



HAL
open science

Sur la TVRC en dynamique transitoire : approche large bande de fréquence et réduction de modèle

Philippe de Brabander

► **To cite this version:**

Philippe de Brabander. Sur la TVRC en dynamique transitoire : approche large bande de fréquence et réduction de modèle. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST068 . tel-03338495

HAL Id: tel-03338495

<https://theses.hal.science/tel-03338495>

Submitted on 8 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la TVRC en dynamique
transitoire : approche large
bande et réduction de modèle
*On VTCR in transient dynamics:
wideband frequency approach and
model reduction*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et
Énergétiques,
MATériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat: Mécanique des solides
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, CNRS, LMT-
Laboratoire de Mécanique et Technologie, 91192, Gif-sur-Yvette, France
Réfèrent: Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay

Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay, le 20 avril 2021, par

Philippe DE BRABANDER

Composition du jury :

Francisco Chinesta Professeur, Arts et Métiers ParisTech (Laboratoire Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux)	Président
Elías Cueto Professeur, Université de Saragosse (Aragon Institute for Engineering Research)	Rapporteur
Emmanuel Perrey-Debain Professeur, Université de Technologie de Compiègne (Laboratoire Roberval)	Rapporteur
Andrea Barbarulo Maître de conférences, CentraleSupélec (Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux)	Examineur
Frédéric Feyel Directeur de Recherche, SafranTech	Examineur
Pascal Hubert Ingénieur, ArianeGroup Les Mureaux	Invité
Pascal Thevenet Ingénieur, ArianeGroup Les Mureaux	Invité
Bernard Vivien DGA	Invité

Direction de la thèse :

Olivier Allix Professeur, Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay (Laboratoire de Mécanique et Technologie)	Directeur de thèse
Pierre Ladevèze Professeur, Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay (Laboratoire de Mécanique et Technologie)	Co-directeur de thèse

A mon père,

*"Merci la Pachamama, la terre-mère comme l'appellent les Indiens d'Amérique du sud, essayons de
préserver sa beauté"*
Valentin

Remerciements

Trois ans et demi avant ma date de soutenance j'ai simultanément débuté deux projets : le premier, ma thèse, et le deuxième, la rénovation avec des amis d'une maison à Villejuif qu'on a appelé "La Barak" ! J'espérais ainsi m'épanouir à tout point de vue ! Une semaine type ressemblait à : la semaine je pars au labo, et le week-end et parfois les soirées, on bricole, on boit une bière et on se fait des pizzas au feu de bois. C'était une sorte de maison bleue où tout le monde est le bienvenu pour bricoler ou chiller. Aujourd'hui je viens de soutenir ma thèse et la Barak est comme neuve avec un étage en plus. Je ne dissocie pas ces deux projets qui correspondent jusqu'à maintenant à la période la plus riche de ma vie. C'était fatiguant mais quelle aventure ! Un énorme merci à ces amis dont on est fier et sans qui ce projet ne se serait pas fait : Florian, mon ami du quotidien avec qui j'ai quasi tout partagé, labo et chantier, Pilou, notre apprenti bricoleur qui a certainement le plus entendu parlé de ma thèse et de mes drôles d'idées, Matthis, notre brasseur, et Hector ce sacré personnage ! Merci à tout ceux qui ont pu s'investir dans ce projet : Benj, toujours enthousiaste pour donner un coup de marteau, Cédric et sa générosité légendaire, Clément, Clara, Greg, Alan, les deux Claire, Elise, Félix, Agathe, Pierre-Jean et Marie, Pierre, Thibault, Florian, Flavien.

Vous l'aurez compris, je ne peux parler de ma thèse sans parler de la Barak. Mais place maintenant à mes compagnons de labo en commençant par mes directeurs de thèse, Olivier et Pierre. Deux chercheurs hors du commun. Merci Olivier pour sa clairvoyance, sa fine connaissance du monde de la recherche, il sait se rendre disponible lorsqu'il le faut. Merci à Pierre pour sa passion, toujours disponible pour parler TVRC et affiner les modèles. J'ai adoré travailler sur la TVRC, une méthode développée par Pierre dans les années 90, merci pour ce beau sujet. Merci à mes encadrants industriels, Pascal Hubert et Pascal Thevenet avec qui j'ai pu mettre en applications mes travaux au sein d'ArianeGroup.

Merci à l'ensemble du jury, et plus particulièrement à mes rapporteurs, pour le soin qu'ils ont porté à la lecture de mon manuscrit et les échanges qui ont eu lieu lors de ma soutenance.

J'ai eu la chance d'être dans un labo où règne une très bonne ambiance entre les doctorants. Merci à toutes ces personnes que j'ai pu côtoyer et qui pour certains sont devenus mes amis : Sebastian, merci pour ces moments à parler de nos thèses et à philosopher, Pierre-Jean et nos balades au rucher, Frisou et nos discussions sur le monde, Jordan, Boubou, Pierre, Richou, Francesco, Ronan, Maxence, Stéphane, Robin, Marie, Charles, Léonard et tant d'autres... Merci à Charles, mon collègue de bureau chez ArianeGroup, pour nos échanges sur les problématiques industrielles.

Merci également à tout ceux qui m'ont aidé pour préparer mon manuscrit et ma soutenance. Merci à mes correctrices : Amélie, Charlotte et Charlotte. Et un grand merci à Amélie pour sa gestion de ma salle virtuelle de soutenance !

Merci à ceux qui m'ont soutenu de loin, mon père pour m'avoir donné le goût de la science, ma mère, ma soeur et mon frère.

Et le mot de la fin est pour Mariama, ma chérie, aux petits soins, surtout pendant les derniers mois.

Table des matières

Introduction	1
1 Problème de référence et principe de l'approche fréquentielle	7
1.1 Problème de référence dans le domaine temporel	8
1.2 Problème de référence dans le domaine fréquentiel	8
1.3 Construction numérique de la réponse temporelle à partir d'une résolution fréquentielle	10
1.3.1 Transformée de Fourier Discrète	10
1.3.2 Erreur de recouvrement spectral et temporel	10
1.3.3 Interpolation de la solution, reconstruction de la réponse continue	12
2 Etat de l'art sur les méthodes de résolutions fréquentielles	15
2.1 Les méthodes de résolution fréquentielles	16
2.1.1 Les méthodes basses fréquences	16
2.1.2 Les méthodes hautes fréquences	19
2.1.3 Les méthodes moyennes fréquences	20
2.1.4 Bilan	23
2.2 Résolution par bandes de fréquences	23
2.2.1 Méthodes par décomposition sur base modale	24
2.2.2 Approximation de Taylor	24
2.2.3 Approximation de Padé	25
2.2.4 Approximation de rang faible	26
2.2.5 Bilan	28
2.3 Conclusion	28
3 La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTCR)	29
3.1 Un bref historique de la VTCR	31
3.2 La méthode VTCR pour l'acoustique 2D	33
3.2.1 Problème de référence homogène à une fréquence	33
3.2.2 Formulation variationnelle VTCR	34
3.2.3 Fonctions de forme et espace discret	35

3.2.4	Problème matriciel	37
3.2.5	Illustration numérique	38
3.3	Convergence de la VTCR	39
3.3.1	Raffinement p et h	39
3.3.2	Critère a priori de convergence	40
3.3.3	Conditionnement et régularisation de la VTCR	42
3.4	Conclusion	44
4	Conditionnement de l'opérateur VTCR - construction de bases optimales	45
4.1	Éléments de compréhension sur l'origine du mauvais conditionnement et stratégies . . .	47
4.1.1	Définition du conditionnement	47
4.1.2	L'origine du mauvais conditionnement de l'opérateur	47
4.1.3	Stratégies de conditionnement de l'opérateur VTCR	49
4.2	Stratégie 1 : Construction d'une base Trefftz orthonormée au sens de l'énergie	49
4.2.1	Base Trefftz orthonormée pour un domaine en forme de disque : un cas analytique	49
4.2.2	Base Trefftz orthonormée pour un domaine quelconque	52
4.2.3	Résolution VTCR avec la base orthonormée	56
4.2.4	Construction d'un portrait régularisé	58
4.2.5	Validation sur un cas complexe	60
4.2.6	Bilan	61
4.3	Stratégie 2 : Approximation quasi-analytique de la base orthogonale par une base de Fourier généralisée adaptée à la géométrie de chaque sous-domaine	63
4.3.1	Énoncé d'un critère sur la discrétisation pour la précision et le conditionnement	63
4.3.2	Une première exploitation du critère sur la discrétisation pour construire une base de rayons optimale	73
4.3.3	Construction d'une base adaptative vérifiant le critère sur la discrétisation : la base de Fourier généralisée	76
4.3.4	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la résolution VTCR	79
4.3.5	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'une base large bande	81
4.3.6	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'un portrait régularisé	83
4.3.7	Validation sur un cas complexe	85
4.3.8	Bilan	86
4.4	Conclusion	86
5	Résolution large bande de fréquences : approche par réduction de modèle PGD	89
5.1	Étude de la réductibilité en moyennes fréquences	92
5.1.1	Construction d'une approximation de rang faible sur une bande de fréquences .	92

5.1.2	Comportement de la décomposition du portrait sur une bande de fréquences . . .	93
5.1.3	Comparaison de la décomposition du portrait et de la décomposition du champ	99
5.1.4	Stratégie de découpage du domaine fréquentiel	100
5.1.5	Etude de la réductibilité des problèmes	101
5.2	Application de la méthode PGD sous sa forme habituelle	105
5.2.1	Mise en œuvre de la méthode	105
5.2.2	Applications numériques	107
5.2.3	Détails sur la construction des opérateurs conditionnés et influence du conditionnement de \mathbb{K}	111
5.3	Développement de stratégies d'actualisation	113
5.3.1	Développement des stratégies	113
5.3.2	Application numérique	114
5.4	Étude des coûts de calcul des différentes stratégies	115
5.4.1	Évaluation des coûts de calcul des algorithmes PGD pour la résolution à large bande de fréquences	115
5.4.2	Illustration des coûts de calcul	116
5.5	Conclusion	118
6	Couplage de la méthode de la fenêtre exponentielle et de la résolution large bande PGD pour la construction de la réponse transitoire sur une durée courte	121
6.1	La méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) couplée à la VTCR	123
6.1.1	Développement de la méthode de la fenêtre exponentielle pour la VTCR	123
6.1.2	Application numérique	125
6.1.3	Une limite pour le choix de α	128
6.2	Couplage de la résolution large bande PGD-VTCR et de la méthode de la fenêtre exponentielle	130
6.2.1	Choix du paramètre α pour un couplage optimal	130
6.2.2	Optimisation de l'algorithme de résolution large bande PGD dans le cadre du couplage VTCR-EWM	133
6.2.3	Application à la propagation d'un choc dans une cavité acoustique	135
6.3	Conclusion	137
7	Une méthode de décomposition de domaine temporel adaptée à la résolution fréquentielle	139
7.1	Développement et illustration de la méthode	142
7.1.1	Description de la méthode	142
7.1.2	Développement de la méthode	143
7.1.3	Gains et choix des paramètres	150
7.1.4	Application de la méthode de décomposition de domaine temporel à l'acoustique 2D	151

7.1.5	Étude des paramètres de la méthode sur la précision	155
7.1.6	Bilan	156
7.2	Application de la méthode de décomposition du domaine temporel pour la résolution moyennes fréquences avec la VTCR	157
7.2.1	Cas particulier à un seul sous-problème temporel	158
7.2.2	Cas général à N_{sd} sous-domaines temporels	163
7.2.3	Une première application numérique	166
7.2.4	Étude des gains en temps de calcul	168
7.2.5	Bilan	175
7.3	Conclusion	176
8	Application industrielle : identification du choc issu de la découpe pyrotechnique	179
8.1	Présentation de l'essai	181
8.2	Première analyse des mesures	182
8.2.1	Analyse des jauges de déformation	183
8.2.2	Analyse des accéléromètres	184
8.3	Identification du choc à la source	186
8.3.1	Les différentes stratégies d'identification	186
8.3.2	Modèle de la source	187
8.3.3	Modèle numérique de la plaque	188
8.3.4	Méthode de la déconvolution	190
8.3.5	Identification de la source : application numérique	192
8.3.6	Réponse de la plaque soumise à la source identifiée	197
8.4	Identification de l'amortissement	199
8.4.1	La Transient Statistical Energy Analysis appliquée à l'essai	200
8.4.2	Diagramme temps-fréquences	201
8.4.3	Identification de l'amortissement	202
8.5	Conclusion	203
	Conclusion et perspectives	205
	Annexe A : Notions sur les matrices de Toeplitz	219
	Annexe B : Couplage spatial entre la VTCR et la MEF	221

Table des figures

1	Définition des périodes temporelles, en haut la réponse en un point d'une structure soumise à un signal choc ; au milieu des zooms sur les différentes périodes ; en bas les champs spatiaux associés à différents instants. L'image est issue de modèles numériques développés dans le manuscrit.	2
2	Définition des gammes des basses, moyennes et hautes fréquences. En haut la réponse énergétique d'une structure soumise à un signal choc, au milieu des zooms sur les différentes gammes, en bas les champs spatiaux associés à différentes fréquences. L'image est issue de modèles numériques développés dans le manuscrit.	4
3.1	Problème de référence.	34
3.2	En haut, les portraits d'amplitude $a_{nE}(\theta)$ des différentes fonctions de forme, en bas les champs de pression des fonctions de forme, soit la fonction de Herglotz associée aux portraits, pour chacune des bases de fonctions de forme.	37
3.3	Définition du problème.	38
3.4	Résolution VTCR du problème 3.3.	39
3.5	Convergence p et h en fonction du nombre de degrés de liberté VTCR et comparaison avec les EFs. Exemple d'une cavité acoustique 2D carrée [135].	40
3.6	Illustration du critère heuristique de convergence sur les exemples de raffinement p [135]. Le nombre total de fonctions de forme donné par le critère est égale à 84 (1 sous-domaine) et 134 ($= 2 \times 67$ pour 2 sous-domaines).	41
3.7	Valeur absolue du champ de pression, résolution d'un problème à géométrie concave avec un seul sous-domaine (à gauche) et deux sous-domaines (à droite) découpés horizontalement afin d'avoir deux sous-domaines convexes.	42
3.8	Conditionnement de l'opérateur VTCR en fonction du nombre d'ondes planes sur un exemple de plaque en flexion [2].	42
4.1	Valeurs singulières de la matrice \mathbb{K} pour différents nombres de fonctions de forme.	47
4.2	Portraits (en haut) et valeur absolue du champ en Pascal (en bas) associé à la plus petite (à gauche) et à la plus grande (à droite) valeur singulière de la matrice \mathbb{K}	48
4.3	Valeurs propres v_n pour une cavité en forme de disque, construction analytique.	52

4.4	Fonctions de forme $\tilde{\phi}_n$ et portraits $\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{v_n}}$ orthonormés en énergie dans le cas d'une cavité en forme de disque, construction analytique.	52
4.5	Valeurs propres v_n d'une cavité rectangulaire, construction numérique.	54
4.6	Portrait $\frac{\tilde{a}_n}{\sqrt{v_n}}$ et fonctions de forme $\tilde{\phi}$ de la base orthonormée en énergie d'une cavité rectangulaire, construction numérique.	55
4.7	Conditionnement et erreur en fonction du nombre de fonctions de forme avec l'opérateur préconditionné et l'opérateur classique.	57
4.8	Conditionnement de $\tilde{\mathbb{K}}$ en fonction de la fréquence pour différents amortissements avec 95 fonctions de forme. En rouge le cas à $\eta = 0.001$ traité figure 4.7.	58
4.9	Partie réelle du champ de pression (à gauche), valeur absolue du portrait classique (au milieu) et valeur absolue du portrait régularisé (à droite).	60
4.10	Champ solution en Pa (à gauche) et portraits effectifs en \sqrt{J} (à droite) pour le problème défini partie 3.2.5.	61
4.11	Pinceau de rayons.	64
4.12	Illustration de la fonction $\int_{x \in I_x(y)} dx = k\Delta\theta X$ sur un sous domaine rectangulaire.	67
4.13	Conditionnement de \mathbb{M} en fonction du nombre de rayons dans le pinceau.	70
4.14	Erreur en fonction du nombre de rayons dans le pinceau.	71
4.15	Cavité acoustique en forme de trapèze élané et fréquence de discrétisation $f_{\theta \text{ crit}}$ correspondante à 8000 Hz.	71
4.16	Éléments de compréhension du comportement du conditionnement de la VTCR et de la précision sur un exemple de domaine élané.	72
4.17	Schéma de l'application de la formule de Cauchy-Crofton pour la démonstration de l'égalité 4.59.	74
4.18	Convergence de la VTCR avec une base de rayons dont le pas de discrétisation est proportionnel à θ_{crit}	75
4.19	Partie réelle du champ des fonctions de forme de la base de Fourier généralisée (à gauche) pour la géométrie en trapèze élané à 2000 Hz et leur portrait (à droite).	78
4.20	Valeur absolue du champ de la fonction de forme $\phi_{N_{\text{crit}}/4}$ de la base de Fourier généralisée pour la géométrie en trapèze élané à 8000 Hz.	79
4.21	Différentes géométries pour tester la base de Fourier généralisée.	80
4.22	Erreur (courbes en 'x') et conditionnement (courbes en '.') avec la base de Fourier généralisée pour différentes géométries et différentes fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme autour de N_{crit}	80
4.23	Erreur et conditionnement avec la base de Fourier généralisée en fonction de la fréquence relative par rapport à une fréquence centrale de 2000 Hz et 8000 Hz pour une géométrie en trapèze et en coude.	83
4.24	Champ de pression et portraits régularisés issus des différentes méthodes.	84
5.1	Géométrie des cavités traitées.	93

5.2	Energie en fonction de la fréquence dans les cavités pour différents amortissements η .	94
5.3	Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$.	95
5.4	Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$.	95
5.5	Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-2}$.	96
5.6	Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-2}$.	97
5.7	Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$.	98
5.8	Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$.	98
5.9	Nombre de modes nécessaires pour atteindre une erreur inférieure à 5% en fonction de la largeur de bande.	99
5.10	Gain G_{SVD} d'un problème avec une géométrie en trapèze (en haut), énergie en fonction de la fréquence (au milieu) et les énergies sur les bandes de fréquences pouvant être traduites avec 10 modes à 5% d'erreur (en bas).	102
5.11	Gain de la réduction pour une largeur de bande telle que l'erreur soit de 5% avec 10 modes pour les géométries en trapèze avec $\eta = 10^{-2}$ et 10^{-3} et 5 modes pour la géométrie carrée avec $\eta = 10^{-3}$.	104
5.12	Énergie des approximations PGD.	109
5.13	Erreur en fonction du nombre de modes des approximations PGD stratégies 1 et 2.	110
5.14	Convergence de l'algorithme PGD stratégie 1 (algorithme Glouton) pour différents b_{max} .	111
5.15	Influence du conditionnement de l'opérateur \mathbb{K} de la plus grande fréquence de la bande sur la convergence de l'algorithme PGD à 10 modes.	112
5.16	Erreur en fonction du nombre de modes des approximations PGD stratégies 1, 2, 3 et 4.	115
5.17	Illustration des coûts de calcul relatifs des différentes stratégies en fonction du nombre de modes PGD.	117
6.1	Géométrie du problème en trapèze.	125
6.2	Signal d'entrée $p_{td}(t, y = 1/2)$ dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).	126
6.3	Énergie de la solution $p_{\alpha\omega}$ dans le domaine fréquentiel modifié en fonction de la fréquence pour différents α .	127
6.4	Champ de référence (en haut) et différence entre le champ de référence et les champs construits avec l'EWM (en bas) au point $\mathbf{x} = (x, y) = (0.68\text{m}, 0.48\text{m})$.	127
6.5	Temps de décollement T_{lim} à partir duquel la solution décroche pour différents pas de discrétisation en fonction de α .	129
6.6	Impact du paramètre α sur la convergence de la solution PGD.	131
6.7	Champ de référence (à gauche), champ PGD (au milieu) et différence des deux champs (à droite) pour le cas $\alpha = 170 \text{ rad.s}^{-1}$.	132

6.8	Impact du nombre de modes M par bande fréquentielle sur la convergence de la solution PGD.	133
6.9	Solutions PGD avec 14 modes par bande de fréquences : stratégie 3 pour toutes les bandes (en jaune), stratégie 3 pour la première bande et stratégie de recyclage 1 (en bleu) ou 2 (en rouge).	134
6.10	Signal source triangulaire décomposé en partie basses et partie hautes fréquences.	135
6.11	Géométrie en forme de coude du problème traité.	135
6.12	Réponse d'une cavité acoustique en forme de coude, soumise à un choc. Les basses fréquences sont simulées avec la MEF et les hautes fréquences sont simulées avec la VTCR couplée à l'EWM et à la PGD.	137
7.1	Schéma de la méthode de décomposition de domaine temporel (DDT).	142
7.2	Solution \tilde{u}^1 dans le cas d'un problème masse-ressort.	144
7.3	Solution homogène \tilde{u}^2 dans le cas du problème masse-ressort.	145
7.4	Solutions homogènes \tilde{u}^n des sous-domaines temporels 1, 2 et 3 et la somme de toutes les solutions \tilde{u}^n dans le cas du problème masse-ressort.	146
7.5	Les différentes itérations u_m^1 de la résolution du premier sous-domaine.	149
7.6	En haut, la solution de référence u_{refe} et la solution reconstruite $u = \sum_{N=1}^{N_{sd}} \tilde{u}^N$ du problème masse-ressort sur tout l'intervalle temporel I_T (à gauche) et un zoom sur un petit intervalle (à droite). En bas, la solution u_{refe} et la solution $u = \sum_{N=1}^{N_{sd}} \tilde{u}^N$ dans le domaine fréquentiel et les fréquences de résolution des sous-domaines illustrées sur une large bande de fréquences (à gauche) et un zoom autour de la fréquence de résonance (à droite).	150
7.7	Géométrie de la cavité acoustique traitée par FEM.	152
7.8	Source temporelle (en haut) et fréquentielle (en bas).	153
7.9	Réponse temporelle de la cavité acoustique 7.7 au point $\mathbf{x} = (x, y) = (0.7, 0.7)$ m calculée avec la méthode de décomposition du domaine temporel (en rouge), la réponse de référence (en noir) et les frontières des intervalles I_{TN} (en gris). Sur l'ensemble de l'intervalle temporel I_T (à gauche) et zoom (à droite).	154
7.10	Les solutions $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3$ et la solution u issue de la somme des \tilde{u}^n , à différents instants.	154
7.11	Réponse fréquentielle calculée avec la DDT (en rouge), réponse de référence calculée fréquence par fréquence dans le domaine fréquentiel (en noir) et points fréquentiels de construction et d'inversion des opérateurs nécessaires à la résolution par la DDT. Sur l'intervalle fréquentiel [800, 1200] Hz (à gauche) et zoom (à droite).	155
7.12	Géométrie du problème traité (à gauche) et décomposition spatiale en sous-domaines VTCR (à droite).	161
7.13	Convergence de la méthode de décomposition de domaine spatial du problème illustré figure 7.12, résolution avec la VTCR.	162

7.14	La partie réelle du champ fréquentiel p de référence calculée avec la VTCR (à gauche), du champ issu de la décomposition de domaine à 700 itérations (au milieu) et de la différence entre les deux champs (à droite). Attention à l'échelle des couleurs qui est propre à chaque figure.	162
7.15	Champ fréquentiel à différentes itérations du problème de décomposition de domaine spatial (itérations 1, 2 et 3).	162
7.16	Influence de l'amortissement (à $f = 2500$ Hz) et de la fréquence (à $\eta = 10^{-3}$) sur le taux de convergence de la méthode de décomposition du domaine spatial. A titre indicatif, l'erreur du cas $\eta = 10^{-4}$ et $f = 2500$ Hz à 5000 itérations vaut $\epsilon_\omega = 0.034\%$	163
7.17	Partie réelle du champ de pression à différents instants : à gauche le champ de référence issu de la résolution VTCR classique, au milieu le champ issu de la résolution DDT avec la VTCR à 4 sous-domaines VTCR et à droite la différence entre les deux champs.	167
7.18	Réponse fréquentielle calculée avec la DDT et avec la VTCR (en rouge), réponse de référence calculée avec la VTCR (en noir) et points fréquentiels de construction et d'inversion des opérateurs nécessaire à la résolution par DDT.	168
7.19	Gain théorique de la méthode DDT avec $\frac{\delta f}{\delta f} = 100$ et $n_{iter} = 2000$ pour 1 sous-domaine, $n_{iter} = 4000$ pour 4 sous-domaines et $n_{iter} = 8000$ pour 16 sous-domaines, en fonction du nombre de degrés de liberté N_θ . Le coefficient derrière le O est supposé égal à 1.	169
7.20	Différentes discrétisations VTCR traitées pour l'évaluation des gains en coûts de calcul.	171
7.21	Gains de la méthode DDT avec et sans initialisations issues de l'EWM (en haut) et répartition des coûts de calcul sans initialisations (en bas à gauche) et avec initialisations (en bas à droite).	173
7.22	Gains de la méthode DDT avec un nombre d'itérations b_{max} par sous-domaine temporel égal à 5 (trait pointillé) et gain avec $c_{lim} = 0.01$ (cas précédent, trait plein), cas à 4 sous-domaines VTCR.	174
7.23	Gains de la méthode DDT avec et sans initialisation issue de l'EWM (en haut) et répartition des coûts de calcul sans l'initialisation (en bas à gauche) et avec l'initialisation (en bas à droite).	175
8.1	Schéma de l'essai de la campagne C4.	182
8.2	Premiers fronts d'ondes issus de la découpe pyrotechnique.	183
8.3	A gauche, les mesures de la jauge 16, éloignée de la découpe. A droite, les mesures de la jauge 38, proche de la découpe.	184
8.4	En haut les mesures des accéléromètres superposées aux temps de parcours, en bas les vitesses issues de l'intégration dans le temps des accéléromètres, pour l'accéléromètre A0 à gauche et pour l'accéléromètre A3 à droite.	186
8.5	Schéma du système de découpe, coupe suivant le plan (y, z)	187

8.6	L-curve permettant la détermination de γ_1 pour l'identification de l'effort dans le plan. En abscisse le résidu $\sqrt{\sum_{m=1}^M c_m \ x_{mes}^m - h_{test}^m \star s_{iden}\ _m^2}$ et en ordonnée $\sqrt{\int_0^T \left(\frac{d^2 s_{iden}}{dt^2}\right)^2 dt}$ pour différents choix de γ_1	193
8.7	Effort dans le plan identifié, dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).	193
8.8	Mesure réelle et identifiée de l'accéléromètre A3.	194
8.9	Mesures réelles et identifiées des demi-sommes des jauges de déformation.	194
8.10	Effort hors plan identifié, dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).	196
8.11	Mesures réelles et identifiées des demi-différences des jauges de déformation.	197
8.12	Réponse membranaire de la plaque soumise au signal identifié. Champ de déplacement et champ de déformation ε_{yy} (en $\mu\text{m/m}$). L'échelle du champ de déplacement n'est pas respectée. Rappel : les dimensions de la plaque sont de 1 m par 2 m.	198
8.13	Déformée suivant y de la plaque au niveau du cordeau.	199
8.14	Réponse en flexion de la plaque soumise au signal identifié, la grandeur $\frac{\partial w}{\partial y}$ est illustrée à différents instants.	199
8.15	Diagrammes temps-fréquences obtenus avec la transformée de Gabor, moyenne du carré des demi-sommes (à gauche) et des demi-différences (à droite).	202
8.16	Logarithme des fonctions $w(t, \langle \omega \rangle)$ pour différentes fréquences $\langle \omega \rangle$ et leur régression linéaire.	202
8.17	Amortissement identifié en fonction de la fréquence.	203

Liste des tableaux

4.1	Conditionnement et erreur avec les différentes bases.	60
4.2	Convergence et conditionnement avec la base de Fourier généralisée pour un nombre de fonctions de forme égal à $N_{crit} + 5$	81
4.3	Convergence et conditionnement avec la base de Fourier généralisée pour un nombre de fonctions de forme égal à $N_{crit} + 5$	85
6.1	Erreur de l'EWM couplée à la VTCR pour les différents paramètres α	128
6.2	Pas de discrétisation fréquentiel pour l'étude de la limite de α , figure 6.5.	129
7.1	Données du problème masse-ressort.	143
7.2	Données de la méthode DDT pour le problème traité par éléments finis.	153
7.3	Erreur et nombre moyen d'itérations par sous-problème de la résolution par point fixe pour $\Delta T_{Han} = 1ms$, (en gras les résultats du problème traité partie précédente).	156
7.4	Erreur ε et nombre moyen d'itérations par sous-problème de la résolution par point fixe $\langle b \rangle$ pour $\Delta T_{Han} = 2ms$	156
7.5	Données de la DDT appliquée à la VTCR.	166
7.6	Temps CPU des différentes étapes pour la méthode DDT et pour la méthode de référence.	170
7.7	Données des problèmes traités pour l'évaluation des gains en temps de calcul. $\langle b \rangle$ est le nombre d'itérations moyen : $\langle b \rangle = \frac{n_{iter}}{N_{sd}}$	171
7.8	Paramètres de la méthode de décomposition de domaine des problèmes traités pour l'évaluation des gains en temps de calcul.	172
8.1	Célérité des différentes ondes dans la plaque d'aluminium.	183
8.2	Temps d'arrivée théoriques des différents fronts d'ondes.	183
8.3	Paramètres de l'identification de l'effort dans le plan.	192
8.4	Erreur entre mesures identifiées et mesures réelles de l'identification dans le plan.	195
8.5	Paramètres de l'identification de l'effort hors plan.	195
8.6	Erreur entre mesures identifiées et mesures réelles de l'identification hors plan.	196

Introduction

Les capacités informatiques grandissantes et la baisse des prix du matériel qui lui est associé sont amplement exploitées par l'industrie dans une très large palette de domaines. Les outils numériques développés deviennent indispensables à la conception. Ils permettent d'obtenir des données habituellement inaccessibles par les mesures et permettent d'effectuer des essais virtuels rapidement. Ainsi, ils complètent les essais réels, souvent plus fastidieux, pour un développement plus rapide et plus fiable. Certaines applications restent néanmoins hors de portée des simulations numériques et les améliorations dans ces domaines sont de véritables atouts. C'est le cas notamment de certains problèmes de dynamique de propagation d'onde du type choc dans de grandes structures comme les lanceurs spatiaux.

Les lanceurs spatiaux Ariane 5 et 6 sont composés de plusieurs tronçons qui se séparent au cours des différentes phases de vol, via une découpe pyrotechnique, jusqu'à la mise en orbite du matériel embarqué. Ce procédé est considéré comme étant extrêmement fiable mais génère des vibrations qui peuvent potentiellement endommager le matériel. Maîtriser les accélérations subies à la suite de la découpe est un véritable besoin industriel qui n'est actuellement pas amplement satisfait par les outils numériques à disposition.

La difficulté ne réside pas dans la complexité des modèles physiques mais dans leur résolution. Les problèmes de propagation de choc nécessitent de considérer la structure dans ses détails et de considérer la propagation de très petites longueurs d'onde dans une structure qui est grande. Les modèles numériques associés sont de très grandes tailles et donc coûteux en mémoire et en temps de calcul. Un essai numérique récent sur une structure similaire effectué avec le logiciel LS-dyna a permis de simuler la propagation d'une onde jusqu'à un contenu fréquentiel de 3 kHz, ce qui est loin des 10 kHz idéalement exigés par ArianeGroup.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement d'outils permettant de réduire les coûts de calculs de propagations d'onde du type choc afin de traiter les gammes fréquentielles actuellement hors de portée.

La réponse dynamique typique d'une structure soumise à un choc se décompose en plusieurs périodes caractéristiques (figure 1) : du régime transitoire court, où le champ est concentré sur quelques fronts d'ondes, au régime transitoire long, où les hautes et moyennes fréquences se sont amorties et que le champ est devenu diffus. C'est dans le régime transitoire court que le matériel embarqué dans les lanceurs subit les plus fortes accélérations, il s'agit de simuler finement cette période temporelle.

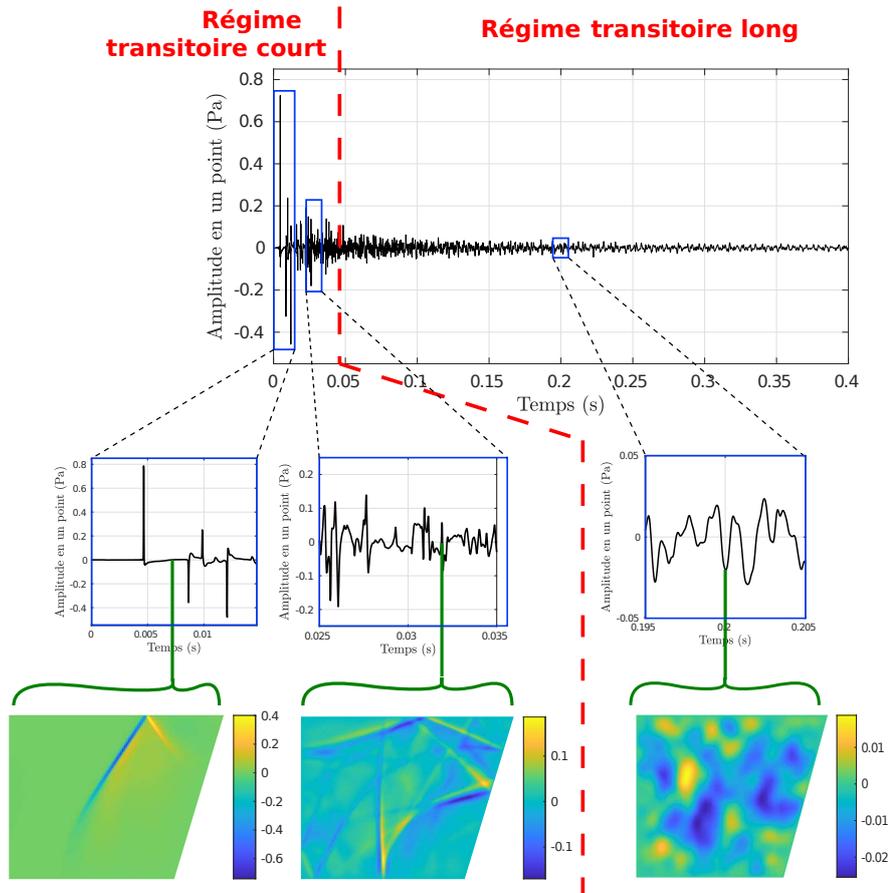


FIGURE 1 Définition des périodes temporelles, en haut la réponse en un point d'une structure soumise à un signal choc ; au milieu des zooms sur les différentes périodes ; en bas les champs spatiaux associés à différents instants. L'image est issue de modèles numériques développés dans le manuscrit.

Les méthodes de résolution incrémentales sont classiquement utilisées pour résoudre numériquement ce type de problème, linéaire ou non linéaire. Elles consistent à construire, pas de temps après pas de temps, la réponse en tout point de l'espace. Bien que très efficaces elles ne sont, actuellement, pas suffisamment performantes pour traiter les problèmes visés.

Pour tenter de pallier à cette limite, l'approche adoptée ici consiste à traiter le problème dans le domaine fréquentiel en appliquant une transformée de Fourier aux équations. Les problèmes à chaque fréquence peuvent être traités indépendamment contrairement au domaine temporel où une résolution incrémentale est nécessaire. Ainsi une méthode adaptée à chaque gamme fréquentielle peut être utilisée (figure 2) :

- Dans la gamme des basses fréquences, l'énergie vient se concentrer en quelques fréquences bien distinctes appelées fréquences propres. A ces fréquences le champ est décrit par ce qui est appelé les modes propres de vibration. La longueur d'onde associée est relativement élevée et vaut globalement de 1 à $\frac{1}{10}$ fois la longueur caractéristique de la structure. Les méthodes de

résolution numérique de type éléments finis (FEM) [159] y sont très adaptées et bien établies. A chaque fréquence du problème, le champ est déterminé à chaque nœud du maillage.

- Lorsque la fréquence augmente la densité de mode, appelée densité modale, et l'étalement des modes augmentent ce qui induit une augmentation du recouvrement modal. Il s'agit de la gamme des moyennes fréquences. La longueur d'onde associée est relativement faible et est globalement comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$ fois la longueur caractéristique de la structure. Le pas spatial de discrétisation des FEM étant au premier ordre proportionnel à la longueur d'onde, le nombre de degrés de liberté augmente rapidement avec la fréquence. A cette tendance s'ajoutent les erreurs de pollution [44] qui deviennent prédominantes lorsque la fréquence augmente. Cela rend ces problèmes inaccessibles par les méthodes du type FEM. Dans cette gamme de fréquences, des méthodes spécifiques plus complexes telles les méthodes Trefftz [73] y sont développées. Il s'agit entre autres de méthodes où les fonctions de forme sont des ondes, elles permettent de résoudre les problèmes à une fréquence donnée avec un nombre de degrés de liberté spatiaux drastiquement réduit.
- Dans la gamme des hautes fréquences la densité modale et le recouvrement modal deviennent tellement importants que la réponse énergétique est relativement lisse. La réponse spatiale n'en est pas moins complexe. La longueur d'onde associée est très courte, supérieure à $\frac{1}{1000}$ fois la longueur caractéristique de la structure. Ainsi chaque détail ou hétérogénéité diffuse les ondes et influe sur la réponse de la structure. Les méthodes moyennes fréquences n'y sont pas adaptées. Déterminer le champ en chaque point n'a par ailleurs que peu de sens du fait de la très forte sensibilité de la solution à chaque détail de la structure. Les méthodes qui y sont développées, comme la Statistical Energy Analysis (SEA) [109], consistent généralement à déterminer l'énergie en moyenne par zone dans la structure plutôt qu'à déterminer le champ de manière déterministe.

Les gammes des moyennes et hautes fréquences représentent une part d'énergie plutôt faible. Elles ne sont pas à sous-estimer pour autant, car ce sont ces fréquences qui, après l'application d'une transformée de Fourier inverse, contribuent majoritairement à la représentation des fronts d'ondes dans le régime transitoire court. Néanmoins la gamme des hautes fréquences est rapidement amortie dans la structure, elle sera négligée dans ces travaux.

Dans ces travaux, nous reprenons la stratégie proposée dans [31], soit une résolution des basses fréquences avec la FEM et des moyennes fréquences avec une méthode Trefftz : la Variational Theory of Complex Rays (VTCR) [92]. L'efficacité de cette stratégie pour traiter des problèmes de dynamique transitoire, et son avantage par rapport aux méthodes incrémentales, a été montrée dans [31].

La méthode VTCR utilise des fonctions de forme qui vérifient l'équation intérieure, soit des ondes planes et des ondes évanescents et définit l'équilibre entre les sous-domaines à travers une formulation variationnelle. Elle a été appliquée à l'acoustique 2D [85] et 3D [86], aux assemblages de plaques [93] et de coques [134, 133, 25], aux problèmes orthotropes [87] et inhomogènes [104]. Plus concrètement, la VTCR a été appliquée à la simulation des vibrations moyennes fréquences de la partie supérieure du lanceur Ariane 5 d'ArianeGroup à travers le développement du logiciel TAPYROSS (Transient Analysis

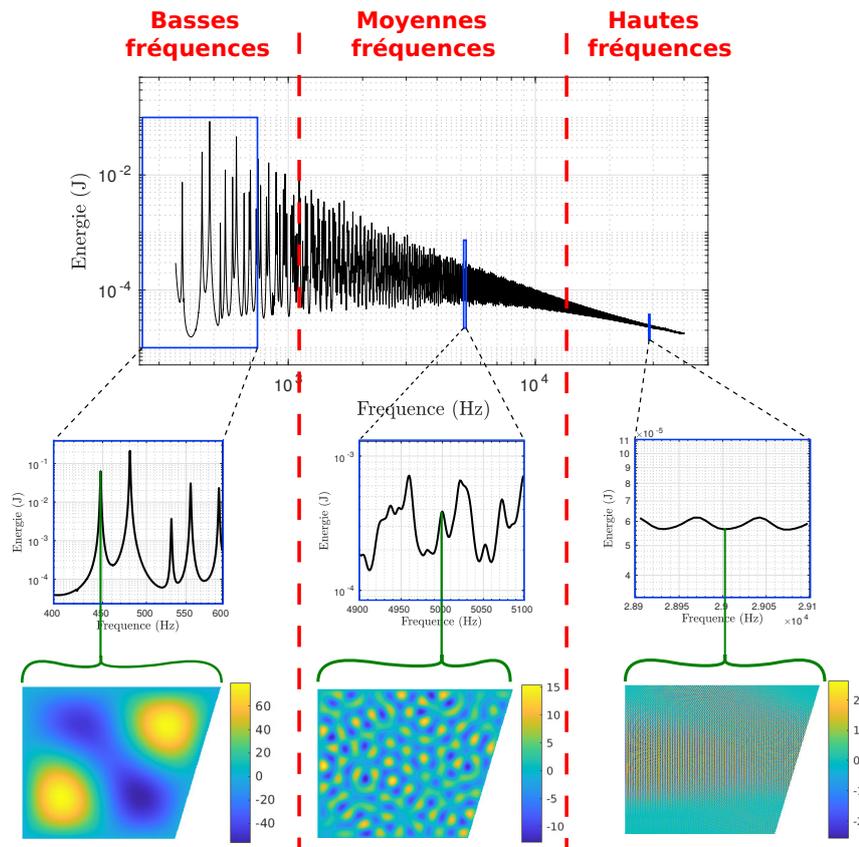


FIGURE 2 Définition des gammes des basses, moyennes et hautes fréquences. En haut la réponse énergétique d'une structure soumise à un signal choc, au milieu des zooms sur les différentes gammes, en bas les champs spatiaux associés à différentes fréquences. L'image est issue de modèles numériques développés dans le manuscrit.

for PYROtechnic Shocks in Shells) dans [2]. Ces nombreux développements ont rendu cette méthode robuste et industriellement mature.

Résoudre les gammes des basses et moyennes fréquences de problèmes de grande taille avec ces méthodes adaptées reste coûteux numériquement car la réponse doit être calculée en chaque fréquence. Le point-clé réside dans l'application de méthodes de résolution large bande. La littérature propose différentes méthodes : bases modales, méthodes Padé [48], méthodes de réduction de modèle [72, 8]. Leur efficacité a été prouvée lorsque la densité modale est faible, soit dans la gamme des basses fréquences. Elles semblent néanmoins limitées lorsque la densité modale augmente. De plus elles ne sont pas nécessairement adaptées aux méthodes Trefftz qui sont privilégiées pour traiter la gamme des moyennes fréquences.

Il s'agit dans ces travaux de proposer des méthodes de résolution large bande de fréquences adaptées aux méthodes Trefftz, comme la VTCR, pour réduire les coûts de construction de la réponse fréquentielle dans la gamme des moyennes fréquences, en vue de la reconstruction de la réponse temporelle.

Actuellement, comme de nombreuses méthodes Trefftz, la VTCR souffre de mauvais conditionnement. Le champ solution converge lorsque le nombre de degrés de liberté augmente mais la variable VTCR qui le représente, soit l'amplitude des fonctions de forme, diverge. Cette caractéristique bride l'efficacité des approches de résolution large bande envisagées, et plus largement elle empêche l'utilisation de nombreuses méthodes de résolution. Il s'agit d'un premier verrou à débloquent qui sera traité dans le chapitre 4. L'origine du mauvais conditionnement y sera étudiée en détail ce qui permettra d'établir des critères de discrétisation plus précis que les critères heuristiques actuels [47]. Par ailleurs de nouvelles bases de fonctions de forme Trefftz optimales au sens du conditionnement de l'opérateur Trefftz seront proposées.

Pour résoudre le problème sur une large bande de fréquences, les auteurs de [8] ont proposé de coupler la VTCR à la méthode de réduction de modèle PGD (Proper Generalized Decomposition). Plutôt que de rechercher la solution fréquence par fréquence, une approximation de la solution est recherchée sous forme d'une somme de produits de fonction à variables séparées par bande de fréquences. Ces travaux seront repris, dans le chapitre 5. Il s'agit d'étudier les limites et tout le potentiel de la méthode afin de quantifier son efficacité dans la gamme des moyennes fréquences visée. L'algorithme PGD appliqué à la VTCR est connu pour converger par pallier, des améliorations seront proposées pour corriger cet artefact et améliorer grandement la vitesse de convergence.

Une fois le problème traité en fréquence, il s'agira dans le chapitre 6 de traiter efficacement la reconstruction de la réponse temporelle. Lorsqu'il s'agit de reconstruire la réponse seulement sur des durées courtes tels les premiers instants du régime transitoire, la méthode de la fenêtre exponentielle (Exponential Window Method, EWM [69]) permet de réduire drastiquement les coûts de calcul par rapport à l'approche fréquence par fréquence classique. Elle sera couplée à la VTCR pour apporter une première source de réduction des coûts pour la reconstruction de la réponse transitoire court. Puis un second gain sera envisagé en effectuant la résolution fréquentielle avec les outils de résolution large bande développés dans le chapitre 5.

Les méthodes développées s'avèreront efficaces lorsqu'il s'agira de reconstruire la réponse sur des temps courts. Néanmoins la gamme des problèmes associés à des durées plus longues demeurera coûteuse. Au vu de ces limites, dans le chapitre 7 une tout autre approche sera également proposée pour répondre à la problématique : une nouvelle méthode de décomposition de domaine temporel avec recouvrement. Elle sera élaborée de façon à exploiter de manière optimale les méthodes de résolution fréquentielles telle les méthodes Trefftz. Son point fort réside dans le fait que les gains qu'elle apporte sont indépendants de la densité modale, ce qui la rend particulièrement adaptée à la gamme des moyennes fréquences.

Enfin, dans le dernier chapitre 8, les méthodes développées seront appliquées à des problématiques industrielles associées aux lanceurs Ariane d'ArianeGroup. Un problème inverse d'identification du signal choc d'une découpe pyrotechnique sera traité.

La thèse se compose de 8 chapitres, 3 chapitres introductifs et bibliographiques, 4 chapitres de développement des travaux de thèse et 1 chapitre d'application industrielle des travaux :

- Chapitre 1 : définition du problème de référence dans le domaine temporel et fréquentiel et définition des outils associés au passage d'un domaine à l'autre.
- Chapitre 2 : étude de l'état de l'art sur les méthodes de résolution fréquentielle en fonction de la gamme de fréquences et sur les méthodes de résolution large bandes de fréquences.
- Chapitre 3 : description de la Variational Theorie of Complex Rays (VTCR).
- Chapitre 4 : développement d'outils de régularisation et de conditionnement de la VTCR.
- Chapitre 5 : étude de l'efficacité de la méthode de réduction de modèle PGD couplée à la VTCR pour la résolution large bande et développement d'algorithmes.
- Chapitre 6 : couplage de la méthode de l'enveloppe exponentielle et de la résolution large bande PGD-VTCR pour une reconstruction efficace de la réponse temporelle transitoire.
- Chapitre 7 : mise au point d'une méthode de décomposition de domaine temporel avec recouvrement adaptée à la résolution fréquentielle pour la réduction des coûts de calcul.
- Chapitre 8 : application des méthodes de résolution fréquentielle à l'identification du choc pyrotechnique.

L'ensemble des méthodes sont développées sur des exemples d'acoustique 2D, seul le chapitre 8 traite des problèmes d'assemblages de plaques et coques.

Chapitre 1

Problème de référence et principe de l'approche fréquentielle

Ce chapitre présente le problème de référence qui sert de cas d'étude dans cette thèse. Il présente le problème dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel ainsi que les outils numériques pour passer de l'un à l'autre.

1.1	Problème de référence dans le domaine temporel	8
1.2	Problème de référence dans le domaine fréquentiel	8
1.3	Construction numérique de la réponse temporelle à partir d'une résolution fréquentielle	10
1.3.1	Transformée de Fourier Discrète	10
1.3.2	Erreur de recouvrement spectral et temporel	10
1.3.3	Interpolation de la solution, reconstruction de la réponse continue	12

1.1 Problème de référence dans le domaine temporel

Considérons un problème de dynamique en acoustique linéaire dans un domaine fermé Ω . Le domaine est rempli d'un fluide de célérité c et de densité ρ . Nous supposons, dans un premier temps, un modèle d'amortissement visqueux paramétré par μ . Indiquons par \square_t l'ensemble des grandeurs dépendantes du temps. Le bord du domaine $\partial\Omega$ est séparé en trois parties :

- $\partial_p\Omega$ où la pression p_{td} est imposée.
- $\partial_v\Omega$ où la vitesse v_{td} est imposée.
- $\partial_h\Omega$ où la charge mixte h_{td} est imposée.

Nous considérons une source intérieure notée s_t . Le problème est étudié sur un intervalle de temps $I_t = [0, T]$. Les conditions initiales sur le champ de pression p_t sont considérées comme nulles :

$$\begin{cases} p_t(t=0) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial p_t}{\partial t}(t=0) = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Le problème à résoudre est :

Trouver le champ de pression p_t tel que :

$$\begin{cases} \Delta p_t + \mu \Delta \frac{\partial p_t}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2} = s_t & \text{dans } \Omega \times I_t \\ \frac{\partial p_t}{\partial t} + \frac{z}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial h_{td}}{\partial t} & \text{dans } \partial_h\Omega \times I_t \\ p_t = p_{dt} & \text{dans } \partial_p\Omega \times I_t \\ -\frac{\partial p_t}{\partial \mathbf{n}} = \rho \frac{\partial v_{dt}}{\partial t} & \text{dans } \partial_v\Omega \times I_t \end{cases} \quad (1.2)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien, \mathbf{n} la normale au bord et z l'opérateur d'impédance [120, 78]. Nous supposons que le problème 1.2 a une solution.

Dans le cas où le domaine Ω est décomposé en un ensemble de N_Ω sous-domaines Ω_E sans recouvrement, il est nécessaire d'ajouter les équations de continuité aux interfaces $\Gamma_{EE'}$:

$$\begin{cases} p_{tE} = p_{tE'} & \text{dans } \Gamma_{EE'} \times I_t \\ \frac{\partial p_{tE}}{\partial \mathbf{n}_E} + \frac{\partial p_{tE'}}{\partial \mathbf{n}_{E'}} = 0 & \text{dans } \Gamma_{EE'} \times I_t \end{cases} \quad (1.3)$$

avec \mathbf{n}_E et \mathbf{n}'_E les normales à $\Gamma_{EE'}$ sortantes de Ω_E et $\Omega_{E'}$.

1.2 Problème de référence dans le domaine fréquentiel

Réécrire le problème dans le domaine fréquentiel consiste à appliquer la transformée de Fourier à l'ensemble d'équations 1.2. Le domaine fréquentiel est noté $I_\omega = [-\omega_{max}, \omega_{max}]$. La transformée de

Fourier d'une grandeur est notée \square_ω et elle est définie par :

$$p_\omega = \text{TF}(p_t) = \int_{t=0}^{+\infty} p_t e^{-i\omega t} dt \quad (1.4)$$

avec $i = \sqrt{-1}$ l'unité imaginaire, ω la pulsation. Notons $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la fréquence. Le système d'équations 1.2 devient :

Trouver le champ de pression p_ω tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_\omega + k^2 p_\omega = s_\omega & \text{dans } \Omega \times I_\omega \\ p_\omega - Z \frac{i}{\omega \rho} \frac{\partial p_\omega}{\partial \mathbf{n}} = h_{\omega d} & \text{dans } \partial_h \Omega \times I_\omega \\ p_\omega = p_{\omega d} & \text{dans } \partial_d \Omega \times I_\omega \\ -\frac{\partial p_\omega}{\partial \mathbf{n}} = i\omega \rho v_{\omega d} & \text{dans } \partial_v \Omega \times I_\omega \end{array} \right. \quad (1.5)$$

avec k le nombre d'onde vérifiant $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2(1+i\omega\mu)}$ et Z la transformée de Fourier de l'impédance z . Le problème 1.5 est appelé problème de Helmholtz non homogène. Z est un nombre complexe dépendant de ω et avec une partie réelle positive : $\Re e(Z) \geq 0$, ce qui traduit un caractère amortissant des parois. En pratique, l'amortissement dans le milieu est faible tel que $\omega\mu \ll 1$, nous avons alors $k \approx \frac{\omega}{c}(1 - i\frac{\omega\mu}{2})$. Le modèle visqueux ne correspond généralement pas aux observations expérimentales dans le domaine fréquentiel. Il est commun d'utiliser un modèle d'amortissement hystérétique [150]. Dans le cadre de ce modèle que nous adoptons par la suite, le nombre d'onde s'écrit : $k = \frac{\omega}{c}(1 - i\eta)$ avec η le paramètre d'amortissement hystérétique vérifiant $\eta > 0$. $\eta > 0$ et $\Re e(Z) \geq 0$ garantissent l'unicité de la solution du problème 1.5 [120].

Dans le cas de la décomposition de Ω en N_Ω sous-domaines, les équations de continuité entre sous-domaines s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_{\omega,E} = p_{\omega,E'} & \text{dans } \Gamma_{EE'} \times I_t \\ \frac{\partial p_{\omega,E}}{\partial n_E} + \frac{\partial p_{\omega,E'}}{\partial n_{E'}} = 0 & \text{dans } \Gamma_{EE'} \times I_t \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Le retour dans le domaine temporel se fait à partir de la transformée de Fourier inverse définie par :

$$p_t = \text{TF}^{-1}(p_\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} p_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad (1.7)$$

La relation de Parseval sur l'égalité de l'énergie dans le domaine temporel et fréquentiel est vérifiée :

$$\int_{t=0}^{\infty} p_t^2 dt = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |p_\omega|^2 d\omega \quad (1.8)$$

1.3 Construction numérique de la réponse temporelle à partir d'une résolution fréquentielle

La résolution fréquentielle d'un problème défini dans le domaine temporel consiste à appliquer la transformée de Fourier aux sources, à résoudre le problème fréquentiel puis à revenir au domaine temporel en appliquant une transformée de Fourier inverse à la réponse fréquentielle. En pratique les signaux sont échantillonnés et la résolution fréquentielle se fait en un ensemble fini de points fréquentiels. Les transferts entre domaine temporel et fréquentiels sont réalisés via la Transformée de Fourier Discrète. Certaines conditions de discrétisation du domaine temporel et fréquentiel doivent être vérifiées pour garantir une fidèle reconstruction de la solution.

1.3.1 Transformée de Fourier Discrète

L'approche numérique de la résolution fréquentielle consiste à échantillonner la source en N_t échantillons de pas temporel δt sur une période de durée $T = N_t \delta t$. Le passage dans le domaine fréquentiel se fait en appliquant la transformée de Fourier discrète [69] :

$$s_\omega \left(2\pi \frac{m}{T} \right) = \sum_{n=1}^{N_t} s_t(n\delta t) e^{-i2\pi n m \delta t / T} \quad \text{avec } m \in \left[\left[-\frac{N_t-1}{2}, \frac{N_t-1}{2} \right] \right] \quad (1.9)$$

La transformée de Fourier discrète fournie, à un facteur multiplicatif près, une évaluation de la transformée de Fourier de s_t en N_t fréquences. La résolution fréquentielle consiste à résoudre le problème 1.2 pour l'ensemble des pulsations $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$, $m \in \left[\left[-\frac{N_t-1}{2}, \frac{N_t-1}{2} \right] \right]$. Une fois la réponse fréquentielle p_ω obtenue le retour dans le domaine temporel s'obtient par transformée de Fourier discrète inverse :

$$p_t(n\delta t) = \frac{1}{N_t} \sum_{m=-\frac{N_t-1}{2}}^{\frac{N_t-1}{2}} p_\omega \left(\frac{2\pi m}{T} \right) e^{i2\pi n m \delta t / T} \quad \text{avec } n \in \left[\left[1, N_t \right] \right] \quad (1.10)$$

Nous obtenons une approximation de la solution p_t en N_t points temporels.

1.3.2 Erreur de recouvrement spectral et temporel

L'échantillonnage des signaux dégrade potentiellement la solution : la solution construite aux points $n\delta t$ à partir de la transformée de Fourier discrète ne coïncide pas nécessairement avec la solution aux mêmes points qui proviendrait d'une résolution par transformée de Fourier continue. En guise d'interprétation, la résolution par l'approche transformée de Fourier discrète décrite ci-dessus est équivalente à la résolution par transformée de Fourier continue du problème soumis à une approximation de la source notée \tilde{s} :

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{N_t} \sum_{m=-\frac{N_t-1}{2}}^{\frac{N_t-1}{2}} s_\omega \left(\frac{2\pi m}{T} \right) e^{i2\pi m t / T} \quad (1.11)$$

\tilde{s} est l'unique série de Fourier tronquée de N_t termes qui passe par s en tout point $t = \frac{nT}{N}$, $n \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$. C'est-à-dire que la solution par transformée de Fourier discrète se comporte exactement comme si elle était la réponse à la source \tilde{s} aux instants $n\delta T$, $n \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$. L'approximation \tilde{s} est une source périodique de période T et bornée dans le domaine fréquentiel de bornes $-\frac{1}{2\delta t}$, $\frac{1}{2\delta t}$.

Erreur de recouvrement spectral

Les erreurs associées à la discrétisation peuvent être interprétées à partir des différences entre les sources s et \tilde{s} . \tilde{s} est une approximation lissée de s entre les points d'interpolation. Si le pas δt est trop grossier il apparaît des erreurs d'interpolation. Premièrement, comme \tilde{s} est bornée dans le domaine fréquentiel, elle ne traduit pas le haut contenu fréquentiel de s . Par ailleurs, les oscillations de fréquences supérieures à $\frac{1}{\omega}$ sont perçues par \tilde{s} comme des oscillations plus basses fréquences : c'est le phénomène de recouvrement spectral. En effet dans le domaine fréquentiel cette erreur s'interprète comme un recouvrement du spectre fréquentiel. Cette erreur est contrôlée par le critère de Shannon [139] qui impose une inégalité sur le pas temporel :

$$\delta t \leq \frac{1}{2f_{max}} \quad (1.12)$$

avec f_{max} la fréquence maximale de la source s .

Erreur de recouvrement temporel

Le chargement \tilde{s} est périodique de période T . Il en résulte que si la réponse n'est pas amortie au bout de la durée T , elle vient s'étaler sur la période suivante. Il apparaît alors des perturbations sur les conditions initiales appelées recouvrement temporel. Il existe donc une condition sur la période d'étude qui doit donc être suffisamment longue et a fortiori sur le pas fréquentiel $\delta f = \frac{1}{T}$ (en Hz) pour limiter cette erreur :

$$\delta f \leq \frac{1}{T_d} \quad (1.13)$$

avec T_d la durée d'amortissement de la réponse. Il s'agit du pendant fréquentiel du critère de Shannon. Le pas de discrétisation fréquentielle est donc directement relié à l'amortissement de la solution dans la structure. Il en résulte que l'amortissement est un paramètre primordial de l'approche fréquentielle car ce critère montre que les coûts de calcul y sont inversement proportionnels.

En pratique le pas fréquentiel sera donc choisi comme l'inverse de la durée de l'intervalle d'étude si la réponse est amortie au bout de cet intervalle et sinon comme égale à $\frac{1}{T_d}$: $\delta f = \min(\frac{1}{T_d}, \frac{1}{T})$. En réalité la réponse n'est jamais complètement amortie. Il conviendra de définir un seuil à partir duquel la solution peut être considérée comme amortie. Avec le modèle d'amortissement choisi ici, la durée d'amortissement est évaluée à $T_d = \frac{\text{Ln}(100)}{\eta\omega}$ (ω exprimé en rad.s^{-1} et T_d exprimé en s).

Dans la majorité des structures les hautes fréquences ont une durée d'amortissement plus faible que les basses fréquences. En traitant le problème par bande de fréquences, le pas fréquentiel peut être

indépendamment adapté à chaque bande afin de minimiser les coûts de calculs. Cette propriété a été exploitée dans les travaux de Mathilde Chevreuil [31] : le domaine des moyennes fréquences, traité avec la VTCR, a un pas de discrétisation fréquentielle plus grossier que la partie des basses fréquences, traitée par la méthode des éléments finis.

1.3.3 Interpolation de la solution, reconstruction de la réponse continue

La Transformée de Fourier Discrète fournit des solutions discrètes. Il est courant d'avoir à interpoler la solution entre les points discrets.

Interpolation dans le domaine temporel

L'approche par transformée de Fourier discrète est naturellement prédisposée à interpoler la solution dans le domaine temporel par des fonctions exponentielles. Il s'agit d'étendre l'expression donnée par l'équation 1.10 définie aux instants discrets à tous les instants de l'intervalle temporel $[0, T]$.

$$p_{t,interp}(t) = \frac{1}{N_t} \sum_{m=-\frac{N_T-1}{2}}^{\frac{N_T-1}{2}} p_\omega \left(\frac{2\pi m}{T} \right) e^{\frac{i2\pi mt}{T}} \quad (1.14)$$

Cela revient à considérer que la réponse fréquentielle de $p_{t,interp}$ est nulle en dehors de la bande fréquentielle traitée $[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}]$ ce qui est valide dès lors que le critère de Shannon 1.12 est respecté.

Interpolation dans le domaine fréquentiel

La méthode d'interpolation dans le domaine fréquentiel consiste à prendre la transformée de Fourier de la fonction prolongée par zéro de $p_{t,interp}$ en dehors de l'intervalle temporel $I_t = [0, T]$. Ce prolongement est valide dès lors que le critère 1.13 est respecté. Dans le domaine fréquentiel cela revient à interpoler avec des sinus cardinaux :

$$p_{\omega,interp}(\omega) = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \star \sum_{n=-\frac{N_T-1}{2}}^{\frac{N_T-1}{2}} p_\omega \left(\frac{2\pi n}{T} \right) \delta_{\frac{2\pi n}{T}} \quad (1.15)$$

avec sinc la fonction sinus cardinale, δ la fonction de Dirac et \star le produit de convolution défini par :

$$p \star q = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} p(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

avec p et q des fonctions du temps. Ces choix d'interpolation sont particulièrement pertinents car ils sont définis à partir de leur transformée de Fourier (et transformée inverse) et des critères 1.12 et 1.13.

Remarque : il n'est pas nécessaire de calculer la réponse fréquentielle avec un pas inférieur à celui défini par le critère 1.13, une interpolation comme proposée par l'équation 1.15 suffit. Ce résultat n'est pas toujours exploité dans les différentes études sur la résolution sur des larges bandes de fréquences.

Chapitre 2

Etat de l'art sur les méthodes de résolutions fréquentielles

Ce chapitre présente les méthodes de résolution fréquentielle en fonction de la gamme de fréquences. Une première partie se concentre sur la résolution fréquentielle à une fréquence fixée. Du fait du large intérêt que porte la communauté scientifique sur le sujet et donc de la très importante bibliographie du domaine, seules les principales méthodes sont présentées. Une deuxième partie présente les méthodes de résolution large bande qui consistent à rechercher la solution sur des bandes de fréquences.

2.1	Les méthodes de résolution fréquentielles	16
2.1.1	Les méthodes basses fréquences	16
2.1.2	Les méthodes hautes fréquences	19
2.1.3	Les méthodes moyennes fréquences	20
2.1.4	Bilan	23
2.2	Résolution par bandes de fréquences	23
2.2.1	Méthodes par décomposition sur base modale	24
2.2.2	Approximation de Taylor	24
2.2.3	Approximation de Padé	25
2.2.4	Approximation de rang faible	26
2.2.5	Bilan	28
2.3	Conclusion	28

2.1 Les méthodes de résolution fréquentielles

La littérature traitant des méthodes de résolution moyennes fréquences est très importante du fait de l'intérêt que porte la communauté scientifique à ce sujet. Nous traitons ici une vue d'ensemble et listons les principales méthodes de résolution du champ spatial à une fréquence fixée. Elles se décomposent en quatre catégories :

- Les méthodes basses fréquences étendues aux moyennes fréquences.
- Les méthodes hautes fréquences étendues aux moyennes fréquences.
- Les méthodes hybrides combinant les avantages des méthodes basses et hautes fréquences.
- Les méthodes dédiées aux moyennes fréquences.

2.1.1 Les méthodes basses fréquences

La Méthode des Eléments Finis (MEF) et ses extensions

La **MEF** est une méthode robuste et flexible ce qui fait d'elle la méthode la plus utilisée dans le domaine des basses fréquences. Elle est basée sur une formulation faible de l'équation d'équilibre [159] :

$$b(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(\omega) \mid v(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d\} \quad (2.1)$$

avec b une forme bilinéaire et f une forme linéaire. u est le champ solution et v le champ test. Numériquement il s'agit de rechercher u dans un espace de dimension finie. Pour cela on discrétise le domaine Ω en sous-domaines sans recouvrement appelés éléments et on recherche une approximation polynomiale de u dans chacun des éléments :

$$u = \sum_{e=1}^{N_E} u_e \phi_e(x) \quad \forall x \in \Omega_e \quad (2.2)$$

$\phi_e(x)$ est une fonction de forme et u_e l'amplitude associée. Une fois cette solution discrétisée introduite dans la formulation faible, le problème s'écrit comme un ensemble d'équations linéaires qui se met sous forme matricielle :

$$\left(-\omega^2 \mathbb{M}^{EF} + i\omega \mathbb{C}^{EF} + \mathbb{K}^{EF}\right) U = F \quad (2.3)$$

avec \mathbb{M}^{EF} , \mathbb{C}^{EF} et \mathbb{K}^{EF} les matrices de masse, d'amortissement et de raideur, U le vecteur inconnu des amplitudes de fonctions de forme et F le second membre associé au chargement.

L'erreur introduite par la discrétisation peut-être quantifiée a priori par :

$$\epsilon^{EF} \leq \alpha_\epsilon \left(\frac{kh}{q}\right)^q + \beta_\epsilon kR \left(\frac{kh}{q}\right)^{2q} \quad (2.4)$$

où k est le nombre d'ondes caractéristique du problème, h est la taille maximale des éléments du maillage, q est le degré d'interpolation polynomiale, R la taille caractéristique du domaine et α_ϵ et β_ϵ des constantes [44]. Le premier terme correspond à l'erreur d'interpolation et le second à l'erreur de

pollution. L'erreur d'interpolation prédomine dans le domaine des basses fréquences. Si kh est maintenu constant lorsqu'on augmente la fréquence, cette partie de l'erreur est constante. Néanmoins cette stratégie ne permet pas de contrôler l'erreur de pollution qui augmente rapidement avec la fréquence. Celle-ci devient prédominante dans le domaine des moyennes fréquences. Contrôler cette dernière impose une discrétisation fine du problème et donc un nombre très important de degrés de liberté. C'est ce qui rend la méthode MEF inadaptée au domaine des moyennes fréquences.

Pour contrôler les erreurs de pollution et d'interpolation tout en maintenant raisonnable la taille des problèmes, la **MEF adaptative** propose de mailler de manière inhomogène le domaine. Les zones de fort intérêt ou à fortes erreurs sont maillées plus finement que les autres. La stratégie consiste à proposer une première solution grossière puis d'évaluer l'erreur locale à partir d'estimateur d'erreur à posteriori [1, 6, 90]. Une fois les zones identifiées, il existe plusieurs stratégies de raffinement du maillage :

- raffinement h , qui consiste à raffiner la taille de maille en augmentant le nombre d'éléments [147].
- raffinement p , qui consiste à augmenter le degré des polynômes des fonctions de forme [160].
- raffinement ph , qui consiste à simultanément augmenter le degré des polynômes des fonctions de forme et diminuer la taille de maille [43].

Cette méthode est fréquemment utilisée dans le domaine temporel pour des problèmes de propagation de front d'onde [66]. Le raffinement étant alors très localisé sur le front, des gains en matière de coût numérique peuvent apparaître. Néanmoins dans le domaine fréquentiel, et notamment dans le domaine des moyennes fréquences, l'énergie est répartie dans tout le domaine ce qui la rend inadaptée.

L'erreur de pollution est intimement liée au conditionnement des matrices EFs [44]. La **MEF stabilisée** est une méthode qui a été développée pour stabiliser ces formes bilinéaires. La **Galerkin Least-Squares MEF (GLS)** consiste à ajouter un terme de minimisation du résidu d'équilibre [70]. L'erreur de pollution disparaît complètement pour les problèmes à une dimension, et seulement dans des directions privilégiées pour les problèmes à plusieurs dimensions. La **Galerkin Gradient Least-Squares MEF (GVLS)** est l'une des améliorations de cette méthode. Elle consiste à ajouter un terme de minimisation du gradient du résidu d'équilibre. Cette dernière permet de bien diminuer l'erreur de pollution pour les problèmes de vibration de structures. L'erreur provenant de la discrétisation, la **MEF Quasi Stabilisée** propose de modifier directement les matrices du problème pour stabiliser la solution et éliminer l'erreur de pollution [77]. En 1D l'erreur de pollution disparaît et en 2D elle est minimisée grâce à un maillage suffisamment régulier. Cependant, sa mise en œuvre est assez complexe. En limitant l'erreur de pollution, ces méthodes permettent de limiter le raffinement de maillage mais pas de l'éviter lorsque la fréquence augmente.

Les méthodes de décomposition de domaine

Le nombre de degrés de liberté EFs étant inéluctablement grand en moyenne fréquence, les méthodes de Décomposition de Domaine Spatiale (DDS) proposent de décomposer le problème en un ensemble de sous problèmes de plus petites tailles et localisés spatialement. Cette approche permet entre autres

de paralléliser la résolution ce qui permet de drastiquement réduire les temps de calculs. En général la solution du problème global est reconstruite à partir d'une résolution itérative. De nombreuses méthodes de DDS ont été développées. Une revue des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement est proposée dans [64]. Nous ne faisons pas de liste exhaustive de ces méthodes ici et en évoquons deux des plus importantes.

La **Component Mode Synthesis** (CMS) a été introduite dans [76]. Elle consiste à décomposer le domaine en sous-domaines et à reconnecter les interfaces. Une analyse modale est effectuée sur chacun des sous-domaines afin de construire une base réduite de résolution. Ces modes sont condensés sur les interfaces et le problème global est calculé en imposant la continuité aux interfaces. Les différentes méthodes se distinguent par la manière dont sont imposées ces conditions de continuité et par conséquent dans la manière de construire les modes propres des sous-domaines : conditions d'interface fixe [39, 76], conditions d'interface libre [110] et conditions mixtes [132].

La méthode **Finite Element Tearing and Interconnectin** (FETI) est l'une des méthodes de décomposition de domaine les plus populaires. Dans cette méthode les interfaces entre sous-domaines sont reconnectées avec des multiplicateurs de Lagrange. Chaque itération consiste à résoudre un problème de Neumann dans chaque sous-domaine et un problème global grossier qui reconnecte les déplacements. Elle a été appliquée à des problèmes d'acoustique [111, 53, 146], de vibro-acoustique [113] et d'assemblage de plaque et de coques [54].

Les méthodes multi-échelles

Pour éviter la surdiscrétisation tout en décrivant avec précision les fortes fluctuations des champs moyennes fréquences, les méthodes multi-échelles proposent de décrire la solution à deux échelles. Une échelle grossière décrite par un champ éléments finis et une échelle fine décrite par des fonctions d'enrichissement. C'est la somme de ces deux représentations qui permet de reconstruire le champ solution. Plusieurs méthodes multi-échelles ont été développées et diffèrent principalement par le choix de la description de l'échelle fine. La variational multiscale MEF [75], et la Residual Free Bubbles (RFB) [57] sont deux d'entre elles.

La Boundary Element Method (BEM)

La BEM consiste à utiliser les fonctions de Green pour reformuler le problème sous forme intégrale sur le bord [19, 114, 27]. Seul le bord est maillé et concentre les inconnues du problème, ce qui aboutit à un problème matriciel de petite taille. Elles sont néanmoins pleines et coûteuses à construire. Une fois la solution calculée sur le bord, le champ intérieur peut être reconstruit à partir des fonctions de Green. Le problème s'écrit :

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \nabla(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla u(\mathbf{x})) \mathbf{ds} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2.5)$$

avec \mathbf{x} et \mathbf{y} des points de Ω , u le champ inconnu, G la fonction de Green et c une fonction connue du problème.

Pour pallier aux coûts de construction et de stockage des matrices, la **Fast Multipole BEM** a été développée pour limiter le nombre d'intégrations [114, 121, 15, 27]. Elle consiste à approcher les fonctions de Green par zone spatiale lorsque \mathbf{x} et \mathbf{y} sont éloignés l'un de l'autre en tenant compte de la nature de la décroissance de la fonction de Green.

2.1.2 Les méthodes hautes fréquences

Dans le domaine des hautes fréquences les équations de dynamique peuvent être approximées, au moyen de quelques hypothèses, par des formes plus simples. Elles sont à l'origine de deux catégories de méthodes : les méthodes énergétiques et les méthodes issues de l'optique géométrique.

Les méthodes énergétiques

La **Statistical Energy Analysis** (SEA) a été introduite pour la première fois dans [109] et demeure actuellement la méthode la plus adaptée pour le domaine des hautes fréquences. Elle est basée sur l'hypothèse du champ diffus valide seulement dans cette bande de fréquences. Les quantités comme le champ de pression ou de déplacement ne sont pas connues localement de manière déterministe mais sont obtenues "en moyenne". En pratique il s'agit de décomposer le domaine en un ensemble de sous-domaines Ω_i et d'y rechercher l'énergie. L'équilibre d'un sous-domaine est défini par un bilan de puissance :

$$P_{in}^i = P_{diss}^i + \sum_{j \neq i} P_{coup}^{ij} \quad (2.6)$$

P_{in}^i et P_{diss}^i sont les puissances injectées et dissipées dans le domaine Ω_i et P_{coup}^{ij} est la puissance échangée entre les domaines Ω_i et Ω_j . La puissance de couplage est supposée être définie par :

$$P_{coup}^{ij} = \omega \eta_{ij} \left(\frac{E_i}{n_i} - \frac{E_j}{n_j} \right) \quad (2.7)$$

avec n_i et n_j les densités modales des domaines Ω_i et Ω_j , η_{ij} le facteur de couplage entre deux sous-domaines et ω la pulsation. L'une des difficultés de la SEA réside dans l'évaluation du terme η_{ij} . De nombreuses extensions de cette méthode sont proposées dans la littérature.

La **Energy Flow Analysis** cherche à décrire une réponse continue de la densité d'énergie [103]. La puissance échangée de l'équation 2.6 est remplacée par un flux continu d'énergie ce qui permet de définir un équilibre local d'énergie. La méthode est très efficace pour les problèmes 1D mais elle est limitée pour les problèmes 2D et 3D [98]. En effet, en 2D la méthode prédit une décroissance de l'énergie en $\frac{1}{r}$ alors que l'expression analytique décrit une décroissance en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ [23].

La **Wave Intensity Analysis** est une extension où l'hypothèse de diffusion est retirée [97]. Le champ est considéré directionnel. Des ondes, dont les amplitudes sont les inconnues, sont introduites. Cette

approche a donné de bien meilleurs résultats que la SEA sur des assemblages de plaques [100]. Mais comme pour la SEA, les coefficients de couplage sont souvent difficiles à déterminer.

La **Statistical modal Energy distribution Analysis** (SmEdA) [116] s'appuie sur l'approche énergétique de la SEA. Elle ajoute des termes d'énergie cinétique afin d'extrapoler le champ local dans chacun des sous-domaines. Les coefficients de transfert d'énergie sont évalués à partir des modes propres couplés, calculés a priori. En outre, la méthode prend en compte l'influence de la géométrie et de l'amortissement sur le flux d'énergie entre les sous-domaines. Des applications sont présentées dans [117, 148, 118, 149].

La **Transient SEA** (TSEA) est une extension de la SEA pour la résolution de problèmes transitoires [130, 129]. Elle consiste à déterminer l'évolution temporelle des quantités énergétiques de la SEA. La validité de l'approche est incertaine puisque les équations de la TSEA mélangent empiriquement les descriptions fréquentielles et temporelles. De nombreux auteurs ont proposé des applications avec des résultats mitigés [130, 129, 143, 67]. La méthode est néanmoins considérée comme valide dès lors que les énergies et les transferts de puissance varient lentement par rapport aux oscillations du système et que de nombreux modes sont excités, une condition qui est remplie dans le cas de charge impulsive [99].

La **Ray Tracing Method** ou la **Dynamical Energy Analysis** est une méthode qui s'approche de l'optique géométrique. Elle a initialement été introduite pour l'acoustique des salles [89]. Contrairement à la SEA, elle permet de reconstruire la réponse locale. Elle consiste à suivre les ondes générées par la source au travers de multiples rebonds jusqu'à amortissement. La réponse est reconstruite à partir de la somme de ces ondes. La réponse en un point issue d'une source ponctuelle prend la forme :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = C \sum_{j=1}^J A_j e^{iS_j(\omega) - i\nu_j\pi/2} \quad (2.8)$$

où C est une constante connue, A_j le terme d'amplitude, S_j le terme de phase à variation rapide, ν_j le terme de phase à variation lente, \mathbf{x} la position et \mathbf{x}_s la position de la source. A_j contient la contribution de l'amortissement, de la diffraction, et du coefficient de réflexion/transmission. Dans le cas d'un fluide homogène, $S_j = \frac{\omega L_j}{c}$ avec L_j la longueur du parcours de l'onde entre \mathbf{x}_s et \mathbf{x} . ν_j est un coefficient prenant en compte le changement de phase induit par les réflexions/transmissions. Cette méthode a été appliquée à l'acoustique [29, 144], aux assemblages de plaques [28] et aux problèmes 2D et 3D en général [30]. Elle permet de reconstruire les réponses avec un faible coût de calcul. Néanmoins, les géométries complexes sont difficiles à étudier en raison de leur comportement hautement diffusif.

2.1.3 Les méthodes moyennes fréquences

Parmi les méthodes dédiées aux moyennes fréquences il y a les méthodes Trefftz et les méthodes hybrides. Les méthodes hybrides consistent à combiner des méthodes probabilistes dédiées aux hautes fréquences comme la SEA à des méthodes déterministes comme les MEFs, DEM ou Trefftz [68, 42, 35]. La structure est décomposée en un domaine où les variables sont déterminées de manière déterministe et

un domaine où seules les quantités énergétiques sont évaluées. La difficulté réside dans la définition des relations entre ces domaines.

Pour réduire les coûts de calcul des approches basses fréquences, les méthodes Trefftz proposent d'utiliser des fonctions de forme par sous-domaine qui vérifient les équations de dynamique à l'intérieur des sous-domaines. Les conditions aux limites et de continuité sont alors approchées. Ces méthodes présentent une très bonne convergence en matière de nombre de fonctions de forme, mais les matrices sont néanmoins mal conditionnées. Nous présentons dans cette section l'idée générale des méthodes Trefftz. Elles diffèrent par le choix des fonctions de forme et par la manière dont elle impose la continuité aux interfaces et aux bords. Notons que tout espace discret de Trefftz peut-être utilisé dans n'importe quelle formulation Trefftz [73]. [73] présente une revue des méthodes Trefftz appliquées à l'acoustique 2D.

La méthode VTCR, qui est une méthode Trefftz particulière, sera détaillée dans le chapitre 3 car elle est à la base de ce travail.

