ ne fait pas nécessairement de $H^*(V)$ un K-module finiment engendré. $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{f.g.}}(K, H^*(\_))$ n'est donc à priori pas dans $\mathcal{P}\text{ro}(\mathcal{F}\text{in}^{(\mathcal{VI})^{\text{op}}})$.

Notons g, le foncteur de $\mathcal{K}^{op}$ dans $\mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ qui à K associe $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$.

Définition 3.4.9. Soit $\mathcal{L}$ le foncteur linéarisation de $\mathcal{P}\text{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\text{op}}}$ dans $\mathcal{F}$, qui à un foncteur F dans les ensembles profinis associe le foncteur qui à $V \in \mathcal{V}^f$ associe $\mathbb{F}_2^{F(V)}$, l'algèbre des fonctions

continues de $F(V)$ dans $\mathbb{F}_2$.
Et soit $\mathcal{P}\mathrm{fin}_\omega^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dont les objets sont ceux dont l'image par $\mathcal{L}$ est dans $\mathcal{F}_\omega$.

Le théorème suivant est une conséquence de la proposition 3.3.10.

Théorème 3.4.10. *[HLS93, Partie II.1] Le diagramme suivant est commutatif et induit une équivalence de catégorie entre les catégories $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_1$ et $\mathcal{P}fin_\omega^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathcal{P}fin^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\
\mathcal{U} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F}.
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.4.11. Ce théorème n'est pas spécifique au cas $p = 2$.

Puisque le foncteur $\mathcal{L}$ est à valeurs dans la catégorie des algèbres dans $\mathcal{F}$, $m \circ \mathcal{L}$ est à valeurs dans $\mathcal{K}$.

Définition 3.4.12. Soit $b : \mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{K}$ défini comme la composition de $\mathcal{L}$ par le foncteur m.

3.4.3 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}\mathcal{I})^{\mathrm{op}}}$.

Dans cette partie, nous allons rappeler la notion d'élément régulier d'un objet dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$. L'intérêt de cette construction est de ramener l'étude de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$, pour K une algèbre noethérienne, à celle de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(K, H^*(\_))$.

Définition 3.4.13. [HLS93, Partie II.2] On dira d'une algèbre instable K qu'elle est de degré de transcendance $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si d est la borne supérieur des cardinaux d'ensembles finis d'éléments homogènes de K algébriquement indépendants.

Remarque 3.4.14. En particulier, si K est noethérienne, K est de degré de transcendance fini.

On verra que pour K de degré de transcendance d, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(K, H^*(V))$ est trivial pour $\dim(V) > d$.

Proposition 3.4.15. *[HLS93, Proposition-Definition 5.1] Soient $G \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $s \in G(V)$. Alors, il existe un unique sous-espace vectoriel U de V que l'on dénotera $ker(s)$, tel que :*

1. *Pour tout $t \in G(W)$ et tout morphisme $\alpha : V \to W$ tel que $s = G(\alpha)(t)$, $ker(\alpha) \subset U$.*
2. *Il existe W_0 dans $(\mathcal{V}^f)^{op}$, $t_0 \in G(W_0)$ et $\alpha_0 : V \to W_0$ tels que $s = G(\alpha_0)(t)$ et $ker(\alpha_0) = U$.*

3. *Il existe $t_0 \in G(V/U)$ tel que $s = G(\pi)(t_0)$, où π est la projection de V sur V/U.*

Définition 3.4.16. Soient $G \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $s \in G(V)$. On dit que s est régulier si $\ker(s) = 0$.

Soit $\mathrm{reg}(G)(V) := \{x \in G(V)\ ;\ \ker(x) = 0\}$

Soit K une algèbre instable connexe dont le module des indécomposables $\mathcal{Q}(K) := I/I^2$ (où I désigne l'idéal d'augmentation de K) est localement fini. Alors, d'après [DW92, Proposition 4.8], et pour $\alpha : K \to H^*(V)$ un morphisme d'algèbre instable, $\alpha = H^*(\pi) \circ \tilde{\alpha}$ avec $\tilde{\alpha} : K \to H^*(V/\ker(\alpha))$ un morphisme d'algèbre instable régulier induisant sur $H^*(V/\ker(\alpha))$ une structure de K-module finiment engendré.

On rappelle la définition d'un foncteur noethérien introduite dans [HLS93]

Définition 3.4.17. Soit F un foncteur de $(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}$ dans les ensembles profinis, on dit que F est noethérien si il est à valeur dans les ensembles finis et si, pour tout $s \in F(V)$ pour V un espace vectoriel de dimension finie et pour tout morphisme α à valeur dans V, $\ker(F(\alpha)s) = \alpha^{-1}(\ker(s))$.

Proposition 3.4.18. *[HLS93, Théorème 7.1]*

1. *Si $K \in \mathcal{K}$ est noethérienne, $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ est noethérien.*
2. *Si $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ est noethérien, alors $b(F) \in \mathcal{K}$ est noethérienne.*

Lemme 3.4.19. *Soit F un foncteur noethérien, alors, $reg(F)$ est un objet de $\mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}}$.*

Remarque 3.4.20. reg n'est pas un foncteur, en effet, si γ est une transformation naturelle entre deux foncteurs F et G, l'image par γ d'un élément régulier n'est pas nécessairement régulier, on ne peut donc pas définir d'application $\mathrm{reg}(\gamma)$. Par exemple, si on fixe V et U où U est un sous-espace vectoriel de V, considérons le morphisme de foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V/U)$ induit par la projection de V sur V/U. Alors, id_V est régulier dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V)$ mais $\ker(\pi \circ \mathrm{id}_V) = U$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V/U)$.

Proposition 3.4.21. *[DW92, Proposition 4.8] Pour K une algèbre instable noethérienne, on a un isomorphisme naturel $reg(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))) \cong Hom_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\_))$.*

On rappelle que $\mathcal{O}$ est le foncteur oubli de $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dans $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ induit par restriction à $(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}$. On définit l'extension de Kan à gauche de $\mathcal{O}$ le long de l'identité.

Proposition 3.4.22. *Le foncteur $\mathcal{O}$ a un adjoint à gauche, qui à un foncteur $F \in \mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}}$ associe $\tilde{F}$, défini par $\tilde{F}(V) := \coprod_{d=0}^{dim(V)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{Gl_d(\mathbb{F}_p)} Surj(V, \mathbb{F}_p^d)$.*

Démonstration. Justifions d'abord que $\tilde{F}$ définit bien un objet dans $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$. A un morphisme $\alpha : V \to W$ on associe $\tilde{F}(\alpha)$ de la manière suivante : α s'écrit de manière unique, modulo l'action d'un élément de $\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)$, comme une composition de la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, two heads] & & W \\
& \mathbb{F}_p^d \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}.$$

Étant donné δ une surjection de W dans $\mathbb{F}_p^n$ ce diagramme s'insère de manière unique, toujours modulo l'action d'un élément de $\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)$, dans un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & & W \arrow[rr, "\delta"] & & \mathbb{F}_p^n \\
& \mathbb{F}_p^d \arrow[ur, hook] \arrow[dr, two heads, "\tilde{\alpha}"] & & & \\
& & \mathbb{F}_p^t \arrow[uurr, hook, "\tilde{\delta}"] & &
\end{tikzcd}.$$

Alors, pour (x,δ) le représentant d'une classe dans $F(\mathbb{F}_p^n) \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(W,\mathbb{F}_p^n)$, $\tilde{F}(\alpha)\,[x,\delta]$ désigne alors la classe de $(F(\tilde{\delta})(x), \tilde{\alpha}\circ\pi)$, cette classe ne dépend pas du représentant (x,δ) choisi. De plus, cette construction est naturelle en F, $(\tilde{\_})$ définit bien un foncteur de $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ dans $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Soit ϕ une transformation naturelle de $\tilde{F}$ dans A, où A est un objet de $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$. Alors, pour tout espace vectoriel V,

$$\phi_V \ : \ \coprod_{d=0}^{\dim(V)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^d) \to A(V).$$

Or, on a un isomorphisme naturel en V, $F(V) \cong F(\mathbb{F}_p^{\dim(V)}) \times_{\mathrm{Gl}_{\dim(V)}(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^{\dim(V)})$. Donc le morphisme

$$\phi_V|_{F(\mathbb{F}_p^{\dim(V)}) \times_{\mathrm{Gl}_{\dim(V)}(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^{\dim(V)})}$$

induit un morphisme $\iota(\phi)_V$ de $F(V)$ dans $\mathcal{O}(A)(V)$. $\iota(\phi)$ est une transformation naturelle. En effet, soit α un morphisme injectif de V dans W, alors, pour $(x,\delta) \in F(\mathbb{F}_p^{\dim(W)}) \times_{\mathrm{Gl}_{\dim(W)}(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(W,\mathbb{F}_p^{\dim(W)})$, $\phi_V(\tilde{F}(\alpha)(x,\delta)) = (F(\tilde{\delta})(x), \tilde{\alpha}\circ\pi)$ où $\tilde{\delta}$, $\tilde{\alpha}$ et π ont la même signification que dans le diagramme ci-dessus, or $(F(\tilde{\delta})(x), \tilde{\alpha}\circ\pi)$ s'identifie avec $F(\alpha)(x,\delta)$ par l'isomorphisme naturel entre $F(V)$ et $F(\mathbb{F}_p^{\dim(V)}) \times_{\mathrm{Gl}_{\dim(V)}(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^{\dim(V)})$, $\iota(\phi)$ est donc bien une transformation naturelle.

Réciproquement, pour ϕ une transformation naturelle entre F et $\mathcal{O}(A)$, on définit

$$\gamma(\phi)_V \ : \ \tilde{F}(V) \to A(V)$$

de la façon suivante, à $(x,\delta) \in F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^d)$ on associe $A(\delta)(\phi_{\mathbb{F}_p^d}(x))$. La naturalité de $\gamma(\phi)$ est une conséquence immédiate de la définition de $\tilde{F}(\alpha)$ pour α un morphisme d'espace vectoriel. Alors, γ et ι sont inverses l'un de l'autre ce qui conclut la preuve. □

Proposition 3.4.23. *Soit F un foncteur noethérien, alors on a un isomorphisme naturel $\widetilde{reg(F)} \cong F$.*

Démonstration. Soit F un foncteur noethérien. Pour V un espace vectoriel, on définit le morphisme suivant de $\widetilde{reg(F)}(V)$ dans $F(V)$ de la manière suivante : $\begin{array}{ccc} \widetilde{reg(F)}(V) & \to & F(V) \\ [(x,\gamma)] & \mapsto & F(\gamma)(x), \end{array}$ pour x un élément régulier de $F(\mathbb{F}_p^d)$ et γ une surjection de V dans $\mathbb{F}_p^d$. Alors, la proposition 3.4.15 garantit que ce morphisme est bijectif, et la condition de nothérianité de F garantit que ce morphisme est naturel en V. □

Corollaire 3.4.24. *Soit K une algèbre instable noethérienne, on a une bijection naturelle en V,*

$$Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)) \cong \coprod_{d=0}^{dim(V)} Hom_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\mathbb{F}_p^d)) \times_{Gl_d(\mathbb{F}_p)} Surj(V, \mathbb{F}_p^d).$$

3.4.4 Foncteur décalage dans $\mathcal{S}\mathbf{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathbf{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$

On s'intéresse, pour V un espace vectoriel de dimension finie, à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), H^*(\_))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(T_V(K), H^*(\_))$. Par la définition du foncteur T, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), H^*(\_))$ est facile à identifier. En effet, pour tout espace vectoriel de dimension finie W, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), H^*(W)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V \oplus W))$.

Définition 3.4.25. On définit le foncteur Σ_W sur la catégorie $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dans elle même et qui se restreint à $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, par $(\Sigma_W F)(V) := F(V \oplus W)$ pour tout espace vectoriel de dimension finie V et $\Sigma_W F(\alpha) := F(\alpha \oplus \mathrm{id}_W)$ pour tout morphisme α.

Proposition 3.4.26. *Soit K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, alors on a l'isomorphisme naturel suivant : $\Sigma_W Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)) \cong Hom_{\mathcal{K}}(T_W(K), H^*(\_))$.*

Remarque 3.4.27. Pour V un espace vectoriel de dimension finie fixé, et $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, $W \mapsto \Sigma_W F(V)$ définit un objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Définition 3.4.28. Pour V un espace vectoriel de dimension finie et F un objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, soit $\rho_{F,W}$ de $\Sigma_W F(V)$ dans $F(W) =: \Sigma_W F(0)$, le morphisme naturel en W induit par l'injection de 0 dans V.

Soit alors $\phi \in F(W)$, on définit $\Sigma_{(W,\phi)}F(V)$ la fibre au dessus de ϕ par $\rho_{F,W}$. $\Sigma_{(W,\phi)}F$ est un foncteur sur $(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}$.

Lemme 3.4.29. *Pour K une algèbre instable on a que*

$$\Sigma_{(V,\phi)}Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)) \cong Hom_{\mathcal{K}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_)).$$

Proposition 3.4.30. *Soit W un espace vectoriel de dimension finie et F dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$, alors on a un isomorphisme naturel en V, $\Sigma_W F(V) \cong \bigsqcup_{\phi\in F(W)} \Sigma_{(W,\phi)}F(V)$.*

Démonstration. Il suffit de justifier que cet isomorphisme est naturel en V. Or, pour $\alpha : H \to V$ un morphisme d'espaces vectoriels et $f \in \Sigma_{(W,\phi)}F(V) \subset \Sigma_W F(V)$, alors $\Sigma_W F(\alpha)(f) = F(\mathrm{id}_W \oplus \alpha)(f)$ vérifie que $\rho_{F,W}(\Sigma_W F(\alpha)(f)) = F(\mathrm{id}_W \oplus 0_H)(F(\mathrm{id}_W \oplus \alpha)(f)) = F(\mathrm{id}_W \oplus 0_V)(f) = \phi$ par hypothèse. Donc, $f \in \Sigma_{(W,\phi)}F(V)$ implique que $\alpha^* f \in \Sigma_{(W,\phi)}F(H)$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 3.4.31. On pourrait définir de manière similaire à Σ_W, un foncteur $\bar{\Sigma}_W$ de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ dans elle même, mais dans ce cas $\widetilde{\bar{\Sigma}_W F} \neq \Sigma_W \tilde{F}$. Et donc, en général pour K une algèbre instable noethérienne, $\bar{\Sigma}_W \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(K, H^*(\_)) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathrm{f.g.}}(T_W(K), H^*(\_))$.

En s'inspirant du travail de [Nag19], on définit un foncteur $\bar{\Sigma}_W$, tel que $\widetilde{\bar{\Sigma}_W F}$ soit naturellement isomorphe à $\Sigma_W \tilde{F}$.

Définition 3.4.32. Soient V, W et U des espaces vectoriels de dimensions finies, on définit $\Gamma_W(V,U) := \{\phi \in \mathrm{Surj}(V \oplus W, U) \mid \phi|_{V\oplus 0} \text{ est injectif}\}$.

Définition 3.4.33. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ et V et W des espaces vectoriels de dimensions finies, on définit $\bar{\Sigma}_W F(V)$ de la façon suivante :

$$\bar{\Sigma}_W F(V) := \bigsqcup_{d=0}^{\dim(V)+\dim(W)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Gamma_W(V, \mathbb{F}_p^d).$$

Proposition 3.4.34. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$ et W un espace vectoriel de dimension finie, alors $\bar{\Sigma}_W F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$. $\bar{\Sigma}_W$ définit donc un foncteur de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$ dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$.*

Démonstration. Pour $\alpha : V \to U$ un morphisme injectif, on définit $\bar{\Sigma}_W F(\alpha) : \bar{\Sigma}_W F(U) \to \bar{\Sigma}_W F(V)$ de la manière suivante. Soit $[(x,\gamma)]$ une classe d'équivalence dans $F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Gamma_W(U, \mathbb{F}_p^d)$, alors la composition de γ par $\mathrm{id}_W \oplus \alpha$ se factorise de manière unique, modulo le choix d'un isomorphisme f entre $(\gamma \circ (\mathrm{id}_W \oplus \alpha))(W \oplus V)$ et $\mathbb{F}_p^t$ pour un certain entier t, en

$\gamma \circ (\mathrm{id}_W \oplus \alpha) = W \oplus V \overset{\tilde{\gamma}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{F}_p^t \overset{\tilde{\alpha}}{\hookrightarrow} \mathbb{F}_p^d$. Alors, on définit $\bar{\Sigma}_W F(\alpha)[(x,\gamma)] = [(F(\tilde{\alpha})x, \tilde{\gamma})]$. Ce morphisme est bien défini ce qui fait de $\bar{\Sigma}_W F$ un foncteur sur $(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}$. □

Remarque 3.4.35. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, alors $\bar{\Sigma}_W F(0) \cong \tilde{F}(W)$ et cet isomorphisme est naturel en W. Plus généralement, remarquons que, pour V un espace vectoriel de dimension finie fixé, $\bar{\Sigma}\_F(V) : W \mapsto \bar{\Sigma}_W F(V)$ est un objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Proposition 3.4.36. *Pour F un objet de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$ et V et W des espaces vectoriels de dimensions finies, on a un isomorphisme naturel en V, $\Sigma_W \tilde{F}(V) \cong \widetilde{\bar{\Sigma}_W F}(V)$.*

Démonstration. Soit $\phi : V \oplus W \to \mathbb{F}_p^d$ un morphisme surjectif, alors ϕ se factorise en un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} V \oplus W \arrow[rr, two heads, "\phi"] \arrow[dr, two heads, "\phi|_{V\oplus 0} \oplus \mathrm{id}_W"'] & & \mathbb{F}_p^d \\ & \mathrm{Im}(\phi|_{V\oplus 0}) \oplus W \arrow[ur, two heads, "i+\phi|_{0\oplus W}"'] & \end{tikzcd},$$

où i désigne l'injection de $\mathrm{Im}(\phi|_{V\oplus 0})$ dans $\mathbb{F}_p^d$. En choisissant un isomorphisme de $\mathrm{Im}(\phi|_{V\oplus 0})$ vers $\mathbb{F}_p^n$ pour n la dimension de $\mathrm{Im}(\phi|_{V\oplus 0})$, ϕ se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} V \oplus W \arrow[rr, two heads, "\phi"] \arrow[dr, two heads, "g \oplus \mathrm{id}_W"'] & & \mathbb{F}_p^d \\ & \mathbb{F}_p^n \oplus W \arrow[ur, two heads, "h"'] & \end{tikzcd},$$

avec $h|_{\mathbb{F}_p^n}$ injectif par construction. Soient g' et h' deux autres morphismes permettant de factoriser ϕ, comme dans le diagramme précédent, alors il existe $\beta \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)$ tel que $g' = \alpha \circ g$ et $h' = h \circ (\alpha^{-1} \oplus \mathrm{id}_W)$. Donc $\mathrm{Surj}(V \oplus W, \mathbb{F}_p^d) \cong \coprod_{n=0}^{\dim(V)} \Gamma_W(\mathbb{F}_p^n, \mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^n)$.

On en déduit les isomorphismes naturels suivants :

$$\begin{aligned}
\Sigma_W \tilde{F}(V) &= \coprod_{d=0}^{\dim(V)+\dim(W)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V \oplus W, \mathbb{F}_p^d), \\
&\cong \coprod_{d=0}^{\dim(V)+\dim(W)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Big(\coprod_{n=0}^{\dim(V)} \Gamma_W(\mathbb{F}_p^n, \mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^n)\Big), \\
&\cong \coprod_{n=0}^{\dim(V)} \Big(\coprod_{d=0}^{n+\dim(W)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Gamma_W(\mathbb{F}_p^n, \mathbb{F}_p^d))\Big) \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^n), \\
&\cong \widetilde{\bar{\Sigma}_W F}(V).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4.37. *Soit K une algèbre instable noetherienne et W un espace vectoriel de dimension finie. Alors, on a un isomorphisme dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$, $Hom_{\mathcal{K}f.g.}(T_W(K), H^*(\_)) \cong (\bar{\Sigma}_W Hom_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\_)))$.*

Démonstration. En effet, par adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(T_W(K), H^*(V))$ s'identifie aux morphismes d'algèbre instable ϕ de K dans $H^*(V \oplus W)$ tels que $\ker(\phi) \subset W$.
Par définition de $\ker(\phi)$, $\phi = H^*(\pi) \circ \tilde{\phi}$ avec $\tilde{\phi} \ : \ K \to H^*((V \oplus W)/\ker(\phi))$ et π la projection canonique de $V \oplus W$ sur $(V \oplus W)/\ker(\phi)$. Comme $\ker(\phi) \subset W$, ϕ s'écrit de manière unique, modulo conjugaison par un élément de $\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)$, comme $H^*(g) \circ \tilde{\phi}$ avec $g \ : \ V \oplus W \to \mathbb{F}_p^d$ un morphisme de $\Gamma_W(V, \mathbb{F}_p^d)$, $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\mathbb{F}_p)^d)$ et d un entier entre 0 et $\dim(V) + \dim(W)$. □

Nous allons construire un analogue à $\Sigma_{(V,\phi)}$ pour les objets dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$.

Définition 3.4.38. Pour $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, soit $\bar{\rho}_{F,W}$ de $\bar{\Sigma}_W F(V)$ dans

$$\bar{\Sigma}_W F(0) \cong \coprod_{d=0}^{\dim(W)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Gamma_W(0, \mathbb{F}_p^d) \cong \tilde{F}(W),$$

le morphisme naturel en W induit par l'injection de 0 dans V.

Soit alors $\phi \in \tilde{F}(W)$, on définit $\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F(V)$ la fibre au dessus de ϕ par $\bar{\rho}_{F,W}$.

Lemme 3.4.39. *$\Sigma_{(W,\phi)} F$ est un foncteur sur $(\mathcal{VI})^{op}$.*

Lemme 3.4.40. *Pour K une algèbre instable on a que*

$$\bar{\Sigma}_{(V,\phi)} Hom_{\mathcal{K}f.g.}(K, H^*(\_)) \cong Hom_{\mathcal{K}f.g.}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_)).$$

Proposition 3.4.41. *Soient W un espace vectoriel de dimension finie et F dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$, alors on a un isomorphisme naturel en V, $\bar{\Sigma}_W F(V) \cong \coprod_{\phi \in \tilde{F}(W)} \bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F(V)$.*

Démonstration. En effet, l'injection de $\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F$ dans $\bar{\Sigma}_W F$ est naturelle en F par naturalité de $\bar{\rho}_{F,W}$ et par construction, pour V un espace vectoriel de dimension fini, les $\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F(V)$ sont deux à deux disjoints, et les produit des injections $\coprod_{\phi \in \tilde{F}(W)} \bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F(V) \to \bar{\Sigma}_W F(V)$ est une bijection. □

On va justifier la compatibilité entre les différentes constructions.

Proposition 3.4.42. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$, W et V des espaces vectoriels de dimensions finies, et $\phi \in \tilde{F}(W)$, alors $\widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)}} F(V) = \Sigma_{(W,\phi)} \tilde{F}(V)$.*

Démonstration. Le foncteur $\widetilde{(\_)}$ commute aux unions disjointes, on a donc

$$\Sigma_W \tilde{F}(V) = \bigsqcup_{\phi \in \tilde{F}(W)} \Sigma_{(W,\phi)} \tilde{F}(V) \cong \bigsqcup_{\phi \in \tilde{F}(W)} \widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F}(V).$$

Par construction, $\rho_{\tilde{F},W}$ envoie les éléments de $\widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F}(V)$ sur ϕ. La bijection entre $\Sigma_W \tilde{F}$ et $\bigsqcup_{\phi \in \tilde{F}(W)} \widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F}(V)$ est donc une union disjointe d'inclusions de la forme $\widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F}(V) \hookrightarrow \bar{\Sigma}_{(W,\phi)} \tilde{F}(V)$, ces inclusions sont donc des égalités. □

3.4.5 Raffinement

Comme nous l'avons souligné, pour V un espace vectoriel de dimension finie fixé et $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, $\bar{\Sigma}\_F(V)$ est un objet dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, de plus, nous avons défini $\bar{\Sigma}_{(W,\phi)} F$ pour $\phi \in \tilde{F}(W)$. Nous allons expliquer comment se ramener à ne manipuler que des objets dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, sans avoir à utiliser l'extension de Kan. Nous présentons ces constructions à titre informatif, mais ne les utiliserons pas dans la suite de cette thèse.

Définition 3.4.43. Soient V, W et U trois espaces vectoriels de dimensions finies, on définit $\mathbf{B}(V, W; U)$ comme l'ensemble des morphismes surjectifs de $V \oplus W$ dans U dont les restrictions à V et W sont injectives.

Définition 3.4.44. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, on définit σF, qui à V et W associe $\sigma F(V, W) := \bigsqcup_{d=0}^{\dim(W)+\dim(V)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathbf{B}(V, W; \mathbb{F}_p^d)$

Lemme 3.4.45. *σ définit un foncteur de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$ dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op} \times (\mathcal{VI})^{op}}$.*

Démonstration. On se contente de justifier que σF est fonctoriel en la première variable puisque les deux variables jouent un rôle symétrique et que la bifonctorialité de σF est équivalente à la fonctorialité de σF selon chacun des variables. Pour W un espace vectoriel de dimension finie fixé et $\alpha : V \hookrightarrow U$ un morphisme injectif entre espaces vectoriels de dimensions finies, on définit $\sigma F(\alpha, W) : \sigma F(U, W) \to \sigma F(V, W)$ de la manière suivante. Si $f \in F(\mathbb{F}_p^d)$, avec $d \leq \dim(U) + \dim(W)$ et $\gamma \in \mathbf{B}(U, W; \mathbb{F}_p^d)$, soit alors t la dimension de l'image de $\gamma \circ (\alpha \oplus \mathrm{id}_W)$ et β un isomorphisme de $\mathbb{F}_p^t$ dans cette image, il existe un unique couple $(f', \gamma') \in F(\mathbb{F}_p^t) \times \mathbf{B}(V, W; \mathbb{F}_p^t)$ tel que $\beta \circ \gamma' = \gamma \circ (\alpha \oplus \mathrm{id}_W)$ et $f' = \beta^* f$.

Alors, la classe de ce couple dans $F(\mathbb{F}_p^t) \times_{\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)} \mathbf{B}(U, W; \mathbb{F}_p^t)$ ne dépend pas du choix de β. Alors, $\sigma F(\alpha, W)$ envoie la classe de (f, γ) dans $F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathbf{B}(U, W; \mathbb{F}_p^d)$ sur la classe de (f', γ') dans $F(\mathbb{F}_p^t) \times_{\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)} \mathbf{B}(U, W; \mathbb{F}_p^t)$, ce morphisme est bien défini, car la classe de (f', γ') ne dépend pas du choix de (f, γ).

Pour $\sigma F(\alpha, W)$ ainsi défini, $\sigma F(V, W)$ est bien fonctoriel en V. □

Proposition 3.4.46. *Soit F un objet de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$ et V un espace vectoriel de dimension finie fixé. Alors, $\bar{\Sigma}\_F(V) \cong (\sigma\widetilde{F(\_,V)})$ dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$.*

Démonstration. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions finies et $\phi \in \Gamma_W(V, \mathbb{F}_p^d)$. Modulo l'action de $\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)$, ϕ se factorise de manière unique en un diagramme de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} W \oplus V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "g\oplus \mathrm{id}_V"'] & & \mathbb{F}_p^d \\ & \mathbb{F}_p^t \oplus V \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd},$$

avec $h|_{\mathbb{F}_p^t\oplus 0}$ et $h|_{0\oplus V}$ injectives. Donc $\Gamma_W(V,\mathbb{F}_p^d) \cong \coprod_{t=0}^{\dim(W)} \mathbf{B}(\mathbb{F}_p^t, V; \mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(W, \mathbb{F}_p^t)$.

On en déduit que

$$\bar{\Sigma}_W F(V) \cong \coprod_{t=0}^{\dim(W)} \left(\coprod_{d=0}^{t+\dim(V)} F(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathbf{B}(\mathbb{F}_p^t, V; \mathbb{F}_p^d) \right) \times_{\mathrm{Gl}_t(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(W, \mathbb{F}_p^t).$$

Donc,

$$\bar{\Sigma}_W F(V) \cong (\sigma\widetilde{F(\_,V)})(W),$$

où on a appliqué l'extension de Kan à $(\sigma F(\_,V)) \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$. $\square$

Définition 3.4.47. Pour V et W dans $\mathcal{V}^f$ et $\phi \in F(W)$ on définit $\sigma_{(W,\phi)}F(V)$ la fibre au dessus de ϕ par la transformation, naturelle en W, de $\sigma F(W,V)$ dans $\sigma F(W,0) \cong F(W)$, induite par l'injection de 0 dans V.

Proposition 3.4.48. *Soit W un espace vectoriel de dimension finie et F dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{VI})^{op}}$, alors on a un isomorphisme naturel en V, $\sigma F(W,V) \cong \coprod_{\phi\in F(W)} \sigma_{(W,\phi)}F(V)$.*

Démonstration. Pour V fixé, $\sigma F(W,V)$ est l'union disjointe des $\sigma_{(W,\phi)}F(V)$, par ailleurs, pour $\alpha : U \hookrightarrow V$ le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} \sigma F(W,V) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \sigma F(W,U) \arrow[dl] \\ & \sigma F(W,0) \cong F(W) & \end{tikzcd}.$$

Les inclusions de $\sigma_{(W,\phi)}F$ dans $\sigma F(W,V)$ sont donc naturelles en V. $\square$

Remarque 3.4.49. Dans cette partie, nous avons défini les décalages de foncteurs sur des espaces vectoriels sur des corps $\mathbb{F}_p$ avec p un nombre premier quelconque. La généralisation des isomorphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(T_V(K), H^*(W)) \cong \Sigma_V \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(K, H^*(W))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(W)) \cong$

$\Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_p}(K, H^*(W))$ au cas p impair ne sont qu'une conséquence formelle de l'adjonction entre le foncteur T_V et le produit tensoriel par $H^*(V)$, de la décomposition en composantes connexes de $T_V(K)$ et de la définition des décalages Σ_V et $\Sigma_{(V,\phi)}$ en caractéristique p.

3.4.6 Hom interne dans la catégorie $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$

Le foncteur décalage nous permet de définir un hom interne dans la catégorie $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, c'est à dire un bifoncteur $\underline{\mathrm{hom}}(\_,\_)$ contravariant en la première variable et covariant en la seconde, tel que pour tout $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, le produit par F ait $\underline{\mathrm{hom}}(F,\_)$ comme adjoint à droite.

