



HAL
open science

Contribution à l'observation robuste des systèmes dynamiques incertains : application à la métrologie des faibles forces

Fawzia Amokrane

► **To cite this version:**

Fawzia Amokrane. Contribution à l'observation robuste des systèmes dynamiques incertains : application à la métrologie des faibles forces. Automatique / Robotique. Université Bourgogne Franche-Comté, 2021. Français. NNT : 2021UBFCD005 . tel-03323967

HAL Id: tel-03323967

<https://theses.hal.science/tel-03323967>

Submitted on 23 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉTABLISSEMENT
UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ
PRÉPARÉE À L'INSTITUT DE RECHERCHE
FEMTO-ST

ÉCOLE DOCTORALE N° 37
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR ET MICROTECHNIQUES

Doctorat d'Automatique

PAR

FAWZIA AMOKRANE

**Contribution à l'observation robuste
des systèmes dynamiques incertains -
Application à la métrologie des
faibles forces**

Soutenue publiquement le 13 janvier 2021 à Besançon

Composition du Jury :

Michel ZASADZINSKI	Professeur, Université de Lorraine	Rapporteur
Xavier BRUN	Professeur, Université de Lyon	Rapporteur
Michèle ROMBAUT	Professeur, Université Grenoble Alpes	Examinatrice & présidente
Luc JAULIN	Professeur, Université Bretagne Occidentale	Examineur
Zaccaria SILVESTRI	Ingénieur de recherche, Cnam, LCM (LNE-Cnam)	Examineur
Emmanuel PIAT	Maître de conférences HDR, ENSMM	Directeur de thèse
Adrien DROUOT	Maître de conférences, Université de Franche-Comté	Co-encadrant de thèse
Joël ABADIE	Ingénieur de recherche CNRS, FEMTO-ST	Co-encadrant de thèse

A ma famille

REMERCIEMENTS

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces quelques lignes en signe de gratitude et de profonde reconnaissance à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de mes travaux de thèse qui ont été menés au sein de l'équipe MACS du département Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques (AS2M) de l'institut FEMTO-ST.

Tout d'abord, je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur Emmanuel PIAT et mes co-encadrants de thèse, Monsieur Joël ABADIE et Adrien DROUOT, qui m'ont fait confiance et donné l'opportunité d'effectuer ce travail de thèse riche et très formateur. Je leur suis très reconnaissante de m'avoir conseillée et orientée dans mes travaux. Je les remercie pour leur disponibilité et pour leurs remarques constructives et leurs conseils judicieux.

J'adresse mes remerciements aussi à Monsieur Tarek RaïSSI et Monsieur Jacques MILLO pour leur temps qu'ils m'ont accordé et leurs conseils judicieux.

J'adresse également mes remerciements à chacun des membres du jury qui ont accepté d'évaluer ces travaux : à Monsieur Michel ZASADZINSKI (CRAN à Nancy) et Monsieur Xavier BRUN (AMPERE à Lyon) qui m'ont fait l'honneur de rapporter ces travaux, ainsi qu'à Madame Michèle ROMBAUT (GIPSA-lab à Grenoble), Monsieur Luc JAULIN (ENSTA Bretagne) et Monsieur Zaccaria SILVESTRI (CNAM).

Je voudrais aussi et tout particulièrement adresser mes remerciements à mes chers parents, mon frère et mes sœurs pour leurs encouragements et soutien inconditionnel qu'ils ont pu m'apporter au cours de ces années d'études.

Enfin, je ne peux pas m'étendre ici sur les remerciements personnels car ils dépassent le cadre de cette thèse ... mais les personnes concernées se reconnaîtront !

SOMMAIRE

Table des matières	IV
1 Le contexte de la métrologie des faibles forces	1
2 Vers un nouveau générateur de force à RMA	13
2.1 Notions générales sur les RMA	13
2.1.1 Introduction	13
2.1.2 Lévitiation	14
2.1.3 Etude de la lévitation diamagnétique passive	15
2.1.4 Discussion sur le choix des matériaux et dimensions des composants du capteur à lévitation passive	18
2.1.5 Lévitiation diamagnétique d'un tube en verre placé verticalement	20
2.2 Prototype expérimental	21
2.2.1 Constitution du générateur à RMSA	22
2.2.2 Utilisation du générateur pour la métrologie de force	23
2.3 Modélisation du générateur à RMSA	25
2.3.1 Modélisation des efforts magnétiques	25
2.3.1.1 Détermination de F_{elec}	25
2.3.1.2 Détermination de B	27
2.3.1.3 Modélisation approchée de F_{elec}	29
2.3.1.4 Vérification expérimentale de la modélisation de F_{elec}	30
2.3.2 Modélisation de la dynamique de l'indenteur	32
2.4 Différents modes de fonctionnement du dispositif	34
2.5 Conclusion	36
3 Conception de l'accéléromètre	37
3.1 Introduction	37
3.2 Accéléromètres	38
3.2.1 Définition et principe	38
3.2.2 Principales caractéristiques d'un accéléromètre	40

3.2.2.1	Sensibilité	40
3.2.2.2	Sensibilité inter-axe/sensibilité transverse	41
3.2.2.3	Bande passante	41
3.2.2.4	Gamme ou étendue de mesure ou pleine échelle	42
3.2.2.5	Résolution	42
3.2.2.6	Bruits affectant l'accéléromètre	42
3.2.3	Les méthodes de transduction des accéléromètres	43
3.2.3.1	Détection optique	43
3.2.3.2	Détection piézo-électrique	44
3.2.3.3	Détection piézorésistive	45
3.2.3.4	Détection capacitive	46
3.2.4	Accéléromètres asservis	47
3.2.5	Accéléromètres dont la masse sismique est en lévitation / Accéléromètres basés sur la lévitation	49
3.3	Caractéristiques	49
3.4	Conclusion	55
4	État de l'art des outils de l'automatique	56
4.1	Introduction	56
4.2	Notions essentielles de l'observation d'état	57
4.2.1	Principe d'un observateur d'état	57
4.2.2	Notion d'observabilité	59
4.2.3	Notion de détectabilité	59
4.3	Observateurs d'état pour les systèmes LTI	60
4.3.1	Filtre de Kalman	60
4.3.2	Observateurs d'état dits de Luenberger	61
4.4	Observateurs pour les systèmes LTI à entrée inconnue	62
4.4.1	Observateurs à Entrées Inconnues (OEI)	62
4.4.2	Observateurs de Perturbations (OP)	63
4.4.3	Observateurs Proportionnel - Intégral (PI)	63
4.5	Observateurs pour les systèmes variant dans le temps	65
4.6	Observateurs par intervalles	67
4.6.1	Principe de l'observation par intervalles	67
4.6.2	Cadre de l'observation par intervalles	68
4.6.3	Synthèse d'un observateur par intervalles	69

4.7	Observateurs d'état pour les systèmes non linéaires	71
4.7.1	Observateurs étendus	72
4.7.2	Méthodes de transformations non linéaires	72
4.7.3	Observateurs à grand gain	73
4.7.4	Observateurs d'état étendu (préambule)	73
4.8	L'automatique pour la thèse	74
4.8.1	Observateurs d'état étendu (ESO)	74
4.8.2	Active Disturbance Rejection Control (ADRC)	77
4.9	Conclusion	78
5	Synthèse du GeLESO pour l'observation et la commande d'un système SISO incertain	80
5.1	Introduction	80
5.2	Principe de l'approche proposée	81
5.2.1	Problématique d'estimation d'état des systèmes inconnus	81
5.2.2	Représentation équivalente d'état	82
5.3	Observateur linéaire d'état étendu générique "GeLESO"	88
5.3.1	Etapas de synthèse du GeLESO standard	89
5.3.2	Paramétrisation du GeLESO	91
5.3.3	Synthèse du GeLESO d'ordre supérieur	91
5.3.4	Convergence de l'observateur GeLESO	95
5.3.5	Influence de l'ordre de l'observateur GeLESO sur l'erreur d'estimation	98
5.3.6	Commande VIRCO	105
5.4	Conclusion	107
6	Observation de l'accélération sismique en mode passif et actif	108
6.1	Introduction	108
6.2	Modélisation dynamique	110
6.2.1	Représentation de la véritable dynamique de l'accéléromètre	112
6.2.1.1	Grandeurs manipulées	112
6.2.1.2	Modèle équivalent de l'accéléromètre	114
6.2.2	Validation expérimentale de la représentation équivalente	118
6.3	Mode passif de l'accéléromètre proposé	119
6.3.1	Estimation de l'accélération en utilisant le GeLESO	119
6.3.1.1	Simulations numériques	122
6.3.1.2	Validation expérimentale	125

6.3.2	Étude de la sensibilité aux paramètres du modèle	126
6.4	Mode actif de l'accéléromètre proposé	131
6.4.1	Principe	131
6.4.2	Commande VIRCO par rejet de l'entrée virtuelle	133
6.4.3	Application pour la régulation de l'accéléromètre : simulations	135
6.4.3.1	Première simulation : cas d'une accélération externe de type échelon et de type sinusoïdal	135
6.4.3.2	Discussion sur l'effet de l'angle θ sur l'estimation de l'accélération sismique et le choix du contrôleur	141
6.4.3.3	Vérification de la sensibilité aux paramètres du modèle : mode actif de l'accéléromètre	144
6.4.4	Validation expérimentale	148
6.5	Conclusion	150
7	Quantification et propagation des incertitudes	153
7.1	Introduction	153
7.2	Quantification des incertitudes	154
7.2.1	Incertitude de Type A associée au résultat du mesurage des paramètres K_v et γ	155
7.2.2	Incertitude de Type B associée au résultat du mesurage des grandeurs m et i_0	157
7.2.3	Incertitude composée associée à la détermination du paramètre β et de la force $f_{elec(i,P)}$	158
7.2.4	Détermination de l'incertitude élargie	161
7.3	Observateur GeLESO basé intervalles	163
7.3.1	Représentation de la dynamique incertaine du tube	163
7.3.2	Structure de l'observateur GeLESO par intervalles	166
7.3.3	Changement de coordonnées invariant dans le temps	169
7.3.4	Structure de l'observateur GeLESO par intervalles par changement de coordonnées invariant dans le temps	171
7.3.5	Simulation	174
7.3.6	Validation expérimentale	177
7.4	Conclusion	180
8	Application à la génération de faibles forces potentiellement traçables	183
8.1	Introduction	183
8.2	Génération des faibles forces traçables au SI	184
8.2.1	Générateur de forces traçables	184

8.2.2	Grandeurs manipulées	185
8.2.3	Détermination de l'estimation F'_{app} de la force d'appui	186
8.3	Propagation d'incertitudes sur la force d'appui	187
8.3.1	Quantification des incertitudes	188
8.3.2	Propagation d'incertitudes calculées sur la force d'appui	189
8.4	Validation expérimentale	190
8.4.1	Propagation des incertitudes sur la force d'appui F'_{app}	191
8.4.2	Incertitude relative de la force d'appui F'_{app}	193
8.5	Conclusion	195
A	Preuve des théorèmes 5.3.1 et 5.3.2	206
A.1	Preuve	206
A.2	Preuve	210

TABLE DES FIGURES

1.1	Différentes configurations de machines à poids morts	3
1.2	Relation entre l'incertitude et la masse	4
1.3	Schéma de la balance de force électrostatique (EFB) du NIST (Shaw et al., 2016).	4
1.4	Schéma du mécanisme de fonctionnement du LFB du NPL (Jones et al., 2008)	6
1.5	Le système de mesure de la force électrostatique (Chen et al., 2011)	6
1.6	Schéma d'un système d'étalonnage de nanoforce (Kim et al., 2006)	6
1.7	Schéma d'un système d'étalonnage de nanoforce du PTB (Nesterov et al., 2016)	7
1.8	Schéma du dispositif de mesure de la pression de rayonnement (Pinot et al., 2019).	8
1.9	Capteur de mesure de micro et nanoforces basé sur le principe de la lévitation diamagnétique passive (Billot et al., 2016 ; Oster, 2012)	9
1.10	Système de mesure différentielle passive de micro et nanoforces (Billot et al., 2016)	9
2.1	L'effet diamagnétique à l'échelle macroscopique	15
2.2	L'effet diamagnétique à l'échelle microscopique	15
2.3	Configurations de base permettant d'assurer la lévitation diamagnétique stable de l'aimant M_2	16
2.4	Principe du capteur de force par lévitation diamagnétique (Oster, 2012)	17
2.5	Profil des efforts magnétiques et diamagnétiques pour un écartement des aimants M_1, M'_1 de 85 mm et un écartement des plaques de graphite de 4 mm (Oster, 2012)	19
2.6	Profil de la force diamagnétique transversale pour différents écartements des plaques de graphite pour un écartement des aimants M_1, M'_1 de 77 mm (Oster, 2012)	19
2.7	Conception d'un poids mort pour un dispositif à lévitation passive.	20
2.8	Configuration adaptée pour la lévitation diamagnétique d'un tube vertical.	21
2.9	Configuration complète du générateur de force à poids mort à ressort magnétique semi-actif (RMSA).	22
2.10	Prototype expérimental du générateur de force et l'indenteur.	22

2.11	Vue d'ensemble de l'environnement de travail du générateur à RMSA.	24
2.12	Relation entre l'incertitude et la masse	25
2.13	Orientation de la magnétisation \vec{m} de l'aimant en lévitation	26
2.14	Positionnement du référentiel pour le calcul avec Comsol du champ d'induction magnétique et de F_{elec}	28
2.15	Illustration des efforts magnétiques ainsi que l'intensité de l'induction magnétique pour le cas des aimants et des électro-aimants.	28
2.16	Formulation analytique simplifiée de F_{elec}	29
2.17	Représentation de l'altitude z en fonction du courant total qui circule dans les bobines : résultats expérimentaux et analytiques.	31
2.18	Etude de la configuration des forces appliquées à l'indenteur dans un cas réaliste (la poussée de l'air à été négligée ici).	32
2.19	Évolution de la force appliquée à l'échantillon F_{app} , en fonction du courant de commande i , dans une configuration idéale.	36
3.1	Principe de fonctionnement d'un accéléromètre	39
3.2	Accéléromètre à détection optique avec modulation de l'intensité lumineuse (S. et al., 2004)	44
3.3	Accéléromètre à détection optique avec mesure de la longueur d'onde qui est réfléchi sur la masse sismique (Schröpfer et al., 1998)	44
3.4	Accéléromètre utilisant une détection piézoélectrique (Hindrichsen et al., 2009)	45
3.5	Accéléromètre utilisant une détection piézorésistive (Lynch et al., 2003)	46
3.6	Accéléromètre à base de détection capacitive (Amini et al., 2004)	47
3.7	Principe de fonctionnement d'un accéléromètre asservi	48
3.8	Accéléromètre positionné à l'extérieur puis à l'intérieur de la chambre climatique	50
3.9	Etude de la configuration des forces appliquées au tube dans un cas réaliste (la poussée de l'air à été négligée ici)	51
3.10	Réponse en régime libre du tube	52
3.11	La réponse z mesurée du tube et le modèle construit par la System Identification Toolbox de Matlab	53
3.12	La réponse en fréquence de l'accéléromètre (3.17)	54
4.1	L'observateur, élément essentiel du processus de commande (Tian, 2010)	58
4.2	Principe de l'observation par intervalles	68
4.3	Structure de l'ADRC	77
5.1	Évolution de l'entrée de commande	85

5.2	Évolution de la sortie du modèle cible LTI	85
5.3	Évolution de l'entrée virtuelle	86
5.4	Évolution de la sortie du système non linéaire inconnu et du système LTI + \mathcal{C}	86
5.5	Évolution de la sortie $y = x_1$ du système et son estimation (test 1)	97
5.6	Évolution de $\dot{y} = x_2$ et son estimation (test 1)	97
5.7	Évolution de la sortie $y = x_1$ du système et son estimation (test 2)	97
5.8	Évolution de $\dot{y} = x_2$ et son estimation (test 2)	97
5.9	Évolution de la perturbation et son estimation	98
5.10	Évolution de la perturbation et son estimation	98
5.11	Évolution de la sortie y et l'entrée virtuelle \mathcal{C}	100
5.12	Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_1	100
5.13	Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_2	101
5.14	Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_3	101
5.15	Distribution de WE_1 pour la composante x_1	102
5.16	Distribution de WE_2 pour la composante x_2	102
5.17	Distribution de WE_3 pour la composante x_3	103
5.18	Lieu des racines du GeLESO d'ordre $p + i = 8$	103
5.19	Évolution de la sortie y , de la sortie mesurée y_m et son l'estimation z_1	104
5.20	Effet de ω_o sur le rapport NR_1 pour la composante x_1	104
5.21	Effet de ω_o sur le rapport NR_2 associé à la composante x_2	104
5.22	Effet de ω_o sur le rapport NR_3 associé à la composante x_3	104
5.23	Influence du nombre i d'états étendus sur le rapport NR_1 du GeLESO associé à z_1 (test 1)	105
5.24	Distribution du rapport signal sur bruit NR_1 associé à z_1 pour $\omega_o = 5$	105
5.25	Schéma de commande de rejet de l'entrée virtuelle (VIRCO)	105
6.1	Étude de la configuration des forces appliquées au tube en lévitation dans un cas réaliste	111
6.2	Accéléromètre proposé : principe de fonctionnement	111
6.3	Schéma-bloc de la partie opérative	116
6.4	Vraie dynamique de l'accéléromètre	117
6.5	Déplacement mesuré et simulé du tube lorsqu'on tient compte de l'entrée virtuelle estimée	119
6.6	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ (test 1)	122
6.7	Évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$ (test 1)	122
6.8	Évolution de la position du tube z et de son estimation (test 1)	123

6.9	Évolution de l'erreur d'estimation de la position (test 1)	123
6.10	Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation (test 1)	123
6.11	Évolution de l'erreur d'estimation de la vitesse (test 1)	123
6.12	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ (test 2)	124
6.13	Évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$ (test 2)	124
6.14	Évolution de la position du tube z et de son estimation (test 2)	125
6.15	Évolution de l'erreur d'estimation de la position (test 2)	125
6.16	Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation (test 2)	125
6.17	Évolution de l'erreur d'estimation de la vitesse (test 2)	125
6.18	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_c$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	127
6.19	Évolution de la position du tube z et de son estimation	127
6.20	Évolution de l'estimation de la vitesse du tube \dot{z}	128
6.21	Effet de l'incertitude de la masse mesurée m' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	129
6.22	Effet de l'incertitude de la masse et du paramètre γ' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	130
6.23	Effet de l'incertitude du paramètre K'_v sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	130
6.24	Principe de fonctionnement d'un accéléromètre asservi	131
6.25	Schéma de commande de rejet de l'entrée virtuelle (VIRCO)	133
6.26	Schéma de commande VIRCO avec le régulateur PID	136
6.27	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	137
6.28	Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$	137
6.29	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	137
6.30	Évolution de l'erreur d'estimation de z	137
6.31	Évolution de estimation z_2 de la vitesse \dot{z} du tube	137
6.32	Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}	137
6.33	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	138
6.34	Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$	138
6.35	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	138
6.36	Évolution de l'erreur d'estimation de z	138
6.37	Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2	139
6.38	Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}	139
6.39	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	139
6.40	Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$	139
6.41	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	140
6.42	Évolution de l'erreur d'estimation de z	140
6.43	Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2	140

6.44	Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}	140
6.45	Effet de l'angle θ sur la mesure de déplacement	141
6.46	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	142
6.47	Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$	142
6.48	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	143
6.49	Évolution de l'erreur d'estimation de z	143
6.50	Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	143
6.51	Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$	143
6.52	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	143
6.53	Évolution de l'erreur d'estimation de z	143
6.54	Effet de l'incertitude de m' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	145
6.55	Effet de l'incertitude de m' et de γ' (5 %) sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	145
6.56	Effet de l'incertitude de K'_v sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$	146
6.57	Effet de l'incertitude de m' , de γ' , et de K'_v sur la position z du tube. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole "a" dans la légende.	146
6.58	Effet sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ d'une erreur i_e de 5 % sur le courant généré	147
6.59	Effet de l'incertitude de m' , de K'_v , de γ' et de i_e sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole "a" dans la légende.	147
6.60	Effet de l'incertitude de m' , de K'_v , de γ' et de i_e sur la position z du tube. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole "a" dans la légende.	148
6.61	Évolution de l'accélération $-(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a)$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$	149
6.62	Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1	149
6.63	Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2	150
6.64	Évolution de l'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations	151
6.65	Évolution de la position du tube et de son estimation	151
6.66	Évolution de l'estimation de la vitesse du tube	152
7.1	Histogramme de K_v pour 24 tests d'identification	156
7.2	Histogramme de γ pour 24 tests d'identification	156
7.3	Synoptique pour la propagation de l'incertitude de la grandeur de commande u	160
7.4	Évolution de l'accélération simulée et ses bornes estimées (test 1)	176
7.5	Évolution de l'accélération simulée et ses bornes estimées (test 2)	176
7.6	Évolution de la position du tube et ses bornes estimées (test 1)	177

7.7	Évolution de la position du tube et ses bornes estimées (test 2)	177
7.8	Évolution de la vitesse du tube et ses bornes estimées (test 1)	177
7.9	Évolution de la vitesse du tube et ses bornes estimées (test 2)	177
7.10	Évolution de l'accélération externe et ses bornes estimées	179
7.11	Évolution de la position du tube et ses bornes estimées	179
7.12	Évolution des bornes estimées de la vitesse du tube	180
7.13	Évolution de l'incertitude associé à l'accélération du plateau de la table anti-vibrations	180
7.14	Évolution de l'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations avec un GeLESO d'ordre 4	181
7.15	Évolution de la position du tube est son incertitude associé	181
7.16	Évolution de l'incertitude associée à la vitesse du tube	182
8.1	Prototype expérimental du générateur de force et de l'indenteur.	184
8.2	Le générateur de force et l'accéléromètre dans une chambre climatique	185
8.3	Évolution de la consigne de courant i_g^c appliquée	191
8.4	Évolution de la force d'appui F'_{app}	191
8.5	Évolution de la force d'appui F'_{app} et de son incertitude associée en fonction du temps	192
8.6	Évolution de la force d'appui F'_{app} en fonction du temps (zoom)	192
8.7	Relation entre la consigne de courant i_g^c , la force d'appui estimée F'_{app} et son incertitude	194
8.8	Évolution de l'incertitude relative de F'_{app} par rapport à F'_{app}	194
8.9	Zoom de l'évolution de l'incertitude relative de F'_{app} par rapport à F'_{app}	194
8.10	Compensation de l'accélération sismique pour le générateur de force en mode statique.	201

LISTE DES TABLES

3.1	Valeurs des paramètres du modèle de l'accéléromètre	53
5.1	WE_j associé à x_j pour $i = 5$	101
5.2	WE_j associé à x_j pour $i = 4$	102
6.1	Grandeurs manipulées	112
6.2	Valeurs des paramètres du modèle de l'accéléromètre	118
6.3	Influence de l'augmentation des paramètres du PID sur le comportement du système en boucle fermée	134
7.1	Valeur moyenne et incertitude de Type A associées au résultat du mesurage des paramètres K_v et γ pour les 24 essais d'identification	156
7.2	Estimation de la valeur moyenne et incertitude de Type B associées au résultat du mesurage des grandeurs m et i_0	157
7.3	Incertitude-type composée associée à l'identification du paramètre β	159
7.4	Incertitude-type composée associée à la commande en force u pour $i^c = -3,17 \cdot 10^{-6}$ A et $z' = -2,77 \cdot 10^{-7}$ m	161
7.5	Incertitude-type composée associée à la commande en force u , pour $i^c = 3,86 \cdot 10^{-5}$ A et $z' = 3,5 \cdot 10^{-8}$ m	161
7.6	Valeurs des incertitudes-types et des incertitudes élargies associées au résultat des mesurages	162
7.7	Incertitude-type composée du paramètre $\frac{-K_v}{m}$	166
7.8	Incertitude-type composée du paramètre $\frac{\gamma i_0}{m}$	166
7.9	Incertitude-type composée du paramètre $\frac{1}{m}$	166
7.10	Valeurs de chaque paramètre mesuré/estimé et incertitudes élargies associées	175
8.1	Récapitulatif des grandeurs manipulées sur le générateur de force.	186
8.2	Valeur moyenne et incertitude associées aux grandeurs qui influent sur la force d'appui F_{app}	188
8.3	Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app}	191
8.4	Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app}	192

8.5 Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app} 193

LE CONTEXTE DE LA MÉTROLOGIE DES FAIBLES FORCES

La métrologie est l'ensemble des techniques et des savoir-faire qui permettent d'effectuer des mesures et d'y associer une confiance en les comparant à des références universelles. Sans métrologie, les sciences physiques, les sciences du vivant et de l'environnement, l'ingénierie, le domaine de la santé, etc. ne pourraient pas s'appuyer sur des mesures fiables ni sur des grandeurs de références universellement reconnues. Ce point serait problématique car les mesures physiques effectuées sur les grandeurs dimensionnelles, temporelles, mécaniques, chimiques, électriques etc. constituent un socle nécessaire pour le développement des technologies. De ce fait, à l'échelle macroscopique, l'absence de métrologie conduirait des activités humaines comme le développement économique et les échanges commerciaux à être soumis à une forme d'arbitraire. C'est d'ailleurs cette raison qui, historiquement, a conduit au développement de la métrologie. Grâce à la métrologie, les citoyens ont désormais confiance dans les mesures relatives aux produits qu'ils consomment, dans l'évaluation de la qualité de leur environnement, dans les analyses médicales, etc. L'activité économique peut donc se développer en fonction des besoins sociétaux. Des contrôles peuvent aussi être effectués. Au cours de la dernière décennie, le rythme rapide du développement scientifique et industriel a obligé la métrologie à progresser afin d'améliorer la qualité des systèmes de mesures de référence. L'enjeu associé à cette progression est de pouvoir garantir au mieux les mesures physiques effectuées en fonction des besoins humains qui ne cessent de se développer (ou de se réorienter), et ainsi de constamment améliorer la qualité des produits conçus par l'homme. De ce fait, les Instituts Nationaux de Métrologie (INM ou NMI en anglais) du monde entier sont confrontés au défi d'arriver à concevoir des outils et des procédures appropriées qui rendent possible ces mesures et garantissent leur fiabilité. Ils doivent aussi concevoir des étalons¹ universels qui représentent une référence commune pour les unités fondamentales telles que par exemple le mètre, la seconde ou le kilogramme.

La hiérarchie de la métrologie au sein du Système International d'unités (SI) est conceptuellement simple. Les étalons primaires sont associés à des réalisations physiques pratiques d'une unité de mesure qui sont maintenues par les Instituts Nationaux de Mesure, où elles sont utilisées pour étalonner des étalons secondaires. Ces étalons secondaires, ou de transfert, sont diffusés par les instituts nationaux de mesure et ils sont utilisés pour étalonner de manière certifiée d'autres capteurs ou instruments. En fonction de la

1. Réalisation de la définition d'une grandeur physique donnée, avec une valeur déterminée et une incertitude de mesure associée, utilisée comme référence.

chaîne de diffusion commerciale et des contraintes liées au lieu d'utilisation, ces derniers peuvent à leur tour être utilisés pour étalonner d'autres capteurs. Chaque étalonnage est une comparaison avec un étalon secondaire issu de l'étalon primaire et l'incertitude associée à la propagation de l'unité d'un appareil à l'autre est évaluée à chaque étape afin de quantifier la dégradation de la valeur réelle de l'unité après sa propagation dans cette chaîne. C'est le principe de la traçabilité au Système International d'unités (SI) qui est une propriété d'un résultat de mesure. Selon cette propriété, le résultat de mesure peut être relié (raccordé) à une référence par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue et documentée d'étalonnages, dont chacun contribue à l'incertitude de mesure. Cette propriété représente la problématique de cette thèse dans le cadre de la mesure des faibles forces.

La force est une grandeur physique qui n'est pas directement mesurable. Son unité, le newton (N), est une unité dérivée dans le SI, ce qui signifie que les étalons primaires de force sont dérivés d'étalons de certaines unités de base du SI, à savoir le kilogramme, le mètre et la seconde. En effet, un étalon primaire de force est généralement élaboré à partir d'une masse traçable combinée à une estimation suffisamment exacte de la gravité exprimée en unités de longueur et de temps appropriées. Actuellement, la traçabilité des faibles masses (inférieures à 1 milligramme) ainsi que les faibles forces (inférieures à 10 micronewtons) est fortement mise en question à cause de l'absence d'étalons à ces échelles. Malgré cela, aujourd'hui, de nombreux dispositifs sont capables de mesurer des faibles forces avec des résolutions allant en deçà du nanonewton grâce à l'amélioration des sensibilités de mesure. Cette situation complètement paradoxale conduit au constat suivant : malgré le nombre important de moyens de mesure des faibles forces et la réelle maturité technologique de ces derniers, aucun d'entre eux n'est étalonné par rapport à un étalon de référence et il est impossible de déterminer et de garantir l'incertitude des mesures de faibles forces effectuées. De ce fait, le domaine de la métrologie des faibles forces, ainsi que l'instrumentation nécessaire à son exécution, est devenue un domaine de recherche actif. Au sommet de cette recherche, le Bureau International des Poids et Mesures² (BIPM) est chargé de définir les grandeurs clés ainsi que les procédures à respecter³ pour que l'industrie et la recherche disposent des étalons de faibles forces qui lui sont nécessaires. Pour cela, le BIPM s'appuie sur les travaux menés dans les Instituts Nationaux de Métrologie et dans les laboratoires.

Les stratégies utilisées par les Instituts Nationaux de Métrologie pour tenter d'établir la traçabilité des mesures de faibles forces sont variées. La plus simple consiste à étalonner le capteur de forces en utilisant un poids mort (dead weight) de référence, ce qui est possible lorsque la direction de la mesure est verticale. En effet, en métrologie, le newton (N) est obtenu en soumettant un corps, dont la masse (kg) est connue, à l'effet de l'accélération locale de la pesanteur (m/s^2). Le dispositif mécanique utilisé pour générer une force étalon, est connu sous le nom de *machine à poids mort*. Il est alors possible de générer, sur une machine à poids mort, autant d'étalons de force que de masses connues mises à disposition, en un lieu donné. Si le lieu de l'étalonnage change, les forces générées vont varier à cause des variations de la gravité locale.

Les balances intégrant des masses de référence constituent une extension logique de la machine à poids mort pour générer une force. Ces balances se composent en général d'un châssis principal et d'un ensemble de masses. La force générée est une force

2. <https://www.bipm.org>

3. <https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/>

d'opposition dont le rôle est de contrer le déplacement de la masse. Leur structure est variable en fonction des masses mises en jeu (voir la figure 1.1 pour quelques exemples élémentaires). L'utilisation d'une machine à poids mort ou d'une balance consiste à générer une force étalon pour la étalonnage d'autres dispositifs de mesure, comme par exemple les anneaux dynamométriques, les bancs de contrôle, les capteurs de force, les dynamomètres, les machines d'essais, les actionneurs, etc. La qualité métrologique de la machine utilisée va dépendre de sa configuration mais surtout de la qualité des appuis et des frottements mis en jeu. Ce type de dispositif est très performant dans la gamme de forces supérieures au newton. Par contre, dans le domaine des microforces ou des nanoforces, la qualité des appuis et les frottements deviennent critiques et non maîtrisables, empêchant ainsi d'atteindre les performances souhaitées. L'effet d'échelle empêche de transposer les techniques macroscopiques au monde microscopique. S'il n'existe pas encore d'étalons de force en dessous de la dizaine de micronewtons, l'effet d'échelle en est sûrement l'une des causes.

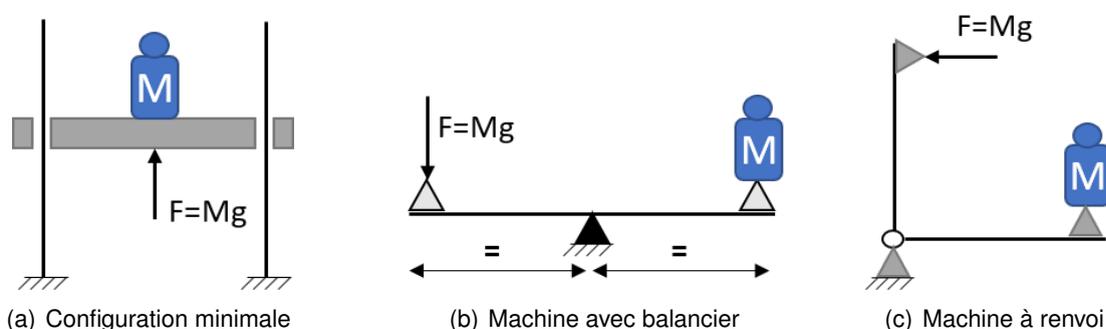


FIGURE 1.1 – Différentes configurations de machines à poids morts

En pratique, aller en deçà de $10 \mu\text{N}$ (1 mg) est difficile (Kim et al., 2011). Les principales difficultés rencontrées pour fournir des étalons de forces pour les instruments devant mesurer des forces de moins de 10 micronewtons sont doubles. Le premier problème provient des incertitudes associées au poids mort. Pour obtenir des étalonnages de mesure avec une masse plus faible, le kilogramme doit être subdivisé (Kubarych et al., 2001). Au fur et à mesure que le kilogramme est subdivisé, l'incertitude augmente à chaque étape, comme le montre la figure 1.2. Au final, le niveau d'incertitude devient significatif. Nous pouvons voir à partir de cette courbe que, pour des masses de l'ordre du milligramme, l'incertitude devient aussi importante que la masse elle-même. La deuxième difficulté vient de la manipulation des étalons de masse pour une masse inférieure à 1 mg. Elle nécessite en effet des techniques spécialisées et une attention particulière en raison des effets des forces capillaires, de Van der Waals ou électrostatiques (qui commencent à dominer sur la gravité à l'échelle du micromètre), ce qui peut induire des mouvements inattendus et des efforts additionnels difficiles à évaluer et donc à prendre en compte. Par ailleurs, dans le cas des machines à poids mort, la diminution des dimensions peut rendre très délicates la manipulation et l'application du poids mort en un point donné d'un capteur de force à étalonner, surtout s'il est de petites dimensions (cas d'une micro-poutre d'un microscope à force atomique par exemple). Cette difficulté a conduit à davantage orienter les travaux de recherche sur les balances plutôt que les machines à poids mort pour générer des faibles forces.

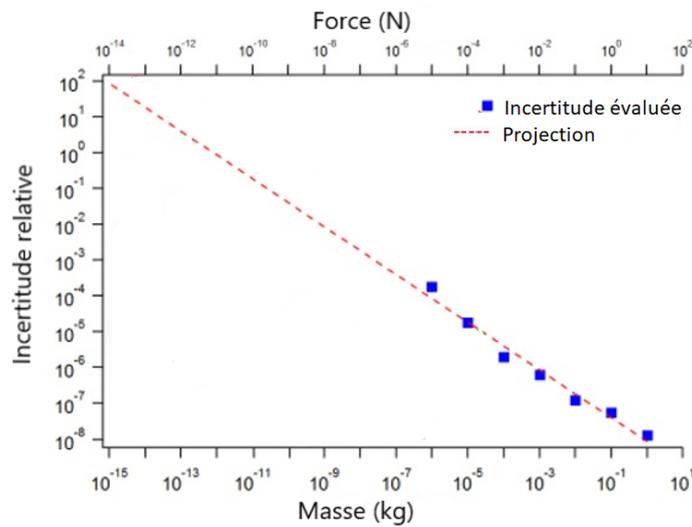


FIGURE 1.2 – Relation entre l'incertitude et la masse

QUELQUES TRAVAUX SUR LA TRAÇABILITÉ DES FAIBLES FORCES

Depuis quelques décennies, les laboratoires nationaux de métrologie, notamment américains, allemands et coréens travaillent à la mise au point de dispositifs traçables de mesure de faibles forces (Shaw, 2018). Nous présentons dans ce qui suit quelques réalisations.

Le National Institute of Standards and Technology (NIST) a développé une balance de force électrostatique (EFB) qui fonctionne dans une enceinte à vide (Shaw et al., 2016). Cette balance est illustrée dans la figure 1.3 où l'enceinte à vide est indiquée par la ligne continue (9). Une masse d'essai génère la force gravitationnelle F_g qui doit être mesurée.

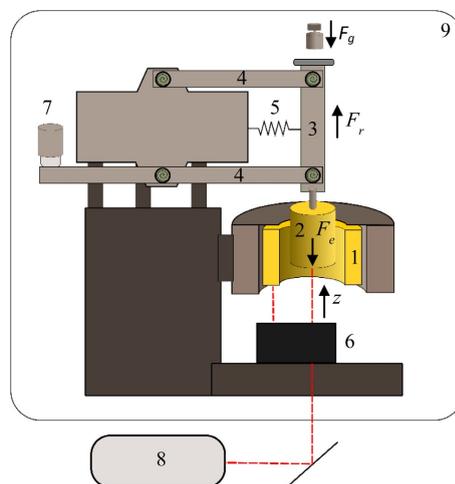


FIGURE 1.3 – Schéma de la balance de force électrostatique (EFB) du NIST (Shaw et al., 2016).

F_r est la force de rappel qui est créée par le mécanisme mobile de la balance et F_e est la

force électrostatique générée par un condensateur cylindrique concentrique (1) :

$$F_e(z, V) = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial z}(z) \quad (1.1)$$

où V est la différence de potentiel aux bornes du condensateur, C est sa capacité et z est le déplacement vertical de l'électrode cylindrique interne (2) du condensateur. Le cylindre intérieur (2) est fixé à un mécanisme mobile (parallélogramme à angle variable) qui fait office de balance, et le cylindre extérieur (1) est fixé de manière rigide à un cadre fixe de référence. Le gradient $\partial C/\partial z$ est préalablement calculé à l'aide du condensateur auxiliaire (7). Pour faire ce calcul, la capacité C est mesurée en fonction de z pendant que le deuxième condensateur est utilisé pour déplacer l'électrode (2). La hauteur z est mesurée à l'aide de l'interféromètre (6).

Pour déterminer le poids F_g , la tension V sert de grandeur de commande afin de contrer le déplacement de l'armature interne (2) lorsque la masse d'essai est posée sur la balance. Connaissant V et $\partial C/\partial z$, il est alors possible avec (1.1) de remonter à F_e qui s'oppose à F_g si l'asservissement est parfaitement réalisé. La qualité de la mesure de la force F_g est alors dépendante de la qualité du modèle de la force électrostatique F_e , de la qualité de l'asservissement et de la qualité des identifications. Les mesures effectuées par l'EFB sont théoriquement traçables aux étalons quantiques fondamentaux basés sur l'effet Hall quantique ainsi que sur la vitesse de la lumière dans le vide.

D'autres travaux ont été menés par le National Physical Laboratory (NPL) au Royaume-Uni pour fabriquer un instrument de mesure de faibles forces qui met en œuvre des grandeurs de tension, de capacité et de déplacement, qui sont toutes traçables au SI avec une grande justesse. La conception associée correspond à une balance de faible force (Low Force Balance (LFB)) capable de mesurer des forces dans la gamme de 10 μN à 1 nN avec une résolution de 50 pN (Jones et al., 2008). Son concept est illustré dans la figure 1.4. Un diélectrique subit une force qui doit être mesurée. Cette balance de force se base donc sur le déplacement du diélectrique dans un condensateur. Le diélectrique est connecté à une lame qui travaille en flexion et son déplacement est mesuré à l'aide d'un interféromètre différentiel à miroir plan. La tension de rétroaction appliquée au condensateur génère une force sur la lame qui ramène le déplacement en flexion à zéro.

D'autres travaux ont été entrepris par l'Institut de Recherche en Technologie Industrielle (ITRI) de Taïwan pour la métrologie des faibles forces. Cet institut a développé un dispositif qui utilise les forces électrostatiques pour générer une référence dans la gamme du micronewton avec une résolution de l'ordre du nanonewton. Ce dispositif, illustré dans la figure 1.5, utilise un corps d'épreuve monolithique qui est un dispositif en métal qui travaille en flexion. Ce dispositif est connecté à un système de condensateurs à plaques parallèles avec trois électrodes fonctionnant dans l'air (Chen et al., 2011).

La géométrie des électrodes comprend une plaque centrale fixée au mécanisme d'équilibrage et deux plaques extérieures. Les condensateurs fonctionnent comme un capteur de déplacement capacitif différentiel ainsi qu'un actionneur de force électrostatique. Le gradient de capacité est mesuré en déplaçant l'électrode interne autour de la position zéro du système de déplacement du pont de capacité tout en mesurant la position avec un interféromètre laser. Pendant la mesure de la force, l'électrode centrale est maintenue à la position zéro et une tension de polarisation lui est appliquée. Une tension de contrôle de polarité opposée est appliquée aux électrodes extérieures. Dans ce schéma, la force électrostatique devient une fonction linéaire de la tension de commande et la force élec-

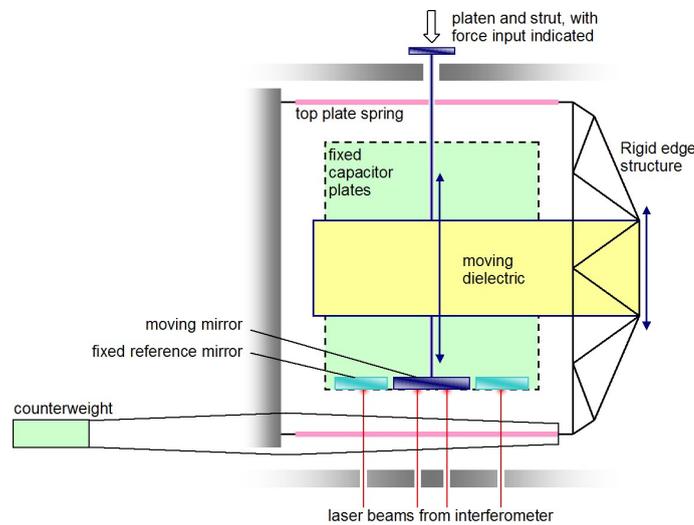


FIGURE 1.4 – Schéma du mécanisme de fonctionnement du LFB du NPL (Jones et al., 2008)

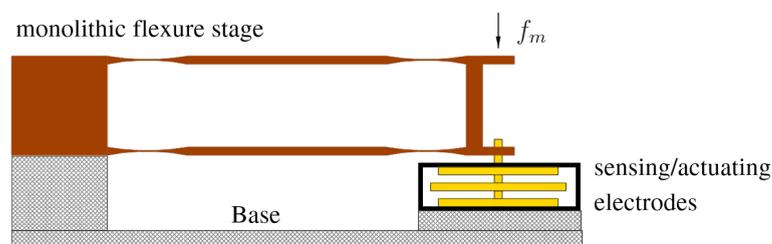


FIGURE 1.5 – Le système de mesure de la force électrostatique (Chen et al., 2011)

trostatique résultante nécessaire pour maintenir la position zéro peut être utilisée pour étalonner une force externe inconnue.

L'Institut Coréen de Recherche sur les Normes et la Science (KRISS) a quant à lui mis au point un étalonneur de nanoforce (NFC) basé sur une balance commerciale (Kim et al., 2006, 2007) comme l'illustre la figure 1.6.

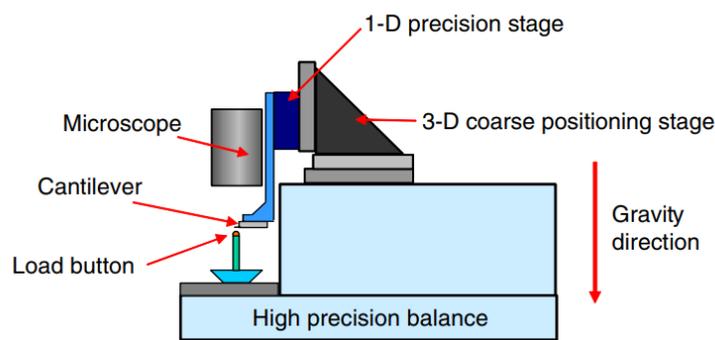


FIGURE 1.6 – Schéma d'un système d'étalonnage de nanoforce (Kim et al., 2006)

Cette balance a une résolution en affichage de la masse de 0,1 microgramme (soit environ 1 nanonewton) et elle est étalonnée avec des poids traçables. Elle est donc capable d'étalonner des petits capteurs de masse et de force d'une manière traçable au SI. Le

NFC dispose d'un étage de nanositionnement intégré utilisé pour presser les capteurs contre le plateau de la balance, comme l'illustre la figure 1.6. L'utilisation d'une platine étalonnée facilite l'étalonnage des capteurs qui mesurent le déplacement ainsi que la force, comme ceux utilisés pour la microscopie à force atomique. Sur la base de résultats expérimentaux et d'une analyse d'incertitude, le NFC affirme qu'il peut étalonner des cantilevers de manière traçable au SI avec une incertitude qui reste toutefois supérieure à 1%.

Un autre instrument du Physikalisch Technische Bundesanstalt (PTB), qui est l'agence nationale de métrologie allemande, utilise la masse d'un pendule suspendu pour assurer la traçabilité des faibles forces (Nesterov, 2007; Nesterov et al., 2016) dans le vide. Ce dispositif permet de mesurer les forces horizontales dans la plage inférieure à $1 \mu\text{N}$ avec une résolution inférieure à 5 pN et une incertitude inférieure à 2.7 %. Il est illustré dans la figure 1.7. Le pendule de l'instrument est microfabriqué en silicium monocristallin et pesé

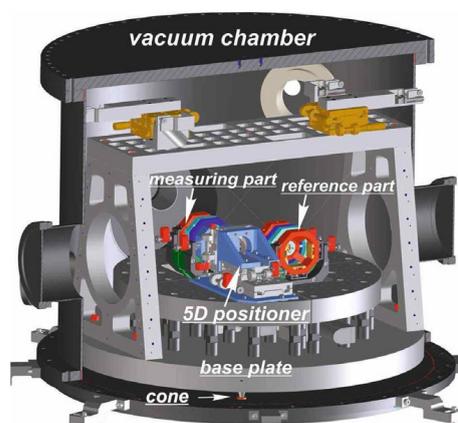


FIGURE 1.7 – Schéma d'un système d'étalonnage de nanoforce du PTB (Nesterov et al., 2016)

avant utilisation (sa masse typique est de 0,8 g (Nesterov et al., 2016)). Dans cet instrument, un interféromètre laser est utilisé pour mesurer le déplacement du pendule tandis que des électrodes de chaque côté du pendule maintiennent un déplacement nul. En plus de fournir une force d'actionnement, ces électrodes sont configurées pour réduire la rigidité effective du mécanisme du pendule (Nesterov, 2007). Un pendule identique placé à proximité a une double fonction. Lors de l'étalonnage, il mesure l'inclinaison du cadre de charge lorsqu'une grande masse attachée est déplacée. Cela permet d'étalonner la force électrostatique nécessaire pour maintenir la position zéro du premier pendule lorsque l'orientation relative de la force gravitationnelle sur celui-ci change en réponse à l'inclinaison. De cette manière, la traçabilité à la masse du pendule de mesure est établie. Le pendule secondaire est également utilisé pour mesurer le bruit en mode commun qui sera soustrait au signal pendant une mesure de force.

D'autres travaux ont été menés en France par le Laboratoire Commun de Métrologie LNE-Cnam (LCM LNE-Cnam). Il s'agit du développement d'un instrument de mesure de la puissance optique émise par un laser de puissance (Pinot et al., 2019). Ce dispositif est illustré sur la figure 1.8. La mesure de la puissance optique est rendue possible en évaluant la pression de rayonnement (pression radiative) que génère le laser (1). Cette pression induit la force externe qui va s'appliquer en un point situé à la périphérie (10) d'une plaque horizontale de graphite pyrolytique (9). Cette plaque est maintenue en lévi-

tation diamagnétique passive au-dessus d'un réseau d'aimants permanents (11) asservis en température grâce à un module peltier (12). Pour rendre possible la mesure de cette force de pression lumineuse, la plaque de graphite est reliée à un ressort magnétique auto-stabilisé qui va fournir un couple de rappel magnétique. La plaque va donc subir une rotation induite par la force de pression lumineuse. Cette rotation est mesurée à l'aide d'une deuxième diode laser de très faible puissance (17) grâce à un miroir réfléchissant disposé à l'autre extrémité (10) de la plaque de graphite. La rotation de la plaque induit une déviation du faisceau laser émis par le deuxième laser (17). Cette déviation est mesurée à l'aide d'une photodiode de détection (14) qui délivre une tension proportionnelle à la déviation angulaire, ce qui permet de déterminer cette dernière. D'un point de vue mécanique, ce dispositif est équivalent à un système dynamique de type masse-ressort-amortisseur qui fonctionne en rotation. La gamme de puissance optique étudiée va de 100 mW à 1 W. Ce dispositif permet de mesurer des forces dans la gamme de 1 nN à 100 nN avec une incertitude-type relative de 2%.

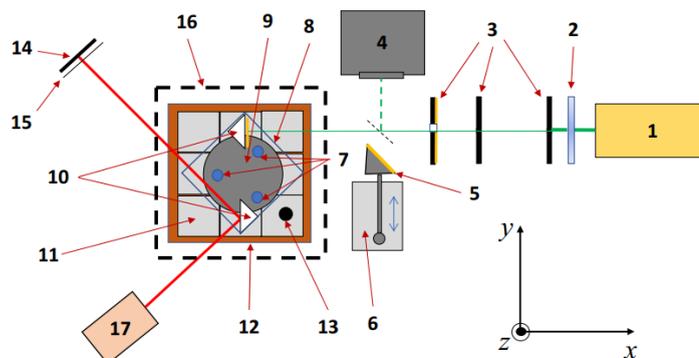


FIGURE 1.8 – Schéma du dispositif de mesure de la pression de rayonnement (Pinot et al., 2019).

Dans un contexte similaire aux travaux menés au LCM LNE-Cnam, l'institut FEMTO-ST mène depuis plus de 15 ans des travaux sur la mesure et la génération de faibles forces, en utilisant également des Ressorts Magnétiques Auto-stabilisés (RMA) associés à des masses en lévitation passive allant de quelques milligrammes à quelques grammes. La technologie des RMA possède des atouts intéressants pour établir une traçabilité en mesure de force car les transducteurs force/déplacement rigides utilisés sont potentiellement raccordables à des étalons de masse développés par l'équipe *Masse et Grandeurs Associées* du LCM LNE-Cnam. Toutefois, la masse embarquée dans les transducteurs macroscopiques fabriqués par FEMTO-ST rend ces derniers sensibles aux perturbations environnementales mécaniques telles que, entre autres, les vibrations sismiques basses fréquences. Ces vibrations qui ne sont pas correctement filtrées par une table anti-vibrations induisent une force d'inertie perturbatrice F_p qui vient s'ajouter à la force F_{ext} que l'on souhaite mesurer. A titre d'exemple le capteur de nanoforce basé sur la lévitation diamagnétique passive d'une masse sismique macroscopique (voir figure 1.9) permet de mesurer une force F_{ext} horizontale. A cause de la perturbation inertielle, Il s'ensuit que la force mesurée est en fait $F_{ext} + F_p$. La force perturbatrice F_p ajoute donc un décalage inconnu et variable dans le temps sur l'estimation de la force obtenue. Il convient donc de retrancher ce décalage F_p pour retrouver la valeur de F_{ext} .

Ce problème a été à l'origine du développement d'une approche de mesure différentielle passive de nanoforce. L'idée de cette approche est, dans un premier temps, de caractéri-

ser le niveau de la perturbation en force F_p et, dans un second temps, d'en tenir compte lors que la mesure de la force externe F_{ext} qui s'applique sur le transducteur. Le dispositif qui permet de mettre en œuvre ce principe de mesure différentielle passive est illustré sur la figure 1.10. Il nécessite deux éléments : un capteur de force chargé de mesurer F_{ext} et un dispositif annexe de mesure de la force d'inertie F_p . La détermination de la force d'inertie et de la force à mesurer utilise un filtre de Kalman pour reconstruire les forces inconnues. Ce filtre est paramétrable pour ajuster la bande passante des capteurs de force ainsi que le rapport signal sur bruit de la force estimée (Billot et al., 2016).

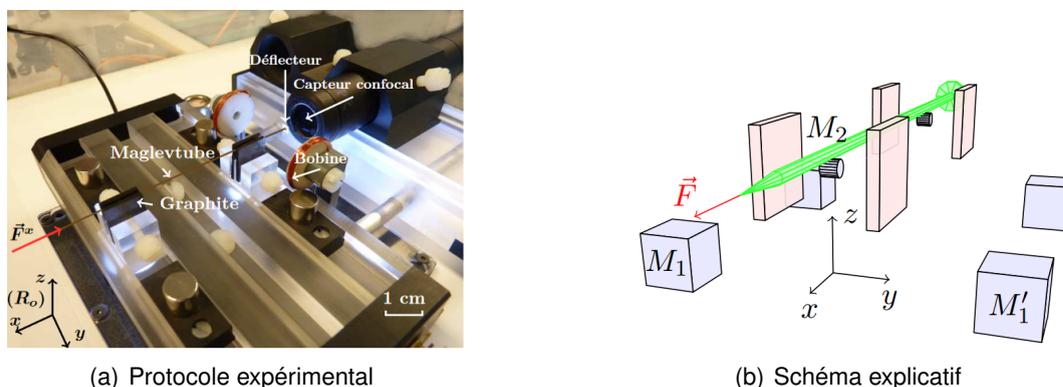


FIGURE 1.9 – Capteur de mesure de micro et nanoforces basé sur le principe de la lévitation diamagnétique passive (Billot et al., 2016; Oster, 2012)

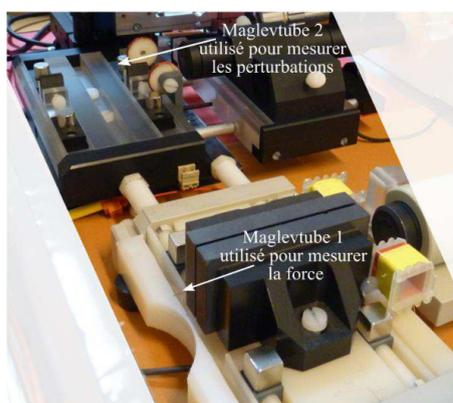


FIGURE 1.10 – Système de mesure différentielle passive de micro et nanoforces (Billot et al., 2016)

Ce principe de mesure différentielle passive a permis d'ouvrir un champ de réflexion pour le développement d'un nouveau dispositif mécatronique permettant la génération de forces potentiellement traçables au SI. Le développement de ce dispositif, dont le principe de fonctionnement se situe à l'intersection de la mécanique et de l'électromagnétisme, est l'enjeu de cette thèse.

OBJECTIFS DE LA THÈSE

Le travail présenté dans ce mémoire adresse la problématique de la traçabilité des faibles forces dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$ en se basant sur le principe des machines à

poids mort (deadweight machines) décrit auparavant et des travaux de (Oster, 2012; Billot et al., 2016). Afin de pouvoir résoudre cette problématique, nous nous sommes fixés les objectifs suivants :

- Développement de deux dispositifs électromécaniques permettant la génération et la mesure de faibles forces. Le premier est un générateur de force qui fonctionnera en mode passif et statique et le second est un accéléromètre qui fonctionnera en mode actif. Les deux seront basés sur la technologie des ressorts magnétiques autostabilisés et l'accéléromètre permettra de mesurer et de tenir compte de l'effet des perturbations environnementales, notamment sismiques.
- Modélisation dynamique des deux dispositifs proposés sous la forme de systèmes à une seule entrée et une seule sortie (SISO : Single Input Single Output) incertains affectés par des perturbations inconnues. Les modèles dynamiques incertains de ces deux dispositifs devront permettre d'accéder à une représentation de l'état réel des dispositifs en dépit des incertitudes connues ou inconnues associées aux modèles.
- Développement d'un observateur pour les systèmes incertains qui permettent de reconstruire dynamiquement l'état réel des systèmes utilisés ainsi que l'effet des perturbations environnementales et des incertitudes qui agissent sur les systèmes. Cette observation doit rester de qualité malgré les incertitudes présentes dans les modèles manipulés et l'observateur doit être suffisamment simple pour pouvoir être facilement implémenté.
- Synthèse d'une loi de commande efficace pour les systèmes incertains afin de permettre le contrôle de la position de l'accéléromètre lorsque ce dernier fonctionne en mode actif.
- Développement d'une approche de propagation des incertitudes affectant toutes les grandeurs physiques manipulées afin de garantir la traçabilité des forces générées au SI. Cet objectif se décompose en trois étapes :
 1. Quantification des incertitudes paramétriques qui affectent les dispositifs. Cette quantification se fait par des méthodes de métrologie développées dans le guide de calcul d'incertitude proposé par le BIPM.
 2. Propagation dynamique des incertitudes propres à l'accéléromètre à l'aide d'un observateur par intervalles. Cette étape consiste à propager les incertitudes qui influencent l'estimation de l'accélération liée aux vibrations sismiques.
 3. Propagation des incertitudes qui affectent la force que le générateur de force génère lorsqu'il fonctionne en statique et qu'il est perturbé par la force d'inertie induite par les vibrations sismiques. Cette propagation se fait à l'aide des méthodes de métrologie développées dans le guide de calcul d'incertitude proposé par le BIPM.
- Validations expérimentales des modèles des dispositifs, de l'estimation des effets des perturbations environnementales et de la reconstruction de la force générée et de son incertitude.

ORGANISATION DU MANUSCRIT

Afin de répondre à chacun des objectifs cités précédemment, la suite de ce manuscrit est structurée en sept chapitres.

Dans le chapitre 2, nous allons donner quelques notions de base sur la technologie utilisée, notamment sur la lévitation diamagnétique et les ressorts magnétiques autostabilisés, pour la conception du générateur de force. Par la suite, nous détaillerons la structure du générateur de forces proposé, son fonctionnement et sa modélisation dynamique.

Dans le chapitre 3, nous allons donner quelques notions générales sur les accéléromètres et nous allons citer quelques réalisations typiques. Par la suite, nous détaillerons la structure de l'accéléromètre proposé, son fonctionnement et sa modélisation dynamique.

Dans le chapitre 4, nous allons présenter un état de l'art sur les outils de l'automatique utilisés dans cette thèse, à savoir les observateurs d'état et les observateurs à entrée inconnue ainsi que les observateurs par intervalles Utilisés pour la propagation des incertitudes bornées.

Dans le chapitre 5, nous allons présenter une méthode générique de représentation des systèmes dynamiques SISO incertains. Cette représentation pourra notamment s'appliquer à des cas limites tels que les systèmes inconnus, les systèmes à structure variable dans le temps de manière inconnue, les systèmes affectés par des perturbations stochastiques inconnues, etc. Cette méthode va nous servir dans la modélisation dynamique des deux dispositifs. Nous allons également présenter un observateur pour les systèmes incertains qui est adapté à cette représentation. Une loi de commande qui utilise cet observateur sera également proposée. Cet observateur sera par la suite utilisé pour estimer l'état de l'accéléromètre et pour le commander. Cet observateur servira aussi à estimer la force d'inertie inconnue liée aux vibrations sismiques qui affectent l'accéléromètre et le générateur de faibles forces.

Dans le chapitre 6, nous allons valider expérimentalement le modèle dynamique de l'accéléromètre. Nous allons également illustrer expérimentalement l'efficacité de l'observateur proposé. Par la suite, nous allons illustrer l'effet des incertitudes paramétriques sur l'estimation de l'accélération sismique basse fréquence lorsque l'accéléromètre fonctionne en mode passif. Ensuite, nous allons illustrer l'avantage du fonctionnement en mode actif de cet accéléromètre en utilisant la structure de la loi de commande proposée dans le chapitre 5.

Dans le chapitre 7, nous allons dans un premier temps quantifier toutes les incertitudes connues qui affectent l'estimation de l'accélération sismique basse fréquence qui affecte les deux dispositifs. Puis, dans un deuxième temps, nous allons présenter l'observateur par intervalles proposé dans le cadre de cette thèse. Cet observateur permet de propager les incertitudes paramétriques sur l'estimation de cette entrée inconnue. Enfin, nous allons valider expérimentalement cet observateur pour pouvoir garantir la traçabilité de la reconstruction de l'entrée inconnue.

Enfin, dans le chapitre 8, nous allons quantifier et propager les incertitudes des grandeurs physiques qui affectent la force générée par le générateur de force à l'aide des méthodes de propagation d'incertitudes développées dans le guide de calcul d'incertitude proposé par le BIPM. Ce chapitre se termine par la quantification de la force appliquée d'une manière métrologique qui soit potentiellement traçable au SI, ce qui répond à la problé-

matique de cette thèse.

CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

Les divers résultats obtenus au fil de cette thèse ont fait l'objet de plusieurs publications et présentations lors de conférences. Par catégories, ces différentes contributions sont :

REVUES INTERNATIONALES

Amokrane F, Piat E, Abadie J, Drouot A et Escareno. J, "State observation of unknown nonlinear SISO systems based on virtual input estimation", International Journal of Control, pages 1 - 14, 2019.

CONFÉRENCES INTERNATIONALES

- Amokrane F, Drouot A, Abadie J et Piat E, "Nanoforce Estimation using Interval Observer : Application to Force Sensor based on Diamagnetic Levitation", 21st IFAC World Congress, Berlin Allemagne, 2020.
- Amokrane F, Piat E, Abadie J, Drouot A et Escareno J, "State Observation of a Specific Class of Unknown Nonlinear SISO Systems using Linear Kalman Filtering", 58th Conference on Decision and Control (CDC), Nice, France, 2019.
- Amokrane F, Piat E, Abadie J, Drouot A et Escareno J, "Generic Linear ESO for the State Observation of Unknown Nonlinear SISO Systems", International Conference on Mechatronics, Robotics and Systems Engineering (MoRSE), Bali, Indonésie, 2019.

VERS UN NOUVEAU GÉNÉRATEUR DE FORCE À RMA

Sommaire

2.1 Notions générales sur les RMA	13
2.1.1 Introduction	13
2.1.2 Lévitiation	14
2.1.3 Etude de la lévitation diamagnétique passive	15
2.1.4 Discussion sur le choix des matériaux et dimensions des composants du capteur à lévitation passive	18
2.1.5 Lévitiation diamagnétique d'un tube en verre placé verticalement	20
2.2 Prototype expérimental	21
2.2.1 Constitution du générateur à RMSA	22
2.2.2 Utilisation du générateur pour la métrologie de force	23
2.3 Modélisation du générateur à RMSA	25
2.3.1 Modélisation des efforts magnétiques	25
2.3.1.1 Détermination de F_{elec}	25
2.3.1.2 Détermination de B	27
2.3.1.3 Modélisation approchée de F_{elec}	29
2.3.1.4 Vérification expérimentale de la modélisation de F_{elec} .	30
2.3.2 Modélisation de la dynamique de l'indenteur	32
2.4 Différents modes de fonctionnement du dispositif	34
2.5 Conclusion	36

2.1/ NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES RMA

2.1.1/ INTRODUCTION

Les connaissances capitalisées dans le domaine de la micromécatronique et celles acquises sur l'effet d'échelle constituent un socle essentiel pour proposer de nouvelles solutions performantes, applicables à la métrologie des faibles forces. Ainsi, en se basant sur le principe des machines à poids mort (deadweight machines) et des travaux de thèse de Stéphane Oster ([Oster, 2012](#)), nous allons proposer une nouvelle structure de générateur

de force potentiellement traçable au SI dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. Ce générateur utilise le principe des ressorts magnétiques autostabilisés (RMA) pour appliquer une force verticale sur un échantillon.

Avant d'entrer en détail dans la description du générateur de force proposé, nous allons donner dans les sections qui suivent quelques notions générales sur le principe des RMA qui permettent de mettre un aimant permanent en lévitation passive stable.

2.1.2/ LÉVITATION

Sur Terre, le poids est une force qui s'applique en permanence à tout objet. La lévitation consiste à s'en soustraire, ce qui implique d'appliquer à l'objet une force égale en norme et opposée en direction à son poids. Une définition de la lévitation se doit donc de prendre en compte cet aspect. La notion de lévitation pourrait alors être énoncée ainsi : *manière fascinante de se soustraire à l'action de la gravité*. Une autre définition pourrait être : *"Tout objet, quelle que soit sa nature, lévite s'il est suspendu et maintenu en équilibre stable au mépris des lois de gravitation, sans qu'il soit en contact physique avec un objet quelconque"* (Chetouani, 2007).

La lévitation peut être réalisée dans différents environnements tels que : l'air, le vide et les milieux liquides. Elle peut être de différentes natures relativement à l'origine des forces mises en jeu afin de contrer l'effet du poids. Ces forces peuvent être d'origine magnétique, diamagnétique, aérodynamique, électrostatique, acoustique, lumineuse (par faisceau laser), etc. De plus, on peut qualifier la lévitation d'*active* ou de *passive* selon qu'elle se fait respectivement avec ou sans apport d'énergie externe pour maintenir l'objet en lévitation stable.

La lévitation est une technique utilisée pour différentes applications et elle est mise en œuvre depuis de nombreuses années à différentes échelles, dont l'échelle microscopique. Une première technique possible est la lévitation par faisceau laser. On peut citer, par exemple, les travaux de Taguchi (Taguchi et al., 2000) qui portent sur le développement d'un dispositif de micromanipulation sans contact. La lévitation acoustique est aussi utilisée pour le développement de convoyeurs (Hashimoto, 1998) ou encore pour des moteurs dont l'axe de rotation est en lévitation (Junhui Hu, 1997). On peut aussi trouver des travaux sur la lévitation magnétique appliquée toujours au convoyage (Post et al., 2000) et à la réalisation de moteurs rotatifs sans frottements (M. Komori, 2000). Quant à la lévitation diamagnétique, elle a été mise en œuvre à de nombreuses reprises. On peut citer par exemple les travaux de Chetouani (Chetouani, 2007) pour la micromanipulation, les travaux de Abadie, de Gana (Abadie et al., 2014; Gana et al., 2017) pour la caractérisation des cellules biologiques (ovocytes humains) et les travaux de Piat et de Oster (Piat et al., 2012; Oster, 2012) pour la réalisation de capteurs de micro et nanoforces.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la lévitation d'un aimant permanent en association avec l'utilisation d'un matériau diamagnétique (lévitation diamagnétique). En effet, nous pensons que cette technique possède des atouts intéressants dans le cadre de la métrologie de faibles forces et dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$.

2.1.3/ ÉTUDE DE LA LÉVITATION DIAMAGNÉTIQUE PASSIVE

Contrairement à la lévitation magnétique active, la lévitation diamagnétique passive se fait sans apport d'énergie externe pour le contrôle de la position de l'aimant permanent maintenu en lévitation. Pour obtenir de bons résultats, un certain nombre de critères doivent être respectés. Nous allons les détailler ici.

Dans un champ magnétique constant créé par des aimants permanents (magnétostatique), l'instabilité de la lévitation passive a été étudiée par Earnshaw ([Earnshaw, 1842](#)), puis par Boerdijk dans différentes situations ([Boerdijk, 1956](#)). Earnshaw a démontré, en 1840, que la lévitation stable d'un aimant permanent situé dans un champ magnétostatique est impossible à cause des forces d'interaction qui s'expriment en r^{-2} : une configuration composée de deux corps distants de r (soumis à des forces d'interaction en r^{-2}) ne peut pas être une configuration stable.

Boerdijk a, quant à lui, proposé une analyse plus complète des possibilités et des conditions permettant d'obtenir une lévitation stable. Il prouve que la lévitation stable est possible dans un champ magnétique uniquement en ayant recours à des matériaux avec une perméabilité relative μ_r négative, comme c'est le cas pour les matériaux diamagnétiques. En effet, lorsqu'on applique un champ magnétique externe (peu importe sa direction) à un matériau diamagnétique, celui-ci se magnétise dans la direction opposée à celle du champ magnétique appliqué produisant ainsi une force qui tend à repousser le matériau diamagnétique (voir la figure 2.1) ([Boukallel, 2003](#)).

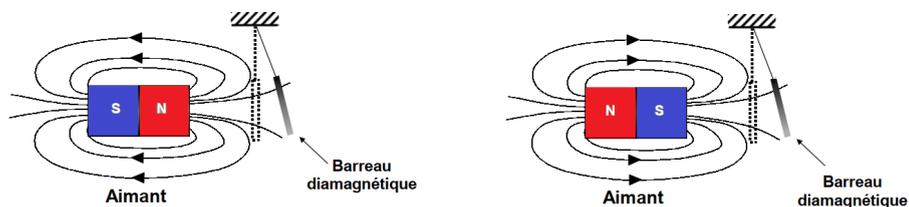


FIGURE 2.1 – L'effet diamagnétique à l'échelle macroscopique

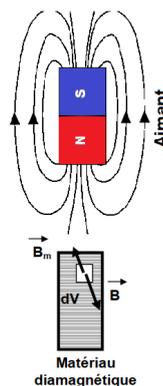


FIGURE 2.2 – L'effet diamagnétique à l'échelle microscopique

A l'échelle microscopique la représentation de l'effet diamagnétique est illustrée dans la

figure 2.2 où dV est le volume élémentaire du matériau diamagnétique soumis au champ d'induction magnétique extérieure \vec{B} généré par l'aimant en ce point. Chaque élément de volume dV réagit alors en produisant une aimantation \vec{M} , le sens de ce vecteur d'aimantation est opposé à celui du champ d'induction magnétique appliqué dans ce volume élémentaire. L'aimantation produite dans ce matériau donne naissance à un champ d'induction magnétique \vec{B}_m de même direction que le vecteur \vec{M} . Ainsi, on se retrouve avec deux vecteurs magnétiques \vec{B} et \vec{B}_m dirigés en sens opposé dans le volume dV . Il en résulte une force d'interaction qui tend à repousser le matériau diamagnétique. L'intensité de la force produite dépend de la susceptibilité magnétique χ_m du matériau diamagnétique qui est négative. Plus cette valeur est grande en valeur absolue, plus le phénomène diamagnétique devient important. Malheureusement, à température ambiante, la susceptibilité magnétique des matériaux diamagnétiques d'usage courant est de l'ordre de -10^{-5} . Elle est donc très faible en valeur absolue et la force répulsive qui est générée est insuffisante pour sustenter un aimant avec des dimensions macroscopiques.

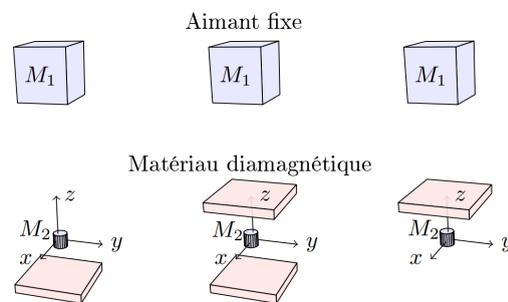


FIGURE 2.3 – Configurations de base permettant d'assurer la lévitation diamagnétique stable de l'aimant M_2

Pour obtenir la lévitation diamagnétique d'un aimant permanent macroscopique, une possibilité intéressante est d'utiliser une force magnétique attractive pour compenser le poids de ce dernier, puis d'ajouter au poids et à cette force magnétique une force diamagnétique répulsive, pour ainsi retrouver une configuration stable décrite par Boerdijk. Dans ses travaux de thèse, Oster ([Oster, 2012](#)) a travaillé sur trois configurations de base permettant d'obtenir de manière stable la lévitation d'un aimant M_2 dans un champ magnétostatique créé par un aimant M_1 (voir figure 2.3). Pour chacune de ces configurations, l'aimant M_1 est fixe et il attire avec une force magnétique l'aimant M_2 qui est libre dans l'espace. Cette force magnétique permet d'obtenir une position d'équilibre stable pour l'aimant M_2 dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) . Par contre, elle génère une position d'équilibre instable le long de l'axe \vec{z} . Le matériau diamagnétique va jouer le rôle d'agent répulseur selon l'axe z vis-à-vis de l'aimant M_2 et il va le stabiliser passivement pour obtenir la lévitation. La distance entre M_1 et M_2 reste constante et correspond à la distance qui génère une force d'attraction magnétique de M_1 sur M_2 ici orientée vers le haut et qui compense le poids de M_2 . Il reste maintenant à déterminer le positionnement des plaques de graphite. Ce positionnement va dépendre de la masse de M_2 et aussi des paramètres magnétiques des deux aimants et des propriétés diamagnétiques du graphite. Ce point va être traité dans la section qui suit. Tout déplacement de l'aimant M_2 , hors de sa position d'équilibre stable, va engendrer une variation de l'effet répulseur (exercé par le matériau diamagnétique) et de l'effet attracteur (exercé par l'aimant M_1 sur M_2). Lorsque la configuration globale est correctement construite, l'effet répulseur du graphite ramène l'aimant M_2 à une position d'équilibre stable suivant la verticale. Cette dernière correspond à la position d'équilibre

instable qu'on obtient en l'absence du graphite. La lévitation diamagnétique telle qu'elle est présentée ici est stable et passive.

En s'inspirant des configurations de la figure 2.3, Oster (Oster, 2012) a développé une configuration originale qui permet d'utiliser la lévitation passive comme capteur de force. Cette configuration est illustrée dans la figure 2.4. Elle a la particularité de mettre en œuvre un ressort magnétique de faible raideur qui est conçu pour la mesure des micro et nanoforces suivant l'axe horizontal \vec{x} . La résolution atteinte est de l'ordre du nanonewton. Cette résolution est limitée par la performance du capteur confocal chromatique qui a été utilisé pour mesurer le déplacement du corps d'épreuve qui est sensible à la force à mesurer.

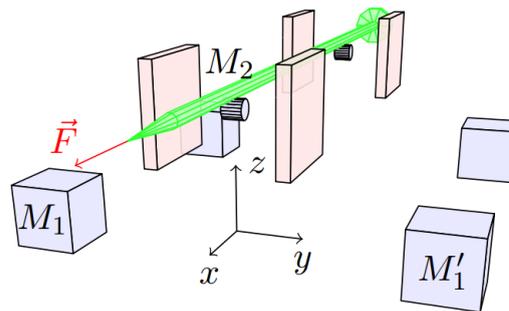


FIGURE 2.4 – Principe du capteur de force par lévitation diamagnétique (Oster, 2012)

Ce corps d'épreuve est une tige rigide (représentée en vert dans la figure) qui est reliée à deux ressorts magnétiques autostabilisés. Chaque ressort magnétique est obtenu en plaçant une paire d'aimants identiques M_1 et M'_1 de manière à ce que leur pôle Nord et Sud soient opposés l'un à l'autre suivant l'axe vertical. Une deuxième paire est placée en arrière plan sur la figure selon la même configuration. L'aimant en lévitation M_2 est placé entre les deux aimants fixes M_1 et M'_1 de manière à ce que les forces magnétiques compensent le poids de M_2 . On retrouve la même chose en arrière-plan, entre la paire d'aimants arrières. Un capillaire en verre relie l'aimant M_2 à son homologue arrière, formant un corps d'épreuve rigide en lévitation sur lequel on peut appliquer une force F horizontale à mesurer. L'équilibre résultant est alors stable dans le plan (\vec{x}, \vec{z}) mais instable suivant l'axe \vec{y} . On note que tout déplacement de M_2 suivant \vec{y} augmenterait la composante en y des forces magnétiques (puisqu'on se rapproche d'un des aimants fixes) et M_2 irait se «coller» à M_1 ou M'_1 . Cet équilibre instable peut être stabilisé par l'ajout de deux plaques de matériau diamagnétique. Il a été démontré que les composantes des efforts diamagnétiques suivant \vec{x} et \vec{z} sont totalement négligeables devant celle suivant \vec{y} , donc les forces diamagnétiques sont considérées uniquement suivant l'axe \vec{x} . Dans ce cas, la force diamagnétique est toujours opposée à l'attraction magnétique suivant \vec{y} et elle viendra ainsi compenser tout déplacement suivant cette direction. Le corps d'épreuve (qu'on appelle aussi comme pour les accéléromètres une masse sismique, une masse d'effort ou une masse d'épreuve) pèse 74 mg pour une longueur de 9.5 cm. La configuration magnétique qui est utilisée permet d'obtenir des raideur typiques le long de l'axe \vec{x} de l'ordre de 0.01 à 0.03 N/m avec une force de rappel du corps d'épreuve qui est linéaire sur quelques millimètres. La possibilité de maintenir un comportement linéaire sur plusieurs millimètres permet d'obtenir une très large plage de mesure. De ce fait, ce type de capteur dispose à la fois d'une bonne résolution et d'une large plage de mesure. Par contre, sa bande passante est limitée à tout au plus quelques dizaines de hertz à cause de la masse du corps d'épreuve.

2.1.4/ DISCUSSION SUR LE CHOIX DES MATÉRIAUX ET DIMENSIONS DES COMPOSANTS DU CAPTEUR À LÉVITATION PASSIVE

Aimants permanents :

Les aimants qui ont été sélectionnés sont de type $NdFeB$. Ces matériaux sont caractérisés par leur induction rémanente élevée et leur résistance à la désaimantation.

Concernant leurs dimensions, les aimants M_1 sont cubiques de $10 \times 10 \times 10$ mm et les aimants M_2 sont cylindriques avec un diamètre de 2 mm et une hauteur de 2 mm.

Matériau diamagnétique :

Le matériau diamagnétique utilisé sur le capteur à lévitation passive est du graphite pyrolytique qui est un matériau facile à usiner. Il a une susceptibilité magnétique X_m égale à $-12 \cdot 10^{-5}$ le long de l'axe horizontal. Elle est relativement importante par rapport aux autres matériaux diamagnétiques à température ambiante. Malgré tout, les forces diamagnétiques générées restent de très faible amplitude (inférieur à la centaine de micronewton). Il est possible d'augmenter davantage la susceptibilité magnétique de certains matériaux à très basse température. En métrologie, les variations de température étant à proscrire, nous avons restreint notre choix au graphite pyrolytique.

Concernant les dimensions de la plaque de graphite, Oster a utilisé une plaque ayant la forme d'un parallélépipède de dimensions $16.5 \times 13.5 \times 1.6$ mm.

La distance entre les deux plaques de graphite varie entre 3 et 4 mm.

Il a été démontré dans (Oster, 2012) que la distance entre les aimants M_1 et la distance entre les plaques de graphite influent sur la stabilité de la lévitation de l'aimant M_2 . La figure 2.5 illustre les efforts magnétiques et diamagnétiques transversaux, en fonction de la position suivant la direction y de l'aimant M_2 , pour un écartement des aimants M_1 et M'_1 de 85 mm et un écartement des plaques de graphite de 4 mm. On notera qu'il y a deux points d'équilibre stables dans cette configuration, ce qui peut faire "sauter" le corps d'épreuve de l'un à l'autre sous l'effet de forces perturbatrices présentes le long de l'axe \vec{y} . Ce point est un inconvénient qui ne doit pas être présent dans notre futur générateur de force.

La figure 2.6 illustre l'influence de la distance entre les plaques de graphite sur la stabilité de l'aimant M_2 pour un écartement des aimants M_1, M'_1 de 77 mm. On constate qu'avec un écartement des plaques de graphite compris entre 3 et 4 mm, il peut n'y avoir plus qu'un seul point d'équilibre stable au lieu de deux, ainsi qu'une raideur selon l'axe y qui augmente afin de renforcer le pouvoir guidant du ressort magnétique.

En conclusion, pour mettre au point un dispositif de lévitation passive, on commence par choisir l'aimant M_2 en lévitation, puis le ou les aimants porteurs (tels que M_1 et M'_1) qui créent le champ magnétostatique. Ce champ magnétostatique doit, en premier lieu, exercer une force magnétique, sur M_2 , qui compense le poids de ce dernier. On obtient, pour l'aimant en lévitation, deux directions stables et une troisième qui est nécessairement instable. Il faut ensuite ajouter des forces diamagnétiques puis s'assurer qu'elles sont d'intensité suffisante pour supprimer l'instabilité restante. Cela s'obtient en écartant les aimants porteurs de l'aimant M_2 (diminution de la variation du gradient de \vec{B}). En contrepartie, si les aimants porteurs sont trop éloignés, on ne pourra plus compenser le poids de la structure qui lévite. En fonction de la configuration choisie, il n'y a générale-

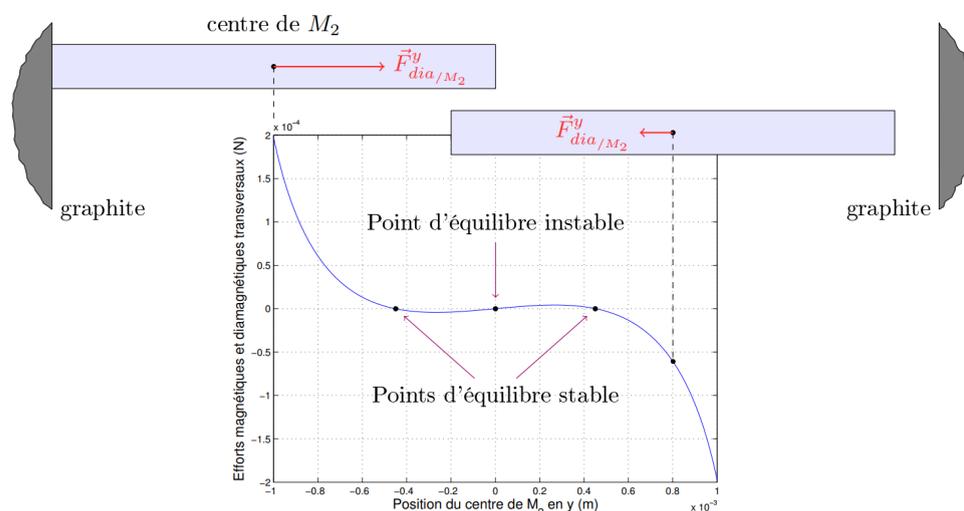


FIGURE 2.5 – Profil des efforts magnétiques et diamagnétiques pour un écartement des aimants M_1, M'_1 de 85 mm et un écartement des plaques de graphite de 4 mm (Oster, 2012)

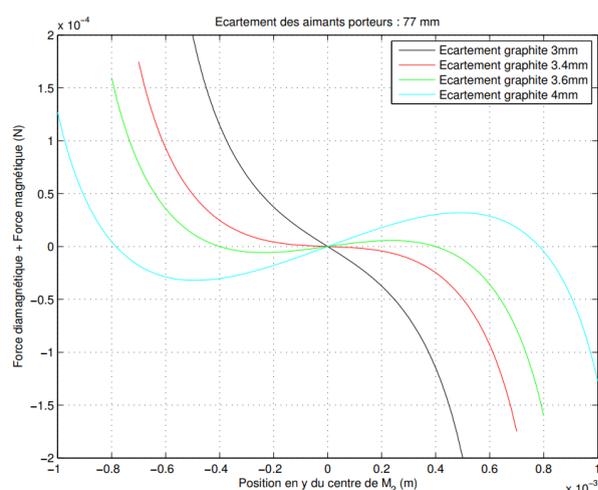


FIGURE 2.6 – Profil de la force diamagnétique transversale pour différents écartements des plaques de graphite pour un écartement des aimants M_1, M'_1 de 77 mm (Oster, 2012)

ment pas de recouvrement entre la possibilité de compenser le poids de M_2 et assurer une efficacité répulsive suffisante du graphite. Malgré tout, certaines configurations ont un recouvrement suffisant et donnent de très bons résultats. Toutefois, Oster a montré que le comportement de M_2 dans la direction de l'instabilité en présence du graphite présente des singularités. En effet, si pour une configuration donnée (écartement des aimants M_1, M'_1), on souhaite obtenir pour M_2 une seule position d'équilibre suivant l'axe \vec{y} , il apparaît d'après la figure 2.6 qu'il faut rapprocher le plus possible les plaques de graphite l'une de l'autre. Cependant il faut tout de même laisser un espace suffisant entre les plaques de graphite de manière à permettre à l'aimant M_2 de rester en dehors de la zone d'influence des forces d'adhésion transversales avec les plaques. La portée de ces forces d'adhésion plaque-aimant est inférieure à la centaine de nanomètres. Dans le cas où les efforts diamagnétiques répulseurs sont supérieurs aux forces d'adhésion, la

l'évitation est assurée sans frottement. Dans le cas contraire, l'aimant M_2 vient se coller au graphite ce qui empêche toute possibilité de mesure de force.

2.1.5/ LÉVITATION DIAMAGNÉTIQUE D'UN TUBE EN VERRE PLACÉ VERTICALEMENT

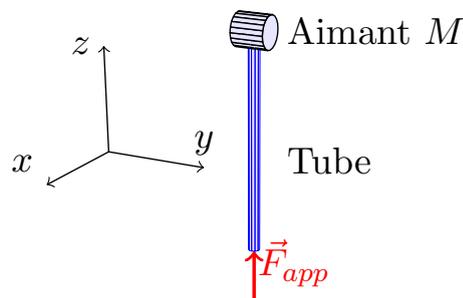


FIGURE 2.7 – Conception d'un poids mort pour un dispositif à lévitation passive.

La question qui se pose maintenant est de savoir s'il est possible de construire une machine à poids mort dont la masse étalon serait en lévitation passive. Une telle machine ne pourrait fournir qu'un étalon de force constant en amplitude. Pour lever cette restriction afin de moduler la force étalon, il est nécessaire d'ajouter à la machine un dispositif de modulation du poids, afin de faire apparaître un poids apparent variable en amplitude. Pour parvenir à cet objectif en s'inspirant de la technique de lévitation décrite dans la section précédente, l'idée est de remplacer les aimants M_1 et M'_1 par des bobines, de manière à pouvoir moduler le poids apparent du poids mort. Ce type de configuration s'appellera *générateur de force à poids mort à ressort magnétique semi-actif (RMSA)*. Le terme semi-actif sous-entend ici que l'énergie fournie par les bobines ne sert pas à stabiliser à l'aide d'un asservissement le dispositif alors que c'est en général le cas lorsqu'on utilise des bobines pour réaliser une sustentation magnétique active. Ici la sustentation est passive et stable quel que soit le courant qui traverse les bobines. Ce nouveau dispositif a été développé dans le cadre du stage de Julie Beluche, lors de sa deuxième année d'apprentissage ingénieur par alternance. Il permet de faire léviter une masse sismique qui est constituée d'un capillaire de verre orienté verticalement et sur lequel est solidarisé un aimant M , cet aimant assurant la lévitation passive (voir figure 2.7). Cette masse sismique de référence peut ensuite être positionnée au dessus d'un équipement (tel qu'un capteur de force par exemple) dont on souhaiterait faire l'étalonnage. La force F_{app} générée sur l'équipement va dépendre de l'altitude de lévitation de l'indenteur z et du courant $I = i_0$ circulant dans les bobines. Comme l'illustre la figure 2.8, cette nouvelle structure à lévitation passive est largement inspirée de la configuration présentée dans la précédente section.

Dans cette nouvelle configuration, outre la forme du corps en lévitation, la principale différence réside dans le remplacement des aimants M_1 et M'_1 par deux électroaimants E_1^m et E_2^m . Ainsi, la force électromagnétique F_{elec} compense le poids $P = mg$ de la masse sismique que nous nommerons *indenteur* par la suite. Cet indenteur de masse m est constituée de l'aimant M et du capillaire. En présence d'un courant $I = i_0$ constant dans les bobines, l'équilibre résultant est alors stable dans le plan (O, \vec{x}, \vec{z}) mais normalement instable suivant \vec{y} . Tout déplacement de M suivant cette direction augmenterait la composante en \vec{y} des forces magnétiques, et M irait se plaquer sur l'un des deux électroai-

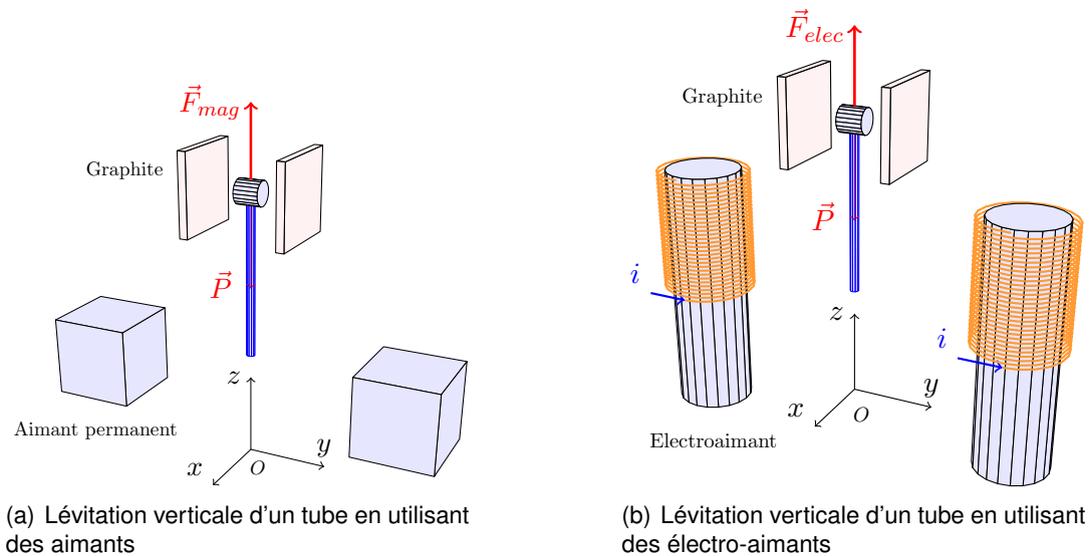


FIGURE 2.8 – Configuration adaptée pour la lévitation diamagnétique d'un tube vertical.

mants. Comme cela a été exposé dans la section précédente, c'est grâce aux plaques diamagnétiques en graphite qu'on peut effacer cette instabilité. Il est également important de souligner que les composantes des efforts diamagnétiques suivant \vec{x} et \vec{z} sont négligeables devant celle suivant \vec{y} . On peut donc considérer les efforts diamagnétiques seulement suivant cette dernière direction qui reste en dehors de la direction de mesure s'effectuant sur la verticale. Enfin, sur l'extrémité inférieure du capillaire, on retrouve la force F_{app} qui correspond à la force d'interaction entre un dispositif à étalonner et l'indenteur.

