THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Marine MAROLLEAU

Champs de Lévy additifs spectralement positifs et processus de branchement multi-types continus

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 20 octobre 2020 à 16h
Unité de recherche : LAREMA, UMR CNRS 6093
Thèse N° : 184286

Rapporteurs avant soutenance :

Romain ABRAHAM	Professeur, Institut Denis Poisson, Université d'Orléans
Xiaowen ZHOU	Professeur, Université Concordia

Composition du jury :

Présidente :	Lioudmila VOSTRIKOVA	Professeur, Université d'Angers
Examinateurs :	Vincent BANSAYE	Professeur, Polytechnique
	Quansheng LIU	Professeur, Université Bretagne-Sud
Directeur de thèse :	Loïc CHAUMONT	Professeur, Université d'Angers

Remerciements

Ce manuscrit clôt mes trois années de doctorat ès mathématiques au laboratoire angevin de recherche en mathématiques (LAREMA) à l'université d'Angers. Comme il est d'usage, je profite de ces quelques lignes pour exprimer mes remerciements et ma gratitude aux personnes m'ayant accompagnée durant cette aventure.

Avant de commencer, je tiens à remercier l'Ecole Normale Supérieure (ENS) de Rennes de m'avoir préparée au mieux, en particulier pour le concours de l'agrégation, et pour m'avoir offert diverses possibilités quant à la poursuite de mes études. Plus particulièrement, je leur suis reconnaissante de m'avoir permis de bénéficier d'une bourse de thèse spécifique normaliens (CDSN) et par conséquent d'avoir permis la réalisation de cette thèse.

J'en viens maintenant aux remerciements plus personnels et spécifiques des personnes ayant pris le relais et m'ayant aidée et supportée pendant mon doctorat.

Je remercie Loïc pour m'avoir encadrée pendant mes stages de fin d'années de Master puis pendant ma thèse. Merci pour son soutien, son aide, sa patience et sa bonne humeur. Malgré nos emplois du temps pas toujours faciles et souvent non-synchronisés, je lui sais gré d'avoir systématiquement pris le temps de m'écouter exposer mes idées parfois très farfelues, de m'expliquer des notions que je n'avais pas comprises, de m'aiguiller avec de nouvelles idées, de m'introduire de nouveaux résultats et outils nécessaire à l'avancée de mes travaux et ... de recommencer quand je revenais raconter les mêmes âneries encore et encore, merci. Mais plus encore, un grand merci pour ses nombreuses et pointilleuses relectures de mes essais pouvant se révéler fantaisistes, de nos articles et surtout de ce manuscrit. Je tiens aussi à le remercier de l'opportunité qu'il m'a donnée d'aller à Mexico, mon premier voyage hors de l'union européenne, pour donner des séances d'exercices en anglais à des étudiants mexicains parlant espagnol. Ce fut une expérience un peu stressante mais vraiment très enrichissante. Pour tout ça et plus encore, un grand merci.

Je profite de cette occasion pour remercier personnellement Maria Emilia Caballero et Geronimo Uribe Bravo pour leur accueil à Mexico, leur convivialité et leurs petites visites touristiques.

Revenons sur Angers, lieu principal de mes travaux de recherche de thèse. Quelque soit le sujet, une thèse ne saurait se dissocier des collègues doctorants. Merci à mes premiers co-bureaux Clément Fromenteau et Alexis Roquefeuil, ainsi qu'à Johan Leray (du bureau d'à côté), pour leur aide quant aux questions administratives de début de thèse et pour m'avoir aidée à m'intégrer au sein du laboratoire. Je remercie également la seconde série de co-bureaux Alexis Roquefeuil (encore), Théo Jamin et Ouriel Bloede pour la bonne ambiance, pas toujours très sérieuse, du bureau et les pauses déjeuner ludiques faites de petites parties de bridge. Je remercie également tous les autres doctorants Le Li, Jérôme Spielmann, Ann Du crest de Villeneuve, Axel Supersac, Sofia Taricorne, David Kern, François Bernard, Maxime Egea, Antoine Boivin et Eunice Okome Obiang pour l'ambiance de travail, les pauses déjeuners pleines de débats pas toujours très instructifs ainsi que pour les sorties au bar et aux restaurants nous permettant de penser à autres choses qu'aux mathématiques .... enfin pas toujours. Bonne chance à tous pour vos continuations que ce soit dans la fin de doctorat, la recherche, l'enseignement ou l'entreprise mais aussi et particulièrement dans vos vies personnelles.

Pour faire une thèse, il faut aussi un laboratoire ; c'est pourquoi je remercie le LAREMA, et plus particulièrement l'équipe probabiliste, de m'avoir acceptée dans son équipe pour mes trois années de thèse. Plus personnellement, je remercie Alexandra Le Petitcorps pour son aide sans faille, son travail efficace et rapide, pour les réservations de billets d'avion, de train, les nuitées d'hôtels : merci de rendre nos différents déplacements pour les séminaires et les conférences possibles en traitant toujours plus d'ordres de missions. Mais plus encore, merci pour ta bonne humeur, nos discussions

amicales et les pauses cafés. Merci aussi de m'avoir trainée au CAF pendant ma troisième année. Je tiens aussi à remercier Jacquelin Charbonnel toujours disponible pour régler nos soucis informatiques avec le sourire et Mohammed El Amrani pour le temps passé à définir les services d'enseignements et à rédiger ou signer les papiers, pas toujours très compréhensibles, nécessaires pour ma titularisation.

Lors de ma thèse, j'ai eu l'occasion d'aller à Mexico (comme je l'ai dit plus haut) mais également à Athènes et Samos pour la conférence internationale sur les processus de Lévy. En ce qui concerne cette deuxième conférence, je tiens à remercier Thomas Pellas pour son enthousiasme et ses discussions enrichissantes. De plus, je souhaite remercier Sandra Palau pour m'avoir expliquer ses articles afin de m'éclaircir les idées et de me permettre de mieux avancer dans la suite de mes travaux de recherche. Je vous souhaite à tous deux une bonne continuation dans le doctorat, pour l'un, et dans la recherche, pour l'autre.

Je remercie également Piotr Graczyk et Liu Quansheng pour avoir accepté de faire parti de mon comité de suivi de thèse.

Merci à mes deux rapporteurs Romain Abraham et Xiaowen Zhou pour les relectures et les commentaires de mon manuscrit.

Merci aussi à tous les membres du jury d'avoir pris le temps d'assister à ma soutenance et de participer à la fin de cette aventure.

Merci à toutes les personnes qui sont venues, et qui ont pu, assister à cette soutenance malgré les conditions sanitaires.

Pour finir, d'un point de vue personnel, je souhaite remercier mes parents, mes soeurs, ma famille et mes amis pour m'avoir aidée à donner le meilleur de moi-même, s'être intéressés à ma thèse même si, pour certains, ils n'y comprenaient pas grand chose et de m'avoir permis de me changer les idées. Plus particulièrement, merci à mes deux Didishou pour leurs relectures de ce manuscrit. Encore merci à Clément pour son soutien et son amour et pour m'avoir supportée moi et mon stress en cette fin de doctorat.

Merci encore à vous tous ainsi qu'à tous ceux que j'aurais pu oublier.

Marine Marolleau.

Table des matières

Notations **8**

I Tour d'horizon sur les processus de branchement continus et certains champs de Lévy **9**

Introduction **12**

1 Processus de branchement en temps continu **13**
1.1 Extinction du processus : condition de Grey 14
1.2 Représentation de Lamperti 16
1.3 Théorie des fluctuations pour les processus de Lévy spectralement positifs 18
1.3.1 Processus de Lévy spectralement positif 18
1.3.2 Temps d'atteinte des niveaux négatifs 20
1.3.3 Retour sur la condition de Grey 21
1.4 Applications de la représentation de Lamperti 23

2 Cas multi-types continu **25**
2.1 Extinction du processus 26
2.2 Représentation de Lamperti 27
2.3 Théorie des fluctuations pour les champs de Lévy additifs spectralement positifs . . . 28
2.3.1 Champ de Lévy additif spectralement positif 29
2.3.2 Temps d'atteinte des niveaux négatifs 30
2.3.3 Champ $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ 33
2.4 Applications de la représentation de Lamperti 36
2.4.1 Temps d'atteinte du cLasp $\mathbf{X}$ et intégrale du PBCM Z 36
2.4.2 Condition de Grey multi-types 37

Conclusion **42**

II A stopover in the continuous multi-types case **43**

Introduction **45**

3 Fluctuation theory for spectrally positive additive Lévy fields **47**
3.1 A preliminary lemma in the deterministic setting 48
3.2 Fluctuation theory for additive Lévy fields 49
3.2.1 SpaLf's and their first hitting times 50
3.2.2 Inverting the Laplace transform of spaLf's 53
3.2.3 Asymptotic behaviour of spaLf's 56
3.3 On the distribution of the field $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ 58
3.3.1 Characterization through the Laplace transform 59
3.3.2 An explicit form of the distribution 61

3.4 Appendix 67

4 Stop the spaLf in the d-dimensional Lamperti representation **71**
4.1 A preliminary lemma in the deterministic setting 72
4.2 Some reminders about MCBP's and spaLf's 74
4.3 Stop the spaLf 77

5 Extinction times of multi-type, continuous-state branching processes **79**
5.1 Preliminary results on MCSBP's and spaLf's 80
5.1.1 Basics on MCSBP's 80
5.1.2 Some reminders on spaLf's 82
5.2 Main results 84
5.3 Proof of Propositions 5.2.1 and 5.2.2 86
5.4 Proof of Theorem 5.2.1 88

Conclusion **93**

Références **96**

Notations

Ce manuscrit comporte différentes abréviations et notations. Bien que la majorité d'entre elles soient couramment usitées et qu'elles soient toutes introduites proprement dans le texte quand nécessaire, nous les reprenons ici afin que le lecteur puisse facilement y retrouver leur sens au besoin.

Commençons par les quelques acronymes qui parsèment ces pages.

Abréviation	**Signification**	**Page**
PB	processus de branchement	p.11
càdlàg	continu à droite avec des limites à gauche	p.13
PBCD	PB en temps continu et espace discret	p.13
PBC	PB en temps et espace continus	p.13
PBMCD	PB multi-types en temps continu et espace discret	p.25
PBCM	PBC multi-types	p.25
d-PBCM	PBCM à d types	p.25
PL	processus de Lévy	p.18
PLsp	PL spectralement positif	p.19
TA	Temps d'atteinte	p.20
cLasp	champ de Lévy additif spectralement positif	p.29

Rappelons maintenant la notation des objets mathématiques récurrents de ce manuscrit.

Lettre	**Objet mathématique**
Z	1-PB continu (ou discret)
u	exposant de Laplace d'un PBC
$\mathrm{Z} = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(d)})$	d-PB continu (ou discret)
$\mathrm{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$	exposant de Laplace d'un PBCM
X	PL réel
$\mathrm{X} = (X^1, \dots, X^d)$	PL d-dimensionnel
φ	exposant de Laplace d'un PL (réel ou d-dimensionnel)
T	TA du PL X
ϕ	exposant de Laplace de T
$L(r, X)$	représentation de Lamperti 1-dimensionnelle
$\mathbf{X}$	cLasp
$\mathbb{X}$	la matrice "essentiellement positive" associée aux cLasp
$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$	exposant de Laplace d'un cLasp
$\mathbf{T}$	champ des TA du cLasp $\mathbf{X}$
$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)$	exposant de Laplace du champ $\mathbf{T}$
$L(\mathrm{r}, \mathbf{X})$	représentation de Lamperti d-dimensionnelle

Finissons avec les quelques autres notations déterministes apparaissant fréquemment dans les résultats et les preuves.

Notation	**Signification**
x	point de $\mathbb{R}$
$\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$	vecteur de $\mathbb{R}^d$
e_i	i^e vecteur unité de $\mathbb{R}^d$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$
$\lvert \cdot \rvert$	norme euclidienne associée
$[d]$	$\{1, \ldots, d\}$ où $d \in \mathbb{N}^\star$
$\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$	$\forall i \in [d], x_i \leq y_i$
$\mathrm{x} < \mathrm{y}$	$\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ et $\exists i \in [d], x_i < y_i$
$\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$	produit spécial sur les matrices, p.34
$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$	vecteur nul de $\mathbb{R}^d$, p.26
$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$	vecteur unité de $\mathbb{R}^d$

Dans le cas où certaines notations n'auraient pas été introduites ici, nous insistons sur le fait que, pour faciliter la compréhension et la distinction entre les différents objets, chaque notation de ce manuscrit observe la règle suivante. Nous distinguerons les objets mathématiques uni-dimensionnels, représentés par une lettre "classique" (exemple : x ou X), des mêmes objets multi-dimensionnels, représentés par la même lettre "droite" (ex. : x ou X). De même, nous introduisons une notation spécifique aux champs, i.e. aux processus stochastiques indexés par des vecteurs de dimension $d \geq 2$, que nous représenterons par des lettres "en gras" (ex. $\mathbf{X}$). Les seules exceptions sont le vecteur nul et le vecteur unité de $\mathbb{R}^d$.

Première partie

Tour d'horizon sur les processus de branchement continus et certains champs de Lévy

Introduction

Dans la première partie de ce manuscrit, nous introduisons la notion de *processus de branchement (PB) continu multi-types* et quelques résultats asymptotiques. Ces modèles en temps et espace discrets ont été introduits, dans les années 1845, indépendamment par le mathématicien français I.J. Bienaymé (1796-1878), qui se demandait pourquoi la population aristocratique française diminuait alors que la population du pays était en pleine croissance, et par les mathématiciens britanniques F. Galton (1822-1911) et H.W. Watson (1827-1903), dans les années 1870, qui voulaient répondre à l'inquiétude de leurs compatriotes nobles quant à la possible disparition de leurs patronymes. Afin d'apporter des réponses à ces questions, ces mathématiciens ont défini une certaine famille de processus stochastiques, appelés *processus de Bienaymé-Galton-Watson*. Ils correspondent à la classe des PB en temps et espace discrets, dits par la suite PB discrets pour simplifier. Cette famille de processus permet la modélisation d'une évolution de population dans laquelle les individus sont tous indépendants et se reproduisent de la même "façon", c'est-à-dire avec la même loi de reproduction. Ils peuvent aussi représenter une évolution cellulaire ou une propagation épidémiologique. Ces PB discrets ont été énormément étudiés et, aujourd'hui, nous possédons de nombreux résultats sur leurs comportements asymptotiques (extinction, croissance exponentielle), voir [3] et [24]. De plus, il existe différents codages et représentations qui permettent de ramener l'étude de ces PB discrets à celle d'autres objets mathématiques. En particulier, il est possible de représenter les PB discrets par des marches aléatoires ne décroissant que par sauts de taille un, dites à décroissance unitaire, via la représentation de Lamperti. Cette représentation permet de ramener l'étude des processus de Bienaymé-Galton-Watson à celle des marches aléatoires, bien connues.

Néanmoins, les premières limites de ce modèle d'évolution de population se dressent rapidement. En effet, dans le cadre d'une évolution cellulaire, par exemple, il semble assez audacieux de négliger les différentes mutations de la cellule pouvant apparaître lors de chaque division cellulaire. De même pour un modèle épidémiologique, nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce que la contamination d'une cellule puisse entraîner une modification dans sa "façon" de se diviser ou plus spécifiquement, que chaque étape de la contamination de la cellule puisse entraîner un changement de comportement. Pour prendre en compte ces considérations, il nous suffit de différencier les individus par un "type" qui caractérise leur état et donc leur loi de reproduction. Par exemple, dans le cas de la contamination cellulaire, nous pouvons distinguer les différents stades de contamination de la cellule comme suit : une cellule saine porte le type 1, une cellule porteuse saine le type 2 et une cellule malade le type 3. Ainsi une cellule de type 2 donnera plus facilement qu'une cellule de type 1 une cellule de type 3. Ces processus sont appelés *PB multi-types discrets* ou *d-PB discrets* avec $d \geq 1$ un entier correspondant au nombre de types présents dans la population. Tout comme leurs homologues à un type, les PB multi-types discrets ont aussi fait couler beaucoup d'encre. En particulier, il a été montré que des résultats comportementaux analogues à ceux portant sur les 1-PB discrets étaient satisfaits par cette nouvelle classe de PB, voir par exemple chapitre V de [3]. Pour finir, nous précisons qu'il est possible de généraliser la représentation de Lamperti au cas multi-types en considérant une matrice "essentiellement à décroissance unitaire" de marches aléatoires. C'est-à-dire une matrice dont les entrées diagonales soient des marches aléatoires dites à décroissance unitaire, et des entrées non diagonales qui soient des marches aléatoires croissantes. De même que précédemment, l'étude des PB multi-types discrets peut alors être ramenée à celle de matrices de marches aléatoires.

Une autre généralisation, indépendante de la première, apparaît dans les années 1960 avec les mathématiciens M. Jiřina [26] et J. Lamperti [37],[36], elle permet d'étendre l'utilisation des PB au

cas d'évolution de population dans laquelle les individus n'ont pas tous le même temps de vie. L'idée est alors d'associer à chaque individu un temps de vie aléatoire indépendant de celui des autres. C'est ainsi que nous obtenons la classe des *PB en temps continu et espace discret*. Ces mêmes auteurs ont montré que ces nouveaux PB en temps continu et espace discret pouvaient être construits comme limite d'une suite de PB discrets par un changement de temps. Si de plus, nous effectuons un changement d'espace, la limite obtenue sera alors un *PB en temps et espace continus*, que nous appellerons simplement *processus de branchement continu*. Les PB en temps continu peuvent modéliser des évolutions de concentration de solutions pour lesquelles le temps discret serait trop grossier. Quand l'espace d'états de ces PB en temps continu est lui même continu, la population modélisée est alors à grand effectif. En particulier, il ne nous est plus permis de distinguer les individus. Une fois encore, plusieurs mathématiciens ont montré que les résultats déjà connus pour les PB discrets s'étendaient à ces nouveaux processus en temps continu. En particulier, il existe là encore une représentation de Lamperti [35], qui encode le PB en temps et espace continus, avec l'analogue en temps continu des marches aléatoires à décroissance unitaire, qui n'est autre que les processus de Lévy sans sauts négatifs, dits spectralement positifs. Quand l'espace d'états du PB en temps continu est discret, les processus de Lévy associés sont des processus de Poisson composés à décroissance unitaire. La différence majeure entre les comportements des PB à espace d'états discret et ceux à espace d'états continu réside dans le fait que quand l'espace est continu, le PB peut s'éteindre, c'est-à-dire atteindre zéro, en un temps fini ou à l'infini alors que quand l'espace est discret, il ne peut s'éteindre qu'en un temps fini. Il nous est possible de caractériser le "mode" d'extinction du PB continu grâce à la condition de Grey [23].

Nous en arrivons maintenant aux *PB multi-types continus* qui constituent le cœur de mes travaux de thèse. Ils sont obtenus en combinant les deux généralisations des processus de Bienaymé-Galton-Watson citées ci-dessus. Ils modélisent donc une évolution de population à très grand effectif, indexée par les réels, prenant des valeurs réelles et dans laquelle le comportement d'un individu est indépendant de celui des autres et est caractérisé par le type porté par cet individu. L'objectif de mon doctorat était de les étudier via la représentation de Lamperti afin d'aboutir à une généralisation multi-types de la condition de Grey [23]. Ces travaux sont expliqués en détails dans la deuxième partie de ce manuscrit et sont divisés en deux grands axes. Le premier, voir le chapitre 3, vise à établir des résultats de la théorie des fluctuations des champs de Lévy additifs spectralement positifs, définis dans la partie 1.3.1 et généralisant les processus de Lévy sans sauts négatifs apparaissant dans la représentation de Lamperti unidimensionnelle. Ces premiers travaux constituent un travail préliminaire à celui du second axe de recherche de ma thèse ayant pour but d'étudier les différents "modes" d'extinction du PB multi-types continu afin d'établir une condition de Grey multi-types, voir le chapitre 5.

La première partie de ce manuscrit est donc constituée de deux chapitres visant à introduire plus spécifiquement les notions et notations nécessaires et à énoncer les résultats qui ont constitué mes travaux de thèse, concernant les champs de Lévy additifs spectralement positifs et les PB continus à d types, avec $d \geq 1$. Le cas $d = 1$ est déjà bien connu et est rappelé ici pour un souci de clarté. Mon travail n'a concerné que le cas multi-types. Bien que le comportement des PB multi-types continus ait déjà été étudié sans utiliser la représentation de Lamperti d-dimensionnelle, nous retrouvons ici certains résultats en utilisant les champs de Lévy additifs spectralement positifs. En revanche, aucun résultat n'avait encore été publié sur une condition de Grey multi-types qui permettrait de distinguer les cas où le PB multi-types continu s'éteint en temps fini des cas où il s'éteint à l'infini.

Chapitre 1

Processus de branchement en temps continu

Commençons par l'étude des processus de branchement continus à un seul type, autrement dit dans tout ce chapitre $d = 1$ et tous les individus portent le type un. Ces processus peuvent modéliser l'évolution d'une population dans laquelle les individus se reproduisent de manière indépendante, selon la même loi de probabilité et ont un temps de vie aléatoire et indépendant de celui des autres. Quand l'espace d'états est continu, la population modélisée est à très grand effectif, il ne nous est alors plus permis de distinguer les individus. Un tel processus sera noté $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$, il est indexé par les réels positifs $t \in \mathbb{R}_+$. Du point de vue modélisation, pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$, Z_t peut être vu comme la "masse" d'individus composant la population au temps t. Notons que pour qu'un tel processus soit un processus de Markov, il est nécessaire que les temps de vie aléatoires soient indépendants et de loi exponentielle.

Nous appellerons *processus de branchement en temps continu* un processus de Markov fort $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$, indexé par les réels, à valeurs dans $[0, \infty)$, dont les trajectoires sont continues à droite avec des limites à gauche (càdlàg) et qui vérifie la *propriété de branchement* suivante

Définition 1.0.1. *Pour tout $t \geq 0$ et tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+$, Z sous la probabilité $\mathbb{P}_{z_1+z_2}$ a la même loi que la somme $Z_1 + Z_2$ où Z_1 et Z_2 sont des PB en temps continu indépendants tels que, pour tout $i \in [2]$, Z_i a la même loi que Z sous $\mathbb{P}_{z_i}$.*

Autrement dit, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\lambda, z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}_{z_1+z_2}[e^{-\lambda Z_t}] = \mathbb{E}_{z_1}[e^{-\lambda Z_t}]\mathbb{E}_{z_2}[e^{-\lambda Z_t}]. \tag{1.1}$$

Précisons qu'à partir de maintenant, pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}_z$ et $\mathbb{E}_z$ désignent respectivement la probabilité et l'espérance sous la loi conditionnée par $Z_0 = z$.

Dans la suite, nous serons parfois amenés à distinguer les *processus de branchement en temps continu et espace discret* (PBCD) avec probabilités de transition $P := \{P_n : n \geq 0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, des *processus de branchement en temps et espace continus*, aussi appelés *processus de branchement continus* (PBC), avec probabilités de transition $P := \{P_x : x \geq 0\}$ et à valeurs dans $[0, \infty)$.

Les PBC ont été introduits par M. Jiřina [26] et par J. Lamperti [36]. Ils ont montré que ces processus peuvent être obtenus comme limite de processus de Bienaymé-Galton-Watson en effectuant un changement de temps et d'espace. Sous réserve que ces changements de temps et d'espace soient assez "gentils", il semble raisonnable de penser que nous puissions généraliser tout ou partie des résultats obtenus pour les processus de Bienaymé-Galton-Watson, que ce soit leur extinction, leur croissance exponentielle ou la distribution de leur population totale. Après ces premiers articles prouvant leur existence, les PBC ont fait l'objet de nombreux autres articles comme ceux de S. Watanabe [44], [45] ou encore E. Seneta et D. Vere-Jones [39]. L'un des résultats qui nous intéresse particulièrement est la représentation de Lamperti, due au mathématicien éponyme J. Lamperti, parue dans l'article [35] en 1967. Cette représentation nous donne une égalité trajectorielle entre le PBC Z et un *processus de Lévy sans sauts négatifs*, dit *spectralement positif* (PLsp) X. En fait, elle définit une bijection entre l'ensemble des PBC et celui des PLsp. Quand le PBC Z est à valeurs

discrètes, le PL X associé par cette représentation est alors un processus de Poisson composé à décroissance unitaire, c'est-à-dire ne décroissant que par sauts de taille un. En temps discret, la représentation de Lamperti permet d'établir aisément l'égalité presque sûre entre la population totale du PBC Z et le premier temps d'atteinte de $-Z_0$ par la marche aléatoire associée. Ce résultat peut également être obtenu de manière constructive en utilisant la représentation des PB à espace discret par des forêts de branchement et le codage de Lukasiewick-Harris. Il se trouve que le codage de Lukasiewick-Harris permet une définition trajectoire par trajectoire de la marche aléatoire à décroissance unitaire apparaissant dans la représentation de Lamperti discrète. Aussi après avoir introduit plus précisément la représentation de Lamperti, nous étudierons la théorie des fluctuations des PLsp afin d'établir un tel résultat concernant le PBC Z.

Dans tout ce qui suit, nous serons amenés à considérer la loi de Z. La propriété de branchement (1.1) nous assure l'existence d'un unique exposant de Laplace u caractérisant cette loi, cf. (2) dans [35]. Il est défini par

$$\mathbb{E}_r[e^{-\lambda Z_t}] := e^{-ru_t(\lambda)}, \quad \forall r, t, \lambda \geq 0. \tag{1.2}$$

Par définition, u est une fonction positive, croissante, continue et différentiable en λ. De plus, voir (3) dans [35], elle satisfait à la propriété de semi-groupe

$$u_{t+s}(\lambda) = u_t(u_s(\lambda)), \ \ \forall \lambda, t, s \geq 0. \tag{1.3}$$

1.1 Extinction du processus : condition de Grey

Avant d'utiliser la représentation de Lamperti pour étudier la loi du supremum du PBC, nous allons étudier l'explosion et l'extinction du PBC Z en utilisant son exposant de Laplace. Tout d'abord, en utilisant la propriété de branchement, il est aisé de vérifier que les états 0 et ∞ sont *absorbants*. C'est-à-dire que s'il existe $t \geq 0$ tel que $Z_t = 0$ ou $Z_t = \infty$, alors pour tout $s \geq 0$, $Z_{t+s} = 0$ ou $Z_{t+s} = \infty$ respectivement. Nous allons caractériser ces différents comportements asymptotiques par des conditions nécessaires et suffisantes. En particulier, nous allons lier les comportements asymptotiques de Z avec les comportements aux limites de son exposant de Laplace u. Les différents résultats évoqués ci-après sont explicités et démontrés, par exemple, dans le livre [32] de A.E. Kyprianou ainsi que dans l'article [23] de D.R. Grey.

Commençons par écrire les différentes probabilités d'extinction et d'explosion en fonction de l'exposant de Laplace u du PBC Z. Rappelons que par définition (1.2), la fonction u est positive, croissante, continue et différentiable en λ. En fait, elle est aussi différentiable en t et nous pouvons caractériser sa dérivée partielle.

Théorème 1.1.1. *Soient Z un PBC et u son exposant de Laplace défini par* (1.2)*, alors pour tout $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto u_t(\lambda)$ est différentiable sur $[0, \infty)$. De plus,*

$$(S_\varphi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_t}{\partial t}(\lambda) & = -\varphi \circ u_t(\lambda) \\ u_0(\lambda) & = \lambda \end{cases} .$$

La fonction φ est appelée mécanisme de branchement *de Z. De plus, φ est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement positif.*

Il existe différentes preuves de ce résultat. La première dans l'article de M.L. Silverstein [40] très analytique utilisant entre autres les fonctions complètement monotones. Plus récemment, dans l'article [11], M.E. Caballero, A. Lambert et G. Uribe Bravo montrent ce résultat (propositions 2 et 3) plus simplement en utilisant seulement les propriétés de branchement (1.1) et de semi-groupe (1.3) ainsi qu'une certaine convergence de mesures de probabilités infiniment divisibles.

Cette équation aux dérivées partielles nous permet de lier les limites en 0 et en l'infini de u avec les comportements en 0 et en l'infini du mécanisme de branchement φ. C'est ce mécanisme de branchement qui va nous permettre de caractériser les différents comportements asymptotiques du PBC Z.

Commençons par caractériser l'explosion du PBC Z. Par définition de l'exposant de Laplace u, nous pouvons montrer, en faisant tendre λ vers zéro dans (1.2), que pour tout $t \geq 0$ et $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}_r(Z_t < \infty) = e^{-ru_t(0)}\,.$$

Dans la suite, nous supposerons que le PBC Z n'explose pas en temps fini, c'est-à-dire que $u_t(0) := \lim_{\lambda \to 0} u_t(\lambda) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Nous dirons alors que le PBC Z est *conservatif*. Après calcul, [23] montre que le PBC Z est conservatif si et seulement si $\int_{0^+} \frac{1}{|\varphi(\lambda)|} d\lambda = +\infty$ et précise qu'une condition nécessaire est $\varphi(0) = 0$ et qu'une condition suffisante est $\varphi(0) = 0$ et $|\varphi^{'}(0)| < +\infty$.

Maintenant, il nous reste à distinguer les comportements asymptotiques du PBC Z et par conséquent à caractériser son extinction. Nous avons ici la première grande différence entre le cas des PB à espace continu et ceux à espace discret. En effet, contrairement aux PB à espace discret qui ne peuvent s'éteindre qu'en un temps fini, un PB à espace d'états continu peut s'éteindre à l'infini dans le sens où, sous certaines hypothèses, avec probabilité positive :

$$\forall t \geq 0,\ Z_t > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} Z_t = 0\,.$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique d'un PBC Z, il nous faut dans un premier temps établir quand ce processus s'éteint, puis distinguer les cas d'extinction en un instant $t \geq 0$ fini, c'est-à-dire quand $Z_t = 0$, des cas d'extinction à l'infini. Notons que l'extinction de Z se traduit, là encore, sur son exposant de Laplace u. En effet, quand λ tend vers l'infini dans (1.2), nous obtenons pour tout $t, r \geq 0$

$$\mathbb{P}_r(Z_t = 0) = e^{-ru_t(\infty)}$$

où $u_t(\infty) := \lim_{\lambda \to +\infty} u_t(\lambda)$. De plus, pour tout $r \geq 0$, la probabilité que le PBC Z s'éteigne en un temps fini est

$$q_r := \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}_r(Z_t = 0)\,.$$

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes permettant de distinguer les différents cas d'extinction en fonction du comportement du mécanisme de branchement φ. C'est la condition de Grey, publiée par le mathématicien éponyme dans l'article [23], cf. théorème 1.

Théorème 1.1.2. *Soit Z un PBC de mécanisme de branchement φ, alors*

1. *soit $\varphi(\infty) := \lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = -\infty$ et $q_r = 0$ pour tout $r \geq 0$,*
2. *soit $\varphi(\infty) = \infty$, dans ce cas :*

$$q_r > 0 \text{ pour un } r \geq 0 \text{ (et donc pour tous) si et seulement si } \int^{\infty} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda < +\infty.$$

Sous cette condition, $q_r = e^{-r\phi(0)}$ où $\phi(0) := \sup\{\lambda \geq 0 : \varphi(\lambda) = 0\}$.

La preuve de ce théorème repose sur une étude du comportement asymptotique du mécanisme de branchement φ. Pour le deuxième point, remarquons que pour tout $0 \leq s \leq t$, nous avons $\{Z_s = 0\} \subset \{Z_t = 0\}$ et par conséquent, $\mathbb{P}_r(Z_s = 0) \leq \mathbb{P}_r(Z_t = 0) \leq q_r$. De plus $\mathbb{P}_r(Z_t = 0) > 0$ si et seulement si $\lim_{\lambda \to +\infty} u_t(\lambda) < +\infty$. En utilisant le théorème 1.1.1, nous obtenons que

$$\int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial t} u_s(\lambda)}{-\varphi(u_s(\lambda))} ds = t$$

et en effectuant le changement de variable $\xi = u_s(\lambda)$, nous nous ramenons à une intégrale de φ. C'est l'étude de cette intégrale qui nous donne le résultat.

Une première conséquence de ce théorème est la généralisation de la trichotomie classifiant les comportements asymptotiques des PBD aux PBC. Nous retrouvons alors des PBC sous-critiques,

critiques et sur-critiques. En revanche, contrairement au cas discret, la valeur de $\varphi'(0)$ ne suffit plus à caractériser l'extinction en temps fini du PBC. Il faut y ajouter une condition d'intégrabilité en l'infini portant sur le mécanisme de branchement φ.

Corollaire 1.1.1. *Soit Z un PBC de mécanisme de branchement φ tel que*

$$\varphi(\infty) = +\infty \text{ et } \int^{\infty} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda < \infty$$

alors $q_r < 1$ pour un $r > 0$ (et donc pour tous) si et seulement si $\varphi'(0^+) < 0$.

Pour conclure, et pour plus de clarté, résumons les différents résultats obtenus à l'aide d'un tableau. Soit Z un PBC issu de $r \geq 0$ et de mécanisme de branchement φ alors son comportement asymptotique est régi par le tableau suivant :

Mécanisme de branchement	q_r
$\varphi(\infty) := \lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) < 0$	0
$\varphi(\infty) = \infty, \int^{\infty} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda = \infty$	0
$\varphi(\infty) = \infty, \int^{\infty} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda < \infty, \varphi'(0^+) < 0$	$e^{-r\phi(0)} \in (0,1)$
$\varphi(\infty) = \infty, \int^{\infty} \frac{1}{\varphi(\lambda)} d\lambda < \infty, \varphi'(0^+) \geq 0$	1

Rappelons que q_r représente ici la probabilité que le PBC Z s'éteigne en un temps fini. Il est normal que cette probabilité soit nulle quand le PBC Z s'éteint à l'infini qui est un sous-cas de la deuxième ligne du tableau. En revanche, comme dit précédemment, nous n'avons plus équivalence entre l'extinction en un temps fini p.s. du PBC Z et $\varphi'(0) \geq 0$.

Nous dirons que le PBC Z est *critique*, *sous-critique* ou *sur-critique* suivant que $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ ou $\varphi'(0) < 0$. Contrairement au cas discret, où cette trichotomie distingue les comportements asymptotiques presque sûrs du PBD Z, en temps continu, elle porte maintenant sur l'espérance du PBC Z. En effet, le PBC Z est critique, sous-critique ou sur-critique suivant que $\mathbb{E}_r[Z_t] = r$, $< r$ ou $> r$.

1.2 Représentation de Lamperti

Maintenant que nous sommes capables de caractériser l'explosion et l'extinction de Z, voyons s'il est possible d'obtenir des informations sur la "population totale" comme dans le cas discret. En temps et espace discrets, il existe une représentation de Lamperti permettant d'exprimer le processus de Bienaymé-Galton-Watson à l'aide d'une marche aléatoire à décroissance unitaire, c'est-à-dire qui ne décroît que par sauts de taille un. Si il est possible de généraliser ce résultat en temps continu, nous pouvons nous attendre à ce que le PBC Z soit codé par l'analogue en temps continu des marches aléatoires. Associons à un PBC Z un processus de Lévy X. Les définitions ainsi que certains résultats sur les processus de Lévy sont rappelés dans la partie suivante 1.3.

Soient Z un PBC et $T_0^Z := \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}$ son premier temps d'atteinte de 0. Posons pour tout réel $t \geq 0$,

$$J_t := \begin{cases} \int_0^t Z_s ds & \text{si} \quad t < T_0^Z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction J est continue et strictement croissante pour $t < T_0^Z$, elle est donc inversible, d'inverse

J^{-1}. Nous définissons alors le processus suivant

$$X_t := \begin{cases} Z_{J_t^{-1}} & \text{si} \qquad t < \int_0^{T_0^Z} Z_s ds = \int_0^{+\infty} Z_s ds \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Le processus X ainsi défini est un processus de Lévy sans sauts négatifs stoppé quand il atteint 0. Réciproquement, soit X un processus de Lévy sans sauts négatifs issu de $X_0 = r > 0$ et vérifiant $\int_0^{+\infty} \frac{du}{X_u} < +\infty$ p.s., cette condition est vérifiée si X ne tend pas vers l'infini trop vite ou encore si l'espérance de ses accroissements est finie. Posons $T_0^X := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$, comme X n'a pas de sauts négatifs et que ses trajectoires sont càdlàg (par définition d'un processus de Lévy), T_0^X correspond à son premier temps d'atteinte de zéro. Pour tout réel $t \geq 0$, nous définissons la fonction

$$I_t := \begin{cases} \int_0^t \frac{du}{X_u} & \text{si} \qquad t < T_0^X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La fonction I est continue et strictement croissante pour $t < T_0^X$ et par conséquent inversible, d'inverse I^{-1}. Nous pouvons alors définir le processus suivant

$$Z_t := \begin{cases} X_{I_t^{-1}} & \text{si} \qquad I_t^{-1} < T_0^X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Le processus Z ainsi défini est un PBC. De plus, remarquons que ces deux constructions sont en fait inverse l'une de l'autre. Autrement dit, la fonction I est l'inverse de la fonction J. En conclusion, nous obtenons une égalité trajectorielle entre un PBC Z et un certain processus de Lévy sans sauts négatifs X via un changement de temps. Ce résultat a été énoncé pour la première fois en 1967 dans l'article [35] du mathématicien J. Lamperti, voir théorèmes 1 et 2. Il établit une bijection entre l'ensemble des PBC et celui des processus de Lévy sans sauts négatifs (PLsp). C'est la *représentation de Lamperti.*

Théorème 1.2.1. *Soit X un processus de Lévy sans sauts négatifs issu de 0 et $r \geq 0$ alors le système*

$$L(r, X) \qquad Z_t = r + X\left(\int_0^t Z_s ds\right), \quad t \geq 0$$

admet une unique solution Z issue de r. De plus, le processus Z ainsi défini est un PBC.

Réciproquement, pour tout PBC Z issu de r, il existe un PLsp X tel que Z soit l'unique solution du système de Lamperti $L(r, Z)$ défini ci-dessus.

Le lecteur trouvera une preuve de ce théorème dans l'article de M.E. Caballero, A. Lambert et G. Uribe Bravo [11] où les auteurs démontrent le résultat en utilisant les martingales et la résolution d'une équation différentielle stochastique.

Lors de la démonstration de ce théorème, il est mis en évidence que le mécanisme de branchement φ du PBC Z introduit dans le théorème 1.1.1 est aussi lié au processus de Lévy X associé à Z via la représentation de Lamperti.

Proposition 1.2.1. *Soient un PBC Z, φ son mécanisme de branchement, $r \geq 0$ et X le processus de Lévy sans sauts négatifs associé à Z par la représentation de Lamperti $L(r, X)$, alors φ est l'exposant de Laplace de X.*

En conséquence, les résultats de la partie précédente lient les comportements du PBC Z à ceux du PLsp X. Remarquons que la condition de Grey montre qu'il n'y a pas équivalence entre l'extinction en temps fini de Z et l'atteinte des niveaux négatifs en temps fini par X.

Il reste à se convaincre de l'intérêt d'une telle représentation quant à l'étude du PBC Z.

1.3 Théorie des fluctuations pour les processus de Lévy spectralement positifs

Dans le cas discret, la loi de la population totale obtenue grâce à la représentation de Lamperti reposent sur l'étude des temps d'atteinte des niveaux négatifs par la marche aléatoire associée au processus de branchement de Bienaymé-Galton-Watson. Nous venons de voir qu'il existait une représentation analogue en temps continu associant au PBC Z un processus de Lévy sans sauts négatifs (PLsp) X. Il nous reste donc maintenant à étudier les temps d'atteinte des niveaux négatifs d'un tel processus X.

L'étude des *processus de Lévy* (PL) a commencé dans les années 1920 avec l'étude des lois infiniment divisibles. Les premiers résultats sont dus entre autres à A.N. Kolmogorov (1903-1987), P. Lévy (1886-1971), A.I. Khintchine (1894-1959) ou encore K. Ito (1915-2008). Dans ce manuscrit, nous nous intéressons plus particulièrement à la théorie des fluctuations des processus de Lévy, domaine mis en avant seulement après les années 1950 avec les travaux de G.A. Hunt (1916-2008). Depuis, la théorie des chaînes de Markov et leur lien avec les fluctuations des PL ont permis de nombreuses avancées, voir les articles de J.L. Doob (1910-2004), E.B. Dynkin (1924-2014), A.V. Skorohod (1930-2011), H. Kesten (1931-2019) et bien d'autres. Néanmoins, comme le but de ce manuscrit n'est pas l'étude appronfondie de ces processus en soi, le lecteur peut se reporter aux livres de J. Bertoin [8], K.I. Sato [38], de A.E. Kyprianou [32] ou encore de R.A. Doney [20] pour les démonstrations et une étude plus détaillée des PL.

La théorie des fluctuations des PL consiste en la généralisation en temps continu des travaux de W. Feller (1906-1970) et F.L. Spitzer (1926-1992) sur les marches aléatoires. Dans le cas discret, elle fournit des résultats liant les comportements d'une marche aléatoire et de ses extrema. La généralisation de ces résultats au cas continu se heurte à une première difficulté, à savoir que l'ensemble des temps en lesquels un processus de Lévy atteint son infimum (ou son supremum) n'est pas discret en général. C'est pourquoi, en temps continu, l'étude du processus X et de ses extrema requiert l'utilisation des *temps locaux* et de la théorie des excursions. La principale limite à l'utilisation de cette théorie est que, dans le cas général, les distributions apparaissant dans les différents résultats sont la plupart du temps non-explicites. Dans certains cas néanmoins, ces lois peuvent être exprimées en fonction de l'exposant de Laplace du PL X et de son inverse. C'est le cas notamment pour les PL sans sauts négatifs.

1.3.1 Processus de Lévy spectralement positif

Considérons un *processus de Lévy* (PL) X, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ issu de $X_0 = 0$ p.s. dont les trajectoires sont càdlàg et les accroissements sont indépendants et stationnaires, c'est-à-dire que pour tout $t, s \geq 0$, $X_{t+s} - X_s$ est indépendant de $\{X_u : u \leq s\}$ et de même loi que X_t. La loi du processus de Lévy X est caractérisée par son exposant caractéristique ψ défini par

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] := e^{-t\psi(\lambda)}, \quad \forall t, \lambda \geq 0\,.$$

D'après le théorème de Lévy Khintchine, cf. théorème 1 de [8], nous savons que la fonction ψ admet l'écriture suivante pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = i\alpha - ia\lambda + \frac{1}{2}q\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{|x|<1})\pi(dx),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$ est son facteur quadratique, correspondant à sa partie brownienne, et π est une mesure sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2)\pi(dx) < \infty\,.$$

Le PL d'exposant caractéristique ψ correspond à un PL d'exposant $\psi - i\alpha$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre α. La mesure π est appelée *mesure de Lévy* de X, elle caractérise

ses sauts. Un des résultats importants sur les PL est que leur comportement asymptotique est complètement caractérisé par leur espérance, quand elle existe. En effet, nous avons la trichotomie suivante.