Les méthodes hybrides

La **méthode hybride MEF/SEA** consiste à combiner la méthode déterministe MEF et la méthode probabiliste SEA. Le domaine est décomposé en deux types de sous-domaines : domaines déterministes et domaines statistiques. Dans les domaines déterministes une méthode type MEF est utilisée. Dans les domaines statistiques, le champ est considéré comme étant la somme d'un champ diffus et d'un champ directif [140] : un champ directif, déterminé analytiquement ou avec la BEM, et un champ diffus, déterminé par la SEA. Un ensemble de relations sont établies pour connecter aux interfaces les degrés de liberté issus des domaines statistiques à ceux issus des domaines déterministes. La méthode proposée offre une grande flexibilité en permettant de prendre en compte les détails déterministes nécessaires dans une analyse vibro-acoustique sans exiger que l'intégralité du système soit modélisée de manière déterministe, ce qui en fait une approche particulièrement adaptée aux moyennes fréquences. La méthode est étudiée et appliquée dans [38, 102, 107, 101]. Récemment [71] propose une extension de la méthode pour des chargements dépendants du temps et pour reconstruire des réponses transitoires. Elle est appelée la Transient Hybrid FE-SEA method.

Les méthodes Trefftz

Les **Least Square Methods** (LSM) consistent à trouver la solution Trefftz qui minimise une norme sur les bords et les frontières. Elles sont particulièrement simples à mettre en œuvre et aboutissent à des formes Hermitiennes semi-définies positives. La **Method of Fundamental Solutions** (MFS) fait partie des méthodes Least square [50], [9]. Dans cette méthode la minimisation de la norme sur le bord est remplacée par une minimisation de l'erreur quadratique sur un ensemble de points se trouvant sur les bords. Les fonctions de forme utilisées sont des fonctions de Hankel, une version avec des ondes planes a également été développée [4] : la **Plane Wave Least Square Method** (PWLS).

La **Wave Boundary Element Method** (WBEM) est une extension directe de la BEM introduite dans [125, 126]. Cette approche consiste à utiliser une base d'ondes planes multipliée par des fonctions polynomiales, plutôt que des fonctions polynomiales telles qu'utilisées dans la BEM. Cela permet de réduire le nombre de degrés de liberté nécessaires pour atteindre la précision souhaitée, il est mentionné un gain d'un facteur d'environ trois. Il n'y a pas de restriction sur la base de fonctions de forme à choisir, dans [126], une base de rayons équi-répartie est utilisée. L'introduction d'ondes planes a néanmoins l'inconvénient de dégrader le conditionnement de l'opérateur.

L'**Ultra Weak Variational Formulation** (UWVF) consiste à définir des variables sur les interfaces et à les rechercher à partir d'une formulation variationnelle sur le bord. Dans chaque élément, le champ est recherché comme une somme d'ondes planes. La stratégie de raffinement de cette méthode consiste à réduire la taille des éléments et à garder constant le nombre d'ondes planes : raffinement en h . Cela aboutit à des matrices de grande taille. Comme toute méthode Trefftz, elle est relativement mal conditionnée, ce qui nécessite l'introduction de préconditionneur lorsqu'on traite des problèmes de grande taille. Dans [26], il est démontré que pour trois ondes planes par élément, une direction de propagation distribuée uniformément maximise le déterminant de la matrice de l'UWVF. Cette distribution conduit donc à un conditionnement optimal. Nous démontrons chapitre 4 de cette thèse que ce résultat n'est pas valable pour plus de trois ondes planes et que la distribution dépend de la géométrie du sous-domaine. L'UWVF peut être interprété comme une Discontinuous Galerkin Method [58], [20].

La **Discontinuous Enrichment Method** (DEM) a été introduite dans [51]. C'est une approche qui consiste à imposer la continuité entre interfaces avec des multiplicateurs de Lagrange. La DEM est similaire aux méthodes Enrichment MEF à la différence qu'elle utilise des fonctions d'enrichissement Trefftz : dans chaque élément, la solution est recherchée comme une somme de polynômes par morceaux et d'ondes planes. Dans [52], la solution est recherchée seulement comme une somme d'ondes planes, ce qui fait de cette approche une méthode Trefftz. Des applications 2D sont proposées dans [51, 52, 55, 56] et des applications 3D dans [55, 145]. Dans [156] la DEM est comparée aux méthodes UWVF et PUM. En conclusion, cette méthode fournit des résultats précis avec moins de degrés de liberté que la méthode MEF et l'effet de pollution est considérablement atténué par les ondes planes. De plus, les géométries complexes peuvent être traitées grâce au maillage MEF.

La **Wave Based Method** a été introduite par Desmet dans [47]. Dans cette méthode, la continuité et les conditions de bords sont imposées à partir d'une formulation variationnelle pondérée sur le bord. Chaque condition le long des frontières est multipliée par sa propre quantité duale et intégrée le long de la frontière en question. En acoustique, la variable duale de la pression est la vitesse normale du fluide à travers la frontière (et vice versa). Sur ce point elle est très similaire à la VTCR. La solution est recherchée sur une base d'ondes propagatives et évanescentes. L'approche a été appliquée à l'acoustique 2D et 3D [47], aux assemblages de plaques [151] [152] [154], aux coques épaisses [81], aux matériaux élastiques poreux [42], à l'analyse structurelle-acoustique des rayonnements [131], aux problèmes de Helmholtz 3D en général [61] et aux domaines non bornés [62].

L'auteur de [158] compare trois méthodes Trefftz à base d'ondes planes : la PWLS, l'UWVF, la VTCR. L'auteur montre une meilleure convergence pour la PWLS que pour l'UWVF et la VTCR. La

VTQR ayant la moins bonne convergence. Néanmoins l'auteur utilise un raffinement en h , ce qui n'est pas l'approche préconisée pour la VTQR. Les exemples numériques de [58] et [59] comparent la LSM et l'UWVF. Avec le même espace de discrétisation, la méthode LSM est légèrement moins précise que l'UWVF. En revanche, dans les exemples de [74], la performance de la méthode LS est comparable à celle de l'UWVF et meilleure que celle de la VTQR. Ces tentatives de comparaison dépendent fortement du cas traité. De manière générale il ne semble pas y avoir de méthode plus performante que les autres [73].

2.1.4 Bilan

La littérature concernant la résolution fréquentielle est très large. Des méthodes ont été développées pour chacune des bandes de fréquences en tenant compte des atouts et des difficultés de chaque bande : des basses aux hautes fréquences en passant par les moyennes fréquences. Un grand nombre d'entre elles ont atteint un niveau de maturité industrielle.

Les méthodes basses et moyennes fréquences sont des méthodes déterministes, elles permettent de reconstruire par transformée de Fourier inverse la propagation temporelle d'un choc. Ce n'est pas le cas des méthodes hautes fréquences qui sont majoritairement statistiques (à l'exception de la Ray Tracing Method). Mais du fait de l'amortissement important en hautes fréquences, la partie hautes fréquences de la réponse temporelle peut être négligée ce qui sera fait par la suite. Nous utiliserons donc la Méthode des Eléments Finis pour la partie basses fréquences et la méthode Trefftz VTQR pour les moyennes fréquences.

2.2 Résolution par bandes de fréquences

Le balayage de fréquences en dynamique structurelle, en acoustique et en vibro-acoustique nécessite une évaluation des fonctions de réponse pour un grand nombre de fréquences. L'approche brute point par point pour effectuer ces balayages conduit à un grand nombre de résolutions indépendantes. Plusieurs méthodes ont été mises au point pour réduire ces coûts de calcul en approchant la réponse directement sur des bandes de fréquences. La difficulté réside dans le fait que la solution possède des pôles en certains points : les fréquences propres. En ces points, la solution a une amplitude importante, l'énergie se concentre sur un mode propre de vibration. Pour le domaine des basses fréquences des méthodes efficaces ont été développées, comme la décomposition sur base modale. Dans le domaine des moyennes fréquences le problème est plus difficile puisque la densité modale devient plus importante. Dans cette partie nous énumérons les principales méthodes de résolution large bande. Elles consistent en général à trouver une approximation sur une bande de fréquences $I_\omega = [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ avec ω_0 la fréquence centrale et $\Delta\omega$ la largeur de bande.

2.2.1 Méthodes par décomposition sur base modale

La méthode par décomposition sur base modale a largement été étudiée [40] [119]. Elle est actuellement très utilisée dans l'industrie. Elle consiste à rechercher la solution comme une combinaison linéaire de modes propres :

$$u(\mathbf{x}, \omega) \approx u^N(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=1}^N f_n(\omega) \phi_n(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

où f_n est une fonction de la fréquence et ϕ_n un mode propre. Les modes ϕ_n sont construits à partir de la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(-\omega_n^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}) \phi_n = 0 \quad (2.10)$$

où ω_n sont les fréquences propres, \mathbb{M} la matrice de masse et \mathbb{K} la matrice de raideur. Les modes ϕ_n sont, par construction, orthogonaux entre eux au sens de la masse et de la raideur. Les fonctions f_n sont déterminées en injectant u^N dans l'équation de dynamique et en projetant l'équation sur les mêmes modes. Le calcul est aisé dès lors que les modes sont également orthogonaux au sens de la matrice d'amortissement. Pour cette raison il est courant d'adopter l'amortissement de Rayleigh :

$$\mathbb{C} = \alpha \mathbb{M} + \beta \mathbb{K} \quad (2.11)$$

où α et β peuvent dépendre de ω . Le nombre de modes N à choisir pour traduire correctement la solution dépend du contenu fréquentiel de la source : tous les modes dont la pulsation est proche du contenu fréquentiel du chargement doivent être contenus dans la somme. En pratique l'expression contient les quelques centaines de premiers modes.

Pour les cavités acoustiques 2D la densité modale augmente linéairement avec la fréquence, pour les cavités acoustiques 3D, elle augmente quadratiquement. Cela implique que dans le domaine des moyennes fréquences, le nombre de modes à prendre en compte devient très important ce qui augmente les coûts de calcul. Pour contrer cette limite [141] propose de construire une base modale à partir d'un opérateur d'énergie propre à une bande de fréquences. Elle est néanmoins basée sur une approche EF, ce qui conduit à des opérateurs de très grande taille. En conséquent l'approche par base modale se cantonne donc actuellement au domaine des basses fréquences.

2.2.2 Approximation de Taylor

L'approximation de Taylor consiste à approcher la solution par son développement de Taylor. Il s'agit d'une approximation polynomiale sur la bande de fréquences $I_\omega = [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ de la forme :

$$u \approx u^N = \sum_{n=0}^N (\omega - \omega_0)^n u_n \quad (2.12)$$

Elle a été proposée pour la méthode Trefftz VTCR dans [95]. Dans cette dernière, l'opérateur et le chargement sont également approximés sous la forme de série de Taylor. Le problème est réécrit en

utilisant la méthode de la perturbation, en un ensemble d'équations pour chacun des termes u_n . Cette approche permet de calculer tous les termes à partir de la seule inversion de la matrice du problème développée à l'ordre 0. Finalement, pour ajuster la solution sur la bande de fréquences, la solution est actualisée sous la forme :

$$u_{actu}^N = \lambda \langle u^N \rangle + \mu \Delta u^N \quad (2.13)$$

$\langle u^N \rangle$ est la moyenne sur la bande, Δu^N la perturbation, λ et μ sont issues de la minimisation d'une erreur. L'approche a été appliquée aux poutres 1D dans [95], et aux assemblages de plaques dans [95, 94, 31]. Les applications montrent des résultats de convergence intéressants : l'approximation est précise lorsqu'aucun mode de vibration n'est sollicité dans la bande de fréquences, mais lorsqu'il y a un ou deux modes l'approximation est bien moins précise. En effet des oscillations parasites apparaissent aux extrémités de la bande, ce résultat est connu pour les approximations polynomiales d'ordre élevé. Cette limite est problématique pour le domaine des moyennes fréquences où de nombreux modes sont sollicités. La méthode semble donc manquer de robustesse et se cantonne à des bandes de fréquences étroites. De plus il n'y a pas de critère a priori de sélection des paramètres de la méthode.

Elle a été retravaillée dans [21] en proposant deux améliorations sur la qualité de convergence. La première consiste à prolonger l'approche en utilisant les termes u_i de la somme comme base de résolution. La solution s'écrit alors :

$$u^N = \sum_{n=0}^N \alpha_n(\omega) u_n \quad (2.14)$$

Les $\alpha_n(\omega)$ sont obtenus à partir de la minimisation d'une erreur. La seconde consiste à non pas calculer la solution approchée en toute fréquence mais seulement en quelques fréquences et interpoler par splines entre celles-ci. L'application qui sert d'illustration dans [21] montre une erreur importante sur une bande de fréquences comprenant seulement deux modes propres de vibration. Ces modifications intéressantes n'ont pas pu montrer d'améliorations significatives.

La méthode a également été appliquée dans le cadre de la MEF à des problèmes d'acoustique 2D [51]. L'auteur évoque également des problèmes de stabilité dû à l'approximation polynômiale d'ordre élevé.

2.2.3 Approximation de Padé

L'approximation de Padé [7] pour la résolution large bande est une approche initialement proposée dans [48] pour des problèmes d'acoustique 2D. Elle consiste à rechercher par bande de fréquences chaque composante n du vecteur solution u sous la forme :

$$u_n(\omega) \approx \frac{P_n(\omega)}{Q_n(\omega)} \quad (2.15)$$

avec P et Q des polynômes respectivement de degré L et M :

$$P_n(\omega) = \sum_{l=0}^L p_{ln} \omega^l, \quad Q_n(\omega) = \sum_{m=0}^M q_{mn} \omega^m \quad (2.16)$$

Une approche efficace pour déterminer ces termes consiste à les identifier à partir des coefficients du développement en série de Taylor. Il s'agit de faire coïncider les $L+M+1$ ième termes du développement de Taylor avec ceux de u en la fréquence centrale ω_0 [7, 51, 136]. Le développement de Taylor nécessite le calcul des $L+M$ premières dérivées de la solution en la fréquence centrale. Dans le cas de la MEF, elles se calculent en résolvant de manière incrémentale :

$$(-\omega^2 \mathbb{M} + i\omega \mathbb{C} + \mathbb{K}) \frac{\partial^j u}{\partial \omega^j} = \frac{\partial^j f}{\partial \omega^j} - \sum_{k=1}^j \binom{j}{k} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} (-\omega^2 \mathbb{M} + i\omega \mathbb{C} + \mathbb{K}) \frac{\partial^{j-k} u}{\partial \omega^{j-k}} \quad (2.17)$$

L'intérêt de cette technique est que seule la matrice $(-\omega_0^2 \mathbb{M} + i\omega_0 \mathbb{C} + \mathbb{K})$ doit être inversée pour toute la bande de fréquences, ce qui représente un faible coût de calcul. Une telle approximation a une meilleure stabilité numérique que l'approximation en série de Taylor. En outre, même lorsque les deux approches convergent, l'approximation de Padé est souvent plus précise [51]. La méthode est largement utilisée pour le balayage de fréquences, elle a été appliquée à des problèmes d'acoustique [48, 155, 138] et d'assemblage de plaques et de coques [5, 72]. En pratique sur les exemples traités par les auteurs, L et M sont compris entre 3 et 10 et les bandes de fréquences comprennent de 1 à 5 modes propres sollicités. Des améliorations prenant en compte la connaissance préalable de fréquences propres sont proposées dans [138] et [137].

Cette méthode présente des gains importants en coût de calcul. Dans [138] et [155] les auteurs obtiennent un gain de l'ordre de 10 à 50 et [5] un gain de l'ordre 100 dans des cas typés plutôt basses fréquences. Dans [48] l'auteur obtient un gain entre 3 et 10 dans un cas typé moyennes fréquences.

Cette approche a également été appliquée à un assemblage de plaques dans le cadre de la méthode Trefftz VTCR dans [136]. Dans le cas des méthodes Trefftz, les dérivées nièmes de l'opérateur ne s'annulent pas au bout de la troisième dérivée comme pour les EFs, ce qui alourdit la résolution du système 2.17. Pour l'application utilisée, l'auteur a pu montrer un gain de temps d'environ 30% par rapport à l'approche point par point ce qui reste faible devant les gains sur des applications EFs. Par ailleurs l'auteur soulève des difficultés quant à l'extension de la méthode pour les problèmes d'assemblage de coques, en particulier pour le calcul des dérivées de la matrice VTCR en fonction de la fréquence.

2.2.4 Approximation de rang faible

De nombreuses méthodes de réduction de modèle consistent à rechercher une approximation de rang faible : POD (Proper Orthogonal Decomposition), PGD (Proper Generalized Decomposition) et

Reduced Bases. La solution est recherchée sur une bande de fréquences I_ω sous la forme :

$$u \approx \sum_{n=1}^N \lambda_n(\omega) u_n \quad (2.18)$$

avec u_n un champ spatial indépendant de la fréquence et λ_n une fonction de la fréquence. Les couples (λ_n, u_n) sont appelés modes. Cette décomposition en rang faible s'interprète comme rechercher la solution $u(\omega)$ dans un espace réduit généré par les u_n . Pour construire les modes, plusieurs méthodes existent.

Les auteurs de [72] proposent de prendre pour u_n les N premières dérivées de la solution en quelques points. Les fonctions λ_n sont calculées à chaque fréquence en projetant l'équation de dynamique sur le sous-espace généré par les u_n : c'est une projection de Petrov-Galerkin. Les auteurs comparent cette approche à l'approximation de Padé : à même nombre de dérivées prises en compte, l'approche par projection de Petrov-Galerkin converge bien mieux que l'approche Padé. Dans l'exemple d'acoustique traité il y a un fort gain de calcul par rapport à l'approche point par point : gain de 170 environ.

Dans [72] les auteurs proposent également une autre méthode qui consiste à rechercher la solution par projection dans des sous-espaces de Krylov. Les auteurs ajoutent aux espaces les dérivées nièmes de la solution en quelques points car elles sont aisées à construire. Les gains de calculs sont également très intéressants avec des gains de l'ordre de 50. La méthode est néanmoins restreint à des seconds membres constants avec la fréquence.

Plus généralement les vecteurs u peuvent être construits indépendamment de la solution en quelques points et de ses dérivées nièmes. Cette liberté permet de rechercher une éventuelle meilleure approximation. C'est l'approche proposée par la PGD (Proper Generalized Decomposition) [34, 32, 33]. Elle a été étudiée pour des problèmes de dynamique entre autres dans [18, 63, 41] avec notamment une approche fréquentielle dans [112]. L'approche classique de construction des couples (λ_n, u_n) , appelés modes, est basée soit sur la projection de Galerkin des équations, soit sur la minimisation d'un résidu associé aux équations. Pour les applications en dynamique, [18] préconise les approches par minimisation.

Elle a été appliquée à la méthode Trefftz VTCR pour des problèmes d'acoustiques 2D dans [8]. L'application de la méthode nécessite de dépasser deux difficultés. La première consiste à traiter le mauvais conditionnement des matrices VTCR. Pour cela l'auteur préconise d'utiliser des fonctions de forme de type Fourier [86, 85]. Deuxièmement les matrices VTCR sont non hermitiennes, ce qui complexifie la recherche des modes. L'auteur propose d'utiliser l'algorithme de Petrov-Galerkin introduit dans [123] pour pallier à ce problème. L'auteur obtient une bonne convergence de la méthode : relativement peu de modes sont nécessaires pour traduire correctement la solution (environ autant de modes que de modes propres sollicités sur la bande de fréquences considérée). Les coûts de calculs ne sont pas évalués.

2.2.5 Bilan

Un nombre important de méthodes de résolution large bande a été développé. La plupart d'entre elles sont efficaces et reproduisent fidèlement la solution avec des coûts de calcul drastiquement réduits sur des problèmes typés basses fréquences : soit peu de modes sollicités et un recouvrement modal faible. Dans ces problèmes, les coûts de calcul des approches large bande sont généralement proportionnels au nombre de modes propres sollicités dans la bande.

Néanmoins peu d'études présentent des applications dites moyennes fréquences avec des gains en coût de calcul important. En effet lorsque la fréquence augmente, la densité modale augmente ce qui a tendance à augmenter les coûts de calcul des approches large bande. Ce point caractérise la principale difficulté quant à l'efficacité des méthodes de résolution large bande sur des problèmes moyennes fréquences. A cet effet se rajoute le fait que l'amortissement a également tendance à augmenter avec la fréquence ce qui augmente le pas fréquentiel de résolution de l'approche directe point par point (voir équation 1.13). En moyennes fréquences, les méthodes de résolution large bande ne semblent actuellement pas significativement plus efficaces que l'approche point par point.

2.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de présenter l'état de l'art des méthodes de résolution fréquentielle. Un nombre important d'entre elles a atteint la maturité industrielle. Les méthodes de résolution basses et moyennes fréquences sont des méthodes déterministes, elles permettent de revenir à la réponse temporelle en appliquant une transformée de Fourier inverse. Ce n'est pas le cas des méthodes hautes fréquences qui sont statistiques mais qui ne seront de fait pas exploitées pour nos applications car la partie des hautes fréquences est négligée à cause de l'amortissement. Nous construirons donc la partie basse fréquence de la réponse avec la MEF et la partie moyenne fréquence avec la méthode Trefftz VTCR.

La résolution point par point est coûteuse, des approches de résolution large bande doivent être exploitées pour réduire les coûts de calcul de la résolution basses et moyennes fréquences. Elles sont particulièrement robustes dans le domaine des basses fréquences. Nous utiliserons la décomposition modale couplée à la MEF sur cette gamme de fréquences. Elles semblent néanmoins perdre en efficacité dans le domaine des moyennes fréquences. Il s'agit là d'un véritable verrou à débloquent pour traiter les problèmes visés. Nous consacrons donc la majorité des travaux de cette thèse au développement de méthodes larges bandes pour la bande des moyennes fréquences.

Chapitre 3

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (VTCR)

Ce chapitre développe la méthode Variational Theory of Complex Rays (VTCR). Il présente une brève revue des multiples applications et développements de la méthode, en énumérant les principales différences et points communs entre chaque application. La VTCR est détaillée dans le cas des équations de Helmholtz, elle sera utilisée dans les chapitres suivants car ce cas est représentatif des autres applications de type assemblages de plaques et de coques.

3.1	Un bref historique de la VTCR	31
3.2	La méthode VTCR pour l'acoustique 2D	33
3.2.1	Problème de référence homogène à une fréquence	33
3.2.2	Formulation variationnelle VTCR	34
3.2.3	Fonctions de forme et espace discret	35
3.2.4	Problème matriciel	37
3.2.5	Illustration numérique	38
3.3	Convergence de la VTCR	39
3.3.1	Raffinement p et h	39
3.3.2	Critère a priori de convergence	40
3.3.3	Conditionnement et régularisation de la VTCR	42

3.4 Conclusion **44**

3.1 Un bref historique de la VTCR

La VTCR est une méthode Trefftz [73] introduite par Pierre Ladevèze en 1996 [92]. Comme toute méthode Trefftz, la VTCR consiste à décomposer le domaine spatial en un ensemble de sous-domaines et à utiliser des fonctions de forme qui vérifient par définition l'équation aux dérivées partielles dans chacun d'entre eux. Il s'agit alors de prendre en compte les conditions de bords et de continuité pour déterminer la solution globale. La stratégie proposée par la VTCR, qu'elle partage avec la WBM [46], consiste à utiliser une formulation variationnelle. Cela permet d'utiliser des fonctions de forme indépendantes d'un sous-domaine à l'autre ce qui lui procure une grande flexibilité. Bien que la construction de cette méthode soit assez naturelle, l'analyse des erreurs l'est moins car elle ne résulte ni d'une intégration par parties (UWVF), ni d'un principe de minimisation (LSM) comme peuvent l'être d'autres méthodes Trefftz.

Elle a, au cours de ces 20 dernières années, fait l'objet de nombreuses recherches et elle a été appliquée pour de multiples types de structures :

- Assemblages de plaques [93].
- Assemblages de coques [134, 133, 25].
- Assemblages de plaques orthotropes [87].
- Acoustique 2D et 3D. [86, 85, 87].
- Problèmes de Helmholtz inhomogènes [104].

Dans chaque cas, la méthode diffère par le choix de la formulation variationnelle et des fonctions de forme.

La formulation variationnelle VTCR consiste à réécrire les conditions de bords et de continuité entre sous-domaines sous forme intégrale. Supposons une condition de bord générique :

$$u = u_d \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.1)$$

avec $\partial\Omega$ le bord ou l'interface considérée. La forme générique de la formulation intégrale VTCR s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} v^*(u - u_d) d\partial\Omega = 0 \quad \forall v^* \text{ fonctions Trefftz} \quad (3.2)$$

Le type de fonction test utilisé correspond à la quantité duale de la grandeur u de telle sorte que l'intégrale soit homogène à une puissance. Pour l'ensemble des applications citées, l'équivalence entre la formulation variationnelle VTCR et le problème de référence a été démontrée dès lors que l'amortissement intérieur est strictement positif et que l'amortissement des parois est positif. Quant aux fonctions de forme Trefftz utilisées dans chacun des sous-domaines, elles dépendent du cas traité :

- En acoustique 2D les fonctions de forme utilisées diffèrent dans le cas des domaines fermés et des domaines ouverts. Dans le cas des domaines fermés plusieurs bases de fonctions de forme ont été proposées au cours de l'histoire de la VTCR : la base en ondes planes, la base de secteur et une base utilisant des fonctions de Bessel appelée la base de Fourier [86]. Nous détaillons ces trois bases dans la section 3.2.3. Dans le cas des domaines ouverts les fonctions de forme

sont des fonctions de Hankel de seconde espèce car elles vérifient la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld [87].

- En acoustique 3D une extension de la base de Fourier utilisée en acoustique 2D a été proposée [85]. Des représentations en ondes planes peuvent également être utilisées [47].
- En théorie des plaques et des coques les auteurs utilisent les mêmes bases qu'en acoustique 2D bornée auxquelles ils ajoutent des bases d'ondes évanescentes de bords et de coins [93, 134, 133]. Dans le cas de plaques orthotropes, la norme du nombre d'onde dépend de la direction, une base de fonctions de forme d'ondes planes et d'ondes évanescentes est utilisée [88].
- Dans les problèmes de Helmholtz inhomogènes, le nombre d'onde k n'est pas constant avec la position \mathbf{x} , il n'y a donc pas forcément d'expression simple pour les fonctions de forme. Dans [104] le nombre d'ondes est approché par un développement de Taylor à l'ordre 1 ce qui amène à utiliser des fonctions d'Airy comme bases de fonctions de forme.

La stratégie générale de discrétisation consiste à définir peu de sous-domaines, la condition étant qu'ils soient étoilés, et à définir un espace riche en fonction de forme Trefftz couvrant l'ensemble des directions dans chacun des sous-domaines. Des critères heuristiques permettent d'estimer a priori le nombre de fonctions à utiliser en fonction de la taille des sous-domaines et de la fréquence. Ces mêmes fonctions de forme Trefftz sont utilisées pour définir autant de fonctions tests à injecter dans la formulation variationnelle, ce qui permet de définir le problème matriciel à résoudre. Une fois le problème inversé, le champ est reconstruit aux positions souhaitées à partir des amplitudes des fonctions de forme calculées.

Dans chacune des applications citées, les bases de fonctions de forme VTCR permettent d'atteindre les précisions attendues avec un nombre de fonctions de forme drastiquement réduit par rapport aux approches EFs.

Par ailleurs, la VTCR a connu de nombreux développements :

- Pour réduire le nombre de fonctions de forme utilisées, des approches adaptatives ont été proposées dans [135]. La démarche se décompose en trois étapes :
 - La première étape consiste à faire une résolution avec une discrétisation uniforme grossière en secteur qui couvre l'ensemble des directions.
 - Les grandeurs aux interfaces des éléments VTCR sont reconstruites à partir de la résolution précédente. Elles sont utilisées comme conditions de bords mixtes pour définir un problème local. La résolution de ces problèmes est effectuée avec une discrétisation fine afin d'extraire les directions privilégiées.
 - Le maillage global est raffiné en fonction de ces directions et une résolution globale est effectuée.

L'approche peut être réitérée plusieurs fois jusqu'à convergence. La performance de l'approche a été illustrée seulement pour des champs directives.

- Une approche hybride VTCR-MEF a été proposée dans [96], elle s'insère dans la catégorie des méthodes Weak Trefftz. La formulation variationnelle est assouplie et permet d'utiliser des fonctions de forme qui ne vérifient pas exactement les équations intérieures, par exemple

des fonctions de forme éléments finis. Elle a été appliquée aux équations de Helmholtz non homogènes dans [104].

- La VTCR a été utilisée pour la reconstruction de la réponse transitoire dans le domaine temporel [31]. Le domaine des basses fréquences est résolu avec les éléments finis et les hautes fréquences avec la méthode VTCR. Ce couplage permet d'intégrer le haut contenu fréquentiel de la réponse habituellement délaissé par les EFs.

Comme toute méthode Trefftz, la VTCR souffre de mauvais conditionnement. Ce phénomène est connu et apparaît lorsque le nombre de fonctions de forme injecté est important, ce qui est inévitable lorsqu'on souhaite obtenir une solution précise. Même si en général cela n'affecte pas la qualité de la solution reconstruite, elle met en défaut certains algorithmes d'inversion et certaines stratégies de résolution comme la résolution large bande PGD [8]. Plusieurs approches ont été proposées pour contrôler le conditionnement, nous les développons dans la section 3.3.3.

3.2 La méthode VTCR pour l'acoustique 2D

3.2.1 Problème de référence homogène à une fréquence

Reprenons le problème de référence dans le domaine fréquentiel dans sa version décomposée en un ensemble de sous-domaines, équation 1.5. Nous nous restreignons à la résolution d'une seule fréquence. Pour alléger la notation nous retirons les indices ω . La VTCR s'applique à un problème homogène, le problème de référence est donc modifié en lui ajoutant une solution particulière par sous-domaine sous la forme $p_E(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_E} s(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\rho(\mathbf{y})$ avec G la fonction de Green et \mathbf{x} et \mathbf{y} les vecteurs positions. Dans le cas de l'acoustique 2D, la fonction de Green est la fonction de Hankel $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4}H_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ de première espèce d'ordre 0 [120]. En introduisant $p^h = p - p^p$ le problème de référence 1.5 écrit pour une fréquence devient un problème homogène aux conditions de bords modifiées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_E^h + k^2 p_E^h = 0 & \text{dans } \Omega_E \\ p_E^h - Z \frac{i}{\omega \rho} \frac{\partial p_E^h}{\partial \mathbf{n}_E} = h_d - p_E^p + Z \frac{i}{\omega \rho} \frac{\partial p_E^p}{\partial \mathbf{n}_E} & \text{dans } \partial_h \Omega_E \\ p_E^h = p_d - p_E^p & \text{dans } \partial_d \Omega_E \\ -\frac{\partial p_E^h}{\partial \mathbf{n}_E} = i\omega \rho v_d + \frac{\partial p_E^h}{\partial \mathbf{n}_E} & \text{dans } \partial_v \Omega_E \\ p_E^h - p_{E'}^h = -p_E^p + p_{E'}^p & \text{dans } \Gamma_{E,E'} \\ \frac{\partial p_E^h}{\partial \mathbf{n}_E} + \frac{\partial p_{E'}^h}{\partial \mathbf{n}_{E'}} = -\frac{\partial p_E^p}{\partial \mathbf{n}_E} - \frac{\partial p_{E'}^p}{\partial \mathbf{n}_{E'}} & \text{dans } \Gamma_{E,E'} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Pour simplifier nous considérons à présent seulement des problèmes homogènes et retirons l'indice h .

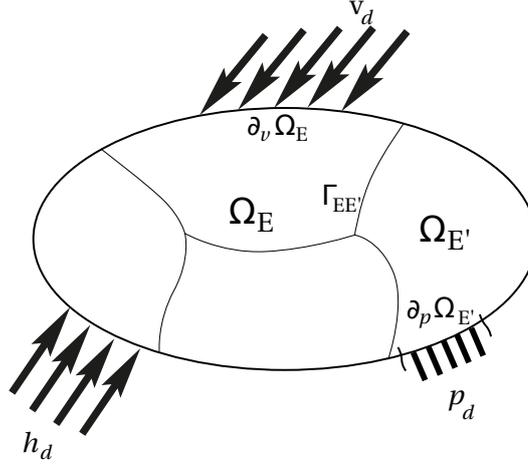


FIGURE 3.1 Problème de référence.

3.2.2 Formulation variationnelle VTCR

Introduisons l'espace \mathcal{S}_E des champs de pression vérifiant l'équation de Helmholtz :

$$\mathcal{S}_E = \{p_E / \Delta p_E + k^2 p_E = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_E\} \quad (3.4)$$

et définissons la norme énergétique suivante :

$$\|p_E\|_E^2 = \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega_E} \frac{1}{|k|^2} |\nabla p_E|^2 + |p_E|^2 d\Omega \quad (3.5)$$

La VTCR consiste à reformuler le problème 3.3 sous une forme variationnelle :

Trouver $p = (\dots, p_E, \dots) \in \dots \times \mathcal{S}_E \times \dots$ tel que :

$$b(p, q) = l(q) \quad \forall q = (\dots, q_E, \dots) \in \dots \times \mathcal{S}_E \times \dots \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} b(p, q) &= \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_z \Omega_E} \left(p_E - \frac{iZ}{\omega\rho} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(\frac{\omega\rho}{iZ} q_E^* - \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &+ \sum_{E=1}^{N_\Omega} \int_{\partial_\rho \Omega_E} p_E \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} d\partial\Omega + \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_\nu \Omega_E} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} q_E^* d\partial\Omega \\ &+ \sum_{E, E' < E} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{EE'}} \left[(p_E - p_{E'}) \left(\frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} - \frac{\partial q_{E'}^*}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) + \left(\frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} + \frac{\partial p_{E'}}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) (q_E^* + q_{E'}^*) \right] d\Gamma \quad (3.7) \\ l(q) &= \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_z \Omega_E} h_{dE} \left(\frac{\omega\rho}{iZ} q_E^* - \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &+ \sum_{E=1}^{N_\Omega} \int_{\partial_\rho \Omega_E} p_{dE} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} d\partial\Omega - \sum_{\Omega_E} \int_{\partial_\nu \Omega_E} i\omega\rho v_{dE} q_E^* d\partial\Omega \end{aligned}$$

avec \square^* l'opération conjuguée. Cette formulation peut s'interpréter comme un équilibre des puissances aux frontières des sous-domaines. La formulation variationnelle mixte non symétrique offre une grande flexibilité sur le choix des conditions de bords à imposer. Dans [85], il a été démontré que cette formulation est équivalente au problème de référence, à condition que l'amortissement soit non nul. Ainsi dès lors que $\eta > 0$ et $\Re(Z) \geq 0$ la solution existe, elle est unique et elle est continue par rapport au chargement.

3.2.3 Fonctions de forme et espace discret

Pour construire une approximation de dimension finie des espaces \mathcal{S}_E nous exploitons le fait que le champ de pression peut s'exprimer avec une fonction de Herglotz, soit une intégrale d'onde plane. La fonction de Herglotz se définit par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E : L^2(\mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{S}(\Omega_E) \\ a_E &\rightarrow p = \mathcal{H}_E(a_E) = \int_{\theta \in \mathcal{C}} a_E(\theta) e^{ik\mathbf{u}(\theta) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)} d\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec \mathbf{x}_E un point dans Ω_E appelé origine du sous-domaine, $\mathcal{C} = [0, 2\pi]$ et $\mathbf{u}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ la direction de l'onde plane. La fonction de Herglotz est une somme continue d'ondes planes de direction $\mathbf{n}(\theta)$ et d'amplitude $a_E(\theta)$. Sous certaines hypothèses de régularité de Ω_E , soit $\partial\Omega_E$ lipschitzienne et Ω_E un sous-domaine étoilé, l'image de \mathcal{H}_E est dense dans \mathcal{S}_E [36] [157]. Ainsi plutôt que de rechercher les champs $p_E \in \mathcal{S}_E$, l'approche VTCR consiste à rechercher les quantités $a_E \in L^2(\mathcal{C})$ appelées "portraits". Cela fait de la méthode VTCR une méthode Trefftz indirecte.

Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution, dans chaque sous-domaine Ω_E , les espaces $L^2(\mathcal{C})$ sont approximés par des sous-espaces de dimension finie. Pour un sous-domaine Ω_E donné, le portrait est recherché dans un espace de dimension N_E et défini par la base $\mathbf{A}_E = (\dots, a_{nE}, \dots)$. Un portrait s'écrit alors :

$$a_E(\theta) = \sum_{n=1}^{N_E} A_{nE} a_{nE}(\theta) \quad (3.9)$$

avec A_{nE} les amplitudes complexes. Nous notons \mathbf{A}_E le vecteur des amplitudes A_{nE} . Le champ de pression s'écrit :

$$p_E = \mathcal{H}_E \left(\sum_{n=1}^N A_{nE} a_{nE} \right) = \sum_{n=1}^N A_{nE} \mathcal{H}_E(a_{nE}) = \sum_{n=1}^N A_{nE} \phi_{nE} \quad (3.10)$$

avec $\phi_{nE} = \mathcal{H}_E(a_{nE})$ une fonction de forme Trefftz du champ de pression. L'espace des champs de pression est noté :

$$\mathbf{P}_E = (\dots, \phi_{nE}, \dots) \quad (3.11)$$

Plusieurs espaces discrets ont été proposés par le passé :

- **Espace des rayons :** Le champ de pression est recherché sous la forme d'une somme d'ondes planes, ce qui revient à considérer que le portrait est une distribution de Dirac. Les portraits de bases s'écrivent :

$$a_{nE} = \delta_{\theta_{nE}}(\theta) \quad (3.12)$$

avec $\theta_{nE} = \frac{2\pi n}{N_E}$, $n \in \llbracket 1..N_E \rrbracket$ et δ la fonction de Dirac. La discrétisation angulaire est constante ici, ce n'est pas toujours le cas dans les diverses applications de la méthode. Les fonctions de forme s'expriment :

$$\phi_{nE} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{u}(\theta_n) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)} \quad (3.13)$$

Cette approximation permet une intégration analytique de l'expression 3.6 sur les bords droits ce qui la rend avantageuse en terme de coût de construction des opérateurs VTCR.

- **Espace des secteurs :** Le portrait a_E est recherché sous forme d'une fonction constante par morceaux, ce qui revient à utiliser des portraits de base de la forme :

$$a_{nE} = \begin{cases} 1 & \forall \theta \in [\theta_{n-1}, \theta_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

avec $\theta_{nE} = \frac{2\pi n}{N_E}$, $n \in \llbracket 1..N_E \rrbracket$. La discrétisation angulaire est constante ici, ce n'est pas toujours le cas dans les diverses applications de la méthode. Les fonctions de forme s'expriment :

$$\phi_{nE} = \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{u}(\theta) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)} d\theta \quad (3.15)$$

Les fonctions de forme n'ont pas d'expression analytique simple et l'intégration sur les bords dans la formulation variationnelle n'a pas d'expression analytique. Cette fonction de forme s'approche asymptotiquement d'une onde plane dans la direction $\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2}$ lorsque $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n$ tend vers 0. En pratique il n'y a pas d'avantage à utiliser cette base plutôt que la base des rayons, ce qui explique qu'elle a été délaissée ces dernières années.

- **Espace de Fourier :** Le portrait a_E est recherché sous forme d'une série de Fourier tronquée. Les portraits de bases s'écrivent :

$$a_{nE} = e^{in\theta} \quad (3.16)$$

avec $n \in \llbracket -N_E/2..N_E/2 \rrbracket$. Les fonctions de forme s'expriment :

$$\phi_{nE} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{i\mathbf{k}\mathbf{u}(\theta) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)} d\theta \quad (3.17)$$

Ces fonctions de forme s'expriment analytiquement sous la forme (première identité intégrale de Bessel) :

$$\phi_{nE} = 2\pi i^n e^{in\theta_0} J_n(kr) \quad (3.18)$$

avec J_n les fonctions Bessel de première espèce, (r, θ_0) les coordonnées polaires de la position \mathbf{x} et d'origine \mathbf{x}_E ([127] p13 équation 62).

Le principal avantage de cette base se trouve dans son caractère hiérarchique ce qui facilite l'enrichissement de l'espace discret tout en contrôlant le mauvais conditionnement de l'opérateur VTCR [85]. Elle a été introduite dans [85] pour l'acoustique 2D et étendue à l'acoustique 3D [86]. Tout comme pour la base des secteurs, l'intégration sur les bords dans la formulation variationnelle n'est pas analytique.

Les fonctions de forme des différentes bases sont illustrées figure 3.2. Pour la dimension de la base des fonctions de Fourier, l'auteur de [85] propose un critère basé sur une approche énergétique. De manière générale et sans connaissance à priori de la solution, ces approximations sont équivalentes en terme de nombre de fonctions, de forme nécessaire pour atteindre un degré de convergence souhaité. Par la suite nous adoptons l'espace des rayons pour le choix des fonctions de forme.

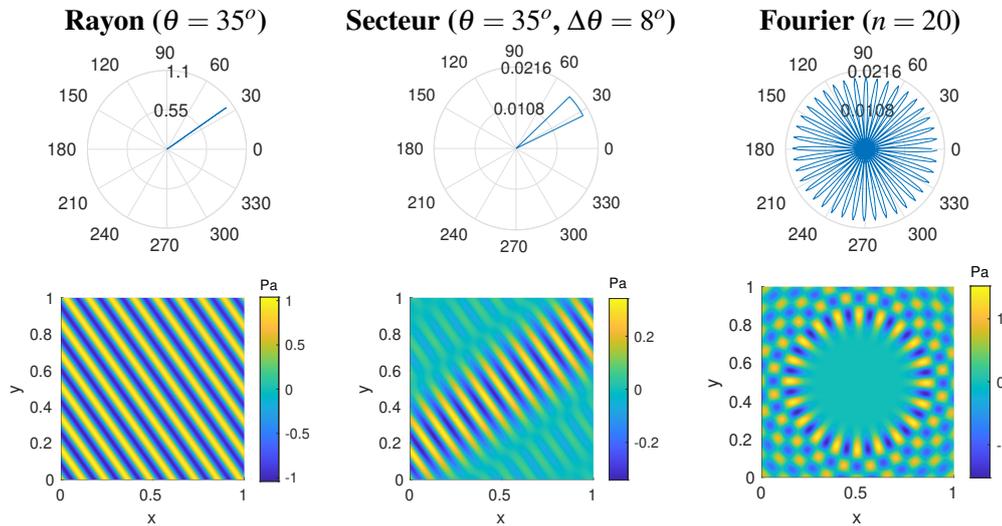


FIGURE 3.2 En haut, les portraits d'amplitude $a_{nE}(\theta)$ des différentes fonctions de forme, en bas les champs de pression des fonctions de forme, soit la fonction de Herglotz associée aux portraits, pour chacune des bases de fonctions de forme.

3.2.4 Problème matriciel

En introduisant n'importe quelle base de fonctions de forme dans la formulation variationnelle 3.6 et en utilisant la même base de fonctions tests nous obtenons un système matriciel :

$$\mathbb{K}A = L \quad (3.19)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \dots & & \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{K}_{N_{\Omega}N_{\Omega}} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{N_{\Omega}} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{N_{\Omega}} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

\mathbb{K} l'opérateur VTCR, L le vecteur second membre tel que :

$$\mathbb{K}_{EE'lm} = b(\phi_{mE'}, \phi_{lE}) \quad \text{et} \quad L_{El} = l(\phi_{lE}) \quad (3.21)$$

où ϕ_{nE} est la $n^{\text{ième}}$ fonction de forme du sous-domaine Ω_E , A le vecteur inconnu des amplitudes des fonctions de forme et composé du vecteur A_E des inconnues par sous-domaine et b et l respectivement les formes bilinéaire et linéaire de la formulation variationnelle VTCR définies équation 3.7. Les blocs hors diagonaux $\mathbb{K}_{EE'}$ correspondent aux termes de couplage des sous-domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$, ils sont nuls dès lors qu'il n'y a pas de frontière commune.

3.2.5 Illustration numérique

Nous appliquons la VTCR à la résolution d'un problème d'acoustique 2D. Considérons une cavité bornée ($c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10^{-4}$) illustrée figure 3.3. Sur le bord $\partial_h \Omega$ l'impédance $Z = 44 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ est imposée. Les conditions de bords sont nulles partout sauf sur $\partial_d \Omega$ où $p_d = 1 \text{ Pa}$ et la fréquence est fixée à 2000 Hz.

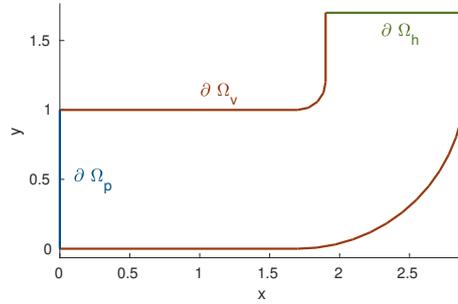


FIGURE 3.3 Définition du problème.

La résolution VTCR consiste à appliquer la démarche suivante :

- Le domaine est décomposé en sous-domaines étoilés, nous considérons trois sous-domaines ici, figure 3.4 (a).
- Une base de fonctions de forme est définie dans chacun des sous-domaines : ici nous choisissons une base de 150 rayons équirépartis pour chacun des sous-domaines.
- La base des fonctions de forme est injectée dans la formulation variationnelle 3.6 ce qui permet de définir le problème matriciel 3.19.
- Le problème matriciel est résolu et fournit le portrait solution dans chacun des sous-domaines, figure 3.4 (a).

— Le champ solution est construit à partir du portrait, figure 3.4 (b).

Le portrait solution est particulièrement irrégulier et de grande amplitude (de l'ordre de 5000 Pa pour le sous-domaine en forme de coude), d'apparence il n'y a pas de lien avec le champ reconstruit qui est d'amplitude plus faible (de l'ordre de 5 Pa). Cette particularité est caractéristique des méthodes Trefftz et est liée au mauvais conditionnement de la matrice VTCR \mathbb{K} équation 3.19. Néanmoins le champ construit converge et reste régulier.

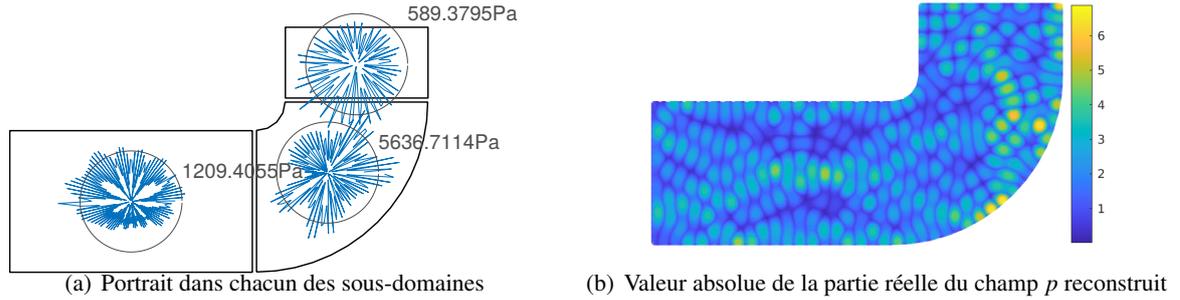


FIGURE 3.4 Résolution VTCR du problème 3.3.

3.3 Convergence de la VTCR

3.3.1 Raffinement p et h

Il existe plusieurs types de raffinement de l'espace de discrétisation :

- Le raffinement p consiste à enrichir le nombre de fonctions de forme par sous-domaine sans changer le nombre de sous-domaines.
- Le raffinement h consiste à augmenter le nombre de sous-domaines sans changer le nombre de fonctions de forme par sous-domaine.
- Le raffinement hp consiste à mixer les deux types de raffinement.

Nous reprenons les résultats de l'article [135] pour illustrer les différentes approches. La VTCR est appliquée à une cavité acoustique carrée ($c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\eta = 0$) de longueur L , avec des conditions de Robin d'impédance $Z = \rho c$ sur l'ensemble des 4 bords. Les conditions de bords h_d appliquées sont telles que la solution exacte du problème s'écrit $p_{ex} = p_0 e^{kn(\theta_0)\mathbf{x}}$ avec $\theta_0 = 12^\circ$. La fréquence choisie est telle que $kL = 60$. Deux stratégies de convergence sont traitées : convergence p avec un et deux sous-domaines et convergence h avec 32 et 52 ondes planes par sous-domaines. Introduisons l'erreur :

$$\varepsilon_\omega(p) = \sqrt{\frac{\sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_E - p_{E,refe}\|_E^2}{\sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{E,refe}\|_E^2}} \quad (3.22)$$

avec p_{refe} une solution de référence. Les résultats de convergence sont illustrés figure 3.5.

Remarque : cette erreur, qui sera régulièrement utilisée par la suite, est particulièrement sévère. Elle pénalise fortement les potentiels déphasages entre la référence et la solution testée alors qu'ils ne sont, en pratique, pas nécessairement représentatifs de la qualité de la solution. Ainsi une erreur de l'ordre de 10% traduit une relativement bonne qualité de la solution.

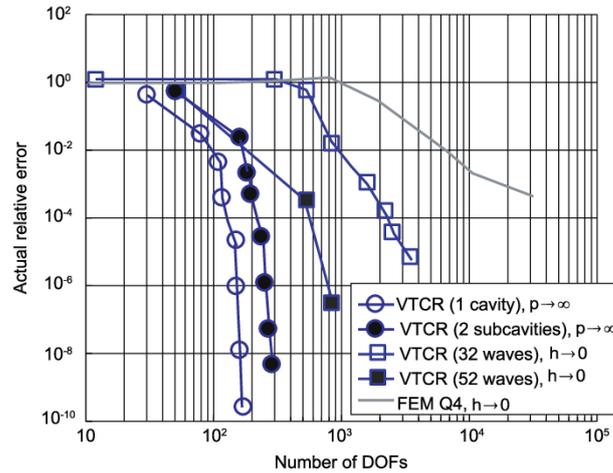


FIGURE 3.5 Convergence p et h en fonction du nombre de degrés de liberté VTCR et comparaison avec les EFs. Exemple d'une cavité acoustique 2D carrée [135].

Le nombre de fonctions de forme nécessaires pour atteindre une convergence donnée est bien moindre par l'approche raffinement p que par l'approche raffinement h . A même niveau de convergence, le raffinement h forme des matrices de plus grandes tailles que les matrices issues du raffinement p . Même si en contrepartie, elles sont plus creuses que les matrices issues du raffinement p , les matrices h restent plus chères à inverser. Ce résultat est connu et en pratique les auteurs privilégient le raffinement p .

Sur le même exemple, [80] (p141) démontre une convergence exponentielle pour le raffinement en p et une convergence polynomiale pour le raffinement en h des représentations en ondes planes.

3.3.2 Critère a priori de convergence

La convergence en fonction du nombre de fonctions de forme a un comportement particulier et typique de la représentation en ondes planes : un plateau puis une convergence rapide à partir d'un certain nombre de fonctions de forme. L'objectif étant de s'approcher au mieux de la solution du problème tout en minimisant le nombre de fonctions de forme, la connaissance a priori de ce seuil est un outil particulièrement utile. Un critère heuristique évalue le nombre de fonctions de forme N_E par sous-domaine E :

$$N_E = \mu k R_E \quad (3.23)$$

où R_E est la dimension caractéristique de Ω_E , k le nombre d'onde et μ un paramètre proche de 1 [47, 135]. Ce critère est défini pour une répartition uniforme des ondes. Il est illustré figure 3.6 pour

$\mu = 1$ pour les cavités à 1 et 2 sous-domaines. Nous pouvons remarquer qu'il concorde avec le début de la convergence des courbes en p raffinement.

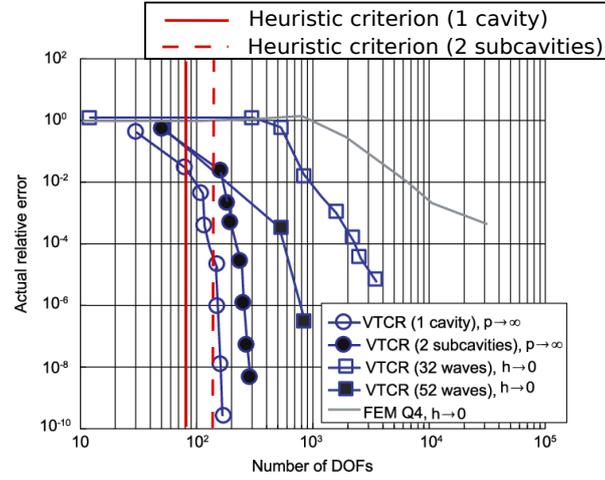


FIGURE 3.6 Illustration du critère heuristique de convergence sur les exemples de raffinement p [135]. Le nombre total de fonctions de forme donné par le critère est égale à 84 (1 sous-domaine) et 134 ($= 2 \times 67$ pour 2 sous-domaines).

Ce critère prévoit un nombre de fonctions de forme proportionnel à la dimension caractéristique du domaine Ω_E et non à sa surface, il prévoit donc une convergence plus rapide du raffinement p par rapport au raffinement h . En effet avec le raffinement h d'un domaine 2D, la dimension R_E évolue en $\frac{1}{\sqrt{N_\Omega}}$, donc le nombre total de rayons $\sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E \propto N_\Omega R_E \propto \sqrt{N_\Omega}$. Au vu du critère, le nombre total de fonctions de forme pour atteindre le critère augmente avec le nombre de sous-domaines, ce qui est confirmé numériquement.

Remarque : Même si théoriquement l'espace de rayon est dense dans $S_E(\Omega_E) \forall \Omega_E$ étoilé, du fait du mauvais conditionnement de l'opérateur \mathbb{K} les solutions sont parfois numériquement inaccessibles avec une base de portrait, et particulièrement dans le cas des domaines concaves. Figure 3.7 illustre la résolution d'un domaine concave avec un seul sous-domaine, et deux sous-domaines (découpage horizontale sur l'axe de symétrie) avec une base de rayon surdiscrétisée ($\mu = 3$, critère équation 3.23). On voit clairement que les champs sont différents et que le champ construit à partir d'une résolution à un seul sous-domaine ne vérifie pas les conditions de Dirichlet (les conditions imposées sont nulles partout sauf sur la paroi du bas). Si on considère le champ construit avec deux sous-domaines comme référence l'erreur de la première solution est de 72%. En pratique il s'agit donc de préconiser un découpage en sous-domaines convexes. C'est d'ailleurs la stratégie explicitement adoptée par les auteurs de la Wave Based Method, qui utilisent une base similaire à une base de rayons et qui imposent un découpage en sous-domaine convexes.

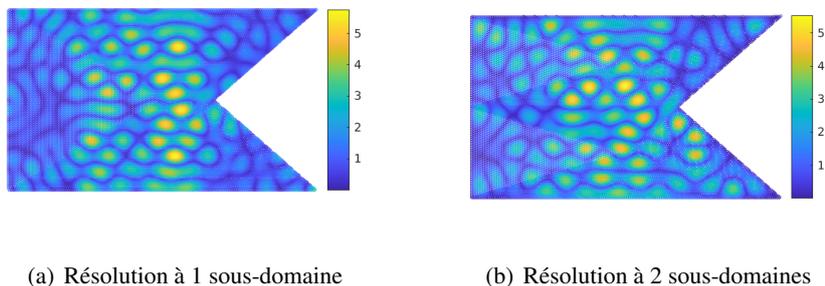


FIGURE 3.7 Valeur absolue du champ de pression, résolution d'un problème à géométrie concave avec un seul sous-domaine (à gauche) et deux sous-domaines (à droite) découpés horizontalement afin d'avoir deux sous-domaines convexes.

3.3.3 Conditionnement et régularisation de la VTCR

L'opérateur VTCR souffre de mauvais conditionnement : le conditionnement de la matrice \mathbb{K} augmente rapidement avec le nombre de fonctions de forme pour atteindre l'infini numérique, figure 3.8. Ce qui implique que le portrait se met à diverger et devient irrégulier. Cette caractéristique est partagée avec toutes les méthodes Trefftz. Elle provient du choix des fonctions de forme et non pas de la formulation variationnelle [73]. Il est régulièrement observé que le seuil à partir duquel la solution converge rapidement correspond approximativement au seuil à partir duquel le conditionnement de la matrice \mathbb{K} diverge. Le même critère heuristique 3.23 peut donc être utilisé pour prédire le nombre de fonctions de forme à partir duquel apparaît ce seuil.

Dans le cas particulier d'une cavité en forme de disque, une étude approfondie de l'origine du mauvais conditionnement et du lien avec la précision a été proposée dans [124]. Des développements analytiques de la représentation en ondes planes permettent d'estimer la précision et le conditionnement des opérateurs, il est établi que le conditionnement croît exponentiellement et l'erreur décroît exponentiellement à partir de $N_E = kR_E$, soit le critère heuristique 3.23 avec $\mu = 1$.

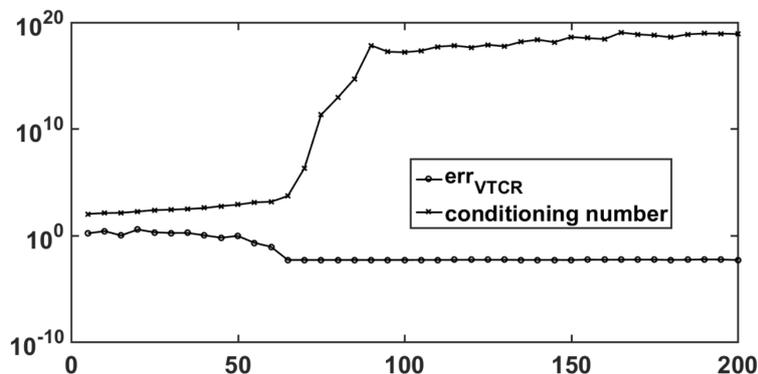


FIGURE 3.8 Conditionnement de l'opérateur VTCR en fonction du nombre d'ondes planes sur un exemple de plaque en flexion [2].

Un mauvais conditionnement se traduit par le fait que numériquement la solution, ici le portrait, n'est pas unique. Mais le portrait n'est pas la solution finale, si ce dernier s'avère être irrégulier à cause du mauvais conditionnement, ce n'est pas le cas du champ reconstruit qui lui est en général stable et unique. Néanmoins cela met en défaut certaines méthodes d'inversion comme la factorisation LU et certaines méthodes de résolution large bande comme la méthode de réduction de modèle PGD.

Pour rétablir l'unicité du portrait, une régularisation ou une restriction de l'espace dans lequel est recherché la solution est donc nécessaire. Plusieurs méthodes ont été proposées :

- Dans [86], l'auteur utilise une base de Fourier tronquée. Le conditionnement est très légèrement meilleur qu'avec une représentation en secteur. Il propose également une régularisation du portrait à posteriori à partir d'un critère énergétique, mais une fois modifié ce portrait ne permet pas de revenir au champ solution. Une approche semblable est proposée dans [108] pour la UWVF : une base de Fourier pondérée par un facteur calculé a priori est utilisée. L'efficacité reste limitée.
- Dans [135], les auteurs introduisent un opérateur de régularisation à ajouter à l'opérateur VTCR. L'opérateur à inverser devient :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} + \lambda_1 \mathbb{H}_1 & \mathbb{K}_{12} & \dots \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} + \lambda_2 \mathbb{H}_2 & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & \mathbb{K}_{N_\Omega N_\Omega} + \lambda_{N_\Omega} \mathbb{H}_{N_\Omega} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

avec \mathbb{H}_N un opérateur de régularisation qui représente la norme L2 de la dérivée seconde du portrait par rapport à θ , et λ_N un coefficient de pondération. L'approche ressemble à une régularisation de Tikhonov mais rappelons que l'opérateur VTCR n'est pas positif. Même si cette approche semble efficace, ses performances n'ont été que peu étudiées.

- Les auteurs de [84] présentent certainement l'approche la plus aboutie. Elle consiste à construire, à partir d'un champ EF, une base de portraits dont l'énergie est non négligeable dans chacun des sous-domaines en construisant un sous-espace de portraits \mathcal{A}_E tel que :

$$\forall a_E \in \mathcal{A}_E \quad \|p_E\|_E^2 = \|\mathcal{H}_E(a_E)\|_E^2 \geq \sigma \|a_E\|_2^2 \quad (3.25)$$

où $\|\square\|_E$ est la norme énergétique 3.5, $\|\square\|_2$ la norme 2 et σ un paramètre de la méthode. En pratique, elle nécessite la construction d'un opérateur \mathbb{M}_E qui au portrait associe la norme énergétique :

$$\|p_E\|_E^2 = A_E^H \mathbb{M}_E A_E \quad (3.26)$$

avec \square^H l'opérateur transposé conjugué. Les vecteurs propres qui correspondent aux plus grandes valeurs propres de la matrice \mathbb{M}_E sont utilisés comme une base tronquée de portraits. Dans le cas où elle est directement utilisée comme base de résolution, elle présente une relativement bonne convergence (erreur de l'ordre de 1%) avec un conditionnement de l'opérateur VTCR bien en

deçà de l'infini numérique. Pour augmenter la précision parfois insuffisante de la solution, ils proposent également de s'en servir comme initialisation du solveur LSQR. Cette approche, bien qu'efficace, est coûteuse à mettre en place car elle nécessite un maillage EF et la résolution d'un problème aux valeurs propres à chaque fréquence de résolution.

3.4 Conclusion

La méthode VTCR a largement été étudiée et fait partie des méthodes Trefftz les plus abouties. Des applications comme la simulation des vibrations de la partie supérieure du lanceur Ariane 5 d'ArianeGroup prouvent qu'elle est à la hauteur et à la maturité du niveau industriel. Comme toutes les méthodes Trefftz elle permet de reconstruire la contribution moyennes fréquences de la solution de manière prédictive avec un nombre de degrés de liberté drastiquement réduit par rapport aux approches éléments finis, ce qui en fait un excellent candidat pour la reconstruction de la réponse transitoire.

Actuellement la méthode souffre de mauvais conditionnement. Cette caractéristique bride l'efficacité des approches de résolution large bande présentées partie 2.2. Il s'agit là d'un verrou à débloquer pour aborder le problème sur une bande de fréquences. Des méthodes ont été proposées pour le surmonter mais elles manquent actuellement de performance et de robustesse.

Chapitre 4

Conditionnement de l'opérateur VTCR - construction de bases optimales

Ce chapitre est consacré à l'étude du conditionnement de l'opérateur VTCR et à la construction de bases de fonctions de forme qui ont la propriété de réduire son conditionnement. Une première approche consiste à construire une base Trefftz orthonormée en énergie. Elle est robuste mais relativement coûteuse. Après une étude approfondie de l'origine du conditionnement, une seconde base numériquement peu coûteuse, inspirée de la base de Fourier, est également proposée.

4.1	Eléments de compréhension sur l'origine du mauvais conditionnement et stratégies	47
4.1.1	Définition du conditionnement	47
4.1.2	L'origine du mauvais conditionnement de l'opérateur	47
4.1.3	Stratégies de conditionnement de l'opérateur VTCR	49
4.2	Stratégie 1 : Construction d'une base Trefftz orthonormée au sens de l'énergie	49
4.2.1	Base Trefftz orthonormée pour un domaine en forme de disque : un cas analytique	49
4.2.2	Base Trefftz orthonormée pour un domaine quelconque	52
4.2.3	Résolution VTCR avec la base orthonormée	56
4.2.4	Construction d'un portrait régularisé	58
4.2.5	Validation sur un cas complexe	60

4.2.6	Bilan	61
4.3	Stratégie 2 : Approximation quasi-analytique de la base orthogonale par une base de Fourier généralisée adaptée à la géométrie de chaque sous-domaine . . .	63
4.3.1	Énoncé d'un critère sur la discrétisation pour la précision et le conditionnement	63
4.3.2	Une première exploitation du critère sur la discrétisation pour construire une base de rayons optimale	73
4.3.3	Construction d'une base adaptative vérifiant le critère sur la discrétisation : la base de Fourier généralisée	76
4.3.4	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la résolution VTTCR . . .	79
4.3.5	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'une base large bande	81
4.3.6	Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'un portrait régularisé	83
4.3.7	Validation sur un cas complexe	85
4.3.8	Bilan	86
4.4	Conclusion	86

4.1 Eléments de compréhension sur l'origine du mauvais conditionnement et stratégies

4.1.1 Définition du conditionnement

Le conditionnement de l'opérateur VTCR \mathbb{K} est défini par :

$$\kappa(\mathbb{K}) = \|\mathbb{K}\| \|\mathbb{K}^{-1}\| = \frac{\sup_{A \in \mathbb{C}^{\Sigma N_E}} (\|\mathbb{K}A\| / \|A\|)}{\inf_{A \in \mathbb{C}^{\Sigma N_E}} (\|\mathbb{K}A\| / \|A\|)} \quad (4.1)$$

avec $\|\square\|$ la norme 2 de la matrice ou du vecteur \square . Nous avons également :

$$\kappa(\mathbb{K}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (4.2)$$

avec σ_{\max} et σ_{\min} les valeurs singulières maximale et minimale de \mathbb{K} . Une matrice est dite mal conditionnée lorsque son conditionnement est élevé et inversement elle est dite bien conditionnée lorsque son conditionnement est faible.

4.1.2 L'origine du mauvais conditionnement de l'opérateur

Reprenons le problème défini partie 3.2.5. La figure 4.1 illustre les valeurs singulières de la matrice VTCR construite avec 35, 70 et 150 rayons par sous-domaine (soit 105, 210 et 450 fonctions de forme au total). Le conditionnement étant égal au rapport des extremums des valeurs singulières de la matrice \mathbb{K} nous pouvons constater un bon conditionnement pour l'opérateur construit avec 35 rayons ($\kappa(\mathbb{K}) \approx 10^3$) et un mauvais conditionnement pour les opérateurs construits avec 70 et 150 rayons par sous-domaines ($\kappa(\mathbb{K}) \approx 10^9$ et $\approx 10^{17}$).

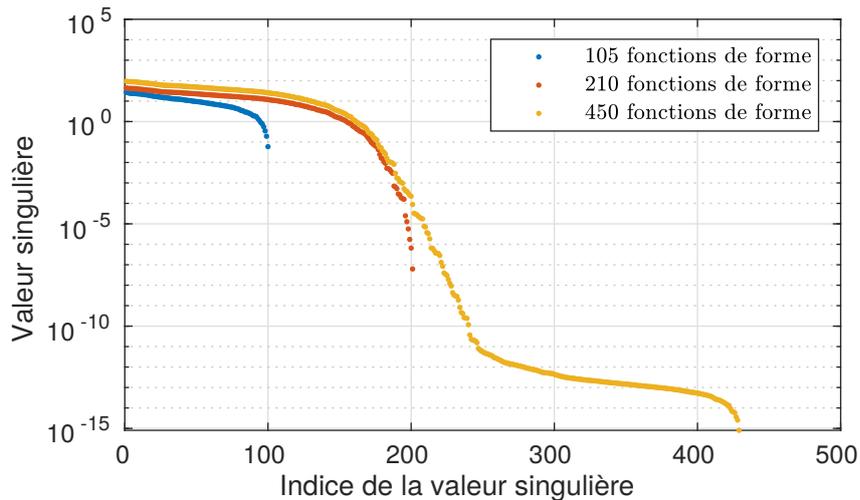


FIGURE 4.1 Valeurs singulières de la matrice \mathbb{K} pour différents nombres de fonctions de forme.

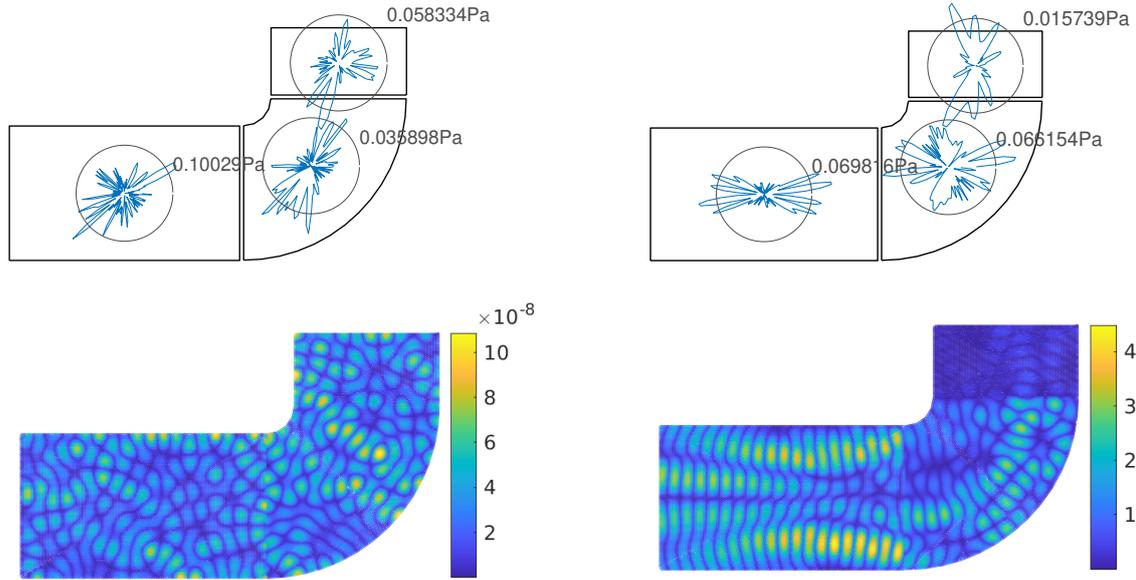


FIGURE 4.2 Portraits (en haut) et valeur absolue du champ en Pascal (en bas) associé à la plus petite (à gauche) et à la plus grande (à droite) valeur singulière de la matrice \mathbb{K} .

Nous visualisons les portraits normés et les champs de pression associés correspondant à ces valeurs singulières figure 4.2 pour le problème construit avec 150 fonctions de forme par sous-domaine. Ils sont construits à partir d'une Singular Value Decomposition (SVD) de la matrice \mathbb{K} . Le champ associé à la plus grande valeur singulière ne semble pas avoir de caractéristiques particulières, il est plus ou moins quelconque. Par contre le champ associé à la plus petite valeur singulière a une amplitude extrêmement faible ($\approx 10^{-8}$ Pa) malgré un portrait normalisé en norme L2. Il existe donc des combinaisons linéaires d'ondes planes qui génèrent des champs à énergie quasi nulle :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in L^2(\mathcal{C}) \text{ tel que } \|a\|_2^2 = 1 \text{ et } \|\mathcal{H}_E(a)\|_E^2 < \varepsilon \quad (4.3)$$

Cette propriété est à l'origine du mauvais conditionnement de l'opérateur VTCR.

Remarque : La matrice VTCR peut posséder de nombreuses valeurs singulières égale au zéro numérique, comme la matrice construite avec 450 rayons (figure 4.2). L'espace des vecteurs propres associé à ces valeurs singulières est numériquement inaccessible. La résolution numérique effective se fait sur l'espace généré seulement par les vecteurs propres associés aux valeurs propres numériquement non nulles, soit un espace de dimension 250 pour le cas à 450 rayons.

4.1.3 Stratégies de conditionnement de l'opérateur VTCR

Dans ce chapitre nous présentons deux stratégies pour diminuer le conditionnement de la matrice VTCR.

Une première stratégie consiste à attaquer frontalement la propriété 4.3 en construisant une base de fonctions de forme Trefftz orthonormées au sens de l'énergie. En pratique il s'agit de résoudre un problème aux valeurs propres faisant intervenir une matrice d'énergie et d'utiliser les vecteurs propres normalisés comme fonctions de forme. Cette approche permettra également de définir un portrait régularisé en énergie, appelé portrait effectif. Cette approche est particulièrement bien adaptée au prix d'un coût numérique important.

Pour pallier aux coûts numériques, nous proposons une seconde approche qui consiste à construire analytiquement une base qui allie bon conditionnement et précision a priori. Il s'agira, dans un premier temps, d'étudier les propriétés de la matrice d'énergie pour dégager un critère précis sur le pas de discrétisation à adopter, pour contrôler à la fois la précision et le conditionnement. Nous allons l'exploiter et nous inspirer de la base de Fourier pour construire cette base.

4.2 Stratégie 1 : Construction d'une base Trefftz orthonormée au sens de l'énergie

Dans cette section nous construisons une base orthonormée en énergie. Comme les sous-domaines ne se recouvrent pas, les bases peuvent être construites indépendamment par sous-domaine. Dans un premier temps nous traitons le cas d'un sous-domaine en forme de disque puisque dans ce cas nous pouvons analytiquement construire cette base. Nous traiterons ensuite le cas d'un sous-domaine quelconque puis nous étudierons le conditionnement de la matrice \mathbb{K} avec cette base. Nous l'exploiterons pour construire un portrait régularisé en énergie.

4.2.1 Base Trefftz orthonormée pour un domaine en forme de disque : un cas analytique

Dans cette partie nous supposons l'amortissement $\eta = 0$. Par la suite nous traitons le cas d'un seul sous-domaine et afin d'alléger la notation nous retirons l'indice \square_E . Définissons les produits scalaires suivants :

- Le produit scalaire du portrait : $a, b \in L_2(\mathcal{C})$

$$(a, b)_2 = \int_0^{2\pi} ab^* d\theta \quad (4.4)$$

- Le produit scalaire énergétique : $p, q \in \mathcal{S}(\Omega)$

$$(p, q) = \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|k|^2} \nabla p \nabla q^* + pq^* d\Omega \quad (4.5)$$

Notons $\|\square\|_2 = \sqrt{(\square, \square)_2}$ la norme 2 et rappelons la norme énergétique $\|\square\| = \sqrt{(\square, \square)}$.

Définissons $(v_n, \bar{a}_n) \in \mathbb{C} \times L_2(\mathcal{C})$ les valeurs et fonctions propres qui vérifient :

$$(\mathcal{H}(\bar{a}_n), \mathcal{H}(b)) = v_n(\bar{a}_n, b)_2 \quad \forall b \in L_2(\mathcal{C}) \quad (4.6)$$

Nous supposons les portraits \bar{a}_n normés en norme L2. Une fois ces couples construits nous pouvons utiliser les vecteurs $\mathcal{H}_E(\bar{a}_n)$ qui sont orthogonaux entre eux au sens de l'énergie pour construire la base orthonormée $\tilde{\mathbf{P}}$, il suffit de les normer en énergie :

$$\tilde{\mathbf{P}} = (\dots, \tilde{\phi}_n, \dots) \quad (4.7)$$

avec ϕ_n les fonctions de forme :

$$\tilde{\phi}_n = \frac{1}{\|\mathcal{H}(\bar{a}_n)\|} \mathcal{H}(\bar{a}_n) = \frac{1}{\sqrt{v_n} \|\bar{a}_n\|_2} \mathcal{H}(\bar{a}_n) = \frac{1}{\sqrt{v_n}} \mathcal{H}(\bar{a}_n) \quad (4.8)$$

où \mathcal{H} la fonction de Herglotz 3.8.

Proposition 1. Soit Ω un disque de rayon R d'origine \mathbf{x}_0 confondu avec le centre du disque. Les couples $(v_n, \bar{a}_n) \in \mathbb{C} \times L_2(\mathcal{C})$ sont :

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \\ v_n &= \frac{4\pi^2}{2\rho c^2} \int_{r=0}^R \frac{r}{|k|^2} \left(\left| \frac{\partial J_n}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{n}{r} J_n(kr) \right|^2 \right) + r |J_n(kr)|^2 dr \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec J_n les fonctions de Bessel de première espèce.

Démonstration

Premièrement remarquons que la fonction $\mathcal{H}(e^{in\theta})$ est une fonction de forme de la base de Fourier 3.15, elle s'exprime analytiquement à partir des fonctions de Bessel :

$$\mathcal{H}_E(e^{in\theta})(r, \theta_0) = 2\pi i^n e^{in\theta_0} J_n(kr) \quad (4.10)$$

avec (r, θ_0) les coordonnées polaires de la position \mathbf{x} et d'origine \mathbf{x}_0 (voir [127] p13 équation 62). Soit $b \in L_2(\mathcal{C})$. b est développable en série de Fourier, notons B_m ses coefficients de Fourier :

$$b = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{im\theta} \quad (4.11)$$

En utilisant 4.10 et 4.11 les produits scalaires s'expriment dans le cas du disque :

$$\begin{aligned} (\bar{a}_n, b)_2 &= \int_0^{2\pi} \bar{a}_n b^* d\theta = \sqrt{2\pi} B_n^* \\ (\mathcal{H}(\bar{a}_n), \mathcal{H}(b)) &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega} \frac{1}{|k|^2} \nabla \mathcal{H}_E(\bar{a}_n) \nabla \mathcal{H}(b)^* + \mathcal{H}(\bar{a}_n) \mathcal{H}(b)^* d\Omega \\ &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\theta_0=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{1}{|k|^2} \nabla \left(\sqrt{2\pi} i^n e^{in\theta_0} J_n(kr) \right) \nabla \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m 2\pi i^m e^{im\theta_0} J_m(kr) \right)^* \\ &\quad + \left(\sqrt{2\pi} i^n e^{in\theta_0} J_n(kr) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m 2\pi i^m e^{im\theta_0} J_m(kr) \right)^* dr r d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} 4\pi^2 B_n^*}{2\rho c^2} \int_{r=0}^R \frac{r}{|k|^2} \left(\left| \frac{\partial J_n}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{n}{r} J_n(kr) \right|^2 \right) + r |J_n(kr)|^2 dr \end{aligned} \quad (4.12)$$

Donc $\forall b \in L_2(\mathcal{C})$ nous avons :

$$(\mathcal{H}(\bar{a}_n), \mathcal{H}(b)) = \frac{4\pi^2}{2\rho c^2} \int_{r=0}^R \frac{r}{|k|^2} \left(\left| \frac{\partial J_n}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{n}{r} J_n(kr) \right|^2 \right) + |J_n(kr)|^2 dr (\bar{a}_n, b)_2 \quad (4.13)$$

Ce qui prouve la proposition 1.

Nous en déduisons que dans le cas du disque les fonctions de forme orthonormées en énergie s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n &= \frac{\mathcal{H}(e^{in\theta})}{\sqrt{2\pi v_n}} = \mathcal{H} \left(\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi v_n}} \right) \\ \text{avec } v_n &= \frac{4\pi^2}{2\rho c^2} \int_{r=0}^R \frac{r}{|k|^2} \left(\left| \frac{\partial J_n}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{n}{r} J_n(kr) \right|^2 \right) + r |J_n(kr)|^2 dr \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les valeurs propres v_n sont illustrées figure 4.3 pour un disque de diamètre $D = 1$ m à une fréquence $f = 2000$ Hz. Les valeurs pour n négatif ne sont pas illustrées car $v_n = v_{-n}$. Nous observons un comportement similaire entre les valeurs singulières de la matrice \mathbf{K} et les valeurs propres v_n : une décroissance exponentielle à partir de $n \approx 1/2Dk = 36.9$, soit le seuil défini par le critère heuristique équation 3.23 avec $\mu = 1$ et $R_E = 1$ m.

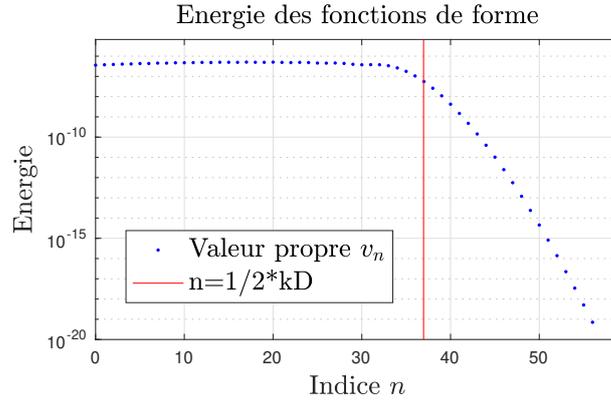


FIGURE 4.3 Valeurs propres v_n pour une cavité en forme de disque, construction analytique.