Lemme 3.4.50. *Le foncteur Σ_W , défini par la définition 3.4.25, est adjoint à droite du produit cartésien par $Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W)$.*

Démonstration. On définit une application entre $\mathrm{Hom}(F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V), G)$ et $\mathrm{Hom}(F, \Sigma_V G)$ de la manière suivante, à une transformation naturelle ϕ de $F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)$ dans G, on associe la transformation naturelle $\tilde{\phi}$ qui à $f \in F(W)$ associe $\tilde{\phi}(f) := \phi(F(\pi_W^{V\oplus W})(f), \pi_V^{V\oplus W})$, où $\pi_V^{V\oplus W}$ et $\pi_W^{V\oplus W}$ désigne les projections de $V \oplus W$ sur V et W.

Alors, l'application $(\tilde{\_})$ a une inverse qui à $\phi : F \to \Sigma_V G$ associe la transformation naturelle, qui à $(f, \alpha) \in F(W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(W, V)$ associe $F((\mathrm{id}_W \oplus \alpha) \circ \Delta_W)\phi(f)$, où $\Delta_W : W \to W \oplus W$ est la diagonale de W. □

Définition 3.4.51. Soient F et G deux objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on définit $\underline{\mathrm{hom}}(F, G) \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ par $\underline{\mathrm{hom}}(F, G)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}}(F, \Sigma_V G)$, pour V un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 3.4.52. *$\underline{hom}$ est un Hom interne dans la catégorie $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$.*

Démonstration. La fonctorialité de $\underline{\mathrm{hom}}(F, G)$ sur $(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}$ est juste une conséquence de celle de $V \mapsto \Sigma_V G$. Il s'agit de montrer que $\underline{\mathrm{hom}}(F, G)$ est l'adjoint à droite du produit ensembliste par F.

On définit une application entre $\mathrm{Hom}(F \times H, G)$ et $\mathrm{Hom}(H, \underline{\mathrm{hom}}(F, G))$ de la manière suivante : à une transformation naturelle ϕ de $F \times H$ dans G, on associe la transformation naturelle $\tilde{\phi}$ qui à $h \in H(V)$ associe $\tilde{\phi}(h) : F \to \Sigma_V G$, où, pour $f \in F(U)$, $\tilde{\phi}(h)(f) = \phi_{V\oplus U}(F(\pi_V^{V\oplus U})(f), H(\pi_U^{V\oplus U})(h))$, où $\pi_V^{V\oplus U}$ et $\pi_U^{V\oplus U}$ désigne les projections de $V \oplus U$ sur V et U.

L'application $(\tilde{\_})$ a un inverse qui à $\phi : H \to \underline{\mathrm{hom}}(F, G)$ associe la transformation naturelle, qui à $(f, h) \in F(V) \times H(V)$ associe $G(\Delta_V)\phi(h)(f)$, où $\Delta_V : V \to V \oplus V$ est la diagonale de V. Le fait, que cette application soit un inverse de $(\tilde{\_})$ est une conséquence de ce que Δ_V composée avec la projection sur chacune des deux copies de V est l'identité.

□

Corollaire 3.4.53. *La transformation naturelle de $\underline{hom}(Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W), G)$ dans $\Sigma_W G$ qui à $\alpha \in Hom(Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W), \Sigma_V G)$ associe $\alpha(id_W) \in G(V \oplus W)$ est une bijection naturelle.*

Lemme 3.4.54. *Soit $\alpha : G \to F$ un morphisme dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ qui se factorise à travers $(id_G, 0) : G \to G \times Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W)$ et un morphisme de $G \times Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W)$ dans F. Alors la composition*

$$G \to \Sigma_W F \overset{\rho_{F,W}}{\to} F,$$

où $G \to \Sigma_W F$ est l'adjoint du morphisme de $G \times Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W)$ dans F, est égale à α.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la commutativité du diagramme qui suit, obtenu par naturalité en W de l'isomorphisme d'adjonction :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_W F \arrow[r] & F \\ & G \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, W) \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

où la flèche entre $\Sigma_W F$ et F est induite par l'inclusion de 0 dans W. □

La catégorie $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ possède un objet terminal, à savoir le foncteur constant égal à un singleton, $*$.

Définition 3.4.55. On dira qu'un foncteur F est connexe si il existe une unique transformation naturelle $\epsilon : * \to F$, telle que la composée $* \overset{\epsilon}{\to} F \to *$ soit l'identité. Alors, $F(0)$ est un singleton, d'unique objet $1_F = \epsilon_0(*)$. Pour F un foncteur connexe, on notera $\epsilon_{F,V}$ l'image de $*$ par ϵ_V.

Le résultat suivant est l'analogue pour les foncteurs du lemme 3.3.18.

Proposition 3.4.56. *Pour F et G deux objets de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ avec F connexe, W un espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in G(W)$, $Hom(F, \Sigma_{(W,\phi)} G)$ s'identifie avec $\{\gamma \in Hom(F \times Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, W), G) \mid \forall V \in Ob((\mathcal{V}^f)^{op})$ et $\forall \alpha \in Hom_{\mathbb{F}_p}(V, W)\ \gamma(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha) = G(\alpha)(\phi)\}$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in \mathrm{Hom}(F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, W), G) \cong \mathrm{Hom}(F, \Sigma_W G)$, et soit
$\tilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}(F, \underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, W), G))$, où $\tilde{(\_)}$ est défini comme dans la preuve de la proposition 3.4.52.
Pour tout $f \in F(V)$, $G(\iota_W^{V\oplus W}\tilde{\gamma}(\mathrm{id}_W)(f) = G(\iota_W^{V\oplus W})\gamma(F(\pi_V^{V\oplus W}), \pi_W^{V\oplus W}) = \gamma(F(\pi_0^W)(1_F), \mathrm{id}_W)$. Donc l'adjoint à γ est à valeur dans $\Sigma_{(W,\phi)} G$ si et seulement si $\gamma(F(\pi_0^W)(1_F), \mathrm{id}_W)$ est égal à ϕ. Par le lemme de Yoneda, c'est équivalent au fait que pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, W)$, $\gamma(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha) = G(\alpha)(\phi)$. □

3.4.7 $\mathcal{P}\mathbf{ro}(\mathcal{F}\mathbf{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}})$ et $\mathcal{P}\mathbf{ro}(\mathcal{F}\mathbf{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$.

On va étendre certaine de ces constructions à certains objets de la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$. Dans l'espoir de pouvoir généraliser leur utilisation à l'étude d'algèbres non noethériennes. Si étendre la définition de l'extension de Kan à des objets dans $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ ne pose pas de problèmes, pas plus que la définition d'un foncteur $\bar{\Sigma}$ sur la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$, la difficulté d'appliquer les méthodes de la partie précédente à des foncteurs non noethériens repose sur le fait que en général, pour $F \in \mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ on ne sait pas identifier de foncteur $F' \in \mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ tel que $F \cong \tilde{F}'$.

On étend le foncteur $(\tilde{\_})$ à la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$.

Définition 3.4.57. Soit G un objet $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, on définit $\tilde{G}(V) := \coprod_{d=0}^{\dim(V)} G(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$, où $\mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$ est muni de la topologie discrète.

Proposition 3.4.58. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $G : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}}}$ un objet de $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}})$. Alors, on a l'isomorphisme naturel en V, $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \tilde{G}(c)(V) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(V)$.*

Démonstration. On rappelle que le foncteur des pro-objets dans les ensembles finis dans les espaces topologiques, qui à un foncteur $X : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$ associe la limite projective de X dans $\mathcal{T}op$, où un ensemble fini est considéré comme un espace topologique muni de la topologie discrète, induit une équivalence de catégorie entre les ensembles profinis et les espaces compacts totalement discontinus.

Soit alors $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ un pro-objet de la catégorie $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$, alors,

$$\coprod_{d=0}^{\dim(V)} \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$$

est un cône du système projectif donné par les $\coprod_{d=0}^{\dim(V)} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$. Donc par propriété universelle de la limite, on a une unique application continue de $\coprod_{d=0}^{\dim(V)} \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$ dans $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \coprod_{d=0}^{\dim(V)} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$ à travers laquelle se factorisent toutes les applications de $\coprod_{d=0}^{\dim(V)} \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$ dans $\coprod_{d=0}^{\dim(V)} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V, \mathbb{F}_p^d)$.

Cette application est une bijection continue, définie sur un compact, puisque les limites projectives d'ensemble discrets finis sont à valeurs dans les espaces compacts, c'est donc un homéomorphisme. Donc,

$$\bigsqcup_{d=0}^{\dim(V)} \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^d) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \bigsqcup_{d=0}^{\dim(V)} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Surj}(V,\mathbb{F}_p^d),$$

c'est à dire $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \tilde{G}(c)(V) \cong \widetilde{\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)}(V)$. □

Définition 3.4.59. On définit comme précédemment le foncteur Σ_W sur la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{fin}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dans elle même, par $(\Sigma_W F)(V) := F(V \oplus W)$ pour tout espace vectoriel de dimension finie V et $\Sigma_W F(\alpha) := F(\alpha \oplus \mathrm{id}_W)$ pour tout morphisme α. On définit de même le foncteur décalage Σ_W de $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}})$ dans elle même, définit comme le foncteur qui à $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ associe le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ qui à $c \in \mathcal{C}$ associe $\Sigma_W G(c)$.

Proposition 3.4.60. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ un objet de $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}})$. Alors, $\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \Sigma_W G(c)$.*

Démonstration. En effet, pour tout V espace vectoriel de dimension finie,

$$(\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c))(V) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(V \oplus W) \cong (\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \Sigma_W G(c))(V),$$

et ces isomorphismes sont naturels en V. □

Définition 3.4.61. Pour $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ un objet de $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$, soit $\bar{\Sigma}_W G$ l'objet de $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$ défini par

$$\bar{\Sigma}_W G(c)(V) := \bigsqcup_{d=0}^{\dim(V)+\dim(W)} G(c)(\mathbb{F}_p^d) \times_{\mathrm{Gl}_d(\mathbb{F}_p)} \Gamma_W(V,\mathbb{F}_p^d).$$

Corollaire 3.4.62. *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}}$ un objet de $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}})$. Alors, $\Sigma_W \tilde{G} \cong \widetilde{\bar{\Sigma}_W G}$ et $\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \tilde{G}(c)(V) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{\bar{\Sigma}_W} G(c)(V)$.*

Démonstration. Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on a $\Sigma_W \tilde{G}(c) \cong (\widetilde{\bar{\Sigma}_W G})(c)$ d'après la proposition 3.4.36, on en déduit le premier isomorphisme, le second est alors une conséquence de la proposition 3.4.60. □

Définition 3.4.63. Soit $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ un objet de $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}})$. Soit $\phi \in \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$, on définit $\Sigma_{(W,\phi)} G$ comme le pro-objet qui à $c \in \mathcal{C}$ associe $\Sigma_{(W,\phi_c)} G(c)$ où ϕ_c est l'image de ϕ par l'application canonique de $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$ dans $G(c)(W)$.

Proposition 3.4.64. *Soit* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ *un objet de* $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}})$. *Soit* $\phi \in \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$, *alors* $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}}(\Sigma_{(W,\phi)}G)(c)$ *est la fibre de* $\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c) \to \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$ *au dessus de* ϕ *dans* $\mathcal{P}fin^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$.

Démonstration. Les compositions $\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c) \cong \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \Sigma_W G(c) \to \Sigma_W G(c) \to G(c)(W)$ induisent par propriété universelle une application continue $\Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c) \to \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$. De même, on a une inclusion continue $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \Sigma_{(W,\phi_c)} G(c) \to \Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)$ induite par les inclusions de chacun des $\Sigma_{(W,\phi_c)}G(c)$ dans $\Sigma_W G(c)$, c'est donc un homéomorphisme sur son image. Enfin, soit $x \in \Sigma_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)$ son image dans $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)(W)$ est ϕ si et seulement si son image dans chaque $\Sigma_W G(c)$ est un antécédent de ϕ_c, c'est à dire si et seulement si il est dans l'image de $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \Sigma_{(W,\phi_c)} G(c)$. □

Définition 3.4.65. Soit $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}}$ un objet de $\mathcal{P}\mathrm{ro}(\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{VI})^{\mathrm{op}}})$. Soit $\phi \in \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{G(c)}(W) \cong \widetilde{\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)}(W)$, on définit $\bar{\Sigma}_{(W,\phi)}G$ comme le pro-objet qui à $c \in \mathcal{C}$ associe $\bar{\Sigma}_{(W,\phi_c)}G(c)$ où ϕ_c est l'image de ϕ par l'application canonique de $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{G(c)}(W)$ dans $G(c)(W)$.

Remarque 3.4.66. Par la proposition 3.4.58, si G est un pro-objet dans la catégorie des foncteurs sur $(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}$ à valeur dans les ensembles finis, $\widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)}G(c)} \cong \Sigma_{(W,\phi)}\widetilde{G(c)}$, et donc $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{\bar{\Sigma}_{(W,\phi)}G(c)}(V)$ est la fibre au dessus de ϕ de l'application $\Sigma_W \widetilde{\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)}(V) \to \widetilde{\varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c)}(W)$.

Proposition 3.4.67. *Soit* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}}$ *un objet de* $\mathcal{P}ro(\mathcal{F}in^{(\mathcal{VI})^{op}})$. *Soit* $\phi \in \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{G(c)}(W)$, *alors* $\varprojlim_{c\in\mathcal{C}}(\bar{\Sigma}_{(W,\phi)}G)(c)$ *est la fibre de* $\bar{\Sigma}_W \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} G(c) \to \varprojlim_{c\in\mathcal{C}} \widetilde{G(c)}(W)$ *au dessus de* ϕ *dans* $\mathcal{P}fin^{(\mathcal{VI})^{op}}$.

Démonstration. Ce résultat se montre de la même manière que la proposition 3.4.64. □

3.5 Les catégories $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$

Soit $K \in \mathcal{K}$, une algèbre finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Dans le théorème 3.2.6, nous avons montré que $(K - \mathcal{U})/\mathcal{N}il_n$ est équivalente à $f(K) - \mathcal{F}_\omega^{<n}$. Nous allons introduire la catégorie $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sf(K)$ dans laquelle il sera plus facile de manipuler un foncteur décalage faisant le pendant dans les foncteurs du foncteur $T_{(V,\phi)}$. Cette section nous sera utile dans la partie 4.2.3.

3.5.1 Les catégories $K_{f.g.} - \mathcal{U}/\mathcal{N}il_1$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sf(K)$

Soit K une algèbre instable, le foncteur f restreint à $K - \mathcal{U}$ est à valeur dans les objets N de $\mathcal{F}_\omega$ tels que pour tout espace vectoriel de dimension finie V, $N(V)$ est muni d'une structure naturelle en V de module sur l'algèbre de Boole $\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))}$. Pour des raisons techniques dans la démonstration du théorème 4.2.15, nous souhaitons nous ramener à l'étude de foncteurs de même variance que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$. Dans le cas où K est noethérienne et où on se restreint à des objets M de $K-\mathcal{U}$ finiment engendrés en tant que K-modules, par le corollaire 3.3.27 on peut se ramener par dualité à l'étude du foncteur $\mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(\_)(\_))$. Cette partie est consacrée à développer le formalisme adapté à ce contexte.

Définition 3.5.1. Pour $K \in \mathcal{K}$ soit $K_{f.g.}-\mathcal{U}$ la sous catégorie pleine de $K-\mathcal{U}$ des K-modules instables finiment engendrés en tant que K-modules.

Définition 3.5.2. Pour p un nombre premier, soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on définit $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs G contravariants de $\mathcal{V}^f$ dans $\mathcal{V}^f$ tels que pour tout $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie V, $G(V)$ soit muni d'une décomposition $G(V) = \bigoplus_{\phi\in F(V)} G(V,\phi)$ telle que pour α un morphisme de W dans V, $G(\alpha)$ envoie $G(V,\phi)$ dans $G(W, F(\alpha)(\phi))$ et dont les morphismes de G vers H sont les transformations naturelles qui, pour $\phi \in F(V)$, envoient $G(V,\phi)$ dans $H(V,\phi)$.

Remarque 3.5.3. Cette construction est similaire à celle de la catégorie des foncteurs de la catégorie de Grothendieck associée à F vers $\mathcal{V}$, qui est définie et étudiée dans [Dja06, Section 6.1].

Définition 3.5.4. Pour $A \in \mathcal{KF}$, soit $A_{f.g.}-\mathcal{F}$ (resp. $A_{f.g.}-\mathcal{F}_\omega$), la sous-catégorie pleine de $A-\mathcal{F}$ (resp. $A-\mathcal{F}_\omega$) dont les objets sont les objets N, tels que pour tout $\phi \in \mathrm{spec}(A(V))$, $N(V,\phi) := N(V) \otimes_{A(V)} \mathbb{F}_2(\phi)$ est fini.

Lemme 3.5.5. *Le foncteur f restreint à la catégorie $K_{f.g.}-\mathcal{U}$ est à valeurs dans $f(K)_{f.g.}-\mathcal{F}_\omega$.*

Démonstration. Pour $M \in K_{f.g.}-\mathcal{U}$, $f(M)(V,\phi) = T_{(V,\phi)}(M)^0 \cong \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(V)(\phi))^\sharp$ qui est fini. □

Définition 3.5.6. Soit $A \in \mathcal{KF}$ tel que pour tout V, $\mathrm{spec}(A(V))$ est fini et soit $sA \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, le foncteur défini par $sA(V) := \mathrm{spec}(A(V))$. Tout objet N de $A_{f.g.}-\mathcal{F}$ se décompose naturellement en $N(V) \cong \bigoplus_{\phi\in sA(V)} N(V,\phi)$ (confère le lemme 3.3.3). On définit $h(N) \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sA$ par $h(N)(V) = \bigoplus_{\phi\in sA(V)} N(V,\phi)^\sharp$ qui appartient bien à $h(N) \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sA$ puisque pour tout ϕ, $N(V,\phi)$ est fini et que $sA(V)$ est fini.

Théorème 3.5.7. *Soit $A \in \mathcal{KF}$ tel que pour tout V, spec$(A(V))$. Alors, le foncteur h induit une équivalence de catégorie entre la catégorie $A_{f.g.}-\mathcal{F}$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sA$.*

Démonstration. h a pour inverse le foncteur de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sA$ dans $A_{f.g.}-\mathcal{F}$ qui à H associe $H^\sharp \in \mathcal{F}$ munie de la structure de A-module donnée par l'isomorphisme $A(V) \cong \bigoplus_{\phi\in sA(V)} \mathbb{F}_2\delta_\phi$ et $\delta_\phi x = 0$ si $x \in H(V,\psi)^\sharp$ avec $\psi \neq \phi$ et $\delta_\phi x = x$ si $x \in H(V,\phi)^\sharp$. □

Corollaire 3.5.8. *Pour $F \in \mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ on a une équivalence de catégorie entre $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et $(\mathbb{F}_2^F)_{f.g.} - \mathcal{F}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.3.1. □

Remarque 3.5.9. Puisque, pour $K \in \mathcal{K}$, $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, $(T_{(V,\phi)}(M)^0)^\sharp \cong \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(V)(\phi))$, le foncteur $h \circ f \ : \ K_{f.g.} - \mathcal{U} \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sf(K)$ vérifie $(h \circ f)(M)(V) = \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))} \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(V)(\phi))$.

3.5.2 Décalage dans la catégorie $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$

Pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, nous souhaitons définir des foncteurs de décalage dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow sf(K)$ de telle sorte que

$$\mathrm{Hom}_{T_V(K)-\mathcal{U}}(T_V(K), H^*(\_)(\_)) \cong \Delta_V \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(K, H^*(\_)(\_))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{T_{(V,\phi)}(K)-\mathcal{U}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_)(\_)) \cong \Delta_{(V,\phi)} \mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(K, H^*(\_)(\_)),$$

où $H^*(\_)(\_)$ est le foncteur qui à $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$ associe $H^*(V)(\phi) \in K - \mathcal{U}$.

Commençons par considérer le comportement des objets de $A - \mathcal{F}$ vis à vis du foncteur Δ_V (cf définition 2.1.13), pour $A \in \mathcal{KF}$.

Lemme 3.5.10. *Soit $A \in \mathcal{KF}$, et $N \in A - \mathcal{F}$. Alors, $\Delta_V A \in \mathcal{KF}$ et $\Delta_V N \in \Delta_V A - \mathcal{F}$.*

$\Delta_V A(W)$ et $\Delta_V N(W)$ sont des $A(V)$-modules via le morphisme d'algèbre $\Delta_V A(0) \to \Delta_V A(W)$ induit par l'injection de 0 dans W et cette structure de module est naturelle en W.

Définition 3.5.11. Pour $A \in \mathcal{KF}$, $\phi \in \mathrm{spec}(A(V))$, et $N \in A - \mathcal{F}$, soit $\Delta_{(V,\phi)} A \in \mathcal{KF}$ défini par $\Delta_{(V,\phi)} A(W) := \Delta_V A(W) \otimes_{A(V)} \mathbb{F}_p(\phi)$ et $\Delta_{(V,\phi)} N \in \Delta_{(V,\phi)} A - \mathcal{F}$ défini par $\Delta_{(V,\phi)} N(W) := \Delta_V N(W) \otimes_{A(V)} \mathbb{F}_p(\phi)$.

Proposition 3.5.12. *Pour $K \in \mathcal{K}$, $M \in K - \mathcal{U}$, V un espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, $\Delta_V f(M)$ est naturellement isomorphe dans $\Delta_V f(K) - \mathcal{F}$ à $f(T_V(M))$ et $\Delta_{(V,\phi)} f(M)$ à $f(T_{(V,\phi)}(M))$ dans $\Delta_{(V,\phi)} f(K) - \mathcal{F}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la définition du foncteur f et des foncteurs Δ_V et $\Delta_{(V,\phi)}$. □

Définition 3.5.13. Pour $F \in \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$, soit

$$\Delta_V \ : \ (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F,$$

défini par $\Delta_V G = \bigoplus_{\phi \in F(V\oplus W)} G(V \oplus W, \phi)$, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et W un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

Par ailleurs, pour $\phi \in F(V)$, soit

$$\Delta_{(V,\phi)} \;:\; (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F,$$

défini par $\Delta_{(V,\phi)} G = \bigoplus_{\psi \in \Sigma_{(V,\phi)} F(W)} G(V \oplus W, \psi)$, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et W un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 3.5.14. *Pour $A \in \mathcal{KF}$ de spectre fini et V un espace vectoriel de dimension finie, h le foncteur défini dans la définition 3.5.6 et $N \in A_{f.g.} - \mathcal{F}$, $h(\Delta_V N) \cong \Delta_V h(N)$.*

Pour $A \in \mathcal{KF}$ de spectre fini, V un espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in spec(A(V))$ et $N \in A_{f.g.} - \mathcal{F}$, $h(\Delta_{(V,\phi)} N) \cong \Delta_{(V,\phi)} h(N)$.

Démonstration. Notons que $\Delta_V N \in \Delta_V A - \mathcal{F}$, alors

$$h(\Delta_V N) \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow s\Delta_V A = (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V sA,$$

puisque $\mathrm{spec}(\Delta_V A)(W) = \mathrm{spec} A(V \oplus W)$, le premier isomorphisme n'est alors qu'une conséquence directe de la définition du foncteur h.

On montre de même le second isomorphe en utilisant que $\mathrm{spec}(\Delta_{(V,\phi)} A)(W)$ est naturellement isomorphe à $\Sigma_{(V,\phi)} \mathrm{spec}(A)(W)$. □

Corollaire 3.5.15. *Pour K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, et $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$, on a les isomorphismes naturels suivants, respectivement dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$.*

$$Hom_{T_V(K)-\mathcal{U}}(T_V(K), H^*(\_)(\_)) \cong \Delta_V Hom_{K-\mathcal{U}}(K, H^*(\_)(\_))$$

et

$$Hom_{T_{(V,\phi)}(K)-\mathcal{U}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_)(\_)) \cong \Delta_{(V,\phi)} Hom_{K-\mathcal{U}}(K, H^*(\_)(\_)).$$

Définition 3.5.16. Pour $\alpha \;:\; F \to F'$ un morphisme dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, soit

$$H_\alpha \;:\; (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F',$$

qui à $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ tel que $G(V) = \bigoplus_{\phi \in F(V)} G(V,\phi)$, associe $G(V) = \bigoplus_{\psi \in F'(V)} \bigoplus_{\phi \in \alpha_V^{-1}(\{\psi\})} G(V,\phi)$.

Exemple 3.5.17. Pour $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, l'unité de l'adjonction $\eta_{F,V} \;:\; \Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V) \to F$ (cf lemme 3.4.50) induit le foncteur $H_{\eta_{F,V}}$ de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)$ dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$.

Définition 3.5.18. Pour F et F' des objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et $G' \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F'$, soit $G \otimes G' \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F \times F'$ défini par

$$(G \otimes G')(V, (\phi, \psi)) := G(V, \phi) \otimes G'(V, \psi).$$

Remarque 3.5.19. Pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, on a un isomorphisme d'espace vectoriel $(G \otimes G')(V) \cong G(V) \otimes G'(V)$.

Alors, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F$, $G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ appartient à

$$(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)$$

et s'envoie donc, par $H_{\eta_{F,V}}$, dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$.

De même, pour $\phi \in F(V)$ et pour $\eta_{F,(V,\phi)}$ obtenue en composant l'unité de l'adjonction $\Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V) \to F$ par l'injection naturelle $\Sigma_{(V,\phi)} F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V) \to \Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)$, $H_{\eta_{F,(V,\phi)}} : (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V) \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$. On obtient ainsi que, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F$, $G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ est un objet de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$.

Définition 3.5.20. Pour $F \in \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\phi \in F(V)$, soient

$$- \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right] \; : \; (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$$

et

$$-^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right] \; : \; (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$$

qui à G et J respectivement dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F$ associent $G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ et $J \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ muni des décompositions sur F induites par $H_{\eta_{F,V}}$ et $H_{\eta_{F,(V,\phi)}}$.

Remarque 3.5.21. Pour $K \in \mathcal{K}$, $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$ et $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$, $h \circ f(M^{\phi} \otimes H^*(V)) \cong h \circ f(M)^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$.

Notons que pour $\star$ l'objet final de $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, qui est constant égal à un singleton, $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star$ est isomorphe à $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$.

Lemme 3.5.22. *Pour V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie, le foncteur*

$$\Delta_V \; : \; (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star$$

est adjoint à droite du foncteur $- \otimes \mathbb{F}_p \left[Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$.

Démonstration. L'isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right], H)$ et $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G, \Delta_V H)$ est le morphisme qui à γ de $G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ dans H associe $\tilde{\gamma}$

qui à $g \in G(W)$ associe $\gamma(G(\pi_W^{V\oplus W})(g), \pi_V^{V\oplus W}) \in H(V\oplus W)$ pour $\pi_W^{V\oplus W}$ et $\pi_V^{V\oplus W}$ les projections de $V \oplus W$ sur W et V.

Son inverse est le morphisme qui à γ de G dans $\Delta_V H$ associe le morphisme $\bar{\gamma}$ qui à $g \otimes \alpha$ avec $g \in G(W)$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(W, V)$ associe $H(\mathrm{id}_W \oplus \alpha)\gamma(g)$. $\square$

Corollaire 3.5.23. *Pour $F \in \mathcal{F}in^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$, $V \in \mathcal{V}^f$ et $\phi \in F(V)$, les foncteurs*

$$- \otimes \mathbb{F}_p \left[Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right] \ : \ (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$$

et

$$-^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p \left[Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right] \ : \ (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)} F \to (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F,$$

sont adjoints à gauche des foncteurs Δ_V et $\Delta_{(V,\phi)}$.

Démonstration. Comme $\star$ est un objet terminal dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, tout objet F de $\mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ est muni d'une unique application naturelle $F \to \star$, de telle sorte qu'on ait un foncteur oubli de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star$, qui oublie la décomposition. Alors, pour G et H des objets de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$, $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F}(G, H)$ est toujours le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G, H)$ ne contenant que les morphisme respectant les décompositions sur F. Il suffit donc de montrer que sous l'isomorphisme naturel entre $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right], H)$ et $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G, \Delta_V H)$, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_V F$ et $H \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$, $\gamma \in \mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G, \Delta_V H)$ respecte les décompositions sur $\Sigma_V F$ si et seulement si $\bar{\gamma}$ les respecte sur $\Sigma_V F$.

Soit $\gamma \in \mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G, \Delta_V H)$ respectant les décompositions sur F. Soit alors $\phi \in F(W)$ et $g \otimes k\alpha \in (G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right])(W, \phi)$ avec $k \in \mathbb{F}_p$, alors, il existe $\psi \in \Sigma_V F(W)$ tel que (ψ, α) s'envoie sur ϕ par le morphisme de $\Sigma_V F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V) \to F$, c'est à dire tel que $F(\mathrm{id}_W \oplus \alpha) \ : \ \Sigma_V F(W) \to F(W)$ envoie ψ sur ϕ. Alors, $\bar{\gamma}(g \otimes k\alpha) = kH(\mathrm{id}_W \oplus \alpha)\gamma(g) \in H(W, F(\mathrm{id}_W \oplus \alpha)(\psi)) \subset H(W, \phi)$.

Soit maintenant $\gamma \in \mathrm{Hom}_{(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \star}(G \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right], H)$ et soit $g \in G(W, \phi)$ avec $\phi \in \Sigma_V F(W)$, alors $\Sigma_V F(V \oplus W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V \oplus WV) \to F(V \oplus W)$ envoie $(\Sigma_V F(\pi_W^{V\oplus W})(\phi), \pi_V^{V\oplus W})$ sur ϕ, donc $\tilde{\gamma}(g) = \gamma(G(\pi_W^{V\oplus W})(g) \otimes \pi_V^{V\oplus W}) \in \Delta_V H(W, \phi)$.

