Caractères de groupes algébriques sur Q et mesures invariantes sur les solénoïdes

Camille Francini

▶ **To cite this version:**

Camille Francini. Caractères de groupes algébriques sur Q et mesures invariantes sur les solénoïdes. Topologie algébrique [math.AT]. Université de Rennes, 2020. Français. NNT : 2020REN1S078 . tel-03224450

HAL Id: tel-03224450

https://theses.hal.science/tel-03224450

Submitted on 11 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par
Camille FRANCINI

Caractères de groupes algébriques sur Q et mesures invariantes sur les solénoïdes

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 6 juillet 2021
Unité de recherche : IRMAR

Rapporteurs avant soutenance :

Cyril Houdayer	Professeur à Université Paris Orsay
Georges Skandalis	Professeur à Université Paris Diderot

Composition du Jury :

Examinateurs :	Claire Anantharaman	Professeure émérite à Université d'Orléans
	Bachir Bekka	Professeur à Université de Rennes 1
	Moulay Benameur	Professeur à Université de Montpellier
	Dimitri Petritis	Professeur à Université de Rennes 1
	Georges Skandalis	Professeur à Université Paris Diderot
Dir. de thèse :	Bachir Bekka	Professeur à Université de Rennes 1

Contents

Chapter 1

Introduction

1.1 Présentation du cadre du mémoire

1.1.1 Char(G) comme espace dual de G

Etant donné un groupe localement compact G, un problème fondamental est l'étude de ses représentations unitaires. Une première étape dans cette étude est la détermination de son espace dual $\widehat{G}$ c'est-à-dire l'espace des classes d'équivalence de ses représentations irréductibles unitaires. Ce programme a été réalisé (du moins de manière partielle) pour de nombreuses classes de groupes de Lie (groupes semi-simples, nilpotents,etc...). Cependant, pour les groupes discrets G il y a une obstruction de principe à la détermination de $\widehat{G}$. En effet, si G n'est pas virtuellement abélien alors $\widehat{G}$ n'est pas un espace borélien standard (pour une structure borélienne natuelle sur $\widehat{G}$). Ceci signifie que $\widehat{G}$ n'est pas classifiable. Dans l'optique de remplacer $\widehat{G}$ par un autre espace dual, E. Thoma ([Tho64c]) a initié l'étude de l'ensemble Char(G) des caractères d'un groupe discret

Définition 1.1.1 (Traces, Caractères). (i) Une fonction $\varphi : G \to \mathbf{C}$ est appelée **trace** sur un groupe discret G si

- φ est définie positive, c'est-à-dire, pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ et tout $g_1, ..., g_n \in G$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0,$$

- φ est centrale, c'est-à-dire, $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g)$ pour tout $g, h \in G$, et
- φ est normalisée, c'est-à-dire, $\varphi(e) = 1$.

(ii) L'ensemble $\mathrm{Tr}(G)$ des traces sur G est un ensemble compact convexe de la boule unité de $\ell^\infty(G)$ muni de la topologie *-faible. Soit $\mathrm{Char}(G)$ l'ensemble des points extrémaux dans $\mathrm{Tr}(G)$.

Ainsi, par la théorie de Choquet, tout élément $\varphi \in \mathrm{Tr}(G)$ se décompose comme une intégrale sur l'espace $\mathrm{Char}(G)$ des caractères sur G. On pourra alors regarder $\mathrm{Char}(G)$ comme un espace dual de G que l'on appellera dual de Thoma de G. Pour un groupe abélien A, le dual de Thoma $\mathrm{Char}(A)$ coïncide avec le groupe dual $\widehat{A}$ de A. Pour un groupe fini G, le dual de Thoma $\mathrm{Char}(G)$ est l'ensemble des traces normalisées des représentations linéaires complexes irréductibles ; ainsi, il est bien connu, $\mathrm{Char}(G)$ détermine complètement $\widehat{G}$.

1.1.2 Liens entre caractères et algèbres de von Neumann

On rappelle qu'à toute fonction de type positif normalisée on peut associer un triplet GNS $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ constitué d'une représentation cyclique unitaire π_φ de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$ et d'un vecteur cyclique unitaire ξ_φ tel que

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle, \text{ pour tout } g \in G.$$

Soit M une algèbre de von Neumann finie munie d'une trace τ fidèle et normale, et soit $\pi : G \to U(M)$ un homomorphisme tel que $\pi(G)'' = M$. On remarque que, si on pose $\varphi = \tau \circ \pi \in Tr(G)$, alors avec la notation précédente, l'application $\pi_\varphi(g) \mapsto \pi(g)$ s'étend en un isomorphisme $M_\varphi \to M$ d'algèbres de von Neumann.

Un homomorphisme $\pi : G \to U(M)$ pour un facteur fini M tel que $\pi(G)'' = M$ sera appelé une représentation factorielle finie de G. On dit que deux telles représentations $\pi_1 : G \to U(M_1)$ et $\pi_2 : G \to U(M_2)$ sont quasi-équivalentes s'il existe un isomorphisme $\Phi : M_1 \to M_2$ tel que $\Phi(\pi_1(g)) = \pi_2(g)$ pour tout $g \in G$. Alors l'application $\varphi \mapsto \pi_\varphi$ induit une bijection entre $\mathrm{Char}(G)$ et l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles finies de G.

1.1.3 Lien entre caractère et sous-groupes distingués aléatoires

Soit G un groupe discret. On définit :

$$Sub(G) = \{H \subset G : H \text{ est un sous-groupe de } G\}$$

l'ensemble des sous-groupes de G. En identifiant un sous-groupe avec sa fonction indicatrice, on peut voir $Sub(G)$ comme partie de l'espace produit $\{0,1\}^G$, qui est compact pour la topologie produit. La conjugaison donne une action de G sur $Sub(G)$ par homéomorphisme.

Définition 1.1.2 (IRS)**.** Un sous-groupe distingué aléatoire (ou IRS pour invariant random subgroup) de G est une mesure de probabilité G-invariante sur la tribu des boréliens de $Sub(G)$.

Exemple 1. (i) Soit N un sous-groupe distingué de G. La mesure de Dirac δ_N est une IRS.

(ii) Soit $G \curvearrowright (X, \mu)$ une action préservant la mesure de G sur un espace probabilisé (X, μ). Soit l'application

$$\Phi : X \to Sub(G),\ x \mapsto G_x$$

où G_x est le stabilisateur de $x \in X$ dans G. La mesure de probabilité $\Phi_*(\mu)$ sur $Sub(G)$ est G-invariante et défini donc une IRS de G.

Un lien entre IRS et trace sur G a été montré une première fois dans [VK81]

Proposition 1.1.3. *[VK81] Soit μ une IRS sur G. Soit $\varphi_\mu : G \to \mathbf{R}$ définie par*

$$\varphi_\mu(g) = \mu\left(\{H \in Sub(G) | g \in H\}\right).$$

Alors $\varphi_\mu \in \mathrm{Tr}(G)$.

Proof. Comme μ est G-invariante, il est clair que φ_μ est G-invariante. Il s'agit donc de montrer que φ_μ est de type positif. Pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi_\mu(g) = \mu\left(\{H \in Sub(G) | g \in H\}\right) = \int_{Sub(G)} 1_H(g) d\mu(H).$$

Ceci montre que φ_μ est limite ponctuelle de combinaisons convexes de fonctions indicatrices de sous-groupes de G. Comme une telle fonction 1_H est de type positif, φ_μ est de type positif. $\square$

1.2 Résultats principaux du mémoire

La description du dual de Thoma a déjà été étudiée dans la littérature pour certains groupes. Nous citerons ici les résultats de E.Thoma dans le cas du groupe symétrique infini (voir [Tho64a]), de Kirillov dans le cas du groupe général linéaire (voir [Kir65]) ou encore de B. Bekka dans le cas des groupes $SL_n(\mathbf{Z})$ pour $n \geq 3$ (voir [Bek07]). L'objet de ce mémoire est d'étudier $\mathrm{Char}(G)$ pour G un groupe algébrique général sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels (ou plus généralement sur un corps de nombres).

1.2.1 Caractères de groupes unipotents.

Soit U_n le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes $n \times n$ sur $\mathbf{Q}$ pour $n \geq 1$. Alors U_n est le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ et son algèbre de Lie est l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_n$ des matrices triangulaires supérieures strictes. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{u}_n \to U_n$ est une bijection, et, par la formule de Campbell-Hausdorff, il existe une application polynomiale $P : \mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n \to \mathfrak{u}_n$ telle que $\exp(X)\exp(Y) = \exp(P(X,Y))$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{u}_n$. On note $\log : U_n \to \mathfrak{u}_n$ l'application inverse de exp.

Soit $\mathfrak{u}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{Q}$. Alors par les théorèmes de Ado et Engel, $\mathfrak{u}$ peut être vue comme une sous-algèbre de $\mathfrak{u}_n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors $\exp(\mathfrak{u})$ est un sous-groupe algébrique de U_n.

Soit U le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ unipotent, c'est-à-dire, un sous-groupe algébrique de U_n pour un certain $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{u} = \log(U)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{u}_n$ et $\exp : \mathfrak{u} \to U$ est une bijection (pour cela voir [Mil17, Chap.14]).