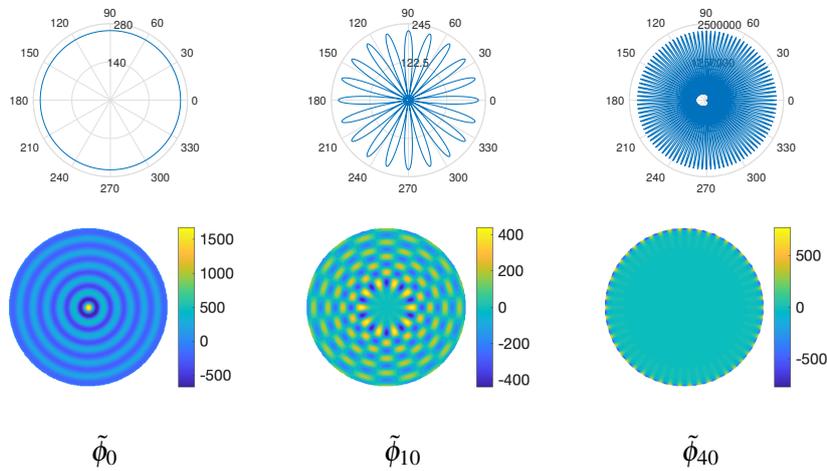


FIGURE 4.4 Fonctions de forme $\tilde{\phi}_n$ et portraits $\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{v_n}}$ orthonormés en énergie dans le cas d'une cavité en forme de disque, construction analytique.

Remarque : Les fonctions $\mathcal{H}(e^{in\theta})$ sont les fonctions de la base de Fourier 3.15 développées dans la thèse [83]. Nous comprenons à présent l'intérêt de cette base pour traiter le mauvais conditionnement. Notons que son intérêt est limité car ces fonctions de forme ne sont orthogonales que pour le disque.

4.2.2 Base Trefftz orthonormée pour un domaine quelconque

Méthode de construction

Dans cette partie nous traitons toujours le cas d'un seul sous-domaine et afin d'alléger la notation nous retirons l'indice \square_E . L'objectif de cette partie consiste à construire numériquement une base orthonormée pour n'importe quelle géométrie de sous-domaine Ω . Le problème aux valeurs propres ne pouvant être résolu analytiquement nous proposons une approche numérique.

Considérons Ω un sous-domaine étoilé quelconque d'origine \mathbf{x}_0 et $\mathbf{A} = (\dots, a_n, \dots)$ une base de portraits de départ de dimension N . Notons $\phi_n = \mathcal{H}(a_n)$ les fonctions de forme en pression. Définissons

les matrices \mathbb{M} et \mathbb{N} telles que $\forall a, b \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}(a, b)_2 &= \mathbf{B}^H \mathbb{N} \mathbf{A} \\ (\mathcal{H}(a), \mathcal{H}(b)) &= \mathbf{B}^H \mathbb{M} \mathbf{A}\end{aligned}\quad (4.15)$$

avec \mathbf{A} et \mathbf{B} les vecteurs d'amplitude des fonctions de forme et :

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{lm} &= (a_m, a_l)_2 \\ \mathbb{M}_{lm} &= (\phi_m, \phi_l)\end{aligned}\quad (4.16)$$

avec l et m respectivement les indices des lignes et des colonnes des matrices. La matrice \mathbb{N} ne présente pas de difficulté de construction particulière. Notons néanmoins que si la base de départ est une base de rayons, le produit scalaire $(a_m, a_l)_2$ n'est pas défini. Dans ce cas on étend arbitrairement la définition en fixant $\mathbb{N} = \mathbb{I}$, avec \mathbb{I} la matrice identité.

La construction de la matrice \mathbb{M} nécessite une attention particulière puisqu'elle nécessite la construction du champ p et de son gradient sur tout le sous-domaine Ω . Dans [84] est proposée une approche pour construire la matrice \mathbb{M} par éléments finis que nous adoptons et redétaillons ici. La démarche consiste à projeter les fonctions de forme ϕ_n sur les nœuds d'un maillage et de construire les matrices de masse et de raideur éléments finis associées au produit scalaire 4.5.

Notons $(\mathbf{x}_n^{EF})_{n=1..NEF}$ les nœuds du maillage, h la taille caractéristique d'une maille et ξ_n les fonctions de forme éléments finis. Introduisons $\mathbb{P}_{\mathbf{A}}^{EF}$ la matrice de collocation des valeurs de ϕ_n aux nœuds du maillage :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{A}}^{EF}{}_{lm} = \phi_m(\mathbf{x}_l^{EF}) \quad (4.17)$$

Les matrices de masse \mathbb{M}^{EF} et de raideur \mathbb{K}^{EF} éléments finis associées au maillage EF du sous-domaine Ω sont construites de manière classique tel que :

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{lm}^{EF} &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega} \xi_l(\mathbf{x}) \xi_m(\mathbf{x}) d\Omega \\ \mathbb{K}_{lm}^{EF} &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega} \nabla \xi_l(\mathbf{x}) \nabla \xi_m(\mathbf{x}) d\Omega\end{aligned}\quad (4.18)$$

Ainsi la matrice \mathbb{M} s'exprime :

$$\mathbb{M} = \mathbb{P}_{\mathbf{A}}^{EFH} \left(\mathbb{M}^{EF} + \frac{1}{|k|^2} \mathbb{K}^{EF} \right) \mathbb{P}_{\mathbf{A}}^{EF} \quad (4.19)$$

Réécrivons le problème aux valeurs propres dans le cas discrétisé initialement défini dans le cas continu 4.6. Définissons $(v_n, \bar{\mathbf{A}}_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ les valeurs et vecteurs propres du problème discret :

$$\mathbb{M} \bar{\mathbf{A}}_n = v_n \mathbb{N} \bar{\mathbf{A}}_n \quad (4.20)$$

Notons $\bar{a}_n(\theta) = \sum_{m=1}^N \bar{A}_{nm} a_m(\theta)$ le portrait associé à \bar{A}_n . Nous supposons \bar{a}_n normé en norme L2, soit $\bar{A}_n^H \bar{N} \bar{A}_n = 1$. Une fois ces couples construits nous utilisons les champs $\mathcal{H}(\bar{a}_n)$ qui sont orthogonaux entre eux pour construire la base orthonormée :

$$\tilde{\phi}_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{A}_n^H \bar{M} \bar{A}_n}} \mathcal{H}(\bar{a}_n) = \frac{1}{\sqrt{v_n}} \mathcal{H}(\bar{a}_n) = \mathcal{H}\left(\frac{\bar{A}_n}{\sqrt{v_n}}\right) \quad (4.21)$$

Notons $\tilde{\mathbb{A}}$ la matrice de base des portraits des fonctions de forme orthonormée associée au sous-domaine Ω

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\dots, \frac{1}{\sqrt{v_n}} \bar{A}_n, \dots \right) \quad (4.22)$$

La base orthonormée est propre à chaque sous-domaine. Par la suite nous réintroduirons l'indice \square_E pour désigner l'indice du sous-domaine E et noterons cette matrice $\tilde{\mathbb{A}}_E$.

Illustration numérique des fonctions de forme orthonormées sur une cavité rectangulaire

Considérons une cavité acoustique ($c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta = 0.001$) décomposée en un seul sous-domaine et de longueur 1.7m et de hauteur 1m. La fréquence est fixée à 2000 Hz. La base des portraits est une base de 126 rayons équi-répartis et le pas spatial du maillage éléments finis est $h = 0.01 \text{ m}$. Les conditions de bord n'ont pas besoin d'être définies pour construire les fonctions de forme orthonormées. Comme nous optons pour une base de rayons, $\mathbb{N}_E = \mathbb{I}$, les valeurs propres et vecteurs propres peuvent être construits à partir d'une SVD de la matrice \mathbb{M}_E . Les valeurs propres v_n sont illustrées sur la figure 4.5. Nous avons le même comportement typique que pour la cavité circulaire : un plateau puis une décroissance exponentielle des valeurs propres jusqu'à atteindre le zéro numérique à environ 10^{-20} .

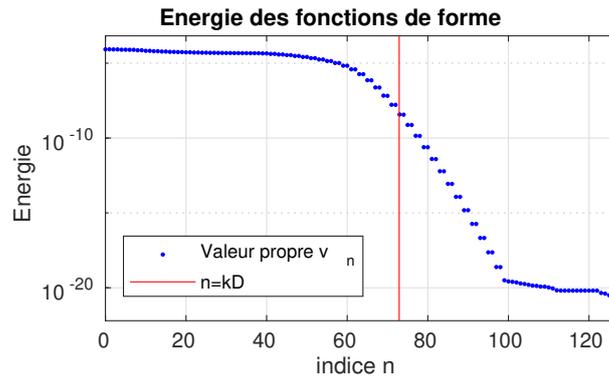


FIGURE 4.5 Valeurs propres v_n d'une cavité rectangulaire, construction numérique.

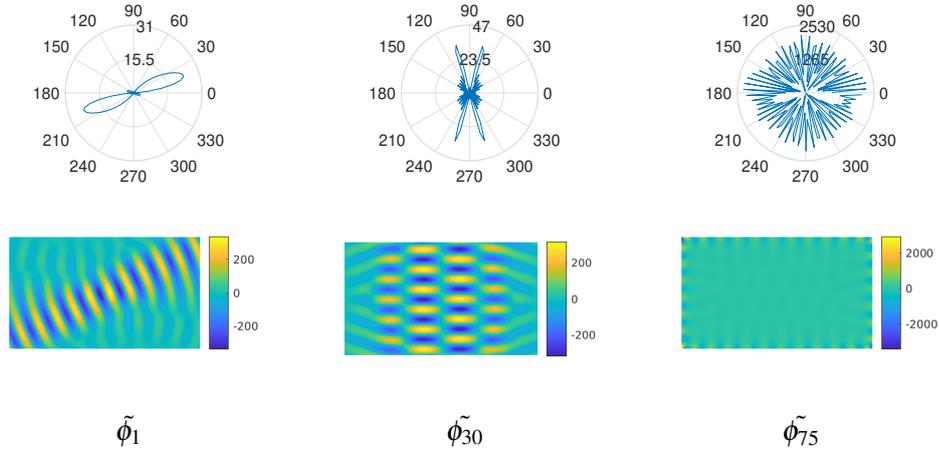


FIGURE 4.6 Portrait $\frac{\bar{a}_n}{\sqrt{v_n}}$ et fonctions de forme $\tilde{\phi}$ de la base orthonormée en énergie d'une cavité rectangulaire, construction numérique.

Les fonctions de forme $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_{30}$ ont des portraits directs. Le champ de la fonction de forme $\tilde{\phi}_{75}$ qui est associée à une faible valeur singulière et est concentré sur le bord, c'est une onde évanescente et le portrait associé est très diffus.

Remarque : il peut paraître surprenant qu'une combinaison d'ondes planes de longueur d'onde fixée puissent générer des ondes évanescentes. On retrouve ce résultat dans [12] qui montre qu'une onde évanescente définie par $p_{ev} = \exp(ikx \cosh A) \exp(-ky \sinh A)$ avec $A \in \mathbb{R}$ peut également s'écrire comme la fonction de Herglotz d'une limite de portrait a_Δ ([12] équation 4) :

$$p_{ev} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathcal{H}(a_\Delta)(x) \quad (4.23)$$

avec :

$$a_\Delta(\theta) = \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2}{\Delta^2} \sin^2(1/2(\theta - iA))} \quad (4.24)$$

On en déduit qu'une onde évanescente peut être approchée par une somme finie d'ondes planes avec une erreur arbitrairement petite. Le portrait a une amplitude importante contrôlée par $\frac{1}{\Delta}$, elle tend vers l'infini lorsque Δ tend vers zéro, d'où la faible amplitude de la valeur singulière associée au champ $\tilde{\phi}_{75}$, voir figure 4.6.

Remarque : la régularisation de l'opérateur par une matrice représentant la norme 2 de la dérivée seconde du portrait a pour effet d'atténuer les oscillations du portrait. Nous comprenons à présent que les fortes oscillations du portrait représentent des champs à caractère évanescent, atténuer les oscillations du portrait consiste à atténuer ces champs évanescents.

4.2.3 Résolution VTCR avec la base orthonormée

Assemblage des problèmes associés aux fonctions de forme orthonormées

Nous allons utiliser la base orthonormée comme base de résolution VTCR. Il s'agit d'utiliser les bases préalablement construites par sous-domaine comme bases de fonctions de forme et de fonctions tests. Réintroduisons l'indice \square_E pour désigner le sous-domaine Ω_E . Le problème matriciel VTCR s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{A} = \tilde{F} \quad (4.25)$$

$$\tilde{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{K}}_{11} & \tilde{\mathbb{K}}_{12} & \dots & & \\ \tilde{\mathbb{K}}_{21} & \tilde{\mathbb{K}}_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{\mathbb{K}}_{N_\Omega N_\Omega} \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_{N_\Omega} \end{pmatrix} \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 \\ \vdots \\ \tilde{L}_{N_\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

avec :

$$\tilde{\mathbb{K}}_{EE'lm} = b(\tilde{\phi}_{mE'}, \tilde{\phi}_{lE}) \quad \text{et} \quad \tilde{L}_{El} = l(\tilde{\phi}_{lE}) \quad (4.27)$$

et \tilde{A} le vecteur inconnu des amplitudes des fonctions de forme orthonormées composé des vecteurs des inconnues par sous-domaines \tilde{A}_E . $\tilde{\phi}_{nE}$ est la $n^{\text{ième}}$ fonction de forme de la base orthonormée du sous-domaine Ω_E et b et l respectivement les formes bilinéaire et linéaire de la formulation variationnelle VTCR 3.7. Nous pouvons montrer que numériquement le problème 4.25 s'écrit comme la projection du problème VTCR sur la base orthonormée :

$$\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{A}^H \mathbb{K} \tilde{A} \quad \text{et} \quad \tilde{F} = \tilde{A}^H F \quad (4.28)$$

avec \tilde{A} la matrice diagonale par bloc de projection sur les bases orthonormées :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_{N_\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

et \tilde{A}_E les bases de fonctions orthonormées définies par l'équation 4.22, \mathbb{K} et F l'opérateur et le second membre VTCR construit avec les bases de départ utilisées pour construire les fonctions de forme orthonormées. La matrice \tilde{A} apparaît comme un préconditionneur à droite et à gauche de la matrice \mathbb{K} . Le nouvel opérateur $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{A}^H \mathbb{K} \tilde{A}$ présente un conditionnement bien moins important que l'opérateur \mathbb{K} tout en conservant le même espace de résolution puisque la matrice \tilde{A} est carrée. Notons néanmoins que certaines valeurs propres atteignent le zéro numérique ce qui risque de dégrader le conditionnement, il peut être nécessaire de devoir retirer les vecteurs propres associés aux très petites valeurs propres.

Pour revenir aux portraits A exprimés dans la base de départ avec laquelle a été construite les opérateurs \mathbb{K} , F et \tilde{A} il suffit de calculer :

$$A = \tilde{A} \tilde{A} \quad (4.30)$$

C'est ce portrait qui permet la reconstruction du champ p .

Illustration numérique

Nous illustrons la méthode sur la cavité acoustique rectangulaire présentée partie 4.2.2 : une cavité acoustique ($c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta = 0.001$ et $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$) rectangulaire sollicitée à une fréquence de 2000 Hz. Considérons des conditions de bords de Dirichlet nulles partout sauf sur la paroi de gauche où $p = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x))$ avec x l'abscisse curviligne de la paroi de gauche. Le nombre de longueurs d'onde est d'environ 10 dans le domaine. Le domaine est décomposé en un seul sous-domaine et nous utilisons une base de rayons uniforme comme base de construction des fonctions de forme orthonormée et comme base de comparaison. A titre informatif, le critère heuristique 3.23 donne un nombre de 72 fonctions de forme pour $\mu = 1$ et R_E la diagonale du domaine.

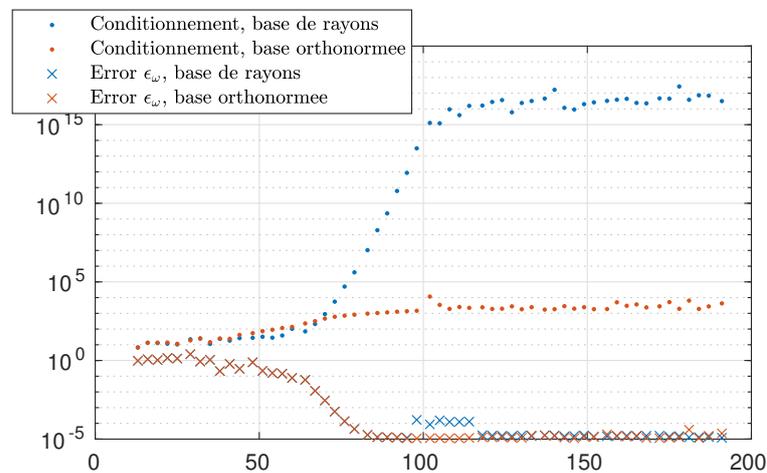


FIGURE 4.7 Conditionnement et erreur en fonction du nombre de fonctions de forme avec l'opérateur préconditionné et l'opérateur classique.

Les résultats sont illustrés figure 4.7. L'erreur ϵ_ω est définie équation 3.22. Ce résultat montre la performance de la base orthonormée en énergie. Alors que le conditionnement de l'opérateur construit avec la base des rayons diverge à partir d'environ 70 fonctions de forme (soit environ à partir de la dimension donnée par le critère heuristique 3.23 qui donne un nombre de 73 fonctions de forme pour $\mu = 1$ et R_E la diagonale du domaine), le conditionnement de l'opérateur construit avec la base orthonormée tend à converger vers environ 10^3 ce qui est bien en deçà du zéro numérique. Les erreurs des deux approches sont quasi superposées. Ce n'est pas étonnant puisque le même espace de solution p est représenté, il n'est seulement pas représenté par la même base. Notons néanmoins une meilleure convergence de l'approche avec une base orthonormée autour de 100 fonctions de forme, ce qui provient certainement du mauvais conditionnement de \mathbb{K} .

Comportement du conditionnement de la matrice $\tilde{\mathbb{K}}$

Le conditionnement de l'opérateur $\tilde{\mathbb{K}}$ tend à converger avec le nombre de fonctions de forme. Afin de dégager les facteurs influents sur la valeur du conditionnement de cet opérateur nous étudions l'influence de l'amortissement et de la fréquence.

La figure 4.8 illustre le conditionnement de $\tilde{\mathbb{K}}$ sur une bande de fréquences $I_\omega = [1990 \text{ Hz}, 2010 \text{ Hz}]$ à différents amortissements η . En rouge correspond le cas à $\eta = 0.001$, soit le cas traité dans la partie précédente. $\tilde{\mathbb{K}}$ est construit avec 95 fonctions de forme. Le conditionnement a l'allure d'une réponse fréquentielle : il prend des valeurs importantes en quelques fréquences qui semblent être des fréquences propres et l'amplitude en ces fréquences est inversement proportionnelle à l'amortissement. Ce comportement peut s'interpréter par le fait qu'aux fréquences propres, les modes propres d'amplitude normalisée en énergie ont une amplitude en $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ sur le bord, or l'opérateur VTCR mesure l'amplitude sur le bord.

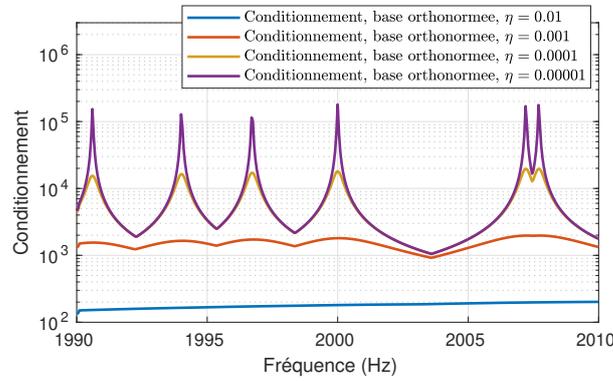


FIGURE 4.8 Conditionnement de $\tilde{\mathbb{K}}$ en fonction de la fréquence pour différents amortissements avec 95 fonctions de forme. En rouge le cas à $\eta = 0.001$ traité figure 4.7.

Nous pouvons estimer de manière heuristique le conditionnement de $\tilde{\mathbb{K}}$ à convergence :

$$\kappa(\tilde{\mathbb{K}}) \lesssim \frac{1}{\eta} \quad (4.31)$$

L'amortissement des parois n'a pas été étudié mais on peut s'attendre à ce qu'il ait également tendance à diminuer le conditionnement de $\tilde{\mathbb{K}}$.

4.2.4 Construction d'un portrait régularisé

Définition du portrait effectif

Le conditionnement de l'opérateur $\tilde{\mathbb{K}}$ étant faible, la variable \tilde{A} est stable et régulière, mais du fait d'être la concaténation des amplitudes des vecteurs propres il n'a plus la propriété de traduire les directions privilégiées du champ solution. Il s'agit ici de définir un portrait, soit une amplitude en fonction de l'angle θ , régularisé qui retrouve cette propriété. Comme un portrait est propre à chaque

sous-domaine, nous traitons le cas d'un seul sous-domaine et afin d'alléger la notation nous retirons l'indice \square_E . L'approche proposée consiste à définir un portrait, appelé portrait effectif a_{eff} , dont la norme L2 soit égale à la norme énergétique du champ p associé :

$$\|\mathcal{H}(a)\| = \|a_{\text{eff}}\|_2 \quad (4.32)$$

où a est le portrait du champ associé au champ p . Nous proposons la définition du portrait effectif suivante :

$$a_{\text{eff}} = \sum_{n=1}^N \sqrt{v_n} (a, \bar{a}_n)_2 \bar{a}_n \quad (4.33)$$

On vérifie bien la propriété de l'équation 4.32, en effet :

$$\begin{aligned} (a_{\text{eff}}, a_{\text{eff}})_2 &= \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{v_n} (a, \bar{a}_n)_2 \bar{a}_n, \sum_{n=1}^N \sqrt{v_n} (a, \bar{a}_n)_2 \bar{a}_n \right)_2 \\ &= \sum_{n=1}^N v_n (a, \bar{a}_n)_2^2 \\ \text{et } (\mathcal{H}(a), \mathcal{H}(a)) &= \left(\mathcal{H} \left(\sum_{n=1}^N (a, \bar{a}_n)_2 \bar{a}_n \right), \mathcal{H} \left(\sum_{n=1}^N (a, \bar{a}_n)_2 \bar{a}_n \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (a, \bar{a}_n)_2 (a, \bar{a}_m)_2 (\mathcal{H}(\bar{a}_n), \mathcal{H}(\bar{a}_m)) \\ &= \sum_{n=1}^N v_n (a, \bar{a}_n)_2^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ce portrait a l'avantage d'être régulier : les parties du portrait associées à une énergie faible sont pondérées par les petites valeurs propres v_n . Pour revenir au portrait initial, il suffit d'appliquer la fonction inverse :

$$a = \sum_{n=1}^N \frac{(a_{\text{eff}}, \bar{a}_n)_2}{\sqrt{v_n}} \bar{a}_n \quad (4.35)$$

Le portrait effectif s'écrit également :

$$a_{\text{eff}}(\theta) = \sum_{l=1}^N A_{\text{eff}l} a_l(\theta) \quad (4.36)$$

$$\text{avec } A_{\text{eff}} = \mathbb{N}^{-1/2} \mathbb{M}^{1/2} A$$

Pour revenir au portrait classique il suffit d'appliquer :

$$A = \mathbb{M}^{-1/2} \mathbb{N}^{1/2} A_{\text{eff}} \quad (4.37)$$

Nous retrouvons bien la propriété :

$$\|\mathcal{H}(a)\|^2 = A_{\text{eff}}^H \mathbb{N} A_{\text{eff}}^H \quad (4.38)$$

Illustration numérique

La figure 4.9 illustre le champ solution (a), la valeur absolue du portrait classique (b) et la valeur absolue du portrait effectif (c) avec une base de 200 rayons uniformément répartis. Le portrait effectif est bien plus régulier que le portrait classique, on y voit deux directions privilégiées qu'on retrouve sur le champ solution.

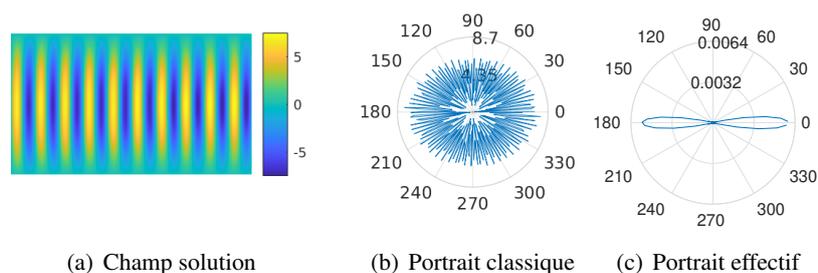


FIGURE 4.9 Partie réelle du champ de pression (à gauche), valeur absolue du portrait classique (au milieu) et valeur absolue du portrait régularisé (à droite).

4.2.5 Validation sur un cas complexe

Afin de valider l'approche précédente tant du point de vue de la construction d'une base orthonormée que de la construction du portrait effectif, nous traitons le problème à trois sous-domaines présenté partie 3.2.5. Une base est construite pour chacun des 3 sous-domaines à partir de tous les vecteurs propres de la matrice \mathbb{M} issue d'une base de 150 rayons par sous-domaine et une résolution VTCR est effectuée avec cette base. Nous prenons comme champ de référence une résolution faite avec une base de rayons surdiscrétisée à 200 rayons par sous-domaine.

Le problème VTCR est résolu avec une base de rayons (150 rayons par sous-domaine) et avec la base orthonormée. L'erreur et le conditionnement sont répertoriés dans le tableau 4.1 (colonnes "Base de 150 rayons par sous-domaine" et "Base orthonormée complète"). Le conditionnement de l'opérateur construit avec la base orthonormée est bien en deçà de l'infini numérique (7.76×10^4) mais l'erreur est importante (17,8%). En théorie l'erreur devrait être la même qu'avec la base de rayons, soit 0.0705%, mais numériquement les très petites valeurs propres de la matrice \mathbb{M} viennent polluer la résolution numérique.

	Base de 150 rayons par sous-domaine	Base orthonormée complète	Base orthonormée tronquée
Erreur	0.0705%	17.8%	0.514%
Conditionnement	1.84×10^{17}	7.76×10^4	1.40×10^4

TABLE 4.1 Conditionnement et erreur avec les différentes bases.

Pour pallier à cette pollution numérique, nous tronquons la base en retirant les vecteurs propres associés à une valeur propre quasi nulle. Tous les vecteurs dont la valeur propre est inférieure à 100 fois la plus petite valeur propre sont supprimés. L'erreur et le conditionnement sont répertoriés dans le tableau 4.1 (colonne "Base orthonormée tronquée"). Cette base permet de ramener l'erreur un niveau très faible de 0.51% avec un conditionnement de l'ordre de 10^4 . Le champ solution et le portrait effectif issus de la résolution avec cette base sont illustrés figure 4.10. Nous pouvons remarquer que le portrait effectif illustre les principales directions de flux d'énergie.

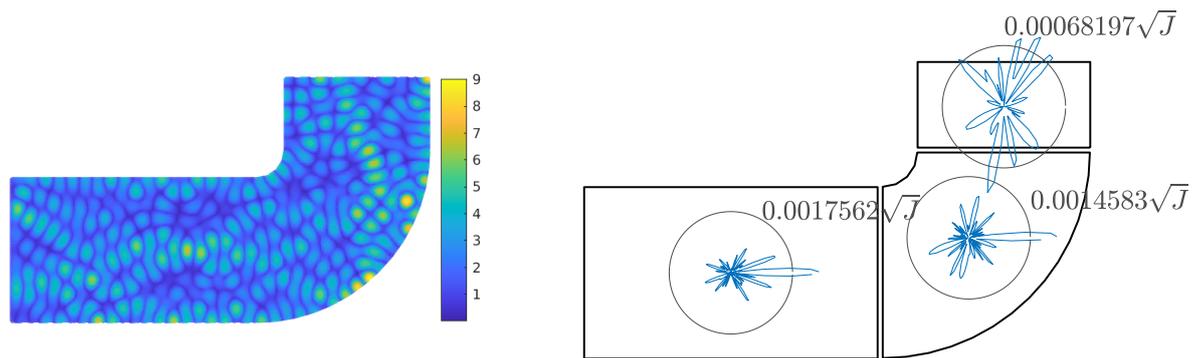


FIGURE 4.10 Champ solution en Pa (à gauche) et portraits effectifs en \sqrt{J} (à droite) pour le problème défini partie 3.2.5.

Remarque : Nous avons pu remarquer que l'erreur issue d'une résolution avec la base orthonormée complète était significativement plus élevée lorsque les sous-domaines ne sont pas convexes. Si nous modifions la géométrie du problème 4.1 en rendant tous les sous-domaines convexes (plus particulièrement le sous-domaine se trouvant dans l'angle) les erreurs sont bien moindres et nous retrouvons les performances obtenues avec la géométrie rectangulaire partie 4.2.3.

4.2.6 Bilan

La base orthonormée développée dans cette partie s'est avérée être efficace pour diminuer le conditionnement l'opérateur VTCR : elle permet de résoudre le problème VTCR avec une précision théoriquement inchangée par rapport à une base de rayons et avec un conditionnement bien en deçà de l'infini numérique : de l'ordre de 10^4 . Dans certains cas, il peut s'avérer nécessaire de tronquer la base en retirant les vecteurs propres associés à des valeurs propres proche du zéro numérique.

Cette base est également à l'origine du portrait effectif en énergie : un portrait régularisé qui traduit les directions présentes dans le champ solution. Ce portrait sera utilisé chapitre 5 pour étudier la réductibilité du problème : soit la capacité du portrait à être approché par une base de quelques portraits élémentaires sur une bande de fréquences.

Les coûts numériques de cette approche sont principalement liés à :

- La construction d'un maillage éléments finis.
- La construction et la diagonalisation de la matrice \mathbb{M} pour chaque sous-domaine.

Ces coûts sont conséquents mais restent inférieurs aux coûts de construction et d'inversion du problème [84]. Néanmoins l'analyse doit être réexécutée à chaque fréquence. Lorsqu'il s'agit de résoudre sur une bande de fréquences, l'analyse devient très coûteuse.

Pour réduire les coûts de construction de la matrice \mathbb{M} , il peut être envisagé d'utiliser une norme basée sur la puissance qui traverse les frontières du sous-domaine :

$$\mathcal{R}e \left(\int_{\partial\Omega_E} p^h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E d\partial\Omega \right) \quad (4.39)$$

cette norme est équivalente à la norme énergétique dès lors que l'amortissement $\eta > 0$ et ne nécessite qu'une intégration sur le bord. Reste à réduire les coûts associés à la diagonalisation des matrices.

4.3 Stratégie 2 : Approximation quasi-analytique de la base orthogonale par une base de Fourier généralisée adaptée à la géométrie de chaque sous-domaine

Nous allons dans un premier temps analyser les propriétés d'un champ directif pour en déduire des critères précis sur la discrétisation pour le contrôle de la précision a priori et du conditionnement. Nous l'exploiterons ensuite pour construire des bases optimales au sens d'un compromis erreur-conditionnement.

Dans cette partie nous commençons l'étude par un seul sous-domaine, pour alléger l'écriture nous retirons l'indice \square_E qui indique l'indice du sous-domaine considéré. Nous le réintroduirons lorsque nous traiterons le cas de plusieurs sous-domaines.

4.3.1 Énoncé d'un critère sur la discrétisation pour la précision et le conditionnement

Comme le mauvais conditionnement de la matrice VTCR et de la matrice d'énergie ont la même origine, nous étudions cette dernière. La matrice d'énergie est une matrice diagonale par bloc, où chaque bloc est associé à un sous-domaine. Il s'agit donc d'étudier le conditionnement de la matrice d'énergie d'un seul sous-domaine.

Nous allons plus particulièrement nous concentrer sur un pinceau de rayons : une base de N rayons équirépartis dans un petit intervalle angulaire. Dans ce cas particulier des développements analytiques au 1^{er} ordre autour de l'angle central du pinceau peuvent être faits. C'est dans le cadre de cette analyse focalisée dans une direction qu'il est possible d'identifier les conditions qui sont à l'origine de la présence de valeurs propres quasi nulles dans la matrice d'énergie. Les développements montrent que la dimension géométrique influente qui se dégage des intégrales est la largeur orthogonale à la direction du pinceau notée y_{\max} sur la figure 4.11. Le critère dégagé permet donc d'adapter la discrétisation du pinceau en fonction de la géométrie du domaine.

Les conditions étudiées sur un pinceau peuvent se généraliser à la matrice définie sur une base de rayons couvrant toutes les directions (qui peut être vu comme la concaténation d'un ensemble de pinceaux). En effet comme deux pinceaux de direction différente ont des contributions indépendantes dans la matrice d'énergie (le produit scalaire de deux champs décrits par des portraits dans des pinceaux différents dont l'intersection est nulle est quasi nul), un mauvais conditionnement dans une direction implique un mauvais conditionnement de la matrice globale. Il s'en dégage donc un critère sur la discrétisation des rayons dont le pas de discrétisation angulaire n'est pas uniforme, il dépend de la direction des rayons.

Nous aurons la même approche pour étudier la précision, l'étude sur un pinceau permettra d'étudier les conditions pour atteindre la précision dans une direction et sera ensuite extrapolée dans toutes les directions. Une mauvaise précision dans une direction impliquera une mauvaise précision globale.

Analyse du conditionnement par pinceau

Supposons un sous-domaine Ω . L'analyse se concentre sur un champ décrit par un pinceau de rayons : une base de N rayons équirépartis dans un intervalle angulaire $[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_1/2, \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1/2]$ de direction $\tilde{\theta}_0$ et de largeur $\tilde{\theta}_1$ (voir figure 4.11). Le portrait s'écrit :

$$a(\theta) = \sum_{n=1}^N A_n \delta_{\theta_n}^{\theta} \quad (4.40)$$

avec $\theta_n = \tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_1/2 + \frac{(n-1)\tilde{\theta}_1}{N-1}$. Le pas de discrétisation vaut $\Delta\theta = \frac{\tilde{\theta}_1}{N-1}$. Nous supposons que $\tilde{\theta}_1 \ll 2\pi$.

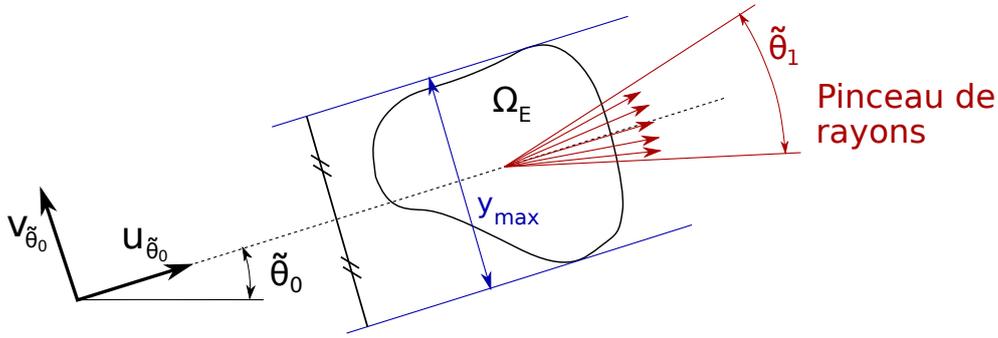


FIGURE 4.11 Pinceau de rayons.

Nous définissons la base de coordonnées par $(O, \mathbf{u}_{\tilde{\theta}_0}, \mathbf{v}_{\tilde{\theta}_0})$ avec $\mathbf{u}_{\tilde{\theta}_0}$ le vecteur unitaire dirigé par $\tilde{\theta}_0$, $\mathbf{v}_{\tilde{\theta}_0}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{u}_{\tilde{\theta}_0}$, et \mathbf{x}_0 l'origine située à équidistance des bords du domaine suivant $\mathbf{v}_{\tilde{\theta}_0}$ (figure 4.11). Dans cette base, le vecteur position s'écrit $\mathbf{x} = x\mathbf{u}_{\tilde{\theta}_0} + y\mathbf{v}_{\tilde{\theta}_0}$.

Nous définissons :

$$y_{\max} = \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{v}_{\tilde{\theta}_0} \quad (4.41)$$

la largeur du sous-domaine dans la direction $\tilde{\theta}_0$. y_{\max} dépend de $\tilde{\theta}_0$.

Nous pouvons définir la matrice d'énergie \mathbb{M} en fonction de ces deux paramètres : $\mathbb{M}(\Delta\theta, k)$, la taille de la matrice étant égale à $N = \frac{1}{\Delta\theta} + 1$.

Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Proposition 2. Si $k\Delta\theta > \frac{2\pi}{y_{\max}}$ les valeurs propres de la matrice \mathbb{M} sont bornées entre deux bornes strictement positives qui dépendent de la forme du domaine Ω et du produit $k\Delta\theta$. Le conditionnement $\kappa(\mathbb{M})$ est donc majoré.

$$k\Delta\theta > \frac{2\pi}{y_{\max}} \text{ et } k\Delta\theta = \text{constante} \Rightarrow \forall k \quad \kappa(\mathbb{M}) \text{ Bornée} \quad (4.42)$$

Proposition 3. Si $k\Delta\theta < \frac{2\pi}{y_{max}}$ la matrice \mathbb{M} tend asymptotiquement à avoir une partie de ses valeurs propres nulles et donc un conditionnement infini :

$$k\Delta\theta < \frac{2\pi}{y_{max}} \text{ et } k\Delta\theta = \text{constante} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \kappa(\mathbb{M}) = \infty \quad (4.43)$$

Démonstration

Pour alléger la démonstration, nous retirons le terme associé au gradient de p dans le produit scalaire énergétique. Cela revient à ne prendre en compte que le terme associé à l'énergie potentielle élastique. Le produit scalaire énergétique est alors défini par : $p, q \in \mathcal{S}(\Omega)$

$$(p, q) = \frac{1}{2\rho c^2} \int_{\Omega} pq^* d\Omega \quad (4.44)$$

Nous supposons que l'origine du sous-domaine VTCR est confondue avec l'origine de la base de coordonnées. Dans le cas d'une base de rayons définie sur un pinceau, la matrice d'énergie \mathbb{M} vaut (au facteur $\frac{1}{2\rho c^2}$ près) :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{lm} &= \int_{\Omega} e^{-ik\mathbf{u}_{\theta_l}\mathbf{x}} e^{ik\mathbf{u}_{\theta_m}\mathbf{x}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} e^{-ik(\cos(\theta_l - \tilde{\theta}_0)x + \sin(\theta_l - \tilde{\theta}_0)y)} e^{+ik(\cos(\theta_m - \tilde{\theta}_0)x + \sin(\theta_m - \tilde{\theta}_0)y)} d\Omega \end{aligned}$$

A l'ordre 1 sur $\tilde{\theta}_1$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{lm} &= \int_{\Omega} e^{ik(\theta_m - \theta_l)y} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} e^{ik\Delta\theta(m-l)y} d\Omega \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x \in I_x(y)} e^{ik\Delta\theta(m-l)y} dx dy \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x \in I_x(y)} dx \right) e^{ik\Delta\theta(m-l)y} dy \end{aligned}$$

Avec $I_x(y) = \{x \text{ tq } \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega\}$. Procédons au changement de variable $\gamma = k\Delta\theta y$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{lm} &= \int_{\gamma=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k\Delta\theta} \left(\int_{x \in I_x(\frac{\gamma}{k\Delta\theta})} dx \right) e^{i(m-l)\gamma} d\gamma \\ &= \int_{\gamma=-\infty}^{\infty} X(\gamma) e^{i(m-l)\gamma} d\gamma \end{aligned}$$

avec :

$$X(\gamma) = \frac{1}{k\Delta\theta} \left(\int_{x \in I_x(\frac{\gamma}{k\Delta\theta})} dx \right) \quad (4.45)$$

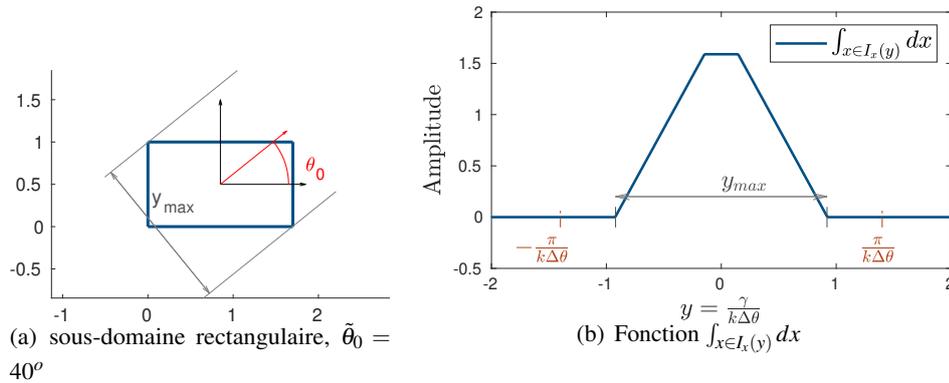


FIGURE 4.12 Illustration de la fonction $\int_{x \in I_x(y)} dx = k\Delta\theta X$ sur un sous domaine rectangulaire.

Supposons à présent $k\Delta\theta < \frac{2\pi}{y_{\max}}$ pour démontrer la proposition 3 :

Remarquons que $X(\gamma) = 0 \forall \gamma \in]-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty[$ ce qui implique que :

$$\mathbb{M}_{lm} = \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} X(\gamma) e^{i(m-l)\gamma} d\gamma$$

Nous identifions que \mathbb{M} est une matrice de Toeplitz de la fonction X (voir annexe 8.5 les notions sur les matrices de Toeplitz). La fonction X donne donc une allure des valeurs propres de la matrice \mathbb{M} (voir théorème 1 en annexe 8.5). Comme X est une fonction réelle positive, et nulle $\forall \gamma \notin [-\frac{y_{\max}k\Delta\theta}{2}, \frac{y_{\max}k\Delta\theta}{2}]$ car $I_x(y) = \emptyset \forall y \notin [-\frac{y_{\max}}{2}, \frac{y_{\max}}{2}]$. Nous en déduisons une interprétation de l'origine de l'allure caractéristique des courbes des valeurs propres des matrices d'énergie. Ces matrices ont en effet de nombreuses valeurs propres quasi-nulles comme le décrit asymptotiquement X . Pour démontrer la proposition 3, nous utilisons le corollaire 1 (voir annexe 8.5) du théorème 1.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\max} &= \max_{\gamma \in [-\pi, \pi]} (X) > 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\min} &= \min_{\gamma \in [-\pi, \pi]} (X) = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec σ_{\min} et σ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de \mathbb{M} . Nous en déduisons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa(\mathbb{M}) = \infty \quad (4.47)$$

ce qui démontre la proposition 3.

Supposons maintenant $k\Delta\theta > \frac{2\pi}{y_{\max}}$ pour démontrer la proposition 2 :

Reprenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{lm} &= \int_{\gamma=-\infty}^{\infty} X(\gamma) e^{i(m-l)\gamma} d\gamma \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi+2\pi z}^{\pi+2\pi z} e^{i(n-m)\gamma} X(\gamma) d\gamma \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\gamma} X(\gamma+2\pi z) d\gamma \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\gamma} \sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z) d\gamma
\end{aligned}$$

\mathbb{M} est une matrice de Toeplitz de la fonction $\sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z)$. Cette fonction est strictement positive sur $[-\pi, \pi]$, en effet X l'est strictement sur $[-\pi, \pi]$ et est positive ou nulle sur $]-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty[$. \mathbb{M} est une matrice de Toeplitz hermitienne, nous pouvons donc utiliser le lemme 1 (voir annexe 8.5) :

$$\min_{\gamma \in [-\pi, \pi]} \left(\sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z) \right) \leq \sigma_{\min} \leq \sigma_{\max} \leq \max_{\gamma \in [-\pi, \pi]} \left(\sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z) \right) \quad (4.48)$$

Nous avons donc :

$$\kappa(\mathbb{M}) \leq \frac{\max \left(\sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z) \right)}{\min \left(\sum_{z=-\infty}^{\infty} X(\gamma+2\pi z) \right)} \quad (4.49)$$

Ce qui démontre la proposition 2. Les bornes étant atteintes par σ_{\min} et σ_{\max} (corollaire 1, voir annexe), nous avons également la limite en N .

Analyse de la précision par pinceau

Proposition 4. Le champ p se décompose en produit à variables séparées :

$$p(x, y) = e^{ikx} p_y(y) \quad (4.50)$$

où p_y est la transformée de Fourier discrète inverse du portrait a . Le critère de Shannon, qui est un critère de précision sur les transformées de Fourier Discrète, impose :

$$k\Delta\theta < \frac{2\pi}{y_{\max}} \quad (4.51)$$

Démonstration

Soit p un champ défini par un pinceau de rayons dans $I_\theta = [\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_1/2, \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1/2]$ de pas de discrétisation $\Delta\theta$.

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{n=1}^N a_n e^{ik\mathbf{u}_{\theta_n} \cdot \mathbf{x}} \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n e^{ik(\cos(\theta_n - \tilde{\theta}_0)x + \sin(\theta_n - \tilde{\theta}_0)y)}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

A l'ordre 1 sur $\tilde{\theta}_1$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 p &= e^{ikx} \sum_{n=1}^N a_n e^{ik(\theta_n - \tilde{\theta}_0)y} \\
 &= e^{ikx} \sum_{n=-N/2}^{N/2} a_{n+N/2+1} e^{ink\Delta\theta y}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Ainsi p se décompose en produit à variables séparées :

$$p = p_x p_y \text{ avec } p_x(x) = e^{ikx} \text{ et } p_y(y) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} a_{n+N/2+1} e^{ink\Delta\theta y} \tag{4.54}$$

p_y est une série de Fourier de pas $\frac{k\Delta\theta}{2\pi}$. p_y est périodique de période spatiale $\frac{2\pi}{k\Delta\theta}$. Le champ p_y est défini sur $[-y_{\max}/2, y_{\max}/2]$, le critère de Shannon sur les séries de Fourier stipule que le pas de discrétisation $\frac{k\Delta\theta}{2\pi}$ doit vérifier :

$$\begin{aligned}
 \frac{k\Delta\theta}{2\pi} &< \frac{1}{y_{\max}} \\
 \Leftrightarrow \Delta\theta &< \frac{2\pi}{ky_{\max}}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Si ce critère n'est pas vérifié, seules les solutions p_y périodiques de période spatiale $\frac{2\pi}{k\Delta\theta}$ peuvent être traduites.

Critère sur la précision et le conditionnement

Nous définissons à partir des propositions 2, 3 et 4 le pas de discrétisation critique :

$$\Delta\theta_{\text{crit}} = \frac{2\pi}{ky_{\max}} \tag{4.56}$$

et déduisons le critère simple suivant :

- $\Delta\theta > \Delta\theta_{\text{crit}}$: la matrice d'énergie est bien conditionnée et la solution n'est pas précise au sens du critère de Shannon.
- $\Delta\theta < \Delta\theta_{\text{crit}}$: la matrice d'énergie est mal conditionnée et la solution est précise au sens du critère de Shannon.

Au vu des liens entre la matrice d'énergie et la matrice VTCR, ce critère s'applique également à la matrice VTCR. De ce critère se dégage une fatalité : on ne peut pas avec une base de rayons être à la

fois précis et bien conditionné. Néanmoins on peut se mettre sur la frontière : $\Delta\theta \approx \Delta\theta_{\text{crit}}$, ce qui est le meilleur compromis entre précision et conditionnement. Remarquons un point important : dans le cas où la géométrie est élancée, le pas critique $\Delta\theta_{\text{crit}}$ dépend fortement de la direction. Dans la direction de l'élanement, le pas critique $\Delta\theta_{\text{crit}}$ est plus grossier que dans la direction de la largeur. Ce résultat peut paraître inattendu et c'est une nouveauté en matière de pratiques à adopter avec la VTCR.

Illustrons dans un premier temps le critère concernant le conditionnement. Nous reprenons l'exemple du rectangle de la partie 4.2.2, sollicité à 8000 Hz. Considérons deux pinceaux de largeur $\tilde{\theta}_1 = \pi/8$ et de direction $\tilde{\theta}_0 = 0$ et $\pi/2$ composés de N rayons équirépartis. La figure 4.13 illustre le conditionnement de la matrice \mathbb{M} en fonction du nombre de rayons N pour chacun des pinceaux. Comme la largeur y_{max} n'est pas la même dans les directions $\tilde{\theta}_0 = 0$ et $\pi/2$, le pas $\Delta\theta_{\text{crit}}$ n'est pas le même dans les deux directions. $\Delta\theta_{\text{crit}}(\tilde{\theta}_0 = 0)$ est atteint pour $14.7 \left(= \frac{\tilde{\theta}_1}{\Delta\theta_{\text{crit}}} + 1 \right)$ rayons et $\Delta\theta_{\text{crit}}(\tilde{\theta}_0 = \pi/2)$ est atteint pour $25.1 \left(= \frac{\tilde{\theta}_1}{\Delta\theta_{\text{crit}}} + 1 \right)$ rayons. Nous remarquons que dans les deux cas le conditionnement décolle dès que le pas de discrétisation devient plus petit que $\Delta\theta_{\text{crit}}$ ce qui valide ce critère.

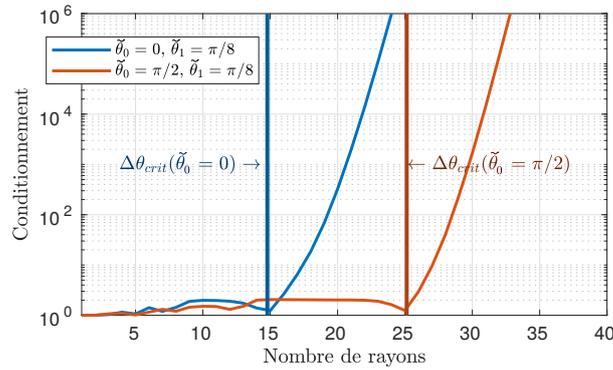


FIGURE 4.13 Conditionnement de \mathbb{M} en fonction du nombre de rayons dans le pinceau.

Illustrons à présent le critère concernant la précision. Nous allons étudier le nombre de rayons nécessaires pour traduire avec précision un champ aléatoire défini par un très grand nombre de rayons.

Nous construisons un champ défini par un portrait en pinceau d'un grand nombre N_{alea} de rayons équirépartis dans $[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_1/4, \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1/4]$. Les amplitudes des rayons du champ sont choisies aléatoirement à partir d'une loi normale centrée sur zéro, ce qui donne un champ aléatoire que nous allons chercher à décrire. Pour vérifier le critère sur la précision, nous construisons le portrait en pinceau défini par N rayons dans $[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_1/2, \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1/2]$ qui minimise l'erreur énergétique avec le champ aléatoire. L'erreur en fonction du nombre de rayons N est illustrée figure 4.14 avec $N_{\text{alea}} = 100$ pour $\tilde{\theta}_0 = 0$ et $\pi/2$. L'erreur commence à converger vers zéro avec une décroissance exponentielle dès que le pas de discrétisation devient plus petit que le pas critique $\Delta\theta_{\text{crit}}$. Ceci illustre le critère sur la précision.

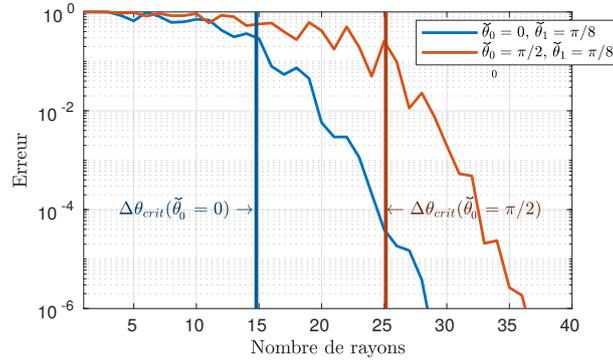


FIGURE 4.14 Erreur en fonction du nombre de rayons dans le pinceau.

Interprétation du comportement du conditionnement de la matrice \mathbb{K} au sens de ce critère

Par commodité, nous introduisons la fréquence de discrétisation définie comme l'inverse du pas de discrétisation :

$$f_{\theta} = \frac{1}{\Delta\theta} \tag{4.57}$$

Elle donne la dimension de l'espace de discrétisation par secteur angulaire en fonction de la direction. Ainsi le critère s'écrit :

- Si $f_{\theta} > f_{\theta \text{ crit}} = \frac{1}{\Delta\theta_{\text{crit}}} = \frac{k_{y\text{max}}}{2\pi}$: la solution est a priori précise et l'opérateur est mal conditionné.
- Si $f_{\theta} < f_{\theta \text{ crit}} = \frac{1}{\Delta\theta_{\text{crit}}} = \frac{k_{y\text{max}}}{2\pi}$: la solution manque a priori de précision et l'opérateur est bien conditionné.

Nous allons interpréter le comportement en précision et en conditionnement de la matrice VTTCR à partir de ce critère. Afin d'accentuer l'impact de la direction, nous considérons une géométrie élancée illustrée figure 4.15. La fréquence de discrétisation critique $f_{\theta \text{ crit}}$ est représentée en polaire à 8000 Hz. Nous remarquons qu'elle dépend fortement de la direction du fait de l'élancement du domaine.

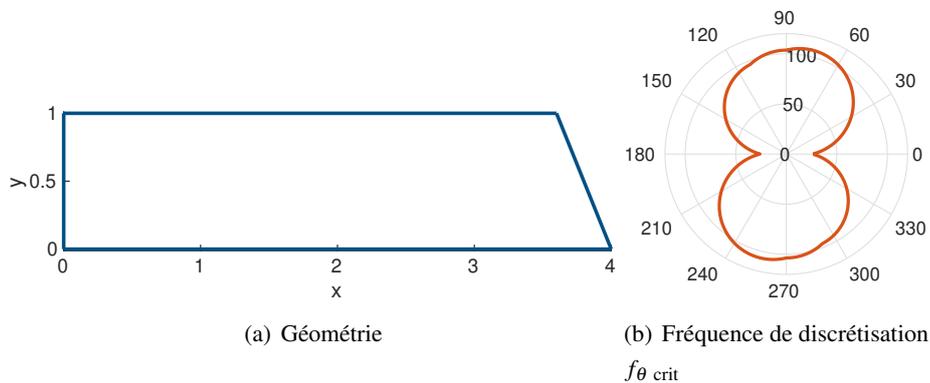


FIGURE 4.15 Cavité acoustique en forme de trapèze élancé et fréquence de discrétisation $f_{\theta \text{ crit}}$ correspondante à 8000 Hz.

Réolvons ce problème précédent avec une base de rayons uniformément répartis. La convergence et l'erreur sont illustrées figure 4.16 en haut, remarquons que le conditionnement se dégrade bien avant que la précision n'apparaisse. Nous pouvons l'interpréter et positionner les seuils de décollement de précision et de conditionnement à partir de l'analyse des fréquences de discrétisation. Figure 4.16 en bas sont superposées les fréquences de discrétisation $f_{\theta \text{ crit}}$ et f_{θ} :

- En bas à gauche, $N = 150$: $f_{\theta} < f_{\theta \text{ crit}}$ quelle que soit la direction. Le conditionnement de \mathbb{K} est faible mais la solution n'est pas précise.
- En bas au milieu, $N = 500$: $f_{\theta} > f_{\theta \text{ crit}}$ dans les directions $\theta = 0$ et π rad et $f_{\theta} < f_{\theta \text{ crit}}$ dans les directions $\theta = \pi/2$ et $3\pi/2$ rad : la solution manque de précision et l'opérateur est mal conditionné.
- En bas au milieu, $N = 750$: $f_{\theta} > f_{\theta \text{ crit}}$ quelle que soit la direction. La solution est précise mais l'opérateur est mal conditionné.

Ainsi nous remarquons que le conditionnement se dégrade dès qu'il existe une direction où la fréquence de discrétisation dépasse $f_{\theta \text{ crit}}$ et l'erreur diminue rapidement dès que la fréquence de discrétisation dépasse $f_{\theta \text{ crit}}$ pour toutes les directions.

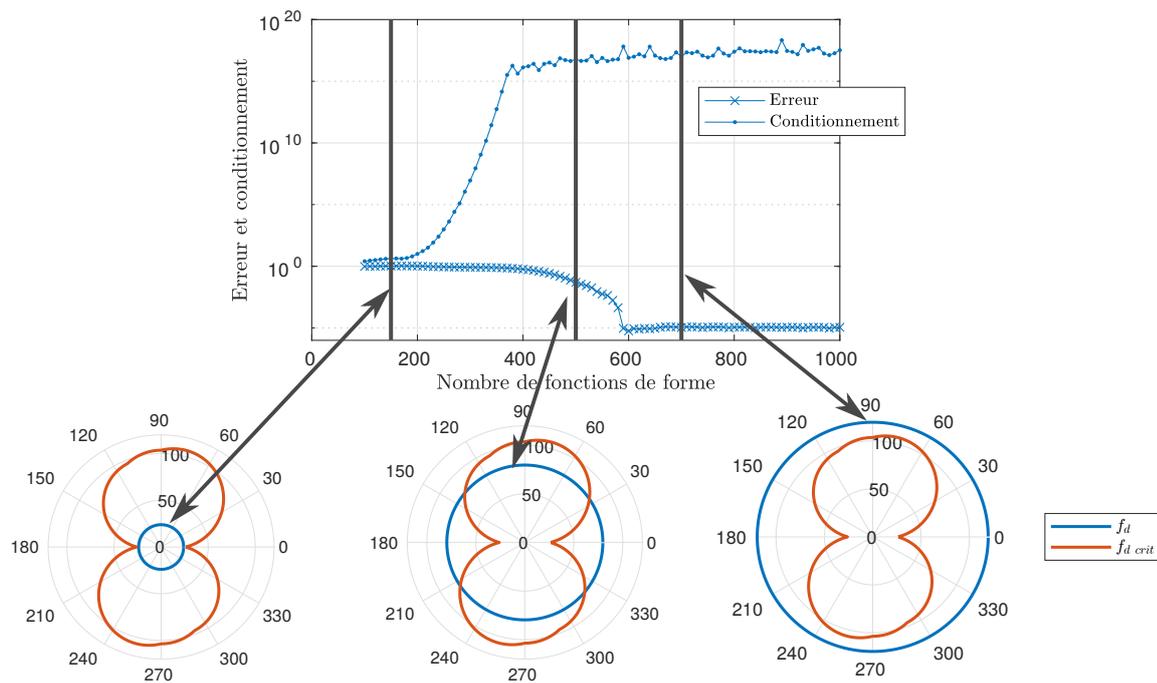


FIGURE 4.16 Éléments de compréhension du comportement du conditionnement de la VTCR et de la précision sur un exemple de domaine élané.

4.3.2 Une première exploitation du critère sur la discrétisation pour construire une base de rayons optimale

Construction de la base de rayons

Nous pouvons nous servir du critère pour construire une base de rayons vérifiant le pas de discrétisation critique défini équation 4.56 quelle que soit la direction. La dimension de l'espace de cette base vaut :

$$N_{\text{crit}} = \int_0^{2\pi} f_{\theta_{\text{crit}}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta\theta_{\text{crit}}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{k y_{\text{max}}}{2\pi} d\theta \quad (4.58)$$

Nous pouvons montrer à partir de la formule de Cauchy-Crofton [24] que :

$$N_{\text{crit}} = \frac{k\mathcal{P}(\Omega)}{\pi} = \frac{2\mathcal{P}(\Omega)}{\lambda} \quad (4.59)$$

avec λ la longueur d'onde et $\mathcal{P}(\Omega)$ le périmètre du plus petit domaine convexe qui contient Ω : lorsque Ω est convexe $\mathcal{P}(\Omega)$ est égal au périmètre de Ω .

Démonstration

Partons de la formule de Cauchy-Crofton énoncée dans [24] théorème 3 : Soit \mathcal{C} une courbe plane régulière de longueur l , la mesure de l'ensemble des droites (comptées avec les multiplicités) qui rencontrent \mathcal{C} est égale à $2l$.

Ainsi, soit \mathcal{D} une droite paramétrée par la direction définie par l'angle θ et p la distance à l'origine et soit $n(\theta, p)$ le nombre de points d'intersection entre la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} , nous avons :

$$2l = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{p=-\infty}^{\infty} n(\theta, p) dp d\theta \quad (4.60)$$

Démontrons la relation 4.59. Considérons la courbe définie par le bord du plus petit domaine convexe contenant le sous-domaine Ω , la longueur de cette courbe est $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$2\mathcal{P}(\Omega) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{p=-\infty}^{\infty} n(\theta, p) dp d\theta \quad (4.61)$$

Voir la figure 4.17. $n(\theta, p)$ vaut 2 lorsque \mathcal{D} passe par l'intérieur du sous-domaine Ω , 1 si \mathcal{D} est tangent au domaine Ω et 0 sinon.

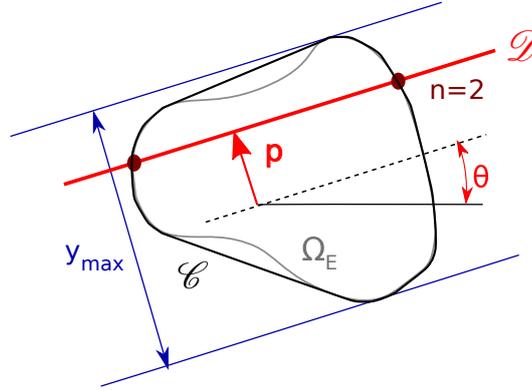


FIGURE 4.17 Schéma de l'application de la formule de Cauchy-Crofton pour la démonstration de l'égalité 4.59.

Il en résulte que dans une direction donnée :

$$\int_{p=-\infty}^{\infty} n(\theta, p) dp = 2y_{\max} \quad (4.62)$$

et donc que :

$$2\mathcal{P}(\Omega) = \int_{\theta=0}^{\pi} 2y_{\max} d\theta \quad (4.63)$$

Comme y_{\max} est π -périodique, nous avons :

$$2\mathcal{P}(\Omega) = \int_{\theta=0}^{2\pi} y_{\max} d\theta \quad (4.64)$$

d'où l'égalité 4.59.

La dimension de cette base est très proche du critère heuristique 3.23 : elle est également proportionnelle à la fréquence et à la taille du sous-domaine.

Illustration numérique

Pour étudier la base optimale au sens de ce critère, nous définissons une base de N rayons dont le pas de discrétisation est proportionnel à $\Delta\theta_{\text{crit}}$ (avec le même coefficient de proportionnalité dans toutes les directions) que nous utilisons comme base de résolution VTCR. Reprenons le problème précédent avec la géométrie élancée défini partie 4.3.1. Pour ce problème nous calculons $N_{\text{crit}} = 501$ à partir de la formule 4.59. Les résultats de convergence et le conditionnement sont illustrés figure 4.18. En dessous sont illustrées les fréquences de discrétisation pour 300 (à gauche), 501 (au milieu), 700 (à droite) nombre de rayons.

Contrairement à la base de rayons uniformes, le décollement du conditionnement et la convergence apparaissent simultanément autour de $N = N_{\text{crit}}$, soit lorsque la fréquence de discrétisation concorde avec la fréquence de discrétisation critique $f_{\theta_{\text{crit}}}$ quelle que soit la direction. Notons que l'augmentation

du conditionnement est extrêmement franche et le seuil apparaît clairement à $N = N_{\text{crit}}$. Remarquons néanmoins que la tranche de nombre de fonctions de forme dans laquelle le conditionnement est bon et la solution est relativement précise, est très mince.

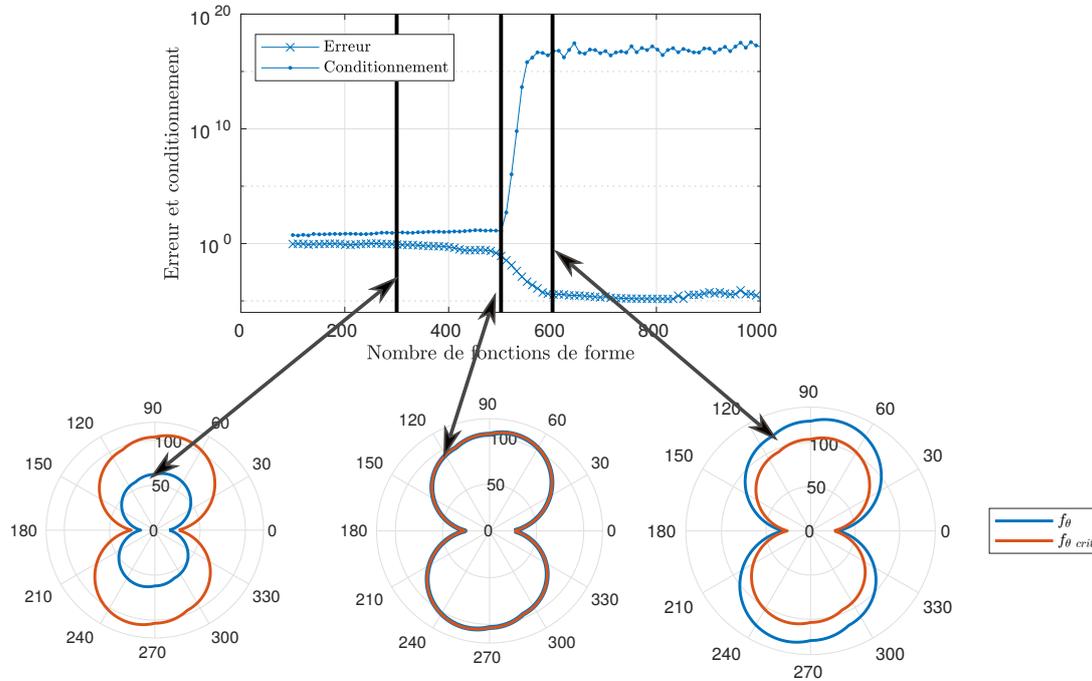


FIGURE 4.18 Convergence de la VTCR avec une base de rayons dont le pas de discrétisation est proportionnel à θ_{crit} .

Cette base de rayons est une première solution pour un contrôle a priori du conditionnement de l'opérateur et un contrôle a priori de la précision. Elle possède néanmoins les limites suivantes :

- La tranche de nombre de fonctions de forme qui allie bon conditionnement et erreur faible est très mince.
- Elle n'est pas adaptée à un raffinement de maillage. En effet si la solution s'avère manquer de précision, il est nécessaire de construire des nouveaux opérateurs VTCR avec une nouvelle discrétisation légèrement plus fine, ce qui numériquement peut s'avérer coûteux.
- Elle n'est pas adaptée à la résolution large bande. La dimension N_{crit} est proportionnelle à la fréquence, comme le compromis précision/bon conditionnement est une zone mince autour de N_{crit} , une unique base n'est pas adaptée pour une bande de fréquences.

Remarque : ces résultats montrent la limite en terme de conditionnement de la base de rayons. Une piste d'amélioration serait d'enrichir la base de N_{crit} rayons bien réparti avec des ondes évanescentes.

4.3.3 Construction d'une base adaptative vérifiant le critère sur la discrétisation : la base de Fourier généralisée

La base de Fourier a l'avantage d'être adaptative : si la solution manque de précision on peut rajouter des fonctions de forme tout en recyclant la matrice VTCR ce qui raffine dans toutes les directions, ce n'est pas le cas de la base des rayons et des secteurs qui ne peuvent raffiner que dans des directions très précises. Ce caractère lui permet aussi d'être utilisée pour la résolution large bande de fréquences car les hautes fréquences nécessitent une base plus riche que les basses fréquences [8]. De plus, elle amène à des compromis conditionnement-erreur légèrement meilleurs que la base des rayons.

Il s'avère qu'elle est efficace en matière de conditionnement pour les domaines en forme de disque, puisque ses fonctions de forme sont les fonctions propres du problème aux valeurs propres énergétique (équation 4.6). Nous proposons de construire une base similaire adaptée à la forme d'un sous-domaine quelconque en exploitant le critère sur le pas de discrétisation 4.56.

Analyse des fonctions de Fourier dans le cas du disque

Dans le cas du disque où l'origine du sous-domaine \mathbf{x}_E est confondue avec le centre du disque \mathbf{x}_c , les fonctions de la base de Fourier sont les fonctions propres du problème aux valeurs propres énergétiques 4.6. Il s'agit donc de la base optimale pour ce sous-domaine puisque les fonctions de forme sont orthogonales au sens de l'énergie. Elle s'écrit :

$$\mathbf{A} = \{\phi_{-N/2}, \dots, \phi_{N/2}\} \quad (4.65)$$

avec N la dimension de la base et ϕ_n les fonctions de forme :

$$\begin{aligned} \phi_n &= \mathcal{H}(a_n) \\ \text{avec } a_n &= e^{in\theta} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Remarquons que lorsque $N = N_{\text{crit}}$ cette base vérifie le critère de précision énoncé dans cette partie au sens où la "fréquence d'oscillation angulaire" (soit le nombre de périodes par unité angulaire θ) des portraits atteint la fréquence de discrétisation définie par le critère $f_{\theta \text{ crit}}$ qui vaut ici $Dk/2\pi$ (D le diamètre du disque). En effet les fréquences des portraits les plus oscillants, soit les portraits $e^{-iN_{\text{crit}}/2\theta}$ et $e^{iN_{\text{crit}}/2\theta}$, valent :

$$\pm N_{\text{crit}}/2 = \pm(Dk/\pi)/2 = \pm f_{\theta \text{ crit}} \quad (4.67)$$

Les fréquences d'oscillation des autres portraits étant équitablement réparties entre $\pm f_{\theta \text{ crit}}$ et valent $\frac{n}{N_{\text{crit}}/2} f_{\theta \text{ crit}}$.

Dans le cas où l'origine \mathbf{x}_0 du sous-domaine n'est pas confondue avec le centre de disque \mathbf{x}_c , les portraits sont corrigés par un terme multiplicatif qui vient de la fonction de Herglotz :

$$a_n = e^{in\theta - ik\mathbf{u}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)} \quad (4.68)$$

Pour définir la fréquence d'oscillation de ces portraits nous utilisons une définition plus générale de la fréquence : la dérivée par rapport à θ de la phase $\psi_n = n\theta - k\mathbf{u}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)$ du portrait a_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (n\theta - k\mathbf{u}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)) = n - k\mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) \\ &= \frac{n}{N_{\text{crit}}/2} f_{\theta \text{ crit}} - k\mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Nous retrouvons bien que la fréquence d'oscillation se trouve entre $\pm f_{\theta \text{ crit}}$ à un décalage près induit par le décentrage de l'origine.

Construction des fonctions de forme dans le cas d'un domaine quelconque

A l'image de la base de Fourier, nous allons construire une base adaptative qui soit adaptée à la géométrie quelconque du sous-domaine à traiter. L'idée est de s'inspirer des fonctions de forme de la base de Fourier et de les adapter à la géométrie en faisant en sorte que la fréquence d'oscillation des portraits soit cohérente avec la fréquence de discrétisation $f_{\theta \text{ crit}}$ du sous-domaine.

Nous définissons la base par :

$$\mathbf{A} = \{\phi_{-N/2}, \dots, \phi_{N/2}\} \quad (4.70)$$

avec ϕ_n les fonctions de forme :

$$\begin{aligned} \phi_n &= \mathcal{H}(a_n) \\ \text{avec } a_n &= e^{i\psi_n(\theta)} \end{aligned} \quad (4.71)$$

et ψ_n la phase du portrait. Pour définir les phases, nous proposons d'étendre la relation 4.69 issue de l'analyse de la base de Fourier, aux cas où la fréquence de discrétisation n'est plus celle du disque mais celle du sous-domaine quelconque traité. ψ_n est donc définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} &= \frac{n}{N_{\text{crit}}/2} f_{\theta \text{ crit}} - k\mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) \\ \Rightarrow \psi_n(\theta) &= \frac{n}{N_{\text{crit}}/2} \int_0^\theta f_{\theta \text{ crit}} d\theta - \int_0^\theta k\mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta \end{aligned} \quad (4.72)$$

Il s'agit de définir le centre x_c du sous-domaine, au vu des éléments donnés par la démonstration des propriétés 2, 3 et 4 et du cas du disque. Nous le définissons comme un point de la droite dirigée par θ se trouvant à équidistance des bords du domaine (voir figure 4.11). \mathbf{x}_c n'est pas unique, mais qu'importe le choix de \mathbf{x}_c vérifiant cette propriété, les fonctions de forme ne dépendent pas de ce choix. Par ailleurs, \mathbf{x}_c dépend de θ . Pour certaines géométries il existe un unique point se trouvant sur toutes ces droites quelle que soit la direction θ , il sera alors judicieux de prendre ce point comme centre du sous-domaine. C'est le cas des géométries dont le bord peut être défini par une symétrie centrale comme le cercle, le rectangle ou le carré.

L'ensemble des fonctions de forme peuvent être construites avec le calcul numérique de seulement deux intégrales. Cela représente un très faible coût de calcul.

Nous illustrons à la figure 4.19 des fonctions de forme $\phi_n = \mathcal{H}(e^{i\psi_n(\theta)})$ de cette base pour le domaine en trapèze élargi (figure 4.15) à une fréquence de 2000 Hz. Les portraits ressemblent aux portraits de la base de Fourier à la différence que la largeur des lobes varie avec la direction θ : nous observons une oscillation plus rapide du portrait dans la direction de la largeur que dans la direction de la longueur (en particulier figure 4.19 (d) et (f)), ce qui est cohérent avec la fréquence de discrétisation $f_{\theta \text{ crit}}$. La forme particulière du portrait a_0 provient du terme de centrage $\int_0^\theta k \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta$.

Les fonctions de forme ϕ_n ressemblent à des fonctions de forme de la base de Fourier déformées par la fréquence de discrétisation. La fonction de forme $\phi_{N_{\text{crit}}/2}$ a la particularité d'être une onde évanescente où le champ est concentré sur le bord et sur les coins du domaine.

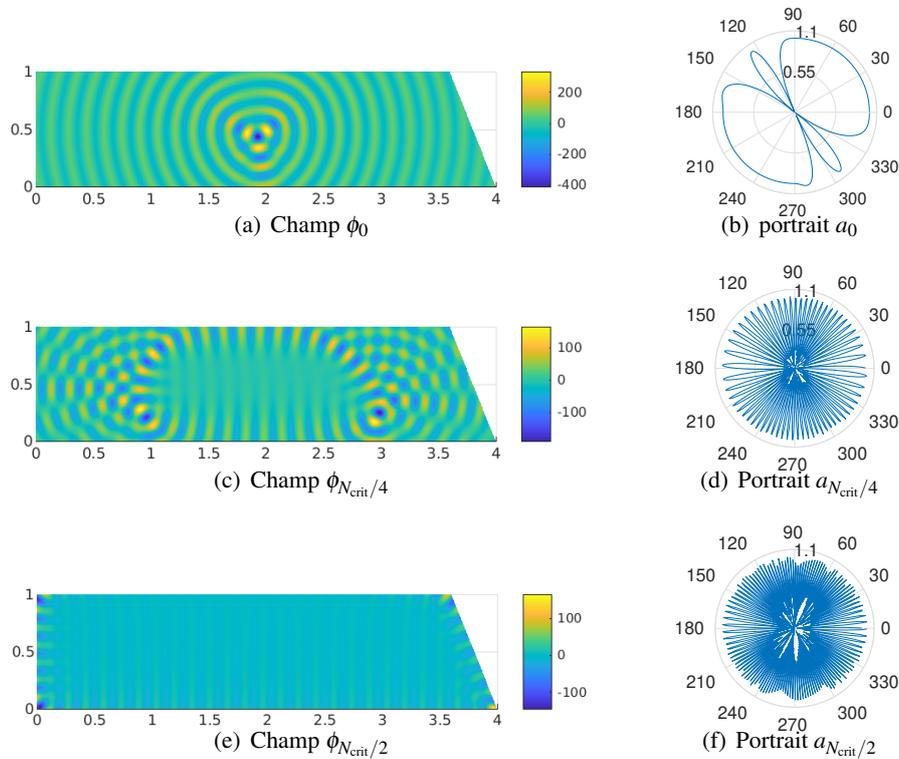


FIGURE 4.19 Partie réelle du champ des fonctions de forme de la base de Fourier généralisée (à gauche) pour la géométrie en trapèze élargi à 2000 Hz et leur portrait (à droite).

Nous observons que les fonctions de forme possèdent une zone au centre du sous-domaine où le champ est quasi nul. Cette zone prend la forme du domaine et augmente de taille avec l'indice $|n|$ jusqu'à atteindre la taille du domaine lorsque $|n| = N_{\text{crit}}/2$. Ce caractère est particulièrement marqué lorsque la fréquence est grande. La figure 4.20 montre la valeur absolue du champ $\phi_{N_{\text{crit}}/4}$ à 8000 Hz, nous visualisons clairement une zone où le champ est quasi nul et qui a la forme du domaine Ω .

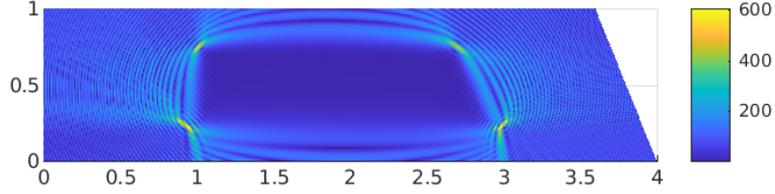


FIGURE 4.20 Valeur absolue du champ de la fonction de forme $\phi_{N_{crit}/4}$ de la base de Fourier généralisée pour la géométrie en trapèze élané à 8000 Hz.

L'avantage de cette base par rapport à une base de rayons ayant un pas adapté se trouve dans son caractère adaptatif, l'ajout d'une fonction de forme augmente la fréquence de discrétisation uniformément dans toutes les directions et de manière cohérente avec $f_{\theta_{crit}}$. La fréquence de discrétisation est atteinte simultanément dans toutes les directions à partir de $N = N_{crit}$.

Cette base peut être considérée comme l'extension de la base de Fourier généralisée adaptée aux sous-domaines de géométrie quelconque. Et par construction nous retrouvons bien la base de Fourier lorsque Ω est un disque. Par la suite nous appellerons cette base la base de "Fourier généralisée".

Nous avons pu observer que numériquement les fonctions de forme sont proches d'être orthogonales entre elles au sens du produit scalaire énergétique. Nous pouvons considérer cette base comme une approximation de la base orthogonale.

4.3.4 Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la résolution VTCCR

Construction des opérateurs VTCCR

Nous allons utiliser la base de Fourier généralisée comme base de résolution VTCCR. Une première approche consiste à injecter directement ces fonctions de forme dans la formulation variationnelle. Le problème est que, comme pour les fonctions de la base de Fourier, nous allons nous heurter aux coûts numériques de construction de la matrice VTCCR puisque les intégrales sur le bord n'ont, a priori, pas d'expression analytique. Nous proposons plutôt une seconde approche qui consiste à construire les opérateurs VTCCR avec une base de rayons et à les projeter sur la nouvelle base. Définissons \mathbb{A}_{FA} la matrice de projection :

$$\mathbb{A}_{FA} \, l m = a_{N/2-1+m}(\theta_l) \quad (4.73)$$

avec l et m les lignes et les colonnes de la matrice, θ_l les angles de discrétisation d'une base de rayons uniformément répartis de dimension N_{rayon} et $a_{N/2-1+m}$ les portraits de la base de Fourier généralisée de dimension N . Le nouveau problème VTCCR s'écrit :

$$\mathbb{A}_{FA}^H \mathbb{K} \mathbb{A}_{FA} A = \mathbb{A}_{FA}^H L \quad (4.74)$$

avec \mathbb{K} et L les opérateurs VTCCR construits avec la base de rayons et A le vecteur inconnu des amplitudes des fonctions de forme de la base de Fourier généralisée.