D'un point de vue pratique, il faut imaginer que le dispositif à étalonner sera placé sous l'indenteur au moyen de platines de translations motorisées. Lorsque les bobines sont alimentées ($i_0 \neq 0$), l'indenteur est en lévitation stable à une altitude z_0 donnée. Les platines de translation vont permettre d'établir le contact entre l'indenteur et le dispositif à étalonner. A ce stade, l'effort F_{app} sera nul, s'il n'y a pas de variation de z_0 (l'influence des forces d'adhésion est négligée à ce stade). Pour appliquer un effort $F_{app} = mg$, il suffit de couper l'alimentation des bobines ($i_0 = 0$). Une particularité du fonctionnement est à noter à ce stade. En effet, le point d'application de F_{app} se situant en dessous du centre de gravité de l'indenteur, se sont les forces diamagnétiques suivant la direction y qui vont empêcher la rotation de l'indenteur autour de x . Pour empêcher la rotation de l'indenteur autour de y , deux autres plaques de graphite dont la normale est orientée suivant x doivent être ajoutées à la structure finale que l'on retrouve sur la figure 2.9.

2.2/ PROTOTYPE EXPÉRIMENTAL DU GÉNÉRATEUR DE FORCE À RMSA

En se basant sur la configuration théorique de la figure 2.9, le prototype expérimental du générateur de force à RMSA a été construit (cf. figure 2.10).

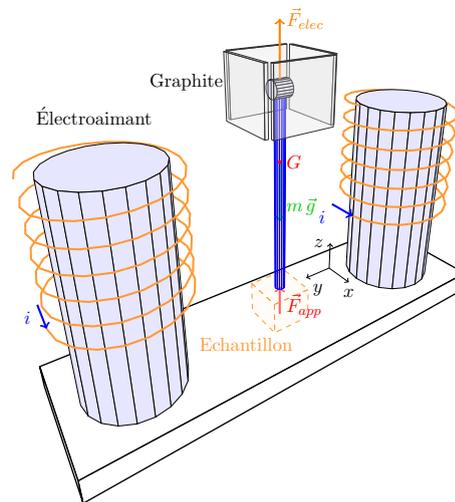
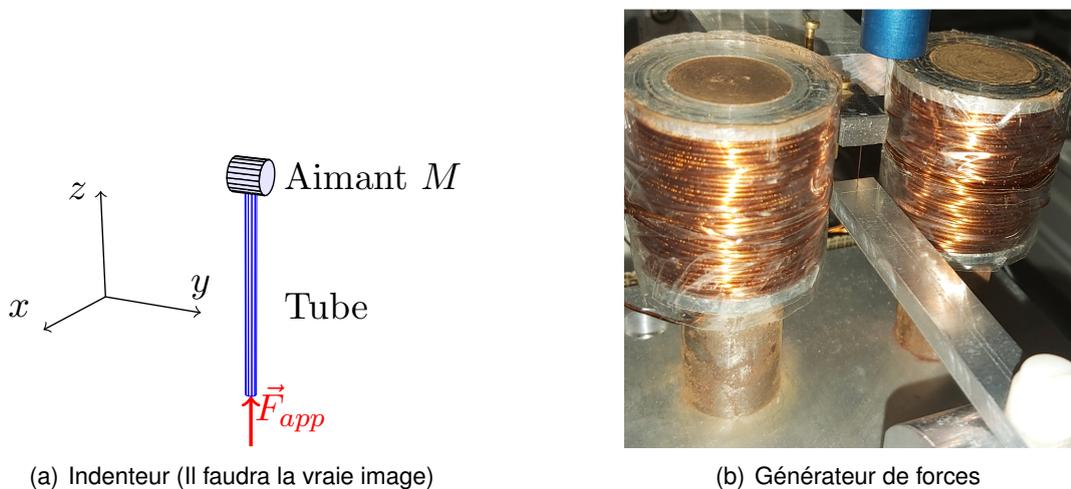


FIGURE 2.9 – Configuration complète du générateur de force à poids mort à ressort magnétique semi-actif (RMSA).



(a) Indenteur (Il faudra la vraie image)

(b) Générateur de forces

FIGURE 2.10 – Prototype expérimental du générateur de force et l'indenteur.

2.2.1/ CONSTITUTION DU GÉNÉRATEUR À RMSA

L'indenteur (appelé également poids mort ou masse sismique) de ce générateur est composé d'un aimant permanent¹ M de forme cylindrique et de dimension 1×1 mm, lequel est collé à un tube en verre² de un centimètre de long et de diamètre extérieur $200 \mu\text{m}$ (voir figure 2.10 à gauche). Une surface en silicium poli-miroir de 1×1 mm est également collée au dessus de l'aimant M et sert de déflecteur optique pour la mesure de l'altitude z de l'indenteur. La masse m de l'indenteur a été mesurée à l'aide d'une balance de précision Mettler Toledo MS105DU³ qui a fournit une valeur de 8,89 mg. A terme, il va de soi que cette masse devra être mesurée par un laboratoire de métrologie accrédité pour

1. Caractéristiques fabricant HKCM : aimant cylindrique Z01x01Ni-N45, diamètre extérieur 1 mm, hauteur 1mm, masse 0,006 g.

2. Molex TSP100245, www.polymicro.com

3. https://www.mt.com/gb/en/home/products/Laboratory_Weighing_Solutions/Analytical/Advanced/semi-micro-balance/MS-Semi-Micro-Balance-MS105DU.html

que nous puissions disposer d'une valeur plus juste, mais aussi et surtout, de l'incertitude qui lui est associée. Avec une telle masse m , la force maximale que le générateur pourra engendrer sera de l'ordre de $87 \mu\text{N}$ avec $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Les deux électro-aimants E_1^m et E_2^m maintiennent en lévitation l'indenteur à une hauteur z donnée lorsque leurs bobines sont parcourues par un courant $I = i_0$ (voir figure 2.10 à droite). Pour cela, il faut que la force électromagnétique, et donc le courant i_0 généré, soit suffisant pour s'opposer au poids de l'indenteur, le tout sans risquer d'endommager les bobines par effet Joule. Cette contrainte a rendu nécessaire l'usage de noyaux de fer doux à l'intérieur de chaque bobine. Aucun dispositif n'a encore été étalonné à l'aide de ce prototype expérimental. Par contre, un appui rigide peut être positionné sous l'indenteur en utilisant des platines de translation⁴ ce qui permet de générer une force F_{app} sur cet appui. Ces platines ont une résolution de déplacement qui est micrométrique. En fonctionnement, l'indenteur reste toujours en position verticale. En absence d'appui sous l'indenteur, une variation i du courant $I = i_0 + i$ qui circule dans les bobines induit une modification de l'altitude z de lévitation. Lorsque l'appui est présent, l'altitude reste alors constante et c'est F_{app} qui augmente si on diminue I . On rappelle que si on annule I en faisant $i = -i_0$, F_{app} vaut alors mg qui correspond à la force maximale que le générateur peut appliquer. Notons que l'indenteur ne tombe pas si le courant I est nul car il est maintenu dans sa verticalité par les forces répulsives générées par le graphite pyrolytique selon les directions \vec{x} et \vec{y} . Nous qualifions ce mode de fonctionnement, soit en lévitation, soit au contact, de "semi-actif" car il n'est pas induit par un asservissement. L'offset de courant i ne sert qu'à faire varier l'altitude de l'indenteur ou bien le poids apparent de ce dernier lorsqu'il est en appui sur un support. L'indenteur est naturellement stable dans toutes les configurations où il est utilisé.

Le déplacement vertical de l'indenteur est mesuré à l'aide d'un capteur confocal chromatique⁵ d'une portée de $300 \mu\text{m}$ qui est pointé sur le déflecteur en silicium (voir figure 2.10).

Pour minimiser l'influence de la température et des vibrations sismiques venant du sol, le générateur à RMSA est placé dans une chambre climatique (Kambič PKK-125), elle-même posée sur une table anti-vibrations Newport (voir figure 2.11).

2.2.2/ UTILISATION DU GÉNÉRATEUR POUR LA MÉTROLOGIE DE FORCE

En se basant sur le principe des machines à poids mort⁶, l'objectif de ce générateur de force à RMSA est de générer une force variable dans la gamme allant de 0 à $100 \mu\text{N}$, dont on connaisse une estimation. Par ailleurs, pour pouvoir revendiquer une qualité métrologique, il faut également fournir une incertitude de mesure associée. Une attention particulière sur la qualité de réalisation du système et sur la maîtrise des perturbations environnementales doivent nous permettre de réduire autant que possible cette incertitude. La difficulté est également d'assurer la traçabilité de la force générée aux unités fondamentales du système international, dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. La notion de traçabilité signifie que toutes les grandeurs manipulées proviennent d'une chaîne ininterrompue de comparaisons aux étalons primaires de référence, qui sont ici le mètre,

4. Physik Instrumente (PI) M111 montées en configuration XYZ

5. PRECITEC, CHRcodile S associé à une sonde confocale chromatique de $300 \mu\text{m}$ de plage de mesure.

6. Appelées deadweight machines en anglais.



FIGURE 2.11 – Vue d’ensemble de l’environnement de travail du générateur à RMSA.

la seconde, le kilogramme et l’ampère. En effet, l’unité de force est une unité dérivée de la masse (kg) et de l’accélération de la pesanteur ($m \cdot s^{-2}$). La mesure de l’accélération de la pesanteur locale est mesurable en laboratoire de manière métrologique. En ce qui concerne notre générateur, le point critique concerne en premier lieu la mesure de la masse de l’indenteur, puis du courant I injecté dans les bobines lorsque ce dernier n’est pas nul. Ce courant sert à générer la force électromotrice qui permet de plus ou moins compenser le poids de l’indenteur. Notons que la mesure traçable des masses inférieures à quelques milligrammes constitue aujourd’hui un challenge important. En effet, l’incertitude relative augmente lorsque la masse considérée diminue (voir la figure 2.12). Cette tendance pénalise énormément les possibilités de production des étalons de force dans la gamme que nous visons car utiliser des masses sismiques en deçà du milligramme est problématique.

Depuis le 20 mai 2019, la masse est définie à partir de la constante de Planck h . L’ancien étalon du kilogramme qui est un artefact matériel baptisé IPK (pour Prototype International du Kilogramme) est abandonné. Avec la nouvelle définition de la masse, il est possible, dans le futur, que l’on puisse correctement raccorder à h des masses de l’ordre du milligramme en utilisant des balances de Kibble dédiées. En attendant que les nouvelles procédures et que les étalons secondaires soient opérationnels, la masse de notre indenteur doit, pour le moment, rester supérieure au milligramme. Une masse de 8,89 mg nous semble raisonnable dans un premier temps pour tester notre dispositif. Une bonne qualité métrologique du courant I injecté dans les bobines pourrait permettre à terme de générer une force F_{app} inférieure au micronewton avec une incertitude relative qui reste “raisonnable” (quelques pourcents) malgré la masse relativement importante de l’indenteur. Bien entendu, d’autres facteurs environnementaux limitant vont également participer à la dégradation de l’incertitude et il convient d’essayer de les évaluer. Ce type d’étude permettra d’améliorer par la suite le générateur afin de diminuer son incertitude. Si les performances atteintes par le dispositif s’avèrent satisfaisantes dans la gamme de force visée, il pourrait à terme être utilisé comme proposition d’étalon pour les faibles forces

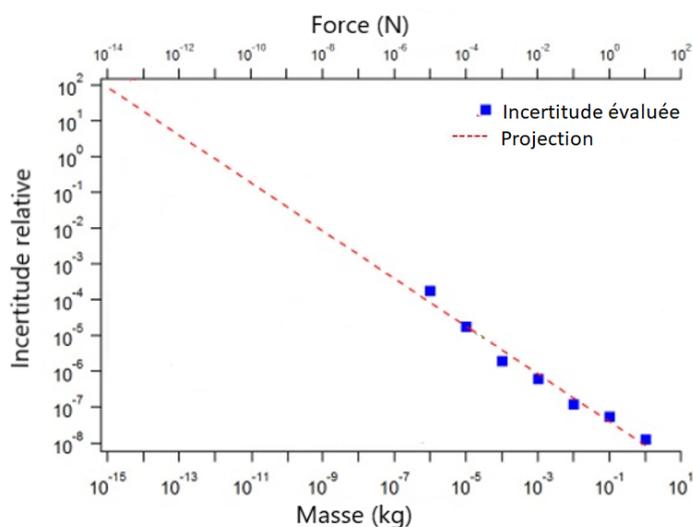


FIGURE 2.12 – Relation entre l'incertitude et la masse

lorsque sa traçabilité au SI aura été établie. Il pourrait alors permettre par exemple d'étalonner les leviers d'AFM compatibles avec la gamme de force générée. Les AFM font partie des dispositifs les plus couramment utilisés dans la recherche et l'industrie pour la mesure de faibles forces.

2.3/ MODÉLISATION DU GÉNÉRATEUR À RMSA

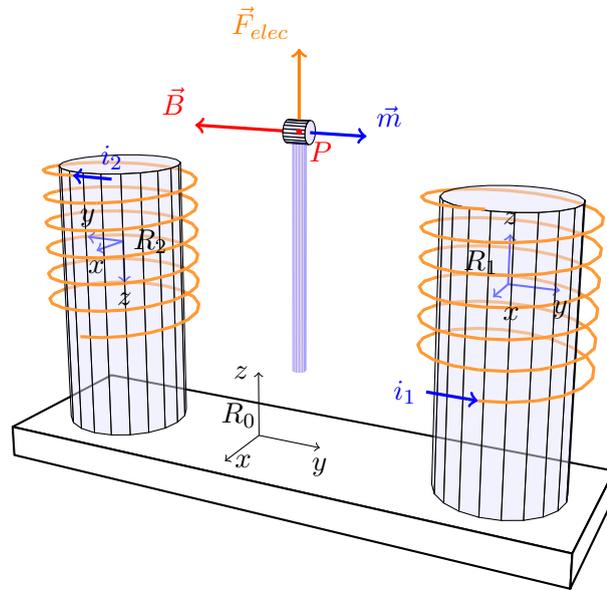
L'indenteur est mis en lévitation sous l'effet des forces magnétiques. Parmi celles-ci, on trouve les forces diamagnétiques de faible amplitude qui sont orientées à l'horizontale, hors direction de mesure, dans le plan $(\vec{o}, \vec{x}, \vec{z})$. Dans la direction de mesure, suivant z , c'est principalement la force électromagnétique F_{elec} , mais aussi le poids $P = mg$ et la force d'appui inférieure F_{app} qui régissent la dynamique de l'indenteur. Dans cette section, nous allons tout d'abord proposer un modèle expérimental pour la modélisation de F_{elec} puis nous nous intéresserons à la dynamique de l'indenteur suivant z .

2.3.1/ MODÉLISATION DES EFFORTS MAGNÉTIQUES

2.3.1.1/ DÉTERMINATION DE F_{elec}

D'un point de vue purement théorique, il est possible d'envisager le calcul de la force magnétique produite par une induction magnétique \vec{B} sur un aimant permanent possédant une magnétisation \vec{m} . Ces entités vectorielles sont représentées sur la figure 2.13. Notre aimant M étant de petite taille et de magnétisation⁷ \vec{m} supposée constante, la force magnétique qui s'exerce sur lui, lorsqu'il est placé en P , s'exprime par l'équation suivante :

7. La magnétisation ne doit pas être confondue avec la masse m de l'indenteur qui est une grandeur scalaire

FIGURE 2.13 – Orientation de la magnétisation \vec{m} de l'aimant en lévitation

$$\vec{F}_{elec} = \nabla \vec{B}(\vec{P}) \vec{m} V \quad (2.1)$$

avec V le volume de l'aimant M et ∇ l'opérateur gradient appliqué à l'induction magnétique \vec{B} au point P , tous les vecteurs étant exprimés dans le repère R_0 . On a ainsi :

$$\vec{F}_{elec} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad \nabla \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \vec{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} V. \quad (2.3)$$

Pour chaque composante on a :

$$\begin{aligned} f_x &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} m_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} m_y + \frac{\partial B_z}{\partial x} m_z \right) V, \\ f_y &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} m_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} m_y + \frac{\partial B_z}{\partial y} m_z \right) V, \\ f_z &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} m_x + \frac{\partial B_y}{\partial z} m_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} m_z \right) V. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans notre cas (voir la figure 2.13), les composantes m_x et m_z de la magnétisation \vec{m} sont nulles. On obtient :

$$\vec{F}_{elec} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} \end{pmatrix} m_y V. \quad (2.5)$$

Pour connaître \vec{F}_{elec} il faut connaître la magnétisation m_y et il faut pouvoir déterminer le gradient de la composante y de l'induction magnétique.

2.3.1.2/ DÉTERMINATION DE B

Comme nous allons le vérifier ci-après, la valeur de la masse à sustenter impose l'usage de bobines avec un noyau de fer doux pour pouvoir générer une force verticale F_{elec} suffisamment importante. L'inconvénient d'un tel choix est que la détermination analytique du champ d'induction magnétique \vec{B} est difficilement envisageable dans ce cas de figure.

Durant le stage de Julie Beluche, une première étude du champ d'induction magnétique généré par les bobines E_1^m et E_2^m a été menée de manière à comparer l'effort \vec{F}_{elec} produit par les bobines sur l'indenteur, à l'effort \vec{F}_{mag} qui serait généré plutôt par des aimants permanents, dans la configuration plus conventionnelle de la figure 2.8(a). Pour ce faire, Julie Beluche a identifié la magnétisation m_y (en suivant la même approche que dans (Oster, 2012)) et un calcul par éléments finis de l'induction magnétique générée pour les deux configurations a été effectué sur le logiciel Comsol Multiphysics. Dans le modèle des bobines, le noyau de fer doux a également été modélisé. Dans la configuration représentée sur la figure 2.14, l'indenteur est en lévitation à l'intersection du plan $(\vec{o}, \vec{y}, \vec{z})$ passant par l'axe des bobines et du plan de symétrie $(\vec{o}, \vec{x}, \vec{z})$. L'intersection de ces 2 plans forme l'axe z du référentiel fixe $(\vec{o}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ qui a été considéré pour effectuer la modélisation par éléments finis. Le long de cet axe z , il s'avère que les composantes $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ et $\frac{\partial B_y}{\partial y}$

sont nulles. Donc, d'après l'équation (2.5), la force \vec{F}_{elec} est orientée à la verticale suivant la direction z . l'évolution de sa composante f_z est tracée sur la figure 2.15 pour les deux configurations étudiées (courbe verte pour les aimants et courbe rouge pour les bobines). Les petites ondulations sur la courbe rouge sont des artefacts de calcul liés au maillage utilisé. Le point O du référentiel (qui correspond à l'abscisse $z = 0$ sur les courbes) a été choisi pour correspondre au point où le champ d'induction magnétique est nul, comme l'illustre la courbe bleu (pour les aimants) et la courbe noire (pour les bobines). En ce point O , on constate que la dérivée du champ magnétique par rapport à z est maximale. De ce fait, l'effort magnétique est aussi maximal en O (courbes verte et rouge).

D'après la figure 2.15, on constate que l'effort magnétique ainsi que l'intensité de l'induction magnétique sont similaires en forme mais bien plus importants dans le cas d'utilisation des électro-aimants. En effet, l'effort électromagnétique dépend de l'altitude z , mais aussi du courant I dont on peut faire varier la valeur. La seule limitation sur l'effort généré reste l'échauffement, par effet Joule, des bobines qui est provoqué par la circulation du courant I dans les fils de cuivre de l'enroulement. Pour que le point d'équilibre entre le poids de l'indenteur et \vec{F}_{elec} soit stable sur z avec les bobines, il faut impérativement qu'il

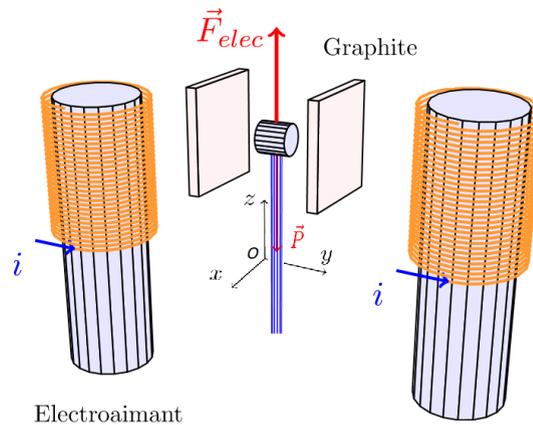


FIGURE 2.14 – Positionnement du référentiel pour le calcul avec Comsol du champ d'induction magnétique et de F_{elec}

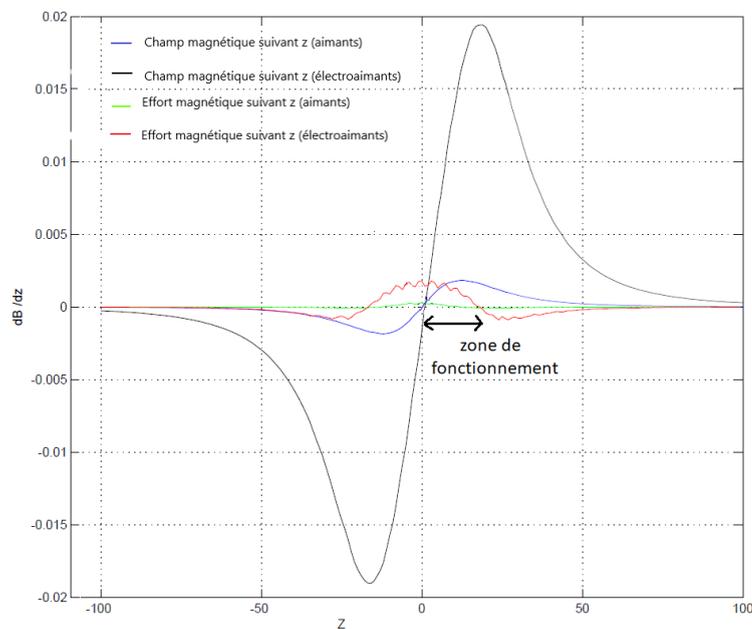
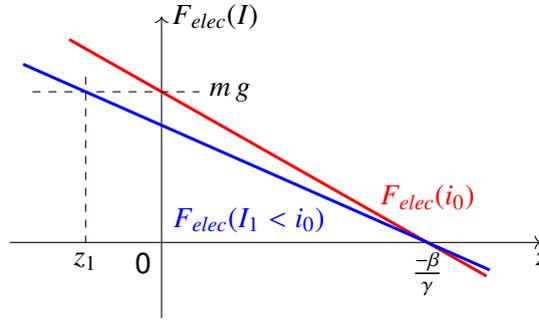


FIGURE 2.15 – Illustration des efforts magnétiques ainsi que l'intensité de l'induction magnétique pour le cas des aimants et des électro-aimants.

se situe entre l'altitude 0 mm et 20 mm. Cette zone est représentée par la flèche noire dans la figure. Dans cette zone, si l'indenteur se déplace au dessus du point d'équilibre, f_z diminue et le poids ramène alors l'indenteur vers le point d'équilibre. Si l'indenteur se déplace en dessous du point d'équilibre, f_z augmente pour faire remonter l'indenteur. Dans notre cas, puisque la hauteur des plaques de graphite selon l'axe vertical mesure 5 mm, nous travaillons sur une zone de fonctionnement de 5 mm qui se situe quelque part dans la zone de 20 mm, autour du point où le poids compense f_z . Notons que si la valeur du courant I change, l'amplitude de la courbe rouge sera modifiée, ce qui aura pour conséquence de déplacer le point d'équilibre stable vers le haut ou vers le bas. L'altitude de lévitation est donc contrôlée par le courant I .

FIGURE 2.16 – Formulation analytique simplifiée de F_{elec} .

2.3.1.3/ MODÉLISATION APPROCHÉE DE F_{elec}

Nous avons vu dans la section précédente qu'on peut calculer numériquement par éléments finis le champ \vec{B} créé par les deux électro-aimants E_1 et E_2 . Nous avons également précisé qu'il n'est pas possible de disposer d'une formulation analytique exacte de \vec{B} mais seulement d'expressions approchées. Cependant, notre dispositif va fonctionner exclusivement autour d'un point de fonctionnement particulier. Ce point est situé sur l'axe \vec{z} à l'altitude de lévitation stable de l'indenteur lorsque le courant i_0 est injecté dans les bobines. *Par convention, dans tout le mémoire, la valeur de cette altitude sera $z = 0$.*

Cette référence nulle pour z ne doit pas être confondue avec la référence nulle qui a été utilisée précédemment sur la figure 2.15 et qui représentait le point situé le long de l'axe \vec{z} où le champ d'induction magnétique était nul. Ce point où \vec{B} est nul est forcément situé *en dessous* du point d'équilibre stable.

Pour pallier l'absence de formulation analytique exacte de \vec{B} , nous avons décidé d'utiliser une expression analytique simplifiée de F_{elec} et de la vérifier expérimentalement. Cette expression représente correctement son évolution en fonction de i et z , à condition que les variations d'altitude de l'indenteur soient aussi faibles que possible par rapport à $z = 0$.

La force F_{elec} dépend à la fois du courant total I qui circule dans les bobines et de l'altitude z de l'indenteur. Si on maintient artificiellement l'indenteur à l'altitude de référence $z = 0$, F_{elec} sera directement proportionnelle au courant I injecté dans les bobines. Soit β ce facteur de proportionnalité. Pour de très faibles déplacements selon \vec{z} autour de $z = 0$, on va approximer la variation de F_{elec} par une variation linéaire en z lorsqu'on est à courant constant. Cela revient à tracer la tangente au point de fonctionnement sur la courbe rouge de la figure 2.15. Le regroupement de ces deux comportements conduit à l'expression non linéaire suivante :

$$\vec{F}_{elec}(I, z) = F_{elec}(I, z) \vec{z} = I(\gamma z + \beta) \vec{z}. \quad (2.6)$$

Quand $I = i_0$ et $z = 0$, l'indenteur est à l'équilibre et il est sustenté. La force $\vec{F}_{elec}(I, z)$ s'oppose donc au poids \vec{P} et on a $F_{elec}(i_0, 0) = mg$. En reportant ces valeurs dans (2.6), on en déduit :

$$\beta = \frac{mg}{i_0}. \quad (2.7)$$

Si l'indenteur ne subit que la force électromagnétique et son propre poids et qu'on a

$I \neq i_0$, alors l'altitude de lévitation est nécessairement modifiée. Par exemple, si $I = I_1$ avec $I_1 < i_0$, l'indenteur va descendre jusqu'à l'altitude z_1 où la force électromagnétique $F_{elec}(I_1, z_1)$ compense à nouveau la valeur mg du poids (cf. la courbe bleue sur la figure 2.16). De ce fait, on retrouve qu'en ajoutant un offset de courant i à la valeur de i_0 , on peut modifier l'altitude de l'indenteur autour de $z = 0$.

Quand $I = i_0 + i$ avec $i \neq 0$, l'indenteur se déplace à l'altitude $z \neq 0$. Il reste sustenté et est toujours à l'équilibre. On a $F_{elec}(I, z) = F_{elec}(i_0 + i, z) = mg$. Avec (2.6) et (2.7), on obtient :

$$(i_0 + i)(\gamma z + \beta) = mg = i_0 \beta, \quad (2.8)$$

$$(i_0 + i)\gamma z + i_0 \beta + i \beta = i_0 \beta. \quad (2.9)$$

Donc :

$$\gamma = \frac{-i \beta}{z(i_0 + i)}. \quad (2.10)$$

Le terme γ est forcément négatif afin que $F_{elec}(I, z)$ soit une fonction décroissante de z autour de $z = 0$ (condition nécessaire pour avoir un point d'équilibre stable). Lorsqu'un courant $I = i_0$ circule dans les bobines et que l'environnement extérieur impose à l'indenteur un déplacement autour du point $z = 0$, le terme $-i_0 \gamma$ représente alors la raideur du ressort magnétique connecté à l'aimant M . Sur la figure 2.16, c'est la pente de la droite rouge.

Dans la suite du mémoire, on posera que le courant I qui circule dans les bobines est $I = i_0 + i$. Dans ce cas, l'équation (2.6) s'écrit :

$$F_{elec}(I, z) = (i + i_0)(\gamma z + \beta), \quad (2.11)$$

$$= i(\gamma z + \beta) + i_0(\gamma z + \beta), \quad (2.12)$$

$$= f_{elec}(i, z) + f_{elec}(i_0, z) \quad (2.13)$$

avec :

$$f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta) \quad (2.14)$$

et :

$$f_{elec}(i_0, z) = i_0(\gamma z + \beta) = i_0 \gamma z + mg. \quad (2.15)$$

Dans ce qui suit, le courant i_0 sera toujours le courant constant qui est utilisé pour effectuer la mise en lévitation passive de l'indenteur à l'altitude $z = 0$ qui sert de référence. L'offset de courant i sera quant à lui une grandeur ajustable qui pourra être utilisée de différentes manières qui sont détaillées dans la suite du chapitre.

2.3.1.4/ VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA MODÉLISATION DE F_{elec}

Pour vérifier expérimentalement la formulation simplifiée de F_{elec} , on peut exploiter le fait que F_{elec} est égale à mg lorsque l'indenteur est sustenté en régime statique.

Nous avons donc mis l'indenteur en lévitation en faisant circuler un courant $i_0 = 0.29$ A dans les bobines. Plusieurs courants d'offset i ont ensuite été ajoutés à i_0 et les valeurs de l'altitude z correspondantes ont été mesurées en procédant à un moyennage pour filtrer les vibrations sismiques résiduelles. Les altitudes mesurées sont représentées par des points rouges dans la figure 2.17.

Nous avons ensuite comparé ce résultat expérimental au résultat analytique qui est obtenu en partant de l'équation (2.11) et en tenant compte du fait que la force $F_{elec}(I,z)$ est toujours égale au poids de l'indenteur en régime statique :

$$F_{elec}(I,z) = (i + i_0)(\gamma z + \beta) = mg, \quad (2.16)$$

D'après les équations (2.16) et (2.7) l'altitude z est alors :

$$z = \frac{mg(i_0 - (i + i_0))}{(i + i_0) i_0 \gamma}. \quad (2.17)$$

On établit ainsi un lien entre l'altitude z et le courant d'offset i qu'on peut vérifier expérimentalement, ce qui permet de valider indirectement le modèle de $F_{elec}(I,z)$.

On va donc vérifier si les altitudes calculées analytiquement et les altitudes mesurées correspondent. Le courant i_0 vaut 0.29 A, et les courants d'offset i varient entre -0.002 A et 0.002 A. La valeur de γ a été identifiée (pour plus de détails sur cette identification, voir le chapitre 3) : $\gamma = -0,112$ N/A/m. La mesure de la valeur de la masse est $m = 8,89 \cdot 10^{-6}$ kg

L'accélération de la pesanteur a été prise égale à $g = 9.81$ ms⁻². Le résultat analytique est illustré par la courbe bleue dans la figure 2.17. Cette figure illustre la variation de l'altitude z en fonction du courant total $I = i_0 + i$ qui circule dans les bobines. Les points rouges correspondent aux valeurs expérimentales. Lorsque le courant I vaut 0.29 A (ce qui signifie que le courant d'offset i est nul) l'altitude moyennée qui est mesurée expérimentalement est quasi confondue avec $z = 0$ et la courbe bleue passe également par zéro. Pour des altitudes qui varient dans la plage de ± 60 μ m, on constate que les valeurs expérimentales sont très proches de celles fournies par la formulation analytique. On peut donc en déduire que la forme paramétrique qui a été choisie pour la loi qui donne $F_{elec}(I,z)$ traduit bien la réalité physique à proximité de $z = 0$.

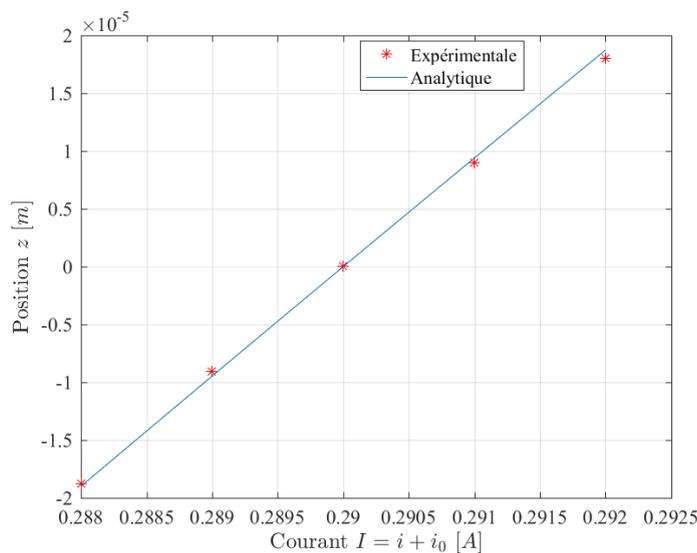


FIGURE 2.17 – Représentation de l'altitude z en fonction du courant total qui circule dans les bobines : résultats expérimentaux et analytiques.

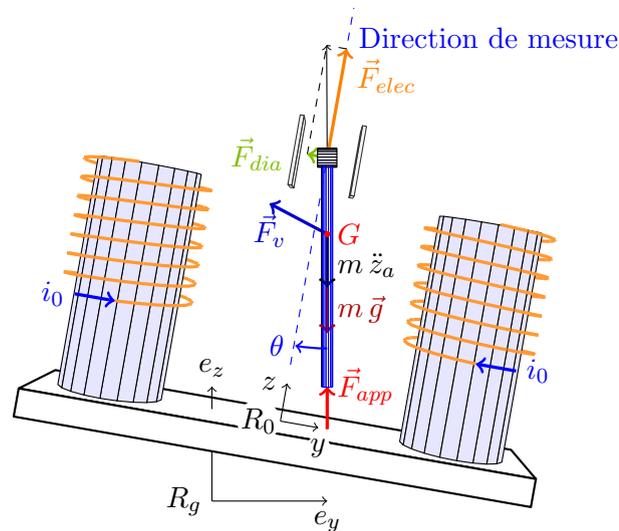


FIGURE 2.18 – Etude de la configuration des forces appliquées à l'indenteur dans un cas réaliste (la poussée de l'air a été négligée ici).

2.3.2/ MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DE L'INDETEUR

La modélisation de la dynamique de l'indenteur est utile pour établir comment son altitude varie dans le temps lorsqu'il est soumis à l'ensemble des forces externes qui s'appliquent sur lui.

Pour modéliser cette dynamique suivant la direction \vec{z} , nous devons dans un premier temps recenser l'ensemble des forces qui sont appliquées à l'indenteur. Nous trouvons donc les trois principales forces déjà évoquées précédemment, à savoir son poids \vec{P} , la force électromagnétique \vec{F}_{elec} et la force d'appui sur l'échantillon \vec{F}_{app} . D'un point de vue pratique, il est également important de prendre en compte l'ensemble des forces de perturbations qui vont participer à la dynamique de l'indenteur. Le travail de Billot (Billot et al., 2016) a permis d'en identifier certaines. La première est induite par les vibrations sismiques du sol qui sont transmises à notre dispositif malgré l'amortissement de la table anti-vibrations. La seconde perturbation provient de la dynamique en rotation de la table anti-vibrations. En effet, nous utilisons une table semi-active montée sur coussin d'air. Sur ce type de matériel, on ne peut pas éliminer les rotations parasites du plateau en roulis et en tangage. De ce fait, le plateau est sujet à un phénomène très basse fréquence qui correspond à de petites et lentes variations d'assiette. Nous appellerons θ l'angle qui se forme entre le plateau et l'horizontale (voir figure 2.18). Les variations d'assiette étant très lentes, l'accélération angulaire de R_0 par rapport à R_g est considérée comme négligeable ($\ddot{\theta}(t) = 0$, $\dot{\theta}(t) = 0$, $\theta(t) = \theta$). Enfin, nous appellerons \vec{F}_v , la force de frottement de l'air qui s'oppose au mouvement de l'indenteur. Dans la modélisation qui suit, nous allons négliger les forces de perturbation induites par la masse d'air (forces acoustiques, forces de convection thermique et poussée d'Archimède de l'air) ainsi que les forces d'adhésion entre l'indenteur et l'échantillon. Nous reviendrons sur ces forces dans la conclusion du mémoire.

Soit G le centre de gravité de l'indenteur et z la troisième composante de G exprimée dans

le référentiel R_0 représenté sur la figure 2.18. R_0 est le référentiel fixe attaché au plateau de la table anti-vibrations. La coordonnée z est donc le déplacement de l'indenteur (selon la direction z dans la figure 2.18) mesuré avec le capteur confocal chromatique lui-même solidaire du plateau, le long de la direction de mesure indiquée en pointillé sur la figure. Par convention, la valeur z vaut zéro lorsque l'indenteur est en lévitation sous l'effet du courant i_0 constant, et lorsque aucune perturbation extérieure n'agit dessus (indenteur en régime statique).

Le référentiel R_0 (référentiel plateau) est un référentiel non galiléen dont la position dépend principalement des vibrations sismiques transmises par le sol au plateau de la table anti-vibrations. R_g est un référentiel galiléen qui permet d'exprimer la position et l'orientation de la table. En pratique, nous n'avons aucun moyen de disposer d'un ancrage qui puisse être solidaire de R_g . Notons $P(t)$ la pose du plateau de la table exprimée dans R_g . $P(t)$ est une quantité non mesurée contrairement à $z(t)$. La deuxième quantité à laquelle nous ne pouvons pas avoir accès est θ car la mesure de cette quantité n'a pas été instrumentée.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'indenteur dans le référentiel non galiléen $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est donné par :

$$m \vec{a}_{G/R_0} = \vec{F} + \vec{F}_{mR_0} \quad (2.18)$$

avec \vec{F} la somme des forces appliquées à l'indenteur ($m \vec{g}$, \vec{F}_{elec} , \vec{F}_{app} , \vec{F}_v etc.) et \vec{F}_{mR_0} la somme des forces appliquées à l'indenteur provenant du mouvement du référentiel R_0 (mouvement non rectiligne uniforme de la table). On retrouve la force d'entraînement en translation $\vec{F}_{trans} = -m \vec{a}_{R_0/R_g}$, mais aussi la force centrifuge \vec{F}_{cent} , la force de Coriolis \vec{F}_{Cor} et la force d'Euler \vec{F}_{Eul} , définies par :

$$\vec{F}_{cent} = -m \left(\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AG}) \right), \quad (2.19)$$

$$\vec{F}_{Cor} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r, \quad (2.20)$$

$$\vec{F}_{Eul} = -m \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{AG} \right) \quad (2.21)$$

avec $\vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire de rotation de R_0 par rapport à R_g , A un point situé sur l'axe de rotation de R_0 et \vec{v}_r la vitesse radiale de l'indenteur par rapport à l'axe de rotation. Les mouvements en rotation du plateau étant par nature très lents et de très faible amplitude, nous considérons que la norme de $\vec{\Omega}$ est négligeable. Par conséquent, \vec{F}_{mR_0} ne comporte que la force d'entraînement en translation \vec{F}_{trans} . Elle s'écrit dans le référentiel R_0 sous la forme :

$$\vec{F}_{trans} = -m \vec{a}_{R_0/R_g} = -m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z = \ddot{z}_a \end{bmatrix}_{R_0} \quad (2.22)$$

Finalement, la dynamique de l'indenteur suivant l'axe de mesure est obtenue en projetant (2.18) suivant z :

$$m \ddot{z} = F_{elec} + (-m g + F_{app}) \cos \theta - K_v \dot{z} - m \ddot{z}_a \quad (2.23)$$

en notant F_{elec} la composante de \vec{F}_{elec} selon \vec{z} dans le référentiel R_0 et F_{app} la composante de \vec{F}_{app} selon \vec{e}_z dans le référentiel R_g . Lorsqu'on tient compte de l'orientation θ du plateau de la table anti-vibrations, la définition du paramètre β évolue par rapport à (2.7). En régime statique lorsque $I = i_0$ et $z = 0$, on sait que l'indenteur est à l'équilibre et qu'il est sustenté. Dans ce cas, on a $F_{elec}(i_0, 0) = m g \cos \theta$. En reportant ces valeurs dans (2.6), on en déduit la relation suivante qui remplace (2.7) :

$$\beta = \frac{m g \cos \theta}{i_0}. \quad (2.24)$$

De ce fait, le paramètre β est un paramètre non stationnaire qui dépend de θ et de sa lente dynamique. La projection de \vec{F}_{elec} suivant z s'écrit comme suit :

$$F_{elec}(I, z) = f_{elec}(i, z) + f_{elec}(i_0, z), \quad (2.25)$$

$$= f_{elec}(i, z) + i_0(\gamma z + \beta), \quad (2.26)$$

$$= f_{elec}(i, z) + i_0 \gamma z + m g \cos \theta \quad (2.27)$$

avec $f_{elec}(i, z)$ qui est donnée par (2.14). Le terme $f_{elec}(i, z)$ dépend de β qui est donné par (2.24). De ce fait, il dépend donc aussi de θ . En utilisant l'équation (2.27), la dynamique de l'indenteur s'écrit :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = f_{elec}(i, z) + F_{app} \cos \theta - m \ddot{z}_a. \quad (2.28)$$

L'offset de courant i est la grandeur de commande utilisable pour contrôler l'altitude z de l'indenteur et F_{app} est la force d'appui sur l'indenteur qui est induite par l'échantillon situé sous l'indenteur. Dans la direction de mesure \vec{z} , la dynamique intrinsèque de l'indenteur est donnée par la partie gauche de cette dernière équation. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre qui modélise le comportement d'un système masse, ressort, amortisseur classique. Le système est stable car la raideur $i_0 \gamma$ du ressort magnétique est positive, puisque γ est négatif (voir figure 2.16). Dans cette équation (2.28), les termes situés à droite représentent les forces externes appliquées au dispositif. On retrouve la force électromagnétique $f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta)$ qu'on peut ajuster grâce au courant i . Nous verrons dans les chapitres suivants comment nous affranchir du fait que $f_{elec}(i, z)$ dépende aussi de z . Enfin, on trouve la force d'entraînement $m \ddot{z}_a$ due aux mouvements de la table provoqués par les perturbations sismiques du sol. Cette force est continuellement présente et nous n'avons aucun contrôle sur cette dernière, puisque nous la subissons malgré l'utilisation de la table anti-vibrations.

2.4/ ÉTUDE DES DIFFÉRENTS MODES DE FONCTIONNEMENT DU DISPOSITIF

L'équation (2.28) met en lumière les différentes possibilités d'utilisation de notre dispositif à RMSA.

Le premier mode est le mode de génération de force sur le principe du poids mort. Dans ce cas de figure, l'indenteur est en appui sur un échantillon et F_{app} vaut :

$$F_{app}(i, z) = \frac{1}{\cos \theta} (m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z + m \ddot{z}_a - f_{elec}(i, z)). \quad (2.29)$$

La force F_{app} qui est générée par le dispositif dépend du courant de commande i et du déplacement z . En utilisant (2.14) et (2.24), elle s'écrit :

$$F_{app} = \frac{1}{\cos \theta} \left(m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z + m \ddot{z}_a - i \left(\gamma z + \frac{m g \cos \theta}{i_0} \right) \right). \quad (2.30)$$

Cette expression générale tient compte de la rotation θ de la table anti-vibrations, de son mouvement sismique z_a et de l'altitude z de l'indenteur. D'un point de vue pratique, on peut imaginer que l'échantillon sera positionné sous l'indenteur initialement maintenu en lévitation à l'altitude choisie par convention à $z = 0$. Une fois le contact établi entre l'échantillon et l'indenteur, deux cas de figures peuvent se produire selon que l'échantillon est déformable ou pas.

Si l'échantillon est déformable sous l'effet de F_{app} , la dynamique résultante sur z sera la conséquence d'un couplage mécanique entre l'indenteur et l'échantillon. Cette dynamique couplée est induite par la force F_{app} que l'échantillon applique sur l'indenteur. Si on cherche à déterminer F_{app} à l'aide de (2.30), on est gêné par le bruit présent sur z et par la difficulté à obtenir les dérivées successives de z . Par ailleurs, on ne connaît pas l'accélération \ddot{z}_a et l'angle θ . Même s'il est parfaitement possible d'estimer F_{app} à l'aide des outils qui vont être développés dans les chapitres suivants, nous allons, dans le cadre de cette thèse, nous placer dans le cadre applicatif plus restrictif d'un échantillon infiniment rigide.

Si l'échantillon est infiniment rigide, la dynamique de l'indenteur devient nulle à l'altitude de fonctionnement ($z = 0$). Dans ce cas, nous obtenons :

$$F_{app} = \frac{m}{\cos \theta} \ddot{z}_a - \frac{i}{i_0} m g. \quad (2.31)$$

Si on néglige en plus l'influence de l'assiette de la table et les perturbations sismiques, la force appliquée à l'échantillon F_{app} est proportionnelle au courant de commande i . Elle est illustrée sur la figure 2.19. Nous disposons ainsi d'un générateur de force commandé en courant i qui peut générer aussi bien une force de traction que de compression et dont la limite est fixée par le courant maximal qu'on peut injecter dans les bobines. On remarquera que quand $i = -i_0$ (ce qui annule le courant I dans les bobines), cette force est égale au poids de l'indenteur. Avec les approximations successives qui viennent d'être faite, la mesure de la masse de l'indenteur et de la gravité locale permettent d'assurer potentiellement le lien métrologique aux grandeurs de référence du SI.

L'accélération \ddot{z}_a du plateau et son orientation vont induire un biais sur la force générée. Comme l'angle θ est très petit en pratique, $\cos \theta$ sera pratiquement égal à 1. Comme il évolue lentement, son influence sur un temps de mesure long peut devenir non négligeable. L'accélération sismique \ddot{z}_a peut induire un biais significatif qu'il convient d'estimer avec une qualité métrologique. Ceci nécessite de développer en plus un accéléromètre qui puisse être traçable au SI si on veut que le générateur de force soit lui-même traçable au SI. Ce développement va être rendu possible grâce au deuxième mode d'utilisation du dispositif.

Le deuxième mode d'utilisation consiste à laisser l'indenteur en sustentation. Dans ce cas, il n'y a pas de force d'interaction et $F_{app} = 0$. L'accélération de la table dans la direction de mesure vaut alors :

$$\ddot{z}_a(i, z) = -\ddot{z} - \frac{1}{m} (K_v \dot{z} - i_0 \gamma z - f_{elec}(i, z)). \quad (2.32)$$

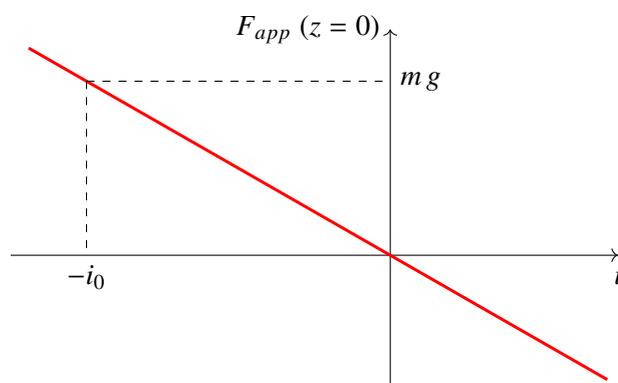


FIGURE 2.19 – Évolution de la force appliquée à l'échantillon F_{app} , en fonction du courant de commande i , dans une configuration idéale.

Cet accéléromètre peut fonctionner en mode passif ou actif. En mode passif, on a $i = 0$. Le seul courant qui traverse les bobines est le courant $I = i_0$ qui sert à faire léviter l'indenteur à l'altitude de référence $z = 0$ si $\ddot{z}_a = 0$. En présence de l'accélération du plateau $\ddot{z}_a \neq 0$, l'altitude de l'indenteur va alors se mettre à varier. En mode actif, le courant i sera contrôlé afin d'asservir l'altitude z sur la consigne nulle.

En pratique, l'expression (2.32) n'est pas utilisable directement pour estimer \ddot{z}_a de manière métrologique à cause du bruit de mesure sur z qui s'amplifie dans \dot{z} et \ddot{z} , des incertitudes sur les paramètres et des incomplétudes présentes dans les modèles qui sont utilisés. Un point d'attention doit également être porté sur les forces de perturbation qui ont été négligées. Il convient donc de développer une stratégie spécifique pour développer un accéléromètre traçable au SI qui tienne compte de ces différents points. Cette stratégie fait l'objet des cinq prochains chapitres.

2.5/ CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle structure de générateur de forces potentiellement traçables au Système International d'unités, dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. Ce générateur est basé sur un ressort magnétique auto-stabilisé (RMA) qui intègre des électroaimants avec des noyaux de fer doux et qui utilise le principe de la lévitation diamagnétique pour être passivement stable. Nous avons présenté en détail sa modélisation et son principe de fonctionnement. Sa modélisation montre que ce dispositif est notamment sujet aux vibrations sismiques qui sont inévitables. Ces vibrations se traduisent par une accélération du plateau de la table anti-vibrations sur laquelle est posé le générateur. Afin de pouvoir générer une force qui soit potentiellement traçable au SI, il faut être capable d'estimer cette accélération et l'incertitude associée. Comme le générateur proposé peut fonctionner en mode accéléromètre, nous allons présenter dans le prochain chapitre un accéléromètre qui exploite la même structure que le générateur de force proposé.

CONCEPTION DE L'ACCÉLÉROMÈTRE

Sommaire

3.1 Introduction	37
3.2 Accéléromètres	38
3.2.1 Définition et principe	38
3.2.2 Principales caractéristiques d'un accéléromètre	40
3.2.2.1 Sensibilité	40
3.2.2.2 Sensibilité inter-axe/sensibilité transverse	41
3.2.2.3 Bande passante	41
3.2.2.4 Gamme ou étendue de mesure ou pleine échelle	42
3.2.2.5 Résolution	42
3.2.2.6 Bruits affectant l'accéléromètre	42
3.2.3 Les méthodes de transduction des accéléromètres	43
3.2.3.1 Détection optique	43
3.2.3.2 Détection piézo-électrique	44
3.2.3.3 Détection piézorésistive	45
3.2.3.4 Détection capacitive	46
3.2.4 Accéléromètres asservis	47
3.2.5 Accéléromètres dont la masse sismique est en lévitation / Accéléromètres basés sur la lévitation	49
3.3 Caractéristiques	49
3.4 Conclusion	55

3.1/ INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le générateur de force proposé subit des forces de perturbation liées à son l'environnement. Ces forces sont notamment induites par la masse d'air (infrasons, poussée d'Archimède, phénomènes convectifs basses fréquences) et par les vibrations sismiques du sol. Dans le chapitre précédent, les forces induites par la masse d'air n'ont pas été modélisées et dans le cadre de ce mémoire, seules les perturbations sismiques sont considérées. Ces perturbations sont induites par l'accélération du plateau de la table anti-vibrations sur lequel le générateur de force est posé. Cette accélération est induite par les vibrations basses fréquences du sol qui sont pas correctement filtrées par la table anti-vibrations. Comme le générateur de force a une fréquence de résonance qui est très basse (de l'ordre de quelques hertz), il va être

sensible aux accélérations basses fréquences du plateau. Pour cette raison, nous proposons la conception d'un accéléromètre basses fréquences dédié qui puisse être de qualité métrologique.

Dans ce qui suit, nous allons détailler la conception de cet accéléromètre qui utilise la même structure mécanique et le même RMA (ressort magnétique auto-stabilisé) que le générateur de force. Ce choix a été dicté par le fait que le générateur de force est un dispositif qui peut fonctionner selon deux modes (cf. le chapitre précédent) : générateur de force ou accéléromètre. Comme le RMA utilisé est particulièrement sensible aux accélérations sismiques basses fréquences, ce point, qui peut être considéré comme un inconvénient pour le générateur, devient un avantage pour l'accéléromètre. Si on duplique le dispositif décrit dans le chapitre 2 au sein de l'enceinte climatique, on peut considérer que chacun des deux dispositifs sera soumis aux mêmes conditions environnementales. A très basses fréquences, le plateau mobile de la table anti-vibrations est un solide quasi-indéformable dont chaque élément de volume subit la même accélération. De ce fait, la force d'accélération qui perturbe le générateur de force peut être déduite de l'accélération du plateau qui est mesurée par l'accéléromètre lorsque ce dernier est relié de manière rigide au plateau vibrant.

Les caractéristiques de l'accéléromètre que nous proposons sont détaillées dans la section 3.3. Avant de procéder à cette présentation, nous allons donner quelques notions de base sur les accéléromètres.

3.2/ ACCÉLÉROMÈTRES

3.2.1/ DÉFINITION ET PRINCIPE

Un accéléromètre est un capteur qui, lorsqu'il est fixé à un élément mobile, permet de mesurer l'accélération en translation subie par ce dernier. Cette accélération est définie en m/s^2 (SI), ou en "g" qui correspond à l'accélération normale de la pesanteur terrestre ($1 \text{ g} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$).

Voici quelques ordres de grandeur d'accélérations pouvant être rencontrées (Chaehoi, 2005) : 0-2 g correspond à l'accélération d'une personne se mettant en mouvement ; 5-30 g est l'accélération subie par un conducteur lors d'un accident de voiture ; 100-2000 g serait l'accélération subie par un objet lors du choc si on le laisse tomber d'un mètre sur un sol dur ; enfin 10000 g est l'ordre de grandeur de l'accélération subie par une balle au départ d'un fusil. Les grandes familles d'applications des accéléromètres sont la mesure de chocs (excitation hautes fréquences avec de haut niveau d'accélération tels que plusieurs kilohertz avec des niveaux supérieurs à 100 g) ; la mesure de vibration (excitation moyennes fréquences allant de quelques hertz à quelques kilohertz) et la mesure du mouvement (excitation basses fréquences jusqu'à quelques hertz). Un accéléromètre peut mesurer l'accélération suivant un seul ou plusieurs axes de l'espace. Les accéléromètres multi-axes mesurent en général l'accélération selon deux ou trois axes orthogonaux. Les accéléromètres ont en général des boîtiers scellés de manière étanche, ce qui les protège des agressions chimiques et des changements d'humidité. Cela rend aussi possible leur usage dans le vide.

Les accéléromètres classiques peuvent être généralement schématisés par un système masse-ressort-amortisseur (voir figure 3.1) de masse m et de raideur k lorsqu'on consi-

dère la mesure de l'accélération selon un axe. D'autres conceptions existent néanmoins comme par exemple les accéléromètres à lame vibrante basés sur une approche fréquentielle, les accéléromètres thermiques basés sur le déplacement d'une masse de gaz et les accéléromètres à ondes de matière basés sur la nature ondulatoire de la matière. Ces approches alternatives ne seront pas décrites dans ce mémoire car elles sont trop éloignées du design que nous proposons.

Pour les accéléromètres standards, la masse en mouvement est souvent appelée *masse sismique* ou *masse inertielle*. Elle peut être aussi appelée *masse d'épreuve* ou *corps d'épreuve* bien que cette dernière appellation soit plutôt employée pour les capteurs de force qui sont les cousins des accéléromètres. Cette masse constitue l'élément sensible du capteur. Elle est liée par une relation mécanique à un substrat solide (élément mobile) dont on recherche l'accélération. Lorsqu'aucune force n'est appliquée à la masse, celle-ci est localisée en un point d'équilibre dans un repère lié au substrat. Lors d'une accélération du substrat, une force d'inertie due à cette accélération externe s'applique à la masse, entraînant une déviation de son point d'équilibre. Le déplacement de la masse est alors directement lié à l'accélération du substrat.

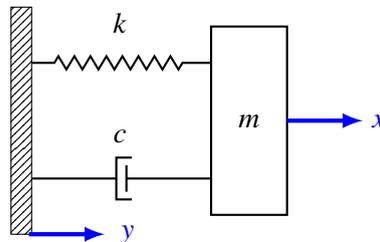


FIGURE 3.1 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre

Dans la figure 3.1, le paramètre c représente le coefficient de frottement visqueux du milieu dans lequel se déplace la masse m , y est la position du substrat dans le repère absolu et x est la position de la masse dans le repère du substrat. Les forces appliquées sur le corps d'épreuve sont la force de rappel, la force de frottement et la force inertielle induite par l'accélération \ddot{y} qu'on cherche à caractériser. Le déplacement de la masse est calculé à partir de l'équation :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x} - m\ddot{y} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= ma \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec

$$a = -\ddot{y}. \quad (3.2)$$

La fonction de transfert reliant le déplacement x de la masse sismique à l'accélération a qu'on souhaite mesurer est la suivante :

$$H = \frac{x(s)}{a(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}. \quad (3.3)$$

Le paramètre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre de la masse en radian par seconde et $Q = \frac{k}{c\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{c}$ est le facteur de qualité (sans dimension). Ce type d'accéléromètre de référence est un accéléromètre non asservi. Si son facteur de qualité Q est supérieur

à $1/\sqrt{2}$, la réponse en fréquence de l'accéléromètre présente une résonance qui a lieu pour la pulsation ω_r :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (3.4)$$

On note que la pulsation de résonance ω_r est d'autant plus proche de la pulsation propre ω_0 que Q est grand (résonance aiguë). Pour les accéléromètres non asservis résonants, la plage de fréquence pour laquelle le déplacement de la masse sismique fournit une image de l'accélération sans trop dénaturer sa valeur est très inférieure (typiquement un tiers à un cinquième) à la fréquence de résonance. En effet, dans le cas où l'accélération à mesurer possède une pulsation $\omega \ll \omega_r$, la masse sismique joue simplement un rôle d'amplification de cette accélération et son déplacement vaut alors :

$$x(t) \approx \frac{m}{k} a(t). \quad (3.5)$$

Le lien entre l'accélération et le déplacement est donc un simple gain qu'il convient d'identifier à une fréquence typique de fonctionnement (étalonnage du capteur). Des facteurs de qualité pas trop importants et des fréquences de résonance élevées sont en général privilégiés pour étendre la plage de mesure des accéléromètres non asservis, ce qui revient à privilégier un rapport ω_0/Q élevé. Il y a cependant des exceptions à cette règle si la technologie utilisée pour mesurer le déplacement de la masse sismique induit elle-même une forte résonance. C'est le cas par exemple des accéléromètres piézoélectriques.

Lorsque l'accéléromètre est utilisé au-delà du tiers de la fréquence de résonance, il est nécessaire de corriger la valeur du déplacement pour tenir compte de la résonance. Dans ce cas, une modélisation fine du comportement dynamique de l'accéléromètre doit être effectuée puis ses paramètres doivent être identifiés, ce qui complexifie son étalonnage. La connaissance du modèle permet ensuite d'envisager des stratégies de mesure plus élaborées telles que l'utilisation d'un observateur à entrée inconnue pour estimer la valeur de l'accélération. Une telle approche n'est pas courante dans les accéléromètres non asservis du commerce.

3.2.2/ PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES D'UN ACCÉLÉROMÈTRE

Les caractéristiques des accéléromètres non asservis sont détaillées par les constructeurs et également dans de nombreux travaux de recherche (Pigot, 2008; Acar et al., 2003; Chen et al., 2015). Un aspect essentiel pour la sélection d'un accéléromètre pour une application particulière est de pouvoir comprendre et interpréter ses caractéristiques. Ce qui suit est une explication rapide des caractéristiques les plus essentielles qui sont utilisées pour décrire les accéléromètres.

3.2.2.1/ SENSIBILITÉ

La sensibilité d'un accéléromètre est parfois appelée le "facteur d'échelle" de l'accéléromètre. Elle est exprimée à partir du ratio entre le signal de sortie (le déplacement de la masse sismique) et l'entrée mécanique (l'accélération du substrat). Pour un accéléromètre dont la dynamique est définie par (3.1), elle est quantifiée par la limite temporelle en régime permanent de ce ratio. Dans le domaine de Laplace, elle se calcule à partir de

(3.17) par :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{x(s)}{a(s)} \right) = \frac{1}{\omega_0^2}. \quad (3.6)$$

et s'exprime en $\text{rad}^{-2}\text{s}^2$. On peut noter que la sensibilité d'un accéléromètre est une caractéristique importante pour le niveau du signal qu'on souhaite mesurer. Si on est par exemple intéressé par la mesure d'accélération de faible amplitude, une sensibilité plus élevée est nécessaire afin d'obtenir un signal de déplacement plus propre (rapport signal/bruit plus élevé) que si on souhaite mesurer des accélérations avec des amplitudes plus élevées. Dans ce dernier cas, la sensibilité du capteur peut être plus faible.

La technologie de mesure du déplacement et son conditionnement électronique peut rendre impossible la mesure d'une accélération constante. Dans ce cas, la définition précédente qui ne s'applique qu'à la partie mécanique de l'accéléromètre devient sans objet. De ce fait, dans les spécifications des constructeurs, la sensibilité est en général déterminée pour une accélération basse fréquence que toutes les technologies d'accéléromètres peuvent mesurer et elle est donnée en pC/g , en mV/g ou en $\text{mV}/(\text{m/s}^2)$ selon la nature de l'étage de conditionnement électronique qui est utilisé. Dans les spécifications des constructeurs, la sensibilité n'est en général donnée que pour une seule fréquence qui est celle utilisée pour étalonner l'accéléromètre, de façon classique 100 Hz ou 120 Hz. Comme la plupart des accéléromètres sont influencés dans une certaine mesure par la température, cette sensibilité de référence S_{ref} n'est aussi valable que sur une gamme étroite de température, généralement de $25 \pm 5^\circ\text{C}$ (température à laquelle l'accéléromètre a été étalonné). En outre, la sensibilité S_{ref} n'est également valable que pour une certaine amplitude d'accélération, généralement de 5 g ou 10 g selon le fabricant. La sensibilité S_{ref} est parfois spécifiée avec une tolérance, généralement $\pm 5\%$ ou $\pm 10\%$. Ceci assure à l'utilisateur que la sensibilité de l'accéléromètre restera dans cet écart par rapport à la sensibilité nominale déclarée. Dans presque tous les cas, les accéléromètres du commerce sont fournis avec un certificat d'étalonnage indiquant leur sensibilité exacte (dans les limites de l'incertitude de mesure).

3.2.2.2/ SENSIBILITÉ INTER-AXE/SENSIBILITÉ TRANSVERSE

La sensibilité transversale définit la sensibilité de l'accéléromètre aux accélérations à 90 degrés (ou orthogonales) par rapport à l'axe sensible du capteur. Ce paramètre est exprimé en pourcentage de la sensibilité axiale de référence. Idéalement, il devrait être de 0 %, mais en raison des tolérances de fabrication et de la présence de couplage entre les axes, la sensibilité transversale est souvent de 5 ou 10 %.

3.2.2.3/ BANDE PASSANTE

La bande passante, ou la réponse en fréquence, représente la gamme de fréquences dans laquelle le capteur fonctionne sans atténuer significativement la mesure. C'est un paramètre important lorsqu'on choisit un accéléromètre pour une application dédiée. Selon la nature du traitement utilisé pour déduire l'accélération à partir du déplacement de la masse sismique, la bande passante peut être soit fortement inférieure à la fréquence de résonance (du tiers au cinquième), soit aller jusqu'à ou un peu au-delà de cette fréquence de résonance lorsqu'un observateur (qui tient compte de la dynamique de masse sismique et donc de la résonance) est utilisé.

Les informations sur la bande passante indiquent notamment si l'accéléromètre peut mesurer des accélérations lentes ou stationnaires et elles définissent également la fréquence maximale où l'accéléromètre sera encore précis.

Il faut noter que la sensibilité d'un accéléromètre est inversement proportionnelle à la largeur de sa bande passante (qui est liée à ω_0), donc il y a un compromis à trouver entre largeur de bande et sensibilité lors de la conception d'un accéléromètre. Dans les spécifications usuelles des constructeurs, la réponse en fréquence indique en général comment la sensibilité de l'accéléromètre varie en fonction de la fréquence par rapport à la sensibilité de référence S_{ref} . Ce ratio est souvent exprimé en décibels (dB) :

$$A(f)_{dB} = 20 \log(S(f)/S_{ref}). \quad (3.7)$$

La réponse en fréquence est donnée avec une tolérance valable pour toute la plage de fréquence. Cette tolérance est spécifiée en pourcentage ou en dB (typiquement $\pm 10 \%$, ± 1 dB, ± 2 dB).

3.2.2.4/ GAMME OU ÉTENDUE DE MESURE OU PLEINE ÉCHELLE

Comme son nom l'indique, cette spécification définit la plage d'amplitude d'accélération (minimum et maximum) que l'accéléromètre peut mesurer.

3.2.2.5/ RÉOLUTION

La résolution d'un accéléromètre représente la plus petite variation d'accélération (accélération minimale) que l'accéléromètre est capable de détecter. En absence de bruit, la résolution d'un accéléromètre est en théorie infinie au sein de sa bande passante. En pratique, la résolution est limitée par deux facteurs qui se conjuguent : d'une part les différentes sources de bruits analogiques qui affectent l'accéléromètre (Perez et al., 2006) et d'autre part la quantification qui est opérée par la conversion analogique-numérique (CAN) du signal lorsque cette dernière est employée dans le conditionnement du capteur de déplacement. Lorsqu'il n'y a pas de CAN, la résolution est assimilée à la mesure du bruit sur une bande de fréquence donnée. La limite de détection est alors spécifiée par la norme DIN 45661.

3.2.2.6/ BRUITS AFFECTANT L'ACCÉLÉROMÈTRE

Les bruits qui affectent un accéléromètre dépendent à la fois de la nature mécanique du système masse-ressort-amortisseur et de la nature électronique du dispositif qui est utilisé pour mesurer le déplacement de la masse sismique. Leur étude théorique est souvent complexe. Une source de bruit inhérente à tous les accéléromètres est due au mouvement thermo-mécanique de la masse sismique. Ce mouvement est induit par l'agitation thermique des molécules d'air qui entourent la masse sismique et qui viennent l'exciter. Ce bruit est de ce fait lié à la température ainsi qu'aux paramètres des éléments mécaniques tels que la masse, la raideur du ressort et le coefficient d'amortissement ou le facteur de qualité. Ce bruit est de nature brownienne et il induit une variation stochastique permanente de l'accélération de la masse dont on peut déterminer la densité spectrale

d'amplitude en $\text{m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$. Sa valeur théorique appelée TNEA (total noise equivalent acceleration) est donnée par (Yazdi et al., 1998; Rao.K. et al., 2019) :

$$TNEA = \sqrt{\frac{4K_B T \omega_0}{m Q}} \quad (3.8)$$

où K_B est la constante de Boltzmann et T la température absolue (en kelvin). Un accéléromètre avec une grande masse et un grand facteur de qualité (donc un petit coefficient d'amortissement) est préférable pour obtenir des petites valeurs pour le TNEA. Le bruit thermo-mécanique va induire une borne minimale d'origine mécanique pour la résolution du capteur. Du fait des autres sources de bruit induites par l'électronique de conditionnement du capteur, ce dernier aura forcément une résolution dégradée par rapport à la résolution maximale qu'on peut espérer avec ses paramètres mécaniques. Si elle est importante, cette dégradation peut amener à négliger le bruit thermo-mécanique.

Dans les spécifications des constructeurs, le bruit large bande qui affecte un accéléromètre est fourni en valeur RMS¹, typiquement en g_{rms} ou en $\text{m/s}^2_{\text{rms}}$. A titre d'exemple, les accéléromètres haute résolution du commerce de type piézoélectrique ont un bruit minimal large bande (et donc une résolution maximale) de l'ordre de $1 \mu\text{g rms}$. Ce bruit est souvent exprimé en "g équivalent", obtenu en divisant le bruit présent dans le signal de sortie (exprimé en mV rms par exemple) par la sensibilité de l'accéléromètre (exprimée en mV/g).

3.2.3/ LES MÉTHODES DE TRANSDUCTION DES ACCÉLÉROMÈTRES

De par son principe de fonctionnement, un accéléromètre est composé d'une masse sismique qui permet de convertir l'accélération d'un substrat en un signal mesurable qui est le déplacement de la masse sismique. Il existe différentes techniques pour quantifier ce déplacement. Dans ce qui suit, nous allons détailler les plus classiques. Cette description n'est en rien exhaustive.

3.2.3.1/ DÉTECTION OPTIQUE

Les accéléromètres dont la mesure du déplacement utilise une fibre optique sont intéressants pour une large gamme d'applications où il est nécessaire d'avoir une combinaison de grande sensibilité et de miniaturisation. Deux types de détection existent dans les accéléromètres à base de détection optique. Le premier type se base sur le principe de la modulation de l'intensité lumineuse. La lumière est transmise d'une fibre émettrice à une fibre réceptrice et l'extrémité de la masse sismique se situe dans un gap entre les deux fibres (voir la figure 3.2) (S. et al., 2004; Plaza et al., 2004; Guldemann et al., 2001). Le second type se base sur la mesure de la longueur d'onde du signal qui est réfléchi sur la masse sismique (voir la figure 3.3) (Schröpfer et al., 1998).

Avantages de ce type d'accéléromètre :

- insensibilité au champ magnétique ;
- aucune perturbation mécanique apportée ;

1. Racine carrée de la moyenne du bruit d'accélération au carré.

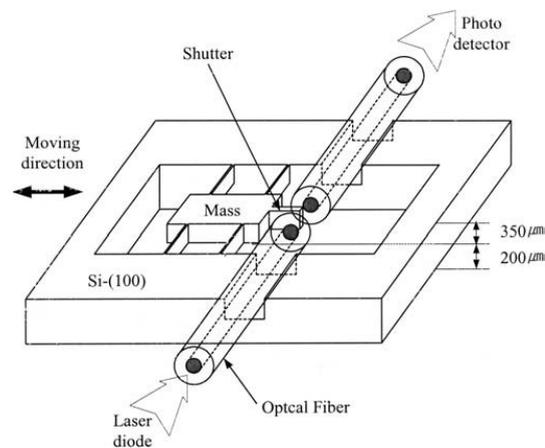


FIGURE 3.2 – Accéléromètre à détection optique avec modulation de l'intensité lumineuse (S. et al., 2004)

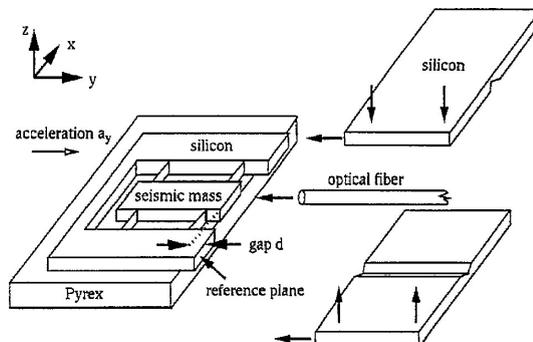


FIGURE 3.3 – Accéléromètre à détection optique avec mesure de la longueur d'onde qui est réfléchi sur la masse sismique (Schröpfer et al., 1998)

- permet la mesure à distance (la source de lumière et le photo-détecteur peuvent se trouver loin de la zone à mesurer) ;
- faible consommation.

Inconvénients :

- nécessité d'une source lumineuse externe stable ;
- exigence d'un alignement parfait des fibres optiques ;
- sensibilité thermique assez forte (sauf si un circuit de compensation est ajouté) ;
- coût élevé.

3.2.3.2/ DÉTECTION PIÉZO-ÉLECTRIQUE

Il existe un grand nombre d'accéléromètres de ce type qui sont les plus utilisés pour la mesure de chocs moyens et la mesure de vibrations. Ces accéléromètres utilisent un matériau piézoélectrique associé à une masse sismique qui en général se déforme sous l'effet de l'accélération du substrat. Dans ce cas, le matériau piézoélectrique est soumis à une contrainte mécanique et il génère en réponse une charge électrique ou une tension que l'on peut mesurer. Selon la nature du conditionnement électrique, ces

accéléromètres peuvent être à sortie de charge à haute impédance ou à sortie de tension à basse impédance (cette dernière correspond aux modèles ayant l'appellation IEPE ou ICP). Les modèles à sortie de charge peuvent être utilisés à très haute température alors que les IEPE sont limités à 120 °C. Un exemple d'accéléromètre piézoélectrique est présenté dans (Hindrichsen et al., 2009) (voir la figure 3.4).

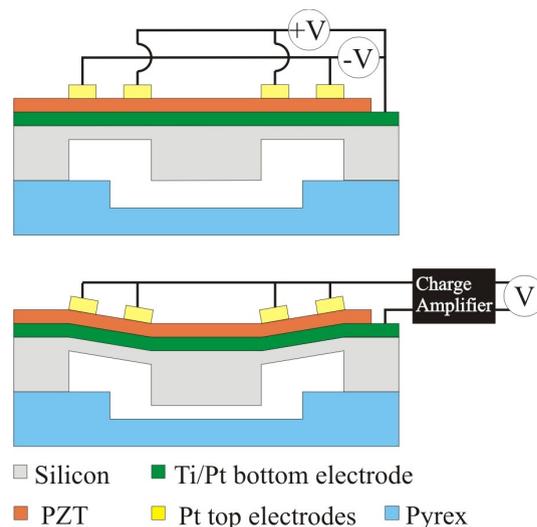


FIGURE 3.4 – Accéléromètre utilisant une détection piézoélectrique (Hindrichsen et al., 2009)

Avantages de ce type d'accéléromètre :

- réponse en fréquence élevée (0,2 Hz-30 kHz (± 3 dB)) ;
- plage de température disponible très grande pour les versions en sortie de charge (-200 ; +650 °C)
- taille très variable et petites dimensions possibles ;
- possibilité d'avoir une sensibilité élevée et une grande résolution
- le bruit en fonction de la fréquence suit une loi décroissante
- solidité et fiabilité.

Inconvénients :

- limitation en basse fréquence (ne peut pas mesurer les accélérations statiques) ;
- sensibilité thermique (variation maximale typique du signal de $\pm 5\%$).

3.2.3.3/ DÉTECTION PIÉZORÉSISTIVE

Les accéléromètres qui se basent sur la détection piézorésistive utilisent des matériaux qui produisent des changements de résistance lorsqu'une déformation leur est appliquée via une contrainte mécanique. Ces matériaux sont intégrés dans la structure de la masse sismique de l'accéléromètre sous la forme de jauges de contrainte piézorésistives. Ces jauges peuvent être soit collées en surface soit directement intégrées dans la structure de la masse sismique lors de sa fabrication en salle blanche. Le design mécanique de l'accéléromètre doit permettre l'apparition d'une déformation dans la jauge lorsque le

substrat subit une accélération. De ce fait, la masse sismique utilisée est un solide déformable qu'on appelle en général un corps d'épreuve ou une masse d'épreuve puisqu'il se déforme sous l'influence de la force inertielle. Un exemple de ce type d'accéléromètre est présenté dans (Lynch et al., 2003) (voir la figure 3.5).

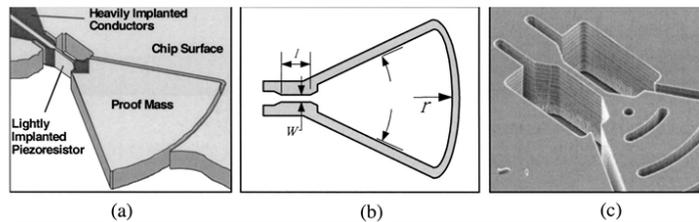


FIGURE 3.5 – Accéléromètre utilisant une détection piézorésistive (Lynch et al., 2003)

Avantages de ce type d'accéléromètre :

- très large bande passante ;
- peut mesurer une accélération statique (zéro hertz). Ces accéléromètres peuvent donc être utilisés pour calculer avec exactitude des informations sur la vitesse ou le déplacement basse fréquence ;
- facile à conditionner (pont de jauges).

Inconvénients :

- faible sensibilité, ce qui rend ces accéléromètres peu appropriés pour des tests précis en présence de vibrations hautes fréquences ;
- rapport signal sur bruit moyen améliorable par moyennage. Permet d'utiliser cette technologie pour les mesures moyennes et basses fréquences ;
- faible tolérance à la surcharge mécanique (fragile) ;
- dérive notable en température ;
- coût en général élevé.

3.2.3.4/ DÉTECTION CAPACITIVE

La détection capacitive est une méthode très utilisée pour les accéléromètres de précision avec des bandes passantes pas trop élevées. Ces derniers utilisent comme masse sismique une électrode mobile. Une capacité est formée entre la masse sismique et la partie fixe du système dont on doit mesurer l'accélération. La détection consiste à évaluer, lors de l'accélération, les variations de capacité lorsque la masse sismique s'éloigne ou se rapproche de l'élément fixe du dispositif. Un exemple d'accéléromètre à détection capacitive est illustré dans la figure 3.6 (Amini et al., 2004). La miniaturisation induite par les MEMS a rendu possible l'usage de capacité sous la forme de peignes interdigités qui permet d'augmenter les performances de cette technologie et qui constitue un des grands succès des MEMS. Elle a également permis de produire des accéléromètres 2 et 3 axes de très faible coût.

Avantages de ce type d'accéléromètre :

- grande sensibilité ;

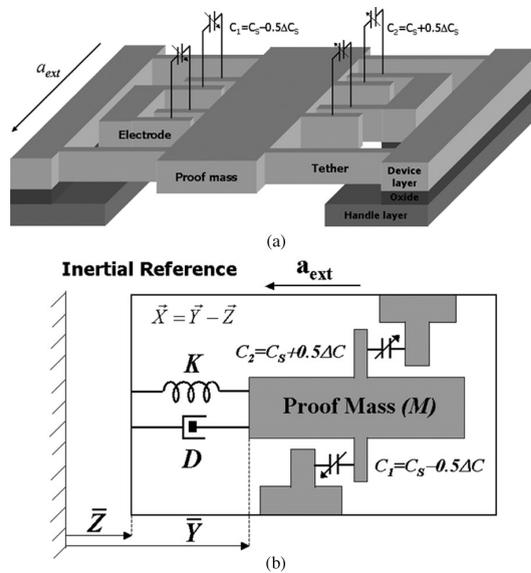


FIGURE 3.6 – Accéléromètre à base de détection capacitive (Amini et al., 2004)

- faible coût ;
- faible sensibilité aux variations de température (peu de dérive en température) ;
- bonne exactitude ;
- bonne performance en terme de bruit ;
- robuste (jusqu'à 20000g).

Inconvénients :

- bande passante limitée mais passe le continu (typ. 0 Hz-1 kHz) ;
- réponse non linéaire ;
- schéma électronique associé plus complexe que pour les appareils piézorésistifs. Reste cependant facile à conditionner et peu sensible aux parasites externes.
- sensible à l'humidité.

3.2.4/ ACCÉLÉROMÈTRES ASSERVIS

Les accéléromètres destinés à certaines applications comme par exemple la navigation inertielle² doivent répondre à des exigences en terme de précision, de linéarité et de stabilité que les accéléromètres non asservis ont du mal à atteindre. Ces contraintes de performance ont conduit à développer les accéléromètres asservis (accéléromètres actifs) qui sont aussi appelés servo accéléromètres. Ces accéléromètres sont essentiellement dédiés à la détermination des accélérations basses fréquences. Ils se basent sur l'asservissement de la masse sismique de l'accéléromètre à une position de référence dite "zéro", ce qui revient à maintenir à l'aide d'une grandeur d'actionnement la position de la masse sismique sur une valeur de référence qui est nulle par convention.

Dans les accéléromètres asservis (figure 3.7), la force inertielle due à l'accélération, à laquelle est soumise la masse sismique est compensée par une force opposée créée

2. Technique utilisant des capteurs d'accélération en translation et en rotation (ces derniers sont appelés des gyroscopes) afin de déterminer le mouvement absolu d'un objet par double intégration.

par une boucle de contrôle (rétroaction), afin de minimiser le déplacement de la masse sismique par rapport à la référence nulle. On peut noter que d'un point de vue physique, la sortie du contrôleur est nécessairement une force, ce qui fait que tous les accéléromètres asservis sont en fait des capteurs de force cachés.

force inertielle induite par l'accélération à mesurer

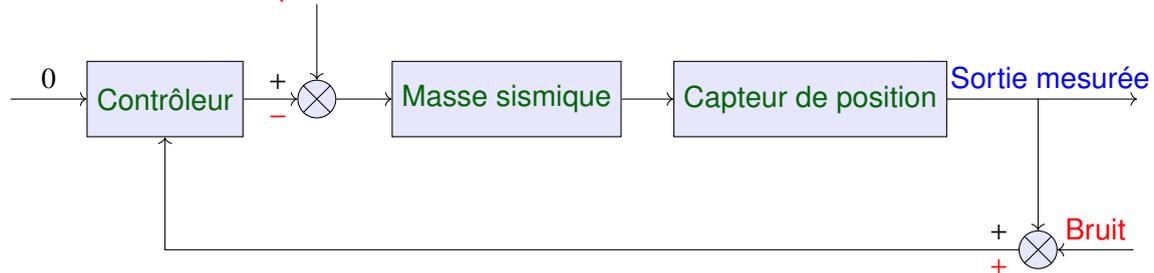


FIGURE 3.7 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre asservi

Si la référence nulle est correctement maintenue, la sortie du contrôleur est en général une image fidèle de l'accélération qu'il faut mesurer. Néanmoins, l'usage d'un observateur à entrée inconnue peut être ajouté pour améliorer l'estimation de cette accélération lorsqu'il y a une erreur dynamique de suivi de la référence. Ce point est néanmoins questionnable du fait des inévitables erreurs de modélisation qui sont présentes dans le modèle utilisé par l'observateur. Ce questionnement sera abordé dans la suite de ce mémoire.

Afin de bien se maintenir sur la référence, les capteurs de position utilisés dans les accéléromètres asservis doivent être de très haute résolution sur la plage de déplacement extrêmement réduite de la masse sismique. La résolution d'un accéléromètre asservi est de ce fait directement liée à la résolution du capteur de position utilisé pour détecter les déplacements de la masse sismique. Là encore, l'usage d'un observateur peut permettre de débruiter la mesure de position et également de fournir davantage d'informations sur la dynamique de la masse sismique (dérivées d'ordre supérieur) afin d'améliorer les performances du contrôleur. Ces techniques avancées d'observation et de commande restent cependant peu utilisées dans les capteurs commerciaux qui utilisent pour la plupart des contrôleurs de type PID sans avoir recours à des observateurs.

L'accéléromètre asservi présente beaucoup moins de non linéarités que l'accéléromètre non asservi puisque la masse sismique a une dynamique très réduite si l'asservissement est performant. Il présente également un avantage de réduction des dérives et, comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, il réduit également l'effet des incertitudes sur les paramètres du modèle dynamique de la masse sismique. Enfin les problèmes liés à l'accélération appliquée sur les axes transversaux à l'axe sensible (sensibilité transversale) sont aussi souvent réduits.

Le principal inconvénient d'un accéléromètre asservi par rapport à un accéléromètre non asservi, est sa complexité de mise en œuvre car il nécessite d'ajouter un actionnement, la synthèse d'un contrôleur et éventuellement la synthèse d'un observateur d'état et d'entrée inconnue. En automatique, de telles synthèses s'appuient en général sur une démarche rationnelle qui est construite à partir de la modélisation du comportement dynamique de la masse sismique. Cette modélisation peut être une tâche complexe à mener à bien et elle nécessite d'identifier les différents paramètres considérés dans le modèle. Enfin, l'implémentation physique de ces éléments et des signaux qu'il faut traiter en utilisant

en général des technologies numériques (DSP, FPGA programmable, etc.) peut augmenter significativement le coût des capteurs asservis qui peut aller jusqu'à plusieurs milliers d'euros alors que le coût des accéléromètres non asservis peut descendre à quelques euros l'unité. La fréquence d'échantillonnage et les temps de traitements associés aux technologies numériques limitent aussi la bande passante des accéléromètres asservis.

3.2.5/ ACCÉLÉROMÈTRES DONT LA MASSE SISMIQUE EST EN LÉVITATION / ACCÉLÉROMÈTRES BASÉS SUR LA LÉVITATION

Nous avons vu précédemment que pour déterminer une accélération, les accéléromètres se basent sur le déplacement relatif d'une masse sismique liée mécaniquement à un substrat par un ressort. Les accéléromètres sont sujets à des imprécisions dues à plusieurs facteurs mécaniques : frottements mécaniques, fatigue/usure, vieillissement des matériaux, influence de la température et de l'humidité, etc. Ces facteurs qui influent sur les performances des accéléromètres nécessitent de mettre en œuvre un étalonnage que l'on doit idéalement pouvoir répéter pour maintenir dans le temps une exactitude maximale de ces capteurs. Pour surmonter certains de ces effets indésirables comme les frottements secs, la fatigue et l'usure, des accéléromètres comportant une masse sismique en lévitation ont été développés. Il s'agit des accéléromètres qui ont un corps d'épreuve en lévitation. De tels accéléromètres ont potentiellement la possibilité d'offrir une meilleure exactitude et une durée de vie plus longue que les accéléromètres cités précédemment.

À notre connaissance, il existe très peu de travaux sur les accéléromètres par lévitation. On peut notamment citer l'accéléromètre à base de lévitation diamagnétique proposé par (Simon, 1969). Cet accéléromètre est constitué d'un barreau en graphite pyrolytique en lévitation diamagnétique qui est placé entre les deux pôles d'un aimant. Le gradient du champ magnétique engendré par l'aimant implique que le barreau diamagnétique peut essentiellement se déplacer selon sa longueur, de ce fait l'accéléromètre proposé est de type uniaxial. Un autre accéléromètre proposé se base sur la mise en lévitation diamagnétique passive d'une plaque de graphite qu-dessus d'un aimant permanent (Garmire et al., 2007). On peut également citer les travaux de thèse de Pigot (Pigot, 2008; Christian Pigot et al., 2008), qui se basent sur le développement d'un microaccéléromètre triaxial qui repose sur la mise en lévitation d'un aimant permanent à l'intérieur d'une boîte ayant des propriétés diamagnétiques.

3.3/ CARACTÉRISTIQUES DE L'ACCÉLÉROMÈTRE PROPOSÉ

L'accéléromètre proposé dans cette thèse est un accéléromètre actif. Il peut cependant également fonctionner en mode passif non asservi. La masse sismique est sensible à l'accélération verticale du support de l'accéléromètre. La détection de son déplacement repose sur un principe optique. Cet accéléromètre a été développé dans le but de mesurer de manière métrologique l'accélération verticale basses fréquences du plateau d'une table anti-vibrations qui est due aux vibrations sismiques du sol. Cet accéléromètre s'appuie sur la même conception mécanique et magnétique que le générateur de force qui a été présenté dans le chapitre précédent. L'accéléromètre est visible sur la figure 3.8.

Cet accéléromètre n'a pas fait l'objet d'un dimensionnement spécifique car la probléma-

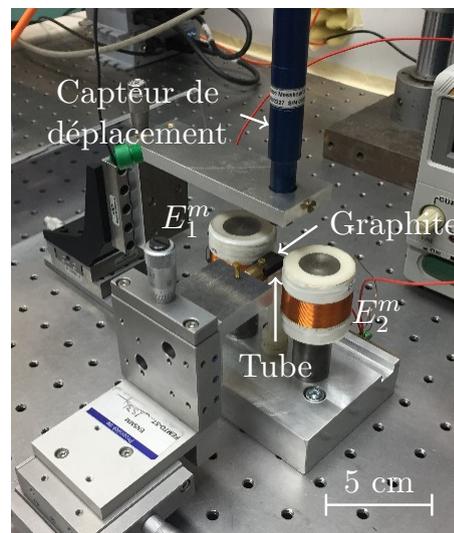


FIGURE 3.8 – Accéléromètre positionné à l'extérieur puis à l'intérieur de la chambre climatique

tique abordée dans ce mémoire porte majoritairement sur la possibilité d'établir la traçabilité métrologique d'un tel capteur grâce aux outils de l'automatique. Le raisonnement qui a été conduit à garder la même structure mécanique pour le générateur de force et l'accéléromètre est le suivant : le générateur de force a une dynamique très peu amortie. Il est donc particulièrement sensible aux perturbations sismiques basses fréquences qui sont situées dans sa fréquence de résonance, laquelle est très faible. En mode accéléromètre, il peut de ce fait aussi mesurer ces perturbations avec une grande sensibilité autour de cette fréquence de résonance dès l'instant où on connaît bien son comportement dynamique, résonance incluse, et qu'on utilise un observateur dédié. Nous n'avons donc ni cherché à augmenter sa sensibilité en boucle ouverte à basse fréquence, ni cherché à augmenter son facteur de qualité afin de ne surtout pas réduire sa bande passante en boucle ouverte puisque cette dernière est déjà très faible. Le problème auquel on sera cependant confronté lorsqu'on veut mesurer une accélération dont la fréquence est proche de la fréquence de résonance est le déphasage important sur la sortie qui est présent à cette fréquence. Ce déphasage induit un retard sur la sortie de l'accéléromètre (déplacement) qu'on utilise ensuite dans l'observateur pour reconstruire l'entrée (accélération sismique). Intuitivement, cela se traduira par un retard dans l'estimation et donc par une erreur dynamique dans la reconstruction de l'accélération. En poussant le gain de l'observateur, on pourra réduire cette erreur, mais le prix à payer sera alors la dégradation du rapport signal-sur-bruit de l'observateur. Si on utilise ensuite cette observation en mode actif pour réguler le déplacement de la masse sismique à zéro et donc compenser l'effet de l'accélération sismique, on aura une dégradation de la qualité de la régulation. Le bénéfice induit par le gain en sensibilité à la fréquence de résonance risque donc d'être atténué par le déphasage présent sur la sortie. Malgré ce risque, nous avons conservé la même structure mécanique pour le générateur et l'accéléromètre afin de gagner du temps.

Dans ce qui suit, nous allons appeler *tube* la masse sismique en lévitation. Cette masse m est estimée à 8,80 mg par une balance de précision Mettler Toledo MS105DU³. Bien

3. https://www.mt.com/gb/en/home/products/Laboratory_Weighing_Solutions/Analytical/Advanced/

qu'un écart de masse entre l'indenteur du générateur et le tube de l'accéléromètre soit inévitable en pratique à cause des disparités de fabrication, les deux doivent avoir une valeur la plus proche possible. A terme, il va de soit que la masse du tube doit être mesurée par un laboratoire de métrologie accrédité pour que nous puissions disposer d'une valeur de masse plus juste, mais aussi et surtout, de l'incertitude qui lui est associée.

Le tube lévite de manière stable à une altitude z nulle par convention lorsqu'on applique un courant i_0 connu dans les électro-aimants de l'accéléromètre. Cette altitude z varie à cause de la force d'inertie $m \ddot{z}_a$ induite par l'accélération \ddot{z}_a qu'on doit mesurer. Le déplacement z du tube est mesuré par un capteur confocal chromatique⁴. Le conditionnement de ce capteur par son boîtier de mesure fournit un signal numérique avec une fréquence de 1000 hertz. Ce capteur a une plage de mesure de $300 \mu\text{m}$. Cette plage assez importante a été choisie pour pouvoir également utiliser l'accéléromètre en mode passif (boucle ouverte) sur des déplacements plus importants qu'en mode actif (boucle fermée). La résolution en déplacement (écart-type de la mesure) est de $5,6 \text{ nm}$. On peut noter qu'un capteur confocal chromatique avec une plage de mesure plus petite aurait une meilleure résolution et serait plus approprié pour un usage exclusivement en boucle fermée.