Théorème 1.3.1. *Soit X un PL tel que $\alpha = 0$, alors*

1. *X dérive vers $+\infty$ i.e. $\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty$ si et seulement si*
   - *$\mathbb{E}[X]$ est définie et $\mathbb{E}[X] > 0$*
   - *ou $\mathbb{E}[X]$ est non définie et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x\pi(dx)}{\int_0^{|x|}\pi((y,\infty))dy} < \infty$*
2. *X dérive vers $-\infty$ i.e. $\lim_{t\to+\infty} X_t = -\infty$ si et seulement si*
   - *$\mathbb{E}[X]$ est définie et $\mathbb{E}[X] < 0$*
   - *ou $\mathbb{E}[X]$ est non définie et $\int_1^{\infty} \frac{x\pi(dx)}{\int_0^{x}\pi((-\infty,y))dy} < \infty$*
3. *X oscille i.e. $\limsup_{t\to+\infty} X_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} X_t = -\infty$ si et seulement si*
   - *$\mathbb{E}[X]$ est définie et $\mathbb{E}[X] = 0$*
   - *ou $\mathbb{E}[X]$ est non définie et les deux intégrales, définies ci-dessus, sont finies.*

Pour la preuve de ce résultat, nous renvoyons le lecteur au théorème 7.2 de [32].

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons seulement aux processus de Lévy n'ayant pas de sauts négatifs, appelés *processus de Lévy spectralement positifs* (PLsp). Cette classe de PL est analogue à celle des PL spectralement négatifs, c'est-à-dire sans sauts positifs, qui sont utilisés dans l'étude des modèles de queue ou encore des problèmes de risque d'assurance. L'absence de sauts négatifs implique en particulier que le processus X admet un moment exponentiel négatif pour tout $\lambda \geq 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] < \infty$, pour tout $\lambda \geq 0$. Ainsi nous pouvons caractériser la loi de X par son exposant de Laplace φ défini par

$$\varphi(\lambda) := -\psi(i\lambda), \quad \forall \lambda \geq 0\,.$$

De plus, nous supposerons que le PLsp X n'explose pas, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_1 < \infty) = e^{\varphi(0)} = 1$ ou encore $\alpha = 0$ dans l'expression de ψ. En utilisant le théorème de Lévy-Khintchine, nous obtenons l'expression simplifiée suivante de φ :

$$\varphi(\lambda) = -a\lambda + \frac{1}{2}q\lambda^2 - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x \mathbb{1}_{|x|<1})\pi(dx). \tag{1.4}$$

Ici le support de la mesure π est inclus dans $(0,\infty)$ car le PLsp X n'a pas de sauts négatifs. En appliquant les inégalités d'Hölder, nous pouvons montrer que la fonction $\varphi : [0,\infty) \to (-\infty,+\infty)$ est strictement convexe. L'existence de l'exposant de Laplace d'un PL X permet de caractériser plus simplement son comportement asymptotique. En effet, maintenant, il nous suffit de connaître les comportements de φ en 0 et à l'infini.

Proposition 1.3.1. *Soit X un PL tel que $\alpha = 0$ et φ son exposant de Laplace, alors*

1. *si $\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = -\infty$ alors X est un subordinateur,*
2. *si $\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$ et $\varphi'(0) < 0$ alors X dérive vers $+\infty$,*
3. *si $\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$ et $\varphi'(0) = 0$ alors X oscille*
4. *et si $\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$ et $\varphi'(0) > 0$ alors X dérive vers $-\infty$.*

Par stricte convexité l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet au plus deux solutions 0 et $\phi(0) \geq 0$. En conclusion, la fonction $\varphi : [\phi(0),\infty) \to [0,\infty)$ est continue et croissante donc bijective. Nous noterons ϕ sa fonction inverse.

1.3.2 Temps d'atteinte des niveaux négatifs

Maintenant que nous avons défini les PLsp, il nous reste à étudier leurs fluctuations. Dans cette section, nous supposons toujours que les PLsp ont un temps de vie infini i.e. $\varphi(0) = \alpha = 0$. Comme dit plus haut, nous nous intéressons ici aux résultats portant sur les temps d'atteinte des niveaux négatifs par le PLsp X. Plus précisément, nous aimerions étudier le premier temps $t \geq 0$ en lequel le PLsp X atteint un niveau $-r \in \mathbb{R}_-$ fixé. Nous appellerons *premier temps d'atteinte (TA) du niveau* $-r$, pour tout $r \geq 0$, par le PLsp X le temps aléatoire

$$T_r := \inf\{t \geq 0 : X_t \leq -r\} = \inf\{t \geq 0 : X_t = -r\},$$

où la deuxième égalité découle de l'absence de sauts négatifs. Rappelons que l'exposant de Laplace φ du PLsp X défini sur $[\phi(0), \infty)$ est inversible d'inverse ϕ. De plus, $\phi(0)$ est le plus grand zéro de φ. Il est alors aisé de vérifier le théorème suivant.

Théorème 1.3.2. *Soient X un PLsp, qui ne soit pas un subordinateur, d'exposant de Laplace φ et $T = (T_r)_{r\geq 0}$ le processus des TA des niveaux négatifs par X, alors T est un subordinateur, tué en un temps exponentiel si X dérive vers $+\infty$.*

De plus, ϕ est l'exposant de Laplace de T défini par

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_r} \mathbb{1}_{\{T_r<\infty\}}] := e^{-r\phi(\lambda)}, \ \ \forall r, \lambda \geq 0\,.$$

Le fait que T soit un subordinateur découle directement de la définition d'un PL. L'existence de son exposant de Laplace ϕ est alors établi. Pour montrer que ϕ est bien l'inverse de φ, il suffit de considérer la martingale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ définie par

$$M_t := e^{-\lambda X_t - t\varphi(\lambda)}, \ \ t \geq 0$$

pour un $\lambda \geq 0$ et de remarquer que T_r est un temps d'arrêt pour cette martingale M.

En conséquence de ce théorème et du théorème de Lévy-Khintchine, la fonction ϕ est de la forme suivante pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\nu(dx), \tag{1.5}$$

où $b \in \mathbb{R}_+$ est le drift de T et ν est sa mesure de Lévy à support dans $(0, \infty)$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty\,.$$

Par définition de ϕ, quand λ tend vers zéro, nous obtenons l'équivalence suivante pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}(T_r < \infty) = 1 \Leftrightarrow \phi(0) = 0\,.$$

De cette remarque nous déduisons le résultat suivant donnant une caractérisation en fonction de la valeur de $\phi(0)$ du comportement asymptotique de X.

Théorème 1.3.3. *Soit X un PLsp qui ne soit pas un subordinateur et ϕ l'exposant de Laplace de son processus des TA T, alors X dérive vers $+\infty$ si et seulement si $\phi(0) > 0$.*

L'étude de ces TA pour les marches aléatoires à décroissance unitaire mène, en particulier, à l'identité de Kemperman. Cette identité établit la loi de T en fonction de celle de X. Elle a d'abord été étendue par L. Takács en 1962 aux processus discrets $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ayant des accroissements cycliquement échangeables, c'est-à-dire pour tout $n \geq 1$ et toute permutation cyclique $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})\,.$$

Ensuite, il a étendu le résultat (ci-après) à une certaine classe de processus continus, voir [43].

Proposition 1.3.2. *Soit X un processus stochastique croissant tel que $(X_t - t)_{t\geq 0}$ ait des accroissements cycliquement échangeables alors la loi de son processus T de TA des niveaux négatifs vérifie*

$$\mathbb{P}(T_r = t | X_t = -r) = \frac{r}{t}, \quad r, t > 0\,.$$

Malheureusement, nous ne pouvons pas généraliser cette proposition telle quelle pour les PLsp à variations non bornées. Afin de pouvoir étendre ce résultat à tous les PLsp, il nous faut considérer les mesures $\mathbb{P}(T_r \in \mathrm{d}t)\mathrm{d}r$ et $\mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}r)\mathrm{d}t$.

Théorème 1.3.4. *Soient X un PLsp et T son processus de TA, alors pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, nous avons*

$$\mathbb{P}(T_r \in \mathrm{d}t)\mathrm{d}r = \frac{r}{t}\mathbb{P}(-X_t \in \mathrm{d}r)\mathrm{d}t\,.$$

Cette identité a d'abord été prouveé dans le cas particulier des processus de Poisson composés par D.G. Kendall (1918-2007) [28]. Depuis, de nombreuses preuves ont été données utilisant la théorie des fluctuations, les martingales ou des changements de mesure. Récemment, il a été montré par L. Chaumont et J. Malecki dans [16], cf. théorème 2.3, que cette identité est en fait une conséquence directe de la proposition 1.3.2 d'abord pour les processus à variations bornées puis, par passage à la limite, pour tous les processus.

1.3.3 Retour sur la condition de Grey

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que la condition de Grey, voir le théorème 1.1.2 et le corollaire 1.1.1,

$$(G_\varphi) \quad \int_c^\infty \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} < \infty,$$

où $c > \phi(0)$ est une constante, permet de distinguer les différentes types d'extinction du PBC Z en fonction de son mécanisme de branchement φ. Or il se trouve que ce mécanisme de branchement φ est l'exposant de Laplace d'un PLsp X, associé à Z par la représentation de Lamperti $L(r, X)$. Grâce à la théorie des fluctuations des PLsp, il est possible de ré-écrire la condition de Grey en fonction d'autres fonctions associées au PLsp X comme l'inverse ϕ de φ, leurs mesures de Lévy π et ν ou encore la fonction d'échelle associée à X.

Tout d'abord, remarquons que la condition de Grey (G_φ) implique que le PLsp X est à variations non-bornées. En particulier, X n'est pas un subordinateur et par conséquent $\varphi(\infty) := \lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = \infty$ et $\phi(\infty) := \lim_{\lambda\to+\infty} \phi(\lambda) = \infty$. De plus, être à variations non-bornées est équivalent à $q > 0$ ou $q = 0$ et

$$\int_0^1 x\,\pi(dx) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \bar{\pi}(x)\,dx = \infty,$$

où $\bar{\pi}(x) := \pi(x, 1]$. En particulier, 0 est régulier pour $(0, \infty)$, c'est-à-dire $b = 0$ dans (1.5). D'où,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

Avant d'énoncer des conditions équivalentes à la condition de Grey (G_φ), il nous reste à définir la notion de fonction d'échelle. C'est une notion, qui alliée à l'absence de sauts négatifs, permet l'étude des probabilités de sortie d'un intervalle en une de ses extrémités et est due à L. Takács en 1966. Elle est définie comme l'unique fonction $W : [0, \infty) \to [0, \infty)$ croissante absolument continue de transformée de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)dx = \frac{1}{\varphi(\lambda)}, \quad \lambda > \phi(0). \tag{1.6}$$

Pour plus de détails sur cette fonction d'échelle nous renvoyons le lecteur à la partie 2. du chapitre VII du livre de J. Bertoin [8], pour l'introduction de cette fonction d'échelle et quelques premières

applications. Pour une étude plus approfondie, le lecteur intéressé pourra consulter le livre de A. Kuznetsov, A.E. Kyprianou et V. Rivero [31].

Nous pouvons maintenant donner quatre conditions équivalentes à la condition de Grey (G_φ) en fonction de ϕ, des mesures de Lévy de X et T, respectivement π et ν, et de la fonction d'échelle W de X.

Proposition 1.3.3. *Soient X un Plsp, φ son exposant de Laplace, ϕ l'inverse de φ, ν la mesure de Lévy de ϕ et W ma fonction d'échelle de X, alors chacune des conditions suivantes est équivalente à la condition de Grey (G_φ).*

$$\int_{\phi^{-1}(c)}^{\infty} \frac{\phi(s)}{s^2} ds < \infty, \tag{1.7}$$

$$b = 0 \quad et \quad \int_{(0,1)} x \log(1/x)\, \nu(dx) < \infty, \tag{1.8}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-cx} W(x) dx < \infty, \;\; c > \phi(0). \tag{1.9}$$

Si $q = 0$, alors (G_φ) est aussi équivalente à

$$\int_{0+} \frac{dx}{f(x)} < \infty, \qquad où\ f(x) := \int_0^x \bar{\bar{\pi}}(y)\, dy \ ; \ et \ \ \bar{\bar{\pi}}(x) = \int_x^1 \bar{\pi}(y) dy, x \in [0,1]. \tag{1.10}$$

Si $q > 0$, alors (G_φ) est satisfaite.

Démonstration. En faisant le changement de variable $\lambda = \phi(s)$, la condition (G_φ) est équivalente à

$$\int_{\phi^{-1}(c)}^{\infty} \frac{\phi'(s)}{s} ds < \infty.$$

Puis en faisant une intégration par parties, nous obtenons que c'est encore équivalent à (1.7). Comme $b = 0$, (1.5) et le théorème de Fubini impliquent que (1.7) est équivalent à

$$\int_0^{\infty} x \int_x^{\infty} \frac{1 - e^{-s}}{s^2} ds\, \nu(dx) < \infty,$$

où c est telle que $\phi^{-1}(c) = 1$ pour simplifier. De plus $\int_x^{\infty} \frac{1-e^{-s}}{s^2} ds \sim \log 1/x$ quand $x \to 0$ et $\int_x^{\infty} \frac{1-e^{-s}}{s^2} ds \sim 1/x$ quand $x \to \infty$. Ainsi (1.7) est équivalent à (1.8).

La condition (1.9) découle de la définition (1.6) de la fonction d'échelle W et du théorème de Fubini.

Pour finir, si $q > 0$ il est aisé de vérifier que (G_φ) est satisfaite. Si $q = 0$, sans perdre en généralités nous pouvons supposer $\pi(1, \infty) = 0$. En effet comme $\int_1^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \pi(dx) = \circ(\lambda)$, sa valeur n'a aucune incidence sur la condition (G_φ). De même, nous pouvons prendre $a = 0$. Ainsi φ a la forme simplifiée suivante

$$\varphi(\lambda) = \int_{(0,1]} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x) \pi(dx)\,.$$

En faisant une intégration par parties nous obtenons,

$$\varphi(\lambda) = \lambda \int_{(0,1]} (1 - e^{-\lambda x}) \bar{\pi}(x) dx$$

où $\bar{\pi}(x) := \pi((x, 1])$. L'équivalence entre (G_φ) et (1.10) est alors une conséquence directe de la proposition 1 du chapitre *III* de [8] et du fait que $\lambda \mapsto \int_{(0,1]} (1 - e^{-\lambda x})\, \bar{\pi}(x) dx$ est l'exposant de Laplace d'un subordinateur.

□

1.4 Applications de la représentation de Lamperti

Armés de la représentation de Lamperti associant au PBC Z un PLsp X et de la théorie des fluctuations pour cette classe de PL, voyons s'il nous est possible d'étudier le processus Z. Nous avons déjà vu, dans la section 1.1, que l'étude du mécanisme de branchement φ permettait par la condition de Grey de distinguer les différents types d'extinction du PBC Z. Dans le cas discret, la représentation de Lamperti permet de montrer que toute la marche aléatoire X n'est pas nécessaire et qu'elle peut être stoppée en T_{Z_0}. De plus, T_{Z_0} est égale presque sûrement à la population totale $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$. Il nous reste donc à vérifier si en temps continu, le PLsp X peut être stoppé en T_{Z_0} et si cela entraîne une égalité presque sûre analogue entre $\int_0^{\infty} Z_s ds$ et T_{Z_0}, le premier temps d'atteinte de $-Z_0$ par le PLsp X. Il restera ensuite à voir si nous pouvons établir la loi du supremum $\sup_{t\geq 0} Z_t$.

Lemme 1.4.1. *Soient Z un PBC issu de $Z_0 = r$ de mécanisme de branchement φ et X son PLsp associé par la représentation de Lamperti $L(r, X)$, alors $T_r = \int_0^{\infty} Z_s ds$ p.s.*

De plus, pour tout $r > 0$, $\mathbb{P}_r\left(\sup_{t\geq 0} Z_t < \infty\right) = e^{-r\phi(0)}$.

Ce résultat est évident et découle de la construction de X. En effet par définition de T_r et par la représentation de Lamperti, nous avons nécessairement $T_r = \int_0^{\infty} Z_s ds$. En ce qui concerne le supremum, il suffit de remarquer que $\left\{\sup_{t\geq 0} Z_t < \infty\right\}$ correspond à l'extinction de Z. De plus, $\{T_r < \infty\} = \left\{\int_0^{\infty} Z_s ds < \infty\right\}$ implique l'extinction de Z. Ce qui prouve l'égalité presque sûre. En dimension un, ce résultat est donc évident par construction de X.

En conséquence, le supremum de Z est fini p.s. si et seulement Z est critique ou sous-critique, c'est-à-dire Z s'éteint p.s. En revanche, contrairement au cas discret, T_r ne correspond pas à la population totale. En effet, en temps continu, $\int_0^{\infty} Z_s ds$ ne représente pas la population totale. Rappelons, qu'un PB en temps continu modélise une évolution de population dans laquelle les individus ont des temps de vie aléatoire. Ainsi, dans l'intégrale $\int_0^{\infty} Z_s ds$ chaque individu est recensé tout le long de son vivant. Autrement dit, c'est comme ci la population était comptée avec coefficient au sens où, plus un individu vit longtemps, plus il va faire augmenter la valeur de $\int_0^{\infty} Z_s ds$. Plus précisément, quand l'espace est discret, il est possible de représenter les PB avec des forêts de branchement. D'un point de vue heuristique, ces forêts de branchement représentent la population sous forme d'arbres de généalogie. La construction trajectoire par trajectoire du processus de Poisson composé associé via la transformation de Lamperti peut s'obtenir de manière constructive sur ces forêts de branchement via le codage de Lukasiewick-Harris. Pour ce faire, il faut effectuer un parcours en largeur d'une forêt de branchement représentant le PB Z, c'est-à-dire parcourir la forêt de branchement arbre par arbre, génération par génération, de gauche à droite. En temps continu, cette forêt à des branches de longueur variable représentant les différents temps de vie des individus. Nous pouvons alors voir l'intégrale $\int_0^{\infty} Z_s ds$ comme la vitesse de parcours de la forêt lors de la construction des trajectoires du processus de Poisson composé.

Chapitre 2

Cas multi-types continu

Comme dit dans l'introduction, le modèle d'évolution de population représenté par les PBC n'est pas assez réaliste. Une des manières de l'améliorer est de permettre aux individus de ne pas avoir tout le temps le même comportement. Pour ce faire, nous utilisons des processus de branchement continus multi-types. Plus précisément, il s'agit de processus stochastiques pouvant modéliser des évolutions de populations à très grand effectif dans lesquelles les individus ont un temps de vie aléatoire indépendant de celui des autres et se reproduisent de manière indépendante selon une loi de reproduction $\nu^{(i)}$ dépendant de leur type $i \in [d] = \{1, \dots, d\}$, où $d \geq 1$ est un entier fixé. Il est possible de définir un processus de branchement multi-types avec un nombre infini de types, voire [33] ou [10] en discret. Dans toute cette partie, nous considérons des PBC multi-types à d types où $d \geq 1$ est un entier fixé.

Soit δ un élément extérieur à $\mathbb{R}_+^d$ que nous appellerons cimetière, nous appellerons *processus de branchement multi-types en temps continu* un processus de Markov $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}$, avec pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{Z}_t = (Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(d)})$, indexé par les réels et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^d \cup \delta$ dont les trajectoires sont càdlàg et vérifie la *propriété de branchement* suivante

Définition 2.0.1. *Pour tout $t \geq 0$ et tout $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in \mathbb{R}_+^d$, Z sous la probabilité $\mathbb{P}_{\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2}$ a la même loi que la somme $\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2$ où Z_1 et Z_2 sont des PB multi-types en temps continu indépendants tels que, pour tout $i \in [2]$, Z_i a la même loi que Z sous $\mathbb{P}_{\mathrm{z}_i}$.*

Autrement dit, pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in \mathbb{R}_+^d$

$$\mathbb{E}_{\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}] = \mathbb{E}_{\mathrm{z}_1}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}]\mathbb{E}_{\mathrm{z}_2}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}]. \tag{2.1}$$

Par convention, nous posons $e^{-\langle \lambda, \delta\rangle} = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$. Rappelons que, pour tout vecteur $\mathrm{z} \in \mathbb{R}_+^d$, les notations $\mathbb{P}_\mathrm{z}$ et $\mathbb{E}_\mathrm{z}$ désignent respectivement la probabilité et l'espérance sous la loi conditionnée par $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{z}$. De plus, dans toute la suite, les vecteurs de $\mathbb{R}^d$ seront notés $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ et $\mathrm{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ désignera le i^e vecteur unité de $\mathbb{R}^d$. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ sera représenté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$ désignera la norme euclidienne. Pour finir, pour deux vecteurs $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ signifiera que pour tout $i \in [d]$, $x_i \leq y_i$ et $\mathrm{x} < \mathrm{y}$ signifiera que $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ et qu'il existe au moins un $i \in [d]$ tel que $x_i < y_i$.

Comme dans la section précédente, nous serons parfois amenés à distinguer les *processus de branchement multi-types en temps continu et espace discret* (PBMCD) avec probabilités $\mathrm{P} := \{\mathrm{P}_\mathrm{n} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}^d\}$, des *processus de branchement continus multi-types* (PBCM) avec probabilités de transition $\mathrm{P} := \{\mathrm{P}_\mathrm{x} : \mathrm{x} \in \mathbb{R}_+^d \cup \{\delta\}\}$. Nous utiliserons parfois la dénomination d-PBCM pour spécifier le nombre de types utilisés.

Les PB multi-types ont également été introduits dans les années 1960. Dans son livre paru en 1963, T.E. Harris (1919-2005) étudie les PB discrets multi-types. Quelques années plus tard, S. Watanabe [45] s'intéresse aux PBCD et plus précisément au cas $d = 2$ avec des diffusions. Mais c'est essentiellement dans les années 2000 que le cas multi-types a fait l'objet de nombreux articles. Dans l'article [15], L. Chaumont et R. Liu s'intéressent au codage de Lukasiewick-Harris multi-types avec définition de forêts de branchement multi-types. Par la suite, L. Chaumont, théorème 2 [14], prouve la représentation de Lamperti pour les PBMCD et fait le lien entre cette représentation et

le codage de Lukasiewick-Harris qui font intervenir la même matrice de marches aléatoires. Parallèlement, M.E. Cabballero, J.L. Perez Garmendia et G. Uribe Bravo [13] s'intéressent à la preuve de la représentation de Lamperti multi-types dans le cas général des processus affines. De nombreux autres articles traitent de l'extinction des PBCM [33], de leur comportement asymptotique [34] ou de généralisations telles que les PBCM avec immigration [6], [7], [5]. Comme précédemment, nous commencerons par nous intéresser à l'extinction des PBCM, puis à la représentation de Lamperti faisant apparaître les champs de Lévy additifs spectralement positifs. Nous enchaînerons ensuite avec la théorie des fluctuations pour ces champs de Lévy qui a fait l'objet d'un premier article [17] composant le chapitre 3 de ce manuscrit. La dernière partie de ce chapitre traite des applications de cette représentation de Lamperti, notamment la généralisation de l'égalité reliant le temps d'atteinte du champ de Lévy et l'intégrale du PBCM ainsi que la condition de Grey multi-types, ayant fait l'objet d'une note [19] et d'un second article [18] composant respectivement les chapitres 4 et 5.

Pour tout PBCM Z, nous déduisons, une fois encore, par la propriété de branchement (2.1) l'existence d'un unique exposant de Laplace $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ caractérisant sa loi, cf. [21]. Il est défini par

$$\mathbb{E}_{\mathrm{r}}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t \rangle}] := e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\lambda) \rangle}, \quad \forall t \geq 0, \forall \mathrm{r}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d. \tag{2.2}$$

Par définition, u est une fonction dont toutes les coordonnées sont positives, continues, croissantes et différentiables en λ. De plus, elle satisfait à la propriété de semi-groupe

$$\mathrm{u}_{t+s}(\lambda) = \mathrm{u}_t(\mathrm{u}_s(\lambda)), \quad \forall t, s \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^d. \tag{2.3}$$

2.1 Extinction du processus

Commençons par étudier l'explosion et l'extinction du PBCM Z. Nous avons vu que, contrairement au cas discret, les 1-PBC pouvaient s'éteindre en temps fini ou à l'infini. Regardons si il en est de même pour les d-PBCM avec $d \geq 1$. Une fois encore, la propriété de branchement nous donne que les seuls états absorbants sont $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ et δ, l'état cimetière. Il nous reste maintenant à voir s'il nous est possible d'établir des conditions nécessaires et suffisantes caractérisant ces deux comportements asymptotiques et si elles généralisent celles obtenues en dimension un.

En utilisant la définition de l'exposant de Laplace u du PBCM Z et en faisant tendre λ vers zéro dans (2.2), nous remarquons que pour tout $i \in [d]$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t \in \mathbb{R}_+^d) = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(Z_t^{(i)} \in \mathbb{R}_+, \forall i \in [d]) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\mathbf{0}) \rangle}.$$

Dans la suite, nous supposerons que le PBCM Z n'atteint pas δ, c'est-à-dire qu'aucune de ses coordonnées $Z^{(i)}$ n'explose en temps fini, ce qui est équivalent à $\mathrm{u}_t(\mathbf{0}) := \lim_{\lambda \to \mathbf{0}} \mathrm{u}_t(\lambda) = \mathbf{0}$ pour tout $t \geq 0$. Nous dirons alors que le PBCM Z est *conservatif*.

Forts de cette hypothèse, il nous reste à déterminer quand le PBCM Z s'éteint. De plus, comme dans le cas $d = 1$, cette extinction peut occurir soit en un temps fini soit à l'infini. Ici nous dirons que Z s'éteint en un temps fini s'il existe un temps $t \geq 0$ tel que

$$Z_t^{(i)} = 0, \ \forall i \in [d].$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'*a priori* une coordonnée $Z^{(i)}$ du PBCM peut très bien s'éteindre, une ou plusieurs fois, en des temps $s < t$. Une fois encore, la probabilité d'extinction du PBCM Z se traduit sur son exposant de Laplace u en faisant tendre λ vers l'infini dans (2.2), pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(Z_t^{(i)} = 0, \forall i \in [d]) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty) \rangle}$$

où $u_t^{(i)}(\infty) := \lim_{\lambda \to +\infty} u_t^{(i)}(\lambda)$, pour tout $i \in [d]$ et $t \geq 0$. Rappelons que par définition, voir (2.2), la fonction u est positive et que chacune de ses coordonnées $u^{(i)}$ est croissante, continue et différentiable en λ. En fait, ses coordonnés sont aussi différentiables en t et nous pouvons caractériser les dérivées partielles.

Théorème 2.1.1. *Soient* Z *un PBCM et* u *son exposant de Laplace défini par* (2.2)*, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$*, les fonctions* $t \mapsto u_t^{(i)}(\lambda)$*, pour* $i \in [d]$*, sont différentiables sur* $[0, \infty)$*. De plus,*

$$(\mathrm{S}_\varphi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) &= -\varphi_i \circ \mathrm{u}_t(\lambda), \\ u_0^{(i)}(\lambda) &= \lambda_i \end{cases}, \quad \forall i \in [d].$$

La fonction $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ *est appelée* mécanisme de branchement *de* Z*. De plus,* φ_j *est l'exposant de Laplace d'un exposant de Lévy d-dimensionnel* $\mathrm{X}^{(j)} = (X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$ *tel que pour* $i \neq j$*,* $X^{i,j}$ *soit un subordinateur et* $X^{j,j}$ *soit un PLsp.*

Ce résultat a été montré pour la première fois par S. Watanabe, théorème 2 [45], dans le cas $d = 2$. L'auteur montre qu'il existe une unique solution faible. Ce théorème a par la suite été étendu aux processus affines, qui forment une classe de processus stochastiques englobant celle des PBCM, par D. Duffie, D. Filipovic et W. Schachermayer [21], théorème 2.7.

Comme dans le cas discret, sous réserve d'intégrabilité et d'irréductibilité, il est possible d'obtenir une trichotomie des comportements du PBCM Z en fonction d'une certaine valeur propre de Perron-Frobénius. Définissons la matrice $\mathbb{M}$ par

$$M_{i,j}(t) := \mathbb{E}_{\mathrm{e}_i}[\langle \mathrm{e}_j, \mathrm{Z}_t \rangle], \quad \forall i, j \in [d], t \geq 0.$$

Nous dirons que

$$(I_{\mathrm{Z}}) \qquad \mathrm{Z} \text{ est irréductible,}$$

si la matrice $\mathbb{M}$ est irréductible, c'est-à-dire si pour tout $i, j \in [d]$, il existe un temps $t \geq 0$ tel que $M_{i,j}(t) > 0$. Dans l'article [33], A.E. Kyprianou et S. Palau considèrent un cadre légèrement différent du nôtre dans lequel le nombre de types est infini. Ils s'intéressent alors à l'extinction globale, i.e. l'extinction des populations de tout type $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}$ et l'extinction locale, i.e. pour un sous-ensemble fini de types. Sous l'hypothèse de l'irréductibilité et d'intégralité de $\mathbb{M}$, ils montrent, voir théorème 2, que l'extinction est p.s. si et seulement si $\rho \leq 1$ où ρ est le rayon spectral de $\mathbb{M}$. Nous dirons que Z est *sous-critique* ou *critique* suivant que $\rho < 1$ ou $\rho = 1$. En revanche, quand $\rho > 1$, nous dirons que le PBCM Z est *super-critique*. Dans ce cas sous une log-condition, voir l'article [34], $e^{-\rho t}\langle \mathrm{a}, \mathrm{Z}_t \rangle$, où a est le vecteur propre de Perron-Frobénius à droite associé à ρ, converge vers une variable W. Sur l'ensemble $\{W > 0\}$, le PBCM Z croît exponentiellement dans la direction du vecteur a. De plus, les auteurs donnent une expression de la probabilité d'extinction en fonction de l'exponentielle de la valeur propre à droite associée à ρ.

Ils nous reste encore à distinguer les cas d'extinctions finies et infinies. Ce résultat n'était pas connu jusqu'ici et constituait l'une des motivations majeures de mes travaux de thèse. Afin de pouvoir généraliser la condition de Grey, nous aurons besoin du formalisme de la représentation de Lamperti dans le cas multi-types.

2.2 Représentation de Lamperti

Pour aller plus avant dans l'étude du PBCM Z, nous allons généraliser la représentation de Lamperti en dimension d. Dans le cas discret multi-types, la représentation de Lamperti se généralise en associant au PBCM discret une matrice de marches aléatoires telle que les marches aléatoires non diagonales soient croissantes et les marches aléatoires diagonales soient à décroissance unitaire. Nous nous attendons à avoir le même résultat pour les PBCM en remplaçant la matrice de marches aléatoires par une matrice de processus de Lévy. Pour les PBCD, il est possible de construire ces marches aléatoires trajectoire par trajectoire grâce au codage de Lukasiewick-Harris codant des forêts de branchement multi-types, voir [14]. Malheureusement, quand l'espace d'états est continu, en dimension $d \geq 2$, il ne nous est pas possible de construire la matrice de processus de Lévy associée de cette manière là car la notion d'arbres continus multi-types n'a pas encore été définie. C'est J. Kallsen qui évoque la première fois la généralisation multi-types de la représentation de

Lamperti dans son article [27]. Il étend la représentation de Lamperti unidimensionnelle à une classe de processus plus vaste que les PB, les processus affines. Il essaie ensuite de généraliser son résultat au cas multi-types, il ne prouve que l'existence faible de solution dans ce cas. Plus récemment, le résultat a été prouvé par M.E. Caballero, J.L. Pérez Garmendia et G. Uribe Bravo pour les processus affines dans leur article [13], théorème 1.

Avant d'énoncer la représentation de Lamperti en multi-types, nous dirons que Z est dit sans *générations spontanées* dans le sens de [13]. C'est-à-dire que presque sûrement si $Z_t^{(i)} = 0$ pour un $i \in [d]$ et un $t > 0$, alors $t \mapsto \int_0^t Z_s^{(i)} ds$ croît strictement en t si il existe $j \neq i$ tel que $Z_t^{(j)} > 0$ et $X^{i,j}\left(\int_0^t Z_s^{(j)} ds\right)$ croît strictement à droite de t.

Théorème 2.2.1. *Soient* $\mathrm{X}^{(j)} = (X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$*, pour* $j \in [d]$*,* d *PL indépendants et issus de* $\mathbf{0}$ *tels que pour tout* $i \neq j$*,* $X^{i,j}$ *soit un subordinateur et* $X^{j,j}$ *soit un PLsp, et* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$*, alors le système*

$$L(\mathrm{r}, \{\mathrm{X}^{(j)}, j \in [d]\}) \qquad Z_t^{(i)} = r_i + \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}\left(\int_0^t Z_s^{(j)} ds\right), \quad t \geq 0, i \in [d]$$

admet une unique solution Z *sans générations spontanées issue de* r*. De plus, le processus* Z *ainsi défini est un PBCM.*

Réciproquement, pour tout PBCM Z *issu de* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$*, il existe* d *PL indépendants* $X^{(j)}, j \in [d]$ *tels que* Z *ait la même loi que l'unique solution sans générations spontanées du système de Lamperti* $L(\mathrm{r}, \{\mathrm{X}^{(j)}, j \in [d]\})$ *défini ci-dessus.*

Rappelons qu'un subordinateur est un processus de Lévy (PL) croissant et que PLsp désigne un PL spectralement positif, c'est-à-dire sans sauts négatifs. Nous insistons sur le fait que quand $d > 1$, cette représentation n'est plus inversible. En effet, la donnée de Z est moins complète que celle de $\mathbb{X}$ car nous perdons toutes les informations portant sur la généalogie des individus de la population. Dans la suite, ces d PL indépendants seront appelés *des PL associés en loi à* Z *par la représentation de Lamperti* $L(\mathrm{r}, \{\mathrm{X}^{(j)}, j \in [d]\})$.

De même qu'en dimension un, lors de la démonstration de ce résultat, il est mis en évidence que le mécanisme de branchement φ du PBCM Z introduit dans le théorème 2.1.1 est lié aux PL $\mathrm{X}^{(j)}$, pour $j \in [d]$.

Proposition 2.2.1. *Soient un PBCM* Z*,* φ *son mécanisme de branchement,* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *et* $\{\mathrm{X}^{(j)}, j \in [d]\}$ *les* d *PL indépendants associés en loi à* Z *par la représentation de Lamperti* $L(\mathrm{r}, \{\mathrm{X}^{(j)}, j \in [d]\})$*, alors pour tout* $j \in [d]$*,* φ_j *est l'exposant de Laplace du PL* $\mathrm{X}^{(j)}$*.*

Comme en dimension un, il reste maintenant à se convaincre de l'utilité de cette représentation dans l'étude du PBCM Z.

2.3 Théorie des fluctuations pour les champs de Lévy additifs spectralement positifs

Avant de pouvoir utiliser la représentation de Lamperti dans le cas multi-types pour étudier le PBCM Z associé, il nous faut tout d'abord être capables de définir proprement le champ $\mathbf{X}$ défini comme somme de d PL indépendants ainsi que son champ de temps d'atteinte. C'est pourquoi nous consacrons cette partie à l'étude des fluctuations de ce que nous appellerons *un champ de Lévy additif spectralement positif* (cLasp). Ces champs constituent une généralisation non triviale des PLsp. La définition et l'étude de ces champs ont fait l'objet d'un premier article de recherche [17] re-soumis le 15 septembre 2020 à *Electronics Journal of Probability*. Tous les résultats énoncés ci-après, sont détaillés et démontrés dans le chapitre 3 qui reprend l'article sus-mentionné.

2.3.1 Champ de Lévy additif spectralement positif

Considérons d PL d-dimensionnels indépendants $\mathrm{X}^{(1)}, \dots, \mathrm{X}^{(d)}$ tels que $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \dots, X^{d,j})$, $j \in [d]$ où pour $i \neq j$, $X^{i,j}$ est un subordinateur, c'est-à-dire un PL croissant, et pour $j \in [d]$, $X^{j,j}$ est un PL spectralement positif (PLsp), c'est-à-dire sans sauts négatifs. Il est à noter que pour un $j \in [d]$ fixé, les $X^{i,j}$, $i \in [d]$ ne sont pas nécessairement indépendants. Comme en dimension un, l'absence de sauts négatifs entraîne l'existence de moments exponentiels négatifs, voir le chapitre VII de [8]. Ainsi pour tout $j \in [d]$, nous pouvons caractériser la loi de $\mathrm{X}^{(j)}$ non pas par leurs exposants caractéristiques mais par leurs exposants de Laplace, notés φ_j et définis par

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{X}_t^{(j)} \rangle}] := e^{t\varphi_j(\lambda)}, \quad t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}_+^d .$$

Grâce au théorème de Lévy Khintchine, nous connaissons la forme explicite de φ_j,

$$\varphi_j(\lambda) = -\alpha_j - \sum_{i=1}^{d} a_{i,j}\lambda_i + \frac{1}{2} q_j \lambda_j^2 - \int_{\mathbb{R}_+^d} (1 - e^{-\langle \lambda, x \rangle} + \langle \lambda, x \rangle \mathbb{1}_{|x|<1}) \pi_j(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d \tag{2.4}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $(a_{i,j})_{i,j\in[d]}$ est une matrice essentiellement positive (i.e. $a_{i,j} \geq 0$ si $i \neq j$), $q_j \geq 0$ et π_j est une mesure sur $\mathbb{R}_+^d$ telle que $\pi_j(\{\mathbf{0}\}) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} [(1 \wedge |x|^2) + \sum_{i \neq j} (1 \wedge x_i)] \pi_j(dx) < +\infty .$$

Dans toute la suite, sauf mention contraire, nous supposons que $\varphi_j(\mathbf{0}) = \alpha_j = 0$, c'est-à-dire que le PL $\mathrm{X}^{(j)}$ a un temps de vie infini et donc n'explose pas en un temps fini. De plus, pour tout $j \in [d]$, la fonction φ_j est convexe sur $(0, \infty)^d$. En fait, elles sont mêmes log-convexes. Enfin, pour tout $i, j \in [d]$ tels que $i \neq j$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_d$, la fonction $\lambda_i \mapsto \varphi_j(\lambda)$ est décroissante.

Définissons alors le champ stochastique multivarié suivant

$$\mathbf{X}_{\mathrm{t}} := \mathrm{X}_{t_1}^{(1)} + \cdots + \mathrm{X}_{t_d}^{(d)}, \quad \mathrm{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d .$$

Le champ $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ est un cas particulier de champ de Lévy additif au sens de [29]. Sa loi est caractérisée par l'exposant de Laplace $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, autrement dit

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{X}_{\mathrm{t}} \rangle}] := e^{\langle \mathrm{t}, \varphi(\lambda) \rangle}, \quad \mathrm{t}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d .$$

Un tel champ de Lévy additif $\mathbf{X}$ sera appelé *champ de Lévy additif spectralement positif* (cLasp). Cette terminologie est justifiée par les résultats que nous allons donner et qui généralisent la théorie des fluctuations des PLsp, rappelés dans le chapitre précédent.

Avant de continuer, remarquons que le cLasp $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$, défini comme la somme de d PL indépendants, contient les mêmes informations que le champ de matrices essentiellement positives $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X_{t_j}^{i,j})_{i,j\in[d]}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$. En effet $\mathbf{X}_{\mathrm{t}} = \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{1}$ où $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1)$ est le vecteur unité de $\mathbb{R}_+^d$ et $X_t^{i,j} = \langle \mathbf{X}_{t\mathrm{e}_j}, \mathrm{e}_i \rangle$ p.s. pour tout $i, j \in [d]$ et $t \geq 0$. Dans la suite, la dénomination cLasp sera utilisée à la fois pour le champ $\mathbf{X}$ et le champ matriciel $\mathbb{X}$. Ces deux notions sont nécessaires car nous verrons que parfois bien que le champ $\mathbf{X}$ ait une valeur définie, celle de la matrice $\mathbb{X}$ ne l'est pas forcément.

Exemple. *Donnons un exemple en dimension 2 de spaLf. Supposons que pour $j \in [2]$, les $X^{j,j}$ soient des mouvements Brownien indépendants $B^{(j)}$ avec des drifts $a_j \in \mathbb{R}$, tels que $X_t^{j,j} = B_t^{(j)} + a_j t$ et pour tout $i \neq j$, $X^{i,j}$ soit un drift pur, c'est-à-dire $X_t^{i,j} = a_{ij} t$, $a_{ij} \geq 0$. Alors le spaLf est défini par*

$$\mathbf{X}_{\mathrm{t}} = {}^t(B_{t_1}^{(1)} + a_1 t_1 + a_{12} t_2, a_{21} t_1 + B_{t_2}^{(2)} + a_2 t_2), \quad \mathrm{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2,$$

les exposants de Laplace φ_j sont explicitement décrits par

$$\varphi_j(\lambda) = -\lambda_i a_{ij} - \lambda_j a_j + \frac{1}{2} q_j \lambda_j^2, \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}_+^2,$$

et le champ de matrices essentiellement positives est

$$\mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} B^{(1)}_{t_1} + a_1 t_1 & a_{12} t_2 \\ a_{21} t_1 & B^{(2)}_{t_2} + a_2 t_2 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Temps d'atteinte des niveaux négatifs

Comme vu dans les chapitres précédents, un des intérêts de la représentation de Lamperti réside dans le fait que nous sommes capables de lier les temps d'atteinte des PLsp aux intégrales des PBC "associés" par la représentation de Lamperti. Dans le cas multi-types, la première difficulté est de définir le "bon temps d'atteinte".

Soit $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Comme expliqué dans le chapitre 3, l'existence et les premières propriétés portant sur les temps d'atteinte ont été établies dans le cas déterministe. Nous ne rappellerons pas ces résultats dans ce chapitre et nous contenterons de renvoyer le lecteur à la première section du chapitre correspondant. Rappelons quand même la notation suivante.