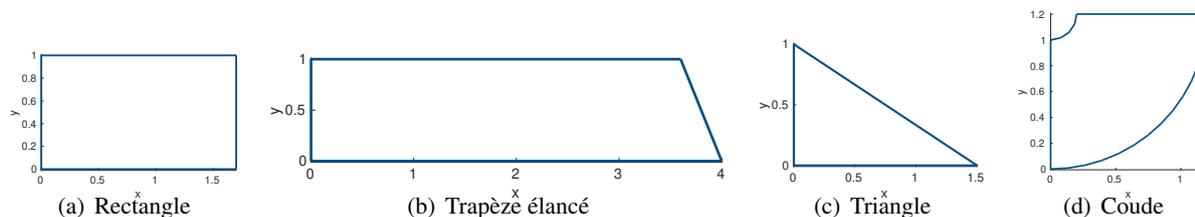


FIGURE 4.21 Différentes géométries pour tester la base de Fourier généralisée.

Application numérique

La dimension optimale de la base de Fourier généralisée au sens du critère vaut N_{crit} . En pratique il faut un nombre de fonctions de forme légèrement plus important pour avoir a priori une précision de l'ordre du pourcent. Pour déterminer ce nombre et valider cette base par la même occasion, nous proposons d'étudier la convergence et le conditionnement $\kappa(\mathbb{A}_{FA}^H \mathbb{K} \mathbb{A}_{FA})$ sur 4 domaines de géométries illustrées figure 4.21 aux fréquences 2000 Hz et 8000 Hz. Les conditions de bords sont des conditions de Dirichlet nulles partout sauf sur la paroi de gauche où la pression imposée est non nulle.

Les résultats sont illustrés figure 4.22. Notons que les comportements de l'erreur et du conditionnement sont semblables quelles que soient la géométrie et la fréquence. Pour chacun des cas, ajouter environ 5 fonctions de Fourier généralisées (soit $N_{crit} + 5$ fonctions de forme au total) semble être un bon compromis erreur - conditionnement : le conditionnement est de l'ordre de 10^2 et l'erreur de l'ordre de 1% (voir le tableau figure 4.2). Le cas du coude sollicité à 8 kHz a une convergence plus lente, il semblerait que cela provienne de la convexité du domaine. Notons qu'à l'exception du coude, les performances semblent augmenter avec la fréquence (meilleur compromis erreur-conditionnement).

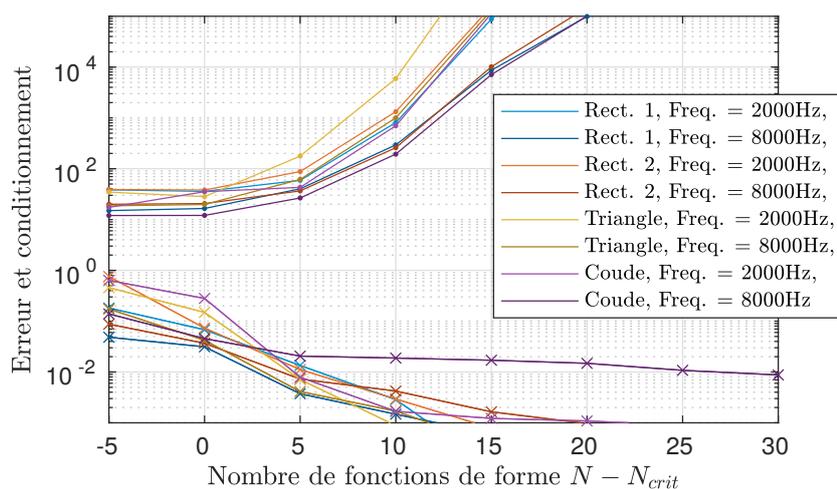


FIGURE 4.22 Erreur (courbes en 'x') et conditionnement (courbes en '.') avec la base de Fourier généralisée pour différentes géométries et différentes fréquences en fonction du nombre de fonctions de forme autour de N_{crit} .

f	Rectangle		Trapèze élargé		Triangle		Coude	
	2 kHz	8 kHz	2 kHz	8 kHz	2 kHz	8 kHz	2 kHz	8 kHz
Conditionnement $\kappa(\mathbb{A}_{FA}^H \mathbb{K} \mathbb{A}_{FA})$	59	40	88	37	177	61	43	27
Erreur ε_ω (%)	1.65	0.42	1.12	0.73	0.71	0.41	0.79	2.05

TABLE 4.2 Convergence et conditionnement avec la base de Fourier généralisée pour un nombre de fonctions de forme égal à $N_{\text{crit}} + 5$.

Des essais avec d'autres conditions de bords, des conditions de Neuman et de Robin, donnent des résultats semblables sur l'ensemble de ces géométries.

Remarquons une caractéristique particulière de la base de Fourier généralisée :

- L'espace généré par les N_{crit} premiers vecteurs de la base représente la partie propagative de la solution.
- L'espace généré par les autres vecteurs de la base représente la partie évanescente de la solution.

Ainsi pour atteindre une bonne précision, nous avons pu remarquer qu'il faut représenter tout "l'espace propagatif" et qu'une petite partie de "l'espace évanescent". Comme nous avons pu voir partie 4.2.2, les ondes évanescentes, représentées par des portraits de forte amplitude, sont donc associées au mauvais conditionnement de la matrice d'énergie, d'où un conditionnement qui augmente rapidement lorsque N dépasse N_{crit} .

4.3.5 Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'une base large bande

Construction de la base de portraits large bande de fréquences

Il s'agit ici de construire une base de portraits exploitable sur une bande de fréquences $I_\omega = [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ qui garantisse à la fois un bon conditionnement et une bonne précision.

Remarquons le lien entre deux fonctions de Fourier généralisées définies à deux fréquences différentes. Soient ψ_{n1} et ψ_{n2} des phases de portrait de fonctions de Fourier généralisées définies respectivement aux fréquences ω_1 et $\omega_2 \in I_\omega$:

$$\begin{aligned}
 \psi_{n1}(\theta) &= \frac{n}{N_{\text{crit}}/2} \int_0^\theta f_{\text{crit}1} d\theta - \int_0^\theta k_1 \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta \\
 &= \frac{n}{\frac{k_1 \mathcal{P}(\Omega)}{\pi}} \int_0^\theta \frac{k_1 y_{\text{max}}}{2\pi} d\theta - \int_0^\theta k_1 \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta \\
 &= \frac{n}{\frac{k_2 \mathcal{P}(\Omega)}{\pi}} \int_0^\theta \frac{k_2 y_{\text{max}}}{2\pi} d\theta - \int_0^\theta k_1 \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta \\
 &= \psi_{n2}(\theta) - \int_0^\theta (k_1 - k_2) \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Ainsi $\int_0^\theta (k_1 - k_2) \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta \ll \psi_{n-1}(\theta)$ implique que $\psi_{n-1}(\theta) \approx \psi_{n-2}(\theta)$ et donc que $a_{n-1}(\theta) (= e^{i\psi_{n-1}(\theta)}) \approx a_{n-2}(\theta) (= e^{i\psi_{n-2}(\theta)})$. Cela se produit lorsque :

- $k_1 \approx k_2$ et donc lorsque la largeur de bande est petite : $\Delta\omega \ll \omega_0$
- $\mathbf{v}_\theta \cdot \mathbf{x}_0 \approx \mathbf{v}_\theta \cdot \mathbf{x}_c \forall \theta$. L'origine \mathbf{x}_0 est un choix de l'utilisateur, il s'agit de choisir un point le plus proche possible du "centre du domaine" sachant que x_c peut dépendre de θ .

Si ces conditions sont vérifiées, les portraits a_n sont quasi indépendants de la fréquence et nous pouvons utiliser comme base de portraits large bande une seule et même base de Fourier construite par exemple à la fréquence centrale ω_0 . Comme la dimension N_{crit} dépend de la fréquence, une base de dimension fixe ne peut être efficace sur une large bande de fréquences. Il s'agira d'adapter le nombre de fonctions de forme à la fréquence considérée.

Application numérique

Nous utilisons la base large bande pour la résolution des problèmes avec la géométrie rectangulaire et la géométrie en coude sur deux bandes de fréquences I_ω de fréquence centrale 2000 Hz et 8000 Hz et de largeur $\pm 50\%$. La base est construite à la fréquence centrale et $N_{\text{crit}} + 5$ portraits sont sélectionnés pour résoudre le problème à une fréquence de la bande.

Les résultats sont illustrés figure 4.23. Nous remarquons que les erreurs dépendent globalement assez peu de la fréquence avec une légère augmentation aux fréquences les plus faibles. Il en est de même pour le conditionnement dans le cas de la bande à 2000 Hz. Pour la bande de fréquences $I_\omega = [4000 \text{ Hz}, 12000 \text{ Hz}]$ le conditionnement augmente lorsque la fréquence s'éloigne de la fréquence centrale. Cela provient du terme de décentrage $\int_0^\theta (k_1 - k_2) \mathbf{v}_\theta \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) d\theta$ qui, malgré un choix optimal de l'origine du sous-domaine \mathbf{x}_0 , ne peut pas être négligé lorsque la différence de fréquences est trop importante. La base large bande reste néanmoins robuste sur une large bande de fréquences.

Notons que l'erreur est importante à certaines fréquences, elle peut atteindre 10%. Si l'utilisateur nécessite une erreur plus faible, il peut la diminuer en ajoutant des fonctions de forme. En se référant au graphe 4.22, ajouter environ 10 fonctions de forme supplémentaires permet de diminuer l'erreur d'un facteur 10 au détriment d'une augmentation du conditionnement d'un facteur 100 à 1000.

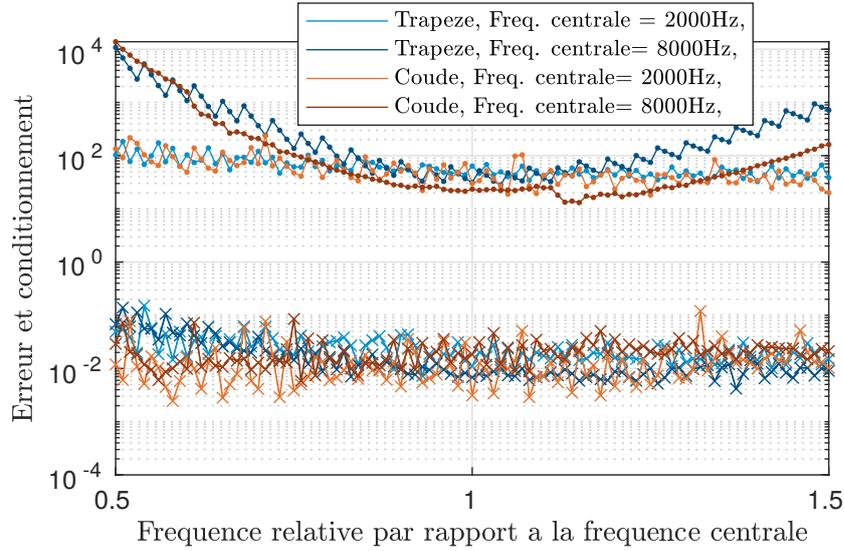


FIGURE 4.23 Erreur et conditionnement avec la base de Fourier généralisée en fonction de la fréquence relative par rapport à une fréquence centrale de 2000 Hz et 8000 Hz pour une géométrie en trapèze et en coude.

4.3.6 Exploitation de la base de Fourier généralisée pour la construction d'un portrait régularisé

Définition d'un portrait régularisé

La base de Fourier généralisée peut servir de base de représentation stable du portrait. En effet, après une résolution VTCR, la solution peut être représentée sur les N_{crit} premières fonctions de forme qui correspondent à la partie stable du portrait.

Si la résolution VTCR a été effectuée avec une base de Fourier généralisée, le portrait régularisé se définit par la représentation du portrait sur les N_{crit} premiers vecteurs de la base.

Si la résolution VTCR a été effectuée avec une autre base, il faut alors projeter sur les N_{crit} premiers vecteurs de la base de Fourier généralisée. Le portrait régularisé se définit par :

$$a_{\text{regu}} = \underset{a_{\text{regu}} \in \mathbf{A}_{FA}}{\text{argmin}} \|\mathcal{H}(a) - \mathcal{H}(a_{\text{regu}})\| \quad (4.76)$$

avec \mathbf{A}_{FA} la base de Fourier généralisée de dimension N_{crit} . Numériquement, le portrait est défini par :

$$\mathbf{A}_{\text{regu}} = \mathbf{A}_{FA} (\mathbf{A}_{FA}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{FA})^{-1} \mathbf{A}_{FA}^H \mathbf{M} \mathbf{A} \quad (4.77)$$

avec \mathbf{A}_{regu} le vecteur d'amplitude du portrait régularisé dans la base de résolution et \mathbf{A} le vecteur d'amplitude du portrait non régularisé. Cette dernière régularisation nécessite la construction de la matrice d'énergie \mathbf{M} .

Précisons que, contrairement au portrait effectif défini partie 4.2.4, ces portraits régularisés ne permettent pas de reconstruire l'intégralité du portrait initial car il y a une perte d'information du fait de la troncature de la base de Fourier généralisée. Néanmoins, en général la majeure partie de l'énergie des champs est représentée par ces portraits, en pratique la troncature ne retire qu'une infime partie de l'énergie du champ.

Illustration numérique

Reprenons l'exemple de la cavité rectangulaire sollicitée à 2000 Hz de la partie 4.2.4. Nous illustrons figure 4.24 les portraits régularisés suivants :

- Le portrait effectif présenté partie 4.2.4.
- Le portrait régularisé issu des N_{crit} premiers vecteurs d'une résolution avec la base de Fourier généralisée.
- Le portrait régularisé à partir de la projection sur la base de Fourier généralisée d'un portrait issu d'une résolution avec une base de rayons.

La base de rayons utilisée pour chacun des portraits est composée de 254 rayons. Les portraits régularisés avec la base de Fourier généralisée ont sensiblement la même forme que le portrait effectif et sont très réguliers. Ils diffèrent d'un facteur d'amplitude qui provient du fait que le portrait effectif est exprimé en \sqrt{J} et les autres en Pa. Les portraits construits avec la base de Fourier généralisée présentent une irrégularité de faible amplitude qui n'est pas présente sur le portrait effectif. Elle reste néanmoins mineure.

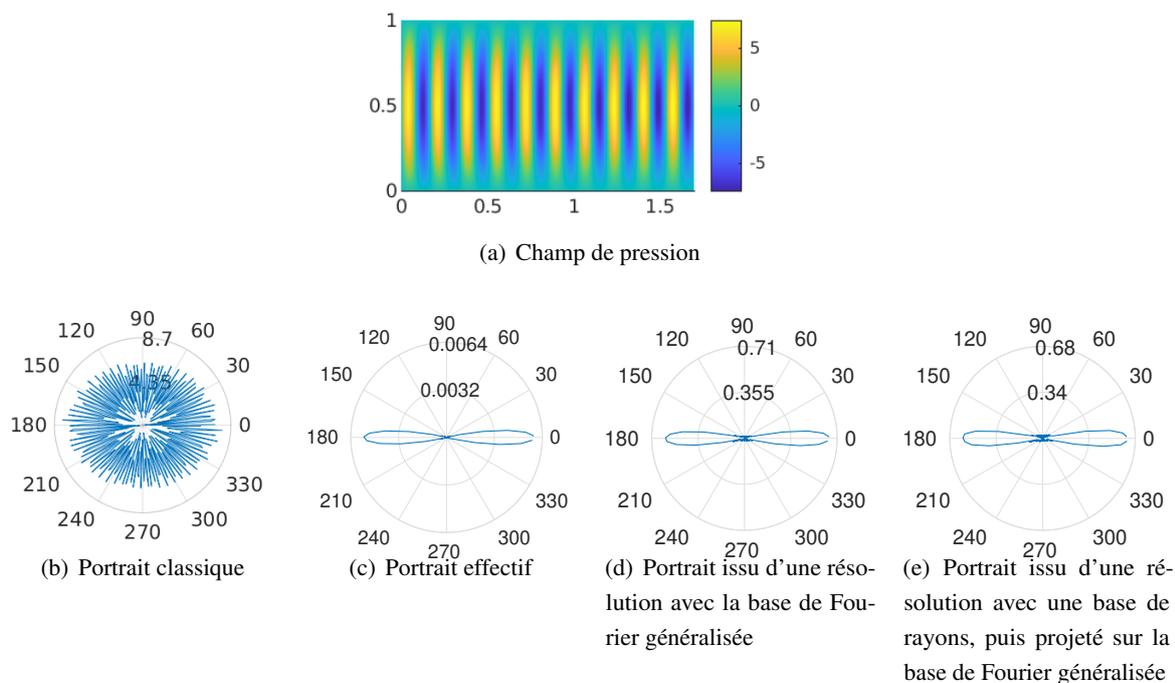


FIGURE 4.24 Champ de pression et portraits régularisés issus des différentes méthodes.

4.3.7 Validation sur un cas complexe

Afin de valider la base de Fourier généralisée sur un cas plus complexe nous traitons le problème présenté partie 3.2.5 illustré figure 3.3 sollicité à 2000 Hz et à 8000 Hz. Nous construisons une base de Fourier généralisée par sous-domaines à partir d'une base de rayons. Les dimensions N_{crit} et le nombre de rayons utilisés pour projeter les fonctions de forme sont répertoriés tableau 4.3. La solution obtenue avec la base de rayons est considérée comme référence ce qui permet de calculer l'erreur ε_ω et le résidu $r_\omega = \|\mathbb{K}A - L\|_2$. Des résultats nous pouvons remarquer plusieurs points :

- La règle heuristique établie partie 4.3.4 définit le compromis optimum à $N_{\text{crit}} + 5$. Cela semble insuffisant pour des cas plus complexes en matière de précision. La précision visée étant de l'ordre de 1%, il est nécessaire d'augmenter le nombre de fonctions de forme à $N_{\text{crit}} + 10$ au détriment du conditionnement qui reste malgré tout relativement faible : de l'ordre de 10^3 .
- La tendance qui est que la qualité de la base s'améliore lorsque la fréquence augmente est confirmée avec cette illustration.
- Le résidu VTCR est bien mieux minimisé que l'erreur, nous avons en moyenne un rapport de 10 à 20 voire plus entre l'erreur et le résidu. Ainsi un résidu faible ne garantit pas pour autant une erreur faible.

Nous avons pu remarquer que les performances de cette base s'améliorent lorsque l'ensemble des sous-domaines sont convexes, ce qui peut nécessiter de devoir découper le domaine Ω en de nombreux sous-domaines. A contrario les performances sont meilleures en hautes fréquences, soit lorsque la longueur d'onde est petite devant la taille caractéristique du domaine, ce qui impose une décomposition en un minimum de sous-domaines. Une attention particulière doit donc être portée au découpage des sous-domaines.

N_{crit} pour chaque sous-domaine	2000 Hz		8000 Hz	
	63 - 46 - 35		254 - 182 - 141	
Nombre de rayons utilisé par sous-domaine	150		450	
Nombre de fonctions de Fourier généralisées par sous-domaine	$N_{\text{crit}} + 5$	$N_{\text{crit}} + 10$	$N_{\text{crit}} + 5$	$N_{\text{crit}} + 10$
Conditionnement $\kappa(\mathbb{K})$	1.07×10^{17}		9.30×10^{17}	
Conditionnement $\kappa(\mathbb{A}_{FA}^H \mathbb{K} \mathbb{A}_{FA})$	642	1792	541	2364
Erreur ε_ω	10.2%	1.40%	5.16%	0.892%
Résidu r_ω	0.47%	0.0267%	0.68%	0.0464%

TABLE 4.3 Convergence et conditionnement avec la base de Fourier généralisée pour un nombre de fonctions de forme égal à $N_{\text{crit}} + 5$.

4.3.8 Bilan

L'étude proposée dans cette partie a permis de dégager l'origine du mauvais conditionnement et montre notamment l'influence de la forme de la géométrie. Elle a permis d'établir un critère précis sur la discrétisation en ondes planes optimale à adopter pour contrôler la précision et le conditionnement. Il détermine le pas de discrétisation $\Delta\theta_{optimal}$ au-delà duquel l'opérateur est mal conditionné et en deçà duquel la solution manquera a priori de précision en fonction de la direction θ de l'onde :

$$\Delta\theta_{optimal}(\theta) = \frac{2\pi}{ky_{max}(\theta)}$$

Ce critère est plus précis que les critères heuristiques utilisés jusqu'à présent [47]. Contrairement à ces derniers, il prend en compte la forme du sous-domaine.

L'enjeu a été également de proposer une base large bande. Une base de Fourier généralisée basée sur le critère est développée. Elle est robuste, elle permet d'atteindre les précisions souhaitées avec un conditionnement très faible. Il s'agit d'une base quasi analytique, elle est donc très faiblement coûteuse à mettre en oeuvre. Elle est adaptée au traitement des problèmes sur des bandes fréquentielles. Néanmoins, contrairement à la base orthonormée, une augmentation de la précision se fait au détriment d'une augmentation du conditionnement.

Ces résultats ouvrent la voie à de nombreux développements dont la résolution large bande.

4.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de développer des outils de régularisation du portrait et d'améliorer le conditionnement des opérateurs VTCR car il s'agit d'un prérequis pour la mise en place de méthodes de résolution large bande. Il a été rempli en proposant deux stratégies :

- La première consiste à construire une base orthonormée en énergie, cette approche s'avère être très robuste : elle atteint les niveaux de précision souhaités avec conditionnement de l'ordre de $\frac{1}{\eta}$. Elle est relativement peu coûteuse car l'orthonormalisation se fait par sous-domaine et non sur le domaine global. Néanmoins, l'analyse doit être réexécutée à chaque fréquence ce qui augmente drastiquement les coûts de calcul lors d'une résolution large bande.
- Après avoir démontré et quantifié le rôle du pas de discrétisation sur le conditionnement et l'erreur a priori, nous avons dégagé un critère qui permet de définir un pas de discrétisation critique qui allie bon conditionnement et précision. Nous l'avons exploité pour construire une base adaptée à la géométrie de chaque sous-domaine en s'inspirant de la base de Fourier. Elle est particulièrement peu onéreuse en coût de calcul. Cette base dépendant peu de la fréquence, une base construite à la fréquence centrale peut être utilisée sur une large bande de fréquences et allie bon conditionnement et précision sur l'ensemble de la bande.

La deuxième stratégie s'avère être la plus pertinente pour la résolution large bande car elle est aussi performante que la première stratégie tout en étant bien moins onéreuse. Néanmoins la régularisation du

portrait avec la base orthonormée est plus robuste, nous l'exploiterons pour étudier la réductibilité du problème sur une large bande de fréquences chapitre 5.

Ces résultats ouvrent la voix à de nombreux développements dont la résolution large bande.

Chapitre 5

Résolution large bande de fréquences : approche par réduction de modèle PGD

Ce chapitre traite de la méthode de réduction de modèle PGD appliquée à la VTCR pour la résolution large bande de fréquences. Une première partie étudie l'efficacité du couplage dans la gamme des moyennes fréquences. Une seconde partie étudie l'algorithme et propose des outils pour augmenter la vitesse de convergence.

5.1	Étude de la réductibilité en moyennes fréquences	92
5.1.1	Construction d'une approximation de rang faible sur une bande de fréquences	92
5.1.2	Comportement de la décomposition du portrait sur une bande de fréquences .	93
5.1.3	Comparaison de la décomposition du portrait et de la décomposition du champ	99
5.1.4	Stratégie de découpage du domaine fréquentiel	100
5.1.5	Etude de la réductibilité des problèmes	101
5.2	Application de la méthode PGD sous sa forme habituelle	105
5.2.1	Mise en œuvre de la méthode	105
5.2.2	Applications numériques	107
5.2.3	Détails sur la construction des opérateurs conditionnés et influence du conditionnement de \mathbb{K}	111
5.3	Développement de stratégies d'actualisation	113
5.3.1	Développement des stratégies	113
5.3.2	Application numérique	114

5.4	Étude des coûts de calcul des différentes stratégies	115
5.4.1	Évaluation des coûts de calcul des algorithmes PGD pour la résolution à large bande de fréquences	115
5.4.2	Illustration des coûts de calcul	116
5.5	Conclusion	118

Dans ce chapitre nous allons appliquer la méthode de réduction de modèle PGD pour la résolution large bande de fréquences afin de réduire les coûts de calcul par rapport à l'approche fréquence par fréquence. L'approche consiste à décomposer le domaine fréquentiel en bande de taille à définir et à rechercher une approximation de rang faible u^M de la solution u par bande de fréquences. L'approximation sur une bande de fréquences $I_\omega = [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ s'écrit comme une somme de produits de fonctions à variables séparées :

$$u(\mathbf{x}, \omega) \approx u^M(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=1}^M u_m(\mathbf{x}) f_m(\omega)$$

avec u_m une fonction de la position \mathbf{x} et f_m une fonction de la fréquence ω . Le couple (u_m, f_m) est appelé un mode du champ p . M est le nombre de modes, il désigne également le rang de l'approximation. Des techniques ont été développées dans la littérature pour construire les modes à faible coût de calcul ce qui fait de cette méthode une alternative a priori moins coûteuse que l'approche de résolution point par point pour résoudre un problème sur une bande de fréquences. Ces coûts pouvant être considérés comme proportionnels au nombre de modes M , nous considérons qu'une solution est réductible lorsque l'approximation est proche de la solution avec un faible nombre de modes M .

Nous avons vu au chapitre 2.2 que les approximations de cette forme ne sont a priori que peu performantes pour la partie des moyennes fréquences car la densité modale y est importante : il faudrait autant de termes de la somme que de modes propres sollicités dans la bande de fréquences considérée. Dans le domaine temporel cela se traduit par le fait qu'une onde qui se propage se décompose mal en approximation de rang faible.

Pour sortir de cette impasse nous exploitons le fait que la variable de la VTCR n'est pas la solution elle-même mais le portrait de la solution, soit une amplitude d'onde en fonction de la direction : la propagation d'une onde est naturellement traduite par la variable VTCR. Appliquer la PGD à la VTCR consiste à rechercher une approximation a^M du portrait a sous la forme :

$$a(\theta, \omega) \approx a^M(\theta, \omega) = \sum_{m=1}^M \Lambda_m(\theta) \lambda_m(\omega) \quad (5.1)$$

avec Λ_m une fonction de la direction θ et λ une fonction de la fréquence ω . Le couple (Λ_m, λ_m) est appelé un mode de portrait. Le portrait classique de la VTCR est particulièrement irrégulier ce qui ne permet a priori pas une telle décomposition. Il s'agira de travailler avec un portrait régularisé en utilisant les outils développés dans le chapitre 4.

La figure 5.3 illustre le champ de pression, le portrait classique et le portrait effectif pour différentes fréquences voisines. Alors que le champ varie beaucoup d'une fréquence à l'autre, le portrait effectif varie quant à lui relativement peu. Il apparaît que, dans ce cas, le portrait effectif peut être approché avec une approximation de rang faible.

Nous commençons par étudier la réductibilité du portrait, soit la capacité de la solution à être approchée par une approximation de rang faible. Nous étudierons entre autres l'influence de la largeur de

bande et de l'amortissement. Ensuite nous établirons un algorithme permettant de construire à moindre coût de calcul cette approximation. L'objectif visé est une erreur de 5 à 10% par rapport à une référence calculée point par point.

5.1 Étude de la réductibilité en moyennes fréquences

Nous étudions dans cette partie la capacité du portrait à être approché par une approximation de rang faible par sous-domaine VTCR. Nous comparons cette dernière à l'approximation en rang faible du champ solution p afin de dégager les avantages à utiliser une décomposition du portrait a plutôt que celle du champ p . Il s'agira également de définir comment découper la bande de fréquences de telle sorte à minimiser le nombre total de modes M à construire. Il s'agira finalement de conclure quant à la pertinence de l'approche par rang faible proposée ici pour envisager des gains en coûts de calcul par rapport à l'approche point par point.

Pour cette étude nous utilisons le portrait effectif défini au chapitre précédent équation 4.36 pour ses propriétés régularisantes.

5.1.1 Construction d'une approximation de rang faible sur une bande de fréquences

Dans cette partie nous traitons le cas d'un seul sous-domaine. Afin d'alléger la notation nous retirons l'indice \square_E .

La construction de l'approximation de rang faible du portrait consiste à chercher une approximation du portrait effectif sur une bande de fréquences I_ω par sous-domaine Ω sous la forme :

$$a_{\text{ef}}(\theta, \omega) \approx a_{\text{ef}}^M(\theta, \omega) = \sum_{m=1}^M \Lambda_{\text{ef } m}(\theta) \lambda_{\text{ef } m}(\omega) \quad (5.2)$$

Notons p_{ef}^M le champ de pression associé. Le couple $(\Lambda_{\text{ef } m}, \lambda_{\text{ef } m})$ est un mode du portrait effectif.

Rappelons que pour reconstruire le champ p à partir du portrait effectif, il faut d'abord revenir au portrait classique (équation 4.36 puis appliquer la fonction de Herglotz équation 3.8). Il s'agit de résoudre :

$$p_{\text{ef}}^M = \underset{p_{\text{ef}}^M \text{ tel que } a_{\text{ef}}^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_{\text{ef } m}(\theta) \lambda_{\text{ef } m}(\omega)}{\text{argmin}} \int_{\omega \in I_\omega} \|p - p_{\text{ef}}^M\|^2 d\omega \quad (5.3)$$

Le champ de référence est construit à partir d'une résolution VTCR fréquence par fréquence. Par construction du portrait effectif 4.32, la minimisation énergétique s'écrit également comme une minimisation de la norme L2 du portrait effectif :

$$p_{\text{ef}}^M = \underset{p_{\text{ef}}^M \text{ tel que } a_{\text{ef}}^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_{\text{ef } m}(\theta) \lambda_{\text{ef } m}(\omega)}{\text{argmin}} \int_{\omega \in I_\omega} \|a_{\text{ef}} - a_{\text{ef}}^M\|_2^2 d\omega \quad (5.4)$$

Pour construire ce champ et ce portrait effectif, supposons une discrétisation du domaine I_ω en N_ω fréquences notées ω_n . Nous supposons que le portrait effectif du sous-domaine Ω est construit à partir d'une base de N rayons. L'approximation a_{ef}^M qui minimise cette norme peut donc être déterminée à partir d'une Singular Value Decomposition (SVD) de la matrice :

$$\mathbb{A}_{ef} = \begin{pmatrix} A_{1\ ef}(\omega_1) & \dots & A_{1\ ef}(\theta_1, \omega_{N_\omega}) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N\ ef}(\theta_N, \omega_1) & \dots & A_{N\ ef}(\theta_N, \omega_{N_\omega}) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

avec $A_{I\ ef}(\omega)$ les amplitudes associées à la discrétisation en ondes planes à la fréquence ω . La SVD donne la décomposition suivante : $\mathbb{A}_{ef} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{V}^H$ avec \mathbb{V} et \mathbb{U} un ensemble de vecteurs orthonormés et \mathbb{D} la matrice diagonale des valeurs singulières. Les portraits $\Lambda_{ef\ m}$ et les fonctions $\lambda_{ef\ m}$ sont respectivement les colonnes de la matrice $\mathbb{U}\mathbb{D}$ et les lignes de la matrice \mathbb{V}^H associées aux plus grandes valeurs singulières.

5.1.2 Comportement de la décomposition du portrait sur une bande de fréquences

Nous allons traiter deux géométries illustrées figure 5.1 : une à caractère faiblement diffusif (a) et une à caractère plus hautement diffusif (b), sur une bande de fréquences de fréquence centrale 2500 Hz et de largeur $\pm 10\%$. Les conditions de bord sont des conditions de Dirichlet nulles partout sauf sur la paroi de gauche où la pression vaut $p_d(y) = 1 - \cos(2\pi y)$ avec y l'abscisse curviligne de la paroi à gauche. Afin de visualiser les problèmes traités, les énergies des réponses fréquentielles à différents amortissements sont illustrées figure 5.2.

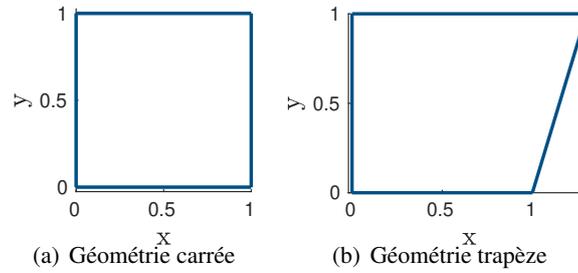


FIGURE 5.1 Géométrie des cavités traitées.

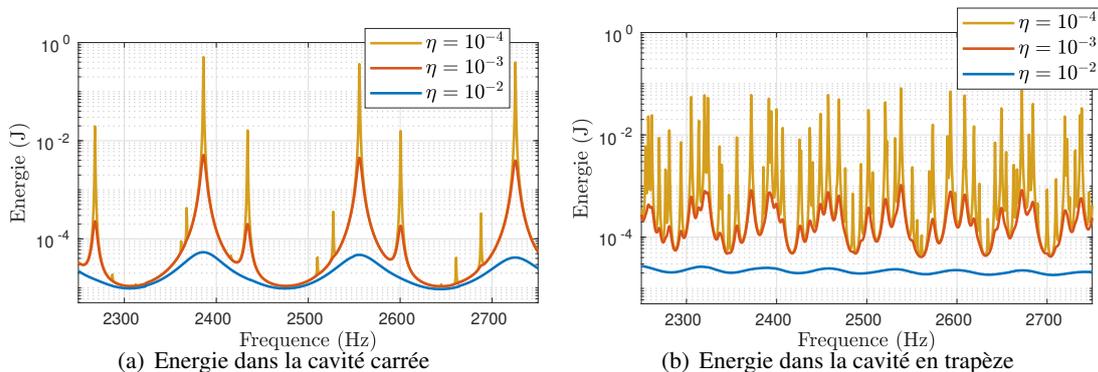


FIGURE 5.2 Énergie en fonction de la fréquence dans les cavités pour différents amortissements η .

Pour illustrer et comprendre le comportement de l'approximation de rang faible nous allons traiter 3 cas :

- Cas 1, Géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$: quelques modes propres bien distincts sont sollicités dans la bande, il y a un faible recouvrement modal. Il s'agit d'un cas typé "basses fréquences".
- Cas 2, Géométrie quadrangle à $\eta = 10^{-2}$: le recouvrement modal est très important, la réponse fréquentielle est très lissée par l'amortissement. Il s'agit d'un cas typé "hautes fréquences".
- Cas 3, Géométrie quadrangle à $\eta = 10^{-3}$: la densité modale sollicitée est très importante, il y a également un fort recouvrement modal. La réponse fréquentielle est chahutée. Il s'agit d'un cas typé "moyennes fréquences". Ce dernier cas est le plus représentatif des applications visés dans ces travaux.

Définissons l'erreur ε_{I_ω} sur une bande de fréquences par :

$$\varepsilon_{I_\omega}(p) = \sqrt{\frac{\int_{\omega \in I_\omega} \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_E - p_{E \text{ refe}}\|_E^2 d\omega}{\int_{\omega \in I_\omega} \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{E \text{ refe}}\|_E^2 d\omega}} \quad (5.6)$$

avec p_{refe} une référence. Cette erreur est particulièrement sévère. Elle pénalise fortement les potentiels déphasages alors que ces derniers ne sont pas nécessairement représentatifs de la qualité de la solution. Les erreurs potentiellement importantes par la suite sont donc à relativiser.

Cas 1, géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$

Les champs et les portraits effectifs du cas 1 sont illustrés figure 5.3 aux fréquences 2300, 2433, 2567 et 2700 Hz. Dans ce cas le portrait est assez directif avec une direction privilégiée : celle de la normale à la paroi à gauche où se trouve la source. La cavité carrée agit comme un guide d'ondes.

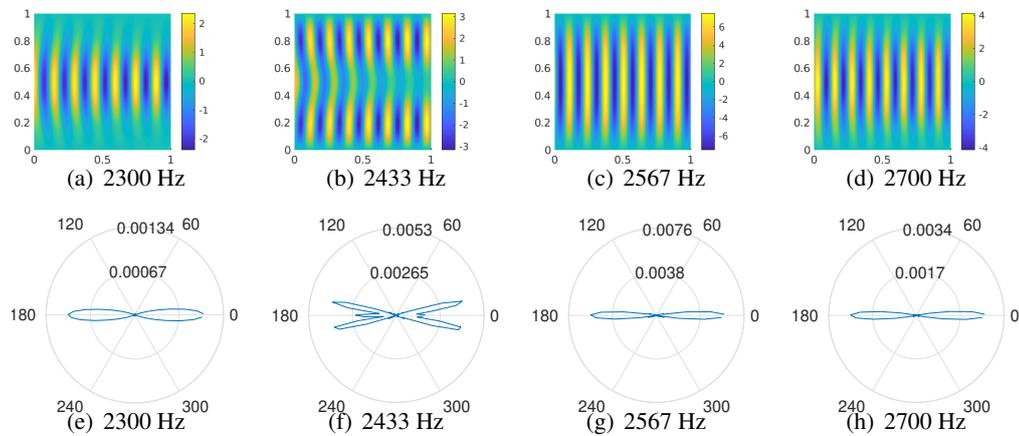


FIGURE 5.3 Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$.

Nous construisons l'approximation du portrait a_{ef}^M et le champ p_{ef}^M associé en résolvant 5.4 et en choisissant M de telle sorte que l'erreur entre la référence et la solution soit inférieure à 5%. Pour atteindre cette erreur sur ce cas test il faut 4 modes du portrait. A ce niveau d'erreur les courbes des énergies en fonction de la fréquence sont quasi superposées (à titre indicatif l'énergie de la référence et de l'approximation sont illustrées figure 5.12 de la partie suivante 5.2).

Les quatre modes (Λ_m, λ_m) sont représentés figure 5.4.

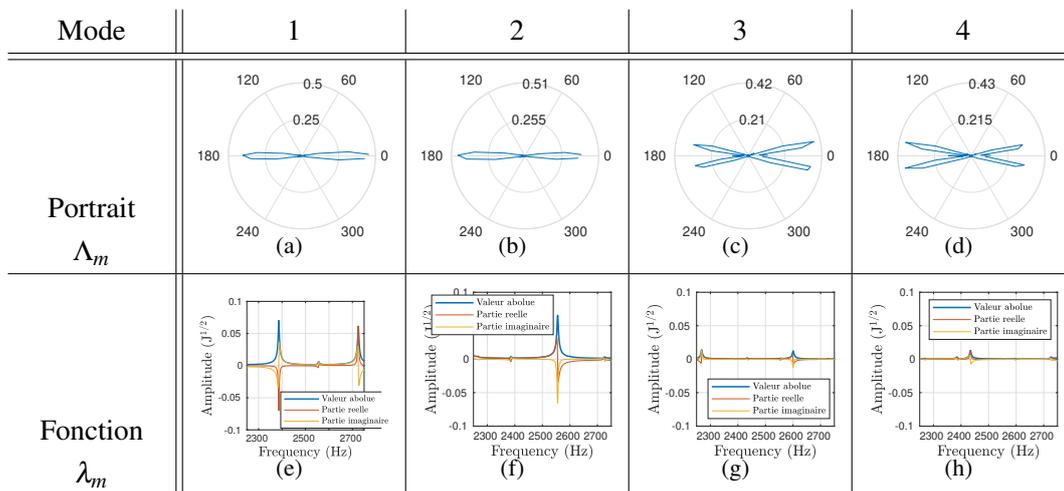


FIGURE 5.4 Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$.

Nous pouvons remarquer que les modes (Λ_m, λ_m) ont tendance à représenter les modes propres de vibrations de la cavité :

- Le mode (Λ_1, λ_1) représente les modes propres de fréquence propre 2390 Hz et 2730 Hz.
- Le mode (Λ_2, λ_2) représente le mode propre de fréquence propre 2550 Hz.
- Le mode (Λ_3, λ_3) représente les modes propres de fréquence propre 2270 Hz et 2600 Hz.

— Le mode (Λ_4, λ_4) représente le mode propre de fréquence propre 2430 Hz.

Le comportement de la décomposition en portrait est donc similaire à la décomposition du champ en rang faible où il est connu qu'un couple (u_m, f_m) aurait également tendance à représenter un mode propre de vibration. A la différence que dans le cas de la décomposition du portrait, un seul mode (Λ_m, λ_m) peut représenter plusieurs modes propres de vibration. Ce n'est pas le cas de la décomposition du champ en rang faible car les champs des modes propres sont orthogonaux entre eux. Ce point est un avantage de la décomposition du portrait. Néanmoins le fait qu'un seul portrait représente étonnamment bien deux modes propres de vibration est particulièrement marqué dans le cas du carré qui a un effet de guide d'onde. Ce phénomène se retrouve plus rarement dans les géométries quelconques.

Cas 2, géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-2}$

Les champs et les portraits effectifs sont illustrés figure 5.5. Nous remarquons que les valeurs absolues du portrait varient très peu avec la fréquence : ils semblent quasi indépendants de la fréquence. Précisons que la phase des portraits n'est pas représentée sur ces polaires, ces portraits ne sont donc pas nécessairement aussi proches qu'il n'y paraît.

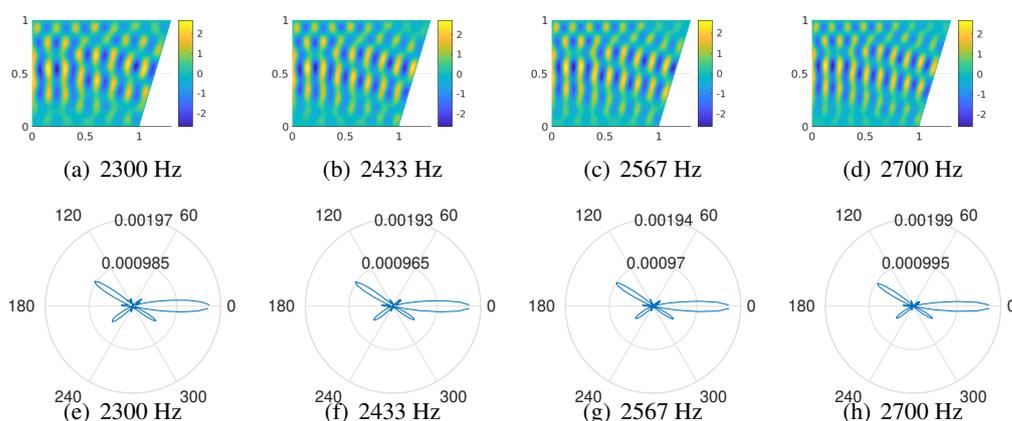
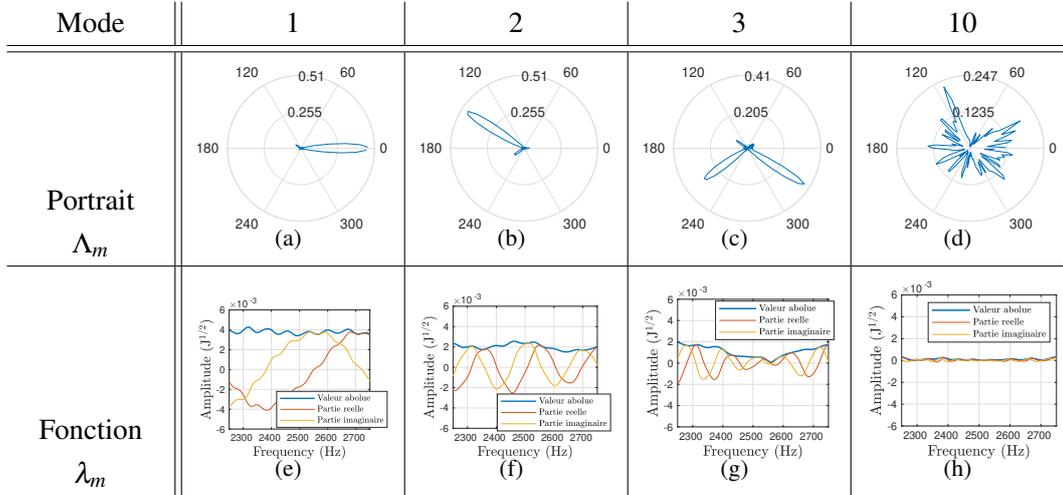


FIGURE 5.5 Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-2}$.

Sur ce problème 10 modes de portraits sont nécessaires pour atteindre une erreur de 5%. Les modes (Λ_m, λ_m) pour $m = 1, 2, 3$ et 10 sont représentés figure 5.6.

FIGURE 5.6 Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-2}$.

Nous remarquons que les portraits sont très directifs et représentent les différents trajets de l'onde entre deux réflexions sur les parois de la cavité : le portrait Λ_1 représente le premier trajet entre l'émission par la source à la paroi de gauche et la première réflexion sur la paroi de droite, Λ_2 représente le trajet entre la première et la deuxième réflexion et ainsi de suite... Les modes 3 et 4 (ce dernier n'est pas représenté ici) se partagent la représentation du trajet entre la 2^{ème} et la 4^{ème} réflexion d'où les deux lobes sur la représentation polaire du Λ_3 .

Le dernier mode est bien plus diffus mais a une amplitude mineure par rapport aux autres modes.

La figure 5.6 représente la valeur absolue, la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions de la fréquence λ_m . Les valeurs absolues des premières fonctions λ_m sont quasi constantes. La phase de ces fonctions oscille sinusoidalement. Elle oscille d'autant plus rapidement que la distance qu'a parcouru l'onde entre la source et les multiples réflexions est grande. Ce comportement de la décomposition du portrait se rapproche de la Ray Tracing Method (RTM) vue dans le chapitre 2. Dans cette méthode, le champ hautes fréquences est décrit par les multiples réflexions de l'onde dans la cavité. Reprenons le champ issu de la RTM défini équation 2.8 :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = C \sum_{j=1}^J A_j e^{i \frac{\omega L_j}{c} - i v_j \pi / 2} \quad (5.7)$$

Chaque terme sommé correspond à un trajet de l'onde, ayant potentiellement subi des réflexions entre la source au point \mathbf{x}_s et le point de mesure \mathbf{x} . Le terme $e^{i \frac{\omega L_j}{c} - i v_j \pi / 2}$ oscille d'autant plus fortement avec la fréquence que L_j , la distance qu'a parcourue l'onde j entre la source et le point de reconstruction, est grande. Il s'agit du même comportement observé avec les fonctions de la fréquence λ_m des modes de portrait, ce qui nous permet d'interpréter leur oscillation à l'image de la RTM.

En conclusion, lorsque l'amortissement est important, un mode représente grosso modo un trajet entre deux réflexions, il faut donc environ autant de modes que de réflexions.

Cas 3, géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$

Dans le cas 3 les champs et les portraits effectifs sont illustrés figure 5.7.

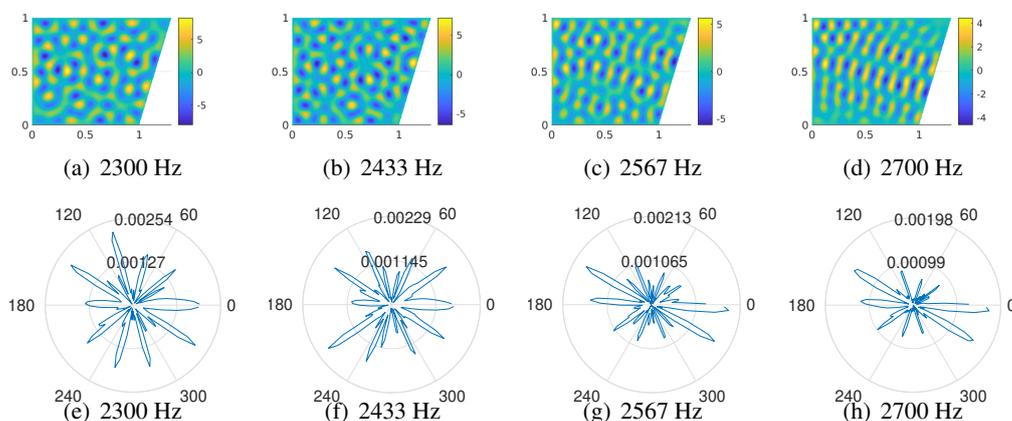


FIGURE 5.7 Partie réelle du champ de pression (en haut) et portrait effectif (en bas) à différentes fréquences pour le problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$.

40 modes sont nécessaires pour atteindre un niveau d'erreur de 5% ce qui est beaucoup par rapport aux autres cas traités. Les modes (Λ_m, λ_m) sont représentés figure 5.8. Les modes du portrait représentent à la fois un aspect propagatif comme le montre le portrait Λ_1 et un aspect modal comme le montre les fonctions de la fréquence. Notons que chaque mode contribue à traduire de nombreux modes propres de vibration comme le montrent les fonctions de la fréquence.

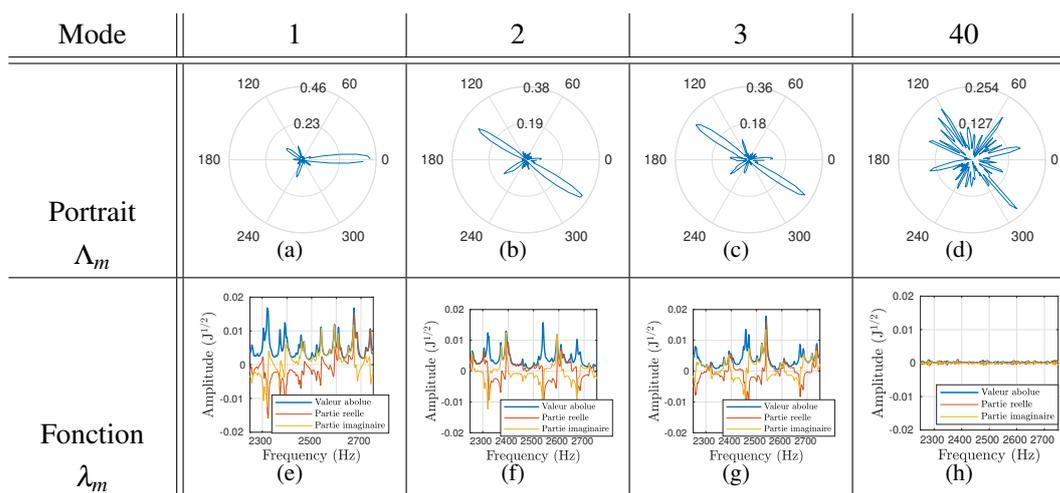


FIGURE 5.8 Modes (Λ_m, λ_m) du problème à géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$.

Pour le trapèze à 2500 Hz, le nombre optimal de fonctions de forme N_{crit} étudié dans le chapitre précédent vaut 63 à la fréquence centrale. Il traduit le nombre de fonctions de forme nécessaires pour

obtenir une bonne précision. Avec 40 modes de portrait il y a donc quasiment autant de modes que de degrés de liberté VTCR. Cela signifie que ce problème n'est pas réductible.

5.1.3 Comparaison de la décomposition du portrait et de la décomposition du champ

Nous allons comparer la réduction du portrait présentée ici à celle du champ qui consiste à rechercher une approximation de la forme :

$$p^M(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=1}^M p_m(\mathbf{x}) f_m(\omega) \quad (5.8)$$

où p_m sont des fonctions de \mathbf{x} et f_m des fonctions de la fréquence ω . Les couples (p_m, f_m) sont appelés des modes du champ. Cette approximation est construite à partir de la minimisation de l'écart énergétique avec la solution p_{refe} :

$$p^M = \underset{p^M = \sum_{m=1}^M p_m(\mathbf{x}) f_m(\omega)}{\operatorname{argmin}} \int_{I_\omega} \|p_{\text{refe}} - p^M\|^2 d\omega \quad (5.9)$$

Afin de comparer les performances de cette dernière décomposition à celle du portrait nous recherchons le nombre de modes nécessaires pour atteindre une erreur de 5% pour un problème large bande donné pour chacune de ces décompositions.

Nous calculons ce nombre pour les 3 problèmes présentés dans la partie précédente 5.1.2 pour différentes largeurs de bande. Les résultats sont illustrés figure 5.9.

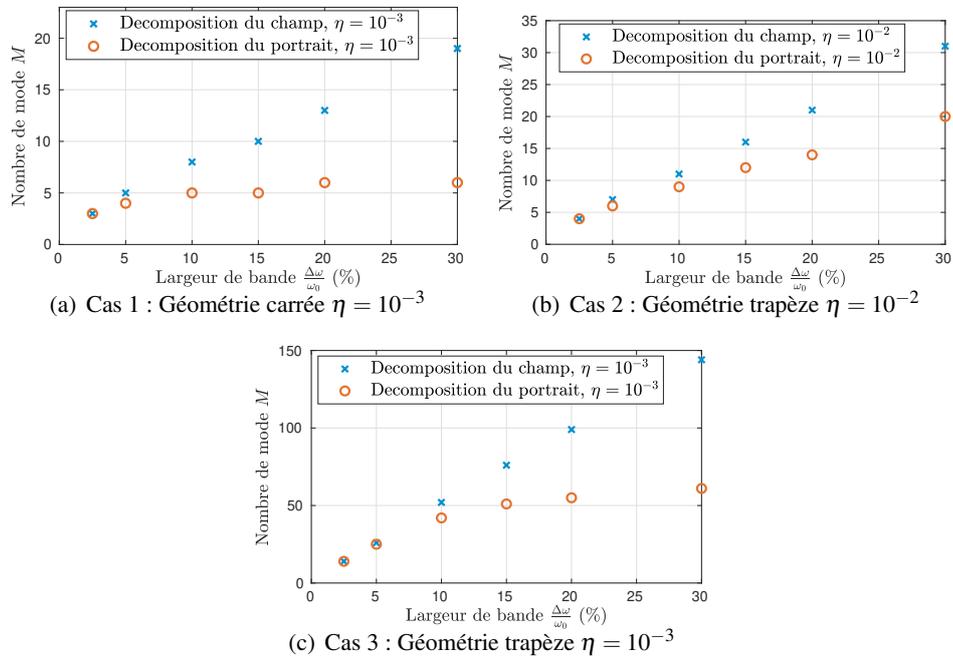


FIGURE 5.9 Nombre de modes nécessaires pour atteindre une erreur inférieure à 5% en fonction de la largeur de bande.

Premièrement commentons le comportement de la décomposition du champ, nous remarquons que quel que soit le cas la décomposition est linéaire : le nombre de modes nécessaires pour traduire la solution à 5% est proportionnel à la largeur de bande. Dans les cas 1 et 3 ce résultat est cohérent puisqu'il s'agit de traduire les modes propres de vibration, les champs des modes propres de vibration étant orthogonaux entre eux, il faut environ autant de modes propres de vibration que de modes (p_m, f_m) du champ. Dans le cas 2 où la réponse est bien plus amortie, ce résultat était moins prévisible mais tout autant vérifié.

Le comportement de la réduction du portrait n'a pas ce caractère linéaire : le nombre de modes est similaire à celui de la réduction du champ pour des faibles largeurs de bande puis la réduction devient plus efficace pour des bandes plus larges. Cela s'explique différemment en fonction du cas :

- Cas 1 : cela provient du fait qu'un mode du portrait peut traduire plusieurs modes propres de vibration, ainsi la base de modes permettant de traduire la solution sur une bande de largeur $\pm 10\% \omega_0$ est quasi la même que celle pour traduire la solution sur une bande de largeur $\pm 20\% \omega_0$. Notons que cela provient du caractère faiblement diffusif du problème, nous avons pu remarquer que ce n'est pas général aux problèmes basses fréquences où ce comportement est présent mais moins marqué.
- Cas 2 : nous avons pu observer que les modes de la décomposition du portrait traduisent les différentes réflexions du champ dans la cavité. Ces modes du portrait sont donc faiblement dépendants de la bande de fréquences traitée, d'où un comportement non proportionnel.
- Cas 3 : le nombre de modes de la décomposition du portrait est bien plus important que dans les autres cas. Nous remarquons qu'il augmente jusqu'à atteindre environ 60 modes, soit le nombre de degrés de liberté défini par le critère de précision N_{crit} (qui vaut 63 à la fréquence centrale) étudié dans le chapitre précédent 2.2 équation 4.59. Une fois qu'il a atteint ce seuil il est naturel que le nombre de modes n'augmente plus avec la largeur de bande.

Nous remarquons que quel que soit le cas, la réduction du portrait est plus efficace que la réduction du champ. C'est particulièrement marqué pour des larges bandes de fréquences. Dans les cas 1 et 2 il s'agit d'un réel avantage de la décomposition du portrait par rapport à celle du champ. Dans le cas 3 cette efficacité est faussée car, comme décrit plus haut, cela provient du fait le nombre de modes qui atteint le nombre de degrés de liberté VTCR N_{crit} .

5.1.4 Stratégie de découpage du domaine fréquentiel

Suite aux différentes études menées nous pouvons conclure sur les stratégies à suivre pour obtenir un nombre de modes raisonnables par bande de fréquences et tirer les avantages de la décomposition du portrait. La décomposition du portrait en rang faible a un comportement particulier et différent en fonction du type de problème. La stratégie à suivre pour décomposer le domaine fréquentiel dépend du cas ou autrement dit de la gamme de fréquences :

- Pour les problèmes typés basses fréquences (soit peu de modes propres sollicités et un faible recouvrement modal représenté par le cas 1) un mode de portrait tend à représenter un à plusieurs

modes propres de vibration. Il faut donc environ autant de modes de portrait qu'il y a de modes propres de vibration et parfois moins puisque deux modes propres de vibration peuvent avoir le même portrait. Il s'agira donc de découper en bandes de fréquences contenant quelques modes propres de vibration.

- Pour les problèmes typés hautes fréquences (soit une réponse fréquentielle très lisse représentée par le cas 2) les modes de portrait tendent à représenter un trajet entre deux réflexions de l'onde dans la cavité. Il faut donc environ autant de modes de portrait qu'il y a de réflexions de l'onde dans la structure. Ces modes sont faiblement dépendants de la fréquence, donc le nombre de modes dépend peu de la fréquence. Il s'agira de découper en grandes bandes de fréquences dont la taille peut aller jusqu'à $\pm 30\%$ de la fréquence centrale.
- pour les cas typés moyennes fréquences (soit une forte densité modale et un fort recouvrement modal mais sans avoir une réponse fréquentielle lissée, comportement représenté par le cas 3) nous ne retrouvons pas les bonnes performances que nous avons en hautes fréquences, le comportement est à la fois modal et propagatif. Il s'agira de suivre la stratégie adoptée en basses fréquences, soit découper en bandes de fréquences contenant quelques modes propres de vibration.

5.1.5 Étude de la réductibilité des problèmes

La réductibilité d'un cas représentatif

Il s'agit dans cette partie d'évaluer dans quelle mesure il est possible d'envisager des gains de coûts de calcul lors de la résolution large bande avec une approximation de rang faible. Nous considérons que les coûts de calcul d'un mode sont grosso modo égaux aux coûts de calcul de la réponse fréquentielle en une fréquence de la bande. Nous allons donc étudier le gain SVD $G_{\text{SVD}} = \frac{N_\omega}{M}$ avec M le nombre de modes issus de la réduction du portrait nécessaires pour traduire la solution sur une bande de fréquences et N_ω le nombre de points fréquentiels de la bande I_ω .

Lorsque le gain est proche de 1, cela signifie qu'il faut quasiment autant de modes qu'il y a de points fréquentiels. Cela traduit un gain faible et donc une mauvaise réductibilité du problème. Lorsque le gain est grand par rapport à 1, cela signifie que quelques modes permettent de représenter un grand nombre de points fréquentiels. Cela traduit un gain important et donc une bonne réductibilité du problème.

N_ω est défini à partir du pas fréquentiel $\delta\omega$ et de la taille de la bande $\Delta\omega$:

$$N_\omega = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \quad (5.10)$$

avec $\delta\omega$ défini par le critère de Shannon équation 1.13. Le critère défini équation 1.13 et le choix d'un modèle d'amortissement hystérétique adopté ici impliquent que le pas fréquentiel est proportionnel à la fréquence centrale de la bande et à l'amortissement : sur une bande de fréquences I_ω nous avons $\delta\omega \approx \frac{\eta\omega_0}{\ln(100)}$.

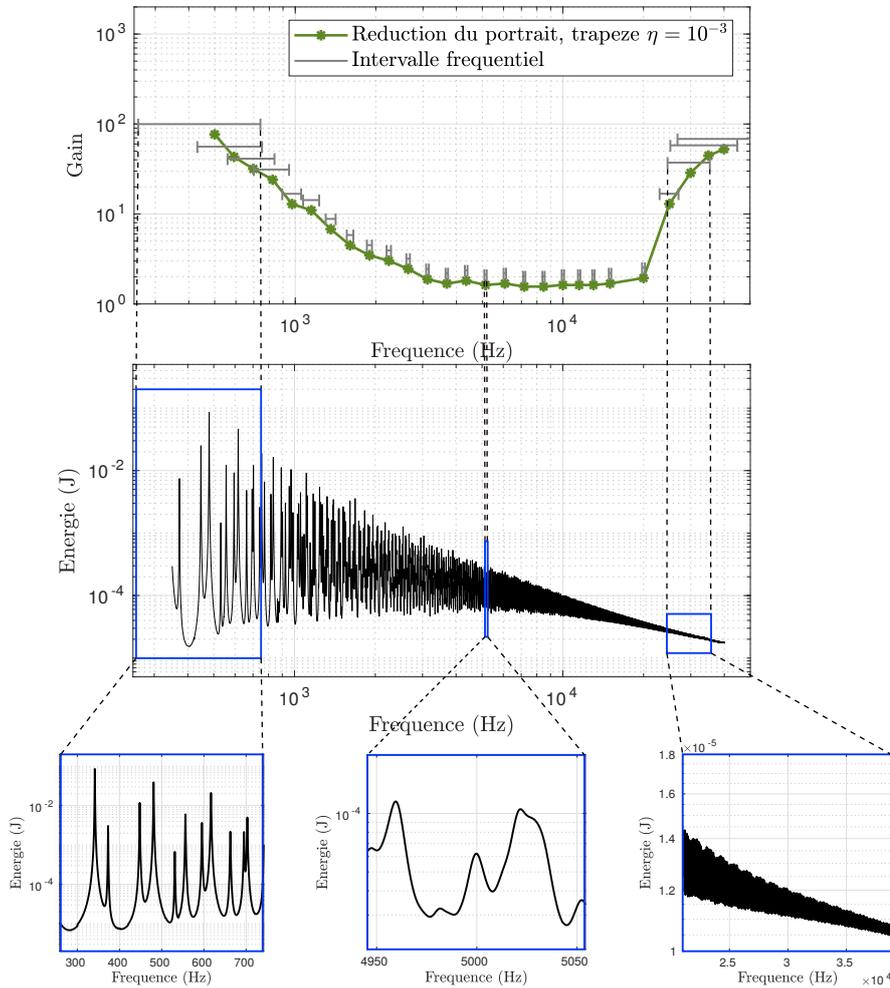


FIGURE 5.10 Gain G_{SVD} d'un problème avec une géométrie en trapèze (en haut), énergie en fonction de la fréquence (au milieu) et les énergies sur les bandes de fréquences pouvant être traduites avec 10 modes à 5% d'erreur (en bas).

Pour étudier le gain $G_{\text{SVD}} = \frac{N_\omega}{M}$ à une fréquence donnée nous construisons artificiellement la taille de la bande de fréquences telle qu'à $M = 10$ nous ayons une erreur de 5%. Nous calculons le gain G_{SVD} en fonction de la fréquence centrale pour le cas de la géométrie en trapèze à $\eta = 10^{-3}$ car il s'agit du cas le plus représentatif des cas rencontrés. Le gain est illustré figure 5.10 en haut en vert, en gris sont représentés les intervalles de fréquences auxquelles correspondent une erreur de 5% avec 10 modes. Au milieu est représentée l'énergie en fonction de la fréquence sur toute la gamme fréquentielle. En bas sont représentés les réponses fréquentielles sur les bandes de fréquences correspondant à une fréquence centrale de 500, 5000 et 30000 Hz. Nous remarquons que le gain G_{SVD} a une forme de cuvette : il est maximal en basses et en hautes fréquences et passe par un minimum en moyennes fréquences.

- En basses fréquences (autour de 500 Hz), la densité modale est faible et quelques modes propres concentrent l'énergie. Avec 10 modes il est possible de représenter une bande de fréquences

contenant près de 10 modes propres de vibration, les bandes de fréquences sont donc relativement larges (voir la figure 5.10 en bas à gauche : à 500 Hz, $\Delta\omega = 235$ Hz). Le pas fréquentiel donné par le critère $\delta\omega \approx 0.68$ Hz est quant à lui relativement petit. Il en résulte que N_ω est grand et donc le gain G_{SVD} l'est aussi : $G_{\text{SVD}} \approx 10^2$. Nous retrouvons des gains de l'ordre de grandeur de ceux obtenus dans la littérature en basses fréquences, vus au chapitre 2.2.

- En moyennes fréquences la densité modale augmente rapidement ce qui implique que les bandes de fréquences qu'il est possible de représenter avec 10 modes sont plus petites (voir la figure 5.10 en bas au milieu : à 5000 Hz, $\Delta\omega = 55$ Hz). Par ailleurs le pas fréquentiel augmente avec la fréquence, à 5000 Hz le pas vaut $\delta\omega = 6.8$ Hz. $\Delta\omega$ diminue et $\delta\omega$ augmente donc le gain G_{SVD} diminue doublement, il vaut au minimum environ $G_{\text{SVD}} \approx 2$ ce qui est très faible. Dans cette bande de fréquences, la densité modale est tellement importante que les champs exprimés à quelques pas fréquentiels d'écart sont quasi orthogonaux entre eux, d'où une très mauvaise réductibilité.
- En hautes fréquences, l'amortissement devient particulièrement important, l'onde subit quelques réflexions dans la cavité avant d'être amortie. Le mode de représentation de la décomposition du portrait change, plutôt que de représenter un mode propre de vibration comme il le fait en basses fréquences, le portrait Λ_m représente un trajet de l'onde entre deux réflexions. Or au vu du comportement de l'amortissement, plus la fréquence est importante moins l'onde subit de réflexions avant d'être amortie. Donc à partir d'une certaine fréquence le champ peut être approché par 10 modes (soit 10 réflexions), ces portraits Λ_m étant faiblement dépendant de la fréquence ils peuvent être utilisés sur une large bande de fréquences. Malgré un pas fréquentiel qui augmente avec la fréquence, la largeur de bande augmente plus rapidement donc le gain augmente à nouveau (voir la figure 5.10 en bas à droite : à 30 000 Hz, $\Delta\omega = 9\,000$ Hz).

La fréquence à partir de laquelle le gain remonte peut-être évaluée en quantifiant le nombre de réflexions avant amortissement de l'onde. La longueur L_{parc} de parcours d'une onde avant amortissement à une fréquence donnée vaut environ : $L_{\text{parc}} = \frac{\ln(100)}{\eta\omega/c}$. Le nombre de réflexions peut grossièrement être évalué par $N_{\text{rebo}} \approx \frac{L_{\text{parc}}}{R}$ avec R la longueur caractéristique du domaine qui vaut 1m ici. Donc la fréquence à partir de laquelle le nombre de réflexions N_{rebo} est égal au nombre de modes M vaut :

$$\omega \approx \frac{\ln(100)c}{M\eta R} \quad (5.11)$$

A $M = N_{\text{rebo}} = 10$, avec ω en radian par seconde. La fréquence vaut environ $\frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{\ln(100)c}{2\pi 10\eta R} \approx 24900$ Hz ce qui concorde avec le décollement sur le graphe où il apparaît à partir de 20000 Hz.

La gamme de fréquences dans laquelle le gain est très faible ($G_{\text{SVD}} < 2$) s'étend de 3000 Hz à 20000 Hz, soit toute la gamme des moyennes fréquences. Ce résultat est majeur puisqu'il permet d'illustrer, avec un cas représentatif, la limite de l'approximation en rang faible : la décomposition du portrait en rang faible n'est pas efficace sur les problèmes du type moyennes fréquences.

L'avantage en hautes fréquence de l'approximation en rang faible du portrait par rapport à celle du champ

Afin de compléter l'étude, nous calculons le gain G_{SVD} pour la décomposition du champ p : nous construisons artificiellement la taille de la bande de fréquences tel qu'à $M = 10$ nous ayons une erreur de 5% avec la décomposition SVD du champ p . Les gains G_{SVD} issus de la décomposition du portrait et de la décomposition du champ sont calculés en fonctions de la fréquence pour les trois cas tests : géométrie trapèze à $\eta = 10^{-2}$ (cas 2) et $\eta = 10^{-3}$ (cas 3) et géométrie carrée à $\eta = 10^{-3}$ (cas 1) et sont illustrés figure 5.11.

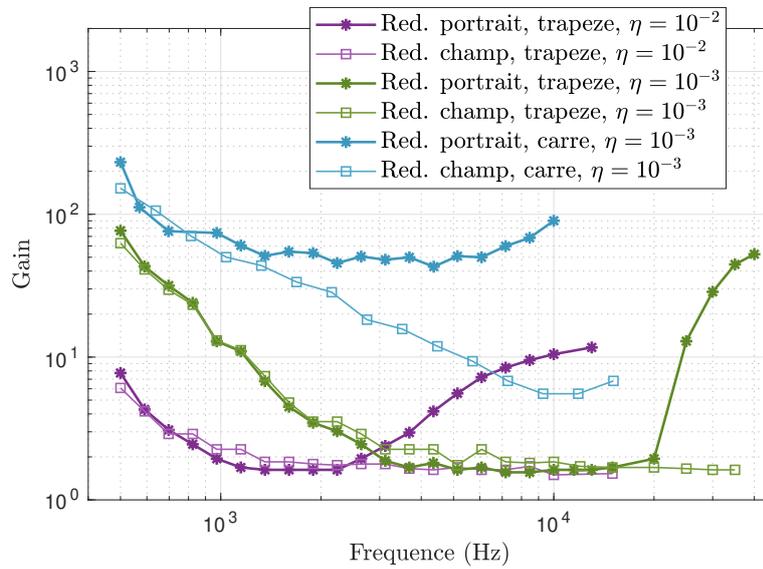


FIGURE 5.11 Gain de la réduction pour une largeur de bande telle que l'erreur soit de 5% avec 10 modes pour les géométries en trapèze avec $\eta = 10^{-2}$ et 10^{-3} et 5 modes pour la géométrie carrée avec $\eta = 10^{-3}$.

Concentrons-nous dans un premier temps sur les gains issus de la décomposition du portrait (traits épais). Nous retrouvons également une forme de cuvette pour les cas 1 et 2 dont le minimum s'est déplacé sur le graphe :

- Dans le cas 2 trapèze $\eta = 10^{-2}$ le gain en basses fréquences a diminué d'un facteur 10 environ par rapport au cas à $\eta = 10^{-3}$. Cela provient du fait que le pas fréquentiel de l'approche directe a augmenté d'un facteur 10, comme la taille de la bande n'a a priori pas changé (environ 10 modes propres de vibration sont représentés), le gain a diminué de ce même facteur.

Le gain augmente au bout de 3000 Hz contrairement à 20000 Hz pour le cas à $\eta = 10^{-3}$, soit quasi un facteur 10 de différence, cela s'explique également par l'augmentation de l'amortissement. En effet la fréquence de décollement du gain défini équation 5.11 est inversement proportionnelle à l'amortissement et vaut ici environ 2500 Hz ce qui concorde avec les résultats numériques.

- Dans le cas du carré la réponse de la structure est canalisée dans deux directions, voir la figure 5.3, d'où la bonne réductibilité ($G_{\text{SVD}} > 40$) du problème quelle que soit la fréquence. Mais il s'agit d'un comportement particulier qui ne peut pas être généralisé.

Comparons le gain du champ à celui du portrait. Nous remarquons qu'il n'est pas en forme de cuvette : il concorde avec le gain issu de la décomposition du portrait en basses et moyennes fréquences mais il n'augmente pas en hautes fréquences. Il y a donc bien un réel avantage à utiliser la décomposition du portrait sur celle du champ : le portrait à la particularité de traduire les directions d'ondes privilégiées ce qui lui procure un réel avantage en hautes fréquences, mais seulement en hautes fréquences ou lorsque l'amortissement est important. Dans le cas moyennes fréquences en général il n'y a pas d'avantages marqués.

Bilan sur la réductibilité

Cette partie a permis de conclure quant à la pertinence de l'exploitation de méthodes de réduction de modèle de type approximation de rang faible pour la résolution large bande. Cette méthode est connue dans la littérature pour être particulièrement efficace en basses fréquences. Nous retrouvons cette efficacité pour cette gamme de fréquences et nous montrons qu'elle est bien moindre en moyennes fréquences : l'étude d'un cas représentatif montre un gain G_{SVD} de seulement 2 en moyennes fréquences. Ce gain a été calculé en supposant que les coûts d'un mode valent celui de la résolution du problème en une seule fréquence ce qui est une sous-estimation, les gains de calcul seront a priori bien moindres que G_{SVD} . Il en résulte que l'approche en approximation de rang faible ne permet a priori pas d'envisager des gains en coûts de calcul dans la gamme des moyennes fréquences.

Nous montrons néanmoins qu'en hautes fréquences et lorsque l'amortissement est important, les gains redeviennent intéressants.

5.2 Application de la méthode PGD sous sa forme habituelle

5.2.1 Mise en œuvre de la méthode

Dans la partie précédente, nous avons étudié la performance de la réduction en construisant une approximation de rang faible à partir de la connaissance d'une solution de référence. Dans cette partie, nous construisons l'approximation sans la connaissance préalable de la solution. Nous utilisons une méthode de réduction a priori appelée PGD utilisée pour la recherche d'une approximation de rang faible d'une solution d'équation différentielle partielle (EDP).

Nous allons rechercher une approximation de rang faible par élément VTCR. L'approximation A^M est recherchée en minimisant le résidu VTCR sur une bande de fréquences :

$$A^M = \underset{A^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m}{\operatorname{argmin}} \int_{\omega \in I_\omega} \|\mathbb{K}A^M - L\|_2^2 d\omega \quad (5.12)$$

avec A^M l'approximation de la forme :

$$A^M = \sum_{m=1}^M A_m, A_m(\omega) = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{E\ m}(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix}, A_{E\ m}(\omega) = \Lambda_{E\ m} \lambda_{E\ m}(\omega) \quad (5.13)$$

avec $\Lambda_{E\ m} \in \mathbb{C}^{N_E}$ et $\lambda_{E\ m}$ une fonction de ω . Introduisons :

$$\Lambda_m = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Lambda_{E\ m} \\ \vdots \end{pmatrix}, \lambda_m = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_{E\ m} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Il s'agit d'une expression de rang faible par sous-domaine. La norme utilisée dans la minimisation est un choix de la méthode, nous utilisons ici une norme L2 pour sa simplicité de mise en œuvre.

Il s'agira de travailler avec un opérateur \mathbb{K} bien conditionné sur la bande de fréquences considérée. Pour cela nous utilisons la base de Fourier généralisée développée dans le chapitre 4. Nous détaillons la mise en place de cette base dans le cadre de la résolution PGD dans la sous-section 5.2.3.

La résolution directe du problème 5.12 est particulièrement coûteuse et ne permet pas, indépendamment de la réductibilité du problème, de faire des économies de coûts de calculs. Ainsi l'approche classique pour construire les modes $(\Lambda_m, \lambda_m(\omega))$, appelée Glouton, consiste à déterminer incrémentalement ces couples en partant du premier jusqu'à la convergence souhaitée.

Calculons par exemple le mode $(\Lambda_M, \lambda_M(\omega))$. Les modes $(\Lambda_m, \lambda_m(\omega))_{[1..M-1]}$ sont supposés connus, le mode $(\Lambda_M, \lambda_M(\omega))$ suivant est déterminé de telle sorte que :

$$(\Lambda_M, \lambda_M) = \underset{(\Lambda_M, \lambda_M) \in \mathbb{C}^{\sum_{E=1}^{N_E} N_E} \times \mathbb{C}^{N_\omega \times N_\Omega}}{\operatorname{argmin}} \int_{\omega \in I_\omega} \left\| \mathbb{K} \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m - L \right\|_2^2 d\omega \quad (5.15)$$

ce qui équivaut à résoudre :

$$\begin{cases} \Lambda_M = \left(\int_{I_\omega} \mathbb{K}_{\lambda_M}^H \mathbb{K}_{\lambda_M} \right)^{-1} \int_{I_\omega} \mathbb{K}_{\lambda_M}^H \left(L - \mathbb{K} \sum_{m=1}^{M-1} A_m \right) d\omega \\ \lambda_M = \left(\mathbb{K}_{\lambda_M}^H \mathbb{K}_{\lambda_M} \right)^{-1} \mathbb{K}_{\lambda_M}^H \left(L - \mathbb{K} \sum_{m=1}^{M-1} A_m \right) \quad \forall \omega \in I_\omega \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\mathbb{K}_{\lambda_M} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & K_{E'E} \lambda_{EM} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ une matrice à } \sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E \text{ lignes et } \sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E \text{ colonnes et } \mathbb{K}_{\Lambda_M} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & K_{E'E} \Lambda_{EM} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

une matrice à $\sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E$ lignes et N_Ω colonnes.

Pour résoudre le problème 5.16 nous procédons par un point fixe. Nous itérons entre ces deux équations à partir d'une initialisation constante sur le portrait. Le point fixe s'arrête soit lorsque le nombre d'itérations a atteint un nombre maximal b_{\max} ou bien lorsque la stagnation :

$$c_{\text{stag}} = \frac{\|\lambda_{M \ b+1} - \lambda_{M \ b}\|_2}{\|\lambda_{M \ b}\|_2} \quad (5.17)$$

atteint un seuil $c_{\text{stag crit}}$ où b est le nombre d'itérations.

L'algorithme complet s'arrête lorsque le nombre de modes a atteint un nombre de modes prédéfini ou bien lorsque le résidu VTCR r_{I_ω} défini par :

$$r_{I_\omega} = \sqrt{\frac{\int_{\omega \in I_\omega} \|\mathbb{K}A^M - L\|_2^2 d\omega}{\int_{\omega \in I_\omega} \|L\|_2^2 d\omega}} \quad (5.18)$$

atteint un seuil minimal $r_{I_\omega \min}$. Les modes construits par l'approche Glouton ne sont pas les modes de l'équation 5.12, en effet une approche qui consiste à successivement construire les modes n'est pas aussi efficace qu'une approche qui les construits directement en minimisant 5.12. Pour s'en approcher une stratégie d'actualisation des fonctions associées au temps, soit les fonctions de la fréquence $\lambda_m(\omega)$ ici, est régulièrement proposée dans la littérature par les auteurs de la PGD. Nous étudions également cet algorithme. Annotons les stratégies PGD comme suit :

- Stratégie 1 : l'approche Glouton présentée ci-dessus détaillé dans l'algorithme 1.
- Stratégie 2 : Stratégie 1 + actualisation des fonctions de la fréquence après chaque mode (Λ_m, λ_m) construit :

$$(\lambda_m)_{[1..M]} = \underset{(\lambda_m)_{[1..M]} \in \mathbb{C}^{M \times N_\omega \times N_\Omega}}{\text{argmin}} \int_{\omega \in I_\omega} \left\| \mathbb{K} \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m - L \right\|_2^2 d\omega \quad (5.19)$$

Les fonctions actualisées sont construites en résolvant à chaque fréquences de I_ω :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda}^H \tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda})^{-1} \tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda}^H L \quad (5.20)$$

avec $\tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\Lambda_1} & \dots & \mathbb{K}_{\Lambda_M} \end{pmatrix}$ une matrice à $\sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E$ lignes et $N_\Omega \times M$ colonnes. L'algorithme de la résolution est décrit dans l'algorithme 1.