Les différentes forces agissant sur la dynamique du tube sont représentées dans la figure 3.9. On rappelle que θ est l'angle inconnu qui se forme entre le plateau de la table anti-vibrations et le plan horizontal. La dynamique très basse fréquence de θ est négligée.

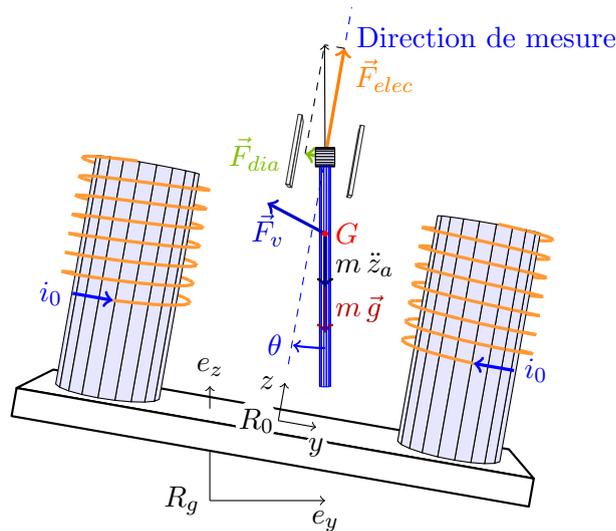


FIGURE 3.9 – Etude de la configuration des forces appliquées au tube dans un cas réaliste (la poussée de l'air a été négligée ici)

D'après le chapitre 2, la dynamique du tube dans le référentiel non galiléen R_0 lié au plateau est régie par l'équation différentielle :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = f_{elec}(i, z) - m \ddot{z}_a \quad (3.9)$$

avec

$$f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta) \quad (3.10)$$

semi-micro-balance/MS-Semi-Micro-Balance-MS105DU.html

4. PRECITEC, CHRcodile S associé à une sonde confocale chromatique de $300 \mu\text{m}$ de plage de mesure.

et

$$\beta = \frac{m g \cos \theta}{i_0}. \quad (3.11)$$

L'offset i du courant $I = i_0 + i$ qui circule dans les bobines est la grandeur de commande qui sera utilisée pour contrôler la position z du tube.

Pour identifier les paramètres K_v , γ et β , la littérature propose plusieurs méthodes d'identification possibles qui ont été utilisées pour des capteurs de force ayant des masses sismiques rigides comme organe sensible. Ces méthodes sont basées sur la génération d'un effort externe particulier comme une impulsion de force (Fujii et al., 1999), un échelon de force (Fujii, 2003b) ou encore une force oscillante (Kumme, 1998), Fujii (2003a). Comme il nous semble impossible d'exciter le tube avec une force externe connue *a priori*, nous préférons utiliser la réponse "quasi" libre du tube pour procéder à l'identification des paramètres. Pour cela, on commence par mettre le tube en lévitation à l'altitude $z = 0$ en appliquant le courant constant i_0 dans les bobines. Puis on applique ensuite une force excitatrice F_p qui a la dynamique temporelle suivante :

$$F_p(t) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t < t_1, \quad (3.12)$$

$$F_p(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq t_1. \quad (3.13)$$

Entre t_0 et t_1 , la valeur non nulle de F_p peut prendre n'importe quelle valeur. Cette force excitatrice est générée par les deux électro-aimants, en appliquant un offset de courant i non nul entre t_0 et t_1 , ce qui provoque un déplacement z du tube suivant l'axe z' (voir la figure 3.10). On a donc en pratique $F_p = f_{elec}(i, z)$. Lorsque t devient plus grand que t_1 , on annule le courant i . Il n'y a alors plus de force excitatrice F_p qui s'applique sur le tube et ce dernier se met à osciller autour de sa position d'équilibre stable selon la dynamique :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = -m \ddot{z}_a \quad (3.14)$$

puisque

$$f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta) = 0. \quad (3.15)$$

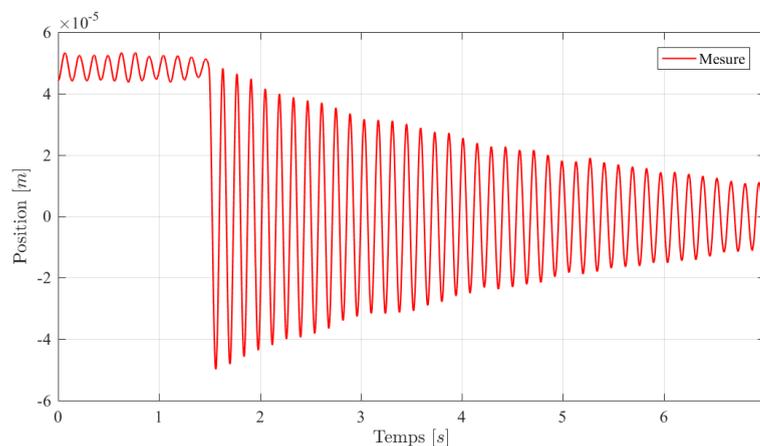


FIGURE 3.10 – Réponse en régime libre du tube

La figure 3.10 illustre l'évolution de la position du tube. Entre $t_0 = 0$ s et $t_1 = 1,3$ s, la valeur de F_p est non nulle grâce au courant $i = 0,001$ A qui circule dans les bobines. A partir de $t_1 = 1,3$ s, la force F_p est nulle, car le courant i est nul.

La force inertielle $m \ddot{z}_a$ qui est induite par les vibrations sismiques est très faible. Par conséquent, si l'amplitude z des oscillations est suffisamment importante, l'influence de la force inertielle $m \ddot{z}_a$ devient négligeable relativement à la dynamique fournie par le régime libre :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = 0. \tag{3.16}$$

De ce fait, tant que les oscillations amorties du tube ont des amplitudes importantes, on peut utiliser la dynamique du régime libre pour identifier les paramètres à partir du temps $t \geq t_1$. Comme le facteur de qualité est grand, cette condition reste en pratique vraie pendant plusieurs secondes si l'excitation F_p a été suffisamment importante. Cette condition est facile à obtenir en injectant un courant i constant suffisamment important entre t_0 et t_1 .

Une fois que la réponse libre z est mesurée et enregistrée avec la fréquence d'échantillonnage du capteur de position (voir la figure 3.11), on peut identifier les valeurs de K_v et de $-i_0 \gamma$ à l'aide de la System Identification Toolbox de Matlab à condition de connaître la valeur de m .

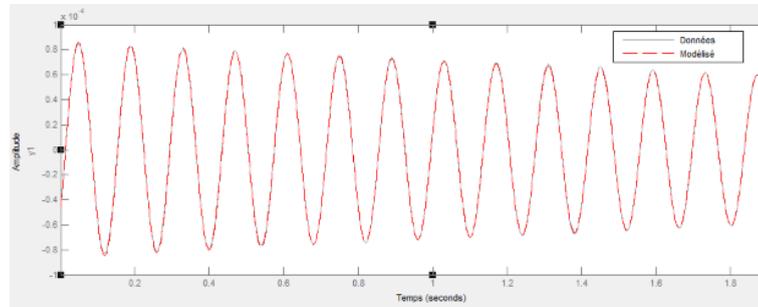


FIGURE 3.11 – La réponse z mesurée du tube et le modèle construit par la System Identification Toolbox de Matlab

La figure 3.11 illustre la comparaison entre la réponse z mesurée du tube (courbe grise) et le modèle construit avec les paramètres identifiés (courbe rouge).

Le courant de sustentation i_0 étant connu, on en déduit ensuite la valeur de γ . Cette manière d'identifier γ nous semble préférable à une identification directe en régime quasi-statique à l'aide de la formulation (2.10) du chapitre précédent. En effet, cette formulation dépend de β qui lui même dépend de $\cos \theta$ qui n'est pas connu.

Une estimation du paramètre β est enfin calculée avec (3.11) en supposant que θ vaut 0, ce qui amène une source d'imprécision sur ce paramètre.

Les valeurs identifiées à l'aide de cette approche sont données dans le tableau suivant lorsque $i_0 = 0,2 \text{ A}$:

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres du modèle de l'accéléromètre

Paramètre	m'	β'	γ'	K'_v
Valeur	$8,80.10^{-6}$	$4,31.10^{-4}$	-0,110	$4,07.10^{-6}$
Unité	kg	kg.m/A.s ²	kg/A.s ²	N.s/m

Lorsqu'on n'injecte pas d'offset de courant dans les bobines, on a $i = 0$ et donc $f_{elec}(i,z) = 0$. Dans ce cas, l'accéléromètre travaille en mode non asservi. Sa dynamique est régie par

(3.14) et la fonction de transfert du modèle en boucle ouverte qui relie le déplacement x de la masse sismique à l'accélération $acc = \ddot{z}_a$ qu'on veut mesurer est la suivante :

$$H = \frac{x(s)}{acc(s)} = \frac{-1}{s^2 + \frac{K_v}{m}s - \frac{i_0\gamma}{m}} = \frac{-1}{s^2 + 0,46s + 3625}. \quad (3.17)$$

Le courant i_0 vaut 0,2 A. La pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{-i_0\gamma}{m}}$ vaut 50 rad/s et le facteur de qualité $Q = \frac{-i_0\gamma}{K_v\omega_0} = \frac{\sqrt{-i_0\gamma m}}{K_v}$ vaut 108,11. La raideur du ressort électromagnétique est $-i_0\gamma = 0,022 \text{ kg/s}^2$. On peut noter que les RMA conçus à l'aide d'aimants permanents à l'institut FEMTO-ST pour faire de la mesure de micro et nanoforces ont, pour la plupart, des raideurs dans le même ordre de grandeur (les raideurs typiques de ces RMA varient entre 0,01 et 0,03).

La sensibilité en boucle ouverte et en régime permanent de cet accéléromètre est donnée par $\frac{1}{\omega_0^2} = 4 \times 10^{-4} \text{ (s/rad)}^2$. Sa bande passante à -3 dB est de 11 Hz (voir la figure 3.12). Sa fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ vaut 7,95 Hz et elle est quasiment confondue avec la fréquence de résonance f_r . De ce fait, à la fréquence de résonance, la sensibilité sera multipliée par le facteur de qualité Q , ce qui donne une sensibilité maximale de 0,04 $(\text{s/rad})^2$ à f_r . En partant de l'hypothèse qu'on utilise un capteur de déplacement avec une résolution de 10 nm rms, l'accélération minimale qui sera détectable en boucle ouverte à la résonance sera alors de $1/0,04 \times 10 = 250 \text{ nm/s}^2 \text{ rms}$, ce qui fait $2,55 \times 10^{-8} \text{ g rms}$, soit 25,5 ng rms de résolution maximale (pic de résolution) à f_r .

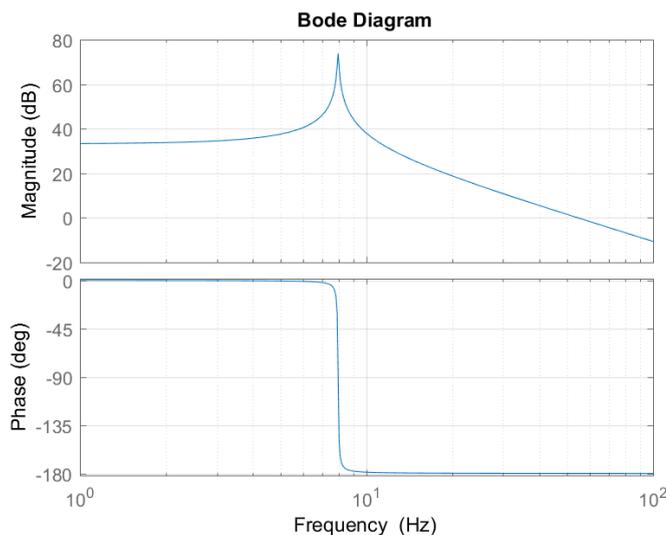


FIGURE 3.12 – La réponse en fréquence de l'accéléromètre (3.17)

Pour une température de 20 °C (293 K), et une constante de Boltzmann $K_B = 1,38064852 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, le TNEA de cet accéléromètre est donné par :

$$TNEA = \sqrt{\frac{4K_B T \omega_0}{mQ}} = 2,91 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}} \quad (3.18)$$

Cette valeur reste en deçà d'environ un facteur 10 de la performance théorique maximale qu'on peut espérer à la fréquence de résonance. Même s'il convient de rester prudent, le bruit thermo-mécanique sera considéré comme négligeable devant les autres sources de bruit comme celle du capteur de déplacement. Ce bruit sera d'autant plus négligeable que l'amplitude de l'accélération à mesurer sera grande.

3.4/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la réponse passive de l'accéléromètre que nous allons utiliser en mode asservi pour la mesure des accélérations basses fréquences qui affectent majoritairement le générateur de force autour de sa fréquence de résonance. Après un rappel sur des notions de base qui caractérisent le fonctionnement des accéléromètres et leurs caractéristiques, nous avons présenté en détail un modèle à 1 degré de liberté du comportement dynamique en boucle ouverte de notre accéléromètre. Nous avons également identifié ses paramètres.

Parvenu à ce stade de l'étude, il convient de rappeler que de multiples hypothèses simplificatrices ont été faites pour parvenir au modèle qui a été proposé. Des forces de perturbation ont notamment été négligées ainsi que le couplage avec les autres degrés de liberté de la masse sismique. L'influence de la température et de l'humidité n'ont pas été pris en compte. La dynamique du plateau en rotation a aussi été négligée. Enfin, la force électromagnétique a été modélisée de manière approchée. D'autres hypothèses ont par ailleurs été faites pour identifier les paramètres de ce modèle simplifié. La force d'inertie a été négligée pendant l'identification et l'angle du plateau a été pris à une valeur nulle par défaut alors qu'il varie lentement. Ces choix posent la question de l'influence de ces approximations sur la justesse de la mesure et sur le calcul de son incertitude puisque le modèle obtenu est en fait un modèle incertain. Par ailleurs, nous avons vu que la plage de fréquence utile de l'accéléromètre comprenait la zone autour de sa fréquence de résonance. De ce fait, il va être nécessaire de tenir compte de la totalité de la réponse fréquentielle de l'accéléromètre pour pouvoir estimer correctement l'accélération.

La modélisation de la dynamique de la masse sismique, montre que l'accélération peut être considérée comme une entrée inconnue affectant un système dynamique mal connu dont le modèle approximé est linéaire lorsqu'on utilise la force $f_{elec}(i,z)$ en guise de grandeur de commande. Il est donc possible de faire usage d'un observateur à entrée inconnue qui soit adapté aux systèmes incertains pour essayer d'estimer correctement l'accélération et son incertitude. Cet observateur peut également observer l'état de l'accéléromètre afin de faciliter sa commande. Nous verrons par la suite qu'un accéléromètre asservi possède un certain nombre d'avantages dans le cadre d'une démarche de métrologie. Pour introduire cette démarche d'observation, nous allons commencer par présenter un état de l'art sur les observateurs dans le prochain chapitre.

4

ÉTAT DE L'ART DES OUTILS DE L'AUTOMATIQUE

Sommaire

4.1 Introduction	56
4.2 Notions essentielles de l'observation d'état	57
4.2.1 Principe d'un observateur d'état	57
4.2.2 Notion d'observabilité	59
4.2.3 Notion de détectabilité	59
4.3 Observateurs d'état pour les systèmes LTI	60
4.3.1 Filtre de Kalman	60
4.3.2 Observateurs d'état dits de Luenberger	61
4.4 Observateurs pour les systèmes LTI à entrée inconnue	62
4.4.1 Observateurs à Entrées Inconnues (OEI)	62
4.4.2 Observateurs de Perturbations (OP)	63
4.4.3 Observateurs Proportionnel - Intégral (PI)	63
4.5 Observateurs pour les systèmes variant dans le temps	65
4.6 Observateurs par intervalles	67
4.6.1 Principe de l'observation par intervalles	67
4.6.2 Cadre de l'observation par intervalles	68
4.6.3 Synthèse d'un observateur par intervalles	69
4.7 Observateurs d'état pour les systèmes non linéaires	71
4.7.1 Observateurs étendus	72
4.7.2 Méthodes de transformations non linéaires	72
4.7.3 Observateurs à grand gain	73
4.7.4 Observateurs d'état étendu (préambule)	73
4.8 L'automatique pour la thèse	74
4.8.1 Observateurs d'état étendu (ESO)	74
4.8.2 Active Disturbance Rejection Control (ADRC)	77
4.9 Conclusion	78

4.1/ INTRODUCTION

L'étude d'un système physique, qu'il soit biologique ou mécatronique, nécessite une phase de modélisation dont l'objectif est d'obtenir une représentation mathématique de

son évolution au cours du temps. La connaissance de ce modèle mathématique permettra dans un second temps de développer une stratégie de commande pour que le système physique puisse accomplir sa mission. Par choix, ce modèle mathématique peut être linéaire ou non linéaire. Un modèle linéaire aura l'avantage d'être simple à exploiter mais il ne sera qu'une approximation du système physique et ne sera valable qu'autour d'un point de fonctionnement donné. Un modèle non linéaire sera quant à lui plus fidèle au système physique mais, étant donné sa complexité mathématique, il sera plus difficilement exploitable.

Que ce soit dans un contexte linéaire ou non linéaire, la connaissance de l'état du système est essentielle à l'élaboration de la plupart des algorithmes de commande. Pour certains systèmes physiques, l'état du système est accessible à la mesure. Il est donc entièrement connu à tout instant et n'a pas besoin d'être reconstruit. Cependant, la réalité physique est bien différente dans le sens où l'état n'est très souvent que partiellement mesuré, voire totalement inconnu. L'utilisation d'un observateur d'état est alors indispensable pour reconstruire partiellement, ou même totalement, l'état du système tel qu'il est spécifié dans le modèle.

L'objet de ce chapitre est de dresser un état de l'art des différents types d'observateurs d'état utilisés en automatique. Le système physique étudié dans cette thèse étant un système SISO perturbé par une entrée inconnue (voir chapitre précédent), les différentes approches d'observation présentées dans ce chapitre seront adaptées au contexte SISO¹. Dans les prochaines sections, le principe de l'observation sera d'abord rappelé et divers travaux relatifs à la reconstruction de l'état des systèmes linéaires et non linéaires seront présentés. Par ailleurs, le caractère incertain de ces systèmes ainsi que la dimension métrologique de cette thèse seront abordés, notamment par la présentation des approches d'observation par intervalles. La dernière partie de ce chapitre sera quand à elle consacrée à la présentation de deux concepts fondamentaux, à savoir l'observateur d'état étendu (ESO) et l'ADRC. Ces deux concepts sont en effet à l'origine de l'approche d'observation d'état développée dans cette thèse, laquelle sera présentée dans le chapitre suivant.

4.2/ NOTIONS ESSENTIELLES DE L'OBSERVATION D'ÉTAT

En général, pour des raisons techniques et/ou économiques, il est impossible de mesurer la totalité du vecteur d'état qui est mise en œuvre dans le modèle d'un système physique. Cependant, la connaissance de l'état est nécessaire lorsque l'information qu'il procure (qui détermine exhaustivement l'évolution du modèle) est utilisée à des fins de commande. Il est alors essentiel de pouvoir estimer les composantes non mesurables du vecteur d'état afin de le reconstruire dans sa totalité. C'est le rôle d'un observateur d'état.

4.2.1/ PRINCIPE D'UN OBSERVATEUR D'ÉTAT

Par définition, les observateurs d'état, parfois également appelés capteurs logiciels, sont des outils permettant de reconstruire l'état d'un système dynamique à partir de son modèle et de la mesure d'autres grandeurs, généralement la commande et la sortie du

1. La plupart des approches présentées dans ce chapitre peuvent être étendues aux systèmes MIMO.

système. Ce sont en fait des algorithmes qui calculent à tout instant une estimation des composantes non mesurables du vecteur d'état du système.

Les observateurs sont des éléments incontournables du processus de commande dans le sens où ils sont utiles à l'identification des paramètres du système, à l'élaboration de sa commande ainsi qu'à sa surveillance (détection et isolation de fautes). La figure 4.1 tirée de (Tian, 2010) illustre ce caractère central.

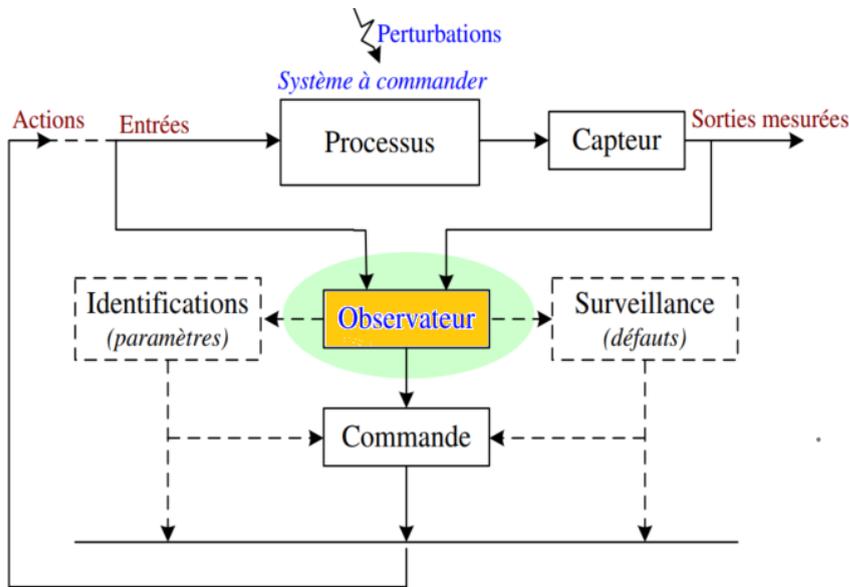


FIGURE 4.1 – L'observateur, élément essentiel du processus de commande (Tian, 2010)

Soit un système dynamique représenté de manière très générale par l'évolution de son état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), t), \\ y(t) = h(x(t), u(t), d(t), t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est son entrée de commande, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ est une perturbation, $y(t) \in \mathbb{R}$ est sa sortie et où les fonctions f et h sont tout aussi bien linéaires que non linéaires et peuvent dépendre du temps.

Un observateur d'état est un second système dynamique, ayant pour entrées l'entrée de commande du système $u(t)$ et sa sortie $y(t)$, dont la structure est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \psi(z(t), u(t), y(t), t), \\ \hat{x}(t) = \rho(z(t), u(t), y(t), t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Le vecteur $z(t) \in \mathbb{R}^q$ est l'état interne de l'observateur d'état et sa sortie $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$ du système.

L'objectif de la synthèse de cet observateur est alors de déterminer les fonctions ψ et ρ telles que l'erreur d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = 0. \quad (4.3)$$

Cependant, il n'est pas toujours possible de déterminer de telles fonctions ψ et ρ . Autrement dit, il n'est pas toujours possible d'être en mesure de reconstruire le vecteur d'état

$x(t)$ du système à partir de son entrée $u(t)$ et de sa sortie $y(t)$. Ainsi, avant de se lancer dans la synthèse d'un observateur, il convient d'étudier un point critique vis-à-vis du système, à savoir son observabilité.

4.2.2/ NOTION D'OBSERVABILITÉ

La notion d'observabilité est essentielle lors de la synthèse d'un observateur d'état. En effet, étudier l'observabilité d'un système dynamique consiste à établir les conditions sous lesquelles l'état du système peut être déterminé à partir de la mesure de son entrée et de sa sortie.

Définition 4.2.1. (*Granjon, 2010*) (*Observabilité*) Un système est dit observable à un instant t_1 , si la seule connaissance du signal d'entrée $u(t)$ et du signal de sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ permet de déterminer l'état x_1 du système à l'instant t_1 . Si un système est observable quel que soit l'instant t_1 , il est dit complètement observable.

Pour un système Linéaire à Temps Invariant (LTI) défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ son entrée, $y(t) \in \mathbb{R}$ sa sortie, l'étude de l'observabilité se fait par l'étude de sa matrice d'observabilité définie par :

$$O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Théorème 4.2.1. (*Kalman, 1960*) (*Critère de Kalman pour l'observabilité*) Le système LTI (4.4) est complètement observable si et seulement si :

$$\text{rang}(O_{(A,C)}) = n. \quad (4.6)$$

Dans ce cas, il est également dit que la paire (A, C) est complètement observable.

4.2.3/ NOTION DE DÉTECTABILITÉ

Lorsque la paire (A, C) n'est pas complètement observable, il est nécessaire d'étudier la détectabilité de cette même paire pour savoir s'il est possible de synthétiser un observateur pour le système (4.4).

Définition 4.2.2. (*O'Reilly, 1983*) (*Détectabilité*) Le système LTI (4.4) est dit détectable si et seulement si les états non observables sont stables.

4.3/ OBSERVATEURS D'ÉTAT POUR LES SYSTÈMES LTI

Afin d'explicitier la procédure de synthèse d'un observateur d'état, on va considérer une représentation d'état générale pour les systèmes SISO qui peut se déduire de la représentation (3.9) donnée dans le chapitre 3 lorsque $u = f_{elec}(i, z)$. Cette représentation d'état peut se mettre sous la forme d'un système LTI tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est son entrée, $y(t) \in \mathbb{R}$ est sa sortie et $d(t) \in \mathbb{R}^m$ est une perturbation multidimensionnelle qui influe sur l'évolution de l'état. Dans le cadre applicatif de ce mémoire, on a par exemple $d(t) = \ddot{z}_a \in \mathbb{R}$.

4.3.1/ FILTRE DE KALMAN

Un filtre de Kalman (Kalman, 1960) est un système dynamique possédant deux entrées, à savoir la commande $u(t)$ du système physique et la mesure bruitée $y_m(t) = y(t) + v(t)$ qui est obtenue via une corruption de la mesure qui est notée $v(t) \in \mathbb{R}$. Le vecteur d'état $\hat{x}(t)$ de ce filtre correspond alors à l'estimation du vecteur d'état $x(t)$ du système physique.

Le contexte théorique utilisé pour la synthèse du filtre de Kalman correspond à celui des systèmes linéaires stochastiques : $d(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs Gaussiens centrés appelés bruit d'état et bruit de mesure, de densité spectrale de puissance $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{R}$ respectivement. De ce fait, les évolutions de $x(t)$, de $y(t)$ et de $y_m(t)$ sont stochastiques et les processus correspondants sont des bruits colorés Gaussiens. Sous l'hypothèse que la paire (A, C) est détectable, la représentation d'état d'un filtre de Kalman continu est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (4.8)$$

Le terme $A\hat{x}(t) + Bu(t)$ est utilisé pour prédire l'évolution de l'état du système à partir de l'estimation actuelle $\hat{x}(t)$. Cette prédiction est ensuite recalée par l'écart entre la mesure $y(t)$ et la mesure prédite $\hat{y}(t) = C\hat{x}$ pondéré par le gain non-stationnaire du filtre $K_f(t)$.

Soit $P(t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la valeur initiale de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Cette matrice est définie à l'instant initial par :

$$P(t_0) = E \left[(x(t_0) - \hat{x}(t_0)) (x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T \right].$$

Le gain $K_f(t)$ est alors calculé en fonction de la confiance portée dans la partie déterministe du modèle d'état, représentée par W , et de celle portée dans la valeur initiale de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, représentée par $P(t_0)$, le tout relativement à la confiance portée dans la mesure, représentée par V . Parmi tous les gains $K_f(t)$ assurant la stabilité du filtre (4.8), le gain choisi est celui qui minimise la variance de l'erreur d'observation $e(t)$ de l'état du système. De ce fait, pour des matrices W , V et $P(t_0)$ données, $\hat{x}(t)$ est alors une estimation de $x(t)$ de variance minimale. Ce gain $K_f(t)$ est déterminé par :

$$K_f(t) = P(t)C^T V^{-1} \quad (4.9)$$

où la dynamique de $P(t)$ est initialisée par $P(t_0)$ et est définie par l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T V^{-1} CP(t) + DWD^T.$$

En pratique, pour un système LTI (4.10) donné, le gain $K_f(t)$ du filtre de Kalman (4.8) et la réponse temporelle de l'erreur d'estimation $e(t)$ dépendent du poids relatif de $P(t_0)$ par rapport à V (lors du régime transitoire de l'observateur) et du poids relatif de W par rapport à V (lors du régime permanent de l'observateur).

4.3.2/ OBSERVATEURS D'ÉTAT DITS DE LUENBERGER

L'observateur, dit de Luenberger (Luenberger, 1964), permet d'estimer l'état du système (4.10) lorsque la perturbation $d(t)$ est nulle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (4.10)$$

Il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'estimation du vecteur d'état $x(t)$. Le terme $y(t) - \hat{y}(t)$, relatif à l'erreur de reconstruction de la sortie $y(t)$, est pondéré par le terme L correspondant au gain de l'observateur. Il est également possible de mettre l'observateur (4.11) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (4.12)$$

La dynamique de l'erreur d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est quant à elle définie par l'équation suivante :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t). \quad (4.13)$$

Afin de garantir que l'erreur d'observation $e(t)$ tende asymptotiquement vers 0, et donc garantir un bon fonctionnement de l'observateur, le gain L doit être choisi judicieusement.

Définition 4.3.1. (Luenberger, 1964) Un système décrit par (4.10) est dit asymptotiquement stable si et seulement si la matrice A est de Hurwitz.

Définition 4.3.2. (Luenberger, 1964) Une matrice est dite de Hurwitz si et seulement si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

Par conséquent, il est indispensable de choisir le gain L tel que la matrice $A - LC$ soit de Hurwitz. De plus, si la paire (A, C) est complètement observable, alors les valeurs propres de la matrice $A - LC$ peuvent être fixées de manière arbitraire. Cela signifie que la dynamique de l'observateur peut être choisie. En revanche, si la paire (A, C) n'est pas observable, il est impossible de construire un observateur dont la dynamique est choisie. Si toutefois la paire (A, C) est détectable, il est possible de synthétiser un observateur asymptotiquement stable. Dans ce cas les valeurs propres de la matrice $A - LC$ sont alors toutes, ou en partie, fixées (O'Reilly, 1983).

4.4/ OBSERVATEURS D'ÉTAT POUR LES SYSTÈMES LTI À ENTRÉE INCONNUE

En pratique, la perturbation $d(t) \in \mathbb{R}^m$ est rarement nulle comme dans (4.10). Sa valeur est souvent inconnue, car non mesurée, et sa loi de comportement n'est pas forcément celle d'un bruit blanc Gaussien avec des caractéristiques connues (moyenne et matrice de covariance). Ce cas de figure rend plus difficile l'estimation de l'état du système. Lorsque de telles perturbations agissent comme des entrées du système, elles sont appelées des entrées inconnues.

Dans cette section, nous revenons donc au cas des systèmes LTI tels que (4.7) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ et $d(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement le vecteur d'état du système, son entrée, sa sortie et l'entrée de perturbation inconnue. La matrice D représente quant à elle la matrice de distribution de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$. Si la matrice D est inconnue, le produit $Dd(t)$ est considéré comme étant une entrée de perturbation inconnue qui agit sur toutes les composantes de l'état.

4.4.1/ OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES (OEI)

L'objectif des observateurs à entrées inconnues est de fournir une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ tout en étant insensible à l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$. La structure de ces observateurs est la suivante (Yang et al., 1988; Guan et al., 1991; Darouach et al., 1994; Darouach, 2009) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t), \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état de l'observateur et $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'estimation du vecteur d'état $x(t)$ du système. Les matrices $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, G , L , et E sont les matrices qu'il faut déterminer afin d'obtenir la convergence de l'observateur et l'insensibilité à l'entrée de perturbation inconnue. Ces matrices sont déterminées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N & \text{ est de Hurwitz,} \\ PA - NP - LC &= 0, \\ PB - G &= 0, \\ PD &= 0, \\ P &= I + EC \end{aligned} \quad (4.16)$$

sous réserve que les conditions suivantes soient satisfaites (Darouach et al., 1994) :

$$\text{rang}(CD) = \text{rang}(D) = m, \quad \text{condition d'insensibilité,} \quad (4.17)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I_n - A & -D \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + m, \quad \text{condition de détectabilité.} \quad (4.18)$$

Si ces conditions sont respectées, l'observateur à entrée inconnue (4.15), paramétré avec les matrices définies dans (4.16), donne une estimation $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état x en dépit de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$.

4.4.2/ OBSERVATEURS DE PERTURBATIONS (OP)

Les observateurs de perturbations (en anglais, Disturbance Observers (DO)) ont pour objectif d'estimer la perturbation $d(t)$ affectant le système (4.7). Ils ont été introduits par (Ohishi et al., 1987) à la fin des années 1980, initialement dans le domaine fréquentiel sous forme de fonctions de transfert. Exprimée dans le domaine temporel, la structure des ces observateurs est la suivante (Li Shihua et al., 2014) :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= -L(Ax(t) + Bu(t)) - LD\hat{d}(t), \\ \hat{d}(t) &= z(t) + Lx(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état de l'observateur, $\hat{d}(t) \in \mathbb{R}^m$ représente l'estimation de la perturbation $d(t)$ et où la matrice D de distribution de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$ est connue. Le vecteur L correspond au gain de l'observateur qu'il est nécessaire de déterminer de sorte que l'erreur d'estimation de l'entrée de perturbation $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ converge asymptotiquement vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t) = 0. \quad (4.20)$$

D'après la structure de l'observateur (4.19), l'erreur d'estimation de l'entrée de perturbation $e_d(t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$e_d(t) = d(t) - z(t) - Lx(t) \quad (4.21)$$

et la dynamique de cette erreur est définie par :

$$\dot{e}_d(t) = \dot{d}(t) - \dot{\hat{x}}(t) - L\dot{x}(t). \quad (4.22)$$

En remplaçant la dynamique de l'état de l'observateur $\dot{\hat{x}}(t)$ par son expression dans (4.19) et la dynamique de l'état du système $\dot{x}(t)$ par son expression dans (4.7), la dynamique de l'erreur d'estimation de l'entrée de perturbation (4.22) devient :

$$\dot{e}_d(t) = \dot{d}(t) - LDe_d(t). \quad (4.23)$$

Ainsi, pour toute entrée de perturbation $d(t)$ bornée, la dynamique de son erreur d'estimation (4.23) est stable si le vecteur L de gain de l'observateur est choisi tel que la matrice $-LD$ soit de Hurwitz. De plus, si la perturbation $d(t)$ est constante de telle sorte que sa dérivée $\dot{d}(t)$ soit nulle, alors l'erreur d'estimation $e_d(t)$ converge asymptotiquement vers 0. En pratique, l'usage d'un tel observateur avec des perturbations variant lentement dans le temps donne des performances suffisantes pour pouvoir l'utiliser dans le cadre de l'automatique.

Par la suite, cette approche d'observation a été étendue aux systèmes à retard (Kempf et al., 1999), aux systèmes incertains (Yang et al., 2010), etc., et peut s'appliquer à plusieurs domaines scientifiques, notamment la robotique (Cheong et al., 2002; Kwangjin Yang et al., 2005).

4.4.3/ OBSERVATEURS PROPORTIONNEL - INTÉGRAL (PI)

Dans certaines applications, il peut être nécessaire de reconstruire à la fois le vecteur d'état $x(t)$ du système et l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$. C'est notamment le cas

dans les algorithmes de commande tolérante aux fautes où la faute, considérée comme une entrée de perturbation inconnue, doit être estimée dans le but d'être compensée (Shafai et al., 2002). Dans ce cas, plusieurs types d'observateurs peuvent être utilisés, l'un d'entre eux étant l'observateur de type proportionnel - intégral (PI) (Beale et al., 1989). Cet observateur permet d'intégrer un certain degré de robustesse dans l'estimation de l'état et de l'entrée de perturbation inconnue grâce à son action intégrale (Weinmann, 1991).

Pour le système (4.7), un observateur de type proportionnel - intégral est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + D\dot{\hat{d}}(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \dot{\hat{d}}(t) &= L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (4.24)$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, $\hat{d}(t) \in \mathbb{R}^m$ représente l'estimation de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$ et où la matrice D de distribution de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$ est connue. Les matrices de gain L_1 et L_2 sont utilisées pour régler la dynamique de l'erreur d'estimation de l'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et celle de l'entrée de perturbation inconnue $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ données respectivement par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t), \\ \dot{e}_d(t) &= (A - L_1C)e(t) + De_d(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{e}_d(t) &= \dot{d}(t) - \dot{\hat{d}}(t), \\ \dot{e}_d(t) &= \dot{d}(t) - L_2Ce(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

qui peuvent être mises sous une forme plus compacte donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{e}_d(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - L_1C & D \\ -L_2C & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} e(t) \\ e_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \dot{d}(t). \quad (4.27)$$

Les matrices de gain L_1 et L_2 doivent alors être choisies telles que la matrice H soit de Hurwitz, sous réserve que la paire $\left(\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [C \ 0] \right)$ soit au moins détectable. Ainsi, pour toute entrée de perturbation $d(t)$ bornée, la dynamique des d'estimations (4.27) est stable. De plus, si la perturbation $d(t)$ est constante ou varie lentement dans le temps de telle sorte que sa dérivée $\dot{d}(t)$ soit nulle, alors les erreurs d'estimation $e(t)$ et $e_d(t)$ convergent asymptotiquement vers 0.

Tous les observateurs cités jusqu'à présent se basent sur la stationnarité des systèmes et sur la connaissance complète de leur modèle, notamment concernant leurs paramètres. En réalité, les systèmes peuvent évoluer dans le temps, particulièrement par le vieillissement de leurs composants. Par ailleurs, l'identification de leurs paramètres est très souvent sujette à des incertitudes et, une fois qu'ils sont connus, ces paramètres peuvent également évoluer dans le temps. Le cadre des systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI) définis par (4.10) ne suffit donc plus.

4.5/ OBSERVATEURS D'ÉTAT POUR LES SYSTÈMES VARIANT DANS LE TEMPS

Il existe plusieurs façons de représenter un système dynamique variant dans le temps en fonction :

- de sa dépendance à des paramètres ou non
- du type de dépendance à ces paramètres (affine, polynomiale, rationnelle, etc.)
- des incertitudes liées à ces paramètres
- du caractère statique ou dynamique de ces paramètres et de leur incertitude
- etc.

Dans cette section, par souci de compacité, l'accent sera mis sur les systèmes dits Linéaires à Paramètres Variants dans le temps (LPV), c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique varie en fonction de certains paramètres, eux-mêmes variables dans le temps. De manière générale, un système LPV est représenté de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est son entrée, $y(t) \in \mathbb{R}$ est sa sortie. Les matrices $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$ et $C(\rho(t))$ évoluent au cours du temps en fonction du vecteur de paramètres $\rho(t) = [\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)]$, lui-même dépendant du temps. Ces paramètres et leur évolution dans le temps peuvent dépendre d'éléments externes au système, cas des paramètres exogènes, ou être fonction de l'état du système, cas des paramètres endogènes.

Hypothèse 4.5.1. *Les composantes $\rho_i(t)$ du vecteur de paramètres $\rho(t)$ sont bornées, c'est-à-dire :*

$$\rho_i(t) \in [\underline{\rho}_i; \bar{\rho}_i] \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et les bornes inférieure $\underline{\rho}_i$ et supérieure $\bar{\rho}_i$ sont connues.

Pour un système LPV défini par (4.28), l'étude de l'observabilité se fait par l'étude de sa matrice d'observabilité définie par :

$$O_{(A(\rho(t)), C(\rho(t)))} = [o_1^T \quad o_2^T \quad \dots \quad o_n^T]^T \quad (4.29)$$

où $o_1 = C(\rho(t))$ et $o_{i+1} = o_i A(\rho(t)) + \dot{o}_i$ pour $i > 0$.

Théorème 4.5.1. *(Silverman et al., 1967) Le système LPV (4.28) est complètement observable si et seulement si :*

$$\text{rang}(O_{(A(\rho(t)), C(\rho(t)))}) = n, \quad \forall t. \quad (4.30)$$

Si le système LPV (4.28) est complètement observable, plusieurs architectures d'observateurs d'état existent, certaines étant similaires à celles présentées précédemment.

Ainsi, un premier observateur LPV pour le système (4.28) a la forme suivante (Besançon, 2007) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\rho(t))\hat{x}(t) + B(\rho(t))u(t) + L(\rho(t))(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C(\rho(t))\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.31)$$

où $L(\rho(t))$ est donné par :

$$L(\rho(t)) = P(\rho(t))C^T(\rho(t))W^{-1}(\rho(t))$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{P}(\rho(t)) &= P(\rho(t))A^T(\rho(t)) + A(\rho(t))P(\rho(t)) \\ &\quad - P(\rho(t))C^T(\rho(t))W^{-1}(\rho(t))C(\rho(t))P(\rho(t)) + V + \lambda P(\rho(t)). \end{aligned}$$

Les matrices $W(\rho(t))$ et $P(\rho(t))$ sont des matrices symétriques définies positives de dimension adaptée et la vitesse de convergence de l'observateur (4.31) peut être choisie en modifiant les valeurs de $\lambda > 2\|A(\rho(t))\|$ ou de $V = V^T > 0$.

Un autre observateur asymptotique pour le système LPV (4.28) a été proposé par (Trumpf, 2007). Cependant, sa synthèse et son implémentation sont compliquées dans le sens où il est nécessaire de trouver un vecteur $z(t)$ satisfaisant un ensemble d'équations.

Dans le cas où le système LPV (4.28) est affecté par une entrée de perturbation inconnue $d(t)$, un observateur similaire à (4.15) a été proposé (Marx et al., 2019) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= N(\rho(t))z(t) + G(\rho(t))u(t) + L(\rho(t))y(t), \\ \hat{x}(t) &= z(t) - E(\rho(t))y(t) \end{cases} \quad (4.32)$$

où les matrices $N(\rho(t))$, $G(\rho(t))$, $L(\rho(t))$ et $E(\rho(t))$ sont déterminées telles que l'erreur d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers 0 indépendamment de l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$.

De nouveau de manière analogue à précédemment, s'il est nécessaire de reconstruire à la fois le vecteur d'état $x(t)$ du système et l'entrée de perturbation inconnue $d(t)$, un observateur de type proportionnel - intégral peut être utilisé. Dans ce but, un tel observateur a été conçu dans le contexte de la commande tolérante aux fautes par (Do et al., 2019) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\rho(t))\hat{x}(t) + B(\rho(t))u(t) + D(\rho(t))\hat{d}(t) + L_1(\rho(t))(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \dot{\hat{d}}(t) &= L_2(\rho(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (4.33)$$

où les matrices de gain L_1 et L_2 sont utilisées pour régler la dynamique de la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation de l'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et celle de l'entrée de perturbation inconnue $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ vers 0.

Les observateurs (4.31), (4.32) et (4.33) sont construits en faisant l'hypothèse que le vecteur des paramètres $\rho(t)$ est connu, ou au moins mesurable, de même que la façon dont il influe sur le système. Dans la réalité, si le vecteur des paramètres $\rho(t)$ peut être connu, il n'est généralement pas possible de caractériser la manière dont il influe sur le système. Dans ce cas, le système LPV (4.28) est mis sous forme polytopique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{k=1}^{2^N} \alpha_k(\rho(t)) [A_k x(t) + B_k u(t)], \\ y(t) &= \sum_{k=1}^{2^N} \alpha_k(\rho(t)) C_k x(t) \end{cases} \quad (4.34)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{2^N} \alpha_k(\rho(t)) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_k(\rho(t)) > 0.$$

Le système (4.28) est alors décrit par un polytope composé de 2^N sommets englobant toutes les trajectoires admissibles des variables d'état du système. Chaque sommet correspond en fait à une combinaison des extremums (borne inférieure $\underline{\rho}_i$ ou borne supérieure $\bar{\rho}_i$) des composantes $\rho_i(t)$ du vecteur de paramètres $\rho(t)$. A chaque sommet k de ce polytope est associé un modèle LTI caractérisé par les matrices A_k , B_k et C_k . En fonction de la valeur du vecteur de paramètres $\rho(t)$, la fonction $\alpha_k(\rho(t))$ donne plus ou moins d'importance au modèle LTI du sommet k . Le système (4.34) est donc le barycentre des 2^N modèles LTI du polytope et dont la dynamique est identique à celle du système (4.28) pour une valeur de $\rho(t)$ donnée. Les observateurs résultant de cette représentation sont par conséquent également polytopiques, comme ceux utilisés dans (Anstett et al., 2009; Theilliol et al., 2011; Zhou et al., 2018).

Il est à noter que le polytope peut prendre plusieurs formes géométriques pour délimiter l'ensemble des trajectoires admissibles du système liées à la variation des paramètres, aux incertitudes et aux bruits. Ainsi, certains ont utilisés des ellipsoïdes (Durieu et al., 1996), des parallélotopes (Chisci et al., 1996), des zonoèdres (Alamo et al., 2005; Combastel, 2003), etc.

L'inconvénient des méthodes d'observation citées jusqu'à présent est qu'elles ne fournissent que l'estimation du vecteur d'état d'un système dynamique, sans quantification de l'erreur d'estimation. Or, la quantification de l'erreur d'estimation est essentielle dans un contexte métrologique. C'est pourquoi la notion d'observateurs par intervalles a été introduite au début des années 2000 (Gouzé et al., 2000).

4.6/ OBSERVATEURS PAR INTERVALLES

4.6.1/ PRINCIPE DE L'OBSERVATION PAR INTERVALLES

La notion centrale de l'observation par intervalles est la propagation des incertitudes (incertitudes sur les paramètres, perturbations affectant le système, bruits, etc.). En effet, à partir de certaines connaissances sur les incertitudes et les conditions initiales du système, l'objectif d'un observateur par intervalles est d'estimer un intervalle $[\underline{x}(t); \bar{x}(t)]$ dans lequel se trouve obligatoirement l'état $x(t)$ du système. Ce principe est illustré par la figure 4.2 ci-dessous.

L'état du système $x(t)$, ayant pour valeur initiale $x(0)$, est représenté par la courbe noire. A partir de la connaissance de $\underline{x}(0)$ et $\bar{x}(0)$, un observateur par intervalles est capable de reconstruire les bornes inférieure $\underline{x}(t)$ (en vert) et supérieure $\bar{x}(t)$ (en rouge) de cet état. De plus, si le système avait été affecté par une perturbation inconnue $d(t)$, les bornes \underline{d} et \bar{d} de cette perturbation auraient été données à l'observateur afin qu'il ajuste la taille de l'intervalle. Le principe aurait été le même pour des incertitudes paramétriques ou des bruits de mesure. Les observateurs par intervalles représentent donc une technique d'estimation particulière de l'état d'un système en présence d'incertitudes.

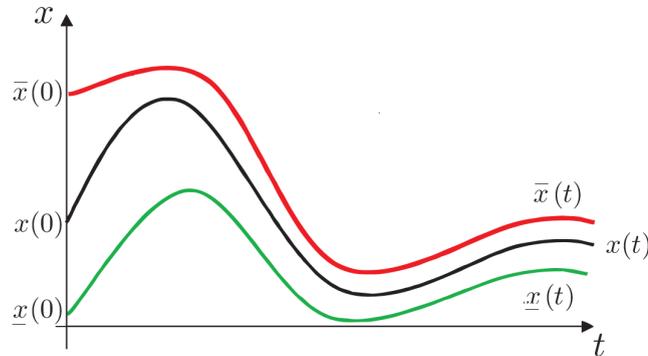


FIGURE 4.2 – Principe de l'observation par intervalles

4.6.2/ CADRE DE L'OBSERVATION PAR INTERVALLES

La conception d'un observateur par intervalles pour un système dynamique n'est possible que si ce système possède certaines propriétés qui sont induites par des relations d'ordre vectorielles. Ces propriétés sont indispensables afin de prouver la stabilité et le maintien de l'ordre des bornes obtenues. Dans ce qui suit, on dira que deux vecteurs a et b de \mathbb{R}^n vérifient $a \leq b$ si et seulement si chaque composante a_i et b_i vérifient $a_i \leq b_i$. Une première propriété est alors liée à la notion de monotonie (Smith, 1995; Angeli et al., 2003).

Définition 4.6.1. (Système monotone) Soit un système dynamique défini par :

$$\dot{x} = f(x). \quad (4.35)$$

Le système (4.35) est dit monotone si et seulement si ses trajectoires d'état respectent, sur un domaine de définition donné, la relation d'ordre définie par rapport aux conditions initiales, c'est-à-dire :

$$x_1(t_0) \leq x_2(t_0) \Rightarrow x_1(t) \leq x_2(t), \quad \forall t > t_0.$$

Avant d'aborder la seconde propriété, il est nécessaire de définir ce qu'est une matrice Metzler.

Définition 4.6.2. (Matrice Metzler) Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La matrice A est dite Metzler si et seulement si tous ses termes non diagonaux sont positifs, c'est-à-dire :

$$a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j.$$

La seconde propriété est liée à la notion de coopérativité (Smith, 1995; Hirsch et al., 2003).

Définition 4.6.3. (Système coopératif) Le système (4.35) est dit coopératif si et seulement si la matrice jacobienne de f est Metzler. Par ailleurs, un système linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

est dit coopératif si sa matrice d'état A est Metzler.

Les systèmes coopératifs représentent une classe particulière des systèmes monotones. Par conséquent, ces systèmes présentent la propriété de conserver l'ordre partiel entre leurs trajectoires (Smith, 1995; Mailleret, 2004) :

Propriété 4.6.1. (*Système coopératif*) Soit un système coopératif d'état $x(t)$. Soient deux conditions initiales ordonnées $\underline{x}_0 \leq \bar{x}_0$. Soit $\underline{x}(t)$ l'état du système initialisé avec \underline{x}_0 et $\bar{x}(t)$ l'état du système initialisé avec \bar{x}_0 . Dans ce cas :

$$\underline{x}(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t.$$

Avec cette propriété, il est donc possible de propager dynamiquement des incertitudes dont les bornes sont connues. Dans le cadre de cette thèse, nous utiliserons cette propriété pour étudier la propagation dynamique des incertitudes affectant notre système sur la génération de force.

Afin d'être complet vis-à-vis de ce qui sera présenté ultérieurement, le théorème suivant est introduit :

Théorème 4.6.1. (*Gouzé et al., 2000*) Soit un système coopératif décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha \quad (4.36)$$

où la matrice A est Metzler. Si $\alpha \geq 0$ alors, pour toutes conditions initiales $x(0) \geq 0$, $x(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$.

4.6.3/ SYNTHÈSE D'UN OBSERVATEUR PAR INTERVALLES

Un observateur par intervalles peut être défini comme une paire d'observateurs, tous deux basés sur la structure des observateurs de Luenberger (voir section 4.3.2). Un observateur reconstruira la borne $\underline{x}(t)$ tandis que le second reconstruira la borne $\bar{x}(t)$, et l'intervalle $[\underline{x}(t); \bar{x}(t)]$ contiendra l'état $x(t)$.

Dans cette section, les étapes nécessaires à la synthèse d'un observateur par intervalles sont décrites. Par souci de simplicité, cette approche sera présentée dans le cadre des systèmes linéaires SISO n'étant pas sujets à des incertitudes paramétriques (Efimov et al., 2016). Soit un système dont la dynamique est décrite par le modèle linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + d(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.37)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $y(t) \in \mathbb{R}$ sa sortie. Le terme $d(t) \in \mathbb{R}^n$ est une perturbation affectant la dynamique du système et $v(t) \in \mathbb{R}$ est un bruit de mesure. Il est fait l'hypothèse que certaines informations sont connues concernant cette perturbation et ce bruit de mesure, de même que sur les conditions initiales $x(0)$ du système :

Hypothèse 4.6.1. (*Connaissance des bornes*)

- $\exists \underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $x(0) \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$, et \underline{x}_0 et \bar{x}_0 sont connus,
- $\exists \underline{d}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(t) \in [\underline{d}, \bar{d}] \forall t$, et \underline{d} et \bar{d} sont connus,
- $\exists V \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|v(t)| \leq V \forall t$, et V est connu.

L'objectif est alors d'utiliser ces informations pour déterminer l'encadrement de l'état $x(t)$ du système (4.37) à tout instant, c'est-à-dire :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.38)$$

Comme indiqué précédemment, les bornes inférieure $\underline{x}(t)$ et supérieure $\bar{x}(t)$ sont calculées à l'aide d'observateurs de Luenberger dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + L[y(t) - C\bar{x}(t)] + |L|V + \bar{d} \\ \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + L[y(t) - C\underline{x}(t)] - |L|V + \underline{d} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (4.39)$$

et où L est le vecteur des gains de l'observateur et $|L|$ est le vecteur des valeurs absolues des éléments de L .

Soient les erreurs d'observation $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ et $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ dont la dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}(t) = [A - LC]\bar{e}(t) - Lv(t) + |L|V + \bar{d} - d(t), \\ \dot{\underline{e}}(t) = [A - LC]\underline{e}(t) + Lv(t) + |L|V + d(t) - \underline{d}. \end{cases} \quad (4.40)$$

L'observateur (4.39) sera un observateur par intervalles pour le système (4.37) si et seulement si (4.38) est vraie. Cela signifie que les erreurs d'observation $\bar{e}(t)$ et $\underline{e}(t)$ doivent toujours être positives, c'est-à-dire :

$$\bar{e}(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{e}(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

D'après le théorème 4.6.1, la positivité de l'erreur d'observation sera garantie si :

$$\bar{e}(0) \geq 0, \quad (4.41)$$

$$\underline{e}(0) \geq 0, \quad (4.42)$$

$$-Lv(t) + |L|V + \bar{d} - d(t) \geq 0, \quad (4.43)$$

$$Lv(t) + |L|V + d(t) - \underline{d} \geq 0, \quad (4.44)$$

$$A - LC \text{ est Metzler.} \quad (4.45)$$

D'après l'hypothèse 4.6.1 :

$$\bar{e}(0) = \bar{x}(0) - x(0) = \bar{x}_0 - x(0) \geq 0, \quad (4.46)$$

$$\underline{e}(0) = x(0) - \underline{x}(0) = x(0) - \underline{x}_0 \geq 0, \quad (4.47)$$

$$|L|V \pm Lv(t) \geq 0, \quad (4.48)$$

$$\bar{d} - d(t) \geq 0, \quad (4.49)$$

$$d(t) - \underline{d} \geq 0. \quad (4.50)$$

Par conséquent, afin de garantir la coopérativité de l'erreur d'observation et ainsi assurer la positivité des erreurs d'observation, il suffit de choisir le vecteur des gains L tel que la matrice $A - LC$ soit Metzler. Avec ce choix de matrice, l'observateur (4.39) est un observateur par intervalles pour le système (4.37) et garantit (4.38).

Cependant, la recherche d'un gain d'observation satisfaisant la condition de coopération des erreurs d'observation n'est pas une tâche triviale et est même parfois impossible.

Afin de relaxer cette limitation, plusieurs méthodes de changement de coordonnées ont été proposées pour les systèmes linéaires afin que la matrice $A - LC$ soit Metzler dans la nouvelle base. Ce changement de coordonnées peut être variant dans le temps (Mazenc et al., 2011) ou invariant dans le temps. Dans ce second cas, la matrice de changement de coordonnées peut être obtenue par résolution de l'équation de Sylvester (Raïssi et al., 2012) ou par optimisation non lisse (Chambon et al., 2015).

De par son intérêt, l'approche d'observation par intervalles initialement proposée par (Gouzé et al., 2000) a été développée très rapidement dans de nombreuses directions. Elle a ainsi été appliquée aux systèmes LTI (Efimov et al., 2016), aux systèmes LTI à entrées inconnues (Gucik-Derigny et al., 2014) et aux systèmes variant dans le temps (Krebs et al., 2016; Galván-Guerra et al., 2017; Ellero, 2018). Les approches par intervalles sont également utilisées dans le cadre de l'estimation d'état des systèmes non linéaires (Raïssi et al., 2010; Raïssi et al., 2012; Efimov et al., 2013; Efimov et al., 2013; Zheng et al., 2016). Cette classe de systèmes est l'objet de la prochaine section.

4.7/ OBSERVATEURS D'ÉTAT POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très fréquente a été établie par (Herman et al., 1977).

Soit un système non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (4.51)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions non linéaires.

Définition 4.7.1. (Herman et al., 1977) (Indistinguabilité) Soient $y_0(t)$ et $y_1(t)$ deux signaux de sortie générés par l'application du signal de commande $u(t)$ au système (4.51) avec les conditions initiales x_0 et x_1 respectivement. Les états x_0 et x_1 sont dits indistinguables si

$$y_0(t) = y_1(t) \quad \text{pour toute entrée } u(t) \quad \text{et } \forall t \geq 0.$$

Dans le cas contraire, les états x_0 et x_1 sont dits distinguables.

Définition 4.7.2. (Herman et al., 1977) (Observabilité) Le système (4.51) est dit observable en x_0 si x_0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système (4.51) est dit complètement observable si, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 est distinguable.

De manière analogue à la définition de l'observabilité pour les systèmes non linéaires, il n'existe pas de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs d'état. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Les premières sont basées sur une linéarisation du modèle du système autour d'un point de fonctionnement alors que les secondes ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Dans cette section est présentée une sélection de ces algorithmes (Zemouche, 2007).

4.7.1/ OBSERVATEURS ÉTENDUS

L'approche la plus intuitive est d'étendre les approches linéaires aux systèmes non linéaires en calculant le gain de l'observateur à partir d'un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement donné. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu (Julier et al., 1997) et de l'observateur de Luenberger étendu (Zeitz, 1987), respectivement présentés dans les sections 4.3.1 et 4.3.2 dans le cas linéaire.

Pour le filtre de Kalman, le filtre étendu se base sur l'utilisation des équations du filtre standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre. Cette approche a été utilisée avec succès sur différents types d'applications non linéaires (Li et al., 2015). Cependant, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas linéaire ne peuvent généralement pas être étendues au cas non linéaire. De nombreux travaux sont en cours à ce sujet, certains notamment cités dans (Zemouche, 2007).

Pour l'observateur de Luenberger, le filtre étendu peut être synthétisé suivant deux démarches, présentant chacune des inconvénients. La première démarche repose sur un modèle linéarisé du système non linéaire autour d'un point de fonctionnement donné et où le gain de l'observateur est constant. Son utilisation est toutefois compromise par les instabilités pouvant survenir au-delà du voisinage de l'état d'équilibre. La seconde démarche repose quant à elle sur un changement de coordonnées où le gain de l'observateur dépend de l'état à estimer. Son utilisation est souvent délicate dans le sens où les méthodes de changement de coordonnées requièrent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

4.7.2/ MÉTHODES DE TRANSFORMATIONS NON LINÉAIRES

Une autre stratégie pour estimer l'état d'un système non linéaire consiste à transformer ce système non linéaire en un système linéaire ayant les propriétés désirées via un changement de coordonnées. En effet, une fois la transformation réalisée, l'utilisation d'un observateur linéaire de type Luenberger suffit à estimer l'état du système. L'estimation de l'état du système non linéaire initial se fait ensuite par le changement de coordonnées inverse.

Les premiers travaux réalisés dans ce domaine (Krener et al., 1983) l'ont été dans le cadre des systèmes autonomes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)), \\ y(t) &= h(x(t)). \end{cases} \quad (4.52)$$

Pour ces systèmes, un algorithme simplifié permettant de déterminer la transformation convenable a été développé dans (Phelps, 1991). Par ailleurs, des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de cette transformation pour les systèmes mono-sortie ont été données dans (Glumineau et al., 1996) avant d'être généralisées aux systèmes à sorties multiples dans (Plestan et al., 1997). Toutefois, la procédure d'obtention d'une telle transformation est compliquée et la classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est relativement restreinte.

Le cas des systèmes non linéaires commandés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (4.53)$$

a été adressé dans (Keller, 1987) et étendu par la suite (Birk et al., 1988). Il est alors fait l'hypothèse que les dérivées de l'entrée de commande $u(t)$ existent et sont disponibles car le système transformé les contient toutes.

4.7.3/ OBSERVATEURS À GRAND GAIN

Les observateurs à grand gain sont relativement classiques dans le cadre de l'observation des systèmes non linéaires. Leur nom vient du fait que le gain des observateurs est choisi suffisamment grand afin de compenser la non linéarité du système. Cette approche d'observation s'applique sur la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante (Thau, 1973) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \phi(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (4.54)$$

où la paire (A, C) est détectable et où la fonction non linéaire ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à $x(t)$, c'est-à-dire :

$$\|\phi(x(t), u(t)) - \phi(\hat{x}(t), u(t))\| \leq \gamma_\phi \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad \forall x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \forall u(t) \in \mathbb{R}, \forall t$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ .

Un observateur à grand gain pour le système (4.54) est alors de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \phi(\hat{x}(t), u(t)) + K(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ y(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.55)$$

de telle sorte que la dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ soit donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) + \phi(x(t), u(t)) - \phi(\hat{x}(t), u(t)). \quad (4.56)$$

L'objectif est alors de déterminer les conditions pour lesquelles le gain K garantit la convergence asymptotique de l'erreur d'observation $e(t)$. Plusieurs travaux ont été réalisés en ce sens, notamment (Raghavan et al., 1994; Rajamani, 1998; Besancon, 1999; Khalil et al., 2013).

Bien que cette approche d'observation ait été appliquée à des procédés biotechnologiques (Farza et al., 1993), elle présente l'inconvénient d'être sensible aux bruits de mesure (Astolfi, 2016).

4.7.4/ OBSERVATEURS D'ÉTAT ÉTENDU (PRÉAMBULE)

Les observateurs présentés jusqu'à présent sont construits en faisant l'hypothèse que la structure des systèmes non linéaires, leurs non linéarités, leurs paramètres, leurs incertitudes, etc., sont connus. Dans la réalité, si certains éléments peuvent être connus, il n'est généralement pas possible de caractériser complètement un système non linéaire dont on doit quand même estimer l'état. Dans ce cas, une solution est de rassembler toutes les non linéarités du système, toutes les incertitudes et toutes les perturbations externes dans un état supplémentaire qui est ajouté à l'état du système. Cet état étendu peut ensuite être estimé par un observateur d'état étendu (en anglais, Extended State Observer)

(Han, 1995) ou par un observateur proportionnel - intégral généralisé (Luviano-Juárez et al., 2010; Sira-Ramírez et al., 2017). Ces approches permettent donc d'estimer en temps réel non seulement l'état du système non linéaire mais également l'ensemble des éléments incertains qui affectent le système et qui sont regroupés sous la forme d'un réel qu'on appelle la perturbation totale.

Une fois estimées, les informations correspondant à la perturbation totale affectant le système peuvent être utilisées dans le processus de commande pour son rejet ou sa compensation. Un processus de commande se basant sur un observateur d'état étendu est l'ADRC (de l'anglais Active Disturbance Rejection Control) (Zhiqiang Gao et al., 2001; Gao, 2006; Guo et al., 2016). C'est sur cette approche de commande que reposent les contributions de cette thèse en ce qui concerne les outils de l'automatique. La section suivante est donc dédiée à la présentation des formalismes liés aux observateurs d'état étendu et à l'ADRC.

4.8/ L'AUTOMATIQUE POUR LA THÈSE

Les notions d'observateur d'état étendu et d'ADRC sont centrales dans le cadre de cette thèse, elles sont détaillées dans cette section.

4.8.1/ OBSERVATEURS D'ÉTAT ÉTENDU (ESO)

Un observateur d'état étendu est une approche d'observation permettant d'estimer le vecteur d'état d'un système incertain auquel a préalablement été ajouté un état supplémentaire. Cet état supplémentaire représente toutes les quantités inconnues ou ignorées affectant le système (non linéarités, incertitudes, perturbations etc.) formant ainsi la perturbation totale. Cette approche d'observation, initialement proposée par (Han, 1995), peut être appliquée aussi bien à des systèmes linéaires que non linéaires.

Soit un système SISO d'ordre n dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)}(t) &= f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), d(t), t) + bu(t), \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \quad (4.57)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in R$, $y(t) \in \mathbb{R}$ et $d(t)$ représentent respectivement la première composante du vecteur d'état du système, l'entrée de commande du système, la sortie du système et les perturbations externes affectant le système. Le paramètre $b \neq 0$ est un paramètre mal connu qui peut être variable.

La fonction f représente la dynamique inconnue du système. Elle est appelée la perturbation totale. Cette dernière peut être non linéaire et variable dans le temps.

Hypothèse 4.8.1. *La fonction f est dérivable et la fonction h , avec $h = \dot{f}$, est inconnue mais bornée.*

En notant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, \dots , $x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$, le système (4.57) peut s'écrire sous

la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = f(X(t), d(t), t) + bu(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (4.58)$$

où

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n \quad (4.59)$$

est le vecteur d'état du système.

Soit $b_0 \neq 0$ une valeur approchée et constante de b . En introduisant un état supplémentaire correspondant à la perturbation totale de la manière suivante :

$$x_{n+1}(t) = f(X(t), d(t), t) + (b - b_0)u(t), \quad (4.60)$$

le système (4.58), d'après l'hypothèse 4.8.1, est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) + b_0u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = h(X(t), d(t), t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (4.61)$$

Le système (4.61), mis sous forme de représentation d'état, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{X}_e(t) = A_e X_e(t) + B_e u(t) + \mathcal{B}_e h(X(t), d(t), t), \\ y(t) = C_e X_e(t), \end{cases} \quad (4.62)$$

où $X_e(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t)]^T \in R^{n+1}$ est le vecteur d'état étendu à estimer et où :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_e = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (4.63)$$

La paire (A_e, C_e) dans (4.63) est alors complètement observable grâce à la forme compagnon de la matrice A_e .

L'observateur d'état étendu (ESO) permettant d'estimer le vecteur d'état étendu $X_e(t)$ est construit de la façon suivante (Han, 1995) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + L_1(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + L_2(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) + L_{n-1}(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) + L_n(y(t) - \hat{x}_1(t)) + b_0u(t), \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = L_{n+1}(y(t) - \hat{x}_1(t)) \end{cases} \quad (4.64)$$

et sa représentation d'état est donnée par :

$$\dot{\hat{X}}_e(t) = (A_e - \mathcal{L}C_e)\hat{X}_e(t) + B_e u(t) + \mathcal{L}y(t) \quad (4.65)$$

où $\hat{X}_e(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_{n+1}(t)]^T \in R^{n+1}$ est l'estimation du vecteur d'état étendu $X_e(t)$ et où $\mathcal{L} = [L_1, L_2, \dots, L_{n+1}]^T$ représente le vecteur de gain de l'observateur. Si ce vecteur \mathcal{L} est constant, l'observateur (4.64) est un observateur d'état étendu linéaire (LESO) (Zheng et al., 2007; Li Shihua et al., 2014; Talole et al., 2010; Li et al., 2012; Kim et al., 2010). En revanche, si les gains L_1, \dots, L_{n+1} dépendent de fonctions non linéaires comme dans (Guo et al., 2011), alors l'observateur (4.64) est un observateur d'état étendu non linéaire (NLESO).

La dynamique de l'erreur d'estimation s'obtient en soustrayant (4.64) de (4.61). Elle est donc donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) - L_1 e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = e_3(t) - L_2 e_1(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) = e_n(t) - L_{n-1} e_1(t), \\ \dot{e}_n(t) = e_{n+1}(t) - L_n e_1(t), \\ \dot{e}_{n+1}(t) = -L_{n+1} e_1(t) + h(X(t), d(t), t) \end{cases} \quad (4.66)$$

qui peut également s'écrire :

$$\dot{E}(t) = (A_e - \mathcal{L}C_e)E(t) + \mathcal{B}_e h(X(t), d(t), t) \quad (4.67)$$

avec $E(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_{n+1}(t)]$.

Ainsi, étant donné que la fonction h est supposée bornée, la dynamique de l'erreur d'estimation (4.67) est stable si le vecteur \mathcal{L} de gain de l'observateur est choisi tel que la matrice $A_e - \mathcal{L}C_e$ soit de Hurwitz. De plus, si la fonction h est nulle, c'est-à-dire si la perturbation totale f est constante ou varie lentement dans le temps, alors l'erreur d'estimation $E(t)$ converge asymptotiquement vers 0.

L'observateur d'état étendu (4.64) est d'ordre $n + 1$. L'utilisation de cet observateur suppose implicitement que la perturbation totale f est constante ou varie lentement dans le temps, ce qui n'est pas réaliste la plupart du temps (Godbole et al., 2013). Par conséquent, dans le cas plus couramment rencontré d'une perturbation totale f variant dans le temps, la qualité de l'estimation fournie par l'observateur (4.64) est insuffisante (Madoński et al., 2015). Afin d'améliorer l'efficacité de l'observateur, il est possible d'augmenter son ordre et ainsi concevoir un observateur d'état étendu d'ordre supérieur (Godbole et al., 2013; Madonski et al., 2013; Madoński et al., 2015). L'augmentation du nombre d'états étendus i permet en effet de reconstruire efficacement une fonction f variant dans le temps. Cet observateur d'état étendu d'ordre supérieur a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + L_1(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + L_2(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) + L_{n-1}(y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) + L_n(y(t) - \hat{x}_1(t)) + b_0 u(t), \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = \hat{x}_{n+2}(t) + L_{n+1}(y(t) - \hat{x}_1(t)) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n+i}(t) = L_{n+i}(y(t) - \hat{x}_1(t)). \end{cases} \quad (4.68)$$

L'ordre de l'observateur (4.68) est $n + i$. Il permet d'estimer à la fois le vecteur d'état $X(t)$ du système (4.58) et la perturbation totale f correspondant à l'état étendu $x_{n+1}(t)$. Cette perturbation totale f pourra ainsi être rejetée dans le processus de commande, comme c'est le cas de l'ADRC présenté dans la section suivante.

4.8.2/ ACTIVE DISTURBANCE REJECTION CONTROL (ADRC)

L'ADRC est une méthode de commande robuste introduite par (Han, 1994) qui fonctionne sur le principe du rejet actif de perturbations. L'idée de cette approche est d'étendre le vecteur d'état $X(t) \in \mathbb{R}^n$ du modèle du système avec un état supplémentaire $x_{n+1}(t)$ qu'on a appelé précédemment la perturbation totale. Elle regroupe toutes les quantités non modélisées, par choix ou par méconnaissance. Cette perturbation totale est alors estimée par un observateur d'état étendu (voir section précédente) et utilisée dans le signal de commande comme l'indique la structure de l'ADRC présentée à la figure 4.3.

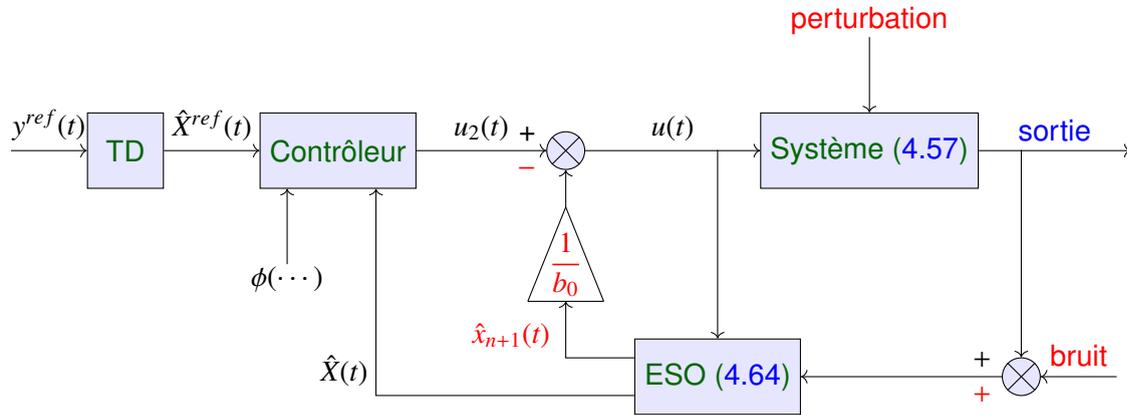


FIGURE 4.3 – Structure de l'ADRC

Avec cette structure, tous les effets négatifs liés aux incertitudes de modélisation regroupées dans la perturbation totale $x_{n+1}(t)$ sont compensés en temps réel par la commande

$$u(t) = -\frac{1}{b_0} \hat{x}_{n+1}(t) + u_2(t),$$

où u_2 est la sortie du contrôleur représenté sur la figure 4.3. La dynamique du système (4.61) commandé par u devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) - \hat{x}_{n+1}(t) + b_0 u_2(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = h(X(t), d(t), t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (4.69)$$

Si l'observation de la perturbation totale $x_{n+1}(t)$ est de bonne qualité, on a $x_{n+1}(t) - \hat{x}_{n+1}(t) \approx 0$ et u_2 doit alors commander un système qui est devenu une simple chaîne d'intégrateurs. Par conséquent, il n'est plus indispensable d'avoir une description analytique précise du

système physique pour le commander. Cette propriété a fait le succès de l'ADRC dans les applications pour lesquelles la connaissance complète du système physique n'est pas disponible et qui nécessitent malgré cela une commande robuste (Zhiqiang Gao et al., 2001; Gao, 2006; Guo et al., 2016; Sira-Ramírez et al., 2017). L'inconvénient majeur de l'ADRC est que la structure du système commandé par u_2 est complètement figée (chaîne d'intégrateurs). La synthèse de u_2 dans l'ADRC obéit à une logique imposée particulière. Soit $y^{ref}(t) \in \mathbb{R}$ la consigne temporelle qu'on impose à la sortie $y(t) = x(t)$. L'ADRC impose que $y(t) - y^{ref}(t)$ converge vers 0 de façon stable en suivant une dynamique imposée. Pour cela, il convient de spécifier une fonction particulière notée $\phi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $\phi(0, \dots, 0) = 0$. Si une poursuite linéaire de y^{ref} est souhaitée, la fonction $\phi(\cdot)$ sera linéaire et elle aura la forme suivante :

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t).$$

Dans ce cas, le contrôleur va faire en sorte que l'erreur dynamique de suivi de $y^{ref}(t) \in \mathbb{R}$ suive une loi linéaire (premier ordre, deuxième ordre, etc.) qui va dépendre du choix des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. La structure du contrôleur ADRC impose en plus de déterminer la référence vectorielle $X^{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ qui est composée de $y^{ref}(t)$ puis de ses dérivées successives. Cette référence vectorielle de l'état $X(t)$ est établie en ligne à partir du signal $y^{ref}(t)$ en utilisant un système dynamique appelé en anglais un "Tracking Differentiator" (TD). Ce dernier reconstruit une estimation $\hat{X}^{ref}(t)$ de $X^{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ (cf. le schéma de la figure 4.3).

Le TD permet d'une part de minimiser l'influence du bruit éventuellement présent dans $y^{ref}(t)$ lorsqu'on le dérive et, d'autre part, de régler le compromis entre rapidité et dépassement de $X^{ref}(t)$ lors de son estimation. La commande u_2 est ensuite définie à l'aide de $\phi(\dots)$, de \hat{X} donné par l'ESO et de l'estimation $\hat{X}^{ref}(t)$ donnée par le TD via une structure mathématique qui ne sera pas explicitée ici.

Les systèmes micromécatroniques étudiés dans cette thèse rentrent dans le cadre des systèmes dont la pleine connaissance n'est pas accessible car leur modélisation fait l'objet de nombreuses approximations qui ont été rappelées dans la conclusion du précédent chapitre. Par ailleurs, il n'est pas rare que le comportement des systèmes micromécatroniques varient dans le temps de manière inconnue car les variables environnementales ne sont jamais parfaitement maîtrisées.

Pour ces raisons, l'utilisation de la méthode ADRC a été plébiscitée et adaptée au cadre de la génération métrologique des faibles forces. Cette adaptation a conduit à généraliser le formalisme de l'ADRC pour ne pas figer la structure du système commandé par u_2 . Ceci permet d'éviter le recours à un TD et simplifie grandement la synthèse de u_2 en restant notamment compatible avec les contrôleurs linéaires déjà existants.

4.9/ CONCLUSION

Ce chapitre donne une vision d'ensemble du problème d'observation en présentant les critères d'observabilité et les méthodes de synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes linéaires et non linéaires. Cet état de l'art ne se veut cependant pas exhaustif tant la richesse des résultats produits dans la littérature est conséquente.

L'accent a surtout été placé sur les thématiques liées à la thèse, à savoir le caractère inconnu et incertain des systèmes micromécatroniques et la dimension métrologique de

la génération et de la mesure des faibles forces. La première thématique a été adressée par la présentation de deux concepts fondamentaux, à savoir l'observateur d'état étendu (ESO) et l'ADRC, qui seront utilisés et étendus dans le prochain chapitre. La seconde thématique a été traitée par la présentation des approches d'observation par intervalles qui seront développées dans le chapitre 8.

SYNTHÈSE DU GELESO POUR L'OBSERVATION ET LA COMMANDE D'UN SYSTÈME SISO INCERTAIN

Sommaire

5.1 Introduction	80
5.2 Principe de l'approche proposée	81
5.2.1 Problématique d'estimation d'état des systèmes inconnus	81
5.2.2 Représentation équivalente d'état	82
5.3 Observateur linéaire d'état étendu générique "GeLESO"	88
5.3.1 Etapes de synthèse du GeLESO standard	89
5.3.2 Paramétrisation du GeLESO	91
5.3.3 Synthèse du GeLESO d'ordre supérieur	91
5.3.4 Convergence de l'observateur GeLESO	95
5.3.5 Influence de l'ordre de l'observateur GeLESO sur l'erreur d'estimation	98
5.3.6 Commande VIRCO	105
5.4 Conclusion	107

5.1/ INTRODUCTION

La phase d'observation de l'état d'un système dynamique est une étape importante qui peut être utilisée lors de la synthèse d'une loi commande. L'observation est un domaine de recherche actif depuis des décennies. Dans le chapitre précédent, nous avons cité quelques travaux de recherche sur l'observation d'état des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.

Dans ce chapitre nous allons traiter cette problématique d'observation pour une classe spécifique de systèmes SISO incertains non linéaires, variants dans le temps et observables (Chen et al., 2016). Ces systèmes sont affectés par des perturbations et des incertitudes inconnues ainsi que par des dynamiques partiellement, voir totalement non modélisées. Dans ce dernier cas, le système devient un système complètement inconnu qu'on cherche néanmoins à observer et à commander.

A titre d'exemple, on retrouve dans cette classe de systèmes les systèmes micromécatroniques qui représentent des systèmes miniaturisés utilisés dans différentes applications : micro/nano manipulation, micro/nano-assemblage et plus globalement micro/nanorobotique, ... De tels systèmes présentent plusieurs défis/verrous en termes de modélisation, identification, conception, observation et commande. Ces défis concernent, entre autres les incertitudes dans la structure et les paramètres du modèle, les fortes non-linéarités, les capteurs appropriés parfois limités pour effectuer une commande par retour d'état en temps réel ou une identification en ligne et une grande sensibilité à l'environnement (température, humidité, perturbations, vibrations...). De ce fait, ces systèmes interagissent avec leur environnement d'une manière très incertaine, ce qui peut facilement mener vers des modèles fortement voire, dans des cas extrêmes, totalement inconnus. Dans ce qui suit, nous allons volontairement nous placer dans ce contexte extrême, tout en exigeant que l'approche développée permette de prendre en compte la connaissance qu'un modèle linéaire du système tel que celui développé dans le chapitre 2, et ce même si ce dernier est très partiel ou incomplet. A titre d'exemple, l'approche devra permettre de pouvoir prendre en compte le cas de figure où certains paramètres du modèle sont mal connus, voire inconnus, car difficilement identifiables ou mesurables.

Nous allons présenter dans la section 5.2 le principe de l'approche proposée pour l'observation d'état d'un système inconnu. Dans la section 5.3, nous détaillerons la nouvelle structure de l'observateur proposé.

5.2/ PRINCIPE DE L'APPROCHE PROPOSÉE POUR L'ESTIMATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES INCONNUS

5.2.1/ PROBLÉMATIQUE D'ESTIMATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES INCONNUS

Dans ce chapitre, nous allons aborder la problématique d'observation d'état des systèmes inconnus en se basant sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5.2.1. *Les systèmes inconnus étudiés sont non linéaires et sont affectés par des perturbations variants dans le temps. Leur dynamique entrée-sortie peut être décrite par une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) d'ordre $n > 0$ définie par :*

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), U'(t), t) \quad (5.1)$$

et qui respecte les conditions suivantes :

- L'ordre n du système est inconnu ;
- La fonction f est une fonction inconnue non linéaire et variant dans le temps, dont on suppose l'existence ;
- La sortie scalaire $y(t) \in \mathbb{R}$ est mesurable à l'aide d'un capteur (éventuellement bruité). Elle représente une des entrées de l'observateur. Ses n dérivées successives sont supposées définies, mais sont inconnues ;
- L'entrée scalaire $u(t) \in \mathbb{R}$ est connue et continue par morceaux. Elle représente la sortie du contrôleur et la deuxième entrée de l'observateur.

- Les entrées de perturbation affectant le système sont représentées par $U'(t) \in \mathbb{R}^\delta$ qui est une fonction du temps multidimensionnelle et continue par morceaux. Elle est supposée inconnue et son ordre δ est aussi supposé inconnu. Ces entrées de perturbations peuvent affecter la dynamique du système de n'importe quelle manière.

Remarque 5.2.1. Pour alléger les notations, la dépendance au temps t sera supprimée des équations, par exemple, $x(t)$ sera noté x .

Hypothèse 5.2.2. Le vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^n$ du système inconnu (5.1) est défini de la manière suivante :

$$X = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(n-1)}]^\top. \quad (5.2)$$

Hypothèse 5.2.3. Les informations d'intérêt nécessaires pour la mise en œuvre d'une loi de commande pour le système inconnu sont la sortie y et ses $p - 1$ premières dérivées $\dot{y}, \dots, y^{(p-1)}$, avec $p > 0$. Ces p composantes sont regroupées dans un vecteur à observer qui est défini par :

$$X = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(p-1)}]^\top \in \mathbb{R}^p. \quad (5.3)$$

Par exemple, supposons que y soit le déplacement d'un point lié au système qu'on veut contrôler. Si on choisit $p = 2$, on suppose alors que la connaissance de la position et de la vitesse de ce point sont explicitement nécessaires pour contrôler le système. La raison d'un tel choix peut être par exemple due au fait qu'on souhaite avoir une dynamique de suivie d'une trajectoire de référence qui soit du deuxième ordre, ce qui impose nécessairement d'observer la vitesse du point.

On verra plus loin, que quel que soit le choix de p , les informations d'intérêt correspondantes sont certes nécessaires, mais non suffisantes pour réaliser l'observation et la commande du système inconnu. Par conséquent, il faudra leur en adjoindre une autre qui sera définie plus loin.

D'après ces hypothèses, p peut être choisi supérieur, égal ou inférieur à la valeur inconnue n . Observer X conduit donc à trois types d'observateurs :

- Si $p < n$, alors l'observateur est un observateur d'état d'ordre réduit de l'état X .
- Si $p = n$, alors l'observateur est un observateur d'état d'ordre plein.
- Si $p > n$ alors

$$X = [\mathcal{X}^\top y^{(n)} \ \dots \ y^{(p-1)}]^\top. \quad (5.4)$$

Dans ce cas, les n composantes de l'état X et les $p - n$ dérivées successives supplémentaires de la sortie y seront observées.

5.2.2/ REPRÉSENTATION ÉQUIVALENTE D'ÉTAT

La représentation (5.1) du système étant inconnue, il n'est pas possible de mettre en place une démarche d'observation d'état directement à partir de celle-ci. Pour le faire, nous allons devoir passer par une étape intermédiaire qui va consister à définir une représentation équivalente sous la forme d'une représentation d'état dans laquelle certains paramètres sont connus. Pour cela, nous commençons par introduire arbitrairement p coefficients $a_i \in \mathbb{R}$ et un scalaire $b \neq 0$ qui sont définis *a priori*. Ces $p + 1$ valeurs sont les paramètres connus.

D'après (5.1) :

$$y^{(n)} - f(y, \dots, y^{(n-1)}, u, U', t) = 0. \quad (5.5)$$

Cette représentation de la dynamique du système inconnu peut aussi s'écrire :

$$y^{(n)} - f(y, \dots, y^{(n-1)}, u, U', t) - M + M = 0 \quad (5.6)$$

quel que soit $M \in \mathbb{R}$. Choisissons d'associer à M une dynamique linéaire d'ordre p induite par les p coefficients a_i et le scalaire b :

$$M \triangleq y^{(p)} - (a_1 y + \dots + a_p y^{(p-1)} + bu). \quad (5.7)$$

Dans (5.7), Si on affecte à M la valeur zéro, ce terme va représenter une **dynamique cible** intermédiaire qu'on souhaitera atteindre pendant une première phase de synthèse du contrôleur. Cette synthèse sera détaillée à la fin du chapitre. Par ailleurs, la représentation $M = 0$ peut aussi représenter une modélisation linéaire imparfaite ou partielle du système non linéaire autour d'un point de fonctionnement. Si certains paramètres a_i dans cette modélisation ne sont pas connus (car non mesurables ou non identifiables), leurs valeurs peuvent être prises *a priori* dans ce cadre formel.

L'écart :

$$y^{(n)} - f(y, \dots, y^{(n-1)}, u, U', t) - M$$

qui est présent dans (5.6) représente la différence entre la dynamique du système inconnu et la dynamique cible. Cette différence va être explicitement matérialisée par un nouveau terme $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, défini par :

$$\mathcal{C} \triangleq -\frac{1}{b} [y^{(n)} - f(y, \dots, y^{(n-1)}, u, U', t) - M]. \quad (5.8)$$

L'introduction du coefficient $-\frac{1}{b}$ dans (5.8) entraîne que \mathcal{C} est proportionnel à la différence entre la dynamique du système inconnu et la dynamique cible. Il va également entraîner, comme nous le verrons juste après, que \mathcal{C} est en fait homogène à une entrée pour la dynamique cible. En remplaçant (5.8) dans (5.6), on obtient :

$$-b\mathcal{C} + M = 0$$

qui devient en remplaçant M par son expression (5.7) :

$$y^{(p)} = a_1 y + \dots + a_p y^{(p-1)} + bu + b\mathcal{C}. \quad (5.9)$$

Le terme \mathcal{C} va être appelé par la suite **entrée virtuelle**. Il représente une entrée exogène par rapport au modèle $M = 0$. Cette entrée ne correspond à aucun signal physique. Elle n'est pas directement mesurable. Elle est additive sur u et est induite par la différence entre la dynamique cible et la dynamique du système inconnu. Notons qu'en utilisant l'équation (5.5), l'équation (5.8) peut être simplifiée en :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\frac{1}{b} [-M] \\ &= -\frac{1}{b} [-y^{(p)} + a_1 y + \dots + a_p y^{(p-1)} + bu]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

D'après ce qui précède, l'ordre p de la dynamique cible peut être choisi supérieur, égal ou inférieur à l'ordre n du système inconnu. De ce fait :

- Si $p \leq n$, les fonctions temporelles inconnues $y, \dot{y}, \dots, y^{(p)}$ dans (5.10) sont définies mathématiquement à partir de la dynamique induite par (5.1).
- Si $p > n$, la fonction non linéaire f doit être en plus $(p - n - 1)$ -différentiable. Dans ce cas, $y, \dots, y^{(n)}$ sont définies par (5.1) et les dérivées successives supplémentaires $y^{(n+1)}, \dots, y^{(p)}$ sont définies mathématiquement en dérivant (5.1) $p - n - 1$ fois, ce qui donne :

$$y^{(p)} = \frac{d^{p-n-1}}{dt^{p-n-1}} f(y, \dots, y^{(n-1)}, u, U', t). \quad (5.11)$$

Les deux Équations Différentielles Ordinaires (5.1) et (5.9) sont mathématiquement équivalentes. Elles partagent nécessairement les mêmes conditions initiales sur les p premières composantes $y(t_0), \dots, y^{(p-1)}(t_0)$.

De ce fait, l'EDO linéaire (5.9) d'ordre p a le même comportement entrée-sortie que l'EDO non linéaire inconnue d'ordre n (5.1). D'un point de vue structurel, le système dynamique non linéaire et inconnu (5.1) a été remplacé par une représentation équivalente (5.9) qui est linéaire en paramètre. (5.9) dépend maintenant de p coefficients connus a_i , d'un coefficient connu b et d'une entrée virtuelle inconnue \mathcal{C} . Cette entrée virtuelle a une dynamique non linéaire donnée par (5.10). Cette dynamique est non linéaire car le comportement de y et de ses dérivées est non linéaire.

En introduisant le vecteur d'état (5.3) qu'on souhaite observer, la dynamique entrée-sortie équivalente (5.9) peut être écrite comme une représentation d'état sous forme compagnon :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu + B\mathcal{C}, \\ y = CX \end{cases} \quad (5.12)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{p-1} & a_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (5.13)$$

Dans (5.12), le terme additif $B\mathcal{C}$ est ajouté à l'expression linéaire $AX + Bu$ pour obtenir la vraie dérivée de l'état \dot{X} , et donc la vraie dynamique de l'état X associé au système non linéaire (5.1). $B\mathcal{C}$ rassemble toutes les différences entre la dynamique cible et la dynamique du système inconnu (5.1). Vu la structure du système (5.12), \mathcal{C} est une entrée virtuelle homogène à l'entrée de commande u .

Dans ce qui suit, nous appellerons **modèle cible**, la dynamique du modèle linéaire $M = 0$ qui ne comporte pas l'entrée virtuelle \mathcal{C} . Si une approche par modèle de connaissance est privilégiée, ce modèle cible peut correspondre à une modélisation linéaire partielle du système non linéaire à l'aide de paramètres connus ou pas. Les paramètres a_i peuvent alors être par exemple des paramètres identifiés qui vont comporter une erreur par rapport aux grandeurs physiques auxquelles il se rapportent. Si des paramètres a_i sont inconnus car non identifiables ou non mesurables, leurs valeurs sont alors prises *a priori*. Si aucun modèle de connaissance n'est disponible, l'ensemble des paramètres a_i et b est pris *a priori*. La dynamique du modèle cible $M = 0$ fournit une évolution d'état approximative X' qui peut être très différente de X :

$$\begin{cases} \dot{X}' = AX' + Bu, \\ y' = CX'. \end{cases} \quad (5.14)$$

Exemple 1 :

Nous allons appliquer l'approche proposée sur un système complexe inconnu, non linéaire et variable dans le temps, avec des perturbations additives et multiplicatives inconnues. Sa dynamique entrée-sortie est définie par la structure différentielle suivante qui est supposée inconnue :

$$y^{(4)} = \alpha y^{(3)} + \beta \ddot{y} + \frac{\beta}{2} \operatorname{sgn}(y) \operatorname{arctanh}(\dot{y}^2) y + d_1 - 3\alpha \arccos y - 0.01 \operatorname{arctan}(e^y) \sin(0.1t) + d_2 u. \quad (5.15)$$

Pour effectuer la simulation, les paramètres inconnus α et β sont fixés à : $\alpha = -0.1$ et $\beta = -5$.