L'adjonction entre $\Delta_{(V,\phi)}$ et $-^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p \left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ se montre de manière similaire. $\square$

Lemme 3.5.24. *Pour M un K-module instable finiment engendré avec $K \in \mathcal{K}$ finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, appliquer le foncteur $h \circ f$, pour h défini dans la définition 3.5.6, à l'unité de l'adjonction $M \to T_{(V,\phi)} M^{\phi} \otimes H^*(V)$, nous donne la counité de l'adjonction $\Delta_{(V,\phi)} h \circ f(G)^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p \left[Hom_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$.*

Démonstration. C'est une conséquence des définitions des adjonctions entre $T_{(V,\phi)}$ et $-^{\phi} \otimes H^*(V)$ d'une part et $\Delta_{(V,\phi)}$ et ${}^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ d'autre part et des isomorphismes naturels $h \circ f(M^{\phi} \otimes H^*(V)) \cong h \circ f(M)^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)\right]$ et $h \circ f(T_{(V,\phi)}(M)) \cong \Delta_{(V,\phi)}(h \circ f(M))$. $\square$

Chapitre 4

Centre d'une algèbre instable

Le centre d'une algèbre instable K est un invariant développé par Dwyer et Wilkerson dans [DW92]. Kuhn, dans les articles [Kuh07] et [Kuh13], en a montré l'utilité pour estimer la profondeur de K, ainsi que les invariants $d_0(K)$ et $d_1(K)$ définis dans [HLS95] par $d_0(K) := \inf(\{n \in \mathbb{N}\ ;\ K \text{ est } nil_n\text{-réduit}\})$ et $d_1(K) := \inf(\{n \in \mathbb{N}\ ;\ K \text{ est } nil_n\text{-fermé}\})$, dans le cas où $K \cong H^*(G)$ est la cohomologie d'un groupe G. Dans [Hea20] et [Hea21], Heard généralise certains de ces résultats à une algèbre instable quelconque.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé la définition du centre d'une algèbre instable, qui est étudié entre autre dans [DW92], [HLS93], [Hea21] et [Hea20], nous introduirons la notion de centre d'un foncteur dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ que nous utiliserons en dernière partie pour l'étude du centre d'algèbres instables nil-fermées.

4.1 Morphismes centraux

4.1.1 Définitions

On rappelle la définition du centre de la catégorie de Rector associée à une algèbre instable K, définie dans [DW92]. Le centre des catégories $\mathcal{S}(K)$ et $\mathcal{R}(K)$ est étudié en détails dans [Hea20] et [Hea21].

Définition 4.1.1. Soit K une algèbre instable, alors, $(E, f) \in \mathcal{S}(K)$ est dit central si $\rho_{K,(E,f)} : K \to T_{(E,f)}(K)$, défini dans la définition 3.3.15, est un isomorphisme.

Plus généralement, pour M un K-module instable, on dira que (E, f) est M-central si $\rho_{M,(E,f)}$ est un isomorphisme.

Soient $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ et $\mathbf{C}(\mathcal{R}(K))$ l'ensemble des éléments centraux de $\mathcal{S}(K)$ et $\mathcal{R}(K)$. On a ainsi $\mathbf{C}(\mathcal{R}(K)) \subset \mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$.

Soient également, $\mathbf{C}_M(\mathcal{S}(K))$ et $\mathbf{C}_M(\mathcal{R}(K))$ l'ensemble des éléments M-centraux dans $\mathcal{S}(K)$ et $\mathcal{R}(K)$.

Notons que pour K une algèbre instable, $K \in K - \mathcal{U}$ et que dans ce cas les notions de centralité et de K-centralité pour des objets de $\mathcal{S}(K)$ coïncident.

Lemme 4.1.2. *Soit K une algèbre instable connexe finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Alors, $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est K-central, où K est considéré comme un K-module instable, si et seulement si ϕ est central.*

Proposition 4.1.3. *Soit K une algèbre instable connexe finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $M \in K - \mathcal{U}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma^n M$ est un K-module instable et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est $\Sigma^n M$-central si et seulement si ϕ est M-central.*

Démonstration. En effet, l'isomorphisme de $T_V(\Sigma^n M) \cong \Sigma^n T_V(M)$ est un isomorphisme dans $T_V(K)^0 - \mathcal{U}$. Donc, $\rho_{\Sigma^n M,(V,\phi)} = \Sigma^n \rho_{M,(V,\phi)}$, et donc ϕ est $\Sigma^n M$-central si et seulement si il est M-central. □

Corollaire 4.1.4. *Soit K une algèbre instable connexe finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma^n K$ est un K-module instable et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est $\Sigma^n K$-central si et seulement si ϕ est central.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 4.1.3 et du lemme 4.1.2. □

Remarque 4.1.5. Les $T_{(V,\phi)}(K)$ sont connexes, donc si K n'est pas connexe, $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K)) = \emptyset$.

Exemple 4.1.6. Soient E et V des espaces vectoriels de dimensions finies, d'après la proposition 1.2.17 on a l'isomorphisme naturel suivant : $T_E(H^*(V)) \cong H^*(V) \otimes \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E,V)}$ et $\rho_{H^*(V),E}$ s'identifie à $\mathrm{id}_{H^*(V)} \otimes \eta_{\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E,V)}}$, où $\eta_{\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E,V)}}$ dénote l'unité de $\mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E,V)}$, sous cet isomorphisme. Donc tout objet (E, f) dans $\mathcal{S}(H^*(V))$ est central.

Proposition 4.1.7. *Soient K et R deux algèbres instables, $\phi : K \to H^*(V)$ et $\psi : R \to H^*(V)$. On désigne par $\phi\tilde{\otimes}\psi$, la composition de $\phi \otimes \psi : K \otimes R \to H^*(V) \otimes H^*(V)$ par la multiplication de $H^*(V)$. Alors $T_{(V,\phi\tilde{\otimes}\psi)}(K \otimes R) \cong T_{(V,\phi)}(K) \otimes T_{(V,\psi)}(R)$ et l'application $\rho_{K\otimes R,(V,\phi\tilde{\otimes}\psi)}$ s'identifie avec $\rho_{K,(V,\phi)} \otimes \rho_{R,(V,\psi)}$ sous cette isomorphisme.*

Démonstration. Comme le foncteur T_V commute aux produits tensoriels, on a l'isomorphisme suivant : $T_{(V,\phi\tilde{\otimes}\psi)}(K \otimes R) \cong (T_V(K) \otimes T_V(R)) \otimes_{T_V^0(K)\otimes T_V^0(R)} \mathbb{F}_2(\phi\otimes\psi)$. On considère la projection

$$(T_V(K)\otimes\mathbb{F}_2)\otimes(T_V(R)\otimes\mathbb{F}_2) \cong (T_V(K)\otimes T_V(R))\otimes\mathbb{F}_2 \to (T_V(K)\otimes T_V(R))\otimes_{T_V^0(K)\otimes T_V^0(R)}\mathbb{F}_2(\phi\otimes\psi),$$

un élément $k \otimes r \in T_V(K) \otimes T_V(R)$ est dans son noyau si et seulement si k est un produit d'un élément de $T_V(K)$ par un élément de $\ker(\phi)$ ou si r est un produit d'un élément de $T_V(R)$ par un élément de $\ker(\psi)$. En quotientant par le noyau de ce morphisme on obtient l'isomorphisme recherché. □

Corollaire 4.1.8. *Pour K et R deux algèbres instables, $\boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K \otimes R)) \cong \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K)) \times \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(R))$.*

Démonstration. La structure d'algèbre de $H^*(V)$ induit une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K \otimes R, H^*(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(R, H^*(V))$, ainsi, tout morphisme d'algèbre instable de $K \otimes R$ dans $H^*(V)$ est de la forme $\phi \tilde{\otimes} \psi$, pour ϕ et ψ des morphismes de K et R dans $H^*(V)$ et $\tilde{\otimes}$ défini comme dans la proposition 4.1.7. Alors, par la proposition 4.1.7, $\rho_{K \otimes R,(V,\phi \tilde{\otimes} \psi)}$ est un isomorphisme si et seulement si $\rho_{K,(V,\phi)} \otimes \rho_{R,(V,\psi)}$ est un isomorphisme. C'est à dire si et seulement si (V, ϕ) et (V, ψ) sont centraux.

□

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.9. *Pour K et L deux algèbres instables, ϕ et ψ des éléments de $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ et $Hom_{\mathcal{K}}(L, H^*(V))$ et M et N des objets respectivement dans $K-\mathcal{U}$ et $L-\mathcal{U}$, $T_{(V,\phi\tilde{\otimes}\psi)}(M \otimes N) \cong T_{(V,\phi)}(M) \otimes T_{(V,\psi)}(N)$ et $(V, \phi\tilde{\otimes}\psi)$ est $M \otimes N$-central si et seulement si (V, ϕ) est M-central et (V, ψ) N-central.*

On a donc $\boldsymbol{C}_{M \otimes N}(\mathcal{S}(K \otimes L)) \cong \boldsymbol{C}_M(\mathcal{S}(K)) \times \boldsymbol{C}_N(\mathcal{S}(L))$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.1.7 et du corollaire 4.1.8.

□

Proposition 4.1.10. *Soient K une algèbre instable, M et N deux objets de $K - \mathcal{U}$ et $\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, pour V un espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

$$\boldsymbol{C}_{M \oplus N}(\mathcal{S}(K)) \cong \boldsymbol{C}_M(\mathcal{S}(K)) \bigcap \boldsymbol{C}_N(\mathcal{S}(K)).$$

Démonstration. Comme $T_V(M \oplus N) \cong T_V(M) \oplus T_V(N)$ et que cet isomorphisme est un isomorphisme de $T_V(K)^0$-module, on a $T_{(V,\phi)}(M \oplus N) \cong T_{(V,\phi)}(M) \oplus T_{(V,\phi)}(N)$ et $\rho_{M \oplus N,(V,\phi)} = \rho_{M,(V,\phi)} \oplus \rho_{N,(V,\phi)}$. Donc $\rho_{M \oplus N,(V,\phi)}$ est un isomorphisme si et seulement si $\rho_{M,(V,\phi)}$ et $\rho_{N,(V,\phi)}$ sont des isomorphismes. □

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.11. *Soient $K \in \mathcal{K}$ et $0 \to M \to N \to L \to 0$ une suite exacte courte dans $K - \mathcal{U}$. Alors, si $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$ appartient à deux des trois sous-ensembles $\boldsymbol{C}_M(\mathcal{S}(K))$, $\boldsymbol{C}_N(\mathcal{S}(K))$ et $\boldsymbol{C}_L(\mathcal{S}(K))$, il appartient au troisième.*

Démonstration. Par naturalité de $\rho_{P,(V,\phi)}$ en $P \in K - \mathcal{U}$, et par exactitude de $T_{(V,\phi)} : K - \mathcal{U} \to K - \mathcal{U}$, on a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{M,(V,\phi)}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{N,(V,\phi)}"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{L,(V,\phi)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{(V,\phi)}M \arrow[r] & T_{(V,\phi)}N \arrow[r] & T_{(V,\phi)}L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La preuve se conclut en utilisant le lemme des cinq.

□

Exemple 4.1.12. Le foncteur T_0 est l'identité, donc si K est connexe, $T_{(0,\epsilon_K)}(K) \cong K$, pour $\epsilon_K : K \to \mathbb{F}_2$ l'unique morphisme d'algèbre instable de K dans $\mathbb{F}_2$. Donc $(0, \epsilon_K)$ est central.

Notation 4.1.13. Soit $\epsilon_{K,V}$, la composition de ϵ_K par l'injection de $\mathbb{F}_2$ dans $H^*(V)$.

Dans [DW90], Dwyer et Wilkerson ont montré le résultat suivant :

Proposition 4.1.14. *[DW90, Preuve du Théorème 3.2]*

Soit K une algèbre instable connexe telle que $\mathcal{Q}(K)$, le module des indécomposables de K, est localement fini en tant que module instable, alors $(V, \epsilon_{K,V})$ est central.

En particulier, si K est une algèbre instable connexe noethérienne, alors $(V, \epsilon_{K,V})$ est central pour tout espace vectoriel V.

Donnons deux exemples où $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ ne contient que les $(V, \epsilon_{K,V})$.

Exemple 4.1.15. Soit $K = \mathbb{F}_2[u] \oplus \Sigma\mathbb{F}_2$, où le produit est donné par le produit de polynômes sur $\mathbb{F}_2[u] \otimes \mathbb{F}_2[u]$, et où le produit d'un élément de $(u\mathbb{F}_2[u] \oplus \Sigma\mathbb{F}_2)$ par un élément de $\Sigma\mathbb{F}_2$ est trivial. Alors $T_V(K) \cong \mathbb{F}_2[u] \otimes \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V,\mathbb{F}_2)} \oplus \Sigma\mathbb{F}_2$ et pour $\gamma^* \neq \epsilon_{K,V} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, $\gamma^*|_{\mathbb{F}_2[u]}$ est induit par un morphisme d'espaces vectoriels γ de V dans $\mathbb{F}_2$, puisque $\mathbb{F}_2[u] \cong H^*(\mathbb{F}_2)$ et $\gamma^*|_{\Sigma\mathbb{F}_2} = 0$. Alors $T_{(V,\gamma^*)}(K)$ est la composante correspondant à γ dans $\mathbb{F}_2[u] \otimes \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V,\mathbb{F}_2)}$. Donc (V, γ) n'est pas central.

Remarque 4.1.16. Dans l'exemple 4.1.15, on aurait pu remplacer $\Sigma\mathbb{F}_2$ par n'importe quelle algèbre instable nilpotente non unitaire.

Exemple 4.1.17. On considère K le noyau du morphisme de module instable $\mathbb{F}_2[u] \to \Sigma\mathbb{F}_2$ qui envoie u sur l'unique élément non trivial de $\Sigma\mathbb{F}_2$. K est une sous-algèbre de $\mathbb{F}_2[u]$. Par exactitude du foncteur T_V, on a la suite exacte

$$0 \to T_V(K) \to T_V(\mathbb{F}_2[u]) \to \Sigma\mathbb{F}_2 \to 0.$$

On en déduit que $T_V(K) \cong K \oplus \mathbb{F}_2[u] \otimes \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V,\mathbb{F}_2)\setminus 0}$ et que pour $(V, \gamma^*) \in \mathcal{S}(K)$ différent de $(V, \epsilon_{K,V})$, γ^* est induit par un morphisme d'espaces vectoriels de V dans $\mathbb{F}_2$ et que $T_{(V,\gamma^*)}(K)$ est la composante correspondant à γ dans $\mathbb{F}_2[u] \otimes \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V,\mathbb{F}_2)\setminus 0}$, et donc que (V, γ^*) n'est pas central.

Remarque 4.1.18. Dans ces deux exemples, $\mathbf{C}(\mathcal{R}(K)) = \{(0, \epsilon_K)\}$, en effet $(V, \epsilon_{K,V})$ n'appartient à $\mathcal{R}(K)$ que si $V = 0$.

On rappelle deux résultats démontrés dans [DW92] et leurs applications.

Proposition 4.1.19. *[DW92, Proposition 3.4]*

Soit K une algèbre instable connexe dont le module des indécomposables $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini. Un objet (E, f) de $\mathcal{S}(K)$ est central si et seulement si il existe un morphisme de K dans $K \otimes H^*(E)$ dont les compositions par $id \otimes \epsilon_{H^*(E)}$ et $\epsilon_K \otimes id$ sont respectivement l'identité de K et f, où ϵ_K et $\epsilon_{H^*(V)}$ sont les augmentations de K et $H^*(V)$. C'est à dire si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & K \\ K \arrow[ur, "id"] \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & K \otimes H^*(V) \arrow[u, "id\otimes\epsilon_{H^*(V)}"'] \arrow[d, "\epsilon_K\otimes id"] \\ & H^*(V). \end{tikzcd}$$

Corollaire 4.1.20. *Soit K une algèbre instable connexe dont le module des indécomposables $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini. Un objet (V, f) de $\mathcal{S}(K)$ est central si et seulement si K est munie d'une structure κ de $H^*(V)$-comodule telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & K \otimes H^*(V) \arrow[d, "\epsilon_K\otimes id"] \\ & H^*(V). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Dans le cas où (V, ϕ) est central dans $\mathcal{S}(K)$, on obtient une application $K \to K \otimes H^*(E)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4.1.19, en conjuguant le morphisme $\kappa_{K,(V,\phi)}$ de $T_{(V,\phi)}(K) \to T_{(V,\phi)}(K) \otimes H^*(V)$ par des isomorphismes de K dans $T_{(V,\phi)}(K)$ et de $T_{(V,\phi)}(K) \otimes H^*(V)$ dans $K \otimes H^*(V)$. Or, $\kappa_{K,(V,\phi)}$ définit une structure de comodule sur $T_{(V,\phi)}(K)$. $\square$

Proposition 4.1.21. *Soient K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini, $(E, \phi) \in \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K))$ et $\iota : V \to E$ une injection dans $\mathcal{V}^f$. Alors $(V, \iota^* \circ \phi) \in \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K))$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du corollaire 4.1.20. $\square$

Corollaire 4.1.22. *Soient K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini et $(E, \phi) \in \mathcal{S}(K)$, alors si (E, ϕ) est central, $(E/ker(\phi), \phi^*) \in \mathcal{R}(K)$ l'est aussi, où $ker(\phi)$ et ϕ^* sont définis comme dans la proposition 3.4.15.*

Démonstration. En effet, en se donnant s une section de la projection de E sur $E/\ker(\phi)$, on obtient $(E/\ker(\phi), \phi^*)$ sous la forme $(E/\ker(\phi), s^* \circ \phi)$. Donc par le résultat précédent, si (E, ϕ) est central alors $(E/\ker(\phi), \phi^*)$ l'est aussi.

□

Lemme 4.1.23. *[DW92, Lemme 4.6] Soient K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini, $(E,f) \in \mathcal{S}(K)$ et $(C,g) \in \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K))$, alors il existe une unique paire $(E \oplus C, f \boxplus g) \in \mathcal{S}(K)$ telle que $f \boxplus g$ composée respectivement avec les projections sur $H^*(E)$ et $H^*(C)$ donne f et g.*

$$\begin{tikzcd}
 & & H^*(C) \\
K \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "f\boxplus g"] \arrow[drr, "f"'] & H^*(C)\otimes H^*(E) \arrow[ur, "id\otimes\epsilon_{H^*(E)}"'] \arrow[dr, "\epsilon_{H^*(C)}\otimes id"] & \\
 & & H^*(E).
\end{tikzcd}$$

$f \boxplus g$ est obtenu en prenant l'adjoint du morphisme $T_{(C,g)}(K) \cong K \xrightarrow{f} H^*(E)$.

Remarque 4.1.24. Dans le lemme 4.1.23, même si (E,f) et (C,g) sont des éléments de $\mathcal{R}(K)$, $(E \oplus C, f \boxplus g)$ n'est pas en général dans $\mathcal{R}(K)$.

Définition 4.1.25. [Hea21, Définition 3.9] Soient K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini, $(C,g) \in \mathbf{C}(\mathcal{R}(K))$ et $(E,f) \in \mathcal{R}(K)$, on définit $(E \circ C, \sigma(f,g)) \in \mathcal{R}(K)$ par $E \circ C = (E \oplus C)/\ker(f \boxplus g)$, où $\ker(f \boxplus g)$ est défini dans la proposition 3.4.15, et $\sigma(f,g) : K \to E \circ C$ tel que la composition de $\sigma(f,g)$ par $H^*(\pi_{(E\oplus C)/\ker(f\boxplus g)}$ soit égal à $f \boxplus g$, où $\pi_{(E\oplus C)/\ker(f\boxplus g)}$ est la projection canonique sur $(E \oplus C)/\ker(f \boxplus g)$.

Remarque 4.1.26. La définition de $\ker(f \boxplus g)$, nous garantit que $(E \circ C, \sigma(f,g))$ est bien dans $\mathcal{R}(K)$.

Proposition 4.1.27. *[Hea21, Corollaire 3.11] Soient K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini et (C,g) et (E,f) deux éléments centraux de $\mathcal{S}(K)$ (resp. $\mathcal{R}(K)$). Alors $(E \oplus C, f \boxplus g)$ (resp. $(E \circ C, \sigma(f,g))$) est central.*

Théorème 4.1.28. *[Hea21, Théorème 3.13] Soit K une algèbre instable noethérienne connexe. Alors, à isomorphisme près il existe un unique objet $(C,\phi) \in \mathcal{R}(K)$ central et maximal pour la relation de préordre définie par $(E,f) \leq (S,g)$ si et seulement si $Hom_{\mathcal{R}(K)}((E,f),(S,g)) \neq \emptyset$. On appellera (C,ϕ) le centre de K.*

Remarque 4.1.29. Les résultats de cette section ne sont pas spécifiques à $p = 2$. On renvoit le lecteur à [DW92], [Hea20] et [Hea21] pour la preuve de ces résultats pour p impair.

4.1.2 Groupe des éléments centraux de degré 1

Définition 4.1.30. Soit $G(K)$ l'ensemble des morphismes de K dans $H^*(\mathbb{F}_2)$ tels que $(\mathbb{F}_2, \phi) \in \mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$. On définit $\cdot$, une loi de composition interne sur $G(K)$, de la manière suivante. À ϕ et

ψ deux éléments de $G(K)$, on associe $\phi \cdot \psi$, où $\phi \cdot \psi := H^*(\Delta_{\mathbb{F}_2}) \circ (\phi \boxplus \psi)$.

Remarque 4.1.31. En conséquence des propositions 4.1.21 et 4.1.27, $(\mathbb{F}_2, \phi \cdot \psi)$ est bien central.

Proposition 4.1.32. *La loi de composition $\cdot$ est associative.*

Démonstration. On commence par justifier que $\boxplus$ est associatif sur les morphismes associés à des éléments centraux. En effet, pour (V, v), (W, w) et (U, u) trois éléments centraux, $v \boxplus (w \boxplus u)$ est l'unique morphisme de K dans $H^*(V \oplus W \oplus U)$, qui composé avec $H^*(\iota_V^{V\oplus W \oplus U})$ donne v et composé avec $H^*(\iota_{W\oplus U}^{V\oplus W\oplus U})$ donne $w \boxplus u$, en utilisant la définition de $w \boxplus u$, c'est donc l'unique morphisme de K dans $H^*(V \oplus W \oplus U)$ qui composé respectivement avec $H^*(\iota_V^{V\oplus W\oplus U})$, $H^*(\iota_W^{V\oplus W\oplus U})$ et $H^*(\iota_U^{V\oplus W\oplus U})$, donne v, w et u. On peut en dire de même de $(v \boxplus w) \boxplus u$.

Le résultat découle alors directement de l'associativité de $\boxplus$ et de la coassociativité de Δ. $\square$

Proposition 4.1.33. *Si $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini, alors $\epsilon_{K,\mathbb{F}_2} \in G(K)$ est un élément neutre pour $\cdot$.*

Démonstration. Soit $\phi \in G(K)$, alors $\epsilon_{K,\mathbb{F}_2} \boxplus \phi = H^*(\pi_2) \circ (\phi)$, où π_2 désigne la projection sur le deuxième facteur de $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. En effet, $H^*(\iota_1) \circ (H^*(\pi_2) \circ (\phi)) = H^*(\pi_2 \circ \iota_1) \circ (\phi) = \epsilon_{K,\mathbb{F}_2}$ et $H^*(\iota_2) \circ (H^*(\pi_2) \circ (\phi)) = \phi$. Donc $\epsilon_{K,\mathbb{F}_2} \cdot \phi = H^*(\Delta) \circ (H^*(\pi_2) \circ (\phi)) = H^*(\pi_2 \circ \Delta) \circ \phi = \phi$. $\square$

Lemme 4.1.34. *Soit $\phi \in G(K)$, alors $\phi \cdot \phi = \epsilon_{K,\mathbb{F}_2}$.*

Démonstration. Soit $\phi \in G(K)$, $\iota_1^*(\nabla^*(\phi)) = \phi = \iota_2^*(\nabla^*\phi)$, pour ι_1 et ι_2 les injections de $\mathbb{F}_2$ dans chacune des deux composantes de $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Donc $\phi \boxplus \phi = \nabla^*\phi$, ce qui implique que $\phi \cdot \phi = \Delta^*(\nabla^*(\phi)) = 0^*\phi = \epsilon_{K,\mathbb{F}_2}$. $\square$

Corollaire 4.1.35. *Si $\mathcal{Q}(K)$ est localement fini, la loi de composition $\cdot$ munit $G(K)$ d'une structure de 2-groupe abélien élémentaire.*

Proposition 4.1.36. *Soit K une algèbre instable noethérienne connexe. Soit (C, ϕ) le centre de K, alors C est isomorphe à $G(K)$.*

Démonstration. On définit $\gamma : C \to G(K)$ de la manière suivante. À $x \in C \backslash \{0\}$, on associe i_x l'injection de $\mathbb{F}_2$ dans C qui envoie 1 sur x, alors $\gamma(x) := i_x^*\phi$, qui est central d'après la proposition 4.1.21 et à 0 on associe $(\mathbb{F}_2, \epsilon_{K,\mathbb{F}_2})$. γ est bien un morphisme, en effet, pour $x \neq y$, $\gamma(x+y) = (i_x + i_y)^*\phi = \Delta^* \circ (i_x \oplus i_y)^* \circ \nabla^*(\phi) = \Delta^*(i_x^*\phi \boxplus i_y^*\phi) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$ et pour $x = y$, $\gamma(x + x) = 0^*\phi = \epsilon_{K,\mathbb{F}_2} = \gamma(x) \cdot \gamma(x)$ par le lemme 4.1.34. Ce morphisme est surjectif, en effet par définition du centre, quelque soit $(\mathbb{F}_2, \delta)$ central, il existe une injection $i : \mathbb{F}_2 \to C$, telle que $i^*\phi = \delta$. Il est également injectif, en effet comme (C, ϕ) est régulier et K est noethérienne, pour tout $x \neq 0$ dans C, $i_x^*\phi$ est régulier et donc $\gamma(x) \neq \epsilon_{K,\mathbb{F}_2}$. $\square$

4.1.3 Calcul du centre de $H^*(G)$

Soit G un groupe. Nous allons ici exposer le calcul du centre de $H^*(G)$ initialement étudié dans [Lan92]. Soit E un 2-sous-groupe abélien élémentaire de G, l'injection de E dans G induit une application $\mathrm{res}_{G,E} : H^*(G) \to H^*(E)$. Soit A_G la catégorie dont les objets sont les 2-sous-groupes abéliens élémentaires de G et dont les morphismes sont les morphismes de groupes induits par les conjugaisons par des éléments de G, les morphismes $\mathrm{res}_{G,E}$ induisent un morphisme $q_G : H^*(G) \to \varprojlim_{E \in A_G} H^*(E)$.

Définition 4.1.37. On dit qu'un groupe G est de Quillen, si q_G est un isomorphisme loin des nilpotents, c'est à dire si son noyau et son conoyau sont nilpotents.

Corollaire 4.1.38. *Si G est de Quillen, $Hom_{\mathcal{K}}(H^*(G), H^*(V)) \cong Hom_{\mathcal{K}}(\varprojlim_{E \in A_G} H^*(E), H^*(V))$.*

On rappelle le théorème de Quillen suivant, démontré dans [Qui71].

Théorème 4.1.39. *Si G est un groupe discret ou un groupe de Lie compact, G est de Quillen.*

Proposition 4.1.40. *[Hen01, Théorème 11]*

Pour G un groupe de Quillen, $Hom_{\mathcal{K}}(\varprojlim_{E \in A_G} H^*(E), H^*(V)) \cong \mathbb{F}_2\left[Rep(V, G)\right]$, où $Rep(V, G)$ dénote les classes de conjugaisons de morphismes de V dans G.

Soit ρ un représentant d'une classe de conjugaison dans $\mathrm{Rep}(V, G)$. Alors, le morphisme $V \times C_G(\rho) \to G$, où $C_G(\rho)$ dénote le centralisateur dans G de l'image de ρ, qui à (v, g) associe $\rho(v).g$, induit un morphisme de $H^*(G) \to H^*(V) \otimes H^*(C_G(\rho))$. Par adjonction, cela nous donne un morphisme $T_V(H^*(G)) \to H^*(C_G(\rho))$ qui ne dépend pas du choix du représentant ρ.

Proposition 4.1.41. *[Lan92]*

Si G est un groupe fini ou un groupe de Lie compact, le morphisme

$$T_V(H^*(G)) \to \prod_{\rho \in Rep(V,G)} H^*(C_G(\rho))$$

est un isomorphisme. Par ailleurs, les morphismes $\eta_{H^*(G),(V,\rho)}$, $\rho_{H^*(G),(V,\rho)}$ et $\kappa_{H^*(G),(V,\rho)}$ sont induits en cohomologie, respectivement par les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} V \times C_G(\rho) & \to & G \\ C_G(\rho) & \to & G \\ V \times C_G(\rho) & \to & C_G(\rho). \end{array}$$

Corollaire 4.1.42. *Soit G un 2-groupe fini, soit $\rho \in Rep(V, G) \subset Hom_{\mathcal{K}}(H^*(G), H^*(V))$, alors ρ est central si et seulement si l'injection de $C_G(\rho)$ dans G induit un isomorphisme de $H^*(G)$ dans $H^*(C_G(\rho))$.*

4.1.4 Centralité et K-algèbres

Soit K' une K-algèbre, nous allons voir dans cette partie que l'étude des objets de $\mathcal{S}(K)$ K'-centraux, se ramène à l'étude des morphisme centraux dans $\mathcal{S}(K')$. Cela nous fournira des premiers exemples de calculs des morphismes M centraux pour M dans $K-\mathcal{U}$, ce que nous avons pour l'instant laissé de côté.

Étant donné $\gamma : K \to K'$ un morphisme d'algèbres instables, K' hérite ainsi d'une structure de K-module instable. Supposons K et K' finiment engendrées en tant qu'algèbres sur $\mathcal{A}$. D'après la proposition 3.3.13, $T_V(K')$ admet alors deux décompositions $T_V(K') \cong \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V,\psi)}(K')$ et $T_V(K') \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K',H^*(V))} T_{(V,\phi)}(K')$. Le premier isomorphisme est un isomorphisme de $T_V(K)$-algèbre instable. Le deuxième est à priori un isomorphisme d'algèbre instable mais la structure de $T_V(K)$-module sur $T_V(K')$ étant donnée par la composition

$$T_V(K) \otimes T_V(K') \overset{T_V(\gamma)\otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} T_V(K') \otimes T_V(K') \to T_V(K'),$$

c'est aussi un isomorphisme de $T_V(K)$-algèbre instable. Ce qui induit un isomorphisme de $T_V(K)$-algèbre instable

$$\bigoplus_{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V,\psi)}(K') \cong \bigoplus_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K',H^*(V))} T_{(V,\phi)}(K').$$

Lemme 4.1.43. *Sous cet isomorphisme,* $T_{(V,\psi)}(K') \cong \bigoplus_{\substack{\phi \in Hom_{\mathcal{K}}(K',H^*(V))\ ; \\ \gamma^*\phi=\psi}} T_{(V,\phi)}(K')$.