Définition 2.3.1. *Soit $\mathcal{E}_d$ l'ensemble des fonctions à valeurs matricielles $x = \{(x^{i,j}_{t_j})_{i,j\in[d]}, \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d\}$ telles que*

- *pour tout $i, j \in [d]$, $x^{i,j}$ soit càdlàg issue de 0,*
- *pour $i \neq j$, $x^{i,j}$ soit croissante*
- *et pour $j \in [d]$, $x^{j,j}$ soit sans sauts négatifs i.e. $x^{j,j}_{t_j} - x^{j,j}_{t_j-} \geq 0$.*

Comme le champ matriciel $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_{\mathrm{t}}, t \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X^{i,j}_{t_j})_{i,j\in[d]}, (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d\}$ appartient p.s. à l'ensemble $\mathcal{E}_d$, d'après le Lemme 3.1.1 du chapitre 3, le système

$$(\mathrm{r}, \mathbb{X}) \qquad \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{s_j-} = -r_i,\ i \in [d] \tag{2.5}$$

admet une plus petite solution, au sens de l'ordre partiel naturel sur $\mathbb{R}_+^d$, noté $\leq, <$ et défini dans l'introduction de ce chapitre. Cette solution est notée $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T^{(1)}_{\mathrm{r}}, \ldots, T^{(d)}_{\mathrm{r}})$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} := \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{r}\} = \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}} \leq -\mathrm{r}\}, \tag{2.6}$$

où la deuxième égalité découle de l'absence de sauts négatifs. La variable aléatoire $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ est appelée *premier temps d'atteinte (TA), ou de passage, du cLasp* $\mathbf{X}$ *au niveau* $-\mathrm{r}$. Il est important de remarquer que, toujours d'après le lemme 3.1.1 du chapitre 3, certaines coordonnées de $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ peuvent être infinies. En utilisant la quasi-continuité à gauche des PL $\mathrm{X}^{(j)}$ et le lemme déterministe 3.1.1 du chapitre 3, nous sommes en mesure d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soient* $\mathbf{X}$ *un cLasp,* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *et* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ *la plus petite solution du système* $(\mathrm{r}, \mathbb{X})$*, alors*

1. *pour tout $i \in [d]$ et $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,*

$$\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}}-} = \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}}} = -r_i \quad \textit{p.s. sur l'ensemble } \{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d\}.$$

2. *Pour $\mathrm{r}' \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$, conditionnellement à $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}_+^d\}$, le champ $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} - \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$ a la même loi que le champ $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$ et est indépendant du*

champ $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \leq \mathrm{r}'\}$. *En particulier, pour tout* $\mathrm{r}, \mathrm{r}' \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} \overset{(law)}{=} \mathbf{T}_{\mathrm{r}} + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}'}, \tag{2.7}$$

où $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}'}$ *est une copie indépendante de* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}$.

3. *Si* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *pour un* $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$, *alors* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *pour tout* $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$. *Sous cette condition, il existe une application* $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d) : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}_+^d$ *telle que*

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}} \rangle}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda) \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d \,. \tag{2.8}$$

De plus, ϕ *est une fonction différentiable et chaque* ϕ_i *est une fonction concave.*

L'une des conséquences majeures de ce théorème est la suivante : pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0}) \rangle} \,. \tag{2.9}$$

En particulier, pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = 1$ si et seulement si $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. En revanche, ce théorème ne nous donne pas de description globale de la loi du champ stochastique d-dimensionnel $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$. Cela n'est le cas qu'en dimension $d = 1$. En effet pour $d \geq 2$, si r et r′ ne sont pas ordonnés, alors nous ne savons rien sur la loi jointe de $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbf{T}_{\mathrm{r}'})$. De plus, en dimension un, le point 2. du théorème nous donne que le processus des temps d'atteinte $(T_r)_{r \geq 0}$ est un subordinateur. Quand $d \geq 1$, nous pourrions être tentés de déduire du point 2. que le champ $\mathbf{T}$ définit un cLasp. Malheureusement, ce résultat ne se vérifie plus quand $d \geq 2$. En effet, en utilisant la définition de ϕ il est aisé de vérifier que les processus $(\mathbf{T}_{r\mathrm{e}_i})_{r \geq 0}$, $i \in [d]$ ne sont pas indépendants. En revanche, pour tout $i \in [d]$, le processus $(\mathbf{T}_{r\mathrm{e}_i})_{r \geq 0}$ définit bien un subordinateur d'exposant de Laplace ϕ_i.

Certains résultats de la théorie des fluctuations des PLsp utilisent le fait que l'exposant de Laplace ϕ du subordinateur des temps d'atteinte T est l'inverse de φ, celui du PLsp X. Commençons par voir, s'il est possible de généraliser ce résultat aux champs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{X}$. En dimension un, il est nécessaire de supposer que X n'est pas un subordinateur. En dimension $d > 1$ quelconque, il nous faut faire une hypothèse plus générale :

$$(H_\varphi) \qquad \text{L'ensemble } D_\varphi := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \varphi_j(\lambda) > 0,\ j \in [d]\} \text{ est non vide.}$$

En particulier, cette hypothèse (H_φ) implique qu'aucun des processus diagonaux $X^{j,j}$, pour $j \in [d]$, n'est un subordinateur. De plus, comme, pour tout $i \neq j$, $X^{i,j}$ est un subordinateur, $D_\varphi \subset (0,\infty)^d$. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 2.3.2. *Soient* $\mathbf{X}$ *un cLasp,* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$ *et* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T_{\mathrm{r}}^{(1)}, \ldots, T_{\mathrm{r}}^{(d)}) \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$ *la plus petite solution du système* $(\mathrm{r}, \mathbb{X})$, *alors*

1. $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *pour un (et donc pour tout)* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *si et seulement si l'hypothèse* (H_φ) *est satisfaite.*

Supposons (H_φ), *alors*

2. *pour tout* $\lambda \in (0,\infty)^d$, $\phi(\lambda) \in D_\varphi$. *De plus, l'application* $\phi : (0,\infty)^d \to D_\varphi$ *est un difféomorphisme d'inverse* $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$, *i.e.*

$$\varphi(\phi(\lambda)) = \lambda\,, \quad \lambda \in (0,\infty)^d \,.$$

Pour prouver le premier point, il a fallu généraliser la notion de transformée d'Esscher d'un PL pour les cLasp. Cette transformée s'obtient par changement de mesure à l'aide de martingales. Nous introduirons cette transformée d'Esscher dans la section suivante 2.3.3 où nous serons amenés à l'utiliser plus explicitement.

Example. *Reprenons notre exemple en dimension 2 et supposons que $q_j > 0$, $j \in [2]$. Après quelques calculs, on obtient une expression explicite de l'ensemble D_φ défini dans l'hypothèse (H_φ),*

$$D_\varphi = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 > \left(\frac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\lambda_2)}}{q_1} \vee 0 \right) \text{ et } \lambda_2 > \left(\frac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\lambda_1)}}{q_2} \vee 0 \right) \right\},$$

où $\Delta_j(\lambda_i) = a_j^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$ pour tout $j \in [2]$ et $i \neq j$. Cet ensemble est bien non vide et par conséquent, l'hypothèse (H_φ) est vérifiée. En particulier, d'après le théorème 2.3.2, le cLasp $\boldsymbol{X}$ atteints tous les niveaux négatifs $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}_-^2$ avec une probabilité positive et d'après la seconde partie de ce théorème, nous savons que la fonction φ admet un inverse ϕ sur l'ensemble D_φ. Cet inverse $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ est donné par

$$\phi_j(\lambda) = \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j\lambda_j + a_j^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i(\lambda)} + \frac{a_j}{q_j}, \quad j \in [2], i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}_+^2 .$$

De plus, ϕ est l'exposant de Laplace du champ des premiers temps d'atteinte des niveaux négatifs par le cLasp $\mathbf{X}$ défini pour tout $\mathrm{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ par

$$\mathbf{T}_\mathrm{r} = \inf \left\{ \mathrm{t} \geq \mathbf{0} : \left\{ \begin{array}{rcl} B^{(1)}_{t_1} + a_1 t_1 + a_{12} t_2 & = & -r_1 \\ a_{21} t_1 + B^{(2)}_{t_2} + a_2 t_2 & = & -r_2 \end{array} \right. \right\}.$$

Notons $J_\varphi(\lambda)$, $\lambda \in (0, +\infty)^d$, la transposée de l'opposée de la matrice Jacobienne de φ i.e.

$$J_\varphi(\lambda)_{i,j} := -\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\lambda), \quad i, j \in [d].$$

Comme tous les PL $X^{i,j}$, $i, j \in [d]$ sont spectralement positifs, nous pouvons toujours définir leur espérance et $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] \in (-\infty, \infty]$. De plus φ est différentiable sur $(0, \infty)^d$ et ses dérivées partielles en $\mathbf{0}$ satisfont $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = -\lim_{\lambda \to \mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\lambda)$. Nous posons $\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0}) := \lim_{\lambda \to \mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\lambda)$, et définissons $J_\varphi(\mathbf{0})$ comme la transposée de l'opposée de la matrice Jacobienne de φ en $\mathbf{0}$, i.e.

$$J_\varphi(\mathbf{0})_{i,j} := -\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0}) = \mathbb{E}[X_1^{i,j}], \quad i, j \in [d].$$

Nous dirons que le spaLf $\mathbf{X}$ est irréductible si

$$(I_\varphi) \qquad J_\varphi(\mathbf{0}) \text{ est irréductible,}$$

c'est-à-dire si pour tout $i, j \in [d]$, il existe un entier $n \geq 0$ et une suite d'indices $i = i_1, \ldots, i_n = j$ telle que pour tout $1 \leq k < n$, $J_\varphi(\mathbf{0})_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$. Cette définition d'irréductibilité est équivalente à la notion d'irréductibilité du PBC Z, autrement dit $(I_\varphi) \Leftrightarrow (I_\mathrm{Z})$, voir lemme 3.4 de [4]. Quand la matrice Jacobienne $J_\varphi(\mathbf{0})$ est irréductible et que ses entrées sont finies, elle admet une valeur propre de Perron-Frobénius ρ maximale. Comme pour les PL, il est alors possible de distinguer les différents comportements du cLasp $\mathbf{X}$ en fonction de la valeur de ρ.

Théorème 2.3.3. *Supposons (H_φ) et (I_φ), alors*

1. *$\mathbf{0}$ et $\phi(\mathbf{0}) := \lim_{\lambda \to \mathbf{0}} \phi(\lambda)$ sont les deux seuls zéros de φ dans $\mathbb{R}_+^d$.*
   De plus, $\phi(\mathbf{0})$ est soit égale à $\mathbf{0}$ soit dans $(0, \infty)^d$.
2. *Si $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = \infty$ pour un $i, j \in [d]$, alors $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$. Supposons $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] < \infty$ pour tout $i, j \in [d]$ alors $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ si et seulement si $\rho \leq 0$.*

La preuve de ce théorème se ramène à l'étude de fonctions convexes réelles et à une disjonction de cas. Pour plus de détails sur la preuve et un exemple d'application, le lecteur est renvoyé à la

troisième section et au théorème 3.2.2 du chapitre 3. En ce qui concerne le point 1., nous montrons en fait un peu plus. Quelle que soit la nature de $J_\varphi(\mathbf{0})$, s'il existe un zéro de φ dans $(0,\infty)^d$ alors il est unique et est égal à $\phi(\mathbf{0})$. En revanche, dans le cas réductible, nous ne pouvons rien dire sur d'éventuels zéros ne s'annulant que sur certaines coordonnées. Il est d'ailleurs *a priori* possible que $\phi(\mathbf{0})$ soit un tel zéro. De plus quand $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$, dans chaque direction, il existe une coordonnée du cLasp $\mathbf{X}$ qui dérive vers $+\infty$ p.s.

Sous les hypothèses (H_φ) et (I_φ), nous dirons que le cLasp $\mathbf{X}$ dérive vers $+\infty$, oscille ou dérive vers $-\infty$ selon que ρ est strictement négative, nulle ou strictement positive.

Exemple. *Dans notre exemple, nous avons déjà une forme explicite pour φ, l'ensemble D_φ et l'inverse ϕ. Maintenant, trouvons les solutions de l'équation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$. Supposons que $J_\varphi(\mathbf{0})$ est irréductible, c'est-à-dire que $a_{ij} > 0$ pour tout $i \neq j$. Alors les solutions de l'équation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$ sont $\mathbf{0} = (0,0)$ et les points de la forme $\left(\frac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\lambda_2)}}{q_1}, \frac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\lambda_1)}}{q_2}\right)$ où $\Delta_j(\lambda_i) = a_j^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$, $j \in [2], i \neq j$. Il est alors aisé de vérifier qu'il n'existe qu'une seule solution du second type. De plus, cette solution appartient à $(0,+\infty)^2$ où est égale à $\mathbf{0}$. D'après l'expression de ϕ, $\phi(\mathbf{0})$ est cette solution. De plus, nous pouvons montrer que $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ si et seulement $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ et $a_1 a_2 \geq a_{1,2}a_{2,1}$. D'un autre côté, nous pouvons calculer la valeur propre de Perron-Frobenius ρ de la matrice Jacobienne $J_\varphi(\mathbf{0})$. Elle est de la forme*

$$\rho = \frac{a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_{1,2}a_{2,1}}}{2}.$$

Il est alors facile de voir que $\rho \leq 0$ si et seulement si $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ et $a_1 a_2 \geq a_{1,2}a_{2,1}$. En conclusion, $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho \leq 0$.

Si la matrice $J_\varphi(\mathbf{0})$ est réductible alors au moins un $a_{i,j}$ est égal à zéro, pour $i,j \in [d]$. Dans ce cas, φ a au plus quatre zéros (certains peuvent être égales ou négatifs) $\mathbf{0} = (0,0)$, $\left(\frac{2a_1}{q_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{2a_2}{q_2}\right)$ et $\left(\frac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\frac{2a_2}{q_2})}}{q_1}, \frac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\frac{2a_1}{q_1})}}{q_2}\right) = \phi(\mathbf{0})$.

2.3.3 Champ $(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}})$

Comme dit plus haut, le cLasp $\mathbf{X}$ contient les mêmes informations que le champ matriciel $\mathbb{X}$. Néanmoins alors que pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}} = -\mathrm{r}$ est déterministe sur l'ensemble $\{\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+\}$, la matrice $\mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}}$ est aléatoire quand $d \geq 2$. Plus particulièrement, le fait que le champ $(\mathbf{T}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}}) = \{(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}}), \mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+\}$ ait des accroissements indépendants et stationnaires induit une analogie avec la théorie des fluctuations en dimension un. Ce champ bi-varié peut être vu, d'un point de vue analytique, comme un champ d'échelle. Cependant ce champ ne décrit pas les fluctuations du spaLf $\mathbf{X}$ à son "infimum" car cette notion est ici difficilement définissable. La dernière partie de ce travail a consisté en la description de cette loi. C'est-à-dire l'identité de Kemperman d-dimensionnelle.

Commençons par définir la transformée d'Esscher d'un cLasp nécessaire pour énoncer le prochain résultat. Soit $\mu^{(j)} \in \mathbb{R}^d_+$, nous notons $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$ le PL d-dimensionnel dont la loi est obtenue à partir de celle de $\mathrm{X}^{(j)}$ par la transformée d'Esscher associée à la martingale $(e^{-\langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_t\rangle - t\varphi_j(\mu^{(j)})},\ t \geq 0)$. Plus précisément, soit $(\mathcal{F}^{(j)}_t,\ t \geq 0)$ la filtration naturelle associée à $\mathrm{X}^{(j)}$. Alors pour $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{F}^{(j)}_t$, alors la loi de $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$ est définie par

$$\mathbb{P}^{\mu^{(j)}}(A) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A e^{-\langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_t\rangle - t\varphi_j(\mu^{(j)})}].$$

Son exposant de Laplace est alors donné par

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j(\lambda + \mu^{(j)}) - \varphi_j(\mu^{(j)}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d_+. \tag{2.10}$$

Considérons maintenant d PL indépendants $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$, $j \in [d]$ de loi respective $\mathbb{P}^{\mu^{(j)}}$. Définissons un nouveau cLasp par

$$\mathbf{X}^{\mu}_{\mathrm{t}} := \mathrm{X}^{\mu^{(1)},(1)}_{t_1} + \cdots + \mathrm{X}^{\mu^{(d)},(d)}_{t_d}, \quad \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+ \tag{2.11}$$

où $\mu = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(d)})$ est la matrice dont les colonnes sont les $\mu^{(j)}$, $j \in [d]$. Son exposant de Laplace est donné par

$$\varphi^{\mu}(\lambda) = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}(\lambda), \ldots, \varphi_d^{\mu^{(d)}}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d_+ .$$

De plus, posons $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} := \sigma\{\mathbf{X}_{\mathrm{s}}, \mathrm{s} \leq \mathrm{t}\}$ pour tout $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+$, alors $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \sigma(\mathcal{F}^{(1)}_{t_1} \cup \mathcal{F}^{(2)}_{t_2} \cdots \cup \mathcal{F}^{(d)}_{t_d})$. Ainsi pour tout $\mathrm{t} \geq 0$ et $A \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}}$,

$$\mathbb{P}^{\mu}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A e^{-\langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \rangle\!\rangle - \langle \mathrm{t}, \varphi(\mu) \rangle}], \tag{2.12}$$

où $\langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \rangle\!\rangle := \sum_{j \in [d]} \langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_{t_j} \rangle$ et (2.11) sera appelée *transformée d'Esscher du cLasp* $\mathbf{X}$.

Avant d'énoncer les résultats, nous rappelons la notation suivante : soient $A = (\mathrm{a}^{(1)}, \ldots, \mathrm{a}^{(d)})$ et $B = (\mathrm{b}^{(1)}, \ldots, \mathrm{b}^{d)})$ deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors

$$\langle\!\langle A, B \rangle\!\rangle = \sum_{j \in [d]} \langle \mathrm{a}^{(j)}, \mathrm{b}^{(j)} \rangle .$$

Soient $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(d)}$ les d-colonnes de la matrice $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j \in [d]}$, nous considérons l'ensemble suivant

$$\mathcal{M}_{\varphi} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^d_+ \times M_d(\mathbb{R}_+) : \lambda_j \geq \varphi_j(\mu^{(j)}), j \in [d]\} .$$

Théorème 2.3.4. *Supposons* (H_{φ}). *Soient* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$ *et* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T^{(1)}_{\mathrm{r}}, \ldots, T^{(d)}_{\mathrm{r}}) \in \overline{\mathbb{R}^d_+}$ *la plus petite solution du système* $(\mathrm{r}, \mathbb{X})$, *alors il existe une application* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_d) : \mathcal{M}_{\varphi} \to \mathbb{R}^d_+$ *telle que*

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}} \rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}} \rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \Phi(\lambda, \mu) \rangle}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_{\varphi} .$$

De plus, Φ *est uniquement déterminée par les équations*

$$\varphi_j(\mu^{(j)} + \Phi(\lambda, \mu)) = \lambda_j, \quad j \in [d], (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_{\varphi} \tag{2.13}$$

et est explicitement déterminée par

$$\Phi(\lambda, \mu) = \phi^{\mu}(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \ldots, \lambda_d - \varphi_d(\mu^{(d)})), \tag{2.14}$$

où ϕ^{μ} *est l'inverse de l'exposant de Laplace* φ^{μ} *de la transformée d'Esscher* $\mathbf{X}^{\mu}$ *défini par* (2.11).

Ce résultat s'obtient en étudiant la martingale multi-indexée $\{\mathbf{M}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\} := \{e^{-\langle \bar{\varphi}(\mu), \mathrm{t} \rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \rangle\!\rangle}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$, où $\bar{\varphi}(\mu) = (\varphi_1(\mu^{(1)}), \ldots, \varphi_d(\mu^{(d)}))$, et le fait que $\mathbf{T}$ et $\mathbb{X}$ aient des accroissements indépendants et stationnaires.

Exemple. *Nous pouvons expliciter* Φ *dans notre exemple* 2*-dimensionnel. Soient* $\mu^{(1)} = {}^t(\mu_{1,1}, \mu_{2,1}) \in \mathbb{R}^2_+$, $\mu^{(2)} = {}^t(\mu_{1,2}, \mu_{2,2}) \in \mathbb{R}^2_+$ *et* $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$. *La transformée d'Esscher* $\mathbf{X}^{\mu}$ *a pour exposant de Laplace* $\varphi^{\mu} = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}, \varphi_2^{\mu^{(2)}})$ *où pour tout* $j \in [2]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$,

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j(\lambda) + q_j \mu_{i,j} \lambda_j = -a_{ij}\lambda_i - (a_j - q_j \mu_{j,j})\lambda_j + \frac{1}{2} q_j \lambda_j^2 .$$

Supposons $q_j > 0, j \in [2]$. Après quelques calculs, on obtient

$$D_{\varphi^\mu} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2_+ : \lambda_1 > \left(\frac{a_1 - q_1\mu_{1,1} + \sqrt{\Delta_1^\mu(\lambda_2)}}{q_1} \vee 0 \right) \text{ et } \lambda_2 > \left(\frac{a_2 - q_2\mu_{2,2} + \sqrt{\Delta_2^\mu(\lambda_1)}}{q_2} \vee 0 \right) \right\},$$

où $\Delta_j^\mu(\lambda_i) = (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$ pour tout $j \in [2]$ et $i \neq j$. Notons que $D_\varphi \subset D_{\varphi^\mu}$. En particulier, si (H_φ) est satisfaite alors (H_{φ^μ}) est satisfaite aussi et les deux ensembles D_φ et D_{φ^μ} sont non vides. Sous cette condition, d'après le théorème 2.3.2, le cLasp $\boldsymbol{X}^\mu$ atteints tous les niveaux $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}^2_-$ avec une probabilité positive et d'après le second point de ce même théorème, nous savons que φ^μ admet un inverse ϕ^μ sur l'ensemble D_{φ^μ}. Cet inverse $\phi^\mu = (\phi_1^\mu, \phi_2^\mu)$ est donné par

$$\phi_j^\mu(\lambda) = \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j\lambda_j + (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i^\mu(\lambda)} + \frac{a_j}{q_j} - \mu_{j,j}, \quad j \in [2], i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}^2_+ .$$

De plus, d'après le théorème (2.3.4)*, l'exposant de Laplace $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ du champ $(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}})$ est défini pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ et $j \in [2]$ par*

$$\begin{aligned}\Phi_j(\lambda,\mu) &= \phi_j^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \lambda_2 - \varphi_2(\mu^{(2)})) \\ &= \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j(\lambda_j - \varphi_j(\mu^{(j)})) + (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \lambda_2 - \varphi_2(\mu^{(2)}))} \\ &+ \frac{a_j}{q_j} - \mu_{j,j}.\end{aligned}$$

Pour finir avec l'étude des cLasp, nous donnons une généralisation de l'identité de Kemperman. Considérons l'ensemble

$$\widehat{M}_d(\mathbb{R}) \;:=\; \{\mathrm{x} \in M_d(\mathbb{R}) : \mathrm{x} \text{ essentiellement positive et } \mathrm{x} \cdot \mathbf{1} \leq \mathbf{0}\}$$

munit d'une norme, $\|\cdot\|$ et associé à sa σ-tribu Borélienne. D'après le théorème 2.3.4, la mesure $\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt}, \mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}$ sur $\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+ \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})$ admet la transformée de Laplace

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+ \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \, \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt}, \mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr} \\ &\qquad = [(\alpha_1 + \Phi_1(\lambda,\mu))(\alpha_2 + \Phi_2(\lambda,\mu)) \ldots (\alpha_d + \Phi_d(\lambda,\mu))]^{-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le théorème suivant montre que cette mesure peut être exprimée en fonction de la loi du cLasp $\mathbf{X}$.

Théorème 2.3.5. *Supposons (H_φ), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d_+$ et $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$,*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+ \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \, \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt}, \mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr} \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^d_+ \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \ldots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx}) \, \mathrm{dt} \, . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Autrement dit, la mesure

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt}, \mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+, \; \mathrm{x} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R}), \; \mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+,$$

est l'image de la mesure

$$\frac{det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \ldots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx}) \, \mathrm{dt}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+, \; \mathrm{x} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R}),$$

par la fonction $(t, \mathrm{x}) \mapsto (t, \mathrm{x}, -\mathrm{x} \cdot \mathbf{1})$.

Ce théorème est montré par approximation discrète, c'est le théorème 3.3.2 du prochain chapitre.

Une conséquence intéressante est que ce théorème nous permet d'expliciter les mesures de Lévy des subordinateurs $\mathbf{T}_{\cdot \mathrm{e}_i}$, $i \in [d]$ en fonction de la loi du cLasp $\mathbf{X}$.

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *pour tout* $\mathrm{r} \in (0, \infty)^d$. *Alors pour tout* $i \in [d]$, *le processus* $\{\mathbf{T}_{r\mathrm{e}_i},\, r \geq 0\}$ *est un subordinateur multi-varié d'exposant de Laplace* ϕ_i *défini par* (2.3.1). *De plus, supposons que, pour tout* $j \in [d]$, *la* j^e *colonne* $\mathrm{X}_{t_j}^{(j)}$ *de la matrice* $\mathbb{X}_{\mathrm{t}}$ *admette une densité continue sur* $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_d$, *où* $F_i = \mathbb{R}_+$, *pour* $i \neq j$ *et* $F_j = \mathbb{R}$. *Notons* $\widehat{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}} = (\widehat{X}_{t_j}^{i,j})_{i,j \in [d]}$ *la matrice définie par* $\widehat{X}_{t_i}^{i,i} = \sum_{j=1}^{d} X_{t_j}^{i,j}$ *et* $\widehat{X}_{t_j}^{i,j} = X_{t_j}^{i,j}$, $i \neq j$, *et* $p_{\mathrm{t}} : M_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *la densité de* $\widehat{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}}$. *Alors la mesure de Lévy du subordinateur multi-varié* $\{\mathbf{T}_{r\mathrm{e}_i},\, r \geq 0\}$ *est donnée par*

$$\nu_i(\mathrm{dt}) = \int_{\mathbb{R}_+^{d(d-1)}} \frac{\det(-\overline{\mathrm{X}}^{i,i})}{t_1 \dots t_d} p_t(\mathrm{X}^0) \prod_{k \neq j} \mathrm{d}x_{kj}\mathrm{dt}, \quad \textit{si } d > 1 \textit{ et } \nu(\mathrm{dt}) = \frac{p_t(0)}{t}\mathrm{d}t, \quad \textit{si } d = 1.$$

Ici $\overline{\mathrm{X}}^{i,i}$ *est obtenue à partir de la matrice* $\overline{\mathrm{X}} = (\overline{x}_{i,j})_{i,j \in [d]}$, *définie par* $\overline{x}_{i,i} = -\sum_{j \neq i} x_{i,j}$ *et* $\overline{x}_{i,j} = x_{i,j}$ *pour* $i \neq j$, *en supprimant la ligne et la colonne* i *et* $\mathrm{X}^0 = (x^0_{i,j})_{i,j \in [d]}$, *avec* $x^0_{i,j} = x_{i,j}$, *pour* $i \neq j$ *et* $x^0_{i,i} = 0$.

Quand $d = 1$, ce résultat est énoncé dans l'article [46] de V.M. Zolotarev.

2.4 Applications de la représentation de Lamperti

Armés de cette représentation d-dimensionnelle reliant les trajectoires du PBCM Z à celles d'un cLasp $\mathbf{X}$, ainsi que de la théorie des fluctuations d'un tel champ stochastique, il nous reste à nous convaincre de l'utilité de cette représentation.

2.4.1 Temps d'atteinte du cLasp X et intégrale du PBCM Z

Tout d'abord regardons s'il est possible de généraliser le résultat trivial quand $d = 1$ qui nous donne, par construction de X, l'égalité p.s. entre son temps d'atteinte de $-\mathrm{Z}_0 = -r$, T_r et l'intégrale à l'infini du PBC Z, $\int_0^\infty Z_s ds$. Malheureusement, quand $d > 1$, ce résultat n'est plus aussi trivial. En effet, la représentation de Lamperti n'est plus constructive. Néanmoins, par définition de $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$, l'inégalité $\mathbf{T}_r \leq \int_0^\infty \mathrm{Z}_s ds$ est toujours évidente. La difficulté réside donc dans le fait de pouvoir écrire chacune des coordonnées de $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ comme une intégrale de Z dont les bornes ne dépendent pas des coordonnées.

Cette première application de la représentation de Lamperti avec $d \geq 1$ a fait l'objet d'une note constituant le chapitre 4. Afin d'établir cette égalité, il nous a fallu tout d'abord étudier les trajectoires de Z dans un cadre déterministe. Nous ne rappelons pas ces résultats ici, et renvoyons le lecteur à la première section du chapitre correspondant. En appliquant ce lemme déterministe à notre cas stochastique, nous sommes capables d'établir le théorème suivant dans le cas où le PBCM Z s'éteint p.s.

Théorème 2.4.1. *Soient* Z *un d-PBCM conservatif issu de* $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *et* $\mathbf{X}$ *le cLasp associé en loi par la représentation de Lamperti* $L(\mathrm{r}, \mathbf{X})$. *Soit* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ *son temps d'atteinte du niveau* $-\mathrm{r}$.

Supposons

$$\textit{Pour tout } \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d,\ \mathbb{P}_\mathrm{r}(\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = 0\} \cup \{\lim_{t\to\infty} Z_t^{(i)} = \infty, \textit{ pour tout } i \in [d]\}) = 1, \tag{2.17}$$

alors

$$\mathbf{T}_\mathrm{r} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{A}_t \quad p.s.,$$

où pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{A}_t := (A_t^{(1)}, \ldots, A_t^{(d)})$ *et pour tout* $j \in [d]$, $A_t^{(j)} := \int_0^t Z_s^{(j)} ds$.

Quand $d = 1$, la condition (2.17) est satisfaite et il est naturel de penser qu'elle soit toujours satisfaite dans le cas général. Quand $d > 1$ et $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d'après [33], le PBCM Z s'éteint p.s., c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}$. En particulier, la condition (2.17) est bien satisfaite. Cette condition est également satisfaite dans le cas neutre, c'est-à-dire quand pour tout $s \geq 0$ et tout $i, j \in [d]$, $\varphi_i(s, s, \ldots, s) = \varphi_j(s, s, \ldots, s)$. D'un autre côté, nous ne connaissons pas d'exemples de PBCM qui ne satisfasse pas la condition (2.17). Néanmoins quand $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$, la preuve de cette condition est une question ouverte.

En conséquence de ce théorème, sous une certaine condition, nous déduisons que toute la trajectoire du spaLf $\mathbf{X}$ n'est pas nécessaire et qu'il peut être stoppé au temps $\mathbf{T}_\mathrm{r}$, dans le sens où pour tout $j \in [d]$, le PLsp $\mathrm{X}^{(j)}$ peut être stoppé en $T_\mathrm{r}^{(j)}$.

De cette égalité, nous allons pouvoir déduire l'expression de la probabilité d'extinction du PBCM Z en fonction de $\phi(\mathbf{0})$.

2.4.2 Condition de Grey multi-types

Il nous reste à étudier les différents "modes" d'extinction de Z pour donner une condition de Grey multi-types. Nous exprimerons également la probabilité d'extinction en temps fini en fonction de $\phi(\mathbf{0})$.

Nous dirons que le PBCM Z est *conservatif* si pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ et $t > 0$, $\mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1$. D'après (2.2), ceci se traduit sur l'exposant de Laplace u du PBCM Z comme suit : $e^{\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\mathbf{0})\rangle} = 1$, pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ et $t > 0$. Ainsi Z est conservatif si et seulement si

$$u_t^{(i)}(\mathbf{0}) = 0, \ \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } i \in [d]. \tag{2.18}$$

Quand $d = 1$, il est prouvé dans [23] que le PBCM Z est conservatif si et seulement si son mécanisme de branchement φ satisfait

$$\int_{0+} \frac{d\alpha}{|\varphi(\alpha)|} = \infty\,.$$

Quand $d \geq 1$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur le mécanisme de branchement φ caractérisant la conservativité du PBCM Z est une question ouverte à laquelle nous n'apporterons pas de réponse ici. Néanmoins, si il existe $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\mathbf{0}) = 0$, pour tout $t \geq 0$, alors d'après (S_φ), pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\mathbf{0}) &= -\varphi_i(u_t^{(1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(i-1)}(\mathbf{0}), 0, u_t^{(i+1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(d)}(\mathbf{0})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme φ_i est décroissante sur toutes les coordonnées $j \neq i$,

$$-\varphi_i(u_t^{(1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(i-1)}(\mathbf{0}), 0, u_t^{(i+1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(d)}(\mathbf{0})) \geq \alpha_i,$$

d'où $\alpha_i = 0$. Ainsi si le PBCM Z est conservatif, alors pour tout $i \in [d]$, $\alpha_i = 0$. Dans toute la suite, nous nous intéressons à l'extinction des PBCM, c'est-à-dire à des PBCM qui tendent vers $\mathbf{0}$

à l'infini. Il s'agira donc principalement de processus conservatifs. C'est pourquoi il est légitime de supposer à partir de maintenant que

$$\alpha_i = 0, \quad \text{pour tout } i \in [d].$$

Étudions maintenant l'extinction du PBCM Z. Comme dit dans l'introduction, Z peut s'éteindre de deux manières différentes. S'il existe un temps $t \geq 0$ tel que

$$\mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ i.e. } \forall i \in [d], Z_t^{(i)} = 0,$$

nous dirons que le PBCM Z *s'éteint en temps fini*. Dans ce cas, $T_0^{\mathrm{Z}} := \inf\{t \geq 0 : \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\} \leq t$. D'autre part, nous dirons que le PBCM Z *s'éteint à l'infini* si $T_0^{\mathrm{Z}} = \infty$, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, \exists i \in [d], Z_t^{(i)} > 0$$
$$\text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \quad \text{i.e.} \quad \forall i \in [d], \lim_{t\to+\infty} Z_t^{(i)} = 0.$$

Notons que dans ce cas, il s'agit d'extinction globale dans le sens où tous les types s'éteignent. Quand Z n'est pas irréductible, il est possible d'observer des extinctions locales ne concernant qu'un sous-ensembles de types. Dans ce cas, l'étude de l'extinction du PBCM Z est ramenée à celles de ses classes d'irréductibilité. C'est pourquoi, nous supposerons dans la suite que Z est irréductible.

De plus, rappelons que si l'hypothèse (H_φ) n'est pas satisfaite, alors, d'après le théorème 2.3.2, le cLasp $\mathbf{X}$ d'exposant de Laplace φ vérifie $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = 0$ pour tout $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. Ainsi la représentation de Lamperti $L(\mathrm{r}, \mathbf{X})$ implique que $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = 0$.

En conséquence dans toute la fin de ce chapitre, sauf mention contraire, nous supposerons que (H_φ) et (I_φ) sont satisfaites.

Sous (H_φ), le mécanisme de branchement $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$ admet un inverse ϕ d'après le théorème 2.3.2. Nous rappelons également que d'après le théorème 2.3.3, si le spaLf $\mathbf{X}$ est intégrable, c'est-à-dire si $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] < \infty$, pour tout $i, j \in [d]$, alors $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$ si et seulement si Z est super-critique.

Nous commençons par établir une relation entre la probabilité d'extinction et le mécanisme de branchement du PBCM Z.

Proposition 2.4.1. *Soit* Z *un PBCM, alors pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) \leq e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle} \tag{2.19}$$

et

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = 1, \quad \textit{si et seulement si} \quad \phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{2.20}$$

Dans ce cas, on dit que Z *s'éteint p.s. Si de plus, la condition* (2.17) *est satisfaite, alors pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}.$$

Pour tout $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$, nous désignons par

$$q_{\mathrm{r}} := \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\exists t \geq 0 : \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0})$$

la probabilité d'extinction en un temps fini. Notons que pour tout $0 \leq s \leq t$, $\{\mathrm{Z}_s = \mathbf{0}\} \subset \{\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\}$, ainsi

$$q_{\mathrm{r}} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}).$$

De plus, par définition (2.2) de u, il est facile d'obtenir l'expression suivante pour tout $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty)\rangle},$$

où pour tout $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) := \lim_{\lambda\to+\infty} u_t^{(i)}(\lambda)$ dans toute direction de $\mathbb{R}^d$. La probabilité d'extinction q_{r} dépend alors de la finitude de l'exposant de Laplace u comme suit.

Proposition 2.4.2. *Soit un PBCM* Z. *Supposons qu'aucun des processus* $X^{i,j}$ *pour* $i \neq j$ *n'est un processus de Poisson composé. Alors nous avons la dichotomie suivante :*

(i) Si pour tout $t \geq 0$ *et* $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$ *alors* $q_{\mathrm{r}} = 0$, *pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. *Dans ce cas,* Z *peut seulement s'éteindre à l'infini.*

(ii) Si pour tout $t \geq 0$ *et* $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, *alors pour tout* $t \geq 0$ *et* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) > 0$ *et* $q_{\mathrm{r}} > 0$. *Dans ce cas, si de plus* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *alors* $q_{\mathrm{r}} = 1$, *pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$.

Il nous reste encore à établir des conditions sur le mécanisme de branchement afin de distinguer les deux "modes" d'extinction. En dimension un, voir [23], D.R. Grey donne des expressions des probabilités de ces deux événements d'extinction et une condition nécessaire et suffisante d'extinction en temps fini simultanément en intégrant le système différentiel (S_φ). Malheureusement en multi-types, cet argument ne marche plus car nous ne pouvons pas faire de changement de variable dans cette intégrale.

D'après [23], en dimension $d = 1$, l'extinction en un temps fini a lieu si et seulement si $\int^{\infty} \frac{ds}{\varphi(s)} < \infty$. Prenons $d \geq 1$ et considérons le i^e 1-PBC diagonal $\tilde{Z}^{(i)}$ de mécanisme de branchement

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha) = \varphi_i(\alpha \mathrm{e}_i), \quad \alpha \geq 0\,.$$

Remarquons que $\tilde{\varphi}_i$ est l'exposant de Laplace du PLsp $X^{i,i}$ qui est donc associée en loi à $\tilde{Z}^{(i)}$ par une représentation de Lamperti unidimensionnelle. De plus, comme (H_φ) est satisfaite, $X^{i,i}$ ne dérive pas vers $+\infty$, c'est-à-dire $\lim_{\alpha \to +\infty} \tilde{\varphi}_i(\alpha) = \infty$ et $\tilde{\varphi}_i'(0^+) \geq 0$. Considérons maintenant l'hypothèse

$$(G_\varphi^{(i)}) \quad \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\tilde{\varphi}_i(\alpha)} < \infty\,.$$

Sous $(G_\varphi^{(i)})$, le PBC $\tilde{Z}^{(i)}$ s'éteint en temps fini p.s. d'après la condition de Grey.

Nous pouvons alors établir le résultat suivant caractérisant l'extinction du PBCM Z en fonction de celles de ses PBC diagonaux.

Théorème 2.4.2. *Soit un PBCM* Z *tel qu'aucun des processus* $X^{i,j}$ *pour* $i \neq j$ *ne soit un processus de Poisson composé.*

(i) Supposons que $(G_\varphi^{(i)})$ *est satisfaite pour tout* $i \in [d]$. *Alors* Z *peut seulement s'éteindre en un temps fini. De plus, pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$q_{\mathrm{r}} = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0}) \rangle}\,.$$

(ii) Supposons que $(G_\varphi^{(i)})$ *n'est pas satisfaite pour un* $i \in [d]$. *Alors* Z *peut seulement s'éteindre à l'infini, i.e.* $q_{\mathrm{r}} = 0$ *pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. *De plus,*

- *Si* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *alors* Z *s'éteint à l'infini p.s., i.e.* $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = 1$ *pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- *Si la condition* (2.17) *est satisfaite, alors pour tout* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0}) \rangle}\,.$$

Notons que si pour tout $i, j \in [d]$ avec $i \neq j$, $X^{i,j}$ est un processus de Poisson composé (PPC) alors pour tout $i \in [d]$, $\varphi_i(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \varphi_i(\lambda_i \mathrm{e}_i) = \tilde{\varphi}_i(\lambda_i)$. Dans ce cas, nous pouvons montrer que $(G_\varphi^{(i)}), i \in [d]$ implique que le PBCM Z peut seulement s'éteindre en un temps fini en utilisant les mêmes arguments que dans l'article [23].

L'idée de la preuve est de comparer le mécanisme de branchement φ à d'autres mécanismes plus généraux pour lesquels il existe une unique solution au système (S) correspondant telle que nous connaissions son comportement asymptotique. Pour les détails de la preuve, nous renvoyons le lecteur à la preuve de ce théorème dans le chapitre 5.

En conclusion, sous (H_φ), le comportement du PBCM Z est déterminé par celui de ses d PBC diagonaux $\tilde{Z}^{(i)}, i \in [d]$. Autrement dit, la d-condition de Grey, correspondant au cas d'un d-PBC, n'est en fait que l'accumulation de d conditions de Grey unidimensionnelles.

Résumons les différents résultats obtenus à l'aide d'un tableau. Soit Z un PBCM issu de $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ et de mécanisme de branchement $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ alors, sous les hypothèse (H_φ) et (I_φ), si aucun des processus $X^{i,j}$ avec $i \neq j$ n'est un processus de Poisson composé, alors son comportement asymptotique est régi par le tableau suivant :

Mécanisme de branchement	q_{r}	$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0})$
$\exists i \in [d] : \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\varphi_i(\alpha \mathrm{e}_i)} = \infty, \quad \phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$	0	1
$\exists i \in [d] : \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\varphi_i(\alpha \mathrm{e}_i)} = \infty, \quad$ et (2.17)	0	$e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$
$\forall i \in [d] : \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\varphi_i(\alpha \mathrm{e}_i)} < \infty, \quad \phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$	1	1
$\forall i \in [d] : \int^{\infty} \frac{d\alpha}{\varphi_i(\alpha \mathrm{e}_i)} < \infty, \quad \phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0},$	$e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$	$e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$

Conclusion

Cette première partie nous a permis de dresser les grandes lignes de l'étude des processus de branchement multi-types continus. Nous avons pu voir que leur étude, notamment de leurs comportements asymptotiques, est intrinsèquement liée à celle de matrices "essentiellement positives" de processus de Lévy. L'étude de ces processus de branchement est alors en quelque sorte ramenée à celle de la théorie des fluctuations pour les champs de Lévy.