Les perturbations inconnues variant dans le temps $U'(t)$ sont :

$$U'(t) = [d_1 \ d_2]^T = [0.1 \sin t \ e^{-0.005t}]^T. \quad (5.16)$$

L'entrée de commande $u(t)$ est considérée comme une entrée échelon d'amplitude 0,005 déclenchée à l'instant $t = 20$ s. Il faut également noter que la perturbation d_2 modifie l'entrée de commande appliquée u d'une manière multiplicative. L'entrée perturbée $d_2 u$ est représentée en rouge dans la figure 5.1.

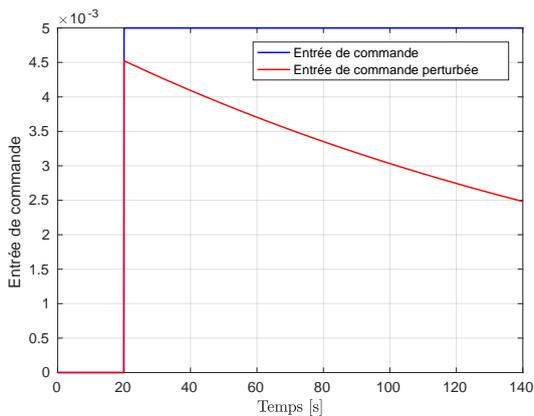


FIGURE 5.1 – Évolution de l'entrée de commande

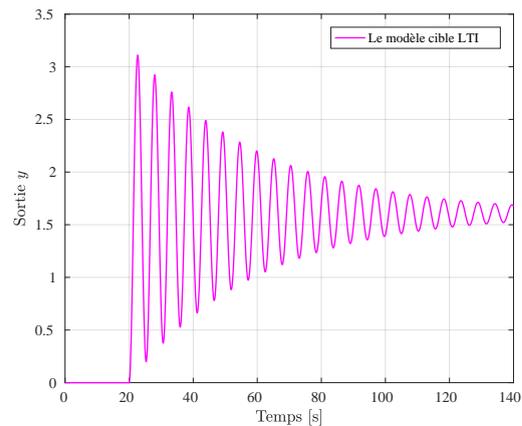


FIGURE 5.2 – Évolution de la sortie du modèle cible LTI

En plus des fonctions non linéaires appliquées sur y et ses dérivés, la sortie y est également multipliée par une fonction de \dot{y} ainsi que, dans un autre terme non linéaire, par une fonction sinusoïdale qui apporte un comportement variable dans le temps dans l'EDO. La sortie du système non linéaire (5.15) est illustrée dans la figure 5.4. Du fait des perturbations, y est non nulle pendant les 20 premières secondes alors que la commande u est nulle sur cet intervalle de temps.

Si on suppose que les composantes utiles pour le contrôle du système (5.15) sont y et \dot{y} , alors p , l'ordre de modèle cible est égal à 2. Les matrices d'état A et de commande B ont la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

où les paramètres a_i et b peuvent être choisis arbitrairement. Les valeurs arbitraires choisies sont ici : $a_1 = -1.40$, $a_2 = -0.05$, $b = 450$.

La sortie $y' = CX'$ du modèle cible $\dot{X}' = AX' + Bu$, avec les matrices A et B définies dans (5.17), est illustrée dans la figure 5.2. On peut noter que y' est nulle pendant les 20 premières secondes.

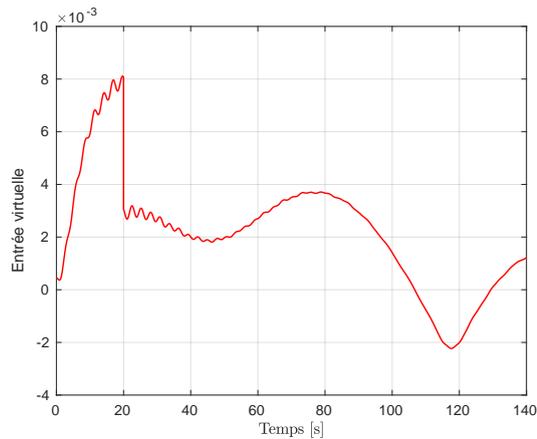


FIGURE 5.3 – Évolution de l'entrée virtuelle

On peut remarquer que le modèle cible choisi est stable et peu amorti. Sa réponse temporelle est très différente de celle du système non linéaire qui est illustrée en noir dans la figure 5.4. L'évolution de l'entrée virtuelle calculée à partir de l'équation (5.10) est illustrée dans la figure 5.3. Cette évolution est non linéaire, temporellement complexe et non nulle pendant les 20 premières secondes. La sortie du même modèle linéaire que le modèle cible lorsqu'il est en plus excité avec l'entrée virtuelle \mathcal{C} est affichée en cyan dans la figure 5.4. Il sera nommé LTI + \mathcal{C} . D'après la figure 5.4, il est clair que la dynamique en

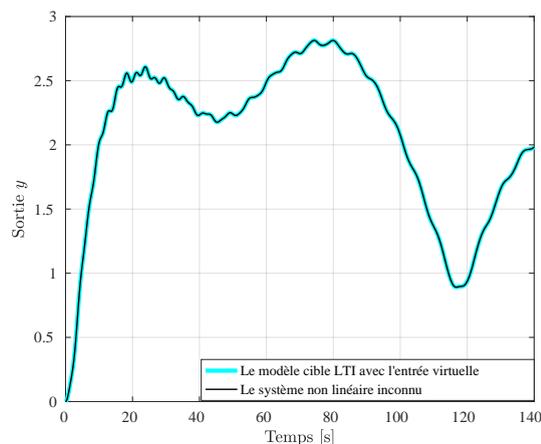


FIGURE 5.4 – Évolution de la sortie du système non linéaire inconnu et du système LTI + \mathcal{C}

noir du système non linéaire (5.15) est la même que la dynamique en cyan du modèle cible couplé avec l'entrée virtuelle, c'est-à-dire, LTI + \mathcal{C} (5.12). Donc pour estimer l'état du système inconnu, il suffit d'estimer l'état du système linéaire défini *a priori* ainsi que l'entrée virtuelle qui l'excite.

Résumé du principe de l'approche proposée

Dans l'approche proposée, le système non linéaire inconnu (5.1) d'ordre n (également inconnu) est représenté de manière équivalente par un système linéaire d'ordre p avec une représentation externe particulière qui est définie par l'équation (5.9). Cette représentation externe dépend de $p + 1$ paramètres qui peuvent être choisis arbitrairement lorsque aucune information est fournie. Elle dépend également d'une entrée exogène, non matérialisée physiquement et inconnue. Cette entrée \mathcal{C} est appelée *entrée virtuelle*.

Dans la nouvelle représentation d'état équivalente (5.12) du système inconnu, l'entrée virtuelle rassemble toutes les non-linéarités négligées, les dynamiques non modélisées, les incertitudes des paramètres et les perturbations externes, de telle sorte que la dynamique entrée-sortie du système linéaire couplé avec l'entrée virtuelle corresponde à celle du système non linéaire. Elle est induite par la différence entre une dynamique cible choisie et la dynamique du système inconnu.

Comme nous allons le voir ci-dessous, une telle entrée peut-être considérée comme une alternative à la notion de perturbation totale (total uncertainty) définie dans le cadre de l'ADRC. En définissant les p composantes de l'état X de la manière suivante :

$$X = [x_1 \cdots x_p]^T$$

et en utilisant (5.13), l'équation (5.12) peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p + b u + b \mathcal{C}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5.18)$$

Nous rappelons que pour les systèmes SISO d'ordre p , la formulation classique de l'ADRC est donnée par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = f(X,d,t) + b(X,t)u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (5.19)$$

dans laquelle d représente une perturbation externe inconnue. Les termes $f(X,d,t) \in \mathbb{R}$ et $b(X,t) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions non linéaires variant dans le temps et éventuellement inconnues avec $b(X,t) \neq 0$. Si on choisit $b_0 \neq 0$ comme estimation de $b(X,t)$, et si la perturbation totale, qui regroupe les incertitudes du modèle et d , est définie comme un état étendu inconnu x_{p+1} :

$$x_{p+1} \triangleq f(X,d,t) + (b(X,t) - b_0)u \quad (5.20)$$

alors l'équation (5.19) devient équivalente à

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = x_{p+1} + b_0 u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5.21)$$

Dans le cas de l'approche qui vient d'être développée dans ce chapitre, si on impose que les p coefficients a_i ont des valeurs nulles et qu'on pose :

$$x_{p+1} \triangleq b\mathcal{C} \quad (5.22)$$

l'équation (5.18) est alors équivalente à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = bu + x_{p+1}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5.23)$$

On remarque que si on prend $b = b_0$ dans (5.23), on retombe sur la forme de l'ADRC définie par (5.21). Donc l'ADRC est un cas particulier de l'approche qui vient d'être développée : il correspond à un choix de coefficients a_i nuls.

5.3/ OBSERVATEUR LINÉAIRE D'ÉTAT ÉTENDU GÉNÉRIQUE "GELESO"

L'observation du système non linéaire inconnu est possible à condition de pouvoir correctement estimer l'entrée virtuelle \mathcal{C} . Cette estimation rentre dans le cadre de l'estimation d'état d'un système linéaire connu et d'une entrée inconnue appliquée à ce système. Une telle estimation peut notamment être réalisée en utilisant un observateur Linéaire ESO standard "SLESO" (Han, 1995), un LESO d'ordre supérieur (Madoński et al., 2015), un observateur proportionnel intégral (observateur GPI) (Sira-Ramírez et al., 2017) ou l'observateur linéaire d'état étendu générique "GeLESO" proposé dans (Amokrane et al., 2019b). Ce dernier est présenté en détail dans cette section.

Pour observer l'état du système non linéaire inconnu (5.1), il suffit d'observer à la fois l'état du modèle linéaire choisi et l'entrée virtuelle inconnue \mathcal{C} qui l'excite.

On rappelle qu'avec la définition (5.3) de X , la dynamique entrée-sortie équivalente (5.9) peut être écrite comme une représentation d'état sous une forme compagnon (5.12).

On a vu dans la section précédente qu'en définissant $X = [x_1 \cdots x_p]^T$, et en utilisant (5.13), l'équation (5.12) peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = a_1x_1 + \cdots + a_px_p + bu + b\mathcal{C}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5.24)$$

L'observation du vecteur d'état $X = [x_1 \cdots x_p]^T$ revient à effectuer l'observation des p premières composantes de l'état du système non linéaire inconnu (5.1). Pour avoir une

estimation de ces dernières, il convient d'avoir une estimation de l'entrée virtuelle. L'observateur proposé, appelé GeLESO, se base sur la définition d'un état étendu

$$X_e = [x_1, \dots, x_{p+1}]^T \quad (5.25)$$

incluant une information supplémentaire x_{p+1} qui permet à la fin de déduire l'estimation de l'entrée virtuelle à partir de l'estimation de la composante x_{p+1} . Dans ce cas, l'observateur proposé est d'ordre $p + 1$, c'est le GeLESO dit **standard**. Le GeLESO dit **d'ordre supérieur** permet également d'estimer \mathcal{C} ainsi que les $i - 1$ dérivées successives de \mathcal{C} , en définissant i états étendus, afin d'améliorer l'efficacité de l'estimation de $X \in \mathbb{R}^p$. Dans ce cas, l'observateur proposé est d'ordre $p + i$.

5.3.1/ ETAPES DE SYNTHÈSE DU GELESO STANDARD

Remarque 5.3.1. *Signification des notations SLESO et GeLESO standard.*

- On appelle SLESO l'observateur d'état étendu linéaire utilisé en ADRC pour l'estimation de la perturbation totale. Si le système est d'ordre n alors l'observateur est d'ordre $n + 1$.
- On appelle GeLESO standard l'observateur proposé qui a pour but d'estimer l'état du système et l'entrée virtuelle inconnue. Son ordre est égal à $p + 1$, avec p qui représente l'ordre du système cible choisi.

Le GeLESO standard utilise la représentation d'état équivalente définie par (5.24). L'idée de base pour ajouter l'estimation de l'entrée virtuelle dans le processus d'observation est de définir un état étendu x_{p+1} construit à partir de la dernière composante de l'état dans (5.24) :

$$x_{p+1} \triangleq a_1 x_1 + \dots + a_{p-1} x_{p-1} + b \mathcal{C}. \quad (5.26)$$

D'après (5.26), x_{p+1} comprend toutes les composantes de la dynamique de (5.9) à l'exception de $a_p x_p + b u$ (la dernière composante de l'état et l'entrée de commande).

Contrairement aux observateurs cités dans la section précédente (SLESO, observateur GPI, LESO d'ordre supérieur), dans lesquels l'état étendu x_{p+1} représente uniquement la perturbation totale, le GeLESO utilise les informations fournies par $p - 1$ paramètres a_i du modèle cible dans la définition de l'état étendu x_{p+1} . Autrement dit, l'état x_{p+1} inclut non seulement l'entrée virtuelle inconnue \mathcal{C} , mais aussi des informations partielles sur la représentation linéaire équivalente (5.9) du système.

Avec (5.26), (5.24) peut s'écrire comme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = x_{p+1} + a_p x_p + b u, \\ \dot{x}_{p+1} = a_1 x_2 + a_2 x_3 + \dots + a_{p-1} x_p + b \mathcal{C}, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (5.27)$$

où x_1, \dots, x_{p+1} sont les $p + 1$ composantes de l'état étendu $X_e = [x_1, \dots, x_{p+1}]^T$. L'entrée virtuelle inconnue \mathcal{C} est déduite de x_{p+1} dans (5.26) par :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{b}(x_{p+1} - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_{p-1} x_{p-1}). \quad (5.28)$$

La représentation d'état matricielle de (5.27) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_e = A_e X_e + B_e u + \mathcal{B}_e \hat{\mathcal{C}} \\ y = C_e X_e \end{cases} \quad (5.29)$$

avec

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_p & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C_e = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (5.30)$$

La paire (A_e, C_e) dans (5.30) est observable grâce à la forme compagnon de la matrice A_e . Le GeLESO standard d'ordre $p + 1$ utilisé pour l'observation du système (5.27) est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_1(y - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + L_2(y - z_1), \\ \vdots \\ \dot{z}_{p-1} = z_p + L_{p-1}(y - z_1), \\ \dot{z}_p = z_{p+1} + a_p z_p + L_p(y - z_1) + bu, \\ \dot{z}_{p+1} = a_1 z_2 + \dots + a_{p-1} z_p + L_{p+1}(y - z_1), \end{cases} \quad (5.31)$$

avec z_1, \dots, z_{p+1} les estimations des états x_1, \dots, x_{p+1} respectivement. Les termes L_1, \dots, L_{p+1} représentent les gains de l'observateur à choisir pour assurer la stabilité de (5.31). Comme l'estimation de l'état étendu x_{p+1} est donnée par l'équation suivante :

$$z_{p+1} = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{p-1} z_{p-1} + b \hat{\mathcal{C}} \quad (5.32)$$

l'estimation de l'entrée virtuelle $\hat{\mathcal{C}}$ est déduite à partir de (5.32) par :

$$\hat{\mathcal{C}} = \frac{1}{b}(z_{p+1} - a_1 z_1 - a_2 z_2 - \dots - a_{p-1} z_{p-1}). \quad (5.33)$$

Dans le cadre des systèmes non linéaires inconnus représentés par (5.1), le GeLESO est capable d'estimer les p premières composantes de l'état du système et l'entrée virtuelle, en se basant sur sa représentation d'état équivalente. Cette représentation nécessite d'introduire de manière *a priori* p coefficients a_i et un coefficient $b \neq 0$.

La dynamique de l'erreur d'estimation est obtenue en soustrayant (5.31) de (5.27). Cette dynamique est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - L_1 e_1, \\ \dot{e}_3 = e_3 - L_2 e_1, \\ \vdots \\ \dot{e}_{p-1} = e_p - L_{p-1} e_1, \\ \dot{e}_p = e_{p+1} + a_p e_p - L_p e_1, \\ \dot{e}_{p+1} = a_1 e_2 + \dots + a_{p-1} e_p - L_{p+1} e_1 + b \hat{\mathcal{C}} \end{cases} \quad (5.34)$$

qui peut être mise sous la forme suivante :

$$\dot{E} = (A_e - \mathcal{L}C_e)E + \mathcal{B}_e \hat{\mathcal{C}} \quad (5.35)$$

avec $A_e \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$, $\mathcal{B}_e \in \mathbb{R}^{(p+1) \times 1}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times 1}$, $C_e \in \mathbb{R}^{1 \times (p+1)}$ et $E \in \mathbb{R}^{(p+1) \times 1}$ qui sont définies par :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_p & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_p \\ L_{p+1} \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

5.3.2/ PARAMÉTRISATION DU GELESO

Pour assurer la stabilité de la dynamique d'erreur d'observation (5.35), le vecteur de gain \mathcal{L} de l'observateur doit être choisi de telle sorte que la matrice (5.37) soit de Hurwitz :

$$\mathcal{A} = A_e - \mathcal{L}C_e \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)} \quad (5.37)$$

Cette condition peut être obtenue en utilisant différentes techniques, comme la méthode de placement de pôles, des méthodes linéaires quadratiques ou toute autre méthode d'optimisation à condition que la paire (A_e, C_e) soit observable.

Afin de faciliter la paramétrisation de l'observateur proposé, un seul paramètre $\omega_o > 0$ est utilisé, comme dans (Gao, 2003; Zheng et al., 2007) où les composantes de la matrice de gains \mathcal{L} sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\top &= [L_1, L_2, \dots, L_{p+1}] \\ &= [\gamma_1 \omega_o, \gamma_2 \omega_o^2, \dots, \gamma_{p+1} \omega_o^{p+1}] \end{aligned} \quad (5.38)$$

avec

$$\gamma_j = \frac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!}, \quad \text{et } j = 1, \dots, p+1. \quad (5.39)$$

Si les p paramètres a_1, \dots, a_p dans la matrice A sont tous mis à zéro comme dans l'ADRC, alors en utilisant la même preuve que celle de (Zheng et al., 2007), on peut facilement montrer que les $p+1$ pôles d'observation sont placés en $-\omega_o$ et que \mathcal{A} est de Hurwitz.

Si les paramètres a_1, \dots, a_p sont choisis différents de zéro, alors les gains \mathcal{L}' qui placent les pôles en $-\omega_o$ sont proches des gains \mathcal{L} donnés par les équation (5.38) et (5.39) à condition que la valeur de ω_o soit choisie suffisamment grande. Cette valeur est donnée dans la preuve du théorème 5.3.2 présentée en annexe A.

5.3.3/ SYNTHÈSE DU GELESO D'ORDRE SUPÉRIEUR

Pour améliorer l'estimation d'une entrée inconnue telle que \mathcal{C} , il est nécessaire de s'intéresser à la représentation de sa dynamique. Le signal \mathcal{C} est alors représenté comme la sortie d'un processus dynamique qui va le générer. Les composantes de l'état manipulé dans ce processus sont constituées de \mathcal{C} et de ses dérivées successives. Cet type d'approche est par exemple utilisé lorsqu'on détermine le filtre formeur d'un signal aléatoire en traitement du signal. Dans ce cas, l'entrée du filtre formeur est un bruit blanc. La prise en compte de l'entrée inconnue et de ses dérivées successives est également utilisée

dans les observateurs GPI et de l'ESO d'ordre supérieur définis les sections 4.7.4 et 4.8.1 du chapitre précédent. Dans ces derniers, les états étendus successifs contiennent les dérivées successives de la perturbation totale.

Dans ce qui suit, nous allons définir un GeLESO d'ordre supérieur, dans lequel les dérivées temporelles successives de l'entrée virtuelle sont prises en compte dans le processus d'observation. Par ailleurs, toutes les informations fournies par les p paramètres a_i seront utilisées pour obtenir l'estimation de la dynamique d'ordre supérieur de \mathcal{C} afin d'enrichir cette représentation dynamique. Pour introduire la construction du GeLESO d'ordre supérieur, nous allons repartir du système (5.27) qui est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = x_{p+1} + a_p x_p + b u, \\ \dot{x}_{p+1} = a_1 x_2 + a_2 x_3 + \dots + a_{p-1} x_p + b \mathcal{C}, \\ y = x_1. \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Précédemment, l'état x_{p+1} a été introduit pour estimer \mathcal{C} . Afin d'améliorer la qualité de l'estimation de l'état et de \mathcal{C} , les dérivées successives de \mathcal{C} doivent maintenant être prises en compte. L'idée clé du GeLESO d'ordre supérieur est d'introduire un état pour chaque dérivée de l'entrée virtuelle à estimer. Ce nouvel état est basé sur la dérivée temporelle de l'état précédent, où toutes les composantes sont conservées, sauf la dernière. Par exemple, pour estimer $\dot{\mathcal{C}}$, la composante étendue x_{p+2} doit être introduite. Dans ce cas, le vecteur d'état étendu X_e devient $X_e = [x_1, \dots, x_{p+2}]^T$.

D'après la formulation de \dot{x}_{p+1} dans (5.40), le nouvel état est défini comme suit :

$$x_{p+2} \triangleq a_1 x_2 + a_2 x_3 + \dots + a_{p-2} x_{p-1} + b \dot{\mathcal{C}} \quad (5.41)$$

où le terme $a_{p-1} x_p$ n'est pas pris en compte. Ainsi, $\dot{\mathcal{C}}$ apparaît maintenant dans x_{p+2} . Il en résulte la dynamique suivante sur x_1, \dots, x_{p+2} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_p = x_{p+1} + a_p x_p + b u, \\ \dot{x}_{p+1} = x_{p+2} + a_{p-1} x_p, \\ \dot{x}_{p+2} = a_1 x_3 + a_2 x_4 + \dots + a_{p-2} x_p + b \ddot{\mathcal{C}}. \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Cette dynamique reste une représentation équivalente du système incertain, mais grâce aux composantes d'état étendues x_{p+1} et x_{p+2} , l'équation (5.42) inclut la dynamique de \mathcal{C} et $\dot{\mathcal{C}}$.

Chaque nouvel état étendu va être défini en réitérant la procédure introduite ci-dessus. Soit $i > 0$ le nombre de composantes étendues dans l'état étendu X_e :

$$X_e = [x_1 \dots x_p \ x_{p+1} \dots x_{p+i}]^T \in \mathbb{R}^{p+i}. \quad (5.43)$$

Pour être mathématiquement correcte, la démarche de définition de chaque composante étendue x_{p+i} et la synthèse du GeLESO d'ordre supérieur nécessite que l'hypothèse suivante soit vérifiée.

Hypothèse 5.3.1. \mathcal{C} est une fonction inconnue définie sur \mathbb{R} , continue et différentiable m fois, où $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \geq i$.

Pour tout $i \leq m$, la définition de chaque composante de l'état étendu (5.43) s'écrit de deux manières différentes en fonction de la valeur de i , c'est-à-dire lorsque $1 \leq i < p$ et lorsque $p \leq i \leq m$.

Si $1 \leq i < p$, c'est-à-dire tant que l'ordre de la dérivée de \mathcal{C} à estimer est inférieur à la taille de X , les états étendus sont définis par :

$$x_{p+k} \triangleq \sum_{j=1}^{p-k} a_j x_{k+j-1} + b \mathcal{C}^{(k-1)}, \quad k = 2, \dots, i-1. \quad (5.44)$$

Si $p \leq i \leq m$, c'est-à-dire lorsque l'ordre de la dérivée de \mathcal{C} à estimer devient supérieur à la taille de X , les états étendus n'incluent que la dérivée précédente de \mathcal{C} . Ils sont définis par :

$$x_{p+i} \triangleq b \mathcal{C}^{(i-1)}. \quad (5.45)$$

D'après (5.44) et (5.45), la représentation complète de la dynamique du système et des états étendus est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-1} = x_p, \\ \dot{x}_p = x_{p+1} + a_p x_p + bu, \\ \dot{x}_{p+1} = x_{p+2} + a_{p-1} x_p, \\ \vdots \\ \dot{x}_{2p-1} = x_{2p} + a_1 x_p, \\ \dot{x}_{2p} = b \mathcal{C}^{(p)}, \\ \vdots \\ \dot{x}_{p+i-1} = b \mathcal{C}^{(i-1)} \\ \dot{x}_{p+i} = b \mathcal{C}^{(i)}, \\ y = x_1. \end{array} \right. \quad (5.46)$$

où les p premières lignes représentent le système original (5.24). Les p lignes suivantes, c'est-à-dire de \dot{x}_{p+1} à \dot{x}_{2p-1} représentent la dynamique des composantes d'état étendues définies par (5.44). Les dernières lignes, c'est-à-dire de \dot{x}_{2p} à \dot{x}_{p+i} représentent la dynamique des états étendus décrits par (5.45).

La représentation d'état matricielle de (5.46) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_e = A_e X_e + B_e u + \mathcal{B}_e \mathcal{C}^{(i)} \\ y = C_e X_e \end{array} \right. \quad (5.47)$$

où les matrices $A_e \in \mathbb{R}^{(p+i) \times (p+i)}$, $B_e \in \mathbb{R}^{(p+i) \times 1}$, $\mathcal{B}_e \in \mathbb{R}^{(p+i) \times 1}$ et $C_e \in \mathbb{R}^{1 \times (p+i)}$ sont respecti-

vement données par :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_p & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p-1} & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

(5.48)

Dans (5.48) la paire (A_e, C_e) est observable grâce à la forme de la matrice A_e , le GeLESO d'ordre supérieur qui estime à la fois l'état du système (5.24), l'entrée virtuelle et ses dérivées successives, est construit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 + L_1(y - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + L_2(y - z_1), \\ \vdots \\ \dot{z}_{p-1} = z_p + L_{p-1}(y - z_1), \\ \dot{z}_p = z_{p+1} + a_p z_p + L_p(y - z_1) + bu, \\ \dot{z}_{p+1} = z_{p+2} + a_{p-1} z_p + L_{p+1}(y - z_1), \\ \vdots \\ \dot{z}_{2p-1} = z_{2p} + a_1 z_p + L_{2p-1}(y - z_1), \\ \dot{z}_{2p} = z_{2p+1} + L_{2p}(y - z_1), \\ \vdots \\ \dot{z}_{p+i-1} = z_{p+i} + L_{p+i-1}(y - z_1), \\ \dot{z}_{p+i} = L_{p+i}(y - z_1), \end{array} \right. \quad (5.49)$$

où z_1, \dots, z_{p+i} sont les $p+i$ composantes de l'état Z de l'observateur et L_1, \dots, L_{p+i} sont les gains de l'observateur regroupés dans un vecteur \mathcal{L} qui est calculé en utilisant (5.38) et (5.39). On remarque que le GeLESO (5.49) a une structure semblable à celle de l'observateur GPI et de l'ESO d'ordre supérieur. Cependant, le GeLESO d'ordre supérieur utilise en plus les informations fournies par les p paramètres a_i du modèle cible dans la définition de l'état étendu x_{p+1} , pour mieux estimer X et \mathcal{C} .

Le GeLESO d'ordre supérieur (5.49) peut être écrit comme suit :

$$\dot{Z} = (A_e - \mathcal{L}C_e)Z + B_e u + \mathcal{L}y \quad (5.50)$$

avec $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{(p+i) \times 1}$ qui est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^T &= [L_1, L_2, \dots, L_{p+i}] \\ &= [\gamma_1 \omega_o, \gamma_2 \omega_o^2, \dots, \gamma_{p+i} \omega_o^{p+i}] \end{aligned} \quad (5.51)$$

et

$$\gamma_j = \frac{(p+i)!}{j!(p+i-j)!}, \quad \text{avec } j = 1, \dots, p+i. \quad (5.52)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est obtenue en soustrayant (5.49) de (5.46). Elle est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 - L_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = e_3 - L_2 e_1, \\ \vdots \\ \dot{e}_{p-1} = e_p - L_{p-1} e_1, \\ \dot{e}_p = e_{p+1} + a_p e_p - L_p e_1, \\ \dot{e}_{p+1} = e_{p+2} + a_{p-1} e_p - L_{p+1} e_1, \\ \vdots \\ \dot{e}_{2p-1} = e_{2p} + a_1 e_p - L_{2p-1} e_1, \\ \dot{e}_{2p} = e_{2p+1} - L_{2p} e_1, \\ \vdots \\ \dot{e}_{p+i-1} = e_{p+i} - L_{p+i-1} e_1, \\ \dot{e}_{p+i} = -L_{p+i} e_1 + b \mathcal{C}^{(i)}, \end{array} \right. \quad (5.53)$$

et peut être mise sous la forme suivante :

$$\dot{E} = (A_e - \mathcal{L}C_e)E + \mathcal{B}_e \mathcal{C}^{(i)} \quad (5.54)$$

avec $E \in \mathbb{R}^{(p+i) \times 1}$ qui est donné par :

$$E = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_{p+1}]^T. \quad (5.55)$$

5.3.4/ CONVERGENCE DE L'OBSERVATEUR GELESO

Dans cette sous-section, nous étudions la convergence du GeLESO d'ordre supérieur. Il est démontré sous quelles conditions la convergence asymptotique de chaque composante E_j de l'erreur d'estimation E est atteinte. Si de telles conditions ne sont pas établies, il est démontré que l'erreur d'estimation est bornée, avec une borne constante donnée (sous des conditions qui dépendent de l'ordre de dérivée de l'entrée virtuelle \mathcal{C}). La vérification de l'hypothèse suivante est nécessaire pour l'obtention des résultats mentionnés ci-dessus.

Hypothèse 5.3.2. $\mathcal{C}^{(i)}$ est bornée par une constante positive β , c'est-à-dire $\forall i \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq i \leq m$, $\exists \beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $|\mathcal{C}^{(i)}| < \beta$.

Les différents cas sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 5.3.1. Sous réserve que les hypothèses 5.3.1 et 5.3.2 soient satisfaites, $\forall p$, ordre du modèle cible LTI choisi, $\forall m$, nombre de fois que l'entrée virtuelle \mathcal{C} est dérivée, $\forall i$, nombre de fois que l'état du système initial (5.24) est étendu, et $\forall j = 1, \dots, p+i$, les implications suivantes sont vérifiées :

©1 : Si $i = m$ et $\mathcal{C}^{(m)} = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| = 0$.

©2 : Si $i = m$ et $\mathcal{C}^{(m)} \neq 0$, alors $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}^+$ de telle sorte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| \leq \alpha_j$.

©3 : si $i < m$ et $\mathcal{C}^{(i)} = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| = 0$.

©4 : si $i < m$, $\forall \mathcal{C}^{(i)} \neq 0$, alors $\exists \zeta_j \in \mathbb{R}^+$ de telle sorte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| \leq \zeta_j$.

Preuve. Voir la section A.1 dans l'annexe A □

Exemple 2 :

Pour illustrer ce théorème, nous allons nous placer dans un cas particulier où la forme de l'entrée virtuelle \mathcal{C} est imposée afin de respecter à chaque fois une des implications précédentes. Pour cela, on va faire en sorte que l'entrée virtuelle \mathcal{C} corresponde à une entrée physique d de perturbation (supposée inconnue) qu'on va pouvoir imposer. Pour mettre en œuvre ce cas particulier, le modèle cible linéaire va correspondre **exactement** à la dynamique du système d'intérêt (5.1) et l'entrée d sera une entrée de perturbation additive sur u . On a alors par construction $\mathcal{C} = d$. On va synthétiser un GeLESO standard d'ordre $p + 1$ qui va permettre d'observer à la fois l'état X du système linéaire et la perturbation additive d qui l'affecte. En appliquant plusieurs types de perturbation, il sera alors possible d'illustrer le théorème pour $i = 1$.

La dynamique du système est définie par l'EDO suivante dont la structure est parfaitement connue et dans laquelle d est inconnue :

$$\ddot{y} = -60y - 2\dot{y} + 2000u + 2000d. \quad (5.56)$$

Elle peut se mettre sous la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -60x_1 - 2x_2 + 2000u + 2000d, \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.57)$$

avec $X = [x_1 \ x_2]^T = [y \ \dot{y}]^T$ qui représente l'état du système. y est la sortie mesurée, u est l'entrée de commande et d est la perturbation considérée comme une entrée inconnue. Les conditions initiales du système (5.57) sont $x_1(0) = -1$ et $x_2(0) = -2$. La représentation (5.57) est similaire à (5.24) avec $\mathcal{C} = d$.

Comme expliqué précédemment, l'idée clé du GeLESO est de définir un état étendu incluant l'entrée de perturbation inconnue, afin de pouvoir l'estimer. L'état étendu est défini comme suit :

$$x_3 = -60x_1 + 2000d \quad (5.58)$$

D'après (5.58), le système (5.57) avec l'état supplémentaire s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + 2000u, \\ \dot{x}_3 = -60x_2 + 2000\dot{d}, \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.59)$$

La dynamique du GeLESO correspondant est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_1 (y - z_1), \\ \dot{z}_2 = -2z_2 + z_3 + 2000u + L_2 (y - z_1), \\ \dot{z}_3 = -60z_2 + L_3 (y - z_1). \end{cases} \quad (5.60)$$

Les gains de l'observateur sont calculés en utilisant (5.38) et (5.39) avec $\omega_o = 20$, donc $\mathcal{L}^T = [60 \ 1200 \ 8000]$. L'entrée de commande u est un échelon d'amplitude 10 à l'instant $t = 2$ s.

Deux tests de simulation ont été réalisés pour deux types de perturbations différentes. Dans le premier test, la perturbation d est un échelon d'amplitude 5 à l'instant $t = 8$ s. Dans le deuxième test, la perturbation d est un signal sinusoïdal d'amplitude 5 et de pulsation 2 rad/s. Les conditions initiales de l'observateur sont toutes prises égales à zéro. Elles sont donc différentes de celles du système. Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures décrites ci-dessous.

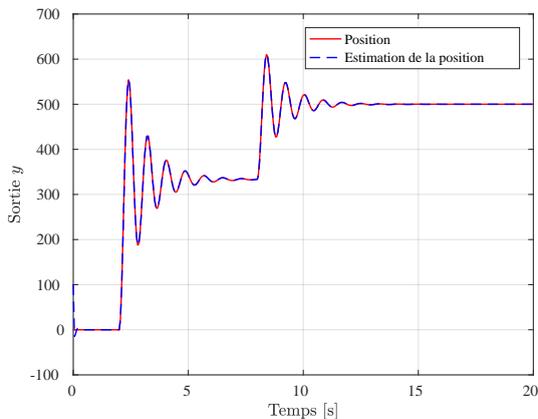


FIGURE 5.5 – Évolution de la sortie $y = x_1$ du système et son estimation (test 1)

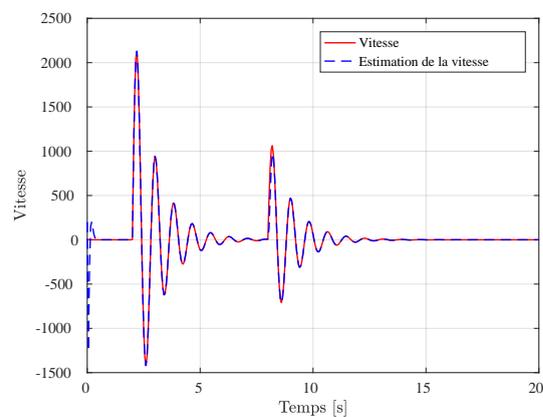


FIGURE 5.6 – Évolution de $\dot{y} = x_2$ et son estimation (test 1)

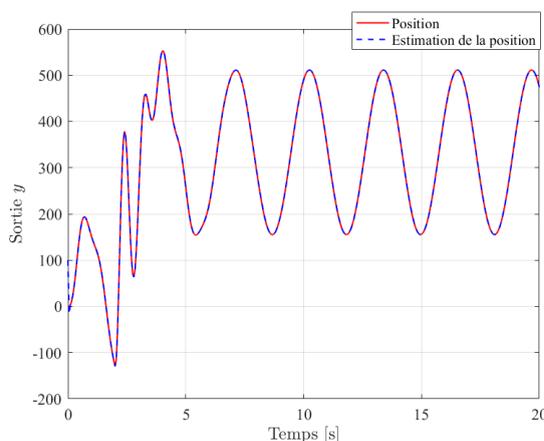


FIGURE 5.7 – Évolution de la sortie $y = x_1$ du système et son estimation (test 2)

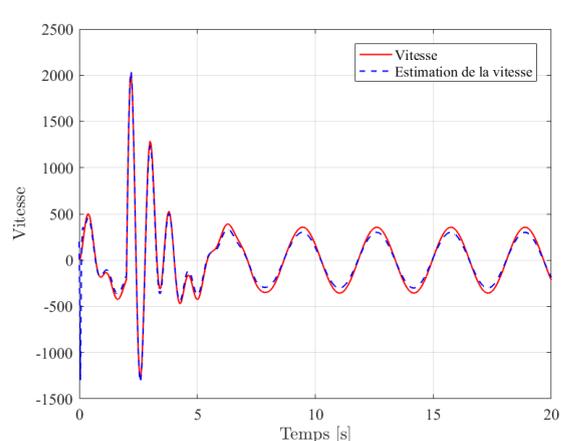


FIGURE 5.8 – Évolution de $\dot{y} = x_2$ et son estimation (test 2)

Les figures 5.5 et 5.6 montrent que le GeLESO offre une bonne estimation de y et de \dot{y} (test 1). Ces figures montrent également que le temps de convergence de cet observateur (qui dépend des valeurs des gains de l'observateur) est ici court.

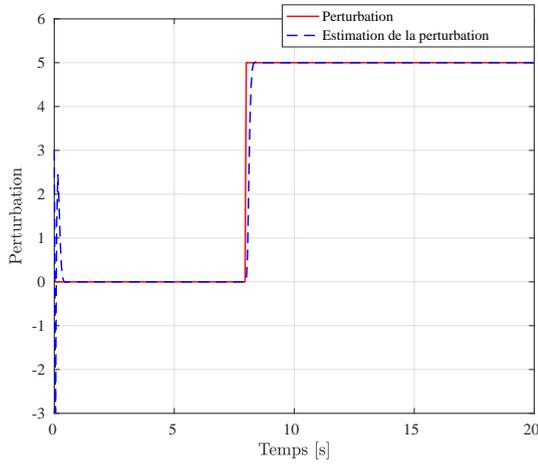


FIGURE 5.9 – Évolution de la perturbation et son estimation

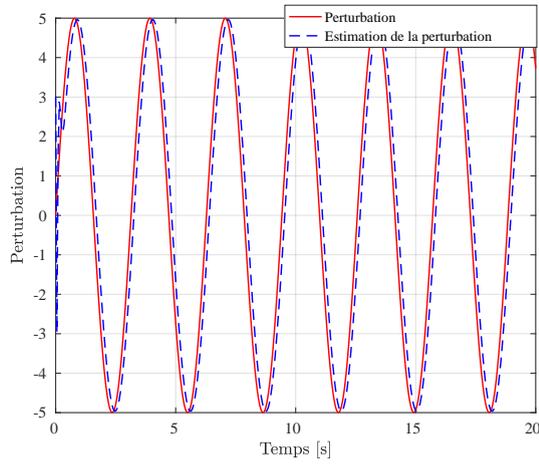


FIGURE 5.10 – Évolution de la perturbation et son estimation

Les figures 5.7 et 5.8 montrent également que le GeLESO offre une bonne estimation de y et \dot{y} (test 2).

Les figures 5.9 et 5.10 illustrent l'évolution de la perturbation pour le test1 (échelon) et pour le test 2 (sinus). Ces figures montrent que dans le test 1, l'estimation de la perturbation converge vers la vraie valeur du régime permanent, ce qui permet de conclure que l'erreur d'estimation est nulle en régime permanent. L'implication C1 est alors vérifiée pour $i = m = 1$.

Dans le test 2 on remarque que le GeLESO estime la perturbation sinusoïdale avec un déphasage, ce qui entraîne que l'erreur d'estimation est bornée. L'implication C4 est alors vérifiée pour $i = 1$ car m est infini et $\mathcal{L}^{(1)}$ n'est pas nulle.

5.3.5/ INFLUENCE DE L'ORDRE DE L'OBSERVATEUR GELESO SUR L'ERREUR D'ESTIMATION

Dans cette section, nous démontrons que, plus l'ordre du GeLESO d'ordre supérieur augmente, plus l'erreur d'estimation E de l'état étendu X_e diminue, sous réserve que l'hypothèse suivante soit vraie.

Hypothèse 5.3.3. Le paramètre ω_o est choisi tel que $\omega_o > \omega_{max}$, avec ω_{max} défini dans (A.28) en annexe A.

Théorème 5.3.2. Sous réserve que l'hypothèse 5.3.3 soit satisfaite, considérons deux GeLESO conçus avec des ordres différents, mais avec le même ω_o . L'observateur d'ordre $p + i$ sera noté $GeLESO|_i$ et celui d'ordre $p + k$ sera noté $GeLESO|_k$, $\forall i, k \in \mathbb{N}^*$ avec $i < k$ et $k < m$.

Notons par $|E_j(t)|_i$ et $|E_j(t)|_k$ l'erreur d'estimation de la composante j associée à $GeLESO|_i$ et $GeLESO|_k$ respectivement, avec $j = 1, \dots, p + i$.

Si les implications C1 ou C3 sont vérifiées, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i = 0. \quad (5.61)$$

Si les implications $\mathbb{C}2$ ou $\mathbb{C}4$ sont vérifiées, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k < \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i. \quad (5.62)$$

Preuve. Voir la section A.2 dans l'annexe A. □

Exemple 3 : Afin d'illustrer son efficacité, le GeLESO d'ordre supérieur est comparé avec l'observateur GPI défini dans (Luviano-Juárez et al., 2010; Sira-Ramírez et al., 2017) et l'ESO d'ordre supérieur défini dans (Madoński et al., 2015; Godbole et al., 2013).

Le système traité dans cet exemple est un système chaotique Genesisio-Tesi étudié dans (Luviano-Juárez et al., 2010) auquel une perturbation variable est ajoutée pour rendre l'estimation de l'état plus complexe. Le système étudié a une dynamique entrée-sortie donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 2.92x_2 - 1.2x_3 + x_1^2 + d(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (5.63)$$

avec $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ le vecteur d'état du système, y la sortie du système et $d(t) = \sin(2t)$ une perturbation variable qui affecte le système à tout instant. Les conditions initiales de (5.63) sont les mêmes que dans (Luviano-Juárez et al., 2010), c'est-à-dire $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -2$ et $x_3(0) = 1$. Le système est supposé être inconnu.

L'ordre p du modèle cible doit être défini pour définir les composantes d'état à observer. Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée dans la section 5.2, on va choisir $p = 3$ et donc synthétiser un observateur d'ordre complet afin que toutes les composantes de l'état X soient observées.

Conformément à (5.13), la matrice d'état A et la matrice d'entrée B sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Choix des paramètres du modèle cible

Le coefficient b affecte la valeur de \mathcal{C} à la manière d'un gain (cf. (5.10)). Il est ici pris égal à 1. Deux tests de simulation vont être réalisés. Dans le test 1, les coefficients a_i sont pris au hasard et valent $a_1 = -8$, $a_2 = -8$, $a_3 = -0,8$. De ce fait, ils n'ont aucune signification physique. Dans le test 2, les coefficients sont spécifiquement choisis pour être égaux à la dynamique linéaire du système (5.63), c'est-à-dire $a_1 = -6$, $a_2 = -2,92$, $a_3 = -1,2$ (en pratique, un tel choix est improbable vu que la dynamique du système est sensée être inconnue).

Synthèse de l'observateur GeLESO d'ordre supérieur

Nous proposons d'introduire 5 états étendus ($i = 5$) comme dans (Luviano-Juárez et al., 2010). Les dynamiques du GeLESO d'ordre supérieur, l'observateur GPI et ESO d'ordre

supérieur sont données par :

GeLESO	Observateur GPI	ESO d'ordre supérieur
$\dot{z}_1 = z_2 + L_1 e_1$	$\dot{z}_1 = z_2 + L_1 e_1$	$\dot{z}_1 = z_2 + L_1 e_1$
$\dot{z}_2 = z_3 + L_2 e_1$	$\dot{z}_2 = z_3 + L_2 e_1$	$\dot{z}_2 = z_3 + L_2 e_1$
$\dot{z}_3 = z_4 + a_3 z_3 + L_3 e_1$	$\dot{z}_3 = \rho_1 + L_3 e_1$	$\dot{z}_3 = z_4 + L_3 e_1$
$\dot{z}_4 = z_5 + a_2 z_3 + L_4 e_1$	$\dot{\rho}_1 = \rho_2 + L_4 e_1$	$\dot{z}_4 = z_5 + L_4 e_1$
$\dot{z}_5 = z_6 + a_1 z_3 + L_5 e_1$	$\dot{\rho}_2 = \rho_3 + L_5 e_1$	$\dot{z}_5 = z_6 + L_5 e_1$
$\dot{z}_6 = z_7 + L_6 e_1$	$\dot{\rho}_3 = \rho_4 + L_6 e_1$	$\dot{z}_6 = z_7 + L_6 e_1$
$\dot{z}_7 = z_8 + L_7 e_1$	$\dot{\rho}_4 = \rho_5 + L_7 e_1$	$\dot{z}_7 = z_8 + L_7 e_1$
$\dot{z}_8 = L_8 e_1$	$\dot{\rho}_5 = L_8 e_1$	$\dot{z}_8 = L_8 e_1$

avec $e_1 = y - z_1$. Les ρ_i sont les états supplémentaires dans l'observateur GPI (Luviano-Juárez et al., 2010). Pour les trois observateurs, les conditions initiales sont nulles et les gains de l'observateur L_1, \dots, L_8 sont calculés en utilisant (5.51) et (5.52), avec $\omega_o = 5$. On peut voir que l'observateur GPI et l'ESO d'ordre supérieur ont la même structure interne et fourniront les mêmes résultats d'estimation. Les gains de l'observateur pour les trois observateurs sont tous les mêmes et sont indiqués ci-dessous :

$$\mathcal{L} = [40 \quad 700 \quad 7000 \quad 43750 \quad 175000 \quad 437500 \quad 625000 \quad 390625]^\top.$$

La figure 5.11 montre que (5.63) (courbe noire) donne le même comportement temporel y que la représentation d'état équivalente (courbe cyan à trait gras) donnée par (5.12). Cette dernière utilise les matrices définies dans (5.64) avec les coefficients a_i définis dans le test 1. L'entrée virtuelle \mathcal{C} , présente dans (5.12) est tracée en rouge. Elle est calculée en utilisant (5.10). Son estimation $\hat{\mathcal{C}}$ avec le GeLESO défini ci-dessus est tracé en traits bleus pointillés. Le pic dans le régime transitoire est dû aux conditions initiales du GeLESO qui sont différentes de celles du système.

Les erreurs d'estimation des état x_1, x_2 et x_3 sont illustrées dans les figures 5.12, 5.13 et 5.14 respectivement.

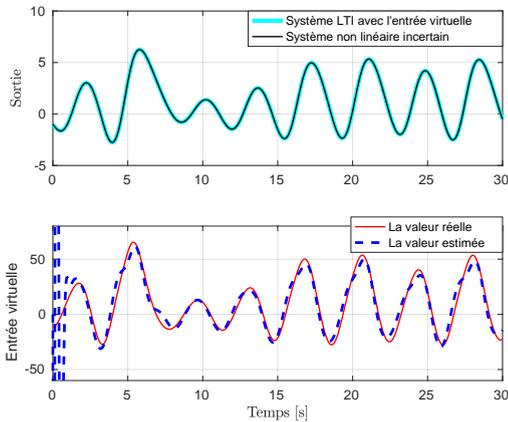


FIGURE 5.11 – Évolution de la sortie y et l'entrée virtuelle \mathcal{C}

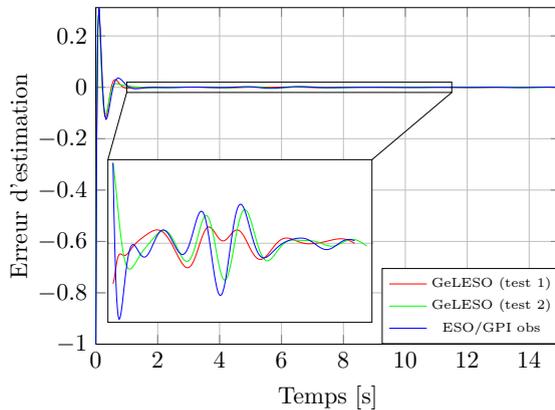


FIGURE 5.12 – Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_1

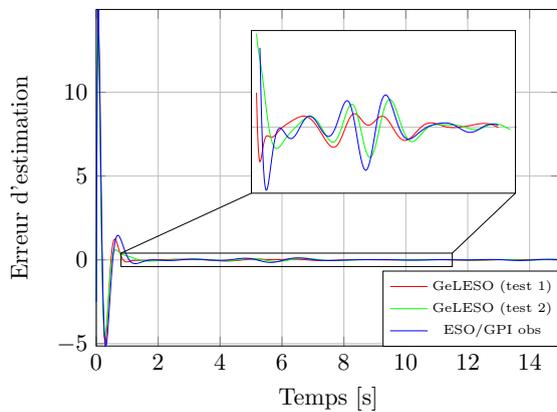


FIGURE 5.13 – Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_2

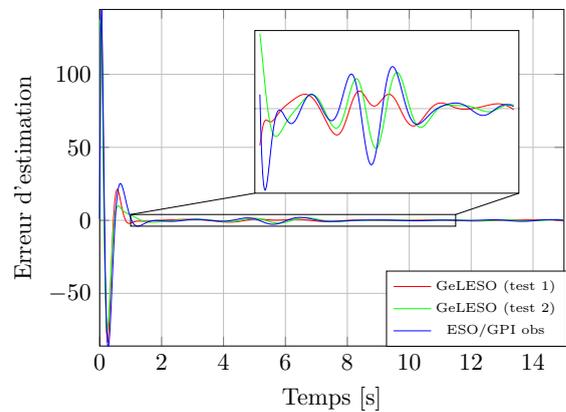


FIGURE 5.14 – Évolution de l'erreur d'estimation de la composante x_3

Critère de comparaison entre les trois observateurs

Afin d'établir une comparaison entre les trois observateurs, nous allons utiliser un critère noté WE_j . Ce dernier est défini par la valeur maximale de l'erreur d'estimation sur une fenêtre de temps d'une durée τ :

$$WE_j = \sup_{t \in [t_1, t_1 + \tau]} |E_j(t)| \quad (5.65)$$

avec t_1 qui est choisi beaucoup plus grand que le temps de réponse de l'observateur.

Le tableau 5.1 illustre l'amplitude WE_j pour l'estimation de l'état du système (5.63), en utilisant les observateurs GeLESO d'ordre supérieur et l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur, conçus ci-dessus. Les résultats de ce tableau ont été donnés pour $t_1 = 20$ s et

	ESO/GPI obs	GeLESO	
		a_i (test 1)	a_i (test 2)
x_1	0.0032	0.0017	0.0023
x_2	0.1304	0.0700	0.0918
x_3	2.2785	1.1717	1.6047

TABLE 5.1 – WE_j associé à x_j pour $i = 5$

$\tau = 10$ s.

Ce tableau montre une amélioration de la précision de l'observation des composantes de l'état du système (5.63) pour le GeLESO d'ordre supérieur proposé, par rapport à l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur, lorsque tous les observateurs ont les mêmes gains.

Le tableau 5.2 montre les résultats du critère WE_j pour seulement 4 états étendus ($i = 4$). En comparant les deux tableaux, on peut voir que le GeLESO avec 4 états étendus, reste proche ou plus efficace que l'observateur GPI et l'ESO d'ordre supérieur avec 5 états étendus.

Étude de l'influence des paramètres a_i sur l'erreur d'estimation

	ESO/GPI obs	GeLESO	
		a_i (test1)	a_i (test2)
x_1	0.0060	0.0035	0.0035
x_2	0.2107	0.1235	0.1225
x_3	3.1580	1.8509	1.8360

TABLE 5.2 – WE_j associé à x_j pour $i = 4$

Afin d'étudier l'influence des paramètres a_i sur l'erreur d'estimation des composantes d'état, une simulation de Monte-Carlo a été réalisée pour établir une analyse statistique. Cette analyse a été réalisée en choisissant 1000 ensembles aléatoires de paramètres a_i avec une variation de 100 % autour des valeurs du test 1. Autrement dit, 1000 modèles cibles différents ont été testés.

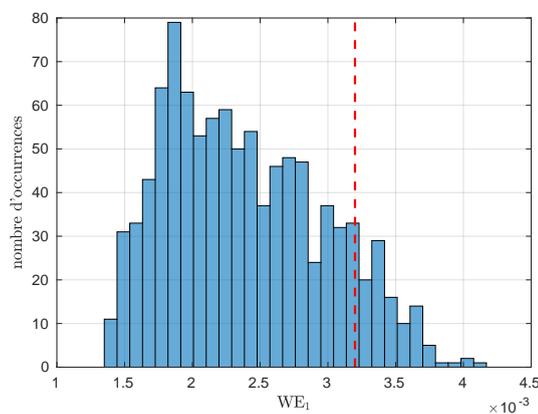


FIGURE 5.15 – Distribution de WE_1 pour la composante x_1

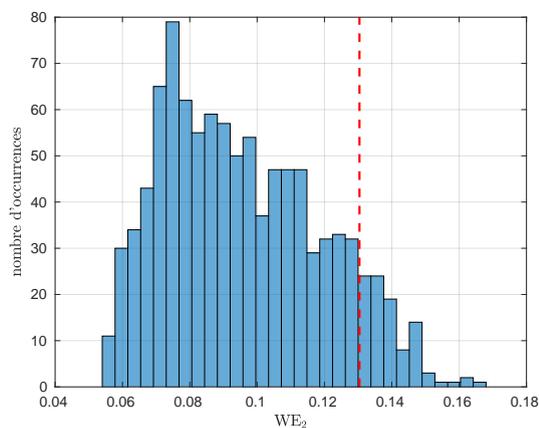


FIGURE 5.16 – Distribution de WE_2 pour la composante x_2

Les figures 5.15, 5.16 et 5.17, représentent les histogrammes obtenus à partir de cette analyse. L'erreur d'estimation de l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur est représentée par la ligne rouge en pointillés. On peut noter que cette erreur est aussi celle qui est obtenue pour le GeLESO d'ordre supérieur lorsque les paramètres a_i sont nuls. On remarque que certains ensembles de paramètres a_i dans le GeLESO permettent une meilleure estimation par rapport à l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur et que d'autres ensembles (moins nombreux) donnent une moins bonne estimation.

Cela peut en partie s'expliquer par le lieu des racines du GeLESO d'ordre supérieur fourni pour toutes les composantes d'état dans la figure 5.18. On remarque que certains pôles du GeLESO sont plus rapides et d'autres plus lents, ce qui modifie la dynamique de l'observation par rapport à l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur pour lequel les pôles sont tous situés en $-\omega_o = -5$.

Analyse de la sensibilité du GeLESO au bruit de mesure

Pour étudier la sensibilité du GeLESO d'ordre supérieur au bruit de mesure, un bruit blanc v a été rajouté à la sortie y . Cette sortie bruitée $y_m = y + v$ représente l'entrée de chaque observateur (GeLESO et GPI/ESO ordre supérieur).

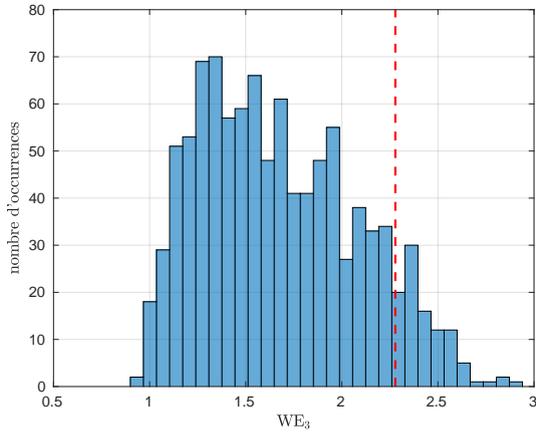


FIGURE 5.17 – Distribution de WE_3 pour la composante x_3

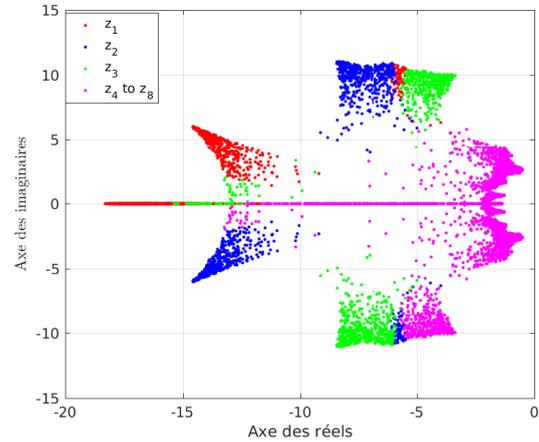


FIGURE 5.18 – Lieu des racines du GeLESO d'ordre $p + i = 8$

La figure 5.19 illustre la sortie y , la sortie bruitée y_m ainsi que son estimation z_1 en utilisant le GeLESO d'ordre supérieur avec les paramètres du test 1.

Le bruit blanc gaussien v (à moyenne nulle et variance infinie) a une densité spectrale de puissance (PSD) p_v qui est choisie égale à 10^{-6} . Ce bruit n'est pas simulable en pratique. Cependant le comportement statistique de chaque observateur excité par v reste le même si ce bruit est remplacé par un bruit blanc gaussien v' à bande passante limitée qui a la même PSD jusqu'à une pulsation de coupure $\omega_c \gg \omega_0$. Dans ce cas, v' a une variance finie R et il peut être simulé. Dans ce qui suit, ω_c a été fixé à $\pi \cdot 10^4$ rad/s. La variance $R = p_v \frac{\omega_c}{2\pi}$ est alors égale à 0,005.

Puisque les trois observateurs sont linéaires, chacun est caractérisé par un état étendu aléatoire Gaussien \underline{Z} donné par

$$\underline{Z} = Z + \tilde{Z}. \quad (5.66)$$

Cette décomposition de \underline{Z} est obtenue en utilisant le principe de superposition. Z représente le comportement d'état déterministe de chaque observateur précédemment déterminé en tenant compte uniquement de la sortie y (donc avec $v = 0$) et \tilde{Z} représente le comportement Gaussien (à moyenne nulle) associé uniquement au bruit v (donc avec $y = 0$). La matrice de covariance $P(t) = E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}(t)^T]$ a une valeur stationnaire P qui est obtenue en résolvant l'équation de Lyapunov en temps continu :

$$(A_e - \mathcal{L}C)P + P(A_e - \mathcal{L}C)^T + \mathcal{L}p_v\mathcal{L}^T = 0. \quad (5.67)$$

Les composantes diagonales de P correspondent à la variance du bruit stationnaire asymptotique qui est présent sur chaque composante d'état observée. Pour évaluer comment chaque observateur atténue ou amplifie le bruit de mesure, on définit un rapport signal sur bruit NR_j donné par :

$$NR_j = \frac{\sqrt{P_{jj}}}{\sqrt{R}}. \quad (5.68)$$

NR_j exprime comment l'écart-type \sqrt{R} du bruit de mesure se retrouve atténué ou amplifié dans l'estimation z_j de la composante x_j . Si $NR_j < 1$, on a une atténuation et donc un "filtrage" du bruit de mesure par l'observateur. La figure 5.19 illustre un tel cas de figure :

le bruit présent sur z_1 est plus faible que sur y_m . Le ratio NR_j peut notamment être étudié pour différentes valeurs de ω_o (qui influe sur les gains des observateurs) comme dans ce qui suit.

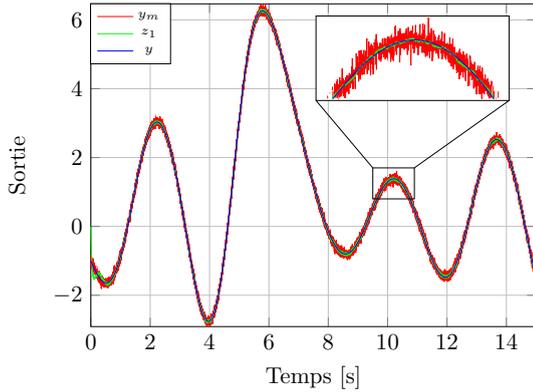


FIGURE 5.19 – Évolution de la sortie y , de la sortie mesurée y_m et son l'estimation z_1

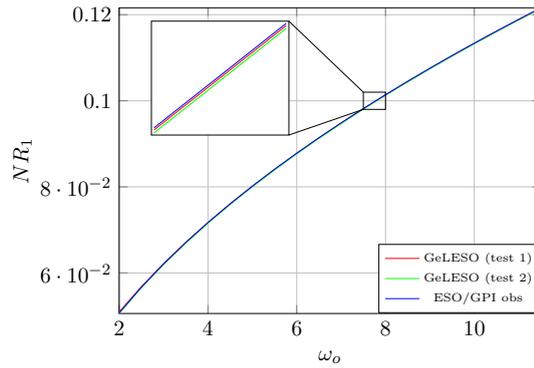


FIGURE 5.20 – Effet de ω_o sur le rapport NR_1 pour la composante x_1

Les figures 5.20, 5.21 et 5.22 illustrent la relation croissante qui existe entre ω_o et les rapports signal sur bruit NR_1 , NR_2 et NR_3 . Il en est de même pour le test 2 (non représenté). Ce facteur NR_j est un peu plus faible sur le GeLESO d'ordre supérieur que sur l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur. Par conséquent, les meilleures performances temporelles du GeLESO pour les tests 1 et 2 n'ont pas de contrepartie négative sur le bruit d'observation qui reste du même ordre que pour l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur. Ce résultat peut s'expliquer par l'étude des lieux des racines où les pôles correspondant aux composantes d'état étendues sont parmi les plus lents, ce qui n'a donc que peu d'influence sur le bruit d'observation pour le GeLESO d'ordre supérieur. Pour $\omega_o = 5$, le bruit de mesure est atténué pour z_1 (ce qui est vérifié dans la Fig. 5.19), légèrement amplifié pour z_2 et beaucoup plus amplifié pour z_3 .

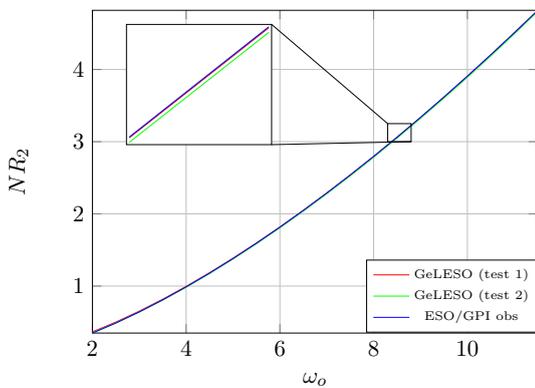


FIGURE 5.21 – Effet de ω_o sur le rapport NR_2 associé à la composante x_2

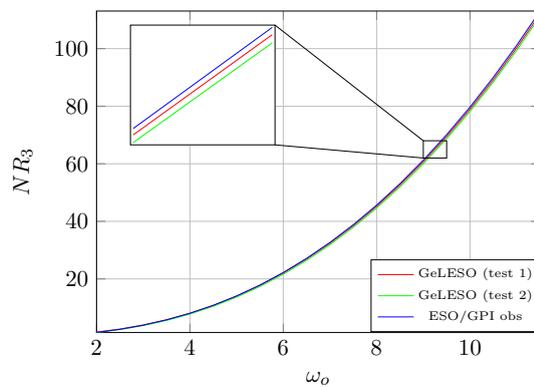


FIGURE 5.22 – Effet de ω_o sur le rapport NR_3 associé à la composante x_3

La figure 5.23 illustre comment le nombre i d'états étendus du GeLESO influence le ratio NR_1 associé à la composante z_1 (avec les paramètres du test 1). On constate que quel que soit ω_o , plus grand est i et plus important est l'amplification du bruit de mesure dans l'estimation de x_1 . Il y a donc un compromis à définir lors de la conception de l'observateur entre le nombre d'états étendus qu'on introduit et l'amplification maximale du bruit de

mesure qu'on souhaite.

Afin d'étudier l'influence des paramètres a_i sur la distribution du rapport signal sur bruit, une simulation de Monte-Carlo a été réalisée comme dans le cas précédent. La distribution de NR_1 pour les mille modèles tirés aléatoirement a été déterminée avec $\omega_o = 5$. La figure 5.24 montre que le GeLESO d'ordre supérieur a bien une sensibilité au bruit plus faible pour certaines combinaisons de paramètres a_i comparé à l'observateur GPI/ESO d'ordre supérieur. L'écart de sensibilité reste cependant faible.

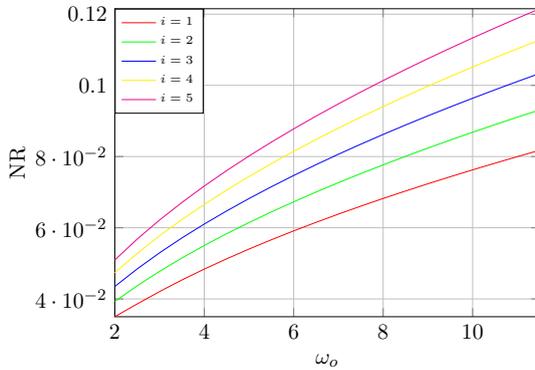


FIGURE 5.23 – Influence du nombre i d'états étendus sur le rapport NR_1 du GeLESO associé à z_1 (test 1)

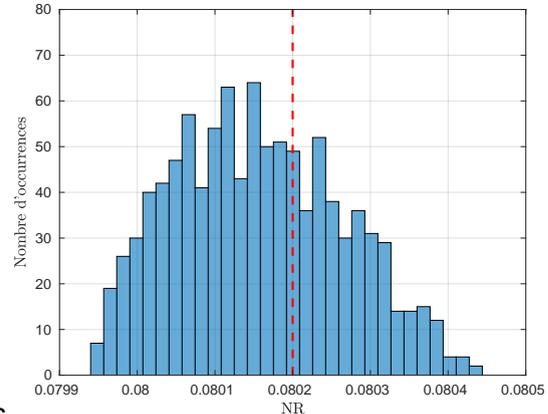


FIGURE 5.24 – Distribution du rapport signal sur bruit NR_1 associé à z_1 pour $\omega_o = 5$

5.3.6/ COMMANDE VIRCO

Pour synthétiser la loi de commande u pour les systèmes non linéaires inconnus tels que (5.1), nous allons décomposer cette commande en deux parties additives : $u = u_1 + u_2$. Les informations nécessaires et suffisantes pour établir la loi de commande u seront l'état X et l'entrée virtuelle \mathcal{C} qui sont observés par le GeLESO. Comme dans l'ADRC, une linéarisation globale approximative de (5.1) est d'abord effectuée grâce à u_1 . Cette linéarisation est réalisée en rejetant l'effet de l'entrée virtuelle \mathcal{C} sur le système cible avec une rétroaction $u_1 = -\hat{\mathcal{C}} = -\varphi(Z)$. La rétroaction u_1 utilise l'observation Z fournie par le GeLESO et l'opérateur linéaire φ décrit par (5.33). Cette première étape est illustrée sur la figure 5.25. Elle donne l'appellation anglaise de cette approche de commande dont l'acronyme est VIRCO pour **V**irtual **I**nput **R**ejection **C**ontrol.

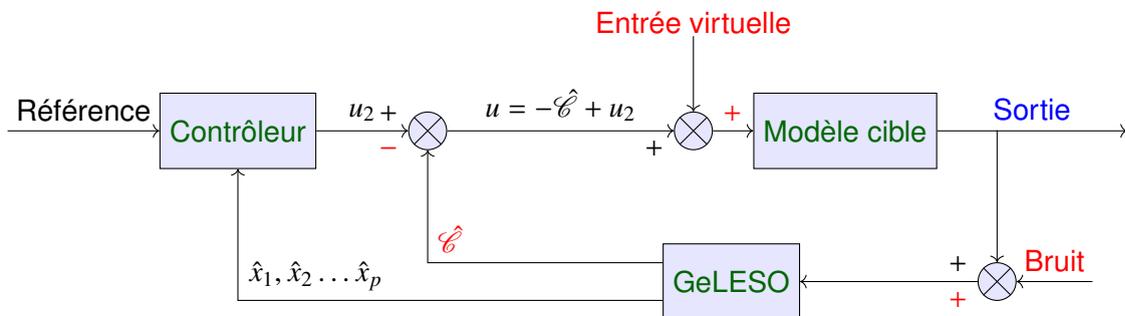


FIGURE 5.25 – Schéma de commande de rejet de l'entrée virtuelle (VIRCO)

En utilisant la commande $u = u_1 + u_2 = -\hat{\mathcal{C}} + u_2$, la dynamique exacte (5.12) du système non linéaire inconnu commandé par u devient :

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu_2 + \varepsilon \\ y &= CX \end{cases} \quad (5.69)$$

où ε est un résidu non linéaire qui dépend de la qualité de l'observation du GeLESO. Il est défini par :

$$\varepsilon = B(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{C}}). \quad (5.70)$$

Si l'observation était parfaite ($\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$) le résidu non linéaire ε serait nul. Dans ce cas, d'après (5.69), le système non linéaire qui va être ensuite commandé par u_2 serait parfaitement linéaire. La commande u_1 a donc bien linéarisé le système non linéaire inconnu de départ. Cette linéarisation est une linéarisation globale qui s'adapte à chaque point de fonctionnement. Dans ce cas, (5.69) devient équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu_2 \\ y &= CX. \end{cases} \quad (5.71)$$

Cette représentation est plus riche que dans le cadre de l'ADRC et les p pôles associés au modèle cible peuvent alors être placés facilement avec un contrôle secondaire $u_2 = -KZ$ qui utilise l'observation de $X \in \mathbb{R}^p$. Le fait d'avoir potentiellement plus de pôles à ajuster grâce au choix de p peut apporter plus de possibilités pour ajuster finement le contrôleur et la dynamique de suivi de la consigne. Tout autre stratégie de commande linéaire utilisant les informations dans Z est également possible, même les plus simples comme par exemple une commande proportionnelle, intégrale et dérivée qu'on peut déduire de l'information présente dans $\hat{\mathcal{C}}$. Le bruit d'observation dans $\hat{\mathcal{C}}$ et Z ajoutera forcément du bruit sur chaque commande u_1 et u_2 du système. Ce bruit peut être gênant (usure mécanique des actionneurs par exemple) et il peut aussi être réduit par un choix approprié des paramètres a_i et b . Ce bruit de commande présent sur u est cependant filtré par le système dont le comportement dynamique est maintenant équivalent à (5.71). Il engendre un bruit additif sur la sortie y du système. Ainsi, en utilisant des paramètres appropriés a_i pour avoir un comportement passe-bas, le bruit généré sur y peut être limité, ce qui est intéressant pour atteindre une bonne précision de suivi de la consigne.

En pratique, le résidu ε ne peut pas être maintenu à une valeur nulle. La commande u_1 correspond donc à une linéarisation approximative qui permet d'obtenir une dynamique qui s'approche de celle du modèle cible. Ceci fournit la justification de l'utilisation de l'adjectif *cible* qui est employé dans l'appellation *modèle cible*. Comme toutes les informations disponibles *a priori* a_i et b ont été utilisées pour fournir l'observation $\hat{\mathcal{C}}$, le résidu non linéaire ε ne peut pas être estimé puisqu'il n'y a pas d'introduction d'informations nouvelles lors du processus de commande. Par conséquent, ε agit comme une perturbation non linéaire inconnue qui va dégrader les performances de la commande u_2 . Comme ε dépend de $\hat{\mathcal{C}}$, il dépend également du choix des paramètres du modèle cible, et notamment des a_i qui peuvent être non nuls contrairement à l'ADRC.

Si un modèle de connaissance du système non-linéaire est disponible, un modèle linéaire approché autour d'un point de fonctionnement peut être déterminé et servir de modèle cible. Cependant, le système peut être amené à évoluer vers d'autres points de fonctionnement qui rendent peu pertinente la linéarisation théorique effectuée. Les paramètres du modèle non linéaire peuvent aussi être évolutifs avec des lois temporelles inconnues. Certains paramètres physiques peuvent de plus être inconnus car non mesurables ou

identifiables. C'est par exemple le cas de la masse sur les systèmes microscopiques qui est souvent mal connue et estimée avec une marge d'erreur non négligeable. Un modèle cible linéaire différent du modèle de connaissance linéarisé pourrait alors s'avérer potentiellement plus efficace pour l'observation puis pour la commande du système non linéaire, à condition de savoir comment le déterminer . . .

Si le système non linéaire à observer est totalement inconnu, on a vu dans ce qui précède qu'un tirage aléatoire des paramètres a_i pouvait donner un critère d'erreur WE_j qui était soit meilleur, soit moins bon que celui qu'on obtient pour des paramètres nuls utilisés en ADRC. De ce fait, une stratégie purement aléatoire pour fixer les paramètres a_i peut se révéler sous optimale.

Il résulte de ces considérations que définir un modèle cible linéaire à p paramètres qui permette une observation puis une commande efficace d'un système non linéaire incertain et non stationnaire tel que (5.1) (qu'il soit plutôt bien connu ou partiellement connu ou pas du tout connu) est un problème qui apparaît non trivial. Dans le cadre de cette thèse, nous disposons d'un modèle de connaissance. Nous utiliserons donc ce dernier pour établir le modèle cible. Les paramètres physiques du modèle de connaissance seront remplacés par des valeurs identifiées pour définir le modèle cible.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous présenterons en guise de perspective une réflexion préliminaire pour définir une stratégie optimale de détermination des paramètres du modèle cible. Une telle approche débouche sur la notion d'observateur adaptatif dont l'objectif est de minimiser ε .

5.4/ CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons adressé la problématique de l'observation et de la commande d'une classe spécifique de systèmes SISO non linéaires incertains qui peuvent être potentiellement inconnus. Cette problématique est résolue grâce à l'observation d'un modèle d'état linéaire équivalent qui inclut une entrée virtuelle $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Cette entrée virtuelle a une dynamique non linéaire inconnue. Elle est induite par la différence entre la dynamique du système non linéaire incertain et celle d'un système linéaire appelé modèle cible. Ce modèle cible correspond à un comportement linéaire intermédiaire qu'on souhaite substituer au système non linéaire afin de pouvoir ensuite le commander facilement avec une stratégie linéaire. La stratégie de commande qui réalise ces opérations a été appelée *commande VIRCO*.

Un observateur linéaire appelé GeLESO a été proposé pour l'estimation combinée de l'état du système incertain et de l'entrée virtuelle. Une méthode de réglage a été explicitée et les conditions de sa convergence ont été démontrées. L'observateur proposé sera utilisé par la suite dans les chapitres 6 et 7 pour l'estimation de l'état de l'accéléromètre étudié dans le cadre de cette thèse et pour sa commande.

L'étude théorique de l'influence de la faisabilité de la commande VIRCO en termes de stabilité, de robustesse, de saturation etc. en fonction de ε et des contraintes sur la chaîne d'actionnement ne sera pas abordée dans ce mémoire. Elle constitue une perspective à cette thèse.

OBSERVATION DE L'ACCÉLÉRATION SISMIQUE EN MODE PASSIF ET ACTIF

Sommaire

6.1 Introduction	108
6.2 Modélisation dynamique	110
6.2.1 Représentation de la véritable dynamique de l'accéléromètre	112
6.2.1.1 Grandeurs manipulées	112
6.2.1.2 Modèle équivalent de l'accéléromètre	114
6.2.2 Validation expérimentale de la représentation équivalente	118
6.3 Mode passif de l'accéléromètre proposé	119
6.3.1 Estimation de l'accélération en utilisant le GeLESO	119
6.3.1.1 Simulations numériques	122
6.3.1.2 Validation expérimentale	125
6.3.2 Étude de la sensibilité aux paramètres du modèle	126
6.4 Mode actif de l'accéléromètre proposé	131
6.4.1 Principe	131
6.4.2 Commande VIRCO par rejet de l'entrée virtuelle	133
6.4.3 Application pour la régulation de l'accéléromètre : simulations	135
6.4.3.1 Première simulation : cas d'une accélération externe de type échelon et de type sinusoïdal	135
6.4.3.2 Discussion sur l'effet de l'angle θ sur l'estimation de l'accélération sismique et le choix du contrôleur	141
6.4.3.3 Vérification de la sensibilité aux paramètres du modèle : mode actif de l'accéléromètre	144
6.4.4 Validation expérimentale	148
6.5 Conclusion	150

6.1/ INTRODUCTION

Nous avons développé dans le chapitre 3 un accéléromètre qui s'appuie sur le principe des ressorts magnétiques auto-stabilisés. Cet accéléromètre utilise comme organe sensible une masse sismique macroscopique rigide reliée à un ressort magnétique vertical. L'organe sensible forme un transducteur qui transforme l'accélération à mesurer en un déplacement de la masse. L'objectif principal de cet accéléromètre est d'estimer, de manière

traçable¹ au Système International d'unités (SI), l'accélération verticale basse fréquence du plateau d'une table anti-vibrations. Pour parvenir à cet objectif, une démarche va être proposée dans le cadre de l'automatique. Cette démarche s'inscrit également dans le domaine de la métrologie fondamentale dans le sens où elle constitue une proposition pour enrichir les approches classiques de calcul d'incertitude qui ont été normalisées par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). Ces approches qui couplent l'analyse statistique et le calcul différentiel sont documentées dans le Guide pour l'expression de l'incertitude de Mesure² (GUM). L'approche alternative qui est proposée tient compte de la structure incertaine du système dynamique en la représentant explicitement, ce qui permet d'éviter d'avoir recours à une approche statistique à certaines étapes du processus d'estimation. Cette approche alternative est explicitée dans ce chapitre ainsi que dans le suivant.

La valeur du *mesurande* d'intérêt (qu'on appelle aussi en métrologie la *valeur vraie* de la grandeur à estimer) est ici une accélération. Cette valeur inconnue est estimée à l'aide d'un *mesurage*. Le mesurage correspond au processus qui consiste à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs de mesure que l'on peut raisonnablement attribuer à l'accélération inconnue en dépit de tout ce qui n'est pas maîtrisé au cours du processus. Chaque mesure obtenue est entachée d'un doute, qu'on appelle une incertitude, qu'il convient de qualifier par une approche rigoureuse. D'après la définition du BIPM³, l'incertitude est prise au sens classique d'un paramètre non négatif qui caractérise la *dispersion* des valeurs possibles attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées. Cette définition de l'incertitude ne traduit donc pas la justesse du mesurage (au sens de l'écart à la valeur vraie) mais sa dispersion. Dans notre cas, la valeur du mesurande est en permanente évolution temporelle à cause des vibrations sismiques qui ne s'arrêtent jamais. Du fait de l'activité sismique variable au sein du bâtiment ENSMM, c'est aussi une grandeur physique dont les caractéristiques aléatoires sont évolutives. Par exemple, l'activité sismique n'est pas du tout la même le jour et la nuit. L'accélération sismique est donc un signal aléatoire dont la nature stochastique est non stationnaire. La dynamique du tube de l'accéléromètre, qui est excité par cette accélération sismique, est par conséquent aussi de nature stochastique. Formellement, elle est représentable par un processus stochastique dans lequel, à chaque instant t , l'état $X(t)$ du tube peut être représenté par un vecteur aléatoire qui suit une loi probabiliste qui évolue dans le temps. Les propriétés statistiques qui caractérisent l'état $X(t)$, telles que sa moyenne $M(t) = E[X(t)]$ où sa matrice de variance-covariance $P(t) = E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T]$, sont de ce fait également évolutives dans le temps. Il en est de même pour le déplacement $z(t)$ du tube qui va être utilisé pour établir le mesurage de l'accélération sismique. La sortie $z(t)$ est représentable par une variable aléatoire dont la nature stochastique est non stationnaire. Autrement dit, sa loi probabiliste non stationnaire est une fonction évolutive de t dont la réalisation à chaque instant t fournit le résultat du mesurage du déplacement du tube.

Il résulte de la non stationnarité des signaux aléatoires qui sont manipulés qu'il est difficile d'obtenir une série statistique significative de valeurs mesurées qu'on puisse attribuer de manière certaine à la valeur donnée (mais inconnue) du mesurande considéré à chaque

1. Propriété d'un résultat de mesure, selon laquelle ce résultat peut être relié (raccordé) à une référence, par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue et documentée d'étalonnages, dont chacun contribue à l'incertitude de mesure

2. disponible à l'URL <https://www.bipm.org/fr/publications/guides/>

3. disponible à l'URL https://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf

instant t . En pratique, pour chaque valeur inconnue et évolutive du mesurande $\ddot{z}_a(t)$, un *unique* mesurage qui lui correspond est effectuée à cet instant. De ce fait, utiliser une approche statistique pour établir l'incertitude de la valeur mesurée est complexe à mettre en place et elle peut être critiquée puisque chaque mesurage effectué correspondra à un mesurande différent au fur et à mesure que le temps avance. Ce point constitue une motivation pour établir une approche métrologique alternative.

Notre démarche s'appuyant sur les outils de l'automatique, le mesurage va être fourni par un observateur dont la dynamique d'estimation dépend du système incertain auquel il est associé. Un modèle dynamique de l'accéléromètre est utilisé dans l'observateur pour estimer l'accélération. Ce modèle étant entaché d'incertitudes, il est alors essentiel de pouvoir propager sur l'estimation de l'accélération les incertitudes connues qui sont présentes sur certaines grandeurs utilisées dans le modèle. Enfin, il est également essentiel de minimiser l'impact des incertitudes non connues qui ne sont pas maîtrisées. Par ailleurs, dans cette approche basée sur l'automatique, on cherche à essayer de garantir autant que possible que l'incertitude qui est établie sur l'accélération contienne la valeur vraie de cette dernière. De ce fait, on essaye de caractériser la justesse du mesurage, mais sans en avoir pour autant une certitude absolue. Par exemple, la justesse ne pourra pas être garantie si la dynamique de l'accélération sismique devient par exemple trop rapide ou trop importante pour être mesurée par le capteur car ce dernier a une bande passante et une amplitude de mesure limitées.

Dans ce chapitre, nous allons introduire en premier lieu les nombreuses notations qui sont nécessaires pour mener à bien cette démarche métrologique, qui va être conduite à la fois dans ce chapitre et dans le suivant. Nous présenterons ensuite le fonctionnement de l'accéléromètre en mode passif. Nous illustrerons le fait que ce mode conduit à une qualité d'estimation de l'accélération qui peut facilement être dégradée du fait des incertitudes non connues. Le fonctionnement en mode actif, et l'avantage qu'un tel mode procure dans un contexte métrologique, sera ensuite développé. Nous verrons notamment que ce mode permet notamment d'atténuer l'effet des incertitudes paramétriques et structurelles inconnues qui sont associées à la dynamique du modèle incertain de l'accéléromètre.

6.2/ MODÈLE DYNAMIQUE DE L'ACCÉLÉROMÈTRE PROPOSÉ

Dans le chapitre 3, nous avons présenté un dispositif mécatronique qui peut servir d'accéléromètre pour mesurer l'accélération verticale du support sur lequel il est posé. La masse sismique sensible à cette accélération est un tube vertical qui est en sustentation stable grâce à un ressort magnétique auto-stabilisé (cf. figure 6.1). Le synoptique du fonctionnement de l'accéléromètre est illustré dans la figure 6.2. La position verticale du tube est mesurée à l'aide d'un capteur confocal chromatique. Cette mesure est traitée dans un DSP (dSPACE) afin d'estimer l'accélération du support. L'accéléromètre peut fonctionner en mode passif ou actif. Ces deux modes sont conditionnés dans leur principe de fonctionnement au fait que le générateur de courant a un fonctionnement particulier qui est imposé : le générateur de courant fournit un courant selon une consigne qui lui est transmis par dSPACE. Ce courant a une dynamique de suivi de sa consigne qui va dépendre de l'impédance du circuit dans lequel il circule. Cette dynamique d'établisse-

ment du courant est très rapide par rapport à celle de l'accéléromètre mais nous ne la maîtrisons pas.

En mode passif, le DSP impose une consigne de courant constante i_0^c qui est transmise au générateur de courant. Le courant i_0 qui est alors généré dans les bobines sert simplement à ajuster l'altitude de la masse sismique à une valeur de référence donnée lorsque l'accélération à mesurer est nulle. En présence d'une accélération verticale non nulle du support, la tige va ainsi se déplacer par rapport à cette référence.

En mode actif, le DSP impose une consigne de courant qui est $I^c = i_0^c + i^c$. Le courant généré est $I = i_0 + i$ et i va servir à générer une force électromagnétique supplémentaire f_{elec} . Cette force sera utilisée pour asservir le déplacement vertical z du tube sur l'altitude de référence lorsque l'accélération à mesurer varie.

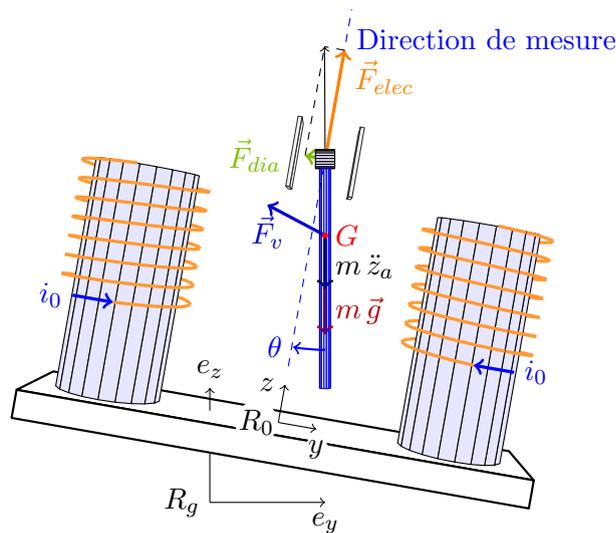


FIGURE 6.1 – Étude de la configuration des forces appliquées au tube en lévitation dans un cas réaliste

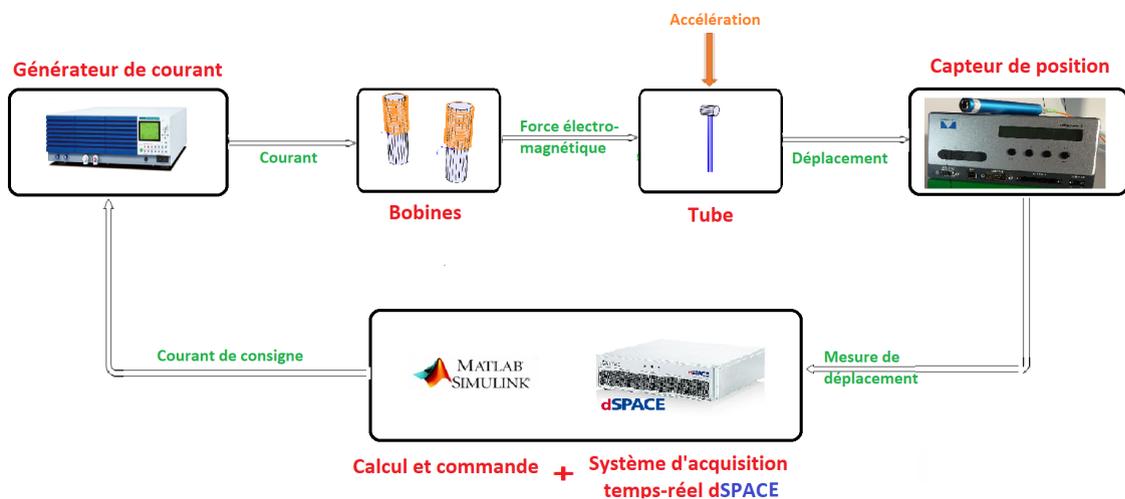


FIGURE 6.2 – Accéléromètre proposé : principe de fonctionnement

6.2.1/ REPRÉSENTATION DE LA VÉRITABLE DYNAMIQUE DE L'ACCÉLÉROMÈTRE

6.2.1.1/ GRANDEURS MANIPULÉES

Cet accéléromètre est un système dont la dynamique a été modélisée dans le chapitre 3. Le modèle à 1 degré de liberté (DDL) qui a été proposé est imparfait puisqu'il ne représente pas la dynamique exacte de la masse sismique. Cette dernière possède en réalité 6 DDL dont 3 DDL en translation et 3 DDL en rotation. De ce fait, la pose P du tube dans l'espace est représentée par 6 variables (3 variables de position et 3 variables d'orientation). Pour pouvoir rendre cet accéléromètre traçable au SI, nous avons besoin de mettre en place une démarche de métrologie qui tienne compte des imperfections du modèle. Ces imperfections conduisent à un écart entre la dynamique exacte de l'accéléromètre et celle de son modèle. Pour traduire explicitement cet écart et le manipuler mathématiquement afin d'en déduire une incertitude sur l'accélération, nous allons nous baser sur le formalisme qui a été développé dans le chapitre 5. Ce formalisme permet de représenter la véritable dynamique d'un système mal connu. Il va être ici adapté à notre contexte d'utilisation de l'accéléromètre. Le tableau 6.1 représente toutes les grandeurs qui sont manipulées dans ce contexte spécifique, hormis les incertitudes. Ces grandeurs sont classées en différentes catégories qui correspondent aux lignes du tableau. Nous allons les détailler une par une.