Proposition 4.1.44. *Soit K' une algèbre instable connexe finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$, $\gamma : K \to K'$ un morphisme d'algèbre instable où K est finiment engendrée. Alors, pour $\psi \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, ψ est K'-central si et seulement si ψ a un unique antécédent ϕ par γ^* dans $Hom_{\mathcal{K}}(K', H^*(V))$ et que cet antécédent est central.*

Démonstration. K' étant supposée connexe, le morphisme

$$\rho_{K',(V,\psi)} : K' \to T_{(V,\psi)}(K') \cong \bigoplus_{\substack{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K',H^*(V))\ ; \\ \gamma^*\phi=\psi}} T_{(V,\phi)}(K')$$

ne peut être un isomorphisme que si $T_{(V,\psi)}(K') \cong \bigoplus_{\substack{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K',H^*(V))\ ; \\ \gamma^*\phi=\psi}} T_{(V,\phi)}(K')$ est connexe et donc, si $\{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K', H^*(V))\ ;\ \gamma^*\phi = \psi\}$ est un singleton. Si c'est le cas et que ϕ est l'unique antécédent de ψ par γ^*, alors $\rho_{K',(V,\psi)} = \rho_{K',(V,\phi)}$ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est central, par définition de la centralité. □

Exemple 4.1.45. Soit K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre instable et $\gamma : K \to H^*(W)$. Alors $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est $H^*(W)$-central si et seulement si ϕ a un unique antécédent par γ^* dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)$. En particulier, si $K = H^*(W)^G$ pour G un sous-groupe de $Gl(W)$, $\bar{\phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)/G$ est $H^*(W)$-central si et seulement si $\bar{\phi}$ est un singleton, et donc si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{Im}(\phi)$ et pour tout $g \in G$, $gx = x$.

Exemple 4.1.46. Soit $K := \mathbb{F}_2[y, x(x+y)] \oplus \mathbb{F}_2[y, z, x(x+y)]\, z^2$, on considère la suite exacte courte dans $K - \mathcal{U}$ suivante :

$$0 \to K \to H^*(V_3)^H \to \mathbb{F}_2[y, x(x+y)]\, z \to 0,$$

où H est le sous-groupe de $GL(V_3)$ engendré par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche à déterminer le centre de K en utilisant la proposition 4.1.11. On a les deux isomorphismes de K-modules suivants $\mathbb{F}_2[y, x(x+y)]\, z \cong \Sigma\mathbb{F}_2[y, x(x+y)]$ et $H^*(V_3)^H \cong \mathbb{F}_2[y, z, x(x+y)]$. Ici, $K \to H^*(V_3)^H$ est la nil-localisation de K. Alors,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V_3)^H, H^*(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V_3)/H.$$

Alors, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ est central si et seulement si il est $H^*(V_3)^H$-central et $\Sigma\mathbb{F}_2[y, x(x+y)]$-central. Le centre de $H^*(V_3)^H$ est donnée par le morphisme d'algèbre de $H^*(V_3)^H$ dans $\mathbb{F}_2[x, z]$ qui envoie y sur 0, z sur z et $x(x+y)$ sur x^2. Pour B_2 le sous groupe de de $GL(V_2)$ engendré par

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la structure de K-module de $\Sigma\mathbb{F}_2[y, x(x+y)]$ étant induite par le morphisme d'algèbre $H^*(V_3)^H \to \mathbb{F}_2[y, x(x+y)] \cong H^*(V_2)^{B_2}$ qui envoie z sur 0, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V_3)/H$ est $\Sigma\mathbb{F}_2[y, x(x+y)]$-central si et seulement si ϕ a un unique antécédent ψ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V_2)/B_2$ par le morphisme induit par l'injection de V_2 dans V_3 (si (e_1, e_2, e_3) est la base duale de (x, y, z), V_2 est le sous-espace vectoriel de V_3 engendré par e_1 et e_2) et si ψ est central. Le morphisme $H^*(V_3)^H \to \mathbb{F}_2[z]$ envoyant z sur z n'ayant pas d'antécédent dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2, V_2)/B_2$, le centre de K est donc le morphisme d'algèbre instable $K \to \mathbb{F}_2[x]$ qui envoie y et z sur 0 et $x(x+y)$ sur x^2.

4.2 Centralité et nil-fermeture

Dans cette partie, nous allons commencer par introduire une notion de centralité pour les objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, que nous utiliserons pour étudier les éléments centraux d'algèbres nil-fermées. Nous verrons ensuite comment décomposer l'étude des éléments centraux d'une algèbre instable en utilisant la filtration nilpotente.

4.2.1 Centre d'un objet de $\mathcal{S}\mathbf{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathbf{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathbf{et}^{(\mathcal{V}\mathcal{I})^{\mathbf{op}}}$

Nous présentons ici une notion de centre d'un objet dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}\mathcal{I})^{\mathrm{op}}}$. Nous verrons par la suite, comment relier le centre de K, au centre du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$.

Commençons par fixer quelques notations.

Notation 4.2.1. Les morphismes $\pi_V^{V\oplus W}$ et $\iota_V^{V\oplus,W}$, pour V et W des espaces vectoriels, dénoteront respectivement la projection de $V \oplus W$ sur V et l'injection de V dans, $V \oplus W$. $\Delta_V \ : \ V \to V \oplus V$ dénotera le morphisme qui à $x \in V$ associe $x \oplus x$ et $\nabla_V \ : \ V \oplus V \to V$ celui qui à $x \oplus y$ associe $x + y$.
Enfin, pour $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, $\rho_{F,V}$ sera le morphisme naturel de $\Sigma_V F$ dans F, induit pour W un espace vectoriel par $F(\iota_W^{V\oplus W}) \ : \ F(V \oplus W) \to F(W)$.

Définition 4.2.2. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $\phi \in F(V)$. Pour $\Sigma_{(V,\phi)}F$ défini dans la définition 3.4.28, on dit que ϕ est central si l'application $\rho_{F,(V,\phi)} \ : \ \Sigma_{(V,\phi)}F \to F$, définie comme la composition de l'injection de $\Sigma_{(V,\phi)}F$ dans $\Sigma_V F$ par $F(\iota_V^{V\oplus}-)$, est une bijection naturelle. On définit $\mathbf{C}(F)$ comme l'ensemble des éléments centraux de F.

Le lemme de Yoneda implique que le morphisme de F dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W), F)$ qui à $\phi \in F(W)$ associe le morphisme qui à $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ associe $F(\alpha)(\phi)$ est un isomorphisme naturel.

Le résultat suivant est l'analogue de la proposition 4.1.19 pour les objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

On rappelle que la notion de connexité pour les foncteurs est définie dans la définition 3.4.55.

Proposition 4.2.3. *Soient $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ connexe et tel que pour tout espace vectoriel V $(V, \epsilon_{F,V})$ soit central, et $\phi \in F(W)$. Alors, (W, ϕ) est central si et seulement si il existe un morphisme μ, de $F \times Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, W)$ dans F, telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & \\
F \times Hom_{\mathbb{F}_2}(_, W) \arrow[r, "\mu"] & F \\
Hom_{\mathbb{F}_2}(_, W) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel, les applications verticales sont celles qui à $f \in F(V)$ associe $(f, 0)$ et celle qui à $\alpha \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ associe $(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha)$, et dont le morphisme de $Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ dans $F(V)$ est le morphisme associé à ϕ par l'isomorphisme de Yoneda.

Démonstration. Montrons d'abord le sens direct, soit $\phi \in F(W)$. Alors, l'identité de $\Sigma_{(W,\phi)}F$ donne lieu à un morphisme $\gamma : \Sigma_{(W,\phi)}F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \to F$, vérifiant que pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)$, $\gamma(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha) = F(\alpha)(\phi)$. De plus, la restriction à $\Sigma_{(W,\phi)} \times \{0\} \cong \Sigma_{(W,\phi)}F$ est le morphisme de structure $\rho_{F,(W,\phi)}$. Si ϕ est central, $\rho_{F,(W,\phi)}$ est un isomorphisme, en composant par son inverse on trouve un morphisme de $\Sigma_{(W,\phi)}F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W)$ dans $\Sigma_{(W,\phi)}F$ qui vérifie toutes les conditions, ce qui conclut le sens direct puisque $\Sigma_{(W,\phi)}F$ est isomorphe à F.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\mu : F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \to F$ qui vérifie toutes les conditions de l'énoncé. Alors, par le lemme 3.4.54, l'identité de F se factorise sous la forme $F \to \Sigma_W F \to F$, où la première flèche est $\tilde{\mu}$ l'adjoint à μ qui à $f \in F(V)$, associe $\mu(F(\pi_V^{V\oplus W})(f), \pi_W^{V\oplus W})$ et la seconde est $\rho_{F,W}(= F(\iota_V^{V\oplus W}))$.

Alors, considérons la transformation naturelle :

$$\bar{\mu}_{V,W} \ : \ F(V \oplus W) \xrightarrow{\tilde{\mu}_{V\oplus W}} \Sigma_W F(V \oplus W) \xrightarrow{F(\Delta_W \oplus \mathrm{id}_V)} F(V \oplus W).$$

Cette application est un isomorphisme, en effet $F(\Delta_W \oplus \mathrm{id}_V)$ est obtenu en précomposant $F(\iota_{V\oplus W}^{V\oplus W\oplus W})$ par un isomorphisme de $F(V \oplus W \oplus W)$, et associe à f, $\mu(f, \pi_W^{V\oplus W})$. Alors, $\bar{\mu}$ induit une surjection sur $\Sigma_{(W,\phi)}F(V)$, mais un élément $\mu(f, \pi_W^{V\oplus W})$ est dans $\Sigma_{(W,\phi)}F(V)$ si et seulement $F(\iota_W^{V\oplus W})(\mu(f, \pi_W^{V\oplus W})) = \phi$, c'est à dire si $\mu(F(\iota_W^{V\oplus W})(f), \mathrm{id}_W) = \phi$. Or $\mu(F(\iota_W^{V\oplus W})(f), \mathrm{id}_W) = \bar{\mu}_{0,W}(F(\iota_W^{V\oplus W})(f))$, $\bar{\mu}_{0,W}$ est bijective et par hypothèse $\bar{\mu}_{0,W}(\epsilon_{F,W}) = \phi$. Donc, $\mu(f, \pi_W^{V\oplus W})$ est dans $\Sigma_{(W,\phi)}F$ si et seulement si f est dans $\Sigma_{(W,\epsilon_{F,W})}F$. $\bar{\mu}$ définit donc une bijection naturelle entre $\Sigma_{(W,\epsilon_{F,W})}F$ et $\Sigma_{(W,\phi)}F$.

Enfin, par adjonction, on a une factorisation de l'identité de F sous la forme $F \xrightarrow{\tilde{\mu}} \Sigma_{(W,\phi)}F \xrightarrow{\rho_{F,W}} F$, qui se factorise encore sous la forme :

$$F \xrightarrow{F(\pi_V^{V\oplus W})} \Sigma_{(W,\epsilon_{F,W})}F \xrightarrow{\bar{\mu}} \Sigma_{(W,\phi)}F \longrightarrow F.$$

Ce qui conclût la preuve puisque, par hypothèse, $F \xrightarrow{F(\pi_V^{V\oplus W})} \Sigma_{(W,\epsilon_{F,W})}F$ est un isomorphisme.

□

D'après la proposition 4.1.14, la condition que, pour tout espace vectoriel V, $(V, \epsilon_{F,V})$ soit central, est vérifiée pour $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$, avec K une algèbre instable telle que $\mathcal{Q}(K)$ soit localement fini. C'est l'analogue pour les foncteurs de la condition que $\mathcal{Q}(K)$ soit localement fini dans la proposition 4.1.19. Nous allons voir qu'elle est toujours vérifiée si F est noethérien.

Proposition 4.2.4. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ connexe et noethérien, alors pour tout espace vectoriel V, $(V, \epsilon_{F,V})$ est central.*

Démonstration. Soit $f \in F(W)$, alors $F(\pi_W^{V\oplus W})(f) \in \Sigma_{(V,\epsilon_{F,V})} F(W)$ et $\rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}(F(\pi_W^{V\oplus W})(f)) = f$. Donc $\rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}$ est surjectif. Par ailleurs, soit $\alpha \in F(V \oplus W)$ un antécédent de f par $\rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}$, alors, $F(\iota_V^{V\oplus W})(\alpha) = \epsilon_{F,V}$. Comme F est noethérien,

$$V = \ker(\epsilon_{F,V}) = \ker(F(\iota_V^{V\oplus W})(\alpha)) = (\iota_V^{V\oplus W})^{-1}(\ker(\alpha)).$$

On en déduit que $V \subset \ker(\alpha)$. Donc, il existe $g \in F(W)$ tel que $\alpha = F(\pi_W^{V\oplus W})(g)$. Mais alors $f = \rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}(F(\pi_W^{V\oplus W})(g)) = g$. Donc tout élément $f \in F(W)$ a un unique antécédent par $\rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}$, à savoir $F(\pi_W^{V\oplus W})(f)$, $\rho_{F,(V,\epsilon_{F,V})}$ est un isomorphisme. $\square$

Théorème 4.2.5. *Soient $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ connexe et tel que pour tout espace vectoriel V $(V, \epsilon_{F,V})$ soit central, et $\phi \in F(W)$. Alors, (W, ϕ) est central si et seulement si le groupe $Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ agit naturellement en V sur $F(V)$, de telle sorte que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & \\
F \times Hom_{\mathbb{F}_2}(_, W) \arrow[r, "\mu"] & F \\
Hom_{\mathbb{F}_2}(_, W) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel, les applications verticales sont celles qui à $f \in F(V)$ associe $(f, 0)$ et celle qui à $\alpha \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ associe $(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha)$, et dont le morphisme de $Hom_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ dans $F(V)$ est le morphisme associé à ϕ par l'isomorphisme de Yoneda.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 4.2.3. $\square$

Remarque 4.2.6. L'adjonction entre le foncteur Σ_V et le produit par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\_, V)$ pour V un $\mathbb{F}_p$ espace vectoriel n'est pas spécifique à $p = 2$. Le reste des énoncés de cette partie devraient pouvoir se déduire de cette adjonction.

4.2.2 Relations entre $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ et $\mathbf{C}(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$

D'après la proposition 3.4.56, sous l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V(K), H^*(\_)) \cong \Sigma_V \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)),$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(W))$ s'identifie à $\{\gamma : K \to H^*(V \oplus W) | (\iota_V^{V\oplus W})^*(\gamma) = \phi\}$, où $\iota_V^{V\oplus W}$ dénote l'inclusion canonique de V dans $V \oplus W$. On a donc la proposition suivante.

On rappelle le lemme 3.4.29, pour K une algèbre instable, on a l'isomorphise naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{(V,\phi)}(K), H^*(\_)) \cong \Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)).$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\_, H^*(W))$ au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\rho_{K,V}"] \arrow[dr, "\rho_{K,(V,\phi)}"'] & T_V(K) \arrow[d, two heads] \\
& T_{(V,\phi)}(K),
\end{tikzcd}$$

on obtient le diagramme commutatif dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(_)) \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(_)) \\
& \Sigma_V\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(_)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

où le morphisme entre $\Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $\Sigma_V\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ évalué en un espace vectoriel W, est l'injection de la fibre de $\Sigma_V\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(W)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ au dessus de ϕ. Alors, par définition, si ϕ est central, $\rho^*_{K,(V,\phi)} : \Sigma_{(V,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(W)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(W))$, qui s'identifie avec $\rho_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(\_)),(V,\phi)}$, est une bijection naturelle en W. Et donc $(V,\phi) \in \mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$.

Proposition 4.2.7. *Pour K une algèbre instable, $\boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K)) \subset \boldsymbol{C}(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$.*

Remarque 4.2.8. Cette inclusion n'est, en général, pas une égalité. Par exemple, dans l'exemple 4.1.17, $T_{(V,\phi)}(K) \cong K$ si $\phi = \epsilon_{K,V}$ et $T_{(V,\phi)}(K) \cong \mathbb{F}_2[u]$ sinon, mais $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathbb{F}_2[u], H^*(V))$, donc pour tout ϕ, $(V,\phi) \in \mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$, mais $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ ne contient que les $(V, \epsilon_{K,V})$. On étudiera dans la suite de ce document plus en détail les obstructions qu'il y a à ce qu'un élément de $\mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ soit central au sens de Dwyer et Wilkerson.

4.2.3 M-centralité et nil-fermeture

L'objectif de cette partie est de développer un analogue du théorème 4.2.5 pour les foncteurs $\mathrm{Hom}_{K-\mathcal{U}}(M, H^*(\_)(\_))$ avec $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$, en exploitant les constructions de la section 3.5.

Définition 4.2.9. Soient $F \in \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et $\phi \in F(V)$. Soit $\rho_{G,(V,\phi)}$: $\Delta_{(V,\phi)}G \to G$ la composition de $\Delta_{(V,\phi)}G \cong \Delta_{(V,\phi)}G \otimes \mathbb{F}_p[0] \hookrightarrow \Delta_{(V,\phi)}G^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)]$ par la counité de l'adjonction entre $-^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)]$ et $\Delta_{(V,\phi)}\, G^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)] \to G$.

Remarque 4.2.10. Le morphisme $\rho_{F,(V,\phi)} : \Sigma_{(V,\phi)}F \to F$ fait de $\Delta_{(V,\phi)}G$ un objet de $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ de telle sorte que $\rho_{G,(V,\phi)}$ soit un morphisme dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$.

Soit $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$ avec K une algèbre finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Pour $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$, $\rho_{K,(V,\phi)} : K \to T_{(V,\phi)}K$ induit une structure de K-module sur $T_{(V,\phi)}M$ de telle sorte que $\rho_{M,(V,\phi)}$ soit un morphisme de K-module.

On rappelle que le foncteur h a été défini dans la définition 3.5.6.

Lemme 4.2.11. *Soit $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$ avec K une algèbre finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Pour $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$ $\rho_{h\circ f(M),(V,\phi)} = h \circ f(\rho_{M,(V,\phi)})$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.5.24.

□

Définition 4.2.12. Soient $F \in \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et $\phi \in F(V)$. On dit que ϕ est G-central si $\rho_{G,(V,\phi)}$ est un isomorphisme.

Proposition 4.2.13. *Soient $K \in \mathcal{K}$ finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$ nil-fermé. Pour $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$, ϕ est M-central si et seulement si il est $h \circ f(M)$-central.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.2.11 et du théorème 3.5.7. □

Remarque 4.2.14. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ noethérien connexe et soit $(V, \phi) \in \mathbf{C}(F)$, alors l'isomorphisme $F \cong \Sigma_{(V,\phi)}F$ nous permet d'identifier les catégories $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ et $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)}F$.

Par ailleurs, pour $\mu : F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \to F$ associé à ϕ par la proposition 4.2.3, pour $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F \cong (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \Sigma_{(V,\phi)}F$ et $\psi \in F(W)$, on a que $G^\phi \otimes \mathbb{F}_p [\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)] (W, \psi)$ est la somme directe des $G(W, \delta) \otimes \mathbb{F}_p [\gamma]$ tels que $\mu(\delta, \gamma) = \psi$, avec $\delta \in F(W)$ et $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$.

Théorème 4.2.15. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethérien connexe, soit $G \in (\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ tel que pour tout V, $(W, \epsilon_{F,W})$ soit G-central et soit $(W, \phi) \in \boldsymbol{C}(F)$. Alors, ϕ est G-central si et seulement si il existe un morphisme $G^\phi \otimes \mathbb{F}_p [Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, W)] \to G$ dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow F$ tel que la composition $G \cong G \otimes \mathbb{F}_p [0] \to G^\phi \otimes \mathbb{F}_p [Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, W)] \to G$ soit l'identité de G.*

Démonstration. Supposons que ϕ est G-central, alors l'adjoint à l'identité de $\Delta_{(V,\phi)}G$ composé par l'isomorphisme $\Delta_{(V,\phi)}G^\phi \otimes \mathbb{F}_p [\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)] \cong G^\phi \otimes \mathbb{F}_p [\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)]$ nous donne le morphisme souhaité.

La preuve de la réciproque utilise de manière cruciale certains éléments de la preuve de la proposition 4.2.3. Rappelons les idées importantes de cette preuve que nous allons réutiliser. Pour $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ un foncteur noethérien, connexe, nous considérions une transformation naturelle

$\mu\ :\ F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \to$ vérifiant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \arrow[r, "\mu"] & F \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

dans lequel, les applications verticales sont celles qui à $f \in F(V)$ associe $(f, 0)$ et celle qui à $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ associe $(F(\pi_0^V)(1_F), \alpha)$, et dont le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, W)$ dans $F(V)$ est le morphisme associé à ϕ par l'isomorphisme de Yoneda.

Nous montrions alors, que l'application de $F(W)$ dans lui même qui à $f \in F(W)$ associe $\mu(f, \mathrm{id}_W)$ était une bijection et que l'unique antécédent de ϕ par cette bijection était $\epsilon_{F,W}$.

Dans notre contexte, nous allons utiliser le fait que $\phi \in \mathbf{C}(F)$ et le fait que G soit de même variance que F, pour construire un isomorphisme de $\Delta_W G$ opérant une permutation sur les $\Delta_{(W,\delta)}G$ et qui envoie $\Delta_{(W,\epsilon_{F,W})}G$ sur $\Delta_{(W,\phi)}G$, et conclure en utilisant l'hypothèse que $(W, \epsilon_{F,W})$ est G-central.

Puisque ϕ est supposé central, nous avons un morphisme $\mu\ :\ F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W) \to F$ qui vérifie ces hypothèses. Soit alors $\nu\ :\ G^{\phi} \otimes \mathbb{F}_p\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W)\right] \to G$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Notons que ν envoie un élément de $G(V, \psi) \otimes \mathbb{F}_p[\gamma]$ sur un élément de $G(V, \mu(\psi, \gamma))$.

Alors, par adjonction, l'identité de G se factorise sous la forme $G \to \Delta_W G \to G$, où la première flèche est $\tilde{\nu}$, l'adjoint à ν qui à $g \in G(V)$ associe $\nu(G(\pi_V^{V \oplus W})(g), \pi_W^{V \oplus W})$, et la seconde est $\rho_{G,V} (= G(\iota_V^{V \oplus W}))$.

Considérons la transformation naturelle en V :

$$\bar{\nu}_{V,W}\ :\ G(V \oplus W) \overset{\tilde{\nu}_{V \oplus W}}{\longrightarrow} \Delta_W G(V \oplus W) \overset{G(\Delta_W \oplus \mathrm{id}_V)}{\longrightarrow} G(V \oplus W).$$

Cette application est un isomorphisme, en effet $G(\Delta_W \oplus \mathrm{id}_V)$ est obtenu en précomposant $G(\iota_{V \oplus W}^{V \oplus W \oplus W})$ par un isomorphisme de $G(V \oplus V \oplus W)$, et elle associe à $g \in G(V \oplus W)$, $\nu(g, \pi_W^{V \oplus W})$. Alors, $\bar{\nu}_{V,W}(g) \in \Delta_{(W,\phi)}G$ si et seulement si g est une combinaison linéaire d'éléments g_i dans des $G(V \oplus W, \psi_i)$, tels que pour tout i, $\mu(g_i, \pi_W^{V \oplus W}) \in \Sigma_{(W,\phi)}F(V)$. Mais alors, $F(\iota_W^{V \oplus W})\mu(g_i, \pi_W^{V \oplus W}) = \phi$. Donc, $\mu(F(\iota_W^{V \oplus W})(g_i), \mathrm{id}_W) = \phi$. Mais, comme nous l'avons montré dans la démonstration de la proposition 4.2.3, $\mu(\_, \mathrm{id}_W)$ est une bijection de $F(W)$, et l'unique antécédent de ϕ par cette bijection est $\epsilon_{F,W}$. En conséquence, pour tout i, $F(\iota_W^{V \oplus W})(g_i) = \epsilon_{F,W}$ et donc, $g \in \Delta_{(W,\epsilon_{F,W})}G(V)$. En conséquence, $\bar{\nu}$ définit un isomorphisme de $\Delta_{(W,\epsilon_{F,W})}G(V)$ dans $\Delta_{(W,\phi)}G(V)$.

Alors, l'identité de $G(V)$ se factorise en

$$G(V) \overset{G(\pi_V^{V\oplus W})}{\longrightarrow} \Delta_{(W,\epsilon_{F,W})}G(V) \overset{\bar{\nu}}{\longrightarrow} \Delta_{(W,\phi)}G(V) \overset{\rho_{G,(W,\phi)}}{\longrightarrow} G(V).$$

Comme, par hypothèse $G(\pi_V^{V\oplus W})$ est un isomorphisme et que $\bar{\nu}$ définit un isomorphisme de $\Delta_{(W,\epsilon_{F,W})}G(V)$ dans $\Delta_{(W,\phi)}G(V)$, $\rho_{G,(W,\phi)}$ est un isomorphisme.

□

Corollaire 4.2.16. *Soient $K \in \mathcal{K}$ noethérienne, connexe et $M \in K_{f.g.} - \mathcal{U}$ un module instable nil-fermé tel que, pour tout espace vectoriel de dimension finie, $(W, \epsilon_{K,W})$ soit M-central. Soit $(V, \phi) \in \boldsymbol{C}(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$, alors (V, ϕ) est M-central si et seulement M admet une structure de $T_{(V,\phi)}(K)$-module et qu'il existe un morphisme de K-module $M \to M^\phi \otimes H^*(V)$ telle que la composition $M \to M^\phi \otimes H^*(V) \overset{id_M \otimes \epsilon_{H^*(V),0}}{\longrightarrow} M$ soit l'identité.*

Démonstration. Le sens direct est vrai pour M non *nil*-fermé. Si (V, ϕ) est M central, l'isomorphisme $T_{(V,\phi)}(M) \cong M$ donne à M une structure de $T_{(V,\phi)}(K)$-module. Alors, le morphisme $\eta_{M,(V,\phi)} : M \to T_{(V,\phi)}(M)^\phi \otimes H^*(V)$ composé par l'isomorphisme $T_{(V,\phi)}(M)^\phi \otimes H^*(V) \cong M^\phi \otimes H^*(V)$ nous fournit le morphisme souhaité.

Réciproquement, soit $\gamma : M \to M^\phi \otimes H^*(V)$, vérifiant les conditions de l'énoncé. En appliquant le foncteur $h \circ f$, à γ, on obtient un morphisme dans $(\mathcal{V}^f)^{(\mathcal{V}^f)^{op}} \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ $\gamma^* : h \circ f(M)^\phi \otimes \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)] \to h \circ f(M)$, vérifiant les hypothèses du théorème 4.2.15. Alors, $\rho_{h\circ f(M),(V,\phi)} = h \circ f(\rho_{M,(V,\phi)})$ est un isomorphisme. On en déduit que $\rho_{M,(V,\phi)}$ est un isomorphisme dans $(K - \mathcal{U})/\mathcal{N}il_1$. Comme M est *nil*-fermé, $\rho_{M,(V,\phi)}$ est un isomorphisme et donc (V, ϕ) est M-central. □

4.2.4 $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ et la filtration nilpotente

Dans cette section, nous allons illustrer comment approcher le centre d'une algèbre instable K par celui de ses nil_n-fermetures, avec n parcourant $\mathbb{N}$.

Lemme 4.2.17. *Soient K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur l'algèbre de Steenrod, V un espace vectoriel et $(W, \phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors le morphisme*

$$T_V(\rho_{K,(W,\phi)}) : T_V(K) \cong \prod_{f \in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V,f)}(K) \to \prod_{g \in \Sigma_{(W,\phi)} Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))} T_{(V\oplus W,g)}(K) \cong T_V(T_{(W,\phi)}(K))$$

est l'application qui à $(x_f)_{f \in Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))}$ associe $(x_g)_{g\in\Sigma_{(W,\phi)} Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V))}$ où $x_g = \delta_g(\iota_V^{V\oplus W})_*(x_{(\iota_V^{V\oplus W})^* g})$ avec $\delta_g \in \mathbb{F}_2^{Hom_{\mathcal{K}}(K,H^*(V\oplus W))}$ la fonction caractéristique de g.

Démonstration. On constate que $T_V(\rho_{K,W})\ :\ T_V(K) \to T_V(T_W(K)) \cong T_{V\oplus W}(K)$ est l'application qui à un élément x du domaine associe $(\iota_V^{V\oplus W})_* x$. Que par ailleurs, elle envoie $\delta_f \in\in \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V)}$ sur l'application qui à $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V \oplus W))$ associe 1 si $(\iota_V^{V\oplus W})^* g = f$ et 0 sinon. En conséquence $T_{(V,f)}(K)$ s'envoie sur $\bigoplus_{g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V\oplus W))\ ;\ (\iota_V^{V\oplus W})^*g=f} T_{(V,g)}(K)$. Alors, pour $x \in T_{(V,f)}(K)$ la décomposition de $(\iota_V^{V\oplus W})_* x$ est donnée par

$$(\iota_V^{V\oplus W})_* x = \sum_{g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K,H^*(V\oplus W))\ ;\ (\iota_V^{V\oplus W})^*g=f} \delta_g (\iota_V^{V\oplus W})^* x.$$

□

Proposition 4.2.18. *Soit $(W,\phi) \in \mathcal{S}(K)$, $(W,\phi) \in \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K))$ si et seulement si $\phi \in \boldsymbol{C}(Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$ et pour tout espace vectoriel V et pour tout $g \in Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$, l'application de $T_{(V,g)}(K)$ dans $T_{(V\oplus W, g\boxplus\phi)}(K)$ qui à x associe $(\iota_V^{V\oplus W})_* x$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour tout espace vectoriel V, T_V est exact et pour M un module instable, $T_V(M)$ n'est trivial que si M est trivial. Donc $T_V(\rho_{K,(W,\phi)})$ est un isomorphisme si et seulement si $\rho_{K,(W,\phi)}$ l'est. C'est le cas si et seulement si $\phi \in \mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$, auquel cas pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ il existe un unique $g_f \in \Sigma_{(W,\phi)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ tel que $(\iota_V^{V\oplus W})^* g_f = f$, et si (cf. lemme 4.2.17) $T_V(\rho_{K,(W,\phi)})$ définit pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ un isomorphisme de $T_{(V,f)}(K)$ dans $T_{(V\oplus W, g_f)}(K)$. □

Définition 4.2.19. Soient $\mathbf{C}_1(K) := \mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$ et, pour $n \geq 2$, soit $\mathbf{C}_n(K)$ l'ensemble suivant :

$$\{(W,\phi) \in \mathbf{C}_1(K) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V)),\ g^{<n}(\rho_{K,(W,\phi)})\ :\ g^{<n}(K)(V,g) \overset{\cong}{\to} g^{<n}(K)(V\oplus W, g\boxplus\phi)\}.$$

$\mathbf{C}_n(K)$ ainsi définie est une généralisation à $g^{<n}(K)$ de $\mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)))$.