Ainsi nous avons pu développer une théorie des fluctuations pour les champs de Lévy additifs spectralement positifs (cLasp) $\mathbf{X}$ qui généralisent les résultats de la théorie des fluctuations pour les processus de Lévy spectralement positifs. La motivation de cette étude était d'établir la condition de Grey multi-types mais cette théorie s'est révélée vraiment très intéressante et parfois surprenante. Nous avons pu définir une notion de temps d'atteinte des niveaux négatifs dont l'exposant de Laplace ϕ est bien l'inverse de celui du cLasp $\mathbf{X}$, noté φ, sous une certaine condition (H_φ). Sous cette hypothèse (H_φ) et sous réserve d'irréductibilité, le comportement du cLasp $\mathbf{X}$ est encore caractérisé par la valeur de $\phi(\mathbf{0})$, qui est le plus grand zéro de φ. Ces résultats généralisent les résultats de la dimension un mais nécessitent de prendre plus de précautions lors de leur étude. Nous avions comme objectif de prouver une identité de Kemperman pour ces cLaps. C'est cette identité qui nous a amené à étudier la loi du couple $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$. Ce champ bi-varié peut être vu comme une généralisation d-dimensionnelle de la fonction d'échelle d'un PLsp au moins du point de vue analytique. La différence majeure entre les processus et les champs réside dans le fait que bien que le champ $\mathbf{X}$ soit pleinement déterminé en $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$, la matrice $\mathbb{X}$ ne l'est pas. Il nous est donc nécessaire de garder l'information sur la matrice $\mathbb{X}$ et d'étudier le couple $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$. En étudiant ce couple, nous avons établi la généralisation de l'identité de Kemperman aux cLasp en utilisant des mesures images. Ce travail sur la théorie des fluctuations des cLasp est loin d'être exhaustif, il reste encore bien des questions à envisager. D'un point de vue pratique, nous pourrions imaginer un modèle d'assurance multi-types qui nous permettrait de distinguer les différentes dépenses ou de considérer des fusions de compagnies.

Dans un second temps, ces premiers résultats ont permis l'étude asymptotiques du PBCM Z associé par la représentation de Lamperti. En particulier, sous réserve de l'existence de la limite du PBCM, le cLasp $\mathbf{X}$ peut être stoppé en son premier temps d'atteinte de $-Z_0$. Autrement dit, toute la trajectoire du cLasp n'est pas utile pour l'étude du PBCM Z. De plus, nous avons pu établir une condition de Grey multi-types liant le "mode" d'extinction (finie ou infinie) du PBCM Z à ceux des PBC diagonaux associés. Pour finir, nous avons vu que la probabilité d'extinction en temps fini de Z s'écrit bien en fonction de $\phi(\mathbf{0})$ et généralise les expressions connues du cas $d = 1$.

Cette étude du cas multi-types grâce à la représentation de Lamperti généralise donc tous les résultats connus du cas $d = 1$. En revanche, comme nous avons pu le constater, plusieurs preuves simples, voir triviales, dans le cas $d = 1$, deviennent beaucoup plus délicates pour $d \geq 1$ quelconque.

Enfin, j'attire l'attention du lecteur sur le fait que ce tour d'horizon portant sur l'histoire mathématique de l'étude des processus de branchement ne se veut en aucun cas exhaustif. En particulier, il existe de nombreuses autres généralisations de ces processus pouvant modéliser plus fidèlement des évolutions de population.

Il est par exemple possible de définir des processus de branchement avec immigration. Comme son nom l'indique, à chaque génération, nous permettons l'apparition d'un certain nombre aléatoire d'immigrants venant gonfler la population. La représentation de Lamperti et le comportement asymptotique de ces processus ont été étudiés dans divers articles comme les articles [6] et [7] de M. Barczy et G. Pap ou encore [12] de M.E. Caballero, J.L. Pérez Garmendia et G. Uribe Bravo.

Cette généralisation permet en outre l'étude des processus de branchement conditionnés à la non-extinction, [25] or [1].

Quand nous cherchons à modéliser l'évolution d'une population, il se peut que nous ayons envie ou besoin de considérer l'influence de l'environnement sur la croissance de la population. Par exemple, nous pouvons ajouter des contraintes d'espace ou de ressources. Ces généralisations sont étudiées via les processus de branchement à environnements aléatoires. Dans ces modèles, nous permettons un déplacement spatial des enfants et l'apparition de contraintes environnementales. Cette généralisation dans le cas discret a été introduit en 1969 par W.I. Smith et E. Wilkinson dans l'article [42]. Depuis de nombreux auteurs se sont intéressés à ces PB, à leur extinction, à leur comportement asymptotique et à leurs diverses représentations.

Part II

A stopover in the continuous multi-types case

Introduction

This second part will precise my work, that is the results give in section 2.3 and 2.4 of the second chapter. Until now, we only consider continuous (time and space) multi-type branching processes (CMBP) with $d \geq 1$ types. Recall that these processes can represent the evolution of a population indexed by a real time and taking real values, in which the individuals are independent of each others and reproduce themselves according to a probability law given by their 'type' or mutation. It is composed of three chapters.

The first chapter concerns the spectrally positive additive Lévy fields (spaLf) which appear in the multi-type Lamperti representation of a MCBP. We wrote this article in order to establish a multi-type Grey's condition giving necessary and sufficient condition to distinguish finite and infinite extinction of a MCBP. We have only studied and generalised a little part of all the fluctuation theory results about Lévy processes. Indeed, it concerns the first hitting time of negative levels for a spaLf and an associated bivariate field. From an analytic point of view, this bivariate field can be seen as a scale field which generalise scale functions. This chapter is my first article [17] of PhD student written with my PhD supervisor Loïc Chaumont, submitted to the Electronic Journal of Probability (EJP) in December 2019, revised and re-submitted on September 15^{th}.

The second chapter is a first application of the first one. The fluctuation theory of a spaLf enables us to show that, in multi-type case, we still have equality between a first hitting time of the spaLf and the integral of the associated MCBP. When $d = 1$, this result is an obvious consequence of the construction of the spectrally positive Lévy process (spLP). Nevertheless when $d > 1$, we can't construct the spaLf as before and establishing this equality requires to be precise. This inequality enables us to express the probability of extinction of the MCBP in terms of $\phi(\mathbf{0})$, the largest zero of its branching mechanism. This application is a part of the last chapter.

Finally, the third chapter is devoted to our second article [19] which use the others to study the asymptotic behaviour of the MCBP. In this second paper, we give a generalisation of the Grey's condition [23] which characterize the extinction of the 1-type CBP in terms of the integral of its branching mechanism. We show that the multi-type Grey's condition characterize the extinction of a MCBP Z in terms of the one of d CBP, with only one type. In other words, in d types case, we have to satisfy d Grey's condition in order to have a finite extinction.

Chapter 3

Fluctuation theory for spectrally positive additive Lévy fields

In this chapter, we consider spectrally positive, additive Lévy field (spaLf) defined by

$$\mathbf{X}_{\mathrm{t}} := \left(\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{t_j},\, i = 1, \dots, d \right) = \mathrm{X}^{(1)}_{t_1} + \cdots + \mathrm{X}^{(d)}_{t_d}, \quad \mathrm{t} = (t_1, \dots, t_d) \in [0, \infty)^d,$$

where $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \dots, X^{d,j})$, $j = 1, \dots, d$, are d independent $\mathbb{R}^d$-valued Lévy processes such that $X^{i,j}$ are non decreasing for $i \neq j$ and $X^{j,j}$ is spectrally positive (here ${}^t\mathrm{u}$ means the transpose of the vector $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^d$). SpaLf's can be considered as (non-trivial) extensions in higher dimension of spectrally positive Lévy processes and the purpose of this article is to develop fluctuation theory for such random fields. We refer to Chapter VII of [8] for a complete account on fluctuation theory for spectrally one sided Lévy processes, see also [20] and [32] (Chapter VII of [8] deals with the case of spectrally negative Lévy processes but the results can easily be transferred to the spectrally positive case). The particular pathwise features of spaLf's allow us to define their first passage times $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T^{(1)}_{\mathrm{r}}, \dots, T^{(d)}_{\mathrm{r}})$ at multivariate levels $-\mathrm{r} \in (-\infty, 0]^d$ as the smallest of the indices $\mathrm{t} = (t_1, \dots, t_d)$ satisfying $\mathbf{X}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{r}$ in the usual partial order of $\mathbb{R}^d$. The distribution of the variables $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$, $\mathrm{r} \in [0, \infty)^d$ can then be related to the distribution of the field $\{\mathbb{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in [0, \infty)^d\}$, where $\mathbb{X}_{\mathrm{t}} = (X^{i,j}_{t_j})_{1 \leq i,j \leq d}$. In doing so we obtain some fluctuation-type identities in the general framework of multivariate stochastic fields. These results provide an intrinsic motivation for the present study that can be considered in the line of several works on additive Lévy processes from Khoshnevisan and Xiao, see for instance [29].

The original motivation comes from an extension of the Lukasiewicz-Harris coding of Bienaymé-Galton-Watson trees through downward skip free random walks. In [15], the authors proved that multitype Bienaymé-Galton-Watson trees can be coded by multivariate random fields

$$\left(\sum_{j=1}^{d} S^{i,j}_{n_j},\, i = 1, \dots, d \right), \quad n_j = 0, 1 \dots, \;\; j = 1, \dots, d,$$

where ${}^t(S^{1,j}, \dots, S^{d,j})$, $j = 1, \dots, d$ are d independent $\mathbb{Z}^d$-valued random walks such that $S^{i,j}$ are non decreasing for $i \neq j$ and $S^{j,j}$ is downward skip free. These random fields are the discrete time counterparts of spaLf's which suggests the possibility of coding continuous multitype branching trees in an analogous way. It seems quite complicated to achieve such a result as the notion of continuous multitype tree is not clearly defined for general mechanisms. However, reducing the analysis to processes rather than trees, one may still consider the Lamperti representation which provides a pathwise relationship between branching processes and their mechanism. This representation can be extended to continuous time multitype branching processes by using spaLf's. It was done in [14] for the discrete valued case and in [13] and [22] for the continuous one. More specifically, let

$\mathrm{Z} = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$ be a continuous time multitype branching process issued from $\mathrm{r} \in [0,\infty)^d$. Then Z can be represented as the unique pathwise solution of the following equation,

$$(Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(d)}) = \mathrm{r} + \left(\sum_{j=1}^{d} X^{1,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)}\, ds}, \ldots, \sum_{j=1}^{d} X^{d,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)}\, ds} \right), \quad t \geq 0\,,$$

where $\mathrm{X}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, d$, are Lévy processes as described above. Now recall that $\mathbf{0}$ is an absorbing state for Z. Then it follows from the above equation that the path of Z up to its first passage time at $\mathbf{0}$ is entirely determined by the path of the spaLf

$$\{\mathbf{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in [0,\infty)^d\} = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{t_j} \right)_{1 \leq i,j \leq d}, \mathrm{t} \in [0,\infty)^d \right\}$$

up to its first passage time $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ at level $-\mathrm{r}$. This fact which is plain in the case $d = 1$ will be proved in the general case in the upcoming papers [19] and [18], where extinction of continuous time multitype branching processes is characterized through path properties of spaLf's.

The next section consists in an important preliminary lemma for deterministic paths whose aim is to prove the existence of first passage times of spaLf's and to derive their first basic properties. Then in Section 3.2 we will turn our attention to the law of these first passage times. In particular we will prove that in analogy with the one dimensional case, their Laplace exponent is the inverse of the Laplace exponent of the spaLf. The situation for $d \geq 2$ differs significantly from the one dimensional case as we first need to give necessary and sufficient conditions for the multivariate hitting times $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ to be finite on each coordinate, with positive probability, for all $\mathrm{r} \in [0,\infty)^d$. (When $d = 1$, this is equivalent to saying that the spectrally positive Lévy process is not a subordinator.) Another fundamental difference concerns the matrix valued field $\mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}}$ which is simply equal to $-\mathrm{r}$ on the set $\mathbf{T}_\mathrm{r} < \infty$, when $d = 1$. In Section 3.3 we will focus on the law of the field $(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}})$ and prove that its Laplace exponent solves a functional equation leaded by the Laplace exponent of the spaLf $\mathbf{X}$. This equation, see (3.15) in Theorem 3.3.1 below, can be compared to the classical Wiener-Hopf factorization involving the ladder processes of spectrally positive Lévy processes. Then in Theorem 3.3.2 the distribution of $(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}})$ will be fully characterized in terms of the distribution of the original stochastic field $\mathbb{X}$, through an extension of Kemperman's formula, see Corollary VII.3 in [8]. More specifically, our result states that the measure

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{d}t,\, X^{i,j}_{t_j} \in \mathrm{d}x_{i,j},\, 1 \leq i,j \leq d)\, \mathrm{d}r$$

is the image of the measure

$$\frac{\det(-(x_{i,j})_{i,j\in[d]})}{t_1 t_2 \ldots t_d} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{P}(X^{i,j}_{t_j} \in \mathrm{d}x_{i,j},\, i = 1, \ldots, d)\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_d,$$

through the mapping $(\mathrm{t}, (x_{i,j})_{i,j\in(d]}) \mapsto (\mathrm{t}, (x_{i,j})_{i,j\in[d]}, -(x_{i,j})_{i,j\in[d]} \cdot \mathbf{1})$, where we set $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. In order to prove it, we will use a similar identity recently obtained in [15] and [14] in the discrete time and space settings together with a discrete approximation.

3.1 A preliminary lemma in the deterministic setting

We use the notation $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ and $[d] = \{1, \ldots, d\}$, where $d \geq 1$ is an integer. The zero vector of $\mathbb{R}^d$ will be denoted by $\mathbf{0}$. For $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ and $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$, we write $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ if $s_i \leq t_i$ for all $i \in [d]$ and we write $\mathrm{s} < \mathrm{t}$ if $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ and there exists $i \in [d]$ such that $s_i < t_i$.

Recall that a real valued function $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is said to be càdlàg, if it is right continuous on $\mathbb{R}_+$ and has left limits on $(0,\infty)$. Such a function is said to be downward skip free if for all $s \geq 0$, $x(s) - x(s-) \geq 0$, where we set $x(0-) = x(0)$. We also say that x has no negative jumps. We will use the notation x_t or $x(t)$ indifferently.

Definition 3.1.1. *We call $\mathcal{E}_d$, the set of matrix valued functions* $\mathrm{x} = \{(x^{i,j}_{t_j})_{i,j\in[d]},\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$ *such that for all i, j, $x^{i,j}$ is a càdlàg function and*

(i) $x^{i,j}_0 = 0$, *for all $i, j \in [d]$,*

(ii) for all $i \in [d]$, $x^{i,i}$ is downward skip free,

(iii) for all $i, j \in [d]$ such that $i \neq j$, $x^{i,j}$ is non decreasing.

For $\mathrm{s} \in \overline{\mathbb{R}}^d_+$, we denote by $[d]_{\mathrm{s}}$ the set of indices of finite coordinates of s, that is $[d]_{\mathrm{s}} = \{i \in [d] : s_i < \infty\}$. For $i \neq j$, we set $x^{i,j}(\infty) = x^{i,j}(\infty-) = \lim_{s\to\infty} x^{i,j}(s)$.

Definition 3.1.2. *Let* $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$ *and* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$. *Then* $\mathrm{s} \in \overline{\mathbb{R}}^d_+$ *is called a solution of the system* (r, x) *if it satisfies*

$$(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \qquad r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(s_j-) = 0\,, \quad i \in [d]_{\mathrm{s}}\,. \tag{3.1}$$

(*In particular,* $\mathrm{s} = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$ *is always a solution of the system* (r, x) *since* $[d]_{\mathrm{s}} = \emptyset$.)

We emphasize that according to our definition, some of the coordinates of the smallest solution of the system (r, x) may be infinite. Note also that in (3.1) it is implicit that $\sum_{j\in[d]\setminus[d]_{\mathrm{s}}} x^{i,j}(s_j-) < \infty$, for all $i \in [d]_{\mathrm{s}}$, although by definition $s_j = \infty$, for $j \in [d] \setminus [d]_{\mathrm{s}}$. The next lemma is a continuous time and space counterpart of Lemma 1 in [14]. The proof of the present result follows a similar scheme, however we need to perform it here as it requires more care. It is transferred in the Appendix at the end of this paper.

Lemma 3.1.1. *Let* $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$ *and* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$.

1. *There exists a solution* $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \overline{\mathbb{R}}^d_+$ *of the system* (r, x) *such that any other solution* t *of* (r, x) *satisfies* $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}$. *The solution* s *will be called* the smallest solution *of the system* (r, x).
2. *Let* s *and* s′ *be the smallest solutions of the systems* (r, x) *and* $(\mathrm{r}', \mathrm{x})$, *respectively. If* $\mathrm{r}' \leq \mathrm{r}$, *then* $\mathrm{s}' \leq \mathrm{s}$. *Moreover if* $(\mathrm{r}_n)_{n\geq 0}$ *is non decreasing with* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{r}_n = \mathrm{r}$ *then the sequence* $(\mathrm{s}_n)_{n\geq 0}$ *of smallest solutions of* $(\mathrm{r}_n, \mathrm{x})$ *satisfies* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{s}_n = \mathrm{s}$.
3. *Let* s *be the smallest solution of* (r, x). *If* u *is such that for all* $i \in [d]_{\mathrm{u}}$, $\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-) \leq -r_i$, *then* $\mathrm{u} \geq \mathrm{s}$. *As a consequence, for all* $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^d_+$ *such that* $\mathrm{u} < \mathrm{s}$, *there is* $i \in [d]$ *such that* $\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-) > -r_i$.
4. *The smallest solution* s *of* (r, x) *satisfies* $s_i = \inf\left\{t : x^{i,i}_{t-} = \inf_{0\leq u\leq s_i} x^{i,i}_u\right\}$, *for all* $i \in [d]_{\mathrm{s}}$.

3.2 Fluctuation theory for additive Lévy fields

Vectors of $\mathbb{R}^d$ will be denoted by $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ and $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ will be the i-th unit vector of $\mathbb{R}^d_+$. We recall the notation ${}^t\mathrm{x}$ for the transpose of any vector $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ and the notation $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$ and $\mathbf{0} = {}^t(0, 0, \ldots, 0)$. We will set $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ for the usual scalar product on $\mathbb{R}^d$ and $|\mathrm{x}|$ for the Euclidian norm of x. A matrix $M = (m_{i,j})_{i,j\in[d]} \in M_d(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ is said to be irreducible if for all $i, j \in [d]$, there is a sequence $i = i_1, i_2, \ldots, i_n = j$, for some $n \geq 1$, such that $m_{i_k,i_{k+1}} \neq 0$, for all $k = 1, \ldots, n-1$. For two matrices A and B of $M_d(\mathbb{R})$, with columns

$\mathrm{a}^{(1)}, \ldots, \mathrm{a}^{(d)}$ and $\mathrm{b}^{(1)}, \ldots, \mathrm{b}^{(d)}$, respectively, we define the following special product,

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle = \sum_{j \in [d]} \langle \mathrm{a}^{(j)}, \mathrm{b}^{(j)} \rangle.$$

A matrix $A = (a_{i,j})_{i,j \in [d]}$ is called essentially nonnegative (or a Metzler matrix) if $a_{i,j}$ is nonnegative whenever $i \neq j$. For instance, for any element $\mathrm{x} = \{(x_{t_j}^{i,j})_{i,j \in [d]},\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ of the set $\mathcal{E}_d$ introduced at the previous section, the matrix $\mathrm{x}_\mathrm{t} = (x_{t_j}^{i,j})_{i,j \in [d]}$ is essentially nonnegative for all $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \geq \mathbf{0}$.

3.2.1 SpaLf's and their first hitting times

In this work, we shall consider d independent Lévy processes $\mathrm{X}^{(1)}, \ldots, \mathrm{X}^{(d)}$ on $\mathbb{R}_+^d$, such that with the notation $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$, for all $j \in [d]$, the process $X^{j,j}$ is a real spectrally positive Lévy process, that is it has no negative jumps, and for all $i \neq j$, the Lévy process $X^{i,j}$ is a subordinator. We emphasize that the processes $X^{1,j}, \ldots, X^{d,j}$ are not necessarily independent. Moreover, we do not exclude the possibility for a process $X^{i,j}$ to be identically equal to 0 and note that for each $i \in [d]$, $X^{i,i}$ can be a subordinator. It is known, see Chap. VII, in [8], that the Lévy process $\mathrm{X}^{(j)}$ admits all negative exponential moments. We denote by φ_j its Laplace exponent, that is

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{X}_t^{(j)} \rangle}] = e^{t\varphi_j(\lambda)}, \quad t \geq 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Then from the Lévy Khintchine formula and the above assumptions on $\mathrm{X}^{(j)}$, φ_j has the following form,

$$\varphi_j(\lambda) = -\sum_{i=1}^{d} a_{i,j}\lambda_i + \frac{1}{2} q_j \lambda_j^2 - \int_{\mathbb{R}_+^d} (1 - e^{-\langle \lambda, \mathrm{x} \rangle} - \langle \lambda, \mathrm{x} \rangle 1_{\{|\mathrm{x}|<1\}})\, \pi_j(d\mathrm{x}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d, \tag{3.2}$$

where $(a_{i,j})_{i,j \in [d]}$ is an essentially nonnegative matrix, $q_j \geq 0$ and π_j is a measure on $\mathbb{R}_+^d$ such that $\pi_j(\{\mathbf{0}\}) = 0$ and

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} \left[(1 \wedge |\mathrm{x}|^2) + \sum_{i \neq j} (1 \wedge x_i) \right] \pi_j(d\mathrm{x}) < \infty.$$

Note that for all $j \in [d]$, φ_j is log-convex, i.e. the function $\log \varphi_j$ is convex on $(0, \infty)^d$. In particular, φ_j is a convex function. Moreover, for all $i \neq j$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_d$ the function $\lambda_i \mapsto \varphi_j(\lambda)$ is non increasing.

Let us now define the multivariate stochastic field

$$\mathbf{X}_\mathrm{t} := \mathrm{X}_{t_1}^{(1)} + \cdots + \mathrm{X}_{t_d}^{(d)} = \left(\sum_{j=1}^{d} X_{t_j}^{i,j} \right)_{i \in [d]}, \quad \text{for} \quad \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Then $\mathbf{X} := \{\mathbf{X}_\mathrm{t},\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ is a particular case of additive Lévy field in the sense of [29]. Its law is characterized by the Laplace exponent $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$, that is

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{X}_\mathrm{t} \rangle}] = e^{\langle \mathrm{t}, \varphi(\lambda) \rangle}, \quad \mathrm{t}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d.$$

Such an additive Lévy field will be called a spectrally positive additive Lévy field (spaLf). This terminology is justified by the results of this section which extend fluctuation theory for spectrally positive Lévy processes. Let us also introduce the field of essentially nonnegative matrices

$$\{\mathbb{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X_{t_j}^{i,j})_{i,j \in [d]}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}.$$

Note that the spaLf $\mathbf{X}$ can be defined as $\mathbf{X}_\mathrm{t} = \mathbb{X}_\mathrm{t} \cdot \mathbf{1}$, where $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$. Moreover, we emphasize that the spaLf $\mathbf{X}$ carries the same information as the field of essentially nonnegative matrices $\{\mathbb{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$. For this reason, the terminology 'spaLf' will refer indifferently to $\mathbf{X}$ or to $\mathbb{X}$.

Example. *Let us give an example of a 2-dimensional spaLf. Assume that, for $j \in [2]$, the $X^{j,j}$'s are independent Brownian motions $B^{(j)}$ with drifts $a_j \in \mathbb{R}$, that is $X_t^{j,j} = B_t^{(j)} + a_j t$ and that for $i \neq j$, $X^{i,j}$ is a pure drift, that is $X_t^{i,j} = a_{ij}t$, $a_{ij} \geq 0$. Then the spaLf is written as follows,*

$$\mathbf{X}_{\mathrm{t}} = {}^t(B^{(1)}_{t_1} + a_1 t_1 + a_{12}t_2, a_{21}t_1 + B^{(2)}_{t_2} + a_2 t_2), \quad \mathrm{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+,$$

the Laplace exponents φ_j are explicitly given by

$$\varphi_j(\lambda) = -\lambda_i a_{ij} - \lambda_j a_j + \frac{1}{2} q_j \lambda_j^2, \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}^2_+,$$

and the associated field of essentially nonnegative matrices is

$$\mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} B^{(1)}_{t_1} + a_1 t_1 & a_{12} t_2 \\ a_{21} t_1 & B^{(2)}_{t_2} + a_2 t_2 \end{pmatrix}.$$

Now let us define the first hitting times of negative levels of the spaLf $\mathbf{X}$. Let $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$, since $\mathbb{X} \in \mathcal{E}_d$ a.s., according to Lemma 3.1.1 there is almost surely a smallest solution to the system

$$(\mathrm{r}, \mathbb{X}) \qquad \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{s_j -} = -r_i,\ i \in [d]_{\mathrm{s}}\,. \tag{3.3}$$

We will denote by $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T^{(1)}_{\mathrm{r}}, \ldots, T^{(d)}_{\mathrm{r}})$ this solution and use the notation

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}-} = -\mathrm{r}\}, \text{ with } \mathbf{X}_{\mathrm{t}-} = \left(\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{t_j -} \right)_{i \in [d]}. \tag{3.4}$$

Then $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ will be referred to as the (multivariate) first hitting time of level $-\mathrm{r}$ by the spaLf $\{\mathbf{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$. Note that according to Lemma 3.1.1, some of the coordinates of $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ can be infinite.

Proposition 3.2.1. *Let $\mathbf{X}$ be a spaLf and for $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$, let $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ be its first hitting time of level $-\mathrm{r}$ as defined above. Then,*

1. *for all $j \in [d]$ and $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathrm{X}^{(j)}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}} -} = \mathrm{X}^{(j)}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}}}$ a.s. on $\{T^{(j)}_{\mathrm{r}} < \infty\}$. In particular, for all $i \in [d]$,*

$$\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}} -} = \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T^{(j)}_{\mathrm{r}}} = -r_i \quad \text{a.s. on the set } \{T^{(i)}_{\mathrm{r}} < \infty\}\,. \tag{3.5}$$

2. *For all $\mathrm{r}' \in \mathbb{R}^d_+$ such that $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$, conditionally on $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}^d_+\}$, the field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} - \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+\}$ has the same law as the field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+\}$ and it is independent of the field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \leq \mathrm{r}'\}$. In particular, for all $\mathrm{r}, \mathrm{r}' \in \mathbb{R}^d_+$,*

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} \overset{(law)}{=} \mathbf{T}_{\mathrm{r}} + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}'}, \tag{3.6}$$

   where $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}'}$ is an independent copy of $\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}$.

3. *If $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ for some $\mathrm{r} \in (0, \infty)^d$, then $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$. Under this condition, there is a mapping $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d) : \mathbb{R}^d_+ \to [0, \infty)^d$ such that*

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}} \rangle}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda) \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d_+, \ \mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+\,. \tag{3.7}$$

   Moreover, $\phi(\lambda) > \mathbf{0}$ if and only if $\lambda > \mathbf{0}$, the mapping ϕ is differentiable and each ϕ_i is a concave function.

Proof. The first assertion is a consequence of quasi-left continuity for Lévy processes. Indeed, let us denote by $(\mathcal{F}_t^{(j)})_{t\geq 0}$ the natural filtration generated by $\mathrm{X}^{(j)}$ and set $\mathcal{F}_\infty^{(j)} = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^{(j)}\right)$. Then for all $t_j \geq 0$, the set

$$\{T_{\mathrm{r}}^{(j)} \leq t_j\} = \bigcup_{\substack{\mathrm{u}\in(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})^d \\ u_j = t_j}} \left\{ \exists\, \mathrm{s} \leq \mathrm{u} : r_i + \sum_{k=1}^{d} X_{s_k-}^{i,k} = 0, \;\; i \in [d]_{\mathrm{s}} \right\}$$

belongs to the sigma-field $\mathcal{G}_{t_j}^{(j)} := \sigma\left(\mathcal{F}_{t_j}^{(j)} \cup \left(\bigcup_{i\neq j} \mathcal{F}_\infty^{(i)}\right)\right)$, so that $T_{\mathrm{r}}^{(j)}$ is a stopping time of the filtration $(\mathcal{G}_t^{(j)})_{t\geq 0}$. Moreover, since the processes $\mathrm{X}^{(i)}$, $i \in [d]$ are independent, $\mathrm{X}^{(j)}$ is a Lévy process in the latter filtration. Now let us consider the sequence $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}_n})_{n\geq 1}$, where $\mathrm{r}_n = \mathrm{r} - \mathrm{e}_j/n$. Then from part 2. of Lemma 3.1.1, $T_{\mathrm{r}_n}^{(j)}$ is an increasing sequence of $(\mathcal{G}_t^{(j)})$-stopping times and this sequence satisfies $\lim_{n\to\infty} T_{\mathrm{r}_n}^{(j)} = T_{\mathrm{r}}^{(j)}$. Therefore from the quasi-left continuity of $\mathrm{X}^{(j)}$, see Proposition I.7 in [8], $\mathrm{X}^{(j)}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}-} = \mathrm{X}^{(j)}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}}$ a.s. on $\{T_{\mathrm{r}}^{(j)} < \infty\}$. It clearly implies (3.5).

In order to prove 2. it suffices to see that conditionally on $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}_+^d\}$, the stochastic field $\{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{d}}\} = \{\mathbf{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}+\mathrm{t}} + \mathrm{r}',\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{d}}\}$ is independent of $\{\mathbf{X}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \leq \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}\}$ and has the same law as $\{\mathbf{X}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$. We conclude by noticing that $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}} = \inf\{\mathrm{t} : \tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{r}\} = \mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} - \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}$.

Assertion 3. follows from Lemma 3.1.1 and (3.6). Indeed, if there exists $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$ such that $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ then from Lemma 3.1.1, for all $\bar{\mathrm{r}} \leq \mathrm{r}$, $\mathbf{T}_{\bar{\mathrm{r}}} \leq \mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ a.s. and in particular, $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\bar{\mathrm{r}}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$. On the other hand, for all $\mathrm{r}' \in (0,\infty)^d$, identity (3.6) implies that $\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \overset{(law)}{=} \mathbf{T}^{(1)}_{\mathrm{r}^{(1)}} + ... + \mathbf{T}^{(p)}_{\mathrm{r}^{(p)}}$ where $p \geq 1$, the $\mathrm{r}^{(i)}$'s are such that $\mathrm{r}^{(i)} \leq \mathrm{r}$ for all $i \in [p]$, $\mathrm{r}^{(1)} + ... + \mathrm{r}^{(p)} = \mathrm{r}'$, and the $\mathbf{T}^{(i)}$'s are independent copies of $\mathbf{T}$. As a consequence, we obtain $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}_+^d) = \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\mathbf{T}^{(i)}_{\mathrm{r}^{(i)}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$. Now let us prove the second part of this assertion. Let $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$ be such that $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ and let $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$, then by (3.6), for all $\mathrm{r}' \in (0,\infty)^d$,

$$\begin{aligned} 0 < f(\lambda, \mathrm{r}+\mathrm{r}') &= \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'}\rangle}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle}]\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}\rangle}] = f(\lambda,\mathrm{r}) f(\lambda,\mathrm{r}')\,. \end{aligned}$$

Since f is right continuous in r and $f(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$, this equation implies that $f(\lambda,\mathrm{r}) = \mathrm{e}^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda)\rangle}$, for some $\phi(\lambda) \in \mathbb{R}^d$. Furthermore take $\mathrm{r} = re_i$, for some $r > 0$ and $i \in [d]$, so that $\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle}] = e^{-r\phi_i(\lambda)}$. Then from right continuity, $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} > \mathbf{0}$ almost surely, so that $f(\lambda,\mathrm{r}) < 1$, for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ such that $\lambda > \mathbf{0}$ and thus $\phi_i(\lambda) \in (0,\infty)$. On the other hand it is plain from (3.7), that the ϕ_j's are concave functions for all $j \in [d]$ and that ϕ is differentiable. □

Note that in (3.5), if for some $j \neq i$, $T_{\mathrm{r}}^{(j)} = \infty$ with positive probability on the set $\{T_{\mathrm{r}}^{(i)} < \infty\}$, then $X^{i,j} \equiv 0$, a.s. This is due to the fact that $X^{i,j}$ are subordinators for $i \neq j$, therefore either $X^{i,j} \equiv 0$ a.s. or $X_\infty^{i,j} = \infty$ a.s.

Let us emphasize the following direct consequence of Proposition 3.2.1,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}\,, \tag{3.8}$$

so that in particular $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = 1$, for all $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$ if and only if $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Note also that Proposition 3.2.1 does not allow us a full description of the law of the d-dimensional stochastic field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$. This is the case only when $d = 1$. In particular for $d \geq 2$, if r and r′ are not ordered, then we do not know the joint law of $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbf{T}_{\mathrm{r}'})$. Moreover, looking at part 2. of Proposition 3.2.1, one is tempted to think that, when $d \geq 2$, the field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}},\, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$ is a spaLf, but it is actually not

the case. Indeed from the construction of this field, the processes $\{\mathbf{T}_{re_i},\, r \geq 0\}$, $i \in [d]$ are clearly not independent. However, it is easy to derive from Proposition 3.2.1, that each of these processes is a multivariate subordinator whose Laplace exponent is ϕ_i. The following result, proved in [9] for $d = 1$, provides an expression of its Lévy measure. Since it is a consequence of further results (e.g. Theorem 3.3.2), it will be proved at the end of this paper.

Proposition 3.2.2. *Assume that* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *for all* $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$. *Then for all* $i \in [d]$, *the process* $\{\mathbf{T}_{re_i},\, r \geq 0\}$ *is a multivariate subordinator whose Laplace exponent is* ϕ_i *given in* (3.7). *Assume moreover for all* $j \in [d]$, *the* j*-th column* $\mathrm{X}_{t_j}^{(j)}$ *of the matrix* $\mathbb{X}_{\mathrm{t}}$ *admits a density which is continuous on* $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_d$, *where* $F_i = \mathbb{R}_+$, *for* $i \neq j$ *and* $F_j = \mathbb{R}$. *Define the matrix* $\widehat{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}} = (\widehat{X}^{i,j}_{t_j})_{i,j\in[d]}$ *by* $\widehat{X}^{i,i}_{t_i} = \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{t_j}$ *and* $\widehat{X}^{i,j}_{t_j} = X^{i,j}_{t_j}$, $i \neq j$, *and let* $p_{\mathrm{t}} : M_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *be the density of* $\widehat{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}}$. *Then the Lévy measure of the multivariate subordinator* $\{\mathbf{T}_{re_i},\, r \geq 0\}$ *is given by*

$$\nu_i(\mathrm{dt}) = \int_{\mathbb{R}_+^{d(d-1)}} \frac{\det(-\overline{\mathrm{x}}^{i,i})}{t_1 \ldots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x}^0) \prod_{k\neq j} \mathrm{d}x_{k,j}\mathrm{dt}, \quad \textit{if } d > 1 \textit{ and } \nu(\mathrm{dt}) = \frac{p_t(0)}{t}\mathrm{dt}, \quad \textit{if } d = 1.$$

Here $\overline{\mathrm{x}}^{i,i}$ *is the matrix* $\overline{\mathrm{x}} = (\overline{x}_{i,j})_{i,j\in[d]}$ *given by* $\overline{x}_{i,i} = -\sum_{j\neq i} x_{i,j}$ *and* $\overline{x}_{i,j} = x_{i,j}$ *for* $i \neq j$ *in which row and column of index* i *have been removed and* $\mathrm{x}^0 = (x^0_{i,j})_{i,j\in[d]}$, *where* $x^0_{i,j} = x_{i,j}$, *for* $i \neq j$ *and* $x^0_{i,i} = 0$.

3.2.2 Inverting the Laplace transform of spaLf's

We will now define a d-dimensional Lévy process whose law is obtained from the law of $\mathrm{X}^{(j)}$ through the Esscher transform associated to the martingale

$$(e^{-\langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_t\rangle - t\varphi_j(\mu^{(j)})})_{t\geq 0}\,,$$

for any $\mu^{(j)} \in \mathbb{R}_+^d$. Recall that $(\mathcal{F}_t^{(j)})_{t\geq 0}$ denotes the natural filtration generated by $\mathrm{X}^{(j)}$. Then for $t \geq 0$ and $A \in \mathcal{F}_t^{(j)}$, the law of this new Lévy process is defined by

$$\mathbb{P}^{\mu^{(j)}}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A e^{-\langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_t\rangle - t\varphi_j(\mu^{(j)})}]\,.$$

Let us now consider d independent Lévy processes $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$, $j \in [d]$ with respective laws $\mathbb{P}^{\mu^{(j)}}$. The Laplace exponent of $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$ is given by

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j(\lambda + \mu^{(j)}) - \varphi_j(\mu^{(j)})\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d\,.$$

Moreover, a new spaLf is obtained by setting

$$\mathbf{X}^{\mu}_{\mathrm{t}} := \mathrm{X}^{\mu^{(1)},(1)}_{t_1} + \cdots + \mathrm{X}^{\mu^{(d)},(d)}_{t_d}\,, \quad \mathrm{t} = (t_1,\ldots,t_d) \in \mathbb{R}_+^d, \tag{3.9}$$

where $\mu = (\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(d)}) \in M_d(\mathbb{R}_+)$ is the matrix whose columns are equal to $\mu^{(j)}$, $j \in [d]$. Let us set $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \sigma\{\mathbf{X}_{\mathrm{s}},\, \mathrm{s} \leq \mathrm{t}\}$ for all $\mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d$, then $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \sigma(\mathcal{F}^{(1)}_{t_1} \cup \mathcal{F}^{(2)}_{t_2} \cdots \cup \mathcal{F}^{(d)}_{t_d})$ and the law of the spaLf $\mathbf{X}^{\mu}$ is given by,

$$\mathbb{P}^{\mu}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A e^{-\langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}\rangle\!\rangle - \langle \mathrm{t}, \bar{\varphi}(\mu)\rangle}], \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d, \quad A \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}}, \tag{3.10}$$

where we have set $\bar{\varphi}(\mu) = (\varphi_1(\mu^{(1)}),\ldots,\varphi_d(\mu^{(d)}))$ and where we recall that $\langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}\rangle\!\rangle = \sum_{j\in[d]} \langle \mu^{(j)}, \mathrm{X}^{(j)}_{t_j}\rangle$. We will refer to (3.10) as the Esscher transform of the additive field $\mathbf{X}$. The Laplace exponent of $\mathbf{X}^{\mu}$ is then

$$\varphi^{\mu}(\lambda) = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}(\lambda),\ldots,\varphi_d^{\mu^{(d)}}(\lambda))\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d\,.$$

Let us denote by $J_\varphi(\lambda)$, $\lambda \in (0,+\infty)^d$, the transpose of the negative of the Jacobian matrix of φ, that is

$$J_\varphi(\lambda)_{i,j} := -\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\lambda)\,, \quad i,j \in [d]\,. \tag{3.11}$$

Recall that since all processes $X^{i,j}$, $i,j \in [d]$, are spectrally positive Lévy processes, their expectation is always defined and $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] \in (-\infty,\infty]$. Moreover φ is differentiable on $(0,\infty)^d$ and the partial derivatives of φ at $\mathbf{0}$ satisfy $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = -\lim_{\lambda\to\mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varphi_j(\lambda)$. We will set $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0}) := \lim_{\lambda\to\mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varphi_j(\lambda)$, and

$$J_\varphi(\mathbf{0})_{i,j} := -\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0}) = \mathbb{E}[X_1^{i,j}]\,, \quad i,j \in [d]\,. \tag{3.12}$$

Then let us consider the following hypothesis:

$$(H_\varphi) \qquad \text{The set } D_\varphi := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \varphi_j(\lambda) > 0,\ j \in [d]\} \text{ is non empty.}$$

This hypothesis implies in particular that none of the processes $X^{j,j}$, $j \in [d]$ is a subordinator but it is actually stronger as we will see later on. Moreover since all $X^{i,j}$, $i \neq j$ are subordinators, it is clear that actually $D_\varphi \subset (0,\infty)^d$.

Theorem 3.2.1. *Let* $\mathrm{r} = (r_1,\dots,r_d) \in \mathbb{R}_+^d$ *and let* $\mathbf{T}_\mathrm{r} = (T_\mathrm{r}^{(1)},\dots,T_\mathrm{r}^{(d)}) \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$ *be the first hitting time of level* $-\mathrm{r}$ *by the spaLf* $\mathbf{X}$*, then*

1. $\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *holds with positive probability for some* (*and hence for all*) $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *if and only if* (H_φ) *holds.*
2. *Suppose that* (H_φ) *holds, then* $\phi(\lambda) \in D_\varphi$*, for all* $\lambda \in (0,\infty)^d$*. Moreover, the mapping* $\phi : (0,\infty)^d \to D_\varphi$ *is a diffeomorphism whose inverse corresponds to the mapping* $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$*, that is*
$$\varphi(\phi(\lambda)) = \lambda\,, \quad \lambda \in (0,\infty)^d.$$

Proof. Assume that (H_φ) holds, let $\mu \in D_\varphi$ and let us consider the spaLf $\mathbf{X}^\mu$ whose law is defined in (3.10). In the present case, μ also denotes the matrix whose each column is equal to μ. Then as already observed $\mu \in (0,\infty)^d$, so that all the random variables $X_1^{\mu,i,j}$ are integrable and the mean matrix of $\mathbf{X}^\mu$ is given by

$$\mathbb{E}[X_1^{\mu,i,j}] = -\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mu)\,, \quad i,j \in [d]\,.$$

It is actually the transpose of the negative of the Jacobian matrix of φ denoted by $J_\varphi(\mu)$ and defined in (3.11). Note that $J_\varphi(\mu)$ is an essentially nonnegative matrix so that from Lemma A.2 in [6], there is a real eigenvalue ρ^μ such that $\mathrm{Re}(\rho) < \rho^\mu$ for all the other eigenvalues ρ. Moreover, since φ_j is a differentiable convex function and $\varphi_j(\mathbf{0}) = 0$, one has

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mu)\mu_i \geq \varphi_j(\mu) > 0\,,$$

so that from Theorem 3 of [2], $J_\varphi(\mu)^T$, and therefore $J_\varphi(\mu)$, is a stable matrix in the sense of [2]. In particular, $\rho^\mu < 0$.

Let us first assume that $J_\varphi(\mu)$ is irreducible. Then from Lemma A.3 in [6], we can choose an eigenvector $\mathrm{v}^\mu = (v_1^\mu,\dots,v_d^\mu)$ associated to ρ^μ such that $v_i^\mu > 0$, for all $i \in [d]$. From the law of large numbers of Lévy processes, we obtain

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathbf{X}^\mu_{t\mathrm{v}^\mu} = \rho^\mu \mathrm{v}^\mu \quad a.s.$$

Therefore, from part 3. of Lemma 3.1.1, $\{\mathbf{X}_\mathrm{t}^\mu,\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ reaches each level $\alpha\mathrm{v}^\mu$, with $\alpha < 0$, almost surely. Then from the definition (3.10) of the law of $\mathbf{X}^\mu$, the field $\{\mathbf{X}_\mathrm{t},\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ reaches each level $\alpha\mathrm{v}^\mu$, $\alpha < 0$, with positive probability and since $v_i^\mu > 0$, $i \in [d]$, from part 2. of Lemma 3.1.1, it reaches each level $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}_-^d$ with positive probability.