Grandeurs physiques	m	g	$I = i_0 + i$	z, \dot{z}, \ddot{z}	$F_{elec} = f_{elec}^0 + f_{elec}$				\ddot{z}_a
Grandeurs physiques mesurées	m'	g'		z'					
Paramètres						γ	β	K_v	
Paramètres identifiés						γ'	β'	K'_v	
Grandeurs imposées			$I^c = i_0^c + i^c$		u				
Grandeurs estimées				z_1, \hat{z}					$\hat{\ddot{z}}_a$

TABLE 6.1 – Grandeurs manipulées

- Les **grandeurs physiques** correspondent à une énumération de grandeurs physiques qui sont mises en œuvre dans l'accéléromètre. La valeur exacte (au sens de la valeur vraie en métrologie) de ces grandeurs est inconnue en pratique. Elles sont donc toutes des mesurandes. Les grandeurs énumérées sont la masse m du tube relié au ressort magnétique, l'accélération locale de la pesanteur g à la position du tube, le courant I qui est généré par le générateur de courant et qui circule dans les bobines, le déplacement z du tube, sa vitesse \dot{z} et son accélération \ddot{z} , l'amplitude F_{elec} de la force électromagnétique qui s'applique sur le tube le long de la direction \vec{z} et l'accélération \ddot{z}_a de la base de l'accéléromètre. Cette accélération \ddot{z}_a est la mesurande d'intérêt. Comme le courant I est décomposé en une somme de deux courants :

$$I = i_0 + i, \quad (6.1)$$

la force F_{elec} qui dépend de I et de la pose P du tube se décompose elle-même en

une somme de deux forces :

$$F_{elec}(I,P) = f_{elec}^0(i_0,P) + f_{elec}(i,P). \quad (6.2)$$

- Les **grandeurs physiques mesurées** correspondent aux grandeurs physiques qu'on est capable de mesurer avec une démarche métrologique via des mesurages appropriés. Ces mesurages fournissent la valeur mesurée m' de la masse m , les valeurs mesurées z' du déplacement z et la valeur mesurée g' de l'accélération locale de la pesanteur g . Leurs incertitudes sont connues.
- Les **paramètres** γ , β et K_v sont utilisés dans les modèles simplifiés qui représentent la force électromagnétique et la dynamique de l'accéléromètre selon l'axe z . Ces paramètres sont donc impliqués dans la description d'un comportement physique inexact. Ils ont des formulations mathématiques, établies dans le chapitre 3, qui dépendent des grandeurs physiques manipulées dans ces modèles. Par convention, les valeurs inconnues de ces paramètres vont être définies en attribuant à ces grandeurs physiques leurs valeurs vraies :

$$\beta = \frac{mg \cos \theta}{i_0} \quad \gamma = \frac{-i\beta}{z(i_0 + i)}. \quad (6.3)$$

L'expression de γ n'est valable qu'en régime statique : le courant i constant correspond au courant qui circule dans les bobines pour positionner la tige à l'altitude z lorsque $\ddot{z}_a = 0$ (cf. chapitre 2).

- Les **paramètres identifiés** correspondent aux valeurs identifiées des paramètres qui précèdent. Les valeurs γ' et K_v' sont identifiées en régime dynamique à partir de la réponse quasi-libre de la tige (cf. chapitre 3). Pour identifier β , on néglige θ et on utilise les mesures de m et de g ainsi que le courant de consigne i_0^c :

$$\beta' = \frac{m'g'}{i_0^c}. \quad (6.4)$$

- Les **grandeurs imposées** au système sont la consigne de courant I^c qui est imposée au générateur de courant par le DSP et la commande en force électromagnétique u qui est calculée dans dSPACE. La commande u est donc homogène à une force. La consigne I^c se décompose en deux consignes additives :

$$I^c = i_0^c + i^c. \quad (6.5)$$

La consigne constante i_0^c est imposée au générateur de courant lors de la mise en service de l'accéléromètre : en imposant i_0^c , on fait varier le courant i_0 et donc la force électromagnétique $f_{elec}^0(i_0,P)$. Ainsi, la hauteur de lévitation du tube va varier jusqu'à s'établir à une valeur jugée convenable, ce qui fixe l'altitude de référence $z = 0$ lorsque le tube devient statique. Comme le tube n'est jamais statique en pratique à cause des vibrations sismiques, la référence $z = 0$ est obtenue à partir d'une moyenne sur z' qui est établie sur plusieurs secondes dans un environnement le plus calme possible (au milieu de la nuit par exemple). L'autre consigne i^c est imposée lorsque l'accéléromètre fonctionne en mode actif. Dans ce cas, i^c sert à générer le courant i qui va générer la force électromagnétique $f_{elec}(i,P)$. Cette consigne i^c est établie à partir de la commande en force u . Idéalement, on voudrait que la commande imposée u génère la force $f_{elec}(i,P)$. Pour se rapprocher de ce cas

idéal, on utilise le modèle (3.9) de la force électromagnétique $f_{elec}(i,z)$ défini dans le chapitre 3 :

$$f_{elec}(i,z) = i(\gamma z + \beta) \quad (6.6)$$

dans lequel on substitue à z la valeur mesurée z' , et à f_{elec} et à i les valeurs imposées de u et de i^c :

$$u = i^c(\gamma' z' + \beta') \Rightarrow i^c(u, z') = \frac{u}{\gamma' z' + \beta'}. \quad (6.7)$$

On peut aussi noter que les paramètres utilisés pour déterminer i^c sont les paramètres identifiés γ' et β' . La consigne de courant I^c qui est de ce fait imposée au générateur est :

$$I^c = i_0^c + i^c = i_0^c + \frac{u}{\gamma' z' + \beta'}. \quad (6.8)$$

En pratique, on utilisera plutôt l'estimation débruitée z_1 à la place de z' pour diminuer le bruit de commande.

- les **grandeurs estimées** sont des estimations des grandeurs physiques inconnues. Elles sont établies à partir d'un processus de calcul qui dépend des grandeurs mesurées, des grandeurs imposées et des paramètres identifiés. Parmi ces grandeurs estimées figurent le déplacement z_1 , la vitesse \hat{z} de la tige ainsi que l'accélération \hat{z}_a de la base de l'accéléromètre. L'estimation de \hat{z}_a correspond au mesurage qui est effectué avec l'accéléromètre.

A chaque grandeur mesurée ou estimée, il est possible d'associer des incertitudes afin de qualifier le mesurage de \hat{z}_a et d'établir sa traçabilité au SI. Le calcul de ces incertitudes est l'objet du prochain chapitre. Nous allons néanmoins poser dès maintenant les notations qui seront utilisées pour ces incertitudes. On notera dans ce qui suit $\Delta m'$ l'incertitude qui se rapporte à la grandeur mesurée m' , Δz_1 l'incertitude qui se rapporte à l'estimation z_1 , etc. Les incertitudes liées à certains mesurages sont connues. C'est le cas de $\Delta m'$, $\Delta g'$ et $\Delta z'$. Les incertitudes liées aux grandeurs estimées sont à déterminer. C'est le cas notamment de $\Delta \hat{z}_a$.

Chaque paramètre identifié peut également être caractérisé par une incertitude si les grandeurs qui ont servi à son calcul sont elles-même incertaines. Enfin, les grandeurs imposées u et I^c sont parfaitement connues. On peut noter pour finir que certaines grandeurs physiques ne font pas l'objet d'un mesurage dans le dispositif expérimental. C'est le cas du courant de commande $i = I - i_0$ et de la force physique $f_{elec}(i,P)$ de nature électromagnétique qui sont tous deux générées à l'aide de la commande u . Ces grandeurs ne sont donc pas connues avec exactitude et elles possèdent donc des incertitudes. Le courant i peut être approximé par i^c . La documentation du générateur de courant permet d'obtenir l'incertitude sur le courant i lorsqu'il est établi dans des conditions de régime stationnaire et on est obligé de s'en contenter. En utilisant alors le modèle :

$$u = i^c(\gamma' z' + \beta'), \quad (6.9)$$

on peut établir une incertitude sur l'estimation u de $f_{elec}(i,P)$ qui dépend des incertitudes associées à i^c , γ' , z' et β' .

6.2.1.2/ MODÈLE ÉQUIVALENT DE L'ACCÉLÉROMÈTRE

L'accéléromètre va être considéré comme un système incertain puisque sa modélisation reste approximative, voir grossière, par bien des points. Pour mettre en place notre dé-

marche de métrologie, nous allons avoir besoin de représenter la dynamique exacte de l'accéléromètre. Nous allons donc mettre en place la démarche de représentation équivalente qui a été établie dans le chapitre 5. Pour cela, il faut définir le système d'intérêt, son entrée de commande, sa sortie ainsi qu'un modèle cible linéaire qui comporte la même entrée de commande et la même sortie. La modélisation établie au chapitre 3 a permis de définir un modèle linéaire représenté par l'équation (3.9). Ce modèle fait apparaître explicitement deux entrées qui sont l'accélération inconnue \ddot{z}_a et la force électromagnétique $f_{elec}(i, z)$ qui influent sur la dynamique du déplacement z du tube. L'entrée de commande en force u du système d'intérêt qui est calculée par dSPACE est de ce fait l'image de la force électromagnétique qu'on veut générer. La sortie du système d'intérêt est z . Le modèle établi (3.9) peut alors servir de modèle cible en remplaçant $f_{elec}(i, z)$ par u . Dans ce cas, le système d'intérêt qu'on considère comprend toutes les parties physiques comprises entre la commande u calculée par le contrôleur et z .

Dans ce qui suit, on appellera "partie opérative" le système d'intérêt qui intègre la génération de la consigne de courant I^c à partir de la commande u (via le processus (6.8)), le générateur de courant, les bobines et le tube en sustentation. Le capteur de déplacement, l'observateur et le contrôleur qui sont implémentés dans le DSP n'appartiennent pas à la partie opérative. L'entrée de commande de la partie opérative est u et sa sortie est z . Sa dynamique entrée-sortie incertaine, supposée d'ordre n inconnu, est alors représentable par l'équation suivante :

$$z^{(n)} = f(z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}, u, U', t). \quad (6.10)$$

Toutes les variables de la fonction f correspondent à des grandeurs physiques ou s'y rapportent. La valeur vraie de ces grandeurs est inconnue en pratique, sauf pour u . Le vecteur U' représente toutes les grandeurs physiques, autres que celles explicitement mentionnées, qui agissent sur la dynamique de z . Parmi ces grandeurs figure explicitement l'accélération verticale \ddot{z}_a de la base de l'accéléromètre qui fait l'objet du mesurage. Il en est de même pour la consigne de courant imposée i_0^c qui permet d'établir la consigne du courant de sustentation envoyée au générateur de courant (cf. (6.8)). Néanmoins, de nombreuses autres grandeurs physiques affectent la dynamique de z . Par exemple, le comportement dynamique en rotation du tube autour de son centre de gravité affecte la valeur de z , de même que les accélérations angulaires du plateau. Les perturbations aériennes agissent aussi sur l'altitude de la masse ainsi que la poussée d'Archimède de l'air qui va notamment dépendre de la température. La déformation du bâti du fait de l'évolution de la température déplace les bobines et agit aussi sur z . L'évolution des grandeurs physiques du circuit électrique agit aussi sur z . L'adsorption à la surface de la masse sismique de molécules d'eau présentes dans l'air humide va modifier cette masse et donc influencer sur la dynamique de z , etc. L'ensemble des grandeurs physiques qui agissent sur la dynamique de z autres que $z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}, u, i_0^c$ et \ddot{z}_a sera regroupé dans un vecteur U'' dont le contenu et la dimension sont mal connus :

$$U' = \begin{bmatrix} i_0^c \\ \ddot{z}_a \\ U'' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^\delta. \quad (6.11)$$

La dynamique réelle de z donnée par (6.10) peut alors être représentée par :

$$z^{(n)} = f(z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}, u, i_0^c, \ddot{z}_a, U'', t) \quad (6.12)$$

qui fait apparaître explicitement \ddot{z}_a .

La partie opérative est représentée dans la zone rose de la figure 6.3. Cette zone comporte une sortie qui est z et trois entrées explicites qui sont u , i_0^c et \ddot{z}_a . Son évolution dépend en plus des grandeurs contenues dans U'' qui sont propres à cette zone. Le mo-

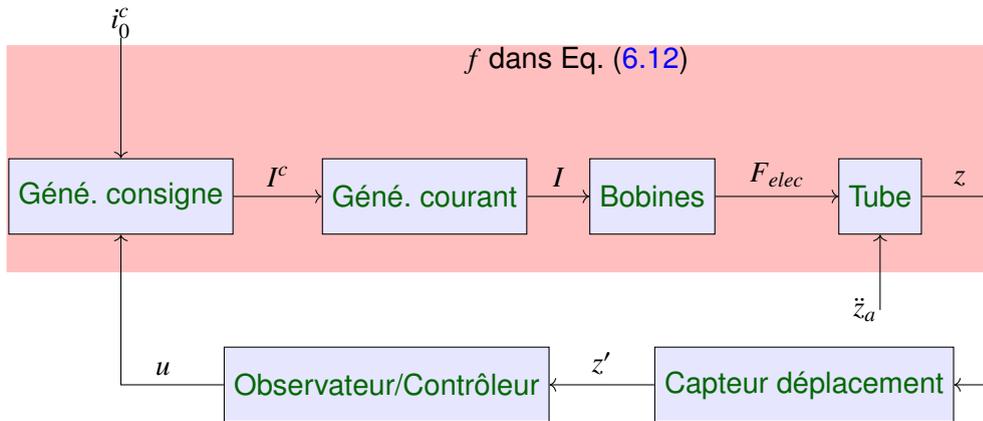


FIGURE 6.3 – Schéma-bloc de la partie opérative

dèle cible linéaire est dérivé de la modélisation (3.9) qui a été établie au chapitre 3. Ce modèle cible repose uniquement sur des grandeurs mesurées (m'), identifiées (K'_v et γ') et imposées (i_0^c et u) car seules ces dernières sont connues :

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - i_0^c \gamma' z = u - m' \ddot{z}_a. \quad (6.13)$$

On notera que le courant inconnu i_0 qui circule dans les bobines a été remplacé dans le modèle cible par la valeur de consigne i_0^c qu'on envoie au générateur. Ce modèle cible est d'ordre $p = 2$ et il peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{z} = a_1 z + a_2 \dot{z} + bu + b' \ddot{z}_a. \quad (6.14)$$

Par identification entre les deux équations (6.14) et (6.13), on a $a_1 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}$, $a_2 = -\frac{K'_v}{m'}$, $b = \frac{1}{m'}$ et $b' = -1$.

Pour tenir compte de l'ensemble des erreurs de modélisation (erreurs paramétriques et structurelles, grandeurs physiques non prises en compte), l'écart entre la dynamique réelle de la partie opérative et celle du modèle cible va être représenté par une entrée virtuelle qui est homogène à une force. Celle-ci vaut par définition :

$$\mathcal{E} \triangleq -\frac{1}{b} \left[(z^{(n)} - f(z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}), u, i_0^c, \ddot{z}_a, U'', t) - \ddot{z} + a_1 z + a_2 \dot{z} + bu + b' \ddot{z}_a \right], \quad (6.15)$$

$$\triangleq -\frac{1}{b} \left[-\ddot{z} + a_1 z + a_2 \dot{z} + bu + b' \ddot{z}_a \right]. \quad (6.16)$$

En procédant d'une manière similaire à ce qui a été démontré dans le chapitre précédent, on obtient une représentation exacte de la dynamique de la partie opérative sous

n'importe laquelle des formes suivantes :

$$\ddot{z} = a_1 z + a_2 \dot{z} + bu + b' \ddot{z}_a + b' \mathcal{C}, \quad (6.17)$$

$$\ddot{z} = \frac{\gamma' i_0^c}{m'} z - \frac{K'_v}{m'} \dot{z} + \frac{1}{m'} u - \ddot{z}_a + \frac{1}{m'} \mathcal{C}, \quad (6.18)$$

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = u - m' \ddot{z}_a + \mathcal{C}. \quad (6.19)$$

Les deux systèmes dynamiques (6.19) et (6.12) ont le même comportement entrée-sortie. La vraie dynamique de la partie opérative contrôlée par u peut-être représentée par le schéma équivalent de la figure 6.4. Il est important de noter que l'entrée $-m' \ddot{z}_a$ n'est pas la vraie force d'inertie qui excite le tube puisque cette dernière est $-m \ddot{z}_a$.

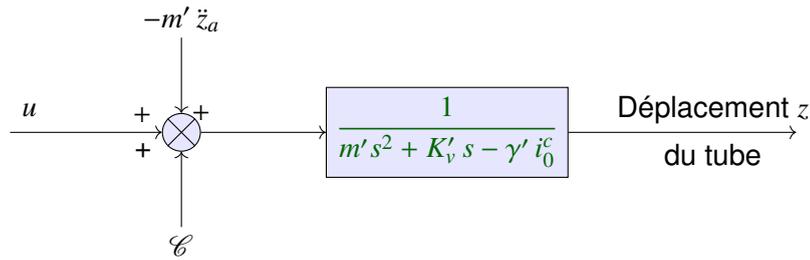


FIGURE 6.4 – Vraie dynamique de l'accéléromètre

Dans l'équation (6.19), on constate que $-m' \ddot{z}_a$ et \mathcal{C} sont des entrées inconnues qui sont additives sur la commande u . Ces entrées étant toutes les deux homogènes à des forces, il est possible de les regrouper de manière à former une seule entrée inconnue :

$$m' \mathcal{A}_c = -m' \ddot{z}_a + \mathcal{C} \quad (6.20)$$

avec \mathcal{A}_c qui est homogène à une accélération. On a alors :

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = u + m' \mathcal{A}_c. \quad (6.21)$$

L'entrée inconnue $m' \mathcal{A}_c$ qui est additive sur la commande u est une entrée qui est accessible à l'observation à partir du modèle cible :

$$M(s) = \frac{1}{m' s^2 + K'_v s - \gamma' i_0^c} \quad (6.22)$$

où s désigne la variable de Laplace. Comme m' est connue, on peut diviser l'entrée inconnue estimée par m' et ainsi accéder à l'estimation de :

$$\mathcal{A}_c = -\ddot{z}_a + \frac{1}{m'} \mathcal{C}. \quad (6.23)$$

La connaissance de \mathcal{A}_c qu'on va obtenir via un processus d'observation correspond à la connaissance de $-\ddot{z}_a$ à laquelle s'ajoute un biais. Ce biais dynamique est engendré par l'entrée virtuelle \mathcal{C} divisée par m' . Il peut être considéré comme l'incertitude qu'on a dès l'origine sur l'accélération $-\ddot{z}_a$ du plateau de la table anti-vibrations si on se base sur le modèle de connaissance $M(s)$ choisi. Cette incertitude regroupe toutes les erreurs de modélisation qui vont influencer sur la connaissance de \ddot{z}_a . L'entrée virtuelle \mathcal{C} n'est pas accessible à l'observation car elle est "noyée" additivement dans l'entrée virtuelle globale $m' \mathcal{A}_c$. La seule observation qu'on peut mener à bien consiste à estimer $m' \mathcal{A}_c$ à partir du

modèle cible $M(s)$, de u et la mesure z' de z . Par ailleurs, en plus du biais initial, l'observateur GeLESO qui sera utilisé va, de par sa structure, induire une erreur d'observation statique et dynamique supplémentaire (cf. chapitre 5).

Pour minimiser l'effet du biais, la seule solution consiste à diminuer $|\mathcal{E}|$. Comme gagner en qualité de modèle pour diminuer $|\mathcal{E}|$ semble difficile dans le cas de l'accéléromètre, il convient donc de trouver une stratégie qui permette de réduire $|\mathcal{E}|$ dans le processus d'estimation de l'accélération sans modifier pour autant le modèle cible qui est utilisé. Avant de présenter cette stratégie dans les sections futures, nous allons commencer par illustrer qu'il est possible de rendre le comportement de l'accéléromètre extrêmement prédictible en essayant de valider expérimentalement le modèle équivalent.

6.2.2/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA REPRÉSENTATION ÉQUIVALENTE

Pour valider expérimentalement le modèle équivalent (6.21), nous avons placé l'accéléromètre dans sa chambre climatique (température et humidité contrôlées) posée sur une table anti-vibrations. Nous avons appliqué un courant $i_0^c = 0.2$ A pour mettre le tube en lévitation par la compensation de son poids. La commande appliquée u est nulle jusqu'à l'instant $t = 2,25$ s. Son amplitude vaut ensuite $u = i^c(\gamma'z' + \beta')$ avec $i^c = 0,001$ A jusqu'à $t = 5$ s. Cette commande spécifique impose donc la consigne de courant $i_0^c + i^c = i_0^c + 0,001$ au générateur de courant à partir de $t = 2,25$ s. Le déplacement z' mesuré est représenté par la courbe bleue sur la figure 6.5.

A l'aide d'un observateur à entrée inconnue de type GeLESO, nous avons calculé en ligne l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ de \mathcal{A}_c et nous l'avons utilisé pour simuler le système dynamique suivant :

$$m' \ddot{z}_p + K'_v \dot{z}_p - \gamma' i_0^c z_p = u - m' \hat{\mathcal{A}}_c. \quad (6.24)$$

Ce système fait évoluer un déplacement prédit du tube, qui est noté z_p , sous l'influence de la commande u qui est identique à celle qui est appliquée sur la partie opérative. Pour prédire le déplacement, on a remplacé \mathcal{A}_c dans (6.21) par son estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$. Les conditions initiales $z_m(0)$ et $\dot{z}_m(0)$ ont été prises égales à l'état estimé de la tige à l'instant $t = 0$ par le GeLESO (sachant que l'expérimentation avait en fait démarré bien avant $t = 0$ pour laisser au GeLESO le temps de converger). Le déplacement prédit z_p est représenté par la courbe en pointillés rouge sur la figure 6.5. Le tableau 6.2 fournit les valeurs numériques des paramètres du modèle cible qui ont été utilisés pour une valeur de courant de sustentation $i_0^c = 0.2$ A. La proximité remarquable des courbes bleue et rouge illustre qu'il est possible de prédire très efficacement le comportement réel de la partie opérative grâce à l'estimation de \mathcal{A}_c .

TABLE 6.2 – Valeurs des paramètres du modèle de l'accéléromètre

Paramètre	m'	β'	γ'	K'_v
Valeur	$8,8 \cdot 10^{-6}$	$4,31 \cdot 10^{-4}$	-0,110	$4,07 \cdot 10^{-6}$
Unité	kg	kg.m/A.s ²	kg/A.s ²	N.s/m

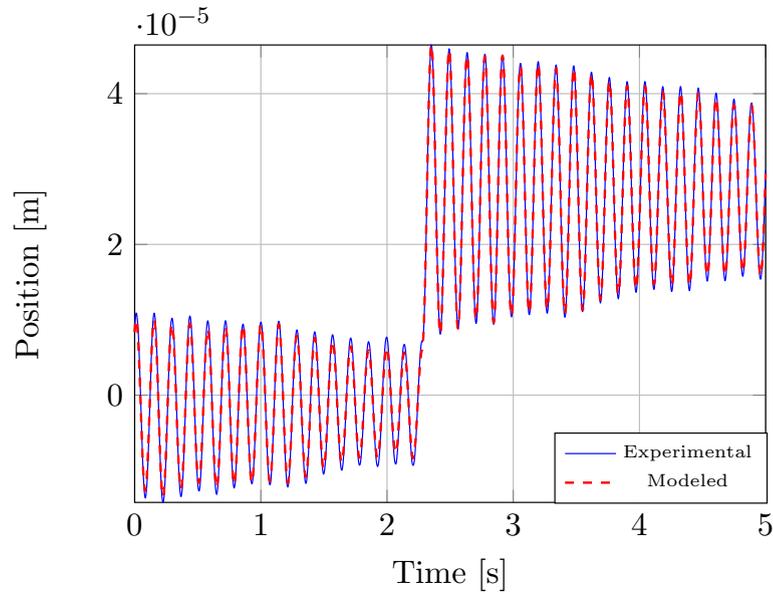


FIGURE 6.5 – Déplacement mesuré et simulé du tube lorsqu'on tient compte de l'entrée virtuelle estimée

6.3/ MODE PASSIF DE L'ACCÉLÉROMÈTRE PROPOSÉ

En mode passif, le tube lévite verticalement grâce au courant i_0^c qui permet de compenser son poids. Dans ce mode, aucune entrée de commande n'est appliquée au tube, donc la commande u est nulle. Par conséquent, la représentation équivalente de la dynamique exacte du tube (6.21) devient :

$$m' \ddot{z} - \gamma' i_0^c z + K'_v \dot{z} = m' \mathcal{A}_c \quad (6.25)$$

La position du tube z est stable car γ' est négatif (voir tableau 6.2). L'accéléromètre devient ainsi un système dynamique, dont l'entrée est une entrée inconnue \mathcal{A}_c . Elle représente l'accélération sismique que nous cherchons à mesurer et son incertitude associée.

À partir de l'équation (6.25), l'entrée \mathcal{A}_c que l'on cherche à quantifier peut être calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathcal{A}_c = \ddot{z} + \frac{1}{m'} (K'_v \dot{z} - i_0^c \gamma' z) \quad (6.26)$$

En pratique, cette dernière équation n'est pas directement utilisée, car le déplacement z du tube est inconnu et son mesurage z' a un certain niveau de bruit. Par ailleurs, les deux dérivées de z ne sont pas accessibles à la mesure et elles sont délicates à calculer à cause du bruit de mesure délivré par le capteur de position. De ce fait, nous avons besoin d'un observateur d'état et d'entrée inconnue pour l'observation de ces quantités. Ce point est l'objet de la prochaine sous-section.

6.3.1/ ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION EN UTILISANT LE GELESO

D'après (6.25), la dynamique exacte du tube est donnée par l'équation suivante :

$$\ddot{z} = -\frac{K'_v}{m'} \dot{z} + \frac{i_0^c \gamma'}{m'} z + \frac{1}{m'} u + \mathcal{A}_c \quad (6.27)$$

Soit x_1 la position z du tube et x_2 la vitesse \dot{z} du tube. La représentation dans l'espace d'état de la dynamique (6.27) est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{i_0^c \gamma'}{m'} x_1 - \frac{K'_v}{m'} x_2 + \mathcal{A}_c, \\ z = x_1. \end{cases} \quad (6.28)$$

La forme matricielle de (6.28) est alors la suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + \mathcal{B}\mathcal{A}_c, \\ z = CX, \end{cases} \quad (6.29)$$

où $X = [x_1 \ x_2]^\top = [z \ \dot{z}]^\top$ représente l'état du système et \mathcal{A}_c représente l'entrée inconnue qui inclut l'accélération que nous cherchons à observer. Les matrices A , \mathcal{B} et C sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma' i_0^c}{m'} & -\frac{K'_v}{m'} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]. \quad (6.30)$$

Pour l'observation de X et \mathcal{A}_c , nous utilisons l'observateur GeLESO que nous avons développé dans le chapitre 5. Cet observateur permet d'estimer à la fois l'état du système, c'est-à-dire la position z et la vitesse \dot{z} , et l'entrée inconnue \mathcal{A}_c . Le GeLESO se base sur la définition d'un état étendu x_3 qui inclut \mathcal{A}_c que nous cherchons à estimer. Pour la définition de cet état étendu, nous allons suivre les étapes détaillées dans la section 5.3 dans le chapitre 5.

L'état x_3 se déduit de la composante \dot{x}_2 qui est définie dans (6.28). L'expression de x_3 est la suivante :

$$x_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'} x_1 + \mathcal{A}_c. \quad (6.31)$$

D'après (6.31), la représentation d'état étendue de (6.28) devient équivalente à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{K'_v}{m'} x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'} x_2 + \dot{\mathcal{A}}_c, \\ z = x_1 \end{cases} \quad (6.32)$$

où x_1, x_2, x_3 sont les composantes de l'état étendu $X_e = [x_1, x_2, x_3]^\top$. L'entrée inconnue \mathcal{A}_c est déduite de x_3 par :

$$\mathcal{A}_c = x_3 - \frac{i_0^c \gamma'}{m'} x_1. \quad (6.33)$$

La représentation d'état matricielle de (6.32) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_e = A_e X_e + \mathcal{B}_e \dot{\mathcal{A}}_c, \\ z = C_e X_e \end{cases} \quad (6.34)$$

avec

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{K'_v}{m'} & 1 \\ 0 & \frac{\gamma' i_0^c}{m'} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_e = [1 \ 0 \ 0]. \quad (6.35)$$

La paire (A_e, C_e) dans (6.35) est observable grâce à la forme compagnon de la matrice A_e . Dans ce chapitre, un observateur type GeLESO d'ordre 3 est utilisé. Soit v le bruit de mesure qui est additif sur $z = x_1$. La mesure de z est alors $z' = x_1 + v$. L'entrée du GeLESO est z' . Sa dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_1(z' - z_1), \\ \dot{z}_2 = -\frac{K'_v}{m'}z_2 + z_3 + L_2(z' - z_1), \\ \dot{z}_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}z_2 + L_3(z' - z_1), \end{cases} \quad (6.36)$$

avec z_1, z_2, z_3 les estimations des états x_1, x_2, x_3 respectivement. Les termes L_1, L_2, L_3 représentent les gains de l'observateur à choisir pour assurer la stabilité de (6.36).

$$\dot{Z} = (A_e - \mathcal{L}C_e)Z + \mathcal{L}z' \quad (6.37)$$

Comme l'estimation de l'état étendu x_3 est donnée par l'équation suivante :

$$z_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}z_1 + \hat{\mathcal{A}}_c, \quad (6.38)$$

l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ de l'entrée inconnue \mathcal{A}_c est déduite de (6.38) par :

$$\hat{\mathcal{A}}_c = z_3 - \frac{i_0^c \gamma'}{m'}z_1. \quad (6.39)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est obtenue en soustrayant (6.36) de (6.32). Cette dynamique est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - L_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = -\frac{K'_v}{m'}e_2 + e_3 - L_2 e_1, \\ \dot{e}_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}e_2 - L_3 e_1 + \dot{\mathcal{A}}_c, \end{cases} \quad (6.40)$$

qui peut être mise sous la forme suivante :

$$\dot{E} = (A_e - \mathcal{L}C_e)E + \mathcal{B}_e \dot{\mathcal{A}}_c \quad (6.41)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}.$$

Pour assurer la stabilité de la dynamique de l'erreur d'observation (6.41), le vecteur de gain de l'observateur \mathcal{L} doit être choisi de telle sorte que la matrice $(A_e - \mathcal{L}C_e)$ soit de Hurwitz. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé la méthode proposée dans (Gao, 2003; Zheng et al., 2007), qui est détaillée dans le chapitre 5.

Dans la prochaine section, nous allons illustrer l'efficacité de l'observateur GeLESO pour l'estimation de l'état X_e et de l'entrée inconnue \mathcal{A}_c .

6.3.1.1/ SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Cette section a pour objectif d'illustrer par des simulations l'efficacité du GeLESO en termes d'estimations de l'état du système et de l'entrée inconnue. Dans un premier temps, l'observateur GeLESO va être synthétisé lorsque le modèle cible choisi a exactement le même comportement que le système physique, ce qui implique que $\mathcal{C} = 0$. Par conséquent, dans le modèle équivalent (6.27) qui représente la dynamique du système physique, on a :

$$\mathcal{A}_c = -\ddot{z}_a + \frac{1}{m'}\mathcal{C} = -\ddot{z}_a. \quad (6.42)$$

Le cas où le modèle cible est différent du modèle physique sera illustré plus loin. Par ailleurs, dans ces simulations, le bruit de mesure v est nul et donc la mesure de déplacement z' est égale à z :

$$z' = z + v = z. \quad (6.43)$$

Pour réaliser ces simulations, nous nous sommes basés sur deux types d'accélération externes $-\ddot{z}_a$ de la table anti-vibrations.

La première accélération est représentée par un signal de type créneaux avec une amplitude différente pour chaque créneau (test 1). La deuxième accélération est un signal sinusoïdal avec une fréquence qui évolue dans le temps (test 2). Pour $t \leq 28$ s, l'accélération est d'amplitude 10^{-3} m/s² et de pulsation 0,5 rad/s. Cette accélération est donnée par $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \sin(0,5 t)$. La fréquence de cette accélération en hertz est égale à 0,08 Hz. A partir de l'instant $t > 28$ s, la fréquence de cette accélération devient 0,15 Hz et son amplitude reste la même.

Dans le test 1, nous avons utilisé un GeLESO d'ordre 3 (6.36), car le modèle cible est d'ordre 2 et l'accélération est constante par morceaux. Les conditions initiales de l'observateur sont différentes de celles du système, elles sont toutes prise égales à zéro. Les gains de l'observateur sont calculés en utilisant la méthode présentée dans la section 5.3.2 du chapitre 5. Pour une valeur de $\omega_0 = 60$ rad/s, les valeurs numériques des gains sont données par : $\mathcal{L} = [180 \quad 10800 \quad 216000]^T$. Les résultats des simulations du test 1 sont illustrés par six figures que nous allons commenter.

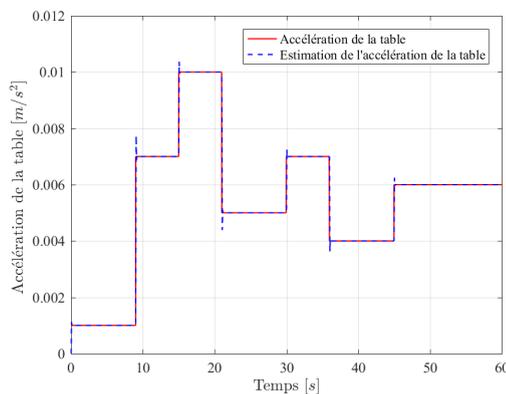


FIGURE 6.6 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ (test 1)

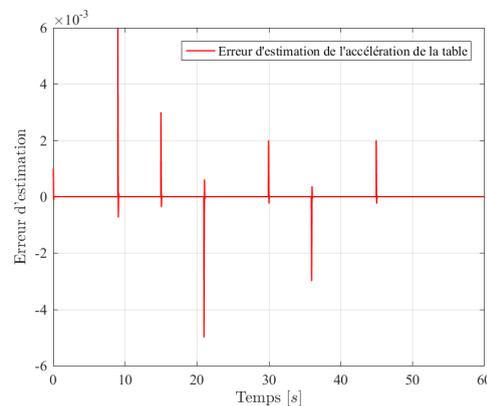


FIGURE 6.7 – Évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$ (test 1)

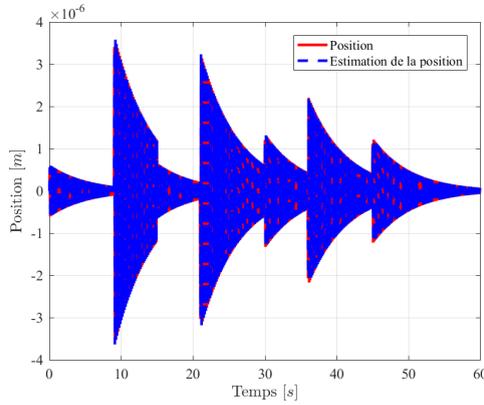
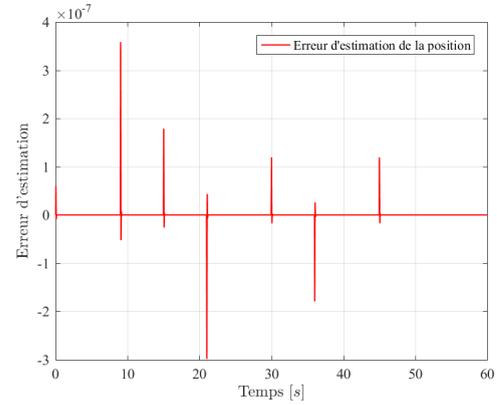
FIGURE 6.8 – Évolution de la position du tube z et de son estimation (test 1)

FIGURE 6.9 – Évolution de l'erreur d'estimation de la position (test 1)

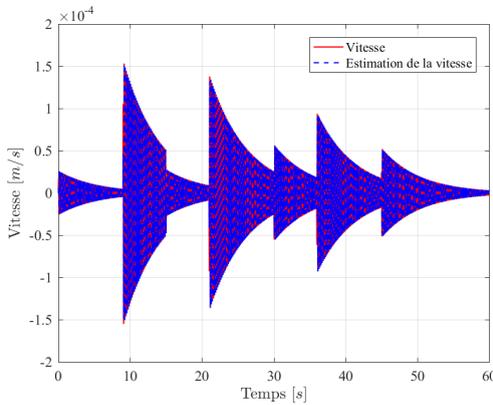
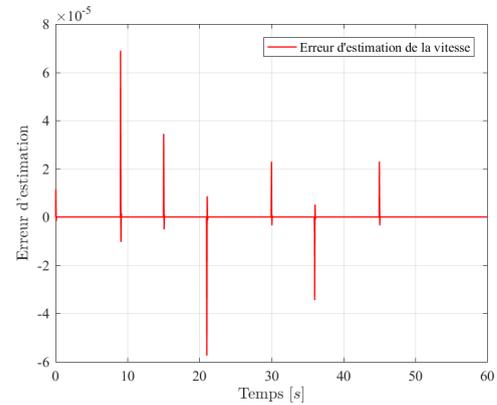
FIGURE 6.10 – Évolution de la vitesse du tube z et de son estimation (test 1)

FIGURE 6.11 – Évolution de l'erreur d'estimation de la vitesse (test 1)

La figure 6.6 illustre l'évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et l'estimation de \mathcal{A}_c avec le GeLESO. Nous constatons qu'en régime permanent, $\hat{\mathcal{A}}_c$ correspond à l'accélération simulée $-\ddot{z}_a$.

La figure 6.7 illustre l'évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$. Cette accélération étant constante par morceaux, son erreur d'estimation est nulle en régime permanent. En effet, il a été démontré dans le théorème 5.3.1 que l'erreur d'estimation fournie par le GeLESO d'ordre $p+i$ (p étant l'ordre du modèle cible et i le nombre d'états étendu) converge asymptotiquement vers zéro dans le cas d'une entrée inconnue dont la dérivée i ème est nulle.

Les figures 6.8 et 6.9 illustrent respectivement l'évolution de la position z du tube avec son estimation z_1 et l'erreur d'estimation donnée par le GeLESO. Cette erreur est nulle en régime permanent.

Les figures 6.10 et 6.11 illustrent respectivement l'évolution de la vitesse \dot{z} du tube avec son estimation z_2 et l'erreur d'estimation fournie par le GeLESO. Cette erreur est nulle en régime permanent.

Dans le test 2, l'accélération externe est un signal sinusoïdal dont la fréquence évolue au cours du temps et la dérivée ne s'annule donc jamais. D'après le théorème 5.3.1, le GeLESO donne une estimation de l'état et de l'accélération avec une erreur bornée. Pour

minimiser cette erreur, nous avons exploité les résultats du théorème 5.3.2. Ce dernier montre que si l'ordre du GeLESO augmente, ce qui est obtenu en introduisant plus d'états dans le vecteur d'état, alors l'erreur d'estimation diminue. Pour illustrer ce résultat, nous avons utilisé trois observateurs de type GeLESO. Les deux premiers sont d'ordre 3 (un seul état étendu) dont le réglage des gains est différent. Le troisième observateur est d'ordre 4 (deux états étendus), ce dernier est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_1(z' - z_1), \\ \dot{z}_2 = -\frac{K'_v}{m'}z_2 + z_3 + L_2(z' - z_1), \\ \dot{z}_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}z_2 + z_4 + L_3(z' - z_1), \\ \dot{z}_4 = L_4(z' - z_1) \end{cases} \quad (6.44)$$

avec $z' = z$ en absence de bruit. Les conditions initiales des observateurs sont toutes prise égales à zéro et différentes de celles du système. Les gains de l'observateur sont calculés en utilisant la méthode présentée dans la section 5.3.2. Pour le premier observateur d'ordre 3, nous avons choisi $\omega_0 = 160$ rad/s. Les valeurs numériques des gains du GeLESO d'ordre 3 sont données par $\mathcal{L} = [480 \ 76800 \ 4096000]^T$. Pour les deux autres observateurs, nous avons choisi $\omega_0 = 60$ rad/s. Les valeurs numériques des gains du GeLESO d'ordre 3 sont données par $\mathcal{L} = [180 \ 10800 \ 216000]^T$ et celles du GeLESO d'ordre 4 sont données par $\mathcal{L} = [240 \ 21600 \ 864000 \ 1296000]^T$.

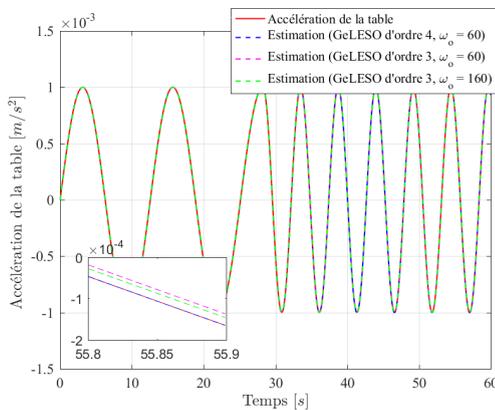


FIGURE 6.12 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ (test 2)

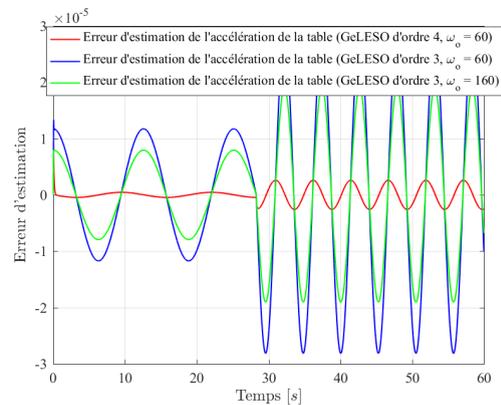


FIGURE 6.13 – Évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$ (test 2)

La figure 6.12 illustre l'évolution de l'accélération sismique (désignée dans la légende par "accélération de la table") et l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ donnée par le GeLESO d'ordre 3 avec $\omega_o = 160$ (courbe verte), le GeLESO d'ordre 3 avec $\omega_o = 60$ (courbe rose) et celui d'ordre 4 avec $\omega_o = 60$ (courbe bleue). Un zoom sur la période de temps entre 55,8 s et 55,9 s est présent sur cette figure. Ce zoom montre que le GeLESO d'ordre 4 offre une meilleure estimation par rapport aux observateurs GeLESO d'ordre 3 avec $\omega_o = 60$ et $\omega_o = 160$.

La figure 6.13 illustre l'évolution de l'erreur d'estimation de l'accélération \mathcal{A}_c avec le GeLESO d'ordre 3 et $\omega_o = 160$ (courbe verte), avec le GeLESO d'ordre 3 et $\omega_o = 60$ (courbe bleue) et avec celui d'ordre 4 et $\omega_o = 60$ (courbe rouge). L'erreur d'observation du GeLESO d'ordre 4 est systématiquement plus petite que celle des deux observateurs GeLESO d'ordre 3.

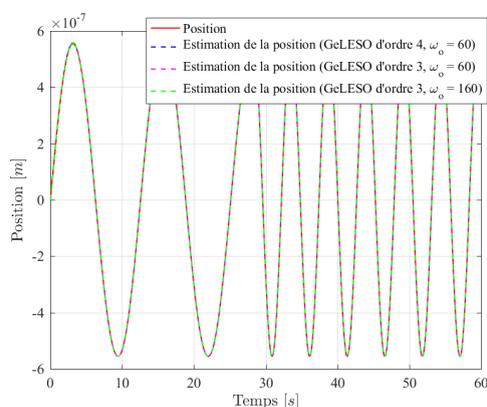
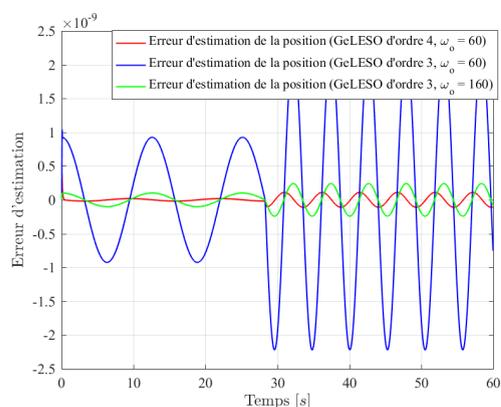
FIGURE 6.14 – Évolution de la position du tube z et de son estimation (test 2)

FIGURE 6.15 – Évolution de l'erreur d'estimation de la position (test 2)

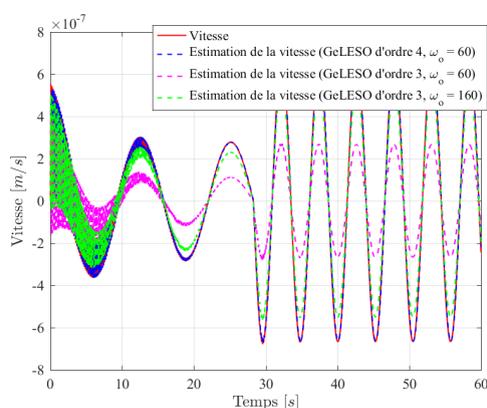
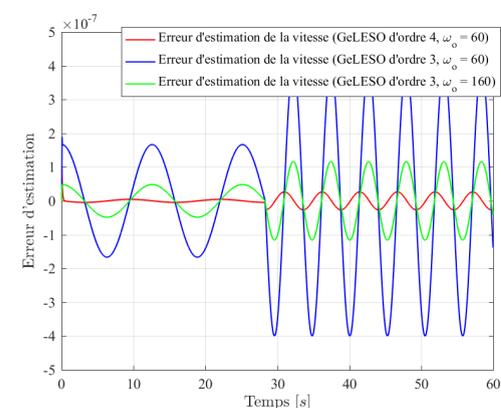
FIGURE 6.16 – Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation (test 2)

FIGURE 6.17 – Évolution de l'erreur d'estimation de la vitesse (test 2)

Les figures 6.14 et 6.15 illustrent respectivement l'évolution de la position du tube z et de son estimation z_1 ainsi que l'erreur d'estimation donnée par les trois observateurs. Cette figure illustre que l'erreur d'observation du GeLESO d'ordre 4 est également plus petite que celle des deux observateurs GeLESO d'ordre 3.

Les figures 6.16 et 6.17 illustrent respectivement l'évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation \dot{z}_2 ainsi que l'erreur d'estimation donnée par les trois observateurs. Cette figure montre toujours que l'erreur d'observation du GeLESO d'ordre 4 est plus petite que celle des deux observateurs GeLESO d'ordre 3.

6.3.1.2/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Dans cette section, nous avons pour objectif de valider expérimentalement les résultats de simulation, tout en sachant que cette fois-ci le modèle cible et le comportement physique du tube sont forcément un peu différents. Nous avons suivi le même scénario que dans le test 1 de la simulation. Pour pouvoir recréer physiquement des accélérations \ddot{z}_a qui ont une forme de créneaux, nous avons utilisé la force électromotrice qui est générée

par u . On sait que le comportement réel de la tige est donnée par (6.19) :

$$m'\ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = u - m' \ddot{z}_a + \mathcal{C}. \quad (6.45)$$

De ce fait si on arrive à générer une force $u = f_{elec}$ dont on impose qu'elle vaille :

$$u = -m' \ddot{z}_c, \quad (6.46)$$

avec un profil en créneaux pour \ddot{z}_c , on aura :

$$m'\ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = -m'(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a) + \mathcal{C}. \quad (6.47)$$

Si \ddot{z}_c est choisie très supérieure à l'accélération sismique \ddot{z}_a , le comportement induit de la tige sera majoritairement la conséquence du terme \ddot{z}_c qui joue un rôle identique à \ddot{z}_a . Le modèle de f_{elec} a été utilisé pour déterminer quelle consigne de courant i^c permet de générer l'accélération \ddot{z}_c :

$$u = f_{elec}(i^c, z') = i^c(\gamma' z' + \beta') = -m' \ddot{z}_c \quad \Rightarrow \quad i^c = \frac{-m' \ddot{z}_c}{\gamma' z' + \beta'}. \quad (6.48)$$

Le profil de courant i^c dépend de l'accélération \ddot{z}_c qu'on veut générer et du déplacement mesuré z' de la tige. Du fait des erreurs de modélisation de f_{elec} , de la dynamique d'établissement du courant dans le générateur et des vibrations sismiques \ddot{z}_a qui restent forcément présentes, l'accélération réelle générée $\ddot{z}_c + \ddot{z}_a$ sera forcément un peu différente d'un profil en créneaux. La force électromagnétique réelle qui est quasi constante par morceau déplace le tube vers le haut ou vers le bas (voir figure 6.19). Le profil de l'accélération imposée $-\ddot{z}_c$ est représentée en rouge sur la figure 6.18.

La température de la chambre climatique a été réglée à 22.5°C et l'humidité à 30%. Nous avons appliqué un courant $i_0 = 0,0173$ A pour compenser le poids du tube afin de le mettre en lévitation. Comme les résultats des simulations précédentes montrent que le GeLESO d'ordre 4 donne une meilleure estimation que le GeLESO d'ordre 3, nous avons utilisé un GeLESO d'ordre 4 pour estimer l'accélération \ddot{z}_a à partir de la mesure bruitée de déplacement z' . De ce fait, la dynamique du GeLESO est donnée par (6.44). Pour une valeur de $\omega_o = 60$, les valeurs numériques des gains de cet observateur sont $\mathcal{L} = [240 \quad 21600 \quad 864000 \quad 1296000]^T$.

La figure 6.18 illustre l'évolution de l'accélération constante par morceau $-\ddot{z}_c$ induite par le modèle de la force électromagnétique et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ donnée par le GeLESO d'ordre 4. Les différences entre $\hat{\mathcal{A}}_c$ et $-\ddot{z}_c$ correspondent aux accélérations sismiques qui s'appliquent en plus à la tige ainsi qu'aux différentes sources d'incertitudes qui influent sur l'estimation de l'accélération.

La figure 6.19 illustre l'évolution de la position du tube z et de son estimation z_1 , avec un zoom sur une courte période de temps. Le GeLESO débruite la sortie mesurée et offre une bonne estimation de la position avec un temps de convergence très faible.

La figure 6.20 illustre l'évolution de l'estimation de la vitesse du tube donnée par le GeLESO.

6.3.2/ ÉTUDE DE LA SENSIBILITÉ AUX PARAMÈTRES DU MODÈLE

Dans cette section, nous allons illustrer en simulation l'effet des incertitudes paramétriques du modèle (6.21) sur l'estimation de l'accélération sismique. A travers cette analyse, nous allons vérifier quels paramètres influencent le plus l'estimation de l'accélération

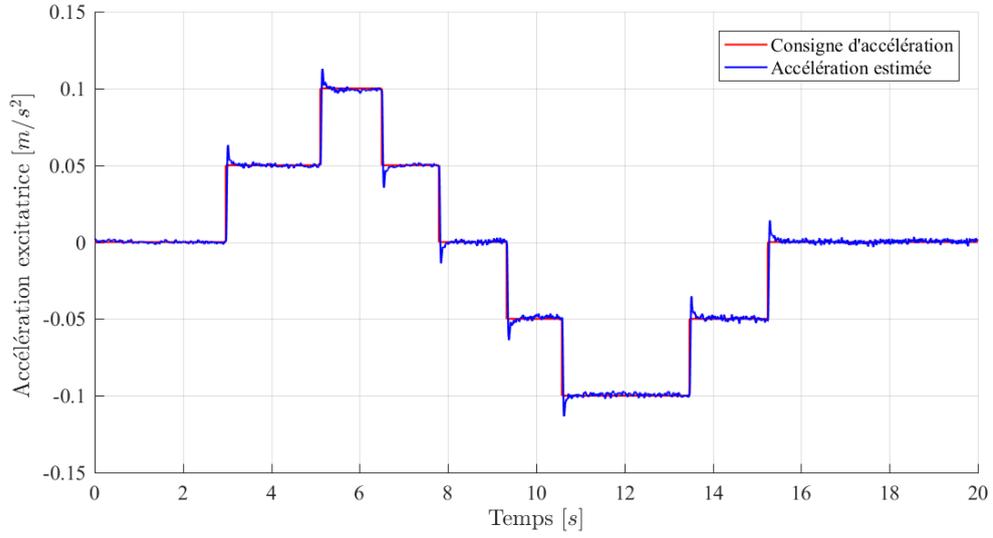


FIGURE 6.18 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_c$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$

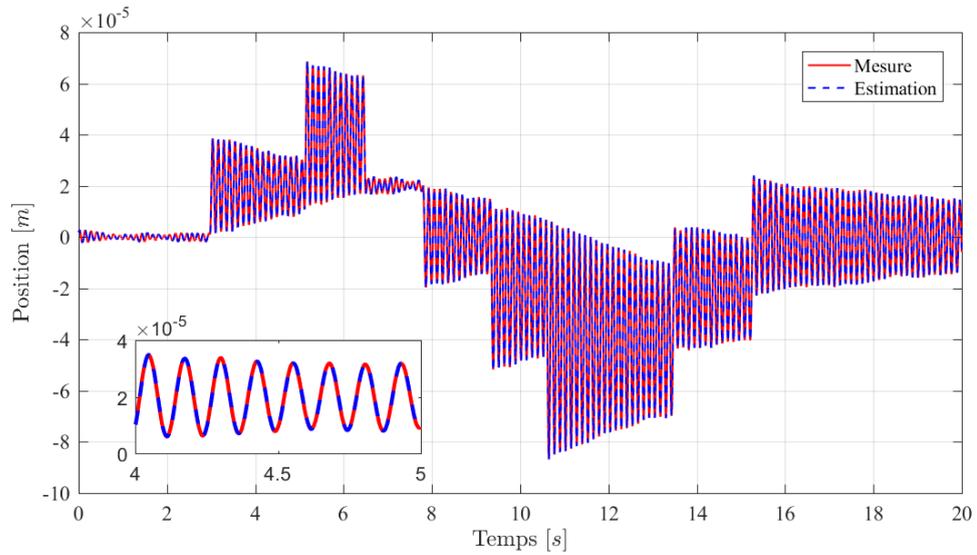


FIGURE 6.19 – Évolution de la position du tube z et de son estimation

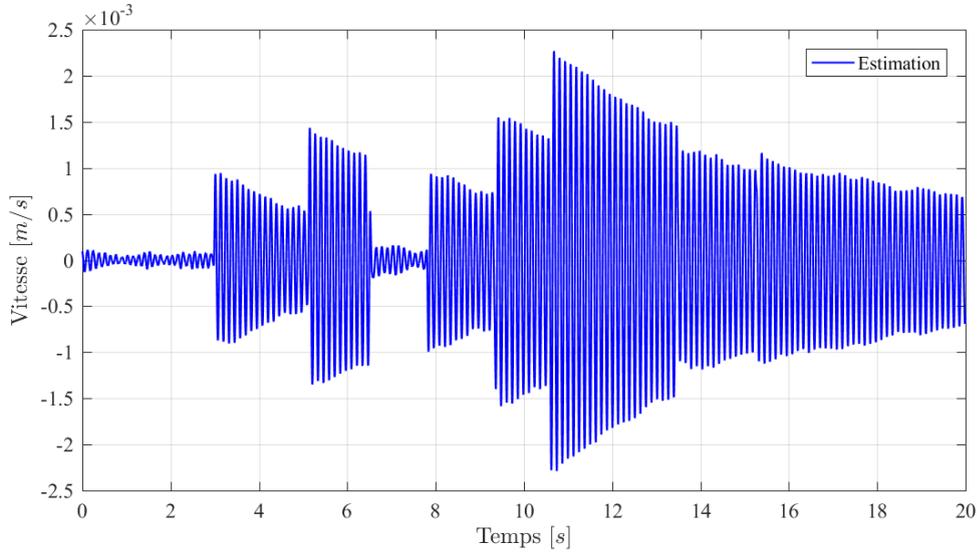
sismique \ddot{z}_a . Cette accélération est simulée par un signal de type échelon. La même accélération \ddot{z}_a d'amplitude $0,001 \text{ m/s}^2$ est utilisée dans toutes les simulations. Nous avons aussi pris $\theta = 0$.

Pour effectuer cette analyse de sensibilité, nous avons supposé que la dynamique physique du tube obéissait à la loi comportementale suivante qui a été simulée avec $i_0 = i_0^c$:

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = -m \ddot{z}_a. \quad (6.49)$$

Lorsqu'on fait une mesure m' de la masse m , cela influe, par effet domino, sur la valeur de β' :

$$\beta' = \frac{m' g \cos \theta}{i_0^c} \quad (6.50)$$

FIGURE 6.20 – Évolution de l'estimation de la vitesse du tube z

et sur la valeur de γ' , qui va être identifiée dynamiquement en régime libre (cf. chapitre 3), car sa valeur exacte théorique vaut :

$$\omega_0^2 = \frac{-i_0 \gamma}{m} = \frac{-i_0^c \gamma'}{m'} \quad \Longrightarrow \quad \gamma' = \frac{m'}{m} \gamma \quad \text{lorsque } i_0 = i_0^c. \quad (6.51)$$

Pour une identification dynamique non parfaite de γ' , la valeur identifiée, notée ici γ'_{id} , pourra s'éloigner de la valeur de γ' qui a été définie dans (6.51). Le modèle cible utilisé par le GeLESO est alors :

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - i_0^c \gamma'_{id} z = -m' \mathcal{A}_c. \quad (6.52)$$

Les vraies valeurs de m , K_v et γ ont été prises par convention égales à celle données dans le tableau 6.2. Chaque paramètre m' et K'_v peut varier de $\pm 10\%$ autour de sa vraie valeur. En résumé, lorsque m' varie, les paramètres β' et γ' varient automatiquement, et la valeur identifiée de γ' , notée γ'_{id} , varie par rapport à γ' .

Première simulation : étude de la sensibilité par rapport à m'

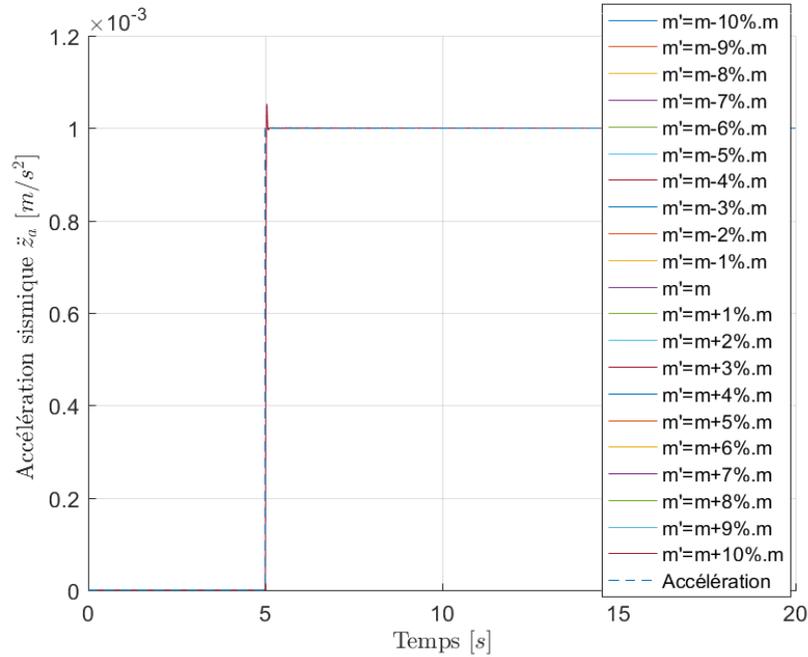
Cette première simulation illustre l'influence de la variation de la masse mesurée m' sur l'estimation de l'accélération sismique lorsqu'on a une identification parfaite de γ' pour son usage dans le GeLESO :

$$\gamma'_{id} = \gamma'. \quad (6.53)$$

Les résultats de cette simulation sont illustrés dans la figure 6.21. On constate que l'accélération sismique est correctement estimée par le GeLESO. Ceci est normal, puisque le triplet de paramètres m' , K'_v et γ' décrit parfaitement le comportement du système physique gouverné par les paramètres m , K_v et γ . En effet, ces 2 triplets de valeurs induisent exactement la même pulsation propre ω_0 et le même gain statique pour les deux représentations :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0^c \gamma z = -m \ddot{z}_a, \quad (6.54)$$

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - i_0^c \gamma'_{id} z = -m' \mathcal{A}_c. \quad (6.55)$$

FIGURE 6.21 – Effet de l'incertitude de la masse mesurée m' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ **Deuxième simulation : étude de la sensibilité par rapport au paramètre identifié γ'_{id}**

Dans cette simulation, nous avons fait varier m' (ce qui fait varier β' et γ') et nous avons en plus ajouté une erreur d'identification de 5 % sur γ' :

$$\gamma'_{id} = \gamma' + 0.05 \gamma'. \quad (6.56)$$

Les résultats de cette simulation sont illustrés dans la figure 6.22. On constate une dégradation forte de l'estimation de l'accélération sismique qui est liée à la mauvaise identification de γ' . Cette dégradation porte aussi bien sur le régime dynamique de l'estimation que sur l'erreur statique de l'estimation. Ce dernier point est induit par le gain statique inexact de la représentation suivante qui est utilisée dans le GeLESO :

$$m' \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0^c \gamma'_{id} z = -m' \mathcal{A}_c. \quad (6.57)$$

Troisième simulation : étude de la sensibilité par rapport à K'_v

Dans la troisième simulation, nous avons vérifié l'influence du paramètre identifié K'_v en supposant que la masse m est correctement mesurée ($m' = m$) et que γ' est correctement identifié. Le résultat de cette simulation est illustré dans la figure 6.23. On constate que l'accélération sismique est correctement estimée.

D'après ces différentes simulations, on constate qu'en mode passif, la qualité de l'identification de γ' joue un rôle important pour estimer correctement l'amplitude d'une accélération constante, ou lentement variable. La présence d'un biais sur la reconstruction de l'accélération \ddot{z}_a est problématique en basse fréquence si γ' n'est pas correctement identifiée. La dégradation de la réponse transitoire sur l'estimation est également un point négatif. Par conséquent, il semble impératif d'essayer de minimiser l'effet de l'incertitude

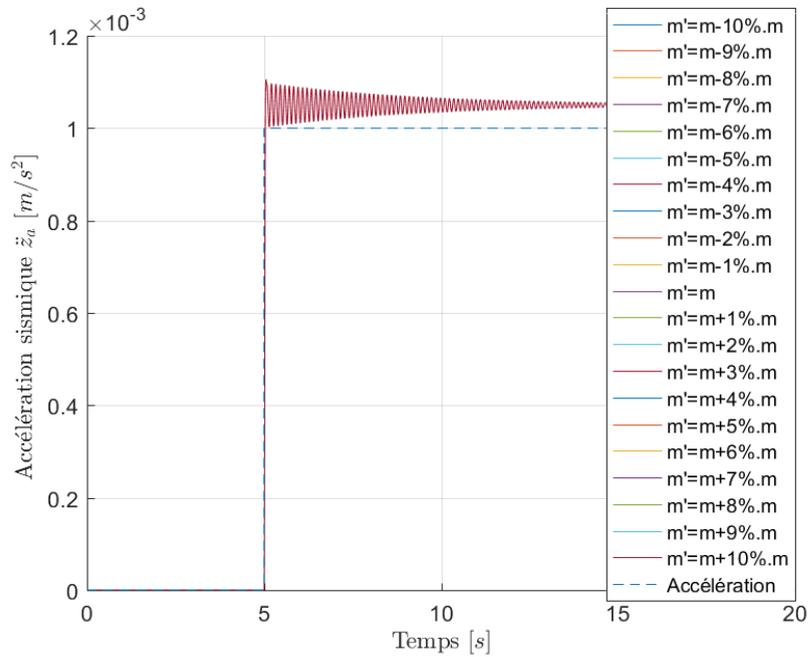


FIGURE 6.22 – Effet de l'incertitude de la masse et du paramètre γ' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$

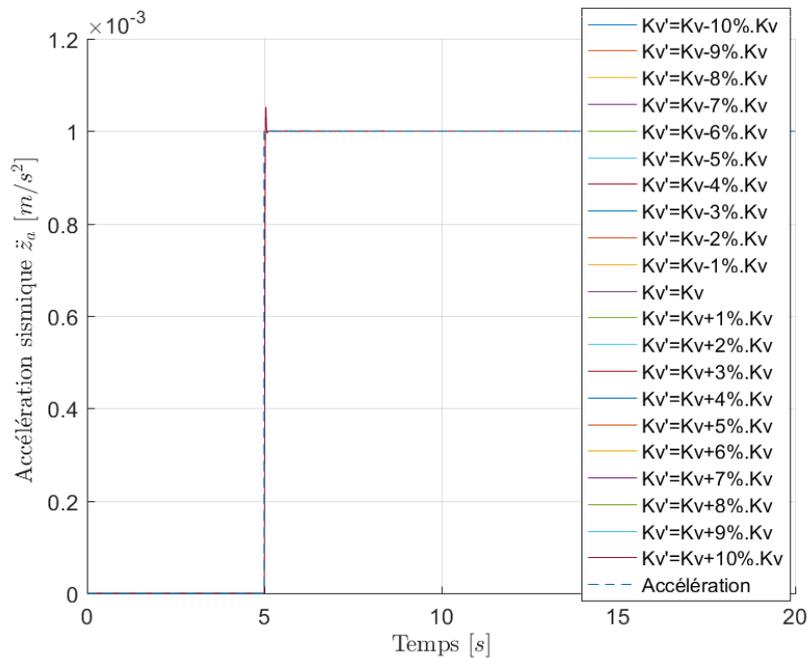


FIGURE 6.23 – Effet de l'incertitude du paramètre K'_v sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$

présente sur γ' . Par ailleurs, si l'influence des autres formes d'incertitudes incluses dans \mathcal{C} (qui sont négligées dans cette étude puisqu'on ne sait pas les simuler) est également diminuée, la qualité de l'observation sera davantage améliorée. Pour parvenir à cet objectif, nous allons utiliser l'accéléromètre en mode actif.

6.4/ MODE ACTIF DE L'ACCÉLÉROMÈTRE PROPOSÉ

L'accéléromètre actif que nous présentons possède des avantages par rapport à l'accéléromètre en mode passif. Les non-linéarités sont moins excitées puisque la masse sismique reste quasi statique. Les effets des incertitudes sur les paramètres du modèle sont réduits. Enfin, les problèmes liés à l'accélération appliquée sur les axes transversaux à l'axe sensible (sensibilité transversale) se réduisent à l'influence de ces accélérations transverses lorsque l'altitude du tube reste proche de zéro.

Dans le mode actif, tout comme dans le mode passif, le tube lévite verticalement grâce à la consigne de courant i_0^c qui permet de compenser son poids. En revanche, contrairement au mode passif, la position du tube est désormais contrôlée à l'aide de l'entrée de commande u . La dynamique réelle du tube est alors décrite par la représentation équivalente suivante :

$$m' \ddot{z} - \gamma' i_0^c z + K_v' \dot{z} = u + m' \mathcal{A}_c. \quad (6.58)$$

6.4.1/ PRINCIPE

Les accéléromètres asservis mettent en œuvre le principe de mesure par la méthode dite "du zéro" (voir la figure 6.24).

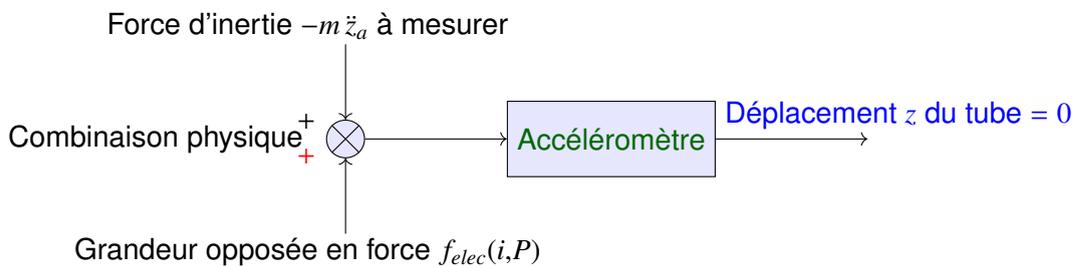


FIGURE 6.24 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre asservi

La force physique électromagnétique $f_{elec}(i,P)$ est utilisée pour compenser l'effet de la force d'inertie $-m\ddot{z}_a$ engendrée par l'accélération sismique, ce qui permet de réguler la position z du tube autour de zéro.

D'un point de vue physique, si la combinaison physique des deux forces induit une compensation exacte en générant à chaque instant avec le contrôleur une force physique

$$f_{elec}(i,P) = m\ddot{z}_a,$$

l'altitude z du tube, sa vitesse \dot{z} et son accélération \ddot{z} sont constamment nulles. Dans ce cas, la représentation (6.58) du comportement réel du tube à partir du modèle cible devient :

$$u + m' \mathcal{A}_c = 0 \quad (6.59)$$

et le terme \mathcal{A}_c qui va être estimé par l'observateur est alors :

$$\mathcal{A}_c = -\frac{u}{m'}. \quad (6.60)$$

Lorsque la sortie z est nulle, on a en absence de bruit mesure $u = i^c (\gamma' z + \beta') = i^c \beta'$, donc lorsque le générateur de courant fournit un courant i égal à la consigne de courant i^c (aucune erreur sur le courant généré), on a :

$$\mathcal{A}_c = -\frac{i^c \beta'}{m'} = -\frac{i \beta'}{m'}. \quad (6.61)$$

On a aussi $\beta = \frac{m g \cos \theta}{i_0}$ et $\beta' = \frac{m' g \cos \theta}{i_0^c} = \frac{m' g \cos \theta}{i_0}$, si le générateur génère un courant de sustentation i_0 qui suit parfaitement la consigne i_0^c (aucune erreur sur le courant i_0). Dans ce cas :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{m}{m'} \implies \frac{\beta}{m} = \frac{\beta'}{m'}. \quad (6.62)$$

Il vient alors :

$$\mathcal{A}_c = -\frac{i \beta}{m}. \quad (6.63)$$

Lorsque la sortie z est nulle, on a $f_{elec}(i, P) = i (\gamma z + \beta) = i \beta$, donc :

$$\mathcal{A}_c = -\frac{f_{elec}(i, P)}{m} = -\frac{m \ddot{z}_a}{m} = -\ddot{z}_a. \quad (6.64)$$

On trouve ainsi le résultat fondamental suivant :

$$\mathcal{A}_c = -\ddot{z}_a. \quad (6.65)$$

Autrement dit, le biais $\frac{1}{m'} \mathcal{C}$ qui était présent sur l'accélération \mathcal{A}_c que le GeLESO va estimer, disparaît (cf. (6.23)). On a donc :

$$\mathcal{C} = 0.$$

Si on calcule \mathcal{C} avec (6.16) en tenant compte du fait qu'on est en régime statique, on trouve :

$$\mathcal{C} = -u + m' \ddot{z}_a. \quad (6.66)$$

Comme $\mathcal{C} = 0$, la commande u qui est générée par le contrôleur est alors nécessairement

$$u = m' \ddot{z}_a.$$

Elle n'est ainsi pas tout à fait l'opposé de la vraie force d'inertie $-m \ddot{z}_a$ qui excite le tube. La commande u tient compte de sa transformation futur à travers la chaîne de commande pour s'établir à la bonne valeur. Par ailleurs, ce schéma de commande permet de tenir compte des erreurs commises sur l'ensemble des paramètres qui constituent la partie opérative, le tout sans avoir besoin de connaître toute la complexité de sa représentation interne, laquelle peut être très grande. Par contre, elle nécessite de connaître parfaitement le modèle électromagnétique autour du point de fonctionnement $z = 0$. La qualité de la génération du courant i à partir de la consigne i^c va aussi jouer un grand rôle puisqu'il faut avoir une erreur nulle sur le courant généré pour établir le résultat précédent. Ceci suppose d'avoir un générateur de courant de qualité métrologique avec une très grande justesse.

En pratique, la régulation à zéro ne sera évidemment pas parfaite, ce qui va dégrader le résultat obtenu et induire que $\mathcal{C} \neq 0$. Au final, il sera donc important de respecter deux conditions :

- avoir une estimation robuste $\hat{\mathcal{A}}_c$ qui converge vers A_c avec un bon transitoire et une erreur asymptotique faible. Le GeLESO standard ou d'ordre supérieur permet de répondre à ce cahier des charges ;
- avoir une régulation performante pour minimiser l'écart entre \mathcal{A}_c et $-\ddot{z}_a$.

Si elles sont réunies, ces deux conditions vont permettre d'augmenter la justesse de l'estimation du GeLESO puisque cette justesse est par définition l'écart entre l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ et la valeur vraie $-\ddot{z}_a$.

6.4.2/ COMMANDE VIRCO PAR REJET DE L'ENTRÉE VIRTUELLE

Le principe de cette commande a été détaillé dans la section 5.3.6 du chapitre 5. En pratique, à partir des informations fournies par l'observateur, le contrôleur calculera la valeur u de la force électromagnétique nécessaire pour maintenir la position du tube à zéro.

Dans cette approche, la commande u est décomposée en deux parties additives, $u = u_1 + u_2$. Les informations nécessaires et suffisantes pour établir la loi de commande u sont le vecteur d'état X et l'entrée inconnue $m' \mathcal{A}_c$ dont les estimations \hat{X} et $m' \hat{\mathcal{A}}_c$ sont données par le GeLESO.

La commande $u_1 = -m' \hat{\mathcal{A}}_c$ permet d'annuler l'écart comportemental entre le modèle cible et le système physique de telle sorte que l'accéléromètre bouclé avec u_1 se comporte comme le modèle cible $M(s)$ qui ne dépend plus de l'accélération à mesurer. Ce faisant, on oblige un dispositif mal connu ayant une dynamique incertaine à se comporter comme un système connu dont on a imposé le comportement. On rejette donc toutes les incertitudes. Cette première commande est illustrée dans la figure 6.25.

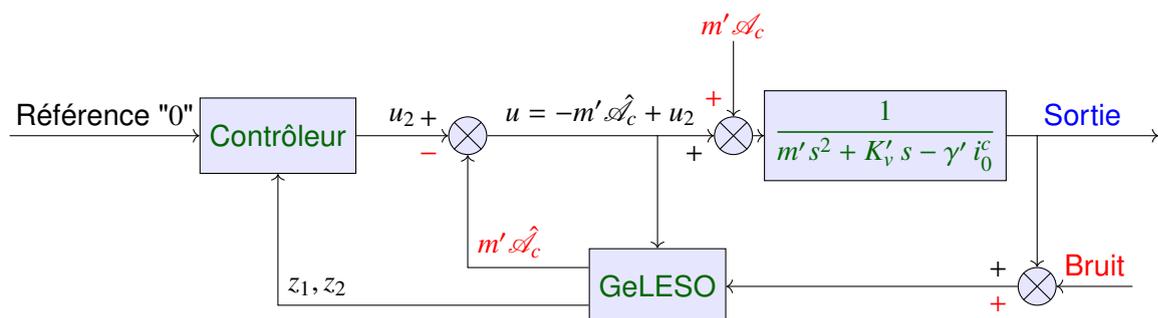


FIGURE 6.25 – Schéma de commande de rejet de l'entrée virtuelle (VIRCO)

La commande linéaire u_2 issue du contrôleur peut ensuite être choisie arbitrairement selon l'application et les performances désirées pour le modèle cible $M(s)$. Parmi les contrôleurs les plus simples à mettre en œuvre, on peut citer entre autres la commande par retour d'état avec un placement de pôles, la commande RST, la commande par modèle interne (CMI) ou la commande proportionnelle, intégrale et dérivée (PID). Bien qu'étant l'une des plus anciennes, cette dernière reste la plus utilisée dans l'industrie. L'origine du PID remonte aux travaux en 1922 du mathématicien et ingénieur Nicolas Minorsky (1885-1970) et la logique du PID sera utilisée dans les systèmes de pilotage automatique pour les navires de la marine des USA dès le début des années 1930. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser un contrôleur qui s'inspire à la fois de la logique du

PID et du retour d'état pour illustrer le type de performance qu'on peut atteindre avec un schéma de commande aussi élémentaire.

PRINCIPE DU CORRECTEUR PID

Le correcteur PID est un système de contrôle permettant d'améliorer les performances d'un asservissement ou d'une régulation via des stratégies différentes qui se cumulent. La structure de ce correcteur est une des structures de commande les plus utilisées dans l'industrie grâce au rapport performance/simplicité qu'elle offre dans beaucoup d'applications où la dynamique du système à commander est plutôt linéaire et peu dépendante de son point de fonctionnement. Elle peut aussi s'appliquer aux systèmes dont la dynamique est mal connue. Associée à une commande VIRC0, une telle stratégie de commande gagne en robustesse et elle permet de commander des systèmes non linéaires incertains sans restreindre leur usage autour d'un point de fonctionnement. L'idée principale du correcteur PID est de délivrer un signal de commande u à partir de la différence entre la consigne z_{ref} et la mesure z' . Soit ϵ l'écart entre z_{ref} et z' donné par $\epsilon = z_{ref} - z'$, l'expression du signal de commande u généré par un correcteur PID est donnée dans le domaine temporel par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \epsilon(t) + K_I \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau + K_D \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad (6.67)$$

où K_p , K_I et K_D représentent respectivement le gain proportionnel, le gain intégral et le gain dérivé. Le signal de commande résulte donc de la somme de trois termes : un terme proportionnel à l'erreur de suivi de consigne, un terme proportionnel à l'intégrale de cette erreur et un terme proportionnel à la dérivée de l'erreur. Les paramètres K_p , K_I et K_D représentent les trois constantes de réglage du correcteur. Ils sont choisis afin d'adapter la commande u aux exigences du système en boucle fermée. Le tableau 6.3 indique dans des usages courants le comportement classique de la boucle fermée lorsque les paramètres augmentent indépendamment les uns des autres. Il n'existe pas de méthode unique pour déterminer ces paramètres et il est souvent nécessaire de réaliser des compromis entre le temps de réponse, le dépassement et l'erreur statique.

Paramètre (augmentation)	Temps de montée	Dépassement	Temps de stabilisation	Erreur statique
K_p	diminue	augmente	augmente	diminue
K_I	diminue	augmente	augmente	peut s'annuler
K_D	–	diminue	diminue	–

TABLE 6.3 – Influence de l'augmentation des paramètres du PID sur le comportement du système en boucle fermée

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce correcteur entre l'écart $\epsilon(s)$ et le signal de commande $U(s)$ est donnée par l'équation suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{\epsilon(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (6.68)$$

La fonction de transfert (6.68) est irréalisable car le degré du numérateur est supérieur au

degré du dénominateur. Dans la réalité, l'action dérivée est souvent filtrée comme suit :

$$K_D s \longrightarrow \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{N} s} \quad (6.69)$$

Le choix de N résulte d'un compromis :

- pour N très grand, l'action dérivée n'est pratiquement plus filtrée, ce qui se traduit par une grande sensibilité du signal de commande au bruit de mesure ;
- pour N trop petit, l'effet de l'action dérivée devient quasiment inexistant.

Comme la consigne z_{ref} est nulle, l'action intégrale n'est pas utile pour obtenir une erreur statique nulle sur z avec un modèle cible tel que $M(s)$. On peut donc se contenter d'un simple correcteur PD. Dans le contexte de la commande VIRCO, si on choisit $p \geq 2$, l'observateur GeLESO va permettre de débruiter z' et il permet également d'observer la dérivée de z avec un niveau de bruit qui dépend du réglage de l'observateur. On peut de ce fait utiliser l'observation z_1 pour calculer la composante proportionnelle et utiliser z_2 pour calculer la composante dérivative du correcteur, ce qui évite d'avoir à ajuster N . Le contrôleur PD dans le contexte de la commande VIRCO peut alors être avantageusement remplacé par :

$$u_2 = -K_p z_1 - K_D z_2 \quad (6.70)$$

qui n'est rien d'autre qu'une commande par retour d'état sans utiliser de matrice de pré-gain. Cette matrice, qui sert habituellement à annuler l'erreur statique pour une consigne en échelon, est inutile ici puisque z_{ref} est nulle. En pratique, comme la mesure z' fournie par le capteur confocal chromatique est peu bruitée, nous avons utilisé z' à la place de z_1 dans la commande u_2 . Les deux stratégies donnent une qualité de régulation très similaire.

6.4.3/ APPLICATION POUR LA RÉGULATION DE L'ACCÉLÉROMÈTRE : SIMULATIONS

6.4.3.1/ PREMIÈRE SIMULATION : CAS D'UNE ACCÉLÉRATION EXTERNE DE TYPE ÉCHELON ET DE TYPE SINUSOÏDAL

Cette section a pour objectif de synthétiser une loi de commande VIRCO avec le contrôleur u_2 décrit dans la section précédente afin de réguler la position du tube à zéro ($z_{ref} = 0$). Le schéma-bloc du processus de commande est détaillé dans la figure 6.26.

Pour illustrer l'efficacité de la régulation, nous avons procédé avec la même logique que dans les simulations précédentes. Dans un premier temps, la commande VIRCO est synthétisée lorsque le modèle cible choisi a exactement le même comportement que le système physique, ce qui implique que $\mathcal{C} = 0$. Par conséquent, dans le modèle équivalent (6.27) qui représente la dynamique du système physique, on a :

$$\mathcal{A}_c = -\ddot{z}_a + \frac{1}{m'} \mathcal{C} = -\ddot{z}_a \quad (6.71)$$

avec les paramètres mesurés m' et identifiés β' , γ' et K'_v qui sont ceux du tableau 6.2. Les paramètres K_p et K_D dans la commande u_2 ont été réglés de manière empirique à partir du modèle cible pour avoir une réponse rapide et sans dépassement, tout en gardant une

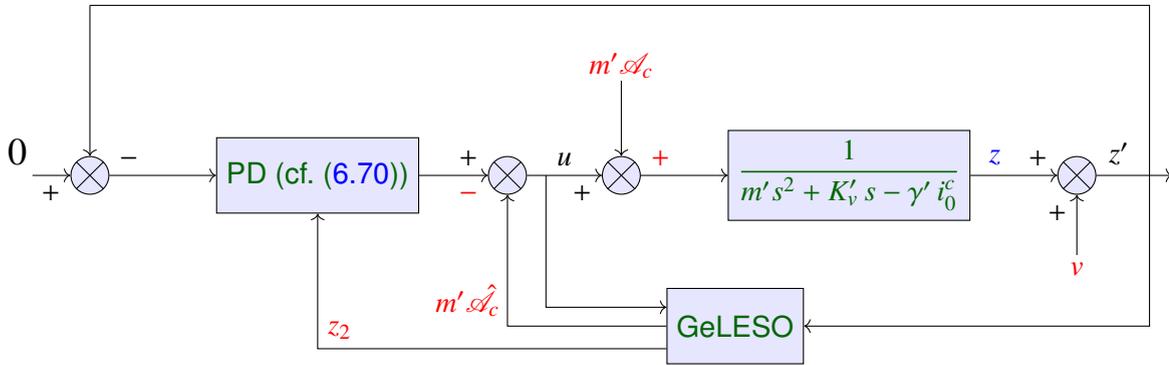


FIGURE 6.26 – Schéma de commande VIRCO avec le régulateur PID

sécurité par rapport à la capacité en courant du générateur et la capacité des bobines à dissiper leur échauffement par effet Joule. Ces paramètres valent $K_p = 10$ et $K_D = 10^{-3}$.

Nous avons simulé trois accélérations $-\ddot{z}_a$, la première est un signal de type créneau de différentes amplitudes (test 1), la deuxième est un signal de type sinusoïdal (test 2) avec une pulsation de 0,2 rad/s et la troisième est un signal de type sinusoïdal (test 3) avec une pulsation de 75,4 rad/s qui est égale à la pulsation de résonance du tube. Le bruit de mesure v a été pris égal à zéro et la mesure z' est donc confondue avec z .

Dans la section 6.3.1.1, nous avons illustré que les performances du GeLESO d'ordre 4 étaient meilleures que celles d'un GeLESO d'ordre 3. Pour cette raison, nous avons utilisé un GeLESO d'ordre 4 dans cette simulation. Sa dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_1(z' - z_1), \\ \dot{z}_2 = -\frac{K'_v}{m'}z_2 + z_3 + \frac{1}{m'}u + L_2(z' - z_1), \\ \dot{z}_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'}z_2 + z_4 + L_3(z' - z_1), \\ \dot{z}_4 = L_4(z' - z_1), \end{cases} \quad (6.72)$$

Les gains de l'observateur sont calculés en utilisant la méthode présentée dans la section 5.3.2. Pour $\omega_0 = 30$, les valeurs numériques des gains du GeLESO sont données par : $\mathcal{L} = [120 \ 5400 \ 108000 \ 810000]^T$. Les résultats de simulation des trois tests sont illustrés ci-dessous.

RÉSULTATS DE SIMULATION DU TEST 1

La figure 6.27 illustre l'évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ et la figure 6.28 donne l'évolution de l'erreur d'estimation associée. En régime permanent, l'erreur d'estimation s'annule, l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ correspond donc à l'accélération simulée $-\ddot{z}_a$.

La figure 6.29 illustre l'évolution de la position du tube z et de son estimation \hat{z} , l'erreur d'estimation étant représentée par la figure 6.30. D'une part, la position du tube est correctement asservie à 0 et, d'autre part, l'estimation fournie par le GeLESO est toujours nulle en régime permanent.

Les figures 6.31 et 6.32 illustrent quant à elles respectivement l'évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation \dot{z}_2 ainsi que l'évolution de l'erreur d'estimation. Cette erreur

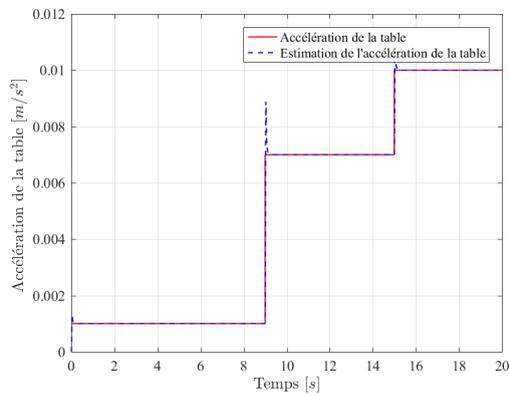


FIGURE 6.27 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$

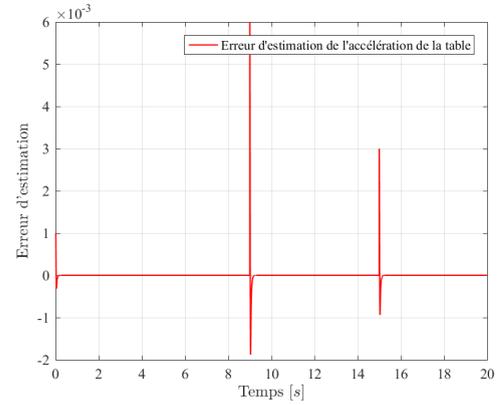


FIGURE 6.28 – Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$

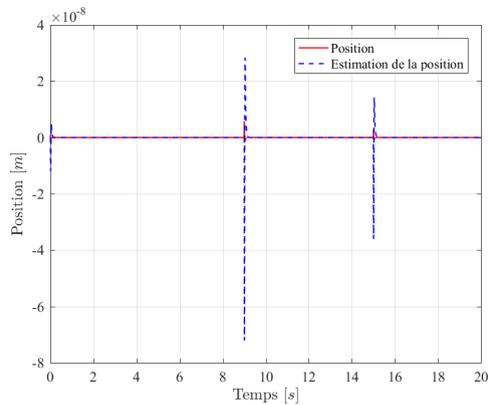


FIGURE 6.29 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1

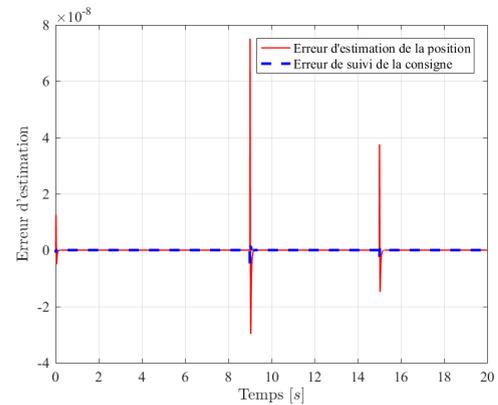


FIGURE 6.30 – Évolution de l'erreur d'estimation de z

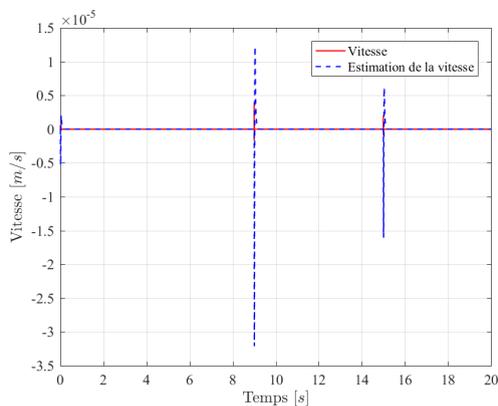


FIGURE 6.31 – Évolution de estimation z_2 de la vitesse \dot{z} du tube

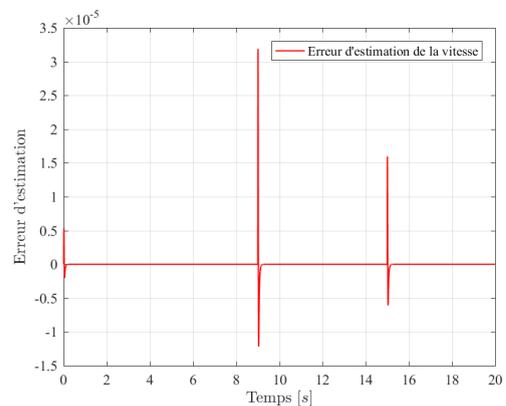


FIGURE 6.32 – Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}

est également nulle en régime permanent.