Nous étudierons dans un premier temps le cas des groupes unipotents à l'aide des techniques utilisées dans [CPJ94]. Soit donc U un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Soit $\widehat{\mathfrak{u}}$ le dual de Pontrjagin de $\mathfrak{u}$, c'est-à-dire le groupe des caractère unitaires du groupe additif $\mathfrak{u}$. Pour tout $u \in U$, l'automorphisme de U donné par conjugaison avec u induit un automorphisme $\mathrm{Ad}(u)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ donné par la propriété

$$\exp(\mathrm{Ad}(u)(X)) = u\exp(X)u^{-1} \text{ pour tout } X \in \mathfrak{u}.$$

Pour tout $u \in U$, l'automorphisme $\mathrm{Ad}(u)$ induit un automorphisme $\mathrm{Ad}^*(u)$ de $\widehat{\mathfrak{u}}$ donné par la propriété

$$\mathrm{Ad}^*(u)(\lambda)(X) = \lambda(\mathrm{Ad}(u^{-1})(X)),\ \forall X \in \mathfrak{u}, \forall \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$$

A tout $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ on associe le sous-ensemble $\mathfrak{p}_\lambda$ des éléments $X \in \mathfrak{u}$ tels que

$$\lambda(\mathrm{Ad}(x)(tX)) = \lambda(tX) \text{ pour tout } x \in U, t \in \mathbf{Q}$$

Le théorème suivant donne une description complète de $\mathrm{Char}(U)$:

Théorème 1.2.1. *[Description des caractères de groupes unipotents sur* $\mathbf{Q}$*]*
Soit U un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. Soit $\varphi_\lambda : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda(X) & \textit{si } x = \exp X, \ \textit{avec } X \in \mathfrak{p}_\lambda \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

- $\mathrm{Char}(U) = \{\varphi_\lambda | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}\}$
- *Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$, alors $\varphi_{\lambda_1} = \varphi_{\lambda_2}$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Ad}^*(U).\lambda_1} = \overline{\mathrm{Ad}^*(U).\lambda_2}$. On dira alors que λ_1 et λ_2 ont la même quasi-orbite sous l'action co-adjointe* Ad^*.

La description (i) de $\mathrm{Char}(U)$ donnée au théorème 1.2.1 apparait également dans [CM84]. Notre preuve a été trouvée de manière indépendante. Le point (ii) est nouveau et permet une description de $\mathrm{Char}(U)$ en terme de quasi-orbites à la Kirillov.

L'aspect novateur de notre travail a été de l'utiliser pour relier $\mathrm{Char}(U)$ à des mesures de probabilité sur le groupe dual $\widehat{\mathfrak{u}}$ de $(\mathfrak{u}, +)$.

Dans la suite on note :

- $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur la tribu des boréliens de $\widehat{\mathfrak{u}}$,
- pour un groupe G agissant sur $\widehat{\mathfrak{u}}$, $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G$ le sous ensemble de $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})$ des mesures de probabilités sur $\widehat{\mathfrak{u}}$ invariantes par l'action induite de G,
- $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G_{erg}$ les mesures dans $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G$ qui sont ergodiques.

On rappelle que la transformée de Fourier-Stieltjes $\mathcal{F}$ est une bijection entre $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})$ et l'ensemble convexe des fonctions de type positif normalisées sur $\mathfrak{u}$.

Alors on a :

Théorème 1.2.2. *Soit U un groupe unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Alors l'application*

$$\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})_{erg}^{\mathrm{Ad}^*(U)} \to \mathrm{Char}(U),\ \ \mu \mapsto \mathcal{F}(\mu) \circ \log$$

est une bijection où $\mathcal{F}(\mu)$ est la transformée de Fourier-Stieltjes de μ.

Ceci nous permettra d'aborder le résultat principal de ce mémoire qui portera sur les groupes algébriques généraux.

1.2.2 Groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$

Soit G un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ général. Soit $G = LU$ une décomposition de Lévi de G, où U, le radical unipotent de G, est un groupe algébrique unipotent et L est un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{Q}$.

A tout $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ on associe les sous-ensembles $\mathfrak{k}_\lambda$,$\mathfrak{p}_\lambda$ de $\mathfrak{u}$ et L_λ de L suivants :

- $\mathfrak{k}_\lambda$ est l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{u}$ tels que
$$\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = 1 \text{ pour tout } g \in G, t \in \mathbf{Q}$$
- $\mathfrak{p}_\lambda$ est l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{u}$ tels que
$$\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \lambda(tX) \text{ pour tout } g \in G, t \in \mathbf{Q}$$
- L_λ est l'ensemble des $g \in L$ tels que $\mathrm{Ad}(g)(X) \in X + \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $X \in \mathfrak{u}$.

Voici le résultat principal du mémoire :

Théorème 1.2.3. *[Description des caractères d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$]*

Soit G le groupe des $\mathbf{Q}$ points d'un groupe linéaire algébrique connexe sur $\mathbf{Q}$. Supposons que G est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soit $G = LU$ une décomposition de Lévi de G. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\varphi \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$, on définit $\Phi_{(\lambda,\varphi)} : G \to \mathbf{C}$ par :

$$\Phi_{(\lambda,\varphi)} = \begin{cases} \varphi(g_1)\chi_\lambda(u) & \textit{si } g = g_1 u \textit{ avec } g_1 \in L_\lambda, u \in P_\lambda \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{Char}(G) = \{\Phi_{(\lambda,\varphi)} | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}, \varphi \in \mathrm{Char}(L_\lambda)\}$

On remarquera que les groupes L_λ apparaissant dans le théorème 1.2.3 sont semi-simples. Ainsi notre résultat ramène la détermination de $\mathrm{Char}(G)$ pour un groupe algébrique général engendré par des unipotents au cas où G est semi-simple. Le résultat suivant permet de se ramener au cas simple :

Théorème 1.2.4. *Soient G_1, G_2 des groupes discrets. Alors*

$$Char(G_1 \times G_2) = \{\varphi_1 \otimes \varphi_2 | \varphi_1 \in \mathrm{Char}(G_1), \varphi_2 \in \mathrm{Char}(G_2)\}.$$

Pour un groupe algébrique simple G sur un corps infini k il a été démontré que $\mathrm{Char}(G) = \mathbf{1}_G \cup \{\widetilde{\chi} | \chi \in \widehat{Z}\}$ où Z est le centre (fini) de G dans les cas suivants :

- $G = SL_n(k), n \geq 3$, ou $GL_n(k), n \geq 2$ (Kirillov [Kir65]),
- $G = SL_2(k)$ (Peterson-Thom [PT16]),
- Les groupes dits de Chevalley (Ovcinnikov [Ovc71]).

Tous ces résultats ont été généralisés dans [Bek19] au cas où G est le groupe des k-points d'un groupe algébrique simple sur un corps infini sous l'hypothèse que G est engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre.

Exemple 2. Soit le groupe $G = SL_2(\mathbf{Q}) \ltimes H_3(\mathbf{Q})$, où $H_3(\mathbf{Q})$ est le groupe de Heisenberg de dimension 3 sur $\mathbf{Q}$ et défini par $H_3(\mathbf{Q}) = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbf{Q}\}$ avec pour loi :

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Et l'action de $SL_2(\mathbf{Q})$ sur $H_3(\mathbf{Q})$ est donnée par

$$g.(x, y, z) = ((g(x, y), z) \text{ pour tous } g \in SL_2(\mathbf{Q}), (x, y, z) \in H_3(\mathbf{Q})$$

où $(x, y) \mapsto g(x, y)$ est l'action linéaire standard de $SL_2(\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{Q}^2$.

Alors $\varphi \in \mathrm{Char}(G)$ si et seulement si φ est de l'une des formes suivantes :

(i) φ est le relevé à G d'un caractère de $SL_2(\mathbf{Q}) = G/H_3(\mathbf{Q})$,

(ii) $\varphi = \mathbf{1}_Z$ où Z est l'ensemble des éléments $(0, 0, z) \in H_3(\mathbf{Q})$ du centre de G.

(iii) $\varphi : g \mapsto \begin{cases} \psi(g) \text{ si } g \in Z \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ où $\psi \in \widehat{Z}$.

Or par [PT16, Theorem 2.4] $\mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q})) = \{\mathbf{1}\} \cup \{\widetilde{\psi} | \psi \in \widehat{C}\}$ où $C = \{Id, -Id\}$ est le centre de $SL_2(\mathbf{Q})$.

Ainsi finalement

$$\mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q})) = \{\mathbf{1}_Z\} \cup \{\widetilde{\psi} | \psi \in Z\} \cup \{\mathbf{1}\} \cup \{\widetilde{\psi} \circ p | \psi \in \widehat{C}\}$$

Exemple 3. Soit L le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique semi-simple sur $\mathbf{Q}$ engendré par ses sous-groupes unipotents à 1-paramètre. Soit $\pi : L \to GL(V)$ une représentation irréductible et fidèle de L dans un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ de dimension finie. Soit le groupe $G = L \ltimes V$. Alors

$$\mathrm{Char}(G) = \{\delta_e\} \cup \mathrm{Char}(G)$$

Ainsi, soit n pair et soit l'espace vectoriel $V_{n+1} = \mathbf{Q}[X, Y]_n$ des polynômes homogènes de degré n. Et soit l'action de $SL_2(\mathbf{Q}) \curvearrowright V_{n+1}$ par

$$g.P(X, Y) = P(aX + bY, cX + dY), \text{ pour tous } g \in SL_2(\mathbf{Q}), P \in V_{n+1}$$

où a, b, c, d sont tels que $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q}) \ltimes V_{n+1}) = \{\delta_e\} \cup \mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q})) = \{\delta_e\} \cup \{\mathbf{1}\} \cup \{\widetilde{\psi} \circ p | \psi \in \widehat{C}\}$. Où $C = \{Id, -Id\}$ est le centre de $SL_2(\mathbf{Q})$.