Now let us assume that $J_\varphi(\mu)$ is not irreducible that is there exists a permutation matrix P_σ and three matrices A_1, A_2 and B such that A_1 is of size $1 \le p \le d-1$ and

$$P_\sigma^{-1} J_{\varphi(\mu)} P_\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}.$$

In particular, for all $(i,j) \in I \times J$ where $I = \{\sigma(1), ..., \sigma(p)\}$ and $J = \{\sigma(p+1), ..., \sigma(d)\}$,

$$\mathbb{E}[X_1^{\mu,i,j}] = 0 \text{ that is } X_1^{\mu,i,j} = 0 \text{ a.s.}$$

Therefore we can write for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^\mu \in \mathbb{R}_+^d) &= \mathbb{P}\left(\exists \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d : \forall i \in [d], \sum_{j=1}^d X^{\mu,i,j}(t_j) = -r_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\exists \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d : \forall i \in I, \sum_{j \in I} X^{\mu,i,j}(t_j) = -r_i \right. \\
&\qquad \left. \text{and } \forall i \in J, \sum_{j \in J} X^{\mu,i,j}(t_j) = -\left(r_i + \sum_{j \in I} X^{\mu,i,j}(t_j)\right)\right).
\end{aligned}$$

Let $\mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I}$ be the smallest solution of the system $(\mathrm{r}_I, \mathbb{X}^{\mu,I})$, where we set $\mathrm{r}_I = (r_i)_{i\in I}$ and $\mathbb{X}^{\mu,I} = (X^{\mu,i,j})_{i,j\in I}$. Then conditioning on the event $\{\mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I} \in \mathbb{R}_+^p\}$, we obtain

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^\mu \in \mathbb{R}_+^d) = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}^{\mu,J} \in \mathbb{R}_+^{d-p} | \mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I} \in \mathbb{R}_+^p) \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I} \in \mathbb{R}_+^p),$$

where we have set $\mathrm{r}' = \left(r_i + \sum_{j\in I} X^{\mu,i,j}(T_\mathrm{r}^{\mu,I,j})\right)_{i\in J}$. Then $\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}^{\mu,J}$ is the smallest solution of the system $(\mathrm{r}', \mathbb{X}^{\mu,J})$ with $\mathbb{X}^{\mu,J} = (X^{\mu,i,j})_{i,j\in J}$. Thus if A_1 and A_2 are irreducible, then we derive from the previous case that $\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I} \in \mathbb{R}_+^p) = 1$ and $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}'}^{\mu,J} \in \mathbb{R}_+^{d-p} | \mathbf{T}_\mathrm{r}^{\mu,I} \in \mathbb{R}_+^p) = 1$. In other words, we have $\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^\mu \in \mathbb{R}_+^d) = 1$ and then $\mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$. On the other hand, if A_1 and/or A_2 are not irreducible, then we can repeat this argument.

Conversely, let us assume that $\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ holds with positive probability for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. Recall from part 3 of Proposition 3.2.1 the definition of the function ϕ. Let us show that for all $\lambda \in (0,\infty)^d$, $\varphi(\phi(\lambda)) = \lambda$, which implies in particular that $\phi(\lambda) \in D_\varphi$. It follows from the independence and stationarity of the increments of the spaLf $\{\mathbf{X}_\mathrm{t},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ that for all $\mathrm{r}, \mathrm{t}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_\mathrm{r}\}}] &= \int_{C_\mathrm{r}} \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_\mathrm{r}\}} \,|\, \mathbf{X}_\mathrm{t} = \mathrm{x}] \mathbb{P}(\mathbf{X}_\mathrm{t} \in d\mathrm{x}) \\
&= \int_{C_\mathrm{r}} e^{-\langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{x}}\rangle}] \mathbb{P}(\mathbf{X}_\mathrm{t} \in d\mathrm{x}) \\
&= e^{-\langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda)\rangle} \left[e^{\langle \varphi(\phi(\lambda)), \mathrm{t}\rangle} - \int_{-\infty}^{-r_1} \cdots \int_{-\infty}^{-r_d} e^{-\langle \mathrm{x}, \phi(\lambda)\rangle} \mathbb{P}(\mathbf{X}_\mathrm{t} \in d\mathrm{x})\right],
\end{aligned}$$

where C_r is the union of all the sets $E_1 \times \cdots \times E_d$ with at least one $i \in [d]$ such that $E_i =]-r_i, +\infty[$ and for the others $j \in [d]$, $E_j = \mathbb{R}$. Then we derive the identity

$$1 - e^{\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda)\rangle} \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_\mathrm{r}\}^c}] = e^{-\langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \left[e^{\langle \varphi(\phi(\lambda)), \mathrm{t}\rangle} - \int_{-\infty}^{-r_1} \cdots \int_{-\infty}^{-r_d} e^{-\langle \mathrm{x}, \phi(\lambda)\rangle} \mathbb{P}(\mathbf{X}_\mathrm{t} \in d\mathrm{x})\right]. \quad (3.13)$$

Let $\mathrm{r}', \mathrm{r}'' \in (0,\infty)^d$ be such that $\mathrm{r}' + \mathrm{r}'' = \mathrm{r}$, then from Proposition 3.2.1, $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ can be decomposed as $\mathbf{T}_\mathrm{r} = \mathbf{T}_{\mathrm{r}'} + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}''}$, where $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}''}$ is an independent copy of $\mathbf{T}_{\mathrm{r}''}$. Moreover $\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_\mathrm{r}\}^c \subset \{\mathrm{t} < \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}\}^c \cap \{\mathrm{t} < \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}''}\}^c$, so that

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_\mathrm{r}\}^c}] \le \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_{\mathrm{r}'}\}^c}] \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}''}\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathrm{t} < \mathbf{T}_{\mathrm{r}''}\}^c}].$$

If the coordinates of r are integers, then applying this identity recursively, we obtain,

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle}\mathbb{I}_{\{\mathrm{t}<\mathbf{T}_{\mathrm{r}}\}^c}] \leq \prod_{j=1}^{d}\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{e_j}\rangle}\mathbb{I}_{\{\mathrm{t}<\mathbf{T}_{e_j}\}^c}]^{r_j}\,. \tag{3.14}$$

Then we can find t whose coordinates are sufficiently small so that for all j,

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{e_j}\rangle}\mathbb{I}_{\{\mathrm{t}<\mathbf{T}_{e_j}\}^c}] < \mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{e_j}\rangle}] = e^{-\phi_j(\lambda)}.$$

Therefore $\lim_{\mathrm{r}\to\infty} e^{\langle\mathrm{r},\phi(\lambda)\rangle}\prod_{j=1}^{d}\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{e_j}\rangle}\mathbb{I}_{\{\mathrm{t}<\mathbf{T}_{e_j}\}^c}]^{r_j} = 0$ and from (3.14) we derive that the left member of (3.13) tends to 1, while the right member tends to $e^{-\langle\lambda,\mathrm{t}\rangle}e^{\langle\varphi(\phi(\lambda)),\mathrm{t}\rangle}$, which shows that $\varphi(\phi(\lambda)) = \lambda$. This is true in particular for all $\lambda \in (0,\infty)^d$ and hence D_φ is not empty. This achieves the proof of both assertions 1. and 2. □

From part 1. of Theorem 3.2.1, assuming (H_φ) for a spaLf $\mathbf{X}$ ensures that $\mathbf{X}$ hits all negative levels in a finite time with positive probability. When $d = 1$, this is simply assuming that the spectrally positive Lévy process we consider is not a subordinator.

Example. *Let us go back to our 2-dimensional example. Assume $q_j > 0$, $j \in [2]$. After some calculations, we obtain the following explicit form of the set D_φ defined in hypothesis (H_φ),*

$$D_\varphi = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^2_+ : \lambda_1 > \left(\frac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\lambda_2)}}{q_1} \vee 0\right) \text{ and } \lambda_2 > \left(\frac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\lambda_1)}}{q_2} \vee 0\right)\right\},$$

where $\Delta_j(\lambda_i) = a_j^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$ for all $j \in [2]$ and $i \neq j$. Note that this set is not empty and so assumption (H_φ) holds. In particular, thanks to Theorem 3.2.1, the spaLf $\boldsymbol{X}$ reaches all the level $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}^2_-$ with positive probability and according to the second part of this theorem, we know that the mapping φ admits an inverse ϕ on the set D_φ. This inverse $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ is given by

$$\phi_j(\lambda) = \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j\lambda_j + a_j^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i(\lambda)} + \frac{a_j}{q_j}, \quad j \in [2], i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}^2_+\,.$$

Moreover ϕ is the Laplace exponent of the field of first hitting times of negative levels by $\mathbf{X}$ defined for all $\mathrm{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$ by

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \inf\left\{\mathrm{t} \geq \mathbf{0} : \left\{\begin{array}{rcl} B^{(1)}_{t_1} + a_1t_1 + a_{12}t_2 &=& -r_1 \\ a_{21}t_1 + B^{(2)}_{t_2} + a_2t_2 &=& -r_2 \end{array}\right\}\right.\,.$$

3.2.3 Asymptotic behaviour of spaLf's

In order to carry on with the general study of the fluctuation of the spaLf $\mathbf{X}$, we shall now give a characterization of the condition $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ in terms of the Jacobian matrix $J_\varphi(\mathbf{0})$. As a first remark, note that if for some $j \in [d]$, $J_\varphi(\mathbf{0})_{j,j} > 0$, then $\lim_{t\to+\infty} X^{j,j}_t = +\infty$ a.s. and hence the field $\{\mathbf{X}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$ cannot reach all the levels $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_-$ with probability one. Therefore, by Proposition 3.2.1, $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$ whenever there is j such that $J_\varphi(\mathbf{0})_{j,j} > 0$.

Recall that whenever the essentially nonnegative matrices $J_\varphi(\lambda)$, defined in (3.11) and (3.12) for $\lambda \in [0,\infty)^d$ have finite entries and are irreducible, according to the Perron-Frobenius theory, there are real eigenvalues ρ^λ with multiplicity equal to 1 and such that the real part of any other eigenvalue is less than ρ^λ, see Appendix A of [6]. We set $\rho^{\mathbf{0}} = \rho$.

Theorem 3.2.2. *Assume that (H_φ) holds and that $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible, then*

1. *the values $\mathbf{0}$ and $\phi(\mathbf{0})$ are the only roots of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$. Furthermore, either $\phi(\mathbf{0})$ is equal to $\mathbf{0}$ or it belongs to $(0,\infty)^d$.*
2. *If $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = \infty$, for some $i,j \in [d]$, then $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$. Assume that $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] < \infty$, for all $i,j \in [d]$, then $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ if and only if $\rho \leq 0$.*

Proof. Let us assume that $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible. Since $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$ is the inverse of $\phi : (0,\infty)^d \to D_\varphi$, $\phi(\mathbf{0})$ is the only solution of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$ on $\overline{D_\varphi}$. Indeed, let $\mu \in \overline{D_\varphi}$ such that $\varphi(\mu) = \mathbf{0}$ and $\mu_n \in D_\varphi$ such that $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu$. Then by continuity, $\lim_{n\to+\infty} \varphi(\mu_n) = \mathbf{0}$ and $\phi(\mathbf{0}) = \lim_{n\to+\infty} \phi(\varphi(\mu_n)) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$, so that $\mu = \phi(\mathbf{0})$.

Now let $\mu \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}, \phi(\mathbf{0})\}$ be a solution of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$ and $\mathrm{u} = \dfrac{\mu}{||\mu||}$. Then we consider, for all $j \in [d]$, the function $f_j : a \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_j(\mu + a\mathrm{u})$. Let us first note that since φ_j is convex, so is f_j. Furthermore, for all $j \in [d]$, we have $f_j(0) = \varphi_j(\mu) = 0 = \varphi_j(\mathbf{0}) = f_j(-||\mu||)$. On the one hand, if there exists $j \in [d]$ such that $\mu_j = 0$, then for all $a \in \mathbb{R}$, $\mu_j + a\mathrm{u}_j = 0$ that is $f_j(a) = \varphi_j(\mu + a\mathrm{u}) \leq 0$. Since 0 and $-||\mu|| < 0$ are zeros of the real convex function f_j, it implies that f_j is constant equal to 0. In other words, for all $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i\neq j}(\mu_i + a\mathrm{u}_i)X_t^{i,j}}\right] = e^{t\varphi_j(\mu+a\mathrm{u})} = 1$$

and then for all $i \in [d]$, $X^{i,j} \equiv 0$ a.s. that is $J_\varphi(\mathbf{0})$ is reducible. Since we assumed $J_\varphi(\mathbf{0})$ irreducible, we necessarily have $\mu_j > 0$, $j \in [d]$ and then, by convexity, f_j is negative on $(-||\mu||, 0)$ and positive on $(0, +\infty)$. In other words, for all integers $j \in [d]$ and for all $\epsilon > 0$, $\varphi_j(\mu + \epsilon\mathrm{u}) > 0$ that is $\mu \in \overline{D_\varphi}$ which is a contradiction. As a consequence, when $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible, there is at most two solutions of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ which are $\mathbf{0}$ and $\phi(\mathbf{0}) \in \overline{D_\varphi}$. Furthermore, when $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible, we have seen that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ or $\phi(\mathbf{0}) \in (0,\infty)^d$.

Let us now prove assertion 2. Suppose that $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = \infty$, for some $i,j \in [d]$. Then for all $\lambda \in (0,\infty)^d$ small enough, $\varphi_j(\lambda) < 0$. Indeed, let $\lambda \in (0,\infty)^d$. Since the spectrally positive Lévy process $\langle \lambda, X_t^{(j)} \rangle$ drifts to ∞, for all $\alpha \in (0,\infty)$ small enough, its characteristic exponent evaluated at α is negative, that is $\varphi_j(\alpha \cdot \lambda) < 0$. But if $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, since $\mathbf{0} \in \overline{D_\varphi}$, there is $\lambda \in (0,\infty)^d$ small enough such that $\varphi_j(\lambda) > 0$. Therefore, $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$.

Suppose now that $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] < \infty$, for all $i,j \in [d]$ and that $\rho < 0$. Let $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ be the unique right eigenvector corresponding to ρ such that $u_i > 0$ for all $i \in [d]$, and $u_1 + \cdots + u_d = 1$, see Lemma A.2 in [6]. Then from the law of large numbers,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathbf{X}_{t\mathrm{u}} = \rho\mathrm{u}\,, \quad a.s.$$

Therefore, $\{\mathbf{X}_\mathrm{t},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ reaches a.s. all the levels $\alpha\mathrm{u}$, $\alpha < 0$ and from Proposition 3.2.1 it reaches all the levels $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}_-^d$ a.s. We conclude from (3.8) that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Assume that $\rho = 0$. Let $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ be a right eigenvector corresponding to ρ, then from the law of large numbers,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathbf{X}_{t\mathrm{u}} = \mathbf{0}\,, \quad a.s.$$

Therefore, for all $i \in [d]$, the process $Y^i = (Y_t^i)_{t\geq 0}$, defined for all $t \geq 0$, by $Y_t^i = \sum_{j=1}^d X_{tu_j}^{i,j}$ is a real Lévy process such that

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}Y_t^i = 0\,, \quad a.s.$$

that is, for all $i \in [d]$, Y^i oscillates. On the other hand, if $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$, then, by convexity of the φ_j's, there exists $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ such that $\varphi_j(\lambda) < 0$, for all $j \in [d]$. Consequently, for all direction $\mathrm{v} \in \mathbb{R}_+^d$, we have

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{X}_{t\mathrm{v}}\rangle}] = e^{\langle t\mathrm{v}, \varphi(\lambda)\rangle} \underset{t\to+\infty}{\to} 0\,.$$

It implies that for all direction $\mathrm{v} \in \mathbb{R}_+^d$, the Lévy process $\langle \lambda, \mathbf{X}_{t\mathrm{v}} \rangle$ tends to ∞ in probability (and hence almost surely), as $t \to \infty$. In particular, for $\mathrm{v} = \mathrm{u}$, there exists $i \in [d]$ such that Y_t^i tends to ∞ almost surely, as $t \to \infty$, which is a contradiction. In conclusion, $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Conversely, assume that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ then $\mathbf{0} \in \overline{D_\varphi}$ and by convexity, there exists $\mu \in (0, +\infty)^d$, small enough, such that $\varphi_i(\mu) > 0$, for all $i \in [d]$. Recall from (3.8) and (3.10) the definition of the Esscher transform $\mathbf{X}^\mu$ of the spaLf $\mathbf{X}$, with $\mu^{(1)} = \cdots = \mu^{(d)} = \mu$. We have seen in the proof of Theorem 3.1 that the Perron-Frobenius eigenvalue of $J_\varphi(\mu)$ satisfies $\rho^\mu < 0$. Since the φ_j's are $\mathcal{C}^\infty$-functions, for all $i, j \in [d]$, $\dfrac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j$ are continuous and hence $\lim\limits_{\mu \to \mathbf{0}} J_\varphi(\mu) = J_\varphi(\mathbf{0})$. Furthermore, the eigenvalues of the matrix $J_\varphi(\mu)$ depend continuously on its entries because they are the roots of its characteristic polynomial whose coefficients are polynomial functions of the entries of the matrix. Then since $\rho^\mu = \max\limits_{i \in [d]} \mathrm{Re}(\lambda_i^\mu)$ and $\rho = \max\limits_{i \in [d]} \mathrm{Re}(\lambda_i)$ where λ_i^μ and λ_i are respectively the eigenvalues of $J_\varphi(\mu)$ and $J_\varphi(\mathbf{0})$, we have that $\lim\limits_{\mu \to \mathbf{0}} \rho^\mu = \rho \leq 0$. □

Assuming (H_φ), we will say that the additive Lévy field $(\mathbf{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d)$ drifts to $-\infty$, oscillates or drifts to $+\infty$ according as $\rho < 0$, $\rho = 0$ or $\rho > 0$.

Example. *In our example, we already have the explicit form of φ, the set D_φ and the inverse ϕ. Now let us find the solutions of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^2$. Assume that $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible, that is $a_{ij} > 0$ for all $i \neq j$. Then the solutions of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^2$ are $\mathbf{0} = (0,0)$ and points of the form $\left(\dfrac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\lambda_2)}}{q_1}, \dfrac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\lambda_1)}}{q_2} \right)$ where $\Delta_j(\lambda_i) = a_j^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$, $j \in [2], i \neq j$. It is easy to check that there is only one solution of the second kind. It is either in $(0, +\infty)^2$ or equal to $\mathbf{0}$. According to the expression of ϕ, $\phi(\mathbf{0})$ is this solution. We can show that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ if and only if $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ and $a_1 a_2 \geq a_{1,2}a_{2,1}$. Furthermore, we can compute the Perron-Frobenius eigenvalue ρ of the Jacobian $J_\varphi(\mathbf{0})$. It has the form*

$$\rho = \frac{a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_{1,2}a_{2,1}}}{2}.$$

Then it is easy to see that $\rho \leq 0$ if and only if $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ and $a_1 a_2 \geq a_{1,2}a_{2,1}$. In conclusion, we find $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho \leq 0$.

Note that if $J_\varphi(\mathbf{0})$ is reducible then at least one of the $a_{i,j}$ is equal to zero, for $i, j \in [d]$. Then φ has at most four zeros (indeed some can be equals or negative) $\mathbf{0}$, $\left(\dfrac{2a_1}{q_1}, 0 \right)$, $\left(0, \dfrac{2a_2}{q_2} \right)$ and $\left(\dfrac{a_1 + \sqrt{\Delta_1(\frac{2a_2}{q_2})}}{q_1}, \dfrac{a_2 + \sqrt{\Delta_2(\frac{2a_1}{q_1})}}{q_2} \right) = \phi(\mathbf{0})$.

Remark 3.2.1. *By carefully reading the proof of Theorem 3.2.2, it appears that we have proved a little more than what is in the statement.*

Indeed, in part 1. we have proved that if there exists a solution to the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$ in $(0, +\infty)^d$, then it is unique and equal to $\phi(\mathbf{0})$. This is when $J_\varphi(\mathbf{0})$ is irreducible but we can see from the proof that this is also true when $J_\varphi(\mathbf{0})$ is reducible. Let us also notice that in the reducible case, there may exist solutions $\lambda \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ with $\lambda_j = 0$ for some $j \in [d]$ as the above example shows.

Moreover it can be derived from arguments in the proof of part 2. that when $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$, for each direction $\mathrm{v} \in \mathbb{R}_+^d$, almost surely, there is at least one coordinate of the field $\mathbf{X}$ which goes to $+\infty$.

3.3 On the distribution of the field $(\mathbf{T}_\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}})$

Let us recall the definition of the matrix valued field $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ given in the beginning of Section 3.2. As already noticed, this field carries the same information as the spaLf $\mathbf{X}$. However,

whereas the vector $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}$ is deterministic on the set $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d\}$ (and is actually equal to $-\mathrm{r}$), the matrix $\mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}$ is random whenever $d \geq 2$. From another point of view, the fact that the field $\mathrm{r} \mapsto (\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ has independent and stationary increments (see the next theorem) induces an analogy with fluctuation theory in dimension 1. More specifically, this bivariate field can be considered as the analogue of the scale process describing the fluctuations of any one dimensional Lévy process at its infimum. The aim of this section is to characterize the law of the field $\mathrm{r} \mapsto (\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$, first through its Laplace exponent and then from a Kemperman's type identity relating its law to that of the field $\mathbb{X}$.

3.3.1 Characterization through the Laplace transform

Recall that we denote by $\mu^{(j)}$ the j-th column of the matrix $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j\in[d]}$. Then given a spaLf $\mathbf{X}$ we define the set

$$\mathcal{M}_\varphi = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^d \times M_d(\mathbb{R}_+) : \lambda_j \geq \varphi_j(\mu^{(j)}),\, j \in [d]\}.$$

Theorem 3.3.1. *Assume that (H_φ) holds. Let $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$ and let $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ be the first hitting time of level $-\mathrm{r}$ by the spaLf $\mathbf{X}$, then there exits a mapping $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_d) : \mathcal{M}_\varphi \to \mathbb{R}_+^d$ such that*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle\lambda,\mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}\rangle\!\rangle} \mathbb{I}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d\}}\right] = e^{-\langle \mathrm{r}, \Phi(\lambda,\mu)\rangle}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi.$$

Moreover Φ satisfies the equations,

$$\varphi_j(\mu^{(j)} + \Phi(\lambda, \mu)) = \lambda_j, \quad j \in [d], \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi, \tag{3.15}$$

and it is explicitly determined by

$$\Phi(\lambda, \mu) = \phi^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \ldots, \lambda_d - \varphi_d(\mu^{(d)})) \tag{3.16}$$

where ϕ^μ is the inverse of the Laplace exponent $\varphi^\mu = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}, \ldots, \varphi_d^{\mu^{(d)}})$ of the Esscher transform $\mathbf{X}^\mu$ defined in (3.9).

Proof. Let us first note that the random field $\{\mathbf{M}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} := \{e^{-\langle\bar{\varphi}(\mu),\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}\rangle\!\rangle},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$, where $\bar{\varphi}(\mu) = (\varphi_1(\mu^{(1)}), \ldots, \varphi_d(\mu^{(d)}))$, is a multi-indexed martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \sigma\{\mathbf{X}_{\mathrm{s}},\, \mathrm{s} \leq \mathrm{t}\} = \sigma(\mathcal{F}_{t_1}^{(1)} \cup \mathcal{F}_{t_2}^{(2)} \cdots \cup \mathcal{F}_{t_d}^{(d)})$, $\mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d$ in the sense of [30]. Fix $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$ and define the sequence of multivariate random times $\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} = (T_{n,\mathrm{r}}^{(1)}, \ldots, T_{n,\mathrm{r}}^{(d)})$, $n \geq 1$ by

$$T_{n,\mathrm{r}}^{(i)} := \sum_{k\geq 0} 2^{-n}(k+1)\mathbb{I}_{\{2^{-n}k \leq T_{\mathrm{r}}^{(i)} < 2^{-n}(k+1)\}} + \infty \cdot \mathbb{I}_{\{T_{\mathrm{r}}^{(i)} = \infty\}}.$$

Then $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ and $\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}$, $n \geq 1$ are stopping times of the filtration $(\mathcal{F}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{t}\in\mathbb{R}_+^d}$ in the sense of [30]. Moreover, for each $i \in [d]$, the sequence $(T_{n,\mathrm{r}}^{(i)})_{n\geq 1}$ is non increasing and tends to $T_{\mathrm{r}}^{(i)}$ almost surely. Now for all $\mathrm{u} \in \mathbb{R}_+^d$, define $\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}$ by

$$\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})} := \begin{cases} \mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} & \text{on } \{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} \leq \mathrm{u}\} \\ \mathrm{u} & \text{on } \{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} \leq \mathrm{u}\}^c. \end{cases}$$

Then $\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}$ is a stopping time (see for instance the proof of Lemma (2.3) in [30]). Moreover,

$$\mathbf{M}_{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}} = \sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{D}_{\varphi_n}, \mathrm{v}\leq \mathrm{u}} \mathbf{M}_{\mathrm{v}} \mathbb{I}_{\{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} = \mathrm{v}\}} + \mathbf{M}_{\mathrm{u}} \mathbb{I}_{\{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}} \leq \mathrm{u}\}^c} \leq \sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{D}_{\varphi_n}, \mathrm{v}\leq \mathrm{u}} \mathbf{M}_{\mathrm{v}} + \mathbf{M}_{\mathrm{u}},$$

where $\mathrm{D}_{\varphi_n} := \{\mathrm{v} \in \mathbb{R}_+^d : \mathrm{v} = 2^{-n}k,\, k \geq 0\}$. Since the set $\{\mathrm{v} \in \mathrm{D}_{\varphi_n}, \mathrm{v} \leq \mathrm{u}\}$ is finite, $\mathbb{E}\left[\mathbf{M}_{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}}\right] < \infty$. Moreover $\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}$ and $\mathbf{M}_{\mathrm{u}}$ clearly satisfy the conditions (2.4) and (2.5) of Lemma (2.3) in [30]. Therefore, in virtue of this lemma,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{M}_{\mathbf{T}_{n,\mathrm{r}}^{(\mathrm{u})}}\right] = 1.$$

Then $\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}^{(\mathrm{u})}_{n,\mathrm{r}} = \mathbf{T}^{(\mathrm{u})}_{\mathrm{r}}$ almost surely, where

$$\mathbf{T}^{(\mathrm{u})}_{\mathrm{r}} := \begin{cases} \mathbf{T}_{\mathrm{r}} & \text{on } \{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \le \mathrm{u}\} \\ \mathrm{u} & \text{on } \{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \le \mathrm{u}\}^c, \end{cases}$$

so that by Fatou's Lemma and the right continuity of $\{\mathbf{M}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$, we obtain as n tends to ∞, $\mathbb{E}\left[\mathbf{M}_{\mathbf{T}^{(\mathrm{u})}_{\mathrm{r}}}\right] \le 1$. Then by applying Fatou's Lemma again, we obtain as each coordinate of u tends to ∞ that $\mathbb{E}\left[\mathbf{M}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+\}}\right] \le 1$. It implies that for all $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$, $\mathbb{E}\left[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}\rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+\}}\right] \le 1$.

Then we prove in the same way as for (3.6) in Proposition 3.2.1, that for all $\mathrm{r}, \mathrm{r}' \in \mathbb{R}^d_+$,

$$(\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'}}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}^d_+\}} \overset{(law)}{=} (\mathbf{T}_{\mathrm{r}} + \mathbf{T}'_{\mathrm{r}'}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}} + \mathbb{X}'_{\mathbf{T}'_{\mathrm{r}'}}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} + \mathbf{T}'_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}^d_+\}}, \tag{3.17}$$

where $\mathbb{X}'$ is an independent copy of $\mathbb{X}$ and $\mathbf{T}'$ is its first hitting time process. Recall that under assumption (H_φ), $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$. The existence of the mapping Φ follows by using (3.17), in the same way as for the existence of the mapping ϕ in 3. of Proposition 3.2.1. (Note that in particular $\Phi(\lambda, 0) = \phi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$.)

Then it is readily seen that

$$(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}) = (\mathrm{r}, \mathbb{X}_{\mathrm{r}}) + (\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}+\mathbf{X}_{\mathrm{r}}}, \tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}+\mathbf{X}_{\mathrm{r}}}}) \text{ a.s. on } \{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+\}, \tag{3.18}$$

where $\tilde{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}} = \mathbb{X}_{\mathrm{r}+\mathrm{t}} - \mathbb{X}_{\mathrm{r}}$ and $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{k}} = \inf\{\mathrm{t} \ge \mathbf{0} : \tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{k}\}$. Since $\mathbf{X}$ is a spaLf, for all $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+$, $\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{t}}$ has the same law as $\mathbf{X}_{\mathrm{t}}$ and is independent of $\{\mathbf{X}_{\mathrm{s}} : \mathrm{s} \le \mathrm{r}\}$. Thus conditionally on $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+\}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}+\mathbf{X}_{\mathrm{r}}}$ and $\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{r}+\mathbf{X}_{\mathrm{r}}}}$ are independent of $\mathbb{X}_{\mathrm{r}}$. Let $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$, then using (3.18), we obtain

$$e^{-\langle r, \Phi(\lambda,\mu)\rangle} = e^{-\langle \lambda, \mathrm{r}\rangle} \int_{M_d(\mathbb{R})} \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}+\bar{\mathrm{x}}}\rangle} e^{-\langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\bar{\mathrm{x}}}}\rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}+\bar{\mathrm{x}}} \in \mathbb{R}^d_+\}}] e^{-\langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dx}),$$

where $\mathrm{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ and $\bar{\mathrm{x}} = \sum_{j\in[d]} \mathrm{x}^{(j)} = \left(\sum_{j\in[d]} x^{1,j}, \ldots, \sum_{j\in[d]} x^{d,j}\right)$. This equality can also be written as

$$\begin{aligned} e^{-\langle r, \Phi(\lambda,\mu)\rangle} &= e^{-\langle \lambda, \mathrm{r}\rangle} \int_{M_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \mathrm{r}+\bar{\mathrm{x}}, \Phi(\lambda,\mu)\rangle} e^{-\langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dx}) \\ &= e^{-\langle \lambda, \mathrm{r}\rangle} e^{-\langle r, \Phi(\lambda,\mu)\rangle} \mathbb{E}[e^{-\langle\!\langle \mu + \hat{\Phi}(\lambda,\mu), \mathbb{X}_{\mathrm{r}}\rangle\!\rangle}], \end{aligned}$$

where $\hat{\Phi}(\lambda, \mu)$ is the matrix whose all columns are equal to $\Phi(\lambda, \mu)$. Thanks to the independence of the $\mathrm{X}^{(j)}$'s, the latter equality is reduced to

$$e^{\langle \lambda, \mathrm{r}\rangle} = \prod_{j\in[d]} \mathbb{E}[e^{-\langle \mu^{(j)} + \Phi(\lambda,\mu), \mathrm{X}^{(j)}_{r_j}\rangle}].$$

As a consequence, the Laplace exponent Φ of $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ satisfy (3.15).

Now recall the definition of the Esscher transform $\mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}$ of each $\mathrm{X}^{(j)}$ given after Proposition 3.2.1, with Laplace exponent

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j(\lambda + \mu^{(j)}) - \varphi_j(\mu^{(j)}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d_+, \quad j \in [d].$$

From these Esscher transforms we defined, see (3.9), the spaLf $\mathbf{X}^\mu$ by

$$\mathbf{X}^\mu_{\mathrm{t}} = \sum_{j\in[d]} \mathrm{X}^{\mu^{(j)},(j)}_{t_j}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+.$$

Let $D_{\varphi^\mu} := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) > 0, j \in [d]\}$. Then under assumption (H_φ), from part 1. of Theorem 3.2.1 and from the absolute continuity relationship (3.10) between $\mathbf{X}$ and $\mathbf{X}^\mu$, the set D_{φ^μ} is not empty. Moreover, thanks to Theorem 3.2.1, the Laplace exponent $\varphi^\mu = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}, \ldots, \varphi_d^{\mu^{(d)}})$ of $\mathbf{X}^\mu$ is a diffeomorphism from D_{φ^μ}, whose inverse $\phi^\mu : (0,\infty)^d \to D_{\varphi^\mu}$ is the Laplace exponent of the field $\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^\mu, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d\}$, where $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^\mu := \inf\{\mathrm{t} \geq 0 : \mathbf{X}_{\mathrm{t}}^\mu = -\mathrm{r}\}$.

On the other hand, from (3.15), Φ satisfies

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\Phi(\lambda,\mu)) = \lambda_j - \varphi_j(\mu^{(j)}), \quad j \in [d], \quad (\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi\,.$$

Thus the Laplace exponent Φ of the couple $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ exists and is given for all $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ such that $\lambda_j > \varphi_j(\mu^{(j)})$, $j \in [d]$ by

$$\Phi(\lambda,\mu) = \phi^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \ldots, \lambda_d - \varphi_d(\mu^{(d)})), \tag{3.19}$$

Finally this relation is extended to the whole set $\mathcal{M}_\varphi$ by continuity. □

Remark 3.3.1. *We emphasize that Theorem* 3.3.1 *provides an extension of the case* $d = 1$. *More specifically,* (3.15) *can be compared to relation* (2)*, p.* 191 *in [8].*

Example. *An explicit form of* Φ *can be derived in our example. Let* $\mu^{(1)} = {}^t(\mu_{1,1}, \mu_{2,1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mu^{(2)} = {}^t(\mu_{1,2}, \mu_{2,2}) \in \mathbb{R}_+^2$ *and* $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$. *Then the Esscher transform* $\mathbf{X}^\mu$ *has Laplace exponent* $\varphi^\mu = (\varphi_1^{\mu^{(1)}}, \varphi_2^{\mu^{(2)}})$ *where for all* $j \in [2]$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\varphi_j^{\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j(\lambda) + q_j\mu_{i,j}\lambda_j = -a_{ij}\lambda_i - (a_j - q_j\mu_{j,j})\lambda_j + \frac{1}{2}q_j\lambda_j^2\,.$$

Assume $q_j > 0, j \in [2]$. *Hence after some calculation, we obtain*

$$D_{\varphi^\mu} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 > \left(\frac{a_1 - q_1\mu_{1,1} + \sqrt{\Delta_1^\mu(\lambda_2)}}{q_1} \vee 0\right) \text{ and } \lambda_2 > \left(\frac{a_2 - q_2\mu_{2,2} + \sqrt{\Delta_2^\mu(\lambda_1)}}{q_2} \vee 0\right)\right\},$$

where $\Delta_j^\mu(\lambda_i) = (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\lambda_i$ *for all* $j \in [2]$ *and* $i \neq j$. *Note that* $D_\varphi \subset D_{\varphi^\mu}$. *In particular, if* (H_φ) *is satisfied then* (H^μ) *is satisfied too and both sets* D_φ *and* D_{φ^μ} *are non empty. Under this assumption, thanks to Theorem 3.2.1, the spaLf* $\boldsymbol{X}^\mu$ *reaches all the level* $-\mathrm{r} \in \mathbb{R}_-^2$ *with positive probability and according to the second part of this theorem, we know that the mapping* φ^μ *admits an inverse* ϕ^μ *on the set* D^μ. *This inverse* $\phi^\mu = (\phi_1^\mu, \phi_2^\mu)$ *is given by*

$$\phi_j^\mu(\lambda) = \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j\lambda_j + (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i^\mu(\lambda)} + \frac{a_j}{q_j} - \mu_{j,j}, \quad j \in [2], i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}_+^2\,.$$

Then according to Theorem (3.3.1)*, the Laplace exponent* $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ *of the field* $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ *is given for all* $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ *and* $j \in [2]$ *by*

$$\begin{aligned}\Phi_j(\lambda,\mu) &= \phi_j^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \lambda_2 - \varphi_2(\mu^{(2)})) \\ &= \frac{1}{q_j}\sqrt{2q_j(\lambda_j - \varphi_j(\mu^{(j)})) + (a_j - q_j\mu_{j,j})^2 + 2a_{ij}q_j\phi_i^\mu(\lambda_1 - \varphi_1(\mu^{(1)}), \lambda_2 - \varphi_2(\mu^{(2)}))} \\ &+ \frac{a_j}{q_j} - \mu_{j,j}.\end{aligned}$$

3.3.2 An explicit form of the distribution

Let us define the set

$$\widehat{M_d}(\mathbb{R}) \;=\; \{\mathrm{x} \in M_d(\mathbb{R}) : \mathrm{x} \text{ is essentially nonnegative and } \mathrm{x} \cdot \mathbf{1} \leq 0\}$$

endowed with some matrix norm, $\|\cdot\|$ and equipped with its Borel σ-field. From Theorem 3.3.1, the measure $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}$ on $\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})$ has Laplace transform

$$\int_{\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr} = [(\alpha_1 + \Phi_1(\lambda,\mu))(\alpha_2 + \Phi_2(\lambda,\mu)) \dots (\alpha_d + \Phi_d(\lambda,\mu))]^{-1}. \tag{3.20}$$

The following result shows that this measure can be expressed only in terms of the law of the spaLf.

Theorem 3.3.2. *Assume that (H_φ) is satisfied. Then for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$,*

$$\int_{\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr} = \int_{\mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}\,. \tag{3.21}$$

In other words, the measure

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d,\ \mathrm{x} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R}),\ \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d,$$

is the image of the measure

$$\frac{det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d,\ \mathrm{x} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R}),$$

through the mapping $(t, \mathrm{x}) \mapsto (t, \mathrm{x}, -\mathrm{x}\cdot\mathbf{1})$.

When $d = 1$, the above identity can be read as

$$\mathbb{P}(T_x \in \mathrm{d}t)\mathrm{d}x = \frac{-x}{t} \mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty, 0), \tag{3.22}$$

and is known as Kemperman's identity for spectrally positive Lévy processes. It can be found in [8], see Proposition VII.2.

We shall prove Theorem 3.3.2 through discrete approximation. As a first step, we need to recall the discrete time and space counterpart of spaLf's. Those are matrix valued fields of the form $\{\mathbb{S}_{\mathrm{n}},\, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}_+^d\} = \{(S^{i,j}_{n_j})_{i,j\in[d]},\, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}_+^d\}$, where the columns $\mathrm{S}^{(j)} = {}^t(S^{1,j}, \dots, S^{d,j})$, $j \in [d]$ are independent random walks. Moreover, all coordinates $S^{i,j}$ start from 0 and take their values in $k^{-1}\mathbb{Z}$, where $k \geq 1$ is some integer which will be fixed until mentioned otherwise. For $i \neq j$ they are non decreasing and for $i = j$ they are downward skip free, that is $S^{i,i}_n - S^{i,i}_{n-1} \geq -k^{-1}$, for all $n \geq 1$. This setting is introduced in [15] (for $k = 1$ and up to transposition of the matrix $\mathbb{S}$). Equivalently to the continuous case, we define the field $\mathbf{S} := \mathbb{S} \cdot \mathbf{1}$ and its first hitting time process

$$\mathbf{T}^{\mathbf{S}}_{\mathrm{r}} := \inf\{\mathrm{n} : \mathbf{S}_{\mathrm{n}} = -\mathrm{r}\}, \quad \mathrm{r} \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d,$$

see Lemma 2.2 in [15]. The field $\mathbb{S}$ (or equivalently $\mathbf{S}$) will be called a downward skip free random field (dsfrf for short). An essential result for the proof of the theorem 4.2, is the following extension of the ballot theorem

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}^{\mathbf{S}}_{\mathrm{r}} = \mathrm{n}, \mathbf{S}_{\mathrm{n}} = \mathrm{x}) = \frac{k^d \det(-\mathrm{x})}{n_1 \dots n_d} \mathbb{P}(\mathbf{S}_{\mathrm{n}} = \mathrm{x}), \tag{3.23}$$

for all $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^d$ and all essentially nonnegative matrix x of $M_d(k^{-1}\mathbb{Z})$ such that $\mathrm{x}\cdot\mathbf{1} = -\mathrm{r}$. (Here we have used the notation $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$.) Identity (3.23) is proved for $k = 1$ in [15], see Theorem 3.4 therein. Its extension to any $k \geq 1$ is straightforward.

The next step is to consider lattice valued spaLf's. Let us first define these processes. Let $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \dots, X^{d,j})$, $j \in [d]$ be a family of d independent d-dimensional Lévy processes such that for

$i \neq j$, $X^{i,j}$ is non-decreasing $k^{-1}\mathbb{Z}$-valued Lévy process and for each $j \in [d]$, $X^{j,j}$ is a $k^{-1}\mathbb{Z}$-valued Lévy process such that for all $t > 0$, $X_t^{j,j} - X_{t-}^{j,j} \geq -k^{-1}$. Then there exists a dsfrf $\mathbb{S}$ as defined above and d independent Poisson processes $N^{(j)}$, $j \in [d]$ also independent of $\mathbb{S}$ such that

$$X_t^{i,j} = S^{i,j}_{N_t^{(j)}}, \quad i,j \in [d], \quad t \geq 0. \tag{3.24}$$

The random fields $\{\mathbb{X}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X_{t_j}^{i,j})_{i,j\in[d]},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ and $\mathbf{X} = \mathbb{X} \cdot \mathbf{1}$ will be referred to as lattice valued spaLf's. Let $(e_n^{(j)})_{n\geq 0}$, $j \in [d]$ be the sequences of exponentially distributed random variables satisfying

$$N_t^{(j)} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{I}_{\{e_1^{(j)}+\cdots+e_n^{(j)} \leq t\}}.$$

The first hitting time process of $\mathbf{X}$ can be defined in the same way as for spaLf's in Lemma 3.1.1 and Proposition 3.2.1. It is denoted by

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{r}\}, \quad \mathrm{r} \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d.$$

We can easily check that the latter is related to the first hitting time process of $\mathbf{S}$ through the identity,

$$T_{\mathrm{r}}^{(j)} = \sum_{l=1}^{T_{\mathrm{r}}^{(j),\mathbf{S}}} e_l^{(j)}, \quad j \in [d]. \tag{3.25}$$

The following proposition is a direct consequence of (3.23). Although it can also be found in [14] for $k = 1$, we give a more direct proof here.