RÉSULTATS DE SIMULATION DU TEST 2 : $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \sin(0.2t)$

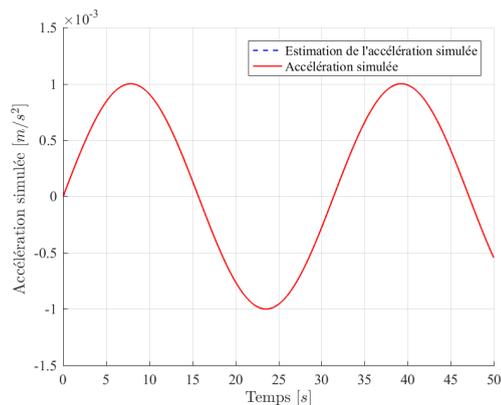


FIGURE 6.33 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$

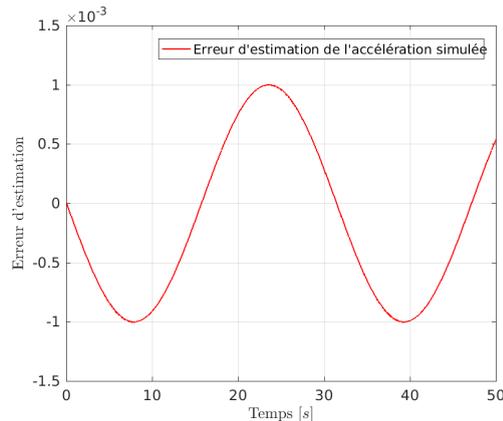


FIGURE 6.34 – Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$

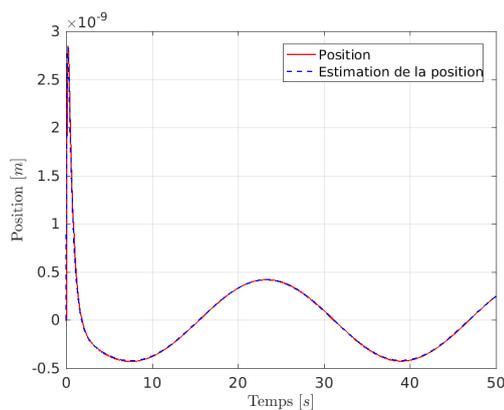


FIGURE 6.35 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1

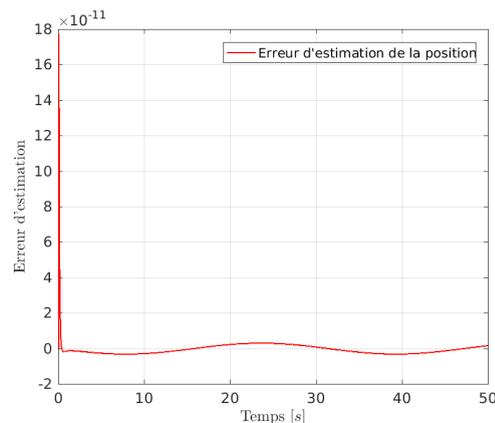


FIGURE 6.36 – Évolution de l'erreur d'estimation de z

La figure 6.33 illustre l'évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ et la figure 6.34 donne l'évolution de l'erreur d'estimation associée. On constate que l'erreur d'estimation est bornée. L'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ correspond donc à l'accélération simulée $-\ddot{z}_a$ avec une erreur bornée et un déphasage négligeable.

La figure 6.35 illustre l'évolution de la position du tube z et de son estimation z_1 , l'erreur d'estimation étant représentée par la figure 6.36. On constate que la position du tube oscille autour de la consigne nulle avec une amplitude crête-à-crête de 1 nm. L'estimation z_1 fournie par le GeLESO correspond à la position du tube avec une erreur bornée, qui est très faible.

Les figures 6.37 et 6.38 illustrent quant à elles respectivement l'évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2 ainsi que l'évolution de l'erreur d'estimation. Cette erreur est également bornée.

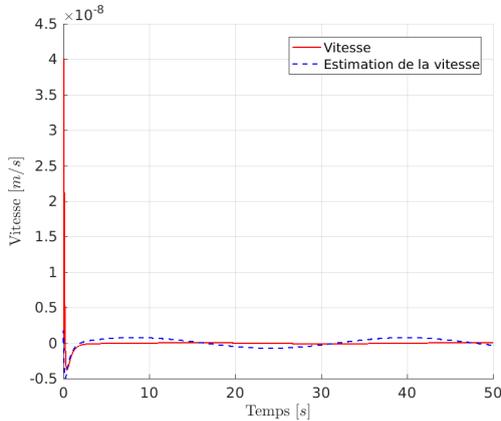


FIGURE 6.37 – Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation \hat{z}_2

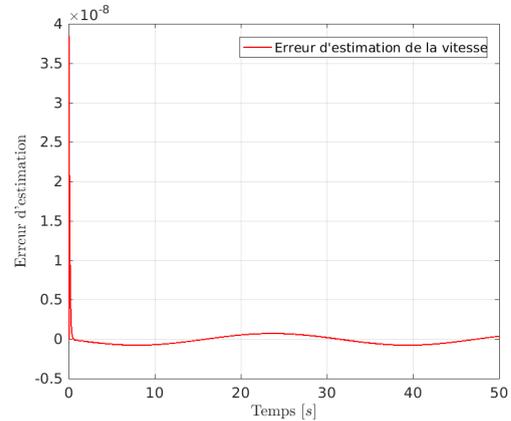


FIGURE 6.38 – Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}

RÉSULTATS DE SIMULATION DU TEST 3 : $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \sin(75.4t)$

L'accélération simulée dans ce test a une fréquence qui est calée sur la fréquence de résonance du tube.

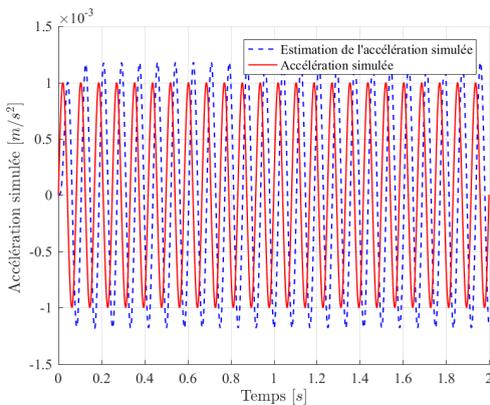


FIGURE 6.39 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$

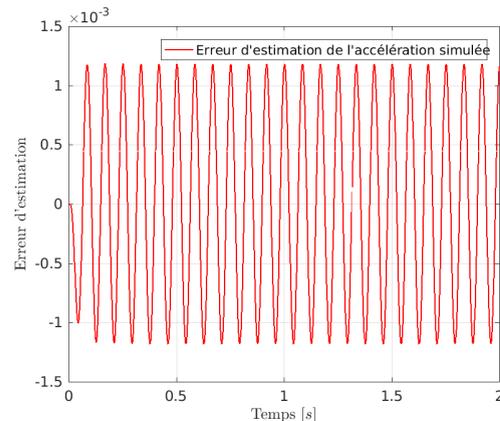
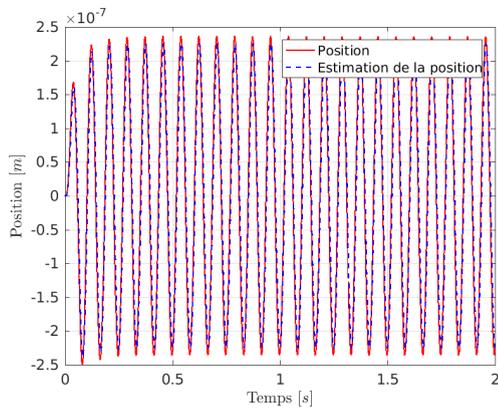
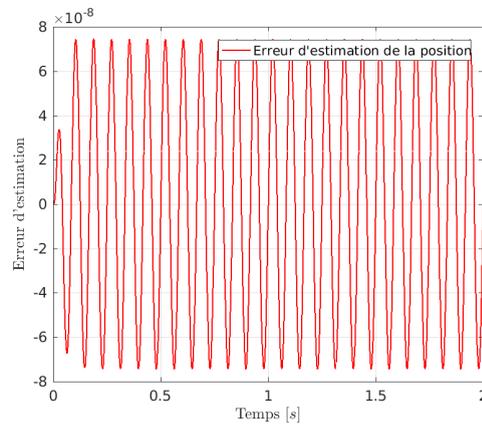
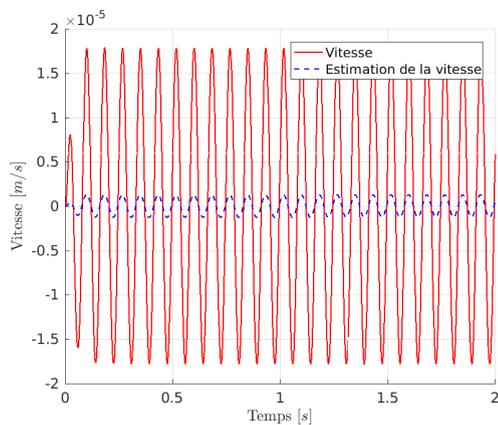
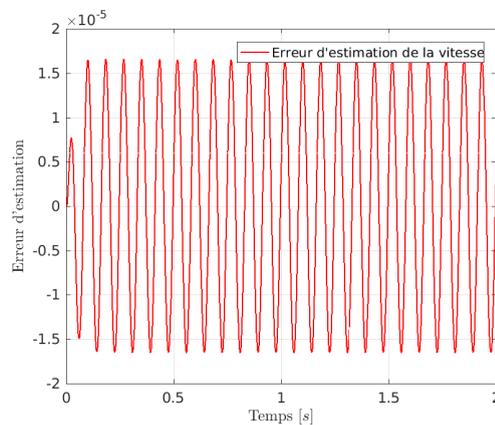


FIGURE 6.40 – Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$

La figure 6.39 illustre l'évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$. La figure 6.40 donne l'évolution de l'erreur d'estimation associée. On constate que l'erreur d'estimation est bornée, et l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ correspond donc à l'accélération simulée $-\ddot{z}_a$ avec une erreur bornée.

La figure 6.41 illustre l'évolution de la position du tube z et de son estimation \hat{z} , l'erreur d'estimation étant représentée par la figure 6.42. On constate que la position du tube oscille autour de la consigne nulle avec une amplitude crête-à-crête de 240 nm qui est bien plus importante par rapport à celle du test précédent. Par contre, l'estimation fournie par le GeLESO correspond à la position du système avec une erreur bornée, qui est très faible.

Les figures 6.43 et 6.44 illustrent quant à elles respectivement l'évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation \hat{z}_2 ainsi que l'évolution de l'erreur d'estimation. Cette erreur

FIGURE 6.41 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1 FIGURE 6.42 – Évolution de l'erreur d'estimation de z FIGURE 6.43 – Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2 FIGURE 6.44 – Évolution de l'erreur d'estimation de \dot{z}

est également bornée et elle est plus grande que celle du test 1.

Ces deux simulations illustrent que :

- Dans le cas d'une accélération sinusoïdale, l'erreur d'estimation fournie par le GeLESO est une erreur bornée, qui n'est jamais nulle. Elle dépend de la fréquence de cette accélération (plus la fréquence de cette accélération est grande, plus l'erreur d'estimation est grande).
- La régulation à zéro de la position du tube est meilleure dans les basses fréquences.
- Dans les fréquences autour de la fréquence de résonance du tube, le déplacement du tube se déphase fortement par rapport à l'accélération sismique. L'information de déplacement, qui arrive de ce fait en retard dans l'observateur, fait que les estimations de l'accélération fournies par le GeLESO deviennent elles-même de plus en plus déphasées si la fréquence augmente. Cela se traduit ensuite par une diminution de la qualité de la régulation puisque la compensation u_1 va à son tour être en retard. Elle ne va donc que partiellement permettre d'imposer à l'accéléromètre d'avoir un comportement proche du modèle cible $M(s)$. La qualité de la régulation

induite par la commande u_2 sera alors dégradée.

6.4.3.2/ DISCUSSION SUR L'EFFET DE L'ANGLE θ SUR L'ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION SISMIQUE ET LE CHOIX DU CONTRÔLEUR

Dans le chapitre 3, nous avons démontré que l'angle d'inclinaison θ du plateau de la table anti-vibrations a un effet sur la dynamique du tube. La figure 6.45 illustre que θ a aussi un effet sur la mesure de la distance d qui est fournie par le capteur de position. En effet, ce dernier est solidaire du plateau ; donc lorsque θ varie, la position et l'inclinaison du capteur de position varient par rapport au repère R_g du laboratoire. Par contre, la tige reste verticale, tout en se repositionnant par rapport au champ d'induction magnétique qui subit aussi un changement d'orientation. Il s'ensuit que la distance d entre le déflecteur situé à l'extrémité de la tige et le capteur de position varie en absence de perturbations sismiques si jamais θ varie. En présence d'une accélération sismique \ddot{z}_a , le tube va se déplacer et donc la position d mesurée par le capteur va varier à la fois à cause de \ddot{z}_a et à cause de θ . La variation de l'angle θ va ainsi créer un offset de mesure qui n'est pas lié à l'accélération sismique.

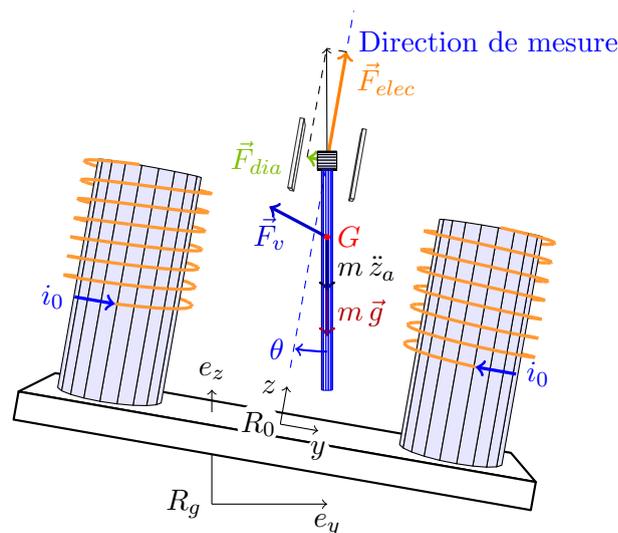


FIGURE 6.45 – Effet de l'angle θ sur la mesure de déplacement

Lorsque la consigne de courant i_0^c est appliquée pour faire léviter le tube, la définition de la position $z = 0$ du tube s'obtient en moyennant d pendant plusieurs secondes dans un environnement le plus calme possible. La position z est ensuite calculée à chaque instant en retranchant la moyenne obtenue à d . Cette procédure supprime l'offset de mesure au moment où le "zéro" est fait pour la mesure du déplacement de tige. Par contre, comme θ varie ensuite lentement, cette procédure n'empêche pas l'offset de mesure d'apparaître et d'évoluer de manière non stationnaire. On a donc :

$$\text{Position mesurée du tube} = z' + v + \text{offset}(\theta, t). \quad (6.73)$$

Notons au passage que d'autres facteurs non stationnaires induisent aussi un offset sur la mesure de position. Par exemple, une variation de la température se traduit par une déformation du bâti de l'accéléromètre qui peut faire se déplacer le capteur de position.

Cette déformation peut aussi déplacer les bobines et donc le champ d'induction magnétique, ce qui induit en retour un déplacement de la tige et donc un offset de mesure non lié aux vibrations sismiques.

Dans ce qui suit, nous allons illustrer par des simulations :

- l'effet d'un offset de déplacement sur l'estimation de l'accélération sismique et la régulation à zéro de la position du tube ;
- le choix de la structure du contrôleur : VIRCO avec PD ou un simple PID.

Pour ce faire, nous allons refaire les mêmes simulations que précédemment (cas d'une accélération sinusoïdale $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \sin(10t)$). L'offset sur z' est simulé par une rampe de pente $-5 \cdot 10^{-8}$ m/s déclenchée à l'instant $t = 4$ s. Ce qui signifie qu'entre $t = 0$ s et $t = 4$ s, il n'y a pas d'offset sur le déplacement z' . Le bruit de mesure est pris égal à zéro. L'observateur utilisé est un GeLESO d'ordre 4 (6.72).

Dans la première simulation, nous avons utilisé un contrôleur de type PID avec les gains suivants : $K_p = 10^{-4}$, $k_i = 10^{-2}$ et $K_d = 10^{-2}$. La commande u est calculée avec $u = -K_p z' - K_d \dot{z}' - \frac{K_i z'}{s}$ (figures 6.46, 6.47, 6.48 et 6.49).

Dans la deuxième simulation, nous avons utilisé un contrôleur VIRCO avec une structure de type PD qui a les gains suivants : $K_p = 10^{-4}$, et $K_d = 10^{-2}$. La commande u est calculée avec $u = u_1 + u_2$ avec $u_2 = -K_p z' - K_d \dot{z}' - \frac{K_i z'}{s}$ et $u_1 = -m \hat{\mathcal{A}}_c$ (figures 6.50, 6.51, 6.52 et 6.53).

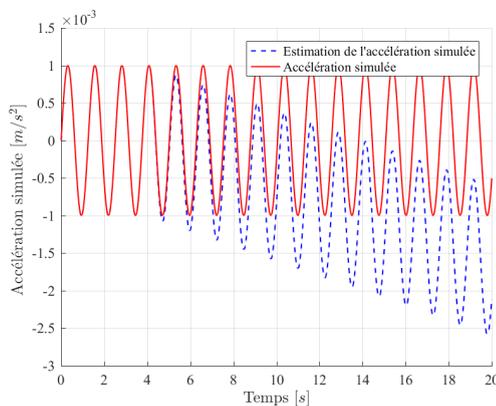


FIGURE 6.46 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$

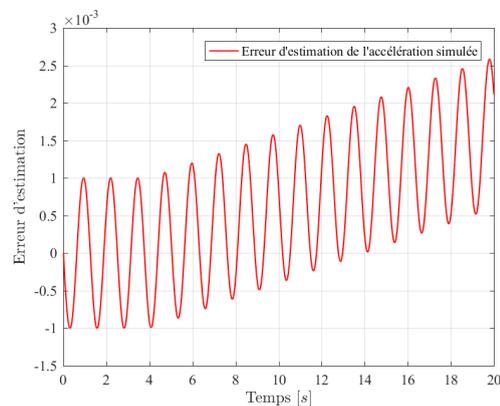


FIGURE 6.47 – Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$

Les figures 6.46 et 6.50 illustrent l'évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ pour les deux simulations. Les figures 6.47 et 6.51 donnent l'évolution de l'erreur d'estimation associée. On constate que l'erreur d'estimation est faible avant le déclenchement de l'offset ; puis, après le déclenchement de l'offset, elle augmente en oscillant et tend vers l'infini.

Les figures 6.48 et 6.52 illustrent l'évolution de la position du tube z et de son estimation \hat{z} . Les figures 6.49 et 6.53 illustrent l'évolution des erreurs d'estimations. On constate qu'avant le déclenchement de l'offset, la position du tube est régulée autour de 0 avec les deux contrôleurs. Le contrôleur VIRCO+PD donne une meilleure régulation. On constate également, qu'après le déclenchement de l'offset, le contrôleur PID n'arrive pas à réguler

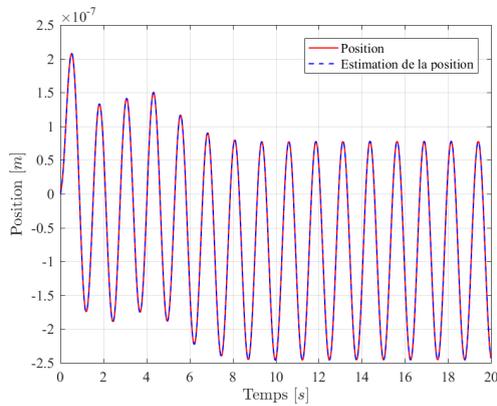


FIGURE 6.48 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1

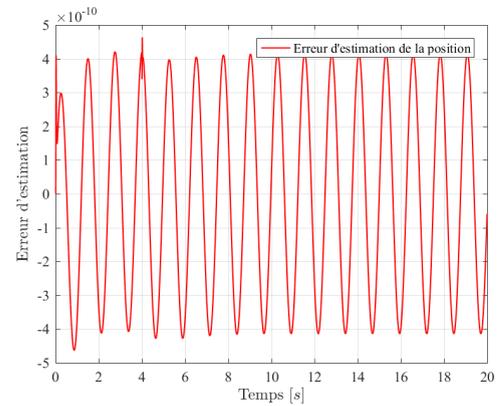


FIGURE 6.49 – Évolution de l'erreur d'estimation de z

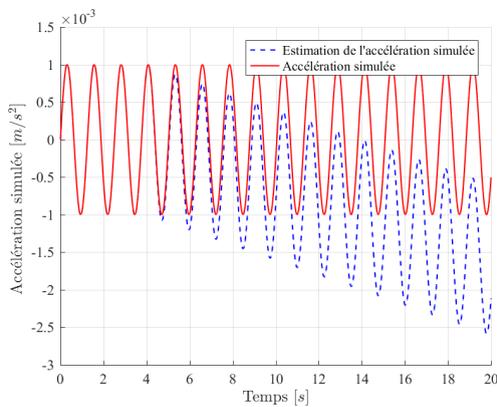


FIGURE 6.50 – Évolution de l'accélération $-\ddot{z}_a$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{L}}_c$

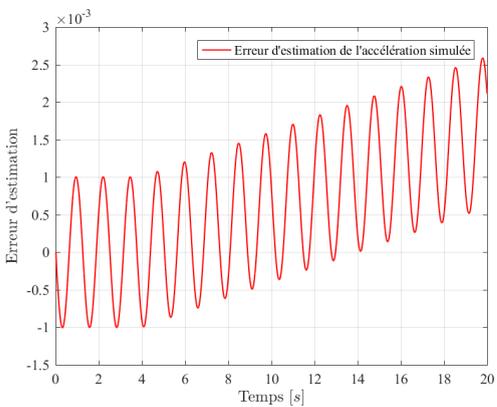


FIGURE 6.51 – Évolution de l'erreur d'estimation de $-\ddot{z}_a$

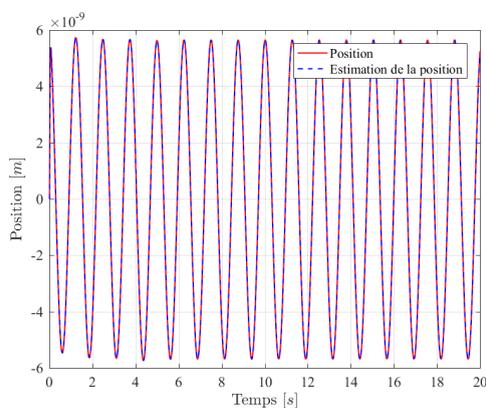


FIGURE 6.52 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1

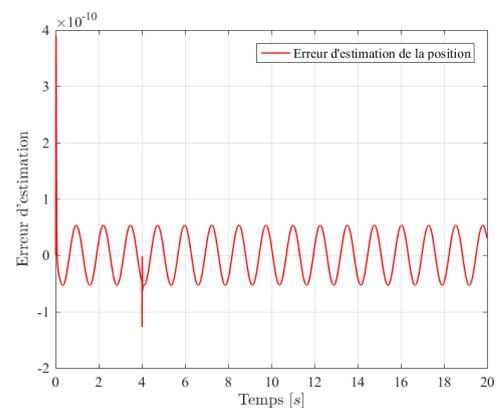


FIGURE 6.53 – Évolution de l'erreur d'estimation de z

la position du tube à zéro, contrairement au contrôleur VIRCO+PD. Pour ce dernier, la position du tube est régulée à zéro avec une faible erreur (0,6 nm en valeur crête).

D'après ces simulations, nous pouvons constater que le contrôleur VIRCO+PD permet

de supprimer l'offset sur la régulation de la position à zéro, sans actualisation des gains du contrôleur, contrairement à un simple PID. La section qui suit illustre que maintenir la régulation autour de la consigne nulle est important pour diminuer l'influence des incertitudes paramétriques qui jouent sur la dynamique du système.

6.4.3.3/ VÉRIFICATION DE LA SENSIBILITÉ AUX PARAMÈTRES DU MODÈLE : MODE ACTIF DE L'ACCÉLÉROMÈTRE

Dans la section 6.3.2, nous avons illustré en simulation l'effet de la variation des paramètres, mesurés ou identifiés, sur l'estimation de l'accélération $-\ddot{z}_a$ dans le mode passif de l'accéléromètre. Nous allons suivre les mêmes étapes en mode actif afin de voir comment la variation de ces paramètres influe sur l'estimation de l'accélération sismique lorsque cette dernière est un échelon d'amplitude $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Nous supposons que la dynamique physique du tube obéit à la loi suivante :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = f_{elec}(i, P) - m \ddot{z}_a \quad (6.74)$$

avec $f_{elec}(i, P)$ qui correspond à la force électromagnétique physique qui excite le tube. Elle vaut dans les simulations :

$$f_{elec}(i, P) = f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta). \quad (6.75)$$

En posant $i = i^c + i_e$, le courant i est pris égal à la valeur de consigne i^c plus éventuellement une erreur i_e :

$$m \ddot{z} + K_v \dot{z} - i_0 \gamma z = (i^c + i_e)(\gamma z + \beta) - m \ddot{z}_a. \quad (6.76)$$

La mesure m' de la masse m influe, par effet domino, sur les valeurs de β' et γ' puisqu'on a :

$$\beta' = \frac{m' g \cos \theta}{i_0^c} \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{m'}{m} \gamma \quad \text{lorsque } i_0 = i_0^c. \quad (6.77)$$

La valeur identifiée de γ' , notée ici γ'_{id} , est le résultat d'une identification dynamique en régime libre qui est menée avec la connaissance de m' . Le modèle cible utilisé dans le GeLESO a alors la structure suivante :

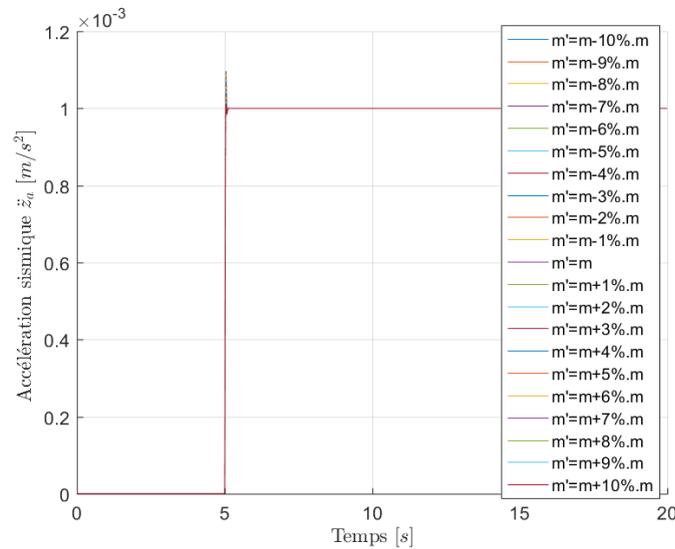
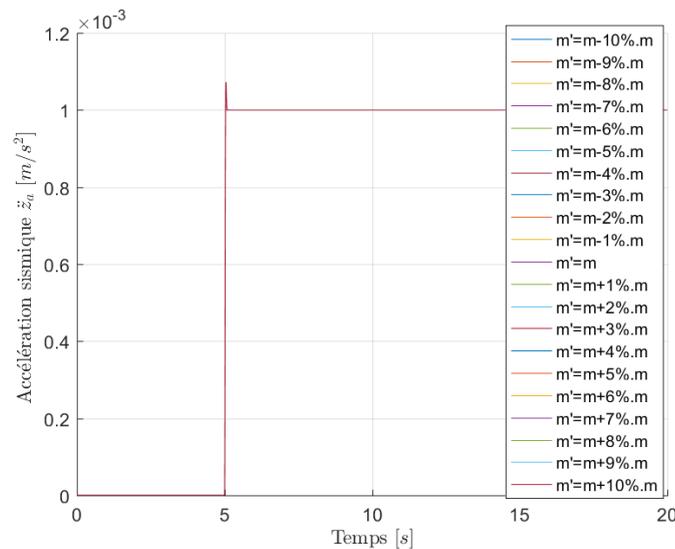
$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - i_0^c \gamma'_{id} z = u - m' \mathcal{A}_c. \quad (6.78)$$

La consigne de courant i^c est générée par :

$$i^c = \frac{u}{\gamma'_{id} z' + \beta'} \quad (6.79)$$

avec $z' = z$ car nous n'avons pas considéré de bruit de mesure sur le déplacement pour ces simulations. Les vraies valeurs de m , K_v et γ ont été prises par convention égales à celles données dans le tableau 6.2.

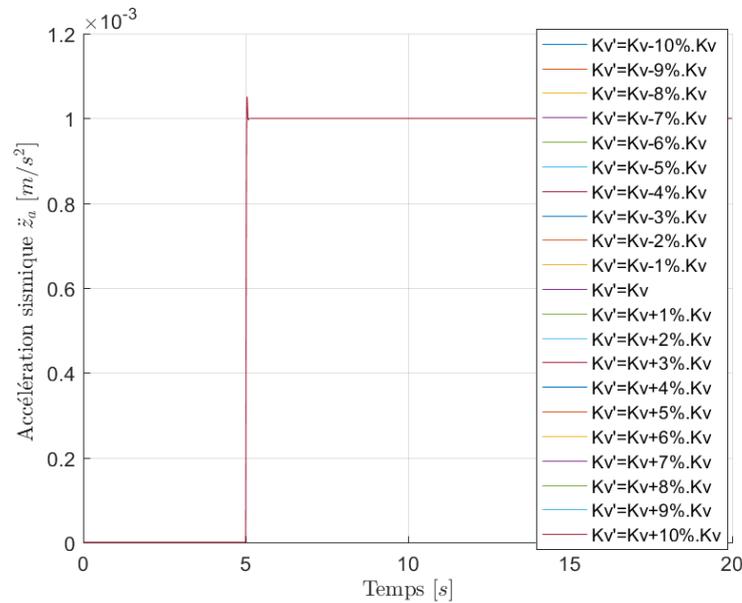
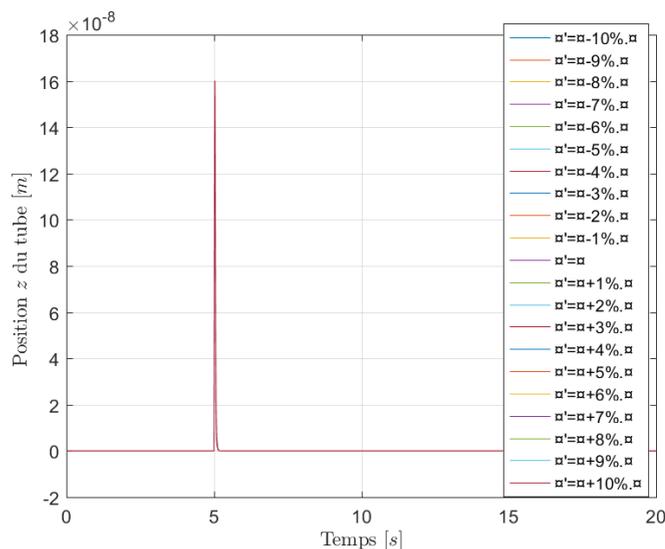
Les 3 figures successives 6.54, 6.55 et 6.56 obéissent à la même logique que celle qui a été suivie pour l'illustration de la sensibilité en mode passif. Dans la première, on a uniquement la masse m' qui varie, ce qui induit une variations de β' et de γ' . Dans la deuxième, on a en plus une erreur d'identification de 5 % de γ' et, dans la troisième, il n'y a que K'_v qui varie. La forte dégradation qu'on observait en mode passif lorsque $\gamma'_{id} \neq \gamma'$ a complètement disparu et l'erreur asymptotique d'estimation de l'accélération sismique est toujours nulle.

FIGURE 6.54 – Effet de l'incertitude de m' sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ FIGURE 6.55 – Effet de l'incertitude de m' et de γ' (5 %) sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$

La figure 6.57 illustre la qualité de la régulation de z à zéro lorsque tous les paramètres varient ensemble. On a m' et K'_v qui varient de manière simultanée entre $\pm 10\%$, ce qui fait aussi varier β' et γ' . L'identification de γ' est faite à chaque fois avec une erreur de 5 % pour γ'_{id} . On constate que l'erreur asymptotique de convergence vers 0. Les trajectoires régulées sont très proches.

La figure 6.58 montre l'effet d'une erreur i_e de 5 % sur le courant généré lorsque tous les autres paramètres sont exacts. On constate qu'il y a une erreur d'estimation asymptotique. Ceci illustre que l'exactitude du courant généré joue un rôle important dans la qualité de l'estimation de l'accélération sismique.

Pour finir, les figures 6.59 et 6.60 illustrent respectivement l'estimation de l'accélération sismique et le déplacement de z lorsque m' et K'_v varient de manière simultanée entre

FIGURE 6.56 – Effet de l'incertitude de K'_v sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ FIGURE 6.57 – Effet de l'incertitude de m' , de γ' , et de K'_v sur la position z du tube. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole " α " dans la légende.

$\pm 10\%$, ce qui fait aussi varier β' et γ' . L'identification de γ' est faite à chaque fois avec une erreur de 5% pour γ'_{id} et il y a une erreur i_e de 5% sur le courant généré. On constate qu'il y a une erreur asymptotique sur l'estimation de l'accélération (qui reste la même) et il n'y a pas d'erreur asymptotique sur la régulation à zéro de z .

En guise de bilan de cette illustration de la sensibilité paramétrique, on peut dire que le fait de rendre un accéléromètre actif permet de s'insensibiliser aux incertitudes du modèle. Par contre, cela rend l'estimation de l'accélération sismique sensible à l'incertitude associée à la chaîne de commande. D'un point de vue technologique, cela signifie qu'il

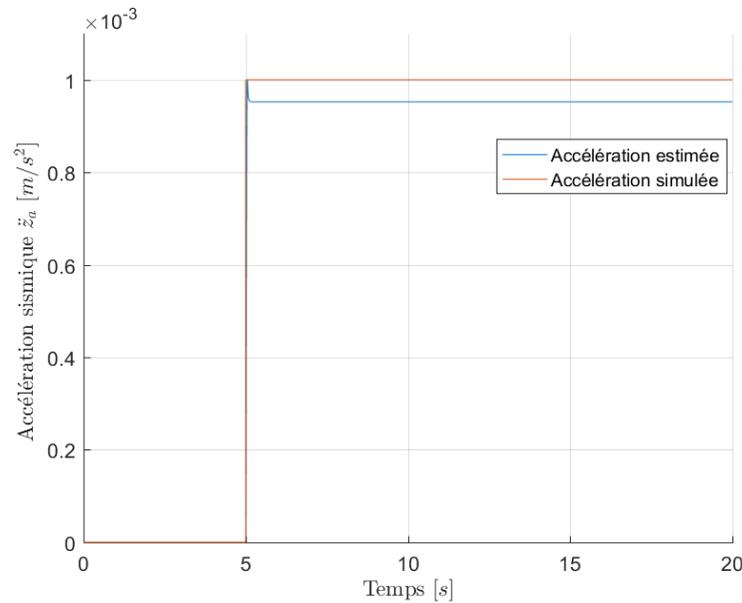


FIGURE 6.58 – Effet sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ d'une erreur i_e de 5 % sur le courant généré

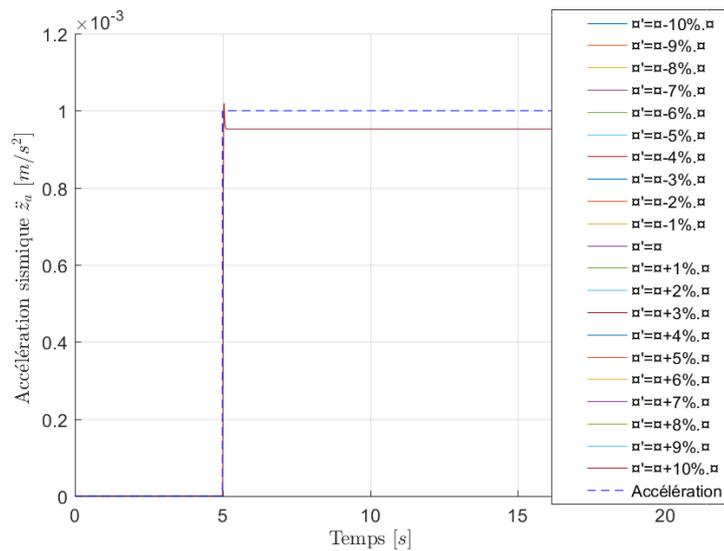


FIGURE 6.59 – Effet de l'incertitude de m' , de K'_v , de γ' et de i_e sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole "□" dans la légende.

est important d'accorder une attention toute particulière à la qualité de la chaîne de commande, ainsi qu'à sa modélisation. Dans le cadre de notre accéléromètre, cela revient à avoir un générateur de courant le plus juste possible, ainsi qu'un bon modèle de la force électromagnétique. Dans la pratique, comme \ddot{z}_a varie sans arrêt, il subsistera toujours une erreur dynamique de régulation et donc il subsistera aussi une erreur dynamique sur l'estimation de $-\ddot{z}_a$ puisqu'on n'aura pas $\mathcal{C} = 0$ pendant le régime transitoire. Plus la régulation minimisera $|z(t)|$ à chaque instant et meilleure sera l'estimation de $-\ddot{z}_a$.

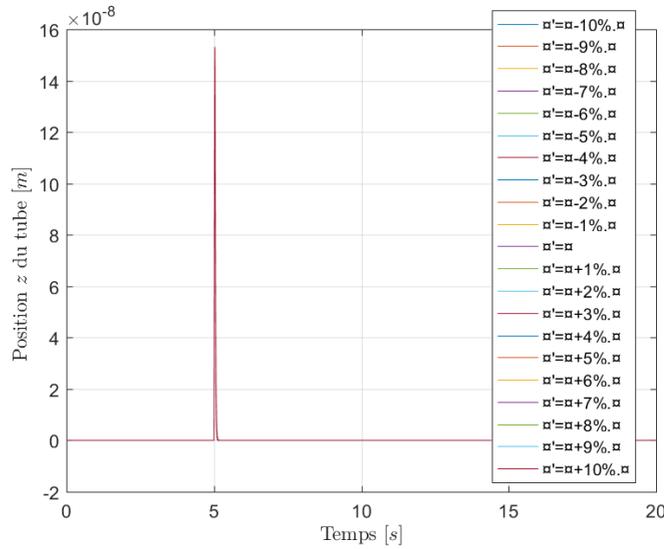


FIGURE 6.60 – Effet de l'incertitude de m' , de K'_v , de γ' et de i_e sur la position z du tube. Ces grandeurs qui changent toutes en même temps sont représentées par le symbole "α" dans la légende.

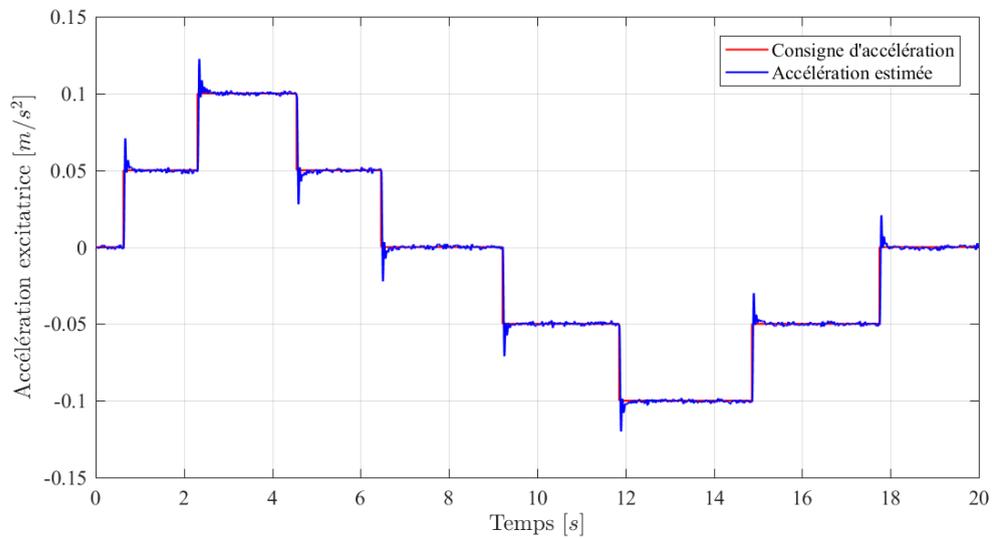
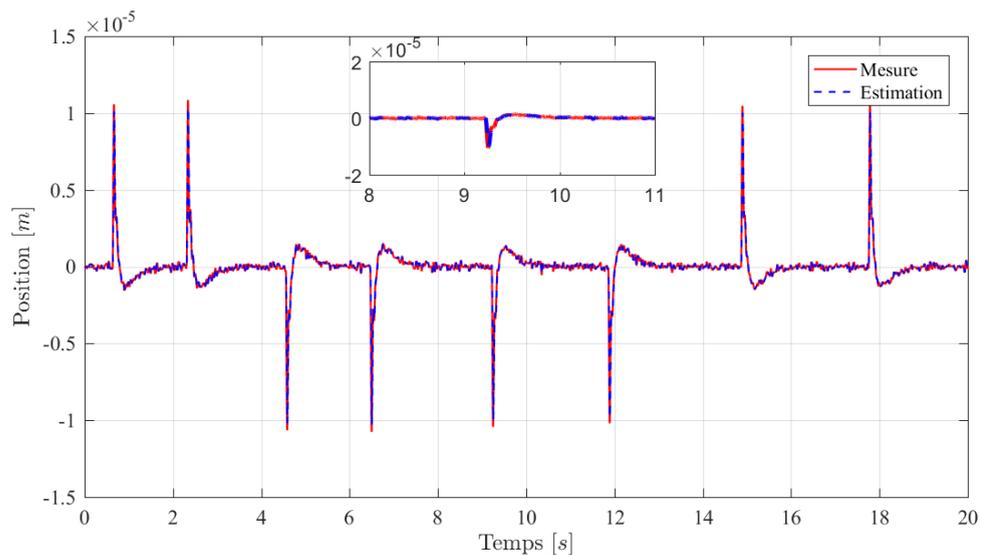
6.4.4/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Dans cette section, nous illustrons expérimentalement l'efficacité de la stratégie de commande VIRCO qui a été précédemment simulée. Pour cela, nous avons réalisé deux expériences.

Dans les deux expériences, afin de minimiser les effets de la température et de l'humidité, nous avons placé l'accéléromètre dans une chambre climatique posée sur la table anti-vibrations. La température a été réglée à 22.5°C et l'humidité à 30%. Nous avons ensuite appliqué un courant $i_0 = 0,0173$ A pour compenser le poids du tube afin de le mettre en lévitation. L'observateur utilisé est l'observateur GeLESO d'ordre 4 dont la dynamique est donnée par (6.44). Pour une valeur de $\omega_o = 60$, les valeurs numériques des gains de cet observateur sont $\mathcal{L} = [240 \ 21600 \ 864000 \ 129600]^T$.

Dans la première expérience, nous avons généré physiquement des accélérations \ddot{z}_a qui ont une forme semblable à des créneaux. Pour cela, nous avons utilisé un principe similaire à celui qui a été utilisé dans le mode passif (cf. section 6.4.4). Nous avons ajouté sur la commande VIRCO $u = u_1 + u_2$ un offset u_3 qui correspond à une force électromagnétique additionnelle égale à une force d'inertie fictive $-m' \ddot{z}_c$ qui a été choisie constante par morceaux. La commande qui permet de générer la consigne de courant i^c pour le générateur de courant est donc $u_1 + u_2 + u_3$. Les entrées de l'observateur sont, par contre, uniquement la commande $u_1 + u_2 = -m' \hat{\mathcal{A}}_c + u_2$ et le déplacement mesuré z' comme sur la figure 6.25. De ce fait, l'accélération qu'on cherche à estimer en utilisant le GeLESO est $-(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a)$ où \ddot{z}_c est choisi bien plus grand que les accélérations sismiques \ddot{z}_a du plateau. Les résultats de cette expérience sont illustrés dans les figures 6.61, 6.62 et 6.63.

La figure 6.61 illustre l'évolution de l'accélération $-(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a)$ et l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ donnée par le GeLESO d'ordre 4. Grâce à l'asservissement de la position du tube à zéro, les effets des incertitudes du modèle cible sont en théorie réduits, ce qui permet à l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ de mieux correspondre à l'accélération $-(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a)$. L'estimation n'est cependant pas

FIGURE 6.61 – Évolution de l'accélération $-(\ddot{z}_c + \ddot{z}_a)$ et de l'estimation $\hat{\mathcal{A}}_c$ FIGURE 6.62 – Évolution de la position du tube z et de son estimation z_1

parfaite, notamment à cause de différentes sources d'incertitudes qui continuent à influencer sur l'estimation en régime dynamique lorsque le tube n'est pas parfaitement maintenu sur la consigne nulle. Le bruit de mesure v qui se propage dans l'observation puis la commande a également une influence sur l'estimation de $\hat{\mathcal{A}}_c$. Dans le prochain chapitre, nous essaierons de quantifier l'incertitude résultante sur l'accélération estimée en suivant une démarche métrologique.

La figure 6.62 illustre l'évolution de la position mesurée du tube z' et de son estimation z_1 , avec un zoom sur une courte période de temps lors d'un changement de l'accélération \ddot{z}_c . On constate que la position du tube est bien asservie autour de zéro. Néanmoins certaines hautes fréquences subsistent dans le déplacement régulé. Une partie de ces fréquences est induite par le bruit de mesure dans z' qui a une influence sur l'estimation

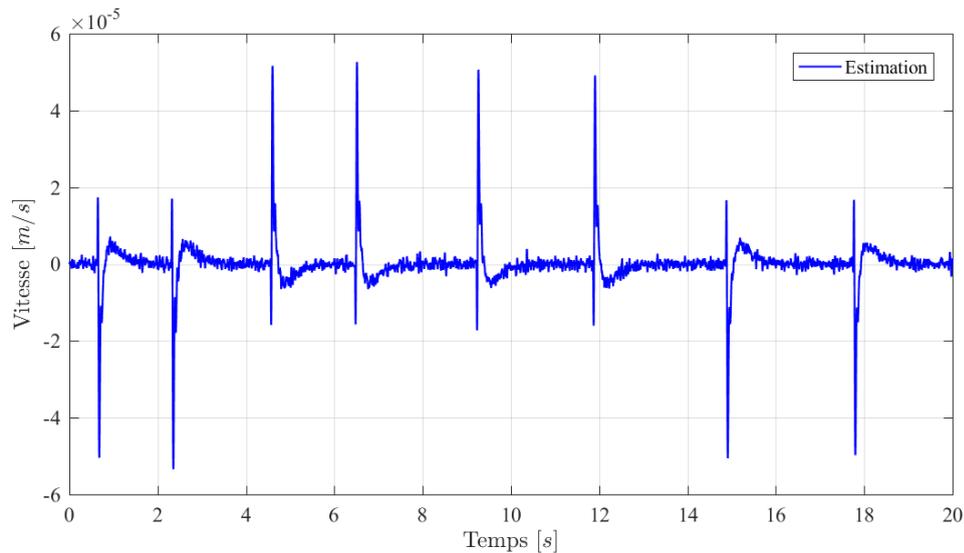


FIGURE 6.63 – Évolution de la vitesse du tube \dot{z} et de son estimation z_2

z_1 . Une autre partie est induite par le bruit de commande (qui prend son origine dans le bruit qui est présent dans l'état étendu estimé qui se retrouve ensuite dans u_1 et u_2) puis qui est ensuite filtré par la dynamique du tube. Une dernière partie est induite par l'erreur dynamique de régulation. Malgré ces défauts de comportement inévitables, on constate néanmoins que l'effet de la force $-m' \ddot{z}_c$ induite artificiellement par l'offset de commande u_3 est bien compensé par le bouclage de l'entrée virtuelle puisqu'à chaque changement d'amplitude des créneaux, le tube se décale de la position zéro puis y revient rapidement.

La figure 6.63 illustre l'évolution de l'estimation de la vitesse du tube donnée par le GeLESO. Comme on pouvait s'y attendre, cette estimation est davantage bruitée que l'estimation du déplacement.

Dans la deuxième expérience, l'accéléromètre est soumis uniquement à l'accélération du plateau de la table anti-vibrations. Il permet donc de mesurer cette accélération. Ce mode d'utilisation correspond à celui qui permettra par la suite de corriger la force qui sera générée par le générateur de force. Les résultats de cette deuxième expérience, réalisée sur une période de 8 s, sont illustrés dans les figures 6.64, 6.65 et 6.66. On constate que la mesure z' du déplacement est bien débruitée dans l'estimation z_1 et que cette dernière est maintenue autour de zéro avec une erreur crête-à-crête de 400 nm. L'estimation de l'accélération basse fréquence du plateau a un bruit résiduel qui vaut environ $200 \mu\text{m/s}^2$ crête-à-crête.

6.5/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la structure complète de l'accéléromètre qui peut fonctionner soit en mode passif, soit en mode actif. L'estimation de l'accélération sismique a été implémentée à l'aide d'un observateur de type GeLESO. Le mode actif a été mis en œuvre à l'aide d'une commande VIRCO dans laquelle la sous-partie linéaire utilisée s'inspire de la logique d'un contrôleur PD. Nous avons montré que le fonctionnement en

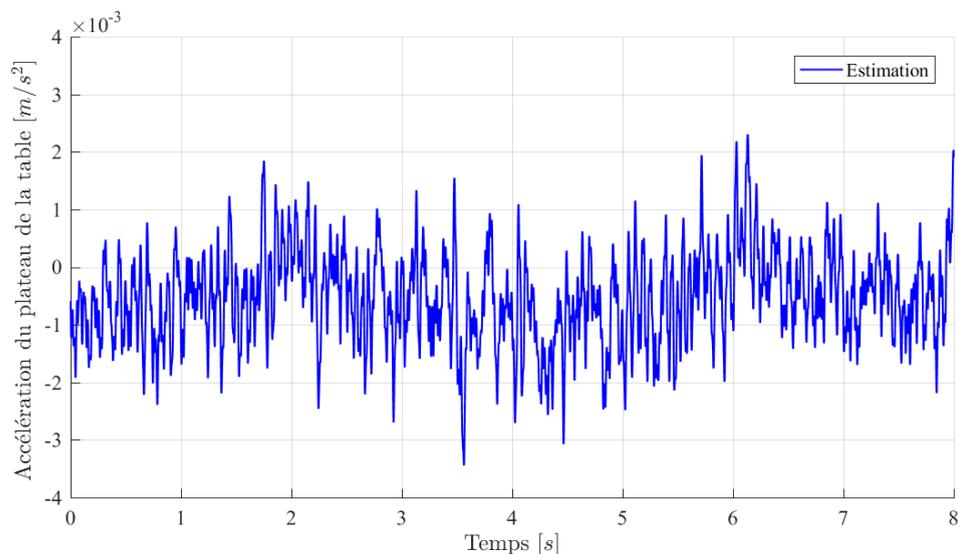


FIGURE 6.64 – Évolution de l'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations

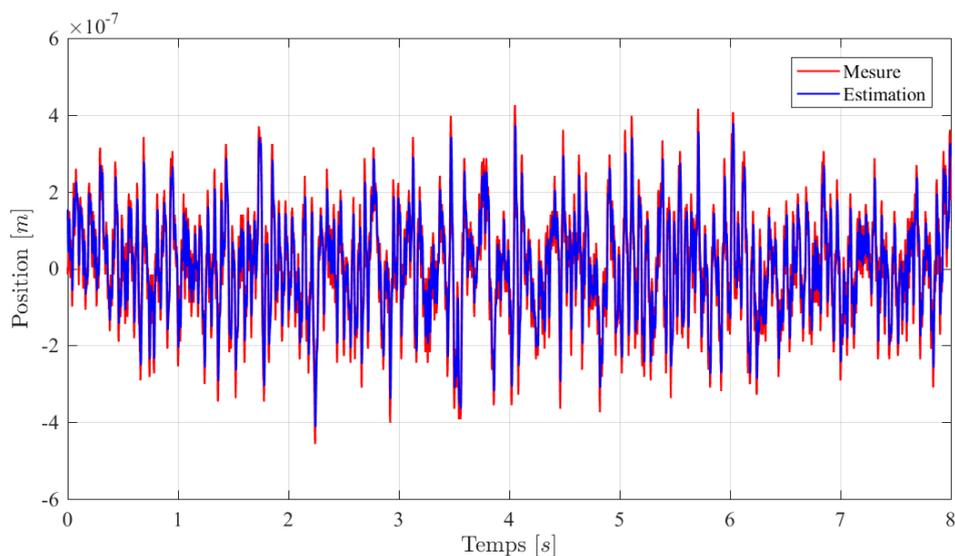


FIGURE 6.65 – Évolution de la position du tube et de son estimation

mode actif est intéressant car il permet de réduire l'effet des différentes incertitudes associées aux paramètres du modèle cible, à l'exception du courant qui est impliqué dans la chaîne de commande et dans la modélisation de la force électromagnétique. Du fait du bruit de mesure et de l'erreur résiduelle de régulation sur la consigne nulle en régime dynamique, il est impossible de supprimer complètement l'effet des incertitudes qui influent sur la dynamique du tube. On ne peut que les atténuer fortement via la qualité de l'asservissement. Dans le cadre d'une démarche métrologique, il est alors essentiel de pouvoir propager les incertitudes connues sur l'estimation de l'accélération afin de pouvoir établir en régime dynamique une incertitude sur cette dernière. Une telle incertitude se fonde évidemment uniquement sur l'information qui est connue à chaque instant et elle n'est valable que dans le cadre de cette connaissance. Il subsistera toujours

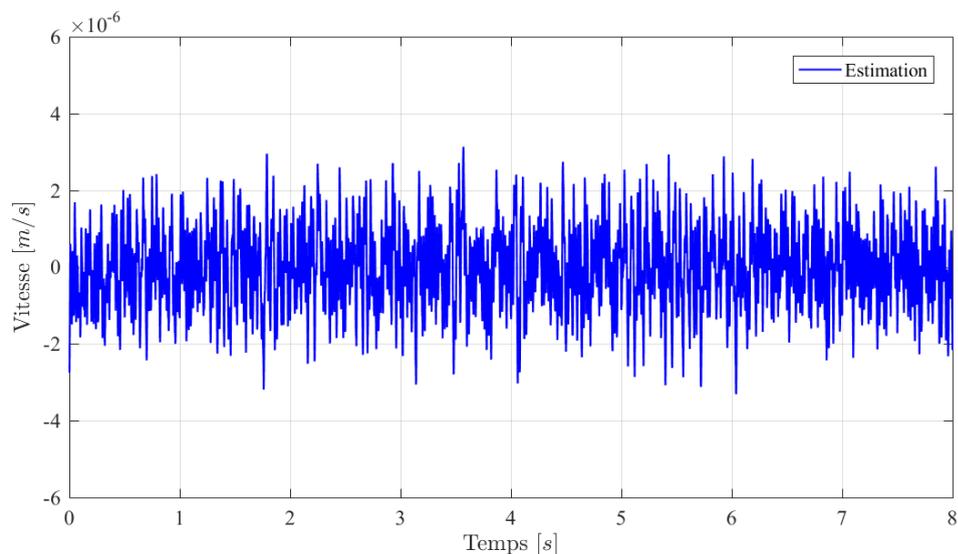


FIGURE 6.66 – Évolution de l'estimation de la vitesse du tube

des sources d'incertitudes non connues qui pourront potentiellement remettre en cause l'incertitude sur l'accélération qui a été établie. Néanmoins, pour rendre l'accéléromètre traçable, il convient uniquement de documenter la méthodologie (qui comprend souvent des étalonnages successifs) qui conduit à l'incertitude finale sur le mesurande d'intérêt. Par ailleurs, si on veut obtenir une traçabilité par rapport au Système International d'unités (SI) il convient de l'établir en partant des 7 unités de base définies pour quantifier la masse, le temps, la longueur, la température, l'intensité électrique, la quantité de matière et l'intensité lumineuse. En s'inspirant de ce cadre, l'objectif du chapitre suivant est de déterminer une méthodologie de calcul qui rend possible la traçabilité de l'accéléromètre au SI en régime dynamique en s'appuyant sur les paramètres physiques liés au SI dont on connaît l'incertitude.

QUANTIFICATION ET PROPAGATION DES INCERTITUDES

Sommaire

7.1	Introduction	153
7.2	Quantification des incertitudes	154
7.2.1	Incertitude de Type A associée au résultat du mesurage des paramètres K_v et γ	155
7.2.2	Incertitude de Type B associée au résultat du mesurage des grandeurs m et i_0	157
7.2.3	Incertitude composée associée à la détermination du paramètre β et de la force $f_{elec(i,P)}$	158
7.2.4	Détermination de l'incertitude élargie	161
7.3	Observateur GeLESO basé intervalles	163
7.3.1	Représentation de la dynamique incertaine du tube	163
7.3.2	Structure de l'observateur GeLESO par intervalles	166
7.3.3	Changement de coordonnées invariant dans le temps	169
7.3.4	Structure de l'observateur GeLESO par intervalles par changement de coordonnées invariant dans le temps	171
7.3.5	Simulation	174
7.3.6	Validation expérimentale	177
7.4	Conclusion	180

7.1/ INTRODUCTION

Dans le chapitre 6, nous avons présenté dans un premier temps une démarche qui permet d'observer l'accélération \ddot{z}_a du support de l'accéléromètre. Pour estimer cette accélération, l'observateur utilise un modèle dynamique équivalent de l'accéléromètre qui comprend une entrée virtuelle. Cette entrée virtuelle est un signal qui intègre d'une part l'accélération et d'autre part toutes les incertitudes associées au modèle cible déterministe utilisé. Dans un deuxième temps, nous avons montré que le fonctionnement en mode actif de l'accéléromètre permet de réduire l'effet des incertitudes, connues ou inconnues, sur l'estimation de l'accélération. En pratique, il est difficile voire impossible de supprimer l'effet de toutes les incertitudes associées au modèle cible. Il est alors essentiel de pouvoir propager les incertitudes connues sur l'estimation de l'accélération.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les méthodes métrologiques de quantification des incertitudes associées aux grandeurs physiques estimées, mesurées ou identifiées qui influent sur l'estimation de l'accélération de la table anti-vibrations. Ces incertitudes sont celles qui sont associées à la détermination des paramètres de la dynamique de l'accéléromètre ainsi que les incertitudes propres à la chaîne de commande. Nous présenterons ensuite une méthode qui permet de propager ces incertitudes sur l'estimation de l'accélération \ddot{z}_a grâce à l'utilisation d'un observateur par intervalles.

Avant de commencer, nous laissons à l'appréciation du lecteur les commentaires suivants qui sont extraits du GUM : "Bien que ce guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de ceux qui contribuent à son évaluation."

7.2/ QUANTIFICATION DES INCERTITUDES DE CHAQUE GRANDEUR PHYSIQUE DANS UN CADRE MÉTROLOGIQUE

Cette section a pour objectif de détailler le calcul des incertitudes associées aux différents paramètres identifiés qui interviennent dans l'observateur, ainsi que les incertitudes propres aux grandeurs qui interviennent dans la chaîne de commande.

D'après le *guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* publié par le BIMP ¹, l'*incertitude* (de mesure) est un paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. Ce paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

L'*incertitude-type* est l'incertitude du résultat d'un mesurage exprimée sous la forme d'un écart-type.

Lorsque l'évaluation de l'incertitude du résultat d'un mesurage se base sur des lois de probabilité, il est possible de classer cette évaluation en deux catégories, nommées *Type A* et *Type B*, qui reposent sur les composantes de l'incertitude. L'incertitude résultante est quantifiée par un écart-type qui traduit la dispersion du mesurage.

L'incertitude obtenue par une évaluation de Type A est calculée à partir de séries d'observations répétées qui permettent une analyse statistique, en respectant la condition de *répétabilité*. Cette dernière est définie comme une condition de mesurage qui comprend la même procédure de mesure, les mêmes opérateurs, le même système de mesure, les mêmes conditions de fonctionnement et le même lieu, ainsi que des mesurages répétés pendant une courte période de temps. Nous avons associé ce Type A aux incertitudes du résultat du mesurage des paramètres γ et K_γ qui sont ici assimilés à des mesurandes.

L'incertitude obtenue par une évaluation de Type B représente une méthode d'évaluation de l'incertitude par d'autres moyens que l'analyse statistique de séries d'observations.

1. disponible à l'URL <https://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>

Les incertitudes de Type B sont parfois assez difficiles à quantifier ; elles sont liées à la maîtrise imparfaite du processus de mesurage qui correspond à sa *reproductibilité* (cette notion est induite par des conditions de fonctionnement moins maîtrisées que pour la répétabilité) ainsi qu'à l'expérience de l'opérateur. Elles peuvent être évaluées à partir des informations suivantes :

- valeurs publiées faisant autorité : notices constructeurs ;
- valeurs obtenues à partir d'un certificat d'étalonnage avec une incertitude précisée avec son facteur d'élargissement ;
- valeurs obtenues à partir de limites déduites de l'expérience personnelle.

Nous avons associé ce Type B aux incertitudes du résultat du mesurage de m , i_0 , i et β qui sont assimilés à des mesurandes.

Selon le GUM, l'incertitude-type de Type A est obtenue à partir d'une fonction de densité de probabilité (ou densité de probabilité) déduite d'une distribution d'effectif observée (elle implique donc que la théorie des probabilités se dérive d'une approche fréquentielle qui permet de mener une analyse statistique). L'incertitude-type de Type B est obtenue à partir d'une densité de probabilité supposée, fondée sur le degré de croyance en ce qu'un événement se produise (elle implique donc que l'approche probabiliste soit issue d'une théorie de la croyance). Les deux approches utilisent de ce fait des interprétations usuelles mais différentes de la notion de probabilité. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au guide pour l'expression de l'incertitude de mesure publié par le BIMP.

7.2.1/ INCERTITUDE DE TYPE A ASSOCIÉE AU RÉSULTAT DU MESURAGE DES PARAMÈTRES K_v ET γ

L'estimation des mesurandes K_v et γ et le calcul de l'incertitude-type associée se fait à partir d'une série répétée d'identifications menées pendant une courte période de temps dans un environnement contrôlé en température et en humidité. Pour mener ce processus d'estimation de Type A, on part du principe que le mesurande recherché est bien estimé par l'espérance mathématique d'une loi inconnue dont chaque identification obtenue est une réalisation. On cherche donc à estimer cette espérance mathématique à l'aide d'une moyenne estimée M . Intuitivement, plus on fera d'identifications, plus M estimera bien l'espérance mathématique (et donc le mesurande), et plus l'incertitude associée à l'estimation M sera faible.

Les étapes de calcul de l'incertitude de Type A qui sont décrites dans le GUM sont résumées ici :

- faire une série de l identifications (mesurage),
- déterminer une estimation M_e de l'espérance mathématique avec ces k identifications,
- calculer l'écart-type expérimental des identifications (estimation du mesurande),
- calculer l'estimation \mathcal{U} de l'écart-type de M_e .

L'estimation M_e de l'espérance mathématique correspond à l'estimation du mesurande. L'estimation \mathcal{U} de l'écart-type de l'estimation M_e est l'incertitude-type de Type A associée à l'estimation du mesurande.

Le nombre l d'identifications qui ont été réalisées est 24. Les histogrammes obtenus pour l'ensemble des paramètres identifiés K'_v et γ' sont représentés dans les figures 7.1 et 7.2.

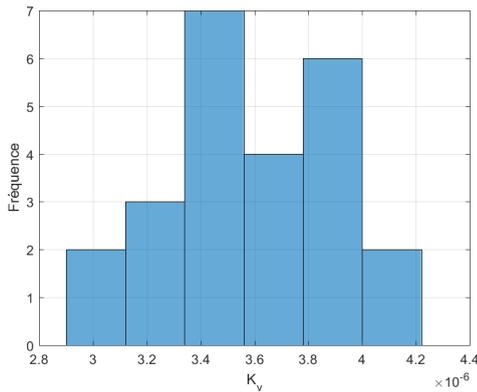


FIGURE 7.1 – Histogramme de K_v pour 24 tests d'identification

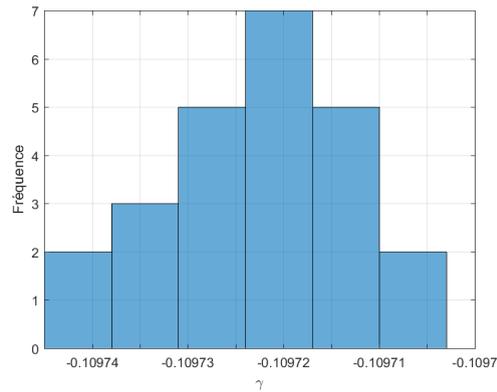


FIGURE 7.2 – Histogramme de γ pour 24 tests d'identification

Les estimations M_e des espérances mathématiques correspondant aux mesurandes, sont notées K_v^m et γ^m . Elles sont données par les moyennes arithmétiques :

$$K_v^m = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l K'_v(k), \quad \gamma^m = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \gamma'(k) \quad (7.1)$$

avec $K'_v(k)$ et $\gamma'(k)$ qui représentent respectivement les valeurs des paramètres identifiés K'_v et γ' lors de l'essai k via les mesurages expliqués au chapitre 3. Les moyennes arithmétiques sont supposées être les meilleures estimations des paramètres K_v et γ sur la base des données disponibles.

Les écart-types expérimentaux $s(K'_v)$ et $s(\gamma')$ des séries statistiques $\{K'_v(k)\}_k$ et $\{\gamma'(k)\}_k$ sont calculés selon les équations suivantes via un estimateur sans biais :

$$s(K'_v) = \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l (K'_v(j) - K_v^m)^2}, \quad s(\gamma') = \sqrt{\frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l (\gamma'(j) - \gamma^m)^2}. \quad (7.2)$$

Enfin, les meilleures estimations \mathcal{U} de l'écart-type des moyennes estimées K_v^m et γ^m sont :

$$\mathcal{U}(K_v^m) = \frac{s(K'_v)}{\sqrt{l}}, \quad \mathcal{U}(\gamma^m) = \frac{s(\gamma')}{\sqrt{l}}. \quad (7.3)$$

Les valeurs numériques des moyennes et des incertitude-type $\mathcal{U}(\cdot)$ sont données dans le tableau 7.1.

Paramètre	Moyenne arithmétique	Incertitude $\mathcal{U}(\cdot)$
K_v	$K_v^m = 3,72 \cdot 10^{-6}$	$6,76 \cdot 10^{-8}$
γ	$\gamma^m = -0,109$	$1,92 \cdot 10^{-5}$

TABLE 7.1 – Valeur moyenne et incertitude de Type A associées au résultat du mesurage des paramètres K_v et γ pour les 24 essais d'identification

7.2.2/ INCERTITUDE DE TYPE B ASSOCIÉE AU RÉSULTAT DU MESURAGE DES GRANDEURS m ET i_0

Dans l'état actuel du dispositif, nous n'avons pas la possibilité d'établir une incertitude de Type A pour le résultat d'un mesurage de la masse m et du courant qui circule dans les bobines. Nous n'avons pas non plus la possibilité de rendre ces mesurages traçables au SI. Cette difficulté devrait être levée dans le futur en faisant appel aux moyens de la métrologie française. En attendant, nous utiliserons une évaluation de Type B en s'appuyant sur les informations sommaires dont nous disposons.

D'après le GUM, l'incertitude obtenue par une évaluation de Type B peut être calculée à partir de plusieurs informations, comme par exemple les données constructeurs, des certificats d'étalonnage, etc.

Le constructeur de la balance de précision que nous utilisons fournit une répétabilité typique pour la mesure m' de la masse m . Cette répétabilité vaut 0,02 mg. Du fait de l'absence de définition de la notion de répétabilité utilisée par ce constructeur, nous avons considéré avec prudence que l'incertitude du résultat d'un mesurage de m correspond à un intervalle de $\pm 0,02$ mg par rapport à la masse m' mesurée. Pour la génération du courant i_0 , le constructeur fournit une précision par rapport à la pleine échelle utilisée ainsi que des caractéristiques temporelles d'établissement qui vont dépendre de l'impédance de la charge. Avec ces données, nous avons considéré que l'incertitude associée à l'établissement de la consigne de courant i_0^c correspond à un intervalle centré sur i_0^c et dont la largeur représente 0,3% de la pleine échelle qui vaut 400 mA, soit une largeur d'intervalle de 1,2 mA. En absence d'autres informations, le processus que nous avons retenu pour établir l'incertitude-type de Type B est donc le suivant :

- effectuer la mesure de la grandeur via un mesurage donné (ou via le choix de la consigne de courant i_0^c dans le cas du mesurande i_0). La valeur obtenue sera par convention l'estimation de la valeur moyenne de la loi probabiliste qui caractérise le mesurage en question ;
- fixer en fonction des informations disponibles la plus grande variation de la grandeur mesurée (ou de la consigne de courant) autour de sa moyenne estimée ;
- choisir une distribution de probabilité uniforme sur la plage de variation précédente qui traduit l'absence d'autres informations sur la dispersion du mesurage ;
- calculer l'écart-type à partir de la distribution de probabilité uniforme. Cet écart-type correspond à l'incertitude $\mathcal{U}(\cdot)$ du résultat du mesurage :

$$\mathcal{U}(m') = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{12}} \text{ kg} \quad \mathcal{U}(i_0^c) = \frac{3,1 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{12}} \text{ A.} \quad (7.4)$$

Les résultats numériques du calcul d'incertitude pour ces paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

Grandeur	Moyenne	Incrtitude $\mathcal{U}(\cdot)$
m	$m' = 8,8 \cdot 10^{-6}$	$1,15 \cdot 10^{-8}$
i_0	$i_0^c = 0,2$	$8,94 \cdot 10^{-4}$

TABLE 7.2 – Estimation de la valeur moyenne et incertitude de Type B associées au résultat du mesurage des grandeurs m et i_0

Jusqu'à présent, nous avons déterminé les incertitudes-types associées à quatre grandeurs qui affectent la dynamique du tube. Il reste à considérer le paramètre β et la commande en force qui génère la force physique inconnue $f_{elec}(i,P)$ qui excite le tube. Ces grandeurs, qui interviennent dans la chaîne de commande, sont des grandeurs composées car elles dépendent d'autres grandeurs physiques telles que la masse, l'accélération de la pesanteur, le courant dans les bobines, le déplacement de la tige, etc. pour lesquelles on dispose de mesurages et donc d'incertitudes associées. Il est alors possible de déterminer des incertitudes composées associées à l'identification de β et à l'évaluation de $f_{elec}(i,P)$. Cette détermination est détaillée dans la prochaine section.

7.2.3/ INCERTITUDE COMPOSÉE ASSOCIÉE À LA DÉTERMINATION DU PARAMÈTRE β ET DE LA FORCE $f_{elec}(i,P)$

La méthode de quantification d'une incertitude-type composée, qui est détaillée dans le GUM, est une démarche approchée (par une approximation linéaire) qui prend son origine dans l'analyse statistique. Elle permet de quantifier l'incertitude du résultat d'un mesurage d'une grandeur composée de plusieurs autres grandeurs à l'aide d'une relation connue (ou modélisée) entre ces grandeurs, laquelle n'est pas forcément linéaire. Cette quantification s'obtient en propageant l'incertitude associée aux résultats des mesurages de chacune de ces grandeurs. Pour une grandeur composée a , son incertitude-type composée se calcule en suivant la procédure suivante :

- calcul du coefficient de sensibilité c_j qui est établi pour chacune des n grandeurs j qui composent la grandeur a . Par exemple, le paramètre β est une fonction de quatre grandeurs j qui sont m , g , i_0 et θ :

$$\beta = \frac{m g \cos \theta}{i_0}. \quad (7.5)$$

Les coefficients de sensibilité c_j de a sont calculés par rapport à la valeur moyenne du résultat du mesurage des grandeurs j à l'aide de l'équation suivante :

$$c_j = \frac{\partial a}{\partial j}(\text{valeurs moyennes du résultat du mesurage des grandeurs } j). \quad (7.6)$$

Par exemple, si $j = m$, le coefficient de sensibilité c_m de β vaut :

$$c_m = \frac{\partial \beta}{\partial m}(g^m, i_0^c, \theta^m) = \frac{g^m \cos \theta^m}{i_0^c} \quad (7.7)$$

avec g^m , i_0^c et θ^m qui sont les moyennes (estimées) à partir des mesurages de g , i_0 et θ ;

- détermination de l'incertitude-type $\mathcal{U}(j)$ de Type A ou B du résultat du mesurage de chaque grandeur j qui compose la grandeur a ;
- calcul de l'incertitude-type composée du résultat du mesurage de a à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{U}^2(a) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathcal{U}^2(j). \quad (7.8)$$

Pour déterminer l'incertitude-type composée associée à l'identification de β , nous sommes confrontés au fait que nous n'avons pas de mesurage de l'accélération de la pesanteur g , ni de mesurage de l'angle θ . Pour les obtenir, il faudrait disposer d'un gravimètre et il faudrait instrumenter la table anti-vibrations pour mesurer l'inclinaison variable du plateau. Dans le cadre de ce mémoire, nous allons utiliser une formule² pour déterminer une approximation g' du mesurande g à partir de la latitude ϕ en radians dans le système géodésique GRS 80 et de l'altitude h en mètres :

$$g' = 9,780327 \times (1 + 5,3024 \times 10^{-3} \times \sin^2(\phi) - 5,8 \times 10^{-6} \times \sin^2(2 \times \phi) - 3,086 \times 10^{-7} \times h). \quad (7.9)$$

Dans la salle de manipulation du laboratoire, on a environ $\phi = 0,82467$ radians et $h = 300$ mètres, ce qui donne :

$$g' = 9,8073 \text{ m/s}^2. \quad (7.10)$$

En absence d'autres informations, nous allons imposer que l'incertitude-type $\mathcal{U}(g')$ associée à l'approximation g' est nulle et que sa valeur moyenne g^m vaut g' , ce qui revient à dire qu'on connaît parfaitement la valeur de g . Par ailleurs, nous allons supposer qu'un mesurage de θ sur un temps long serait forcément caractérisé par une valeur moyenne θ^m nulle puisque le plateau de la table oscille autour d'angle $\theta = 0$:

$$g^m = 9,8073 \text{ m/s}^2 \quad \mathcal{U}(g') = 0 \quad \theta^m = 0. \quad (7.11)$$

Avec ces hypothèses supplémentaires, il est alors possible de déterminer l'incertitude-type composée du résultat de l'identification de β . Ce calcul est résumé dans le tableau 7.3. On peut noter pour finir que la valeur moyenne associée à l'identification de β est par hypothèse égale à β' puisqu'on obtient toujours β' comme résultat de son mesurage :

$$\beta^m = \beta' = \frac{m' g'}{i_0^c}. \quad (7.12)$$

Paramètre $\beta = \frac{m g \cos \theta}{i_0}$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j) c_j$
m	$2,11 \cdot 10^{-8}$	49,05	$1,03 \cdot 10^{-6}$
g	0	$4,40 \cdot 10^{-5}$	0
i_0	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$-2,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,94 \cdot 10^{-6}$
θ	-	0	0
$\mathcal{U}(\beta') = \sqrt{\sum_{j=1}^4 c_j^2 \mathcal{U}^2(j)} = 2,01 \cdot 10^{-6}$			

TABLE 7.3 – Incertitude-type composée associée à l'identification du paramètre β

Pour expliquer le calcul de l'incertitude en lien avec la commande en force u et la force électromagnétique générée $f_{elec}(i,P)$, il convient de rappeler comment les grandeurs numériques qui sont manipulées par le calculateur dSPACE sont liées aux grandeurs physiques réelles qui sont générées sur le dispositif expérimental. Au niveau de la commande en force u , nous avons implémenté un modèle inverse pour que la force $f_{elec}(i,P)$ excitant réellement le tube soit très proche de la grandeur de commande u . Les grandeurs numériques calculées dans dSPACE sont supposées être exactes (on néglige la précision du calcul numérique). Seules les grandeurs physiques inconnues engendrent des incertitudes lorsqu'on essaye de les déterminer. Comme illustré sur la figure 7.3, la commande u

2. disponible à l'URL <https://fr.wikipedia.org/wiki/Pesanteur>

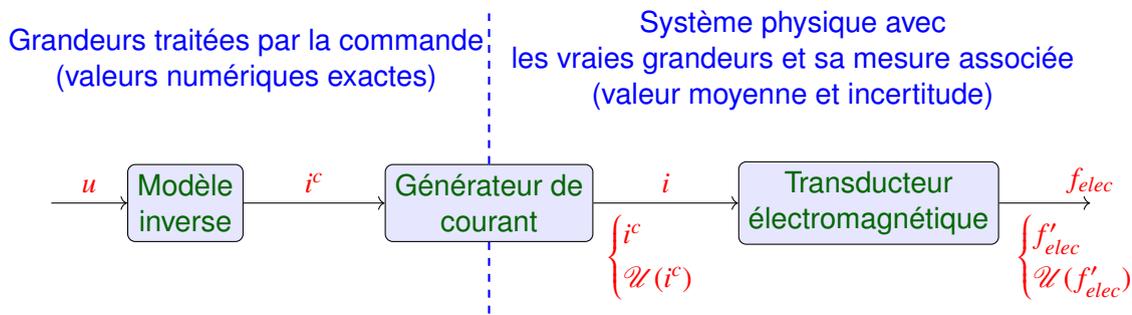


FIGURE 7.3 – Synoptique pour la propagation de l'incertitude de la grandeur de commande u .

générée par le contrôleur est une valeur exacte. La commande u est ensuite transformée en une consigne de courant i^c en utilisant le modèle inverse de la force électromagnétique. L'électronique de puissance produit un courant physique i dont la valeur moyenne est supposée être égale à la valeur du courant de consigne i^c . Son incertitude $\mathcal{U}(i^c)$ est de Type B et elle est calculée comme pour l'évaluation du courant i_0 (cf. section 7.2.2). Le transducteur électromagnétique produit ensuite une force physique $f_{elec}(i, P)$ qui est induite par i . Cette force inconnue est celle qui excite réellement le tube et il convient donc de déterminer l'incertitude qui est associée à son estimation. Cette estimation est la commande u qui est déterminée par le contrôleur.

Pour établir l'incertitude composée associée à u , il faut partir du modèle mathématique qui détermine l'approximation $f_{elec}(i, z)$ de $f_{elec}(i, P)$ (cf. chapitre 6) via l'équation suivante :

$$f_{elec}(i, z) = i(\gamma z + \beta). \quad (7.13)$$

L'estimation u du mesurande $f_{elec}(i, P)$ est ensuite dérivée de ce modèle en remplaçant les mesurandes γ , z et β par les résultats des mesurages qui fournissent les valeurs γ' , z' et β' . Le mesurande i est quant à lui remplacé par la valeur de consigne i^c qui est envoyée au générateur de courant :

$$u = i^c(\gamma' z' + \beta'). \quad (7.14)$$

L'incertitude composée associée au résultat de cette estimation de $f_{elec}(i, P)$ se calcule donc en propageant les incertitudes associées au courant de consigne i^c , à la position mesurée z' , et aux valeurs identifiées γ' et β' . Les incertitudes sur i^c , γ' et β' ont été calculées précédemment. L'incertitude sur la mesure z' est prise égale à l'écart-type de mesure du capteur confocal chromatique qui vaut $\sigma = 5,6 \cdot 10^{-9}$ mètre.

La propagation de ces incertitudes sur u se calcule en utilisant (7.6), (7.7) et (7.8). La valeur de i^c ainsi que la mesure du déplacement du tube z' ont été récupérées à partir des données de la validation expérimentale présentée dans le chapitre précédent. Rappelons que ces valeurs correspondent par hypothèse aux valeurs moyennes qui sont nécessaires pour le calcul de l'incertitude composée. Notons que les valeurs moyennes du résultat du mesurage de γ et β ont déjà été déterminées. Les résultats du calcul de l'incertitude composée associée à u pour 2 couples de valeurs (i^c, z') sont donnés dans les tableaux 7.4 et 7.5.

D'après les résultats obtenus dans les tableaux 7.4 et 7.5, nous remarquons que l'incertitude associée à u est plus sensible au courant (comparativement aux autres grandeurs).

Commande en force $u = i^c(\gamma' z' + \beta')$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j)c_j$
β	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$-3,17 \cdot 10^{-5}$	$-6,37 \cdot 10^{-12}$
γ	$1,92 \cdot 10^{-5}$	$8,78 \cdot 10^{-13}$	$1,68 \cdot 10^{-17}$
i	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$4,31 \cdot 10^{-4}$	$3,85 \cdot 10^{-7}$
z	$5,6 \cdot 10^{-9}$	$3,45 \cdot 10^{-7}$	$1,93 \cdot 10^{-15}$
$\mathcal{U}(u) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 c_j^2 \mathcal{U}^2(j)} = 3,85 \cdot 10^{-7}$			

TABLE 7.4 – Incertitude-type composée associée à la commande en force u pour $i^c = -3,17 \cdot 10^{-6}$ A et $z' = -2,77 \cdot 10^{-7}$ m

Commande en force $u = i^c(\gamma' z' + \beta')$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j)c_j$
β	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$3,86 \cdot 10^{-5}$	$7,75 \cdot 10^{-11}$
γ	$9,11 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-12}$	$2,59 \cdot 10^{-17}$
i	$9 \cdot 10^{-4}$	$4,31 \cdot 10^{-4}$	$3,85 \cdot 10^{-7}$
z	$5,6 \cdot 10^{-9}$	$-4,20 \cdot 10^{-6}$	$-2,35 \cdot 10^{-14}$
$\mathcal{U}(u) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 c_j^2 \mathcal{U}^2(j)} = 3,85 \cdot 10^{-7}$			

TABLE 7.5 – Incertitude-type composée associée à la commande en force u , pour $i^c = 3,86 \cdot 10^{-5}$ A et $z' = 3,5 \cdot 10^{-8}$ m

Néanmoins, quels que soient les couples de valeurs (i^c, z') considérés, l'incertitude composée associée à u reste constante et égale à $3,85 \cdot 10^{-7}$ N.

7.2.4/ DÉTERMINATION DE L'INCERTITUDE ÉLARGIE

L'incertitude-type $\mathcal{U}(\cdot)$ peut être utilisée universellement pour exprimer l'incertitude associée à un résultat de mesure. Cependant, selon le GUM, il est souvent nécessaire pour certaines applications de donner une mesure de l'incertitude qui définisse autour du résultat de mesure, un intervalle à l'intérieur duquel on puisse espérer voir se situer une large fraction de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande. Il s'agit dans ce cas de la détermination de l'incertitude élargie.

Par définition³, l'incertitude élargie est une expression de l'incertitude qui satisfait à l'exigence de fournir un intervalle. Elle sera notée $\Delta \cdot$ (où "." doit être remplacé par le résultat du mesurage effectué) et elle est obtenue par le produit d'une incertitude-type $\mathcal{U}(\cdot)$ par un facteur d'élargissement supérieur à 1. Le résultat d'un mesurage peut alors s'exprimer sous la forme symbolique $Y = y \pm \Delta y'$, qui s'interprète comme signifiant que la meilleure estimation de la valeur attribuable au mesurande Y est y , et qu'on peut s'attendre à ce que l'intervalle de $y - \Delta y'$ à $y + \Delta y'$ comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement à Y . Un tel intervalle s'exprime aussi par $y - \Delta y' \leq Y \leq y + \Delta y'$. Lorsque toutes les incertitudes sont de Type A, la valeur du facteur d'élargissement peut être choisie sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle $y - \Delta y' \leq Y \leq y + \Delta y'$ en se basant sur des résultats de l'analyse statistique. Par exemple, lorsque le nombre l de valeurs obtenues pour la série observée est

3. disponible à l'URL https://www.bipm.org/utls/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_F.pdf

faible (dans notre cas, l valait 24 pour K_v et γ), il faut tenir compte de la loi de Student. Le coefficient d'élargissement correspond alors au coefficient de Student t . Ce dernier est calculé à partir d'un degré de liberté (égal à l moins le nombre de paramètres) et de la confiance qu'on souhaite avoir. Ainsi, l'incertitude élargie de K_v^m ou de γ^m qui correspond à un intervalle de confiance de 99% est obtenue avec un coefficient d'élargissement $t = 2,81$ (le degré de liberté est 23).

Lorsque des incertitudes de Type B sont en plus présentes, comme c'est le cas dans ce mémoire, le choix du facteur d'élargissement devient nettement plus empirique car on ne connaît pas en général la loi statistique qui lie les résultats du mesurage et le mesurande associé. . .

Les meilleures estimations de m , K_v , γ , β , $f_{elec}(i,P)$, i_0 et i sont respectivement m' , K_v^m , γ^m , β' , u , i_0^c , i^c et les incertitudes élargies associées sont notées $\Delta m'$, $\Delta K_v'$, $\Delta \gamma'$, $\Delta \beta'$, Δu , Δi_0^c et Δi^c . On a donc :

- $m = m' \pm \Delta m'$,
- $K_v = K_v^m \pm \Delta K_v'$,
- $\gamma = \gamma^m \pm \Delta \gamma'$,
- $\beta = \beta' \pm \Delta \beta'$,
- $f_{elec}(i,P) = u \pm \Delta u$,
- $i_0 = i_0^c \pm \Delta i_0^c$,
- $i = i^c \pm \Delta i^c$.

En général, le facteur d'élargissement est compris dans la plage de 2 à 3. Pour l'accéléromètre, nous avons des incertitudes de Type A et B qui rend difficile la détermination de ce facteur. Nous avons donc choisi la plus défavorable des valeurs usuelles qui est 3. Les valeurs numériques des incertitudes élargies correspondantes⁴ pour chaque paramètre sont données dans le tableau 7.6.

Mesurage	Incertainete $\mathcal{U}(\cdot)$	Incertainete élargie $\Delta \cdot = 3\mathcal{U}(\cdot)$
K_v' [N.s/m]	$6,76 \cdot 10^{-8}$	$2,02 \cdot 10^{-7}$
γ' [kg/(A.s ²)]	$1,92 \cdot 10^{-5}$	$5,76 \cdot 10^{-5}$
m' [kg]	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$3,45 \cdot 10^{-8}$
i_0^c [A]	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
β' [kg.m/(A.s ²)]	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$6,03 \cdot 10^{-6}$
u [N]	$3,85 \cdot 10^{-7}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$

TABLE 7.6 – Valeurs des incertitudes-types et des incertitudes élargies associées au résultat des mesurages

Dans le cadre de ce mémoire, nous essayons de rendre possible la traçabilité de l'accélération sismique au SI, ce qui suppose de documenter comment on détermine son estimation et quelle est la chaîne de traitements qui permet de déterminer l'incertitude associée à cette estimation. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la propagation de toutes les incertitudes élargies connues qui affectent l'estimation de cette accélération. Parmi les outils possibles pour effectuer ce traitement, on trouve les observateurs par intervalles.

4. Le niveau de confiance associé à l'intervalle obtenu serait alors de 99,7% dans le cas de distributions gaussiennes si toutes les incertitudes étaient de Type A, ce qui n'est pas le cas pour l'accéléromètre . . .

Ce type d'observateurs permet de propager dynamiquement sur les grandeurs estimées les incertitudes connues sous la forme d'intervalles. Cette approche permet donc de fournir un intervalle dans lequel l'état du système est raisonnablement sensé se trouver. Les détails de cette approche ont été présentés dans le chapitre 4.

Dans la prochaine section, nous allons adapter cette approche au cas de l'observateur GeLESO, afin de propager sur l'estimation de l'accélération sismique \ddot{z}_a les incertitudes élargies connues qu'on vient de déterminer.

7.3/ OBSERVATEUR GELESO BASÉ INTERVALLES POUR LA PROPAGATION DES INCERTITUDES PARAMÉTRIQUES

Un observateur par intervalles est un système dynamique auxiliaire fournissant une borne supérieure et une borne inférieure, donc un intervalle, englobant l'état du système à chaque instant. Ces bornes sont généralement calculées à l'aide de deux observateurs distincts, et chaque observateur fournit une borne.

L'observateur par intervalles que nous allons présenter a pour objectif de propager dynamiquement les incertitudes élargies quantifiées dans la précédente section sur l'accélération sismique. Cet observateur permettra donc d'estimer les bornes inférieure et supérieure dans lesquelles la vraie accélération \ddot{z}_a du plateau de la table anti-vibrations est sensée se trouver. La validité de cet encadrement sera néanmoins conditionnée à la qualité de l'approche métrologique qui a été menée ainsi qu'à la bande passante de l'accéléromètre. L'observateur permettra également d'estimer les bornes inférieure et supérieure dans lesquelles se trouvent les valeurs vraies de la position du tube et de sa vitesse.

Dans cette section, nous avons adapté l'approche par intervalles à l'observateur GeLESO proposé dans les sections précédentes. Dans ce qui suit, cet observateur par intervalles est nommé "GeLESO par intervalles".

7.3.1/ REPRÉSENTATION DE LA DYNAMIQUE INCERTAINE DU TUBE

La dynamique exacte du tube, exprimée à partir des grandeurs physiques mesurées ou identifiées, s'écrit de la façon suivante :

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = u + \mathcal{A}_c. \quad (7.15)$$

L'entrée virtuelle \mathcal{A}_c représente l'accélération sismique $-\ddot{z}_a$ sur laquelle s'additionne un autre terme qui dépend de m' et d'une entrée virtuelle, homogène à une force, notée \mathcal{C} :

$$\mathcal{A}_c = -\ddot{z}_a + \frac{1}{m'} \mathcal{C}. \quad (7.16)$$

L'entrée \mathcal{C} correspond à une incertitude de modélisation qui est associée au modèle cible $M(s)$. Ce modèle cible est celui qui a été choisi pour représenter de manière imparfaite le transfert force-déplacement de l'accéléromètre (cf. chapitre 6). Pour introduire l'observateur par intervalles, nous allons d'abord commencer par ne plus tenir compte de l'incertitude \mathcal{C} . Ceci revient à annuler sa valeur dans (7.15). La dynamique approchée du

tube qui en résulte est représentée par le modèle imprécis suivant :

$$m' \ddot{z} + K'_v \dot{z} - \gamma' i_0^c z = u + a_c \quad (7.17)$$

avec :

$$a_c = -\ddot{z}_a. \quad (7.18)$$

On peut noter que l'évolution de z que ce modèle prédit, lorsqu'il est excité par la commande u et par la valeur vraie a_c de l'accélération sismique, ne correspond pas à la valeur vraie du déplacement z du tube. Nous allons maintenant définir une représentation d'état étendue de ce modèle, comme nous l'avons fait pour établir un observateur GeLESO d'ordre $p + 1$ égal à 3. En reprenant la même démarche que dans le chapitre précédent et en substituant le terme a_c à \mathcal{A}_c , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{X}_e = A'_e X_e + B'_e u + \mathcal{B}_e \dot{a}_c \\ z = C_e X_e \end{cases} \quad (7.19)$$

avec

$$A'_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{K'_v}{m'} & 1 \\ 0 & \frac{\gamma' i_0^c}{m'} & 0 \end{bmatrix}, \quad B'_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_e = [1 \ 0 \ 0]. \quad (7.20)$$

$X_e = [x_1, x_2, x_3]^T$ représente le vecteur d'état étendu du modèle, x_1 correspondant à la position z du tube donnée par le modèle et x_2 à sa vitesse \dot{z} modélisée. L'état étendu x_3 est quant à lui donné par :

$$x_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'} x_1 + a_c. \quad (7.21)$$

Les matrices A'_e , B'_e , \mathcal{B}_e et C_e représentent respectivement la matrice d'état du modèle, sa matrice de commande, sa matrice de distribution de l'accélération sismique a_c et sa matrice de sortie. L'usage du prime sur le nom des matrices d'état et de commande signifie que les éléments de ces matrices correspondent à des valeurs identifiées, mesurées ou imposées. La paire (A'_e, C_e) est complètement observable grâce à la forme compagnon de la matrice A'_e .