5.2.2 Applications numériques

Une première application

Nous allons appliquer les deux stratégies pour construire l'approximation de rang faible. Nous reprenons les trois cas tests définis partie 5.1.2. Pour le cas 3 (trapèze à $\eta = 10^{-3}$) nous prenons une largeur de bande plus petite que celle définie dans la partie 5.1.2, nous prendrons $\Delta\omega = 2,5\% \omega_0$ afin

Algorithm 1: Calcul de l'approximation PGD stratégie 1,2 ou 3.

Result: $a^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m$

Définir M et b_{max} ;

Initialisation des portraits Λ_m ;

for $m = 1$ to M **do**

for $b = 1$ to b_{max} **do**

 Calculer Λ_m (équation 5.16);

 Calculer λ_m (équation 5.16);

end

if Stratégie 2 **ou** Stratégie 3 **then**

 Actualisation des $(\lambda_m)_{[1..m]}$ (équation 5.20)

end

if Stratégie 3 **then**

 Actualisation des $(\Lambda_m)_{[1..m]}$ (équation 5.23)

end

end

Calculer pour chaque sous-domaine Ω_E l'approximation PGD $a_E^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_{E m} \lambda_{E m}$

d'être cohérent avec les stratégies de découpage du domaine fréquentiel établies dans la partie 5.1.4. Nous construisons les approximations PGD pour un nombre de modes pour lequel l'approximation SVD a une erreur faible (environ 5%), soit :

- 5 modes pour le cas 1 (carré à $\eta = 10^{-3}$)
- 10 modes pour le cas 2 (trapèze à $\eta = 10^{-2}$)
- 10 modes pour le cas 3 (trapèze à $\eta = 10^{-3}$)

Les énergies des réponses fréquentielles sont illustrées figure 5.12. Nous y représentons également l'approximation issue de la SVD sur le portrait effectif. Nous remarquons, quel que soit le cas, une bien moins bonne convergence de la stratégie 1 que de la stratégie 2 qui est, elle-même, moins bonne que l'approximation SVD. Dans le cas 3 la stratégie 1 représente très mal l'énergie aux fréquences propres et dans les autres cas elle a une énergie bien plus faible que la référence. L'actualisation proposée par la stratégie 2 améliore nettement l'approximation mais pas suffisamment pour approcher aussi bien la solution issue de la SVD.

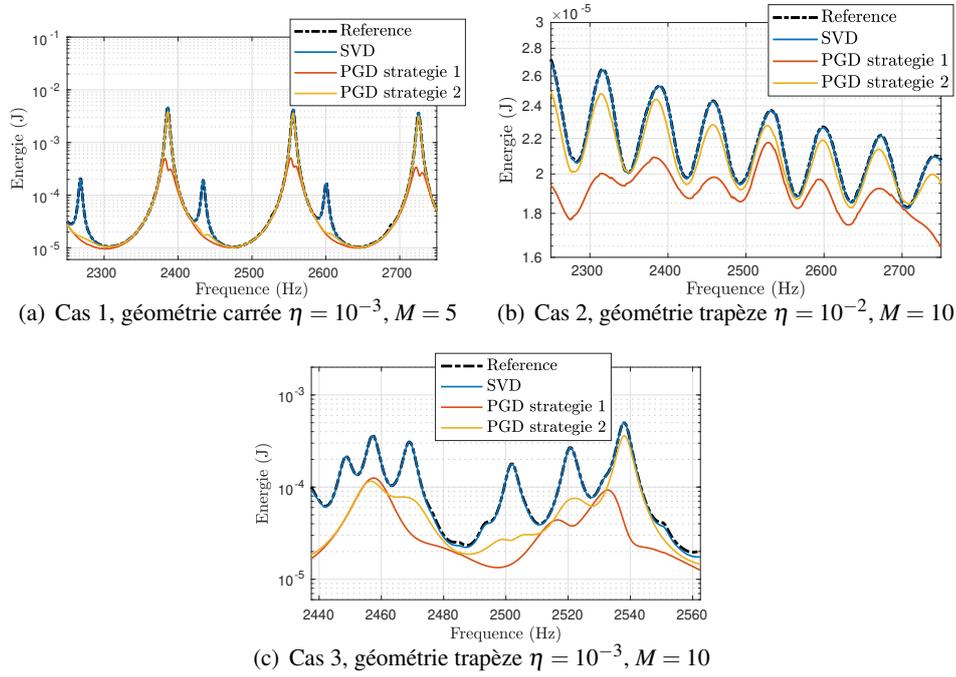


FIGURE 5.12 Énergie des approximations PGD.

Définissons l'erreur ε_{I_ω} par :

$$\varepsilon_{I_\omega}(p) = \sqrt{\frac{\int_{I_\omega} \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{\text{refe}} - p\|_E^2 d\omega}{\int_{I_\omega} \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{\text{refe}}\|_E^2 d\omega}} \quad (5.21)$$

avec p_{refe} une solution de référence construite fréquence par fréquence.

Nous visualisons les courbes de convergence de l'erreur ε_{I_ω} en fonction du nombre de modes M figure 5.13. Nous observons les points suivants :

- Les vitesses de convergence des approximations sont bien plus faibles pour les approximations PGD que pour la SVD. Pour le cas 3, la vitesse de convergence est 4 fois plus faible avec la stratégie 2 et plus de 10 fois plus faible avec la stratégie 1.
- Lorsque l'amortissement est important, l'actualisation améliore nettement la vitesse de convergence. Elle permet d'avoir une convergence 2 à 3 fois plus rapide de l'algorithme. Cette propriété est moins marquée lorsque l'amortissement est faible.
- Dans le cas 1, la stratégie 1 converge par pallier, ce comportement a également été observé dans les exemples traités par résolution large bande PGD telle que proposée dans [8]. Nous remarquons que ce comportement disparaît avec l'actualisation.

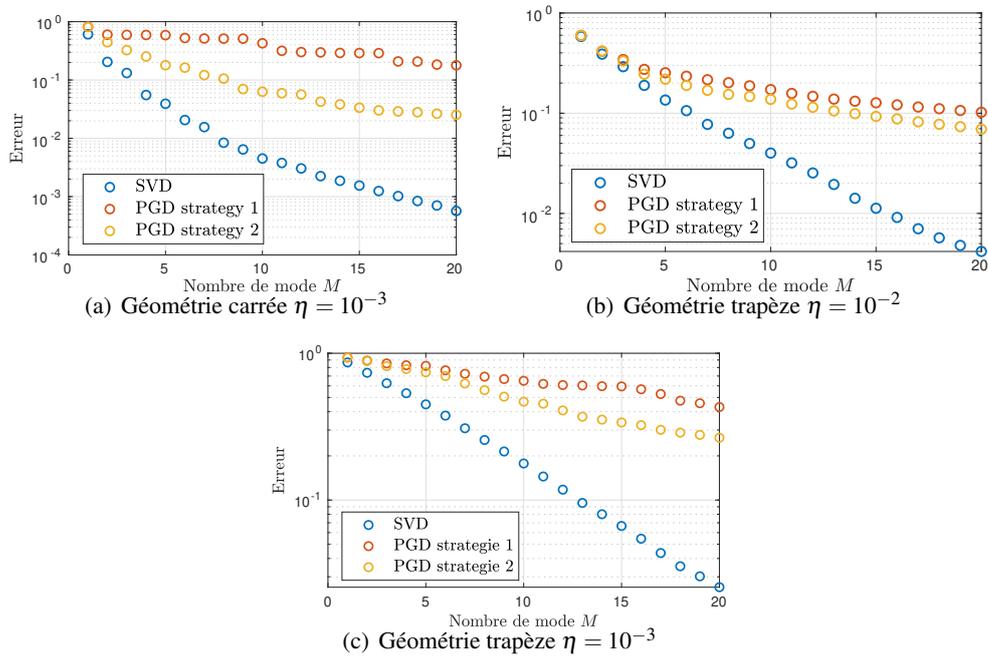


FIGURE 5.13 Erreur en fonction du nombre de modes des approximations PGD stratégies 1 et 2.

L'approximation SVD, qui est un optimum, montre que les deux algorithmes PGD peuvent être grandement améliorés. Une première approche consiste à jouer sur les paramètres de l'algorithme : dans la partie suivante nous étudions l'influence de b_{\max} .

Influence de b_{\max}

Un premier paramètre pour augmenter la convergence de l'algorithme consiste à augmenter le nombre d'itérations b_{\max} de résolution du système 5.16. Nous illustrons l'impact de b_{\max} sur l'algorithme PGD stratégie 1. Les résultats sont illustrés figure 5.14.

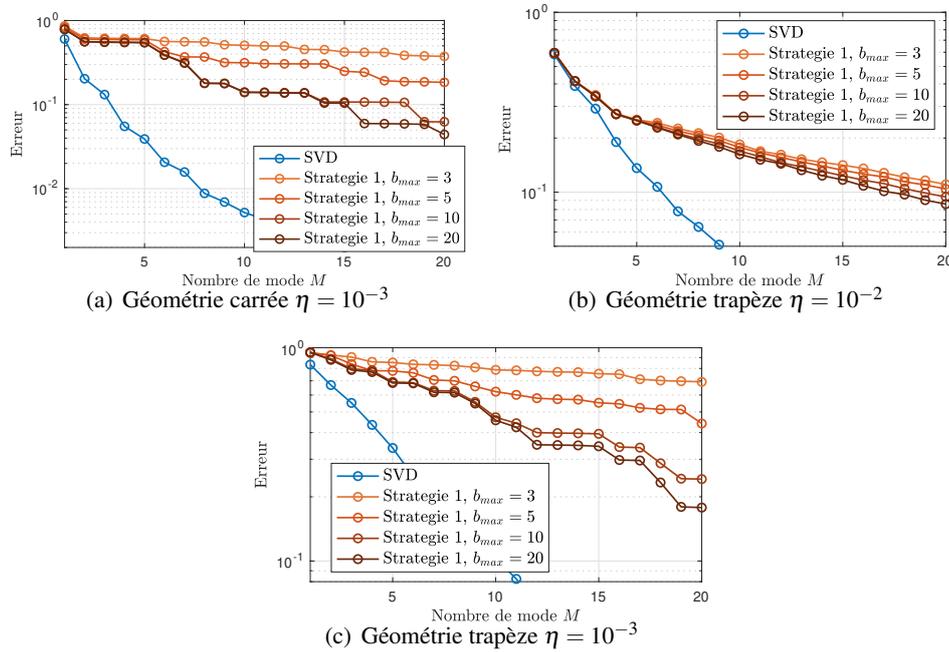


FIGURE 5.14 Convergence de l'algorithme PGD stratégie 1 (algorithme Glouton) pour différents b_{\max} .

Nous notons que lorsque l'amortissement est fort b_{\max} a une très faible influence sur la convergence de l'algorithme : les convergences avec $b_{\max} = 3$ et 20 sont très proches. Il conviendra donc pour réduire les coûts de calcul de prendre $b_{\max} = 3$.

Lorsque l'amortissement est plus important b_{\max} a une plus grande influence, la convergence est 5 fois plus rapide avec $b_{\max} = 20$ qu'avec $b_{\max} = 3$. Les coûts étant au premier ordre proportionnels au nombre d'itérations, on ne peut à ce stade préconiser un nombre d'itérations optimal.

Nous observons que même lorsque b_{\max} est important, la convergence reste éloignée de l'optimum donné par la SVD.

Nous remarquons par ailleurs que l'algorithme converge par palier, cela traduit le fait que certains modes n'apportent qu'une très faible correction à l'approximation. Ce comportement est d'autant plus marqué que b_{\max} est grand. Il s'agit d'une faiblesse de l'algorithme qui ralentit grandement la convergence. Nous avons vu que l'actualisation des fonctions de la fréquence semblait corriger ce phénomène. Nous allons dans la partie suivante proposer des algorithmes basés sur l'actualisation des modes pour améliorer la convergence.

5.2.3 Détails sur la construction des opérateurs conditionnés et influence du conditionnement de \mathbb{K}

Détails sur la mise en place

La recherche efficace d'une approximation de rang faible n'a pu se faire seulement si la variable qu'est le portrait est régulière, et donc lorsque l'opérateur \mathbb{K} est bien conditionné. Pour cela nous avons

utilisé la base de Fourier généralisée développée dans le chapitre 4. Nous détaillons ici l'utilisation de cette base dans le cadre de la PGD.

La base large bande proposée dans le chapitre 4 n'a pas une dimension fixe, le nombre de fonctions de forme est proportionnel à la fréquence considérée dans la bande. Ce n'est pas compatible avec les opérations requises par les algorithmes PGD : ils nécessitent de manipuler des opérateurs définis à des fréquences différentes ayant tous la même taille.

Pour contrer ce point nous utilisons la base des fonctions de Fourier généralisées construite à la plus grande fréquence de la bande de fréquences $I_\omega = [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ pour chacune des fréquences de la bande. Ainsi tous les opérateurs ont la même taille $N_{\text{crit}} + 5$ avec N_{crit} défini à la plus haute fréquence $\omega_0 + \Delta\omega$. Rappelons que $N_{\text{crit}} + 5$ correspond à l'optimum précision-conditionnement déterminé dans la partie 4.3.4. Il en résulte que seuls les opérateurs \mathbb{K} construits à des fréquences proches de $\omega_0 + \Delta\omega$ seront bien conditionnés, les autres étant moins bien conditionnés.

En pratique cela ne pose pas de problème, le bon conditionnement des opérateurs des hautes fréquences suffit à conférer des propriétés de bon conditionnement des opérateurs $\left(\int_{I_\omega} \mathbb{K}_{\lambda_M}^H \mathbb{K}_{\lambda_M} d\omega\right)$ inversés lors des opérations PGD.

Influence du conditionnement des matrices VTCR sur l'erreur de l'approximation PGD

Afin de visualiser l'impact du conditionnement sur la convergence des algorithmes PGD, nous effectuons plusieurs résolutions PGD stratégie 1 pour différents nombres de fonctions de forme de la base de Fourier généralisée. Nous commençons avec $N_{\text{crit}} + 5$ fonctions de forme, puis nous augmentons le nombre de fonctions de forme afin d'augmenter le conditionnement des opérateurs VTCR.

L'erreur ϵ_{I_ω} de la résolution PGD à 10 modes en fonction du conditionnement de la matrice VTCR de la plus haute fréquence est illustrée figure 5.15 pour les cas 1, 2 et 3.

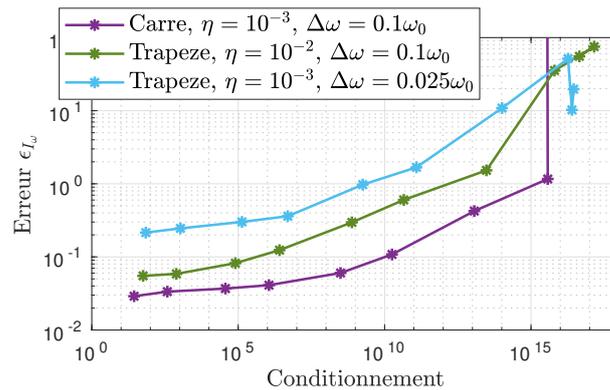


FIGURE 5.15 Influence du conditionnement de l'opérateur \mathbb{K} de la plus grande fréquence de la bande sur la convergence de l'algorithme PGD à 10 modes.

Nous observons que l'erreur croît avec le conditionnement du dernier opérateur jusqu'à atteindre plus de 100% lorsque le conditionnement de ce dernier atteint 10^{15} . Ce résultat montre la sensibilité de la PGD au conditionnement, il illustre bien la nécessité de pré-conditionner les opérateurs VTCR. Néanmoins

l'erreur augmente relativement faiblement avec le conditionnement : lorsque le conditionnement passe de 10^2 à 10^6 l'erreur est seulement multipliée par environ 2 pour les trois cas traités.

5.3 Développement de stratégies d'actualisation

5.3.1 Développement des stratégies

Afin d'améliorer la convergence de la résolution large bande PGD, nous proposons des nouvelles stratégies faisant intervenir non seulement l'actualisation des fonctions de la fréquence mais également l'actualisation du portrait :

- Stratégie 3 : Stratégie 2 + actualisation des portraits Λ_m après chaque actualisation de portrait. Cela consiste à calculer après chaque calcul de mode M , $\forall m \in [1..M]$:

$$\Lambda_m = \operatorname{argmin}_{\Lambda_m \in \mathbb{C}^{\Sigma^{N_E}}} \int_{\omega \in I_\omega} \left\| \mathbb{K} \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m - L \right\|_2^2 d\omega \quad (5.22)$$

Il s'agit après chaque nouveau calcul de mode de résoudre incrémentalement de $m = 1$ à M :

$$\Lambda_m = \left(\int_{I_\omega} \mathbb{K}_{\lambda_m}^H \mathbb{K}_{\lambda_m} \right)^{-1} \int_{I_\omega} \mathbb{K}_{\lambda_m}^H \left(L - \mathbb{K} \sum_{m'=1, m' \neq m}^M \Lambda_{m'} \right) \quad (5.23)$$

L'algorithme de cette stratégie est décrit dans l'algorithme 1.

- Stratégie 4 : Nous proposons également une dernière stratégie à l'image de l'algorithme de compression CP-ALS (CANDECOMP/PARAFAC - Alternative Least Squares) [82], classique en calcul tensoriel. Il permet de construire directement une approximation optimale sur M modes à partir d'un tenseur connu. Néanmoins dans notre cas la solution n'est pas connue. La stratégie proposée ici consiste à trouver les M modes qui minimisent 5.12 de façon optimale comme proposée dans [122] :

$$A^M = \operatorname{argmin}_{(\Lambda_m, \lambda_m)_{[1..M]} \in \mathbb{C}^{M \Sigma^{N_E}} \times \mathbb{C}^{MN_\omega N_\Omega}} \int_{\omega \in I_\omega} \left\| \mathbb{K} \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m - L \right\|_2^2 d\omega \quad (5.24)$$

Il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda}^H \tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda})^{-1} \tilde{\mathbb{K}}_{M\Lambda}^H L \quad \forall \omega \in I_\omega \\ \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_M \end{pmatrix} = \left(\int_{I_\omega} \tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda}^H \tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda} d\omega \right)^{-1} \int_{I_\omega} \tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda}^H L d\omega \end{array} \right. \quad (5.25)$$

avec $\tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{\lambda_1} & \dots & \mathbb{K}_{\lambda_M} \end{pmatrix}$. Ce problème est résolu par point fixe en alternant la résolution des deux équations. Remarquons que la matrice $(\int_{I_\omega} \tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda}^H \tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda} d\omega)$ est une matrice carrée de taille $M \times \sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E$, l'inversion de cette matrice représente de très lourds coûts de calcul. Ainsi pour limiter les calculs en limitant les itérations du point fixe nous pouvons utiliser comme initialisation la solution donnée par une des stratégies précédentes. Cette stratégie reste néanmoins très coûteuse et ne permet pas d'envisager des gains en coûts de calcul, nous l'étudions uniquement pour sa convergence. L'algorithme de cette stratégie est décrit dans l'algorithme 2.

De nombreuses autres stratégies peuvent être proposées, nous en restons à ces 2 propositions dans ce manuscrit.

Algorithm 2: Calcul de l'approximation PGD stratégie 4.

Result: $a^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_m \lambda_m$

Définir M et b_{max} ;

Initialisation des portraits $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_M \end{pmatrix}$;

for $b = 1$ to b_{max} **do**

Calculer $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix}$ (équation 5.25);

Calculer $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_M \end{pmatrix}$ (équation 5.25);

end

Calculer pour chaque sous-domaine Ω_E l'approximation PGD $a_E^M = \sum_{m=1}^M \Lambda_{E m} \lambda_{E m}$

5.3.2 Application numérique

Nous reprenons les trois cas tests définis partie 5.1.2 pour illustrer les performances de ces nouvelles stratégies.

L'erreur en fonction du nombre de modes est illustrée figure 5.16. Nous remarquons une bien meilleure convergence des stratégies 3 et 4 dans les trois cas traités.

La stratégie 4 est la plus performante, sa convergence avoisine celle de la SVD sur le portrait effectif : cela permet de conclure sur le fait que minimiser le résidu VTCR est aussi efficace que minimiser directement l'énergie de la différence. Néanmoins cette dernière stratégie est extrêmement coûteuse, elle nécessite l'inversion de matrice de la taille M fois la taille d'un problème VTCR en une fréquence (inversion de la matrice $\tilde{\mathbb{K}}_{M\lambda}$ équation 5.25).

La stratégie 3 est légèrement moins performante que la *SVD*, elle a une convergence environ 1.2 à 1.5 fois moins rapide. Mais elle est bien plus performante que la stratégie 1 et 2 avec une convergence 4 fois plus rapide que la stratégie 1 et 2 fois plus environ que la stratégie 2.

Elle sera la stratégie adoptée par la suite.

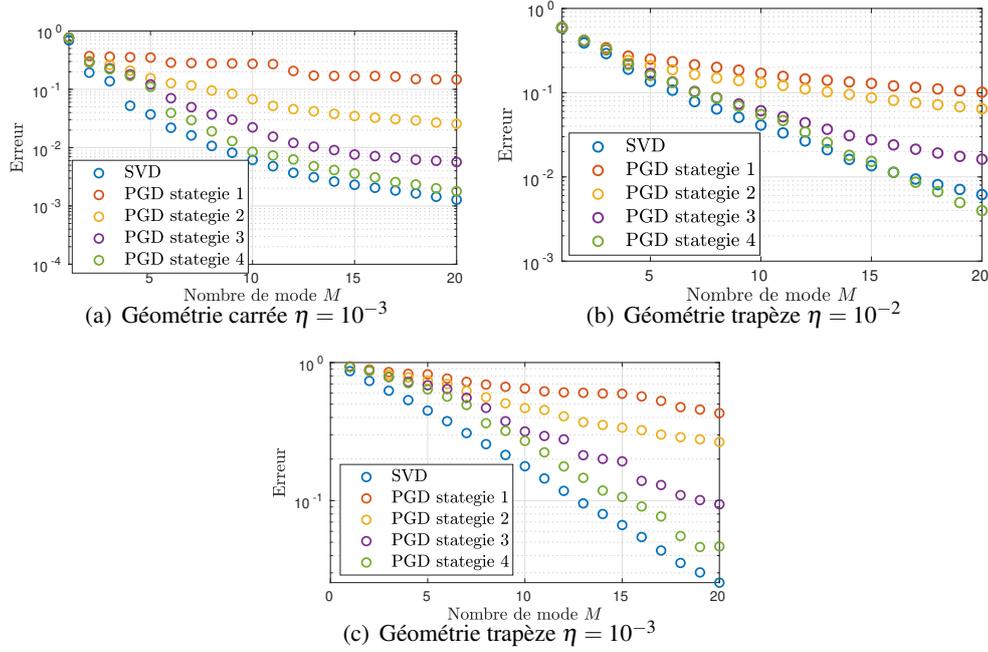


FIGURE 5.16 Erreur en fonction du nombre de modes des approximations PGD stratégies 1, 2, 3 et 4.

5.4 Étude des coûts de calcul des différentes stratégies

5.4.1 Évaluation des coûts de calcul des algorithmes PGD pour la résolution à large bande de fréquences

Les problèmes traités sont trop petits pour pouvoir extraire et comparer les coûts de calcul. Nous les évaluons donc à partir de l'ordre de grandeur du nombre d'opérations numériques. En considérant qu'une inversion de matrice et les produits de matrices carrées sont en $O(N^3)$ et qu'un produit vecteur-matrice est en $O(N^2)$, N étant la taille des matrices carrées et des vecteurs, nous évaluons les coûts de calcul des différentes opérations :

- Construire Λ_m équations 5.16, coûte : $O(N_\theta^3 \times N_\omega + N_\theta^3 + N_\theta^2 \times N_\omega)$
- Construire λ_m équations 5.16, coûte : $O((N_\theta^2 + N_\Omega^2 \times N_\theta + N_\Omega^3) \times N_\omega)$
- Actualiser $(\lambda_m)_{[1..M]}$ équations 5.20, coûte : $O((N_\Omega^3 \times M^3 + N_\theta^2 \times M + M^2 \times N_\Omega^2 \times N_\theta) \times N_\omega)$
- Actualiser $(\Lambda_m)_{[1..M]}$ équations 5.23, coûte : $O(M \times (N_\theta^3 \times N_\omega + N_\theta^3 + N_\theta^2 \times N_\omega))$

avec M le nombre de modes, $N_\theta = \sum_{E=1}^{N_\Omega} N_E$ le nombre de degrés de liberté VTCR, N_ω le nombre de fréquences de la bande et N_Ω le nombre d'éléments VTCR. Nous en déduisons une évaluation des coûts

de calcul des différentes stratégies en fonction du nombre de modes M .

$$\begin{aligned} C_{\text{Strategy 1}} &= O\left(\underline{N_\theta^3 \times N_\omega} + M \times b_{\max} \times (N_\theta^3 + (N_\theta^2 + N_\Omega^2 \times N_\theta + N_\Omega^3) \times N_\omega)\right) \\ C_{\text{Strategy 2}} &= C_{\text{Strategy 1}} + O\left((N_\Omega^3 \times M^3 + N_\theta^2 \times M + M^2 \times N_\Omega^2 \times N_\theta) \times M \times N_\omega\right) \\ C_{\text{Strategy 3}} &= C_{\text{Strategy 2}} + O\left(M^2 \times (N_\theta^3 + N_\theta^2 \times N_\omega)\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Le nombre de fréquences N_ω est évalué à partir de la taille de la bande de fréquences et du pas fréquentiel défini par le critère de Shannon 1.13. Et le nombre de fonctions de forme N_E peut être évalué à partir de la relation sur la dimension N_{crit} 4.59.

Les coûts calculés doivent être comparés à l'approche directe, qui consiste à inverser les N_ω matrices VTCR :

$$C_{\text{direct}} = O(N_\omega \times N_\theta^3) \quad (5.27)$$

Le terme souligné $\underline{N_\theta^3 \times N_\omega}$ correspond aux coûts des produits $\mathbb{K}^H \mathbb{K}$. Le produit matriciel effectué au calcul du premier mode peut être recyclé aux modes suivants, d'où le fait qu'il n'apparaisse qu'une fois dans les différentes stratégies. Ce terme concentre la majorité des coûts de calcul, il représente à lui seul des coûts égaux à ceux de l'approche directe équation 5.27. Ces coûts peuvent être éliminés en utilisant une approche PGD Petrov Galerkin comme celle proposée dans [8], plutôt qu'une minimisation de la norme L2 utilisée ici. Il est indispensable de mettre en place une telle méthode lorsqu'il s'agira de traiter des cas envisageant des gains en coûts de calcul. Nous retirons ce terme pour la suite de la discussion.

5.4.2 Illustration des coûts de calcul

Afin d'illustrer, supposons un cas complexe : une cavité acoustique d'une longueur caractéristique de 10 m sollicitée à 5000 Hz, l'amortissement vaut $\eta = 0.5 \times 10^{-3}$. Nous supposons un découpage en 10 sous-domaines VTCR. Ce qui implique une discrétisation en environ 500 degrés de liberté VTCR par sous-domaine, soit 5000 au total et un pas fréquentiel de 3 Hz ($\approx \frac{\eta \omega}{\ln(100)}$). Au vu de la taille de la longueur d'onde (environ 0.07m) par rapport à la taille du domaine il faut s'attendre à une densité modale très importante. Supposons résoudre sur une bande de $\pm 5\%$ ce qui implique $N_\omega = 300$ fréquences.

Pour visualiser un ordre de grandeur des coûts de calcul nous supposons $b_{\max} = 5$. Nous supposons que la constante dissimulée dans $O(\cdot)$ vaut 1. Les rapports des coûts des différentes stratégies avec l'approche directe sont représentés en fonction du nombre de modes figure 5.17. Nous remarquons que les coûts des stratégies 1 et 2 sont sensiblement similaires et la stratégie 3 est globalement plus coûteuse. Dans l'objectif de réduire les coûts de calcul par rapport à l'approche fréquence par fréquence, ces stratégies ne semblent pertinentes que lorsqu'il s'agit de construire peu de modes PGD. Les coûts de calcul augmentent assez rapidement et l'équilibre avec l'approche directe est atteint respectivement pour 57, 34 et 14 modes pour les stratégies 1, 2 et 3. Il s'agit de ne pas les dépasser pour obtenir des gains en coûts de calcul.

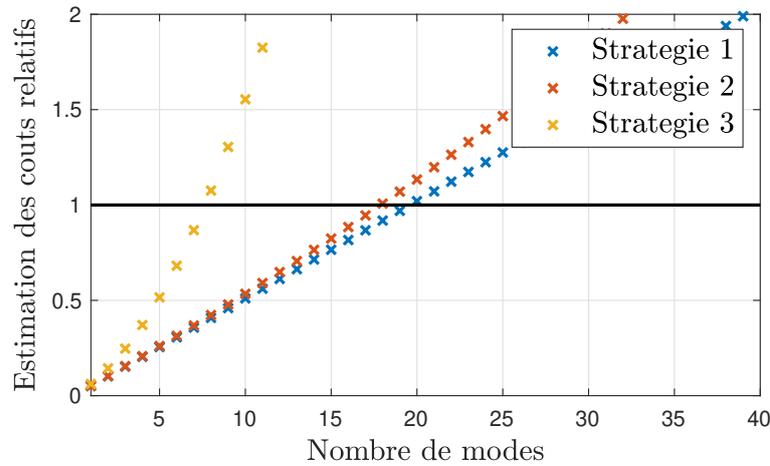


FIGURE 5.17 Illustration des coûts de calcul relatifs des différentes stratégies en fonction du nombre de modes PGD.

Pour savoir si ce nombre est suffisant pour construire une approximation PGD avec une faible erreur nous pouvons nous référer aux courbes de Gain SVD présentées partie 5.1. Ces courbes donnent le gain $G_{SVD} = \frac{N_\omega}{M}$, soit le nombre de points fréquentiels par mode, pour avoir une erreur de 5% en fonction de la fréquence et du cas traité. Au vu de la taille du domaine Ω par rapport à la longueur d'onde et de l'amortissement relativement faible nous nous trouvons dans la gamme des moyennes fréquences dont le cas le plus représentatif est le cas 3. Le gain SVD y est de $G_{SVD} = \frac{N_\omega}{M} \approx 2$. Nous en déduisons que le nombre de modes M nécessaires serait de l'ordre de $M = \frac{N_\omega}{G} \approx 150$. A 150 modes, les coûts de calcul des trois stratégies sont plus importants que l'approche directe. Changer la taille de la bande de fréquences ne change pas cette conclusion car, au premier ordre, l'approche PGD et l'approche directe y sont toutes les deux proportionnelles.

Il s'agit ici d'une approximation des coûts de calcul, ils traduisent néanmoins la tendance et donc la limite des approches de réduction de modèle par approximation de rang faible du portrait dans le domaine des moyennes fréquences. Les coûts de calcul des approches PGD sont majoritairement concentrés dans les coûts de construction des portraits Λ_m , il en résulte qu'en première approximation le coût d'un mode est de l'ordre de b_{\max} fois le coût de la résolution en un point fréquentiel. Pour avoir une idée des gains potentiels de coûts de calcul en fonction des cas, nous pouvons reprendre les graphes des gains G_{SVD} et considérer que $G_{PGD} \approx \frac{G_{SVD}}{b_{\max}}$ à supposer que M modes PGD ont la même précision que M modes SVD. En considérant que le cas 3 est le cas le plus général, nous en déduisons que seuls les problèmes basses fréquences et hautes fréquences permettent d'envisager des gains en coûts de calcul par rapport à l'approche directe.

Discussion et stratégies d'optimisation

Au vu de l'étude sur les coûts de calcul des approximations PGD et des faibles gains G_{SVD} les algorithmes PGD ne permettent a priori pas d'envisager des gains en coûts de calcul dans les gammes moyennes fréquences, du moins pas sur la plupart des cas.

Par ailleurs les coûts de construction des matrices VTCR qui n'ont pas été étudiés ici sont conséquents et parfois plus importants que l'inversion directe du problème, réduire les coûts de l'inversion ne réduit qu'une partie des coûts. Des développements ont été proposés dans la thèse d'Alexandro Cattabiani [2] pour réduire ces coûts mais ils restent non négligeables.

De plus l'approche PGD nécessite de travailler simultanément avec toutes les matrices VTCR de la bande considérée ce qui peut nécessiter une mémoire importante et donc alourdir certaines opérations, d'autant qu'il s'agit de matrices pleines par blocs.

Une approche pour diminuer les coûts de calcul consiste à proposer une bonne initialisation des portraits Λ_M . En basses fréquences ils s'agiraient de proposer des portraits proches de ceux des modes propres de vibration, n'étant pas connus à l'avance, cela semble être compliqué. En hautes fréquences les portraits Λ_M représentent les différentes propagations entre chaque réflexion. Ils sont faiblement dépendants de la fréquence, les portraits d'une bande de fréquences peuvent servir d'initialisation pour la bande suivante.

Pour ce qui est de réduire les coûts des actualisations il peut être envisagé de les effectuer moins régulièrement, par exemple seulement tous les 3-4 nouveaux modes calculés.

5.5 Conclusion

Dans cette section nous avons étudié l'approximation de rang faible et les algorithmes permettant de la construire. Il s'agissait dans un premier temps d'évaluer dans quelle mesure une approximation de rang faible du portrait est efficace pour traduire une solution sur une large bande de fréquences. Les résultats de cette étude sont majeurs puisqu'ils permettent de conclure que l'approche est très efficace en basse et hautes fréquences mais qu'elle ne l'est pas en moyennes fréquences : un cas représentatif a montré un gain potentiel par rapport à l'approche directe de seulement 2 sur toute la gamme des moyennes fréquences. C'est un résultat clé qui montre que, dans la gamme des moyennes fréquences à laquelle nous nous intéressons dans ces travaux, le portrait sur une bande de fréquences s'approche très mal par une approximation de rang faible.

Par ailleurs nous avons étudié l'algorithme PGD pour construire ces modes et nous avons apporté des développements pour grandement améliorer leur convergence. Une étude des coûts de calcul a montré que l'approche est néanmoins relativement coûteuse et permet d'envisager des gains en coûts de calcul seulement si le gain de l'étude précédente dépasse environ 5 : il n'y a donc pas de gain envisageable avec cette approche pour la résolution large bande en moyennes fréquences, du moins dans la plupart des cas.

Nous pouvons néanmoins remarquer que lorsque l'amortissement est fort, grâce aux propriétés du portrait régularisé, le portrait solution sur une bande de fréquences s'approche bien par une solution de

rang faible. Il s'agira dans le chapitre suivant d'exploiter cette ouverture pour proposer une démarche permettant de reconstruire la réponse transitoire temporelle sur des durées courtes en appliquant les algorithmes PGD.

Chapitre 6

Couplage de la méthode de la fenêtre exponentielle et de la résolution large bande PGD pour la construction de la réponse transitoire sur une durée courte

Ce chapitre traite de la construction de la réponse temporelle à partir de la réponse fréquentielle. La méthode de la fenêtre exponentielle y est présentée et couplée à la VTCR pour une reconstruction efficace de la réponse temporelle transitoire sur une courte durée. Dans un second temps, la méthode de résolution large bande de fréquences PGD est intégrée au couplage pour réduire les coûts de résolution.

6.1	La méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) couplée à la VTCR	123
6.1.1	Développement de la méthode de la fenêtre exponentielle pour la VTCR . . .	123
6.1.2	Application numérique	125
6.1.3	Une limite pour le choix de α	128
6.2	Couplage de la résolution large bande PGD-VTCR et de la méthode de la fenêtre exponentielle	130
6.2.1	Choix du paramètre α pour un couplage optimal	130

6.2.2	Optimisation de l'algorithme de résolution large bande PGD dans le cadre du couplage VTCR-EWM	133
6.2.3	Application à la propagation d'un choc dans une cavité acoustique	135
6.3	Conclusion	137

L'objectif global de ces travaux de thèse est de réduire les coûts de la reconstruction de la réponse temporelle transitoire incluant les moyennes fréquences. Il s'agit entre autres d'exploiter les méthodes fréquentielles efficaces que sont les méthodes Trefftz. Dans une partie des problèmes visés, comme l'identification de chocs à la source, seule la réponse temporelle sur une courte durée est à reconstruire.

Dans ce chapitre nous développons des méthodes pour construire la réponse temporelle sur une durée courte à faible coût de calcul, correspondant à quelques réflexions de l'onde dans la structure et exploitant la méthode de réduction de modèle PGD développée dans le chapitre précédent.

Pour cela nous allons utiliser la méthode de la fenêtre exponentielle (Exponential Window Method, EWM). Elle a été introduite dans [69, 79] pour s'affranchir du critère de Shannon sur le pas de discrétisation fréquentiel lorsqu'il s'agit de traiter des temps courts. Elle consiste à construire la transformée de Fourier de la solution p multipliée par une fenêtre exponentielle décroissante $e^{-\alpha t}$. Dans le domaine fréquentiel la solution fenêtrée $pe^{-\alpha t}$ est lissée à l'image d'une solution fortement amortie : le paramètre α a l'effet d'un amortissement artificiel. La méthode exploite cet amortissement apparent pour réduire le pas fréquentiel de la résolution fréquentielle imposé par le critère de Shannon et ainsi réduire le nombre d'inversions dans le domaine fréquentiel. Le pas peut être d'autant plus grand que α est grand. Le retour dans le domaine temporel se fait par transformée de Fourier inverse puis par multiplication par une exponentielle croissante $e^{\alpha t}$. La contrepartie est que l'approche ne permet pas de reconstruire la réponse temporelle sur la durée jusqu'à amortissement du signal mais seulement sur une durée plus courte, d'autant plus courte que le pas fréquentiel et le paramètre α sont grands. Ces limites sont étudiées et quantifiées dans ce chapitre.

Il s'agira dans un premier temps d'appliquer cette méthode et de résoudre le domaine fréquentiel modifié avec la VTCR ce qui permettra d'obtenir un premier gain en coûts de calcul dû à l'augmentation du pas fréquentiel par rapport à l'approche fréquentielle classique. Deuxièmement, le domaine fréquentiel modifié présentant un amortissement plus important, nous nous trouvons dans une gamme de problèmes où la résolution large bande PGD est potentiellement efficace. Il s'agira de résoudre le domaine fréquentiel avec les méthodes de résolution large bande développées dans le chapitre précédent afin d'envisager un gain supplémentaire sur ce type de problème.

6.1 La méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) couplée à la VTCR

6.1.1 Développement de la méthode de la fenêtre exponentielle pour la VTCR

Dans le cadre de l'application de l'EWM [69, 79] présentée ici, la méthode peut être résumée comme suit : plutôt que de rechercher la transformée de Fourier du champ p_t , nous recherchons la transformée de Fourier du champ $p_{\alpha t} = e^{-\alpha t} p_t$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ notée $p_{\alpha\omega}$ définie comme :

$$p_{\alpha\omega} = TF(p_{\alpha t})(\omega) = TF(e^{-\alpha t} p_t)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_t(t) e^{-i(\omega - i\alpha)t} dt = p_{\omega}(\omega - i\alpha) \quad (6.1)$$

$p_{\alpha\omega}$ s'identifie comme une transformée de Laplace de p_t , soit une transformée de Fourier avec une fréquence complexe $\omega - i\alpha$.

Après avoir multiplié les équations du problème d'acoustique de référence 1.2 par $e^{\alpha t}$ puis leur avoir appliqué une transformée de Fourier, on obtient les équations vérifiées par $p_{\alpha\omega} = (\dots, p_{E\alpha\omega}, \dots)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_{E\alpha\omega} + k_{\alpha}^2 p_{E\alpha\omega} = 0 & \text{dans } \Omega_E \times I_{\omega} \\ z \frac{\partial p_{E\alpha\omega}}{\partial \mathbf{n}_E} + i(\omega - i\alpha)\rho p_{E\alpha\omega} = h_{\alpha\omega d} & \text{dans } \partial_Z \Omega_E \times I_{\omega} \\ p_{E\alpha\omega} = p_{\alpha\omega d} & \text{dans } \partial_p \Omega_E \times I_{\omega} \\ -\frac{\partial p_{E\alpha\omega}}{\partial \mathbf{n}_E} = i(\omega - i\alpha)\rho v_{\alpha\omega d} & \text{dans } \partial_v \Omega_E \times I_{\omega} \\ p_{E\alpha\omega} = p_{E'\alpha\omega} & \text{dans } \Gamma_{E,E'} \times I_{\omega} \\ \frac{\partial p_{E\alpha\omega}}{\partial \mathbf{n}_E} = -\frac{\partial p_{E'\alpha\omega}}{\partial \mathbf{n}_{E'}} & \text{dans } \Gamma_{E,E'} \times I_{\omega} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

avec :

$$k_{\alpha} = \frac{\omega - i\alpha}{c} (1 - i\eta) = \frac{\omega - \alpha\eta}{c} \left(1 - i \left(\frac{\eta + \alpha/\omega}{1 - \alpha\eta/\omega} \right) \right) \quad (6.3)$$

L'effet de la méthode s'apparente à une modification dans le domaine fréquentiel classique de l'amortissement η et de la célérité c . Ils sont dépendants de α :

$$\begin{aligned} k_{\alpha} &= \frac{\omega}{c_{\alpha}} (1 - i\eta_{\alpha}) \\ \text{où } \eta_{\alpha} &= \frac{\eta + \alpha/\omega}{1 - \alpha\eta/\omega} \text{ et } c_{\alpha} = \frac{c}{1 - \alpha\eta/\omega} \end{aligned} \quad (6.4)$$

La résolution de ce problème avec la VTCR consiste simplement à utiliser des fonctions de forme modifiées par l'amortissement et la célérité. Dans le cas d'ondes planes les fonctions de forme s'écrivent : $\phi_{nE} = e^{ik_{\alpha} \mathbf{n}_{\theta_n} \cdot \mathbf{x}}$.

Pour revenir à la solution dans le domaine temporel il s'agit d'appliquer la transformée de Fourier inverse et de multiplier par l'inverse de la fonction de fenêtrage :

$$p_t(t) = e^{\alpha t} p_{\alpha t}(t) = e^{\alpha t} TF^{-1}(p_{\alpha\omega})(t) \quad (6.5)$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de s'affranchir du critère de Shannon sur le pas de discrétisation fréquentiel 1.13 défini par :

$$\delta f \leq \frac{1}{T_d} \quad (6.6)$$

avec T_d la durée d'amortissement de la réponse p_t . Avec l'approche de l'EWM, le pas fréquentiel doit vérifier :

$$\delta f \leq \frac{1}{T_{\alpha d}} \quad (6.7)$$

avec $T_{\alpha d}$ la durée d'amortissement de la réponse $p_{\alpha t} = e^{-\alpha t} p_t$ (soit la durée à partir de laquelle $p_{\alpha t}$ a une amplitude négligeable).

Supposons vouloir reconstruire la réponse sur une période temporelle $I_t = [0, T]$, avec T un temps quelconque auquel la réponse p_t n'est pas nécessairement amortie. La méthode consiste à choisir α telle que $e^{-\alpha t} p_t$ soit amortie à $t = T$: soit $e^{-\alpha T} \approx \frac{1}{100} \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{\ln(100)}{T} = \frac{4.6}{T}$ [69]. Ainsi, le pas fréquentiel de résolution dans le domaine fréquentiel modifié par α peut valoir $\delta f = \frac{1}{T}$. Les gains en nombre d'inversions dans le domaine fréquentiel par rapport à l'approche classique qui nécessite un pas fréquentiel égal à $\frac{1}{T_d}$, valent $\frac{T_d}{T}$. Lorsque T est petit devant T_d les gains sont importants.

6.1.2 Application numérique

Il s'agit de valider la méthode dans le cadre d'une résolution des équations 6.2 avec la VTCR.

La résolution consiste dans un premier temps, à multiplier les signaux temporels par la fenêtre exponentielle, puis à appliquer la transformée de Fourier (6.1), à effectuer les calculs dans le domaine fréquentiel modifié avec le VTCR (fréquence par fréquence 6.2) et, enfin, à revenir au domaine temporel (6.5).

Nous étudions un problème d'acoustique dont la géométrie en trapèze est illustrée figure 6.1, de célérité $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ et d'amortissement $\eta = 1.10^{-3}$. Les conditions de bord sont des conditions de Dirichlet nulles partout sauf sur le bord gauche où la pression est imposée par :

$$p_{dt}(t, y) = \frac{1 - \cos(2\pi y)}{2} e^{-\frac{(t-t_{\text{dep}})^2}{\tau^2}} \cos(2\pi f_{\text{cen}}(t - t_{\text{dep}})) \quad (6.8)$$

où y est l'abscisse curviligne du bord gauche. $t_{\text{dep}} = 2.2 \text{ ms}$, $\tau = 0.59 \text{ ms}$ et $f_{\text{cen}} = 2500 \text{ Hz}$. Le signal d'entrée $p_{td}(t, y = 1/2)$ est illustré figure 6.2.

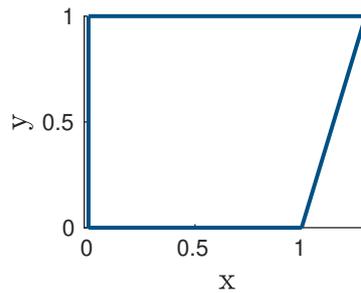


FIGURE 6.1 Géométrie du problème en trapèze.

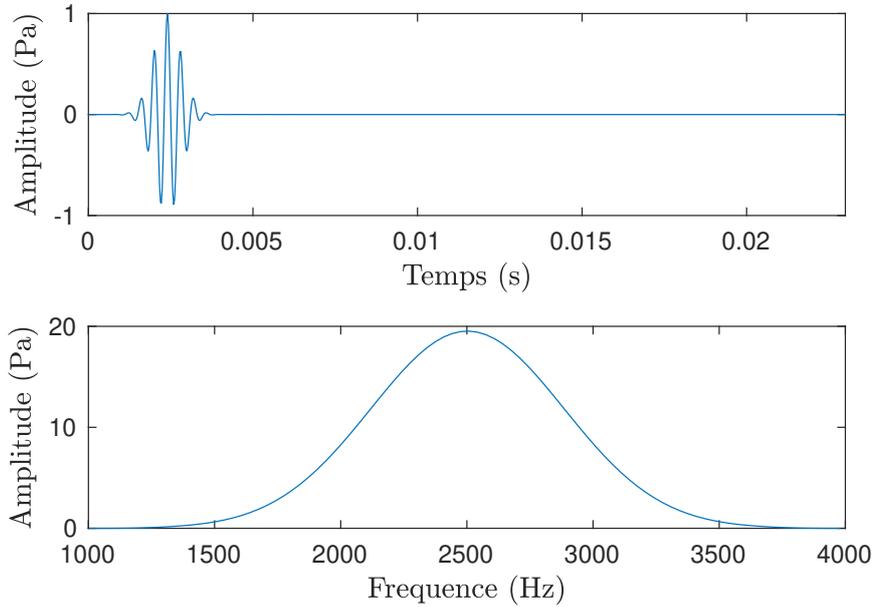


FIGURE 6.2 Signal d'entrée $p_{id}(t, y = 1/2)$ dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).

Ce signal a été choisi pour son contenu fréquentiel contenu dans une bande de fréquences allant de 1000 Hz à 4000 Hz. Le problème est étudié sur une durée temporelle correspondant à 3 allers-retours de l'onde dans la cavité : $I_t = [0; T = 6R/c] = [0; 23 \text{ ms}]$, avec R la dimension caractéristique de la cavité.

La solution est calculée pour 3 valeurs de α qui ont été choisies autour de la valeur proposée dans [69] qui vaut 200 rad.s^{-1} ($\approx \frac{\ln(100)}{T}$) ici : 50, 200 et 800 rad.s^{-1} . Une résolution est effectuée pour chaque choix de α pour deux pas fréquentiels différents (voir le tableau 6.1) :

- Un premier pas fréquentiel fin vérifiant le critère de Shannon équation 1.13 (en Hz) :

$$\delta f = \frac{1}{T_d} \quad (6.9)$$

- Un second où les propriétés de l'EWM sont exploitées, le pas fréquentiel vérifie le nouveau critère sur la pas de discrétisation 6.7 (en Hz) :

$$\delta f = \min\left(\frac{1}{T_{\alpha d}}, \frac{1}{T}\right) \quad (6.10)$$

avec $\frac{1}{T_{\alpha d}} = \frac{\alpha}{\ln(100)}$ lorsque $\frac{\alpha}{\ln(100)}$ est grand devant $\frac{1}{T_d}$.

Afin de visualiser le problème à résoudre dans le domaine fréquentiel modifié, l'énergie de P_α construit avec la VTCR dans le domaine fréquentiel est illustrée figure 6.3. Nous voyons clairement l'amortissement apparent introduit par α .

La solution temporelle à reconstruire est illustrée figure 6.4, le champ de référence au point $\mathbf{x} = (x, y) = (0.68\text{m}, 0.48\text{m})$ y est représenté en haut. La référence est construite avec la TFD classique avec

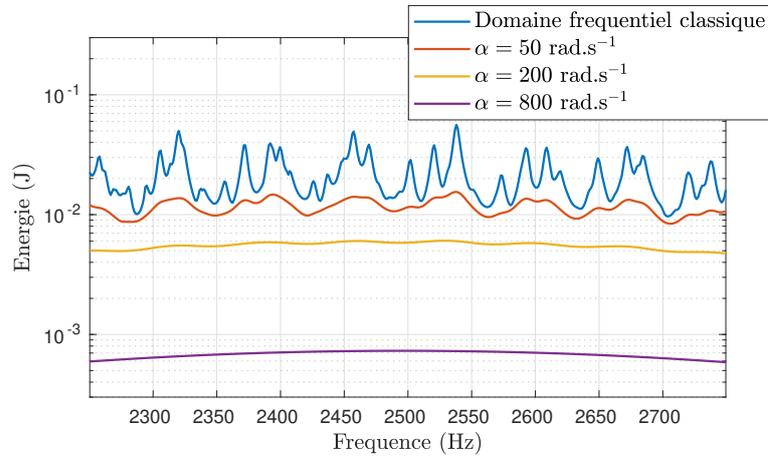


FIGURE 6.3 Énergie de la solution $p_{\alpha\omega}$ dans le domaine fréquentiel modifié en fonction de la fréquence pour différents α .

un pas fréquentiel fin de 0.5 Hz. En dessous sont représentés les écarts entre les différentes solutions (pour chaque α et chaque pas fréquentiel dont les valeurs sont répertoriées dans le tableau 6.1).

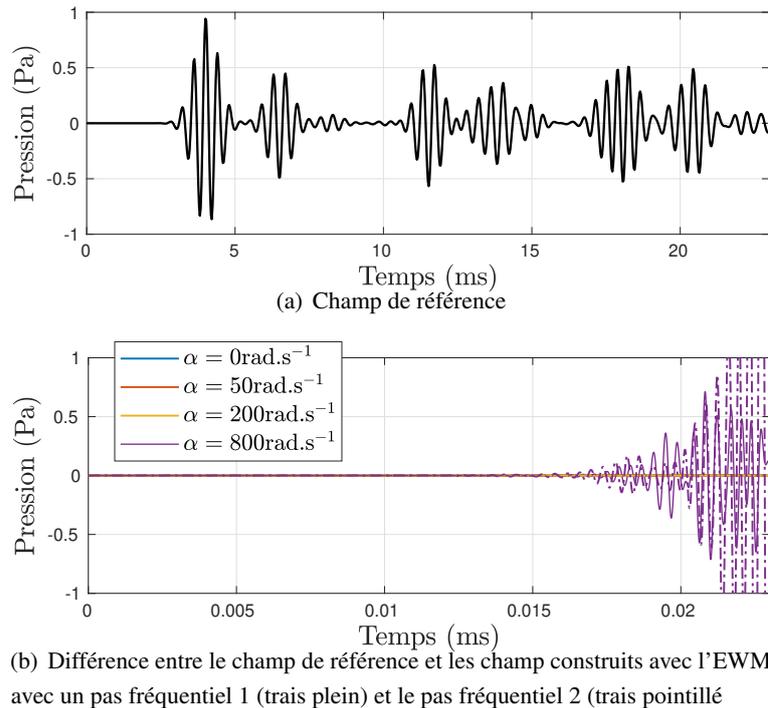


FIGURE 6.4 Champ de référence (en haut) et différence entre le champ de référence et les champs construits avec l'EWM (en bas) au point $\mathbf{x} = (x, y) = (0.68\text{m}, 0.48\text{m})$.

Les erreurs, définies par :

$$\varepsilon_{I_T} = \sqrt{\frac{\int_{t=0}^T \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{refe E}(t) - p_E(t)\|_{E_t}^2 dt}{\int_{t=0}^T \sum_{E=1}^{N_\Omega} \|p_{refe E}(t)\|_{E_t}^2 dt}} \quad (6.11)$$

avec $\|p\|_{E_t}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} \frac{1}{\rho c^2} p^2 + \rho v^2 d\Omega$ la norme énergétique dans le domaine temporel, sont calculées pour chacune des solutions. Elles sont listées dans le tableau 6.1.

α (rad.s ⁻¹)	0 rad.s ⁻¹	50 rad.s ⁻¹ ($\approx \frac{\ln(100)}{4T}$)	200 rad.s ⁻¹ ($\approx \frac{\ln(100)}{T}$)	800 rad.s ⁻¹ ($\approx \frac{4\ln(100)}{T}$)
Pas fréquentiel 1 (critère de Shannon, $\delta f = \frac{1}{T_d}$)	$\frac{1}{T_d} = \frac{1}{0.5s} = 2 \text{ Hz}$			
Erreur ε_{I_T}	0.0821%	0.0113%	0.0840%	613%
Pas fréquentiel 2 (critère de l'EWM, $\delta f = \min\left(\frac{1}{T}, \frac{1}{T_{ad}}\right)$)	2 Hz ($= \frac{1}{T_d}$)	10.1 Hz ($= \frac{\alpha}{\ln(100)}$)	40.5 Hz ($= \frac{\alpha}{\ln(100)}$)	40.5 Hz ($\frac{1}{T}$)
Erreur ε_{I_T}	0.0821%	0.137%	0.491%	654%

TABLE 6.1 Erreur de l'EWM couplée à la VTCR pour les différents paramètres α .

Pour l'ensemble des cas où $\alpha \leq 200 \text{ rad.s}^{-1}$, l'erreur est très faible et l'écart avec la référence est à peine perceptible. L'erreur sur l'intervalle temporel [0, 23 ms] est légèrement plus importante lorsque le pas fréquentiel est grossier (critère défini par l'EWM) mais elle reste faible. Dans le cas où $\alpha = 200 \text{ rad.s}^{-1}$, l'EWM permet de reconstruire la réponse transitoire avec un pas fréquentiel jusqu'à environ 20 fois plus grand qu'avec la TFD classique, ce qui traduit un gain de calcul d'un facteur 20.

Dans les cas où $\alpha = 800 \text{ rad.s}^{-1}$ les erreurs sont très importantes, il y a un écart important qui croît exponentiellement à la fin du signal. La multiplication par le terme $e^{\alpha t}$ qui devient très important à la fin du signal vient polluer la reconstruction. Il semble donc y avoir une limite quant au choix de α .

En deçà de cette limite, que nous quantifions dans la partie suivante, les résultats montrent que le couplage entre l'EWM et la VTCR est particulièrement simple à mettre en œuvre et robuste.

6.1.3 Une limite pour le choix de α

Nous étudions et quantifions cette limite du choix de α à partir de laquelle un écart exponentiellement croissant apparaît en fin de signal.

Une erreur au comportement similaire a été étudiée dans l'article [69], cette erreur peut être contrôlée par un fenêtrage de Hanning dans le domaine fréquentiel ou par une discrétisation plus fine de la fréquence. Nous appliquons déjà une fenêtre de Hanning dans le domaine fréquentiel, et les résolutions

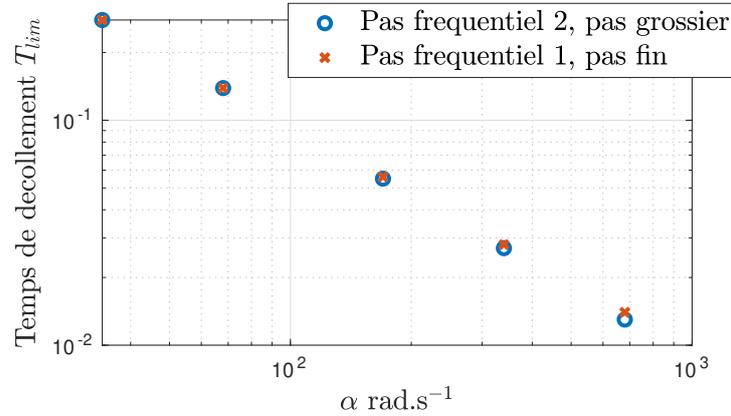


FIGURE 6.5 Temps de décollement T_{lim} à partir duquel la solution décroche pour différents pas de discrétisation en fonction de α

avec un pas fin et grossier du tableau 6.1 présentent toutes deux une erreur importante. L'erreur dont on parle ici semble donc avoir une autre origine.

Afin de quantifier une limite sur le choix de α , nous relevons sur un ensemble d'essais, le temps T_{lim} à partir duquel la solution commence à diverger pour différents choix de α et de pas de discrétisation. Ces derniers sont choisis tels que $\delta f_1 = \frac{1.1}{T_{lim}}$ et $\delta f_2 = \frac{\delta f_1}{4}$. Ils sont répertoriés dans le tableau 6.2.

α	34rad.s ⁻¹	68 rad.s ⁻¹	170 rad.s ⁻¹	340 rad.s ⁻¹	680rad.s ⁻¹
Pas fréquentiel grossier δf_1	2.4 Hz	4.8 Hz	9.8 Hz	26 Hz	52 Hz
Pas fréquentiel fin δf_2	0.6 Hz	1.2 Hz	2.45 Hz	6.5 Hz	13 Hz

TABLE 6.2 Pas de discrétisation fréquentiel pour l'étude de la limite de α , figure 6.5.

Les temps limites à partir desquels il apparaît une erreur jugée significative de la solution sont illustrés figure 6.5. Ils correspondent au temps à partir duquel l'écart entre la solution reconstruite et la référence dépasse 1% du maximum de l'amplitude de la référence. Nous relevons la relation heuristique suivante :

$$T_{lim} \approx \frac{9.5}{\alpha} \iff e^{\alpha T_{lim}} \approx 13000 \quad (6.12)$$

Notons que le coefficient 13000 dépend certainement du cas traité. Nous avons cherché à identifier l'origine de cette erreur, qui ne se trouve pas non plus dans la discrétisation de la VTCR. Nous supposons donc que l'erreur est liée à un problème de zéro numérique.

6.2 Couplage de la résolution large bande PGD-VTCR et de la méthode de la fenêtre exponentielle

Dans cette partie nous proposons de réduire les coûts de la reconstruction de la réponse transitoire en couplant la méthode de l'EWM à la résolution large bande PGD développée dans le chapitre 5. Plutôt que de construire $p_{\alpha\omega}$ fréquence par fréquence, comme présenté précédemment dans la section 6.1.1, nous appliquons la méthode de résolution à large bande sur des bandes de fréquences préalablement définies. En effet, nous exploitons le fait que l'EWM conduit à la résolution d'un problème fortement amorti dans le domaine fréquentiel, une gamme de problèmes dans laquelle la réduction du modèle PGD appliquée à la VTCR est a priori efficace.

6.2.1 Choix du paramètre α pour un couplage optimal

Une étape cruciale est encore une fois le choix de α pour un couplage optimal sachant que des erreurs additionnelles sont introduites par la résolution large bande PGD. Pour prévoir le comportement de ces erreurs, nous pouvons nous baser sur la relation de Parseval énoncée équation 1.8 :

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f_t|^2 dt = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 d\omega \quad (6.13)$$

où f_ω est la transformée de Fourier de f_t . Dans le cas du domaine fréquentiel modifié par α elle devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_t|^2 e^{-2\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\alpha\omega}|^2 d\omega \quad (6.14)$$

où $f_{\alpha\omega}$ est la transformée de Fourier de $e^{-\alpha t} f_t$. Par conséquent, minimiser une norme L2 dans le domaine fréquentiel modifié équivaut à minimiser une norme L2 dans le domaine temporel dans lequel une fonction de fenêtrage $e^{-2\alpha t}$ apparaît. Ainsi, plus α est grand, plus l'algorithme PGD (qui consiste à minimiser ce type de norme dans le domaine fréquentiel) va privilégier les temps courts. Il est à prévoir que le choix optimal de α pour le couplage est donc défini par $\alpha = \frac{\gamma}{T}$ où γ est une constante à identifier et T le temps de reconstruction souhaité.

Pour identifier γ nous reprenons le problème d'acoustique de la section précédente 6.1.2. La cavité est un trapèze 6.1 et la source temporelle est illustrée figure 6.2 et définie à l'équation 6.8. La propagation est étudiée sur une durée de 3 allers-retours de l'onde dans la cavité : $I_T = [0, 23 \text{ ms}]$.

La résolution du problème dans le domaine fréquentiel paramétré par α est effectuée par bande de fréquences avec l'algorithme PGD stratégie 3. Nous décomposons le domaine fréquentiel [1000 Hz, 4000 Hz] en bandes de largeur d'environ $\pm 10\%$, soit 6 bandes de 500 Hz, 10 modes PGD sont recherchés par bandes de fréquences.

La figure 6.6 représente l'énergie mécanique $\|\cdot\|_t^2$ en fonction du temps pour la solution de référence et la solution PGD pour différents choix de α (350 rad/s étant le maximum au sens des critères

précédents de l'équation 6.12). La solution de référence est construite en utilisant la VTCR fréquence par fréquence dans le domaine fréquentiel avec un pas fréquentiel de 0.5 Hz.

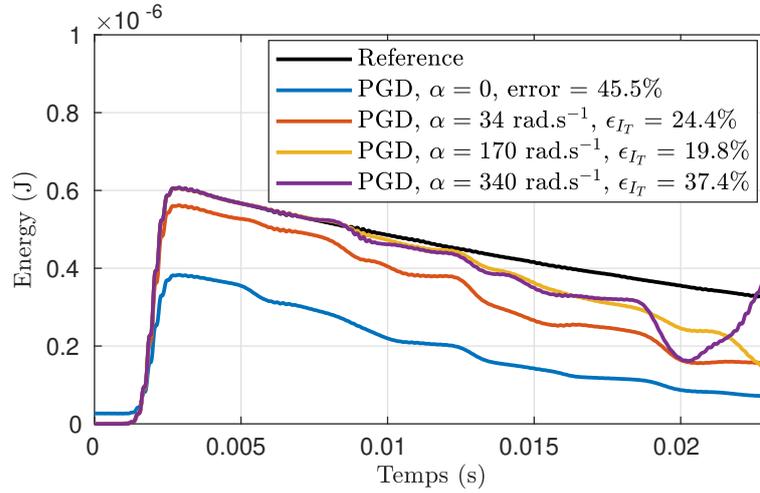


FIGURE 6.6 Impact du paramètre α sur la convergence de la solution PGD.

Il apparaît clairement que l'EWM améliore les performances de la résolution large bande de fréquences et permet une meilleure reconstruction de la réponse transitoire. Pour cet exemple, le cas optimal est celui où $\alpha = 170 \text{ rad/s}$, avec une erreur de $\epsilon_{IT} = 19,8\%$ contre une erreur de $45,5\%$ pour la PGD classique. Cela correspond à un cas optimal de $\alpha \approx \frac{4}{T}$. Dans ce cas, l'amortissement à la fréquence centrale vaut $\eta_\alpha = 1.2 \cdot 10^{-2}$.

La figure 6.7 illustre le champ de référence et le champ approché par la PGD dans ce cas optimal afin de visualiser le problème traité dans le domaine temporel. Nous pouvons observer la propagation d'un train d'ondes dans la cavité : à $t = 3 \text{ ms}$ le train d'ondes vient de pénétrer dans la cavité, il se propage de gauche à droite, à $t = 6 \text{ ms}$ il y a eu une réflexion sur la paroi de droite, le train d'ondes se propage vers la gauche, à $t = 10 \text{ ms}$ et $t = 20 \text{ ms}$ le champ devient plus diffus. Nous visualisons une bonne reconstruction de la réponse transitoire sur l'ensemble des premières réflexions puis l'écart entre la référence et la solution PGD devient plus important à la fin du signal lorsque l'onde a subi de multiples réflexions et que le champ commence à devenir diffus. Le champ PGD reste néanmoins visuellement très proche du champ de référence à $t = 20 \text{ ms}$. Remarquons le lien entre le champ et les modes PGD : le champ à 3 ms est traduit par le mode 1 du problème amorti 5.6 et le champ à 6 ms est traduit par le mode 2 du problème amorti 5.6.

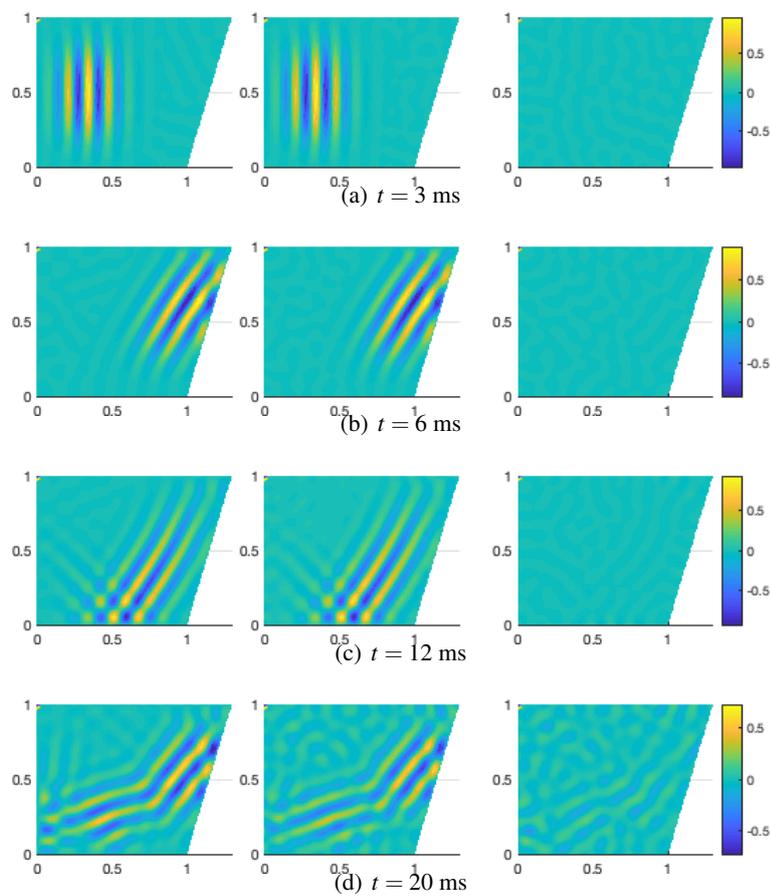


FIGURE 6.7 Champ de référence (à gauche), champ PGD (au milieu) et différence des deux champs (à droite) pour le cas $\alpha = 170 \text{ rad.s}^{-1}$.

L'erreur peut être réduite en augmentant le nombre de modes. Afin de visualiser que l'augmentation du nombre de modes a bien l'effet escompté nous calculons la réponse avec $\alpha = \frac{4}{T}$ pour 5 et 20 modes. L'énergie des solutions est illustrée figure 6.8. L'erreur diminue avec le nombre de modes jusqu'à atteindre 2.8%.

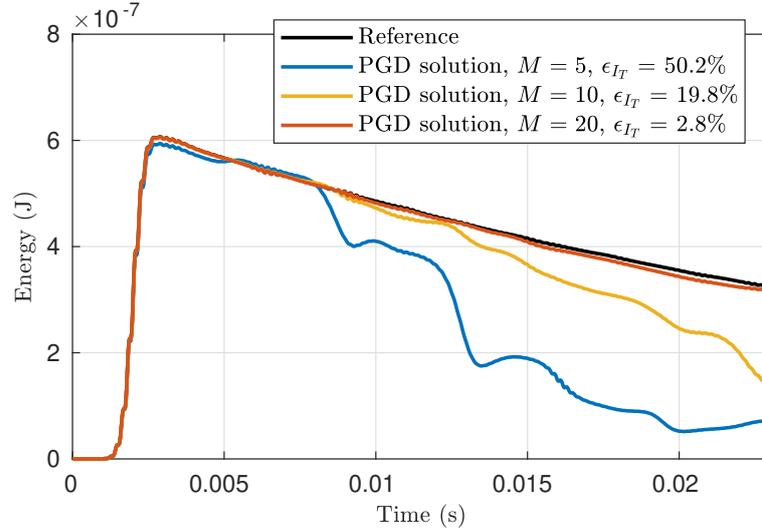


FIGURE 6.8 Impact du nombre de modes M par bande fréquentielle sur la convergence de la solution PGD.

Analysons les gains de ce dernier résultat. L'approche EWM, du fait du pas fréquentiel grossier, permet de résoudre le problème avec peu de points fréquentiels, $N_\omega = 69$. L'approche PGD à 20 modes par bande construit la réponse avec un total de $6 \times M = 120$ modes (6 étant le nombre de bandes) ce qui traduit un déficit en coût de calcul par rapport à l'EWM. Pour obtenir des gains, une attention particulière doit être portée à la résolution PGD.

6.2.2 Optimisation de l'algorithme de résolution large bande PGD dans le cadre du couplage VTCR-EWM

L'EWM conduit à résoudre un problème fortement amorti, exploitons cette propriété pour optimiser la résolution PGD :

- Premièrement avec $\alpha = \frac{4}{7}$ l'amortissement η_α est grand (il vaut $\eta_\alpha = 1.2 \cdot 10^{-2}$ pour $\alpha = 170 \text{ rad.s}^{-1}$ pour l'exemple précédent). Au vu de l'étude du chapitre 5 il s'agira donc de prendre des larges bandes de fréquences de l'ordre de $\Delta\omega = 30\% \omega_0$.
- Deuxièmement lorsque l'amortissement est grand un mode PGD a tendance à traduire un trajet de l'onde entre deux parois, les portraits associés à ces modes sont faiblement dépendants à fréquence centrale de bande de fréquence. Nous proposons donc de les recycler d'une bande de fréquences à la suivante à travers une des deux stratégies :
 - Stratégie de recyclage 1 : l'ensemble des portraits sont recyclés, seules les fonctions de la fréquence sont actualisées en résolvant l'équation 5.19. Cette stratégie présente un coût de calcul négligeable par rapport aux stratégies 1, 2, 3 et 4 développées dans le chapitre 5.
 - Stratégie de recyclage 2 : l'ensemble des portraits sont dans un premier temps recyclés, les modes sont construits à partir d'une actualisation des fonctions de la fréquence équation 5.19, puis d'une actualisation des portraits équation 5.23, puis une nouvelle actualisation

des fonctions de la fréquence. Les coûts de calcul de cette stratégie sont de l'ordre de M fois celui d'un point fréquentiel.

Si la convergence souhaitée n'est pas atteinte dans la bande de fréquences considérée, un nouveau mode peut être calculé.

Reprenons l'exemple traité précédemment. Dans le cas où $\alpha = \frac{4}{T} = 170 \text{ rad.s}^{-1}$ à la fréquence centrale de 2500 Hz l'amortissement vaut $\eta_\alpha = 1.2 \cdot 10^{-2}$ ce qui correspond à un amortissement particulièrement important. Les bandes de fréquences peuvent être grandes, soit deux bandes ici : $I_{\omega_1} = [1000, 2500]$ et $I_{\omega_2} = [2500, 4000]$. La première bande est résolue avec la stratégie 3 développée dans la partie 5.3 et la seconde bande est calculée, soit avec la stratégie 3 également, soit avec la stratégie de recyclage 1 ou 2. Le problème est résolu avec 14 modes PGD par bande de fréquences.

Les résultats sont illustrés figure 6.9. Premièrement remarquons que la stratégie 3 appliquée sur les deux bandes permet d'obtenir une erreur de l'ordre de 11,3% avec un total de 28(= 2 × 14) modes 6.8 ce qui représente, à erreur égale, un nombre de modes bien inférieur aux cas avec une largeur de bande de 500 Hz étudiés précédemment. Les solutions PGD avec les stratégies de recyclage 1 et 2 ont respectivement une erreur de 24,3% et 20,1% principalement concentrée sur la fin de la réponse, ce qui est relativement faible au vu des coûts de calcul qu'ils représentent. Ces stratégies sont un bon compromis erreur-coûts de calcul.

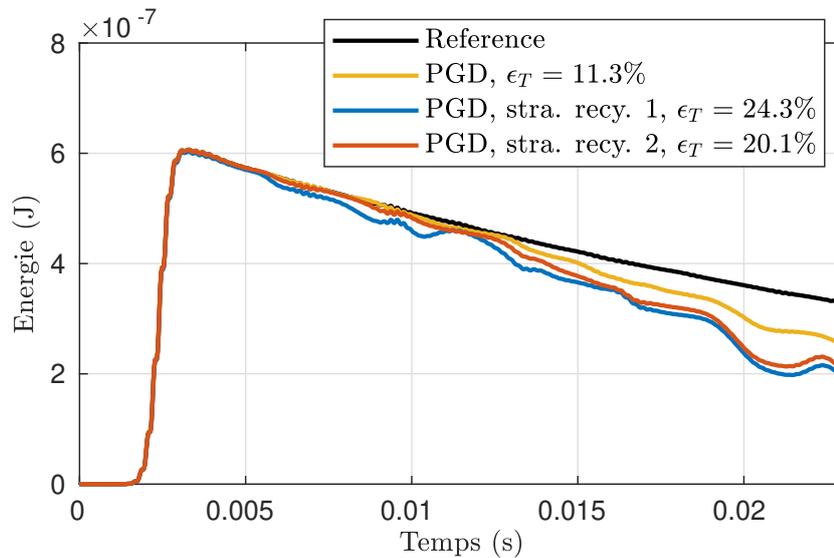


FIGURE 6.9 Solutions PGD avec 14 modes par bande de fréquences : stratégie 3 pour toutes les bandes (en jaune), stratégie 3 pour la première bande et stratégie de recyclage 1 (en bleu) ou 2 (en rouge).

Malgré ces stratégies intéressantes, dans le cas traité ici les coûts restent importants par rapport à l'approche EWM. En effet rien que la stratégie 3 appliquée à la première bande représente un coût de l'ordre de $14 \times 3(M \times b_{max}) = 42 \approx 69 (= N_\omega)$ (voir partie 5.3). Il s'agira donc d'exploiter les stratégies de recyclage sur un nombre important de bandes de fréquences.

6.2.3 Application à la propagation d'un choc dans une cavité acoustique

Nous traitons ici la propagation de choc dans une cavité acoustique plus complexe illustrée sur la figure 6.11. L'amortissement vaut $\eta = 10^{-3}$. La cavité est chargée par un signal triangulaire de courte durée comme le montre la figure 6.10, imposé comme une condition de Dirichlet en tout point du bord à gauche, voir la figure 6.11. Le contenu en fréquence du signal est très étalé et atteint 15 kHz. Pour résoudre la propagation de l'onde dans la cavité, nous séparons les contributions en basses et hautes fréquences comme décrit dans les travaux de Chevreuril [31] : les basses fréquences sont résolues en utilisant la méthode des éléments finis et les hautes fréquences sont résolues en utilisant la VTCR. Une fenêtre de Hanning est utilisée pour séparer les deux gammes de fréquences.

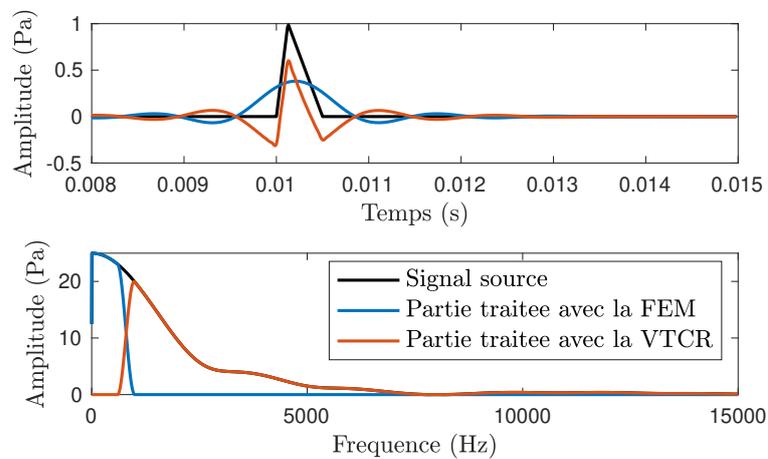


FIGURE 6.10 Signal source triangulaire décomposé en partie basses et partie hautes fréquences.

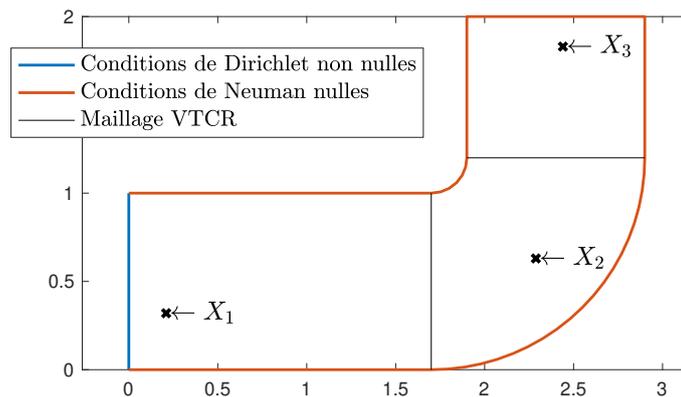


FIGURE 6.11 Géométrie en forme de coude du problème traité.

Nous reconstruisons la réponse temporelle sur une durée de l'ordre d'un aller de l'onde dans la cavité, c'est-à-dire environ 20 ms après l'entrée du signal choc.

Pour résoudre le problème, chaque domaine fréquentiel est traité séparément :

- La partie basses fréquences est résolue en utilisant une méthode éléments finis (MEF) implémenter dans Matlab pour cette application. Le maillage a un pas de discrétisation $p = 0.025\text{m}$, soit 7900 noeuds et 13400 éléments. Le code MEF utilise des fonctions de forme polynomiales par morceaux d'ordre 1. Afin de contrôler l'erreur, la longueur d'onde minimale qui peut-être traitée est de 15 pas spatiaux, ce qui correspond à une fréquence maximale de 900 Hz. Cette fréquence définit la limite supérieure du domaine traité par les éléments finis. Une base modale est construite à partir de tous les modes ayant une fréquence propre inférieure à 2 fois 900 Hz, soit 1800 Hz. La résolution se fait par projection des équations de la dynamique sur la base modale dans le domaine fréquentiel avec un pas de discrétisation défini par le critère de Shannon qui vaut 0,001 Hz.
- La partie hautes fréquences est résolue en utilisant la résolution large bande PGD stratégie 3 couplée à l'EWM. Comme la réponse doit être reconstruite sur une durée de 20 ms, nous prendrons $\alpha = 160 \text{ rad.s}^{-1} \approx 4/T$. Cela correspond à un amortissement $\eta_\alpha \approx 0.021$ à 2000 Hz. Comme la PGD est relativement efficace pour un amortissement important, nous prendrons des bandes de fréquences larges, de l'ordre de 30%, soit un total de 7 bandes couvrant l'intervalle $I_\omega = [900, 15000]$ Hz.

Les résolutions sont faites séparément, puis les solutions basses et moyennes fréquences sont sommées dans le domaine temporel. Les réponses reconstruites aux points 1, 2 et 3 sont illustrées figure 6.12

Le point X_1 est proche de la source, il montre l'arrivée de l'onde dans la cavité à l'instant $t = 1,05$ ms. Les points X_2 et X_3 montrent le champ plus loin dans la cavité.