Proposition 3.3.1. *Let $\{\mathbb{X}_{\mathrm{t}},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X_{t_j}^{i,j})_{i,j\in[d]},\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ be a lattice valued spaLf. Then for fixed $\mathrm{r} \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d$, the joint law of $(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}})$ is given by*

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \mathrm{x}) = \frac{k^d det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \mathrm{x}) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_d\,,$$

for all essentially nonnegative matrices x of $M_d(k^{-1}\mathbb{Z})$ such that $\mathrm{x} \cdot \mathbf{1} = -\mathrm{r}$.

Proof. Let r and $\mathrm{x} = (x_{i,j})_{i,j\in[d]}$ be as in the statement. Then the straightforward identity $\mathbb{S}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{\mathbf{S}}} = \mathbb{X}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}}$ together with expressions (3.24) and (3.25) allow us to write,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{T}_r \in \mathrm{dt}, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \mathrm{x}) &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{T_{\mathrm{r}}^{(j),\mathbf{S}}} e_l^{(j)} \in \mathrm{d}t_j,\, j \in [d],\, \mathbb{S}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{\mathbf{S}}} = \mathrm{x} \right) \\
&= \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j\in[d]} \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n_j} e_l^{(j)} \in \mathrm{d}t_j \right) \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{\mathbf{S}} = \mathrm{n}, \mathbb{S}_{\mathrm{n}} = \mathrm{x}) \\
&= \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\lambda_1^{n_1} t_1^{n_1} \dots \lambda_d^{n_d} t_d^{n_d}}{n_1! \dots n_d!} e^{-\langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \frac{k^{-d} \det(-\mathrm{x})}{t_1 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{S}_{\mathrm{n}} = \mathrm{x}) \mathrm{d}t \\
&= \frac{k^{-d} \det(-\mathrm{x})}{t_1 \dots t_d} \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j\in[d]} \mathbb{P}(N_{t_j}^{(j)} = n_j) \mathbb{P}(\mathbb{S}_{\mathrm{n}} = \mathrm{x}) \mathrm{d}t \\
&= \frac{k^{-d} \det(-\mathrm{x})}{t_1 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}} = \mathrm{x}) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

which proves our result. □

From now on, we will add k as a superscript to all objects referring to the discrete valued spaLf defined above. For instance, the latter will be denoted by $\mathbb{X}^{(k)} = (X^{i,j,k})_{i,j\in[d]}$ or $\mathbf{X}^{(k)}$,

where $\mathrm{X}^{(j),k} = {}^t(X^{1,j,k}, \ldots, X^{d,j,k})$. It is pretty clear that lattice valued spaLf's satisfy analogous properties to those of spaLf's introduced in Section 3.2. In particular, the discrete time field $\mathrm{r} \mapsto (\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}, \mathbb{X}^{(k)}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}})$, $\mathrm{r} \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d$ has independent and stationary increments and can be treated in a very similar way as its continuous space counterpart involved in Theorem 3.3.1. That is why we will content ourselves with stating the next theorem as well as some preliminary results without giving any proof.

Recall the definition of the Laplace exponent $\varphi_j^{(k)}$ of $\mathrm{X}^{(j),k}$, that is

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{X}_t^{(j),k}\rangle}] = e^{t\varphi_j^{(k)}(\lambda)}, \quad t \geq 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Then as in Theorem 3.2.1, we can prove that the hypothesis

$$(H^{(k)}) \qquad D^{(k)} := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \varphi_j^{(k)}(\lambda) > 0,\, j \in [d]\} \text{ is non empty}$$

is equivalent to the fact that $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathbb{R}_+^d$ holds with positive probability, for all $\mathrm{r} \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d$. As in Theorem 3.2.1, the proof of this equivalence is based on the Esscher transform $\mathbf{X}^{(k),\mu}$, for $\mu \in M_d(\mathbb{R}_+)$ whose Laplace exponent is given by

$$\varphi_j^{(k),\mu^{(j)}}(\lambda) = \varphi_j^{(k)}(\lambda + \mu^{(j)}) - \varphi_j^{(k)}(\mu^{(j)}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d. \tag{3.26}$$

Let us define the set

$$\mathcal{M}_\varphi^{(k)} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^d \times M_d(\mathbb{R}_+) : \lambda_j \geq \varphi_j^{(k)}(\mu^{(j)}),\, j \in [d]\}.$$

The following theorem is the analog of Theorem 3.3.1 for lattice valued spaLf's.

Theorem 3.3.3. *Assume that $(H^{(k)})$ holds. Let $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d$ and let $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}$ be the first hitting time of level $-\mathrm{r}$ by the spaLf $\mathbf{X}^{(k)}$, then there exits a mapping $\Phi^{(k)} : \mathcal{M}_\varphi^{(k)} \to \mathbb{R}_+^d$ such that*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}^{(k)}_{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}} \rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathbb{R}_+^d\}}\right] = e^{-\langle \mathrm{r}, \Phi^{(k)}(\lambda,\mu)\rangle}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi^{(k)}.$$

Moreover $\Phi^{(k)}$ satisfies the equations,

$$\varphi_j^{(k)}(\mu^{(j)} + \Phi^{(k)}(\lambda, \mu)) = \lambda_j, \quad j \in [d], \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi^{(k)}, \tag{3.27}$$

and it is explicitly determined by

$$\Phi^{(k)}(\lambda, \mu) = \phi^{(k),\mu}(\lambda_1 - \varphi_1^{(k)}(\mu^{(1)}), \ldots, \lambda_d - \varphi_d^{(k)}(\mu^{(d)})), \tag{3.28}$$

where $\phi^{(k),\mu}$ is the inverse of the Laplace exponent $\varphi^{(k),\mu}$ of the Esscher transform $\mathbf{X}^{(k),\mu}$ recalled in (3.26).

In order to end the proof of Theorem 3.3.2, we need to prove that any spaLf is the weak limit of a sequence of lattice valued spaLf's. The index k is now a variable that will be taken to infinity.

Lemma 3.3.1. *Let Y be a d-dimensional Lévy process whose all coordinates are spectrally positive. Then there exists a sequence of $(k^{-1}\mathbb{Z})^d$-valued Lévy processes $\mathrm{Y}^{(k)}$ which converges weakly in the J_1 Skohorod's topology toward Y. Moreover, the sequence $(\mathrm{Y}^{(k)})$ can be chosen so that for each k, all coordinates of $\mathrm{Y}^{(k)}$ take their values in the set $\{-k^{-1}, 0, k^{-1}, 2k^{-1}, 3k^{-1}, \ldots\}$.*

The proof of this lemma is transferred to the Appendix. We have now gathered all necessary ingredients for the proof of Theorem 3.3.2.

Proof of Theorem 3.3.2. Let $(\mathbb{X}^{(k)})_{k\geq 1}$ be a sequence of lattice valued spaLf's such that each sequence of columns $(\mathrm{X}^{(j),k})_{k\geq 1}$, where $\mathrm{X}^{(j),k} = {}^t(X^{1,j,k}, \dots, X^{d,j,k})$, converges weakly to $\mathrm{X}^{(j)}$. The existence of such a sequence is ensured by Lemma 3.3.1. This convergence means in particular that

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_j^{(k)}(\lambda) = \varphi_j(\lambda)\,, \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \in [\mathbf{d}]\,. \tag{3.29}$$

Since (H_φ) is satisfied, by continuity of the functions φ_j and from (3.29), there is k_0 such that for all $k \geq k_0$, $(H^{(k)})$ is satisfied. Then let $k \geq k_0$ and let $\widehat{M}_{d,\mathrm{r}}(k^{-1}\mathbb{Z})$ be the set of essentially nonnegative matrices x of $M_d(k^{-1}\mathbb{Z})$ such that $\mathrm{x}\cdot\mathbf{1} = -\mathrm{r}$. We derive from Theorem 3.3.3 that for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi^{(k)}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{r}\in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d} k^{-d} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle} \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{\mathrm{x}\in\widehat{M}_{d,\mathrm{r}}(k^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} = \mathrm{x}) \\
&= [k(1 - e^{-k^{-1}(\alpha_1 + \Phi_1^{(k)}(\lambda,\mu))}) \times \cdots \times k(1 - e^{-k^{-1}(\alpha_d + \Phi_d^{(k)}(\lambda,\mu))})]^{-1}.
\end{aligned}$$

Now take $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ such that $\lambda_j > \varphi_j(\mu^{(j)})$ for all $j \in [d]$. Then by continuity of φ_j, $j \in [d]$, there is k_0' such that for all $k \geq k_0'$, $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi^{(k)}$. Clearly $(\varphi_j^{(k),\mu^{(j)}})_{k\geq 1}$ defined in (3.26) converges pointwise to $\varphi_j^{\mu^{(j)}}$, for all $j \in [d]$. Hence, the sequence of inverses $(\phi^{(k),\mu})_{k\geq 1}$ also converges pointwise to ϕ^μ. Therefore, from (3.16), (3.28) and by continuity, $(\Phi^{(k)}(\lambda,\mu))_{k\geq 1}$ converges to $\Phi(\lambda,\mu)$.

Now let us extend the definition of $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)}$ to all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ by setting $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} := \mathbf{T}_{\lfloor \mathrm{r}\rfloor}^{(k)}$, where $\lfloor \mathrm{r}\rfloor = k^{-1}(\lfloor kr_1\rfloor, \dots, \lfloor kr_d\rfloor)$ and where $\lfloor x\rfloor$ denotes the lower integer part of x. Then by taking k to infinity in (3.30), we obtain from (3.20) that for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ such that $\lambda_j > \varphi_j(\mu^{(j)})$, for all $j \in [d]$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \sum_{\mathrm{r}\in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d} k^{-d} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle} \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{\mathrm{x}\in\widehat{M}_{d,\mathrm{r}}(k^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} = \mathrm{x}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^d\times\mathbb{R}_+^d\times\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle - \langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr} \\
&= [(\alpha_1 + \Phi_1(\lambda,\mu)))(\alpha_2 + \Phi_2(\lambda,\mu))) \dots (\alpha_d + \Phi_d(\lambda,\mu))]^{-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d\times\mathbb{R}_+^d\times\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle - \langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

On the other hand, let $\widehat{M}_d(k^{-1}\mathbb{Z})$ be the set of essentially nonnegative matrices x of $M_d(k^{-1}\mathbb{Z})$ such that $\mathrm{x}\cdot\mathbf{1} \leq 0$. Then as a direct consequence of Proposition 3.3.1, we obtain that for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi^{(k)}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{r}\in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d} k^{-d} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle} \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{\mathrm{x}\in\widehat{M}_{d,\mathrm{r}}(k^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle}\, \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}}^{(k)} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} = \mathrm{x}) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{\mathrm{r}\in k^{-1}\mathbb{Z}_+^d,\, \mathrm{x}\in\widehat{M}_{d,\mathrm{r}}(k^{-1}\mathbb{Z})} e^{-\langle\alpha,\mathrm{r}\rangle - \langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} = \mathrm{x})\, \mathrm{dt}\,. \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{\mathrm{x}\in\widehat{M}_d(k^{-1}\mathbb{Z})} e^{\langle\alpha,\mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} = \mathrm{x})\, \mathrm{dt} \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}_+^d} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle\alpha,\mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle\lambda,\mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle\mu,\mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_{\mathrm{t}}^{(k)} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}\,,
\end{aligned}$$

then it follows from the above calculation and from (3.30) that for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_\varphi$

such that $\lambda_j > \varphi_j(\mu^{(j)})$, $j \in [d]$,

$$\int_{\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \, \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\mathrm{dr}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^d} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}\,. \tag{3.31}$$

Now, we derive from the weak convergence of $\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)}$ toward $\mathbb{X}_\mathrm{t}$ for each t that

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \det(-\mathrm{x}) \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} \in \mathrm{dx}) = \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \det(-\mathrm{x}) \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx}),$$

so that for all $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{\mathrm{t} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}$$
$$= \int_{\{\mathrm{t} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}.$$

Then from Proposition 3.3.1,

$$\int_{\{\mathrm{t} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}$$
$$= \int_{\{\mathrm{t} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c \times \mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \, \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r}^{(k)} \in \mathrm{dt},\, \mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} = \mathrm{x})\, \mathrm{dr}$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle} \mathbb{E}\left[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}^{(k)}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}^{(k)}}^{(k)}\rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_\mathrm{r}^{(k)} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c} \right] \mathrm{dr},$$

which entails from a trivial extension of (3.31) that,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{\mathrm{t} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c} \int_{\widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathrm{x}\rangle\!\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t}^{(k)} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt}$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle} \mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_\mathrm{r}\rangle - \langle\!\langle \mu, \mathbb{X}_{\mathbf{T}_\mathrm{r}}\rangle\!\rangle} \mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_\mathrm{r} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c}]\, \mathrm{dr}. \tag{3.32}$$

But from part 2. of Theorem 3.2.1, for all $i, j \in [d]$, $\lim_{s\to\infty} \phi_j(s\mathrm{e}_i) = \infty$, which implies that for all $\mathrm{r} > \mathbf{0}$ and all $i \in [d]$, $\mathbb{P}(T_\mathrm{r}^{(i)} > 0) > 0$. In particular,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}(\{\mathbf{T}_\mathrm{r} \geq \varepsilon\cdot\mathbf{1}\}^c) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(T_\mathrm{r}^{(i)} < \varepsilon) = 0,$$

therefore by dominated convergence, expression (3.32) can be made arbitrarily small as ε tends to 0.

Then we have proved that the identity (3.21) is valid for all $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ and $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ such that $\lambda_j > \varphi_j(\mu^{(j)})$, $j \in [d]$. Now let any $(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_\varphi$ and assume that $\lambda_i = \varphi_i(\mu^{(i)})$ for some $i \in [d]$. Then identity (3.21) is valid if we replace λ_i by $\lambda_i' = \lambda_i + \varepsilon_i$, for $\varepsilon_i > 0$ and we obtain it for (λ, μ) by letting ε_i going to 0 and applying monotone convergence. □

Proof of Proposition 3.2.2. Assume first that $d > 1$. Then taking $\mu = 0$ in Theorem 3.3.2 gives

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \, \mathbb{P}(\mathbf{T}_\mathrm{r} \in \mathrm{dt})\mathrm{dr} &= \int_{\mathbb{R}_+^d \times \widehat{M}_d(\mathbb{R})} e^{\langle \alpha, \mathrm{x}\cdot\mathbf{1}\rangle - \langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \frac{\det(-\mathrm{x})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{P}(\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \mathrm{dx})\, \mathrm{dt} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{-\langle \lambda, \mathrm{t}\rangle} \mathbb{E}\left[e^{\langle \alpha, \mathbb{X}_\mathrm{t}\cdot\mathbf{1}\rangle} \frac{\det(-\mathbb{X}_\mathrm{t})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{1}_{\{\mathbb{X}_\mathrm{t} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R})\}} \right] \mathrm{dt}\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Note that from our assumptions the density $p_{\mathrm{t}} : M_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ of $\widehat{\mathbb{X}}_{\mathrm{t}}$ is continuous on the set of matrices whose columns belong to $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_d$. Let $\overline{M}_d(\mathbb{R})$ be the set of essentially nonnegative matrices whose elements of the diagonal are non-positive. Then

$$\mathbb{E}\left[e^{\langle \alpha, \mathbb{X}_{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{1}\rangle} \frac{\det(-\mathbb{X}_{\mathrm{t}})}{t_1 t_2 \dots t_d} \mathbb{1}_{\{\mathbb{X}_{\mathrm{t}} \in \widehat{M}_d(\mathbb{R})\}}\right] = \int\limits_{\overline{M}_d(\mathbb{R})} e^{\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i x_{i,i}} \frac{\det(-(\overline{\mathrm{x}} + D(\mathrm{x}))}{t_1 \dots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mathrm{x},$$

where $D(\mathrm{x}) = (d_{i,j})_{i,j\in[d]}$ is defined by $d_{i,i} = x_{i,i}$ and $d_{i,j} = 0$ for $i \neq j$, and $\overline{x} = (\overline{x}_{i,j})_{i,j\in[d]}$ such that $\overline{x}_{i,i} = -\sum\limits_{j\neq i} x_{i,j}$ and $\overline{x}_{i,j} = x_{i,j}$ for $i \neq j$. Let I_d be the identity matrix. Then

$$\int\limits_{\overline{M}_d(\mathbb{R})} e^{\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i x_{i,i}} \frac{\det(-(\overline{\mathrm{x}} + D(\mathrm{x}))}{t_1 \dots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mathrm{x} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{d(d-1)}} e^{-\langle \alpha, \mathrm{r}\rangle} \frac{\det(-(\overline{\mathrm{x}} + \mathrm{r}I_d))}{t_1 \dots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x}^{\mathrm{r}}) \prod_{k\neq j} \mathrm{d}x_{k,j}\mathrm{d}\mathrm{r}, \tag{3.34}$$

where x^{r} is the matrix x in which the variable $x_{i,i}$ has been replaced by r_i, for all $i \in [d]$. Then we derive from (3.33) and (3.34) that for fixed $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt}) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{d(d-1)}} \frac{\det(-(\overline{\mathrm{x}} + \mathrm{r}I_d))}{t_1 \dots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x}^{\mathrm{r}}) \prod_{k\neq j} \mathrm{d}x_{k,j}\mathrm{d}\mathrm{t}\,. \tag{3.35}$$

Let $i \in [d]$ and $\mathrm{r} = r\mathrm{e}_i$, then

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt}) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{d(d-1)}} \frac{r \det(-\overline{\mathrm{x}}^{i,i})}{t_1 \dots t_d} p_{\mathrm{t}}(\mathrm{x}^{\mathrm{r}}) \prod_{k\neq j} \mathrm{d}x_{k,j}\mathrm{d}\mathrm{t},$$

where $\overline{\mathrm{x}}^{i,i}$ is the matrix obtained from $\overline{\mathrm{x}}$ by deleting the row and the column i. From Exercise 1. in Chapter I of [8], the Lévy measure of the subordinator $(\mathbf{T}_{r\mathrm{e}_i})_{r\geq 0}$ is the vague limit of $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt})/r$ as r tends to 0, on sets of the form $\{|\mathrm{t}| > a\}$, $a > 0$. Hence the expression of the statement follows from continuity property of p_{t}.

The expression for $d = 1$ is obtained in the same way by using the simpler form (3.22) of $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathrm{dt})$ in this case. □

3.4 Appendix

Proof of Lemma 3.1.1. This proof is based on the observation that for each $i \in [d]$, as a function of t, the term $\sum\limits_{j=1}^{d} x^{i,j}(t_j)$ has no negative jumps. Moreover, when t_i is fixed, it is non decreasing.

Let us set $v_i^{(1)} = r_i$ and for $n \geq 1$,

$$s_i^{(n)} = \inf\{t : x_{t-}^{i,i} = -v_i^{(n)}\} \text{ and } v_i^{(n+1)} = r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(s_j^{(n)}-)\,,$$

where $\inf\emptyset = \infty$. Set also $\mathrm{s}^{(0)} = \mathbf{0}$ and note that $[d]_{\mathrm{s}^{(0)}} = [d]$. Then since for $i \neq j$, the $x^{i,j}$'s are positive and non decreasing, we have

$$\mathrm{s}^{(n)} \leq \mathrm{s}^{(n+1)} \text{ and } [d]_{\mathrm{s}^{(n+1)}} \subseteq [d]_{\mathrm{s}^{(n)}}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Let us set $\mathrm{s}^{(\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{s}^{(n)}$. Then $\mathrm{s}^{(\infty)}$ is the smallest solution of the system (r, x) in the sense which is defined in part 1. of Lemma 3.1.1. Indeed, let $i \in [d]_{\mathrm{s}^{(\infty)}}$. By definition and since $x^{i,i}$ has no negative jumps, for all $n \geq 1$, $x^{i,i}(s_i^{(n)}-) = -v_i^{(n)}$. Moreover, since the processes $t \mapsto x^{i,j}(t-)$

are left continuous, $\lim_{n\to\infty} x^{i,i}(s_i^{(n)}-) = x^{i,i}(s_i^{(\infty)}-)$ and $\lim_{n\to\infty} v_i^{(n)} = r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(s_j^{(\infty)}-)$. Hence (3.1) is satisfied for $\mathrm{s}^{(\infty)}$, that is $r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(s_j^{(\infty)}-) = 0$, for all $i \in [d]_{\mathrm{s}^{(\infty)}}$. Now let $\mathrm{t} \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$ satisfy (3.1), that is

$$r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(t_j-) + x^{i,i}(t_i-) = 0\,,\ i \in [d]_{\mathrm{t}}\,. \tag{3.36}$$

We can prove by induction that $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}^{(n)}$, for all $n \geq 1$. Firstly for (3.36) to be satisfied, we should have $t_i \geq \inf\{s : x^{i,i}(s-) = -r_i\}$, for all $i \in [d]_{\mathrm{t}}$, hence $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}^{(1)}$. Now assume that $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}^{(n)}$. Then $[d]_{\mathrm{t}} \subseteq [d]_{\mathrm{s}^{(n)}}$ and from (3.36), for each $i \in [d]_{\mathrm{t}}$,

$$x^{i,i}(t_i-) = -\left(r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(t_j-)\right) \leq -\left(r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(s_j^{(n)}-)\right)\,.$$

Therefore $t_i \geq \inf\left\{s : x^{i,i}(s-) = -\left(r_i + \sum_{j\neq i} x^{i,j}(s_j^{(n)}-)\right)\right\}$, so that $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}^{(n+1)}$ and the first assertion is proved.

If $\mathrm{r}' \leq \mathrm{r}$, then one can easily prove by induction that, with obvious notation, $\mathrm{s}'^{(n)} \leq \mathrm{s}^{(n)}$ for all $n \geq 1$ and the first part of assertion 2. follows. For the second part, set $\mathrm{s}' := \lim_{n\to\infty} \mathrm{s}_n$. Then first part of assertion 2. yields $\mathrm{s}' \leq \mathrm{s}$. Moreover, from the left continuity of the functions $t \mapsto x_{t-}^{i,j}$, $r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(s'_j-) = 0$, $i \in [d]_{\mathrm{s}'}$ hence s' is a solution of (r, x) and thus $\mathrm{s}' = \mathrm{s}$.

Let $\mathrm{u} \in \mathbb{R}_+^d$, such that $\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-) \leq -r_i$, for all $i \in [d]_{\mathrm{u}}$ and set $r'_i = -\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-)$. Since $\mathrm{r}' \geq \mathrm{r}$, it follows from 2. that the smallest solution s' of the system $(\mathrm{r}', \mathrm{x})$ is such that $\mathrm{s}' \geq \mathrm{s}$. But since u is also a solution of $(\mathrm{r}', \mathrm{x})$, 1. implies $\mathrm{u} \geq \mathrm{s}'$ and the first assertion of 3. follows. The second assertion of 3. is a consequence of the first one. Indeed, $\mathrm{u} < \mathrm{s}$ implies that $\mathrm{u} \geq \mathrm{s}$ is not satisfied.

Assertion 4. follows from the above construction of $\mathrm{s} = \mathrm{s}^{(\infty)}$. Indeed, if there exists $i \in [d]_{\mathrm{s}}$ and $t_i < s_i$ such that $x^{i,i}(t_i-) \leq x^{i,i}(s_i-)$ then

$$\sum_{j\neq i} x^{i,j}(s_j-) + x^{i,i}(t_i-) \leq \sum_{j\in[d]} x^{i,j}(s_j-) = -r_i \tag{3.37}$$

and for all $k \in [d]_{\mathrm{s}} \setminus \{i\}$,

$$\sum_{j\neq i} x^{k,j}(s_j-) + x^{k,i}(t_i-) \leq \sum_{j\in[d]} x^{k,j}(s_j-) = -r_k\,. \tag{3.38}$$

Then set for all $k \in [d]_s$, $r'_k = -\left(\sum_{j\neq i} x^{k,j}(s_j-) + x^{k,i}(t_i-)\right)$ and for all $k \in [d] \setminus [d]_s$, $r'_k = r_k$. Let s' be the smallest solution of the system $(\mathrm{r}', \mathrm{x})$. From part 2. of the present lemma, since $\mathrm{r}' \geq \mathrm{r}$, $\mathrm{s}' \geq \mathrm{s}$. On the other hand, from (3.37), (3.38) and part 3. of the present lemma, $\mathrm{s} > (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_d) \geq \mathrm{s}'$ which is a contradiction. □

Proof of Lemma 3.3.1. Let us first assume that Y has bounded variation. Then the characteristic exponent ψ of Y can be written as

$$\psi(\lambda) = -i\langle \mathrm{a}, \lambda\rangle + \int_{(0,\infty)^d} (1 - e^{i\langle\lambda,\mathrm{x}\rangle})\,\pi(d\mathrm{x}),\quad \lambda \in \mathbb{R}^d,$$

where $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ and the Lévy measure π satisfies $\int_{(0,\infty)^d} (1 \wedge |\mathrm{x}|)\,\pi(d\mathrm{x}) < \infty$.

Let $\pi^{(k)}$ be the restriction of π to the set $[k^{-1},\infty)^d$ i.e. $\pi^{(k)}(d\mathrm{x}) = \mathbb{1}_{[k^{-1},\infty)^d}\pi(d\mathrm{x})$. For $x \in \mathbb{R}$, set $\mathrm{sign}(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x<0\}}$. Then we consider the following sequence of $(k^{-1}\mathbb{Z})^d$-valued Lévy processes

$$\mathrm{Y}_t^{(k)} = k^{-1}\tilde{\mathrm{N}}_t^{(k)} + \sum_{n=0}^{N_t^{(k)}} \mathrm{Z}_n^{(k)},$$

where $\tilde{\mathrm{N}}^{(k)} = (\mathrm{sign}(a_1)\tilde{N}^{1,k},\dots,\mathrm{sign}(a_d)\tilde{N}^{d,k})$ and $\tilde{N}^{1,k},\dots,\tilde{N}^{d,k}$ are independent Poisson processes with respective intensities $k|a_j|$, $(N_t^{(k)})_{t\geq 0}$ is a Poisson process with intensity $\pi([k^{-1},\infty)^d)$ and for each $k \geq 1$, $(\mathrm{Z}_n^{(k)})_{n\geq 0}$ is a sequence of i.i.d random variables such that $\mathrm{Z}_n^{(k)} \overset{(law)}{=} k^{-1}\lfloor k\mathrm{Z}_k\rfloor$ and Z_k has law $(\pi([k^{-1},\infty)^d))^{-1}\pi^{(k)}(d\mathrm{x})$. (Here $\lfloor \mathrm{x}\rfloor = (\lfloor x_1\rfloor,\dots,\lfloor x_d\rfloor)$ and we recall that $\lfloor x_i\rfloor$ denotes the lower integer part of $x_i \in \mathbb{R}$.) Moreover, the sequences $\{(\tilde{\mathrm{N}}_t^{(k)})_{t\geq 0}, k \geq 1\}$, $\{(N_t^{(k)})_{t\geq 0}, k \geq 1\}$ and $\{(\mathrm{Z}_n^{(k)})_{n\geq 0}, k \geq 1\}$ are independent. Then we can check that $\mathrm{Y}^{(k)}$ has characteristic exponent

$$\psi_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{d} k|a_j|\left(1 - e^{i\frac{\lambda_j \mathrm{sign}(a_j)}{k}}\right) + \int_{(0,\infty)^d}(1 - e^{i\langle\lambda,\mathrm{x}\rangle})\,\pi^{(k)}(d\mathrm{x}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d,$$

whose limit, as k tends to ∞, is $\psi(\lambda)$, for all $\lambda \in \mathbb{R}^d$. It proves that the sequence of random variables $(\mathrm{Y}_1^{(k)})_{k\geq 1}$ converges weakly towards Y_1.

Then recall that from Theorem 2.7 in [41], which can be extended in higher dimension, see Section 5 in the same paper, the weak convergence of the sequence of random variables $(\mathrm{Y}_1^{(k)})_{k\geq 1}$ toward Y_1 implies the weak convergence of the sequence of processes $\{(\mathrm{Y}_t^{(k)})_{t\geq 0},\ k \geq 1\}$ towards $(\mathrm{Y}_t)_{t\geq 0}$ in the J_1 Skohorod's topology. Hence our result is proved in the case where Y has bounded variation.

Let us now assume that Y is any Lévy process as described in the statement and set $\Delta_s = \mathrm{Y}_s - \mathrm{Y}_{s-}$. Then it is well know that the sequence of processes

$$\mathrm{Z}_t^{(n)} := \sum_{s\leq t} \mathbb{1}_{\{|\Delta_s|>n^{-1}\}}\Delta_s - t\int_{(0,\infty)^d} x\mathbb{1}_{\{|\mathrm{x}|>n^{-1}\}}\pi(d\mathrm{x}), \quad t \geq 0,$$

converges weakly toward Y as n tends to ∞, see the proof of Theorem 1 of Chapter I in [8] and the above argument on weak convergence in the J_1 Skohorod's topology. Since, for each n, $\mathrm{Z}^{(n)}$ is a Lévy process with bounded variation whose all coordinates have no negative jumps, in application of what has just been proved, there is a sequence of $(k^{-1}\mathbb{Z})^d$-valued Lévy processes $\mathrm{Z}^{(n,k)}$, $k \geq 1$ which converges weakly in the J_1 Skohorod's topology toward $\mathrm{Z}^{(n)}$. Moreover, for each k, all the coordinates of process $\mathrm{Z}^{(n,k)}$ take their values in the set $\{-k^{-1}, 0, k^{-1}, 2k^{-1}, 3k^{-1},\dots\}$. Then it suffices to set $\mathrm{Y}^{(k)} := \mathrm{Z}^{(k,k)}$ in order to obtain the desired sequence. □

Chapter 4

Stop the spaLf in the d-dimensional Lamperti representation

Let Z be a d-types continuous branching process, where $d \geq 1$ is a non-negative integer, that is a $[0,\infty)^d$-Markov process satisfying the *branching property* :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2}(\mathrm{Z}_t \in dz) = \mathbb{P}_{\mathrm{r}_1}(\mathrm{Z}_t \in dz) * \mathbb{P}_{\mathrm{r}_2}(\mathrm{Z}_t \in dz), \quad \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \in \mathbb{R}_+^d,$$

where $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r})$. Moreover, thanks to the Lamperti representation, we know that Z can be represented as

$$(Z_t^{(1)}, ..., Z_t^{(d)}) = \mathrm{r} + \left(\sum_{j=1}^{d} X^{1,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)} ds}, ..., \sum_{j=1}^{d} X^{d,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)} ds} \right), \quad t \geq 0,$$

where $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$, $j \in [d]$ are d independent Lévy processes such that for all $j \in [d]$, $X^{j,j}$ is a real spectrally positive Lévy process, that is has no negative jumps, and for all $i \neq j$, $X^{i,j}$ is a subordinator. Note that for all $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, ${}^t\mathrm{x}$ is the transpose of x in $\mathbb{R}^d$. The right hand side of the above equation can be re-written as $\mathrm{r} + \mathbf{X}\left(\int_0^t \mathrm{Z}_s ds\right)$ where $\{\mathbf{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ is the spectrally positive additive Lévy field (spaLf) defined as the sum of the d independent Lévy processes $\mathrm{X}^{(j)}$, that is

$$\mathbf{X}_\mathrm{t} := \mathrm{X}^{(1)}_{t_1} + \cdots + \mathrm{X}^{(d)}_{t_d}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d .$$

The notion of spaLf has been defined and studied in a previous paper [17]. Conversely, given a spaLf $\mathbf{X}$, the equation admits a unique solution Z without spontaneous generation, in the sens of [13], which is a d-types continuous branching process. Spontaneous generation means that if there exists a time $t \geq 0$ such that $Z_t^{(i)} = 0$, then the mapping $s \geq 0 \mapsto \int_0^s Z_s^{(i)} ds$ strictly increases at the right of t if and only if there exists $j \neq i$, such that $X^{i,j}$ strictly increases at the right of $\int_0^t Z_s^{(j)} ds$. When $d = 1$, this result is due to J. Lamperti who asserts, in the 1970's, that any time continuous branching process can be represented as a spectrally positive Lévy process time changed by the inverse of some integral functional. Note that when $d = 1$, the Lamperti representation is constructive and define a bijection. In the article [14], L. Chaumont shows that the Lamperti representation is still satisfied by discrete multi-type branching processes and time continuous and discrete space ones. In the same time, M.E. Caballero, J.L. Pérez Garmendia and G. Uribe Bravo gave two proofs of the Lamperti representation for affine processes which defined a more general case including the MCBP [13].

Since $\mathbf{0}$ is an absorbing state for Z, we wonder if the whole path of $\mathbf{X}$ is always needed in the above transformation. For instance, when $d = 1$, it is known that the Lévy process $\mathbf{X}$ can be stopped at $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ its first passage time at the level $-\mathrm{r}$. Indeed, in this case, this result is just

an obvious consequence of the construction of the Lamperti representation and the definition of the first hitting time $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$. When $d > 1$, the Lamperti representation is not constructive anymore. Nevertheless in multi-type continuous time and discrete space setting, it has been shown using the branchin forests, see [15], that the field of Poisson processes $\mathbf{X}$ can be stopped at its first hitting time $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$, where $\mathrm{r} = \mathrm{Z}_0$. Moreover, $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ is a.s. equal to the total population $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \mathrm{Z}_n$. However in the continuous time and space case, the branching forests are not defined and the definition of the Lamperti representation only implies an inequality. In this paper, we will prove, in the conservative case, that the d-dimensional Lévy processes $\mathrm{X}^{(1)}, \ldots, \mathrm{X}^{(d)}$ can be stopped at times $T_{\mathrm{r}}^{(1)}, \ldots, T_{\mathrm{r}}^{(d)}$, respectively, where $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T_{\mathrm{r}}^{(1)}, \ldots, T_{\mathrm{r}}^{(d)})$ is defined as the first passage time at level $-\mathrm{r}$ by the field $\mathbf{X}$, see the article [17] for details. This note will be used in a forthcoming paper [18] in which we will generalise the Grey's condition in order to distinguish the finite and infinite extinction of a MCBP.

The next section consists in important preliminary lemmas for deterministic paths. The first one is a recall and was proved in [17]. It proves the existence of the first passage time of spaLf's and derives it basic properties. The second one aims to study the paths of matrix functions. The second section gives some recalls about spaLf which have been proved in the previous paper [17]. The last section use the deterministic results to show that the whole path of the spaLf $\mathbf{X}$ is not needed. That is, $\mathbf{X}$ can be stopped at $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$. Moreover, we still have equality between $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ and $\int_0^{\infty} Z_s ds$ but this integral does not represent the total population anymore.

4.1 A preliminary lemma in the deterministic setting

We use the notation $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ and $[d] = \{1, \ldots, d\}$, where $d \geq 1$ is an integer. For $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ and $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$, we write $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ if $s_i \leq t_i$ for all $i \in [d]$ and we write $\mathrm{s} < \mathrm{t}$ if $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ and there exists $i \in [d]$ such that $s_i < t_i$.

Recall that a real valued function $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is said to be *càdlàg*, if it is right continuous on $\mathbb{R}_+$ and has left limits on $(0, \infty)$. Such a function is said to be *downward skip free* if for all $s > 0$, $x(s) - x(s-) \geq 0$. We also say that x has no negative jumps. We will use the notation x_t or $x(t)$ indifferently.

Definition 4.1.1. *We call $\mathcal{E}_d$, the set of matrix valued functions $\mathrm{x} = \{(x_{t_j}^{i,j})_{i,j\in[d]}, \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d\}$ such that for all i, j, $x^{i,j}$ is a càdlàg function and*

(i) $x_0^{i,j} = 0$, for all $i, j \in [d]$,

(ii) for all $i \in [d]$, $x^{i,i}$ is downward skip free,

(iii) for all $i, j \in [d]$ such that $i \neq j$, $x^{i,j}$ is non-decreasing.

For $\mathrm{s} \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$, we denote by $[d]_{\mathrm{s}}$ the set of indices of finite coordinates of s, that is $[d]_{\mathrm{s}} = \{i \in [d] : s_i < \infty\}$. For $i \neq j$, we set $x^{i,j}(\infty) = x^{i,j}(\infty-) = \lim_{s\to\infty} x^{i,j}(s)$.

Definition 4.1.2. *Let $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$ and $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Then $\mathrm{s} \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$ is called a solution of the system (r, x) if it satisfies*

$$(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \qquad r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(s_j-) = 0\,, \quad i \in [d]_{\mathrm{s}}\,. \tag{4.1}$$

(In particular, $\mathrm{s} = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$ is always a solution of the system (r, x).)

Note that in (4.1) it is implicit that $\sum_{j\in[d]\setminus[d]_{\mathrm{s}}} x^{i,j}(s_j-) < \infty$, for all $i \in [d]_{\mathrm{s}}$, although by definition $s_j = \infty$ for $j \in [d] \setminus [d]_{\mathrm{s}}$. The next lemma gives the existence and uniqueness of a smallest solution

to the system (r, x), it was proved in the previous paper [17]. However, we recall it here since we will need these results and notations in the sequel.

Lemma 4.1.1. *Let* $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$ *and* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

1. *There exists a solution* $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \overline{\mathbb{R}}_+^d$ *of the system* (r, x) *such that any other solution* t *of* (r, x) *satisfies* $\mathrm{t} \geq \mathrm{s}$. *The solution* s *will be called* the smallest solution *of the system* (r, x).
2. *Let* s *and* s' *be the smallest solutions of the systems* (r, x) *and* $(\mathrm{r}', \mathrm{x})$, *respectively. If* $\mathrm{r}' \leq \mathrm{r}$, *then* $\mathrm{s}' \leq \mathrm{s}$. *Moreover, if* $(\mathrm{r}_n)_{n\geq 0}$ *is non decreasing with* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{r}_n = \mathrm{r}$ *then the sequence* $(\mathrm{s}_n)_{n\geq 0}$ *of smallest solutions of* $(\mathrm{r}_n, \mathrm{x})$ *satisfies* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{s}_n = \mathrm{s}$.
3. *Let* s *be the smallest solution of* (r, x). *If* u *is such that for all* $i \in [d]$, $\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-) \leq -r_i$, *then* $\mathrm{u} \geq \mathrm{s}$. *As a consequence, for all* $\mathrm{u} \in \mathbb{R}_+^d$ *such that* $\mathrm{u} < \mathrm{s}$, *there is* $i \in [d]$ *such that* $\sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(u_j-) > -r_i$.
4. *The smallest solution* s *of* (r, x) *satisfies* $s_i = \inf\{t : x^{i,i}_{t-} = \inf_{0\leq u\leq s_i} x^{i,i}_u\}$, *for all* $i \in [d]_{\mathrm{s}}$.

We emphasize that according to our definition, some of the coordinates of the smallest solution of the system (r, x) may be infinite. The smallest solution of the system (r, x) will be denoted by $\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}} = (t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},1}, \ldots, t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},d})$.

Definition 4.1.3. *Let* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$ *and* $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$, *we call* Lamperti representation *the following equation*

$$L(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \qquad z_t^{(i)} = r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}(a_t^{(j)}), \;\; t \geq 0, i \in [d] \tag{4.2}$$

where for all $j \in [d]$ *and* $t \geq 0$, $a_t^{(j)} := \int_0^t z_s^{(j)} ds$.

Let $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ and $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$, then according to [13], there exists a non-negative solution z on an interval $[0, \tau)$ with $a_{\tau^-}^{(j)} = \infty$ for some $j \in [d]$. When $\tau < \infty$, we say that z explodes at time τ. As in the stochastic case, we will say that z is *conservative* if none of its coordinate explodes, that is $\tau = \infty$. In the sequel, we will assume z conservative.

Moreover, there exists at most one non-negative solution z without *spontaneous generation* in the sense of [13]. That is to say that if $z_t^i = 0$ for some $i \in [d]$ at time $t \geq 0$ then $s \mapsto a_s^{(i)}$ strictly increases at t if there exists $j \neq i$ such that $z_t^j > 0$ and $x^{i,j}_{a_t^{(j)}}$ increases strictly to the right of t. Let z be the unique non-negative solution without spontaneous generation to $L(\mathrm{r}, \mathrm{x})$.

As say in the introduction, we would like to stop x at $\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}}$ and show that this time is equal a.s. to $\int_0^\infty \mathrm{z} ds = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{a}_t$.

Lemma 4.1.2. *Let* $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_d$ *and* $\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}}$ *the smallest solution of the system* (r, x). *Assume that for all* $i \in [d]$, $x^{i,i}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},i}-} = x^{i,i}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},i}}$. *Assume that there is a conservative solution without spontaneous generation to the Lamperti representation* $L(\mathrm{r}, \mathrm{x})$, *that is a function* $\mathrm{z}_t = (z_t^{(1)}, \ldots, z_t^{(d)})$, $t \geq 0$ *with values in* $\overline{\mathbb{R}}_+^d$ *and satisfying*

$$L(\mathrm{r}, \mathrm{x}) \qquad z_t^{(i)} = r_i + \sum_{j=1}^{d} x^{i,j}\left(a_t^{(j)}\right), \;\; t \geq 0, i \in [d],$$

where $a_t^{(j)} := \int_0^t z_s^{(j)}\, ds$. *Assume moreover that for every* $i \in [d]$, *the limit* $z_\infty^{(i)} := \lim_{t\to\infty} z_t^{(i)}$ *exists and* $z_\infty^{(i)} \in [0,\infty]$. *Then*

$$\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}} = \lim_{t\to\infty} (a_t^{(1)}, \dots, a_t^{(d)}). \tag{4.3}$$

Proof. Let us first note that $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{a}_t = \lim_{t\to\infty} (a_t^{(1)}, \dots, a_t^{(d)})$ is a solution of the system (r, x). Indeed, if $a_\infty^{(i)} := \lim_{t\to\infty} a_t^{(i)} = \infty$ for all $i \in [d]$, then $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{a}_t$ is a solution by Definition 4.1.2. On the other hand, assume that there is $i \in [d]$ such that $a_\infty^{(i)} = \int_0^\infty z_s^{(i)}\, ds < \infty$. Since $z^{(i)}$ is non negative and $\lim_{t\to\infty} z_t^{(i)}$ exists by assumption, $z_\infty^{(i)} = 0$, then $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{a}_t$ is a solution of the system (r, x). In particular, from part 1. of Lemma 4.1.1, $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{a}_t \geq \mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}}$.