1.2.3 Sur la preuve du Théorème 1.2.3

La démonstration du théorème se fera alors en 4 étapes.

Etape 1 : On montrera dans un premier temps la proposition suivante

Proposition 1.2.5. *Soit $\varphi : G \to \mathbf{C}$. si $\varphi \in \mathrm{Char}(G)$ alors $\varphi_{|U} \in \mathrm{Char}(U, G)$ c'est-à-dire que $\varphi_{|U}$ est extrémale parmi les traces sur U invariantes par G.*

Etape 2 : Puis, à l'aide du travail effectué dans la partie sur les caractères de groupes nilpotents nous démontrerons le Théorème 1.2.2 et nous en déduirons le corollaire suivant

Corollaire 1.2.6. *Il existe une bijection entre $\mathrm{Char}(U, G)$ et $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G_{erg}$.*

Nous sommes ainsi conduits à l'étude de mesures de probabilité sur $\widehat{\mathfrak{u}}$ G-invariantes. La proposition suivante nous ramènera à l'étude de probabilités invariantes par l'action d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ engendré par des unipotents sur les solénoïdes adéliques :

Proposition 1.2.7. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ de dimension finie. Le choix d'une base de E définit un isomorphisme de groupe topologiques $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d \to \widehat{E}$, qui est équivariant pour l'action de $GL_d(\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ déduite de l'action $a \mapsto {g^{-1}}^t a$ sur $\mathbf{A}^d$ (pour $g \in GL_d(\mathbf{Q}), a \in \mathbf{A}^d$) et l'action duale de $GL(E)$ sur $\widehat{E}$. Cet isomorphisme induit une bijection*

$$\mathrm{Prob}(\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d)^{G'}_{erg} \to \mathrm{Prob}(\widehat{E})^{G}_{erg},$$

pour tout sous groupe G de $GL(E)$, où G' est le sous-groupe de $GL_d(\mathbf{Q})$ correspondant à G.

Etape 3 : Nous utiliserons le théorème de Ratner sur la classification de mesures invariantes sur des espaces homogènes S-adiques pour démontrer le résultat-clé suivant.

Théorème 1.2.8. *Soit $G(\mathbf{Q})$ un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotent. Soit μ une mesure de probabilité $G(\mathbf{Q})$-invariante ergodique sur les sous-ensembles boréliens de $X = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$. Il existe un couple (a, V) composé d'un point $a \in \mathbf{A}^d$ et d'un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ tel que*

$$\mu = mu_{x+Y},$$

où μ_{x+Y} est l'image de la mesure de Haar normalisée μ_Y par l'application $X \to X$ donnée par la translation par x avec $x = \varphi(a)$ et $Y = \varphi(V(\mathbf{Q}))$ et où $\varphi : \mathbf{A}^d \to X$ la projection canonique. De plus a peut être choisi tel que l'ensemble $\{g(a) - a | g \in G(\mathbf{A})\}$ est dense dans $V(\mathbf{A})$.

Etape 4 : Le Théorème 1.2.8, en combinaison avec la Proposition 1.2.7 et le Corollaire 1.2.6, nous permettra de décrire $\mathrm{Char}(U, G)$. A partir de celle-ci et à l'aide d'arguments supplémentaires, nous en déduirons celle de $\mathrm{Char}(G)$

1.2.4 Trou spectral pour ses sous-groupes de transformations affines de solénoïdes

Les solénoïdes ont fait l'objet d'une étude antérieure indépendante concernant un problème de propriété de trou spectral pour l'action de groupes agissant sur ces solénoïdes. Rappelons qu'un solénoïde est un groupe abélien, compact, connexe X et dont le dual de Pontrjagin $\widehat{X}$ est un groupe (discret) de type fini. On note $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes continus de X et $\mathrm{Aff}(X) = \mathrm{Aut}(X) \ltimes X$ le groupe des transformations affines continues sur X. Il s'agira, sur un solénoïde X muni de la mesure de Haar μ, d'étudier à quelle condition l'action d'un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aff}(X)$ sur X possède la propriété de trou spectral. Le cas des tores ayant déjà été traité par [BG15] nous généraliserons dans une première partie ce résultat aux cas des solénoïdes à l'aide du théorème suivant qui donne une caractérisation complète de ces sous-groupes

Théorème 1.2.9. *Soit X un solénoïde muni de la mesure de Haar normalisée μ et Γ un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aff}(X)$. Soit $p_a : \mathrm{Aff}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ la projection canonique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral,*

(ii) *l'action $p_a(\Gamma) \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral,*

(iii) *il existe un sous solénoïde propre $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est un groupe moyennable,*

(iv) *il existe un sous-solénoïde propre $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est un groupe virtuellement résoluble.*

L'idée de la preuve sera d'étudier les mesures invariantes sur des produits d'espaces vectoriels en différents corps et de mesures invariantes sur les espaces projectifs associés.

Chapter 2

Préliminaires

2.1 Corps p-adiques et adèles

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques pour $p \in \mathcal{P}$, et soit $\mathbf{Z}_p$ le sous-anneau des entiers p-adiques. On rappelle que $\mathbf{Q}_p$ est un corps localement compact et que $\mathbf{Z}_p$ est un sous-anneau compact et ouvert de $\mathbf{Q}_p$. On notera $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$.

Soit une partie finie S de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ contenant ∞ ; on pose $\mathbf{Q}_S = \prod_{p \in S} \mathbf{Q}_p$.

Soit $\mathbf{A} = \prod_p{}' (\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p)$ l'anneau des adèles, on rappelle que $\mathbf{A}$ est le produit restreint des $\mathbf{Q}_p$ relativement aux $\mathbf{Z}_p$; c'est-à-dire,

$$\mathbf{A} = \cup_S (\mathbf{Q}_S \times \prod_{p \notin S} \mathbf{Z}_p),$$

où S parcourt l'ensemble des parties finies de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ contenant ∞.

On munit chaque sous-groupe $(\mathbf{Q}_S \times \prod_{p \notin S} \mathbf{Z}_p)$ de la topologie produit. La topologie de $\mathbf{A}$ est définie par : $U \subset \mathbf{A}$ est ouvert si et seulement si son intersection avec $(\mathbf{Q}_S \times \prod_{p \notin S} \mathbf{Z}_p)$ est ouvert pour chaque S. Avec cette topologie, $\mathbf{A}$ est un anneau localement compact.

Soit un entier $d \geq 1$, on a $\mathbf{Q}_S^d = \prod_{p \in S} \mathbf{Q}_p^d$ et $\mathbf{A}^d = \prod_p{}' (\mathbf{Q}_p^d, \mathbf{Z}_p^d)$.

2.2 Groupe dual de $\mathbf{Q}_p$ et de $\mathbf{A}$.

On rappelle que l'on peut identifier $\widehat{\mathbf{R}}$ avec $\mathbf{R}$ via l'application $\mathbf{R} \to \widehat{\mathbf{R}}$, $y \mapsto e_y$ donnée par $e_y(x) = \exp(2\pi i x y)$. On rappelle également que l'on peut identifier $\widehat{\mathbf{Q}_p}$ avec $\mathbf{Q}_p$ via l'application $\mathbf{Q}_p \to \widehat{\mathbf{Q}_p}$, $y \mapsto \chi_y$ donnée par $\chi_y(x) = \exp(2\pi i\{xy\})$, où $\{x\} = \sum_{j=m}^{-1} a_j p^j$ est la partie fractionnaire d'un nombre p-adique $x = \sum_{j=m}^{\infty} a_j p^j$ pour des entiers $m \in \mathbf{Z}$ et $a_j \in \{0, ..., p-1\}$ (voir [BdlHV08, §D.4]).

Pour une partie finie S de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ contenant ∞, on peut donc identifier $\widehat{\mathbf{Q}_S}$ avec $\mathbf{Q}_S$, via l'application

$$\mathbf{Q}_S \to \widehat{\mathbf{Q}_S}, \qquad y = (y_p)_{p \in S} \mapsto e_y,$$

définie par

$$e_y(x) = e_{y_\infty}(x_\infty) \prod_{p \in S, p \neq \infty} \chi_{y_p}(x_p)$$

pour $x = (x_p)_{p \in S} \in \mathbf{Q}_S$. Comme χ_{y_p} est trivial sur $\mathbf{Z}_p$, pour $y_p \in \mathbf{Z}_p$, on obtient une identification de $\widehat{\mathbf{A}}$ avec $\mathbf{A}$ par l'isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}, \qquad y \mapsto e_y,$$

défini par

$$e_y(x) = e_{y_\infty}(x_\infty) \prod_{p \in \mathcal{P}} \chi_{y_p}(x_p)$$

pour $x = (x_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathbf{A}$.