Pour évaluer l'erreur au point de reconstruction du signal nous calculons une référence à partir d'une résolution fréquentielle fréquence par fréquence : la MEF sur base modale en basses fréquences et la VTCR couplée à l'EWM en moyennes fréquences. L'erreur en norme L2 des résolutions PGD par rapport à cette référence est respectivement de 2.28%, 12.7% et 15.3% aux points 1, 2 et 3. Il s'agit d'une erreur relativement faible.

Estimons les différents gains. Un premier gain est apporté par l'EWM auquel s'ajoute celui de la résolution large bande PGD. Le gain de l'EWM s'estime comme le rapport entre la durée d'amortissement et la durée de reconstruction de la solution, soit un gain d'environ $\frac{T_d}{T} = \frac{0.8 \text{ s}}{0.025 \text{ s}} \approx 30$. Le potentiel gain apporté par la PGD s'évalue en comparant le nombre de points fréquentiels au nombre de modes PGD. Le nombre total de modes PGD vaut $7 \times 20 = 140$, alors que le nombre de points fréquentiels correspond à $N_\omega = 350$. Avec la stratégie 3, il est clair qu'aucun gain n'est appréciable, en effet plus de $140 \times 3 = 420$ inversions d'opérateurs VTCR sont effectuées (voir la partie sur l'étude des coûts de calculs de la résolution large bande 5.4). Supposons appliquer les stratégies de recyclage. Pour limiter l'erreur, il paraît pertinent de les appliquer seulement sur des bandes voisines de celles calculées avec la stratégie 3. Supposons appliquer la stratégie 3 sur une bande fréquentielle sur trois et la stratégie de recyclage 1 sur les autres bandes. Dans ce cas le nombre d'inversions serait de l'ordre de $3 \times 20 \times 3 (= \text{nombre de bandes} \times \text{nombre de modes} \times b_{\max}) = 180$, soit deux fois moins que le nombre de points fréquentiels. En tenant compte du fait que dans la stratégie 3 le nombre de modes $\times b_{\max}$ est

une sous-estimation du nombre d'inversions d'opérateurs VTCR, nous ne pouvons envisager qu'un faible gain sur cet exemple.

Les gains sont donc principalement apportés par l'EWM sur cet exemple.

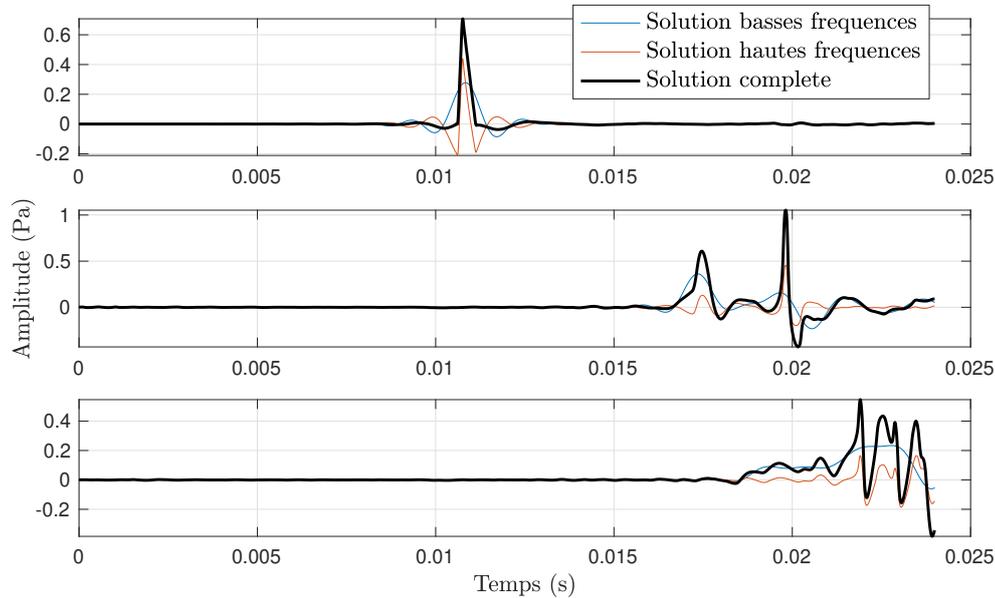


FIGURE 6.12 Réponse d'une cavité acoustique en forme de coude, soumise à un choc. Les basses fréquences sont simulées avec la MEF et les hautes fréquences sont simulées avec la VTCR couplée à l'EWM et à la PGD.

6.3 Conclusion

Dans cette section nous avons mis en place des méthodes de réduction des coûts de calcul dans le domaine fréquentiel pour la construction de la réponse transitoire sur des temps courts. Premièrement nous avons couplé la VTCR à la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM). Cette dernière permet de s'affranchir du critère de Shannon sur le pas fréquentiel de résolution et ainsi d'augmenter le pas fréquentiel pour réduire le nombre d'inversions dans le domaine fréquentiel. Ce couplage s'est fait sans difficulté et les gains apportés sont égaux au rapport entre la durée d'amortissement du signal et la durée de reconstruction souhaitée : lorsqu'il s'agit de reconstruire la réponse sur un temps court les gains sont de l'ordre de quelques dizaines par rapport à l'approche fréquentielle point par point. Lorsqu'il s'agit de reconstruire la réponse sur la durée jusqu'à amortissement, aucun gain n'est apporté par l'EWM.

L'EWM amène à résoudre un problème dans un domaine fréquentiel artificiellement amorti. Il s'agit d'une gamme de problèmes pour laquelle la résolution large bande PGD est potentiellement efficace. Nous avons donc dans un second temps proposé de résoudre le domaine fréquentiel avec les résolutions large bande PGD développées chapitre 5. Pour permettre d'envisager un nouveau gain, il a fallu développer des méthodes de recyclage des modes PGD d'une bande de fréquences à l'autre. Ces approches laissent entrevoir, dans le cas où une méthode PGD Petrov Galerkin serait développée [8], des

gains relativement faibles. Par ailleurs, les erreurs demeurent importantes. Ce dernier gain est à cumuler avec celui de l'EWM.

Chapitre 7

Une méthode de décomposition de domaine temporel adaptée à la résolution fréquentielle

Ce chapitre propose une méthode de décomposition du domaine temporel avec recouvrement, adaptée à la résolution fréquentielle, dans le but de réduire les coûts de résolution numérique. Afin d'étudier ses performances, elle est appliquée à la méthode des éléments finis et à la VTCR.

7.1	Développement et illustration de la méthode	142
7.1.1	Description de la méthode	142
7.1.2	Développement de la méthode	143
7.1.3	Gains et choix des paramètres	150
7.1.4	Application de la méthode de décomposition de domaine temporel à l'acoustique 2D	151
7.1.5	Étude des paramètres de la méthode sur la précision	155
7.1.6	Bilan	156
7.2	Application de la méthode de décomposition du domaine temporel pour la résolution moyennes fréquences avec la VTCR	157
7.2.1	Cas particulier à un seul sous-problème temporel	158
7.2.2	Cas général à N_{sd} sous-domaines temporels	163

7.2.3	Une première application numérique	166
7.2.4	Étude des gains en temps de calcul	168
7.2.5	Bilan	175
7.3	Conclusion	176

Dans ce chapitre, il est proposé une nouvelle approche à faible coût de calcul permettant de reconstruire l'intégralité de la réponse temporelle sur des temps longs. Pour cela, nous traitons le problème temporel comme une succession de problèmes à temps court. Chacun des sous-problèmes est traité avec une approche fréquentielle. Il s'agira d'augmenter le pas fréquentiel de résolution en contournant le critère de Shannon qui tend à imposer un pas fréquentiel fin. Ainsi, les coûts de résolution d'un sous-domaine seront réduits, à l'image de la méthode de l'enveloppe exponentielle traitée dans le chapitre 6. Il s'agira de remarquer que les opérateurs fréquents nécessaires à la résolution du premier sous-problème peuvent être réutilisés pour les sous-problèmes suivants. Finalement, le premier sous-problème présente un coût relativement faible grâce à sa petite taille, et les autres sous-problèmes présentent un coût encore plus faible du fait du recyclage des opérateurs. Par résolutions successives, la solution complète est reconstruite.

Le problème est traité par une méthode de décomposition de domaine temporel (DDT), où la résolution de chaque sous-domaine se fait dans le domaine fréquentiel. Une difficulté réside dans la satisfaction des conditions de continuité d'un sous-domaine temporel à l'autre : les conditions finales d'un sous-domaine sont à imposer comme conditions initiales du suivant. En pratique les méthodes fréquentielles traitent les conditions initiales avec la construction d'une solution particulière afin de se ramener à la résolution d'un problème aux conditions initiales nulles. La solution particulière devra être construite avec peu de coûts de calcul. Pour cela, nous optons pour une décomposition de domaine avec recouvrement : les sous-domaines temporels se recouvrent et la partie d'un sous-domaine qui recouvre le suivant permettra la construction de la solution particulière du suivant.

De nombreuses méthodes de décomposition de domaine ont été proposées dans la littérature. La méthode Parareel [105] consiste à décomposer le domaine temporel en un ensemble de sous-domaines. Itérativement, un maillage grossier évalue grossièrement la solution à chaque instant, puis un maillage fin évalue la solution dans chaque sous-domaine, le processus est répété jusqu'à convergence. La méthode LATIN [91] consiste à résoudre le problème par grand incrément de temps, en itérant entre résolutions globales linéaires et résolutions locales non linéaires. Peuvent également être citées les méthodes multi-échelles en temps espace [37] et temps espace globale locale [13]. Elles consistent entre autres à exploiter plusieurs échelles de temps avec des pas de discrétisations de la résolution numérique adaptés à chaque échelle. Contrairement à ces dernières, la méthode développée ici cherche à exploiter au mieux les avantages de la résolution fréquentielle.

Nous commençons par développer la méthode et l'illustrons avec un problème simple à un degré de liberté. Nous l'appliquerons à un problème EFs pour démontrer ses atouts. Puis, nous l'appliquerons à des problèmes moyennes fréquences où la résolution fréquentielle sera effectuée avec la VTCR. Il s'agira d'étudier les gains numériques.

7.1 Développement et illustration de la méthode

7.1.1 Description de la méthode

Le problème est traité comme une méthode de décomposition de domaine temporel (DDT) avec recouvrement où chaque sous-problème est résolu de manière successive, sous-domaine après sous-domaine, dans le domaine fréquentiel.

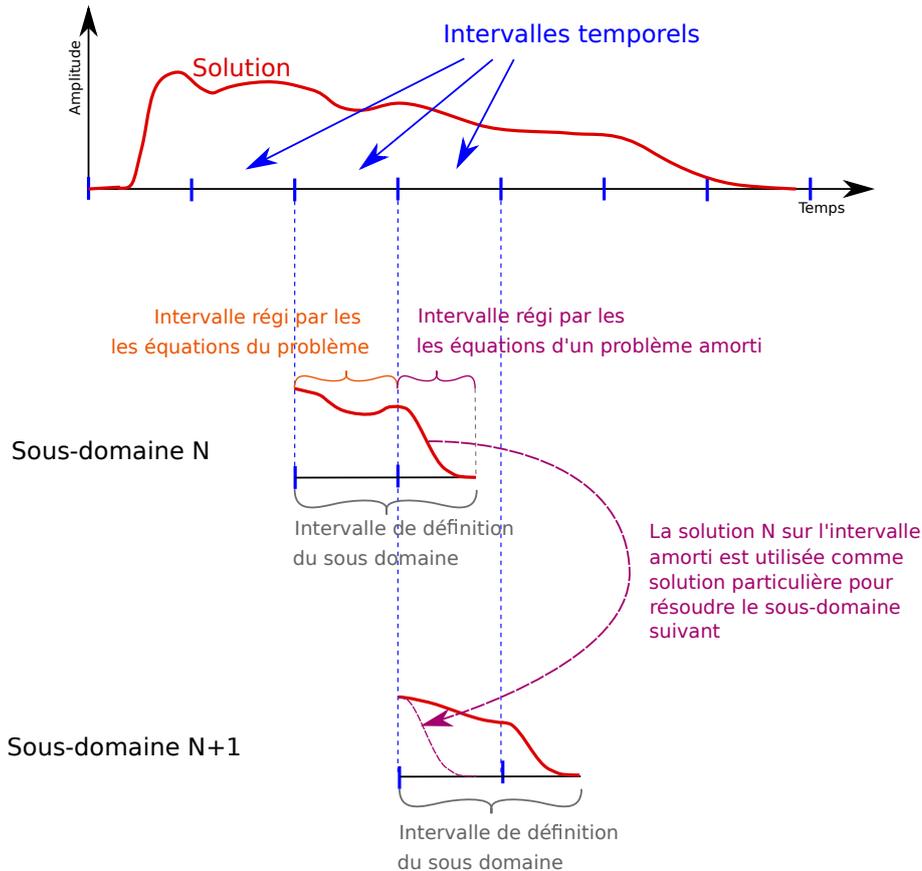


FIGURE 7.1 Schéma de la méthode de décomposition de domaine temporel (DDT).

Pour permettre de résoudre à faible coût de calcul le problème associé à un sous-domaine dans le domaine fréquentiel, nous définissons un problème amorti sur la partie du domaine qui vient recouvrir le suivant, voir la figure 7.1. Le champ s'amortit alors rapidement sur cet intervalle de tel sorte qu'il soit quasi nul à la fin de celui-ci. Ce choix de construction est doublement bénéfique :

- En suivant le critère de Shannon qui s'applique sur la durée d'amortissement de la solution d'un sous-domaine, la résolution dans le domaine fréquentiel peut se faire avec un pas fréquentiel grossier égal à l'inverse de la durée du sous-domaine.
- La solution sur l'extension servira de solution particulière pour traiter les conditions initiales de la résolution du sous-domaine suivant. Tout comme la solution de l'extension du sous-domaine précédent aura servi de solution particulière pour le sous-domaine traité.

Cependant, le problème associé à un sous-domaine ainsi défini n'est plus invariant en temps, cela complique sa résolution fréquentielle : des produits de convolution apparaissent. Nous proposerons de résoudre les sous-problèmes de manière itérative.

7.1.2 Développement de la méthode

Considérons un problème de dynamique linéaire aux conditions initiales nulles (comme défini équation 1.2 du chapitre 1) défini sur l'intervalle temporel I_T . Il s'écrit de manière générique :

$$g.u = s \quad (7.1)$$

avec u la solution du problème avec des conditions initiales nulles, g l'opérateur linéaire associé aux équations différentielles du problème et s le terme source.

Illustration

Afin d'illustrer, prenons un cas masse-ressort. Le problème s'écrit :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\partial u}{\partial t} + ku = s \quad \forall t \in I_T \quad (7.2)$$

avec u le déplacement, m la masse, k la raideur, v le coefficient de frottement visqueux et s l'effort extérieur. Dans ce cas, g vaut $g = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial t} + k$. Par la suite nous prendrons les paramètres définis dans le tableau 7.1.

Masse	$m = 1\text{kg}$
Raideur	$k = 1 \text{ N.m}^{-1}$
Amortissement	$\mu = 0.005 \text{ Ns.m}^{-1}$
Fréquence propre	$f_0 = 0.159 \text{ Hz}$
$I_T = [0, T]$	$[0, 3000] \text{ s}$

TABLE 7.1 Données du problème masse-ressort.

Décomposons l'intervalle temporel I_T en N_{sd} intervalles temporels réguliers de durée T_{sd} notée $I_{T_n} = [(n-1)T_{sd}, nT_{sd}]$. Définissons également les intervalles $I_{T_n \text{ ext}}$ appelés extensions d'une durée T_{ext} , définis par $I_{T_n \text{ ext}} =]nT_{sd}, nT_{sd} + T_{ext}]$.

Il s'agit de résoudre le problème de dynamique par sous-domaine temporel. Chaque sous-domaine temporel est défini sur un intervalle $I_{T_n} \cup I_{T_n \text{ ext}} = [(n-1)T_{sd}, nT_{sd} + T_{ext}]$.

Construction des deux premiers sous-problèmes

Commençons par définir le problème associé au premier sous-domaine. Il est défini sur l'intervalle $I_{T_1} \cup I_{T_1 \text{ ext}}$. Sur l'intervalle I_{T_1} il est simplement défini par :

$$g \cdot \tilde{u}^1 = s \quad \forall t \in I_{T_1} \quad (7.3)$$

avec des conditions initiales nulles. Ainsi sur l'intervalle I_{T_1} la solution $\tilde{u}^1 = u$.

Sur l'intervalle $I_{T_1 \text{ ext}}$, le problème est défini de sorte que la solution \tilde{u}^1 s'amortisse rapidement : elle doit être complètement amortie à la fin de l'intervalle. Nous définissons pour cela un problème complémentaire g_{ext} aux propriétés fortement amortissantes, c'est à dire la réponse sera amortie sur la durée T_{ext} . Il s'agit d'un choix de l'utilisateur. La solution \tilde{u}^1 , qui est définie continue et de dérivée par rapport au temps continue en $t = T_{sd}$, vérifie sur l'intervalle $I_{T_1 \text{ ext}}$:

$$g_{\text{ext}} \cdot \tilde{u}^1 = 0 \quad \forall t \in I_{T_1 \text{ ext}} \quad (7.4)$$

Illustration

Dans le cas de l'illustration masse-ressort, le problème associé au premier sous-domaine s'écrit :

$$\begin{cases} \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \tilde{u}^1 = s & \forall t \in I_{T_1} \\ \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (v + v_{\text{ext}}) \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \tilde{u}^1 = 0 & \forall t \in I_{T_1 \text{ ext}} \end{cases} \quad (7.5)$$

avec v_{ext} un paramètre d'amortissement strictement positif associé au problème de l'extension. Dans ce cas, g_{ext} est choisi égal à g auquel a été ajouté un amortissement visqueux : $g_{\text{ext}} = g + v_{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial t}$.

La figure 7.2 représente la solution \tilde{u}^1 dans le cas du système masse-ressort. Sur cette illustration, $v_{\text{ext}} = 1 \text{ Ns.m}^{-1} \gg v$, $T_{ds} = 15 \text{ s}$ et $T_{\text{ext}} = 15 \text{ s}$. Nous observons bien que $\tilde{u}^1 = u$ sur $I_{T_1} = [0, 15\text{s}]$ et que \tilde{u}^1 s'amortit rapidement dans l'intervalle $I_{T_1 \text{ ext}} = [15, 30] \text{ s}$.

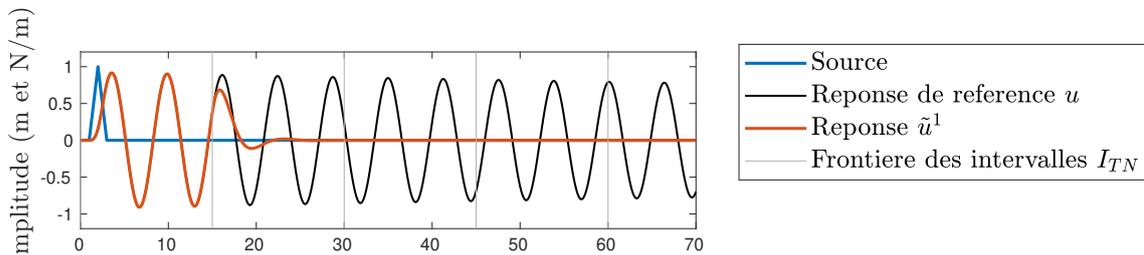


FIGURE 7.2 Solution \tilde{u}^1 dans le cas d'un problème masse-ressort.

Définissons à présent le deuxième sous-problème défini sur l'intervalle $I_{T_2} \cup I_{T_2 \text{ ext}}$. Sur l'intervalle I_{T_2} il s'agit de résoudre un problème avec des conditions initiales non nulles égales à u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ en $t = T_{sd}$. Nous proposons d'utiliser \tilde{u}^1 défini sur l'extension $I_{T_1 \text{ ext}}$ comme solution particulière vérifiant ces conditions

initiales. Il s'agit donc de résoudre \tilde{u}^2 , la solution homogène sur l'intervalle I_{T_2} :

$$g \cdot (\tilde{u}^2 + \tilde{u}^1) = s \iff g \cdot \tilde{u}^2 = s - g \cdot \tilde{u}^1 \quad \forall t \in I_{T_2} \quad (7.6)$$

où \tilde{u}^2 a des conditions initiales nulles à $t = T_{ds}$. \tilde{u}^1 n'est pas nécessairement défini sur tout l'intervalle I_{T_2} , il est prolongé par zéro si ce n'est pas le cas. Nous vérifions bien $\tilde{u}^2 + \tilde{u}^1 = u \quad \forall t \in I_{T_2}$.

Sur l'intervalle $I_{T_2 \text{ ext}}$ le problème est défini de manière similaire au premier sous-problème. La solution \tilde{u}^2 , qui est définie continue et de dérivée par rapport au temps continue en $t = 2T_{sd}$, est définie sur l'intervalle $I_{T_2 \text{ ext}}$ par :

$$g_{\text{ext}} \cdot \tilde{u}^2 = 0 \quad \forall t \in I_{T_2 \text{ ext}} \quad (7.7)$$

Illustration

Dans le cas de l'illustration masse-ressort, le problème associé au sous-domaine 2 s'écrit :

$$\begin{cases} \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial t} + k \right) (\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2) = s & \forall t \in I_{T_2} \\ \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (v + v_{\text{ext}}) \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \tilde{u}^2 = 0 & \forall t \in I_{T_2 \text{ ext}} \end{cases} \quad (7.8)$$

La figure 7.3 représente la solution homogène \tilde{u}^2 associée au sous-domaine 2.

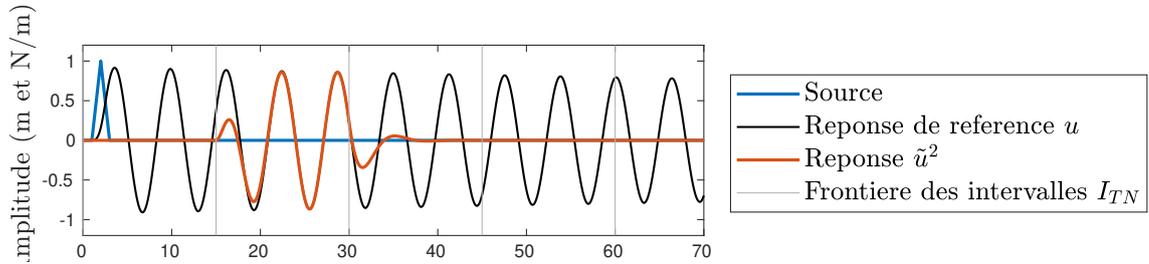


FIGURE 7.3 Solution homogène \tilde{u}^2 dans le cas du problème masse-ressort.

Définition du sous-problème $\forall N$

Nous définissons les N sous-problèmes de la même manière :

$$\begin{cases} g \cdot \sum_{n=1}^N \tilde{u}^n = s & \forall t \in I_{T_N} \\ g_{\text{ext}} \tilde{u}^N = 0 & \forall t \in I_{T_N \text{ ext}} \end{cases} \quad (7.9)$$

Les conditions initiales à $t = (N - 1)T_{ds}$ de \tilde{u}^N sont nulles et \tilde{u}^N et $\frac{\partial \tilde{u}^N}{\partial t}$ sont continues à $t = NT_{ds}$. Les solutions \tilde{u}^n n'étant pas nécessairement définies sur I_{TN} , nous les prolongeons par zéro lorsque ce n'est pas le cas.

La solution $\sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n$ étant une solution particulière vérifiant les conditions initiales non nulles du sous-domaine N , nous avons :

$$\sum_{n=1}^N \tilde{u}^n = u \quad \forall t \in I_{TN} \quad (7.10)$$

Illustration

Dans le cas de l'illustration masse ressort, le problème général s'écrit :

$$\begin{cases} \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \sum_{n=1}^N \tilde{u}^n = s & \forall t \in I_{TN} \\ \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (v + v_{ext}) \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \tilde{u}^N = 0 & \forall t \in I_{TN \text{ ext}} \end{cases} \quad (7.11)$$

La figure 7.3 représente les solutions \tilde{u}^n associées aux sous-domaines temporels 1, 2 et 3 et la somme des solutions \tilde{u}^n dans le cas du problème masse-ressort.

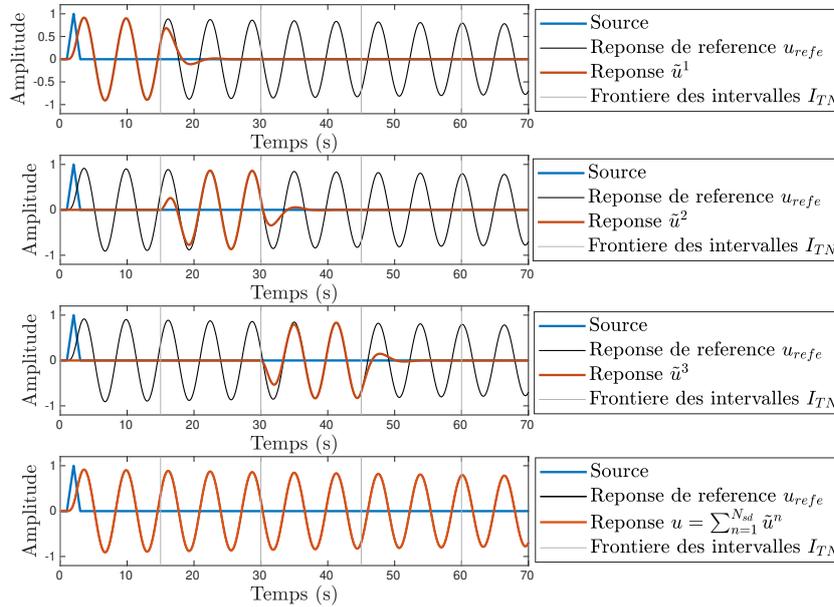


FIGURE 7.4 Solutions homogènes \tilde{u}^n des sous-domaines temporels 1, 2 et 3 et la somme de toutes les solutions \tilde{u}^n dans le cas du problème masse-ressort.

Résolution d'un problème associé à un sous-domaine

Il s'agit ici de résoudre le problème associé à un sous-domaine quelconque.

Définissons w^N la fonction de fenêtrage :

$$w^N(t) = \begin{cases} 1 & t \in I_{TN} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.12)$$

Pour résoudre le système 7.9 nous le réécrivons sous la forme suivante :

$$g_{ext} \cdot \tilde{u}^N = w^N \times \left(\gamma s + (g_{ext} - \gamma g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n + (g_{ext} - \gamma g) \tilde{u}^N \right) \quad \forall t \in I_{TN} \cup I_{TN \text{ ext}} \quad (7.13)$$

avec γ un paramètre non nul au choix. Nous vérifions bien que ce problème est équivalent au problème 7.9. La résolution de \tilde{u}^N nécessite la solution des n problèmes précédents. La résolution des sous-domaines se fait de manière successive en commençant par le premier.

Illustration

Dans le cas du problème masse-ressort illustré précédemment, le problème s'écrit avec $\gamma = 1$:

$$\left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (v + v_{ext}) \frac{\partial}{\partial t} + k \right) \tilde{u}^N = w^N \times \left(s + v_{ext} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial t} + v_{ext} \frac{\partial \tilde{u}^N}{\partial t} \right) \quad \forall t \in I_{TN} \cup I_{TN \text{ ext}} \quad (7.14)$$

Supposons connaître la solution $\tilde{u}^n \forall n \leq N-1$ et résolvons le problème N . Nous proposons de résoudre l'équation 7.13 par point fixe avec une initialisation $\tilde{u}_0^N = 0$. Il s'agit de résoudre :

$$g_{ext} \cdot \tilde{u}_{m+1}^N = w^N \times \left(\gamma s + (g_{ext} - \gamma g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n + (g_{ext} - \gamma g) \tilde{u}_m^N \right) \quad \forall t \in I_{TN} \cup I_{TN \text{ ext}} \quad (7.15)$$

Nous vérifierons la convergence de ce problème qui dépendra du choix de g_{ext} et de γ dans chacune des applications de la méthode.

Nous exploitons les propriétés amortissantes de g_{ext} pour résoudre efficacement \tilde{u}_{m+1}^N dans le domaine fréquentiel. En effet le signal \tilde{u}_{m+1}^N a des conditions initiales nulles et il est amorti à la fin de l'intervalle $I_{TN} \cup I_{TN \text{ ext}}$. \tilde{u}_{m+1}^N peut être construit dans le domaine fréquentiel avec un pas de discrétisation fréquentiel vérifiant le critère de Shannon qui, appliqué au sous-domaine, vaut $\tilde{\delta}f = \frac{1}{T_{ds} + T_{ext}}$. Il s'agit d'un pas fréquentiel potentiellement grand devant celui donné par le critère de Shannon appliqué sur le problème de référence.

Dans le domaine fréquentiel, l'équation à résoudre aux fréquences $[-k_{\max} \tilde{\delta}f .. k_{\max} \tilde{\delta}f]$ s'écrit :

$$\tilde{u}_{\omega \ m+1}^N = (\text{TF}(g_{ext}))^{-1} \text{TF} \left(w^N \times \left(\gamma s + (g_{ext} - \gamma g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n + (g_{ext} - \gamma g) \tilde{u}_{m-1}^N \right) \right) \quad (7.16)$$

avec $\tilde{u}_{\omega \ m+1}^N = \text{TF}(\tilde{u}_{m+1}^N)$. Il s'agit donc d'inverser l'opérateur g_{ext} dans le domaine fréquentiel aux fréquences $[-k_{\max} \tilde{\delta}f .. k_{\max} \tilde{\delta}f]$ avec $k_{\max} \approx \frac{f_{\max}}{\tilde{\delta}f}$ un entier naturel et f_{\max} la fréquence maximale de la

source. Ces fréquences sont indépendantes du sous-problème N et de l'itération m . Il s'agira d'inverser une seule fois les opérateurs et de réutiliser les inverses pour l'ensemble des itérations de l'ensemble des sous-domaines. Ainsi, la méthode présente des gains en coûts de calcul d'autant plus importants que le pas $\tilde{\delta}f$ est grand devant le pas δf donné par le critère de Shannon.

Dans le cas où le signal se trouve dans une bande fréquentielle donnée, il s'agira de construire et d'inverser les opérateurs seulement aux fréquences se trouvant dans la bande, soit les fréquences $\pm \llbracket k_{\min} \tilde{\delta}f .. k_{\min} \tilde{\delta}f \rrbracket$ avec $k_{\min} \approx \frac{f_{\min}}{\delta f}$ un entier naturel et f_{\min} la fréquence minimale de la bande.

A chaque itération il s'agit de :

- Construire $(\gamma s + (g_{ext} - \gamma g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n + (g_{ext} - \gamma g) \tilde{u}_{m-1}^N)$ dans le domaine temporel.
- Appliquer la fonction de fenêtrage w^N .
- Appliquer une Transformée de Fourier Discrète (TFD).
- Calculer $\tilde{u}_{\omega m+1}^N$ dans le domaine fréquentiel à partir des inverses $(\text{TF}(g_{ext}))^{-1}$.
- Appliquer une TFD inverse à $\tilde{u}_{\omega m+1}^N$ pour reconstruire u_{m+1}^N dans le domaine temporel.

L'algorithme de point fixe s'arrête soit lorsque le nombre d'itérations atteint un nombre d'itérations maximal b_{\max} , soit lorsque le critère de stagnation c_m :

$$c_m = \frac{\|\tilde{u}_{\omega m+1}^N - \tilde{u}_{\omega m}^N\|}{\|\tilde{u}_{\omega m+1}^N\|} \quad (7.17)$$

atteint un seuil c_{\lim} .

Du fait du fenêtrage par un signal-porte w^N le terme $\text{TF}(w^N \cdot (s + (g_{ext} - g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}^n + (g_{ext} - g) \tilde{u}_{m-1}^N))$ est étalé dans le domaine fréquentiel. En effet la transformée de Fourier de w^N est un sinus cardinal qui a une décroissance lente en $\frac{1}{\omega}$ avec la fréquence. Il en résulte que l'intervalle fréquentiel initialement défini par la fréquence de la source s doit potentiellement être agrandi pour garantir la précision, ce qui implique une augmentation du nombre de fréquences de résolution. Afin de limiter cet étalement, les fonctions de fenêtrages w^N peuvent être remplacées par des fonctions de fenêtrage de Hanning :

$$w_{\text{Han}}^N = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{t - (N-1)T_{ds}}{\Delta T_{\text{Han}}} \right) \right) & \forall t \in [(N-1)T_{sd} - \Delta T_{\text{Han}}, (N-1)T_{sd}[\\ 1 & \forall t \in]T_N \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{t - NT_{ds}}{\Delta T_{\text{Han}}} \right) \right) & \forall t \in]NT_{sd}, NT_{sd} + \Delta T_{\text{Han}}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.18)$$

avec T_{Han} une durée à fixer. Avec ces fonctions de fenêtrage, l'intervalle de résolution du sous-domaine N devient $[(N-1)T_{sd} - \Delta T_{\text{Han}}, NT_{sd} + \Delta T_{\text{Han}} + T_{ext}]$. Il en résulte que le pas fréquentiel devient plus fin et vaut $\tilde{\delta}f = \frac{1}{T_{sd} + T_{ext} + 2\Delta T_{\text{Han}}}$.

Illustration

Dans le cas du problème masse-ressort, le problème itératif dans le domaine fréquentiel 7.16 s'écrit :

$$\tilde{u}_{\omega m+1}^N(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega(v + v_{ext}) + k} \text{TF} \left(w^N \times \left(s + v_{ext} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial t} + v_{ext} \frac{\partial \tilde{u}_m^N}{\partial t} \right) \right) (\omega) \quad (7.19)$$

avec $(\text{TF}(g_{ext}))^{-1} = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega(v + v_{ext}) + k}$ ici. La figure 7.5 illustre les solutions \tilde{u}_m^N à différentes itérations m de la résolution du premier sous-domaine. La résolution de chaque itération de chaque sous-domaine ne nécessite la résolution de cette équation qu'aux fréquences $[-k_{\max} \tilde{\delta}f .. k_{\max} \tilde{\delta}f]$ avec $\tilde{\delta}f = \frac{1}{T_{sd} + T_{ext}} = 0.033$ Hz. Les opérateurs $\frac{1}{-\omega^2 m + i\omega(v + v_{ext}) + k}$ construits à ces fréquences ne sont construits qu'une fois et réutilisés pour l'ensemble des itérations m et des sous-domaines N .

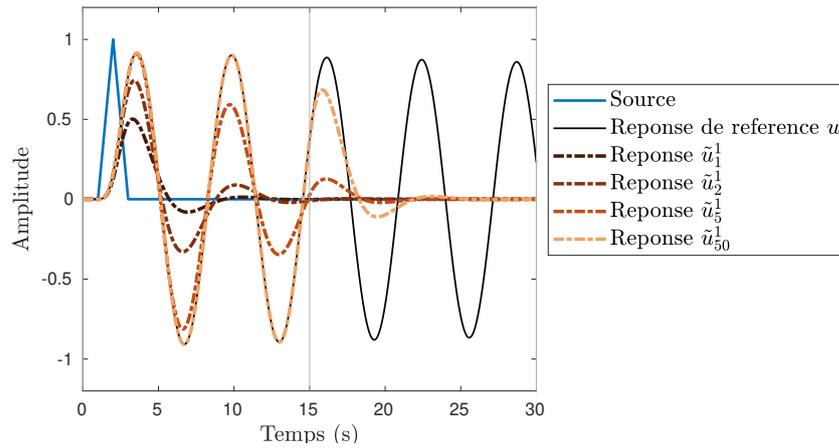


FIGURE 7.5 Les différentes itérations u_m^1 de la résolution du premier sous-domaine.

La figure 7.6 en haut illustre la réponse temporelle du problème masse-ressort après la résolution sur 200 sous-domaines. La réponse y est correctement reconstruite avec une erreur en norme L2 de 0.55%. En bas se trouve la réponse dans le domaine fréquentiel superposée aux fréquences de résolution $[-k_{\max} \tilde{\delta}f .. k_{\max} \tilde{\delta}f]$. Il apparaît clairement que très peu de fréquences ont été nécessaires à la résolution du problème. Le pas fréquentiel donné par le critère de Shannon pour l'approche point par point vaut $\delta f = 0.00033$ Hz alors que $\tilde{\delta}f = 0.033$ Hz, ce qui correspond à un gain de $\frac{\tilde{\delta}f}{\delta f} = 100$.

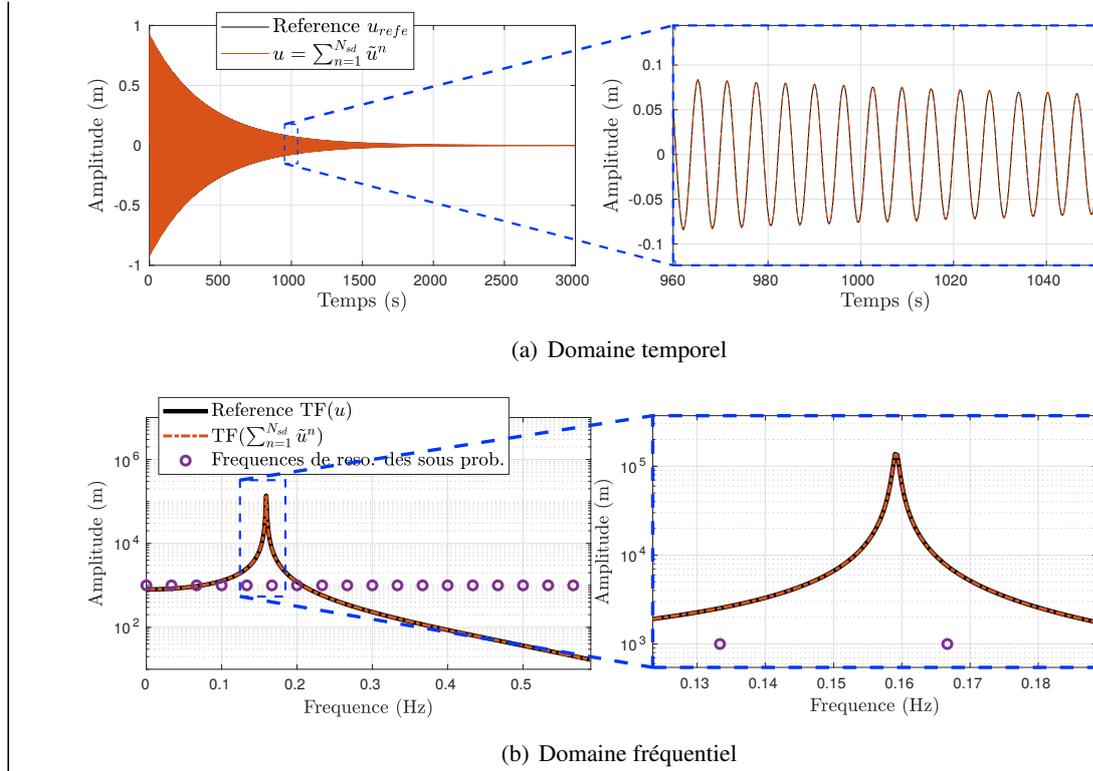


FIGURE 7.6 En haut, la solution de référence u_{refe} et la solution reconstruite $u = \sum_{N=1}^{N_{sd}} \tilde{u}^N$ du problème masse-ressort sur tout l'intervalle temporel I_T (à gauche) et un zoom sur un petit intervalle (à droite). En bas, la solution u_{refe} et la solution $u = \sum_{N=1}^{N_{sd}} \tilde{u}^N$ dans le domaine fréquentiel et les fréquences de résolution des sous-domaines illustrées sur une large bande de fréquences (à gauche) et un zoom autour de la fréquence de résonance (à droite).

7.1.3 Gains et choix des paramètres

Discutons les gains apportés par cette méthode. Plus les durées T_{sd} et T_{ext} sont petites, plus le pas fréquentiel $\tilde{\delta}f$ est grand et donc moins il y a d'opérateurs fréquentiels à inverser. Pour avoir T_{sd} petit il faut un nombre N_{sd} de sous-domaines importants. Et pour avoir T_{ext} petit, le problème g_{ext} doit être très amorti de telle sorte que la durée d'amortissement soit faible, en effet le signal doit être amorti à la fin de l'intervalle $I_{TN_{ext}}$.

En contrepartie, plus g_{ext} est amorti par rapport à g , plus il est différent de g . De nombreuses itérations du système seront nécessaires pour converger. Par ailleurs, plus il y a de sous-domaines et plus il y a de sous-problèmes à résoudre ce qui augmente également les coûts de calcul.

Lorsque le nombre de degrés de liberté spatiaux est important, les coûts d'inversions des opérateurs sont très importants devant ceux des itérations, il s'agira donc de privilégier des problèmes g_{ext} très amorti et un nombre de sous-domaines important. En pratique nous chercherons à avoir $T_{ext} \approx T_{sd}$.

En résumé, les choix de g_{ext} et γ doivent être guidés par ces trois aspects :

- g_{ext} doit présenter un fort amortissement de telle sorte que T_{ext} puisse être relativement petit devant la durée de résolution T .
- Dans la mesure du possible g_{ext} et γ doivent être choisis de telle sorte que le point fixe converge rapidement, il s'agira donc d'être "proche" de g .
- g_{ext} doit être choisi de telle sorte à faciliter la résolution fréquentielle.

Dans le cas des différentes applications traitées :

- Acoustique 2D traité avec la FEM partie 7.1.4 : g_{ext} présentera un amortissement visqueux dans le domaine.
- Acoustique 2D traité avec la VTCR partie 7.2 : g_{ext} présentera un amortissement du type condition de Robin sur le bord, car le résidu associé est adapté à la résolution VTCR.

7.1.4 Application de la méthode de décomposition de domaine temporel à l'acoustique 2D

Définition du problème de référence

Afin d'illustrer le potentiel de la méthode tout en restant sur un problème simple nous appliquons la méthode à un problème éléments finis (EF) d'une cavité acoustique 2D. Le problème EF s'écrit :

$$\mathbb{M}^{EF} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbb{K}^{EF} u = f \quad (7.20)$$

avec \mathbb{M}^{EF} , \mathbb{C}^{EF} et \mathbb{K}^{EF} les matrices de masse, d'amortissement et de raideur EFs, f le vecteur d'effort et u le vecteur des inconnues nodales. Le modèle d'amortissement de \mathbb{C}^{EF} est un modèle d'amortissement de Rayleigh :

$$\mathbb{C}^{EF} = \alpha \mathbb{M}^{EF} + \beta \mathbb{K}^{EF} \quad (7.21)$$

avec α et β deux paramètres réels positifs.

Définition des sous-problèmes associés à la méthode de décomposition de domaine temporel

Nous proposons comme problème amorti dans l'extension, le problème 7.20 auquel a été ajouté un terme d'amortissement $c_{ext} \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial u}{\partial t}$ avec c_{ext} un paramètre positif :

$$\begin{cases} \left(\mathbb{M}^{EF} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{K}^{EF} \right) \sum_{n=1}^N \tilde{u}^n = f & \forall t \in I_{TN} \\ \left(\mathbb{M}^{EF} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1 + c_{ext}) \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{K}^{EF} \right) \tilde{u}^N = 0 & \forall t \in I_{TN \text{ ext}} \end{cases} \quad (7.22)$$

Le problème à résoudre s'écrit également :

$$\left(\mathbb{M}^{EF} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1 + c_{ext}) \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{K}^{EF} \right) \tilde{u}^N = w^N \times \left(f + c_{ext} \mathbb{C}^{EF} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial t} + c_{ext} \mathbb{C}^{EF} \frac{\partial \tilde{u}^N}{\partial t} \right) \forall t \in I_{TN} \cup I_{TN}^{ext} \quad (7.23)$$

Pour limiter l'étalement fréquentiel lors de la résolution de cette équation dans le domaine fréquentiel, nous remplaçons les fonctions de fenêtrage w^N par les fonctions de fenêtrage de Hanning w_{Han}^N comme défini équation 7.18.

Application numérique

Supposons une cavité acoustique de géométrie Ω illustrée figure 7.7. La cavité est remplie d'un fluide de densité $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de célérité $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$. L'amortissement est défini par les coefficients de Rayleigh : $\alpha = 2.10^1 \text{ s}$ et $\beta = 0 \text{ s}^{-1}$.

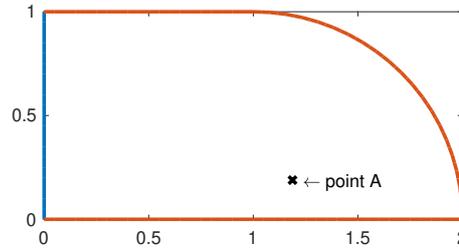


FIGURE 7.7 Géométrie de la cavité acoustique traitée par FEM.

Les conditions de Dirichlet non nulles sont définies par :

$$p(y,t) = (1 - \cos(2\pi y)) * \exp\left(-\left(\frac{t-t_{depa}}{\tau}\right)^2\right) \sin(2\pi(t-t_{depa})f_{moye}) \quad (7.24)$$

y étant la variable de l'abscisse curviligne du bord sur lequel sont imposées des conditions de Dirichlet (figure 7.7). La fonction temporelle $p(1/4,t)$ et sa transformée de Fourier sont illustrées figure 7.8. Nous fixons : $t_{depa} = 3 \text{ ms}$, $\tau = 1.1 \text{ ms}$, $f_{moye} = 1000 \text{ Hz}$. Cette fonction a été choisie pour son contenu fréquentiel concentré autour d'une bande de fréquences centrée sur 1000 Hz. A cette fréquence, la longueur d'onde est de $0.34m$. Le problème est étudié sur un intervalle temporel $I_T = [0, 0.5 \text{ s}]$, soit jusqu'à l'amortissement du signal. Le problème des éléments finis est traité avec des fonctions de forme polynomiales d'ordre 1 et de taille de maille de 5 cm, pour un total de 1045 nœuds.

Appliquons la DDT pour la résolution de ce problème. Les paramètres sont répertoriés dans le tableau 7.2.

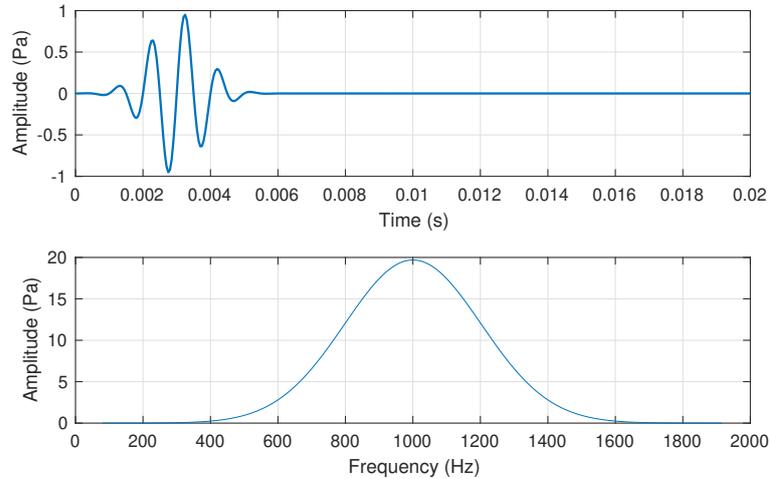


FIGURE 7.8 Source temporelle (en haut) et fréquentielle (en bas).

Nombre de sous-domaines N_{sd}	100
Durée $T_{ds} = \frac{T}{N_{ds}}$	5 ms
Paramètre d'amortissement c_{ext}	100
Durée de l'extension T_{ext}	6 ms
Durée de Hanning ΔT_{Han}	1 ms
Pas fréquentiel $\tilde{\delta}f = \frac{1}{T_{sd} + T_{ext} + 2\Delta T_{Han}}$	76.9 Hz
Itérations max du point fixe b_{max}	∞
Critère de stagnation c_{limi}	10^{-4}
Nombre total d'opérateurs à inverser	27

TABLE 7.2 Données de la méthode DDT pour le problème traité par éléments finis.

Une référence est également construite avec une approche fréquentielle point par point avec un pas fréquentiel de résolution égale à 2 Hz avec le même modèle EFs.

Figure 7.9 est illustrée la réponse de la structure au point A (voir figure 7.7). L'erreur est définie par la norme L2 de la différence sur la norme L2 de la référence, il s'agit d'une erreur très sévère. L'erreur calculée est faible, elle vaut $\varepsilon_{T_r} = 2.86\%$. Le nombre moyen d'itérations de l'équation 7.23 par sous-domaine vaut $\langle b \rangle = 15.0$, ce qui est relativement peu au vu de la qualité de la solution reconstruite.

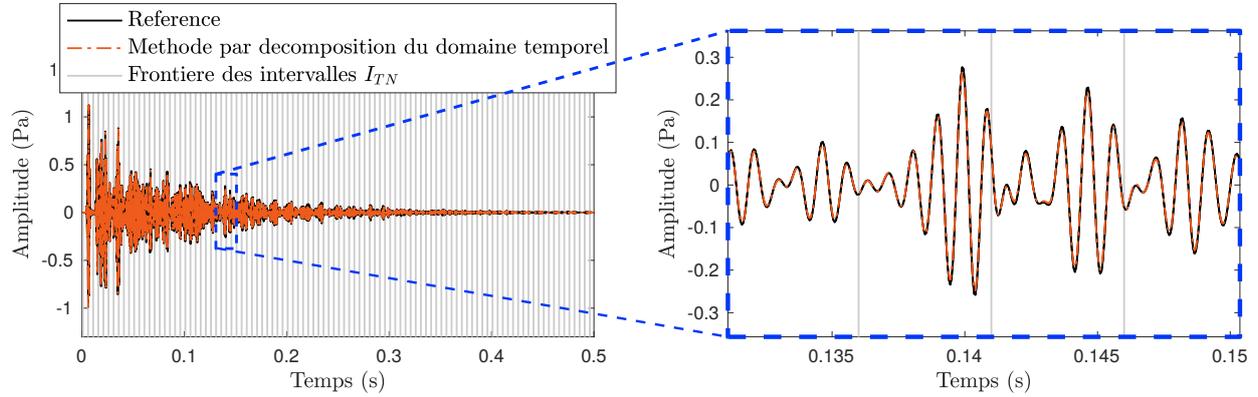


FIGURE 7.9 Réponse temporelle de la cavité acoustique 7.7 au point $\mathbf{x} = (x, y) = (0.7, 0.7)\text{m}$ calculée avec la méthode de décomposition du domaine temporel (en rouge), la réponse de référence (en noir) et les frontières des intervalles I_{TN} (en gris). Sur l'ensemble de l'intervalle temporel I_T (à gauche) et zoom (à droite).

Les différentes solutions \tilde{u}^N sont illustrées figure 7.10. A l'instant $t = 5.5\text{ms}$, le champ est complètement traduit par \tilde{u}^1 dans le premier sous-domaine temporel, à l'instant $t = 6.5\text{ms}$, \tilde{u}^1 est quasiment amortie, l'énergie de la solution complète est traduite par \tilde{u}^1 et \tilde{u}^2 , et à l'instant $t = 13\text{ms}$, la quasi-intégralité du champ est traduite par \tilde{u}^3 .

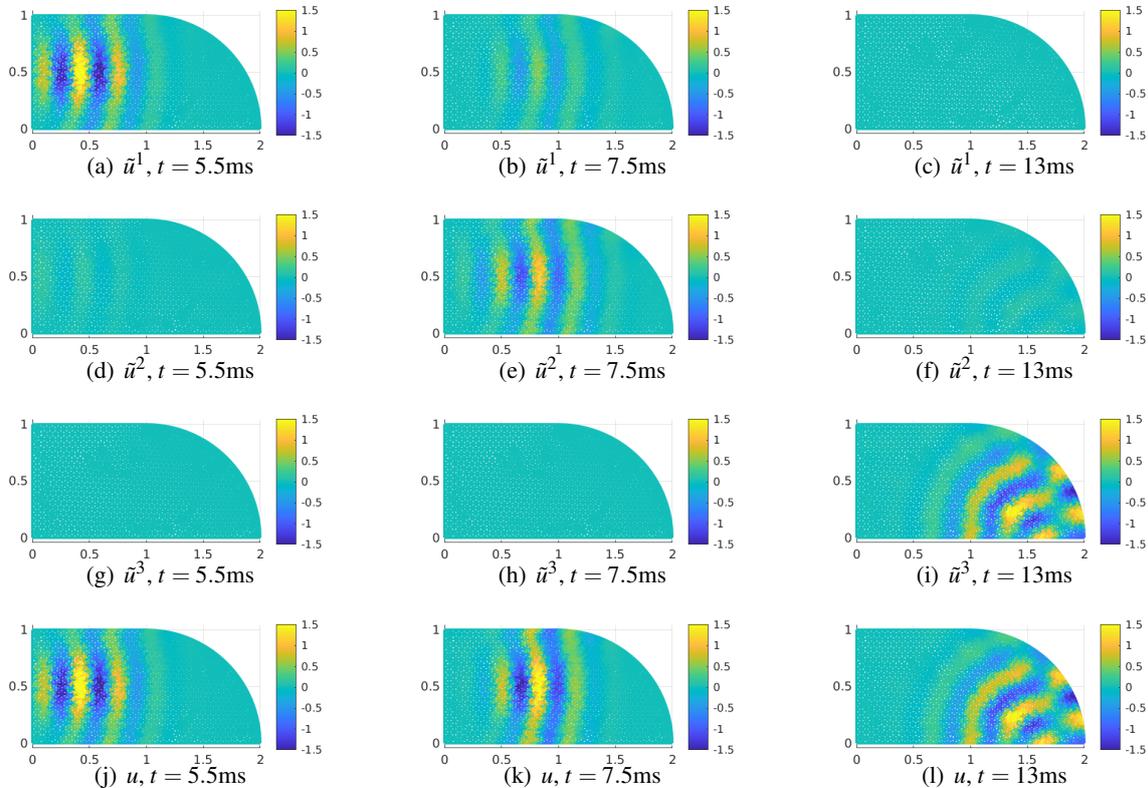


FIGURE 7.10 Les solutions \tilde{u}^1 , \tilde{u}^2 , \tilde{u}^3 et la solution u issue de la somme des \tilde{u}^n , à différents instants.

L'énergie cinétique de la cavité en fonction de la fréquence est illustrée figure 7.11. La réponse fréquentielle a été reconstruite à partir d'une transformée de Fourier de la réponse temporelle. Les réponses fréquentielles issues de la méthode de décomposition du domaine temporel concordent avec la référence. Remarquons le faible nombre de points fréquentiels auquel il a été nécessaire de construire les opérateurs fréquentiels. Au total, avec la méthode de décomposition du domaine temporel 27 opérateurs de la taille du système EFs ont été inversés contre 1000 pour l'approche fréquentielle classique ce qui représente un gain d'un facteur 36 en nombre d'inversions.

Remarquons par ailleurs le faible nombre de points fréquentiels de résolution par rapport au nombre de modes propres de vibrations sollicités (un ratio en moyenne de 1 pour 7 sur cet exemple). Ce dernier résultat illustre que, contrairement aux méthodes de réduction de modèles étudiées dans le chapitre 5, les gains de la méthode par décomposition de domaine sont indépendants de la densité modale ce qui lui procure un avantage en moyennes fréquences.

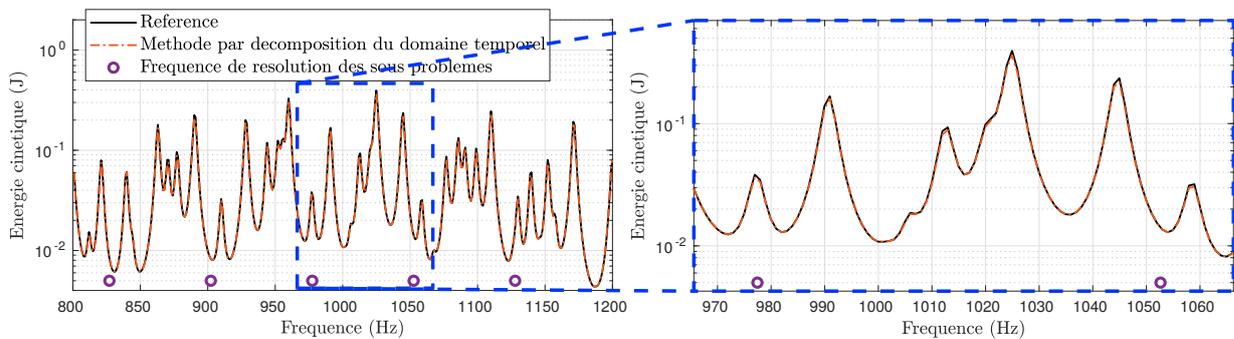


FIGURE 7.11 Réponse fréquentielle calculée avec la DDT (en rouge), réponse de référence calculée fréquence par fréquence dans le domaine fréquentiel (en noir) et points fréquentiels de construction et d'inversion des opérateurs nécessaires à la résolution par la DDT. Sur l'intervalle fréquentiel [800, 1200] Hz (à gauche) et zoom (à droite).

7.1.5 Étude des paramètres de la méthode sur la précision

Dans cette partie, nous étudions l'influence de quelques paramètres sur la précision. Dans un premier temps étudions l'influence de T_{ext} et de c_{lim} sur la précision sans changer g_{ext} et le nombre de sous-domaines N_{sd} . T_{ext} est la durée de l'intervalle I_{ext} , soit la durée à partir de laquelle nous supposons les réponses \hat{u}^N amorties. Plus T_{ext} est grand, plus cette hypothèse est vraie. Parallèlement, plus il est grand, plus le pas fréquentiel de la méthode est petit et moins les gains sont intéressants. Nous allons également étudier l'influence du critère d'arrêt c_{limit} . Les résultats sont illustrés tableau 7.3. Partons du cas étudié dans la partie précédente (en gras) $c_{lim} = 10^{-4}$ et $T_{ext} = 6$ ms. Comme attendu, augmenter T_{ext} et diminuer c_{lim} diminue l'erreur, elle vaut au minimum 1.29%. Néanmoins elle ne diminue plus en deçà de $c_{lim} = 10^{-4}$ et au-delà de $T_{ext} = 9$ ms, l'erreur se trouve minorée par 1.20%. D'autres paramètres doivent être ajustés pour diminuer l'erreur.

	$c_{lim} = 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$T_{ext} = 6\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 76.92\text{ Hz}$	19.97%, $\langle b \rangle = 9.97$	3.88%, $\langle b \rangle = 12.97$	2.86% , $\langle b \rangle = \mathbf{15,01}$	2.79%, $\langle b \rangle = 18.16$
$T_{ext} = 9\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 62.5\text{ Hz}$	18.61%, $\langle b \rangle = 9.97$	2.04%, $\langle b \rangle = 12.97$	1.24%, $\langle b \rangle = 15.01$	1.20%, $\langle b \rangle = 17.9$
$T_{ext} = 12\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 52.6\text{ Hz}$	18.66%, $\langle b \rangle = 9.97$	2.1%, $\langle b \rangle = 12.97$	1.33%, $\langle b \rangle = 15.12$	1.29%, $\langle b \rangle = 18.26$

TABLE 7.3 Erreur et nombre moyen d'itérations par sous-problème de la résolution par point fixe pour $\Delta T_{Han} = 1\text{ms}$, (en gras les résultats du problème traité partie précédente).

ΔT_{Han} contrôle l'étalement dans le domaine fréquentiel de la source de l'équation 7.23. Plus il est grand, plus la réponse fréquentielle s'étale. Nous proposons d'étudier l'erreur et le nombre moyen d'itérations pour les mêmes valeurs de T_{ext} et c_{lim} avec $\Delta T_{Han} = 2\text{ms}$. Les résolutions sont répertoriées dans le tableau 7.4. Il apparaît que ΔT_{Han} est un paramètre important lorsqu'il s'agit d'atteindre des erreurs très faibles. A $T_{ext} = 9\text{ms}$ et $c_{lim} = 10^{-4}$ l'erreur a diminué d'un facteur 5 par rapport au cas où $\Delta T_{Han} = 1\text{ms}$ avec un nombre d'itérations moyen $\langle b \rangle$ similaire.

Il s'agit donc, pour obtenir une erreur faible, d'agir sur l'ensemble des trois paramètres T_{ext} , c_{lim} et ΔT_{Han} .

	$c_{limi} = 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$T_{dp} = 6\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 76.92\text{ Hz}$	19.71%, $\langle b \rangle = 9.95$	2.85%, $\langle b \rangle = 12.92$	1.45%, $\langle b \rangle = 14.97$	1.31%, $\langle b \rangle = 18.10$
$T_{dp} = 9\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 62.5\text{ Hz}$	18.90%, $\langle b \rangle = 9.95$	1.69%, $\langle b \rangle = 12.92$	0.243%, $\langle b \rangle = 14.93$	0.104%, $\langle b \rangle = 16.97$
$T_{dp} = 12\text{ms}$ $\tilde{\delta}f = 52.6\text{ Hz}$	18.94%, $\langle b \rangle = 9.95$	1,744%, $\langle b \rangle = 12.92$	0.288%, $\langle b \rangle = 14.93$	0.124%, $\langle b \rangle = 16.96$

TABLE 7.4 Erreur ε et nombre moyen d'itérations par sous-problème de la résolution par point fixe $\langle b \rangle$ pour $\Delta T_{Han} = 2\text{ms}$.

7.1.6 Bilan

Dans cette partie, nous avons proposé une méthode de décomposition de domaine temporel (DDT) adaptée à la résolution fréquentielle. Les sous-problèmes de chaque sous-domaine sont construits de telle sorte que la résolution fréquentielle puisse être effectuée avec un pas fréquentiel grossier, d'autant plus grossier que la durée du sous-domaine est courte. Les opérateurs fréquentiels pouvant être réutilisés d'un sous-domaine à l'autre, des gains apparaissent par rapport à l'approche fréquence par fréquence classique. La capacité de la méthode à reconstruire fidèlement la réponse avec un pas fréquentiel grossier (environ 100 fois plus grand que celui donné par le critère de Shannon) sur un exemple d'acoustique 2D traité par les éléments finis.

Un point important est que le pas fréquentiel grossier de la méthode est indépendant de la densité modale du problème. Ce qui était une limite des approches de réduction de modèle proposées dans le chapitre 5 n'en est plus une ici. La méthode proposée est donc particulièrement adaptée à la résolution dans la gamme des moyennes fréquences.

7.2 Application de la méthode de décomposition du domaine temporel pour la résolution moyennes fréquences avec la VTCR

Dans cette partie la méthode de décomposition du domaine temporel est couplée à la VTCR : la résolution fréquentielle est effectuée avec la VTCR. Il s'agit d'étudier et de maximiser les gains qu'apporte ce couplage dans la gamme des moyennes fréquences.

Le problème traité est le problème d'acoustique de référence défini dans le chapitre 1 équation 1.2. Nous traitons le problème sur un intervalle de temps long : jusqu'à l'amortissement de la réponse.

Décomposition temporelle et définition des sous-problèmes

L'intervalle temporel I_T est décomposé en N_{sd} intervalles temporels de durée T_{sd} notés $I_{T_n} = [(n-1)T_{sd}, nT_{sd}]$. Définissons les extensions $I_{T_n ext} =]nT_{sd}, nT_{sd} + T_{ext}]$ d'une durée T_{ext} . Chaque sous-domaine temporel n est défini sur l'intervalle temporel $I_{T_n} \cup I_{T_n ext} = [(n-1)T_{sd}, nT_{sd} + T_{ext}]$.

Les problèmes associés à chaque sous-domaine sont définis par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_E^N + \mu \Delta \frac{\partial p_E^N}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_E^N}{\partial t^2} = s \quad \text{dans } \Omega_E \quad (1) \\ \frac{\partial p_E^N}{\partial t} + \frac{z}{\rho} \frac{\partial p_E^N}{\partial \mathbf{n}_E} = \frac{\partial h_d}{\partial t} \quad \text{dans } \partial_h \Omega_E \quad (2) \\ p_E^N = p_d \quad \text{dans } \partial_p \Omega_E \quad (3) \\ -\frac{\partial p_E^N}{\partial \mathbf{n}_E} = \rho \frac{\partial v_d}{\partial t} \quad \text{dans } \partial_v \Omega_E \quad (4) \\ p_E^N = p_{E'}^N \quad \text{dans } \Gamma_{EE'} \quad (5) \\ \frac{\partial p_E^N}{\partial \mathbf{n}_E} + \frac{\partial p_{E'}^N}{\partial \mathbf{n}_{E'}} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{EE'} \quad (6) \end{array} \right. \quad \forall t \in I_{T_n} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_E^N + \mu \Delta \frac{\partial p_E^N}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_E^N}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_E \quad (1) \\ \frac{\partial p_E^N}{\partial t} + c \frac{\partial p_E^N}{\partial \mathbf{n}_E} = 0 \quad \text{dans } \partial \Omega_E \quad (2) \\ \frac{\partial p_E^N}{\partial t} + c \frac{\partial p_E^N}{\partial \mathbf{n}_E} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{EE'} \quad (3) \end{array} \right. \quad \forall t \in I_{T_n ext} \end{array} \right. \quad (7.25)$$

Le champ p^N est défini continu et à dérivée continue en $t = NT_{ds}$. Dans les extensions $I_{TN \text{ ext}}$, l'amortissement est introduit sur les bords des domaines VTTCR en proposant des conditions de Robin absorbantes dont l'impédance est égale à l'impédance du milieu. Ce choix se justifie car :

- L'amortissement est concentré sur le bord et l'équation intérieure est inchangée. Cela implique que les corrections lors de la résolution itérative de l'équation 7.15 dans le domaine fréquentiel seront concentrées sur le bord, ce qui est particulièrement adapté à la VTTCR.
- Ces conditions de Robin sont une approximation des conditions de bords parfaitement absorbantes, les ondes planes arrivant orthogonalement à la paroi sont parfaitement absorbées. Il en résulte que la durée T_{ext} sera faible et sera de l'ordre de la durée d'un aller de l'onde dans un sous-domaine : $T_{\text{ext}} \approx \frac{\max(R_E)}{c}$ avec R_E la taille du sous-domaine Ω_E .
- Les conditions de continuité entre sous-domaines ne sont pas conservées dans l'intervalle $I_{TN \text{ ext}}$. La résolution itérative consistera à résoudre N_Ω (nombre de sous-domaines VTTCR) problèmes indépendants de petite taille. Autrement dit, la matrice à inverser sera diagonale par bloc.

7.2.1 Cas particulier à un seul sous-problème temporel

Mise en place du problème

Dans un premier temps traitons un cas simplifié : un cas dégénéré à un seul sous-problème temporel, soit $I_{1T} = I_T$. Il s'agit d'un cas de mise en place de la méthode. L'équation 7.25 s'écrit :

$$g_{\text{ext}} \cdot \tilde{u}_{m+1}^1 = w^N \times (\gamma s + (g_{\text{ext}} - \gamma g) \tilde{u}_m^1) \quad \forall t \in I_{1T} \cup I_{1T \text{ ext}} \quad (7.26)$$

Comme la réponse est étudiée jusqu'à l'amortissement du signal, la réponse est nulle $\forall t > T$, donc nous pouvons supposer $(s + (g_{\text{ext}} - g) \tilde{u}_m^1) = 0 \quad \forall t \in I_{T1 \text{ ext}}$ et retirer le terme de fenêtrage w^N :

$$g_{\text{ext}} \cdot \tilde{u}_{m+1}^1 = \gamma s + (g_{\text{ext}} - \gamma g) \tilde{u}_m^1 \quad \forall t \in I_{1T} \cup I_{1T \text{ ext}} \quad (7.27)$$

Le choix de γ doit être choisi judicieusement de telle sorte que le point fixe converge. Pour exprimer les choix de γ optés ici, notons par g_k et $g_{\text{ext } k'}$ les opérateurs et s_k les sources associés à l'équation d'indice k et k' du système 7.25. Par exemple : $g_2 p_E = \frac{\partial p_E}{\partial t} + \frac{z}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E}$ et $s_2 = \frac{\partial h_d}{\partial t}$. Les γ sont définis tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_{1 \text{ ext}} \cdot \tilde{p}_{m+1}^1 = s_1 + (g_{1 \text{ ext}} - g_1) \tilde{p}_m^1 & \text{dans } \Omega_E & \text{soit } \gamma = 1 \\ g_{2 \text{ ext}} \cdot \tilde{p}_{m+1}^1 = s_2 + (g_{2 \text{ ext}} - g_2) \tilde{p}_m^1 & \text{dans } \partial_h \Omega_E & \text{soit } \gamma = 1 \\ g_{2 \text{ ext}} \cdot \tilde{p}_{m+1}^1 = 2 \frac{\partial}{\partial t} s_3 + (g_{2 \text{ ext}} - 2 \frac{\partial}{\partial t} g_3) \tilde{p}_m^1 & \text{dans } \partial_p \Omega_E & \text{soit } \gamma = 2 \frac{\partial}{\partial t} \\ g_{2 \text{ ext}} \cdot \tilde{p}_{m+1}^1 = 2cs_4 + (g_{2 \text{ ext}} - 2cg_4) \tilde{p}_m^1 & \text{dans } \partial_v \Omega_E & \text{soit } \gamma = 2c \\ g_{3 \text{ ext}} \cdot \tilde{p}_{m+1}^1 = -\frac{\partial}{\partial t} s_5 - cs_6 - (g_{3 \text{ ext}} + \frac{\partial}{\partial t} g_5 + cg_6) \tilde{p}_m^1 & \text{dans } \partial \Gamma_{EE'} & \text{soit } \gamma = -\frac{\partial}{\partial t} \\ & & \text{et } \gamma = -c \end{array} \right. \quad (7.28)$$

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\Delta + \mu \Delta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^1 = s & \text{dans } \Omega_E \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^1 = \left(c - \frac{z}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \tilde{p}_{E\ m}^1 + \frac{\partial h_d}{\partial t} & \text{dans } \partial_h \Omega_E \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^1 = - \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m}^1 + 2 \frac{\partial}{\partial t} (p_d) & \text{dans } \partial_p \Omega_E \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m}^1 - 2c\rho \frac{\partial v_d}{\partial t} & \text{dans } \partial_v \Omega_E \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \tilde{p}_{E'\ m}^1 & \text{dans } \Gamma_{EE'} \end{array} \right. \quad (7.29)$$

Ce choix des paramètres γ se justifie par le fait que, le système 7.29 s'identifie comme une méthode de décomposition de domaine spatial du type Shwartz sans recouvrement proposée par Desprès dans [10]. La convergence de ce système y est prouvée. Il s'agit d'une méthode de décomposition de domaine où les conditions de transmission des ondes entre sous-domaines sont approchées par des conditions de Robin. Ces méthodes font l'objet d'une très large littérature que nous ne traitons pas ici. Nous soulèverons simplement que ces conditions de transmission ne sont pas optimales et que de nombreuses autres méthodes ont été proposées pour les améliorer :

- Des conditions de transmission optimisées basées sur des opérateurs de transmission d'ordre deux sont proposées dans [60, 128].
- Des approximations par des ordres supérieurs, les HABCs (high-order absorbing boundary conditions), ont plus récemment été proposées dans [17, 16, 115].
- Les conditions de transmission sont traitées par des PMLs (Perfectly Matched Layers) [11] dans [153, 142].

Nous allons résoudre ce problème identifié comme un problème de décomposition de domaine spatial avec la VTCR dans le domaine fréquentiel. Il s'agira de vérifier la convergence de ce problème. Passons le problème 7.29 dans le domaine fréquentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + k^2) \tilde{p}_{\omega E\ m+1}^1 = s_\omega & \text{dans } \Omega_E \\ \left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m+1}^1 = \left(c - \frac{z}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \tilde{p}_{\omega E\ m}^1 + i\omega h_{\omega d} & \text{dans } \partial_h \Omega_E \\ \left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m+1}^1 = - \left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m}^1 + 2i\omega p_{\omega d} & \text{dans } \partial_p \Omega_E \\ \left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m+1}^1 = \left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m}^1 - 2c\rho i\omega v_{\omega d} & \text{dans } \partial_v \Omega_E \\ \left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{\omega E\ m+1}^1 = \left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \tilde{p}_{\omega E'\ m}^1 & \text{dans } \Gamma_{EE'} \end{array} \right. \quad (7.30)$$

Après avoir introduit une discrétisation VTCT et appliquée la formulation variationnelle le problème s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathbb{K}^+ A_{m+1}^1 = \mathbb{K}^- A_m^1 + L \quad (7.31)$$

avec A_m^1 les vecteurs inconnus des amplitudes des fonctions de forme VTCT associés aux champs $\{\dots, \tilde{p}_m^1, \dots\}$, \mathbb{K}^+ et \mathbb{K}^- les matrices VTCT définies par :

$$\mathbb{K}^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_1^+ & 0 & \dots \\ 0 & \mathbb{K}_2^+ & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & \mathbb{K}_{N_\Omega}^+ \end{pmatrix} \quad \mathbb{K}^- = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11}^- & \mathbb{K}_{12}^- & \dots \\ \mathbb{K}_{21}^- & \mathbb{K}_{22}^- & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & \mathbb{K}_{N_\Omega N_\Omega}^- \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

avec :

$$\mathbb{K}_{E ln}^+ = b^+(\phi_{nE}, \phi_{lE}), \quad \mathbb{K}_{EE' ln}^- = b^-(\phi_{nE'}, \phi_{lE}) \quad \text{et } L_{E l} = l(\phi_{lE}) \quad (7.33)$$

avec ϕ_{nE} la $n^{\text{ème}}$ fonction de forme VTCT du sous-domaine Ω_E et :

$$\begin{aligned} b^+(q, p) &= \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_E} \left(p_E - \frac{ic}{\omega} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ b^-(q, p) &= \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_h \Omega_E} \left(-\frac{i(c - \frac{Z}{\rho})}{\omega} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &\quad + \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_p \Omega_E} - \left(p_E + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &\quad + \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_v \Omega_E} \left(p_E + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &\quad + \sum_{E, E' \neq E} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{EE'}} \left(p_{E'} + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial p_{E'}}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ l(q) &= \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_h \Omega_E} h_d \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega + \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_p \Omega_E} 2p_d \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \\ &\quad + \sum_{E=1}^{N_\Omega} \frac{1}{2} \int_{\partial_v \Omega_E} 2\rho c v_d \left(q_E^* + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial q_E^*}{\partial \mathbf{n}_E} \right) d\partial\Omega \end{aligned} \quad (7.34)$$

La matrice \mathbb{K}^+ à inverser pour résoudre le système itératif est diagonale par bloc, cela réduit amplement les coûts d'inversion lors de la résolution itérative de l'équation 7.31. Elle est hermitienne positive, ce qui n'est pas le cas des matrices VTCT en général. Grâce à cette propriété les algorithmes d'inversion sont moins coûteux et une stratégie simple peut être proposée pour conditionner la matrice \mathbb{K}^+ : nous pouvons lui ajouter la matrice identité $\alpha \mathbb{I}$ avec α un coefficient proche du zéro numérique.

Illustration et validation numérique

Il s'agit de valider numériquement la convergence de la DDT avec le jeu de paramètres γ proposé ici, couplée à la VTTCR, à un seul sous-domaine temporel. Dans ce cas dégénéré, le problème itératif peut être résolu dans le domaine fréquentiel jusqu'à convergence, sans retour dans le domaine temporel à chaque itération.

Considérons une cavité acoustique illustrée figure 7.12 de célérité $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, de densité $\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}$ et d'amortissement $\eta = 10^{-3}$. Des conditions de Dirichlet sont imposées nulles partout sauf sur la paroi de gauche de la première cavité où la pression vaut : $p_d = 1 - \cos(4\pi y)$. La cavité est sollicitée à 2500 Hz.

Le domaine est décomposé en 4 sous-domaines VTTCR (figure 7.12) qui sont également les 4 sous-domaines de la méthode de décomposition de domaine spatial.

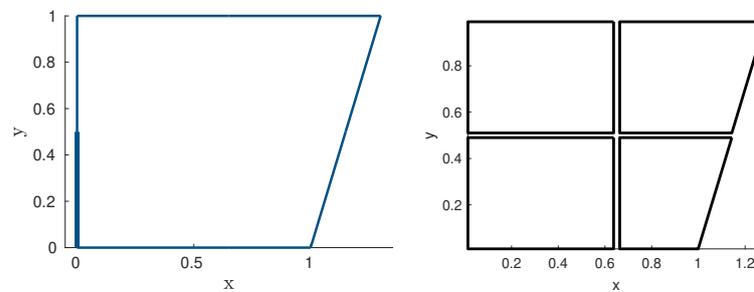


FIGURE 7.12 Géométrie du problème traité (à gauche) et décomposition spatiale en sous-domaines VTTCR (à droite).

Nous appliquons la méthode avec une initialisation A_0 nulle. La matrice \mathbb{K}^+ à inverser est composée de 4 blocs diagonaux ici. L'erreur ε_ω est définie équation 3.22, elle est calculée à partir d'une référence construite avec la VTTCR classique. La convergence est illustrée figure 7.13. On observe une convergence linéaire relativement lente jusqu'à atteindre une erreur d'environ $\varepsilon_\omega = 0.1\%$ puis l'erreur converge vers $\varepsilon_\omega = 3,3 \cdot 10^{-2}\%$. Elle est particulièrement faible ce qui valide la mise en place de la méthode. Ce type de comportement est également retrouvé dans la littérature [10]. Le champ de référence, le champ à convergence et la différence entre les deux champs sont illustrés figure 7.14 (attention aux facteurs d'échelles).

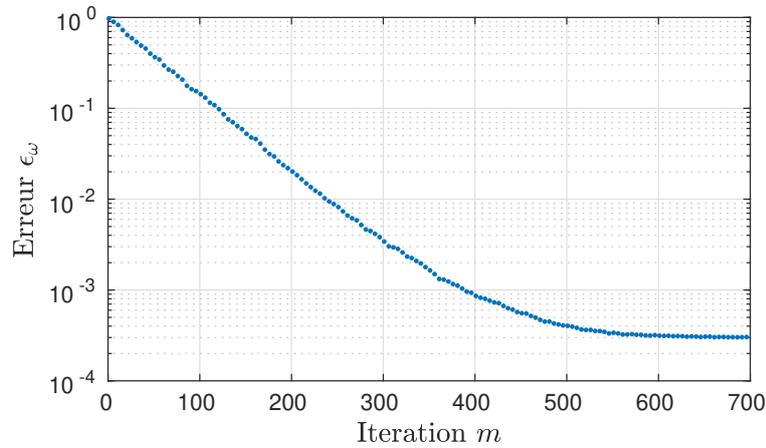


FIGURE 7.13 Convergence de la méthode de décomposition de domaine spatial du problème illustré figure 7.12, résolution avec la VTCR.

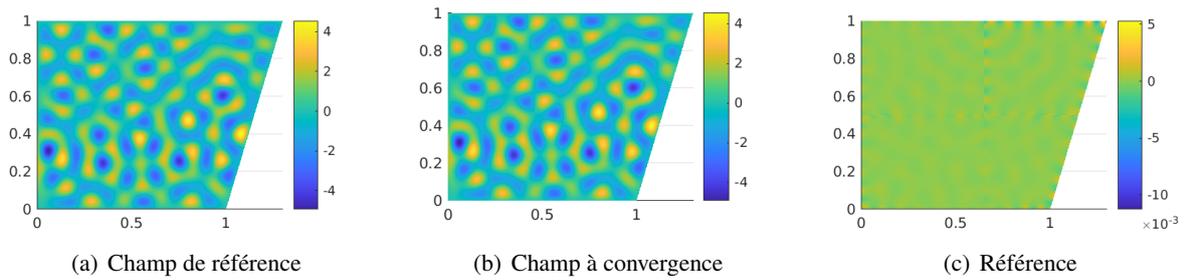


FIGURE 7.14 La partie réelle du champ fréquentiel p de référence calculée avec la VTCR (à gauche), du champ issu de la décomposition de domaine à 700 itérations (au milieu) et de la différence entre les deux champs (à droite). Attention à l'échelle des couleurs qui est propre à chaque figure.