Nous allons enfin introduire des incertitudes sous la forme d'intervalles dans ce modèle étendu approché afin de retrouver une représentation supposée la plus exacte possible, mais incertaine, de la dynamique du tube. Pour cela, nous allons tenir compte de toutes les incertitudes que nous avons établies sur les grandeurs physiques manipulées grâce à l'approche métrologique qui a précédé. On obtient alors une dynamique incertaine de X_e qui est représentée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_e = (A'_e + \delta A'_e) X_e + (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) + \mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c) \\ z = C_e X_e \end{cases} \quad (7.22)$$

Dans cette représentation incertaine, chaque terme ayant la forme générique $Y = y + \delta y$ représente une grandeur inconnue Y dont y est la meilleure estimation disponible. De ce fait, δy est l'erreur d'estimation qui correspond à l'écart inconnu entre la valeur vraie Y et y :

$$\delta y = Y - y. \quad (7.23)$$

De part l'approche métrologique qui précède, il est raisonnable de supposer que la valeur absolue de chaque δy peut être supposée inférieure à l'incertitude élargie Δy qui est associée au résultat de l'estimation ou du mesurage de Y :

$$-\Delta y \leq \delta y \leq \Delta y. \quad (7.24)$$

On a donc de ce fait :

$$\delta A'_e \in [-\Delta A'_e; \Delta A'_e], \quad \delta B'_e \in [-\Delta B'_e; \Delta B'_e], \quad \delta u \in [-\Delta u; \Delta u], \quad \delta \dot{a}'_c \in [-\Delta \dot{a}'_c; \Delta \dot{a}'_c]. \quad (7.25)$$

Afin de respecter la notation usuelle employée pour synthétiser un observateur par intervalles, l'intervalle qui définit les valeurs possibles pour Y sera noté :

$$Y \in [\underline{y}; \bar{y}] \quad \text{avec} \quad \underline{y} = y - \Delta y' \quad \text{et} \quad \bar{y} = y + \Delta y'. \quad (7.26)$$

Il s'en suit que la représentation de la dynamique incertaine du tube doit être interprétée comme suit :

- $A_e = A'_e + \delta A'_e$ représente une matrice d'état mal connue qui est comprise dans l'intervalle matriciel :

$$A_e \in [\underline{A}_e; \bar{A}_e] \quad \text{avec} \quad \underline{A}_e = A'_e - \Delta A'_e \quad \text{et} \quad \bar{A}_e = A'_e + \Delta A'_e, \quad (7.27)$$

- $B_e = B'_e + \delta B'_e$ représente une matrice de commande mal connue qui est comprise dans l'intervalle matriciel :

$$B_e \in [\underline{B}_e; \bar{B}_e] \quad \text{avec} \quad \underline{B}_e = B'_e - \Delta B'_e \quad \text{et} \quad \bar{B}_e = B'_e + \Delta B'_e, \quad (7.28)$$

- $f_{elec}(i,P) = u + \delta u$ représente la force électromagnétique qui est physiquement générée et qui est comprise dans l'intervalle :

$$f_{elec}(i,P) \in [\underline{u}; \bar{u}] \quad \text{avec} \quad \underline{u} = u - \Delta u \quad \text{et} \quad \bar{u} = u + \Delta u, \quad (7.29)$$

- $\dot{a}_c = \dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c$ représente la dérivée vraie de l'accélération sismique qu'on cherche à mesurer. Elle est comprise dans l'intervalle :

$$\dot{a}_c \in [\underline{\dot{a}}_c; \bar{\dot{a}}_c] \quad \text{avec} \quad \underline{\dot{a}}_c = \dot{a}'_c - \Delta \dot{a}'_c \quad \text{et} \quad \bar{\dot{a}}_c = \dot{a}'_c + \Delta \dot{a}'_c. \quad (7.30)$$

La dynamique incertaine (7.22) du tube peut donc être aussi représentée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_e &= A_e X_e + B_e f_{elec}(i,P) + \mathcal{B}_e \dot{a}_c \\ z &= C_e X_e \end{cases} \quad (7.31)$$

où A_e , B_e , $f_{elec}(i,P)$ et \dot{a}_c sont des grandeurs scalaires et matricielles inconnues. Elles peuvent donc être assimilées à des mesurands scalaires ou matriciels qui donneraient la dynamique exacte du tube. Leurs estimations (en utilisant les paramètres identifiés ou mesurés) sont A'_e , B'_e , u et \dot{a}'_c . Les incertitudes scalaires ou matricielles élargies des ces estimations sont $\Delta A'_e$, $\Delta B'_e$, Δu et $\Delta \dot{a}'_c$. Les matrices $\Delta A'_e$ et $\Delta B'_e$ sont définies par :

$$\Delta A'_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta \left(-\frac{K'_v}{m'} \right) & 0 \\ 0 & \Delta \left(\frac{\gamma' i'_0}{m'} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B'_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \left(\frac{1}{m'} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

D'après (7.32), les incertitudes matricielles élargies $\Delta A'_e$ et $\Delta B'_e$ associées aux matrices A'_e et B'_e ont des composantes qui se déduisent d'incertitudes-types composées combinées à un facteur d'élargissement. La détermination de ces dernières se fait grâce à la méthode présentée dans la section 7.2.3 et leurs valeurs sont données dans les tableaux 7.7, 7.8 et 7.9. Chaque incertitude élargie $\Delta \cdot$ est ensuite obtenue en multipliant par 3 les incertitudes-types composées $\mathcal{U}_c(\cdot)$ correspondantes.

Paramètre $\frac{-K_v}{m}$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j_i)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
K_v	$6,76 \cdot 10^{-8}$	$-1,13 \cdot 10^5$	$-7,70 \cdot 10^{-3}$
m	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$4,80 \cdot 10^4$	$5,52 \cdot 10^{-4}$
$\mathcal{U}_c\left(\frac{-K_v}{m}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)} = 7,70 \cdot 10^{-3}$			

TABLE 7.7 – Incertitude-type composée du paramètre $\frac{-K_v}{m}$

Paramètre $\frac{\gamma i_0}{m}$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j_i)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
γ	$1,92 \cdot 10^{-5}$	$2,27 \cdot 10^4$	0,43
i_0	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$-1,23 \cdot 10^4$	-11,07
m	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$2,81 \cdot 10^8$	3,23
$\mathcal{U}_c\left(\frac{\gamma i_0}{m}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)} = 11,54$			

TABLE 7.8 – Incertitude-type composée du paramètre $\frac{\gamma i_0}{m}$

Paramètre $\frac{1}{m}$			
Source d'incertitude	Incertitude-type $\mathcal{U}(j_i)$	Coefficient de sensibilité c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
m	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$1,29 \cdot 10^{10}$	148,50
$\mathcal{U}_c\left(\frac{1}{m}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^1 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)} = 148,50$			

TABLE 7.9 – Incertitude-type composée du paramètre $\frac{1}{m}$

7.3.2/ STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR GELESO PAR INTERVALLES

Pour une représentation d'état sans bruit de mesure telle que (7.19), la synthèse d'un GeLESO standard d'ordre $p + i = 2 + 1 = 3$ donne l'observateur suivant :

$$\dot{\hat{X}}_e = (A'_e - \mathcal{L}C_e)\hat{X}_e + \mathcal{L}z + B'_e u \quad (7.33)$$

avec \hat{X}_e l'observation de X_e .

Pour synthétiser un GeLESO par intervalles à partir de (7.33), nous allons adopter une technique de synthèse des observateurs par intervalles qui consiste à enrichir la structure de (7.33) avec des termes additionnels qui prennent en compte les incertitudes qui vont influencer sur l'observation de z , de \dot{z} et de a_c . Dans notre cas, ces termes "d'enrichissement" seront :

- des termes additionnels qui prennent en compte l'incertitude introduite par le bruit de mesure v ;
- des termes additionnels qui prennent en compte toutes les formes d'incertitude qui sont présentes dans la représentation d'état incertaine (7.22).

Ces formes d'incertitude sont :

- le produit $\delta A'_e X_e$,
- le produit $(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u)$,
- l'incertitude élargie $\delta \dot{a}'_c$,
- l'incertitude associée aux conditions initiales des composantes de X_e .

Pour prendre en compte l'incertitude introduite par le bruit de mesure v , on va supposer qu'on connaît une borne minimale et une borne maximale de ce dernier. On va également supposer qu'on connaît la valeur de l'incertitude élargie $\Delta \dot{a}'_c$, ainsi qu'un encadrement de $X_e(0)$. Ces éléments sont résumés dans l'hypothèse suivante :

Hypothèse 7.3.1. (*Bornes sur le bruit de mesure et les conditions initiales*)

- Il existe deux constantes \underline{v} et $\bar{v} \in \mathbb{R}^*$ avec $\underline{v} \leq v \leq \bar{v}$, et $\bar{v} = -\underline{v}$.
- Il existe deux constantes $\underline{\dot{a}}_c$ et $\bar{\dot{a}}_c \in \mathbb{R}^*$ avec $\underline{\dot{a}}_c \leq \dot{a}_c \leq \bar{\dot{a}}_c$, et $\bar{\dot{a}}_c = -\underline{\dot{a}}_c$.
- Il existe deux vecteurs $\bar{X}_e(0) \in \mathbb{R}^3$ et $\underline{X}_e(0) \in \mathbb{R}^3$ tels que le vecteur des conditions initiales $X_e(0)$ est borné par : $\underline{X}_e(0) \leq X_e(0) \leq \bar{X}_e(0)$, et $\bar{X}_e(0) = -\underline{X}_e(0)$.

La structure (7.33) du GeLESO est idéalisée car elle ne tient pas compte du bruit de mesure sur la sortie. Pour prendre en compte ce bruit qui perturbe l'observation, il faut considérer la mesure du placement du tube qui est $z' = z + v$. De ce fait, le déplacement inconnu du tube est $z = z' - v$. L'encadrement de la valeur vraie z qu'on va utiliser pour enrichir la structure de (7.33) est donc :

$$z' + \underline{v} \leq z \leq z' + \bar{v}. \quad (7.34)$$

Pour prendre en compte le produit $\delta A'_e X_e$, on va utiliser le théorème suivant qui permet d'encadrer le produit d'une matrice incertaine par un vecteur incertain.

Théorème 7.3.1. (*Lemme 2 dans (Efimov et al., 2012)*)

Soit le vecteur variable $x \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$. Soit la matrice constante $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ qui dépend des paramètres bornés et $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$, alors :

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x}. \quad (7.35)$$

avec

$$A^+ = \max\{0, A\} \quad \text{et} \quad A^- = A^+ - A. \quad (7.36)$$

Pour finir, le produit incertain $(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u)$ peut être facilement encadré puisque c'est le produit d'un vecteur colonne incertain appartenant à $[\underline{B}_e; \bar{B}_e]$ par un scalaire incertain appartenant à $[\underline{u}; \bar{u}]$. Les bornes inférieures et supérieures de ce produit sont donc respectivement $\underline{B}_e \underline{u}$ et $\bar{B}_e \bar{u}$.

Avec ces informations, on dispose de tous les éléments nécessaires pour effectuer l'enrichissement de (7.33) tel qu'il est fait classiquement pour la synthèse des observateurs par intervalles. Cet enrichissement est obtenu en se basant uniquement sur les bornes inférieures et supérieures de tous les termes incertains que nous avons pris en compte.

Ceci conduit à déterminer un encadrement de l'état étendu X_e du système (7.22) à tout instant t :

$$\underline{X}_e(t) \leq X_e(t) \leq \overline{X}_e(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (7.37)$$

Il s'en suit que la borne inférieure \underline{X}_e et la borne supérieure \overline{X}_e sont respectivement calculées :

- à l'aide d'un observateur GeLESO enrichi en ajoutant les bornes supérieures des termes incertains que nous avons pris en compte,
- et d'un observateur GeLESO enrichi en ajoutant les bornes inférieures de ces mêmes termes.

La réunion de ces deux observateurs conduit au GeLESO par intervalles qui est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{X}}_e &= (A'_e - \mathcal{L}C_e)\overline{X}_e + \mathcal{L}z' + |\mathcal{L}|\overline{v} + \overline{B}_e\overline{u} + \overline{\delta} + \mathcal{B}_e\overline{\dot{a}}_c \\ \dot{\underline{X}}_e &= (A'_e - \mathcal{L}C_e)\underline{X}_e + \mathcal{L}z' + |\mathcal{L}|\underline{v} + \underline{B}_e\underline{u} + \underline{\delta} + \mathcal{B}_e\underline{\dot{a}}_c \end{cases} \quad (7.38)$$

où \mathcal{L} est le vecteur des gains de l'observateur et $|\mathcal{L}|$ est le vecteur des valeurs absolues des éléments de \mathcal{L} . Les termes $\overline{\delta}$ et $\underline{\delta}$ représentent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de $\delta A'_e X_e$. Ils sont obtenus à l'aide du théorème 7.3.1 et sont donnés par :

$$\begin{cases} \overline{\delta} &= \delta A'_e{}^+ \overline{X}_e - \delta A'_e{}^- \underline{X}_e \\ \underline{\delta} &= \delta A'_e{}^+ \underline{X}_e - \delta A'_e{}^- \overline{X}_e \end{cases} \quad (7.39)$$

avec :

$$\delta A'_e{}^+ = \max\{0, \delta A'_e\} \quad \text{et} \quad \delta A'_e{}^- = \delta A'_e{}^+ - \delta A'_e.$$

A ce stade, rien ne permet cependant d'affirmer que la synthèse (7.38) qui vient d'être effectuée respecte la condition (7.37). C'est uniquement si on vérifie ce point qu'on pourra affirmer que cette synthèse débouche bien sur un observateur par intervalle. Cette preuve est établie ci-dessous.

Soient les erreurs d'observation $\overline{e} = \overline{X}_e - X_e$ et $\underline{e} = X_e - \underline{X}_e$. A partir de (7.22) et (7.38), la dynamique de ces erreurs d'observation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\overline{e}} &= (A'_e - \mathcal{L}C_e)\overline{e} + \mathcal{L}v + |\mathcal{L}|\overline{v} + \overline{B}_e\overline{u} - (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - \delta A'_e X_e + \overline{\delta} + \mathcal{B}_e(\overline{\dot{a}}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \\ \dot{\underline{e}} &= (A'_e - \mathcal{L}C_e)\underline{e} - \mathcal{L}v - |\mathcal{L}|\underline{v} + (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - \underline{B}_e\underline{u} + \delta A'_e X_e - \underline{\delta} + \mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{\dot{a}}_c) \end{cases} \quad (7.40)$$

L'observateur (7.38) est un observateur par intervalles pour le système (7.22) si et seulement si $\underline{X}_e(t)$ et $\overline{X}_e(t)$ respectent (7.37). Cela signifie que les erreurs d'observation \overline{e} et \underline{e} doivent toujours être positives, c'est-à-dire :

$$\forall t, \quad \overline{e} \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{e} \geq 0.$$

Cette condition est appelée la condition de coopérativité et elle représente la condition sur laquelle se base la construction d'un observateur par intervalles.

Soit le théorème suivant, introduit dans le chapitre 4, rappelant une propriété intéressante des systèmes coopératifs :

Théorème 7.3.2. (Gouzé et al., 2000) Soit un système coopératif décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha \quad (7.41)$$

où la matrice A est Metzler. Si $\alpha \geq 0$ alors, pour toutes conditions initiales $x(0) \geq 0$, on a $x(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$.

Pour rappel également, une matrice Metzler est une matrice dont les termes non diagonaux sont tous positifs.

D'après le théorème 7.3.2, les erreurs d'observation \bar{e} et \underline{e} seront positives si :

$$\bar{e}(0) \geq 0 \quad (7.42)$$

$$\underline{e}(0) \geq 0 \quad (7.43)$$

$$\mathcal{L}v + |\mathcal{L}|\bar{v} + \bar{B}_e \bar{u} - (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - \delta A'_e X_e + \bar{\delta} + \mathcal{B}_e(\bar{a}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \geq 0 \quad (7.44)$$

$$- \mathcal{L}v - |\mathcal{L}|\underline{v} + (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - \underline{B}_e \underline{u} + \delta A'_e X_e - \underline{\delta} + \mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{a}_c) \geq 0 \quad (7.45)$$

$$A'_e - \mathcal{L}C_e \text{ est Metzler} \quad (7.46)$$

D'après l'hypothèse 7.3.1, nous avons :

$$\bar{e}(0) = \bar{X}_e(0) - X_e(0) = \bar{X}_{e0} - X_e(0) \geq 0 \quad (7.47)$$

$$\underline{e}(0) = X_e(0) - \underline{X}_e(0) = X_e(0) - \underline{X}_{e0} \geq 0 \quad (7.48)$$

$$\mathcal{L}v + |\mathcal{L}|\bar{v} \geq 0 \quad (7.49)$$

$$- \mathcal{L}v - |\mathcal{L}|\underline{v} \geq 0 \quad (7.50)$$

$$\mathcal{B}_e(\bar{a}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \geq 0 \quad (7.51)$$

$$\mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{a}_c) \geq 0 \quad (7.52)$$

D'après les équations (7.24)-(7.30) et le théorème 7.3.1 :

$$\bar{\delta} - \Delta A'_e X_e \geq 0 \quad (7.53)$$

$$\bar{B}_e \bar{u} - (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) \geq 0 \quad (7.54)$$

$$\Delta A'_e X_e - \underline{\delta} \geq 0 \quad (7.55)$$

$$(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - \underline{B}_e \underline{u} \geq 0 \quad (7.56)$$

Par conséquent, pour garantir la coopérativité de l'erreur d'observation et assurer la positivité des erreurs d'observation, il suffit de choisir le vecteur des gains \mathcal{L} tel que la matrice $(A'_e - \mathcal{L}C_e)$ soit Metzler. Avec un tel choix de matrice, l'observateur (7.38) représente un observateur par intervalles pour le système (7.22) et la condition (7.37) est satisfaite.

Cependant, la recherche d'un gain d'observation satisfaisant la condition de coopérativité des erreurs d'observation est impossible dans notre cas. Dans le but de relaxer cette limitation, plusieurs méthodes de changement de coordonnées ont été proposées pour les systèmes linéaires afin que la matrice $(A'_e - \mathcal{L}C_e)$ soit Metzler dans la nouvelle base. Ce changement de coordonnées peut être variant dans le temps (Mazenc et al., 2011) ou invariant dans le temps. Dans le changement de coordonnées invariant dans le temps, la matrice de passage vers la nouvelle base peut être obtenue par résolution de l'équation de Sylvester (Raissi et al., 2012) ou par optimisation non lisse (Chambon et al., 2015).

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser le changement de coordonnées invariant dans le temps proposé dans (Raissi et al., 2012), dont les étapes sont présentées dans la prochaine section.

7.3.3/ CHANGEMENT DE COORDONNÉES INVARIANT DANS LE TEMPS

Cette méthode repose sur la définition d'une matrice de passage P , invariante dans le temps, telle que la matrice $R = P(A - LC)P^{-1}$ est Metzler (dans la nouvelle base). La

matrice P est la solution d'une équation de Sylvestre⁵ définie dans ce qui suit.

Dans (Raissi et al., 2012) les auteurs considèrent le système LTI défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (7.57)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}$ est son entrée et $y \in \mathbb{R}$ sa sortie.

Etant donné que la détermination du vecteur des gains L tel que $(A - LC)$ soit Metzler n'est pas toujours possible, l'objectif est de déterminer une matrice de transformation non singulière P telle que, dans la nouvelle base $\bar{x} = Px$, le système :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\ y = CP^{-1}\bar{x} \end{cases} \quad (7.58)$$

possède un observateur décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = PAP^{-1}\hat{x} + PBu + PL(y - CP^{-1}\hat{x}) \\ \hat{x} = R\hat{x} + PBu + PLy \end{cases} \quad (7.59)$$

où \hat{x} représente l'estimation du vecteur d'état x et où $R = PAP^{-1} - PLCP^{-1}$ est une matrice Metzler.

La matrice P est non singulière et solution de l'équation :

$$PA - RP = QC, \quad Q = PL. \quad (7.60)$$

L'équation (7.60) est une équation de Sylvester dont l'inconnue est la matrice de transformation P . Dans (Raissi et al., 2012), les auteurs proposent une méthode simple pour le calcul des matrices L et P . Cette méthode est présentée dans le théorème suivant :

Théorème 7.3.3. (Raissi et al. (2012)) Soient une matrice $(A - LC)$ et une matrice Metzler R ayant les mêmes valeurs propres pour un gain L . S'il existe deux vecteurs e_1 et e_2 tels que les paires $(A - LC; e_1)$ et $(R; e_2)$ sont observables, alors les matrices

$$P = O_2^{-1}O_1 \quad \text{et} \quad Q = PL$$

sont solutions de (7.60) avec

$$O_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ \vdots \\ e_2R^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (7.61)$$

Dans (Raissi et al., 2012), les auteurs proposent une procédure simple pour le choix de R . Elle peut être appliquée dans le cas de valeurs propres réelles (non nécessairement simples). Par exemple, si la paire (A, C) est observable, il est possible de déterminer un vecteur des gains L tel que $(A - LC)$ possède des valeurs propres réelles. La matrice R est alors choisie sous une forme triangulaire inférieure avec les valeurs propres de

5. L'équation de Sylvestre a une forme générique décrite par $AX + XB = C$, avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ représente la matrice inconnue à déterminer (Raissi et al., 2012).

$(A - LC)$ sur sa diagonale et des éléments non négatifs en dehors de cette diagonale. Les conditions du théorème 7.3.3 sont donc satisfaites, ce qui permet de calculer une matrice de passage P assurant la coopérativité du système dans la nouvelle base. La réalisabilité de la synthèse d'un observateur par intervalles est par conséquent garantie.

Dans la section suivante, nous allons proposer un observateur GeLESO par intervalles obtenu par changement de coordonnées invariant dans le temps, en suivant les étapes définies dans cette section.

7.3.4/ STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR GELESO PAR INTERVALLES PAR CHANGEMENT DE COORDONNÉES INVARIANT DANS LE TEMPS

Changement de coordonnées invariant dans le temps

Dans la nouvelle base, avec les nouvelles coordonnées $\bar{x} = PX_e$, la dynamique du tube (7.22) est transformée pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= P(A'_e + \delta A'_e)P^{-1}\bar{x} + P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) + \mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c) \\ z &= C_e P^{-1}\bar{x} + v \end{cases} \quad (7.62)$$

avec \bar{x} qui représente le vecteur d'état du système dans la nouvelle base.

Les conditions initiales sont définies dans la nouvelle base à partir du théorème 7.3.1 et s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(0) &= P^+ \bar{x}(0) - P^- \underline{x}(0) \\ \underline{\bar{x}}(0) &= P^+ \underline{x}(0) - P^- \bar{x}(0). \end{cases} \quad (7.63)$$

Cette équation est obtenue à partir du résultat du théorème 7.3.1. La synthèse d'un observateur par intervalles nécessite la connaissance a priori des bornes sur les conditions initiales, de ce fait nous avons considéré l'hypothèse suivante :

Hypothèse 7.3.2. *(Bornes sur les bruit de mesure et les conditions initiales) Il existe deux vecteurs $\bar{\bar{x}}(0) \in \mathbb{R}^3$ et $\underline{\bar{x}}(0) \in \mathbb{R}^3$ tels que le vecteur des conditions initiales $\bar{x}(0)$ est borné par : $\underline{\bar{x}}(0) \leq \bar{x}(0) \leq \bar{\bar{x}}(0)$, et $\bar{\bar{x}}(0) = -\underline{\bar{x}}(0)$.*

L'objectif consiste alors à utiliser ces informations pour déterminer l'encadrement du vecteur d'état \bar{x} du tube (7.62) dans la nouvelle base à tout instant t , c'est-à-dire :

$$\underline{\bar{x}}(t) \leq \bar{x}(t) \leq \bar{\bar{x}}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (7.64)$$

Dans la nouvelle base, l'observateur GeLESO par intervalles est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1}\bar{x} + P\mathcal{L}z' + |P\mathcal{L}|\bar{v} + P\bar{B}_e\bar{u} + \bar{\Delta} + P\mathcal{B}_e\bar{a}_c \\ \underline{\bar{x}} &= P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1}\underline{\bar{x}} + P\mathcal{L}z' + |P\mathcal{L}|\underline{v} + P\underline{B}_e u + \underline{\Delta} + P\mathcal{B}_e \underline{a}_c \end{cases} \quad (7.65)$$

où \mathcal{L} est le vecteur des gains de l'observateur et $|\mathcal{L}|$ est le vecteur des valeurs absolues des éléments de \mathcal{L} . La matrice P est la solution de l'équation de Sylvestre définie dans la sous-section 7.3.3.

Les termes $\overline{\Delta}$ et $\underline{\Delta}$ représentent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de $P\Delta A'_e X_e P^{-1} \bar{x}$ (dans la nouvelle base). Ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \overline{\Delta} &= (P\Delta A'_e P^{-1})^+ \bar{x} - (P\Delta A'_e P^{-1})^- \underline{x} \\ \underline{\Delta} &= (P\Delta A'_e P^{-1})^+ \underline{x} - (P\Delta A'_e P^{-1})^- \bar{x} \end{cases} \quad (7.66)$$

Soient les erreurs d'observation $\bar{e} = \bar{x} - \underline{x}$ et $\underline{e} = \underline{x} - \bar{x}$. D'après les équations (7.62) et (7.65), la dynamique de ces erreurs d'observation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} &= P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1}\bar{e} + P\mathcal{L}v + |P\mathcal{L}|\bar{v} + P\overline{B'_e} \bar{u} - P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} \\ &\quad + \overline{\Delta} + P\mathcal{B}_e(\bar{a}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \\ \dot{\underline{e}} &= P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1}\underline{e} - P\mathcal{L}v - |P\mathcal{L}|\underline{v} + P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - P\underline{B'_e} \underline{u} + P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} \\ &\quad - \underline{\Delta} + P\mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{a}_c) \end{cases} \quad (7.67)$$

L'observateur (7.65) est un observateur par intervalles pour le système (7.62) si et seulement si (7.64) est vraie. Cela signifie que les erreurs d'observation \bar{e} et \underline{e} doivent toujours être positives, c'est-à-dire :

$$\forall t, \quad \bar{e} \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{e} \geq 0.$$

D'après le théorème 7.3.2, les erreurs d'observation \bar{e} et \underline{e} seront positives si :

$$\bar{e}(0) \geq 0 \quad (7.68)$$

$$\underline{e}(0) \geq 0 \quad (7.69)$$

$$P\mathcal{L}v + |P\mathcal{L}|\bar{v} + P\overline{B'_e} \bar{u} - P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} + \overline{\Delta} + P\mathcal{B}_e(\bar{a}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \geq 0 \quad (7.70)$$

$$-P\mathcal{L}v - |P\mathcal{L}|\underline{v} + P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - P\underline{B'_e} \underline{u} + P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} - \underline{\Delta} + P\mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{a}_c) \geq 0 \quad (7.71)$$

$$P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1} \text{ est Metzler} \quad (7.72)$$

D'après l'hypothèse 7.3.1 :

$$\bar{e}(0) = \overline{X_e}(0) - X_e(0) = \overline{X_{e0}} - X_{e0} \geq 0 \quad (7.73)$$

$$\underline{e}(0) = X_e(0) - \underline{X_e}(0) = X_{e0} - \underline{X_{e0}} \geq 0 \quad (7.74)$$

$$P\mathcal{L}v + |P\mathcal{L}|\bar{v} \geq 0 \quad (7.75)$$

$$-P\mathcal{L}v - |P\mathcal{L}|\underline{v} \geq 0 \quad (7.76)$$

$$P\mathcal{B}_e(\bar{a}_c - \dot{a}'_c - \delta \dot{a}'_c) \geq 0 \quad (7.77)$$

$$P\mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c - \underline{a}_c) \geq 0 \quad (7.78)$$

D'après les équations (7.24)-(7.30) et le théorème 7.3.1 :

$$-P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} + \overline{\Delta} \geq 0 \quad (7.79)$$

$$P\overline{B'_e} \bar{u} - P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) \geq 0 \quad (7.80)$$

$$P\Delta A'_e P^{-1} \bar{x} - \underline{\Delta} \geq 0 \quad (7.81)$$

$$P(B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) - P\underline{B'_e} \underline{u} \geq 0 \quad (7.82)$$

Par conséquent, pour garantir la coopérativité de l'erreur d'observation et assurer la positivité des erreurs d'observation, il suffit de choisir le vecteur des gains \mathcal{L} tel que la matrice $P(A'_e - \mathcal{L}C_e)P^{-1}$ soit Metzler.

Avec un tel choix de matrice, l'observateur (7.65) représente un observateur par intervalles pour le système (7.62) et la condition (7.64) est satisfaite.

Retour aux coordonnées initiales

D'après le théorème 7.3.1, la borne supérieure $\overline{X_e}$ et la borne inférieure $\underline{X_e}$ dans la base d'origine sont calculées à l'aide de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \overline{X_e} &= M^+ \overline{\underline{x}} - M^- \underline{\underline{x}} \\ \underline{X_e} &= M^+ \underline{\underline{x}} - M^- \overline{\underline{x}} \end{cases} \quad (7.83)$$

avec $M = P^{-1}$.

Dans le cadre de cette thèse, l'objectif principal de la synthèse de l'observateur par intervalles est de propager les incertitudes calculées précédemment sur l'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations.

Pour rappel, l'état étendu x_3 , introduit dans la synthèse du GeLESO, est défini par l'équation suivante :

$$x_3 = \frac{\gamma' i_0^c}{m'} x_1 + a_c. \quad (7.84)$$

Pour l'observateur GeLESO standard d'ordre 3 défini par (7.33), l'estimation \hat{a}_c de a_c se déduit de l'estimation z_3 de l'état étendu x_3 par :

$$\hat{a}_c = z_3 - \frac{i_0^c \gamma'}{m'} z_1. \quad (7.85)$$

avec $\hat{a}_c = -\hat{z}_a$.

Dans le cadre de l'observateur par intervalles, les bornes sur l'entrée inconnue a_c sont déduites à partir de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \overline{a_c} &= \overline{x_3} - \frac{\gamma' i_0^c}{m'} \overline{x_1} \\ \underline{a_c} &= \underline{x_3} - \frac{\gamma' i_0^c}{m'} \underline{x_1} \end{cases} \quad (7.86)$$

Les bornes $\overline{a_c}$ et $\underline{a_c}$ représentent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de l'intervalle dans lequel on peut raisonnablement penser que la vraie valeur de l'accélération du plateau de la table se trouve, c'est-à-dire :

$$\ddot{z}_a \in [\underline{a_c}; \overline{a_c}]$$

D'après la représentation des incertitudes décrite dans la sous-section 7.2.4, l'accélération du plateau de la table s'écrit :

$$\ddot{z}_a = \hat{\ddot{z}}_a + \Delta \ddot{z}_a \Leftrightarrow \ddot{z}_a \in [\hat{\ddot{z}}_a - \Delta \ddot{z}_a; \hat{\ddot{z}}_a + \Delta \ddot{z}_a] \quad (7.87)$$

où \ddot{z}_a représente la vraie valeur de l'accélération du plateau de la table et $\hat{\ddot{z}}_a$ représente sa valeur estimée.

L'estimation \hat{z}_a de l'accélération du plateau de la table peut être calculée en exploitant les bornes \underline{a}_c et \overline{a}_c calculées par l'observateur GeLESO par intervalles (7.65). Elle représente le centre de l'intervalle $[\underline{a}_c; \overline{a}_c]$ et elle est donnée par :

$$-\hat{z}_a = \frac{\overline{a}_c + \underline{a}_c}{2} \quad (7.88)$$

Le terme $\Delta\hat{z}_a$ représente quant à lui l'incertitude sur l'accélération \hat{z}_a . Cette incertitude représente le rayon de l'intervalle $[\underline{a}_c; \overline{a}_c]$ et elle est donnée par :

$$\Delta\hat{z}_a = \frac{\overline{a}_c - \underline{a}_c}{2} \quad (7.89)$$

Avec cette démarche la détermination de l'incertitude du résultat du mesurage de \hat{z}_a est donc assurée. Si on est par ailleurs capable de mesurer de manière traçable au SI la masse m , l'accélération de la pesanteur g , le déplacement z (ainsi qu'éventuellement le courant I dans les bobines), il devient potentiellement possible d'établir la traçabilité de l'accéléromètre au SI.

7.3.5/ SIMULATION

Cette section a pour objectif d'illustrer par des simulations l'efficacité du GeLESO par intervalles en termes de propagation dynamique des incertitudes paramétriques sur l'état du système en présence d'une entrée excitatrice. Cette entrée simule l'accélération du plateau de la table anti-vibrations. Les paramètres m , K_v , γ et i_0 qui permettent de simuler la dynamique du tube sont donnés par le tableau 6.2 du chapitre 6. Ces paramètres permettent de calculer les matrices d'état A_e et de commande B_e de la dynamique étendue du tube. L'observateur GeLESO par intervalles est synthétisé à partir de la représentation du modèle étendu incertain suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_e &= (A'_e + \delta A'_e)X_e + (B'_e + \delta B'_e)(u + \delta u) + \mathcal{B}_e(\dot{a}'_c + \delta \dot{a}'_c) \\ z &= C_e X_e + v \end{cases} \quad (7.90)$$

où A'_e , B'_e et C_e représentent respectivement la matrice d'état, la matrice de commande et la matrice de sortie du modèle imprécis étendu qu'on considère pour effectuer la synthèse du GeLESO par intervalles. Les incertitudes élargies $\Delta A'_e$ et $\Delta B'_e$ sont les incertitudes associées à la matrice d'état A'_e et à la matrice de commande B'_e . Ces matrices sont données par :

$$A'_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{K'_v}{m'} & 1 \\ 0 & \frac{\gamma' i_0^c}{m'} & 0 \end{bmatrix}, \Delta A'_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\left(-\frac{K'_v}{m'}\right) & 0 \\ 0 & \Delta\left(\frac{\gamma' i_0^c}{m'}\right) & 0 \end{bmatrix}, \Delta B'_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\left(\frac{1}{m'}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (7.91)$$

Toutes les incertitudes sont calculées à l'aide de la méthode décrite dans la section 7.2. Les valeurs numériques de toutes les grandeurs (paramètres, grandeurs mesurées et identifiées et les incertitudes) sont données dans le tableau 7.10.

Paramètre	Valeur	Incertitude $\mathcal{U}(\cdot)$	Incertitude élargie $\Delta(\cdot) = 3\mathcal{U}(\cdot)$
K'_v	$3,72 \cdot 10^{-6}$	$6,76 \cdot 10^{-8}$	$2,02 \cdot 10^{-7}$
γ'	-0,109	$1,92 \cdot 10^{-5}$	$5,76 \cdot 10^{-5}$
m'	$8,8 \cdot 10^{-6}$	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$3,45 \cdot 10^{-8}$
i_0^c	0,2	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
β'	$4,31 \cdot 10^{-4}$	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$6,03 \cdot 10^{-6}$
u	u	$3,85 \cdot 10^{-7}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$
$\frac{\gamma' i_0^c}{m'}$	$-2,47 \cdot 10^3$	11,54	34,62
$-\frac{K'_v}{m'}$	-0,36	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$2,31 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{m'}$	$1,13 \cdot 10^5$	148,50	445,50

TABLE 7.10 – Valeurs de chaque paramètre mesuré/estimé et incertitudes élargies associées

Dans le cas du système (7.90), il n'existe aucun vecteur de gains \mathcal{L} qui assure que la matrice $(A'_e - \mathcal{L}C_e)$ soit Metzler. Un changement de coordonnées est alors nécessaire. Nous avons utilisé la méthode de changement de coordonnées invariant dans le temps qui a été détaillé dans la sous-section 7.3.3. En effet, l'observateur utilisé est celui donné par l'équation (7.65). Les valeurs numériques des gains et de la matrice de passage P sont donnés par :

$$\mathcal{L} = [449 \quad 63657 \quad 2065100]^T, \quad P = \begin{bmatrix} -11,8177 & 0,078 & -0,0006 \\ 12,8177 & -0,0781 & 0,0006 \\ -530,7540 & 2,8814 & -0,0169 \end{bmatrix}$$

Pour réaliser cette simulation, nous nous sommes basés sur deux types d'accélération externes afin de simuler l'accélération $-\ddot{z}_a$ de la table anti-vibrations. La première accélération est représentée par un signal de type créneau, de différentes amplitudes et intervenant à différents instants (test 1). La deuxième accélération est un signal de type sinusoïdal, avec une fréquence variant dans le temps (test 2). Pour $t \leq 30$ s, l'accélération a une amplitude de 10^{-3} m/s² et de pulsation 0,5 rad/s. Cette accélération est donnée par $-\ddot{z}_a = 10^{-3} \sin(0,5t)$. La fréquence de cette accélération en hertz est égale à 0,08 Hz. Les bornes supérieures et inférieures de \dot{a}_c sont données par $\bar{\dot{a}}_c = -\underline{\dot{a}}_c = 5 \cdot 10^{-4}$ m/s³. A partir de l'instant $t > 30$ s, la fréquence de l'accélération devient 0,19 Hz et son amplitude devient 10^{-2} m/s². Les bornes supérieures et inférieures de \dot{a}_c sont alors données par $\bar{\dot{a}}_c = -\underline{\dot{a}}_c = 1,6 \cdot 10^{-3}$ m/s³.

Puisque l'accéléromètre fonctionne en mode actif, nous avons utilisé l'architecture de commande VIRCO décrite dans la section 6.4.2 avec le régulateur PD. Les paramètres du régulateur PD sont donnés par $K_p = 1$, $K_D = 10^{-3}$.

Les figures 7.4 et 7.5 illustrent l'évolution de l'accélération simulée et de l'estimation des bornes (supérieure et inférieure) respectivement pour le test 1 et le test 2. On constate que l'observateur GeLESO par intervalles est donc capable de propager les incertitudes paramétriques sur l'accélération en reconstruisant l'intervalle dans lequel se trouve la vraie accélération simulée. Par ailleurs, lors des variations d'amplitude de l'accélération de la table, le temps de convergence de l'observateur est très court. On constate que l'intervalle obtenu englobe toujours la vraie valeur de l'accélération de la table sauf aux instants où l'amplitude de cette accélération varie brusquement. La raison est qu'il n'est pas possible pour l'observateur d'estimer rapidement des changements brutaux de l'accélération de la table, comme c'est le cas pour un signal de type échelon ou créneau.

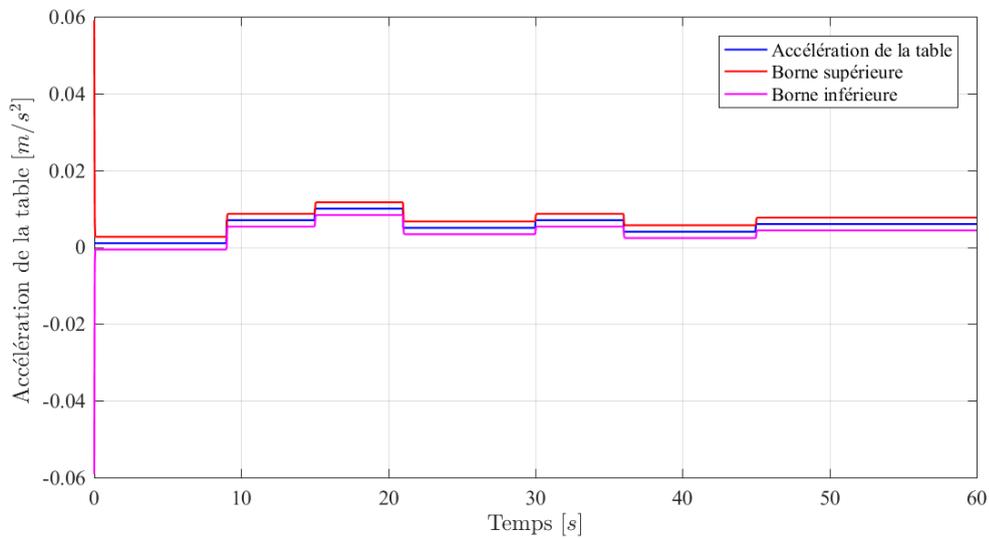


FIGURE 7.4 – Évolution de l'accélération simulée et ses bornes estimées (test 1)

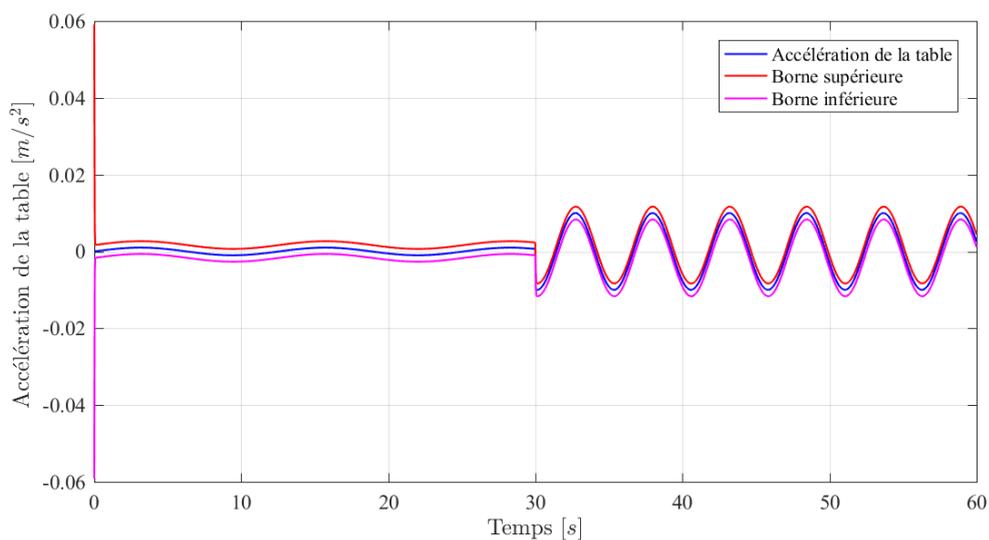


FIGURE 7.5 – Évolution de l'accélération simulée et ses bornes estimées (test 2)

Toutefois, la dynamique de l'observateur étant rapide, cette situation ne dure qu'un temps très court.

Les figures 7.6 et 7.7 illustrent l'évolution de la position du tube et de l'estimation des bornes (supérieure et inférieure) respectivement pour le test 1 et le test 2. Les figures 7.8 et 7.9 illustrent quant à elles l'évolution de la vitesse du tube et de l'estimation des bornes (supérieure et inférieure) respectivement pour le test 1 et le test 2. Les analyses précédentes sont toujours valables, hormis le fait que cette fois-ci, la vraie valeur de la position et de la vitesse restent compris dans les intervalles estimés.

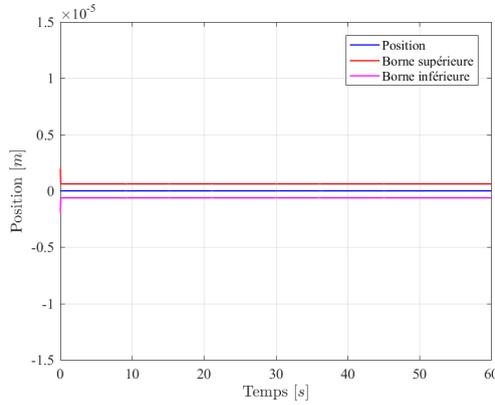


FIGURE 7.6 – Évolution de la position du tube et ses bornes estimées (test 1)

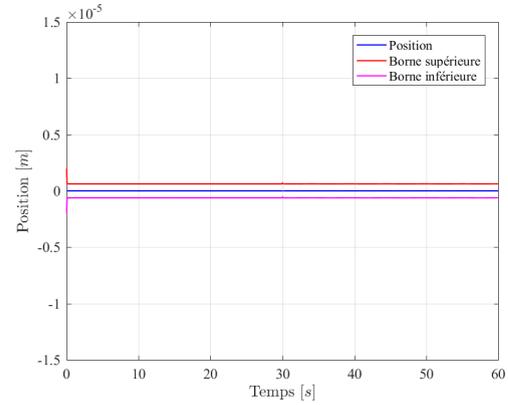


FIGURE 7.7 – Évolution de la position du tube et ses bornes estimées (test 2)

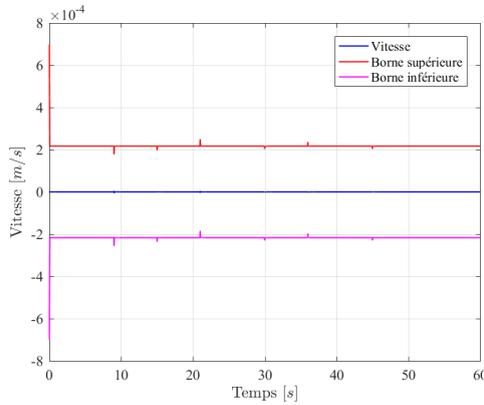


FIGURE 7.8 – Évolution de la vitesse du tube et ses bornes estimées (test 1)

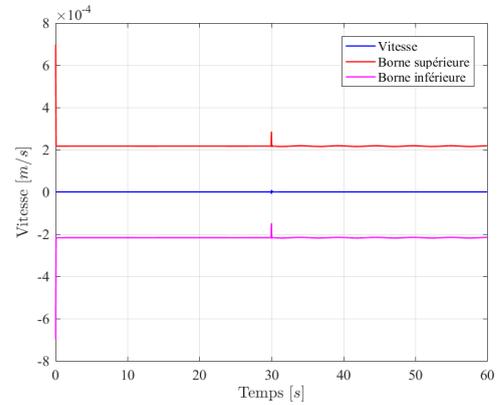


FIGURE 7.9 – Évolution de la vitesse du tube et ses bornes estimées (test 2)

7.3.6/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Cette section a pour objectif de valider expérimentalement les résultats de simulations obtenus dans la section précédente en reconstruisant l'accélération du plateau de la table anti-vibrations et ses bornes.

Nous avons réalisé deux expériences. Dans la première, nous avons refait la même manipulation que celle faite en simulation pour estimer une accélération \ddot{z}_c sous la forme de créneaux. La méthodologie utilisée pour y parvenir est la même que celle qui a été employée pour valider expérimentalement le mode actif de l'accéléromètre (cf. section 6.4.4 du chapitre 6). Nous la rappelons très brièvement ici. Une pseudo force d'inertie en créneaux (beaucoup plus grande que la force d'inertie $-m \ddot{z}_a$ induite par l'accélération sismique \ddot{z}_a) est créée en générant un offset en créneaux sur la force électromagnétique $f_{elec}(i,P)$. Pour générer cet offset de force, on ajoute un offset $u_3 = -m' \ddot{z}_c$ sur la commande en force VIRCO qui est $u = u_1 + u_2$, avec z_c qui a une forme de créneaux. L'offset de commande u_3 va à son tour générer un offset i_{offset}^c sur la consigne de courant i^c déduite de la commande $u = u_1 + u_2$:

$$i_{offset}^c = \frac{u_3}{\gamma' z' + \beta'} = \frac{-m' \ddot{z}_c}{\gamma' z' + \beta'}. \quad (7.92)$$

Le GeLESO par intervalles doit estimer l'incertitude élargie associée à l'estimation de \ddot{z}_c . Cette première expérience a été réalisée sur une période de 20 secondes, en appliquant des créneaux d'amplitudes différentes pour \ddot{z}_c .

Dans la deuxième expérience, nous n'avons pas généré d'accélération externe. Par conséquent, l'accéléromètre n'est soumis qu'à l'accélération du plateau de la table anti-vibrations. Cette deuxième expérience a été réalisée sur une période de 9 secondes.

Afin de minimiser les effets de la température et de l'humidité, nous avons placé l'accéléromètre dans une chambre climatique, posée sur une table anti-vibrations. La température a été réglée à 22,5°C et l'humidité à 30%. Nous avons appliqué un courant $i_0 = 0,2$ A pour mettre le tube en lévitation via la compensation de son poids.

L'observateur GeLESO par intervalles qui est utilisé est le même que celui qu'on a utilisé en simulation dans la section 7.3.5, il est donné par l'équation (7.65). Les valeurs numériques des gains et de la matrice de passage P sont données par :

$$\mathcal{L} = [444,5 \quad 61935 \quad 1933200]^T, \quad P = \begin{bmatrix} -9.6624 & 0.0653 & -0.0005 \\ 10.6624 & -0.0653 & 0.0005 \\ -489.1470 & 2.6562 & -0.0156 \end{bmatrix}$$

Puisque l'accéléromètre fonctionne en mode actif, nous avons utilisé l'architecture de commande VIRCO décrite dans la section 6.4.2 avec le régulateur de type PD. Les paramètres du régulateur PD ont été réglés manuellement pendant les expériences. Ils sont donnés par $K_p = 2 \cdot 10^{-2}$ et $K_D = 10^{-2}$. La borne supérieure et la borne inférieure sur le bruit de mesure ont été quantifiées expérimentalement avec $\bar{v} = -\underline{v} = 1,68 \cdot 10^{-8}$ m. Les bornes supérieures et inférieures de \dot{a}_c ont été calculées en supposant que l'accélération $-\ddot{z}_a$ est un signal sinusoïdal qui a une fréquence légèrement supérieure à la fréquence de résonance de l'accéléromètre en mode passif et une amplitude qui est supposée approximativement est égale à 10^{-3} m/s². Il s'agit-là de la valeur quasi maximale de l'accélération que l'accéléromètre peut mesurer. En dérivant ce signal, on peut borner son amplitude, ce qui donne les valeurs $\bar{a}_c = -\underline{a}_c = 0,8 \cdot 10^{-1}$ m/s³.

Les résultats de la première expérience sont illustrés dans les figures 7.10, 7.11 et 7.12.

La figure 7.10 illustre l'évolution des bornes supérieure et inférieure de l'accélération de consigne \ddot{z}_c qui sont fournies par le GeLESO par intervalles. Un zoom temporel sur une courte période de temps est affiché en bas de cette figure. Les effets des incertitude paramétriques et les erreurs de modélisation, etc. qui ne sont pas complètement supprimées par l'asservissement qui reste imparfait, ont été propagées par le GeLESO par intervalles. Cet observateur fournit un intervalle dans lequel il est raisonnable de penser que la vraie accélération peut se trouver.

La figure 7.11 illustre l'évolution de la mesure de la position du tube et les bornes fournies par le GeLESO par intervalles. Nous constatons que le GeLESO par intervalles a propagé les incertitudes citées précédemment sur la position du tube en estimant un intervalle dans lequel se trouve vraisemblablement la vraie position.

La figure 7.12 illustre des bornes fournies la GeLESO par intervalles dans lequel il est raisonnable de penser que la vraie accélération peut se trouver.

Les résultats de la deuxième expérience sont illustrés dans les quatre figures 7.13, 7.14, 7.15 et 7.16. La première représente l'évolution des bornes fournies par le GeLESO par

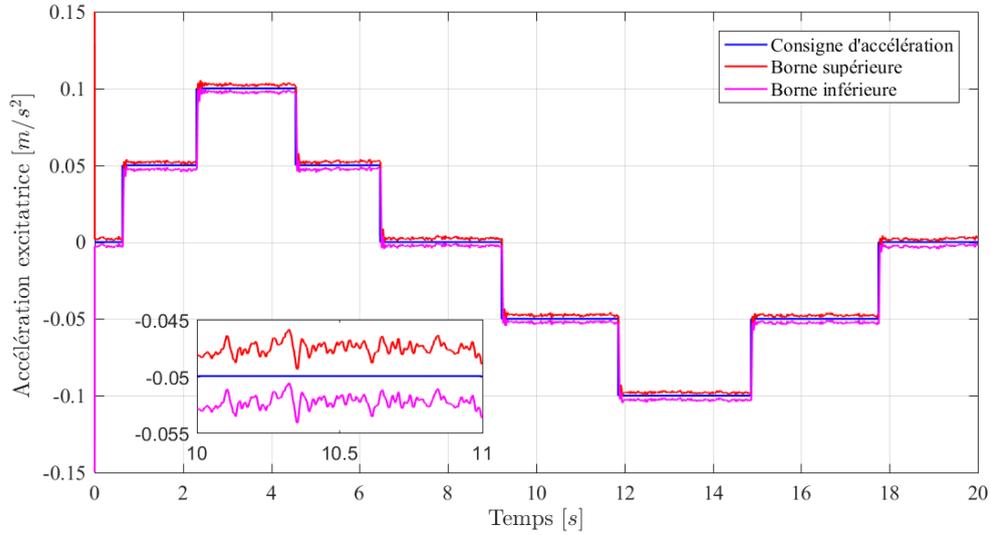


FIGURE 7.10 – Évolution de l'accélération externe et ses bornes estimées

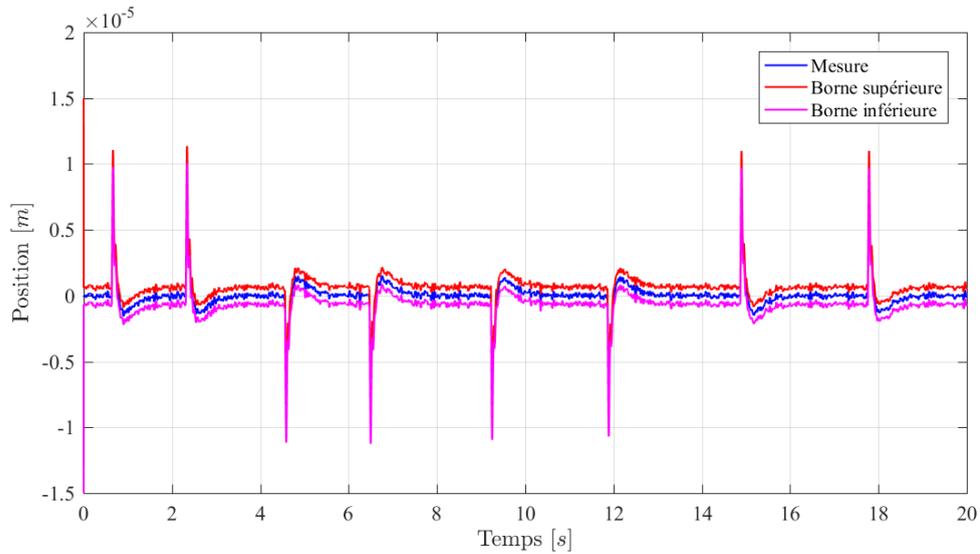


FIGURE 7.11 – Évolution de la position du tube et ses bornes estimées

intervalles. La deuxième représente l'évolution d'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations fournie par le GeLESO d'ordre 4 (cf. section 6.4.4 du chapitre 6).

En utilisant les résultats fournis par le GeLESO par intervalles, l'estimation et l'incertitude associée à l'estimation de l'accélération sismique vaut :

$$\Delta \ddot{z}_a = \frac{\overline{a_c(t)} - \underline{a_c(t)}}{2} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}. \quad (7.93)$$

$$\hat{\ddot{z}}_a = \frac{\overline{a_c(t)} + \underline{a_c(t)}}{2} \quad (7.94)$$

Les deux dernières figures représentent respectivement la position du tube mesurée ainsi que son incertitude associée et l'incertitude associée à la vitesse. Ces observations sont celles fournies par le GeLESO par intervalles.

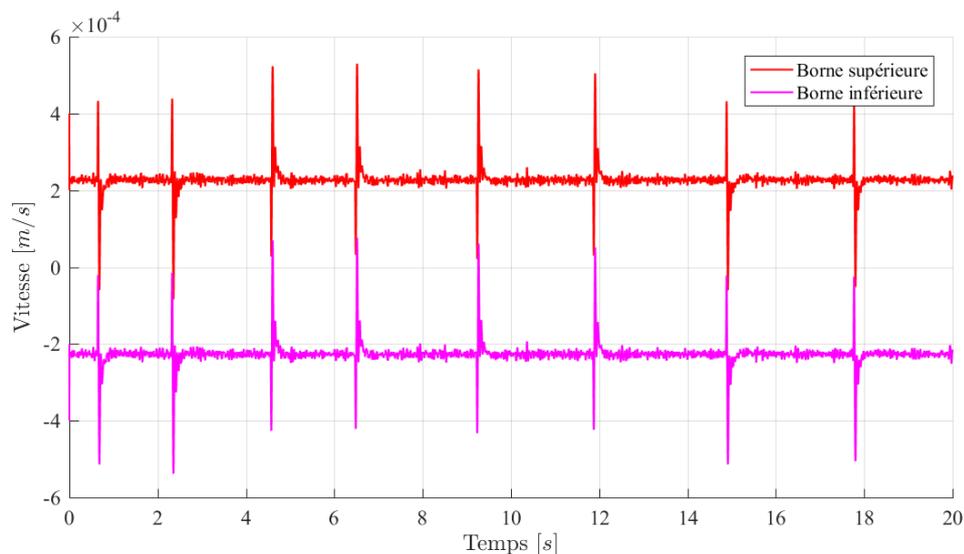


FIGURE 7.12 – Évolution des bornes estimées de la vitesse du tube

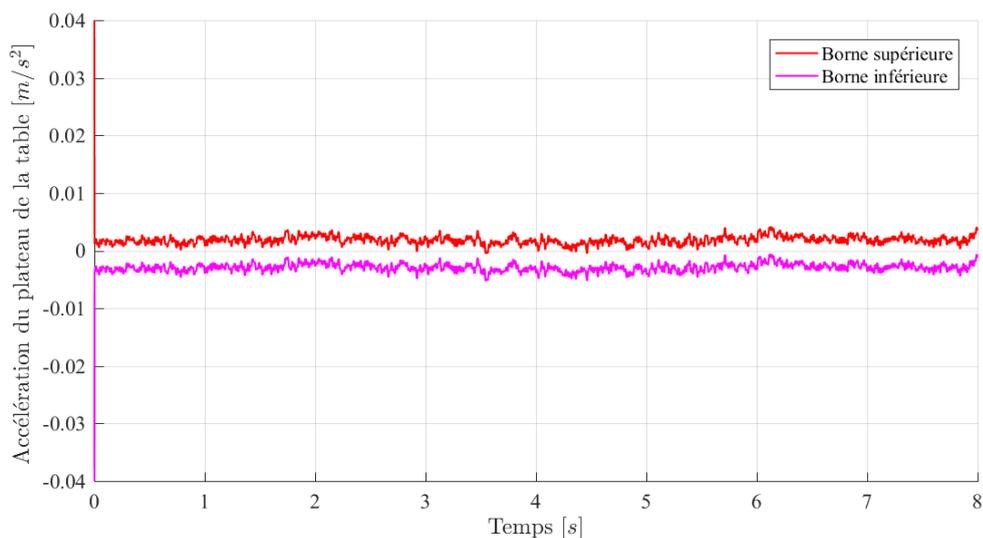


FIGURE 7.13 – Évolution de l'incertitude associée à l'accélération du plateau de la table anti-vibrations

7.4/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons quantifié l'incertitude de l'accélération qui est estimée par l'accéléromètre. Pour y parvenir nous avons commencé par utiliser des méthodes de calcul d'incertitude normalisées par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) pour établir les incertitudes des grandeurs physiques qui participent à la reconstruction de l'accélération. Nous avons ensuite propagé ces incertitudes sur l'accélération sismique à l'aide d'un observateur par intervalles. Pour cela, une modélisation incertaine de la dynamique de l'accéléromètre a été proposée et nous avons synthétisé un observateur par intervalles en étendant la structure d'un observateur GeLESO standard d'ordre 3. Le

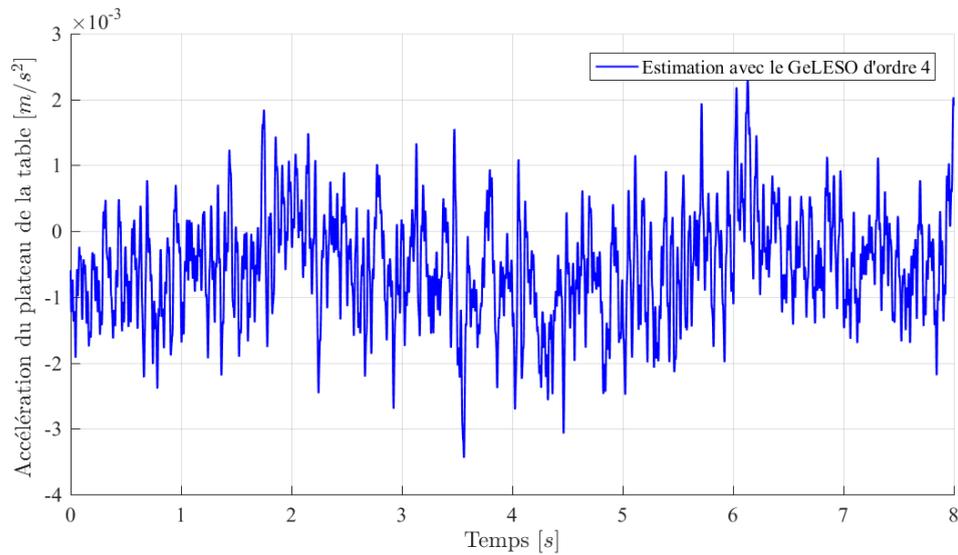


FIGURE 7.14 – Évolution de l'estimation de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations avec un GeLESO d'ordre 4

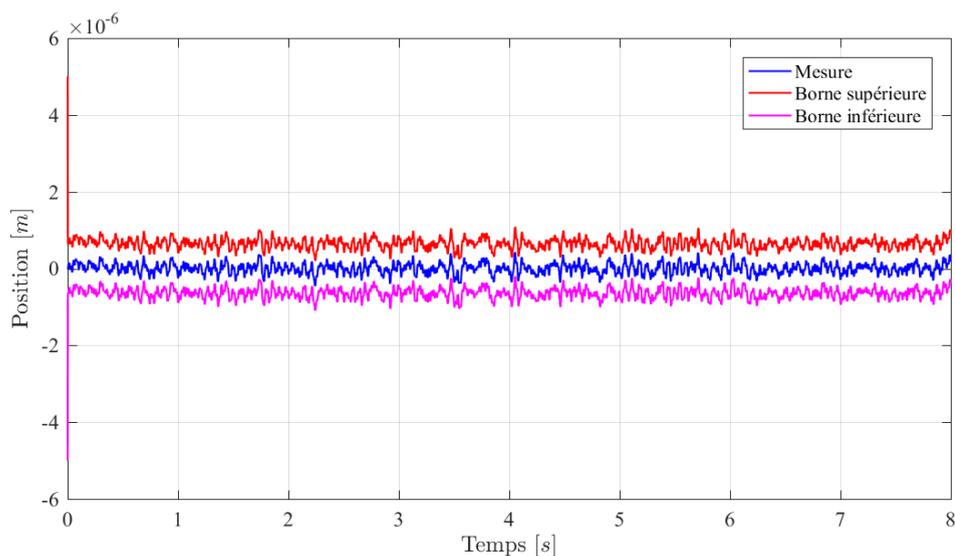


FIGURE 7.15 – Évolution de la position du tube est son incertitude associé

GeLESO par intervalles qui a été obtenu permet d'estimer des intervalles dans lesquels il est raisonnable de penser que les vraies valeurs de la position et de la vitesse du tube, ainsi que de l'accélération de la table anti-vibrations, se trouvent. Bien entendu, cela n'est possible que si l'accélération sismique \ddot{z}_a a un contenu fréquentiel qui est inclus dans la bande passante du triptyque accéléromètre-capteur de déplacement-observateur. L'intervalle qui est fourni par l'observateur peut alors s'interpréter comme une incertitude élargie de l'accélération en métrologie. Ceci illustre que l'automatique peut proposer des outils intéressants dans le domaine de la métrologie lorsqu'on s'intéresse à des mesurandes dont la dynamique est inconnue et lorsque ces mesurandes excitent des systèmes dynamiques incertains dont on ne peut que mesurer une sortie bruitée. Les observateurs par intervalles sont un moyen possible pour caractériser l'incertitude associée à l'estimation

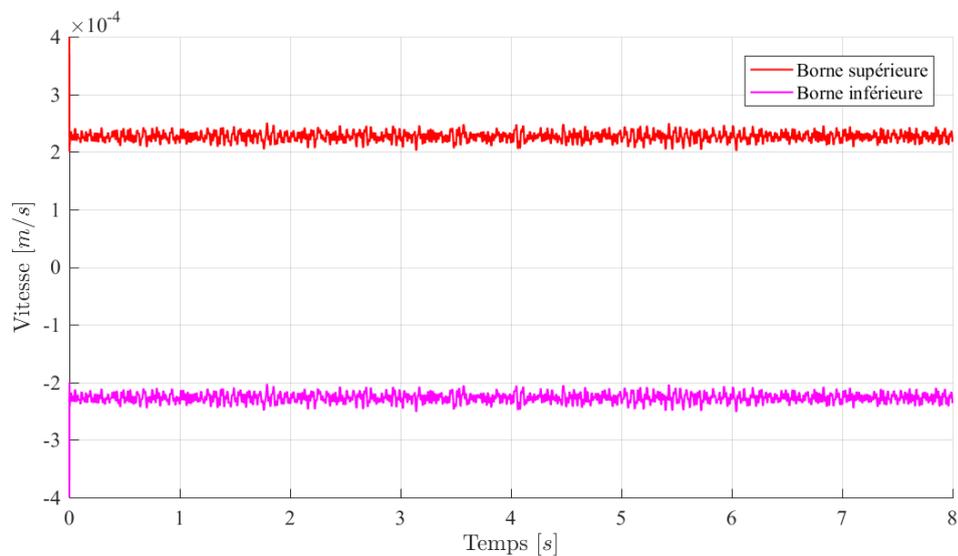


FIGURE 7.16 – Évolution de l'incertitude associée à la vitesse du tube

du mesurande dynamique dans ce cas de figure. La méthodologie de calcul de l'incertitude qui a été proposée pour l'accéléromètre est totalement documentée. Elle permet donc d'envisager une traçabilité au SI de cet accéléromètre si on est capable de mesurer de manière traçable au SI la masse m , l'accélération de la pesanteur g , le déplacement z , ainsi qu'éventuellement le courant I dans les bobines avec une incertitude de Type A plutôt que de Type B comme c'est le cas actuellement.

APPLICATION À LA GÉNÉRATION DE FAIBLES FORCES POTENTIELLEMENT TRAÇABLES

Sommaire

8.1	Introduction	183
8.2	Génération des faibles forces traçables au SI	184
8.2.1	Générateur de forces traçables	184
8.2.2	Grandeurs manipulées	185
8.2.3	Détermination de l'estimation F'_{app} de la force d'appui	186
8.3	Propagation d'incertitudes sur la force d'appui	187
8.3.1	Quantification des incertitudes	188
8.3.2	Propagation d'incertitudes calculées sur la force d'appui	189
8.4	Validation expérimentale	190
8.4.1	Propagation des incertitudes sur la force d'appui F'_{app}	191
8.4.2	Incertitude relative de la force d'appui F'_{app}	193
8.5	Conclusion	195

8.1/ INTRODUCTION

Nous avons présenté dans le chapitre 2 une nouvelle structure de générateur de forces qu'il s'agit de rendre potentiellement traçable¹ au SI dans la gamme inférieure à 100 μN . Pour rappel, ce générateur s'appuie sur le principe combiné des machines à poids mort et des balances de force. Il utilise la technologie des ressorts magnétiques auto-stabilisés (RMA) qui a été étendue à l'usage d'un électro-aimant avec un noyau de fer doux. Dans son environnement de fonctionnement, ce générateur de force est sujet aux vibrations sismiques qui perturbent son fonctionnement. L'accélération vibratoire est mesurée à l'aide d'un accéléromètre qui est également potentiellement traçable au SI (cf. chapitre 7). Cette accélération génère une force d'inertie verticale qui s'additionne à la force qu'on souhaite

1. La traçabilité est une propriété d'un résultat de mesure, selon laquelle ce résultat peut-être relié (raccordé) à une référence, par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue et documentée d'étalonnages, dont chacun contribue à l'incertitude de mesure.

générer avec le générateur. Il convient donc de la prendre en compte et de tenir également compte de son incertitude pour pouvoir assurer potentiellement la traçabilité au SI du générateur de force. La démarche métrologique associée va consister à déterminer les incertitudes de toutes les grandeurs physiques estimées ou mesurées qui influent sur la force générée par ce générateur. Ensuite, nous allons propager ces incertitudes sur la force générée à l'aide d'une approche qui tient compte du fait que le générateur fonctionne en mode statique. Dans ce mode de fonctionnement, l'indenteur qui génère la force ne se déplace pas pendant la génération.

8.2/ GÉNÉRATION DES FAIBLES FORCES TRAÇABLES AU SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS

8.2.1/ GÉNÉRATEUR DE FORCES TRAÇABLES

Dans le chapitre 2 nous avons présenté le dispositif à ressort magnétique semi-actif (RMSA) capable de générer une force verticale. L'indenteur constitue le poids mort de ce générateur.

L'indenteur est au départ maintenu en lévitation selon l'axe z grâce à deux électro-aimants E_1^m et E_2^m (voir figure 8.1(a)) qui sont alimentés par un courant $I = i_0$. Les électro-aimants comportent des noyaux de fer doux afin de pouvoir générer une force suffisante pour assurer la sustentation de l'indenteur pour la gamme de courant i_0 qu'on peut générer sans risquer d'endommager les bobines. L'instabilité magnétique dans le plan xOy est compensée par le graphite pyrolytique qui entoure complètement l'aimant intégré dans la partie supérieure de l'indenteur. Le prototype expérimental de ce générateur de forces est illustré dans la figure 8.1(b). Un échantillon supposé infiniment rigide est positionné

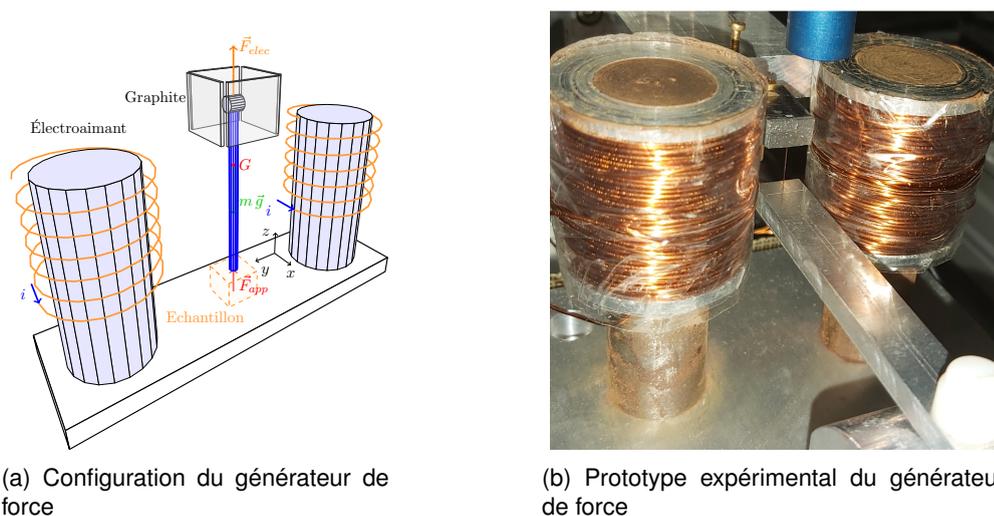


FIGURE 8.1 – Prototype expérimental du générateur de force et de l'indenteur.

sous l'indenteur en utilisant des platines de translation motorisées². Ces platines ont une résolution de déplacement qui est micrométrique. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi un échantillon constitué d'une plaque d'aluminium de 8 mm d'épaisseur. Une

2. Physik Instrumente (PI) M111 montées en configuration XYZ.

fois le contact établi entre l'indenteur et l'échantillon, une force d'appui, notée F_{app} , est générée. Cette force est modulable en ajustant le courant dans les bobines du générateur à une valeur inférieure à i_0 .

Le générateur de force proposé est posé sur une table anti-vibrations qui permet de filtrer les vibrations sismiques. Les vibrations non filtrées se traduisent par une accélération verticale du plateau de cette table anti-vibrations. Cette accélération est notée \ddot{z}_a . Si m_g est la masse de l'indenteur, la force maximale appliquée sur l'échantillon, lorsque \ddot{z}_a est nulle, est obtenue en annulant le courant et elle vaut le poids $m_g g$ de l'indenteur, comme pour une machine à poids mort. Lorsque \ddot{z}_a est non nulle, il faut en plus tenir compte de la force d'inertie $m_g \ddot{z}_a$ pour déterminer la force d'appui. Afin de mesurer \ddot{z}_a , nous avons utilisé l'accéléromètre présenté dans le chapitre 3. Cet accéléromètre a été placé au plus près du générateur de force comme le montre la figure 8.2. De cette manière, on peut raisonnablement supposer que l'accéléromètre et le générateur subissent la même accélération basse fréquence \ddot{z}_a .

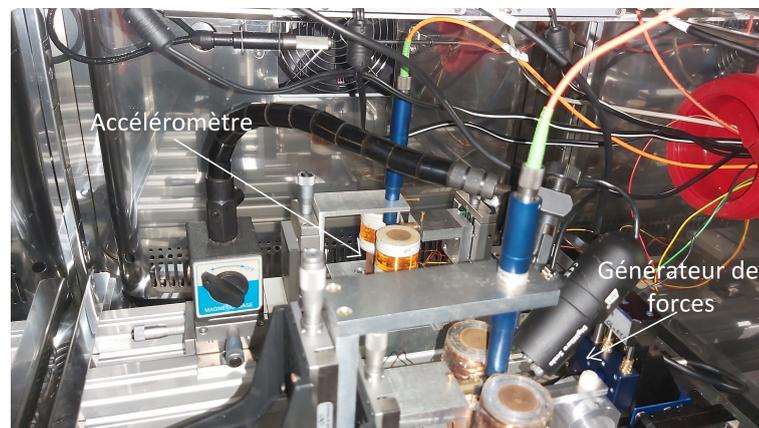


FIGURE 8.2 – Le générateur de force et l'accéléromètre dans une chambre climatique

Dans ce qui suit, nous allons présenter l'ensemble des grandeurs qui permettent de calculer la force d'appui F_{app} .

8.2.2/ GRANDEURS MANIPULÉES

Le tableau 8.1 représente toutes les grandeurs qui sont manipulées par le générateur de force, en dehors des incertitudes associées qui seront évoquées plus loin. Ces grandeurs sont classées en différentes catégories qui correspondent aux lignes du tableau. Nous allons les détailler une par une.

- Les **grandeurs physiques** correspondent à une énumération des grandeurs physiques qui sont mises en œuvre dans le générateur de force. La valeur exacte (au sens de la valeur vraie ou du mesurande en métrologie) de ces grandeurs est inconnue en pratique. Les grandeurs énumérées sont la masse m_g de l'indenteur relié au ressort magnétique, l'accélération locale de la pesanteur g , dans le local où est placé le dispositif, le courant total I_g circulant dans les bobines qui est fourni par le générateur de courant, l'accélération \ddot{z}_a du plateau de la table anti-vibrations et F_{app} la force d'appui qu'on cherche à déterminer.

Grandeurs physiques	m_g	g	$I_g = i_{0,g} + i_g$	\ddot{z}_a	F_{app}
Grandeurs physiques mesurées (valeur moyenne)	m'_g	g'			
Grandeurs imposées (valeur moyenne)			$I_g^c = i_{0,g}^c + i_g^c$		F'_{app}
Grandeurs estimées (valeur moyenne)				$\hat{\ddot{z}}_a$	

TABLE 8.1 – Récapitulatif des grandeurs manipulées sur le générateur de force.

- Les **grandeurs physiques mesurées** correspondent aux grandeurs physiques qu'on est potentiellement capable de mesurer avec une démarche métrologique via des mesurages appropriés. Ces mesurages fournissent la valeur mesurée m'_g de la masse m_g et la valeur mesurée g' de l'accélération locale de la pesanteur g . Ces dernières peuvent être des mesures ou des valeurs moyennes de mesure. Un intervalle d'incertitude leur est associée via une démarche métrologique normalisée. La valeur vraie de cette grandeur physique est raisonnablement située dans cet intervalle centré sur la mesure/moyenne indiquée, avec un niveau de confiance qui doit être également défini.
- Les **grandeurs imposées** comprennent uniquement la consigne de courant I_g^c qui est envoyée au générateur de courant par le système de commande. Elle reste différente du courant I_g réellement envoyé dans les bobines.
- Les **grandeurs estimées** sont des estimations des grandeurs physiques inconnues. Elles sont établies à partir d'un processus de calcul qui dépend des grandeurs mesurées et des grandeurs imposées. L'estimation à chaque instant t de l'accélération $\hat{\ddot{z}}_a$ de la table anti-vibrations ainsi que son incertitude ont été déterminées dans le chapitre précédent. L'estimation F'_{app} est la grandeur qu'on souhaite rendre traçable au SI.

8.2.3/ DÉTERMINATION DE L'ESTIMATION F'_{app} DE LA FORCE D'APPUI

Dans le chapitre 2, nous avons énoncé l'expression mathématique 2.31 qui permet de calculer la force d'appui F_{app} sur un échantillon infiniment rigide :

$$F_{app}(i_g) = \frac{m_g}{\cos \theta} \ddot{z}_a - \frac{i_g}{i_{0,g}} m_g g. \quad (8.1)$$

avec $-i_{0,g} \leq i_g \leq 0$. La force d'appui varie donc dans l'intervalle suivant qui dépend de l'angle θ du plateau et de la force d'inertie $m_g \ddot{z}_a$:

$$\frac{m_g}{\cos \theta} \ddot{z}_a \leq F_{app}(i_g) \leq \frac{m_g}{\cos \theta} \ddot{z}_a + m_g g. \quad (8.2)$$

Sur le dispositif actuel, l'angle θ ne fait pas l'objet d'un mesurage. Il va donc induire un biais variable sur le mesurage de F_{app} . Habituellement, en métrologie, il convient de supprimer les biais connus pendant le processus d'estimation du mesurande. Dans notre cas, même si nous savons que θ induit un biais variable, nous ne sommes pas en mesure de le compenser. Nous avons donc décidé de le négliger dans un premier temps tout en sachant que les futures évolutions du dispositif intégreront un mesurage de θ . Dans le

cadre de ce mémoire, nous négligeons donc la variation de θ autour de 0 qui est sa valeur moyenne sur un temps très long (la dynamique en rotation du plateau de la table anti-vibrations est une dynamique très basse fréquence qui fait osciller la table autour de la position $\theta = 0$). En posant $\theta = 0$, l'estimation F'_{app} de F_{app} est donnée par :

$$F'_{app}(i_g^c) = m'_g \hat{z}_a - \frac{i_g^c}{i_{0,g}^c} m'_g g' \quad (8.3)$$

avec m'_g la mesure de la masse de l'indenteur et $(i_{0,g}^c, i_g^c)$ les consignes des courants générés pour sustenter puis faire varier la masse apparente de l'indenteur lorsqu'il est contact avec l'échantillon. $I_g^c = i_{0,g}^c + i_g^c$ représente le courant total qui circule dans les bobines du générateur de force et \hat{z}_a représente l'estimation de l'accélération de la table anti-vibrations. Cette estimation est calculée par un observateur de type GeLESO et son incertitude par un observateur GeLESO par intervalles. Notons que le GeLESO par intervalles peut aussi servir pour estimer \hat{z}_a . Dans ce cas, l'estimation est égale au centre de l'intervalle produit par l'observateur.

Lorsque l'appui est présent, l'altitude de l'indenteur reste toujours nulle. L'estimation F'_{app} dépend de $i_{0,g}^c$ qui reste constante et de i_g^c qui est variable. Nous allons donc estimer la force d'appui F_{app} tout en la pilotant avec le courant i_g^c avec un mode de fonctionnement qui correspond à une boucle ouverte. Le courant i_g^c sera ainsi la grandeur qui commande le générateur de force.

L'estimation de F'_{app} de la force d'appui F_{app} sera déterminée à l'aide de l'équation (8.3), et son incertitude sera déterminée à l'aide de la méthode normalisée de propagation des incertitudes du GUM, en tenant compte des différentes grandeurs qui interviennent. Dans la prochaine section, nous allons détailler la méthode de propagation de ces incertitudes sur F'_{app} .

8.3/ PROPAGATION D'INCERTITUDES SUR LA FORCE D'APPUI

Pour déterminer l'incertitude de F'_{app} , il convient, en premier lieu, de déterminer les incertitudes associées à i_g^c et $i_{0,g}^c$, m'_g et g' en se basant sur les informations qui sont à notre disposition. Dans un deuxième temps, nous allons faire un rappel sur la méthode de calcul de \hat{z}_a et son incertitude associée, qui est détaillée dans la section 7.3.4 du chapitre précédent. Dans un troisième temps, nous allons propager les incertitudes associées à chaque grandeur sur la force d'appui générée F'_{app} .

Dans le cadre de la métrologie, lorsqu'un mesurande Y n'est pas mesuré directement mais qu'il est déterminé à partir de N autres grandeurs X_1, X_2, \dots, X_N à travers une relation f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (8.4)$$

les grandeurs d'entrée X_1, X_2, \dots, X_N dont dépend la grandeur de sortie Y peuvent elles-mêmes être envisagées comme des mesurandes. Si la fonction f qui permet de relier Y aux grandeurs X_1, X_2, \dots, X_N est le résultat d'une modélisation, cette dernière influera aussi sur la qualité de la détermination métrologique de Y . Le soin apporté sur la modélisation sera alors primordial si on veut que l'estimation et son incertitude soient réalistes.

Dans notre cas, le mesurande est F_{app} et les grandeurs dont elle dépend, d'après la modélisation qui a été établie, sont $m_g, i_{0,g}, i_g, g, \theta$ et \hat{z}_a . On a vu que θ induit un biais

variable sur l'estimation de F_{app} dont on ne tient pas compte en supposant que $\theta = 0$ (cela revient en pratique à faire une simplification de f ou, dit autrement, à dégrader la qualité de la modélisation effectuée . . .). L'équation (8.4) qui met en jeu une fonction f devient donc :

$$F_{app} = f(m_g, i_{0,g}, i_g, g, \hat{z}_a) = m_g \hat{z}_a - \frac{i_g}{i_{0,g}} m_g g. \quad (8.5)$$

8.3.1/ QUANTIFICATION DES INCERTITUDES DE CHAQUE GRANDEUR PHYSIQUE DANS UN CADRE MÉTROLOGIQUE

Dans la section 7.2 du chapitre précédent, nous avons déterminé les incertitudes associées à la détermination de chaque grandeur physique qui affecte l'estimation de l'accélération sismique du plateau. Pour cela, nous avons utilisé les méthodes d'évaluation des incertitudes-type de Type A et B présentées dans le GUM. Nous allons suivre les mêmes procédures de calcul afin de calculer les incertitudes qui affectent l'estimation de F_{app} donnée par l'équation (8.5). Ces grandeurs physiques sont : $m_g, i_{0,g}, i_g, g', \hat{z}_a$.

L'incertitude associée à l'estimation \hat{z}_a est calculée en utilisant l'observateur GeLESO par intervalles. Son calcul est détaillé dans la section 7.3.4 du chapitre précédent. Elle correspond à une incertitude élargie constante $\Delta\hat{z}_a$ qui vaut $2,2 \cdot 10^{-3} m/s^2$. A cause du facteur d'élargissement de 3, l'incertitude-type associée à \hat{z}_a est donnée par :

$$\mathcal{U}(\hat{z}_a) = \frac{\Delta\hat{z}_a}{3} = 7,33 \cdot 10^{-4}.$$

Les incertitudes associées à $m'_g, i_{0,g}^c$ et i_g^c sont calculées à l'aide de méthodes de quantification d'incertitude de Type B (cf. section 7.2). Pour rappel, nous avons fait l'hypothèse simplificatrice que g' , qui est donnée par une formule approchée, n'avait pas d'incertitude. Les valeurs obtenues sont données dans le tableau 8.2. Les résultats des mesurages correspondants peuvent être soit des mesures, soit des estimations, soit des valeurs de consigne.

Paramètre	mesure / estimation	Incertitude $\mathcal{U}(\cdot)$
m'_g [kg]	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$1,15 \cdot 10^{-8}$
g' [m/s ²]	9,8073	0
$i_{0,g}^c$ [A]	0,29	$8,94 \cdot 10^{-4}$
i_g^c [A]	$i_g^c \in [-0,29, 0]$	$8,94 \cdot 10^{-4}$
\hat{z}_a [m/s ²]	Observation de l'accélération sismique	$7,33 \cdot 10^{-4} q$

TABLE 8.2 – Valeur moyenne et incertitude associées aux grandeurs qui influent sur la force d'appui F_{app}

La consigne de courant i_g^c est choisie par l'utilisateur entre $[-0,29 ; 0]$ A pour générer une force d'appui variable. La valeur de l'incertitude sur l'accélération du plateau de la table anti-vibrations donnée ici correspondent aux valeurs estimées à l'aide du GeLESO par intervalles (cf. section 7.3.6 du chapitre 7).

8.3.2/ PROPAGATION D'INCERTITUDES CALCULÉES SUR LA FORCE D'APPUI

Pour propager les incertitudes des grandeurs qui composent F'_{app} , nous utilisons la méthodologie de calcul d'incertitude-type composée du GUM qui a déjà été exploitée dans le chapitre précédent. Dans notre cas, nous avons utilisé cette méthode pour propager les incertitudes de m'_g , $i_{0,g}^c$, i_g^c , g' et \hat{z}_a sur F'_{app} . Cette propagation est réalisée à l'aide des étapes suivantes :

- calculer le coefficient de sensibilité c_j qui est établi pour chacune des grandeurs j qui compose F_{app} (j représente ici m_g , $i_{0,g}$, i_g , g et \hat{z}_a). Le coefficient de sensibilité c_j pour la grandeur j est donné par la fonction suivante

$$c_j = \frac{\partial f}{\partial j}$$

qui est évaluée en théorie avec la valeur moyenne de chaque grandeurs j . Dans notre cas de figure, les grandeurs j n'ont fait l'objet que d'un seul mesurage qui est utilisé ici à la place de la moyenne. Il n'est néanmoins pas incohérent de considérer de ces mesurages peuvent être assimilés à des moyennes puisque l'afficheur numérique de la balance donne toujours la même valeur numérique m'_g et que les courants générés vont osciller autour des consignes $i_{0,g}^c$ et i_g^c . Si le générateur de courant est bien fait, on peut supposer que l'erreur statique $I_g^c - I_g$ est nulle en moyenne ;

- définir l'incertitude-type $\mathcal{U}(j)$ du résultat du mesurage de chaque grandeur j qui compose F_{app} (utilisation de la méthode définie dans la section précédente) ;
- calculer l'incertitude-type de F'_{app} à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathcal{U}_c^2(F'_{app}) = \sum_{i=1}^5 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i). \quad (8.6)$$

Le calcul des coefficients de sensibilité c_j se fait à l'aide des équations suivantes :

$$c_{m'_g} = \frac{\partial f}{\partial m'_g} = \hat{z}_a - \frac{i_g^c}{i_{0,g}^c} g', \quad (8.7)$$

$$c_{i_{0,g}^c} = \frac{\partial f}{\partial i_{0,g}^c} = \frac{i_g^c}{(i_{0,g}^c)^2} m'_g g', \quad (8.8)$$

$$c_{i_g^c} = \frac{\partial f}{\partial i_g^c} = -\frac{m'_g g'}{i_{0,g}^c}, \quad (8.9)$$

$$c_{g'} = \frac{\partial f}{\partial g} = -\frac{i_g^c m'_g}{i_{0,g}^c}, \quad (8.10)$$

$$c_{\hat{z}_a} = \frac{\partial f}{\partial \hat{z}_a} = m'_g. \quad (8.11)$$

8.4/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Cette section a pour objectif de valider expérimentalement le fonctionnement du générateur de force proposé et d'associer une incertitude à la force générée.

Pour ce faire, nous avons suivi les étapes suivantes :

Étape 1

Afin de minimiser les effets de la température et de l'humidité, nous avons placé le générateur de forces à l'intérieur d'une chambre climatique, qui est posée sur la table anti-vibrations. Nous avons également placé l'accéléromètre qui sert à calculer l'accélération du plateau de cette table dans la même chambre climatique et sur le même support rigide.

Nous avons appliqué un courant de 0,29 A dans les bobines afin de mettre l'indenteur en lévitation à une altitude z^s . Les oscillations résiduelles de l'indenteur liées aux vibrations sismiques ont été moyennées pour définir l'altitude $z^s = 0$. En utilisant des platines de translation motorisées, la poutre en aluminium a ensuite été mise en limite de contact avec l'extrémité inférieure de l'indenteur de manière à ce que ce dernier soit situé à l'altitude $z^s = 0$ d'après son capteur de déplacement. Cette opération permet d'annuler la dynamique de l'indenteur tout en maintenant son altitude à $z^s = 0$.

Étape 2

Afin d'estimer l'accélération du plateau de la table anti-vibrations, et son incertitude associée, nous avons utilisé l'observateur GeLESO par intervalles (7.65) qui est synthétisé pour la dynamique de l'accéléromètre (7.22) (voir section 7.3.4). L'incertitude associée à l'accélération du plateau de la table est calculée à l'aide du GeLESO par intervalles qui propage les incertitudes des différentes grandeurs physiques qui interviennent dans la dynamique de l'accéléromètre (cf. sections 7.3.6).

Étape 3

L'accélération sismique estimée a été utilisée dans l'équation (8.3) pour calculer la force générée. Par la suite, l'incertitude de l'accélération ainsi que les incertitudes associées à m'_g , $i_{0,g}^c$, i_g^c et g' ont été propagées sur le calcul de l'incertitude de la force d'appui F'_{app} .

En suivant les étapes décrites ci-dessus, nous avons successivement appliqué des consignes de courant égales à différentes valeurs avec $i_g^c \in [-0,29, 0]$ pour générer une force F_{app} dont l'estimation F'_{app} est comprise entre :

$$m'_g \hat{z}_a \leq F'_{app} \leq m'_g (\hat{z}_a + g'). \quad (8.12)$$

Les résultats de cette expérience sont illustrés dans les figures 8.3 et 8.4 qui montrent l'évolution de la consigne de courant i_g^c appliquée au générateur et la force d'appui F'_{app} qui en résulte. On peut constater que la force d'appui F'_{app} est inversement proportionnelle au courant i_g^c . Cette relation a été illustrée sur la figure 8.7. Notons que dans cette figure, l'accélération sismique mesurée $\hat{z}_a = 10^{-3}$ a été prise arbitrairement égale à une valeur constante de 10^{-3} m/s² quelle que soit la consigne de courant générée. On peut noter que si, sur la figure 8.7, l'axe des abscisses avait été la consigne $I_g^c = i_{0,g}^c + i_g^c$ du courant total I_g qui circule dans les bobines, les valeurs du courant auraient varié de 0 A (à gauche) à +0,29 A (à droite). On a donc à gauche une force d'appui maximale (due au courant nul) et à droite une force d'appui minimale (due à la compensation de la masse).