Proposition 4.2.20. *Tout morphisme ϕ de K dans $H^*(V)$ se factorise de manière unique en $K \to l_n(K) \overset{l_n(\phi)}{\to} H^*(V)$, où la première flèche est la localisation loin des n-nilpotents. Alors, $\phi \in \boldsymbol{C}_n(K)$, si et seulement si $l_n(\phi) \in \boldsymbol{C}(\mathcal{S}(l_n(K)))$.*

Démonstration. Si $\phi \in \mathbf{C}_n(K)$, alors $f^{<n}(\rho_{K,(W,\phi)})\ :\ f^{<n}(K) \to \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(K)$ est un isomorphisme. Alors, en appliquant le foncteur $m^{<n}$ à $f^{<n}(\rho_{K,(W,\phi)})\ :\ f^{<n}(K) \overset{\cong}{\to} \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(K)$, pour ϕ un élément de $\mathbf{C}_n(K)$, on obtient que $\rho_{l_n(K),(V,l_n(\phi))}\ :\ l_n(K) \to T_{(V,l_n(\phi))}(l_n(K))$ est un isomorphisme dans $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_n$. Comme $l_n(K)$ est nil_n-fermé, c'est un isomorphisme et donc $l_n(\phi)$ est central dans $\mathcal{S}(K)$.

Réciproquement, si $l_n(\phi)$ est central dans $\mathcal{S}(K)$, alors pour tout h le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} g^{<n}(K)(V,h) & \longrightarrow & g^{<n}(K)(V\oplus W, h\boxplus\phi) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ g^{<n}(l_n(K))(V,l_n(h)) & \xrightarrow{\cong} & g^{<n}(l_n(K))(V\oplus W, l_n(h)\boxplus l_n(\phi)), \end{array}$$

et donc $\phi \in \mathbf{C}_n(K)$. □

La proposition 4.2.18 fournit la filtration

$$\mathbf{C}(\mathcal{S}(K)) \subset ... \subset \mathbf{C}_n(K) \subset ... \subset \mathbf{C}_2(K) \subset \mathbf{C}_1(K) = \mathbf{C}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))).$$

Proposition 4.2.21. *Soit K une algèbre instable, alors $\boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \boldsymbol{C}_n(K)$.*

Démonstration. Si $T_V(\rho_{K,(W,\phi)})$ n'est pas un isomorphisme sur chaque composante connexe de $T_V(K)$, alors il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(V))$ et $n \geq 1$ tel que $g^{<n}(\rho_{K,(W,\phi)}) : g^{<n}(K)(V,g) \to g^{<n}(K)(V\oplus W, g\boxplus\phi)$ n'est pas un isomorphisme. Le résultat s'en suit par contraposée. □

Nous allons donner une caractérisation de l'obstruction à ce qu'un élément $(V,\phi) \in \mathbf{C}_n(K)$ appartienne à $\mathbf{C}_{n+1}(K)$ ne faisant intervenir que des foncteurs dans $f(K) - \mathcal{F}$.

Définition 4.2.22. Soit $F \in f^{<n}(K) - \mathcal{F}^{<n}$. Alors, pour tout V, $\Delta_V F(W)$ (défini dans la définition 2.3.2) est un $f(K)(V)$-module. Pour $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$, soit $\Delta_{(V,\phi)}F(W) := \Delta_V F(W) \otimes_{f(K)(V)} \mathbb{F}_2(\phi)$ et $\rho_{F,(V,\phi)}$ la composition de $\rho_{F,V}$ par la projection sur $\Delta_{(V,\phi)}F$. On dira que (V,ϕ) est F-central si et seulement si $\rho_{F,(V,\phi)}$ est un isomorphisme.

Soit K une algèbre instable. Notons $\lambda_n : l_{n+1}(K) \to l_n(K)$ la nil_n-localisation de $l_{n+1}(K)$. On a une suite exacte dans $K - \mathcal{U}$

$$0 \to nil_n(K)/nil_{n+1}(K) \to l_{n+1}(K) \xrightarrow{\lambda_n} l_n(K) \to \mathrm{coker}(\lambda_n) \to 0.$$

Notons que $nil_{n+1}(K)$ et $nil_n(K)$ sont des idéaux de K, en conséquence de quoi $nil_n(K)/nil_{n+1}(K)$ est un objet de $K - \mathcal{U}$, par ailleurs $l_{n+1}(K)$ et $l_n(K)$ sont des K-algèbres et $\mathrm{coker}(\lambda_n)$ est un $l_{n+1}(K)$-module dans $\mathcal{U}$ et donc également un objet de $K - \mathcal{U}$. Par naturalité de $\rho_{M,(V,\phi)}$ en $M \in K - \mathcal{U}$ (lemme 3.3.17), on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & nil_n(K)/nil_{n+1}(K) & \to & l_{n+1}(K) & \to & l_n(K) & \to & \mathrm{coker}(\lambda_n) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{nil_n(K)/nil_{n+1}(K),(V,\phi)}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{l_{n+1}(K),(V,\phi)}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{l_n(K),(V,\phi)}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathrm{coker}(\lambda_n),(V,\phi)}} & & \\ 0 & \to & T_{(V,\phi)}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)) & \to & T_{(V,\phi)}(l_{n+1}(K)) & \to & T_{(V,\phi)}(l_n(K)) & \to & T_{(V,\phi)}(\mathrm{coker}(\lambda_n)) & \to & 0. \end{array}$$

En appliquant le foncteur $f^{<n+1}$, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)),(V,\phi)}"] & f^{<n+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{<n+1}(K),(V,\phi)}"] & f^{<n+1}(l_n(K)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{<n+1}(l_n(K)),(V,\phi)}"] & f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n)),(V,\phi)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)) \arrow[r] & \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(l_{n+1}(K)) \arrow[r] & \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(l_n(K)) \arrow[r] & \Delta_{(V,\phi)} f^{<n}(\mathrm{coker}(\lambda_n)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Théorème 4.2.23. *Soient K une algèbre instable et $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le couple (V, ϕ) appartient à $\boldsymbol{C}_{n+1}(K)$.*
2. *Le couple (V, ϕ) appartient à $\boldsymbol{C}_n(K)$ et il est $f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$-central et $f^{<n+1}(coker(\lambda_n))$-central.*

Démonstration. Supposons que $(V, \phi) \in \mathbf{C}_{n+1}(K)$ alors, $\rho_{f^{n+1}(K),(V,\phi)}$ est un isomorphisme. En tronquant en degrés strictement plus petits que n, on obtient que $\rho_{f^{<n}(K),(V,\phi)}$ est un isomorphisme et donc $(V, \phi) \in \mathbf{C}_n(K)$. Par ailleurs, cela implique que $\rho_{f^{<n+1}(l_n(K)),(V,\phi)}$ est aussi un isomorphisme, on conclut par le lemme des cinq que $\rho_{f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)),(V,\phi)}$ et $\rho_{f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n)),(V,\phi)}$ sont aussi des isomorphismes.

La réciproque se montre aussi par le lemme des cinq. En effet, si (V, ϕ) est dans $\mathbf{C}_n(K)$ et si il est $f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$-central et si il est $f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n))$-central, alors $\rho_{f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K)),(V,\phi)}$, $\rho_{f^{<n+1}(l_n(K)),(V,\phi)}$ et $\rho_{f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n)),(V,\phi)}$ sont tous des isomorphismes et donc il en est de même de $\rho_{f^{<n+1}(K),(V,\phi)}$. □

Remarque 4.2.24. Notons que dans le théorème 4.2.23, $f^{<n+1}(\lambda_n)$ est un isomorphisme en degrés strictement plus petits que n. Les foncteurs $f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$ et $f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n))$ sont donc concentrés en degré n. Alors, les composantes de degré n de ces deux foncteurs, $f^n(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$ et $f^n(\mathrm{coker}(\lambda_n))$ sont des objets de $f(K) - \mathcal{F}$ et (V, ϕ) est $f^{<n+1}(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$-central et $f^{<n+1}(\mathrm{coker}(\lambda_n))$-central si et seulement si il est $f^n(nil_n(K)/nil_{n+1}(K))$-central et $f^n(\mathrm{coker}(\lambda_n))$-central.

4.2.5 Exemples de calculs du centre pour K non nil-fermée

Dans le chapitre 5, nous allons utiliser le formalisme développé pour étudier le centre d'objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, pour détailler des calculs du centre d'algèbres instables connexes, noethériennes et nil-fermées. Mais avant cela, détaillons quelques exemples de calcul du centre dans le cas général.

Soit K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur l'algèbre de Steenrod. Alors, $nil_1(K)$ est un idéal de K, c'est donc en particulier un K-module, et pour $R_1(K) := K/nil_1(K)$, $\mathcal{S}(R_1(K)) \cong \mathcal{S}(K)$ par le morphisme qui à ϕ de $R_1(K)$ dans $H^*(V)$ associe sa précomposition par $K \to R_1(K)$. Alors, $T\_(K)$, $T\_(R_1(K))$ et $T\_(nil_1(K))$ définissent des foncteurs de $\mathcal{S}(K)$ dans $\mathcal{K}$ et les décompositions de $T_V(K)$, $T_V(R_1(K))$ et $T_V(nil_1(K))$ en composantes connexes sont compatibles, ce qui donne lieu pour tout $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$, à la suite exacte suivante :

$$0 \to T_{(V,\phi)}(nil_1(K)) \to T_{(V,\phi)}(K) \to T_{(V,\phi)}(R_1(K)) \to 0.$$

Proposition 4.2.25. *Soient K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$ et $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors (V,ϕ) est central si et seulement si il est $nil_1(K)$-central et (V,ϕ) est central dans $\mathcal{S}(R_1(K))$.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes dans $\mathcal{U}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & nil_1(K) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & R_1(K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_{(V,\phi)}(nil_1(K)) \arrow[r] & T_{(V,\phi)}(K) \arrow[r] & T_{(V,\phi)}(R_1(K)) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Supposons que (V,ϕ) est $nil_1(K)$-central et est central dans $\mathcal{S}(R_1(K))$. Alors, comme les flèches de $nil_1(K)$ vers $T_{(V,\phi)}(nil_1(K))$ et de $R_1(K)$ vers $T_{(V,\phi)}(R_1(K))$ sont des isomorphismes, par le lemme des cinq, la flèche de K vers $T_{(V,\phi)}(K)$ est un iso. Ainsi, (V,ϕ) est central dans $\mathcal{S}(K)$. Réciproquement, si (V,ϕ) est central dans $\mathcal{S}(K)$, $\rho_{K,(V,\phi)} : K \to T_{(V,\phi)}(K)$ est un isomorphisme. Alors, le foncteur T_V commutant avec le foncteur nil_1, dans le diagramme précédent, la flèche $nil_1(K) \to T_{(V,\phi)}(nil_1(K))$ est également un isomorphisme. On conclut en utilisant à nouveau le lemme des cinq. □

Exemple 4.2.26. Soit K une algèbre instable (non unitaire), nil-fermée, connexe et noethérienne. Soit aussi N une algèbre instable nilpotente. Considérons $K \oplus N$ l'algèbre obtenue en imposant que le produit d'un élément k de K par un élément de N est trivial pour $k \neq 1$. $R_1(K \oplus N) = K$ et K est noethérienne, donc pour tout V, $(V, \epsilon_{K,V})$ est central pour K d'après la proposition 4.1.14. Alors, $T_V(N) \cong T_{(V,\epsilon_{K\oplus N,V})}(N)$ et $T_{(V,\phi)}(N) \cong 0$ pour $\phi \neq \epsilon_{K,V}$. En conséquence, par la proposition 1.2.53, on a les deux possibilités suivantes, soit $N \in \mathcal{U}_1$, alors pour tout V, $T_V(N) \cong N$ et donc $(V, \epsilon_{K\oplus N,V})$ est central, soit N n'est pas dans $\mathcal{U}_1$, auquel cas $(0, \epsilon_{K\oplus N,0})$ est le seul élément central dans $\mathcal{S}(K \oplus N)$.

Dans l'exemple précédent, on a choisi notre algèbre instable de telle sorte à ce que la structure de $T_V(K)$-module sur $nil_1(K)$ soit trivial. Donnons un second exemple où ce n'est pas le cas.

Exemple 4.2.27. Soit A une algèbre instable (non unitaire), nil-fermée, connexe et noethérienne. Soit aussi N une algèbre instable nilpotente. Considérons $K := A \oplus A \otimes N$. Alors, $nil_1(K) \cong A \otimes N$ et $R_1(K) \cong A$. De plus, la décomposition en composante connexe de K est de la forme suivante : $T_V(K) \cong \bigoplus_{(V,\phi)\in\mathcal{S}(A)}(T_{(V,\phi)}(A) \oplus T_{(V,\phi)}(A)) \otimes T_V(N)$. On en conclut que (V,ϕ) est central pour K si et seulement si il l'est pour A et $N \cong T_V(N)$. Autrement dit, soit N n'appartient pas à $\mathcal{U}_1$ et le centre de K est réduit à $(0, \epsilon_{K,0})$, soit $N \in \mathcal{U}_1$ et alors $\mathbf{C}(\mathcal{S}(K)) = \mathbf{C}(\mathcal{S}(A))$.

On peut généraliser l'approche utilisée dans la proposition 4.2.25. Pour K une algèbre instable et pour $n \in \mathbb{N}$, $nil_n(K)$ est un idéal de K. C'est donc un K module, de même que $nil_n(K)/nil_{n+1}(K)$. Notons $R_n(K)$ le K-module instable réduit, tel que $nil_n(K)/nil_{n+1}(K) \cong \Sigma^n R_n(K)$ (confère la proposition 1.2.49).

Proposition 4.2.28. *Soient K une algèbre instable noethérienne connexe, et N tel que $nil_N(K) \neq 0$ et $nil_{N+1}(K) = 0$. Soit $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors, (V,ϕ) est central si et seulement si pour tout $n \leq N$, (V,ϕ) est $R_n(K)$-central.*

Démonstration. Pour tout n, on a une suite exacte dans $K - \mathcal{U}$

$$0 \to nil_{n+1}(K) \to nil_n(K) \to \Sigma^n R_n(K) \to 0.$$

En appliquant le foncteur $T_{(V,\phi)}$, on obtient une suite exacte

$$0 \to T_{(V,\phi)}(nil_{n+1}(K)) \to T_{(V,\phi)}(nil_n(K)) \to T_{(V,\phi)}(\Sigma^n R_n(K)) \to 0,$$

et comme dans la proposition 4.2.25, par le lemme des cinq, on obtient que (V,ϕ) est $nil_n(K)$-central si et seulement si il est $nil_{n+1}(K)$-central et si il est $\Sigma^n R_n(K)$-central, c'est à dire $R_n(K)$-central (confère la proposition 4.1.3). Par une récurrence décroissante, on obtient que (V,ϕ) est $nil_n(K)$-central si et seulement si il est $R_i(K)$-central pour tout $i \geq n$. En particulier, (V,ϕ) est central si il est $nil_0(K)$-central et donc si il est $R_i(K)$-central pour tout $i \leq N$.

□

Remarque 4.2.29. A priori, déterminer les éléments $R_n(K)$-centraux n'est pas plus facile que de déterminer directement les éléments centraux de $\mathcal{S}(K)$. Le théorème 4.2.23, donne une méthode plus générale pour déterminer le centre de $\mathcal{S}(K)$, que la proposition précédente. Ceci dit, dans les cas où les $R_i(K)$ ne sont pas seulement réduits mais *nil*-fermés, cette proposition permet de calculer le centre plus efficacement.

Dans les exemples précédents, nous avons étudié des situations où $R_1(K)$ était nil-fermée. En général, $R_1(K)$ est réduit, mais pas nécessairement nil-fermée. Considérons K une algèbre réduite et $\eta : K \to l_1(K)$ sa *nil*-fermeture. Alors, on a une suite exacte de la forme :

$$0 \to K \to l_1(K) \to l_1(K)/K \to 0,$$

avec $l_1(K)/K$ nilpotente. Alors, $\mathcal{S}(K) \cong \mathcal{S}(l_1(K))$, et $l_1(K)/K$ appartient à $K-\mathcal{U}$. Ainsi, les foncteurs $T\_(K)$, $T\_(l_1(K))$ et $T\_(l_1(K)/K)$ sont tous des foncteurs sur $\mathcal{S}(K)$ et on a une suite exacte courte de la forme $0 \to T_{(V,\phi)}(K) \to T_{(V,\phi)}(l_1(K)) \to T_{(V,\phi)}(l_1(K)/K) \to 0$ pour tout $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$.

Proposition 4.2.30. *Soient K une algèbre instable réduite, finiment engendrée en tant qu'algèbre sur l'algèbre de Steenrod et $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors (V,ϕ) est central pour K si et seulement si il est $l_1(K)/K$-central et qu'il est central dans $\mathcal{S}(l_1(K))$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.2.25, on justifie que si (V,ϕ) est central dans $\mathcal{S}(K)$, alors en prenant la nil-localisation, il est central dans $\mathcal{S}(l_1(K))$ et on conclut avec le lemme des cinq. □

Exemple 4.2.31.
1. Soit $K \cong \mathbb{F}_2[x]x \oplus \mathbb{F}_2$. Alors, $l_1(K) \cong \mathbb{F}_2[x]$ ce qui implique que $\mathcal{S}(K) = \{(V,\phi^*) \mid \phi : V \to \mathrm{Vect}(x^*)\}$ et $\mathbf{C}(\mathcal{S}(l_1(K)))$ est $\mathcal{S}(K)$ tout entier. Par ailleurs, $l_1(K)/K \cong \Sigma\mathbb{F}_2$ et l'action de K sur $l_1(K)/K$ est triviale. Alors, pour tout V, $T_V(l_1(K)/K) \cong T_{(V,\epsilon_{K,V})}(l_1(K)/K) \cong l_1(K)/K$, et $T_{(V,\phi)}(l_1(K)/K) \cong 0$ pour $\phi \neq \epsilon_{K,V}$. En conséquence, le centre de $\mathcal{S}(K)$ est l'ensemble des $(V,\epsilon_{K,V})$ avec V un espace vectoriel de dimension finie.
2. Soit K nil-fermée connexe, on considère $\mathbb{F}_2 \oplus K^{>n}$, l'algèbre instable constituée des éléments de K de degrés 0 ou supérieur à n, avec $n \geq 1$. Alors, le centre de $\mathbb{F}_2 \oplus K^{>n}$ est restreint aux $(V,\epsilon_{\mathbb{F}_2\oplus K^{>n},V})$ avec V un espace vectoriel de dimension finie. En effet, $l_1(\mathbb{F}_2 + K^{>n}) \cong K$ donc $l_1(\mathbb{F}_2 + K^{>n})/\mathbb{F}_2 + K^{>n}$ est un module instable concentré en degrés plus petits que n. Comme dans le 1, seul les $\epsilon_{K,V}$ sont donc $l_1(\mathbb{F}_2+K^{>n})/\mathbb{F}_2+K^{>n}$-centraux.

Soit K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Alors, tout morphisme de ΦK dans $H^*(V)$ se factorise en $\Phi K \xrightarrow{\lambda_K} K \to H^*(V)$, ce qui induit une bijection $\mathcal{S}(K) \cong \mathcal{S}(\Phi K)$.

Proposition 4.2.32. *Soit K une algèbre instable finiment engendrée en tant qu'algèbre sur $\mathcal{A}$. Alors, $\boldsymbol{C}(\mathcal{S}(\Phi K))$ s'identifie à $\boldsymbol{C}(\mathcal{S}(K))$ sous la bijection naturelle entre $\mathcal{S}(\Phi K)$ et $\mathcal{S}(K)$.*

Démonstration. Par la proposition 1.2.12, on a un isomorphisme $T_V(\Phi K) \cong \Phi T_V(K)$. Cet isomorphisme est un isomorphisme d'algèbre, c'est donc aussi un isomorphisme de $T_V^0(K)$-algèbres, où on a identifié $T_V^0(K)$ et $T_V^0(\Phi K)$. Il est donc compatible avec les décompositions en composantes connexes. On a alors, $T_{(V,\phi)}(\Phi K) \cong \Phi T_{(V,\phi)}(K)$ pour $(V,\phi) \in \mathcal{S}(K)$. Alors, $\rho_{\Phi K,(V,\phi)} = \Phi\rho_{K,(V,\phi)}$ (confère le lemme 3.4.2 dans [Sch94]) est un isomorphisme, si et seulement si c'est le cas de $\rho_{K,(V,\phi)}$, donc (V,ϕ) est central pour ΦK si et seulement si il l'est pour K. □

CHAPITRE 5

UN PROBLÈME DE CLASSIFICATION DES $H^*(V)$-COMODULES DANS $\mathcal{K}/\mathcal{N}il_1$

Dans ce chapitre, nous allons utiliser l'étude du centre du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ pour étudier les algèbres instables, noethériennes, connexes et nil-fermées K, munies de structures de $H^*(V)$-comodules pour V un espace vectoriel de dimension finie. D'après le corollaire 4.1.20, une structure de $H^*(V)$-comodule sur une algèbre instable noethérienne connexe correspond à un élément central $(V, \phi) \in \mathcal{S}(K)$. Par ailleurs, si K est nil-fermé, d'après la proposition 4.2.20 et le théorème 4.2.5, $(V, \phi) \in \mathbf{C}(\mathcal{S}(K))$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ agit sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ en faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \arrow[r, "\mu"] & F \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, chercher des structures de $H^*(V)$-comodules sur K noethérienne, connexe et nil-fermée revient à chercher des actions de groupes naturelles en W de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(W))$. Plus précisément, pour A une algèbre instable nil-fermée fixée, nous allons nous demander comment classifier les algèbres instables noethériennes et connexes, munies d'une structure de $H^*(V)$-comodules dont l'algèbre des éléments primitifs est précisément A. Du point de vue des foncteurs, cela revient à classifier les foncteurs F, munis d'une action naturelle de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ dont le quotient est précisément $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(A, H^*(\_))$.

5.1 Quotients noethériens dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$

Cette première sous-partie est consacrée à la définition des catégories de foncteurs dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ munis d'une action naturelle d'un foncteur de $(\mathcal{V}^f)^{op}$ à valeurs dans les groupes, et à la démonstration d'un résultat technique permettant de justifier dans certains contextes que le quotient d'un tel objet est noethérien.

Définition 5.1.1. Soit $\mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dont les objets sont les foncteurs à valeurs dans les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes naturels en V.

Remarque 5.1.2. $\mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ est la catégorie des objets en groupes dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Définition 5.1.3. Soit $G \in \mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on considère $G - \mathcal{S}\mathrm{et}$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ munie d'une action naturelle de G et dont les morphismes sont les morphismes dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ compatibles avec l'action de G.

Définition 5.1.4. Soit $G \in \mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on dira que G est noethérien si l'objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ obtenu en oubliant la structure de groupe de G est noethérien.

Soit $G \in \mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $F \in G - \mathcal{S}\mathrm{et}$, on dira que F est noethérien si l'objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ obtenu en oubliant l'action de G est noethérien.

Remarque 5.1.5. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ noethérien, soit $H \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et soit $q : F \twoheadrightarrow H$ une surjection naturelle. Alors, pour $\alpha : V_1 \to V_2$ un morphisme d'espaces vectoriels et pour $x \in H(V_2)$, on considère $\alpha^*(q^{-1}(\{x\}))$ qui désigne l'ensemble des images par α^* d'antécédents par q de x. Mais alors, par naturalité de q, $\alpha^*(q^{-1}(\{x\}))$ est toujours inclus dans l'intersection de $q^{-1}(\{\alpha^* x\})$, l'ensemble des antécédents de $\alpha^* x$ par q, et de $\alpha^*(F(V_2))$. On va voir que si cette inclusion est une égalité, le foncteur H est également noethérien.

Lemme 5.1.6. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethérien, soit $H \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et soit $q : F \twoheadrightarrow H$ une surjection naturelle.*

1. *Pour tout $V \in \mathcal{V}^f$, pour tout $s \in H(V)$ et pour tout $r \in F(V)$ tel que $q(r) = s$,* $\ker(r) \subset \ker(s)$.
2. *De plus, il existe $r_s \in F(V)$ (à priori non unique) tel que $q(r_s) = s$ et $ker(r_s) = ker(s)$.*

Démonstration. En effet, si $r \in F(V)$ est tel que $q(r) = s$, alors il existe $r' \in F(V/\ker(r))$ tel que $r = \pi^* r'$ pour π la projection de V sur $V/\ker(r)$ mais alors $x = \pi^*(q(r'))$ et donc $\ker(s) \supset \ker(r)$.

De plus, soit $\tilde{s} \in H(V/\ker(s))$ tel que $\gamma^*(\tilde{s}) = s$, où γ désigne la projection de V sur $V/\ker(s)$. Alors, comme q est une surjection, il existe $\tilde{r}_s \in F(V/\ker(s))$ un antécédent de $\tilde{s}$ par q. Par naturalité de q, pour $r_s := \gamma^*(\tilde{r}_s)$, $q(r_s) = s$ et $\ker(s) \subset \ker(r)$. Donc, d'après le 1, $\ker(s) = \ker(r_s)$. □

Proposition 5.1.7. *Soit $F \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethérien, soit $H \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et soit $q : F \twoheadrightarrow H$ une surjection naturelle. Alors, si pour tout morphisme dans $\mathcal{V}^f$, $\alpha : V_1 \to V_2$ et pour tout $x \in H(V_2)$, $\alpha^*(q^{-1}(\{x\})) = q^{-1}(\{\alpha^* x\}) \cap \alpha^*(F(V_2))$, le foncteur H est également noethérien.*

Démonstration. Le foncteur F étant à valeurs dans les ensembles finis, c'est également le cas pour H. Il faut justifier que pour tout $s \in H(V)$, et pour tout $\beta : U \to V$, $\ker(\beta^* s) = \beta^{-1}(\ker(s))$.

On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"'] & V \arrow[d, "\gamma"] \\
U/\beta^{-1}(\ker(s)) \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] \arrow[d, "\rho"'] & V/\ker(s) \\
U/\ker(H(\beta)(s)) &
\end{tikzcd}$$

où γ, σ et ρ dénotent les surjections canoniques et où $\tilde{\beta}$ désigne l'application induite par β entre $U/\beta^{-1}(\ker(s))$ et $V/\ker(s)$. $\tilde{\beta}$ est alors injective, puisqu'on l'a obtenu en quotientant la source de $\gamma \circ \beta$ par son noyau, et donc $\tilde{\beta}^*$ est surjective.

Soit $r_s \in F(V)$ vérifiant les conditions de 2 dans le lemme 5.1.6. Alors, comme par hypothèse $\ker(r_s) = \ker(s)$, il existe $t_s \in F(V/\ker(s))$ régulier et tel que $\gamma^* t_s = r_s$ et donc tel que $\gamma^*(q(t_s)) = s$, alors $q(t_s)$ est également régulier. Par soucis de clarté, représentons tous ces éléments dans un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
t_s \in F(V/\ker(s)) \arrow[r, "\gamma^*"] \arrow[d, "q_{V/\ker(s)}"] & F(V) \ni r_s \arrow[d, "q_V"] \\
q(t_s) \in H(V/\ker(s)) \arrow[r, "\gamma^*"] & H(V) \ni s.
\end{tikzcd}$$

Le noyau de $\beta^* s$ contient $\beta^{-1}\ker(s)$ et, toujours d'après le lemme 5.1.6, il existe $h \in F(U/\ker(\beta^* s))$ régulier, tel que $q\left((\sigma^* \circ \rho^*)(h)\right) = \beta^* s$. Comme

$$\sigma^* : H(U/\beta^{-1}(\ker(s))) \to H(U)$$

est injective, puisque σ est surjective, $q(\tilde{\beta}^* t_s) = q(\rho^* h) \in F(U/\beta^{-1}(\ker(s)))$.

En appliquant l'hypothèse à $\tilde{\beta} : U/\beta^{-1}(\ker(s)) \to V/\ker(s)$ et $q(t_s) \in H(V/\ker(s))$ et en utilisant que $\tilde{\beta}^*$ est surjectif, on obtient $q^{-1}(\{\tilde{\beta}^*(q(t_s))\}) = \tilde{\beta}^*(q^{-1}(\{q(t_s)\})) \subset F(U/\beta^{-1}(\ker(s)))$. Comme $\rho^* h \in q^{-1}(\{\tilde{\beta}^*(q(t_s))\})$, il existe $l \in F(V/\ker(s))$ tel que $q(l) = q(t_s)$ et $\tilde{\beta}^* l = \rho^* h$. Alors, $q(t_s) = q(l)$ est régulier et donc l est régulier (d'après le 1 dans le lemme 5.1.6). Comme F est noethérien, $\ker(\rho^* h) = \ker(\tilde{\beta}^* l) = \tilde{\beta}^{-1}(\ker(l)) = 0$. Or, comme h est régulier, $\ker(\rho^* h) = \ker(\beta^* s)/\beta^{-1}(\ker(s))$, donc $\ker(\beta^* s) = \beta^{-1}\ker(s)$.

□

Corollaire 5.1.8. *Soit $G \in \mathcal{G}rp^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et $F \in G - \mathcal{S}et$ noethérien. Alors, le foncteur F/G est noethérien.*

Démonstration. On note q la projection naturelle de F sur F/G. On va montrer que q vérifie l'hypothèse de la proposition 5.1.7. Soit $x \in F/G(V)$, et soit $\beta : U \to V$ un morphisme d'espaces vectoriels. On a vu dans la remarque 5.1.5 que $\beta^* q^{-1}(\{x\}) \subset q^{-1}(\{\beta^* x\}) \cap \beta^*(F(V))$. Nous devons justifier que cette inclusion est une égalité.
Soit $\phi \in F(V)$ tel que $q(\phi) = x$, par définition $q^{-1}(\{x\}) = \{g \cdot \phi | g \in G(V)\}$, soit alors $\psi \in F(V)$ tel que $\beta^*\psi$ appartienne à $q^{-1}(\{\beta^* x\})$, alors il existe $\gamma \in G(U)$ tel que $\beta^*\psi = \gamma \cdot \beta^*\phi$. Notons ι et π, respectivement une section de $U/\ker(\beta)$ dans U et la projection de U sur $U/\ker(\beta)$. Alors, comme $\beta = \beta \circ \iota \circ \pi$, on a $\beta^*\psi = \pi^* \circ \iota^*(\beta^*\psi) = (\pi^* \circ \iota^*)(\gamma) \cdot (\pi^* \circ \iota^*)(\beta^*\phi) = (\pi^* \circ \iota^*)(\gamma) \cdot \beta^*\phi$. Mais, $\ker(\beta) = \ker(\iota \circ \pi)$ donc $(\pi^* \circ \iota^*)(\gamma) = \beta^* g$ pour un certain $g \in G(V)$. Alors, $\beta^*(g \cdot \phi) = \beta^*\psi$, avec $g \cdot \phi \in q^{-1}(\{x\})$ donc $\beta^*\psi \in \beta^* q^{-1}(\{x\})$. Ce qui conclût la preuve.