Afin d'illustrer la méthode, les champs à l'itération 1, 2 et 3 sont illustrés sur la figure 7.15. On voit clairement le champ se propager de sous-domaine en sous-domaine.

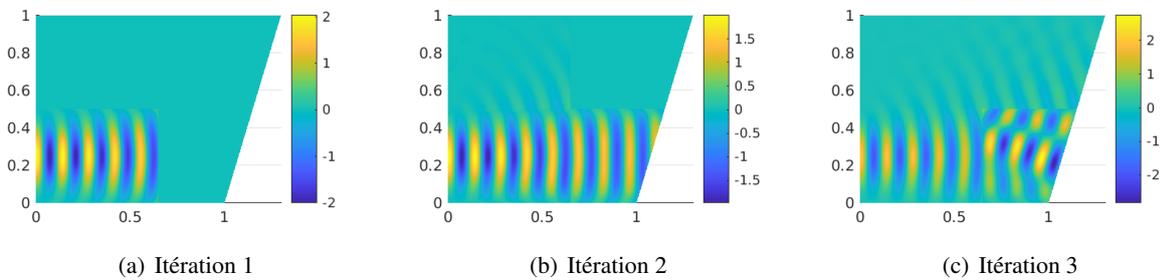


FIGURE 7.15 Champ fréquentiel à différentes itérations du problème de décomposition de domaine spatial (itérations 1, 2 et 3).

Nous calculons la convergence pour différents amortissements et différentes fréquences, illustrée figure 7.16. Nous observons une première phase avec une convergence linéaire pour l'ensemble des cas avant de converger vers une erreur faible inférieure à 0.1%, soit grandement en dessous des erreurs visées dans ces travaux. Au vu de ces résultats nous pouvons en déduire un ordre de grandeur du taux de convergence pendant la phase linéaire de la convergence :

$$\frac{\epsilon_{\omega}(p_{m+1})}{\epsilon_{\omega}(p_m)} \approx 1 - k\eta < R_E > \quad (7.35)$$

avec $< R_E >$ la dimension caractéristique moyenne des sous-domaines VTCR et ω exprimée en radians pas seconde. La vitesse de convergence est d'autant plus importante que l'amortissement structural $k\eta$ est grand.

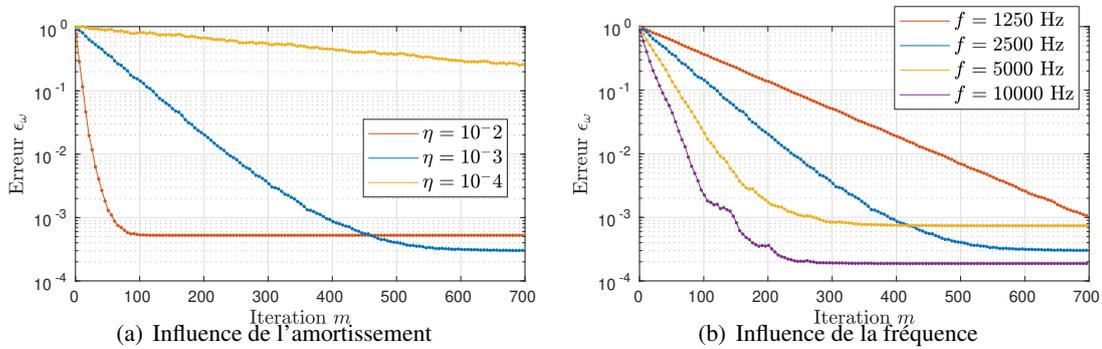


FIGURE 7.16 Influence de l'amortissement (à $f = 2500$ Hz) et de la fréquence (à $\eta = 10^{-3}$) sur le taux de convergence de la méthode de décomposition du domaine spatial. A titre indicatif, l'erreur du cas $\eta = 10^{-4}$ et $f = 2500$ Hz à 5000 itérations vaut $\epsilon_{\omega} = 0.034\%$.

7.2.2 Cas général à N_{sd} sous-domaines temporels

Nous traitons à présent le cas général à N_{sd} sous-domaines temporels.

Mise en place du problème

Reprenons le cas général à N_{sd} sous-domaines temporels dont l'équation est définie équation 7.25. Le problème s'écrit :

$$g_{ext} \cdot \tilde{p}_{m+1}^N = w^N \times \left(\gamma s + (g_{ext} - \gamma g) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}^n + (g_{ext} - \gamma g) \tilde{p}_m^N \right) \quad (7.36)$$

Pour le choix de γ nous conservons les paramètres définis au système d'équations 7.28. Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(\Delta + \mu \Delta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^N = w^N \times s \quad \text{dans } \Omega_E \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^N = w^N \times \left(\left(c - \frac{z}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \tilde{p}_{E\ m}^N + \left(c - \frac{z}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_E^n + \frac{\partial h_d}{\partial t} \right) \quad \text{dans } \partial_h \Omega_E \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^N = w^N \times \left(- \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m}^N - \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_E^n + 2 \frac{\partial p_d}{\partial t} \right) \quad \text{dans } \partial_p \Omega_E \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^N = w^N \times \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m}^N + \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_E^n - 2c\rho \frac{\partial v_d}{\partial t} \right) \quad \text{dans } \partial_v \Omega_E \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \tilde{p}_{E\ m+1}^N = w^N \times \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \tilde{p}_{E'\ m}^N + \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{E'}^n \right) \quad \text{dans } \Gamma_{EE'}
\end{array} \right. \quad (7.37)$$

Dans le domaine fréquentiel le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
(\Delta + k^2) p_{\omega E\ m+1}^N = \text{TF} \left(w^N \times \text{TF}^{-1} (s_\omega) \right) \quad \text{dans } \Omega_E \\
\left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) p_{\omega E\ m+1}^N = \text{TF} \left(w^N \times \text{TF}^{-1} \left(\left(c - \frac{Z}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \left(p_{\omega E\ m}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{\omega E}^n \right) + i\omega h_{\omega d} \right) \right) \quad \text{dans } \partial_h \Omega_E \\
\left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) p_{\omega E\ m+1}^N = \text{TF} \left(w^N \times \text{TF}^{-1} \left(- \left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(p_{\omega E\ m}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{\omega E}^n \right) + 2i\omega p_{\omega d} \right) \right) \quad \text{dans } \partial_p \Omega_E \\
\left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) p_{\omega E\ m+1}^N = \text{TF} \left(w^N \times \text{TF}^{-1} \left(\left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) \left(p_{\omega E\ m}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{\omega E}^n \right) + -2c\rho i\omega v_{\omega d} \right) \right) \quad \text{dans } \partial_v \Omega_E \\
\left(i\omega + c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_E} \right) p_{\omega E\ m+1}^N = \text{TF} \left(w^N \times \text{TF}^{-1} \left(\left(i\omega - c \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{E'}} \right) \left(p_{\omega E'\ m}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{\omega E'}^n \right) \right) \right) \quad \text{dans } \Gamma_{EE'}
\end{array} \right. \quad (7.38)$$

Il s'agit de résoudre ce problème avec la VTCR dans le domaine fréquentiel. La résolution consiste à chaque itération m de chaque sous-domaine temporel N à :

- Etape 1 : construire les données fréquentielles sur chaque bord $\partial\Omega_E$ des termes à droite des équations à chaque fréquence grossière du problème.
- Etape 2 : appliquer une transformée de Fourier inverse à ces quantités pour passer dans le domaine temporel.
- Etape 3 : appliquer la fonction de fenêtrage w^N .
- Etape 4 : appliquer une transformée de Fourier pour revenir au domaine fréquentiel.
- Etape 5 : résoudre le problème dans le domaine fréquentiel avec la VTCR à chaque fréquence du problème.

Détaillons les calculs numériques de chaque étape :

- L'étape 1 consiste à construire le champ sur le bord dans le domaine fréquentiel à partir d'un portrait VTCR. Nous optons pour un champ sur le bord décrit par une série de Fourier, il s'agira

de construire offline un opérateur matriciel \mathbb{H} à chaque fréquence grossière du problème, qui au portrait associe les coefficients de Fourier du champ sur le bord :

$$P = \mathbb{H}A \quad (7.39)$$

Avec P les amplitudes des coefficients de Fourier du champ et A le portrait. Les fonctions de forme étant des ondes planes (ou des combinaisons linéaires d'ondes planes), les \mathbb{H} s'expriment analytiquement sur les bords droits, comme les matrices VTCR.

- Les étapes 2 et 4 consistent à appliquer une transformée de Fourier inverse et une transformée de Fourier aux amplitudes des coefficients de Fourier du champ sur le bord. Elles peuvent être faites avec l'algorithme Fast Fourier Transform.
- L'étape 3 consiste à appliquer un fenêtrage, soit multiplier les signaux temporels par la fonction de fenêtrage.
- L'étape 5 consiste à résoudre un problème VTCR. Les opérateurs nécessaires à cette résolution sont les opérateurs \mathbb{K}^+ définis équation 7.32 et les opérateurs associés au second membre. Pour construire efficacement le second membre, il s'agit de construire un opérateur matriciel \mathbb{L} qui, aux amplitudes des coefficients de Fourier fenêtrés, associe le second membre VTCR. C'est un opérateur linéaire défini à chaque fréquence tel que :

$$L_P = \mathbb{L}P \quad (7.40)$$

Avec L_P le second membre VTCR associé au chargement sur le bord et P les amplitudes des coefficients de Fourier du chargement sur le bord.

Le problème 7.38 à résoudre s'écrit finalement :

$$\mathbb{K}^+ A_{m+1}^N = \mathbb{L} \text{TF} (w^N \times \text{TF}^{-1}(\mathbb{H}A_m^N + H)) \quad (7.41)$$

avec A_m^N le portrait associé au champ p_m^N et H le vecteur des coefficients de Fourier des termes sources.

Remarque : Nous avons la propriété suivante :

$$\mathbb{K}^- = \mathbb{L}\mathbb{H} \quad (7.42)$$

avec \mathbb{K}^- définie équation 7.32.

Remarque : Le nombre de termes N_E Termes Fourier de la série de Fourier à prendre en compte pour décrire le champ sur le bord dépend de la fréquence du problème. Le dernier terme de la série doit avoir une longueur d'onde inférieure à la longueur d'onde du problème, ce qui revient à prendre :

$$N_{E \text{ Termes Fourier}} \geq \frac{2\text{Périmètre}(\Omega_E)}{\lambda} \quad (7.43)$$

Nous retrouvons un nombre proche de la dimension optimale du nombre de fonctions de forme VTCR déterminé dans le chapitre 4 équation 4.59. Il y aura donc quasiment autant de fonctions de forme VTCR que de coefficients de Fourier du champ sur le bord dans chaque sous-domaine Ω_E .

7.2.3 Une première application numérique

Nous reprenons le problème temporel défini dans le chapitre 6 dans la partie 6.1.2 : une cavité acoustique en trapèze sollicitée par une source en forme d'ondelette sur la paroi de gauche. Pour rappel, la source est définie par :

$$p_{dt}(t, y) = \frac{1 - \cos(2\pi y)}{2} e^{-\frac{(t-t_{\text{dep}})^2}{\tau^2}} \sin(2\pi f_{\text{cen}}(t - t_{\text{dep}})) \quad (7.44)$$

où y est l'abscisse curviligne du bord gauche. $t_{\text{dep}} = 2.2$ ms, $\tau = 0.59$ ms et $f_{\text{cen}} = 2500$ Hz (le signal d'entrée $p_{dt}(t, y = 1/2)$ est illustré figure 6.2). Le problème est étudié sur $I_T = [0, 0.5]$ s.

Le problème est résolu avec 4 sous-domaines VTCR (illustrés figure 7.12), il en résulte que la durée d'amortissement T_{ext} vaut environ $2\frac{R_E}{c} \approx 4$ ms. Nous choisissons des sous-domaines temporels de durée T_{ds} du même ordre de grandeur (3ms) ce qui aboutit à une décomposition en $N_{sd} = 167$ sous-domaines temporels. Les paramètres sont répertoriés dans le tableau 7.5 :

Nombre de sous-domaines N_{sd}	167
Durée $T_{ds} = \frac{T}{N_{ds}}$	3 ms
Durée de l'extension T_{ext}	4 ms
Durée de Hanning ΔT_{Han}	1.5 ms
Pas fréquentiel de résolution d'un sous-domaine $\frac{1}{T_{sd} + T_{\text{ext}} + 2\Delta T_{\text{Han}}}$	100 Hz
Itérations du point fixe b_{max}	∞
Critère de stagnation c_{limi}	0.01
Nombre total d'opérateurs à inverser	53

TABLE 7.5 Données de la DDT appliquée à la VTCR.

Une référence est par ailleurs calculée avec une approche fréquentielle fréquence par fréquence avec un pas fréquentiel vérifiant le critère de Shannon, soit $\delta f = 2$ Hz. L'erreur en énergie avec la référence dans le domaine temporel vaut $\varepsilon_{I_T} = 1.55\%$, ce qui représente une erreur très faible au vu de la sévérité de la définition de l'erreur. A ce niveau d'erreur les réponses sont quasiment superposées à tous les instants comme l'illustre la figure 7.17. Cela valide la méthode. L'erreur, déjà très faible, peut être diminuée si nécessaire en jouant sur les paramètres étudiés dans la partie 7.1.5.

L'énergie de la référence et de la méthode DDT sont illustrées dans le domaine fréquentiel figure 7.18. Les réponses sont également quasiment superposées. Le pas fréquentiel grossier $\tilde{\delta} = \frac{1}{T_{sd} + T_{\text{ext}} + 2\Delta T_{\text{Han}}}$ est 50 fois plus grand que le pas fréquentiel donné par le critère de Shannon. Ce rapport important

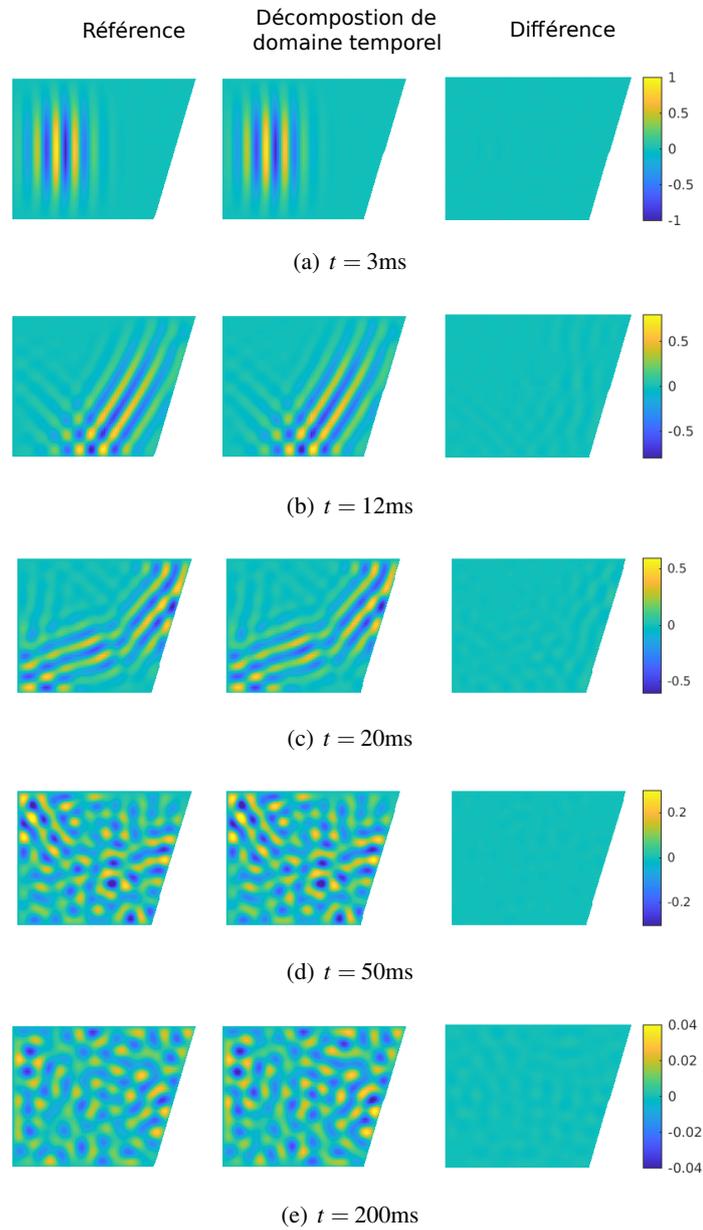


FIGURE 7.17 Partie réelle du champ de pression à différents instants : à gauche le champ de référence issu de la résolution VTCR classique, au milieu le champ issu de la résolution DDT avec la VTCR à 4 sous-domaines VTCR et à droite la différence entre les deux champs.

permet d'obtenir un gain en nombre d'inversions important : 53 opérateurs sont inversés avec l'approche DDT contre 1779 avec l'approche point par point.

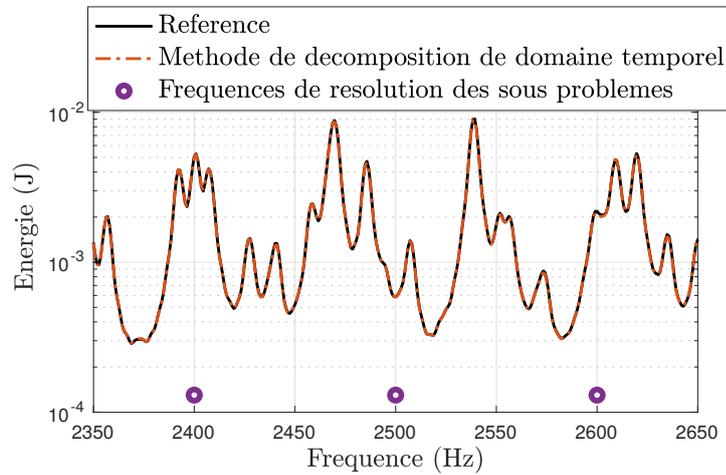


FIGURE 7.18 Réponse fréquentielle calculée avec la DDT et avec la VTCR (en rouge), réponse de référence calculée avec la VTCR (en noir) et points fréquents de construction et d'inversion des opérateurs nécessaire à la résolution par DDT.

7.2.4 Étude des gains en temps de calcul

L'étude consiste à étudier les gains que pourrait apporter la méthode sur des cas d'applications plus complexes comme des cas d'acoustique 3D ou d'assemblages de plaques et de coques. Dans ces cas d'application, les nombres de degrés de liberté avoisinent quelques milliers ou dizaines de milliers pour des fréquences avoisinant quelques milliers d'Hertz sur des structures de taille de l'ordre de la taille du mètre [25, 86]. Les pas fréquents donnés par le critère Shannon sont de l'ordre de 1 Hz.

Nous comparons l'approche de résolution point par point à l'approche DDT, en prenant en compte les coûts de la construction des opérateurs jusqu'à la résolution.

Etude préliminaire : estimation théorique des coûts numériques et des gains

Commençons par estimer les coûts de la méthode DDT, ils se trouvent principalement dans trois étapes :

- Construction des opérateurs VTCR et des opérateurs \mathbb{L} et \mathbb{H} . Les coûts de construction des matrices VTCR, \mathbb{L} et \mathbb{H} évoluent en N_θ^3 et les coûts de construction des seconds membres évoluent en N_θ^2 (N_θ le nombre de degrés de liberté spatiaux). Précisons que, à nombre de degrés de liberté spatiaux fixé, plus le nombre de sous-domaines VTCR est grand, plus les coûts de construction des opérateurs sont faibles : les coûts des matrices évoluent en $\frac{1}{N_\Omega^2}$ (N_Ω le nombre de sous-domaines VTCR).

- Inversions des opérateurs VTCR \mathbb{K}^+ . Ils évoluent également en N_θ^3 . Ils sont néanmoins diagonaux par bloc ce qui réduit les coûts d'inversion environ d'un facteur N_Ω^2 par rapport à une matrice VTCR classique.
- Résolution itérative. Ils évoluent en $n_{iter}N_\theta^2$ avec n_{iter} le nombre total d'itérations du point fixe. Les coûts globaux sont donc estimés à :

$$c_{DDT} = O\left(N_{\omega DDT} \times \left(n_{iter}N_\theta^2 + \frac{N_\theta^3}{N_\Omega^2}\right)\right) \quad (7.45)$$

avec $N_{\omega DDT}$ le nombre de points fréquentiels de la méthode DDT, il vaut environ $N_{\omega DDT} \approx \frac{\tilde{\delta}f}{\delta f}N_\omega$. Les coûts de l'approche point par point valent :

$$c_{direct} = O(N_\omega \times N_\theta^3) \quad (7.46)$$

Ainsi le gain de calcul s'exprime :

$$G = \frac{c_{direct}}{c_{DDT}} = O\left(\frac{\tilde{\delta}f}{\delta f} \times \frac{1}{\left(\frac{n_{iter}}{N_\theta} + \frac{1}{N_\Omega^2}\right)}\right) \quad (7.47)$$

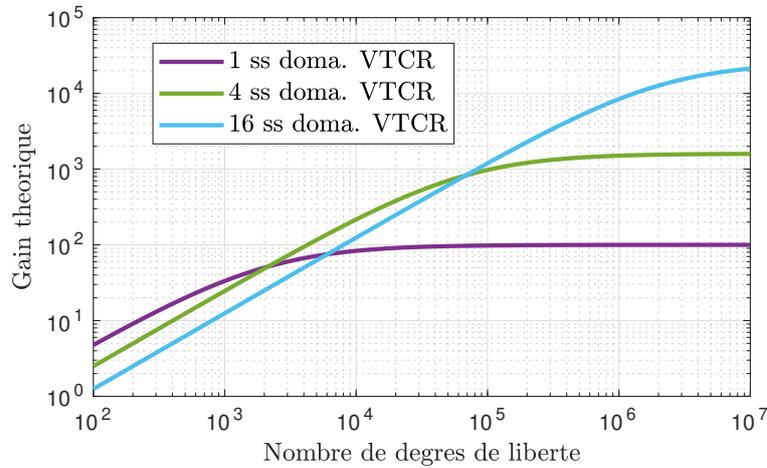


FIGURE 7.19 Gain théorique de la méthode DDT avec $\frac{\tilde{\delta}f}{\delta f} = 100$ et $n_{iter} = 2000$ pour 1 sous-domaine, $n_{iter} = 4000$ pour 4 sous-domaines et $n_{iter} = 8000$ pour 16 sous-domaines, en fonction du nombre de degrés de liberté N_θ . Le coefficient derrière le O est supposé égal à 1.

Le gain théorique est illustré figure 7.19, il est potentiellement important et augmente avec le nombre de degrés de liberté. Il se scinde en deux parties :

- Une partie linéaire où la majeure partie des coûts de la DDT est concentrée dans le processus itératif.

— Une partie où il tend asymptotiquement vers :

$$G \xrightarrow{N_\theta \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\delta}f}{\delta f} N_\Omega^2 \quad (7.48)$$

La majeure partie des coûts de la DDT est concentrée dans la construction et l'inversion des opérateurs.

Un premier relevé des temps CPU sur un cas à grand nombre de degrés de liberté

Afin de quantifier numériquement les gains, nous allons traiter des cas d'acoustique 2D à grand nombre de degrés de liberté représentatifs des cas d'acoustique 3D et d'assemblages de plaques et de coques. Pour augmenter le nombre de degrés de liberté VTCR de l'acoustique 2D il est nécessaire de traiter des problèmes à très hautes fréquences. Pour conserver un pas fréquentiel de l'ordre du Hertz, nous adaptions artificiellement l'amortissement à la fréquence traitée.

Nous reprenons le problème de la cavité acoustique en trapèze défini dans la sous-partie précédente, avec une source définie dans le domaine temporel par l'équation 7.44 à la fréquence centrale $f_{\text{cent}} = 40$ kHz. Pour conserver un pas fréquentiel de 1 Hz, soit une durée d'amortissement de 1s quel que soit le nombre de degrés de liberté traité, l'amortissement est défini par $\eta = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{2500}{f_{\text{cent}}}$, soit $\eta = .125 \cdot 10^{-5}$ ici. Le problème est traité avec un seul élément VTCR ce qui aboutit à des matrices à 1635 degrés de liberté.

Les temps de calcul sont relevés à partir des méthodes de référence et de DDT codés sur Matlab. Bien qu'elles aient été codées avec soin, elles n'ont pas été parfaitement optimisées et les temps ne représentent donc qu'une estimation.

La solution DDT présente une erreur très faible : $\varepsilon_{I_r} = 0.9\%$, pour un nombre moyen de 26.9 itérations par sous-domaine. Les temps CPU sont répertoriés dans le tableau 7.6. Premièrement discutons les coûts de la DDT. La majorité des temps de calcul sont concentrés sur la résolution associée au processus itératif ($\approx 90\%$), cela provient entre autres du fait qu'un nombre important d'itérations sont effectuées : 26.9 en moyenne par sous-domaine sur les 196 sous-domaines. Cela aboutit à un gain total relativement faible de 4.31 comparé aux attentes de la méthode. Le nombre de degrés de liberté est relativement faible ici (1635) ce qui explique ce gain modéré.

	Méthode DDT	Méthode de référence	Gain
Construction des opérateurs	3392 s	97210 s	28.3
Factorisation des opérateurs	827 s	67578 s	1.97
Résolution	34231 s		
Total	38261 s	164788 s	4.31

TABLE 7.6 Temps CPU des différentes étapes pour la méthode DDT et pour la méthode de référence.

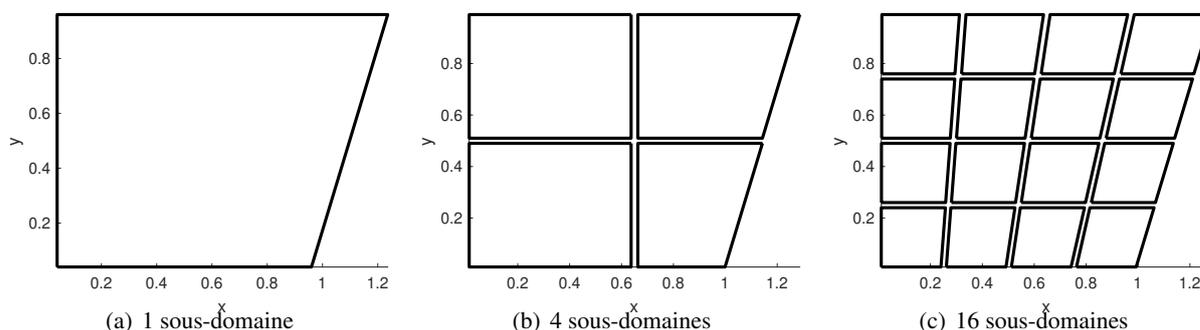


FIGURE 7.20 Différentes discrétisations VTCR traitées pour l'évaluation des gains en coûts de calcul.

Évolution du gain en fonction de la discrétisation VTCR et du nombre de degrés de liberté spatiaux

Pour compléter l'étude nous traitons différentes décompositions en sous-domaines VTCR de la géométrie illustrée figure 7.20 et traitons des fréquences centrales du problème parcourant de 2500 Hz à 160 kHz. Les amortissements et le nombre de degrés de liberté VTCR sont répertoriés dans le tableau 7.7. Les paramètres de la méthode DDT sont indépendants de la fréquence et sont répertoriés dans le tableau 7.8.

Fréquences		2500 Hz	5000 Hz	10 kHz	20 kHz	40 kHz	80 kHz	160 kHz
Amortissement		$5 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$6.25 \cdot 10^{-5}$	$3.125 \cdot 10^{-5}$	$3.125 \cdot 10^{-5}$	$3.125 \cdot 10^{-5}$
1 sous domaine	DDL	196	293	485	868	1635	3168	6234
	$\langle b \rangle$	19.1	23.7	26.9	27.8	26.9	14.5	12.2
	VTCR ϵ_{I_r}	1.04%	1.00%	0.86%	0.823%	0.90%	-	-
4 sous domaines	DDL	406	594	976	1740	3265	6312	-
	$\langle b \rangle$	17.6	29	24	29	33	31.4	-
	VTCR ϵ_{I_r}	2.8%	3.7%	3.9%	-	-	-	-
16 sous domaines	DDL	830	1222	1984	3536	6572	-	-
	$\langle b \rangle$	12	15	19	24	26	-	-
	VTCR ϵ_{I_r}	4.7%	10%	-	-	-	-	-

TABLE 7.7 Données des problèmes traités pour l'évaluation des gains en temps de calcul. $\langle b \rangle$ est le nombre d'itérations moyen : $\langle b \rangle = \frac{n_{iter}}{N_{sd}}$.

	Cavité à 1 sous-domaine VTCR	Cavité à 4 sous-domaines VTCR	Cavité à 16 sous-domaines VTCR
Nombre de sous-domaines N_{sd}	196	334	473
Durée $T_{ds} = \frac{T}{N_{ds}}$	6 ms	3 ms	2 ms
Durée de l'extension T_{ext}	8 ms	4 ms	2 ms
Durée de Hanning ΔT_{Han}	1.5 ms		
Pas fréquentiel $\tilde{\delta}f = \frac{1}{T_{sd} + T_{ext} + 2\Delta T_{Han}}$	58.8 Hz	100 Hz	142 Hz
Itérations du point fixe b_{max}	∞		
Critère de stagnation c_{limi}	0.01		
Nombre total d'opérateurs à inverser	86	53	39

TABLE 7.8 Paramètres de la méthode de décomposition de domaine des problèmes traités pour l'évaluation des gains en temps de calcul.

Les erreurs ε_T relevées et répertoriées dans le tableau 7.7 sont faibles ($< 10\%$). La référence n'a pas toujours pu être calculée du fait de temps de résolution trop importants. Cela implique que toutes les erreurs et tous les temps de calcul n'ont pas pu être calculés. Dans ces cas, les temps de calcul de la référence ont été estimés à partir des temps de construction et d'inversion de 10 matrices VTCR.

Les résultats des gains en fonction du nombre de degrés de liberté sont illustrés dans la figure 7.21 en haut. En bas de la figure sont illustrées les répartitions des temps de calcul des différentes étapes. Discutons le cas à 1 sous-domaine VTCR. Nous avons bien la tendance attendue : le gain augmente pour atteindre 36.6 à 6000 degrés de liberté. Figure 7.21 (b), la proportion des coûts des itérations par rapport à ceux de la construction et de l'inversion des matrices DDT diminue avec le nombre de degrés de liberté : le gain a quasiment atteint sa valeur asymptotique décrite dans la partie 7.2.4.

Entre 2000 et 6000 degrés de liberté les gains des problèmes à 4 et 16 sous-domaines VTCR augmentent également pour atteindre environ 10. Ils augmentent linéairement comme prédit par l'étude théorique 7.2.4 et n'ont pas encore atteint leur valeur asymptotique. La part des coûts du processus itératif (figure 7.21 (c) et (d)) est prédominante. Diminuer les coûts de cette étape permettrait d'augmenter fortement le gain.

Remarque : lorsque le nombre de degrés de liberté est faible, le gain diminue avec le nombre de degrés de liberté. En effet à faible nombre de degrés de liberté, la construction des opérateurs VTCR concentre une part très importante des coûts de calcul. Comme peu d'opérateurs sont nécessaires avec la DDT, le gain devient important lorsque le nombre de degrés de liberté devient faible.

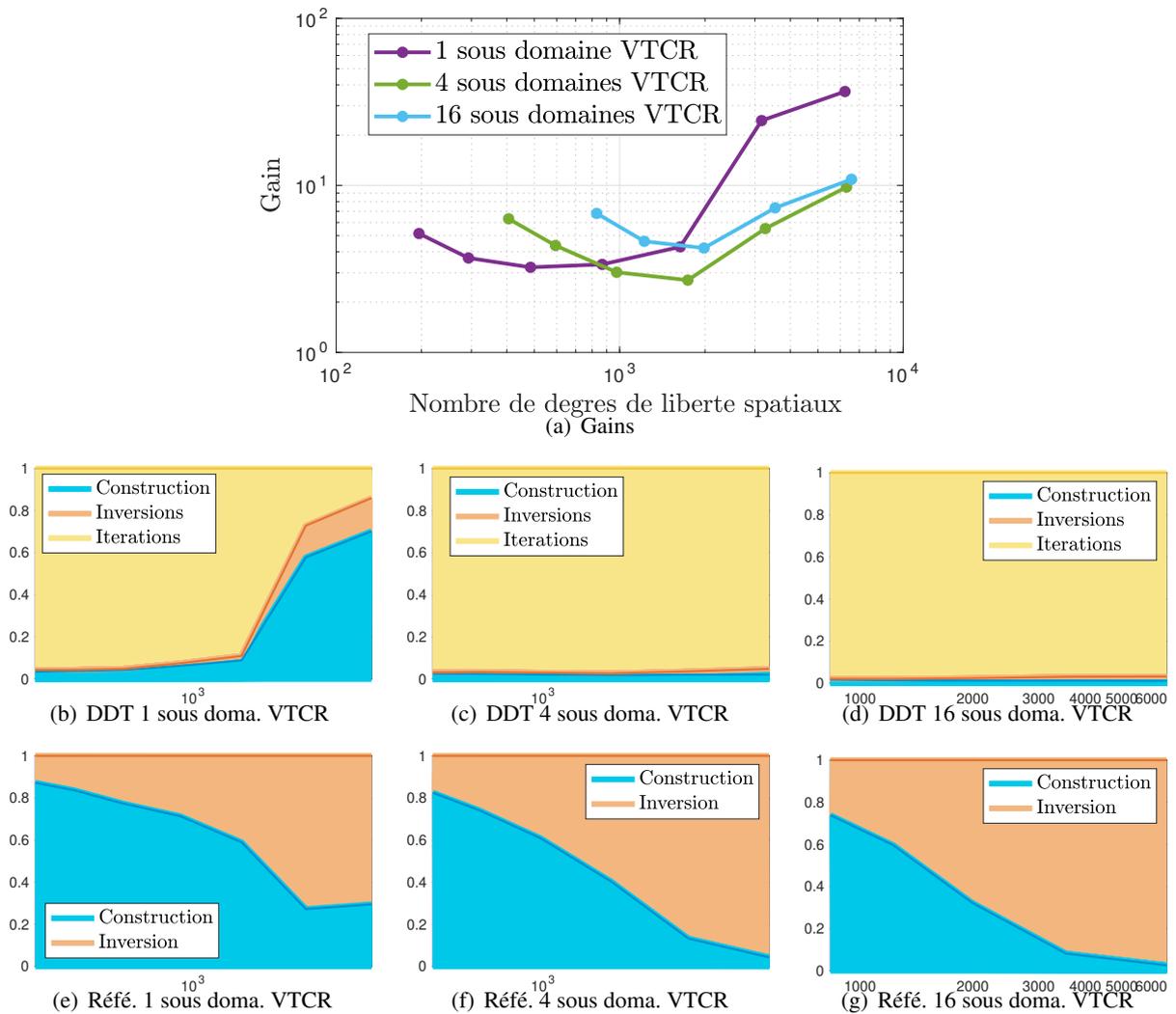


FIGURE 7.21 Gains de la méthode DDT avec et sans initialisations issues de l'EWM (en haut) et répartition des coûts de calcul sans initialisations (en bas à gauche) et avec initialisations (en bas à droite).

Les erreurs sont relativement faibles ici, baisser l'exigence de l'erreur permet de diminuer le nombre d'itérations et donc de diminuer fortement les coûts. Traitons le cas à 4 sous-domaines VTCR en fixant un nombre maximal de 5 itérations par sous-domaine temporel. L'erreur ε_{I_r} avoisine les 50% pour l'ensemble des fréquences traitées (en considérant la DDT précédente comme référence) ce qui reste correct au vu de la sévérité de l'erreur. Le gain illustré figure 7.22 atteint 40 pour 6000 degrés de liberté.

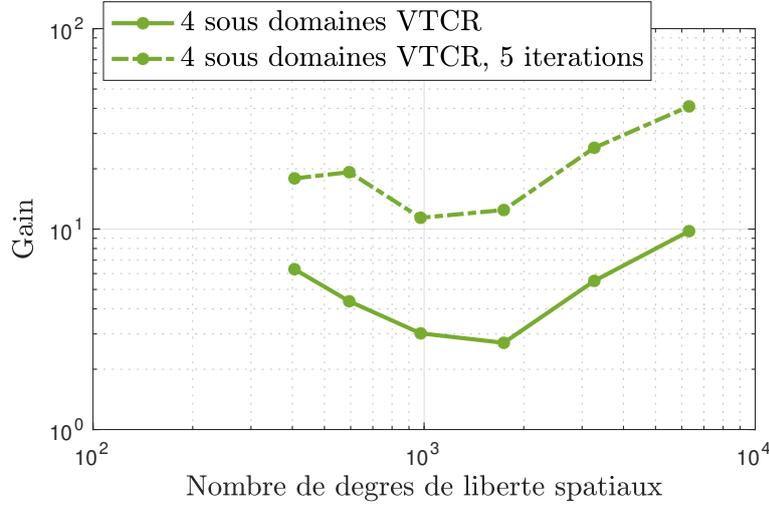


FIGURE 7.22 Gains de la méthode DDT avec un nombre d'itérations b_{\max} par sous-domaine temporel égal à 5 (trait pointillé) et gain avec $c_{\lim} = 0.01$ (cas précédent, trait plein), cas à 4 sous-domaines VTCR.

Exploitation de la Méthode de la Fenêtre Exponentielle (EWM) pour réduire les coûts associés au processus itératif

Pour réduire la part du processus itératif, nous proposons d'initialiser le système itératif par la solution issue de la méthode de l'enveloppe exponentielle (EWM) étudiée dans le chapitre 6.1.1. Nous proposons de résoudre dans chaque sous-domaine le problème :

$$g \cdot \left(\bar{u}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}^n \right) = s \quad \forall t \in I_{TN} \cup I_{ext} \quad (7.49)$$

avec la méthode de l'enveloppe exponentielle et d'injecter \bar{u}^N comme initialisation du point fixe de la DDT. Comme nous pouvons identifier que $\bar{u}^N = \bar{u}^N \forall t \in I_{TN}$, le point fixe converge en une itération.

La résolution du problème avec l'EWM nécessite une résolution avec un pas fréquentiel égal à $\frac{1}{T_{ds} + T_{ext} + 2\Delta T_{Han}}$ soit le même pas fréquentiel grossier que la DDT. Les opérateurs VTCR-EWM peuvent également être inversés en offline et être réutilisés d'un sous-domaine temporel à l'autre.

L'approche est appliquée au cas de la cavité à 4 sous-domaines VTCR. Les gains et la répartition des coûts de calcul sont illustrés figure 7.23.

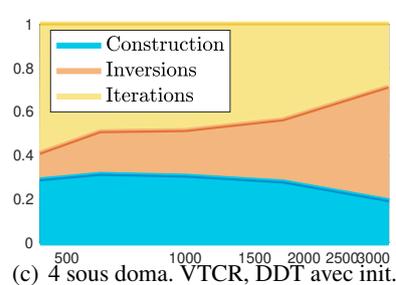
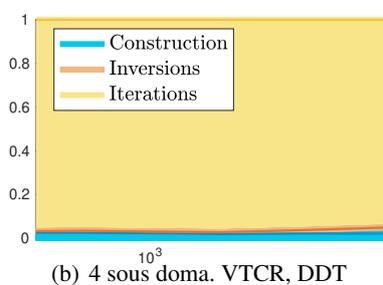
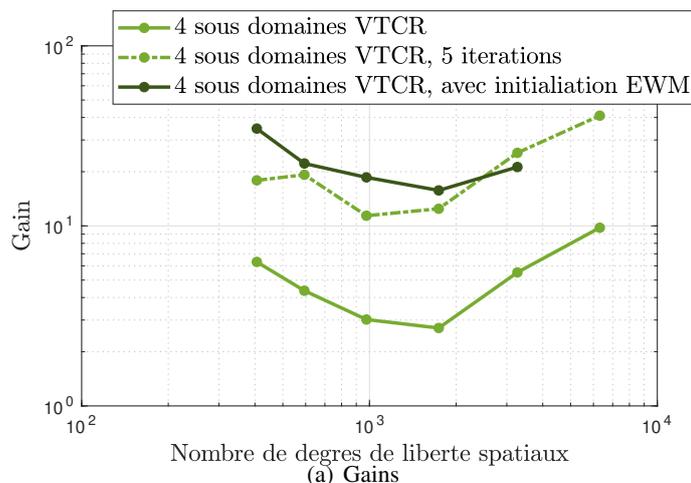


FIGURE 7.23 Gains de la méthode DDT avec et sans initialisation issue de l’EWM (en haut) et répartition des coûts de calcul sans l’initialisation (en bas à gauche) et avec l’initialisation (en bas à droite).

Avec l’initialisation par l’EWM, les coûts de construction, d’inversion et du processus itératif sont bien plus équilibrés (figure 7.23 (c)) et les gains avoisinent un facteur 20 à 30. Notons qu’avec le couplage les coûts de construction et d’inversion augmentent puisqu’il y a les opérateurs de l’EWM à construire et à inverser, de plus les matrices VTCR de l’EWM ne sont pas hermitiennes et diagonales par bloc. Cela implique que les avantages de ce couplage diminuent lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Il s’agit là d’une limite.

7.2.5 Bilan

Dans cette partie la méthode de décomposition de domaine temporel (DDT) a été appliquée à la résolution fréquentielle VTCR dans la gamme des moyennes fréquences. Pour coupler efficacement les deux méthodes, le problème artificiellement amorti associé à l’extension d’un sous-domaine concentre l’amortissement sur le bord : le champ est absorbé sur le bord par des conditions de Robin. Il en résulte que la résolution des problèmes associés est adaptée à la VTCR dont la formulation variationnelle se trouve sur les bords des sous-domaines. Le problème de DDT à un seul sous-domaine temporel a pu être identifié comme une méthode de décomposition de domaine spatial dont les vertus sont d’avoir des opérateurs VTCR à inverser hermitiens, positifs et diagonaux par bloc. La méthode DDT a été appliquée

avec succès avec des erreurs de l'ordre de 1% et des réductions du pas fréquentiel de résolution de l'ordre de 100.

Les gains en temps de calcul ont été étudiés dans un second temps. Sur des cas à grand nombre de degrés de liberté (≈ 6000) des gains de l'ordre de 10 à 40 ont été relevés avec une tendance à la hausse lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Lorsqu'il y a plusieurs sous-domaines VTCR les coûts de calcul sont très majoritairement concentrés dans le processus itératif. Pour réduire ces coûts, il a été proposé d'initialiser le processus à partir d'une solution issue de la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM), elle permet de multiplier les gains par 5 mais cette approche semble limitée pour des problèmes à plus grand nombre de degrés de liberté du fait que les matrices de l'EWM ne sont pas diagonales par bloc.

Il s'agira donc par la suite de concentrer les efforts sur la réduction des coûts du processus itératif. Le choix d'absorption et transmission des ondes par des conditions de Robin [10] est connu dans la littérature des méthodes de décomposition de domaine spatial pour ne pas être optimales pour transmettre les ondes. Des méthodes plus efficaces comme des approximations d'ordre supérieur, les HABCs [17] ou des transmissions traitées par PMLs [153] exploités en décomposition de domaine spatial peuvent être une piste à suivre.

7.3 Conclusion

Dans ce chapitre une méthode de décomposition de domaine temporel (DDT) adaptée à la résolution fréquentielle a été proposée. Les sous-problèmes liés à chaque sous-domaine sont construits de telle sorte que la résolution fréquentielle puisse être effectuée avec un pas fréquentiel grossier, d'autant plus grossier que la durée du sous-domaine est courte. Les opérateurs fréquents pouvant être réutilisés d'un sous-domaine à l'autre, des gains apparaissent par rapport à l'approche fréquence par fréquence classique.

La méthode a d'abord été illustrée sur des cas simples (un problème masse-ressort et un problème d'acoustique 2D traité par les éléments finis) où son efficacité a pu être montrée. Elle permet de résoudre le problème complet avec un pas fréquentiel 50 à 100 fois plus grossier que le pas fréquentiel fixé par le critère de Shannon. Contrairement aux méthodes de réduction de modèle proposées dans le chapitre 5 et étudiées dans le chapitre 2.2, les gains liés au pas fréquentiel sont indépendants de la densité modale du problème ce qui la rend particulièrement adaptée à la gamme des moyennes fréquences.

Dans une seconde partie elle a été appliquée à la VTCR pour des problèmes moyennes fréquences. Des gains de près de 40 en temps de calcul ont pu être observés avec une tendance à la hausse lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. Il s'agit là de premiers résultats avec de nombreuses perspectives d'amélioration.

Il n'y a priori pas de limite à l'application de la méthode à des problèmes d'assemblage de plaques et de coques ou des problèmes d'acoustique 3D. De plus, du fait d'une description du problème dans le domaine temporel, il est envisageable de traiter des problèmes non linéaires à l'image des méthodes

d'Alternating Frequency Time (AFT) [22, 106] qui consistent à itérativement résoudre un problème linéaire dans le domaine fréquentiel et un problème non linéaire dans le domaine temporel.

Chapitre 8

Application industrielle : identification du choc issu de la découpe pyrotechnique

Ce chapitre traite d'une application industrielle des méthodes développées dans cette thèse. Il s'agit de l'identification du choc généré par la découpe pyrotechnique apparaissant lors de la séparation des différents étages du lanceur Ariane 5 et 6 d'ArianeGroup. En partant de mesures issues d'essais réels, un modèle numérique est développé et exploité pour remonter jusqu'au signal source.

8.1	Présentation de l'essai	181
8.2	Première analyse des mesures	182
8.2.1	Analyse des jauges de déformation	183
8.2.2	Analyse des accéléromètres	184
8.3	Identification du choc à la source	186
8.3.1	Les différentes stratégies d'identification	186
8.3.2	Modèle de la source	187
8.3.3	Modèle numérique de la plaque	188
8.3.4	Méthode de la déconvolution	190
8.3.5	Identification de la source : application numérique	192
8.3.6	Réponse de la plaque soumise à la source identifiée	197

8.4	Identification de l'amortissement	199
8.4.1	La Transient Statistical Energy Analysis appliquée à l'essai	200
8.4.2	Diagramme temps-fréquences	201
8.4.3	Identification de l'amortissement	202
8.5	Conclusion	203

La séparation des étages du lanceur Ariane 5 et 6 de l'entreprise ArianeGroup est réalisée via un processus de découpe pyrotechnique. Ces découpes se font à des vitesses supersoniques ($\approx 7000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et génèrent des ondes à haut contenu fréquentiel qui peuvent potentiellement détériorer le matériel embarqué. Une étude des ambiances vibratoires est proposée dans [21]. La maîtrise de la simulation de ces vibrations est un atout majeur pour le design des lanceurs. Premièrement, il s'agit de connaître précisément l'amplitude et le contenu fréquentiel des chocs générés par la découpe. Deuxièmement, il s'agit d'être capable de simuler la réponse de la structure sur des durées plus ou moins longues en des points proches des éléments sensibles.

Les travaux de thèse des chapitres précédents ont principalement été développés pour traiter le second point : la simulation de la réponse sur des temps plus ou moins longs. Il est néanmoins crucial de commencer par l'identification du choc à la source qui est un entrant de la simulation du système complet. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur ce premier point. Plus précisément, il s'agit de reconstruire un signal synthétique qui, appliqué à la source de la découpe, génère les mêmes réponses aux capteurs. Par manque de temps, nous n'avons pas traité le second point : la simulation du système complet.

L'identification se fait à partir de l'analyse des mesures issues des essais de découpe pyrotechniques. La majeure partie des informations de ces essais sont confidentielles. Le principal objectif de la campagne d'essais était de tester des variantes du design du cordeau pyrotechnique afin de minimiser le choc généré.

Du fait de l'intensité du choc, les capteurs sont positionnés à des distances plus ou moins importantes du cordeau pyrotechnique. Afin de remonter au signal source, nous allons appliquer une méthode de problème inverse exploitant un modèle numérique de l'essai performant sur un large contenu fréquentiel. Le problème inverse mis en place nécessite d'avoir la réponse numérique sur des durées de l'ordre de quelques aller-retours de l'onde dans la structure de l'essai. Nous allons donc exploiter la VTCR couplée à la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) développée dans le chapitre 6 pour traiter la partie haute fréquence et la MEF pour traiter la partie basse fréquence. Plus concrètement nous allons exploiter le logiciel TAPYROSS développé par Alexandro Cattabiani [25], il permet de simuler la réponse fréquentielle des assemblages de plaques et de coques avec la VTCR. Il y sera intégré l'EWM pour calculer efficacement les réponses transitoires dans le domaine temporel.

Dans ce chapitre, nous proposons également une méthode d'identification de l'amortissement qui est un paramètre matériau fortement influent sur la réponse.

8.1 Présentation de l'essai

L'essai issu de la campagne d'essais C4 est une découpe de plaque plane en aluminium de 6 mm d'épaisseur dont le schéma est présenté figure 8.1. La partie haute de la plaque représente le lanceur et la partie basse représente la partie larguée. Seule la partie haute est instrumentée de :

- 32 jauges de déformation positionnées par paire et en vis-à-vis de part et d'autre de la plaque. Ainsi, la demi-somme d'une paire permet d'extraire les contributions des vibrations dans le plan,

soit les vibrations membranaires, et la demi-différence les vibrations hors plan, soit les vibrations de flexion.

— 6 accéléromètres hors plan et dans le plan.

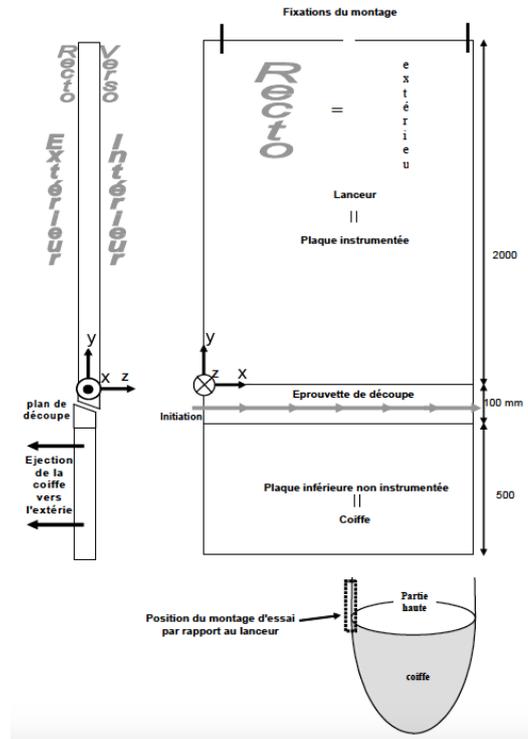


FIGURE 8.1 Schéma de l'essai de la campagne C4.

Pour l'étude proposée ici, seuls 10 couples de jauges et 2 accéléromètres ont été réquisitionnés. Le plan des capteurs, l'ensemble des caractéristiques des chaînes de mesure et des caractéristiques des capteurs de déformation et d'accélération sont des données confidentielles non renseignées ici.

La découpe pyrotechnique s'effectue sur l'axe représenté en gris sur la figure 8.1. Sa célérité c_{pyro} a été identifiée à $c_{pyro} = 7200 \text{ m.s}^{-1}$.

8.2 Première analyse des mesures

La découpe pyrotechnique génère un ensemble d'ondes de flexion, de traction-compression et de cisaillement. Les premiers fronts se décomposent en deux parties : une partie issue de l'initiation du choc en $(x,y) = 0$ où le front d'onde est circulaire et une partie issue du caractère défilant à vitesse supersonique de la découpe où le front est rectiligne. Les fronts sont schématisés figure 8.2. L'angle de la normale du front rectiligne vaut $\theta_{\text{onde}} = \arccos\left(\frac{c_{\text{onde}}}{c_{pyro}}\right)$ avec c_{onde} la célérité de l'onde considérée.

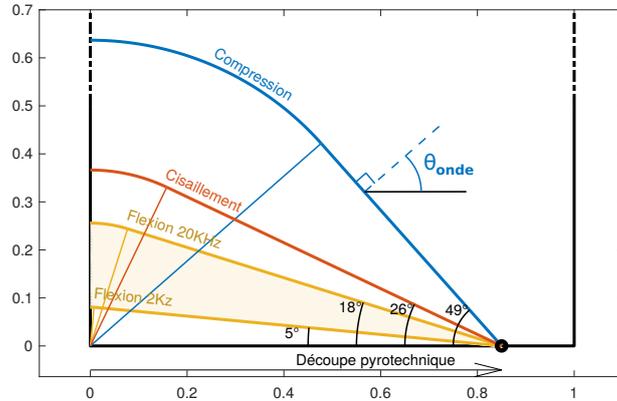


FIGURE 8.2 Premiers fronts d'ondes issus de la découpe pyrotechnique.

Une première étude consiste à étudier les temps de parcours des ondes pour atteindre un capteur afin de les comparer aux mesures. Le temps de parcours vaut :

$$t_{\text{parcours onde}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c_{\text{onde}}} & \text{si } \theta > \theta_{\text{onde}} \\ \frac{x + y \tan(\theta_{\text{onde}})}{c_{\text{pyro}}} & \text{si } \theta \leq \theta_{\text{onde}} \end{cases} \quad (8.1)$$

avec (x, y) la position du capteur. Les célérités des différentes ondes sont répertoriées dans le tableau 8.1.

Type d'onde	Compression	Cisaillement	Flexion			
Formule	$\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	Phase		Groupe	
			$\sqrt{2\pi f \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)}}}$	$2\sqrt{2\pi f \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)}}}$		
Valeur	5390 m.s ⁻¹	3103 m.s ⁻¹	342 m.s ⁻¹ à 2 kHz	1083 m.s ⁻¹ à 20 kHz	684 m.s ⁻¹ à 2 kHz	2167 m.s ⁻¹ à 20 kHz

TABLE 8.1 Célérité des différentes ondes dans la plaque d'aluminium.

8.2.1 Analyse des jauges de déformation

Les temps de parcours des ondes sont calculés pour la paire de jauges 38 (proche du cordeau) et 16 (éloigné du cordeau) et sont répertoriés dans le tableau 8.2.

Type de front	Compression	Cisaillement	Flexion (2 kHz)	Flexion (20 kHz)
Jauge 16	0,179 ms	0,312 ms	1,4 ms	0,446 ms
Jauge 38	0,124 ms	0,174 ms	0,521 ms	0,218 ms

TABLE 8.2 Temps d'arrivée théoriques des différents fronts d'ondes.

La figure 8.3 illustre les demi-sommes, correspondant aux vibrations membranaires, et les demi-différences, correspondant aux vibrations de flexion, des déformations mesurées par les paires de jauges 16 et 38. Ces mesures permettent d'identifier les temps de parcours des ondes. En comparant ces résultats aux temps calculés, il s'avère que les temps ne concordent pas : par exemple pour la jauge 38, l'onde de compression arrive théoriquement à $t = 0,124ms$, or la jauge ne mesure une déformation qu'à $t = 0,90ms$. Il en va de même pour toutes les jauges. Nous identifions un décalage temporel de l'ordre de $0.78ms$ sur toutes les jauges. Les temps recalés aux mesures sont illustrés figure 8.3.

Ce temps "offset" est particulièrement important à l'échelle des temps de propagation. Rappelons que l'origine temporelle a été recalée à partir du signal électrique de déclenchement du cordeau pyrotechnique. Ce signal ne correspond pas exactement à l'allumage du cordeau. Nous recalons donc l'origine temporelle à partir de la comparaison entre les temps de parcours théoriques et calculés. Une fois les temps recalés, les temps d'arrivée des ondes hors plan et des ondes dans le plan concordent bien (figure 8.3).

En observant les ondes dans le plan, nous nous attendons à visualiser deux fronts : un associé à la traction compression et un associé au cisaillement. Visuellement nous ne les distinguons pas. Cela provient potentiellement de la bande passante des jauges qui est assez faible, elle lisse les deux réponses ce qui empêche de les distinguer. L'étude des accéléromètres, dont la bande passante est plus large sera potentiellement plus précise.

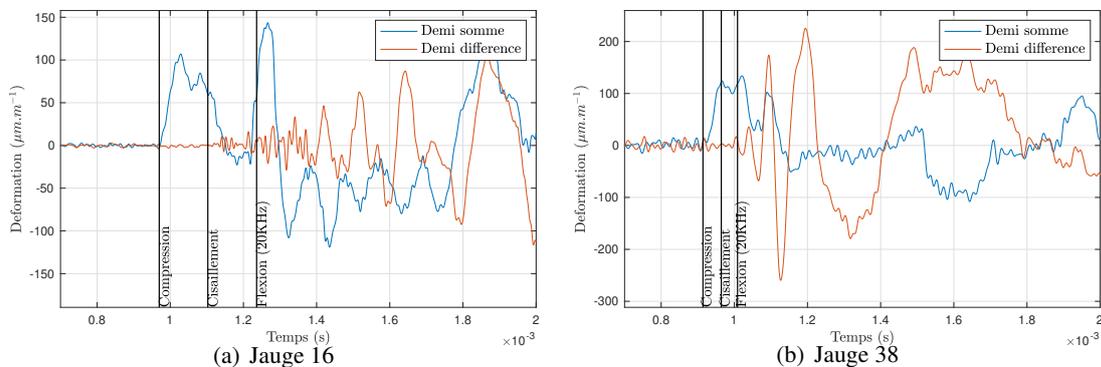


FIGURE 8.3 A gauche, les mesures de la jauge 16, éloignée de la découpe. A droite, les mesures de la jauge 38, proche de la découpe.

8.2.2 Analyse des accéléromètres

Les accéléromètres n'étant pas positionnés de part et d'autre de la plaque nous ne pouvons pas dissocier les ondes hors plan des ondes dans le plan. Par ailleurs, il est courant que, sous l'effet du choc de la découpe pyrotechnique, les accéléromètres proches du cordeau se décollent. Les mesures sont alors erronées. Il s'agira d'identifier ces cas.

Figure 8.4 en haut sont représentées les mesures des accéléromètres A0 et A3 aux premiers instants superposés aux temps d'arrivée des différents fronts. Les données issues du capteur A0 semblent

particulièrement bruitées. Les données de l'accéléromètre A03 semblent plus lissées. Deux pics négatifs (à 0.95ms et 1.02ms) peuvent potentiellement correspondre aux fronts de traction-compression et de cisaillement.

Pour interpréter ces données nous proposons d'intégrer dans le temps afin de visualiser la vitesse plutôt que l'accélération :

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt \quad (8.2)$$

Cette grandeur est intéressante pour plusieurs raisons :

- Dans le cas théorique de la propagation d'une unique onde de choc plane membranaire, la contrainte est linéairement reliée à la vitesse :

$$\sigma = \alpha \rho c v$$

avec σ la contrainte, c la célérité de l'onde, ρ la masse volumique, v la vitesse, et α une constante dépendante du type d'onde. Dans le cas traité ici, il y a une superposition d'ondes de choc de différents types : traction-compression et cisaillement. La vitesse n'est donc pas directement linéairement reliée à la contrainte, mais cette relation donne seulement un ordre de grandeur de l'allure de la contrainte. Comme la loi de Hooke relie linéairement la contrainte à la déformation, la vitesse donne un ordre de grandeur de la forme de la déformation.

- Intégrer permet de lisser les hautes fréquences ce qui facilite l'interprétation et la visualisation des fronts en enlevant un potentiel bruit de mesure hautes fréquences.

Les vitesses issues de l'intégration des accéléromètres sont illustrées figure 8.4. Pour les données issues de l'accéléromètre A3, on voit distinctement deux pics (à $t = 0.99$ ms et à $t = 1.04$ ms). Ils correspondent a priori au maximum de l'onde de traction-compression et au maximum de l'onde de cisaillement. Les retards temporels mesurés et théoriques entre les deux pics correspondent pour l'accéléromètre A3 : $\Delta T_{theorique} = 57 \mu s$, $\Delta T_{mesuree} = 55 \mu s$. On peut supposer que la contrainte a la même "forme" (du fait de la relation de linéarité entre contrainte et vitesse dans le cas de propagation de choc). On en déduit l'allure du choc à identifier : un signal triangulaire de largeur d'environ 0.1 ms. La cohérence des mesures de cet accéléromètre nous permet de supposer ces mesures valides.

Pour l'accéléromètre A0, on voit également deux pics, mais moins distincts. Néanmoins les retards temporels mesuré et théorique entre les deux pics ne correspondent pas : $\Delta T_{theorique} = 19 \mu s$, $\Delta T_{mesuree} = 41 \mu s$. Par ailleurs l'amplitude du premier accéléromètre A0 est plus importante que A3 d'un facteur environ égal à 3. Or l'amortissement matériau, qui est a priori le seul facteur d'atténuation de l'onde plane, prévoit une atténuation de seulement 1 % environ. Cela nous amène à conclure que cette mesure est erronée, probablement à cause du décollement du capteur.

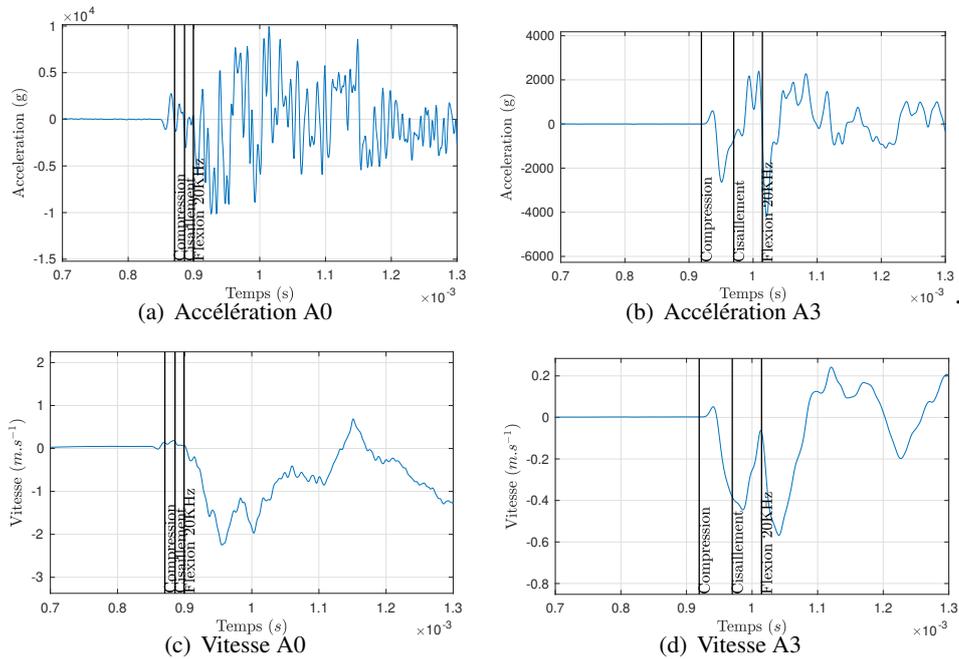


FIGURE 8.4 En haut les mesures des accéléromètres superposées aux temps de parcours, en bas les vitesses issues de l'intégration dans le temps des accéléromètres, pour l'accéléromètre A0 à gauche et pour l'accéléromètre A3 à droite.

8.3 Identification du choc à la source

8.3.1 Les différentes stratégies d'identification

Plusieurs méthodes ont été proposées par le passé pour identifier les sources :

- Une première approche consiste à approcher le signal par un Dirac. Seule l'amplitude est à déterminer [2]. Cette approche s'est avérée valide jusqu'à 10 kHz.
- Une deuxième approche consiste à tester sur un modèle numérique plusieurs fonctions sources afin de déterminer celle qui permet au mieux de recoller aux mesures. Cette méthode nécessite de nombreuses simulations. Elle a été utilisée par Michel Dommaget chez ArianeGroup.
- Une troisième approche consiste à utiliser la méthode de déconvolution. A partir d'une simulation numérique avec une fonction source au choix, appelée source test, il est possible de reconstruire la source qui recolle au mieux aux mesures [45]. Il s'agit de résoudre un problème de minimisation. Cette approche s'avère efficace mais nécessite néanmoins de traiter le mauvais conditionnement en régularisant les fonctions identifiées.

Nous proposons ici d'utiliser cette dernière méthode et nous apportons des améliorations sur la régularisation de la méthode. Dans un premier temps, nous allons introduire le modèle numérique utilisé, puis nous développerons la méthode d'identification utilisée. Nous l'appliquerons finalement à l'identification du choc pyrotechnique.

8.3.2 Modèle de la source

Précisons quelques mots sur le procédé de la découpe. La tranche du cordeau est schématisée figure 8.5. Dans une tranche la découpe se synthétise en plusieurs étapes :

- La réaction pyrotechnique se propage le long du cordeau et atteint la tranche considérée.
- Une première onde de choc se propage dans le caoutchouc, le cordeau puis dans les ailettes et le reste de la structure. Celle-ci ne provoque pas la découpe.
- Le volume de l'ensemble "caoutchouc et explosif" augmente progressivement ce qui change la forme du cordeau.
- Ce changement de forme induit une pression sur les ailettes jusqu'à rupture de celles-ci en cisaillement au niveau de l'amincissement de celles-ci.

Remarque : au vu des symétries de la plaque et du système de rupture, il ne devrait pas y avoir d'ondes de flexion. Néanmoins elles sont bel et bien présentes : les déformations associées aux ondes dans le plan et hors plan sont du même ordre de grandeur. Cela provient potentiellement d'une légère dissymétrie de la découpe : par exemple une des ailettes peut rompre avant l'autre. La géométrie de la structure ne permet pas de prédire le sens du moment ou de l'effort hors plan qui génère ces déformations, elles peuvent être qualifiées de "parasites". Pour autant, au vu de leur amplitude, ces ondes ne peuvent être négligées.

Précisons, a priori, qu'à aucun instant le cordeau rentre directement en contact avec la partie conservée par le lanceur.

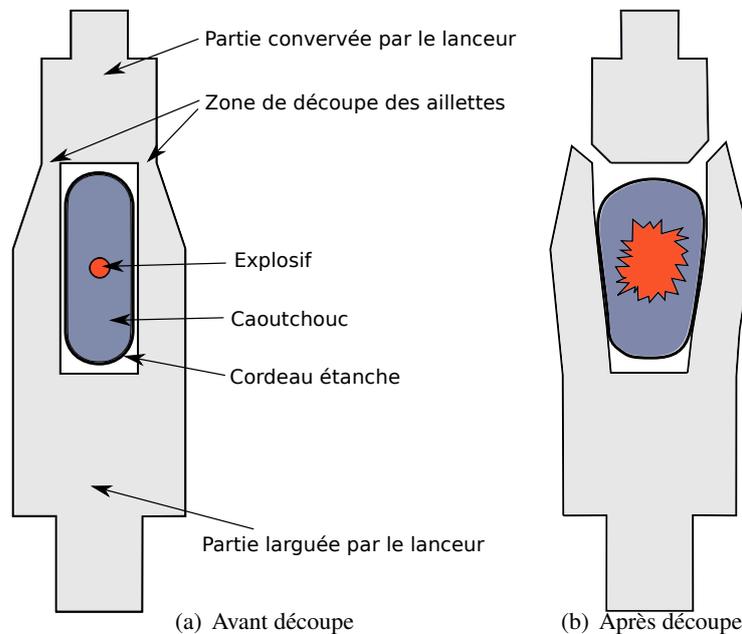


FIGURE 8.5 Schéma du système de découpe, coupe suivant le plan (y, z) .

La découpe pyrotechnique génère des actions mécaniques à l'origine des ondes et des vibrations dans la plaque. Il s'agit d'identifier un effort linéaire équivalent : trouver l'effort à la source qui génère la même réponse aux capteurs après une propagation linéaire. Pour l'identification, nous le modélisons de la manière suivante :

- Il se présente sous forme d'un torseur à trois composantes :

$$\mathbf{s}(x,t) = (\mathbf{F}_{ip}(x,t), \mathbf{F}_{oop}(x,t), \mathbf{M}(x,t)) \quad (8.3)$$

Avec \mathbf{F}_{ip} un effort dans le plan suivant y , \mathbf{F}_{oop} un effort hors plan suivant z et \mathbf{M} un moment suivant x , l'axe du cordeau.

- Au vu de l'invariance suivant la position x du procédé de découpe, nous supposons qu'il s'agit d'efforts et d'un moment défilants à la vitesse de la découpe pyrotechnique $c_{pyro} = 7200\text{m/s}$. Nous supposons donc que la source peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x,t) &= s\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ &= \left(F_{ip}\left(t - \frac{x}{c}\right), F_{oop}\left(t - \frac{x}{c}\right), M\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.3.3 Modèle numérique de la plaque

La structure supérieure de l'essai est modélisée par une plaque plane couplée à une poutre de dimension 11.5mm (axe z) par 11mm (axe y) qui modélise la partie découpée du cordeau. L'ensemble "plaque et poutre" est libre au niveau de la découpe, la partie inférieure est absente du modèle. En effet ce choix provient du fait que la découpe est supersonique, il n'y a pas d'onde issue de la découpe qui transite entre les deux plaques en amont de la découpe. Ce modèle suppose également qu'il n'y a pas de contact entre les deux plaques. Par ailleurs, les masses ajoutées par les capteurs sont négligées. Cela se justifie par le fait que les dimensions des capteurs sont petites par rapport aux longueurs d'onde considérées, et que leurs masses sont négligeables.

Comme le modèle est parfaitement symétrique suivant le plan (O, x, y) les ondes de traction compression cisaillement (dans le plan) et de flexion (hors plan) sont indépendantes. Les problèmes hors plan et dans le plan peuvent être traités de manière indépendante.

Principe de la séparation en fréquences

La réussite de l'identification dépend de la qualité du modèle numérique. Il est nécessaire d'avoir un modèle qui traduise fidèlement tout le contenu fréquentiel des premiers "allers" de la propagation des ondes dans la plaque. Pour cela nous allons utiliser un modèle numérique en deux parties : nous utilisons la méthode des éléments finis pour les basses fréquences et la VTCR pour les hautes fréquences. Nous décomposons la source en une contribution basse fréquence (BF) et une contribution haute fréquence (HF) :

$$s = s_{BF} + s_{HF} \quad (8.5)$$

Et calculons la réponse basse fréquence associée à s_{BF} avec la MEF et la réponse haute fréquence associée à s_{HF} avec la VTCR. Pour obtenir la réponse du problème initial il suffit de sommer ces deux réponses. La décomposition de la source s'obtient par filtrage dans le domaine fréquentiel en utilisant des fonctions de Hanning :

$$s_{BF} = F_{\text{passe bas}}(s), s_{HF} = F_{\text{passe haut}}(s) \quad (8.6)$$

La frontière entre la partie haute et la partie basse fréquence est définie par le rapport entre la taille caractéristique de la pièce et la longueur d'onde. En pratique, lorsque ce rapport est inférieur à 10 on est dans le domaine des basses fréquences, et lorsqu'il est supérieur à 10 on est dans le domaine des moyennes et hautes fréquences. La fréquence f_{front} qui sépare les basses des moyennes fréquences n'est donc pas la même en fonction du type d'onde :

- Onde de traction : $f_{\text{front}} \approx 25$ kHz.
- Onde de cisaillement : $f_{\text{front}} \approx 15$ kHz.
- Onde de flexion : $f_{\text{front}} \approx 1,5$ kHz.

Nous prendrons pour le problème hors plan une frontière à 1.5 kHz et pour le problème dans le plan nous traiterons l'intégralité du problème avec les EFs.

Modèle BF : éléments finis

La résolution basse fréquence, soit la résolution du modèle soumis à s_{BF} se fait avec les éléments finis.

- Pour le problème dans le plan : le modèle plaque est maillé en quadrangle et utilise des fonctions de forme d'ordre 2. La poutre en flexion utilise des fonctions de forme d'ordre 3 et la poutre en traction/compression utilise des fonctions de forme d'ordre 2. Le pas spatial est de $0.02m$. Le couplage entre le modèle poutre et la plaque se fait par substitution en imposant la continuité entre les nœuds.
- Pour le problème hors plan : le modèle plaque (modèle de Kirchhoff) est maillé en quadrangle et utilise des fonctions de forme d'ordre 3. La poutre en flexion utilise des fonctions de forme d'ordre 3 et la poutre en torsion utilise des fonctions de forme d'ordre 2. Le pas spatial est de 0.02 m. Le couplage entre le modèle poutre et la plaque se fait par substitution en imposant la continuité entre les nœuds.

La résolution temporelle se fait avec un modèle d'intégration explicite. Le pas temporel est de $0.2 \cdot 10^{-6}s$.

Le modèle MEF et l'intégration temporelle sont codés en Matlab.

Modèle HF : VTCR couplée à la méthode de la fenêtre exponentielle

La partie haute fréquence du modèle est traitée avec la VTCR pour les assemblages de plaques et de coques [31, 25] que nous couplons à la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) traitée dans le

chapitre 6. Nous utilisons le logiciel TAPYROSS dans lequel nous avons intégré l'EWM pour traiter les problèmes transitoires.

Le modèle est un assemblage d'une plaque et d'une poutre. La partie plaque est modélisée par un seul élément VTCR avec un total de 2008 fonctions de forme. La partie modélisée par une poutre nécessite un modèle de couplage entre une plaque et une poutre. Un tel modèle n'est pas pris en compte par TAPYROSS. Nous avons donc développé un modèle de couplage entre modèle MEF et VTCR. Afin d'alléger ce chapitre, le développement du couplage est relayé en annexe 8.5. La poutre est traitée par un modèle poutre MEF avec un pas de discrétisation de 0.005 m comme décrit dans la partie précédente sur la MEF 8.3.3.

8.3.4 Méthode de la déconvolution

La méthode de la déconvolution a été proposée dans [45]. Nous la présentons ici avec une approche fréquentielle ce qui facilite son interprétation, son implémentation numérique et sa régularisation. La méthode se décompose en deux étapes :

- La première consiste à identifier la fonction de transfert du problème à partir d'un essai numérique appelé test.
- La seconde consiste à identifier la source à partir de cette fonction de transfert. Il s'agit d'un problème de minimisation.

Identification de la fonction de transfert

Les capteurs sont positionnés loin de la source. Comme nous supposons que la propagation de l'onde issue de la découpe pyrotechnique est une propagation linéaire, les quantités mesurées s'expriment :

$$x^m(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t h_n^m(t-\tau) s^n(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^N h_n^m(t) \star s^n(t) \quad (8.7)$$

Avec x^m la mesure m , s^n la source n , N le nombre de sources, h_n^m les fonctions de Green associées à la source n et au capteur m et \star le produit de convolution. Ici N vaut 3 : deux efforts et un moment. La première étape de la déconvolution consiste à identifier h_n^m à partir d'un essai numérique test. Pour cela supposons avoir effectué un essai numérique pour chaque source s_{test}^n , soit N essais, avec s_{test}^n une source au choix. En appliquant une transformée de Fourier à l'équation 8.7, on identifie $h_{n\ test}^m$ dans le domaine fréquentiel :

$$TF(h_{n\ test}^m)(\omega) = \frac{TF(x_{test}^m)(\omega)}{TF(s_{test}^n)(\omega)} \quad \forall \omega \in I_\omega \quad (8.8)$$

Avec TF la fonction transformée de Fourier et ω la fréquence. $h_{n\ test}^m$ s'obtient alors par transformée de Fourier inverse.

Le choix des sources tests est crucial pour l'identification : s'il existe des fréquences pour lesquelles $TF(s_{test}^n)$ s'annule, $TF(h_{n\ test}^m)$ ne peut pas être calculée. Il s'agira de choisir des fonctions tests dont la transformée de Fourier ne s'annule pas sur la bande fréquentielle visée. La fonction idéale est la fonction

Dirac qui est constante dans le domaine fréquentiel, or numériquement il n'est pas possible d'imposer une telle fonction. Nous appliquerons donc un signal triangulaire le plus étroit possible pour s'approcher du Dirac et supposons $TF(h_n^m) = 0$ au-delà du premier zéro de $TF(s_n^m)$.

Identification de la source

Connaissant une approximation numérique de la fonction de transfert h_n^m il est possible de déterminer la source (soit l'ensemble des trois sources F_{ip} , F_{oop} et M ,) à partir du problème de minimisation suivant :

$$\{s_{iden}^n\}_{[1..N]} = \underset{\{s^n\} \in E_S}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{m=1}^M c_m \left\| x_{mes}^m - \sum_{n=1}^N h_n^m \star s^n \right\|_m^2 \right) \quad (8.9)$$

avec x_{mes}^m la mesure m , c_m un coefficient de pondération, s_{iden}^n les sources identifiées et E_S l'espace dans lequel sont recherchées les sources. Cette minimisation s'interprète comme "trouver la source qui minimise l'écart aux mesures". La norme $\|\cdot\|_m$ est un choix de la méthode et peut dépendre du capteur utilisé. En pratique nous prendrons :

- $\|x\|_m = \int_{t=0}^T (F_{passe\ bas}(x))^2 dt$ avec $F_{passe\ bas}$ un filtre de Hanning passe-bas (qui filtre les hautes fréquences) si le capteur m est une jauge de déformation.
- $\|x\|_m = \int_{t=0}^T (F_{passe\ haut}(x))^2 dt$ avec $F_{passe\ haut}$ un filtre de Hanning passe-haut (qui filtre les basses fréquences) si le capteur m est un accéléromètre.

T est un temps à définir. En pratique il est relativement court et seuls les premiers fronts d'ondes sont pris en compte pour l'identification. c_m est un coefficient qui permet d'une part d'adimensionner la mesure et d'autre part de privilégier certains capteurs par exemple en fonction de leur position.

Le choix de l'espace E_S permet d'ajouter des contraintes quant aux sources à identifier. En pratique E_S sera un espace de sources à support borné dans le temps entre t_{max} et t_{min} , et borné en fréquence entre f_{max} et f_{min} . Les bornes sont donc des paramètres de la méthode. Le principe d'indétermination définit une inégalité à respecter entre les bornes : $(t_{max} - t_{min})(f_{max} - f_{min}) > 1$.

Une telle minimisation présente généralement un mauvais conditionnement. Il peut être traité en restreignant l'espace de recherche des solutions E_S comme dans [45] où la source est recherchée dans un espace sous discrétisé en temps, ce qui revient à prendre f_{max} relativement faible. Nous proposons ici de régulariser la solution en pénalisant la minimisation par une norme sur la dérivée seconde :

$$\{s_{iden}^n\}_{[1..N]} = \underset{\{s^n\} \in E_S}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{m=1}^M c_m \left\| x_{mes}^m - \sum_{n=1}^N h_n^m \star s^n \right\|_m^2 + \sum_{n=1}^N \gamma_n \int_0^T \left(\frac{d^2 s^n}{dt^2} \right)^2 dt \right) \quad (8.10)$$

avec γ_n des paramètres de régularisation à fixer. Une fois les sources identifiées, nous pouvons revenir aux grandeurs associées aux mesures des capteurs, appelées mesures identifiées :

$$x_{iden}^m(t) = \sum_{n=1}^N h_n^m(t) \star s_{iden}^n(t) \quad (8.11)$$

8.3.5 Identification de la source : application numérique

Identification de l'effort dans le plan

L'identification dans le plan est effectuée à partir des demi-sommes des 10 paires de jauges de déformation et de l'accéléromètre A3, donc le nombre de mesures pris en compte est $M = 11$. Les données de l'accéléromètre ne sont exploitées que jusqu'à 0.28ms car au-delà l'accéléromètre mesure également les effets de la flexion qu'on ne peut dissocier de ceux de la traction compression cisaillement. L'ensemble des paramètres sont répertoriés dans le tableau 8.3.