Pour tout entier $d \geq 1$, on obtient ainsi des identifications

$$\widehat{\mathbf{Q}_S^d} \cong \mathbf{Q}_S^d \text{ et } \widehat{\mathbf{A}^d} \cong \mathbf{A}^d.$$

2.3 Solénoïdes

On rappelle qu'un solénoïde est un groupe abélien, compact, connexe X, dont le dual de Pontrjagin $\widehat{X}$ est un groupe (discret) de type fini. De manière équivalente : un solénoïde est un groupe abélien, compact, connexe de dimension topologique finie (voir [HR63, Theorem 23.18]).

Les solénoïdes sont caractérisés en terme de leur groupe dual de Pontrjagin comme suit. On rappelle que le rang (aussi appelé rang de Prüfer) d'un groupe abélien A est le cardinal d'un sous-ensemble linéairement indépendant maximal de A. Un groupe abélien compact X est un solénoïde si et seulement si $\widehat{X}$ est un groupe abélien de rang fini et sans torsion ; quand c'est le cas, la dimension topologique de X coïncide avec le rang de $\widehat{X}$ (voir [HR63, Théorème (23.18)]).

Soit X un solénoïde. Soit $d \geq 1$ le rang de $\widehat{X}$. Comme $\widehat{X}$ est sans torsion,

$$V_{\mathbf{Q}} := \widehat{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension d et on peut voir $\widehat{X}$ comme un sous-groupe de $V_{\mathbf{Q}}$ via le plongement

$$\widehat{X} \to V_{\mathbf{Q}}, \chi \mapsto \chi \otimes 1.$$

(Comme, évidemment, tout sous-groupe de $\mathbf{Q}^d$ est un groupe abélien sans torsion de rang fini, on voit que les solénoïdes sont exactement les groupes duaux de sous-groupes de $\mathbf{Q}^d$ pour certains $d \geq 1$.)

Nous aurons besoin plus tard de plonger $\widehat{X}$ dans des espaces vectoriels sur divers corps locaux. Le corps $\mathbf{Q}$ peut être vu comme un sous-anneau discret et cocompact de l'anneau localement compact $\mathbf{A}$ via la projection diagonale

$$\mathbf{Q} \to \mathbf{A}, q \mapsto (q, q, ...).$$

Pour $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, on pose

$$V_p = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p.$$

Alors V_p est un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}_p$ de dimension d et $V_{\mathbf{Q}}$ peut être vu comme un sous-espace de V_p pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$.

Soit une base $\mathcal{B}$ de $V_{\mathbf{Q}}$ fixée contenue dans $\widehat{X}$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de V_p sur $\mathbf{Q}_p$ pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$. Pour $p \in \mathcal{P}$, soit $\mathcal{B}_p$ le $\mathbf{Z}_p$-module engendré par $\mathcal{B}$ dans V_p. Le produit restreint

$$V_{\mathbf{A}} = V_\infty \times \prod_{p \in \mathcal{P}} (V_p, \mathcal{B}_p)$$

est un anneau localement compact et $V_{\mathbf{Q}}$ s'injecte diagonalement comme un sous-groupe discret et cocompact de $V_{\mathbf{A}}$ (pour cela, voir [Wei74, Ch. IV]).

Suite à cette discussion, on peut voir $\widehat{X}$ comme un sous-groupe de $V_{\mathbf{Q}}$ qui est lui-même identifié à un sous-groupe discret et cocompact de $V_{\mathbf{A}}$. Comme le groupe dual de $V_{\mathbf{Q}} \cong \mathbf{Q}^d$ peut être identifié à $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ (voir partie 2.3.2), on observe que X est un quotient du solénoïde adélique $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ de dimension d.

Soit S une partie finie de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ contenant ∞. On identifie $\mathbf{Z}[1/S]$ à un sous-anneau cocompact discret de $\mathbf{Q}_S$ par le plongement diagonal

$$a \mapsto (a, \ldots, a) \in \mathbf{Q}_S.$$

L'application produit identifie alors $\mathbf{Z}[1/S]^d$ à un sous-anneau cocompact discret de $\mathbf{Q}_S^d$. On définit alors le **solénoïde S-adique** $X_S^d = \mathbf{Q}_S^d/\mathbf{Z}[1/S]^d$.

On identifie à présent $\mathbf{Q}$ à un sous-anneau cocompact discret de $\mathbf{A}$ via le plongement diagonal

$$a \mapsto (a, a, \ldots,) \in \mathbf{A},$$

l'application produit identifie alors $\mathbf{Q}^d$ à un sous-anneau cocompact discret de $\mathbf{A}^d$. On définit alors le **solénoïde adélique** $X^d = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$.

2.4 Dual de $\mathbf{Z}[1/S]^d$ et dual du solénoïde S-adique $X_S^d = \mathbf{Q}_S^d/\mathbf{Z}[1/S]^d$

Soit S comme auparavant. Soit $e \in \widehat{\mathbf{Q}_S}$ non trivial avec $e = 1$ sur $\mathbf{Z}[1/S]$. Alors l'application $\Phi : X_S^d \mapsto \widehat{\mathbf{Z}[1/S]^d}$ donnée par :

$$\Phi(a)(q) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i),$$

pour $a = (a_1, \ldots, a_d) + \mathbf{Z}[1/S]^d \in X_S^d$ et $q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbf{Z}[1/S]^d$, est bien définie et est un isomorphisme de groupes topologiques. On a donc une identification de $\widehat{\mathbf{Z}[1/S]^d}$ avec X_S^d.

Par dualité, on identifie $\widehat{X_S^d}$ avec $\mathbf{Z}[1/S]^d$; de manière plus précise, l'application $\Phi : \mathbf{Z}[1/S]^d \to \widehat{X_S^d}$ définie par

$$\Phi(q)(a + \mathbf{Z}[1/S]^d) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i),$$

pour $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{Q}_S^d$ et $q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbf{Z}[1/S]^d$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

2.5 Dual de $\mathbf{Q}^d$ et dual du solénoïde adélique $X^d = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$

Soit $e \in \widehat{\mathbf{A}}$ non trivial avec $e = 1$ sur $\mathbf{Q}$. L'application $\Phi : X^d \to \widehat{\mathbf{Q}^d}$ donnée par

$$\Phi(x)(a) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i),$$

pour $a = (a_1, \ldots, q_d) + \mathbf{Q}^d \in X^d$ et $q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbf{Q}^d$, est bien définie et est un isomorphisme de groupes topologiques. On a donc une identification de $\widehat{\mathbf{Q}^d}$ avec X^d.

Par dualité, on peut identifier $\widehat{X^d}$ avec $\mathbf{Q}^d$; de manière plus précise, l'application $\Phi : \mathbf{Q}^d \to \widehat{X^d}$ définie par

$$\Phi(q)(a + \mathbf{Q}^d) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i),$$

pour $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{A}^d$ et $q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbf{Q}^d$, est un isomorphisme de groupes topologiques.

2.6 Automorphismes de solénoïdes

Soit X un solénoïde.

Nous nous intéressons maintenant aux automorphismes de $\widehat{X}$. Tout $\theta \in \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ s'étend, de manière unique, en un automorphisme $\widetilde{\theta}$ de $V_{\mathbf{Q}} = \widehat{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ défini par

$$\widetilde{\theta}(\chi \otimes n/m) = \theta(n\chi) \otimes (1/m) \text{ pour tout } \chi \in \widehat{X}, n/m \in \mathbf{Q}.$$

On peut donc identifier $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ avec un sous-groupe $GL(V_{\mathbf{Q}})$. Ainsi $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ s'injecte diagonalement en un sous-groupe discret du groupe localement compact $GL(V_{\mathbf{A}}) \cong GL_d(\mathbf{A})$, qui est également le produit restreint

$$GL(V_{\mathbf{A}}) = GL(V_\infty \times \prod_{p \in \mathcal{P}} (GL(V_p), GL(\mathcal{B}_p)).$$

On rappelle que V_p est le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $V_p = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Soient $p_1, ..., p_r$ des premiers distincts et $S = \{p_1, ...p_r\} \cup \{\infty\}$. Soit $\mathrm{Aut}(\widehat{X})_{\mathbf{Z}[1/S]}$ le sous-groupe de tous les $\theta \in \mathrm{Aut}(\widehat{X})$ tels que

$$\theta(\mathcal{B}_p) = \mathcal{B}_p \text{ pour tout } p \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, ..., p_r\}.$$

Alors $\mathrm{Aut}(\widehat{X})_{\mathbf{Z}[1/S]}$ peut être identifié comme un sous-groupe de $GL_d(\mathbf{Z}[1/S])$ et s'injecte diagonalement comme un sous-groupe discret du groupe localement compact

$$GL(V_\infty) \times GL(V_{p_1}) \times ... \times GL(V_{p_r}).$$

On spécialise aux cas particuliers :

- Le groupe des automorphismes du solénoïde S-adique $X_S^d = \mathbf{Q}_S^d/\mathbf{Z}[1/S]^d$ s'identifie à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}[1/S])$; dans cette identification, l'action de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}[1/S])$ sur X_S^d est induite de son action naturelle sur chaque $\mathbf{Q}_p^d$; l'action duale de $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}[1/S])$ sur $\widehat{X_S^d} \cong \mathbf{Z}[1/S]^d$ est celle induite par la transposée de l'action naturelle sur $\mathbf{Q}^d$.