□

5.2 Dimension de Krull d'un foncteur

Étant donné $Q \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ et $G \in \mathcal{G}\mathrm{rp}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ noethériens, on aimerait ramener la classification des foncteurs $F \in G - \mathcal{S}et$ noethériens et tels que $F/G \cong Q$, à un problème de classification d'ensembles munis d'actions de $G(W)$ et $\mathrm{End}(W)$ compatibles entre elles, dont le quotient par $G(W)$ est $Q(W)$ pour W un espace-vectoriel de dimension assez grande. Cela se fait en introduisant la dimension de Krull d'un foncteur.

Proposition 5.2.1. *[Hea21, Proposition 2.6] Soit K une algèbre instable noethérienne et soit d sa dimension de Krull. Alors $d = max\{dim(E) \mid \exists f : K \to H^*(E)$ tel que $(E, f) \in \mathcal{R}(K)\}$.*

Corollaire 5.2.2. *Pour tout foncteur noethérien F, il existe un entier d tel que $dim(E) > d$ implique $regF(E) = \emptyset$.*

Définition 5.2.3.
1. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, on appelle dimension de Krull de F le plus petit $d \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que pour tout espace vectoriel E de dimension finie strictement plus grande que d, $\mathrm{reg}F(E) = \emptyset$. On notera d_F la dimension de Krull de F.
2. Soit $\mathcal{S}\mathrm{et}_d^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ dont les objets sont les foncteurs de dimension de Krull inférieure ou égale à d.

Ce qui suit est inspiré de la partie II-2 de [HLS93].

Définition 5.2.4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$, S un ensemble muni d'une action à droite de $\mathrm{End}(E)$ et T un ensemble muni d'une action à gauche de $\mathrm{End}(E)$. On définit $S \times_{\mathrm{End}(E)} T$ comme le co-égalisateur de deux morphismes de $S \times \mathrm{End}(E) \times T$ dans $S \times T$ qui envoient (s, α, t) respectivement sur $(s \cdot \alpha, t)$ et $(s, \alpha \cdot t)$.

Proposition 5.2.5. *[HLS93, Théorème 2.7]*

1. *Soient F un foncteur de dimension de Krull finie, et E un espace vectoriel de dimension finie tel que $d_F \leq \dim(E)$. Alors il existe un isomorphisme naturel de $F(E) \times_{End(E)} Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ dans F.*
2. *En conséquence, le foncteur qui à un ensemble D muni d'une action de $End(E)$ associe $D \times_{End(E)} Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ défini une équivalence de catégorie entre la catégorie des $End(E)$-ensembles et la catégorie $\mathcal{S}et_d^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$, dont l'inverse est l'évaluation en E.*

Remarque 5.2.6. L'isomorphisme est donné par la transformation naturelle de $F(E) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ dans F qui à (f, γ) associe $\gamma^* f$ qui ne dépend pas du choix de (f, γ) dans sa classe de $F(E) \times_{\mathrm{End}(E)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$.

Remarque 5.2.7. $F(E) \times_{\mathrm{End}(E)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ est l'extension de Kan à gauche du foncteur évaluation, qui à un foncteur in $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ associe $F(E)$ muni de l'action de $\mathrm{End}(E)$.

Lemme 5.2.8. *Soient $Q \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$, $G \in \mathcal{G}rp^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethériens et $F \in G{-}\mathcal{S}et$ tel que $F/G \cong Q$. Alors pour tout espace vectoriel E, $dim(E) > d_G + d_Q$ implique $regF(E) = \emptyset$.*

Démonstration. d_G et d_Q sont les dimensions maximales pour lesquelles G et Q possèdent des éléments réguliers, et qui existent d'après le corollaire 5.2.2. Soit $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ muni d'une G-action tel que $F/G \cong Q$. On considère E un espace vectoriel de dimension strictement plus grande que $d_G + d_Q$.
Soit alors $f \in F(E)$. On considère $\overline{f}$ la classe de f dans F/G. Alors, d'après le lemme 5.1.6, il existe $r_f \in \overline{f}$ tel que $\ker(r_f) = \ker(\overline{f})$. Soit $g \in G(E)$, tel que $f = g \cdot r_f$. Alors, $\dim(\ker(r_f)) \geq \dim(E) - d_Q$, en effet $\dim(\ker(r_f)) = \dim(\ker(\overline{f}))$ et $\overline{f} = \pi^*(\overline{t}))$ avec π la projection de E sur $E/\ker(\overline{f})$ et $\overline{t} \in F/G(E/\ker(\overline{f}))$ régulier, donc par hypothèse $\dim(E/\ker(\overline{f})) \leq d_Q$.
De même, $\dim(\ker(g)) \geq \dim(E) - d_G$. On a alors, $\dim(\ker(r_f) + \ker(g)) = \dim(\ker(r_f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(r_f) \cap \ker(g)) \leq \dim(E)$. Or, $\dim(\ker(r_f)) + \dim(\ker(g)) \geq 2\dim(E) - d_G - d_Q > \dim(E)$. Donc $\ker(r_f) \cap \ker(g) \neq 0$. Mais alors, il existe $\tilde{g} \in G(E/\ker(r_f) \cap \ker(g))$ et $\widetilde{r_f} \in F(E/\ker(r_f) \cap \ker(g))$ tels que $\pi^*\tilde{g} = g$ et $\pi^*\widetilde{r_f} = r_f$, où π dénote la projection de E sur $E/\ker(r_f) \cap \ker(g)$, et donc $f = \pi^*(\tilde{g} \cdot \widetilde{r_f})$, ce qui implique que f n'est pas régulier. □

Le produit semi-direct $G(V) \rtimes \mathrm{End}(V)$ est un monoïde dont les éléments sont ceux de $G(V) \rtimes \mathrm{End}(V)$ et dont le produit est défini par $(g, \phi) \cdot (\gamma, \psi) = (g \cdot \phi^* \gamma, \psi \circ \phi)$, l'action de $G(V) \rtimes \mathrm{End}(V)$ sur $F(V)$ est alors définie par $(g, \phi) \cdot f = g \cdot \phi^* f$ pour $g \in G(V)$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ et $f \in F(V)$.

Proposition 5.2.9. *Soient $G \in \mathcal{G}rp^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et $F \in G{-}\mathcal{S}et$ noethériens. Soit V un espace vectoriel, alors on a une action du monoïde $G(V) \rtimes End(V)$ sur $F(V)$, où le produit semi-direct est celui induit par l'action de $End(V)$ sur $G(V)$ qui est celle induite par la fonctorialité de G et où $(g, \rho) \in G(V) \rtimes End(V)$ associe à $\phi \in F(V)$ $g \cdot \rho^* \phi$.*

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 5.2.5.

Corollaire 5.2.10. *Soient $Q \in \mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et $G \in \mathcal{G}rp^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ noethériens. Soit A et B deux foncteurs noethériens dans $G-\mathcal{S}et$ tels que $A/G \cong B/G \cong Q$. Soit E de dimension $2d_G + d_Q$ où d_G et d_Q sont les dimensions de Krull de G et Q. Alors A et B sont isomorphes dans $G - \mathcal{S}et$ si et seulement si il existe un isomorphisme $G(E) \rtimes End(E)$ équivariant entre $A(E)$ et $B(E)$.*

Démonstration. En effet, d'après le lemme 5.2.8 et la proposition 5.2.5, on a $A \cong A(E) \times_{\mathrm{End}(E)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ et $B \cong B(E) \times_{\mathrm{End}(E)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, E)$ ainsi, un isomorphisme ϵ_E $\mathrm{End}(E)$-équivariant entre $A(E)$ et $B(E)$ induit un isomorphisme naturel ϵ entre A et B dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$. Si on impose la condition $\dim(E) = 2d_G + d_Q$ plutôt que $d_G + d_Q$ c'est pour justifier la G-équivariance de l'isomorphisme ainsi obtenu. En appliquant le lemme 5.2.8 à A plutôt que Q, on constate que le foncteur $G \times A$ n'a pas d'éléments réguliers en dimension plus grande que $\dim(E)$. En conséquence, pour $(g, f) \in G(V) \times A(V)$, il existe $\alpha : V \to E$, $\gamma \in G(E)$ et $\phi \in F(E)$ tels que $\alpha^*\gamma = g$ et $\alpha^*\phi = f$, alors en utilisant la $G(E) \rtimes \mathrm{End}(E)$ équivariance de ϵ_E, $\epsilon(g \cdot f) = \alpha^*\gamma \cdot \alpha^*\epsilon(\phi) = g \cdot \epsilon(f)$. Ce qui conclût la preuve. □

Remarque 5.2.11. Le résultat précédent induit une correspondance entre les foncteurs noethériens dans $G-\mathcal{S}$et dont le quotient par G est Q et les ensembles sur lesquels agit $G(E) \rtimes \mathrm{End}(E)$ et dont le quotient par $G(E)$ est $Q(E)$.

5.3 Cas des algèbres intègres

On en vient donc à notre question, si on se fixe $P \in \mathcal{K}$ noethérienne, connexe et nil-fermée, comment classifier loin des nilpotents les $H^*(V)$-comodules dans $\mathcal{K}$ noethériens, connexes dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à P, pour $V \in \mathcal{V}^f$. De manière équivalente, si on se fixe $Q \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ noethérien, connexe, comment classifier les objets de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ noethériens, connexes dont le quotient par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est isomorphe à Q. Nous allons voir que si on se restreint au cas des algèbres connexes, la question se simplifie en utilisant le théorème d'Adams-Wilkerson.

Commençons par rappeler la construction de l'action de groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ sur F associé à γ un élément central de $F(V)$ (confère la proposition 4.2.3). On définit le morphisme naturel μ, de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times F$ dans F par $\mu(\alpha, f) = \Delta_W^* \circ (\alpha \oplus \mathrm{id}_W)^*(\gamma * f)$ où $\gamma * f$ est l'unique élément de $F(V \oplus W)$ tel que $(\iota_V^{V\oplus W})^*(\gamma * f) = \gamma$ et $(\iota_W^{V\oplus W})^*(\gamma * f) = f$.

Dans ce qui suit, on se restreint à des algèbres intègres. Ce qui nous permet d'utiliser le théorème d'Adams-Wilkerson, démontré à l'origine dans [AW80].

Théorème 5.3.1. *[HLS93, Théorème 3] Soit K une algèbre instable intègre de degré de transcendance inférieur ou égal à $\dim(V)$, alors il existe une injection ϕ de K dans $H^*(V)$.*

Remarque 5.3.2. Si le degré de transcendance de K est exactement d, alors cette injection est régulière.

Corollaire 5.3.3. *Soit K une algèbre instable intègre de degré de transcendance d, soit V_d de dimension d et ϕ un plongement de K dans $H^*(V_d)$. Alors $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ se surjecte sur $Hom_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$, par le morphisme de Yoneda qui envoie $\alpha \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ sur $\alpha^*\phi$. De plus, cette surjection se factorise à travers $Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)/Gal(\phi)$ où $Gal(\phi)$ dénote le sous groupe de $Aut(V_d)$ des stabilisateurs de ϕ.*

Ainsi, se restreindre à l'étude d'algèbres intègres revient, du point de vue des foncteurs, à se restreindre à des foncteurs F tels qu'il existe $\phi_F \in F(V_d)$ régulier et tel que le morphisme de Yoneda de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ dans F qui envoie id_{V_d} sur ϕ_F soit une surjection.

Dans ce contexte, si $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ dont le quotient par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est Q, $\phi_Q := q(\phi_F) \in Q(V_d)$ est tel que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ se surjecte sur Q par $\alpha \mapsto \alpha^*\phi_Q$. On notera que ϕ_Q n'est pas nécessairement régulier.

5.3.1 Centralité et structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$

Pour $F \in \mathcal{F}\mathrm{in}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, tel qu'il existe $V_d \in \mathcal{V}^f$ et $\phi_F \in F(V_d)$ tels que le morphisme de Yoneda associé à ϕ_F, de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ dans F, soit surjectif, il est plus facile de caractériser les éléments centraux de $F(V)$ et d'expliciter la structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ qui leur est associée. Nous montrerons également, comment dans ce contexte le quotient de F par l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est caractérisé par l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}\times\phi_F"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\phi_F"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d/\mathrm{Im}(\delta)) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "q"] & Q,
\end{tikzcd}$$

dans lequel le carré de droite est une somme amalgamée.

Lemme 5.3.4. *Soit $(\delta, \beta) \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V, V_d) \times Hom_{\mathbb{F}_2}(H, V_d)$ avec V et H deux espaces vectoriels, soit F un foncteur dans $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ et soit $\phi_F \in F(V_d)$. Alors pour $\nabla : V_d \oplus V_d \to V_d$ qui envoie $x \oplus y$ sur $x + y$, $(\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)$ est un antécédent de $\beta^*\phi_F$ dans $\Sigma_{(V, \delta^*\phi_F)}F(H)$.*

Démonstration. En effet, pour $\iota_V^{V\oplus H}$ et $\iota_H^{V\oplus H}$ les injections respectives de V et H dans $V \oplus H$, $\nabla \circ (\delta \oplus \beta) \circ \iota_V^{V\oplus H} = \delta$ et $\nabla \circ (\delta \oplus \beta) \circ \iota_H^{V\oplus H} = \beta$, donc $(\iota_V^{V\oplus H})^*((\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)) = \delta^*\phi_F$ et $(\iota_H^{V\oplus H})^*((\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)) = \beta^*\phi_F$. ☐

On en déduit directement la proposition suivante :

Proposition 5.3.5. *1. Soit F un foncteur connexe de dimension de Krull d, et soit $\phi_F \in F(V_d)$ tel que le morphisme naturel de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ qui envoie l'identité sur ϕ_F soit surjectif. Soient $\delta \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V, V_d)$ et H un espace vectoriel de dimension finie, l'application naturelle $(\iota_V^{V\oplus H})^* \ : \ \Sigma_{(V,\delta^*\phi_F)}F(H) \to F(H)$ est toujours surjective, et $\delta^*\phi_F$ est central si et seulement si pour tout $\beta \in Hom_{\mathbb{F}_2}(H, V_d)$, $(\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)$ est le seul antécédent de $\beta^*\phi_F$ par cette application.*

2. Si $\delta^*\phi_F$ est central, l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ sur F adjointe à l'isomorphisme de F dans $\Sigma_{(V,\delta^*\phi_F)}F$ vérifie que pour tout $g \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ et pour tout $\beta \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$,

$$g \cdot \beta^*\phi_F = (\delta \circ g + \beta)^*\phi_F.$$

Démonstration. Par construction, tout élément de $F(H)$ est de la forme $\beta^*\phi_F$ avec $\beta \ : \ H \to V_d$, alors d'après le lemme 5.3.4, tout élément $\beta^*(\phi_F) \in F(H)$ a au moins un antécédent par

$$\rho_{F,(V,\delta^*\phi_F)} = (\iota_V^{V\oplus H})^* \ : \ \Sigma_{(V,\delta^*\phi_F)}F(H) \to F(H),$$

à savoir $(\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)$. Alors, $\delta^*\phi_F$ est central si et seulement si $\rho_{F,(V,\delta^*\phi_F)}$ est un isomorphisme, c'est à dire si $(\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F)$ est le seul antécédent de $\beta^*\phi_F$.

De plus, si $\delta^*\phi_F$ est central, par définition la structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ sur F associée à $\delta^*\phi_F$ est donnée par

$$\mu \ : \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times F \to F,$$

définie par $\mu(g, \beta^*\phi_F) := \Delta_V^* \circ (g \oplus \mathrm{id}_W)^*(\delta^*\phi_F * \beta^*\phi_F)$, pour $\delta^*\phi_F * \beta^*\phi_F$ l'unique antécédent de $\beta^*\phi_F$, par $\rho_{F,(V,\delta^*\phi_F)}$. Donc

$$\begin{aligned} \delta^*\phi_F * \beta^*\phi_F &= (\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F), \\ \mu(g, \beta^*\phi_F) &= \Delta_W^* \circ (g \oplus \mathrm{id}_W)^* \circ (\delta \oplus \beta)^* \circ \nabla^*(\phi_F), \end{aligned}$$

et donc,

$$g \cdot \beta^*\phi_F = (\delta \circ g + \beta)^*(\phi_F).$$

□

On rappelle que $\epsilon_{F,V}$, pour $F \in \mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$ connexe et $V \in \mathcal{V}^f$, est défini dans la définition 3.4.55.

Proposition 5.3.6. *Soit F un $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ connexe, de dimension de Krull d, dont le quotient par $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est isomorphe à Q. Soient également V_d de dimension d et $\phi_F \in F(V_d)$ tel que le morphisme de Yoneda envoyant l'identité de V_d sur ϕ_F soit surjectif. Soit $\delta \in Hom_{\mathbb{F}_2}(V, V_d)$ tel que $id_V \cdot \epsilon_{(F,V)} = \delta^*\phi_F$. On a un diagramme commutatif dans lequel le carré de droite est une somme amalgamée :*

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times Hom_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "id\times\phi_F"] & Hom_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\phi_F"] & Hom_{\mathbb{F}_2}(_, V_d/Im(\delta)) \arrow[d, two heads] \\
Hom_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "q"] & Q,
\end{tikzcd}$$

où la flèche de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ dans $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ est donnée par l'action de groupe naturelle de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ sur $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ qui envoie $(\phi, \psi) \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V) \times Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ sur $\delta \circ \phi + \psi$. $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/Im(\delta))$ est le quotient de cette action.

Démonstration. En effet, d'après le théorème 4.2.5, la structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ de F provient d'un élément central $\delta^*\phi_F$ tel que $\mathrm{id}_V \cdot \epsilon_{(F,V)} = \delta^*\phi_F$. Alors, d'après le corollaire 5.3.5, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F,
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne est donnée par l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ définie par $g \cdot \beta = \beta + \delta \circ g$, pour $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ et pour $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$, où $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V, V_d)$ est tel que pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ $g \cdot \epsilon_{(F,W)} = g^*\delta^*\phi$.

Pour conclure sur l'existence de ce diagramme commutatif, il nous suffit d'identifier le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ sous cette action. Or, on a l'isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d \oplus V)$. L'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est donc induite par le morphisme $\delta + Id$, de $V_d \oplus V$ dans V_d. Alors, $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ est dans la même classe que β si et seulement si, il existe $g : W \to V$ tel que $\alpha = \beta + \delta \circ g$, c'est à dire si et seulement si les compositions de α et β avec la projection de V_d sur $V_d/\mathrm{Im}(\delta)$ sont égales. En conclusion, le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ par l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/\mathrm{Im}(\delta))$.

Enfin, $\alpha^*\phi_F \in F(W)$ et $\beta^*\phi_F \in F(W)$ s'envoient sur la même classe $\alpha^*\phi_Q = \beta^*\phi_Q$ dans $Q(W)$, si et seulement si il existe un morphisme $g : W \to V$, tel que $\alpha^*\phi_F = (\delta \circ g + \beta)^*\phi_F$, c'est à dire si il existe $\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ tel que $\alpha^*\phi_F = \alpha'^*\phi_F$ et tel que la classe de α' dans

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/\mathrm{Im}(\delta))$ est égale à celle de β. En conséquence, le morphisme

$$F \sqcup_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/\mathrm{Im}(\delta)) \to Q,$$

induit par propriété universelle de la somme amalgamée est injectif, il est aussi surjectif car la projection $F \to Q$ est surjective. Le carré de droite est donc bien une somme amalgamée. $\square$

Remarque 5.3.7. Si δ n'est pas injectif, l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$, peut être obtenue à partir d'une action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, \mathrm{Im}(\delta))$ et par la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, \mathrm{Im}(\delta)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d).$$

On peut donc supposer que l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est induite par une injection δ de V dans V_d, alors on a $d = \dim(V) \oplus \dim(V_d/V)$, où on a identifié V à son image par δ.

Dans ce cas, puisque $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ se surjecte sur Q, par le morphisme de Yoneda qui envoie α sur $\alpha^*\phi_Q$, $\ker(\phi_Q) \supset V$, mais si cette inclusion était stricte, par le lemme 5.2.8 ϕ_F ne serait pas régulier, donc $\ker(\phi_Q) = V$.

Faisons le lien entre la proposition 5.3.6, et ce qui se passe dans la catégorie $\mathcal{K}$, pour un algèbre instable noethérienne, nil-fermée, connexe et intègre.

Théorème 5.3.8. *Soit K une algèbre instable connexe, intègre, de degré de transcendance d, nil-fermée et munie d'une structure de comodule $K \to K \otimes H^*(V)$ pour V un sous-espace vectoriel de V_d. Soit $\phi : K \to H^*(V_d)$ un plongement. Alors, la sous-algèbre P des primitifs de K pour cette structure de comodule, est l'intersection de K avec $H^*(V_d/V)$ où on a identifié $H^*(V_d/V)$ à son image dans $H^*(V_d)$ par le morphisme induit par la projection de V_d sur V_d/V.*

Démonstration. En effet, d'après la proposition 5.3.6, si on note $F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et $Q := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(P, H^*(\_))$, les foncteurs F et Q s'insèrent dans le diagramme commutatif, dont le carré de droite est une somme amalgamée :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d/V) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "q"] & Q.
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est obtenu en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\_, H^*(\_))$ au diagramme commutatif suivant, dans la catégorie des algèbres instables :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \otimes H^*(V) \arrow[d, hook] \\
H^*(V_d/V) \arrow[r, hook] & H^*(V_d) \arrow[r] & H^*(V_d) \otimes H^*(V),
\end{tikzcd}$$

où le morphisme de $H^*(V_d)$ dans $H^*(V_d) \otimes H^*(V)$, induit par le morphisme de $V_d \oplus V$ dans V_d, $\delta + \mathrm{id}$, donne à $H^*(V_d)$ une structure de $H^*(V)$-comodule dont les primitifs sont précisément $H^*(V_d/V)$. Alors, un élément de K est primitif si et seulement si il est primitif dans $H^*(V_d)$. Donc la sous-algèbre P des éléments primitifs de K, est l'intersection de K avec $H^*(V_d/V)$.

□

Remarque 5.3.9. On a utilisé dans la démonstration du théorème 5.3.8 le fait que toute structure de $H^*(V)$-comodule sur une algèbre instable connexe, intègre, de degré de transcendance d, nil-fermée K est induite par un morphisme $\delta + \mathrm{id} \ : \ V_d \oplus V \to V_d$, via une inclusion de K dans $H^*(V_d)$.
Réciproquement, pour qu'un tel morphisme induise une structure de $H^*(V)$-comodule sur K, il faut que l'image de K dans $H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ par $(\delta + \mathrm{id})^*$, où on a identifiée K avec son image par un plongement d'Adams-Wilkerson dans $H^*(V_d)$, soit incluse dans $K \otimes H^*(V)$.

De même, dans la catégorie des foncteurs :

Lemme 5.3.10. *Pour un foncteur F connexe et engendré par une classe unique $\phi_F \in F(V_d)$, un morphisme $\delta + id \ : \ V_d \oplus V \to V_d$ induit une action de groupe de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ sur F si et seulement si, pour tout $g \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ et pour tout α et β de $W \to V_d$, $\alpha^*\phi_F = \beta^*\phi_F$ implique que $(\delta \circ g + \alpha)^*\phi_F = (\delta \circ g + \beta)^*\phi_F$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 5.3.6. □

5.3.2 Comparaison avec les algèbres d'invariants

Pour F noethérien connexe de degré de transcendance d muni d'une surjection, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \overset{\phi_F}{\twoheadrightarrow} F$, cette surjection se factorise à travers une surjection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F) \twoheadrightarrow F,$$

où $\mathrm{Gal}(\phi_F)$ est l'ensemble des morphismes $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_d)$, tels que $\alpha^*\phi_F = \phi_F$. Ça correspond au fait que, dans la catégorie $\mathcal{K}$, pour K une algèbre instable connexe, noethérienne, *nil*-fermée et intègre, de degré de transcendance d et munie d'un plongement d'Adams-Wilkerson $K \hookrightarrow H^*(V_d)$, alors l'image de ϕ est incluse dans $H^*(V_d)^{\mathrm{Gal}(\phi)}$. Le second théorème d'Adams-Wilkerson donne une condition suffisante pour que cette injection soit un isomorphisme.

Théorème 5.3.11. *[HLS93, Théorème 6.4] Soit K une algèbre instable de degré de transcendance d qui est :*

1. *noethérienne,*
2. *intègre,*
3. *intégralement close dans son corps de fractions,*
4. *nil-fermée.*

Alors, pour $\phi : K \to H^*(V_d)$ un plongement d'Adams-Wilkerson, K est isomorphe à $H^*(V_d)^{Gal(\phi)}$.

On rappelle que pour $A \hookrightarrow B$ une extension d'anneaux, A est intégralement clos dans B si, quelque soit $x \in B$ tel qu'il existe P un polynôme unitaire à coefficient dans A tel que $P(x) = 0$, x appartient à A.

Dans cette section, nous allons nous intéresser au centre des foncteurs de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$, pour G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V_d)$. Et par ailleurs, pour F un foncteur noethérien, connexe, muni d'une surjection $\phi_F : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \twoheadrightarrow F$ nous allons mettre en relation deux questions, celle de la comparaison entre F et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F)$ et celle de l'existence d'une structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ sur F dont le quotient est un foncteur Q fixé, avec V un sous-espace vectoriel de V_d.

Intéressons nous aux sous-groupes de $\mathrm{Aut}(V_d)$, $\mathrm{Gal}(\phi_F)$ et $\mathrm{Gal}(\phi_Q)$. On rappelle que ϕ_Q a été défini comme l'image de ϕ_F par la surjection de $F(V_d)$ dans $Q(V_d)$, ϕ_Q n'est donc en général pas régulier.

Proposition 5.3.12. *On suppose ici que V est un sous-espace vectoriel de V_d. Le sous-groupe $Gal(\phi_Q)$ de $Aut(V_d)$ est le sous-groupe engendré par $Gal(\phi_F)$ et le sous-groupe des automorphismes α, tels que $Im(\alpha - id_{V_d}) \subset V$.*

Démonstration. Soit S un supplémentaire de V dans V_d. $\mathrm{Gal}(\phi_Q)$ contient $\mathrm{Gal}(\phi_F)$; en effet, pour $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_d)$ $\alpha^*\phi_Q = q(\alpha^*\phi_F)$ donc $\alpha^*\phi_F = \phi_F$ implique $\alpha^*\phi_Q = \phi_Q$. Par ailleurs, $\ker(\phi_Q) = V$. En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ se surjecte sur Q par la transformation naturelle qui envoie la projection canonique de V_d sur V_d/V sur ϕ_Q. Le noyau de ϕ_Q contient donc nécessairement V. Et réciproquement, comme les autres éléments de $F(V_d)$ qui s'envoient sur ϕ_Q sont de la forme $(\delta \circ g + \mathrm{id}_{V_d})^*\phi_F$, dont les noyaux sont inclus dans V par noethérianité de F, par le lemme 5.1.6, $V \subset \ker(\phi_Q)$.
Il existe donc $t \in Q(V_d/V)$ tel que $\phi_Q = p^*t$ pour p la projection de V_d sur V_d/V. Dans ce cas, pour $\alpha : V_d \to V_d$ qui envoie les éléments de V dans V et dont la restriction à S est de la forme $s \mapsto s + \tilde{\alpha}(s)$ avec $\tilde{\alpha}$ un endomorphisme de V_d dont l'image est compris dans V, $p \circ \alpha = p$ donc

$\alpha^* p^* t = p^* t$ et donc ϕ_Q est stable par α.

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_d)$ tel que $\alpha^*\phi_Q = \phi_Q$, alors, par définition de ϕ_Q, il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V)$ tel que $\alpha^*\phi_F = g \cdot \phi_F$, par définition $g \cdot \phi_F = \Delta^* \circ (g \oplus \mathrm{id}_{V_d})^*(\delta^*\phi_F * \phi_F)$ où $\delta^*\phi_F * \phi_F$ est l'unique élément de $\Sigma_{(V,\delta^*\phi_F)} F(V_d)$ qui s'envoie sur ϕ_F par le morphisme de $F(V_d \oplus V_d)$ dans $F(V_d)$ associé à l'injection de V_d dans la seconde composante de $V_d \oplus V_d$. Alors, d'après le lemme 5.3.4 $g \cdot \phi_F = (\nabla \circ (\delta \circ g \oplus \mathrm{id}) \circ \Delta)^*\phi_F = (\delta \circ g + \mathrm{id})^*\phi_F$. Ainsi, $\alpha^*\phi_F = (\delta \circ g + \mathrm{id})^*\phi_F$ et donc, il existe $\beta \in \mathrm{Gal}(\phi_F)$ tel que $\alpha = \beta \circ (\delta \circ g + id)$. En effet, puisque $\alpha^*\phi_F = (\delta \circ g + id)^*\phi_F$ et que F est noethérien, α inversible, implique que $\delta \circ g + id$ est injectif et donc inversible, et on peut prendre $\beta = \alpha \circ (\delta \circ g + id)^{-1}$. Cela conclût la preuve. $\square$

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V_d)$, on notera $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$ le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ sous l'action de G par composition.

Lemme 5.3.13. *Soit V un sous-espace vectoriel de V_d et δ l'injection de V dans V_d. Alors, le morphisme $(\delta + id)^*$ de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ dans $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ induit une structure de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ sur $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$ si et seulement si pour tout $v \in V$ et pour tout $g \in G$, $gv = v$.*

Démonstration. En effet, la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G,$$

passe au quotient en un morphisme de la forme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G,$$

si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$, avec W un espace vectoriel, pour tout $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ et pour tout $g \in G$, il existe $g' \in G$ tel que $\delta \circ \alpha + g \circ \beta = g' \circ (\delta \circ \alpha + \beta)$. En particulier, pour tout $g \in G$, il doit exister $g' \in G$ tel que $g' \circ (\delta + \delta) = \delta + g \circ \delta$. Alors, nécessairement, $\delta + g \circ \delta = 0$ et donc V est invariant sous l'action de G.