T_m (pour les capteurs)	0.65 ms
T_m (pour les accéléromètres)	0.28 ms
c_m (pour les capteurs)	1
c_m (pour l'accéléromètre)	$80.10^{-18} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$
borne temporelle min de E_s	0.05 ms
borne temporelle max de E_s	0.15 ms
borne fréquentielle max de E_s	200 kHz
γ_1	$3.10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{N}^{-2}$
fréq. de filtrage des jauges $f_{passe\ bas}$	15 kHz
fréq. de filtrage des accéléromètres $f_{passe\ haut}$	4 kHz

TABLE 8.3 Paramètres de l'identification de l'effort dans le plan.

γ_1 a été fixé à partir de la méthode L-curve. Cette méthode consiste à tracer pour un ensemble de choix de γ_1 la grandeur $\|s_{iden}\|^2$ en fonction de $\sum_{m=1}^M c_m \|x_{mes}^m - h_{test}^m * s\|_m^2$ et de prendre le γ_1 qui correspond au coin convexe de la courbe (voir figure 8.6). Ce coin correspond à un bon compromis de minimisation des deux normes. Pour évaluer l'intervalle dans lequel rechercher γ , il faut évaluer l'ordre de grandeur des deux normes, le rapport des deux donne un ordre de grandeur de γ .

Le signal identifié est illustré figure 8.7. Il s'identifie à un signal triangulaire de largeur 60 μs et de hauteur $-60 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$. La quantité de mouvement associée est de $2,2 \text{ Ns} \cdot \text{m}^{-1}$ (celle-ci se lit sur la représentation dans le domaine fréquentiel, à fréquence nulle $f = 0 \text{ Hz}$).

Remarque : une simulation numérique Radioss de la découpe sur une tranche du cordeau (2D suivant le plan (\vec{x}, \vec{z})) effectuée au sein d'ArianeGroup identifie cette durée à environ 30 μs pour charger et propager la fissure à travers l'épaisseur de l'ailette, parfois un peu plus. Ceci est cohérent avec le signal identifié ici.

Remarque : le signal identifié à l'allure d'un essai dynamique jusqu'à rupture. Le chargement se compose d'une montée élastique linéaire, d'une plastification, puis d'une rupture du matériau.

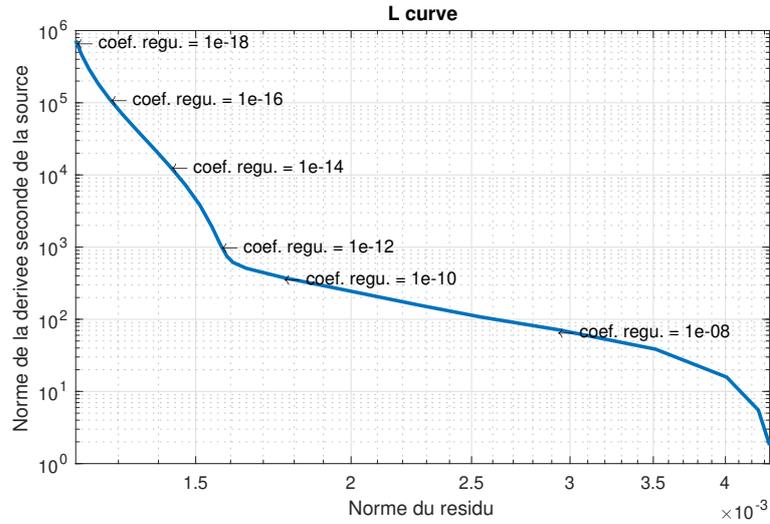


FIGURE 8.6 L-curve permettant la détermination de γ_1 pour l'identification de l'effort dans le plan. En abscisse le résidu $\sqrt{\sum_{m=1}^M c_m \|x_{mes}^m - h_{test}^m \star s_{iden}\|_m^2}$ et en ordonnée $\sqrt{\int_0^T \left(\frac{d^2 s_{iden}}{dt^2}\right)^2 dt}$ pour différents choix de γ_1 .

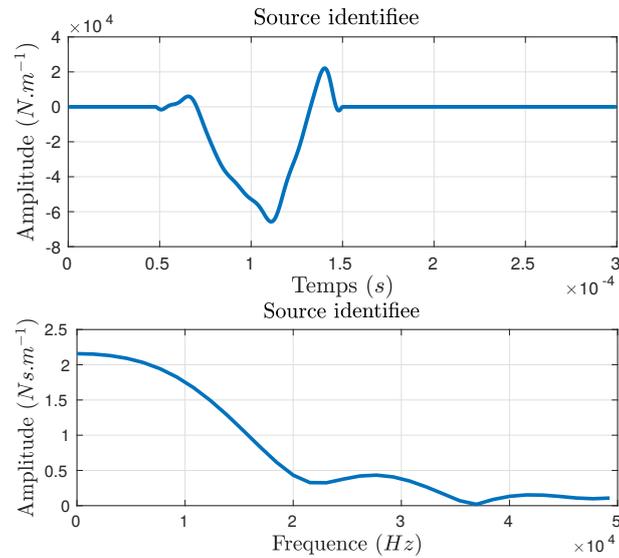


FIGURE 8.7 Effort dans le plan identifié, dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).

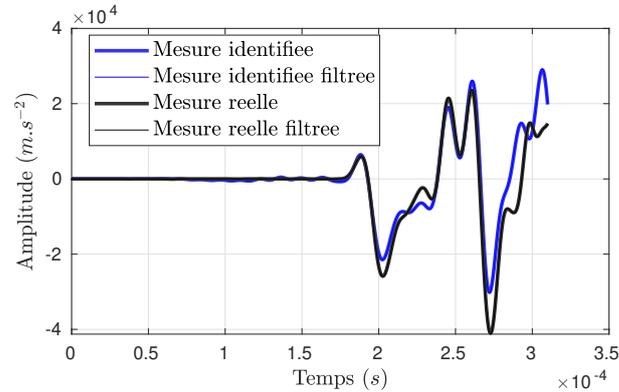


FIGURE 8.8 Mesure réelle et identifiée de l'accéléromètre A3.

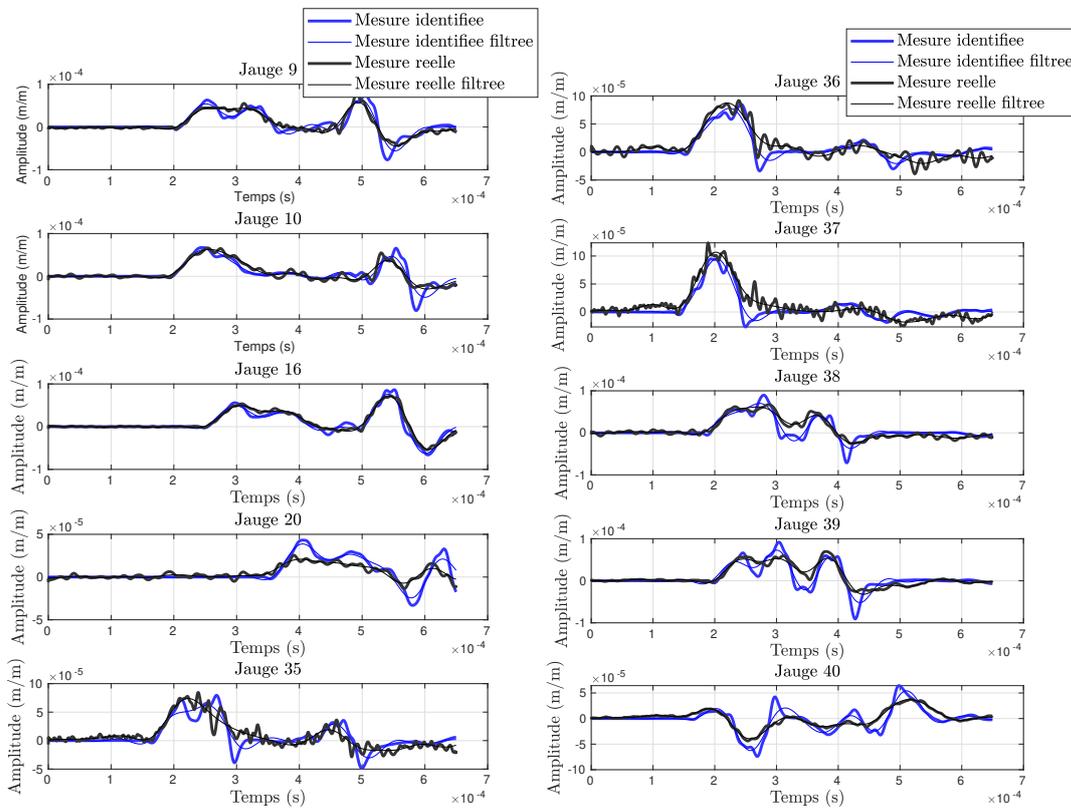


FIGURE 8.9 Mesures réelles et identifiées des demi-sommes des jauges de déformation.

Dans le domaine fréquentiel, la source forme un plateau entre 0 et 10 kHz. Elle est donc comparable à un Dirac sur cette gamme de fréquences. Les figures 8.8 et 8.9 comparent les mesures identifiées et les mesures réelles. Ce sont les mesures filtrées qui ont été utilisées pour l'identification, ce sont donc celles-ci qu'il faut comparer. Nous observons une forte concordance ce qui valide l'identification de la source. A titre indicatif les erreurs en norme L2 entre mesures réelles et mesures identifiées sont

Mesure	J9	J10	J16	J20	J35	J36	J37	J38	J39	J40	A3
Erreur L2	0.29	0.30	0.21	0.89	0.42	0.38	0.41	0.42	0.48	0.66	0.43

TABLE 8.4 Erreur entre mesures identifiées et mesures réelles de l'identification dans le plan.

répertoriées dans le tableau 8.4. La norme L2 étant particulièrement sévère pour des signaux oscillants, nous pouvons considérer qu'en deçà de 0.5, l'erreur est considérée comme acceptable.

Nous pouvons remarquer que la forme triangulaire du signal identifié est très proche du signal vitesse issu de l'intégration de l'accéléromètre A3 figure 8.4 où la superposition de deux signaux triangulaires est observée (correspondant a priori à l'onde de traction-compression et de cisaillement). Une étude analytique de propagation d'ondes planes aurait certainement pu, à partir de la mesure de la vitesse en A3, identifier un signal synthétique similaire.

Identification de l'effort hors plan

Pour l'identification hors plan nous ne considérons que la contribution des jauges de déformations. L'accéléromètre ne peut pas être pris en compte car il n'est pas possible de dissocier la contribution hors plan de la contribution dans le plan. Nous pourrions tenter de soustraire la mesure identifiée dans le plan à la mesure réelle pour en déduire la contribution hors plan, néanmoins les erreurs se cumuleraient et cette approche donnerait un résultat peu fiable.

Les paramètres de l'identification sont répertoriés dans le tableau 8.5.

T_m (pour les capteurs)	2 ms
c_m (pour les capteurs)	1
borne temporelle min de E_s	0.01 ms
borne temporelle max de E_s	0.15 ms
borne fréquentielle max de E_s	200 kHz
γ_2	$10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{N}^{-2}$
γ_3	$10^{-1} \text{ s}^4 \cdot \text{N}^{-2}$
fréq. de filtrage des jauges $f_{\text{passe bas}}$	15 kHz

TABLE 8.5 Paramètres de l'identification de l'effort hors plan.

Rappelons que le problème est symétrique suivant le plan $(0, x, y)$. Théoriquement la découpe ne devrait pas engendrer de déformations hors plan et donc rien ne permet de présupposer que les efforts se présentent sous la forme d'efforts défilants comme proposée équation 8.4.

La figure 8.10 représente l'effort identifié. Remarquons la quantité de mouvement de l'effort hors plan et environ 35 fois moins importante que celle de l'effort dans le plan, ce qui est cohérent avec le fait que l'effort hors plan soit théoriquement nul. Le moment identifié est également très faible.

Notons que les efforts ne présentent pas un "maximum" mais semblent osciller. L'origine physique de ce comportement semble difficile à expliquer. Il est possible que l'effort ne soit pas réellement défilant et qu'il change de signe au cours de la propagation. Dans ce cas les hypothèses sur la forme de la source ne sont pas valides ce qui amène à une identification aberrante. Néanmoins les mesures réelles et identifiées illustrées à la figure 8.11 concordent globalement.

Les erreurs répertoriées dans le tableau 8.6 sont globalement plus importantes que pour l'identification de l'effort dans le plan. Cela peut s'expliquer encore une fois par les fortes hypothèses de l'effort défilant potentiellement non valides.

Mesure	J9	J10	J16	J20	J35	J36	J37	J38	J39	J40
Erreur L2	0.59	0.61	1.05	0.84	0.42	0.58	0.67	0.62	0.50	1.23

TABLE 8.6 Erreur entre mesures identifiées et mesures réelles de l'identification hors plan.

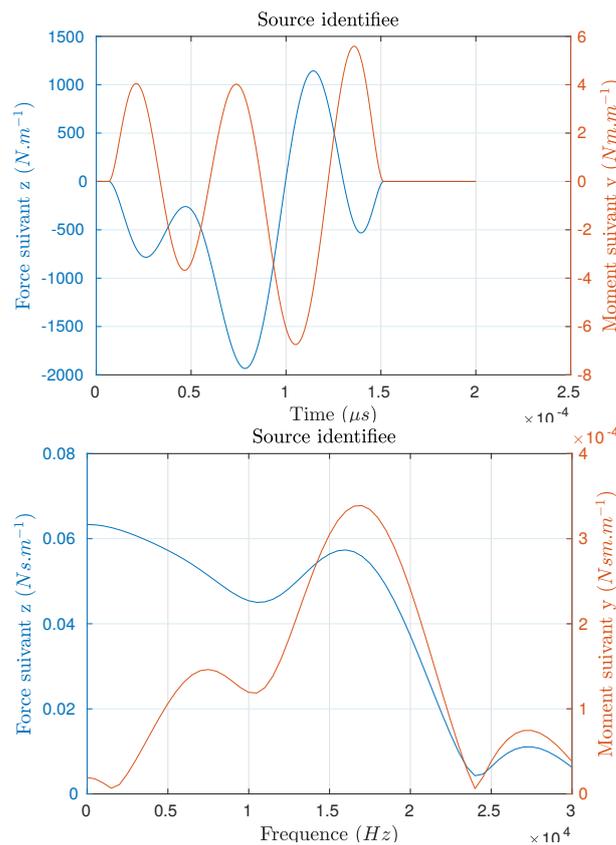


FIGURE 8.10 Effort hors plan identifié, dans le domaine temporel (en haut) et dans le domaine fréquentiel (en bas).

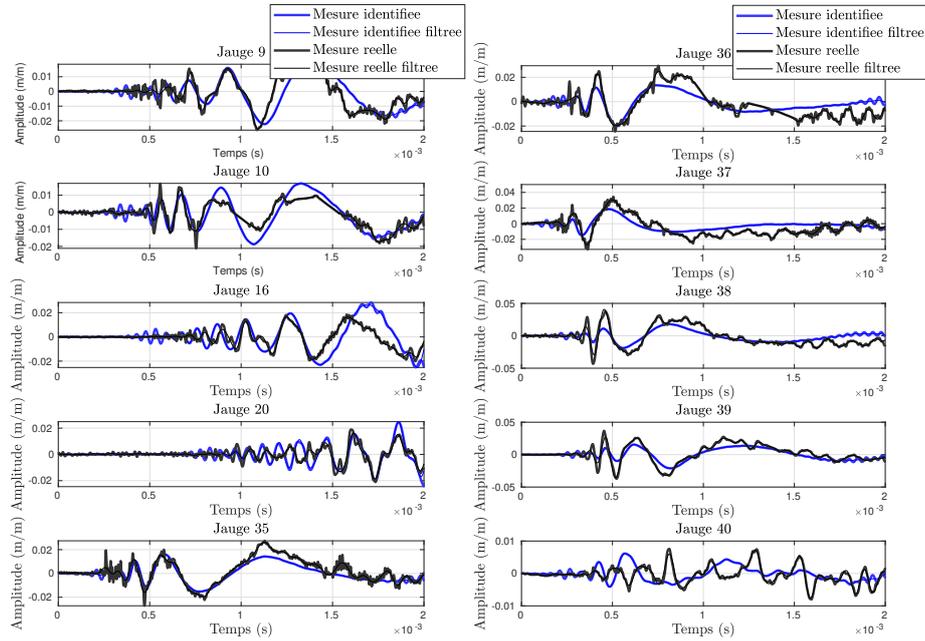


FIGURE 8.11 Mesures réelles et identifiées des demi-différences des jauges de déformation.

8.3.6 Réponse de la plaque soumise à la source identifiée

Réponse membranaire

La réponse membranaire de la plaque soumise à la source identifiée est reconstruite à partir du modèle développé. Les champs de déplacement et de déformation ε_{yy} sont représentés figure 8.12.

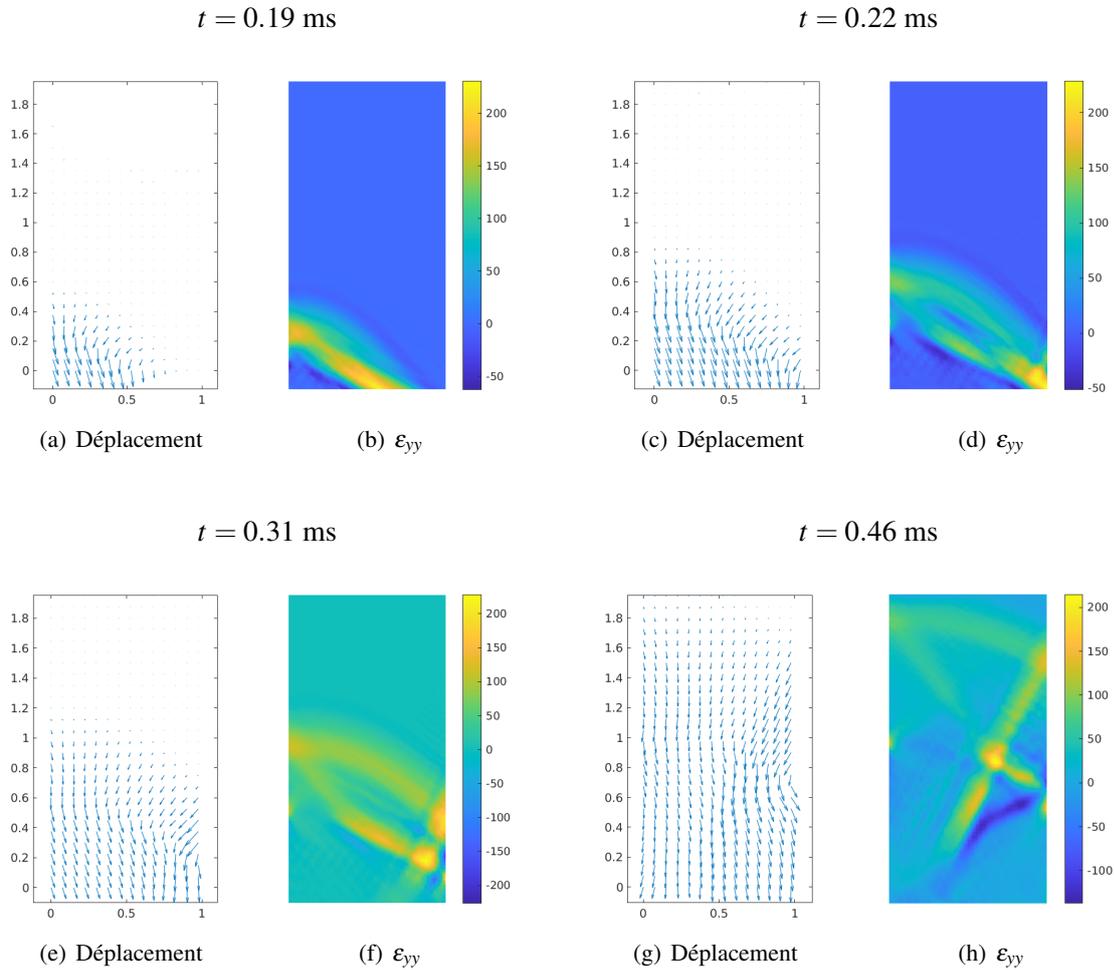


FIGURE 8.12 Réponse membranaire de la plaque soumise au signal identifié. Champ de déplacement et champ de déformation ε_{yy} (en $\mu\text{m/m}$). L'échelle du champ de déplacement n'est pas respectée. Rappel : les dimensions de la plaque sont de 1 m par 2 m.

Les champs de déformations montrent que l'onde de choc est relativement peu localisée : la longueur d'onde associée est d'environ 50 cm ce qui est relativement grand. Aux instants $t = 0.31 \text{ ms}$ et $t = 46 \text{ ms}$ les fronts de cisaillement et de traction-compression sont à peine dissociables.

Remarquons que la pénétration de l'onde génère un champ de déplacement négatif suivant y : la découpe a pour effet de rapprocher les deux plaques. Nous pouvons en conclure que les deux plaques risquent de s'entrechoquer aux instants suivants. La figure 8.13 illustre la déformée de la plaque au niveau du cordeau à différents instants : après la découpe il y a une déformée d'environ 0.04mm. Cela reste faible, ce déplacement ne devrait pas provoquer de recontact à ces instants. Notons néanmoins que la découpe provoque une vitesse de rapprochement moyenne de la plaque qui vaut : $v_y = \frac{p_y}{m} = \frac{2.2\text{N.s.m}^{-1}}{32.4\text{kg}} = -68 \text{ mm.s}^{-1}$ (p_y la quantité de mouvement suivant y et m la masse). Cette vitesse non négligeable pourra potentiellement provoquer un recontact entre les deux plaques découpées. Dans

le cas des structures réelles, les masses sont plus importantes (de l'ordre de plusieurs tonnes) donc les vitesses de rapprochement sont plus faibles ce qui diminue la probabilité de recontact.

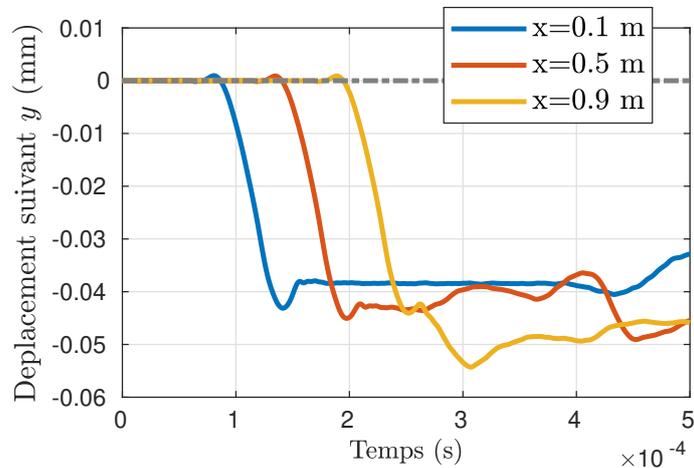


FIGURE 8.13 Déformée suivant y de la plaque au niveau du cordeau.

Réponse en flexion

La réponse en flexion de la plaque soumise à la source identifiée est reconstruite à partir du modèle développé. Le champ $\frac{\partial w}{\partial y}$ est représentée figure 8.14. La dispersion des ondes y est clairement visible.

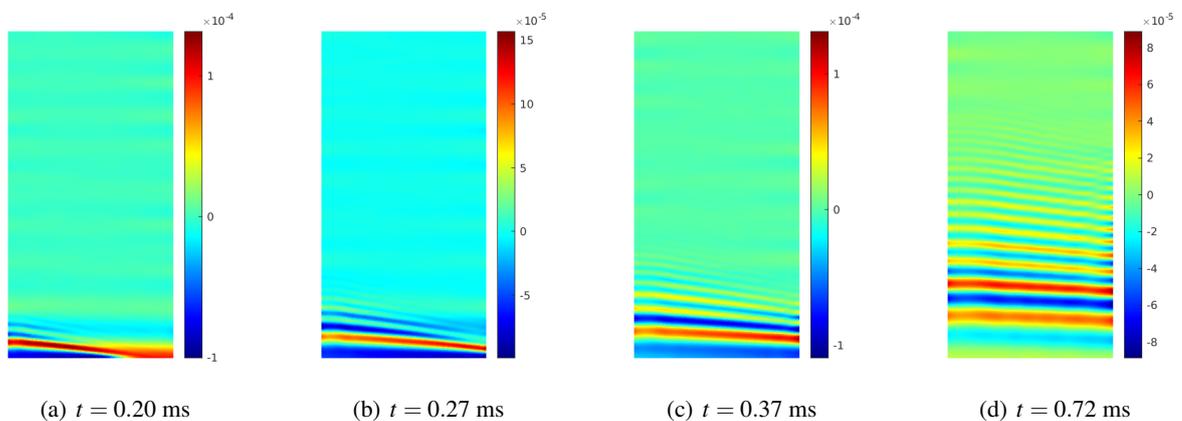


FIGURE 8.14 Réponse en flexion de la plaque soumise au signal identifié, la grandeur $\frac{\partial w}{\partial y}$ est illustrée à différents instants.

8.4 Identification de l'amortissement

L'amortissement est un paramètre particulièrement influant sur la réponse temporelle et fréquentielle. Il s'agit donc de l'identifier avec précision. Par ailleurs, ce paramètre est connu pour être dépendant de la fréquence ce qui complique son identification.

Une première stratégie d'identification consisterait à suivre le front d'onde (par exemple le premier front d'onde de traction compression) et à évaluer son atténuation pour en déduire l'amortissement. Cette approche est limitée pour plusieurs raisons. D'abord l'atténuation peut avoir plusieurs origines : diffusion, diffraction et amortissement ; il est difficile de séparer les différentes contributions. Et deuxièmement l'atténuation due à l'amortissement entre deux capteurs est a priori très faible (de l'ordre du pourcent), il sera difficile à identifier ce qui impliquerait une marge d'erreur importante. Une autre stratégie consiste à étudier la décroissance exponentielle de l'énergie au cours du temps sur une durée très longue car le facteur de décroissance est proportionnel à l'amortissement et à la fréquence. Nous n'avons pas accès directement à l'énergie qui est une forme de moyenne spatiale. Pour pallier ça nous considérerons que la moyenne temporelle d'un capteur est égale à la moyenne spatiale (hypothèse ergodique). Par ailleurs pour relier la décroissance de l'énergie à l'amortissement, nous utilisons la Transient SEA en considérant un seul sous-domaine. En pratique il s'agira d'étudier la décroissance logarithmique des diagrammes temps-fréquences des capteurs. L'amortissement identifié englobe l'ensemble des amortissements : de l'amortissement matériau au rayonnement dans l'air.

8.4.1 La Transient Statistical Energy Analysis appliquée à l'essai

La Transient Statistical Energy Analysis (TSEA) [130, 129] est une extension de la Stastical Energy Analysis (SEA) [109] aux problèmes non stationnaires, voir le chapitre 2 pour plus de détails.

Nous allons l'utiliser ici pour identifier l'amortissement dans la structure. La TSEA donne une relation sur l'énergie de la structure :

$$\frac{de}{dt} = -A(\langle \omega \rangle)e + P_d \quad (8.12)$$

avec e l'énergie mécanique (énergie élastique + énergie cinétique), P_d la puissance injectée définie sur une bande de fréquences I_ω de fréquence centrale $\langle \omega \rangle$ et de largeur de bande $\Delta\omega$. $I_\omega = [\langle \omega \rangle - \Delta\omega, \langle \omega \rangle + \Delta\omega]$ avec $\Delta\omega \ll \langle \omega \rangle$. $A(\langle \omega \rangle)$ correspond à la fonction d'amortissement. L'opérateur associé à la relation de comportement est défini par :

$$K = (1 + i\eta)\tilde{K} \quad (8.13)$$

avec \tilde{K} l'opérateur élastique réel et η le coefficient d'amortissement hystérétique connu pour être dépendant de la fréquence [150]. Au vu du comportement choisi, $A(\langle \omega \rangle) = \eta \langle \omega \rangle$, l'équation 8.12 devient :

$$\frac{de}{dt} = -\eta \langle \omega \rangle e + P_d \quad (8.14)$$

Après le choc pyrotechnique aucune puissance n'est injectée dans la structure : $P_d = 0$. On en déduit que l'énergie potentielle élastique de la structure s'écrit :

$$e_p(t) = e_0 \exp(-\eta \langle \omega \rangle t) \quad (8.15)$$

En étudiant la décroissance logarithmique de l'énergie nous pourrions en déduire l'amortissement η .

8.4.2 Diagramme temps-fréquences

On cherche à partir de nos données à construire une quantité qui se comporte comme l'énergie.

Pour identifier l'amortissement nous allons étudier la décroissance de l'énergie au cours du temps par bande de fréquences. On utilisera pour cela les diagrammes temps-fréquences issus de la transformée de Gabor :

$$x_{Gabor}(t, \langle \omega \rangle) = TF^{-1}(X(\omega)w_{\Delta\omega}(\langle \omega \rangle - \bar{\omega})) \quad (8.16)$$

avec $w_{\Delta\omega}$ une fonction de fenêtrage Gaussienne : $w_{\Delta\omega} = e^{-\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2}}$. $x(t, \langle \omega \rangle)$ s'interprète comme la contribution temporelle de la bande de fréquences centrée sur $\langle \omega \rangle$ de largeur $\Delta\omega$. Étudier la décroissance de l'énergie de cette fonction permettra d'extraire l'amortissement.

Les mesures des jauges de l'essai de découpe donnent les mesures de la déformation locale, elles ne permettent pas de mesurer l'énergie élastique de la structure. Néanmoins nous considérons, sous l'hypothèse d'un champ suffisamment diffus, que si nous prenons $\Delta\omega \geq \frac{2\pi c}{R}$, le carré de la transformée de Gabor d'une mesure issue d'une jauge $x(t, \langle \omega \rangle)^2$ a une décroissance semblable à celle de l'énergie potentielle de la structure. Pour améliorer cette approximation, nous prendrons la moyenne sur toutes les jauges. L'énergie $E_{\langle \omega \rangle}$ associée à une bande de fréquences centrée sur $\langle \omega \rangle$ vérifie :

$$E_{\langle \omega \rangle} \propto \sum_{m=1}^M |x_{Gabor\ m}(t, \langle \omega \rangle)|^2 \quad (8.17)$$

avec $x_{Gabor\ m}$ la transformée de Gabor de la mesure m . Dans le cas d'une plaque plane, les ondes de flexion et de compression sont découplées (ce qui n'est pas le cas d'assemblages 3D de plaques). Leurs décroissances énergétiques sont donc découplées et peuvent être étudiées séparément. Au vu du modèle 8.13 utilisé, leur décroissance sont censées être identique. Pour vérifier ce modèle nous choisissons de séparer les demi-sommes et les demi-différences des jauges en deux diagrammes temps-fréquences différents.

Les diagrammes des moyennes des carrés des transformées de Gabor des jauges des demi-différences et des demi-sommes sont illustrés figure 8.15. Pour les demi-sommes, $\Delta\omega = 1570\text{rad/s}$ et pour les demi-différences $\Delta\omega = 3920\text{rad/s}$.

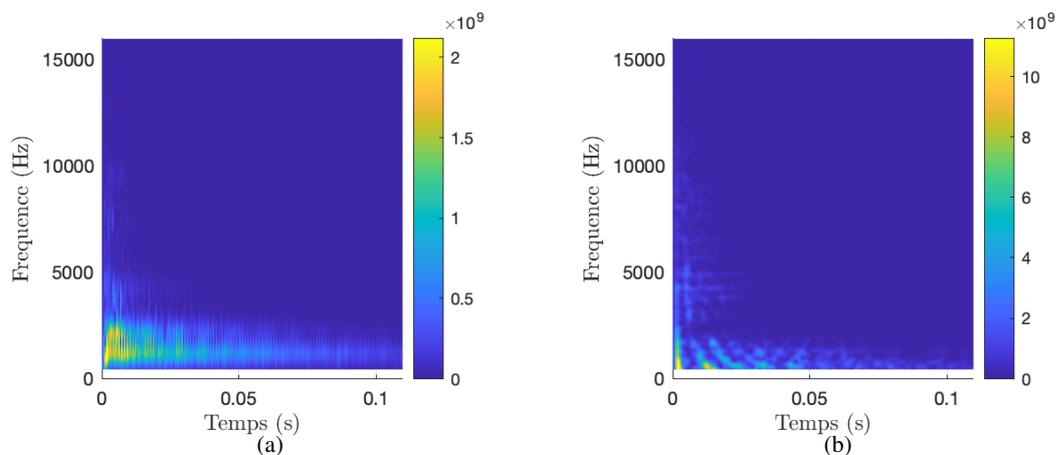


FIGURE 8.15 Diagrammes temps-fréquences obtenus avec la transformée de Gabor, moyenne du carré des demi-sommes (à gauche) et des demi-différences (à droite).

8.4.3 Identification de l'amortissement

Dans cette section nous identifions l'amortissement à partir de la décroissance logarithme des diagrammes temps-fréquences. Nous appliquons une régression linéaire sur les logarithmes des diagrammes sur une plage temporelle I_t (comme illustré figure 8.16). Nous supposons que le champ est diffus à partir de 10 ms ce qui correspond à une durée relative de 5 aller-retour de l'onde de compression.

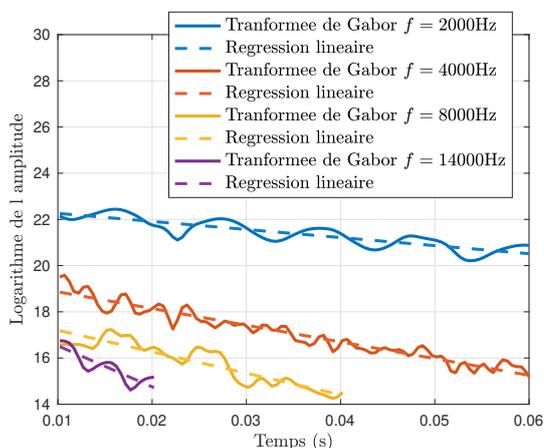


FIGURE 8.16 Logarithme des fonctions $w(t, \langle \omega \rangle)$ pour différentes fréquences $\langle \omega \rangle$ et leur régression linéaire.

L'énergie décroît plus rapidement dans la gamme des hautes fréquences que dans celle des basses fréquences. Afin d'affiner l'identification, la plage temporelle considérée dépend de la fréquence :

- $f \in [1000 \text{ Hz}, 4000 \text{ Hz}]$ on prendra $I_t = [10 \text{ ms}, 60 \text{ ms}]$.
- $f \in [4000 \text{ Hz}, 8000 \text{ Hz}]$ on prendra $I_t = [10 \text{ ms}, 40 \text{ ms}]$.

— $f \in [8000 \text{ Hz}, 15000 \text{ Hz}]$ on prendra $I_t = [10 \text{ ms}, 20 \text{ ms}]$.

L'amortissement identifié est illustré figure 8.17. Les amortissements issus de la demi-somme et de la demi-différence sont sensiblement similaires.

L'amortissement identifié englobe l'ensemble des amortissements, néanmoins nous pouvons supposer que l'amortissement matériau est prédominant. Ce dernier prédit un amortissement égal pour les vibrations hors plan et dans le plan. Ceci est en accord avec le résultat, excepté en hautes fréquences où l'amortissement hors plan (flexion) est plus important que l'amortissement dans le plan (membranaire). En effet, d'autres types d'amortissement peuvent apparaître en hautes fréquences pour les vibrations hors plan.

A titre de comparaison, l'amortissement de l'aluminium est identifié à $\eta = 2.5 \times 10^{-3}$ à 400 Hz dans [14, 3] et il est estimé à 1×10^{-3} à 10 kHz dans l'ECCS ([49]). Dans [2], l'amortissement dans la structure SYLDA du lanceurs Ariane 5, principalement en composite, est estimé à $\eta = 10^{-3}$.

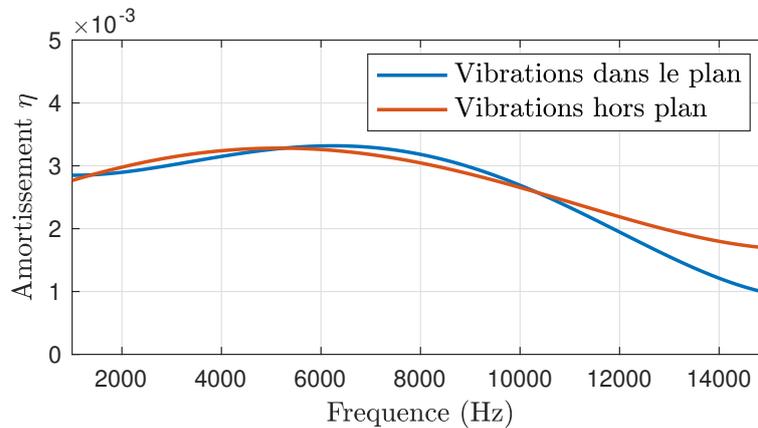


FIGURE 8.17 Amortissement identifié en fonction de la fréquence.

8.5 Conclusion

La découpe pyrotechnique qui apparaît lors de la séparation des différents étages des lanceurs Ariane 5 et 6 génère des chocs qu'il est nécessaire de maîtriser. Dans ce chapitre, une partie des travaux développés dans cette thèse ont été appliqués à l'identification du signal à la source du choc.

Nous avons exploité des mesures issues d'une campagne d'essais de découpe. Un modèle numérique de l'essai, performant sur l'intégralité de la bande fréquentielle à identifier, a été mis en place : dans la tranche des basses fréquences nous utilisons la MEF et dans la tranche des hautes fréquences nous utilisons la VTTCR. La VTTCR a été couplée à la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) pour reconstruire efficacement la réponse temporelle avec le logiciel TAPYROSS. Une méthode de problème inverse, exploitant les mesures réelles et le modèle numérique, a été mise en place pour identifier le choc. Il s'agissait plus précisément de reconstruire une source synthétique générant les mêmes données aux points de mesures. Cela permet d'aboutir à des résultats pertinents mais nécessite une maîtrise de

la méthode et une connaissance de la physique mise en jeu. En effet de nombreux paramètres sont à calibrer.

L'effort dans le plan identifié se rapproche d'un signal triangulaire de largeur 60μ s et d'amplitude 60 kN.m^{-1} , la quantité de mouvement associée est de 2.2 Ns.m^{-1} . Les efforts hors plan sont a priori "parasites" car au vu de la symétrie du problème, théoriquement ils ne devraient pas être présents. Néanmoins nous avons cherché à les identifier en les supposant défilants. Malgré des déformations de flexion et de traction d'ordre de grandeur comparable, l'effort hors plan et le moment sont très faibles devant l'effort dans le plan (quantité de mouvement environ 35 fois plus faible).

Il s'agirait par la suite de traiter la simulation du lanceur complet soumis à l'effort identifié. L'amortissement étant un paramètre prépondérant lorsqu'il s'agit de traiter des temps longs, une première étape consiste à l'identifier. Une méthode d'identification a été proposée à cet effet dans ce chapitre. La seconde étape consistera à exploiter les méthodes de résolution large bande proposées dans les travaux des chapitres précédents pour traiter la simulation complète.

Conclusions et perspectives

La simulation numérique de propagation d'ondes du type choc est un outil de conception pour de nombreuses industries telle l'industrie aérospatiale. Elle vise à remplacer les essais réels mais aussi à explorer des problèmes inaccessibles par le seul biais expérimental. Actuellement, les codes de calculs industriels ne couvrent qu'une partie du besoin car ils sont limités en contenu fréquentiel. La gamme des moyennes et hautes fréquences est généralement délaissée.

Ces travaux visent à contribuer au développement de méthodes numériques à faible coût de calcul pour la simulation de problèmes de dynamique incluant les moyennes fréquences. L'approche proposée consiste à reprendre la stratégie proposée dans [31]. Elle consiste à résoudre le problème dans le domaine fréquentiel et à utiliser des méthodes de résolution fréquentielles adaptées à chaque gamme fréquentielle : les basses fréquences sont traitées par les éléments finis et les moyennes et hautes fréquences sont traitées avec une méthode Trefftz, la Variational Theory of Complex Rays. Cette stratégie s'est avérée être plus efficace pour traiter les problèmes transitoires que les approches Eléments Finis classiques. Néanmoins elle reste coûteuse pour traiter les problèmes de grande taille. Le point-clé est de traiter le problème par bandes de fréquences plutôt que fréquence par fréquence.

L'application des méthodes de résolution large bande est entravée par le mauvais conditionnement de la méthode VTCR. Une étude approfondie a permis de dégager des résultats sur l'origine du mauvais conditionnement et montre notamment l'influence de la forme des sous-domaines. Un critère sur le pas de discrétisation angulaire $\Delta\theta_{optimal}$ plus précis que les critères heuristiques utilisés jusqu'à présent [47] a été développé 4.56 :

$$\Delta\theta_{optimal}(\theta) = \frac{2\pi}{ky_{max}(\theta)}$$

La nouveauté de ce critère est de dépendre de la direction de l'onde plane θ . Ce dernier a été à l'origine de la construction d'une base de fonctions de forme semi-analytique optimale en matière de précision et conditionnement : la base de Fourier Généralisée. Elle est inspirée des bases de Fourier développée dans [85] avec l'avantage d'être adaptée à la géométrie du sous-domaine traité. Efficace et à faible coût de calcul, il s'agit d'un outil qui a été exploité pour la résolution large bande. Une seconde approche a également été proposée, plus coûteuse mais légèrement plus robuste : la construction d'une base de fonctions Trefftz orthonormée en énergie. Ces deux bases sont également exploitées comme outils de

régularisation du portrait. L'ensemble de ces résultats ouvre la voie à de nombreux développements dont la résolution large bande.

Dans ce manuscrit trois stratégies ont été proposées pour réduire les coûts de résolution dans le domaine fréquentiel en vue de reconstruire la réponse temporelle :

1. La première stratégie a consisté à reprendre les travaux de [8] pour résoudre le problème fréquentiel par bande de fréquence : coupler la VTCR à la méthode de réduction de modèle PGD. Si le couplage semblait prometteur du fait du caractère propagatif de la représentation du champ par la variable VTCR, l'étude de l'efficacité a montré qu'il s'avère peu efficace dans la gamme des moyennes fréquences. La méthode est en effet fortement sensible à la densité modale qui est, par définition, très importante dans la gamme des moyennes fréquences. Ce couplage est pertinent seulement lorsque l'amortissement est important ou dans la gamme des basses fréquences.

Pour ce qui est des algorithmes de résolution, des stratégies d'actualisations des modes PGD ont été développées pour ce couplage. Elles permettent de corriger la convergence par pallier observée dans les travaux précédents [8]. Elles augmentent la vitesse convergence dans les gammes de problèmes où le couplage est intéressant.

2. Pour reconstruire efficacement la réponse transitoire, la méthode de la fenêtre exponentielle (EWM) a été couplée à la VTCR. Elle consiste à résoudre le problème de dynamique dans le domaine de Laplace plutôt que dans le domaine fréquentiel. Elle permet ainsi de réduire le pas fréquentiel de résolution lorsqu'il s'agit de reconstruire des temps courts. Ce couplage permet d'obtenir des gains d'un facteur de l'ordre de plusieurs dizaines lorsqu'il s'agit de reconstruire la réponse sur une durée d'un ou deux allers-retours de l'onde dans la structure.

Par ailleurs, la EWM amène à résoudre un problème fortement amorti dans le domaine fréquentiel, soit une gamme de problèmes dans laquelle la résolution PGD est a priori efficace. La résolution fréquentielle a dans un second temps été effectuée avec les outils de résolution large bande où l'efficacité sur les problèmes traités reste limitée.

3. Pour réduire les coûts de résolution sur des durées plus longues que le régime transitoire, une toute autre stratégie a été proposée : une méthode de décomposition de domaine temporel adaptée à la résolution fréquentielle. Elle permet de résoudre le problème de dynamique à travers des résolutions fréquentielles avec un pas de discrétisation très grossier et indépendant de la densité modale du problème. Cela en fait une approche compétitive dans la gamme des moyennes fréquences. Par rapport à l'approche point par point très peu d'opérateurs doivent être construits et inversés. Couplée à la VTCR, elle a permis d'obtenir des gains en temps de l'ordre d'un facteur 40, avec une tendance à la hausse lorsque le nombre de degrés de liberté spatial augmente. Il s'agit de premiers résultats, des perspectives d'améliorations ont été proposées.

Par ailleurs, avec la VTCR le temps de construction des opérateurs est parfois plus important que la résolution et ils peuvent nécessiter une taille mémoire critique. Le faible nombre d'opérateurs à construire et manipuler est un avantage majeur de cette méthode.

Néanmoins, plusieurs dizaines d'opérateurs VTCR doivent être manipulés simultanément à chaque itération de la résolution, ce qui est une potentielle limite pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Notons que l'ensemble des développements proposés ont cherché à reconstruire le champ de manière déterministe. Les erreurs utilisées pour quantifier la qualité des méthodes pénalisent fortement les potentiels déphasages, qui sont en réalité très peu influents sur les quantités d'intérêts visées telles les accélérations maximales subites. Une analyse moins sévère, notamment à travers l'étude de Spectres de Réponse aux Chocs (SRC) serait appropriée.

Une partie des travaux ont été intégrés dans le logiciel TAPYROSS afin de permettre la reconstruction efficace de la réponse transitoire de structures d'assemblage de plaques et de coques. Il s'agit de la méthode de la fenêtre exponentielle. Une application de ces développements a été proposée : l'identification du signal source associé au choc dû à la découpe pyrotechnique, lors de la séparation des différents étages des lanceurs Ariane 5 et 6 d'ArianeGroup. En partant de mesures issues d'essais réels, un modèle numérique est développé pour remonter jusqu'au signal source. L'identification par problème inverse s'est faite avec la méthode de la déconvolution. Des améliorations sur la régularisation de cette dernière ont, par ailleurs, été proposées. Ces développements ont permis d'identifier un signal synthétique dont le contenu fréquentiel s'étend jusqu'à environ 50 kHz.

Ces travaux ont, pour la majorité, été développés sur des cas d'acoustique 2D. Il s'agira à court terme d'étendre ses travaux à la dynamique des assemblages de plaques et de coques pour traiter la dynamique des lanceurs :

- Sur les travaux traitant du conditionnement, la base de fonctions de forme Trefftz orthonormée en énergie est a priori applicable à ces problèmes sans difficultés majeures. Pour ce qui est du critère de discrétisation et de la base de Fourier généralisée, des développements théoriques seront dans un premier temps nécessaire.
- Les conclusions sur les limites de la résolution large bande PGD sont a priori les mêmes pour les assemblages de plaques et de coques. En effet les réponses sont globalement plus complexes : les ondes hors plan sont dispersives avec la présence d'ondes évanescentes et il y a deux types d'onde dans le plan, les ondes de cisaillement et de traction-compression. Les approches par réduction de modèles ne sont pas à exclure pour autant. Des pistes basées sur des représentations moins sensibles à la phase du champ peuvent être envisagées. Il s'agira par exemple de s'inspirer des méthodes hautes fréquences.
- La méthode de l'enveloppe exponentielle a été intégrée au logiciel TAPYROSS pour traiter efficacement le régime transitoire sur un cas simple. Il n'y a pas de limite à simuler la réponse sur une partie plus complexe du lanceur.
- La méthode de décomposition de domaine temporel proposée est prometteuse. Elle nécessite néanmoins de nombreux développements avant de pouvoir être appliquée efficacement sur un

problème complexe tel un lanceur. Il s'agira dans un premier temps de définir efficacement le problème associé à la partie amortissante de la méthode.

Par ailleurs, une perspective de développement futur consiste à améliorer la méthode de décomposition de domaine temporel couplée à la VTCR. L'accent devant être mis sur la réduction du nombre d'itérations nécessaire avant convergence. Il a été montré que derrière ce couplage se cache de la décomposition de domaine spatial du type Schwartz sans recouvrement. Une source d'inspiration peut être trouvée dans les méthodes de décomposition de domaine spatiales où des efforts importants sont déployés dans la littérature pour transmettre efficacement les ondes entre les sous-domaines spatiaux.

Ces travaux ont été appliqués à des structures linéaires. Il s'agira également d'envisager la résolution de problèmes non linéaires. La difficulté réside dans le fait que les non-linéarités sont exprimées dans le domaine temporel alors que la résolution est dans le domaine fréquentiel. Une première approche consiste à appliquer des méthodes d'Alternating Frequency Time [22], elles consistent à itérer entre domaine temporel et fréquentiel. Une autre approche consiste à appliquer le solveur itératif LATIN (LArge Time INcrement). Au cours de ces travaux de thèses, cette dernière a été appliquée pour traiter des non-linéarités de l'amortissement dans le domaine temporel tout en résolvant le problème avec la VTCR dans le domaine fréquentiel. Les développements et les résultats prometteurs n'ont pas été rapportés dans ce manuscrit par souci de cohérence avec la problématique visée. Avec la méthode de décomposition de domaine temporel le problème est défini en temps et la résolution est itérative, elle est a priori prédisposée à résoudre des problèmes non linéaires.

Bibliographie

- [1] Ainsworth, M., Zhu, J., Craig, A., and Zienkiewicz, O. (1989). Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for numerical methods in engineering*, 28 :2161 – 2174.
- [2] Alessandro, C. (2016). *Simulation of low and mid frequency response of shocks with a frequency approach*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan. 2016SACLN012.
- [3] Alva, A. and Desai, V. (2006). Damping behavior of cast and sintered aluminium. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*.
- [4] Alves, C. and Valtchev, S. (2005). Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 29 :371–382.
- [5] Avery, P., Farhat, C., and Reese, G. (2007). Fast frequency sweep computations using a multi-point padé-based reconstruction method and an efficient iterative solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69 :2848 – 2875.
- [6] Babuska, I. and Rheinboldt, W. (1978). Error estimates for adaptive finite element computations. *Journal of numerical analysis*, 15(4) :736–754.
- [7] Baker Jr, G. and Graves-Morris, P. (1996). *Padé Approximants*. Cambridge University Press.
- [8] Barbarulo, A., Ladevèze, P., Riou, H., and Kovalevsky, L. (2014). Proper generalized decomposition applied to linear acoustic : A new tool for broad band calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 333(11) :2422 – 2431.
- [9] Barnett, A. and Betcke, T. (2008). Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains. *Journal of Computational Physics*, 227(14) :7003 – 7026.
- [10] Benamou, J.-D. and Després, B. (1996). A Domain Decomposition Method for the Helmholtz Equation and Related Optimal Control Problems. Research Report RR-2791, INRIA. Projet IDENT.
- [11] Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185 – 200.
- [12] Berry, M. V. (1994). Evanescent and real waves in quantum billiards and Gaussian beams. *J. Phys. A*, 27 :L391.
- [13] Bettinotti, O., Allix, O., Perego, U., Oancea, V., and Malherbe, B. (2017). Simulation of delamination under impact using a global–local method in explicit dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 125 :1–13.
- [14] Bhagat R.B., Amateau M.F., S. E. (1989). Damping behavior of mechanically alloyed aluminum and aluminum matrix composites. *Int. J. Powder Metall*, 25 :311–316.

- [15] Bonnet, M., Chaillat, S., and Semblat, J.-F. (2008). A multi-level fastmultipole bem for 3-d elastodynamics in the frequency domain. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 197(49-50) :4233–4249.
- [16] Boubendir, Y., Antoine, X., and Geuzaine, C. (2012). A Quasi-Optimal Non-Overlapping Domain Decomposition Algorithm for the Helmholtz Equation. *Journal of Computational Physics*, 213(2) :262–280. 24 pages.
- [17] Boubendir, Y. and Midura, D. (2018). Non-overlapping domain decomposition algorithm based on modified transmission conditions for the helmholtz equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(6) :1900 – 1911. 2nd Annual Meeting of SIAM Central States Section, September 30-October 2, 2016.
- [18] Boucinha, L., Gravouil, A., and Ammar, A. (2013). Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :67–88. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.11.003>.
- [19] Brebbia, C. (1984). The boundary element method in engineering practice. *Engineering Analysis*, 1(1) :3 – 12.
- [20] Buffa, A. and Monk, P. (2008). Error estimates for the ultra weak variational formulation of the helmholtz equation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(6) :925–940.
- [21] Bézier, G. (2012). *Sur l'étude fréquentielle de la propagation des chocs pyrotechniques dans les structures complexes*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [22] Cameron, T. M. and Griffin, J. H. (1989). An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154.
- [23] Carcaterra, A. and Adamo, L. (1999). Thermal analogy in wave energy transfer : Theoretical and experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 226(2) :253 – 284.
- [24] Carmo, M. P. D. (2016). *Differential Geometry of curves and surfaces : revised and updatet second edition*. Dover Publications.
- [25] Cattabiani, A., Riou, H., Barbarulo, A., Ladevèze, P., Bezier, G., and Troclet, B. (2015). The variational theory of complex rays applied to the shallow shell theory. *Computers & Structures*, 158.
- [26] Cessenat, O. and Despres, B. (1998). Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. *Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL*, 35.
- [27] Chaillat, S. (2019). *Contributions to the modelling of acoustic and elastic wave propagation in large-scale domains with boundary element methods*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole normale supérieure Paris-Saclay.
- [28] Chappell, D., Löchel, D., Søndergaard, N., and Tanner, G. (2014). Dynamical energy analysis on mesh grids : A new tool for describing the vibro-acoustic response of complex mechanical structures. *Wave Motion*, 51(4) :589 – 597. Innovations in Wave Modelling.
- [29] Chappell, D. J., Giani, S., and Tanner, G. (2011). Dynamical energy analysis for built-up acoustic systems at high frequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(3) :1420–1429.
- [30] Chappell, D. J., Tanner, G., and Giani, S. (2012). Boundary element dynamical energy analysis : A versatile method for solving two or three dimensional wave problems in the high frequency limit. *Journal of Computational Physics*, 231(18) :6181 – 6191.

- [31] Chevreuil, M., Ladevèze, P., and Rouch, P. (2007). Transient analysis including the low- and the medium-frequency ranges of engineering structures. *Computers & Structures*, 85 :1431–1444.
- [32] Chinesta, F., Keunings, R., and Leygue, A. (2014). *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations. A primer*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology.
- [33] Chinesta, F. and Ladevèze, P. (2020). *3 Proper generalized decomposition*, pages 97–138. De Gruyter.
- [34] Chinesta, F., Ladevèze, P., and Cueto, E. (2011). A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18 :395–404.
- [35] Cicirello, A. and Langley, R. (2013). The vibro-acoustic analysis of built-up systems using a hybrid method with parametric and non-parametric uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :2165–2178.
- [36] Colton, D. and Kress, R. (2001). On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic herglotz pairs in sobolev spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(16) :1289–1303.
- [37] Combescure, A. and Gravouil, A. (2001). A time–space multi-scale algorithm for transient structural nonlinear problems. *Mécanique & Industries*, 2(1) :43–55.
- [38] Cotoni, V., Shorter, P., , and Langley, R. a. (2007). Numerical and experimental validation of a hybrid finite element-statistical energy analysis method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(1) :259–270.
- [39] Craig, R. R. and Bampton, M. C. C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319.
- [40] Craig, R. R. and Kurdila, A. J. (2006). *Fundamentals of structural dynamics*. John Wiley & Sons.
- [41] Cueto, E., González, D., and Alfaro, I. (2016). *PGD for Dynamical Problems*, pages 65–89. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology.
- [42] Deckers, E., Hörlin, N.-E., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2012). A wave based method for the efficient solution of the 2d poroelastic biot equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204 :245 – 262.
- [43] Demkowicz, L., Oden, J., Rachowicz, W., and Hardy, O. (1989). Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 1. constrained approximation and data structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1) :79 – 112.
- [44] Deraemaeker, A., Babuška, I., and Bouillard, P. (1999). Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :471 – 499.
- [45] Derumaux, M. (2004). *Sur la modélisation / simulation de liaisons soumises à des chocs pyrotechniques*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [46] Desmet, W. (1998). *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Phd, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- [47] Desmet, W., van Hal, B., Sas, P., and Vandepitte, D. (2002). A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33(7) :527 – 540. Engineering Computational Technology & Computational Structures Technology.

- [48] Djellouli Rabia, Farhat Charbel, T. R. (2001). A fast method for solving acoustic scattering problems in frequency bands. *Journal of Computational Physics*, 168 :412–432.
- [49] ECSS (2015). *European Cooperation for Space Standardization, Space engineering, Mechanical shock design and verification handbook*.
- [50] Fairweather G., Karageorghis A., M. P. (2003). The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 27(7) :759–769.
- [51] Farhat, C., Harari, I., and Hetmaniuk, U. (2001). The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3195–3209.
- [52] Farhat, C., Harari, I., and Hetmaniuk, U. (2003). A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1389–1419.
- [53] Farhat, C., Macedo, A., Lesoinne, M., Roux, F. X., Magoules, F., and Bourdonnaye, A. D. L. (2000). Two-level domain decomposition methods with Lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4) :213–240.
- [54] Farhat, C. and Mandel, J. (1998). The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2) :129–151.
- [55] Farhat, C., Tezaur, R., and Weidemann-Goiran, P. (2004a). Higher-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(11) :1938–1956.
- [56] Farhat, C., Wiedemann-Goiran, P., and Tezaur, R. (2004b). A discontinuous galerkin method with plane waves and lagrange multipliers for the solution of short-wave helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*, 39 :307–317.
- [57] Franca, L. P., Farhat, C., Macedo, A. P., and Lesoinne, M. (1997). Residual-free bubbles for the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :4003–4009.
- [58] Gabard, G., Gamallo, P., and Huttunen, T. (2011). A comparison of wave-based discontinuous Galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(3) :380–402.
- [59] Gamallo, P. and Astley, R. (2007). A comparison of two Trefftz-type methods : The ultraweak variational formulation and the least-squares method, for solving shortwave 2-d helmholtz problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71 :406 – 432.
- [60] Gander, M., Magoulès, F., and Nataf, F. (2002). Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24 :38–60.
- [61] Genechten, B., Atak, O., Bergen, B., Deckers, E., Jonckheere, S., Lee, J. S., Maressa, A., Vergote, K., Pluymers, B., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2012). An efficient Wave Based Method for solving Helmholtz problems in three-dimensional bounded domains. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 :63–75.
- [62] Genechten, B. V., Bergen, B., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2010). A Trefftz-based numerical modelling framework for Helmholtz problems with complex multiple-scatterer configurations. *Journal of Computational Physics*, 229(18) :6623 – 6643.

- [63] González, D., Cueto, E., and Chinesta, F. (2014). Real-time direct integration of reduced solid dynamics equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99.
- [64] Gosselet, P. and Rey, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural dynamics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13.
- [65] Gra, R. M. (2001). *Toeplitz and Circulant Matrices : A review*. Information Systems Laboratory Department of Electrical Engineering Stanford University.
- [66] Grede, A. (2009). *Modélisation des chocs d'origine pyrotechnique dans les structures d'Ariane5 : développement de modèles de propagation et d'outils de modélisation*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris.
- [67] Guasch, O. and García, C. (2014). Numerical Local Time Stepping Solutions for Transient Statistical Energy Analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(6). 064502.
- [68] Hal, B., Desmet, W., and Vandepitte, D. (2005). Hybrid finite element - wave-based method for steady-state interior structural-acoustic problems. *Computers & Structures*, 83 :167–180.
- [69] Hall, J. and Beck, J. (1993). Linear system response by dft : Analysis of a recent modified method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics - Earthquake Eng Struc Dynam*, 22 :599–615.
- [70] Harari, I. and Hughes, T. (1992). Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98 :411–454.
- [71] Hawes, D., Langley, R., Butlin, T., and Ishii, Y. (2019). A hybrid finite element-statistical energy analysis method for impulsive and transient loading. *Journal of Sound and Vibration*, 459 :114849.
- [72] Hetmaniuk, U., Tezaur, R., and Farhat, C. (2012). Review and assessment of interpolatory model order reduction methods for frequency response structural dynamics and acoustics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90 :1636–1662.
- [73] Hiptmair, R., Moiola, A., and Perugia, I. (2015). A survey of trefftz methods for the helmholtz equation. *Building Bridges : Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, pages 237–279.
- [74] Hu, Q. and Yuan, L. (2014). A weighted variational formulation based on plane wave basis for discretization of helmholtz equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 11(3) :587–607.
- [75] Hughes, T. J. (1995). Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1) :387 – 401.
- [76] Hurty, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4) :678–685.
- [77] Ihlenburg, F. and Babuška, I. (1995). Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(22) :3745–3774.
- [78] Isabelle Terrasse, T. A. (2007). *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes*. Cours MAP 558.
- [79] J. I. Humar, H. X. (1993). Dynamic response analysis in the frequency domain. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 22.

- [80] Jens Markus, M. (1995). *On generalized finite element methods*. PhD thesis, University of Maryland at College Park.
- [81] Klanner, M. and Ellermann, K. (2015). Wave based method for the steady-state vibrations of thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, 345 :146 – 161.
- [82] Kolda, T. and Bader, B. (2009). Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*, 51 :455–500.
- [83] Kovalevsky, L. (2011). *La théorie variationnelle des rayons complexes version Fourier : application aux problèmes tridimensionnels de vibro-acoustique*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [84] Kovalevsky, L. and Gosselet, P. (2015). A quasi-optimal coarse problem and an augmented krylov solver for the variational theory of complex rays. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107 :n/a–n/a.
- [85] Kovalevsky, L., Ladevèze, P., and Riou, H. (2012a). The Fourier version of the variational theory of complex rays for medium-frequency acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :142–153.
- [86] Kovalevsky, L., Ladevèze, P., Riou, H., and Bonnet, M. (2012b). The variational theory of complex rays for three-dimensional helmholtz problems. *Journal of Computational Acoustics*, 20.
- [87] Kovalevsky, L., Riou, H., and Ladevèze, P. (2013). On the use of the variational theory of complex rays for the analysis of 2-d exterior helmholtz problem in an unbounded domain. *Wave Motion*, 50 :428–436.
- [88] Kovalevsky, L., Riou, H., and Ladevèze, P. (2014). A Trefftz approach for medium-frequency vibrations of orthotropic structures. *Computers & Structures*, 143 :85 – 90.
- [89] Krokstad, A., Strom, S., and Sørdsdal, S. (1968). Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *Journal of Sound and Vibration*, 8(1) :118 – 125.
- [90] Ladevèze, P. (1983). Error estimate procedure in the finite element method and application. *Journal of Numerical Analysis*, 3(20) :485–509.
- [91] Ladevèze, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 300(2) :41–44.
- [92] Ladevèze, P. (1996). A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes rendus de l’académie des sciences série II fascicule B-Mécanique physique chimie astronomie*, 322 :849–856.
- [93] Ladevèze, P., Arnaud, L., Rouch, P., and Blanzé, C. (2001). The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18 :193–214.
- [94] Ladevèze, P. and Chevreuril, M. (2005). A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(4) :503–527.
- [95] Ladevèze, P. and Riou, H. (2005). Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :3167–3191.

- [96] Ladevèze, P. and Riou, H. (2014). On Trefftz and weak Trefftz discontinuous Galerkin approaches for medium-frequency acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 278 :729 – 743.
- [97] Langley, R. (1992). A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3) :483 – 502.
- [98] Langley, R. (1995). On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4) :637 – 657.
- [99] Langley, R., Hawes, D., Butlin, T., and Ishii, Y. (2019). A derivation of the transient statistical energy analysis (tsea) equations with benchmark applications to plate systems. *Journal of Sound and Vibration*, 445 :88 – 102.
- [100] Langley, R., Smith, J., and Fahy, F. (1997). Statistical energy analysis of periodically stiffened damped plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 208(3) :407 – 426.
- [101] Langley, R. S. and Cordioli, J. A. (2009). Hybrid deterministic-statistical analysis of vibro-acoustic systems with domain couplings on statistical components. *Journal of Sound and Vibration*, 321(3) :893 – 912.
- [102] Langley, R. S. and Cotoni, V. (2007). Response variance prediction for uncertain vibro-acoustic systems using a hybrid deterministic-statistical method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(6) :3445–3463.
- [103] Lase, Y., Ichchou, M., and Jezequel, L. (1996). Energy flow analysis of bars and beams : Theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) :281 – 305.
- [104] Li, H., Ladevèze, P., and Riou, H. (2018). On wave based weak Trefftz discontinuous Galerkin approach for medium-frequency heterogeneous Helmholtz problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328 :201 – 216.
- [105] Lions, J.-L., Maday, Y., and Turinici, G. (2001). A “parareal” in time discretization of pde’s. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 332.
- [106] Liu, Y. and Dick, A. J. (2016). Alternating Frequency–Time Finite Element Method : High-Fidelity Modeling of Nonlinear Wave Propagation in One-Dimensional Waveguides. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(1). 011003.
- [107] Low, Y. and Langley, R. (2008). A hybrid time/frequency domain approach for efficient coupled analysis of vessel/mooring/riser dynamics. *Ocean Engineering*, 35(5) :433 – 446.
- [108] Luostari, T., Huttunen, T., and Monk, P. (2013). Improvements for the ultra weak variational formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(6) :598–624.
- [109] Lyon, R. H. and Maidanik, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5) :623–639.
- [110] MacNeal, R. H. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581 – 601. Special Issue on Structural Dynamics.
- [111] Magoulès, F., Meerbergen, K., and Coyette, J.-P. (2000). Application of a domain decomposition method with lagrange multipliers to acoustic problems arising from the automotive industry. *Journal of Computational Acoustics*, 08(03) :503–521.

- [112] Malik, M. H., Borzacchiello, D., Aguado, J. V., and Chinesta, F. (2018). Advanced parametric space-frequency separated representations in structural dynamics : A harmonic–modal hybrid approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(7) :590–602.
- [113] Mandel, J. (2002). An iterative substructuring method for coupled fluid–solid acoustic problems. *Journal of Computational Physics*, 177 :95–116.
- [114] Marc, B. (1999). Proper generalized decomposition applied to linear acoustic : A new tool for broad band calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 34 :1572–9648.
- [115] Marsic, N. and De Gerssem, H. (2020). Convergence of optimized non-overlapping Schwarz method for Helmholtz problems in closed domains.
- [116] Maxit, L. (2000). *Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales*. PhD thesis, INSA, Lyon.
- [117] Maxit, L. and Guyader, J.-L. (2001). Estimation of sea coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part ii : Numerical applications. *Journal of Sound and Vibration - J SOUND VIB*, 239 :931–948.
- [118] Maxit, L. and Guyader, J.-L. (2003). Extension of sea model to subsystems with non-uniform modal energy distribution. *Journal of Sound and Vibration*, 265(2) :337 – 358.
- [119] Meirovitch, L. (2010). *Fundamentals of vibrations*. Waveland Pres.
- [120] Morse, P. et Ingard, K. (1968). *Theoretical Acoustics*. McGraw Hill.
- [121] Nishimura, N. (2002). Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :299.
- [122] Nouy, A. (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) :4718–4736.
- [123] Nouy, A. (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent pdes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1603–1626.
- [124] Perrey-Debain, E. (2006). Plane wave decomposition in the unit disc : Convergence estimates and computational aspects. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 193(1) :140–156.
- [125] Perrey-Debain, E., Trevelyan, J., and Bettess, P. (2003). Plane wave interpolation in direct collocation boundary element method for radiation and wave scattering : Numerical aspects and applications. *Journal of Sound and Vibration*, 261 :839–858.
- [126] Perrey-Debain, E., Trevelyan, J., and Bettess, P. (2004). Wave boundary elements : a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(2) :131–141.
- [127] Petiau, G. (1955). *La Théorie des fonctions de Bessel : Exposée en vue de ses applications à la physique mathématique*. McGraw-Hill.
- [128] Piacentini, A. and Rosa, N. (1998). An improved domain decomposition method for the 3D Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1) :113 – 124.
- [129] Pinnington, R. and Lednik, D. (1996a). Transient energy flow between two coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 189(2) :265 – 287.

- [130] Pinnington, R. and Lednik, D. (1996b). Transient statistical energy analysis of an impulsively excited two oscillator system. *Journal of Sound and Vibration*, 189(2) :249 – 264.
- [131] Pluymers, B., Desmet, W., Vandepitte, D., and Sas, P. (2005). On the use of a wave based prediction technique for steady-state structural-acoustic radiation analysis. *CMES. Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 7.
- [132] R. Craig, J. (1977). *On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis*. 18th Structural Dynamics and Materials Conference.
- [133] Riou, H., Ladevèze, P., and Kovalevsky, L. (2013). The variational theory of complex rays : An answer to the resolution of mid-frequency 3d engineering problems. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :1947–1960.
- [134] Riou, H., Ladevèze, P., and Rouch, P. (2004). Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1) :341 – 360.
- [135] Riou, H., Ladevèze, P., Sourcis, B., Faverjon, B., and Kovalevsky, L. (2012). An adaptive numerical strategy for the medium-frequency analysis of Helmholtz’s problem. *Journal of Computational Acoustics*, 20.
- [136] Rouzaud, C., Gatuingt, F., Hervé, G., and Dorival, O. (2017). A new multi-frequency approach based on padé approximants for the treatment of transient dynamics problems with the variational theory of complex rays. *Journal of Sound and Vibration*, 392 :170 – 186.
- [137] Rumpler, R. (2018). Padé approximants and the modal connection : Towards increased robustness for fast parametric sweeps. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(1) :65–81.
- [138] Rumpler, R., Göransson, P., and Deü, J.-F. (2014). A finite element approach combining a reduced-order system, padé approximants, and an adaptive frequency windowing for fast multi-frequency solution of poro-acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97 :759–784.
- [139] Shannon, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1) :10–21.
- [140] Shorter, P. J. and Langley, R. S. (2005). On the reciprocity relationship between direct field radiation and diffuse reverberant loading. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(1) :85–95.
- [141] Soize, C. (1998). Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17 :657–685.
- [142] Stolk, C. (2012). A rapidly converging domain decomposition method for the helmholtz equation. *Journal of Computational Physics*, 241.
- [143] Sui, F., Ichchou, M., and Jezequel, L. (2002). Prediction of vibroacoustics energy using a discretized transient local energy approach and comparison with tsea. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1) :163 – 180.
- [144] Tanner, G. (2008). Dynamical energy analysis—determining wave energy distributions in vibro-acoustical structures in the high-frequency regime. *Journal of Sound and Vibration*, 320 :1023–1038.
- [145] Tezaur, R. and Farhat, C. (2006). Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66 :796 – 815.

- [146] Tezaur, R., Macedo, A., and Farhat, C. (2001). Iterative solution of large-scale acoustic scattering problems with multiple right hand-sides by a domain decomposition method with Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 :1175 – 1193.
- [147] Tie, B., Aubry, D., and Boullard, A. (2003). Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads. *Rev. Eur des elements finis*, 12 :717–736.
- [148] Totaro, N., Dodard, C., and Guyader, J.-L. (2009). SEA coupling loss factors of complex vibro-acoustic systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 131.
- [149] Totaro, N. and Guyader, J. (2012). Extension of the statistical modal energy distribution analysis for estimating energy density in coupled subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 331(13) :3114 – 3129.
- [150] Troclet, B. (1989). Prediction of the vibroacoustic response of the ariane 4 fairing and the equipment bay. *Inter-Noise 89-Engineering Environ. Noise Control Foundation*, 1 :263–266.
- [151] Vanmaele, C., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2007). An efficient wave based prediction technique for plate bending vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - Comput Method Appl Mech Eng*, 196 :3178–3189.
- [152] Vanmaele, C., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2009). An efficient wave based prediction technique for dynamic plate bending problems with corner stress singularities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2227–2245.
- [153] Vaziri Astaneh, A. and Guddati, M. (2016). A two-level domain decomposition method with accurate interface conditions for the Helmholtz problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107 :74–90.
- [154] Vergote, K., Vanmaele, C., Vandepitte, D., and Desmet, W. (2013). An efficient wave based approach for the time-harmonic vibration analysis of 3D plate assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :1930–1946.
- [155] Wagner, M. M., Pinsky, P. M., and Malhotra, M. (2003). Application of padé via lanczos approximations for efficient multifrequency solution of helmholtz problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(1) :313—319.
- [156] Wang, D., Tezaur, R., Toivanen, J., and Farhat, C. (2012). Overview of the discontinuous enrichment method, the ultra-weak variational formulation, and the partition of unity method for acoustic scattering in the medium frequency regime and performance comparisons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89 :403–417.
- [157] Weck, N. (2004). Approximation by herglotz wave functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27 :155 – 162.
- [158] Yuan, L. and Hu, Q. (2018). Comparisons of three kinds of plane wave methods for the Helmholtz equation and time-harmonic maxwell equations with complex wave numbers. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 344 :323 – 345.
- [159] Zienkiewicz, O. C. (2000). *The Finite Element Method Volume 1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann.
- [160] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics, volume 2*. Butterworth-Heinemann.

Annexe A : Notions sur les matrices de Toeplitz

Une matrice de Toeplitz Γ_N est une matrice de taille $N \times N$ définie par une suite $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ telle que :

$$\Gamma_N = \begin{pmatrix} u_0 & u_{-1} & u_{-2} & \dots \\ u_1 & u_0 & u_{-1} & \dots \\ u_2 & u_1 & u_0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On note ϕ la fonction telle que $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ soient ses coefficients de Fourier :

$$\phi(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\alpha}$$
$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\alpha) e^{in\alpha} d\alpha$$

Contrairement aux matrices circulantes, il n'y a pas d'expression simple des valeurs propres des matrices de Toeplitz. Il y a tout de même des résultats exploitables. Notons $\lambda_{n,N}$ les valeurs propres de Γ .

Lemme 1 (*Lemme 4.1* dans [65]) Si Γ est Hermitienne, alors :

$$\min(\phi) \leq \lambda_{n,N} \leq \max(\phi)$$

Théorème 1 (*Théorème 4.1* dans [65]) Si Γ est Hermitienne, alors pour toute fonction F continue sur $[\min(\phi), \max(\phi)]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n^N F(\lambda_{n,N}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\phi(\alpha)) d\alpha$$

i.e., la suite $\lambda_{n,N}$ et $\phi(\frac{2\pi n}{N})$ sont asymptotiquement équitablement distribuées,

Corollaire 1 (*Corollaire 4.2* dans [65]), Si Γ est Hermitienne alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_n \lambda_{n,N} = \max(\phi)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \min_n \lambda_{n,N} = \min(\phi)$$

Annexe B : Couplage spatial entre la VTCR et la MEF

Nous proposons ici une stratégie pour coupler spatialement la méthode VTCR à la MEF. Il s'agit d'imposer la continuité des déplacements et des efforts à la frontière entre un domaine modélisé par la VTCR et un domaine modélisé par la MEF. Plusieurs stratégies peuvent être envisagées, l'une d'entre elles consiste à exploiter au mieux la philosophie de la formulation variationnelle VTCR. En effet la formulation variationnelle permet d'imposer à la fois la continuité des efforts et des déplacements, elle est donc adaptée pour imposer la continuité entre MEF et VTCR.

Une approche plus simple consiste à considérer un modèle MEF condensé sur les bords de la frontière et d'imposer de manière forte la continuité entre les noeuds du modèle MEF et VTCR. La formulation VTCR est utilisée pour imposer de manière faible la continuité des efforts. Il s'agit de la démarche adoptée dans [2] pour prendre en compte les masses et raideurs linéiques. Pour cette raison et pour des raisons de simplicité nous optons pour cette approche.

Supposons un modèle MEF (ou autres) linéaire condensé sur le bord. Nous avons alors une relation linéaire entre les efforts éléments finis et les déplacements aux bords :

$$f_{MEF} = g_{MEF}(u_{MEF})$$

avec g l'opérateur issu du problème condensé sur le bord. La continuité des efforts sur la frontière est imposée par la formulation variationnelle VTCR :

$$\begin{aligned} b_{VTCR}(u_{VTCR}, v_{VTCR}) &= \int_{\partial\Omega_{frontiere}} (f_{VTCR}(u_{VTCR}) - f_{MEF}) v_{VTCR} d\partial\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega_{frontiere}} (f_{VTCR}(u_{VTCR}) - g_{MEF}(u_{MEF})) v_{VTCR} d\partial\Omega \end{aligned}$$

avec b_{VTCR} la forme bilinéaire VTCR, u_{VTCR} et v_{VTCR} des champs de déplacement VTCR, $f_{VTCR}(u_{VTCR})$ le champ des efforts VTCR associé au champ de déplacement u_{VTCR} . Comme nous imposons de manière forte la continuité des déplacements entre modèle VTCR et MEF nous avons $u_{VTCR} = u_{MEF}$ sur la

frontière. La formulation donne alors :

$$B_{ee} = \int_{\partial\Omega_{frontiere}} (f_{VTCR} - g_{MEF}(u_{VTCR})) v_{VTCR} d\partial\Omega$$

Numériquement la continuité des déplacements entre MEF et VTCR est imposée seulement aux nœuds de frontière du maillage MEF.

Titre: Sur la TVRC en dynamique transitoire : approche large bande de fréquences et réduction de modèle

Mots clés: Dynamique, résolution fréquentielle, TVRC, réduction de modèle, conditionnement, identification

Résumé: Au sein de l'entreprise Ariane-Group, la simulation numérique de la réponse vibratoire des lanceurs spatiaux est un véritable besoin, elle permet de valider et de certifier la conception. Néanmoins, les problèmes de propagation des chocs issus des découpes pyrotechniques demeurent hors de portée des logiciels Éléments Finis. La difficulté réside dans le haut contenu fréquentiel des ondes à propager. Dans cette thèse, des stratégies permettant d'inclure tout le contenu fréquentiel à des coûts raisonnables ont été recherchées. L'approche consiste à traiter le problème dans le domaine fréquentiel avec des méthodes adéquates : le domaine des moyennes et hautes fréquences est traité avec une méthode Trefftz, la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC). Con-

struire la réponse temporelle nécessite de reconstruire, fréquence par fréquence, toute la réponse fréquentielle. Le point clé pour réduire les coûts, réside dans l'application de résolutions par bande de fréquences. Il est appliqué une méthode de réduction de modèle. Des méthodes de préconditionnement des opérateurs TVRC sont proposées pour garantir son efficacité. Pour reconstruire efficacement la réponse temporelle, est également appliquée la méthode de la fenêtre exponentielle. Enfin une approche par sous domaines-temporels est proposée pour être à même de simuler la réponse sur des temps relativement longs. Une application industrielle à l'identification du signal source associé au choc de la découpe est proposée.

Title: On VTTCR in transient dynamics: wideband frequency approach and model reduction

Keywords: Dynamics, frequency resolution, VTTCR, model reduction, conditioning, identification

Abstract: At the ArianeGroup company, numerical simulation of the launcher's vibration response is a real necessity. It enables the design to be validated and certified. Nevertheless, problems of shock propagation resulting from pyrotechnic cutting remain beyond the reach of the Finite Element softwares. The difficulty lies in the propagation of the high frequency content of the waves. In this PhD thesis, strategies to include all frequency content at reasonable costs were sought. The approach consists in treating the problem in the frequency domain with adequate methods: the medium and high frequency domain is treated with a Trefftz method: the Variational Theory of Complex Rays (VTTCR). Con-

However, constructing the temporal response requires reconstructing, frequency by frequency, the entire frequency response. The key point lies in the application of resolutions by frequency bands. Among other things, a model reduction method is applied. Preconditioning methods for VTTCR operators are proposed to guarantee its efficiency. To efficiently reconstruct the time response, the exponential window method is also applied. Finally, an approach based on temporal sub-domains is proposed in order to be able to simulate the response over relatively long periods of time. An industrial application to the identification of the source signal associated to the shock of the cutting is proposed.