- le groupe des automorphismes du solénoïde adélique $X^d = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ s'identifie à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q})$; dans cette identification, l'action de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q})$ est celle induite de son action naturelle sur chaque $\mathbf{Q}_p^d$; l'action duale de $\mathrm{Aut}(X^d) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q})$ sur $\widehat{X^d} \cong \mathbf{Q}^d$ est celle induite par la transposée de l'action naturelle sur $\mathbf{Q}^d$.

Chapter 3

Propriété de trou spectral et ergodicité forte pour les groupes de transformations affines de solénoïdes

3.1 Introduction

Soit X un groupe compact et $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes continus de X. On note :

$$\mathrm{Aff}(X) := \mathrm{Aut}(X) \ltimes X$$

le groupe des transformations affines de X, c'est-à-dire les applications de la forme :

$$X \to X,\ x \mapsto x_0\theta(x)$$

pour un $\theta \in \mathrm{Aut}(X)$ et $x_0 \in X$. Soit μ la mesure de Haar normalisée de X. Par invariance par translation et unicité de la mesure de Haar, chaque transformation de $\mathrm{Aff}(X)$ conserve μ.

Pour un groupe Γ et un homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Aff}(X)$, il existe donc au moins une mesure de probabilité préservée par Γ. L'étude de l'ergodicité de telles actions est un thème classique depuis Halmos [Hal43] et Kaplansky [Kap49], dans ces deux cas $\Gamma = \mathbf{Z}$ est engendré par un automorphisme de X. L'étude de la caractérisation de l'ergodicité d'une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ par automorphisme sur un groupe compact arbitraire a été faite dans [KS89, Lemme 2.2] . La proposition suivante fournit une caractérisation précise de l'ergodicité pour des actions par des transformations affines dans le cas où X est de plus abélien et connexe.

Proposition 3.1.1. *Soit X un groupe compact abélien connexe et μ la mesure de Haar normalisée sur X. Soit $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(X)$ un groupe dénombrable. soit $p_a : \mathrm{Aff}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ la projection canonique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'est pas ergodique

(ii) Il existe un sous-groupe fermé connexe $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est un groupe fini.

L'objet principal de ce chapitre est la *propriété de trou spectral* pour l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

Remarque 3.1.2. *i) On rappelle que la représentation de Koopman π_X associée à l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est la représentation unitaire $\pi_X : \Gamma \to \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ donnée par :*

$$(\pi_X(\gamma)f)(x) = c(\gamma^{-1}, x)^{1/2} f(\gamma^{-1}x) \text{ pour tous } f \in L^2(X, \mu), x \in X$$

où $c(\gamma, x) = \dfrac{d\gamma\mu}{\mu}(x)$ la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure image $\gamma\mu$ par rapport à μ.

ii) On rappelle que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est ergodique si et seulement si il n'existe pas de vecteur invariant non nul dans le sous-espace $\pi_X(\Gamma)$-invariant $L^2_0(X, \mu) = (\mathbf{C}\mathbf{1}_X)^\perp$ des fonctions de moyenne nulle.

iii) On dit que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété de trou spectral si il n'y a pas de vecteurs presque invariant dans $L^2_0(X, \mu)$ c'est-à-dire, s'il n'y a pas de suite de vecteurs unitaires f_n dans $L^2_0(X, \mu)$ telle que

$$\lim_n \| \pi_X(\gamma) f_n - f_n \| = 0 \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Lorsque l'on prend un groupe compact non-abélien spécifique X, il n'existe en général pas de caractérisation connue des sous-groupes dénombrables Γ de $\mathrm{Aff}(X)$ tels que $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété de trou spectral. En effet, cela est déjà généralement un problème difficile de trouver un sous-groupe Γ de X

pour lequel l'action de Γ par translation sur X a la propriété de trou spectral (pour un résultat récent dans le cas $X = SU(d)$ voir [BG12]).

On caractérise ci dessous (Théorème 3.1.3) les actions par transformations affines $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ avec la propriété de trou spectral pour un solénoïde X, dans le même esprit que la caractérisation de l'ergodicité dans la Proposition 3.1.1. Ce résultat généralise [BG15, Théorème 5] , où une caractérisation analogue a été donnée pour le cas d'un tore $X = \mathbf{T}^d$.

On rappelle qu'un *solénoïde* X est un groupe abélien compact connexe de dimension finie (voir Section 2.3).

Exemple 4. Comme exemples de solénoïdes de dimension d nous pouvons citer :

- le tore $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$,
- le solénoïde p-adique X_p^d où p est un nombre premier,
- plus généralement, le solénoïde S-adique X_S^d où S est une partie finie de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ contenant ∞;
- le solénoïde $X = \mathbf{A}/\mathbf{Q}$; tout solénoïde de dimension d est un quotient de X^d.

Dans un certain sens le plus grand solénoïde de dimension d est donné par le solénoïde $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ où $\mathbf{A}$ est l'anneau des adèles sur $\mathbf{Q}$.

Voici le résultat principal de ce chapitre. On rappelle, qu'étant donnée une propriété $\mathcal{P}$, un groupe a virtuellement la propriété $\mathcal{P}$ s'il possède un sous-groupe d'indice fini avec la propriété $\mathcal{P}$. Un sous-solénoïde X est un sous-groupe fermé connexe de X.

Théorème 3.1.3. *Soit X un solénoïde muni de la mesure de Haar normalisée μ et Γ un sous-groupe dénombrable de* $\mathrm{Aff}(X)$. *Soit $p_a : \mathrm{Aff}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ la projection canonique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral

(ii) l'action $p_a(\Gamma) \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral

(iii) il existe un sous solénoïde propre $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ *est un groupe moyennable*

(iv) il existe un sous-solénoïde propre $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ *est un groupe virtuellement résoluble.*

La preuve du théorème 3.1.3 est une extension au cas adélique des méthodes de [BG15], et est basée sur l'étude de moyennes invariantes appropriées sur des espaces vectoriels sur des corps locaux de dimension finie et sur les mesures invariantes associées sur les espaces projectifs associés.

La propriété de trou spectral est reliée à un autre renforcement de l'ergodicité.

Définition 3.1.4. On rappelle que l'action d'un groupe dénombrable Γ par transformations préservant la mesure sur un espace probabilisé (X, μ) est *fortement ergodique* (voir [Sch81]) si toute suite $(A_n)_n$ de sous-ensembles mesurables de X, qui est asymptotiquement invariante (c'est-à-dire qui est tel que $\lim_n(\mu(\gamma A_n \triangle A_n) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$), est triviale (c'est-à-dire, $\lim_n \mu(A_n)(1 - \mu(A_n)) = 0$).

Remarque 3.1.5. *Il est facile de voir que la propriété de trou spectal implique l'ergodicité forte (l'implication réciproque est fausse en général, voir [Sch81, Exemple 2.7]).*

De plus, si Γ est un groupe dénombrable ***moyennable****, alors aucune action de Γ préservant la mesure d'un espace probabilisé non atomique n'est fortement ergodique (voir [Sch81, Théorème 2.4]).*

Le corollaire suivant est donc un conséquence directe du théorème 3.1.3.

Corollaire 3.1.6. *Soit X un solénoïde et $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(X)$ un groupe dénombrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a la propriété de trou spectral,

(ii) l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est fortement ergodique.

Il est intéressant de remarquer que l'équivalence (i) et (ii) du Corollaire 3.1.6 reste vraie pour les actions par translation sur un groupe compact général X (voir [AE12, Proposition 3.1]).

On peut améliorer le résultat du Théorème 3.1.3 dans le cas des solénoïdes S-adiques. Pour un sous-ensemble A de $Gl_d(\mathbf{K})$ pour un corps $\mathbf{K}$, on note $A^t = \{g^t | g \in S\}$ l'ensemble des transposées des matrices de A.

Théorème 3.1.7. *Soit S une partie finie de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ avec $\infty \in S$. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(X_S^d) \cong GL_d(\mathbf{Z}[1/S]) \ltimes X_S^d$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action $\Gamma \curvearrowright (X_S^d, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral,

(ii) il existe un sous-espace linéaire non nul W de $\mathbf{Q}^d$ qui est invariant sous $p_a(\Gamma)^t \subset GL_d(\mathbf{Q})$ et tel que l'image de $p_a(\Gamma)^t$ dans $GL(W)$ soit un groupe virtuellement abélien.

Des exemples d'actions de groupes sur des solénoïdes avec la propriété de trou spectral sont fournies par la conséquence immédiate du Théorème 3.1.7 suivante :

Corollaire 3.1.8. *Pour une partie partie finie S de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ avec $\infty \in S$, soit Γ un sous-groupe de $GL_d(\mathbf{Z}[1/S])$. On suppose que Γ n'est pas virtuellement abélien et que Γ agit de manière irréductible sur $\mathbf{Q}^d$. Alors l'action de Γ par automorphisme sur X_S^d a la propriété de trou spectral.*

Remarque 3.1.9. *Le Corollaire 3.1.8 généralise [FS99, Theorem 6.8] dans lequel le même résultat est prouvé sous l'hypothèse plus forte que Γ agit de manière irréductible sur $\mathbf{R}^d$.*

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans une première partie, on établit et rappelle des faits préliminaires qui seront nécessaires dans les preuves de nos résultats. Puis dans un second temps nous nous intéresserons aux preuves du Théorème 3.1.3, du Théorème 3.1.7 et de la Proposition 3.1.1.