Now observe that the functions $s \mapsto a_s^{(i)}$ are continuous and non decreasing and assume that t is such that $t := \inf\{s : a_s^{(i)} = t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},i}\} < \infty$ for some indices i (in particular $t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},i} < \infty$) and $a_t^{(j)} < t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},j}$ for all other indices. With no loss of generality, we can assume that $d = 2$, $t := \inf\{s : a_s^{(1)} = t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},1}\} < \infty$ and $a_t^{(2)} < t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}$. Since $x^{1,2}$ is non decreasing, $x^{1,2}_{a_t^{(2)}-} \leq x^{1,2}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}-}$ and $x^{1,2}_{a_t^{(2)}} \leq x^{1,2}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}-}$. Moreover since by definition $r_1 + x^{1,1}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},1}-} + x^{1,2}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}-} = 0$, it follows, by continuity of $x^{1,1}$ at $t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},1} = a_t^{(1)}$, that

$$r_1 + x^{1,1}_{a_t^{(1)}} + x^{1,2}_{a_t^{(2)}} \leq 0. \tag{4.4}$$

If $x^{1,2}_{a_t^{(2)}} < x^{1,2}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}-}$, then it follows from above that $z_t^{(1)} < 0$, which is a contradiction. Therefore $x^{1,2}_{a_t^{(2)}} = x^{1,2}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}-}$, that is $x^{1,2}$ is constant on the interval $[a_t^{(2)}, t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2})$ and $z_t^{(1)} = 0$.

Since z has no spontaneous generation, it implies that $z^{(1)}$ is absorbed in 0 at time t, that is $z_s^{(1)} = 0$, for $s \in [t, t']$, where $t < t' \leq \infty$ is such that $t' = \inf\{s : a_s^{(2)} = t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},2}\}$. Since $s \mapsto a_s^{(1)}$ is constant on $[t, t']$, it follows that $a_{t'}^{(1)} = t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},1}$, so that $(a_{t'}^{(1)}, a_{t'}^{(2)}) = \mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}}$. □

Note that we have shown that for all $i, j \in [d]$, $x^{i,j}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},j}-} = x^{i,j}_{t_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x},j}}$. The smallest time $t \in [0,\infty]$ such that $\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}} = \mathrm{a}_t$ is *the first hitting time of zero by the process* z and will be denoted by $t_{\mathbf{0}}^{\mathrm{z}}$. That is $\mathrm{t}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{x}} = \mathrm{a}_{t_{\mathbf{0}}^{\mathrm{z}}}$.

4.2 Some reminders about MCBP's and spaLf's

In this section, we recall some notations and results about spaLf introduced in the paper [17] since this paper is a consequence of this previous study of fluctuation theory for spaLf. Then we will give the needed results without any details and refer to the article [17] for all the proofs.

Vectors of $\mathbb{R}^d$ will be denoted by $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ and $\mathrm{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ will be the i-th unit vector of $\mathbb{R}_+^d$. We will denote by $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ the usual scalar product on $\mathbb{R}^d$ and by $|\mathrm{x}|$ the Euclidian norm of x.

Let $\mathrm{Z} = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(d)})$ be a d types branching process, with $d \geq 1$ a non-negative integer, issued from $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. That is $\mathrm{Z} = \{\mathrm{Z}_t, t \geq 0\}$ is a Markov process taking values in $\mathbb{R}_+^d$ such that its paths are càdlàg and it satisfies the following branching property

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2}(\mathrm{Z}_t \in dz) = \mathbb{P}_{\mathrm{r}_1}(\mathrm{Z}_t \in dz) * \mathbb{P}_{\mathrm{r}_2}(\mathrm{Z}_t \in dz),\ t \geq 0, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \in \mathbb{R}_+^d,$$

where $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r})$. As a consequence, it admits a Laplace exponent $\mathrm{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$ define as

$$\mathbb{E}_{\mathrm{r}}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t \rangle}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\lambda) \rangle},\ \ t \geq 0, \lambda, \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{4.5}$$

It is clear that the mapping u is positive, increasing, continuous and differentiable in λ. Moreover, it satisfies the semi-group property

$$\mathrm{u}_{t+s}(\lambda) = \mathrm{u}_t(\mathrm{u}_s(\lambda)),\ \ s, t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}_+^d\,.$$

Then it was first proved in [45] that for each $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$, $t \mapsto \mathrm{u}_t(\lambda)$ is differentiable in t and is the unique solution to the following differential system,

$$(\mathrm{S}_\varphi) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\varphi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda) = \lambda_i \end{cases} , \quad i \in [d], \lambda \in \mathbb{R}_+^d, t \geq 0. \tag{4.6}$$

where each φ_j is the Laplace exponent of a d-dimensional Lévy process $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$, such that $X^{j,j}$ is a spectrally positive Lévy process, that is has no negative jumps, and $X^{i,j}$, $i \neq j$ are subordinators. More specifically, for each $j \in [d]$, φ_j is defined by

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{X}_t^{(j)} \rangle}] = e^{t\varphi_j(\lambda)}, \quad t \geq 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^d .$$

Note that for all $j \in [d]$, φ_j is a convex function. Moreover, for all $i \neq j$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_d$ the function $\lambda_i \mapsto \varphi_j(\lambda)$ is non increasing. Conversely, still according to [45], giving $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ there exists a unique MCBP Z with *branching mechanism* φ. Note that MCBP's belong to a more general class of processes called affine processes. Existence and uniqueness of the solution of equation (S_φ) is proved in this general setting in [21].

There also exists a pathwise connection between MCBP's and their branching mechanism. For $d = 1$, this has been known for a long time as the Lamperti representation, see [35] and [11]. This representation has recently been extended to the multi-type case in [22] and [13], see also [14] for discrete valued processes. More specifically, let $\mathrm{X}^{(i)}$ be d independent Lévy processes whose Laplace exponents φ_j and $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. Then Theorem 1 in [13] asserts that there exists a unique solution without spontaneous generation to the equation,

$$L(\mathrm{r}, \mathbf{X}) \qquad Z_t^{(i)} = r_i + \sum_{j=1}^d X^{i,j}\left(\int_0^t Z_s^{(j)} ds\right), \quad t \geq 0, i \in [d]. \tag{4.7}$$

Moreover this unique solution Z is a MCBP. Conversely, every MCBP can be obtain from this construction. Note that the paper [13] actually treats the more general setting of affine processes.

Note that in equation (4.7), these Lévy processes live in different time scales and that the leading process is actually the multivariate stochastic field

$$\mathbf{X}_\mathrm{t} := \mathrm{X}_{t_1}^{(1)} + \cdots + \mathrm{X}_{t_d}^{(d)} = \left(\sum_{j=1}^d X_{t_j}^{i,j}\right)_{i \in [d]}, \quad \text{for} \quad \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d .$$

This process is called a *spectrally positive additive Lévy field* (spaLf) and has been fully studied in [17]. The mapping $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ is the Laplace exponent of this spaLf, that is

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{X}_\mathrm{t} \rangle}] = e^{\langle \mathrm{t}, \varphi(\lambda) \rangle}, \quad \mathrm{t}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d .$$

The spaLf and its fluctuation theory have been studied in a previous paper [17].

Let us also introduce the field of essentially non-negative matrices

$$\{\mathbb{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\} = \{(X_{t_j}^{i,j})_{i,j \in [d]}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}.$$

Note that the spaLf $\mathbf{X}$ can be defined as $\mathbf{X}_\mathrm{t} = \mathbb{X}_\mathrm{t} \cdot \mathbf{1}$, where $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$. Moreover, we emphasize that the spaLf $\mathbf{X}$ carries on the same information as the field of essentially non-negative matrices $\{\mathbb{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$. For this reason, the terminology 'spaLf' will refer indifferently to $\mathbf{X}$ or to $\mathbb{X}$. Let $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$, since $\mathbb{X} \in \mathcal{E}_d$ a.s., according to lemma 4.1.1, there is almost surely a smallest solution to the system

$$(\mathrm{r}, \mathbb{X}) \qquad \sum_{j=1}^d X_{s_j-}^{i,j} = -r_i, \; i \in [d]_\mathrm{s} \tag{4.8}$$

where $[d]_{\mathrm{s}} = \{i \in [d] : s_i < \infty\}$. As a consequence $\sum_{j \in [d]\setminus[d]_{\mathrm{s}}} X^{i,j}(s_j-) < \infty$ a.s., for all $i \in [d]_{\mathrm{s}}$, although by definition $s_j = \infty$ for $j \in [d] \setminus [d]_{\mathrm{s}}$.
We will denote by $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T_{\mathrm{r}}^{(1)}, \dots, T_{\mathrm{r}}^{(d)})$ this solution and use the notation

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} := \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}-} = -\mathrm{r}\}, \text{ with } \mathbf{X}_{\mathrm{t}-} = \left(\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{t_j-}\right)_{i\in[d]} . \tag{4.9}$$

Then $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ will be referred to as *the (multivariate) first hitting time of level* $-\mathrm{r}$ *by the spaLf* $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+\}$. Note that according to Lemma 2.1, some of the coordinates of $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ can be infinite. Then we are able to prove the following proposition of this multivariate first hitting time field $\mathbf{T}$.

Proposition 4.2.1. *Let* $\mathbf{X}$ *be a spaLf and for* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$*, let* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ *be its first hitting time of level* $-\mathrm{r}$ *as defined above. Then,*

1. *for all* $j \in [d]$ *and* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathrm{X}^{(j)}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}-} = \mathrm{X}^{(j)}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}}$ *a.s. on* $\{T_{\mathrm{r}}^{(j)} < \infty\}$*. In particular, for all* $i \in [d]$*,*

$$\sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}-} = \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}_{T_{\mathrm{r}}^{(j)}} = -r_i \quad \text{a.s. on the set } \{T_{\mathrm{r}}^{(i)} < \infty\}\,. \tag{4.10}$$

2. *If* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ *for some* $\mathrm{r} \in (0,\infty)^d$*, then* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ *for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$*. Under this condition, there is a mapping* $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d) : \mathbb{R}^d_+ \to (0,\infty)^d$ *such that*

$$\mathbb{E}[e^{-\langle \lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda)\rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d_+\,. \tag{4.11}$$

   Moreover, the mapping ϕ *is differentiable and each* ϕ_i *is a concave function.*

3. *Assume*

$$(H_\varphi) \qquad D_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{R}^d_+ : \varphi_j(\lambda) > 0, j \in [d]\} \text{ is not empty}$$

   then $\phi : (0,\infty)^d \to D_\varphi$ *is the inverse of* $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$*.*
   Moreover (H_φ) *holds if and only if* $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) > 0$ *for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^d_+$*.*

As a consequence,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^d_+) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}\,.$$

Let us make the following assumption

$$(I_\varphi) \qquad J_\varphi(\mathbf{0}) := \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0})\right)_{i,j\in[d]} \text{ is irreducible}$$

where irreducibility means that for all $i, j \in [d]$, there exists $n \geq 1$ and some indices $i = i_1, \dots, i_n = j$ such that for all $k \in [n-1]$, $-\frac{\partial}{\partial \lambda_{i_k}}\varphi_{i_{k+1}}(\mathbf{0}) \neq 0$. Note that for all $i, j \in [d]$, $-\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi_j(\mathbf{0}) = \mathbb{E}[X^{i,j}] \in (-\infty, \infty]$. The assumption of irreducibility (I_φ) is consistent with the one of the MCBP Z in the article [33].

Under (H_φ) and (I_φ), we can characterise $\phi(\mathbf{0})$ and the behaviour of the spaLf.

Theorem 4.2.1. *Assume that* (H_φ) *and* (I_φ) *hold, then*

1. *the values* $\mathbf{0}$ *and* $\phi(\mathbf{0})$ *are the only roots of the equation* $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$*. Furthermore, either* $\phi(\mathbf{0})$ *is equal to* $\mathbf{0}$ *or it belongs to* $(0,\infty)^d$*.*
2. *If* $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] = \infty$*, for some* $i, j \in [d]$*, then* $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$*. Assume that* $\mathbb{E}[X_1^{i,j}] < \infty$*, for all* $i, j \in [d]$*, then* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *if and only if* $\rho \leq 0$*.*

When $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, we say that the spaLf $\mathbf{X}$ drifts to $-\infty$ or oscillates. Moreover, it has been show in the article [33] that when $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, the MCBP Z becomes extinct a.s.

4.3 Stop the spaLf

As say in the introduction, we already know the result in discrete space and one type continuous settings. In those cases, all these results are obvious consequences of the construction of the solution to the Lamperti representation $L(\mathrm{r}, \mathrm{X})$.

In continuous setting and $d > 1$, the solution is not constructive anymore but we are going to show that the whole path of the spaLf $\mathbf{X}$ is, once again, not needed, that is it can be stopped at $\mathbf{T}_\mathrm{r}$. Moreover, we will see that $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ can be expressed depending on Z.

Before we state the theorem, let us introduce a last definition. We say that the MCBP Z is *conservative* if for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t \in \mathbb{R}_+^d) = 1$. In particular Z is defined on $[0, \infty)$ and none of the Lévy processes $\mathrm{X}^{(j)}$, $j \in [d]$, explodes.

Theorem 4.3.1. *Let* Z *be a conservative d-types branching process issued from* $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *and* $\mathbf{X}$ *the spaLf such that* Z *is the unique solution to the Lamperti representation* $L(\mathrm{r}, \mathbf{X})$. *Let* $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ *be the smallest solution to the system* $(\mathrm{r}, \mathbb{X})$. *Assume*

$$\text{for all } \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d,\ \mathbb{P}_\mathrm{r}(\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\} \cup \{\lim_{t\to\infty} Z_t^{(i)} = \infty, \text{ for all } i \in [d]\}) = 1, \tag{4.12}$$

then

$$\mathbf{T}_\mathrm{r} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{A}_t \quad a.s.,$$

where for all $t \geq 0$, $\mathrm{A}_t = (A_t^{(1)}, \ldots, A_t^{(d)})$ *and for all* $j \in [d]$, $A_t^{(j)} := \int_0^t Z_s^{(j)} ds$.

Proof. First note that $\mathbb{X} \in \mathcal{E}_d$. According to the first point of the proposition 4.2.1, for all $\mathrm{r} \in (0, \infty)^d$, on the set $\{\mathbf{T}_\mathrm{r}^{(i)} < \infty\}$,

$$\sum_{j=1}^d X^{i,j}_{T_\mathrm{r}^{(j)}-} = \sum_{j=1}^d X^{i,j}_{T_\mathrm{r}^{(j)}} = -r_i\,.$$

In particular, $X^{i,i}$ is continuous at $T_\mathrm{r}^{(i)}$. Thus the spaLf $\mathbf{X}$ satisfies the assumptions of the lemmas 4.1.2 .

Moreover the condition (4.12) implies the existence of the limit $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t$. Consequently, since Z is conservative, we can apply lemma 4.1.2 to the MCBP Z and the spaLf $\mathbf{X}$, that is to say

$$T_\mathrm{r}^{(i)} = \lim_{t\to+\infty} A_t^{(i)} = \int_0^\infty Z_s^{(i)} \mathrm{d}s \ \text{ a.s.}, \ \ i \in [d]\,.$$

□

When $d = 1$, condition (4.12) holds and it is natural to think that it is the case in general. When $d > 1$ and $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, according to [33], the MCBP Z becomes extinct a.s. that is $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}$. In particular, the condition (4.12) always holds. Note that this condition is also satisfied in the neutral case that is when for all $s \geq 0$ and all $i, j \in [d]$, $\varphi_i(s, s, \ldots, s) = \varphi_j(s, s, \ldots, s)$. On the other hand, we do not know any example of a MCBP which would not satisfy (4.12). When $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$, proving this condition is an open question.

Let $T_\mathbf{0}^\mathrm{Z}$ denotes the extinction time of the d-branching process Z, defined as

$$T_\mathbf{0}^\mathrm{Z} := \inf\{t \geq 0 : Z_t^{(j)} = 0, \forall j \in [d]\}\,.$$

Then according to the previous result, when Z is conservative

$$T_\mathrm{r}^{(j)} = A^{(j)}_{T_\mathbf{0}^\mathrm{Z}}, \ \ j \in [d]\,.$$

Note that each coordinate of Z can be equals to 0 several times, even infinitely often, before time $T^{\mathrm{Z}}_{\mathbf{0}}$.

As a consequence, in the Lamperti representation, the whole path of the spaLf $\mathbf{X}$ is not needed. Indeed, as in the one type case, the spaLf $\mathbf{X}$ can be stopped at $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$.

Moreover, as in the one type case, the spaLf $\mathbf{X}$ can hit the negative levels in a finite time a.s. whereas the MCBP Z, solution of the Lamperti representation $L(\mathrm{r}, \mathbf{X})$, does not become extinct at a finite time a.s. For example, let $X^{j,j}_t = -t$ and $X^{i,j}_t = 0$ for all $i, j \in [d]$ and $t \geq 0$ then for all $j \in [d]$ and $t \geq 0$, $Z^{(j)}_t = e^{-t}$.

As a consequence of this theorem, we have the following inclusions of events

$$\{\exists t \geq 0 : \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\} \subset \{\int_0^\infty \mathrm{Z}_s ds < \infty\} \subset \{\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\}.$$

This result will be used in a forthcoming paper [18] to study the extinction probability of the MCBP Z and to distinguish the extinction in a finite time of the one at infinity.

Remark 4.3.1. *As say in the introduction, in the multi-type continuous case, there is no definition for multi-type branching forests. Nevertheless, let consider a neutral case that is when the total number of children of an individual does not depend on its type. That is if the branching mechanism φ is such that for all $\alpha \geq 0$, $\varphi_j(\alpha, \ldots, \alpha) = \tilde{\varphi}(\alpha)$ does not depend on $j \in [d]$.*

In that case, if we forget types, the neutral MCBP Z *is a one type continuous branching process. As a consequence, it can be represented with a one-type branching forest. Thus, $\sum_{i=1}^{d} T^{(i)}_{\mathrm{r}} = \sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty Z^{(i)}_s ds$ can be seen as the total mass of the population weighted by life-times. Indeed, in this sum, an individual is counted as long as he lives. Then longer an individual lives in the population, more the weighted mass $\sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty Z^{(i)}_s ds$ grows. In other words, if we read the branching forest associated to* Z *with a breath first search algorithm (that is reading tree after tree, generation after generation from left to right) then this weighted mass $\sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty Z^{(i)}_s ds$ can be seen as the reading speed of the forest.*

As a consequence, the weighted mass $\sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty Z^{(i)}_s ds$ matches the first hitting time at level $-\tilde{r} = -\sum_{i=1}^{d} r_i$ of a spectrally positive Lévy process (spLp) $\tilde{X}$. This spLp $\tilde{X}$ is associated to the CBP $\tilde{Z}$ of branching mechanism $\tilde{\varphi}$ through the Lamperti representation $L\left(\tilde{r}, \tilde{X}\right)$.

Chapter 5

Extinction times of multi-type, continuous-state branching processes

Let Z be a multi-type continuous state branching process (MCSBP), with family of probability measures $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}$, $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, that is a $[0,\infty)^d$-valued Markov process, where $d \geq 1$ is some integer, satisfying the *branching property* :

$$\mathbb{E}_{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2}(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}) = \mathbb{E}_{\mathrm{r}_1}(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle})\mathbb{E}_{\mathrm{r}_2}(e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}), \quad \lambda, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \in \mathbb{R}_+^d.$$

MCSBP's were first introduced in the late 60's by Watanabe [45] and there has been renewed interest in such processes in more recent years with the works of Duffie, Filipović and Schachermayer [21], Barczy, Li and Pap [4], Caballero, Pérez Garmendia and Uribe Bravo [13], Kyprianou and Palau [33],...

Asymptotic behavior and extinction times are among the most studied questions in recent times. In the articles [33] and [34], Kyprianou, Palau and Ren provide a counterpart to the well know case of multitype Galton Watson processes by proving that the asymptotic behaviour of the MCSBP Z is characterized by the value of the Perron-Frobenius eigenvalue of the mean matrix denoted here by ρ. More specifically, extinction occurs if and only if $\rho \leq 0$. In this case, Z is said to be critical ($\rho = 0$) or sub-critical ($\rho < 0$). When $\rho > 0$, the process is said to be super-critical and Z either becomes extinct with positive probability or has exponential growth under a log-condition. As in dimension one, the continuous case differs from the discrete one because extinction can either occur at a finite time, that is there exists $t \geq 0$ such that for all $i \in [d]$, $Z_t^{(i)} = 0$, or occur at infinity, that is for all $t \geq 0$, there exists $i \in [d]$ such that $Z_t^{(i)} > 0$ and $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Z}_t = 0$. When $d = 1$, Grey's condition, see [23], gives a necessary and sufficient condition for the continuous state branching process Z to become extinct at a finite time in terms of its branching mechanism, φ. It says that Z becomes extinct at a finite time if and only if

$$\int^{\infty} \frac{ds}{\varphi(s)} < \infty\,. \tag{5.1}$$

However, when $d > 1$, we do not know how to distinguish these two 'types' of extinction. The aim of this article is to give a multi-type Grey's condition.

One of the major results used for our proof is the extension to the multitype case of the Lamperti representation, recently obtained in [13]. This result asserts that Z can be represented as the unique solution of the following equation,

$$(Z_t^{(1)}, ..., Z_t^{(d)}) = \mathrm{r} + \left(\sum_{j=1}^{d} X^{1,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)} ds}, ..., \sum_{j=1}^{d} X^{d,j}_{\int_0^t Z_s^{(j)} ds} \right), \quad t \geq 0,$$

where $\mathrm{X}^{(j)} = {}^t(X^{1,j}, \ldots, X^{d,j})$, $j \in [d]$ are d independent Lévy processes such that for all $j \in [d]$, $X^{j,j}$ is a spectrally positive Lévy process, that is with no negative jumps, and for all $i \neq j$, $X^{i,j}$

is a subordinator. The right hand side of the above equation can be re-written as $\mathrm{r} + \mathbf{X}\left(\int_0^t \mathrm{Z}_s ds\right)$ where $\{\mathbf{X}_\mathrm{t}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ is the spectrally positive additive Lévy field (spaLf) defined as the sum of the d independent Lévy processes $\mathrm{X}^{(j)}$, that is

$$\mathbf{X}_\mathrm{t} := \mathrm{X}^{(1)}_{t_1} + \cdots + \mathrm{X}^{(d)}_{t_d}, \ \ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d \, .$$

Note that the notion of spaLf has been defined and studied in a previous paper under the aspect of fluctuation theory, see [17]. When $d = 1$, this result is due to Lamperti who asserts, in the 1970's, that any time continuous branching process can be represented as a spectrally positive Lévy process time changed by the inverse of some integral functional. Note that when $d = 1$, the Lamperti representation is constructive, that is the branching process can be made explicit from the leading Lévy process, whereas this is not the case in higher dimension.

Our main result states if the Laplace exponent $\tilde{\varphi}_i$ of each diagonal Lévy process $X^{i,i}$ in the above Lamperti representation satisfies the Grey's condition, that is if

$$\int^\infty \frac{ds}{\tilde{\varphi}_i(s)} < \infty, \quad \text{for all } i \in [d] \, , \tag{5.2}$$

then extinction can only occur at a finite time. Moreover, when starting from $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, the process Z becomes extinct with probability $e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$, where ϕ is the inverse of the Laplace exponent of the spaLf $\mathbf{X}$. If (5.2) is not satisfied for some $i \in [d]$, then Z can only become extinct at infinity. In any case, it becomes extinct almost surely if and only if Z is critical or sub-critical.

This result indicates in particular that the off-diagonal subordinators $X^{i,j}$, $i \neq j$ have no influence on the nature of the extinction. It may appear rather counter-intuitive. However, thinking of the neutral case may help to understand this phenomenon. Indeed, in the neutral case, that is when the law of $\sum_{i=1}^d X^{i,j}$ does not depend on j, the MCSBP Z behaves like a single type continuous state branching process. More specifically, $Z^{(1)} + \cdots + Z^{(d)}$ is a continuous state branching process whose branching mechanism is the Laplace exponent $\hat{\varphi}$ of $\sum_{i=1}^d X^{i,j}$. But provided $X^{i,i}$'s are not subordinator, which is excluded here, the asymptotic behavior at infinity of $\hat{\varphi}$ is the same as this of $\tilde{\varphi}_i$ for each i. Therefore $\hat{\varphi}$ satisfies Grey's condition (5.1), that is Z can only become extinct at a finite time and this occurs with positive probability, if and only if (5.2) is statisfied.

The next section is devoted to some reminders and preliminary results about MCSBP's and spaLf's. Then in Section 5.2 we state our main results and in Sections 5.3 and 5.4 we give proofs of these results.

5.1 Preliminary results on MCSBP's and spaLf's

We use the notation $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ and $[d] = \{1, \ldots, d\}$, where $d \geq 1$ is an integer. Vectors of $\mathbb{R}^d$ will be written in roman characters and their coordinates in italic, as follows: $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$. The i-th unit vector of $\mathbb{R}_+^d$ will be denoted $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. We set $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ and $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, respectively for the zero vector of $\mathbb{R}_+^d$ and the vector of $\mathbb{R}_+^d$ whose all coordinates are equal to 1. For $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ and $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$, we write $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ if $s_i \leq t_i$ for all $i \in [d]$ and we write $\mathrm{s} < \mathrm{t}$ if $\mathrm{s} \leq \mathrm{t}$ and there exists $i \in [d]$ such that $s_i < t_i$. We will denote by $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ the usual scalar product on $\mathbb{R}^d$ and by $|\mathrm{x}|$ the euclidian norm of x.

5.1.1 Basics on MCSBP's

Let δ be an element external to $\mathbb{R}_+^d$ and $R = \mathbb{R}_+^d \cup \{\delta\}$ be the one point Alexandrov compactification of $\mathbb{R}_+^d$. An R-valued strong Markov process $\mathrm{Z} = \{(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mathrm{r})_{\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d}\}$ with δ as a trap is called a multitype (or a d-type) continuous state branching process (MCSBP) if it satisfies,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}] = \mathbb{E}_{\mathrm{r}_1}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}]\mathbb{E}_{\mathrm{r}_2}[e^{-\langle \lambda, \mathrm{Z}_t\rangle}], \ t \geq 0, \ \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \lambda \in \mathbb{R}_+^d \, , \tag{5.3}$$

where by convention $e^{-\langle\lambda,\delta\rangle}=0$, for all $\lambda\in\mathbb{R}_+^d$. The property (5.3) is called the *branching property* of Z. We recall that $\mathbf{0}$ is an absorbing state for Z and that it is the only absorbing state other than δ. The branching property of Z implies directly the existence of a mapping $(t,\lambda)\mapsto \mathrm{u}_t(\lambda)=(u_t^{(1)}(\lambda),\dots,u_t^{(d)}(\lambda))$ satisfying

$$\mathbb{E}_{\mathrm{r}}[e^{-\langle\lambda,\mathrm{Z}_t\rangle}]=e^{-\langle \mathrm{r},\mathrm{u}_t(\lambda)\rangle},\ \ t\geq 0,\ \lambda,\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d. \tag{5.4}$$

From the Markov property of Z, we derive the *semigroup property* of $\mathrm{u}_t(\lambda)$,

$$\mathrm{u}_{t+s}(\lambda)=\mathrm{u}_t(\mathrm{u}_s(\lambda)),\quad \text{for all } s,t\geq 0 \text{ and } \lambda\in\mathbb{R}_+^d.$$

Moreover for each fixed t, $\mathrm{u}_t(\lambda)$ is clearly positive, increasing, continuous and differentiable in λ. It was first proved in [45] that for each $\lambda\in\mathbb{R}_+^d$, $t\mapsto \mathrm{u}_t(\lambda)$ is differentiable in t and is the unique solution to the following differential system,

$$(S_\varphi)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_t^{(i)}(\lambda)=-\varphi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) \\ u_0^{(i)}(\lambda)=\lambda_i \end{cases},\quad i\in[d],\ t\geq 0,$$

where each φ_i is the Laplace exponent of a possibly killed d-dimensional Lévy process $\mathrm{X}^{(i)}={}^t(X^{1,i},\dots,X^{d,i})$. The coordinate $X^{i,i}$ is a (possibly killed) spectrally positive Lévy process and $X^{i,j}$, $j\neq i$ are (possibly killed) subordinators. More specifically, we define a probability measure $\mathbb{P}$ under which the processes $\mathrm{X}^{(i)}$, $i\in[d]$ are d independent possibly killed d-dimensional Lévy processes. Then for each $i\in[d]$, φ_i is defined by

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathrm{X}_t^{(i)}\rangle}]=e^{t\varphi_i(\lambda)},\quad t\geq 0,\quad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\mathbb{R}_+^d.$$

Its Lévy-Khintchine decomposition is written as,

$$\varphi_i(\lambda)=-\alpha_i-\sum_{j=1}^d a_{j,i}\lambda_j+\frac{1}{2}q_i\lambda_i^2-\int_{\mathbb{R}_+^d}(1-e^{-\langle\lambda,\mathrm{x}\rangle}-\langle\lambda,\mathrm{x}\rangle 1_{\{|\mathrm{x}|<1\}})\,\pi_i(d\mathrm{x}),\ \ \lambda\in\mathbb{R}_+^d, \tag{5.5}$$

where $\alpha_i\geq 0$, $(a_{j,i})_{i,j\in[d]}$ is an essentially nonnegative matrix i.e. $a_{j,i}\geq 0$ for $i\neq j$, $q_i\geq 0$ and π_i is a measure on $\mathbb{R}_+^d$ such that $\pi_i(\{\mathbf{0}\})=0$ and

$$\int_{\mathbb{R}_+^d}\left[(1\wedge|\mathrm{x}|^2)+\sum_{j\neq i}(1\wedge x_j)\right]\pi_j(d\mathrm{x})<\infty.$$

The mapping $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_d)$ is called the *branching mechanism* of the MCSBP Z. We emphasize that for each $i\in[d]$, φ_i is a convex function. Moreover, for all $j\neq i$ and $\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\dots,\lambda_d$ the function $\lambda_j\mapsto\varphi_i(\lambda)$ is non increasing and whenever $X^{i,i}$ is not a subordinator, the function $\lambda_i\mapsto\varphi_i(\lambda)$ tends to ∞ as $\lambda_i\to\infty$. Conversely, still according to [45], for each mapping such as φ in (5.5) there exists a unique (in law) MCSBP $\mathrm{Z}=\{(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0},(\mathbb{P}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d}\}$ with branching mechanism φ. Note that MCSBP's belong to a more general class of processes called affine processes. Existence and uniqueness of the solution of equation (S_φ) is proved in this general setting in [21].

A MCSBP Z is said to be *conservative* if for all $\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d$ and $t>0$, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t\in\mathbb{R}_+^d)=1$. From (5.4) this can be expressed in terms of the Laplace exponent of Z as $e^{\langle \mathrm{r},\mathrm{u}_t(\mathbf{0})\rangle}=1$, for all $\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d$ and $t>0$, so that Z is conservative if and only if

$$u_t^{(i)}(\mathbf{0})=0,\ \ \text{for all } t>0 \text{ and } i\in[d]. \tag{5.6}$$

When $d=1$, it is proved in [23] that Z is conservative if and only if its mechanism φ satisfies

$$\int_{0+}\frac{d\alpha}{|\varphi(\alpha)|}=\infty.$$

When $d \geq 1$, finding necessary and sufficient conditions on the branching mechanism for Z to be conservative is an open question which is not our purpose here. However, let us note that if for some $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\mathbf{0}) = 0$, for all $t \geq 0$, then from (S_φ), for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\mathbf{0}) &= -\varphi_i(u_t^{(1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(i-1)}(\mathbf{0}), 0, u_t^{(i+1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(d)}(\mathbf{0})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

But φ_i is non increasing on all coordinates $j \neq i$, so that

$$-\varphi_i(u_t^{(1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(i-1)}(\mathbf{0}), 0, u_t^{(i+1)}(\mathbf{0}), \ldots, u_t^{(d)}(\mathbf{0})) \geq \alpha_i$$

and hence $\alpha_i = 0$. Therefore, if Z is conservative, then for all $i \in [d]$, $\alpha_i = 0$. Since our objective is to obtain conditions for extinction, we are only concerned with conservative processes. This justifies to assume throughout the paper that

$$\alpha_i = 0, \quad \text{for all } i \in [d].$$

There also exists a pathwise connection between MCSBP's and their branching mechanism which will be of great use for our results. For $d = 1$, this has been known for a long time as the Lamperti representation, see [35] and [11]. This representation has recently been extended to the multitype case in [22] and [13], see also [14] for discrete valued processes. More specifically, let $\mathrm{X}^{(i)}$, $i \in [d]$ be d independent Lévy processes whose Laplace exponents have the form (5.5) and $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. Then Theorem 1 in [13] asserts that there exists a unique solution to the equation,

$$Z_t^{(i)} = r_i + \sum_{j=1}^{d} X^{i,j}\left(\int_0^t Z_s^{(j)} ds\right), \quad t \geq 0, \quad i \in [d]. \tag{5.7}$$

Moreover, if $\mathbb{P}_\mathrm{r}$ denotes the law of the solution $\mathrm{Z}_t = (Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(d)})$, $t \geq 0$, then $\mathrm{Z} = \{(\mathrm{Z}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_\mathrm{r})_{\mathrm{r}\in\mathbb{R}_+^d}\}$ is a MCSBP with branching mechanism φ. Conversely, every MCSBP can be obtained from this construction. Note that the paper [13] actually treats the more general setting of affine processes.

5.1.2 Some reminders on spaLf's

Whether characterized analytically through the differential system (S_φ) or path by path through equations (5.7), MCSBP's require a good knowledge of the underlying Lévy processes $\mathrm{X}^{(j)}$, $j \in [d]$ in order to be properly studied. Note that in equation (5.7), these Lévy processes live in different time scales and that the leading process is actually the multivariate stochastic field

$$\mathbf{X}_\mathrm{t} := \mathrm{X}_{t_1}^{(1)} + \cdots + \mathrm{X}_{t_d}^{(d)} = \left(\sum_{j=1}^{d} X_{t_j}^{i,j}\right)_{i\in[d]}, \quad \text{for} \quad \mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d\,.$$

This process is called a *spectrally positive additive Lévy field* (spaLf) and has been studied in [17] from the aspect of fluctuation theory. The mapping φ defined above is actually the Laplace exponent of this spaLf, that is

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,\mathbf{X}_\mathrm{t}\rangle}] = e^{\langle \mathrm{t},\varphi(\lambda)\rangle}\,, \quad \mathrm{t}, \lambda \in \mathbb{R}_+^d\,.$$

Similarly to the case $d = 1$, the construction of the solution of (5.7) only requires the paths of $\mathbf{X}$ up to its first hitting time at level $-\mathrm{r}$. This notion of first hitting times for spaLf's has been defined in [17] as the smallest solution to the system

$$(\mathrm{r}, \mathbf{X}) \qquad \sum_{j=1}^{d} X_{s_j}^{i,j} = -r_i, \quad i \in [d]_\mathrm{s}\,, \tag{5.8}$$

where 'smallest' is to be understood in the usual partial order of $\mathbb{R}^d$ and $[d]_{\mathrm{s}} = \{i \in [d] : s_i < \infty\}$. We will denote by $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = (T_{\mathrm{r}}^{(1)}, \ldots, T_{\mathrm{r}}^{(d)})$ this solution and we will refer to it as *the* (*multivariate*) *first hitting time of level* $-\mathrm{r}$ *by the spaLf* $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$. In a purely formal way we may set,

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \inf\{\mathrm{t} : \mathbf{X}_{\mathrm{t}} = -\mathrm{r}\}\,. \tag{5.9}$$

Let us now state two important hypothesis which will be in force throughout this paper. The first one is,

$$(H_\varphi) \qquad D_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d : \varphi_j(\lambda) > 0, j \in [d]\} \text{ is not empty.}$$

Assuming (H_φ) simply allows us to exclude the spaLf's which do not hit any level, almost surely, see Theorem 5.1.1 below. When $d = 1$ this boils down to exclude subordinators. Our second assumption regards the mean matrix $M = (m_{ij})_{i,j\in[d]}$, where $m_{ij} := \mathbb{E}(X_1^{i,j}) = -\lim_{\lambda\to 0} \dfrac{\partial}{\partial\lambda_i}\varphi_j(\lambda)$. We say that M is *irreducible* if for all $i, j \in [d]$, there exist $n \geq 1$ and some indices $i = i_1, \ldots, i_n = j$ such that for all $k \in [n-1]$, $m_{i_k i_{k+1}} \neq 0$. Note that for all $i, j \in [d]$, $m_{ij} \in (-\infty, \infty]$. A MCSBP Z is said to be irreducible if the mean matrix M of the underlying spaLf $\mathbf{X}$ in the Lamperti representation is irreducible. We will also sometimes say that the spaLf $\mathbf{X}$ is irreducible. When $\mathbf{X}$ is integrable, that is when $m_{ij} < \infty$, for all $i, j \in [d]$, Perron-Frobenius theory asserts that M has a real eigenvalue ρ with multiplicity equal to 1 and such that the real part of any other eigenvalue is less than ρ. In this case the MCSBP Z will be said to be subcritical, critical or super critical according as $\rho < 0$, $\rho = 0$ or $\rho > 0$.

The following result is proved in [17], see Proposition 2.1, Theorems 3.1 and 3.2 therein.

Theorem 5.1.1. *Let* $\mathbf{X}$ *be a spaLf and for* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, *let* $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ *be its first hitting time of level* $-\mathrm{r}$ *as defined above. Then,*

1. $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) > 0$ *for some* (*and hence for all*) $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ *if and only if* (H_φ) *holds.*
2. *If* (H_φ) *holds then there is a mapping* $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d) : \mathbb{R}_+^d \to [0, \infty)^d$ *such that*

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda, \mathbf{T}_{\mathrm{r}}\rangle}] = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\lambda)\rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d\,. \tag{5.10}$$

   Moreover, for all $\lambda \in (0, \infty)^d$, $\phi(\lambda) \in D_\varphi$ *and the mapping* $\phi : (0, \infty)^d \to D_\varphi$ *is a diffeomorphism whose inverse is* $\varphi : D_\varphi \to (0, \infty)^d$, *that is*

$$\varphi(\phi(\lambda)), \quad \lambda \in (0, \infty)^d.$$

3. *If* $\mathbf{X}$ *is irreducible and if* (H_φ) *holds, then the values* $\mathbf{0}$ *and* $\phi(\mathbf{0})$ *are the only solutions of the equation* $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$. *Moreover, either* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *or* $\phi(\mathbf{0}) \in (0, \infty)^d$.

An immediate consequence of Theorem 5.1.1 is the following expression of the probability for the first hitting time to be finite on each coordinate,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}\,. \tag{5.11}$$

When $d = 1$ we derive directly from the Lamperti representation (5.7) the almost sure equality $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \int_0^\infty \mathrm{Z}_s\, ds$. The general case is much more delicate to deal with. Indeed, the underlying spaLf being multi-indexed, it may reach the level $-\mathrm{r}$ through infinitely many different paths. However, provided the following assumption

$$\text{for all } \mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \text{ and } i \in [d],\ \lim_{t\to\infty} Z_t^{(i)} \text{ exists and belongs to } [0, \infty],\ \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\text{-a.s.} \tag{5.12}$$

holds, the expected result is true and has been proved in [19]. It is stated as follows.

Proposition 5.1.1. *Let* Z *be a MCSBP and let* $\mathbf{X}$ *be the underlying spaLf in the Lamperti*

representation (5.7). *Assume that* Z *satisfies* (5.12). *Then for all* $i \in [d]$,

$$T_{\mathrm{r}}^{(i)} = \int_0^\infty Z_s^{(i)}\, ds\,.$$

As mentioned above, condition (5.12) is satisfied when $d = 1$. It is also satisfied for instance when the process is irreducible, (H_φ) holds and $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. In this case, the spaLf $\mathbf{X}$ is necessarily integrable and critical or subcritical. Then from [34], $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = 1$, for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, see also Proposition 5.2.1 below. Finding necessary and sufficient conditions for (5.12) to hold is an open problem. Actually we have no example of an irreducible MCSBP that would not satisfy this condition.

Let us finally, specify that since the results of this paper are only concerned with distributional properties of MCSBP's, when refereing to such a process Z, there will be no ambiguity in mentioning the underlying spaLf $\mathbf{X}$ in the Lamperti representation (5.7).

5.2 Main results

We start by fixing some natural conditions for the study of extinction times. When Z is not irreducible, several subsets of types (that is sub-vectors of Z) can have independent asymptotic behaviours. In such cases, the study of extinction of Z is reduced to the study of partial extinction of its irreducible classes. Therefore in order to study the extinction property, it is natural to assume that is Z irreducible.

On the other hand, recall that from Theorem 5.1.1 if (H_φ) does not hold, then the underlying spaLf satisfies $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = 0$, for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ and we can derive from the Lamperti representation, (5.7), that $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = 0$, that is, with probability one, extinction does not hold. Therefore, throughout the rest of this paper, we will assume that

$$\mathrm{Z} \textit{ is irreducible and } (H_\varphi) \textit{ holds.}$$

Then, recall from Theorem 5.1.1 that the branching mechanism $\varphi : D_\varphi \to (0,\infty)^d$ of Z admits an inverse that is denoted by ϕ.

We first provide some relations between the probability of extinction and the mechanism of a MCSBP.

Proposition 5.2.1. *Let* Z *be a MCSBP, then for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) \le e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle} \quad \textit{and} \tag{5.13}$$

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = 1 \quad \textit{if and only if} \quad \phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{5.14}$$

In the later case, we say that Z *becomes extinct almost surely. If moreover, condition* (5.12) *is satisfied, then for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}. \tag{5.15}$$

We define the probability of extinction at a finite time under $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}$, $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ by,

$$q_{\mathrm{r}} := \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ for some } t > 0).$$

Since the family of events $\{\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\}$ is non decreasing in t and converges to the event $\{\mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ for some } t > 0\}$, the probability q_{r} can be written as

$$q_{\mathrm{r}} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0})\,. \tag{5.16}$$

Note also that from (5.4), for all $t \geq 0$, the mapping $\lambda \mapsto \mathrm{u}_t(\lambda)$ statisfies $\mathrm{u}_t(\lambda) \leq \mathrm{u}_t(\lambda')$, whenever $\lambda \leq \lambda'$. Moreover, the limit $\mathrm{u}_t(\infty)$ of $\mathrm{u}_t(\lambda)$ when all coordinates $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ of λ tend to ∞ does not depend on the relative speeds at which the λ_i's tend to ∞ and satisfies,

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty)\rangle}\,. \tag{5.17}$$

The probability of extinction q_{r} depends on the finiteness of $\mathrm{u}_t(\infty)$ as follows.