Réciproquement, si pour tout $v \in V$ et pour tout $g \in G$, $gv = v$, alors pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$, pour tout $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ et pour tout $g \in G$, $g \circ (\delta \circ \alpha + \beta) = \delta \circ \alpha + g \circ \beta$. $\square$

Soit F un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, engendré par un élément $\phi_F \in F(V_d)$. Nous allons montrer que F est muni d'une structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) - \mathcal{S}$et (où V est un sous-espace vectoriel de V_d fixé, dont le quotient est $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$, avec $\dim(V_d/V) = 1$) si et seulement si F est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F)$ où $\mathrm{Gal}(\phi_F)$ vérifie que quelque soit $g \in \mathrm{Gal}(\phi_F)$, $g|_V$ est l'identité et pour π la projection de V_d sur V_d/V, $\pi \circ g = \pi$. Ce résultat ne sera pas vrai pour $\dim(V_d/V) > 1$ et nous en donnerons un contre-exemple.

Lemme 5.3.14. *Soit G un sous-groupe de $Aut(V_d)$ tel que pour tout $v \in V$ et pour tout $g \in G$, $gv = v$. Supposons qu'il vérifie de plus que $\pi \circ g = \pi$ pour tout $g \in G$, où π désigne la projection de V_d sur V_d/V. Alors, le quotient de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$ sous l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ induite par l'injection δ de V dans V_d est isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$.*

Démonstration. Par la proposition 5.3.6, on sait que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ se surjecte naturellement sur le quotient $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$. Cette surjection est un isomorphisme naturel si et seulement si $\overline{\alpha}^G = \overline{\beta}^G$ implique que $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$ pour $\overline{\alpha^G}$ et $\overline{\beta}^G$, les classes respectives de α et β dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ sous l'action de G par composition. Or, $\overline{\alpha}^G = \overline{\beta}^G$ si il existe $g \in G$ tel que $g \circ \alpha = \beta$, mais alors par hypothèse $\pi \circ \beta = \pi \circ g \circ \alpha = \pi \circ \alpha$. $\square$

Proposition 5.3.15. *Soit F un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, engendré par une classe $\phi_F \in F(V_d)$. Supposons que F soit muni d'une structure de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)-\mathcal{S}et$ dont le quotient soit isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ par la surjection naturelle introduite dans la proposition 5.3.6. Alors, pour tout $g \in Gal(\phi_F)$, $\pi \circ g = \pi$, où π dénote la projection de V_d sur V_d/V et pour tout $v \in V$, $g(v) = v$.*

Démonstration. La preuve du fait que pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\phi)$, $\pi \circ g = \pi$ est la même que celle du lemme 5.3.14. Justifions que pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\phi)$, et $v \in V$, $gv = v$. En effet, comme $(g \circ \delta)^*\phi = \delta^*(g^*\phi_F) = \delta^*\phi_F$, d'après le lemme 5.3.10, $(\delta + g \circ \delta)^*\phi_F = (\delta + \delta)^*\phi_F$. Donc, $(\delta + g \circ \delta)^*\phi_F = \epsilon_{(F,V)}$, puisqu'on a supposé F connexe. Mais, alors puisque F est noethérien, on en déduit que $\ker(\delta + g \circ \delta) = V$ tout entier. Alors, pour tout $v \in V$, $\delta(v) + g \circ \delta(v) = v + g(v) = 0$ et donc g laisse V invariant. $\square$

Théorème 5.3.16. *Soit $F \in Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)-\mathcal{S}et$ un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, engendré par une unique classe régulière $\phi_F \in F(V_d)$, dont l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est donnée par $\alpha \cdot \beta^*\phi_F = (\delta \circ \alpha + \beta)^*\phi_F$, avec δ l'injection de V dans V_d. Supposons de plus que le quotient de F sous l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ soit isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ par la surjection introduite dans la proposition 5.3.6, avec* $\dim(V_d/V) = 1$. *Alors F est naturellement isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/Gal(\phi_F)$.*

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d/V) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F \arrow[r, "q"] & Q,
\end{tikzcd}$$

dont l'existence est garantie par la proposition 5.3.6, passe au quotient en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V_d/V) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, V) \times F \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "q"] & Q.
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, toutes les flèches verticales sont des surjections naturelles. En utilisant la proposition 5.2.5, il nous suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi_F) \to F(V_d)$ est un isomorphisme de $\mathrm{End}(V_d)$-ensemble, c'est à dire que, pour α et β deux élément de $\mathrm{End}(V_d)$, $\alpha^*\phi_F = \beta^*\phi_F$ si et seulement si $\overline{\alpha}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)} = \overline{\beta}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)}$.

Commençons d'abord par considérer ψ et ξ des morphismes de V_d dans V, tels que $(\delta \circ \psi)^*\phi_F = (\delta \circ \xi)^*(\phi_F)$. Alors, pour ι_1 et ι_2 les injections de V_d dans les premiers et seconds facteurs de $V_d \oplus V_d$ et pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V_d)$, on a $\iota_1^*(\delta \circ \psi \oplus \alpha)^*\nabla^*\phi_F = (\delta \circ \psi)^*\phi_F = \iota_1^*(\delta \circ \xi \oplus \alpha)^*\nabla^*\phi_F$ et $\iota_2^*(\delta \circ \psi + \alpha)^*\nabla^*\phi_F = \alpha^*\phi_F = \iota_2^*(\delta \circ \xi + \alpha)^*\nabla^*\phi_F$. Alors, $(\delta \circ \psi \oplus \alpha)^*\nabla^*\phi_F$ et $(\delta \circ \xi \oplus \alpha)^*\nabla^*\phi_F$ sont tout deux des antécédents de $\alpha^*\phi_F$ par $\rho_{F,(V,(\delta\circ\psi)^*\phi_F)} = \rho_{F,(V,(\delta\circ\xi)^*\phi_F)}$. Comme $(\delta \circ \psi)^*\phi_F$ est central, $\alpha^*\phi_F$ n'a qu'un antécédent par $\rho_{F,(V,(\delta\circ\psi)^*\phi_F)}$ et donc $(\delta \circ \psi + \alpha)^*\phi_F = (\delta \circ \xi + \alpha)^*\phi_F$ pour tout α. En particulier, $(\delta \circ \psi + \delta \circ \xi)^*\phi_F = 0^*\phi_F$, alors, comme F est noethérien et ϕ est régulier,

$$\ker((\delta \circ \psi + \delta \circ \xi)^*\phi_F) = (\delta \circ \psi + \delta \circ \xi)^{-1}(0) = \ker(\delta \circ \psi + \delta \circ \xi).$$

Or,

$$\ker((\delta \circ \psi + \delta \circ \xi)^*\phi_F) = \ker(0^*\phi_F) = V_d,$$

donc $\delta \circ \psi + \delta \circ \xi = 0$. Ainsi, $\overline{\delta \circ \psi}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)} = \overline{\delta \circ \xi}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)}$.

Soient, α et β dans $\mathrm{End}(V_d)$ tels que $\alpha^*\phi_F = \beta^*\phi_F$. Alors, $\alpha^*\phi_F$ a la même classe que $\beta^*\phi_F$ dans le quotient par l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$, donc par hypothèse, $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V_d/V)$. Comme $\dim(V_d/V) = 1$, $\gamma := \pi \circ \alpha$ est soit nul, soit de rang 1. Si $\gamma = 0$, il existe ψ et ξ tels que $\alpha = \delta \circ \psi$ et $\beta = \delta \circ \xi$ et on se retrouve dans le cas précédent. Si γ est de rang 1, quitte à précomposer α et β par un même automorphisme de V_d, on peut supposer que $\gamma = \pi$. Alors, il existe ψ et ξ des morphismes de V_d dans V tels que $\alpha = \gamma + \delta \circ \psi$ et $\beta = \gamma + \delta \circ \xi$. Alors, par le lemme 5.3.10, $\alpha^*\phi_F = \beta^*\phi_F$ implique que $(\delta \circ \psi + \pi + \delta \circ \rho)^*\phi_F = (\delta \circ \xi + \pi + \delta \circ \rho)^*\phi_F$ pour tout morphisme ρ de V_d dans V, en particulier, $(\delta \circ \psi + \delta \circ \xi + \mathrm{id})^*\phi_F = \mathrm{id}^*\phi_F$. Donc $(\delta \circ \psi + \delta \circ \xi + \mathrm{id}) \in \mathrm{Gal}(\phi_F)$, ce qui implique que $\overline{\alpha}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)} = \overline{\beta}^{\mathrm{Gal}(\phi_F)}$. □

Reformulons le théorème précédent du point de vue des algèbres instables.

Théorème 5.3.17. *Soit K une algèbre instable, nil-fermée, connexe et intègre de degré de transcendance d. Soit $\phi \ : \ K \hookrightarrow H^*(V_d)$ le plongement garanti par le théorème d'Adams-Wilkerson. Et soit V un sous-espace vectoriel de V_d de codimension 1. Alors, le morphisme de $H^*(V_d) \to H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ induit par l'addition de $V_d \oplus V$ dans V_d induit une structure de $H^*(V)$-comodule sur K dont l'ensemble des éléments primitifs est précisément $H^*(V_d/V)$ si et seulement si, pour tout $g \in Gal(\phi)$ et pour tout $v \in V$ $gv = v$, et si $\phi(K) = H^*(V_d)^{Gal(\phi)}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 5.3.16. □

Exemple 5.3.18. Soit K une algèbre instable, intègre, connexe, *nil*-fermée, noethérienne, de degré de transcendance 2, munie d'une structure de $H^*(\mathbb{F}_2)$-comodule dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à $H^*(\mathbb{F}_2)$. On considère $\phi \ : \ K \hookrightarrow H^*(V_2)$ un plongement dont l'existence est garantie par le théorème d'Adams-Wilkerson. Alors, quitte à composer ϕ par le morphisme induit par un automorphisme de V_2, on peut supposer que la structure de $H^*(\mathbb{F}_2)$-comodule de K est induite par l'élément central $(\mathbb{F}_2, \delta^*\phi)$ où δ est l'injection de $\mathbb{F}_2$ dans V_2 qui envoie 1 sur e_1, avec (e_1, e_2) une base de V_2 fixée. D'après le théorème 5.3.17, K est alors isomorphe à $H^*(V_2)^{\mathrm{Gal}(\phi)}$ où $\mathrm{Gal}(\phi)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V_2)$ dont tous les éléments g vérifient $ge_1 = e_1$ et $ge_2 = \epsilon e_1 + e_2$, avec $\epsilon = 0$ ou 1. Tous les éléments de $\mathrm{Gal}(\phi)$ ont donc une matrice dans (e_1, e_2) de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conséquence, soit $\mathrm{Gal}(\phi)$ est le groupe trivial, auquel cas $K \cong H^*(V_2)$, soit $\mathrm{Gal}(\phi)$ est le sous-groupe B_2 de $\mathrm{Aut}(V_2)$ engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

auquel cas $K \cong H^*(V_2)^{B_2} \cong \mathbb{F}_2\,[y, x(x+y)]$, où (x, y) désigne la base duale de (e_1, e_2). Dans le second cas, la structure de $\mathbb{F}_2\,[x]$-comodule est induite par $y \mapsto y \otimes 1$ et $x(x+y) \mapsto x(x+y) \otimes 1 + y \otimes x + 1 \otimes x^2$. Dans ce cas, l'algèbre des éléments primitifs est $\mathbb{F}_2\,[y]$ qui est bien isomorphe à $H^*(\mathbb{F}_2)$.

Les théorèmes 5.3.16 et 5.3.17 ne sont pas vrais pour V de codimension plus grande que 1 dans V_d. Nous donnons ici un contre-exemple dans le cas où V est de codimension 2.

Exemple 5.3.19. Considérons $H^*(V_3)$, où V_3 est un espace vectoriel de dimension 3 et fixons (e_1, e_2, e_3) une base de V_3 et (x, y, z) sa base duale. Alors $H^*(V_3) \cong \mathbb{F}_2\,[x, y, z]$. On considère K le sous-module sur $\mathbb{F}_2$ de $H^*(V_3)$ suivant :

$$K \cong \mathbb{F}_2\,[y, z, x(x+y)(x+z)(x+y+z)] + \mathbb{F}_2\,[y, z, x(x+y)]\,y.$$

K est une sous algèbre de $H^*(V_3)$. K est stable sous l'action des carrés de Steenrod : pour le constater il suffit, puisque $\mathbb{F}_2[y,z]$ est stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod, de vérifier que $\mathrm{Sq}^i x(x+y)(x+z)(x+y+z)$ est dans K pour tout i et de même pour $\mathrm{Sq}^i x(x+y)y$.

Or pour tout i :

$$\mathrm{Sq}^i x(x+y)(y^2+yz) = x(x+y)(\mathrm{Sq}^i y) + (\mathrm{Sq}^1 x(x+y))(\mathrm{Sq}^{i-1} y) + (\mathrm{Sq}^2 x(x+y))(\mathrm{Sq}^{i-2} y),$$

puisque $\mathrm{Sq}^1 x(x+y) = yx(x+y)$, $\mathrm{Sq}^2 x(x+y) = (x(x+y))^2$ et $\mathrm{Sq}^1 y = y^2$, on a bien que $\mathrm{Sq}^i x(x+y)y \in K$ pour tout i.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sq}^1 x(x+y)(x+z)(x+y+z) = 0,\\
&\mathrm{Sq}^2 x(x+y)(x+z)(x+y+z) = x(x+y)(x+z)(x+z+y)(y^2+yz+z^2),\\
&\mathrm{Sq}^3 x(x+y)(x+z)(x+y+z) = x(x+y)(x+z)(x+y+z)(y^2z+yz^2)
\end{aligned}$$

et enfin,

$$\mathrm{Sq}^4 x(x+y)(x+z)(x+y+z) = (x(x+y)(x+z)(x+y+z))^2.$$

K est donc bien stable sous l'action de l'algèbre de Steenrod. K est une algèbre instable intègre. Par ailleurs, K est noethérienne, en effet, considérons le morphisme d'algèbre sur $\mathbb{F}_2$:

$$\mathbb{F}_2[x_1,x_2,x_3,x_4] \to K,$$

qui envoie x_1 sur $x(x+y)(x+z)(x+y+z)$, x_2 sur y, x_3 sur z et x_4 sur $x(x+y)y$. Ce morphisme est surjectif, c'est une conséquence du fait que

$$(x(x+y))^2 y = x(x+y)(x+z)(x+y+z)y + x(x+y)z(z+y)y$$

et qu'en général les monomes de la forme $(x(x+y))^n z^l y^j$ avec $j > 1$, peuvent se réécrire comme une combinaison linéaire de termes dans $\mathbb{F}_2[y,z,x(x+y)(x+z)(x+y+z)]$ et de termes de la forme $x(x+y)y^i z^k$ avec $i > 1$. Donc, comme $\mathbb{F}_2[x_1,x_2,x_3,x_4]$ est noethérienne, K l'est aussi.

Son degré de transcendance est 3. De plus, le morphisme $K \to H^*(V_3) \otimes \mathbb{F}_2[x]$ induit par le morphisme de $\kappa : H^*(V_3) \to H^*(V_3) \otimes \mathbb{F}_2[x]$ qui envoie x sur $x \otimes 1 + 1 \otimes x$, y sur $y \otimes 1$ et z sur $z \otimes 1$ est à valeur dans $K \otimes \mathbb{F}_2[x]$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que les images des générateurs de K par ce morphisme sont dans $K \otimes \mathbb{F}_2[x]$, en effet

$$\begin{aligned}
\kappa(y) &= y \otimes 1,\\
\kappa(z) &= z \otimes 1,\\
\kappa(x(x+y)(x+z)(x+y+z)) &= x(x+y)(x+z)(x+y+z) \otimes 1 + (y^2z + yz^2) \otimes x\\
&\quad + (yz + z^2 + y^2) \otimes x^2 + 1 \otimes x^4,
\end{aligned}$$

et enfin $\kappa((x(x+y))^n y)$ est une certaine combinaison linéaire de termes de la forme

$$y^l (x(x+y))^k \otimes x^m,$$

avec l, k et m des entiers et $l \geq 1$. K a ainsi une structure de $\mathbb{F}_2[x]$-comodule dont les primitifs sont $\mathbb{F}_2[y,z]$.

On pose $F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et ϕ correspondant à l'injection de K dans $H^*(V_3)$. Soit g un élément de $\mathrm{Aut}(V_3)$ tel que $g^*\phi = \phi$ alors $g^*y = y$ et $g^*z = z$. La matrice de g dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec a et b des éléments de $\mathbb{F}_2$.

En utilisant le fait que g^* laisse invariant $x(x+y)y$, on obtient que g est soit l'identité, soit le morphisme γ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\mathrm{Gal}(\phi) =< \gamma > .$$

F est, par construction, un foncteur noethérien, connexe, engendré par une classe ϕ telle que $\mathrm{Gal}(\phi)$ est le groupe engendré par l'automorphisme de V_3 dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, F est muni d'une structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(_, \mathbb{F}_2 e_1)-\mathcal{S}$et dont le quotient est $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3/\mathbb{F}_2 e_1)$. Pourtant F n'est pas isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi)$. En effet $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* \phi,$ puisque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* y = 0$$

et puisque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* z = z$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* x(x+y)(x+z)(x+y+z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* x(x+y)(x+z)(x+y+z) = 0,$$

alors que les morphismes dont les matrices dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas égaux dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_3, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi)$.

5.3.3 Une généralisation du théorème 5.3.16

Nous allons généraliser le théorème 5.3.16. Nous avons vu dans la partie précédente (confère proposition 5.3.6) que, pour K une algèbre instable *nil*-fermée, intègre, noethérienne, connexe, de degré de transcendance d, muni d'un plongement d'Adams-Wilkerson $\phi_K : K \hookrightarrow H^*(V_d)$, on pouvait ramener l'étude des structures de $H^*(V)$-comodules sur K au cas où V est un sous-espace vectoriel de V_d et où la structure de $H^*(V)$-comodule sur K est induite par restriction par le morphisme $H^*(V_d) \to H^*(V_d \oplus V) \cong H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ induit par l'addition de $V_d \oplus V$ dans V_d. Le théorème 5.3.16 affirme que dans le cas où V est de codimension 1 et où l'algèbre des primitifs de K pour sa structure de $H^*(V)$-comodule est isomorphe à $H^*(V_d/V)$, K est complétement caractérisée par $\mathrm{Gal}(\phi_K)$.

Nous cherchons ici, à classifier les algèbres instables *nil*-fermées, intègres, noethériennes, connexes, de degré de transcendance d, munies d'une structure de $H^*(V)$-comodule, dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à $H^*(V_d/V)$ pour V de codimension quelconque. Comme dans le cas de codimension 1, et toujours grâce à la proposition 5.3.6, on se ramène au cas où la structure de $H^*(V)$-comodule sur K est induite par restriction par le morphisme $H^*(V_d) \to H^*(V_d) \otimes H^*(V)$. Dans ce cas, comme nous l'avons vu dans l'exemple 5.3.19, $\mathrm{Gal}(\phi_K)$ ne suffit pas à caractériser K.

Nous commencerons par traiter la question équivalente de la classification des objets F de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$, noethériens, connexes, de dimension de Krull d, engendré par un élément $\phi_F \in F(V_d)$, et dont le quotient est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ et traiterons ensuite le cas des algèbres instables.

Dans toute cette partie, F désignera un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, avec $\phi_F \in F(V_d)$ tel que $\phi_F : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \to F$ soit une surjection. $V \in \mathcal{V}^f$ désignera un sous-espace vectoriel de V_d et δ l'inclusion de V dans V_d et on supposera que $(V, \delta^*\phi_F)$ soit central. On supposera également que le quotient de F pour sa structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$, et on aura identifié V_d/V à un supplémentaire de V dans V_d (c'est à dire qu'on aura fixé un isomorphisme $V \oplus V_d/V \cong V_d$ dont la restiction à V est l'identité de V et dont la restriction à V_d/V est une section de la projection $\pi : V_d \twoheadrightarrow V_d/V$).

Remarque 5.3.20. Pour tout W un sous-espace vectoriel de V_d/V et pour ι_W l'inclusion de W dans V_d/V, on considère $< (\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F >$ le sous-foncteur de F engendré par $(\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F \in F(V \oplus W)$.

Par construction, $< (\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F >$ est un sous $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ de F, il est noethérien (car tout sous-foncteur d'un foncteur noethérien est noethérien), de dimension de Krull $\dim(V) + \dim(W)$, et son quotient est le sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ engendré par ι_W, c'est à dire $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, W)$. On peut donc appliquer la proposition 5.3.15 ; on en déduit que $\mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V \oplus W)$ dont tout élément g vérifie que $gv = v$ pour tout $v \in V$ et $\pi \circ g = \pi$, pour π la projection de $V \oplus W$ sur W.

Alors, tout élément g de $\mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F)$ est de la forme $\mathrm{id}_{V \oplus W} + \iota_V^{V \oplus W} \circ \eta \circ \pi_W^{V \oplus W}$ avec η de W dans V, de plus pour $g = \mathrm{id} + \iota_V^{V \oplus W} \circ \eta \circ \pi_W^{V \oplus W}$ et $h = \mathrm{id} + \iota_V^{V \oplus W} \circ \gamma \circ \pi_W^{V \oplus W}$ dans $\mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F)$, $h \circ g = \mathrm{id} + \iota_V^{V \oplus W} \circ (\eta + \gamma) \circ \pi_W^{V \oplus W}$.

Définition 5.3.21. Pour W un sous-espace vectoriel de V_d/V on définit $\mathrm{INV}_F(W)$ comme le sous-groupe additif de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ tel que $\eta \in \mathrm{INV}_F(W)$ si et seulement si $(\mathrm{id}_{V \oplus W} + \iota_V^{V \oplus W} \circ \eta \circ \pi_W^{V \oplus W}) \in \mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F)$.

Remarque 5.3.22. Sous forme matricielle par bloc, dont les blocs correspondent à la décomposition $V \oplus W$, la matrice d'un élément de $\mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_W)^*\phi_F)$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_V & H \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_W \end{array}\right)$, avec H la matrice associée à un élément de $\mathrm{INV}_F(W)$.

Notation : Par la suite, pour $\eta \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on utilisera la notation $\eta \uparrow := \iota_V^{V \oplus W} \circ \eta \circ \pi_W^{V \oplus W}$.
.

Définition 5.3.23. Pour $B \in \mathcal{V}^f$, soit $\mathrm{Gr}(B)$ la catégorie dont les objets sont les sous-espaces vectoriels de B et dont les morphismes sont les inclusions de sous-espaces vectoriels.

Remarque 5.3.24. Pour tout $B \in \mathcal{V}^f$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ définit un foncteur contravariant de $\mathrm{Gr}(B)$ dans $\mathcal{V}^f$, où le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W_2, V)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W_1, V)$ induit par l'inclusion de W_1 dans W_2, deux sous-espaces vectoriels de B, est donné par la restriction à W_1 des morphismes sur W_2.

Lemme 5.3.25. *L'application $W \mapsto INV_F(W)$, pour W un sous-espace vectoriel de V_d/V, définit un sous-foncteur de $Hom(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant sur $Gr(V_d/V)$ dans $\mathcal{V}^f$.*

Démonstration. Il s'agit juste de montrer que, pour $W_1 \subset W_2$ une inclusion de sous-espaces vectoriels de V_d/V, et pour η de W_2 dans V tel que $(\mathrm{id}+\eta\uparrow) \in \mathrm{Gal}((\delta\oplus\iota_{W_2})^*\phi_F)$, $(\mathrm{id}+(\eta|_{W_1})\uparrow) \in \mathrm{Gal}((\delta\oplus\iota_{W_1})^*\phi_F)$. Or pour $\iota_{W_1}^{W_2}$ l'inclusion de W_1 dans W_2, $(\delta\oplus\iota_{W_1})^*\phi_F = (\delta\oplus\iota_{W_1}^{W_2})^*(\delta\oplus\iota_{W_2})^*\phi_F$, on a donc

$$(\mathrm{id} + (\eta|_{W_1})\uparrow)^*(\delta \oplus \iota_{W_1})^*\phi_F = (\delta \oplus \iota_{W_1}^{W_2})^*(\mathrm{id} + \eta\uparrow)^*(\delta \oplus \iota_{W_2})^*\phi_F,$$

or par hypothèse $(\mathrm{id} + \eta\uparrow) \in \mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_{W_2})^*\phi_F)$ donc $(\mathrm{id} + \eta\uparrow)^*(\delta \oplus \iota_{W_2})^*\phi_F = (\delta \oplus \iota_{W_2})^*\phi_F$ et donc $(\mathrm{id} + (\eta|_{W_1})\uparrow)^*(\delta \oplus \iota_{W_1})^*\phi_F = (\delta \oplus \iota_{W_1})^*\phi_F$. En conclusion, si $\eta \in \mathrm{INV}_F(W_2)$, $\eta|_{W_1} \in \mathrm{INV}_F(W_1)$ et donc INV_F est un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$. □

Nous allons définir un analogue des foncteurs quotients $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\mathrm{Gal}(\phi)$, permettant de généraliser le théorème 5.3.16 pour V de codimension plus grande que 1.

Définition 5.3.26. Pour d un entier, $V \in \mathcal{V}^f$ un sous-espace vectoriel de V_d, $W \in \mathrm{Gr}(V_d/V)$ et I un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$, considéré comme un foncteur contravariant sur $\mathrm{Gr}(V_d/V)$ à valeur dans $\mathcal{V}^f$, soit $\sim_I$ la relation définie sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ par $\rho \sim_I \zeta$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

1. $\pi\circ\rho = \pi\circ\zeta$, pour π la projection de V_d sur V_d/V, auquel cas pour $N = \mathrm{Im}(\pi\circ\rho) \subset V_d/V$ il existe $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ de W dans $V \oplus N$ tels que $\rho = (\delta \oplus \iota_N)\circ\tilde{\rho}$ et $\zeta = (\delta \oplus \iota_N)\circ\tilde{\zeta}$,
2. il existe $\alpha \in I(N)$ tel que $\tilde{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha\uparrow)\circ\tilde{\zeta}$.

Exemple 5.3.27. Si pour tout W sous-espace vectoriel de V_d/V, $I(W)$ est la restriction à W des morphismes de $I(V_d/V)$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/G$, où G est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V_d)$ des morphismes de la forme $\mathrm{id}_{V_d} + \alpha\uparrow$ avec $\alpha \in I(V_d/V)$.

Lemme 5.3.28. *Pour d un entier, $V \in \mathcal{V}^f$ un sous-espace vectoriel de V_d, $W \in Gr(V_d/V)$ et I un sous-foncteur de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$, considéré comme un foncteur contravariant sur $Gr(V_d/V)$ à valeur dans $\mathcal{V}^f$, $\sim_I$ définit une relation d'équivalence sur $Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$.*

On notera $[\rho]_I$, la classe d'équivalence de ρ pour $\sim_I$.

Démonstration. La réflexivité est immédiate. Pour $\rho \sim_I \zeta$ et $\zeta \sim_I \xi$, $\pi\circ\rho = \pi\circ\zeta$ et $\pi\circ\zeta = \pi\circ\xi$, donc $\pi\circ\rho = \pi\circ\xi$. De plus, pour $\tilde{\rho}$, $\tilde{\zeta}$ et $\tilde{\xi}$ tels que $\rho = (\delta \oplus \iota_N)\circ\tilde{\rho}$, $\zeta = (\delta \oplus \iota_N)\circ\tilde{\zeta}$ et $\xi = (\delta \oplus \iota_N)\circ\tilde{\xi}$, et pour α et β dans $I(N)$ tels que $\tilde{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha\uparrow)\circ\tilde{\zeta}$ et $\tilde{\zeta} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \beta\uparrow)\circ\tilde{\xi}$, on a $\tilde{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + (\alpha+\beta)\uparrow)\circ\tilde{\xi}$ avec $\alpha+\beta \in I(N)$, puisque $I(N)$ est un sous-groupe additif de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(N, V)$. La relation $\sim_I$ est donc transitive, et la symétrie se montre de manière analogue. □

Proposition 5.3.29. *Pour d un entier et I un sous-foncteur de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$, considéré comme un foncteur contravariant sur $Gr(V_d)$, $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ définit un objet de $\mathcal{S}et^{(\mathcal{V}^f)^{op}}$ avec les propriérés suivantes.*

1. *Il est noethérien,*
2. *connexe,*
3. *pour δ l'inclusion de V dans V_d, $([\delta]_I, V)$ est central,*
4. *le quotient de la structure de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ induit par la centralité de $([\delta]_I, V)$ est isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$.*

Démonstration. Pour justifier que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ est un objet dans $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$, justifions que si $\rho \sim_I \zeta$, pour ρ et ζ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ avec $W \in \mathcal{V}^f$, et si $\beta : S \to W$ est un morphisme dans $\mathcal{V}^f$, $\beta^*\rho \sim_I \beta^*\zeta$. En effet, pour $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ tels que $\rho = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\rho}$ et $\zeta = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\zeta}$, avec N l'image de $\pi \circ \rho = \pi \circ \zeta$, il existe $\alpha \in I(N)$ tel que $\tilde{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow) \circ \tilde{\zeta}$, alors $\beta^*\rho = \rho\circ\beta = (\delta\oplus\iota_N)\circ\tilde{\rho}\circ\beta = (\delta\oplus\iota_N)\circ(\mathrm{id}_{V\oplus N}+\alpha\uparrow)\circ\tilde{\zeta}\circ\beta$. En conséquence, $\pi\circ\rho\circ\beta = \pi\circ\zeta\circ\beta$. De plus, soit N' l'image de $\pi \circ \rho \circ \beta$, qui est incluse dans N, et $\widetilde{\rho \circ \beta}$ et $\widetilde{\zeta \circ \beta}$, tels que $\tilde{\rho} \circ \beta = (\delta \oplus \iota_{N'}) \circ \widetilde{\rho \circ \beta}$ et $\tilde{\zeta} \circ \beta = (\delta \oplus \iota_{N'}) \circ \widetilde{\zeta \circ \beta}$, alors $\widetilde{\rho \circ \beta} = (\mathrm{id}_{V\oplus N'} + (\alpha|_{N'}) \uparrow) \circ \widetilde{\zeta \circ \beta}$ et donc $\beta^*\rho \sim_I \beta^*\zeta$. On peut alors définir $\beta^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)/\sim_I \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(S, V_d)/\sim_I$ par $\beta^*[\rho]_I = [\beta^*\rho]_I$, ce qui fait de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ un objet de $\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\mathcal{V}^f)^{\mathrm{op}}}$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ est noethérien. Si ρ et ζ sont deux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ tels que $\rho \sim_I \zeta$, alors il existe $\alpha \in I(N)$ tel que $\tilde{\rho} = (\mathrm{id} + \alpha \uparrow) \circ \tilde{\zeta}$, où N, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ sont définis comme précédemment. Alors, comme $(\mathrm{id} + \alpha \uparrow)$ est un isomorphisme, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ ont le même noyau. Comme, de plus, $\rho = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\rho}$ et $\zeta = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\zeta}$, ρ et ζ ont le même noyau. Soit $[\xi]_I \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W/\ker([\rho]_I), V_d)$ régulier, tel que $p^*([\xi]_I) = [\rho]_I$, avec p la projection de W sur $W/\ker([\rho]_I)$, alors ξ est régulier et $p^*\xi \sim_I \rho$. Donc $\ker([\rho]_I) = \ker(\rho)$ et on conclut en utilisant que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ est noethérien.