3.2 Résultats préliminaires

3.2.1 Réduction au cas des automorphismes

Soit X un groupe abélien compact muni de la mesure de Haar normalisée μ et Γ un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aff}(X)$. Le but de cette sous-section est de réduire l'étude de la propriété de trou spectral pour $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ à celle de l'action $p_a(\Gamma) \curvearrowright (X, \mu)$ où $p_a : \mathrm{Aff}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ est la projection canonique.

Soit $\widehat{X}$ le groupe dual de Pontrjagin de X, qui est un groupe discret. Le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ agit par dualité sur $\widehat{X}$, donnant lieu à une action *à droite* $\widehat{X} \times \mathrm{Aut}(X) \to \widehat{X}$ donnée par

$$\chi^\theta(x) = \chi(\theta(x)) \text{ pour tous } \theta \in \mathrm{Aut}(X), \chi \in \widehat{X}, x \in X.$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(X,\mu) \to \ell^2(\widehat{X})$, donnée par

$$(\mathcal{F}f)(\chi) = \int_X f(x)\overline{\chi}(x)d\mu(x) \text{ pour tous } f \in L^2(X,\mu), \chi \in \widehat{X},$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. La représentation de Koopman de $\mathrm{Aff}(X)$ sur $L^2(X,\mu)$ correspond sous $\mathcal{F}$ à la représentation unitaire π_X de $\mathrm{Aff}(X)$ sur $\ell^2(\widehat{X})$ donnée par

$$\pi_X(\gamma)(\xi)(\chi) = \chi(x)\xi(\chi^\theta) \text{ pour tous } \xi \in \ell^2(\widehat{X}), \chi \in \widehat{X} \qquad (*)$$

pour $\gamma = (\theta, x)$ dans $\mathrm{Aff}(X) = \mathrm{Aut}(X) \ltimes X$. On observe que $L^2_0(X,\mu)$ correspond via $\mathcal{F}$ au sous-espace $\ell^2(\widehat{X} \setminus \{\mathbf{1}_X\})$ de $\ell^2(\widehat{X})$.

Proposition 3.2.1. *Soit X un groupe abélien compact muni de la mesure de Haar normalisée μ et soit Γ un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aff}(X)$ tel que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral. Alors l'action $p_a(\Gamma) \curvearrowright (X,\mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral.*

Proof. On réalise la représentation de Koopman π_X sur $\ell^2(\widehat{X})$ comme ci-dessus. Comme $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral, il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs unitaires dans $\ell^2(\widehat{X} \setminus \{\mathbf{1}_X\})$ tels que

$$\lim_n \| \pi_X(\gamma)\xi_n - \xi_n \| = 0,$$

ainsi par l'équation $(*)$,

$$\lim_n \sum_{\chi \in \widehat{X}} |\chi(x)\xi_n(\chi^\theta) - \xi_n(\chi)|^2 = 0$$

pour tout $\gamma = (\theta, x) \in \Gamma$.

Pour $n \geq 1$, on pose $\eta_n = |\xi_n|$. Alors η_n est un vecteur unitaire de $\ell^2(\widehat{X} \setminus \{\mathbf{1}_X\})$ et, pour tout $\gamma = (\theta, x) \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \| \pi_X(\theta)\eta_n - \eta_n \|^2 &= \sum_{\chi \in \widehat{X}} ||\xi_n(\chi^\theta)| - |\xi_n(\chi)||^2 \\ &= \sum_{\chi \in \widehat{X}} ||\chi(x)\xi_n(\chi^\theta)| - |\xi_n(\chi)||^2 \\ &\leq \sum_{\chi \in \widehat{X}} |\chi(x)\xi(\chi^\theta) - \xi_n(\chi)|^2 \\ &= \| \pi_X(\gamma)\xi_n - \xi_n \|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, (η_n) est une suite presque $\pi_X(p_a(\Gamma))$-invariante et donc $p_a(\Gamma) \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral. $\square$

3.2.2 Moyennes invariantes, mesures invariantes et actions linéaires

Soit X un espace topologique localement compact.

Définition 3.2.2.
- Une *moyenne* sur X est une fonction linéaire positive M sur l'espace $C^b(X)$ des fonctions continues bornées sur X telle que $M(\mathbf{1}_X) = 1$.
- Soit Γ un groupe et $\Gamma \curvearrowright X$ une action de Γ par homéomorphisme sur X. Une moyenne Γ-invariante est une moyenne M qui est invariante par l'action induite de Γ sur $C^b(X)$.

Remarque 3.2.3. *Si Y est un autre espace topologique localement compact et $\Phi : X \to Y$ est une application continue, la moyenne image $\Phi_*(M)$ de M par Φ est la moyenne sur Y donnée par $\Phi_*(M)(f) = M(f \circ \Phi)$ pour $f \in C^b(Y)$.*

Le lemme suivant est bien connu et facile à démontrer :

Lemme 3.2.4. Soient X, Y des espaces respectivement localement compact et compact. Soient $\Gamma \curvearrowright X$ et $\Gamma \curvearrowright Y$ des actions du groupe Γ par homéomorphisme sur X et Y. Soit $\Phi : X \to Y$ une application continue Γ-équivariante. Supposons qu'il existe M une moyenne invariante sur X. Alors $\Phi_*(M)$ est donnée par l'intégration contre une mesure de probabilité Γ-invariante μ sur Y.

Proof. Comme $\Phi_*(M)$ est une forme positive linéaire sur $C(Y)$ et comme Y est compact, il existe, par le théorème de représentation de Riesz, une mesure de probabilité μ sur Y telle que

$$\int_Y f(x) d\mu(x) = \Phi_*(M)(f) \text{ pour tout } f \in C(Y)$$

Comme $\Phi_*(M)$ est Γ-invariante, la mesure μ est Γ-invariante. $\square$

Soit $\mathbf{k}$ un corps local (c'est-à-dire, un corps non discret localement compact) et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{k}$. Alors V est un espace vectoriel localement compact et $GL(V)$ est un groupe localement compact, pour la topologie induite par $\mathbf{k}$. C'est la seule topologie que nous considérerons sur $GL(V)$ dans ce qui suit (à l'exception du Lemme 3.2.7).

Tout sous-groupe Γ de $GL(V)$ agit par homéomorphisme sur l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$. Un outil indispensable pour notre preuve des Théorème 3.1.3 et 3.1.7 est la considération de mesures de probabilité Γ-invariantes sur $\mathbf{P}(V)$, un thème initié dans [Fur76]. La proposition suivante résume les principales conséquences de l'existence d'une telle mesure. Différentes variantes de cette proposition sont déjà apparues à différents endroits (voir par exemple [BG15, FS99]) mais pas sous la forme exacte dont nous aurons besoin.

Pour un groupe G, on note $[G, G]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs de G.

Proposition 3.2.5. *Soit V un espace vectoriel sur un corps local k de dimension finie, et soit G un sous-groupe fermé de $GL(V)$. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité G-invariante sur les sous-ensembles boréliens de $\mathbf{P}(V)$ qui n'est pas supportée par un sous-espace projectif propre. Alors il existe un sous-groupe G_0 de G d'indice fini tel que $[G_0, G_0]$ est relativement compact dans $GL(V)$. En particulier, le groupe localement compact G est moyennable.*

Proof. Soit ν une mesure de probabilité borélienne G-invariant sur $\mathbf{P}(V)$. Comme dans la preuve de [BG15, Lemme 11] ou de [FS99, Théorème 6.5(i)], il existe un nombre fini de sous-espaces vectoriels $V_1, ..., V_r$ de V et un sous-groupe G_0 d'indice fini de G avec les propriétés suivantes :

- ν est supportée par la réunion des sous-espaces projectifs correspondants aux V_i ;
- G_0 stabilise V_i pour tout $i \in \{1, ..., r\}$;
- l'image de G_0 dans $PGL(V_i)$ est relativement compacte pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.

Comme l'image du sous-groupe des commutateurs $[G_0, G_0]$ dans $GL(V_i)$ est contenue dans $SL(V_i)$, il s'ensuit que l'image de $[G_0, G_0]$ dans $GL(V_i)$ est relativement compacte pour tout $i \in \{1, ..., r\}$. Comme ν n'est pas supportée par un sous-espace projectif propre, le sous-espace vectoriel engendré par $V_1 \cup ... \cup V_r$ coïncide avec V. Ceci implique que $[G_0, G_0]$ est relativement compacte dans $GL(V)$. Ainsi, G_0 et donc G est moyennable. □

Un autre ingrédient dont nous aurons besoin est le résultat suivant qui est démontré dans [BG15, Proposition 9 et Lemme 10], où le cas $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ est considéré ; les arguments de la preuve sont valables sans changement pour n'importe quel corps local $\mathbf{k}$.

Proposition 3.2.6. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local k et soit G un sous-groupe de $GL(V)$. Il existe un plus grand sous-espace vectoriel G-invariant $V(G)$ de V tel que l'adhérence de l'image de G dans $GL(V)$ est un groupe localement compact moyennable. De plus, on a $\overline{V}(G) = \{0\}$ pour l'espace quotient $\overline{V} = V/V(G)$.*

Nous aurons également besoin du lemme suivant. Rappelons qu'un groupe est *linéaire* si il peut être vu comme un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{k})$ pour un certain corps $\mathbf{k}$.