Proposition 5.2.2. *Let* Z *be a MCSBP. Assume that none of the processes* $X^{i,j}$ *for* $i, j \in [d]$ *such that* $i \neq j$ *is a compound Poisson process. Then we have the following dichotomy*:

(*i*) *either for all* $t \geq 0$ *and* $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$ *and then for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q_{\mathrm{r}} = 0$,

(*ii*) *or for all* $t \geq 0$ *and* $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$ *and then for all* $t > 0$ *and* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) > 0$ *and hence* $q_{\mathrm{r}} > 0$. *In this case, if moreover* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *then* $q_{\mathrm{r}} = 1$, *for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$.

Our goal is to distinguish between two types of extinction defined by the two exhaustive events

$$\Big\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ and } \mathrm{Z}_t > \mathbf{0}, \text{ for all } t > 0\Big\} \quad \text{and} \quad \{\mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ for some } t > 0\}\,.$$

In the first case, we will say the extinction occurs at infinity and in the second case we will say that extinction occurs at a finite time. Then, we wish to find conditions bearing on the mechanism φ allowing us to determine if extinction holds at a finite time or not. The probability for Z to become extinct at infinity under $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}$, $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$ will be denoted as follows:

$$\bar{q}_{\mathrm{r}} = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ and } \mathrm{Z}_t > \mathbf{0}, \text{ for all } t > 0).$$

Let us briefly recall the case $d = 1$. Let φ be the branching mechanism of the continuous state branching process Z. If the following integral condition, called Grey's condition, is satisfied,

$$(G_\varphi) \qquad \int^\infty \frac{ds}{\varphi(s)} < \infty,$$

then extinction can occur only at a finite time. Moreover, under (G_φ), if Z starts from $r \geq 0$, then the probability of extinction is $e^{-r\phi(0)}$, where ϕ is the inverse of φ, see [23]. If (G_φ) is not satisfied, then extinction of Z can only occur at infinity.

Let us now consider the general case $d \geq 1$. To this aim, we denote by $\tilde{\varphi}_i$ the Laplace exponent of the spectrally positive Lévy process $X^{i,i}$, that is

$$\tilde{\varphi}_i(s) = \varphi_i(s\mathrm{e}_i), \quad s \geq 0. \tag{5.18}$$

Note that since (H_φ) is satisfied, none of the processes $X^{i,i}$ is a subordinator, so that $\lim_{s\to\infty} \tilde{\varphi}_i(s) = \infty$. Then let us introduce the following condition bearing on this Laplace exponent,

$$(G_\varphi^{(i)}) \qquad \int^\infty \frac{ds}{\tilde{\varphi}_i(s)} < \infty\,.$$

We are now able to state our main result. It provides an extension for MCSBP of Grey's condition.

Theorem 5.2.1. *Let* Z *be a MCSBP such that none of the processes* $X^{i,j}$ *for* $i, j \in [d]$, $i \neq j$ *is a compound Poisson process.*

1. *Assume that* $(G_\varphi^{(i)})$ *is satisfied for all* $i \in [d]$. *Then* Z *can only become extinct at a finite time, that is* $\bar{q}_{\mathrm{r}} = 0$ *for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$. *Moreover,*

$$q_{\mathrm{r}} = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}, \tag{5.19}$$

for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$.

2. *Assume that* $(G_\varphi^{(i)})$ *is not satisfied for some* $i \in [d]$. *Then,* Z *cannot become extinct at a finite time i.e.* $q_{\mathrm{r}} = 0$, *for all* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. *Moreover,*

   (*i*) *if* $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *then* Z *becomes extinct at infinity, almost surely, that is,*

$$\bar{q}_{\mathrm{r}} = 1,$$

   for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

   (*ii*) *if condition* (5.12) *is satisfied, then*

$$\bar{q}_{\mathrm{r}} = \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}, \tag{5.20}$$

   for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Let us say a few words about the exclusion of compound Poisson processes. If for instance, type 1 is such that for all $j \neq 1$, $X^{1,j}$ is either identically equal to 0 or is a compound Poisson process, then there is an a.s. positive random time τ such that $X_t^{1,j} = 0$, for all $j \neq 1$ and $t \in [0, \tau]$. Hence we derive from (5.7) that if r is such that $r_1 = 0$, then $Z_t^{(1)} = 0$, for all $t \in [0, \gamma]$ for some a.s. positive random time γ. If moreover conditions $(G_\varphi^{(j)})$ are satisfied for all $j \neq 1$, then from part (*ii*) of the theorem, the process Z restricted to types $2, 3, \ldots, d$ can reach $\mathbf{0}$ with positive probability. Moreover, it is reasonable to think that this hitting time of $\mathbf{0}$ can occur in the time interval $[0, \gamma]$ with positive probability. Therefore, the probability of extinction at a finite time of Z is positive in this case. Actually, whenever there exist processes $X^{i,j}$, $i \neq j$ that are compound Poisson processes, it is possible that more than one condition $(G_\varphi^{(i)})$ is required for the process not to become extinct at a finite time. A general result including compound Poisson processes could be proved, but we do not think this case is much relevant.

Since (5.12) is satisfied when $d = 1$, part 2. of Theorem 5.2.1 can be reduced to the following statement in this case: If (G_φ) is not satisfied, then Z cannot become extinct at a finite time and for all $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,

$$\bar{q}_r = \mathbb{P}_r\left(\lim_{t\to\infty} Z_t = 0\right) = e^{-r\phi(0)}. \tag{5.21}$$

As far as we know, (5.21) is never mentioned in the literature.

5.3 Proof of Propositions 5.2.1 and 5.2.2

Proof of Proposition 5.2.1: The Lamperti representation (5.7) yields the following path by path relation between Z starting at $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{r}$ and the first passage times of its underlying spaLf,

$$\left\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right\} \subset \left\{\mathbf{T}_{\mathrm{r}'} \in \mathbb{R}_+^d\right\}, \quad \text{for all } \mathrm{r}' \text{ such that } 0 \leq r_i' < r_i, \text{ for all } i \in [d]. \tag{5.22}$$

Indeed, it follows directly from equation (5.7) that for Z to be as close to $\mathbf{0}$ as possible, the spaLf $\mathbf{X}$ has to reach all possible levels r′ such that $0 \leq r_i' < r_i$, for all $i \in [d]$. Together with (5.11) inclusion (5.22) implies that

$$\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) \leq e^{-\langle \mathrm{r}', \phi(\mathbf{0})\rangle}, \quad \text{for all } \mathrm{r}' \text{ such that } 0 \leq r_i' < r_i, \text{ for all } i \in [d],$$

which gives (5.13) by continuity.

Then we derive from (5.13) the direct part of (5.14). Let us now assume that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Then from part 3. of Theorem 3.2 in [17], this implies that the underlying spaLf is integrable, that is $\mathbb{E}(X_1^{i,j}) < \infty$, for all $i, j \in [d]$, and that Z is critical or subcritical. Finally, it is proved in Theorem 2 and Remark 1 of [33] that when Z is critical or subcritical, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = 1$, for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$.

Let us now prove the last assertion of Proposition 5.2.1. Set $\int_0^\infty \mathrm{Z}_s\, ds = \left(\int_0^\infty Z_s^{(i)}\, ds\right)_{i\in[d]}$ and note that under condition (5.12) the inclusion

$$\left\{\int_0^\infty \mathrm{Z}_s\, ds \in \mathbb{R}_+^d\right\} \subset \left\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right\}, \quad \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\text{-a.s.}$$

holds. Recall from Proposition 5.1.1 that under condition (5.12), $\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \int_0^\infty \mathrm{Z}_s\, ds$, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}$-a.s. for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, so that from (5.11) and the above inclusion,

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+^d) = e^{-\langle r, \phi(\mathbf{0})\rangle} \leq \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right).$$

We conclude from (5.13). □

The next two lemmas will be needed in the proof of Proposition 5.2.2.

Lemma 5.3.1. *For all $\lambda \in D_\varphi$ and $t \geq 0$, $\mathrm{u}_t(\lambda) \in D_\varphi$ and for all $i \in [d]$, the mapping $t \mapsto u_t^{(i)}(\lambda)$ is decreasing. Moreover for all $i \in [d]$, the mapping $t \mapsto u_t^{(i)}(\infty)$ is decreasing.*

Proof. Let $\lambda \in D_\varphi$. Then for all $i \in [d]$, $\dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0} = -\varphi_i(\lambda) < 0$ so that for all h small enough, $u_h^{(i)}(\lambda) < \lambda_i$. That is $[\mathrm{u}_h(\lambda), \lambda] := \prod_{i\in[d]} [u_h^{(i)}(\lambda), \lambda_i] \neq \emptyset$. Thanks to the theorem of finite increments, for all $h \geq 0$ small enough, there exists $\lambda' \in [\mathrm{u}_h(\lambda), \lambda]$ such that

$$u_t^{(i)}(\mathrm{u}_h(\lambda)) - u_t^{(i)}(\lambda) = u_{t+h}^{(i)}(\lambda) - u_t^{(i)}(\lambda) = \sum_{j=1}^d \left(u_h^{(j)}(\lambda) - \lambda_j\right) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_t^{(i)}(\lambda').$$

where we have used the semigroup property of $\mathrm{u}_t(\lambda)$ in the first equality. Then making h tend to zero, we obtain

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{u_{t+h}^{(i)}(\lambda) - u_t^{(i)}(\lambda)}{u_h^{(i)}(\lambda) - \lambda_i} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} u_t^{(i)}(\lambda) + \\
&\quad \sum_{j\neq i} \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(j)}(\lambda)|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_t^{(i)}(\lambda) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} u_t^{(i)}(\lambda) + \sum_{j\neq i} \frac{\varphi_j(\lambda)}{\varphi_i(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_t^{(i)}(\lambda) > 0,
\end{aligned}$$

where the inequality follows from the fact that for all $i, j \in [d]$, $\lambda_j \mapsto u_t^{(i)}(\lambda)$ is strictly increasing by definition. This yields,

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_{t+h}^{(i)}(\lambda) - u_t^{(i)}(\lambda)}{u_h^{(i)}(\lambda) - \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0}\right)^{-1} > 0.$$

Thus $\dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)$ has the same sign as $\dfrac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0} = -\varphi_i(\lambda) < 0$ since $\lambda \in D_\varphi$. In conclusion, it follows from the differential system (S_φ) satisfied by u and φ, for all $\lambda \in D_\varphi$, $t \geq 0$, and $i \in [d]$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda) = -\varphi_i(\mathrm{u}_t(\lambda)) < 0,$$

that is $\mathrm{u}_t(\lambda) \in D_\varphi$ and for all $i \in [d]$, $t \mapsto u_t^{(i)}(\lambda)$ is decreasing.

The last assertion is a consequence of the previous one, but it is also straightforward from (5.17). □

Lemma 5.3.2. *Assume that none of the processes $X^{i,j}$ for $i, j \in [d]$ such that $i \neq j$ is a compound Poisson process. Then either for all $t > 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, or for all $t > 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$.*

Proof. Assume that there exists $t > 0$ such that $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$ for some $i \in [d]$. Let j such that $j \neq i$ and $X^{i,j}$ is not identically equal to 0. Such an index exists since $\mathbf{X}$ is irreducible. Assume moreover that $u_t^{(j)}(\infty) < \infty$. Since $X^{i,j}$ is not a compound Poisson process, φ_j tends to $-\infty$ on the coordinate i. Therefore, since $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$, we have $\varphi_j(\mathrm{u}_t(\infty)) = -\infty$ and this contradicts the fact that $\mathrm{u}_t(\infty) \in \overline{D}_\varphi$ following from Lemma 5.3.1. In other words, for all $j \in [d]$ such that $j \neq i$ and $X^{i,j}$ is not identically equal to 0, $u_t^{(j)}(\infty) = \infty$. By irreducibility, we deduce that for all $j \in [d]$, $u_t^{(j)}(\infty) = \infty$. We have proved that, if there exists $t \geq 0$ and $i \in [d]$ such that $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, then for all $j \in [d]$, $u_t^{(j)}(\infty) < \infty$. Moreover from Lemma 5.3.1, for all $s \geq t$ and $j \in [d]$, $u_s^{(j)}(\infty) < \infty$.

Now let $\tau^{(i)} = \inf\{s \geq 0 : u_s^{(i)}(\infty) < \infty\}$. Thanks to previous arguments, $\tau = \tau^{(i)}$ does not depend on $i \in [d]$. Assume $\tau \in (0, \infty)$. For $0 < s < \tau$ and $\tau - s < t < \tau$, for all $i \in [d]$ and $\lambda \in D_\varphi$,

$$u_{t+s}^{(i)}(\lambda) = u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\lambda)) \underset{\lambda \to +\infty}{\to} u_t^{(i)}(\infty) = \infty\,.$$

We obtain a contradiction since $u_{t+s}^{(i)}(\infty) < \infty$. □

Proof of Proposition 5.2.2: It has already proved in Lemma 5.3.2 that either for all $t \geq 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$ or for all $t \geq 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$. Now recall from (5.17) that $\mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty)\rangle}$. Hence if for all $t \geq 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$ then for all $t \geq 0$ and $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = 0$, so that for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d$, $q_\mathrm{r} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = 0$.

Again from (5.17), if for all $t \geq 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, then for all $t \geq 0$ and r, $\mathbb{P}_\mathrm{r}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty)\rangle} > 0$ and $q_\mathrm{r} \in (0, 1]$. Assume moreover that $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ and let us show that $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{u}_t(\infty) = \mathbf{0}$. Thanks to the semi-group property of $\mathrm{u}_t(\lambda)$, for all $s, t \geq 0$ and $i \in [d]$,

$$u_{t+s}^{(i)}(\infty) \underset{\lambda\to+\infty}{\leftarrow} u_{t+s}^{(i)}(\lambda) = u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\lambda)) \underset{\lambda\to+\infty}{\to} u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\infty))\,. \tag{5.23}$$

Note that from (5.14) and the dominated convergence $\lim_{t\to\infty} \mathrm{u}_t(\lambda) = \mathbf{0}$, for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$. Since by assumption, $\mathrm{u}_s(\infty) \in \mathbb{R}_+^d$, we derive from (5.23) that $\lim_{t\to\infty} u_{t+s}^{(i)}(\infty) = \lim_{t\to\infty} u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\infty)) = 0$. □

5.4 Proof of Theorem 5.2.1

For $i \in [d]$, let us call *the i^{th} diagonal branching process* the continuous state branching process $\tilde{Z}^{(i)}$ which is solution of the one-dimensional Lamperti representation,

$$\tilde{Z}_t^{(i)} = r_i + X^{i,i}\left(\int_0^t \tilde{Z}_s^{(i)} ds\right), \quad t \geq 0. \tag{5.24}$$

Its branching mechanism corresponds to the Laplace exponent $\tilde{\varphi}_i$ of $X^{i,i}$ whose definition is given in (5.18). Then the Laplace exponent $\tilde{u}^{(i)}$ of $\tilde{Z}^{(i)}$ satisfies for all $\alpha \geq 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{u}_t^{(i)}(\alpha) & = -\tilde{\varphi}_i(\tilde{u}_t^{(i)}(\alpha)) \\ \tilde{u}_0^{(i)}(\alpha) & = \alpha. \end{cases}$$

Extinction at a finite time of the i^{th} diagonal CSBP's is characterized through Grey's condition for $\tilde{\varphi}_i$, see $(G_\varphi^{(i)})$ right after (5.18).

Let us start with the proof of part 1. of Theorem 5.2.1. Let φ be the Laplace exponent of some spaLf satisfying $(G_\varphi^{(i)})$, for all $i \in [d]$. We will show that $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, for all $t \geq 0$ and $i \in [d]$ and use Proposition 5.2.2. For this purpose, we need the following series of Lemmas.

We first show that in the case $d = 1$, when the mechanism is a bit more general than the Laplace exponent of a spectrally positive Lévy process, the system (S_φ) still admits a unique solution with nice properties.

Lemma 5.4.1. *Let $s_0 \geq 0$ and $f : [s_0, \infty) \to [0, \infty)$ be some continuous, increasing function such that $f(s_0) = 0$ and $\int_{s_0} ds/f(s) = \infty$. Fix $\delta > s_0$ and let*

$$F(x) = \int_\delta^x \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (s_0, \infty).$$

Set $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$. Then $F : (s_0, \infty) \to (-\infty, F(\infty))$ is a bijection. Let us denote by $F^{-1} : (-\infty, F(\infty)) \to (s_0, \infty)$ its inverse. Then for all $\lambda > s_0$, $u_t(\lambda) = F^{-1}(F(\lambda) - t)$ is the unique solution of the differential equation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_t} u_t(\lambda) = -f(u_t(\lambda)), & t > 0, \\ u_0(\lambda) = \lambda. \end{cases} \tag{5.25}$$

For all $\lambda > s_0$, the function $t \mapsto u_t(\lambda)$ is decreasing and $\lim_{t\to\infty} u_t(\lambda) = s_0$. Moreover, $\lim_{\lambda\to\infty} u_t(\lambda) < \infty$, for all $t \geq 0$ if and only if $\int_\delta^\infty ds/f(s) < \infty$.

Proof. Let $\lambda > s_0$. Then the function $t \mapsto F^{-1}(F(\lambda) - t)$ is clearly differentiable and we readily check that it satisfies (5.25). Uniqueness of the solution is given by integrating the function $t \mapsto -\frac{\partial}{\partial_t} u_t(\lambda)/f(u_t(\lambda))$ through an obvious change of variables allowing us to write

$$\int_{u_t(\lambda)}^\lambda \frac{ds}{f(s)} = t$$

and the expression of u_t follows. □

Let φ_{ij} be the Laplace exponent of the Lévy process $X^{i,j}$, that is

$$\varphi_{ij}(\alpha) = \varphi_j(\alpha \mathrm{e}_i), \quad \alpha \geq 0, \tag{5.26}$$

and note that $\varphi_{ii} = \tilde{\varphi}_i$ according to our previous notation. Then let us consider the following mappings:

$$\bar{\varphi} := \min\{\tilde{\varphi}_i,\, i \in [d]\}, \quad \bar{\bar{\varphi}} = \sum_{i\neq j} \varphi_{ij}, \quad \varphi_i^*(\lambda) = \bar{\varphi}(\lambda_i) + \sum_{j\neq i} \bar{\bar{\varphi}}(\lambda_j).$$

Let $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\} : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d\}$.

Lemma 5.4.2. *For all $\lambda \in \Delta$, the differential system*

$$(\tilde{S}_{\varphi^*}) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v_t^{(j)}(\lambda) &= -\varphi_j^*(\mathrm{v}_t(\lambda)) \\ v_0^{(j)}(\lambda) &= \lambda_j \end{cases}$$

admits as a solution the mapping $t \mapsto \mathrm{v}_t(\lambda)$ given by

$$v_t^{(1)}(\lambda) = \cdots = v_t^{(d)}(\lambda) = F^{-1}(F(\lambda) - t),$$

for all $t \geq 0$, where F is given as in Lemma 5.4.1, with $f(x) = \bar{\varphi} + (d-1)\bar{\bar{\varphi}}$.

Proof. This is a consequence of Lemma 5.4.1 and the fact that for all $\lambda \in \Delta$ and $i, j \in [d]$, $\varphi_i^*(\lambda) = \varphi_j^*(\lambda)$. (Note also that $t \mapsto \mathrm{v}_t(\lambda)$ is the only solution such that $v_t^{(1)}(\lambda) = \cdots = v_t^{(d)}(\lambda)$.) □

Lemma 5.4.3. *For all $j \in [d]$ there exists $i \neq j$ such that $\varphi_{ij} \neq 0$. Moreover, for all $j \in [d]$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

$$\sum_{i=1}^d \varphi_{ij}(\lambda_i) < \varphi_j(\lambda).$$

As a consequence, for all $j \in [d]$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\varphi_j^*(\lambda) < \varphi_j(\lambda).$$

Proof. The first assertion follows from irreducibility. Then by definition,

$$\sum_{i=1}^d \varphi_{ij}(\lambda_i) = -\sum_{i=1}^d a_{i,j}\lambda_i + \int_{\mathbb{R}_+^d} \langle \lambda, \mathrm{x}\rangle 1_{\{|x|<1\}} + \sum_{i=1}^d (e^{-\lambda_i x_i} - 1)\, \pi_j(d\mathrm{x})$$

and the result follows from the inequality, $\sum_{i=1}^d (e^{-\lambda_i x_i} - 1) \le e^{-\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i} - 1$. The last assertion is a consequence the straightforward inequality $\varphi_j^*(\lambda) \le \sum_{i=1}^d \varphi_{ij}(\lambda_i)$, for all $j \in [d]$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. □

Corollary 5.4.1. *For all $\lambda \in \Delta$ and $t \ge 0$, $\mathrm{u}_t(\lambda) \le \mathrm{v}_t(\lambda)$.*

Proof. Fix $\lambda \in \Delta$ and recall that for all $t \ge 0$, $\mathrm{v}_t(\lambda) \in \Delta$. Then

$$\mathrm{u}_0(\lambda) = \mathrm{v}_0(\lambda) = \lambda$$
$$\text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0} = -\varphi_i(\lambda) < -\varphi_i^*(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} v_t^{(i)}(\lambda)|_{t=0},\ i \in [d].$$

Thanks to Taylor's formula, for $t > 0$ small enough, $u_t^{(i)}(\lambda) < v_t^{(i)}(\lambda)$ for all $i \in [d]$.

Let $\tau^{(i)} = \inf\{t > 0 : u_t^{(i)}(\lambda) > v_t^{(i)}(\lambda)\} > 0$ and $\tau = \min_{i\in[d]} \tau^{(i)} > 0$. Assume $\tau < \infty$. By definition of τ and by continuity, there exists at least one $i \in [d]$ such that $u_\tau^{(i)}(\lambda) = v_\tau^{(i)}(\lambda)$ and for all $j \ne i$, $u_\tau^{(j)}(\lambda) \le v_\tau^{(j)}(\lambda)$. Recall from Lemma 5.4.3 that for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$ and $j \in [d]$, $\varphi_j^*(\lambda) < \varphi_j(\lambda)$ and note also that if $k \ne j$, then $\lambda_k \mapsto \varphi_j^*(\lambda)$ non increasing. Let $I = \{i \in [d] : u_\tau^{(i)}(\lambda) = v_\tau^{(i)}(\lambda)\}$, then for all $i \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t^{(i)}(\lambda)|_{t=\tau} = -\varphi_i(\mathrm{u}_\tau(\lambda)) < -\varphi_i^*(\mathrm{u}_\tau(\lambda)) \le -\varphi_i^*(\mathrm{v}_\tau(\lambda)) = \frac{\partial}{\partial t} v_t^{(i)}(\lambda)|_{t=\tau}\,.$$

This implies that for $t > 0$ small enough, $u_{\tau+t}^{(i)}(\lambda) < v_{\tau+t}^{(i)}(\lambda)$ for all $i \in I$ and this refutes the assumption $\tau < \infty$. We conclude that for all $\lambda \in \Delta$, $t \ge 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\lambda) \le v_t^{(i)}(\lambda)$. □

In particular, when λ tends to infinity, we obtain for all $t \ge 0$,

$$\mathrm{u}_t(\infty) = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{u}_t(\lambda) \le \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{v}_t(\lambda) = \mathrm{v}_t(\infty)\,.$$

We are now able to conclude the proof of part 1. of Theorem 5.2.1. Since $(G_\varphi^{(i)})$ are satisfied for all $i \in [d]$, we can check that

$$\int^\infty \frac{ds}{\bar\varphi(s) - (d-1)\bar{\bar\varphi}(s)} < \infty.$$

Indeed, $\lim_{s\to\infty} |\bar{\bar\varphi}(s)|/s$ is bounded by a constant and since $(G_\varphi^{(i)})$ are satisfied, we have $\lim_{s\to\infty} \tilde\varphi_i(s)/s = \infty$, for all $i \in [d]$, so that $\lim_{s\to\infty} \bar\varphi(s)/s = \infty$. Hence the above integral is finite if and only if $\int^\infty \frac{ds}{\bar\varphi(s)} < \infty$. Then note the inequality $\frac{1}{\bar\varphi(s)} \le \max_{i\in[d]} \frac{1}{\tilde\varphi_i(s)} \le \sum_{i\in[d]} \frac{1}{\tilde\varphi_i(s)}$, which is valid whenever $s > 0$ is such that $\tilde\varphi_i(s) > 0$ for all $i \in [d]$. This yields,

$$\int^\infty \frac{ds}{\bar\varphi(s)} < \sum_{i\in[d]} \int^\infty \frac{ds}{\tilde\varphi_i(s)} < \infty\,.$$

From Lemma 5.4.2, $s \mapsto v_t^{(1)}(s\mathbf{1}) = \cdots = v_t^{(d)}(s\mathbf{1})$ is the solution of the differential equation (5.25) in Lemma 5.4.1, with $f(s) = \bar{\varphi}(s) - (d-1)\bar{\tilde{\varphi}}(s)$. Hence from Lemma 5.4.1, $\lim_{s\to\infty} v_t^{(i)}(s\mathbf{1}) < \infty$ for all $t > 0$ and $i \in [d]$. Then as observed in Lemma 5.4.3, $\varphi^*(\lambda) < \varphi(\lambda)$, for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Hence from Corollary 5.4.1, for all $\lambda \in \Delta$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\lambda) \le v_t^{(i)}(\lambda)$, so that $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$, for all $t > 0$ and $i \in [d]$. Then from part (ii) of Proposition 5.2.2, if $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, then $q_{\mathrm{r}} = 1$.

Now assume that $\phi(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$ and let us prove that $q_{\mathrm{r}} = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$. From (5.17) this equality is equivalent to

$$\mathrm{k} = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) := \lim_{s\to\infty} \mathrm{u}_s(\infty) = \phi(\mathbf{0}). \tag{5.27}$$

In order to prove (5.27), we will use the semi-group property. That is for all $i \in [d]$, $s, t \ge 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^d$,

$$u_{t+s}^{(i)}(\lambda) = u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\lambda)). \tag{5.28}$$

Recall that for all $s > 0$, $\mathrm{u}_s(\infty) \in \mathbb{R}_+^d$. Then using the semi-group property (5.28) for $s \ge 0$ large enough and making λ tends to infinity, we obtain by the continuity of $u_t^{(i)}$,

$$u_{t+s}^{(i)}(\infty) = u_t^{(i)}(\mathrm{u}_s(\infty))\,. \tag{5.29}$$

Then recall that from (5.17) the mappings $s \mapsto u_s^{(i)}(\infty)$, $i \in [d]$ are decreasing. Recall also from (5.27) the definition of k. Then from (5.29) and by continuity of $u_t^{(i)}$ again, we obtain when s tends to ∞, for all $i \in [d]$,

$$k^{(i)} = u_t^{(i)}(\mathrm{k})\,. \tag{5.30}$$

Therefore $t \mapsto \mathrm{u}_t(\mathrm{k})$ is constant, so that from (S_φ), $\varphi(\mathrm{k}) = \mathbf{0}$ and hence from part 3. of Theorem 5.1.1, $\mathrm{k} \in \{\mathbf{0}, \phi(\mathbf{0})\}$. Moreover, thanks to Lemma 5.3.1, for all $\lambda \in D_\varphi$ and $t \ge 0$, $\mathrm{u}_t(\lambda) \in D_\varphi$, thus $\mathrm{k} \in \overline{D}_\varphi$. Then observe that $\phi(\mathbf{0})$ is the only solution of the equation $\varphi(\lambda) = \mathbf{0}$ in $\overline{D}_\varphi$, see for instance the beginning of the proof of Theorem 3.4 in [17]. This shows that $\mathrm{k} = \phi(\mathbf{0})$ and we conclude that $q_{\mathrm{r}} = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$. Then note that $q_{\mathrm{r}} \le \mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right)$. We derive from these inequalities and (5.13) in Proposition 5.2.1 that $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$. Since $\{\mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ for some } t > 0\} \subset \left\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0}\right\}$ and these two events have the same probability, we conclude that they are equal, a.s., so that extinction can only occur at a finite time.

Let us now prove part 2. of Theorem 5.2.1. We will show that if one of the diagonal CSBP's becomes extinct at infinity, that is if $(G_\varphi^{(i)})$ does not hold for some $i \in [d]$, then Z also becomes extinct at infinity. Let $i \in [d]$ and first note that since φ_i is non increasing in the variables λ_j, for $j \ne i$, for all $\lambda \in (0,\infty)^d$,

$$\varphi_i(\lambda) \le \varphi_i(\lambda_i \mathrm{e}_i) = \tilde{\varphi}_i(\lambda_i)\,.$$

Take $\lambda \in D_\varphi$ so that from Lemma 5.3.1, $\mathrm{u}_s(\lambda) \in D_\varphi$ and in particular, $\varphi_i(\mathrm{u}_s(\lambda)) > 0$, for all $s \ge 0$. Then we derive from the differential system (S_φ) that for all $s \ge 0$, $\dfrac{\frac{\partial}{\partial s} u_s^{(i)}(\lambda)}{-\varphi_i(\mathrm{u}_s(\lambda))} = 1$, so that integrating over $[0,t]$ and using the above inequality, we obtain for all $t \ge 0$,

$$t = \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} u_s^{(i)}(\lambda)}{-\varphi_i(\mathrm{u}_s(\lambda))} ds \ge \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} u_s^{(i)}(\lambda)}{-\tilde{\varphi}_i(u_s^{(i)}(\lambda))} ds = \int_{u_t^{(i)}(\lambda)}^{\lambda_i} \frac{d\alpha}{\tilde{\varphi}_i(\alpha)}.$$

Since none of the Lévy processes $X^{i,i}$ is a subordinator, $\lim_{s\to\infty} \varphi_i(s\mathbf{1}) = \infty$, for all $i \in [d]$, so that there is $A > 0$ such that for all $s > A$, $s\mathbf{1} \in D_\varphi$. Fix $t > 0$ and make $\lambda = s\mathbf{1}$ tend to infinity. If $u_t^{(i)}(\infty) < \infty$ and if $(G_\varphi^{(i)})$ is not satisfied, then the right hand side of the above inequality tends to ∞, which is a contradiction. Therefore $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$. Thanks to Lemma 5.3.2, we deduce for all $t \ge 0$ and $i \in [d]$, $u_t^{(i)}(\infty) = \infty$. In particular, for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = e^{-\langle \mathrm{r}, \mathrm{u}_t(\infty)\rangle} = 0$. Thus $q_{\mathrm{r}} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{r}}(\mathrm{Z}_t = \mathbf{0}) = 0$ and the MCSBP Z can only become extinct at infinity. If $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

then we derive from (5.14) in Proposition 5.2.1 that Z becomes extinct at infinity almost surely, that is $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ and } \mathrm{Z}_t > \mathbf{0}, \text{ for all } t > 0\right) = 1$, for all $\mathrm{r} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, which proves $2.(i)$ of Theorem 5.2.1. If condition (5.12) is satisfied, then we derive from (5.15) in Proposition 5.2.1 that $\mathbb{P}_{\mathrm{r}}\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t = \mathbf{0} \text{ and } \mathrm{Z}_t > \mathbf{0}, \text{ for all } t > 0\right) = e^{-\langle \mathrm{r}, \phi(\mathbf{0})\rangle}$, which ends the proof of Theorem 5.2.1. □

Conclusion

This second part enables us to prove all the results announced in the first one. We saw that whenever the multi-type results are very similar to the one-type ones, proofs require some precautions.

In the first chapter, we developed the fluctuation theory of spectrally positive additive Lévy fields (spaLf) $\mathbf{X}$. The first difficulty was to define a first hitting time $\mathbf{T}$ of such a field. Then we saw that the fluctuation theory for spaLf differs from the one of spectrally positive Lévy processes (spLP) because the natural order $(\leq, <)$ on $\mathbb{R}_+^d$ is not total anymore and that whenever the value of the spaLf at its first hitting time, $\mathbf{X}_{\mathbf{T}.}$, is completely determined, it is not the case for the matrix field $\mathbb{X}$ associated to the spaLf. This lead us to the study of the couple $(\mathbf{T}, \mathbb{X})$ and a generalisation of the Kemperman identity through image measures.

In the second chapter, we treated a first application of this fluctuation theory for spaLf to the study of the associated continuous multi-type branching process (CMBP) Z. Once again, we saw that a trivial result in one-type case or in discrete state case becomes more complicated in the multi-type case. In order to prove the equality between the first hitting time $\mathbf{T}_{\mathrm{Z}_0}$ and the total "mass" of the population $\int_0^\infty \mathrm{Z}_s ds$, we now needed a condition over the asymptotic convergence of the CMBP. Note that in dimension one, this convergence is satisfied by all CBP but it is still on open question for multi-type cases.

In the last chapter we established a multi-type Grey's condition which is an accumulation of d one-type Grey's condition. The idea of the proof was to compare the solution of differential system (S) leading by some branching mechanisms. It turns out that it was not enough, thus we had to extended these differential systems (S) to a bigger family of function, called *general mechanisms*.

As in dimension one, we saw that the Lamperti representation and the fluctuation theory can once again give some answers to the study of MCBP. Moreover, all the differences and complications encountered during this thesis prove the own interest of the study of spaLf and MCBP.

This work opens other questions. One can dig deeper in the fluctuation theory of spaLf themselves. One can also continue to study asymptotic behaviour of MCBP and perhaps answer to the open question on the convergence condition (2.17).

Bibliographie

[1] R. Abraham, J.-F. Delmas, and H. Guo. Critical multi-type Galton-Watson trees conditioned to be large. *J. of Appl. Probab.*, 31 :757–788, 2018.

[2] K. J. Arrow. A "dynamic" proof of the frobenius-perron theorem for metzler matrices. *Probability, statistics, and mathematics*, pages 17–26, 1989.

[3] K. B. Athreya and P. E. Ney. *Branching processes*. Springer Berlin Heidelberg, 1972.

[4] M. Barczy, Z. Li, and G. Pap. Stochastic differential equation with jumps for multi-type continuous state and continuous time branching processes with immigration. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 12(1) :129–169, 2015.

[5] M. Barczy, S. Palau, and G. Pap. Almost sure l_1 and l_2 growth behavior of supercritical multi-type continuous state and continuous time branching processes with immigration. 2018. arxiv : 1803.10176.

[6] M. Barczy and G. Pap. Asymptotic behavior of critical, irreducible multi-type continuous state and continuous time branching processes with immigration. *Stoch. Dyn.*, 16(4), 2016.

[7] M. Barczy and G. Pap. On convergence properties of infinitesimal generators of scaled multi-type cbi processes. *Lith Math J*, 56 :1–15, 2016.

[8] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge university press, 1996.

[9] J. Bertoin. Subordinators, lévy processes with no negative jumps, and branching processes. *Concentrated Advances Course on Lévy Processes and Branchin processes. MaPhySto*, 2000.

[10] J. Bertoin. The structure of the allelic partition of the total population for Galton-Watson processes with neutral mutations. *Ann. Probab.*, 37(4) :1502–1523, 2009.

[11] M. E. Caballero, A. Lambert, and G. Uribe Bravo. Proof(s) of the lamperti representation of continuous-state branching processes. *Probab. Surv.*, 6 :62–89, 2009.

[12] M. E. Caballero, J. L. Pérez Garmendia, and G. Uribe Bravo. A lamperti-type representation of continuous-state branching processes with immigration. *Ann. Probab.*, 41 :1585–1627, 2013.

[13] M. E. Caballero, J. L. Pérez Garmendia, and G. Uribe Bravo. Affine processes on $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ and multiparameter time changes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 53(3) :1280–1304, 2017.

[14] L. Chaumont. Breadth first search coding of multitype forests with application to lamperti representation. *Séminaire de Probabilités XLVII*, 2015. In Memoriam Marc Yor.

[15] L. Chaumont and R. Liu. Coding multitype forests : application to the law of the total population of branching forest. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(4) :2723–2747, 2016.

[16] L. Chaumont and J. Malecki. Short proofs in extrema of spectrally one sided lévy processes. *Electronic Communications in Probability*, 23(55) :1–12, 2018.

[17] L. Chaumont and M. Marolleau. Fluctuation theory for spectrally positive additive lévy fields. *To be submitted*, 2019.

[18] L. Chaumont and M. Marolleau. Extinction times of multitype, continuous-state branching processes. *Incoming paper*, 2020.

[19] L. Chaumont and M. Marolleau. Stopped the spalf in the d-dimensional lamperti representation. 2020.

[20] R. A. Doney. *Fluctuation theory for Lévy processes.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[21] D. Duffie, D. Filipovic, and W. Schachermayer. Affine processes and applications in finance. *Ann. Appl. Probab.*, 13(3) :984–1053, 2003.

[22] N. Gabrielli and J. Teichmann. Pathwise construction of affine processes. *ArXiv Mathematics e-prints :1412.7837*, 2014.

[23] D. R. Grey. Asymptotic behaviour of continuous time, continuous state-space branching processes. *J. Appl. Probability*, 11 :669–677, 1974.

[24] T. Harris. *The theory of branching processes.* Springer, Berlin, 1963.

[25] P. Jagers and A. Lageras. General branching processes conditioned on extinction are still branching processes. *Electron. Commun. Probab.*, 13 :540–547, 2008.

[26] M. Jiřina. Stochastic branching processes with continuous statespace. *(Russ. Summ.) Czechoslovak. Math. J.*, 8 :292–313, 1958.

[27] J. Kallsen. *A didatic note on affine stochastic volatility models. From stochastics calculus to mathematical finance.* Springer, Berlin, 2006.

[28] D. Kendall. Some problems in the theory of dams. 19 :207–212, 1957.

[29] D. Khoshnevisan and Y. Xiao. Level sets of additive lévy processes. *Ann. Probab.*, 30(1) :62–100, 2002.

[30] T. Kurtz. The optional sampling theorem for martingales indexed by directed sets. *Ann. Probab.*, 8(4) :675–681, 1980.

[31] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, and V. Rivero. *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes.* Lévy Matters II, Springer Lecture Notes in Mathematics, 2013.

[32] A. E. Kyprianou. *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[33] A. E. Kyprianou and S. Palau. Extinction properties of multi-type continuous-state branching processes. *Stoc. Proc. and their Appls*, 2016.

[34] A. E. Kyprianou, S. Palau, and Y.-X. Ren. Almost sure growth of supercritical multi-type continuous state branching process. *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15 :409–428, 2018.

[35] J. Lamperti. Continuous state branching processes. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :382–386, 1967.

[36] J. Lamperti. The limit of a sequence of branching processes. *ZW 7*, pages 271–288, 1967.

[37] J. Lamperti. Limiting distributions for branching processes. *Proc. Fifth Berkeley Sympos. math. Statist. Probability*, 2, 1967.

[38] K.-I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge university presse, 1999.

[39] E. Senata and D. Vere-Jones. On a problem of m.jirina concerning continuous state branching processes. *Czechoslovak Math. J.*, 19(94) :277–283, 1969.

[40] M. Silverstein. A new approach to local times. *J. Math.Mech.*, 17 :1023–1054, 1967.

[41] A. V. Skorohod. *Limit theorems for stochastic processes with independent increments*, volume 2. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 1957.

[42] W. Smith and E. Wilkinson. On branching processes in random environments. *The Annals of Mathematical Statistics*, 40(3) :814–827, 1969.

[43] L. Takács. On combinatorial methods in the theory of stochastic processes. *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1956/66)*, Vol. II : Contributions to Probability Theory, Part 1 :431–447.

[44] S. Watanabe. A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. *JMKU*, 8 :141–167, 1968.

[45] S. Watanabe. On two dimensional markov processes with branching property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136 :447–466, 1969.

[46] V. Zolotarev. The first passage time of a level and the behavior at infinity for a class of processes with independent increments. *Theory Probab. Appl.*, 9(4) :653–662, 1964.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

université angers

Titre : Champs de Lévy additifs spectralement positifs et processus de branchement continus multi-types

Mot clés : champs de Lévy, théorie des fluctuations, processus de branchement continus multi-types, condition de Grey

Résumé : Les processus de branchement (PB) en temps et espaces discrets sont des objets mathématiques introduits dans la deuxième moitié du XIX^e siècle afin d'étudier la potentielle extinction d'une population. Dans les années 1960, J. Lamperti et M. Jiřina étendent ces PB au temps et espace continus (PBC). En 1967, J. Lamperti montre que ces PBC peuvent être représentés à l'aide de processus de Lévy spectralement positif (PLsp). Le comportement asymptotique du PB peut alors être caractérisé par l'exposant de Laplace de ce PLsp, appelé mécanisme de branchement. Ce mécanisme de branchement donne lieu à la condition de Grey permettant de distinguer les extinctions en temps finies de celles à l'infini d'un PBC. Dans ce manuscrit, nous nous tournons vers les PBC multi-types (PBCM) i.e. nous distinguons les individus de la population par un type déterminant leur comportement. A.E. Kyprianou, S. Palau, M. Barczy, G. Pap ont étudiés les asymptotiques de ces PBCM. Néanmoins, il n'y avait pas à ce jour de condition de Grey multi-types. Autrement dit, nous n'étions pas capables de distinguer les extinctions finies et infinies d'un PBCM. Le but de ces travaux de thèse a donc été d'établir une telle condition. Pour ce faire, nous avons utilisés la représentation de Lamperti multi-types représentant le PBCM par un certain champ de Lévy. Dans un premier temps, il nous a donc fallut étudier les fluctuations de ces champs afin de pouvoir étudier leurs temps d'atteinte de niveaux négatifs. Finalement, nous avons pu établir une condition de Grey multi-types caractérisant l'extinction du PBCM en fonction de celles de ses PBC diagonaux.

Title: Spectrally positive additive Lévy fields and multi-types continuous branching processes

Keywords: Lévy fields, fluctuation theory, multi-type continuous branching processes, Grey's condition

Abstract: The discrete time and space branching processes (BP) have been introduced at the end of the XIXth century in order to study the extinction of a population. In the 1960's, J. Lamperi and M. Jiřina generalise this BP to a continuous time and space setting (CBP). In 1967, J. Lamperti shows that the CBP can be represented with a spectrally positive Lévy process (spLp). The asymptotic behaviour of the CBP is characterized by the Laplace exponent of this spLp, called branching mechanism. This branching mechanism enables us to state the Grey's condition which distinguishes the finite and infinite extinction of the CBP. In this thesis, we are interested in the multi-types CBP (MCBP) i.e. an individual bears a type which characterises its behaviour. A.E. Kyprianou, S. Palau, M. Barczy, G. Pap have studied the asymptotics of MCBP. Nevertheless, there was no multi-type Grey's condition. In other words, we could not distinguish finite and infinite extinction in multi-type case. The aim of this works was to establish a multi-type Grey's condition. To this end, we used the Lamperti representation which represents the CMBP with a particular Lévy field. In a first hand, we had to study the fluctuation theory of these fields in order to use its hitting time of negative levels. Finally, we established a multi-type Grey's condition for a MCBP which characterize its extinction in terms of the ones of its diagonal CBP.