La connexité de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ est une conséquence directe de ce que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ se surjecte sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ et de ce que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)$ est connexe.

Le fait que $([\delta]_I, V)$ soit central est une conséquence directe du lemme 5.3.10.

Soit enfin Q le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$ sous l'action de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$. Par la proposition 5.3.5, pour $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ et $[\rho]_I \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)/\sim_I$, $g \cdot [\rho]_I = [\delta \circ g + \rho]_I$, alors, quelque soit ζ et ρ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$, l'image de ρ et ζ par la composition des flèches $\pi_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V) \twoheadrightarrow Q$ du diagramme de la proposition 5.3.6 sont égales si et seulement si il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$ tel que $\delta \circ g + \rho \sim_I \zeta$ auquel $\pi\circ\zeta = \pi\circ(\delta\circ g+\rho) = \pi\circ\rho$. L'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V) \to Q$ est donc un isomorphisme. $\square$

Lemme 5.3.30. *Pour I un sous-foncteur de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur de $Gr(V_d)$ dans $\mathcal{V}^f$, $INV_{Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I} = I$.*

Démonstration. En effet, soit W un sous-espace vectoriel de V_d/V, alors $\alpha \in \mathrm{INV}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_,V_d)/\sim_I}(W)$ si et seulement si

$$[(\mathrm{id} + \alpha \uparrow)^*(\delta \oplus \iota_W)]_I = [(\delta \oplus \iota_W)]_I\,,$$

c'est à dire si et seulement si $(\mathrm{id} + \alpha \uparrow)^*(\delta \oplus \iota_W) \sim_I (\delta \oplus \iota_W)$. Alors, il existe $\beta \in I(W)$ tel que $(\delta \oplus \iota_W) \circ (id_{V\oplus W} + \alpha \uparrow) = (\delta \oplus \iota_W) \circ (id_{V\oplus W} + \beta \uparrow)$. Or, comme $\delta \oplus \iota_W$ est injectif, ça implique que $\alpha = \beta$ et donc $\alpha \in I(W)$. La seconde inclusion est immédiate. □

On en déduit la généralisation du théorème 5.3.16.

Théorème 5.3.31. *Soit $F \in Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, engendré par une classe régulière $\phi_F \in F(V_d)$. Supposons que l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ est donnée par $\alpha \cdot \beta^*\phi_F = (\delta \circ \alpha + \beta)^*\phi_F$, avec δ l'injection de V dans V_d. Supposons de plus que le quotient de F sous l'action de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ soit isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d/V)$ par la surjection introduite dans la proposition 5.3.6. Alors F est naturellement isomorphe à $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_{INV_F}$ et cet isomorphisme est donné par $[\rho]_{INV_F} \mapsto \rho^*\phi_F$, pour $\rho \in Hom_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$.*

Démonstration. Par la proposition 5.2.5, il suffit de justifier que, pour tout ρ et ζ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V_d)$, $\rho^*\phi_F = \zeta^*\phi_F$ si et seulement si $\rho \sim_{\mathrm{INV}_F} \zeta$. Supposons que $\rho^*\phi_F = \zeta^*\phi_F$, alors, par la proposition 5.3.6, $\pi \circ \rho = \pi \circ \zeta$ pour π la projection de V_d sur V_d/V. Alors, soit $N = \mathrm{Im}(\pi \circ \rho)$ et soient $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ de V_d dans $V \oplus N$ tel que $\rho = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\rho}$ et $\zeta = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\zeta}$. Alors, par hypothèse, $\tilde{\zeta}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F = \tilde{\rho}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F$.

Soit $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d, V)$ tel que $\delta \circ g + \tilde{\zeta}$ est surjectif, qui existe puisque par définition de N, $\tilde{\zeta}$ se surjecte sur N. D'après le lemme 5.3.10 $(\delta \circ g + \tilde{\zeta})^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F = (\delta \circ g + \tilde{\rho})^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F$. Comme F est noethérien et ϕ_F est régulier, on a que $\ker(\delta \circ g + \tilde{\zeta}) = \ker(\delta \circ g + \tilde{\rho})$. Soit p la projection de V_d sur $V_d/\ker(\delta \circ g + \tilde{\rho})$ et $\bar{\zeta}$ et $\bar{\rho} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d/\ker(\delta \circ g + \tilde{\zeta}), V \oplus N)$ tels que $\bar{\rho} \circ p = \delta \circ g + \tilde{\rho}$ et $\bar{\zeta} \circ p = \delta \circ g + \tilde{\zeta}$, alors, $p^*\bar{\zeta}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F = p^*\bar{\rho}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F$. Mais p^* est injectif et $\bar{\zeta}$ est un isomorphisme, puisque par définition $\bar{\zeta}$ est injectif et qu'il factorise $\delta \circ g + \tilde{\zeta}$ qui est surjectif. Alors, $\bar{\rho} \circ \bar{\zeta}^{-1} \in \mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F)$, donc il existe $\alpha \in \mathrm{INV}_F(N)$ tel que $\bar{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow) \circ \bar{\zeta}$, alors $(\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow) \circ \tilde{\zeta} = \tilde{\rho}$ et donc $\rho \sim_{\mathrm{INV}_F} \zeta$.

Réciproquement, si $\rho \sim_{\mathrm{INV}_F} \zeta$, il existe N un sous-espace vectoriel de V_d/V, $\alpha \in \mathrm{INV}_F(N)$ et $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\zeta}$ de V_d dans $V \oplus N$, tels que $\rho = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\rho}$, $\zeta = (\delta \oplus \iota_N) \circ \tilde{\zeta}$ et $\tilde{\rho} = (\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow) \circ \tilde{\zeta}$. Mais, alors $\tilde{\rho}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F = \tilde{\zeta}^*(\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow)^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F$ et $(\mathrm{id}_{V\oplus N} + \alpha \uparrow) \in \mathrm{Gal}((\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F)$, donc $\tilde{\rho}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F = \tilde{\zeta}^*(\delta \oplus \iota_N)^*\phi_F$ et donc $\rho^*\phi_F = \zeta^*\phi_F$. □

Exemple 5.3.32. Donnons une liste exhaustive à isomorphisme près des objets de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, \mathbb{F}_2) - \mathcal{S}et$ noethériens, connexes, de dimension de Krull 3 engendrés par une classe $\phi_F \in F(V_3)$ et dont le quotient est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_2)$. Pour (e_1, e_2, e_3) une base de V_3, on peut supposer sans perte de généralité que la structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, \mathbb{F}_2) - \mathcal{S}et$ provient du morphisme qui envoie $\mathbb{F}_2$ sur $\mathbb{F}_2 e_1$. D'après le théorème 5.3.31, cela revient à faire la liste des sous foncteurs de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur de $\mathrm{Gr}(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$ dans $\mathcal{V}^f$. Faisons une disjonction des cas en fonction de $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$.

1er cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$, alors par restriction, on a nécessairement $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2, \mathbb{F}_2 e_1)$, $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2(e_2+e_3), \mathbb{F}_2 e_1)$. Dans ce cas $\mathrm{Gal}(\phi_F) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(V_d) \ ; \ \pi \circ \gamma = \pi \text{ et } \gamma(e_1) = e_1\}$ et $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi_F)$.

2ème cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$, on peut sans perte de généralité supposer que $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$ est engendré par le morphisme qui envoie e_2 sur e_1 et e_3 sur 0. Alors par restriction, on a nécessairement $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2, \mathbb{F}_2 e_1)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3), \mathbb{F}_2 e_1)$.

Soit $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3) = 0$, auquel cas $\mathrm{Gal}(\phi_F) = \{\mathrm{id}_{V_3} + \alpha \ ; \ \mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{F}_2 e_1 \text{ et } \mathbb{F}_2 e_1 \oplus \mathbb{F}_2 e_3 \subset \ker(\alpha)\}$ et $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi_F)$, soit $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$.

3ème cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3) = 0$, on trouve quatre foncteurs différents à isomorphismes près, correspondant aux nombres de groupes triviaux parmi $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2)$, $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3))$. En effet, quitte à choisir $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_d)$ avec $\alpha|_{\mathbb{F}_2 e_1} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2 e_1}$ et $\mathrm{Im}(\alpha|_{\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3}) = \mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3$ et à remplacer ϕ_F par $\alpha^* \phi_F$, on peut toujours se ramener au cas où

$$0 \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2)) \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3) \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3))) \leq 1.$$

Si tous ces groupes sont triviaux, on retrouve le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)$.

Ramenons nous maintenant au problème de classification pour les algèbres instables *nil*-fermées. Par les théorèmes 3.4.10 et 5.3.31, il s'agit uniquement de déterminer les algèbres instables *nil*-fermées K, telles que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/ \sim_I$ pour I un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $\mathrm{Gr}(V_d/V)$ dans $\mathcal{V}^f$.

Définition 5.3.33. Soit V un sous-espace vectoriel de V_d, on suppose fixé un isomorphisme $V \oplus V_d/V \cong V_d$ dont la restriction à V est l'identité de V et la restriction à V_d/V une section de $\pi \ : \ V_d \to V_d/V$. Pour W un sous-espace vectoriel de V_d/V, et S un sous-groupe additif de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V)$, on considère $K_{d,S}$ l'image réciproque par

$$(\delta \oplus \iota_W)^* \ : \ H^*(V_d) \to H^*(V \oplus W),$$

de $H^*(V \oplus W)^{G(S)}$, où $G(S)$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V \oplus W)$ dont les éléments sont de la forme $\mathrm{id}_{V \oplus W} + \sigma \uparrow$ avec $\sigma \in S$.

Pour I un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $\mathrm{Gr}(V_d/V)$ dans $\mathcal{V}^f$, soit $H^*(V_d)^I := \bigcap_{W \in \mathrm{Gr}(V_d/V)} K_{d,I(W)}$.

Exemple 5.3.34. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V_d)$ tel que pour tout $v \in V$ et pour tout $g \in G$, $gv = v$ et $\pi \circ g = \pi$, avec π la projection de V_d sur V_d/V. Soit alors I_G défini par $I_G(W) := \{\eta|_W \ ; \ \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(V_d/V, V) \text{ et } (\mathrm{id}_{V \oplus V_d/V} + \eta \uparrow) \in G\}$, alors $H^*(V_d)^{I_G} = H^*(V_d)^G$. En effet, $K_{d,I_G(V_d/V)} = H^*(V_d)^G$ et pour tout $W \in \mathrm{Gr}(V_d/V)$, $H^*(V_d)^G \subset K_{d,I_G(W))}$.

Lemme 5.3.35. *Soit V un sous-espace vectoriel de V_d, on suppose fixé s une section de la projection canonique $V_d \twoheadrightarrow V_d/V$. Pour I un sous-foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $Gr(V_d/V)$ dans $\mathcal{V}^f$, $H^*(V_d)^I$ est nil-fermée et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V_d)^I, H^*(\_)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$.*

Démonstration. On considère $\phi \ : \ H^*(V_d)^I \hookrightarrow H^*(V_d)$ l'inclusion de $H^*(V_d)^I$ dans $H^*(V_d)$. ϕ est régulier (c'est une conséquence de [HLS93, Lemme 7.3], qui affirme qu'un plongement $K \hookrightarrow H^*(V)$ est régulier, si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega_V^{2^n}$ appartient à l'image de K, où ω_V désigne l'invariant de Dickson supérieur, et du fait que $\omega_{V_d} \in H^*(V_d)^I$ pour tout I). Le morphisme de Yoneda

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V_d)^I, H^*(\_)),$$

qui envoie l'identité de V_d sur ϕ est une surjection. De plus, par construction, si $\rho \sim_I \zeta$ avec ρ et ζ deux morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(W, V_d)$ et $W \in \mathcal{V}^f$, $\rho^*\phi = \zeta^*\phi$. Le morphisme de Yonneda associé à ϕ s'obtient donc comme la composition suivante

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V_d)^I, H^*(\_)).$$

En appliquant le foncteur $m \circ \mathcal{L}$, avec $\mathcal{L}$ défini dans la définition 3.4.9 et m défini dans la définition 2.1.31 et en utilisant que m est exact à gauche, on obtient une suite d'inclusions

$$l_1(H^*(V_d)^I) \hookrightarrow m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I) \hookrightarrow H^*(V_d).$$

Par ailleurs, comme $H^*(V_d)^I$ est réduite (car c'est une intersection d'algèbres instables réduites), l'inclusion de $H^*(V_d)^I$ dans $H^*(V_d)$ se factorise en $H^*(V_d)^I \hookrightarrow l_1(H^*(V_d)^I) \hookrightarrow H^*(V_d)$. Or par construction, pour tout W sous-espace vectoriel de V_d/V et $\eta \in I(W)$, la composition

$$m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I) \hookrightarrow H^*(V_d) \to H^*(V \oplus W),$$

est invariante par $\mathrm{id}_{V \oplus W} + \eta$ et donc $m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I) \subset K_{d,I(W)}$. On obtient la suite d'inclusion suivante de sous-algèbres instables de $H^*(V_d)$

$$H^*(V_d)^I \hookrightarrow l_1(H^*(V_d)^I) \hookrightarrow m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I) \hookrightarrow H^*(V_d)^I,$$

et donc

$$H^*(V_d)^I \cong l_1(H^*(V_d)^I) \cong m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I),$$

ce qui implique que $H^*(V_d)^I$ est *nil*-fermée et que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(V_d)^I, H^*(\_)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_I$. $\square$

Théorème 5.3.36. *Soit K une algèbre instable, intègre, nil-fermée, noethérienne, connexe, de degré de transcendance d. Soient $\phi : K \hookrightarrow H^*(V_d)$ un plongement d'Adams-Wilkerson et V un sous-espace vectoriel de V_d tel que le morphisme $H^*(V_d) \to H^*(V_d) \otimes H^*(V)$ induit par l'addition de $V \oplus V_d$ dans V_d induise une structure de $H^*(V)$-comodule sur K, dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à $H^*(V_d/V)$. Alors il existe un sous-foncteur I de $Hom_{\mathbb{F}_2}(\_, V)$ considéré comme un foncteur contravariant de $Gr(V_d/V)$ dans $\mathcal{V}^f$ tel que $K \cong H^*(V_d)^I$.*

Démonstration. Le foncteur $F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ est un foncteur noethérien, connexe, de dimension de Krull d, et $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d) \to F$ est une surjection. Il est muni d'une structure de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V) - \mathcal{S}et$ vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.31. On peut alors appliquer le théorème 5.3.31, et on a donc $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_{\mathrm{INV}_F}$. Alors, comme K est *nil*-fermée, $K \cong m \circ \mathcal{L}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_d)/\sim_{\mathrm{INV}_F})$, avec $\mathcal{L}$ défini dans la définition 3.4.9 et m défini dans la définition 2.1.31. Alors, d'après le lemme 5.3.35, $K \cong H^*(V_d)^{\mathrm{INV}_F}$. $\square$

Exemple 5.3.37. Faisons la liste à isomorphisme près des algèbres instables K, intègres, *nil*-fermées, noethériennes, connexes, de degré de transcendance 3, telles que K est munie d'une structure de $\mathbb{F}_2[x]$-comodule dont l'algèbre des éléments primitifs est isomorphe à $H^*(V_2)$. On peut fixer $\phi : K \hookrightarrow H^*(V_3)$ telle que la structure de $\mathbb{F}_2[x]$-comodule sur K soit induite par l'addition de $\mathbb{F}_2 e_1 \oplus V_3$ dans V_3, pour (e_1, e_2, e_3) une base de V_3. Dans ce cas, l'algèbre des éléments primitifs s'identifie à $H^*(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3) \subset H^*(V_3)$. On pose $F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*(\_))$ et on se ramène à la disjonction de l'example 5.3.32, par le théorème 5.3.36.

1er cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$, alors par restriction, on a nécessairement $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2, \mathbb{F}_2 e_1)$, $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2(e_2 + e_3), \mathbb{F}_2 e_1)$. Dans ce cas $\mathrm{Gal}(\phi) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(V_d)\ ;\ \pi \circ \gamma = \pi \text{ et } \gamma(e_1) = e_1\}$ et $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi)$ et donc $K \cong H^*(V_3)^{\mathrm{Gal}(\phi)}$.

2ème cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3, \mathbb{F}_2 e_1)$, on peut sans perte de généralité supposer que $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2 e_2 \oplus \mathbb{F}_2 e_3)$ est engendré par le morphisme qui envoie e_2 sur e_1 et e_3 sur 0. Alors par restriction, on a nécessairement

$\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2e_2, \mathbb{F}_2e_1)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2(e_2+e_3), \mathbb{F}_2e_1)$.

Soit $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_3) = 0$, auquel cas $\mathrm{Gal}(\phi) = \{\mathrm{id}_{V_3} + \alpha\ ;\ \alpha \in \mathrm{Aut}(V_3),\ \mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{F}_2e_1$ et $\mathbb{F}_2e_1 \oplus \mathbb{F}_2e_3 \subset \ker(\alpha)\}$ et $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\_, V_3)/\mathrm{Gal}(\phi)$ et donc $K \cong H^*(V_3)^{\mathrm{Gal}(\phi)} \cong \mathbb{F}_2\left[x(x+y), y, z\right]$.

Soit $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_3) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2e_3, \mathbb{F}_2e_1)$. Dans ce cas, K est la sous-algèbre de $\mathbb{F}_2\left[x(x+y), y, z\right]$ des éléments dont les images par le morphisme γ à valeurs dans $\mathbb{F}_2\left[x, z\right]$ qui envoie y sur 0, z sur z et $x(x+y)$ sur x^2, appartiennent à $\mathbb{F}_2\left[x(x+z), z\right]$. Notons que $\gamma(\mathbb{F}_2\left[x(x+y), y, z\right]) = \mathbb{F}_2\left[x^2(x+z)^2, z\right]$ et que $\ker(\gamma) = \mathbb{F}_2\left[x(x+y), y, z\right]y$, comme $\mathbb{F}_2\left[x(x+y)(x+z)(x+y+z), y, z\right]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{F}_2\left[x(x+y), y, z\right]$ et se surjecte par γ sur $\mathbb{F}_2\left[x^2(x+z)^2, y, z\right]$, on a que $\gamma^{-1}(\mathbb{F}_2\left[x^2(x+z)^2, z\right]) \cong \mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)(x+z)(x+y+z)\right] + \mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)\right]y$. On retrouve

$$K \cong \mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)(x+z)(x+y+z)\right] + \mathbb{F}_2\left[y, z, x(x+y)\right]y,$$

l'algèbre de l'exemple 5.3.19.

3ème cas : Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_2 \oplus \mathbb{F}_2e_3) = 0$, on trouve quatre foncteurs différents à isomorphismes près, correspondant aux nombres de groupes triviaux parmi $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_2)$, $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_3)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3))$. En effet, quitte à choisir $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_d)$ avec $\alpha|_{\mathbb{F}_2e_1} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2e_1}$ et $\mathrm{Im}(\alpha|_{\mathbb{F}_2e_2\oplus\mathbb{F}_2e_3}) = \mathbb{F}_2e_2 \oplus \mathbb{F}_2e_3$ et à remplacer ϕ_F par $\alpha^*\phi_F$, on peut toujours se ramener au cas où

$$0 \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_2)) \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_3) \leq \dim(\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3))) \leq 1.$$

Si tous ces groupes sont triviaux, $K \cong H^*(V_3)$.

Si seul $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3))$ est non trivial, K est l'image réciproque, par

$$(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2(e_2+e_3))})^*\ :\ \mathbb{F}_2\left[x, y, z\right] \to \mathbb{F}_2\left[x, \alpha\right]$$

qui envoie x sur x et y et z sur α, de $\mathbb{F}_2\left[\alpha, x(x+\alpha)\right]$, donc

$$K \cong \mathbb{F}_2\left[x, y, z\right](y+z) \oplus \mathbb{F}_2\left[z, x(x+z)\right],$$

en effet, le noyau de $(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2(e_2+e_3))})^*$ est $\mathbb{F}_2\left[x, y, z\right](y+z)$ et $\mathbb{F}_2\left[z, x(x+z)\right]$ se surjecte sur $\mathbb{F}_2\left[\alpha, x(x+\alpha)\right]$.

Si $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2e_3)$ et $\mathrm{INV}_F(\mathbb{F}_2(e_2+e_3))$ sont non triviaux, K est isomorphe à l'intersection de

$\mathbb{F}_2[x,y,z](y+z) \oplus \mathbb{F}_2[z,x(x+z)]$ et $\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y \oplus \mathbb{F}_2[z,x(x+z)]$ auquel cas

$$K \cong \mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus (\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y \cap (\mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z))).$$

Mais, $(\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y \cap (\mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)))$ est la sous-algèbre de $\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y$ des éléments dont l'image par $(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2(e_2+e_3))})^*$ appartient à $\mathbb{F}_2[\alpha, x(x+\alpha)]$. Comme l'image de la restriction à $\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y$ de $(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2(e_2+e_3))})^*$ est $\mathbb{F}_2[\alpha,x(x+\alpha)]\,\alpha$, que $\mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y$ se surjecte sur $\mathbb{F}_2[\alpha,x(x+\alpha)]\,\alpha$ et que le noyau de la restriction à $\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y$ de $(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2(e_2+e_3))})^*$ est $\mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)y$, on a que $(\mathbb{F}_2[x,y,z]\, y \cap (\mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z))) \cong \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)y \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y$.

Et donc

$$K \cong \mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)y \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y.$$

Enfin, si aucun de ces groupes ne sont triviaux, K est isomorphe à l'intersection de $\mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)y \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y$ et de $\mathbb{F}_2[x,y,z]\, z \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]$ auquel cas

$$K \cong \mathbb{F}_2[z,x(x+z)]\, z \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)](y+z)y \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)yz.$$

Le calcul se fait comme précédemment en déterminant les éléments de $\mathbb{F}_2[z,x(x+z)] \oplus \mathbb{F}_2[x,y,z](y+z)y \oplus \mathbb{F}_2[y,x(x+y)]\, y$ dont l'image par $(\delta \oplus \iota_{\mathbb{F}_2 e_2)})^*$ appartient à $\mathbb{F}_2[y,x(x+y)]$.

BIBLIOGRAPHIE

[AW80] J. F. Adams and C. W. Wilkerson. Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra. *Annals of Mathematics*, 111(1) :95–143, 1980.

[BRS17] Georg Biedermann, Georgios Raptis, and Manfred Stelzer. *The realization space of an unstable coalgebra*, volume 393. Société mathématique de France, Paris, 2017.

[CGPS16] Nguyen Cuong, Gerald Gaudens, Geoffrey Powell, and Lionel Schwartz. On non-realization results and conjectures of N. Kuhn. *Fundamenta Mathematicae*, 234 :1–23, 01 2016.

[Dja06] Aurélien Djament. *Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne.* Theses, Université Paris-Nord - Paris XIII, December 2006.

[DW90] William G. Dwyer and Clarence W. Wilkerson. Spaces of null homotopic maps. In Miller H.-R., Lemaire J.-M., and Schwartz L., editors, *Théorie de l'homotopie*, number 191 in Astérisque, pages 97–108. Société mathématique de France, 1990.

[DW92] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson. A cohomology decomposition theorem. *Topology*, 31 :433–443, 1992.

[Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :(323–448), 1962.

[Hea20] Drew Heard. Depth and detection for noetherian unstable algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373, 2020.

[Hea21] Drew Heard. The topological nilpotence degree of a noetherian unstable algebra. *Selecta Mathematica*, 27, 05 2021.

[Hen96] Hans Werner Henn. Commutative algebra of unstable K-modules, Lannes' T-functor and equivariant mod-p cohomology. 1996(478) :189–215, 1996.

[Hen01] Hans-Werner Henn. *Cohomology of Groups and Unstable Modules over the Steenrod Algebra*, pages 55–98. Birkhäuser Basel, Basel, 2001.

[HLS93] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Math. Ann.*, 115 :(1053–1106), 1993.

[HLS95] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Localizations of unstable A-modules and equivariant mod p cohomology. *American Journal of Mathematics*, 301 :(23–68), 1995.

[KS] Mazaki Kashiwara and Pierre Shapira. *Categories and Sheaves.* Springer.

[Kuh] Nicholas J. Kuhn. The Krull filtration of the category of unstable modules over the Steenrod algebra.

[Kuh94a] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear group and the Steenrod algebra : I. *American Journal of Mathematics*, 116 :(327–360), 1994.

[Kuh94b] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear group and the Steenrod algebra : II. *K-Theory*, 8 :(395–428), 1994.

[Kuh95a] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear group and the Steenrod algebra : III. *K-Theory*, 9 :(273–303), 1995.

[Kuh95b] Nicholas J. Kuhn. On topologically realizing modules over the steenrod algebra. *Annals of Mathematics*, 141(2) :321–347, 1995.

[Kuh98] Nicholas Kuhn. Computations in generic representation theory : maps from symmetric powers to composite functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350, 01 1998.

[Kuh07] Nicholas J. Kuhn. Primitives and central detection numbers in group cohomology. *Advances in Mathematics*, 216(1) :387–442, 2007.

[Kuh13] Nicholas J. Kuhn. Nilpotence in group cohomology. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 56(1) :151–175, 2013.

[Lan87] Jean Lannes. Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires. *Cambridge University Press*, 1987.

[Lan92] Jean Lannes. Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 75 :135–244, 1992.

[LS89] Jean Lannes and Lionel Schwartz. Sur la structure des A-modules instables injectifs. *Topology*, 28(2) :153 – 169, 1989.

[LZ86] Jean Lannes and Saïd Zarati. Sur les $\mathcal{U}$-injectifs. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 19(2) :303–333, 1986.

[LZ95] Jean Lannes and Saïd Zarati. Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(2) :189–223, 1995.

[Mil84] Haynes Miller. The sullivan conjecture on maps from classifying spaces. *Annals of Mathematics*, 120(1) :39–87, 1984.

[Nag19] R. Nagpal. VI-modules in nondescribing characteristic, part I. *Algebra and Number Theory*, 13 :2151–2189, 2019.

[Qui71] Daniel Quillen. The spectrum of an equivariant cohomology ring : I and II. *Annals of Mathematics*, 94(3) :549–572, 1971.

[Rec84] D.L. Rector. Noetherian cohomology rings and finite loop spaces with torsion. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 32(2) :191–217, 1984.

[Sch94] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics, 1994.

[SE62] N.E. Steenrod and D.B.A Epstein. *Cohomology operations*. Princeton University press, 1962.

[Wei] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press.

Titre : Filtration nilpotente, catégories de foncteurs et étude du centre d'une algèbre instable noethérienne sur l'algèbre de Steenrod

Mot clés : algèbre de Steenrod, algèbres instables, filtration nilpotente, centre d'une algèbre instable, foncteurs analytiques

Résumé : Le but de cette thèse est d'appliquer à l'étude du centre d'une algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod, des outils provenant d'une équivalence de catégorie entre la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod localisée en ses objets n-nilpotents et certaines catégories de foncteur.

Nous commençons par donner une description alternative de cette équivalence de catégorie, déjà classique, et nous précisons son comportement vis à vis des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod. Plus précisément, nous introduisons une catégorie d'algèbre instable dans la catégorie de foncteur déjà mentionnée, et justifions qu'elle est équivalente à la catégorie des algèbres instables localisée en les morphismes dont les noyaux et conoyaux sont n-nilpotents.

Pour $n = 1$, cette équivalence se spécialise en une équivalence de catégorie vers la catégorie des foncteurs contravariants de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie dans celle des ensembles profinis. Nous introduisons un foncteur décalage dans cette catégorie de foncteur, correspondant au foncteur T de Lannes dans la catégorie des algèbres instables.

Après avoir introduit, une notion de centralité dans les différentes catégories de foncteur étudiées, de telle sorte que le centre d'une algèbre instable nil_n-fermée corresponde au centre du foncteur qui lui est associé, nous en déduisons un raffinement du centre d'une algèbre instable faisant intervenir la filtration nilpotente.

Enfin, nous appliquons ces résultats à l'étude du problème de classification des algèbres instables, noethériennes, nil-fermées, connexes, munies d'une structure de $H^*(V)$-comodule dont l'algèbre des éléments primitifs est une algèbre instable P fixée.

Title: Nilpotent filtration, functor categories and the study of the center of a noetherian unstable algebra over the Steenrod algebra

Keywords: Steenrod algebra, unstable algebra, nilpotent filtration, centre of an unstable algebra, analytic functors

Abstract: This thesis is concerned with the study of the centre of unstable algebra over the Steenrod algebra. We use tools that come from an equivalence of categories between the category of unstable modules over the Steenrod algebra localized by its n-nilpotent objects and some functor categories.

We start by giving an alternative description of this already classical equivalence of categories, and we explain its behaviour regarding unstable algebra. More precisely, we define a category of unstables algebra in the functor category already mentionned, and we prove this is equivalent to the category of unstable algebra localized by the morphisms whose kernel and cokernel are n-nilpotent.

For $n = 1$, this gives an equivalence with the category of contravariant functors from finite dimensional vector spaces to profinite sets. We introduce a shift functor in this category, corresponding to Lannes T functor in the category of unstable algebra.

We define a notion of centrality in the categories of functor that we study, such that the centre of a nil_n-closed unstable algebra is the same as the centre of the associated functor. Using this, we get a refinement of the centre of an unstable algebra, making use of the nilpotent filtration.

Finally, we use those results to study the classification of noetherian, nil-closed, connected, $H^*(V)$-comodules in the category of unstable algebra, whose primitive elements are a fixed unstable algebra P.