Lemme 3.2.7. Soit Γ un groupe linéaire. Supposons que Γ est fini-par-abélien (c'est-à-dire, Γ est une extension finie d'un groupe abélien). Alors Γ est virtuellement abélien (c'est-à-dire, Γ est abélien-par-fini).

Proof. On peut supposer que Γ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{k})$ pour un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$. D'après les hypothèses il existe un sous-groupe fini distingué de Γ contenant $[\Gamma, \Gamma]$. En particulier $[\Gamma, \Gamma]$ est fini.

Soit $G \subset GL_n(\mathbf{k})$ l'adhérence de Γ pour la topologie de Zariski. Comme $[\Gamma, \Gamma]$ est fini, $[\Gamma, \Gamma]$ est un sous-groupe Zariski fermé de G. Il s'ensuit que $[G, G] = [\Gamma, \Gamma]$ et donc que $[G, G]$ est fini. En particulier, $[G^0, G^0]$ est fini, où G^0 est la composante Zariski connexe de G. Cependant, $[G^0, G^0]$ est connexe (voir [Hum75, Proposition 17.2]). Ainsi, $[G^0, G^0] = \{e\}$, c'est-à-dire G^0 est abélien. Soit $\Gamma^0 = \Gamma \cap G^0$. Alors Γ^0 est un sous-groupe d'indice fini de Γ et Γ^0 est abélien. □

On remarque que le lemme précédent n'est pas nécessairement vrai pour des groupes non linéaires : soit V un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps fini $\mathbf{F}$ de caractéristique différente de 2 et $\omega : V \times V \to \mathbf{F}$ une forme symplectique sur V. Soit Γ le groupe de Heisenberg associé, c'est-à-dire, $\Gamma = V \times \mathbf{F}$ avec la loi $(v, \lambda)(w, \beta) = (v + w, \lambda + \beta + \omega(v, w))$. Alors Γ est fini-par-abélien mais n'est pas virtuellement abélien.

3.3 Preuves des Théorèmes 3.1.3,3.1.7 et Proposition 3.1.1.

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1.3

Proof. La Proposition 3.2.1 montre que (i) implique (ii). Le fait que (iii) implique (i) provient d'un résultat général : une action préservant la mesure d'un groupe dénombrable moyennable sur un espace probabilisé non atomique (Y, ν) n'a jamais la propriété de trou spectral (voir [dJR79, Theorem 2.4] ou [Sch81, (2.4) Theorem]). Comme Γ, qui est isomorphe à un sous-groupe de $GL_d(\mathbf{Q})$, est un sous-groupe linéaire sur un corps de caractéristique zéro, (iii) implique (iv) par le théorème de Tits [Tit72]. Il reste donc à montrer que (ii) implique (iii). On procèdera en différentes étapes.

- *Première étape.* Supposons qu'il existe un sous-solénoïde propre $p_a(\Gamma)$-invariant Y de X tel que l'image Δ de $p_a(\Gamma)$ dans $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est moyennable. On affirme qu'alors l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est moyennable.

  En effet, l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est un sous-groupe de $\Delta \ltimes (X/Y)$. Comme X/Y est abélien, $\Delta \ltimes (X/Y)$ est moyennable (en tant que groupe discret) et l'affirmation s'ensuit.

  A la vue de cette première étape, on supposera dans la suite de la discussion que $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$. Par dualité, on peut également voir Γ comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$. Dans ce qui suit, on écrit 0 pour l'élément neutre dans $\widehat{X}$ au lieu de $\mathbf{1}_{\widehat{X}}$.

- *Deuxième étape.* On affirme qu'il existe une moyenne Γ-invariante sur $\widehat{X} \setminus \{0\}$.

  En effet, comme $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'a pas la propriété de trou spectral, ceci découle de l'argument standard suivant : il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs unitaires dans $\ell^2(\widehat{X} \setminus \{0\})$ tel que

  $$\lim_n \| \pi_X(\gamma)\xi_n - \xi_n \|_2 = 0 \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

  pour la représentation de Koopman π_X associée (voir preuve de la proposition 3.2.1). Alors $\eta_n := |\xi_n|^2$ est un vecteur unitaire dans

$\ell^1(\widehat{X} \setminus \{0\})$ et

$$\lim_n \| \pi_X(\gamma)\eta_n - \eta_n \|_1 = 0 \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Toute limite *faible de $(\eta_n)_n$ dans l'espace dual de $\ell^\infty(\widehat{X} \setminus \{0\})$ est une moyenne Γ-invariante de $\widehat{X} \setminus \{0\}$.

Soit d le rang de $\widehat{X}$. Comme dans la partie 2.2.3 précédente, on plonge $\widehat{X}$ dans l'espace vectoriel $V_{\mathbf{Q}} = \widehat{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$ de dimension d ainsi que dans les espaces vectoriels $V_p = V_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Q}_p$ sur $\mathbf{Q}_p$ de dimension d pour $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et où $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$. De même, on identifie $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ avec un sous-groupe de $GL(V_{\mathbf{Q}})$.

On fixe une moyenne Γ-invariante M sur $\widehat{X} \setminus \{0\}$, que l'on voit comme une moyenne sur $\widehat{X}$ et on écrit $M(A)$ au lieu de $M(\mathbf{1}_A)$ pour un sous-ensemble A de $\widehat{X}$.

- *Troisième étape.* Soit $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$. On affirme que

$$M(\widehat{X} \cap V_p(\Gamma)) = 1,$$

où $V_p(\Gamma)$ est le sous-espace vectoriel Γ-invariant de V_p défini dans la Proposition 3.2.6.

La preuve de cette affirmation est semblable à la preuve de [BG15, Proposition 13], dont nous reprenons ici les principaux arguments. Supposons par l'absurde que $M(\widehat{X} \cap V_p(\Gamma)) < 1$. Nous avons donc

$$t := M(\widehat{X} \setminus V_p(\Gamma)) > 0.$$

Alors une moyenne Γ-invariante M_1 est définie sur $\widehat{X} \setminus V_p(\Gamma)$ par

$$M_1(A) = \frac{1}{t} M(A) \text{ pour tout } A \subset \widehat{X} \setminus V_p(\Gamma).$$

Considérons l'espace vectoriel quotient $\overline{V_p} = V_p/V_p(\Gamma)$ avec la Γ-action induite. L'image de $\widehat{X} \setminus V_p(\Gamma)$ par la projection canonique $j : V_p \to \overline{V_p}$ ne contient pas $\{0\}$. Ainsi, $\overline{M_1} := j_*(M_1)$ est une moyenne Γ-invariante sur $\overline{V_p} \setminus \{0\}$. Par le Lemme 3.2.4, la moyenne image de M_1 sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\overline{V_p})$ définit un mesure de probabilité Γ-invariante ν sur $\mathbf{P}(\overline{V_p})$.

Soit $\overline{W}$ l'espace vectoriel engendré par l'image inverse de $\mathrm{supp}(\nu)$ dans $\overline{V_p}$. Alors $\overline{W} \neq \{0\}$ et ν n'est pas supportée par un sous-espace projectif propre dans $\mathbf{P}(\overline{W})$. La Proposition 3.2.5 montre que l'adhérence de l'image de Γ dans $GL(\overline{W})$ est un groupe moyennable. Il s'ensuit que $\overline{V_p}(\Gamma) \neq \{0\}$. Ce qui contredit la Proposition 3.2.6.

Soit $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ une énumération de l'ensemble $\mathcal{P}$ des entiers premiers.

- *Quatrième étape.* On affirme que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\widehat{X} \cap V_\infty(\Gamma) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}(\Gamma) \neq \{0\}.$$

  En effet, par la troisième étape, on a $M(\widehat{X} \setminus \{0\} \cap V_p(\Gamma)) = 1$ pour tout $p \in \{p_1, ..., p_n\} \cup \{\infty\}$. Par additivité finie de M, il s'ensuit que

$$M\left(\widehat{X} \setminus \{0\} \cap V_\infty(\Gamma) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}(\Gamma)\right) = 1;$$

  ce qui prouve l'affirmation.

  En fixant une base $\mathcal{B}$ de $V_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ contenue dans $\widehat{X}$, et en notant $\mathcal{B}_p$ le $\mathbf{Z}_p$-module engendré par $\mathcal{B}$ dans V_p pour $p \in \mathcal{P}$, on considère le groupe localement compact $GL(V_{\mathbf{A}})$, qui est le produit restreint de $GL(V_p)$ par rapport aux groupes compacts $GL(\mathcal{B}_p)$ (voir partie 2.2.3).

  Pour $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, soit G_p l'adhérence de l'image de Γ dans $GL(V_p(\Gamma))$. On pose

$$G := \left(G_\infty \times \prod_{p \in \mathcal{P}} G_p\right) \cap GL(V_{\mathbf{A}}).$$

- *Cinquième étape.* On affirme que G est un sous-groupe fermé moyennable de $GL(V_{\mathbf{A}})$.