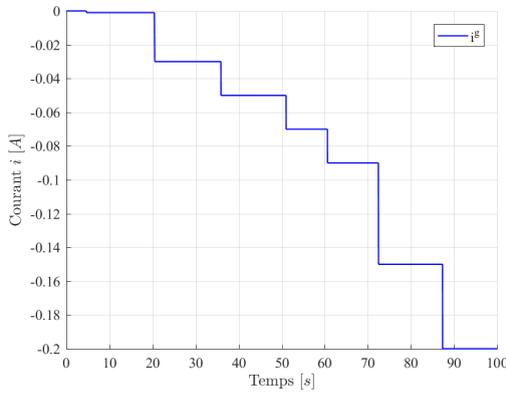


FIGURE 8.3 – Évolution de la consigne de courant i_g^c appliquée

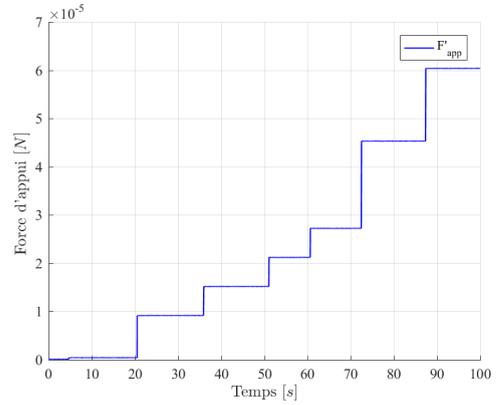


FIGURE 8.4 – Évolution de la force d'appui F'_{app}

8.4.1/ PROPAGATION DES INCERTITUDES SUR LA FORCE D'APPUI F'_{app}

Les incertitudes-type calculées pour chaque grandeur physique ont été propagées sur le calcul de la force d'appui F'_{app} . Elle sont données dans Le tableau 8.3.

Force d'appui F'_{app}			
Source d'incertitude	$\mathcal{U}(j_i)$	c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
m'_g	$1,15 \cdot 10^{-8}$	$\hat{z}_a - 33,79 i_g^c$	$2,13 \cdot 10^{-8} \hat{z}_a - 7,19 \cdot 10^{-7} i_g^c$
$i_{0,g}^c$	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3} i_g^c$	$9 \cdot 10^{-7} i_g^c$
i_g^c	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-4}$	$-2,7 \cdot 10^{-7}$
g'	0	$-3,07 \cdot 10^{-5} i_g^c$	0
\hat{z}_a	$7,33 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$7,12 \cdot 10^{-9}$
$\mathcal{U}_c(F'_{app}) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)}$			

TABLE 8.3 – Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app}

Les incertitudes-types ont été calculées à l'aide des étapes décrites dans la section 8.3.1. Les coefficients de sensibilité ont été calculés à l'aide des équations (8.7), (8.8), (8.9), (8.10) et (8.11). L'incertitude associée à l'accélération du plateau de la table anti-vibrations a été établie dans la section 7.3.6.

Dans la section 7.2.4, nous avons présenté la notion d'incertitude élargie en métrologie qui est associée à un facteur d'élargissement. L'incertitude élargie permet de définir un intervalle à l'intérieur duquel on peut espérer voir se situer une large fraction de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande. Pour F'_{app} , cet intervalle est obtenu par la multiplication de l'incertitude $\mathcal{U}(F'_{app})$ par un facteur d'élargissement de 3.

Par conséquent la vraie force d'appui sur l'échantillon F_{app} est raisonnablement comprise dans l'intervalle suivant :

$$F'_{app} - \Delta F'_{app} \leq F_{app} \leq F'_{app} + \Delta F'_{app}$$

La valeur de l'estimation F'_{app} et son incertitude dépendent de la valeur du courant i_g^c ainsi que de \hat{z}_a à l'instant de l'application de la force F_{app} .

Le tableau 8.3 illustre le cas général du calcul de l'incertitude associée à la force d'appui F'_{app} . La colonne de droite de ce tableau montre que les différentes incertitudes qui vont contribuer à l'incertitude de F'_{app} dépendent de la valeur prise par la consigne de courant i_g^c et par l'estimation de l'accélération \hat{z}_a .

Nous avons illustré le calcul fait en temps réel de l'incertitude associée à F'_{app} pour une fenêtre de temps donnée $t \in [75; 85]$ s. Dans cette fenêtre de temps le courant i_g^c est constant et vaut -0,15 A.

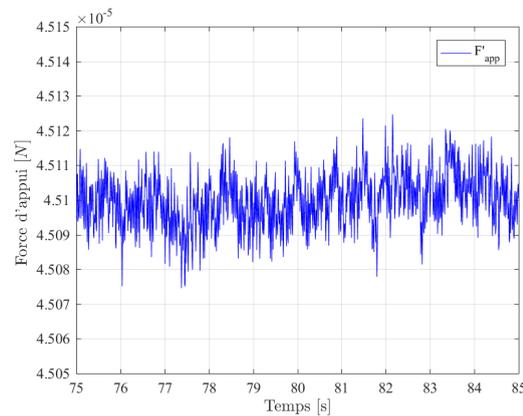
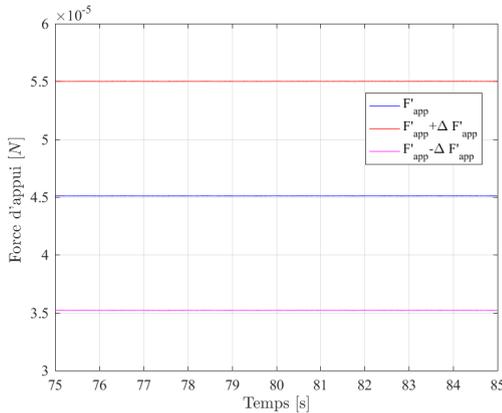


FIGURE 8.5 – Évolution de la force d'appui F'_{app} et de son incertitude associée en fonction du temps

FIGURE 8.6 – Évolution de la force d'appui F'_{app} en fonction du temps (zoom)

La figure 8.5 représente l'évolution de la force d'appui F'_{app} ainsi que son incertitude en fonction du temps. La figure 8.6 est un zoom sur l'évolution de F'_{app} . On y voit les variations induites par la force d'inertie $m_g \hat{z}_a$ qui forme un bruit résiduel qui vaut environ 30 nN crête-à-crête.

Nous avons également illustré le calcul de l'incertitude de F'_{app} dans deux cas limites : lorsque i_g^c vaut 0 A (cf. tableau 8.4) et lorsqu'il vaut -0,29 A (cf. tableau 8.5). L'accélération sismique estimée a elle été prise égale à la valeur arbitraire mais réaliste de 10^{-3} m/s² dans les deux cas pour être toujours dans les mêmes conditions de perturbation sismique.

Force d'appui F'_{app} pour $\hat{z}_a = 10^{-3}$ m/s ² et $i_g^c = 0$ A			
Source d'incertitude	$\mathcal{U}(j_i)$	c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
m'_g	$1,15 \cdot 10^{-8}$	10^{-3}	$1,15 \cdot 10^{-11}$
$i_{0,g}^c$	$8,94 \cdot 10^{-4}$	0	0
i_g^c	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-4}$	$-2,68 \cdot 10^{-7}$
g'	-	0	-
\hat{z}_a	$7,33 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$6,52 \cdot 10^{-9}$
$\mathcal{U}_c(F'_{app}) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)} = 2,68 \cdot 10^{-7}$			

TABLE 8.4 – Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app}

Lorsque $i_g^c = 0$ A, l'incertitude élargie de la force d'appui est $2,68 \cdot 10^{-7} \times 3 = 8,06 \cdot 10^{-7}$

m/s². La valeur de la force d'appui et son incertitude associée sont données par :

$$F_{app} = 8,9.10^{-9} \pm 8,06.10^{-7} \text{ m/s}^2.$$

Force d'appui F'_{app} pour $\hat{z}_a = 10^{-3} \text{ m/s}^2$ et $i_g^c = -0,29 \text{ A}$			
Source d'incertitude	$\mathcal{U}(j_i)$	c_j	$\mathcal{U}(j_i)c_j$
m'_g	$1,15.10^{-8}$	$9,8.10^{-4}$	$1,12.10^{-7}$
$i_{0,g}^c$	$8,94.10^{-4}$	-3.10^{-4}	$-2,68.10^{-7}$
i_g^c	$8,94.10^{-4}$	-3.10^{-4}	$-2,68.10^{-7}$
g'	-	$8,9.10^{-6}$	-
\hat{z}_a	$7,33.10^{-4}$	$8,9.10^{-6}$	$6,52.10^{-9}$
$\mathcal{U}_c(F'_{app}) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 c_j^2 \mathcal{U}^2(j_i)} = 3,96.10^{-7}$			

TABLE 8.5 – Propagation d'incertitude sur la force d'appui F'_{app}

Lorsque $i_g^c = -0,29 \text{ A}$, l'incertitude élargie de la force d'appui est $3,96.10^{-7} \times 3 = 1,19.10^{-6} \text{ m/s}^2$. La valeur de la force d'appui et son incertitude associée sont données par :

$$F_{app} = 8,72.10^{-5} \pm 1,19.10^{-6} \text{ m/s}^2.$$

On peut noter que l'incertitude sur F'_{app} dépend de la consigne du courant i_g^c . Plus cette consigne diminue plus l'incertitude est grande. Cette relation est illustrée sur la figure 8.7 avec laquelle l'estimation de \hat{z}_a a été forcée à 10^{-3} m/s^2 quelle que soit la consigne de courant i_g^c . Le courant joue donc un rôle important dans l'incertitude sur F'_{app} . Notons que comme l'incertitude sur g' a été considérée nulle, l'incertitude sur F'_{app} est nécessairement toujours supérieure à celle qui est associée à la masse m'_g ($2,13.10^{-8} \text{ kg}$). Lorsque $i_g^c = 0$ (point à droite), seule la force d'inertie sismique agit sur l'échantillon puisque l'indentateur est alors sustenté par $i_{0,g}^c$. Dans ce cas, l'incertitude associée est donc celle induite par l'estimation de $m_g \hat{z}_a$. On peut noter pour finir que le modèle (8.1) utilisé pour exprimer F_{app} ne tient pas compte de la force de contact entre l'indentateur et l'échantillon. Pour estimer cette force supplémentaire, il conviendrait de faire en plus une mesure de force de pull-off après l'application de F_{app} et de s'interroger sur la détermination statistique de l'incertitude associée à ce mesurage supplémentaire. La force de capillarité jouant un rôle très important dans la force de pull-off, travailler dans une enceinte climatique qui permet un contrôle de l'humidité relative prend dans ce cas tout son sens pour essayer de minimiser la dispersion de la force de pull-off et donc l'incertitude associée à sa mesure.

8.4.2/ INCERTITUDE RELATIVE DE LA FORCE D'APPUI F'_{app}

A travers cette section, nous allons illustrer la relation entre la force d'appui F'_{app} et son incertitude relative $\mathcal{U}_r(F'_{app})$.

L'incertitude relative de F'_{app} se calcule en utilisant l'équation suivante :

$$\mathcal{U}_r(F'_{app}) = \frac{\mathcal{U}_c(F'_{app})}{F'_{app}}. \quad (8.13)$$

Les figures 8.8 et 8.9 illustrent l'évolution de l'incertitude relative de la force d'appui F'_{app} en fonction de la valeur de F'_{app} . Celle de droite correspond à un zoom de celle de gauche.

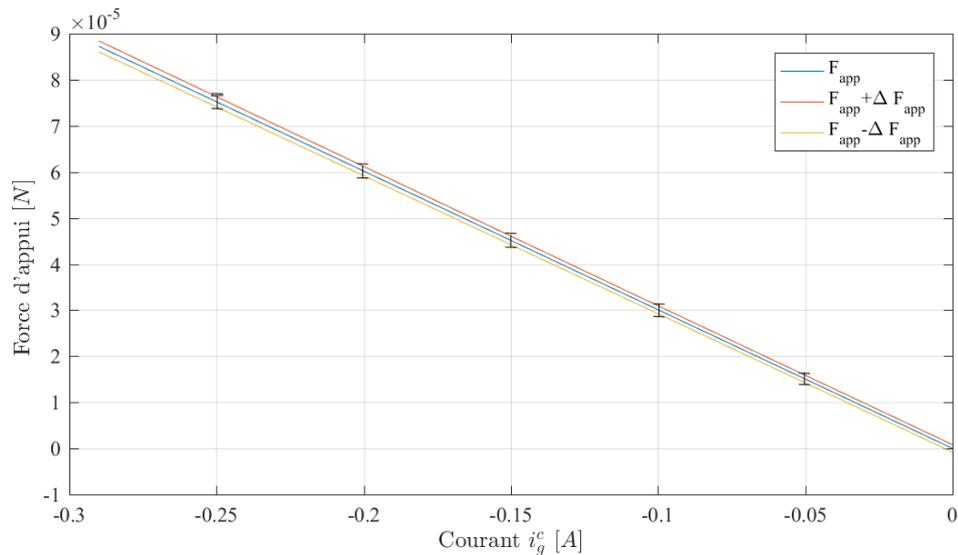


FIGURE 8.7 – Relation entre la consigne de courant i_g^c , la force d'appui estimée F'_{app} et son incertitude

Le calcul de l'incertitude relative a été fait en forçant la valeur de \hat{z}_a à 10^{-3} m.s² sur toute la plage de la force générée.

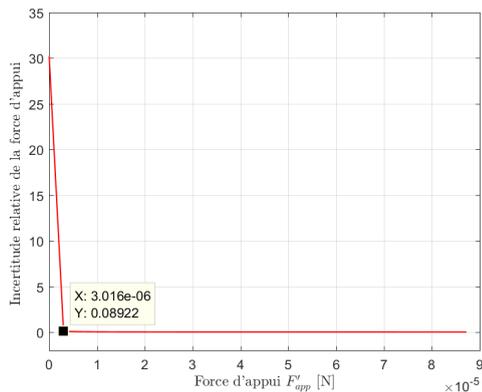


FIGURE 8.8 – Évolution de l'incertitude relative de F'_{app} par rapport à F'_{app}

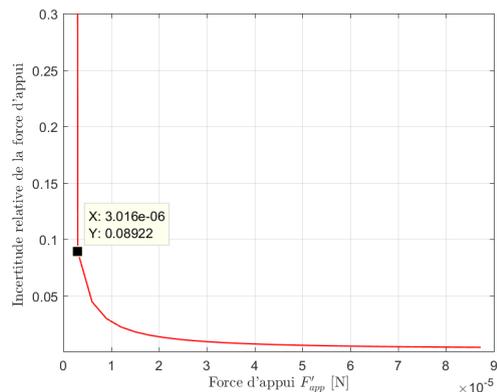


FIGURE 8.9 – Zoom de l'évolution de l'incertitude relative de F'_{app} par rapport à F'_{app}

On constate que pour des forces d'appui inférieures à 3 μ N l'incertitude relative à F'_{app} devient très grande. Cela est due à l'incertitude de la force d'inertie qui devient de plus en plus grande par rapport à F'_{app} lorsque celle-ci devient de plus en plus petite. Nous apercevons également que l'incertitude relative de F'_{app} décroît avec la croissance de F'_{app} . La figure 8.9 montre que l'incertitude relative est de 0,45 % lorsque la force F'_{app} est maximale et vaut $m'_g(\hat{z}_a + g') = 8,72 \cdot 10^{-5}$ N.

8.5/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons brièvement rappelé le principe que nous avons utilisé pour générer sur un échantillon infiniment rigide une force d'appui verticale dont l'amplitude est ajustable. Cette génération répond à l'objectif principal de ce travail de thèse qui consiste à concevoir un dispositif capable de générer, avec une qualité métrologique, une force verticale dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. Par ailleurs, l'approche retenue doit permettre de rendre ce générateur de faibles forces potentiellement traçable au Système International d'unités (SI). Afin de parvenir à cet objectif, une méthode métrologique de calcul d'incertitude a été utilisée pour quantifier les incertitudes sur les grandeurs physiques qui participent au calcul de cette force générée selon un modèle qui a été établi. Nous avons ensuite propagé ces incertitudes sur la force d'appui que ce générateur peut appliquer sur un échantillon rigide et nous avons validé expérimentalement le dispositif. Comme tout modèle, celui qui a été utilisé pour déterminer la force d'appui comporte des simplifications ou des inexactitudes (influence de la masse d'air, influence de l'angle du plateau de la table anti-vibrations, influence de la force d'adhésion entre l'indenteur et l'échantillon, etc.). Pour améliorer la qualité des incertitudes qui ont été déterminées, il sera nécessaire dans le futur de prendre en compte ou de minimiser ces différents facteurs physiques qui agissent sur la force qui est générée.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif du travail présenté dans ce manuscrit est de proposer une démarche pour générer des faibles forces et établir leur incertitude dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. La force générée doit pouvoir être potentiellement traçable³ par rapport aux étalons du SI. La traçabilité des faibles forces représente actuellement une problématique majeure pour les instituts de métrologie au niveau international. Du fait de l'absence d'étalons à ces échelles, la traçabilité des faibles forces (inférieures à 10 micronewtons) est fortement mise en question. Par conséquent, il n'est pas possible aujourd'hui de garantir l'incertitude des mesures de faibles forces qui sont effectuées par les nombreux capteurs de pico-nano-micro forces et ce malgré la maturité technologique de ces derniers. La plupart du temps, ces incertitudes ne sont pas fournies et les constructeurs de capteurs de faibles forces ne donnent pas d'indications pour les établir. Les procédures d'étalonnage sont également peu documentées par les constructeurs. Ce contexte est mentionné dans le premier chapitre qui présente de manière non exhaustive quelques travaux effectués pour parvenir à établir la traçabilité de la mesure de faibles forces. Beaucoup de ces travaux très variées sont menées au sein des instituts nationaux de métrologie.

La démarche que nous avons menée a conduit au développement de deux dispositifs : un accéléromètre potentiellement traçable au SI pour mesurer les vibrations sismiques verticales du plateau d'une table anti-vibrations et un générateur pour générer des faibles forces verticales, également potentiellement traçables au SI. Le générateur utilise la connaissance de l'accélération sismique fournie par l'accéléromètre pour estimer la force d'inertie qui vient s'ajouter à la force qu'il génère à partir d'un courant électrique et d'un "poids mort".

Pour ce qui concerne la démarche de conception, nous nous sommes appuyés sur le principe des ressorts magnétiques auto-stabilisés (RMA) pour développer l'accéléromètre et le générateur de faibles forces. Les deux dispositifs reposent sur le même design mécanique qui possède les deux fonctionnalités souhaitées. Pour établir ce design, un nouveau type de RMA basé sur des électro-aimants avec un noyau de fer doux a été développé. L'accéléromètre étant un système dynamique, nous nous sommes ensuite appuyés sur les outils de l'automatique pour l'observer et le commander. Ce système étant mal connu, cela nous a amené à nous intéresser à la problématique de l'observation et de la commande des systèmes incertains pour, d'une part, estimer l'accélération et, d'autre part, associer une incertitude à cette estimation. Les valeurs d'estimation et d'incertitude obtenues pour l'accélération sismique ont ensuite été utilisées dans la détermination de la force générée par le générateur lorsqu'il fonctionne en mode statique. L'incertitude associée a été déterminée en utilisant les outils proposés dans le « Guide

3. La traçabilité est définie comme une propriété d'un résultat de mesure selon laquelle ce résultat peut être relié à une référence par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue et documentée d'étalonnages dont chacun contribue à l'incertitude de mesure.

pour l'expression de l'incertitude de mesure » communément appelé le « GUM » qui a été publié par l'ISO en 1993. Chaque jalon de notre démarche a été développé dans un chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons commencé par présenter des notions générales sur la lévitation diamagnétique et sur les Ressorts Magnétiques Auto-stabilisés (RMA). Dans un deuxième temps, nous avons présenté une nouvelle structure de générateur de forces potentiellement traçable au Système International d'unités (SI), dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. Ce générateur est basé sur le principe de la lévitation diamagnétique passive développée dans (Oster, 2012). Il utilise un RMA au design particulier qui comprend deux électro-aimants avec des noyaux de fer doux et une "cage" en graphite pyrolytique. Ce RMA permet de mettre en lévitation une masse sismique qui est un tube collé à un aimant avec un déflecteur situé au dessus de l'aimant. Sa masse d'environ 9 milligrammes est potentiellement traçable. Cet indenteur qui se déplace verticalement peut être positionné au dessus d'un échantillon. Son rôle est alors de générer une force d'appui dont l'incertitude soit connue et qui soit potentiellement traçable au SI. Ce générateur repose à la fois sur le principe des machines à poids mort et sur celui des balances de force. Après avoir présenté son principe de fonctionnement, nous avons détaillé sa modélisation dynamique ainsi que la modélisation de la force électromagnétique. Ces modélisations permettent de montrer que ce dispositif peut fonctionner selon deux modes. Le premier correspond à la génération d'une force verticale ajustable. Le second correspond à la mesure de l'accélération verticale de la base du dispositif. Cette modélisation dynamique a également permis de montrer que ce générateur de forces est perturbé par des vibrations sismiques qui sont toujours présentes car le plateau de la table anti-vibrations sur laquelle le générateur est posé se déplace verticalement à basses fréquences par rapport au sol. Afin de pouvoir générer une force dont on puisse calculer l'incertitude, nous avons adapté à notre dispositif le principe de mesure différentielle qui a été présenté par (Billot et al., 2016). Ce principe permet de tenir compte, dans le processus de génération de la force d'appui, de la force d'inertie qui est induite par l'accélération sismique du plateau.

Dans le chapitre suivant, nous avons présenté dans un premier temps des notions générales sur le fonctionnement des accéléromètres et sur leurs caractéristiques. Dans un deuxième temps, nous avons présenté l'accéléromètre qui a été développé pour mesurer l'accélération basse fréquence du plateau de la table anti-vibrations. Nous avons ensuite présenté en détail son modèle dynamique. C'est un modèle linéaire dont la grandeur de commande est la force électromagnétique, ce qui permet d'envisager un fonctionnement en mode actif. La sortie est le déplacement vertical de la masse sismique (tube). L'accélération sismique qu'il faut déterminer intervient sous la forme d'une force d'inertie qui est une entrée inconnue du modèle. Pour finir, nous avons identifié les paramètres du modèle et nous avons présenté ses caractéristiques dynamiques lorsqu'il fonctionne en mode passif.

Le quatrième chapitre propose un état de l'art des observateurs d'état et d'entrées inconnues. Cette présentation est motivée par le fait que le modèle dynamique de l'accéléromètre est un modèle linéaire incertain qui est perturbé par une entrée inconnue (force d'inertie) proportionnelle à la grandeur qu'on veut mesurer (accélération sismique). Pour la déterminer, il est donc possible d'utiliser un observateur d'état et d'entrée inconnue. Ce chapitre donne une vision d'ensemble du problème de l'observation en présentant les critères d'observabilité et les méthodes de synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes linéaires et non linéaires. L'accent a été mis sur les thématiques liées à la thèse :

les observateur à entrée inconnue, les observateurs pour les systèmes incertains, l'observateur d'état étendu (ESO) et l'ADRC qui représentent la base des travaux développés dans le cadre de cette thèse.

Le cinquième chapitre introduit une manière de représenter une classe de systèmes SISO incertains puis de les observer. Les systèmes incertains en question peuvent éventuellement être des systèmes inconnus. Cette représentation repose sur une entrée virtuelle $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ inconnue qui excite un système linéaire défini a priori à partir d'une représentation externe de type entrée-sortie qui est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. L'ordre de cette équation différentielle peut être choisi librement. Ce système linéaire défini a priori est appelé "modèle cible". L'entrée virtuelle \mathcal{C} est définie par la différence entre la dynamique du système non linéaire incertain et celle du modèle cible. Son évolution est non linéaire si le système incertain est non linéaire. Nous avons ensuite présenté une structure d'observateur à état étendu qui permet de reconstruire l'état du système incertain (tel qu'il est défini dans la représentation équivalente du système incertain) et l'entrée virtuelle. Cet observateur est un observateur linéaire qui a été appelé GeLESO. Une méthode de réglage a été explicitée et les conditions de sa convergence et de sa robustesse asymptotique ont été démontrées. Nous avons enfin présenté une structure de commande appelée Virtual Input Rejection Control (VIRCO) qui permet de contrôler le système incertain. La commande u est composée d'une commande non-linéaire u_1 qui rejette l'entrée virtuelle \mathcal{C} et d'une commande linéaire u_2 . Tout comme dans l'approche ADRC, la commande u_1 effectue une linéarisation globale approximative du système incertain. La dynamique résultante, qui est proche de celle du modèle cible lorsque l'observateur observe bien l'entrée virtuelle, est alors commandée par u_2 .

Le sixième chapitre a été consacré à la modélisation dynamique de l'accéléromètre sous la forme d'un système incertain. La modélisation effectuée s'est appuyée sur la théorie développée dans le chapitre précédent. Nous avons validé expérimentalement le modèle dynamique incertain de l'accéléromètre en montrant qu'il permettait de bien prédire son comportement. Nous avons ensuite synthétisé un observateur GeLESO qui est adapté à cette modélisation incertaine afin d'estimer l'accélération sismique. Par la suite, la qualité de l'observation de cette accélération a été étudiée. Cette étude montre que l'observation est nécessairement biaisée à cause du modèle incertain utilisé (le biais d'estimation induit l'erreur de justesse) et que ce biais peut être réduit si l'observateur fonctionne en mode actif. Pour établir ce point, nous avons illustré l'influence des incertitudes des paramètres du modèle cible sur l'estimation de l'accélération dans le cas d'un fonctionnement de l'accéléromètre en mode passif et actif. Le mode actif a été mis en œuvre à l'aide d'une commande VIRCO dans laquelle la sous-partie linéaire u_2 de la commande s'inspire de la logique d'un contrôleur proportionnel dérivé. Nous avons illustré par des simulations que le fonctionnement en mode actif permet de réduire l'effet des différentes incertitudes associées aux paramètres du modèle cible (qui sont toutes regroupées dans \mathcal{C}) à condition de connaître correctement le modèle de la force électromagnétique qui est impliquée dans la chaîne d'actionnement. Ce modèle dépend lui-même de la connaissance du courant dans les bobines et de la position du tube (masse sismique). Si le modèle de la force électromagnétique est juste, la réduction des incertitudes et l'augmentation de la justesse de l'estimation ne dépend plus que de la qualité de l'observateur et de la qualité de la régulation à zéro de la position du tube. Nous avons également montré par des simulations que l'offset induit par l'angle d'inclinaison de la table anti-vibrations a un effet indésirable sur l'estimation de l'accélération du plateau de la table, malgré le fait que la

commande VIRCO arrive à rejeter cet effet sur la position régulée du tube. La plupart des simulations effectuées ont été reproduites sur le vrai dispositif. Les résultats obtenus ont montré une bonne concordance entre la théorie et la pratique.

Le septième chapitre détaille la démarche métrologique qui a été suivie pour déterminer la composante verticale de l'accélération du plateau de la table anti-vibrations. Nous avons utilisé les méthodes de calcul des incertitudes développées dans le GUM pour quantifier les incertitudes associées à chaque grandeur physique impliquée dans l'accélération sismique. Nous avons ensuite proposé une nouvelle structure d'observateur par intervalles qui a été appelé GeLESO par intervalles. Cet observateur étend la logique d'observation d'un GeLESO standard à l'observation d'un modèle linéaire incertain défini à l'aide d'intervalles. Ce modèle dynamique incertain a été dérivé à partir des incertitudes connues qui sont associées aux grandeurs physiques manipulées dans le modèle. Le GeLESO par intervalles permet alors de propager d'une manière dynamique ces incertitudes sur l'estimation de l'accélération du plateau de la table. Des simulations et des expérimentations ont ensuite été menées pour illustrer les performances du GeLESO par intervalles.

Le dernier chapitre exploite les résultats du chapitre précédent pour estimer la force d'appui générée par le générateur de force ainsi que son incertitude. Nous avons défini l'ensemble des grandeurs physiques connues qui contribuent à la force à générer. Cette force d'appui est modulable à l'aide d'un courant i et elle est générée sur un échantillon supposé infiniment rigide. Le générateur fonctionne de ce fait en régime statique. Ceci permet d'utiliser les outils définis dans le GUM pour quantifier et propager sur la force d'appui les incertitudes associées aux différentes grandeurs physiques recensées. Avec ces démarches, nous sommes arrivés à déterminer en temps réel l'incertitude de la force d'appui. L'incertitude relative associée est comprise entre 2 et 3 % si la force appliquée est supérieure à 20 μN .

PERSPECTIVES

Bien que les travaux présentés dans ce manuscrit aient permis de progresser vers la traçabilité de la mesure ou de la génération de faibles forces dans la gamme inférieure à 100 μN , certains aspects doivent être améliorés. Ces améliorations portent d'une part sur la maîtrise des conditions environnementales des dispositifs, d'autre part sur les dispositifs eux-mêmes et enfin sur les méthodologies utilisées pour les observer ou les commander. Les pistes de réflexions associées à ces différents points constituent les perspectives de ce travail de thèse. Il sera essentiel de les mettre en œuvre pour améliorer la qualité métrologique des futurs générateurs de faibles forces qui seront développés avec des RMA. Mieux calculer et diminuer l'incertitude sur la force générée reste un enjeu fort.

MEILLEURE MAÎTRISE DES CONDITIONS ENVIRONNEMENTALES

Dans ce mémoire, nous avons négligé beaucoup de forces de perturbation induites par l'environnement. Ces forces viennent dégrader la justesse de l'estimation de l'accélération qui est mesurée (accéléromètre) ou celle de la force générée (générateur de faibles forces). Pour l'accéléromètre, ces forces vont se retrouver dans une entrée virtuelle \mathcal{C} qui induit un biais dans l'estimation \mathcal{A}_c de l'accélération sismique. Pour le générateur de

faibles forces, ces forces ne sont pas comptabilisés dans le bilan des forces qui est utilisé pour estimer en statique la force F_{app} . Ces forces sont essentiellement les forces induites par la masse d'air (poussée d'Archimède, force de pression induite par les infrasons et par les convections thermiques) et les forces de contact parmi lesquelles les forces de capillarité jouent un rôle prépondérant. L'usage d'une enceinte climatique de qualité métrologique régulée en température et en humidité permet d'atténuer dans une certaine mesure ces forces mais pas de les supprimer. Pour pouvoir améliorer la justesse des forces générées par le dispositif, il est essentiel de pouvoir placer ce dernier dans une enceinte avec un vide primaire afin de supprimer tous les effets de la masse d'air. Il conviendra d'évaluer les forces de contact en faisant des mesures de force de pull-off⁴. Par ailleurs, il faudra pouvoir assécher l'intérieur de l'enceinte en chauffant ses parois et en faisant des cycles de pompage puis de remise en pression de l'intérieur de l'enceinte avec un gaz sec. Il faudra également ajouter un dispositif de mesurage de l'angle du plateau de la table anti-vibrations car on a vu que ce dernier jouait un rôle important dans la formulation de l'accélération sismique et de la force appliquée. Si on ne tient pas compte de cet angle, la justesse de l'estimation de la force générée est nécessairement dégradée. L'estimation de cet angle par un mesurage approprié permettra aussi de mieux calculer les incertitudes associées à l'estimation de l'accélération sismique et de la force générée. Le mesurage du courant I qui circule dans les bobines à l'aide d'un ampèremètre de qualité métrologique apparaît aussi nécessaire car l'incertitude actuelle sur le courant est de Type B et elle doit être diminuée car elle joue un rôle important. Enfin, travailler sur une dalle anti-sismique de grande qualité permettrait de diminuer l'impact des vibrations sismiques qui perturbent le fonctionnement du générateur de faibles forces. Cela permettrait d'envisager la traçabilité de très faibles forces.

EVOLUTIONS DES DISPOSITIFS

1- Fonctionnement du générateur en mode statique avec compensation de l'accélération sismique

On a vu que la force générée F_{app} dépend du courant i et de l'accélération \ddot{z}_a du plateau de la table anti-vibrations. Dans le travail qui a été présenté, la force F_{app} présente donc des petites variations induites par le comportement sismique de la table. Ces variations ont été estimées pour connaître au mieux F_{app} . Si on désire atténuer ces variations, afin par exemple de générer une force qui soit la plus constante possible, il est nécessaire de les compenser en générant un courant supplémentaire i_c qui va s'ajouter sur le courant i . Le courant i_c aura pour objectif de compenser la force d'inertie $m\ddot{z}_a$ que subit le générateur de force lorsqu'il fonctionne en mode statique (cas d'un échantillon qui ne se déforme pas). On sait que la relation qui lie F_{app} à \ddot{z}_a et i est :

$$F_{app} = m\ddot{z}_a - \frac{i}{i_0} m g. \quad (8.14)$$

Le rôle de i_c est de générer une force additionnelle nulle en présence de \ddot{z}_a afin de contrer la force d'inertie. On a donc :

$$0 = m\ddot{z}_a - \frac{i_c}{i_0} m g \quad \implies \quad i_c = i_0 \frac{\ddot{z}_a}{g}. \quad (8.15)$$

4. La force de pull-off est la force qu'il faut exercer pour rompre la force d'adhésion entre l'indenteur et l'échantillon.

La force générée par $i + i_c$ devient alors :

$$F_{app} = m\ddot{z}_a - \frac{i + i_c}{i_0} m g = -\frac{i}{i_0} m g \quad (8.16)$$

qui permet de moduler le poids mg sans avoir de perturbation additive. En pratique, le courant de compensation i_c sera estimé à l'aide de l'estimation de \ddot{z}_a . Le courant total I qui circulera dans les bobines pendant l'application de la force F_{app} sera alors composé du courant de sustentation i_0 auquel s'additionnera le courant $i + i_c$ pour moduler le poids du tube et supprimer la force d'inertie :

$$I = i_0 + i + i_c = i_0 + i + i_0 \frac{\hat{\ddot{z}}_a}{g}. \quad (8.17)$$

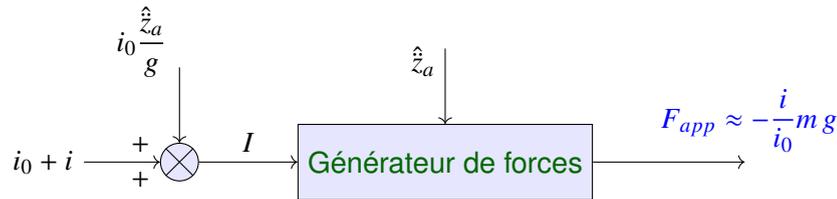


FIGURE 8.10 – Compensation de l'accélération sismique pour le générateur de force en mode statique.

2- Fonctionnement du générateur en mode dynamique

Si l'échantillon est déformable, la problématique de la génération de F_{app} devient plus complexe car on doit générer une force non plus en régime statique, mais en régime dynamique. Ce régime dynamique est forcément un régime couplé qui dépend des caractéristiques mécaniques du générateur et de l'échantillon. Celles de l'échantillon n'étant en général pas connues à l'avance, la dynamique couplée sera incertaine. Si on veut alors contrôler la force F_{app} générée pendant la caractérisation du matériau pour qu'elle suive une consigne en force donnée (constante ou variable), il faudra contrôler la force électromagnétique $F_{elec}(I,P)$. La dynamique couplée étant incertaine, l'approche VIRCO pourrait s'avérer pertinente si on veut caractériser des matériaux avec des caractéristiques mécaniques très différentes.

En mode dynamique, on peut aussi inverser le fonctionnement du générateur pour lui faire mesurer F_{app} . Dans ce cas, il s'agit d'imposer au matériaux un profil temporel de déformation qui se traduit par une consigne de déplacement de l'indenteur, puis de mesurer F_{app} pendant la déformation de l'échantillon. Dans ce mode de fonctionnement, il faut donc contrôler la force électromagnétique $F_{elec}(I,P)$ de manière à ce que le déplacement z de l'indenteur suive une consigne de déplacement (par exemple un profil temporel de chargement puis de déchargement de l'échantillon déformable). Il s'agit donc là de commander en déplacement un système couplé incertain et de mesurer en parallèle F_{app} .

3- Amélioration du dispositif existant

Du fait de sa fréquence de résonance très basse, l'accéléromètre conçu dans le cadre de cette thèse est particulièrement sensible aux vibrations basses fréquences qui sont proches de sa fréquence de résonance. Ces vibrations vont donc être bien détectées en

engendrant de grands déplacements du tube. Cependant, cette détection sera retardée à cause du déphasage présent à la résonance. Ce retard va donc inévitablement se retrouver dans l'estimation de l'accélération sismique qui est fournie par l'observateur. Lorsque l'accéléromètre fonctionne en mode actif, cette estimation est utilisée dans la commande VIRCO pour compenser l'effet de l'accélération sismique. Pour les fréquences proches de la résonance, la compensation va mal s'opérer du fait du retard d'observation. L'erreur de compensation va continuer à exciter le modèle cible et cela va se traduire sur la sortie régulée par des oscillations. Le fonctionnement de l'accéléromètre en mode actif est donc dégradé puisque la sortie est mal régulée sur le zéro.

Comme une table anti-vibrations agit à la manière d'un filtre passe-bas sur les vibrations sismiques, une solution pour améliorer la qualité de l'asservissement est de concevoir un accéléromètre avec une fréquence de résonance bien plus élevée que la fréquence de coupure de la table afin que les vibrations basses fréquences ne provoquent pas de déphasage dans le déplacement du tube. Quant aux vibrations hautes fréquences qui sont susceptibles d'exciter la résonance du tube, elles seront pré-filtrées par la table et leur impact sur la qualité de la régulation sera fortement diminué. Concevoir puis fabriquer un accéléromètre à base de RMA avec une fréquence de résonance de plusieurs dizaines de hertz représente un défi si on veut que son dimensionnement soit réaliste (au sens de réalisable en laboratoire). Cependant posséder ce type d'accéléromètre qui ne soit pas une boîte noire est fondamental pour asseoir une démarche de métrologie.

L'amélioration de l'estimation de l'accélération sismique avec l'accéléromètre permettra ensuite au générateur de force de mieux tenir compte de la force d'inertie qui le perturbe.

4- Générateur de force 3-axes

Construire un générateur 3-axes traçable au SI pour générer une force non verticale est un défi complexe qu'il sera important de relever dans le futur. Actuellement, on sait que la force d'inertie qui perturbe le fonctionnement du générateur a aussi des composantes horizontales car le plateau de la table anti-vibrations vibre dans chaque direction de l'espace. La force générée n'est donc pas parfaitement verticale. Avec un accéléromètre 3-axes et un générateur 3-axes, il sera possible de tenir compte des forces de perturbations sismiques dans toutes les directions de l'espace et donc de mieux connaître et contrôler la direction de la force générée par le générateur de faibles forces.

AMÉLIORATION DES MÉTHODOLOGIES UTILISÉES POUR LES CALCULS D'ESTIMATION ET D'INCERTITUDE

Dans le cadre de ce mémoire, on a introduit la notion d'entrée virtuelle \mathcal{C} pour représenter l'incertitude associée à un modèle cible. Cette notion nous a permis de synthétiser un nouveau type d'observateur GeLESO linéaire et robuste. Cet observateur est capable d'observer correctement un vecteur X constitué de la sortie du système et ces dérivées successives jusqu'à un ordre qu'on peut choisir librement. On a démontré que la connaissance de X et de \mathcal{C} est alors suffisante pour reconstruire le comportement entrée-sortie du système et le GeLESO permet d'observer ces deux éléments. On a également utilisé le concept de modèle linéaire incertain, avec cette fois-ci des incertitudes paramétriques caractérisées par des intervalles, pour synthétiser un observateur par intervalles capable d'encadrer une entrée inconnue. Ce que nous ne sommes pas parvenus à faire, c'est d'établir un pont véritablement formel entre ces deux approches pour encadrer l'estimation $\hat{\mathcal{C}}$ de l'entrée virtuelle définie au chapitre 5 avec un intervalle. Si on y parvenait, on

pourrait alors, dans le contexte de la mesure de force, associer une incertitude sous la forme d'intervalles à l'estimation de \mathcal{A}_c de l'accélération $-\ddot{z}_a$ que produit le GeLESO. En asservissant ensuite correctement la position du tube autour de zéro, on sait que la valeur vraie de $-\ddot{z}_a$ se situerait à proximité du centre de l'intervalle associé à l'estimation de \mathcal{A}_c .

L'observateur GeLESO par intervalles qui a été synthétisé permet de propager les incertitudes des différentes grandeurs physiques sur l'estimation de l'accélération sismique. Cet observateur permet de déterminer une incertitude élargie qui contient nécessairement \ddot{z}_a à condition que toutes les hypothèses faites sur le modèle incertain et les intervalles utilisés soit vérifiées. Cependant, la paramétrisation de cet observateur (placement des pôles pour calculer le gain des deux observateurs qui estiment les bornes de l'intervalle) est ajustée manuellement pendant la validation expérimentale. Pour cela, on part des pôles du GeLESO standard (calculés avec la méthode du ω_o) puis on les ajuste afin de trouver un compromis entre la taille de l'enveloppe qui englobe l'accélération sismique et le niveau de bruit sur chaque borne. Ceci signifie que la taille de l'enveloppe qui contient l'accélération sismique n'est pas forcément minimale. Une piste de réflexion serait de trouver des gains optimaux qui permettent de trouver la plus petite enveloppe possible qui englobe cette accélération, en utilisant la résolution des inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequality (LMI)). Cette approche, déjà mise en œuvre sur certains observateurs par intervalles, permet de trouver une matrice de changement de base ainsi que des gains de l'observateur optimaux qui génèrent le plus petit intervalle possible autour de \ddot{z}_a .

L'étude de la stabilité du GeLESO par intervalles devra aussi être effectuée en étudiant si les deux trajectoires, inférieure et supérieure, données par l'équation (7.38) convergent vers un domaine de largeur finie. L'étude de la stabilité de cet observateur est donc équivalente à l'étude de la stabilité de l'erreur totale définie par l'équation suivante :

$$e = \bar{e} - \underline{e} = \overline{X_e} - \underline{X_e} \quad (8.18)$$

Dans le cadre de cette thèse, la stabilité de cet observateur par intervalles n'a pas pu être étudiée par manque de temps. Les validations expérimentales effectuées n'ont pas permis de détecter d'éventuels problèmes d'instabilité de l'observation.

L'approche métrologique qui a été utilisée dans ce mémoire nécessite de connaître l'incertitude du résultat du mesurage de nombreuses grandeurs physiques, simples ou composées. Elle nécessite également de connaître l'incertitude associée à l'identification de paramètres qui interviennent dans les modèles utilisés. Par "conservatisme" et par manque de temps, nous nous sommes uniquement appuyés sur les méthodes décrites dans le GUM pour le faire, car leurs complexités étaient limitées dans le contexte que nous avons à traiter. D'autres méthodes de calcul d'incertitude pourraient être envisagées car celles du GUM sont parfois basées sur des approximations linéaires (c'est notamment le cas du calcul de l'incertitude composée). Les incertitudes obtenues doivent ensuite être propagées via des modèles dynamiques, ce qui n'est pas une chose aisée à faire. Il existe aujourd'hui plusieurs cadres formels qui permettent de le faire tels que par exemple les observateurs par intervalles, l'estimation bayésienne ou le calcul ensembliste.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes uniquement intéressés aux observateurs par intervalles. Le calcul ensembliste par le biais d'intervalles est une autre approche que nous n'avons pas explorée mais cette dernière est potentiellement promet-

teuse pour mettre en place une démarche métrologique avec des systèmes dynamiques incertains.

Concernant l'estimation bayésienne, nous avons démontré dans [Amokrane et al. \(2019a\)](#), en réutilisant la notion d'entrée virtuelle \mathcal{C} , qu'un filtre de Kalman linéaire à état étendu (Extended State Linear Kalman Filter ou ES-LKF) pouvait estimer à la fois l'entrée virtuelle \mathcal{C} et l'état X des systèmes non linéaires incertains introduits dans le chapitre 5. Cette approche n'a pas les problèmes de stabilité du filtre de kalman étendu (EKF) qui nécessite de linéariser (et donc de connaître) la dynamique du système non linéaire. Elle permet par ailleurs de calculer formellement la matrice de variance-covariance Q du bruit d'état pour l'état étendu. Une telle approche peut sans problème se substituer au GeLESO standard pour estimer l'accélération inconnue $-\ddot{z}_a$. Dans ce cas, on va estimer l'accélération biaisée \mathcal{A}_c à partir d'une modélisation de cette dernière à l'aide d'un filtre formeur paramétré par une densité spectrale de puissance qui traduit le fait qu'on ne connaît pas sa dynamique. Le filtre de Kalman fournit alors une incertitude sous la forme d'une variance qui qualifie l'erreur d'estimation de \mathcal{A}_c . Cependant, comme \mathcal{A}_c est forcément différent de $-\ddot{z}_a$ (la différence entre les deux est \mathcal{C}/m'), cette incertitude ne donne donc pas d'indication sur la justesse de l'estimation de \mathcal{A}_c puisque cette justesse dépend de toutes les erreurs de modélisation qui ont été regroupées dans \mathcal{C} . Par contre, on sait qu'on augmente la justesse de l'accéléromètre si on régule correctement la position de la masse sismique autour de zéro (à condition de bien connaître le courant et le le modèle de la force électromotrice). Si on parvenait à obtenir des informations sur le biais \mathcal{C} , peut être qu'il serait possible de garantir que l'incertitude élargie de $\hat{\mathcal{A}}_c$ contienne bien la valeur vraie de $-\ddot{z}_a$. Tout comme la logique du GeLESO a été enrichie pour produire le GeLESO d'ordre supérieur, il est également possible de construire un filtre de Kalman linéaire à état étendu d'ordre supérieur (Higher Order Extended State Linear Kalman Filter ou HOES-LKF) en reprenant le même schéma de construction des états étendus que dans ce mémoire. Cela permettrait de mieux observer l'état et l'entrée virtuelle qu'avec le ES-LKF présenté dans [Amokrane et al. \(2019a\)](#) qui n'a qu'un seul état étendu.

Malgré l'efficacité des résultats fournis par l'observateur GeLESO, la question reste ouverte sur comment effectuer le choix des paramètres a_i et b utilisés dans le modèle cible, lorsque le système non linéaire à observer est plus ou moins bien connu. Si on part du constat que les paramètres déduits d'un modèle de connaissance linéaire (qui est forcément approximatif) ne sont pas forcément ceux qui induisent la meilleure observation avec le GeLESO, on peut alors se demander s'il est possible de déterminer des paramètres a_i et b différents qui améliorent l'observation. Dans [Amokrane et al. \(2019b\)](#), nous avons proposé, en guise de perspective, un critère possible d'optimisation pour choisir les paramètres a_i pour un b fixé. Ce critère à minimiser est :

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \|X - X'(a_1, a_2, \dots, a_p)\|. \quad (8.19)$$

Le terme X est l'état du système lorsqu'il est commandé par $u_1 + u_2$, autrement dit, lorsqu'il est à la fois linéarisé approximativement par $u_1 = -\hat{\mathcal{C}}$ puis commandé par u_2 (cf. chapitre 5). Le terme $X'(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une prédiction de l'état qui est obtenue en faisant tourner le même modèle cible (qui donne les matrices A et B à partir des paramètres a_i et b) avec uniquement la commande u_2 :

$$\dot{X}' = AX' + Bu_2. \quad (8.20)$$

Il est simple de montrer que si on minimise $\|X - X'(a_1, a_2, \dots, a_p)\|$ alors le terme $|\varepsilon|$, avec $\varepsilon = B(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{C}})$, devient de plus en plus petit à condition que A soit de Hurwitz. Ceci signifie

donc que $\hat{\mathcal{C}}$ est de plus en plus proche de \mathcal{C} et donc que l'observateur est de plus en plus précis. Autrement dit, l'évolution du jeu de paramètres a_i permet d'améliorer la qualité de l'observateur. Comme X n'est pas connu, on va le remplacer dans (8.19) par $\hat{X}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ qui est l'estimation de l'état fournie par l'observateur GeLESO. Le critère à minimiser devient alors :

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \|\hat{X}(a_1, a_2, \dots, a_p) - X'(a_1, a_2, \dots, a_p)\| \quad (8.21)$$

qui est calculable et donc minimisable. Minimiser ce critère signifie qu'on essaye de rendre l'état estimé \hat{X} le plus proche possible de l'état du système parfaitement linéarisé X' . Une telle approche d'optimisation, si elle était mise en œuvre en ligne pendant l'observation, s'inscrirait dans le cadre des observateurs adaptatifs. La contrainte à respecter est que la matrice A doit rester de Hurwitz pendant l'évolution des paramètres a_i . Par ailleurs, il faut que le résidu non linéaire ε ne déstabilise pas le système commandé pendant cette phase d'optimisation.

Enfin, pour finir, la théorie de l'observation et de la commande des systèmes incertains SISO qui a été présentée au chapitre 5 devra être étendue aux systèmes MIMO.

A

PREUVE DES THÉORÈMES 5.3.1 ET 5.3.2

A.1/ PREUVE DU THÉORÈME 5.3.1

Les implications C1 et C3 entraînent que le GeLESO d'ordre supérieur estime l'état X , l'entrée virtuelle \mathcal{C} et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $m - 1$ avec une erreur d'estimation nulle en régime permanent.

Les implications C2 et C4 entraînent que le GeLESO d'ordre supérieur estime l'état X , l'entrée virtuelle \mathcal{C} et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $m - 1$ avec une erreur d'estimation non nulle mais bornée.

- **Preuve de l'implication C1 :**

Si $i = m$ et $\mathcal{C}^{(m)} = 0$, alors $\mathcal{C}^{(i)} = 0$. Dans ce cas, la dynamique de l'erreur d'estimation (5.54) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{E} = (A_e - \mathcal{L}C_e)E = \mathcal{A}E \quad (\text{A.1})$$

dont la solution est : $E(t) = e^{\mathcal{A}t}E(0)$.

Puisque \mathcal{L} est choisi de sorte que \mathcal{A} soit de Hurwitz, l'exponentielle de \mathcal{A} tend vers 0 quand t tend vers l'infini, autrement dit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mathcal{A}t}E(0) = 0$.

L'implication C1 est donc vérifiée.

- **Preuve de l'implication C2 :**

Puisque $\mathcal{C}^{(m)} \neq 0$, $\mathcal{C}^{(i)} \neq 0$, la dynamique de l'erreur d'estimation (5.54) ne se simplifie pas. Il a été démontré dans Yang et al. (2009) que sa solution est :

$$E(t) = e^{\mathcal{A}t}E(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B}_e \mathcal{C}^{(m)}(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

qui peut être divisée en deux parties :

$$R_1(t) = e^{\mathcal{A}t}E(0) \quad (\text{A.3})$$

et

$$R_2(t) = \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B}_e \mathcal{C}^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (\text{A.4})$$

Puisque \mathcal{A} est de Hurwitz, $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_1(t) = 0$. Par conséquent, pour borner $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$, il faut que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_2(t)$ dans (A.4) soit bornée.

Définissons l'opérateur suivant :

$$\forall Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad |Q| \triangleq \begin{bmatrix} |q_1| \\ \vdots \\ |q_n| \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

D'après l'hypothèse 5.3.2 et sachant que $i = m$, on a $|\mathcal{L}^{(m)}| < \beta$. A l'aide de l'opérateur $|\cdot|$, le terme $\lim_{t \rightarrow +\infty} |R_2(t)|$ est alors borné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |R_2(t)| \leq \beta \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B}_e d\tau \right|. \quad (\text{A.6})$$

Le terme de l'intégral en (A.6) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B}_e d\tau &= \int_0^t -\mathcal{A}^{-1}(-\mathcal{A}e^{\mathcal{A}(t-\tau)}) \mathcal{B}_e d\tau \\ &= \mathcal{A}^{-1}e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B}_e - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_e \end{aligned}$$

menant à :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} \mathcal{B}_e d\tau \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathcal{A}^{-1}e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B}_e - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_e|$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |R_2(t)|$ peut être bornée par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |R_2(t)| \leq \beta |\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_e| + \beta \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathcal{A}^{-1}e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B}_e| \right) \quad (\text{A.7})$$

Encore une fois, puisque \mathcal{A} est de Hurwitz, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathcal{A}^{-1}e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B}_e| = 0 \quad (\text{A.8})$$

et le seul terme $|\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_e|$ reste à borner.

Selon les expressions des matrices A_e , C_e , \mathcal{L} dans (5.48) et la valeur des gains dans (5.51), la matrice \mathcal{A} est donnée par :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \omega_o & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_2 \omega_o^2 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{p-1} \omega_o^{p-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_p \omega_o^p & 0 & \cdots & 0 & a_p & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_{p+1} \omega_o^{p+1} & 0 & \cdots & 0 & a_{p-1} & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\gamma_{2p-1} \omega_o^{2p-1} & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ -\gamma_{2p} \omega_o^{2p} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{p+m-1} \omega_o^{p+m-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\gamma_{p+m} \omega_o^{p+m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

dont l'inverse \mathcal{A}^{-1} est donné par :

$$\mathcal{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cccccccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\omega_o^{p+m} \gamma_{p+m}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_1}{\omega_o^{p+m-1} \gamma_{p+m}} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{p-2}}{\omega_o^{p+m-(p-2)} \gamma_{p+m}} \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+m-(p-1)} \gamma_{p+m}} \\ 0 & 0 & & -a_p & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_p \gamma_{p-1} - \gamma_p \omega_o}{\omega_o^{p+m-(p-1)} \gamma_{p+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -a_1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_1 \gamma_{p-1} - \gamma_{2p-1} \omega_o^p}{\omega_o^{p+m-(p-1)} \gamma_{p+m}} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{2p}}{\omega_o^{p+m-(2p)} \gamma_{p+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{\gamma_{p+m-2}}{\omega_o^2 \gamma_{p+m}} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 & -\frac{\gamma_{p+m-1}}{\omega_o \gamma_{p+m}} \end{array} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Du fait que le terme γ_{p+m} soit égal à 1 pour $i = m$ et $j = p+m$, la matrice \mathcal{A}^{-1} peut s'écrire :

$$\mathcal{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cccccccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\omega_o^{p+m} \gamma_1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_1}{\omega_o^{p+m-1}} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{p-2}}{\omega_o^{p+m-(p-2)}} \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ 0 & 0 & & -a_p & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_p \gamma_{p-1} - \gamma_p \omega_o}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -a_1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_1 \gamma_{p-1} - \gamma_{2p-1} \omega_o^p}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma_{2p}}{\omega_o^{p+m-(2p)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\frac{\gamma_{p+m-2}}{\omega_o^2} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 & -\frac{\gamma_{p+m-1}}{\omega_o} \end{array} \right]. \quad (\text{A.11})$$

L'utilisation de l'opérateur $|\cdot|$ dans le produit de (A.11) par \mathcal{B}_e dans (5.54) implique que $|\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_e| \leq V + W$, avec :

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\left[\begin{array}{c} \frac{|b|}{\omega_o^{p+m}} \\ \frac{|b|\gamma_1}{\omega_o^{p+m-1}} \\ \vdots \\ \frac{|b|\gamma_{p-2}}{\omega_o^{p+m-(p-2)}} \\ \frac{|b|\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \frac{|b||a_p\gamma_{p-1} - \gamma_p\omega_o|}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \vdots \\ \frac{|b||a_1\gamma_{p-1} - \gamma_{2p-1}\omega_o^p|}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \frac{|b|\gamma_{2p}}{\omega_o^{p+m-(2p)}} \\ \vdots \\ \frac{|b|\gamma_{p+m-2}}{\omega_o^2} \\ \frac{|b|\gamma_{p+m-1}}{\omega_o} \end{array} \right]}^{|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}_e|}
\leq
\overbrace{\left[\begin{array}{c} \frac{|b|}{\omega_o^{p+m}} \\ \frac{|b|\gamma_1}{\omega_o^{p+m-1}} \\ \vdots \\ \frac{|b|\gamma_{p-2}}{\omega_o^{p+m-(p-2)}} \\ \frac{|b|\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \frac{|b|\gamma_p\omega_o}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \vdots \\ \frac{|b|\gamma_{2p-1}\omega_o^p}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} \\ \frac{|b|\gamma_{2p}}{\omega_o^{p+m-(2p)}} \\ \vdots \\ \frac{|b|\gamma_{p+m-2}}{\omega_o^2} \\ \frac{|b|\gamma_{p+m-1}}{\omega_o} \end{array} \right]}^v
+
\overbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{|ba_p|\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+i-(p-1)}} \\ \vdots \\ \frac{|ba_1|\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+i-(p-1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}^w
\end{array} \tag{A.12}$$

D'après (A.12), on peut constater que :

$$V_j = \frac{|b|\gamma_{j-1}}{\omega_o^{p+m-(j-1)}} > 0 \tag{A.13}$$

et

$$W_j \leq \epsilon = \frac{|b\bar{a}|\gamma_{p-1}}{\omega_o^{p+m-(p-1)}} > 0 \tag{A.14}$$

avec $\bar{a} = \max \{a_k\}_{k=1, \dots, p}$ et $j = 1, \dots, p+m$.

Par conséquent, chaque terme de $|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}_e|$ est borné par

$$\left| (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}_e) \right|_j = \left| (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}_e) \right|_j \leq V_j + \epsilon \tag{A.15}$$

D'après (A.7) et (A.15), la borne sur $R_2(t)$ est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |R_2(t)| \leq \beta(V_j + \epsilon) \tag{A.16}$$

et par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| \leq \beta(V_j + \epsilon). \tag{A.17}$$

Cette dernière équation peut également s'écrire de la façon suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| \leq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, p+m, \tag{A.18}$$

avec $\alpha_j = \beta(V_j + \epsilon)$.

L'implication C2 est donc vérifiée.

• **Preuve de l'implication C3 :**

Dans ce cas, $i < m$ et $\mathcal{C}^{(i)} = 0$. Comme dans l'implication C1, la dynamique de l'erreur d'estimation dans (5.54) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{E} = (A_e - \mathcal{L}C_e)E = \mathcal{A}E \quad (\text{A.19})$$

Par conséquent, avec le même raisonnement que pour l'implication C1, on peut démontrer facilement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mathcal{A}t} E(0) = 0. \quad (\text{A.20})$$

L'implication C3 est donc vérifiée.

• **Preuve de l'implication C4 :**

La même démonstration que celle faite pour l'implication C2 peut être utilisée pour prouver l'implication C4. La seule différence vient du fait que $i < m$. Dans ce cas, les dimensions des matrices et des vecteurs sont réduites de $p + m$ à $p + i$.

Ainsi, on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)| \leq \zeta_j \quad (\text{A.21})$$

avec $\zeta_j = \beta(V'_j + \epsilon')$.

L'implication C4 est donc vérifiée.

A.2/ PREUVE DU THÉORÈME 5.3.2

Le résultat associé aux implications C1 et C3 est évident grâce à la démonstration du théorème précédent.

Si l'une des implications C2 ou C4 est vérifiée, on note par $\gamma_{j|k}$ et $\gamma_{j|i}$ les coefficients associés à $\text{GeLESO}|_k$ et $\text{GeLESO}|_i$ respectivement. D'après (A.12), l'erreur d'estimation $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|$ avec $j = 1, \dots, p + i$ est donnée par quatre relations différentes en fonction de la valeur de j .

En effet, l'expression de $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|$ est différente pour les quatre cas suivants :

- Cas 1 : indice $j = 1$.
- Cas 2 : indices $j = 2, \dots, p$.
- Cas 3 : indices $j = p + 1, \dots, p + i$ si $1 \leq i \leq p$.
- Cas 4 : indices $j = 2p + 1, \dots, p + i$ si $i > p$.

Comparons maintenant les $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|$ résultantes du $\text{GeLESO}|_k$ et $\text{GeLESO}|_i$ pour chaque cas.

• **Cas 1 : indice $j = 1$**

Dans ce cas, d'après (A.12), $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_i = \frac{|b|}{\omega_o^{p+i}}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_k = \frac{|b|}{\omega_o^{p+k}}$.

Pour comparer $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_i$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_k$, il suffit de calculer :

$$\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_k}{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_i} = \frac{\frac{|b|}{\omega_o^{p+k}}}{\frac{|b|}{\omega_o^{p+i}}} = \frac{1}{\omega_o^r}, \quad \text{avec } r = k - i > 0. \quad (\text{A.22})$$

Par conséquent, pour tout $\omega_o > 1$, on a : $\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_k}{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_i} < 1$.

Cela permet de vérifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_k < \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_1(t)|_i$, pour $\omega_o > 1$.

- **Cas 2 : indices** $j = 2, \dots, p$

Dans ce cas, d'après (A.12), $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i = |b| \frac{\gamma_{j-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k = |b| \frac{\gamma_{j-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}}$.

Pour comparer $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k$, il suffit de calculer :

$$\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k}{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i} = \frac{|b| \frac{\gamma_{j-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}}}{|b| \frac{\gamma_{j-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}}} = \frac{\Xi_2}{\omega_o^r}, \quad \text{avec } \Xi_2 = \frac{(p+k)!(p+i-j)!}{(p+k-j)!(p+i)!}. \quad (\text{A.23})$$

Par conséquent, pour tout $\omega_o > \sqrt[p]{\Xi_2}$, on a : $\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k}{\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i} < 1$.

Il est ainsi possible de vérifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k < \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i$, pour $j = 2, \dots, p$ et $\omega_o > \sqrt[p]{\Xi_2}$.

- **Cas 3 : indices** $j = p+1, \dots, p+i$ **si** $1 \leq i \leq p$

Dans ce cas, selon (A.12),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k = |b| \frac{\gamma_{j-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}} + |ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(p-1)}} \quad (\text{A.24})$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i = |b| \frac{\gamma_{j-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}} + |ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(p-1)}}. \quad (\text{A.25})$$

La même procédure que celle utilisée dans le cas 2 pour la comparaison entre $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i$ est utilisée pour comparer le premier terme de (A.24) et (A.25), c'est à dire $|b| \frac{\gamma_{j-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}}$ et $|b| \frac{\gamma_{j-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}}$.

De ce fait, pour tout $\omega_o > \sqrt[p]{\Xi_2}$, on a :

$$|b| \frac{\gamma_{j-1} |k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}} < |b| \frac{\gamma_{j-1} |i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}} \quad (\text{A.26})$$

Pour comparer le second terme de (A.24) et (A.25), il suffit de calculer :

$$\frac{|ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1}|k|}{\omega_o^{p+k-(p-1)}}}{|ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1}|i|}{\omega_o^{p+i-(p-1)}}} = \frac{\Xi_3}{\omega_o^r}, \quad \text{avec } \Xi_3 = \frac{(p+k)!(i+1)!}{(k+1)!(p+i)!}. \quad (\text{A.27})$$

Ainsi, pour tout $\omega_o > \sqrt[p]{\Xi_3}$, nous avons :

$$|ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1}|k|}{\omega_o^{p+k-(p-1)}} < |ba_{2p-(j-1)}| \frac{\gamma_{p-1}|i|}{\omega_o^{p+i-(p-1)}}.$$

Par conséquent, pour tout $\omega_o > \max\{\sqrt[p]{\Xi_2}, \sqrt[p]{\Xi_3}\}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k < \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i$.

• **Cas 4 : indices $j = 2p + 1, \dots, p + i$ si $i > p$**

D'après l'équation (A.12), $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i = |b| \frac{\gamma_{j-1}|i|}{\omega_o^{p+i-(j-1)}}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k = |b| \frac{\gamma_{j-1}|k|}{\omega_o^{p+k-(j-1)}}$. Ces expressions étant identiques à celles du cas 2, il peut être facilement démontré en suivant le même raisonnement que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_k < \lim_{t \rightarrow +\infty} |E_j(t)|_i$, pour $j = 2p + 1, \dots, p + i$ et pour tout $\omega_o > \sqrt[p]{\Xi_2}$.

Soit

$$\omega_{max} \triangleq \max\{1, \sqrt[p]{\Xi_2}, \sqrt[p]{\Xi_3}\}. \quad (\text{A.28})$$

Le résultat dans les cas C2 et C4 est démontré pour tout $\omega_o > \omega_{max}$.

A noter que d'après (5.33), l'estimation de l'entrée virtuelle $\hat{\mathcal{C}}$ est une combinaison linéaire de l'estimation des composantes de X_e . Comme ces composantes sont mieux estimées lorsque l'ordre du GeLESO augmente, il en va de même pour l'estimation de l'entrée virtuelle \mathcal{C} .

BIBLIOGRAPHIE

- Abadie, J., Roux, C., Piat, E., Filiatre, C., et Amiot, C. (2014). **Experimental measurement of human oocyte mechanical properties on a micro and nanoforce sensing platform based on magnetic springs**. *Sensors and Actuators B : Chemical*, 190 :429–438. 14
- Acar, C., et Shkel, A. M. (2003). **Experimental evaluation and comparative analysis of commercial variable-capacitance MEMS accelerometers**. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13(5) :634–645. 40
- Alamo, T., Bravo, J., et Camacho, E. (2005). **Guaranteed state estimation by zonotopes**. *Automatica*, 41(6) :1035 – 1043. 67
- Amini, B. V., et Ayazi, F. (2004). **A 2.5-v 14-bit /spl sigma//spl delta/ cmos soi capacitive accelerometer**. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 39(12) :2467–2476. XII, 46, 47
- Amokrane, F., Piat, E., Abadie, J., Drouot, A., et Escareno, J. (2019a). **State Observation of a Specific Class of Unknown Nonlinear SISO Systems using Linear Kalman Filtering**. *58th Conference on Decision and Control (CDC)*. 204
- Amokrane, F., Piat, E., Abadie, J., Drouot, A., et Escareno, J. (2019b). **State observation of unknown nonlinear SISO systems based on virtual input estimation**. *International Journal of Control*, pages 1–14. 88, 204
- Angeli, D., et Sontag, E. D. (2003). **Monotone control systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10) :1684–1698. 68
- Anstett, F., Millérioux, G., et Bloch, G. (2009). **Polytopic observer design for LPV systems based on minimal convex polytope finding**. *Journal of Algorithms and Computational Technology*, 3 :23–43. 67
- Astolfi, D. (2016). **Observers and robust output regulation for nonlinear systems**. Theses, PSL Research University ; Università degli studi (Bologne, Italie). 73
- Beale, S., et Shafai, B. (1989). **Robust control system design with a proportional integral observer**. *International Journal of Control*, 50(1) :97–111. 64
- Besancon, G. (1999). **Further results on high gain observers for nonlinear systems**. Dans *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, volume 3, pages 2904–2909 vol.3. 73
- Besançon, G. (2007). **Nonlinear Observers and Applications**. Springer. 66
- Billot, M., Piat, E., Abadie, J., Agnus, J., et Stempflié, P. (2016). **External mechanical disturbances compensation with a passive differential measurement principle in nanoforce sensing using diamagnetic levitation**. *Sensors and Actuators A : Physical*, 238 :266–275. XI, 9, 10, 32, 197

- Birk, J., et Zeitz, M. (1988). **Extended Luenberger observer for nonlinear multi-variable systems**. *International Journal of Control*, 47(6) :1823–1836. 73
- Boerdijk, A. (1956). **Technical aspects of levitation**. *Philips research reports*, pages 45–46. 15
- Boukallel, M. (2003). **Etude, conception et réalisation d'un capteur de micro et nano-forces. Application à la caractérisation de l'élasticité des ovocytes**. *PhD thesis*. 15
- Chaehoi, A. (2005). **Conception et Modélisation de MEMS monolithique CMOS en technologie FSBM : Application aux accéléromètres**. Theses, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc. 38
- Chambon, E., Apkarian, P., et Burlion, L. (2015). **Metzler Matrix Transform Determination using a Nonsmooth Optimization Technique with an Application to Interval Observers**. Dans *2015 Proceedings of the Conference on Control and its Applications*, pages 205–211. Society for Industrial and Applied Mathematics. 71, 169
- Chen, S., Bai, W., et Huang, Y. (2016). **ADRC for systems with unobservable and unmatched uncertainty**. Dans *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE. 80
- Chen, S.-J., et Pan, S.-S. (2011). **A force measurement system based on an electrostatic sensing and actuating technique for calibrating force in a micronewton range with a resolution of nanonewton scale**. *Measurement Science and Technology*, 22(4) :045104. XI, 5, 6
- Chen, W., Li, X., Liu, X., et Yin, L. (2015). **Study of self-calibrating mems accelerometers**. *AIP Advances*, 5(4) :041326. 40
- Cheong, J., Youm, Y., et Chung, W. K. (2002). **Joint tracking controller for multi-link flexible robot using disturbance observer and parameter adaptation scheme**. *Journal of Robotic Systems*, 19(8) :401–417. 63
- Chetouani, H. L. (2007). **MICROSYSTEMES ET MICROMANIPULATION A LEVITATION DIAMAGNETIQUE CONCEPTION, REALISATION ET APPLICATION A LA MICROFLUIDIQUE DIGITALE ET A LA BIOLOGIE**. Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG). 14
- Chisci, L., Garulli, A., et Zappa, G. (1996). **Recursive state bounding by parallelo-topes**. *Automatica*, 32(7) :1049 – 1055. 67
- Christian Pigot, B. D., et Reyne, G. (2008). **Optimization of a 3d micro-accelerometer based on diamagnetic levitation**. Dans *10th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism (OIPE 2008)*. 49
- Combastel, C. (2003). **A state bounding observer based on zonotopes**. Dans *2003 European Control Conference (ECC)*, pages 2589–2594. 67
- Darouach, M. (2009). **Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs**. *Applied Mathematics Letters*, 22(7) :1107 – 1111. 62

- Darouach, M., Zasadzinski, M., et Xu, S. J. (1994). **Full-order observers for linear systems with unknown inputs**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609. 62
- Do, M.-H., Koenig, D., et Theilliol, D. (2019). **Robust \mathcal{H}_∞ Proportional-Integral Observer-based Controller for Uncertain LPV system**. *Journal of the Franklin Institute*. 66
- Durieu, C., Polyak, B. T., et Walter, E. (1996). **Trace versus determinant in ellipsoidal outer-bounding, with application to state estimation**. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1) :3975 – 3980. 67
- Earnshaw, S. (1842). **The inductrack : a simpler approach to magnetic levitation**. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, pages 97–112. 15
- Efimov, D., Fridman, L., Raïssi, T., Zolghadri, A., et Seydou, R. (2012). **Interval estimation for lpv systems applying high order sliding mode techniques**. *Automatica*, 48(9) :2365 – 2371. 167
- Efimov, D., Raïssi, T., et Zolghadri, A. (2013). **Control of nonlinear and lpv systems : Interval observer-based framework**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :773–778. 71
- Efimov, D., et Raïssi, T. (2016). **Design of interval observers for uncertain dynamical systems**. *Automation and Remote Control*, 77(2) :191–225. 69, 71
- Efimov, D., Raïssi, T., Chebotarev, S., et Zolghadri, A. (2013). **Interval state observer for nonlinear time varying systems**. *Automatica*, 49(1) :200–205. 71
- Ellero, N. (2018). **Synthèse d’observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants**. PhD thesis, Université de Bordeaux. 71
- Farza, M., Busawon, K., et Hammouri, H. (1993). **Simple nonlinear observers for on-line estimation of kinetic rates in bioreactors**. *Automatica*, 34(3) :301–318. 73
- Fujii, Y. (2003a). **A method for calibrating force transducers against oscillation force**. *Measurement Science and Technology*, 14(8) :1259–1264. 52
- Fujii, Y. (2003b). **Proposal for a step response evaluation method for force transducers**. *Measurement Science and Technology*, 14(10) :1741–1746. 52
- Fujii, Y., et Fujimoto, H. (1999). **Proposal for an impulse response evaluation method for force transducers**. *Measurement Science and Technology*, 10(4) :N31–N33. 52
- Galván-Guerra, R., Fridman, L., et Dávila, J. (2017). **High-order sliding-mode observer for linear time-varying systems with unknown inputs**. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(14) :2338–2356. 71
- Gana, R., Abadie, J., Piat, E., Roux, C., Amiot, C., Pieralli, C., et Wacogne, B. (2017). **A novel force sensing platform using passive magnetic springs for mechanical characterisation of human oocytes**. *Sensors and Actuators A : Physical*, 262 :114–122. 14
- Gao, Z. (2003). **Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning**. Dans *Proceedings of the 2003 American Control Conference 2003*. IEEE. 91, 121

- Gao, Z. (2006). **Active disturbance rejection control : a paradigm shift in feedback control system design**. Dans *2006 American Control Conference*. IEEE. 74, 78
- Garmire, D., Choo, H., Kant, R., Govindjee, S., Sequin, C. H., Muller, R. S., et Demmel, J. (2007). **Diamagnetically levitated mems accelerometers**. Dans *TRANSDUCERS 2007 - 2007 International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference*, pages 1203–1206. 49
- Glumineau, A., Moog, C. H., et Plestan, F. (1996). **New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4) :598–603. 72
- Godbole, A. A., Kolhe, J. P., et Talole, S. E. (2013). **Performance Analysis of Generalized Extended State Observer in Tackling Sinusoidal Disturbances**. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(6) :2212–2223. 76, 99
- Gouzé, J., Rapaport, A., et Hadj-Sadok, M. (2000). **Interval observers for uncertain biological systems**. *Ecological Modelling*, 133(1-2) :45–56. 67, 69, 71, 168
- Granjon, Y. (2010). **Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état**. DUNOD, ISBN 978-2-10-055087-6. 59
- Guan, Y., et Saif, M. (1991). **A novel approach to the design of unknown input observers**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5) :632–635. 62
- Gucik-Derigny, D., Raïssi, T., et Zolghadri, A. (2014). **Interval state and unknown inputs estimation for linear time-invariant systems**. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :7375 – 7381. 71
- Guldimann, B., Dubois, P., Clerc, P. A., et de Rooij, N. (2001). **Fiber Optic MEMS accelerometer with high mass displacement resolution**. *The 11th International conference on Solid-State Sensors and Actuators, Munich, Germany*, pages 1–14. 43
- Guo, B., et Zhao, Z. (2016). **Introduction**. Dans *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems*, pages 1–51. John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd. 74, 78
- Guo, B.-Z., et Zhao, Z.-L. (2011). **Extended state observer for nonlinear systems with uncertainty**. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :1855 – 1860. 76
- Han, J. (1994). **A New Type of Controller : NLPID**. *Control and Decision*, 9(6) :401–407. 77
- Han, J. (1995). **The Extended State Observer for a Class of Uncertain Systems**. *Control and Decision*, 10. 74, 75, 88
- Hashimoto, Y. (1998). **Transporting objects without contact using flexural traveling waves**. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(6) :3230–3233. 14
- Herman, R., et Krener, J. (1977). **Nonlinear controlability and observability**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :728–740. 71
- Hindrichsen, C. C., Larsen, J., Thomsen, E. V., Hansen, K., et Lou-Møller, R. (2009). **Circular piezoelectric accelerometer for high band width application**. Dans *SENSORS, 2009 IEEE*, pages 475–478. XII, 45

- Hirsch, M., et Smith, H. (2003). **Competitive and cooperative systems : a mini-review**. *International Symposium on Positive Systems : Theory and Applications (POSTA)*, page 183–190. 68
- Jones, C., et Leach, R. (2008). **Review of low force transfer artefact technologies**. XI, 5, 6
- Julier, S. J., et Uhlmann, J. K. (1997). **New extension of the Kalman filter to nonlinear systems**. Dans Kadar, I., éditeur, *Signal Processing Sensor Fusion, and Target Recognition VI*. SPIE. 72
- Junhui Hu, Kentaro Nakamura, S. U. (1997). **An analysis of a noncontact ultrasonic motor with an ultrasonically levitated rotor**. *Ultrasonics*, 35(6) :459–467. 14
- Kalman, R. E. (1960). **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35. 59, 60
- Keller, H. (1987). **Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form**. *International Journal of Control*, 46(6) :1915–1930. 73
- Kempf, C. J., et Kobayashi, S. (1999). **Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct-drive positioning table**. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(5) :513–526. 63
- Khalil, H. K., et Praly, L. (2013). **High-gain observers in nonlinear feedback control**. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6) :993–1015. 73
- Kim, K., Rew, K., et Kim, S. (2010). **Disturbance observer for estimating higher order disturbances in time series expansion**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(8) :1905–1911. 76
- Kim, M.-s., Choi, J.-H., Kim, J.-H., et Park, Y.-K. (2007). **Si-traceable determination of spring constants of various atomic force microscope cantilevers with a small uncertainty of 1%**. *Measurement Science and Technology*, 18 :3351. 6
- Kim, M.-S., Choi, J.-H., Park, Y.-K., et Kim, J.-H. (2006). **Atomic force microscope cantilever calibration device for quantified force metrology at micro- or nano-scale regime : the nano force calibrator (NFC)**. *Metrologia*, 43(5) :389–395. XI, 6
- Kim, M.-S., Pratt, J. R., Brand, U., et Jones, C. W. (2011). **Report on the first international comparison of small force facilities : a pilot study at the micronewton level**. *Metrologia*, 49(1) :70–81. 3
- Krebs, S., Pfeifer, M., Fugel, S., Weigold, J., et Hohmann, S. (2016). **Interval observer for lpv systems based on time-variant transformations**. Dans *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4090–4096. 71
- Krener, A. J., et Isidori, A. (1983). **Linearization by output injection and nonlinear observers**. *Systems & Control Letters*, 3(1) :47–52. 72
- Kubarych, Z., et Yaniv, S. (2001). **The kilogram and measurements of mass and force**. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 106. 3

- Kumme, R. (1998). **Investigation of the comparison method for the dynamic calibration of force transducers**. *Measurement*, 23(4) :239–245. 52
- Kwangjin Yang, Youngjin Choi, et Wan Kyun Chung (2005). **On the tracking performance improvement of optical disk drive servo systems using error-based disturbance observer**. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 52(1) :270–279. 63
- Li, Q., Li, R., Ji, K., et Dai, W. (2015). **Kalman Filter and Its Application**. *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems, Tianjin, China*. 72
- Li, S., Yang, J., Chen, W., et Chen, X. (2012). **Generalized extended state observer based control for systems with mismatched uncertainties**. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59(12) :4792–4802. 76
- Li Shihua, Yang Jun, C. W.-H., et Xisong, C. (2014). **Disturbance Observer- Based Control Design**. Dans *Disturbance Observer-Based Control*, pages 69–70. CRC Press. 63, 76
- Luenberger, D. G. (1964). **Observing the State of a Linear System**. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2) :74–80. 61
- Luviano-Juárez, A., Cortés-Romero, J., et Sira-Ramírez, H. (2010). **Synchronization of chaotic oscillators by means of generalized proportional integral observers**. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05) :1509–1517. 74, 99, 100
- Lynch, J. P., Partridge, A., Law, K. H., Kenny, T. W., Kiremidjian, A. S., et Carryer, E. (2003). **Design of piezoresistive mems-based accelerometer for integration with wireless sensing unit for structural monitoring**. *Journal of Aerospace Engineering*, 16(3) :108–114. XII, 46
- M. Komori, T. Y. (2000). **Magnetic levitation system with a millimeter-sized cylindrical rotor**. *Mechatronics*, 10(6) :595–607. 14
- Madonski, R., et Herman, P. (2013). **On the usefulness of higher-order disturbance observers in real control scenarios based on perturbation estimation and mitigation**. Dans *9th International Workshop on Robot Motion and Control*. IEEE. 76
- Madoński, R., et Herman, P. (2015). **Survey on methods of increasing the efficiency of extended state disturbance observers**. *ISA Transactions*, 56 :18–27. 76, 88, 99
- Mailleret, L. (2004). **Stabilisation Globale de Systèmes Dynamiques Positifs Mal Connus - Applications en Biologie**. PhD thesis, Université de Nice Sophia - Antipolis. 69
- Marx, B., Ichalal, D., Ragot, J., Maquin, D., et Mammar, S. (2019). **Unknown input observer for LPV systems**. *Automatica*, 100 :67–74. 66
- Mazenc, F., et Bernard, O. (2011). **Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances**. *Automatica*, 47(1) :140–147. 71, 169
- Nesterov, V. (2007). **Facility and methods for the measurement of micro and nano forces in the range below 10^{-5} n with a resolution of 10^{-12} n (development concept)**. *Measurement Science and Technology*, 18 :360. 7

- Nesterov, V., Belai, O., Nies, D., Bütefisch, S., Mueller, M., Ahbe, T., Naparty, D., Popadic, R., et Wolff, H. (2016). **Si-traceable determination of the spring constant of a soft cantilever using the nanonewton force facility based on electrostatic methods.** *Metrologia*, 53 :1031–1044. XI, 7
- Ohishi, K., Nakao, M., Ohnishi, K., et Miyachi, K. (1987). **Microprocessor-controlled dc motor for load-insensitive position servo system.** *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IE-34(1) :44–49. 63
- Oster, S. (2012). **Etude et réalisation d'un prototype avancé de plateforme de mesure de micro et nanoforce par lévitation diamagnétique.** <http://www.theses.fr/fr/177393270>. XI, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 27, 197
- O'Reilly, J. (1983). **Observers for linear systems.** *Mathematics in science and engineering*, 170. 59, 61
- Perez, M., et Shkel, A. (2006). **Performance trade-offs of an interferometric micro-g resolution accelerometer.** pages 1357–1360. 42
- Phelps, A. R. (1991). **On constructing nonlinear observers.** *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3) :516–534. 72
- Piat, E., Abadie, J., et Oster, S. (2012). **Nanoforce estimation based on Kalman filtering and applied to a force sensor using diamagnetic levitation.** *Sensors and Actuators A : Physical*, 179 :223–236. 14
- Pigot, C. (2008). **La lévitation Diamagnétique à l'Echelle Micrométrique : Applications et Possibilités.** Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG. 40, 49
- Pinot, P., et Silvestri, Z. (2019). **Optical power meter using radiation pressure measurement.** *Measurement*, 131 :109 – 119. XI, 7, 8
- Plaza, J. A., Llobera, A., Dominguez, C., Esteve, J., Salinas, I., Garcia, J., et Berganzo, J. (2004). **Besoi-based integrated optical silicon accelerometer.** *Journal of Microelectromechanical Systems*, 13(2) :355–364. 43
- Plestan, F., et Glumineau, A. (1997). **Linearization by generalized input-output injection.** *Systems and Control Letters*, 31(2) :115–128. 72
- Post, R. F., et Ryutov, D. D. (2000). **The inductrack : a simpler approach to magnetic levitation.** *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 10(1) :901–904. 14
- Raghavan, S., et Hedrick, J. K. (1994). **Observer design for a class of nonlinear systems.** *International Journal of Control*, 59(2) :515–528. 73
- Raissi, T., Efimov, D., et Zolghadri, A. (2012). **Interval State Estimation for a Class of Nonlinear Systems.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :260–265. 71, 169, 170
- Rajamani, R. (1998). **Observers for Lipschitz nonlinear systems.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401. 73

- Rao, K., X., W., M., Z. S. Z., Hu, C. Liu, H., et Tu, L. (2019). **A mems micro-g capacitive accelerometer based on through silicon wafer etching process.** *Micromachines*, 380(10). 43
- Raïssi, T., Videau, G., et Zolghadri, A. (2010). **Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems.** *Automatica*, 46(3) :518–527. 71
- S., L., et Cho, D. (2004). **Development of a micro-opto-mechanical accelerometer based on intensity modulation.** *Microsystem Technologies*, (10) :147–154. XII, 43, 44
- Schröpfer, G., Elflein, W., [de Labachellerie], M., Porte, H., et Ballandras, S. (1998). **Lateral optical accelerometer micromachined in (100) silicon with remote readout based on coherence modulation.** *Sensors and Actuators A : Physical*, 68(1) :344 – 349. XII, 43, 44
- Shafai, B., Pi, C. T., et Nork, S. (2002). **Simultaneous Disturbance Attenuation and Fault Detection using Proportional Integral Observers.** *Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, USA*, 2 :1647–1649. 64
- Shaw, G. A. (2018). **Current state of the art in small mass and force metrology within the international system of units.** *Measurement Science and Technology*, 29(7) :072001. 4
- Shaw, G. A., Stirling, J., Kramar, J. A., Moses, A., Abbott, P., Steiner, R., Koffman, A., Pratt, J. R., et Kubarych, Z. J. (2016). **Milligram mass metrology using an electrostatic force balance.** *Metrologia*, 53(5) :A86–A94. XI, 4
- Silverman, L. M., et Meadows, H. E. (1967). **Controllability and observability in time-variable linear systems.** *SIAM Journal on Control*, 5 :64–73. 65
- Simon, I. (1969). **Diamagnetic accelerometer.** *United States Patent Office*, (3465598). 49
- Sira-Ramírez, H., Luviano-Juárez, A., Ramírez-Neria, M., et Zurita-Bustamante, E. W. (2017). **Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems : A flatness based approach.** Butterworth-Heinemann. 74, 78, 88, 99
- Smith, H. L. (1995). **Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems.** Dans *Mathematical Surveys And Monographs*, volume 41. American Mathematical Society. 68, 69
- Taguchi, K., Atsuta, K., Nakata, T., et Ikeda, M. (2000). **Levitation of a microscopic object using plural optical fibers.** *Optics Communications*, 176 :43–47. 14
- Talole, S. E., Kolhe, J. P., et Phadke, S. B. (2010). **Extended-state-observer-based control of flexible-joint system with experimental validation.** *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(4) :1411–1419. 76
- Thau, F. E. (1973). **Observing the state of nonlinear dynamic systems.** *International Journal of Control*, 17(3) :471–479. 73
- Theilliol, D., et Aberkane, S. (2011). **Design of LPV observers with unmeasurable gain scheduling variable under sensor faults.** *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy*. 67

- Tian, Y. (2010). **A contribution to the observation and estimation of linear systems.** Theses, Ecole Centrale de Lille. XII, 58
- Trumpf, J. (2007). **Observers for linear time-varying systems.** *Linear Algebra and its Applications*, 425 :303–312. 66
- Weinmann, A. (1991). **Uncertain Models and Robust Control.** Springer-Verlag Wien. 64
- Yang, F., et Wilde, R. W. (1988). **Observers for linear systems with unknown inputs.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7) :677–681. 62
- Yang, J., Li, S., et Chen, W.-H. (2010). **Autopilot Design of Bank-to-Turn Missiles Using State-Space Disturbance Observers.** Dans *UKACC International Conference on CONTROL 2010*. Institution of Engineering and Technology. 63
- Yang, X., et Huang, Y. (2009). **Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties.** Dans *2009 American Control Conference*. IEEE. 206
- Yazdi, N., Ayazi, F., et Najafi, K. (1998). **Micromachined inertial sensors.** *Proceedings of the IEEE*, 86(8) :1640–1659. 43
- Zeitz, M. (1987). **The extended luenberger observer for nonlinear systems.** *Systems & Control Letters*, 9(2) :149 – 156. 72
- Zemouche, A. (2007). **On the state observation for nonlinear dynamical systems.** Theses, Université Louis Pasteur - Strasbourg I. 71, 72
- Zheng, G., Efimov, D., et Perruquetti, W. (2016). **Design of interval observer for a class of uncertain unobservable nonlinear systems.** *Automatica*, 63 :167 – 174. 71
- Zheng, Q., Gaol, L. Q., et Gao, Z. (2007). **On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics.** Dans *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. 76, 91, 121
- Zhiqiang Gao, Yi Huang, et Jingqing Han (2001). **An alternative paradigm for control system design.** Dans *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*, volume 5, pages 4578–4585 vol.5. 74, 78
- Zhou, M., Rodrigues, M., Shen, Y., et Theilliol, D. (2018). **$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection observer design for a polytopic LPV system using the relative degree.** *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 28 :83–95. 67

Titre : Contribution à l'observation robuste des systèmes dynamiques incertains - Application à la métrologie des faibles forces

Mots clefs: Observateurs, Traçabilité, Métrologie, Ressorts magnétiques, Commande

Résumé :

La métrologie des faibles forces est devenue un domaine de recherche stratégique pour plusieurs instituts de métrologie à travers le monde. En effet, l'absence d'étalon de force dans la gamme inférieure à $10 \mu\text{N}$ remet en question les mesures de force à cette échelle. L'objectif de cette thèse est de proposer une solution pour garantir la traçabilité des faibles forces dans la gamme inférieure à $100 \mu\text{N}$. Cette problématique a été adressée en combinant les outils de l'automatique aux outils classiques de la métrologie. Un générateur de forces, basé sur la technologie des ressorts magnétiques auto-stabilisés et sur le principe des machines à poids mort, a ainsi été développé. Il a été

conçu et réalisé pour garantir l'application d'une force verticale de manière traçable au Système International d'unités. Une étude des perturbations qui dégradent la mesure a également été menée. Parmi ces perturbations, les vibrations sismiques génèrent des forces d'accélération qui agissent de manière dynamique et inconnue sur ce générateur. Afin d'en tenir compte, un accéléromètre a également été conçu et réalisé. Un nouvel observateur à entrée inconnue, appelé GeLESO (Generalized Linear Extended State Observer), a été développé pour estimer ces accélérations sismiques tandis que l'incertitude de mesure associée a été reconstruite par un nouvel observateur par intervalles appelé *GeLESO par intervalles*.

Title : Contribution to the robust observation of uncertain dynamical systems - Application to small force metrology

Keywords : Observers, Traceability, Metrology, Magnet springs, Control

Abstract :

Small force metrology has become a strategic research area for several metrology institutes around the world. Indeed, the absence of a force standard in the range below $10 \mu\text{N}$ makes the force measurements at this scale questionable. The objective of this thesis is to propose a solution to guarantee the traceability of low forces in the range below $100 \mu\text{N}$. This issue was addressed by combining the tools of control theory with the ones of conventional metrology. A generator of traceable forces, based on auto-stabilized magnetic springs and the concept of dead weight machines, has then been developed. This generator has been designed

and realized to guarantee the application of a vertical force, traceable to the International System of units. A study of the disturbances that degrade the measurement was also made. Among these disturbances, seismic vibrations generate acceleration forces that act in a dynamical and unknown way on this generator. In order to take them into account, an accelerometer was also designed and built. A new unknown input observer, called GeLESO (Generic Linear Extended State Observer), was developed to estimate these seismic accelerations while the associated measurement uncertainty was computed by an new interval observer named *interval GeLESO*.