  En effet, pour tout $n \geq 1$, on pose

$$H_n := G_\infty \times \prod_{i=1}^{n} G_{p_i} \times K_n,$$

où K_n est le groupe compact $\prod_{i>n}(G_{p_i} \cap GL(\mathcal{B}_{p_i}))$. Alors $(H_n)_n$ est une suite croissante de sous-groupes ouverts de G et $G = \bigcup_{n\geq 1} H_n$. Il est clair que tout H_n est un sous-groupe fermé de $GL(V_{\mathbf{A}})$. Par conséquent, G est localement compact et ainsi un sous-groupe fermé de $GL(V_{\mathbf{A}})$.

Pour montrer que G est moyennable, il suffit de montrer que tout H_n est moyennable (voir [BdlHV08, Proposition G.2.2]). Ceci est en effet le cas, car chaque G_p est moyennable par définition de $V_p(\Gamma)$ et car K_n est compact.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note W^n le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par

$$\widehat{X} \cap V_\infty(\Gamma) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}(\Gamma).$$

- *Sixième étape.* On affirme qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $W^n = W^N$ pour tout $n \geq N$.

  En effet, $(W^n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de $V_{\mathbf{Q}}$. Par la quatrième étape, on a $\dim_{\mathbf{Q}} W^n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\dim_{\mathbf{Q}} W^n = \dim_{\mathbf{Q}} W^N$ pour tout $n \geq N$ et l'affirmation s'ensuit.

  On pose $W := W^N$ et on observe que W est Γ-invariant.

- *Septième étape.* On affirme que l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(\widehat{X} \cap W)$ est moyennable.

  En effet, W est un sous-espace vectoriel de $V_{\mathbf{Q}}$ et est contenu dans chaque $V_p(\Gamma)$. D'une part, sous l'injection diagonale, $G \cap GL(W)$ est un sous-groupe discret de G, car le voisinage

  $$U \times \prod_{p\in\mathcal{P}}(G_p \cap GL(\mathcal{B}_p))$$

  de e dans G a une intersection triviale avec $GL(W)$, pour un voisinage suffisamment petit U de e dans G_∞. D'autre part, $G \cap GL(W)$ est moyennable, par la cinquième étape. Il s'ensuit que l'image $\widetilde{\Gamma} \subset G \cap GL(W)$ de Γ dans $GL(W)$ est moyennable. L'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(\widehat{X} \cap W)$ est un quotient de $\widetilde{\Gamma}$ et est donc moyennable.

Soit

$$Y := (\widehat{X} \cap W)^{\perp} = \left\{ x \in X | \chi(x) = 1 \text{ pour tout } \chi \in \widehat{X} \cap W \right\},$$

l'annulateur dans X du sous-groupe $\widehat{X} \cap W$ de $\widehat{X}$.

- *Huitième étape.* On affirme que Y est un sous-solénoïde propre Γ-invariant de X et que l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est moyennable.

  En effet, Y est clairement un sous-groupe fermé Γ-invariant de X et $Y \neq X$ car $\widehat{X} \cap W$ est non trivial, par la quatrième étape. De plus, le groupe dual $\widehat{Y}$ de Y, qui est isomorphe à $\widehat{X}/(\widehat{X} \cap W)$, est sans torsion : en effet, si $\chi \in \widehat{X}$ est tel que $n\chi \in W$ pour un entier $n \geq 1$, alors $\chi \in W$, car W est un sous-espace $\mathbf{Q}$-vectoriel. Comme, de façon évidente, $\widehat{Y}$ a un rang fini, il s'ensuit que le groupe compact Y est un solénoïde.

  Par la septième étape, l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(\widehat{X} \cap W)$ est moyennable. Comme, $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\widehat{X} \cap W)$ par dualité, il s'ensuit que l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est moyennable.

$\square$

3.3.2 Preuve du Théorème 3.1.7

Proof. On doit seulement montrer que (i) implique (ii). On pose $X := X_S^d$ pour $S = \{p_1, ..., p_r\} \cup \{\infty\}$ et soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(X_S^d)$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1.3, on peut supposer que $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$.

On rappelle (voir §2.4) qu'on peut identifier $\widehat{X}$ avec le sous-anneau discret $\mathbf{Z}[1/S]^d$ de

$$\mathbf{Q}_S^d = \mathbf{R}^d \times \mathbf{Q}_{p_1}^d \times ... \times \mathbf{Q}_{p_r}^d,$$

et $\mathrm{Aut}(\widehat{X})$ avec le sous-groupe discret $GL_d(\mathbf{Z}[1/S])$ de $GL_d(\mathbf{Q}_S)$, avec l'action duale de $\gamma \in \mathrm{Aut}(X)$ sur $\mathbf{Q}_S^d$ donnée par transposition matricielle.

Comme dans la preuve du Théorème 3.1.3, il existe une moyenne Γ-invariante M sur $\widehat{X} \setminus \{0\}$. Soit W un sous-espace vectoriel non nul de $V_{\mathbf{Q}} = \widehat{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ de dimension minimale avec $M(W) = 1$. Alors W est Γ-invariant, par Γ-invariance de M. On affirme que l'image de Γ dans $GL(W)$ est un groupe virtuellement abélien.

En effet, on fixe $p \in S$. On pose $W_p = W \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$ et soit G_p l'adhérence de l'image de Γ dans $GL(W_p)$. Soit μ_p la mesure de probabilité G_p-invariante sur $\mathbf{P}(W_p)$ qui est la mesure image de M sous l'application $W \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(W_p)$. Alors μ_p n'est pas supportée par un sous-espace projectif propre de W_p : si W' est un sous-espace $\mathbf{Q}_p$-vectoriel de W_p avec $\mu_p([W']) = 1$, où $[W']$ est l'image de W' dans $\mathbf{P}(W_p)$ alors $M(W' \cap W) = 1$ et donc $W' \cap W = W$, par minimalité de W, et donc $W' = W \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p = W_p$.

Par la Proposition 3.2.5, il existe donc un sous-groupe d'indice fini H_p de G_p dont le sous-groupe des commutateurs $[H_p, H_p]$ est relativement compact.

On pose $G = G_\infty \times \prod_{i=1}^{r} G_{p_i}$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1.3, l'image $\widetilde{\Gamma}$ de Γ dans G est discrète. Alors $\widetilde{\Gamma_0} := \widetilde{\Gamma} \cap \prod_{i=1}^{r} H_{p_i}$ est un sous-groupe d'indice fini dans $\widetilde{\Gamma}$ et son commutateur $[\widetilde{\Gamma_0}, \widetilde{\Gamma_0}]$ est fini. Comme $\widetilde{\Gamma_0} \subset GL(W)$ est linéaire, il s'ensuit par conséquent par le Lemme 3.2.7 que $\widetilde{\Gamma_0}$ et donc $\widetilde{\Gamma}$ est virtuellement abélien. Ce qui conclut la preuve du Théorème 3.1.7 $\square$

3.3.3 Preuve de la Proposition 3.1.1

Proof. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(X)$. Supposons qu'il existe un sous-groupe propre fermé Y tel que l'image $\overline{\Gamma}$ de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ soit finie. Comme X est compact et connexe, $\overline{X} = X/Y$ est un groupe non-trivial compact et connexe. Il est facile de voir qu'il existe deux sous-ensembles de $\overline{X}$ ouverts non vides $\overline{\Gamma}$-invariants qui sont disjoints. Les préimages U et V de ces ensembles dans X sont des sous-ensembles ouverts Γ-invariants non vides et disjoints. Comme le support de la mesure de Haar μ de X coïncide avec X, on a $\mu(U) \neq 0$ et $\mu(V) \neq 0$. Par conséquent, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'est pas ergodique.

Réciproquement, supposons que $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ n'est pas ergodique. Comme X est connexe, $\widehat{X}$ est sans torsion. Comme dans les parties précédentes, on voit $\widehat{X}$ comme un sous-groupe de l'espace $\mathbf{Q}$-vectoriel (éventuellement de dimension infinie) $V_{\mathbf{Q}} = \widehat{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On réalise la représentation de Koopman associée π_X de Γ dans $\ell^2(\widehat{X})$ comme dans la partie 3.2.1. Par non-ergodicité de l'action, il existe un vecteur Γ-invariant non nul $\xi \in \ell^2(\widehat{X} \setminus \{0\})$. Ainsi, on a (voir équation $(*)$ de 3.2.1)

$$\chi(x)\xi(\chi^\theta) = \xi(\chi) \text{ pour tous } \xi \in \ell^2(\widehat{X}), \chi \in \widehat{X}, \tag{$**$}$$

pour tout $(\theta, x) \in \Gamma$.

On pose $\eta := |\xi|$. Alors $\eta \neq 0$ et l'équation ($**$) montre que η est $p_a(\Gamma)$-invariant. Soit $\chi_0 \in \widehat{X} \setminus \{0\}$ tel que $\eta(\chi_0) \neq 0$. Comme $\eta \in \ell^2(\widehat{X})$ et comme $\eta \neq 0$, il s'ensuit que la $p_a(\Gamma)$-orbite de χ_0 est finie.

Soit W l'espace vectoriel engendré par la $p_a(\Gamma)$-orbite de χ_0 dans $V_{\mathbf{Q}}$ et soit $Y := (\widehat{X} \cap W)^\perp$ l'annulateur de $\widehat{X} \cap W$ dans X. Alors Y est un sous-groupe $p_a(\Gamma)$-invariant de X et $Y \neq X$ car $\chi_0 \neq 0$.

De plus, $\widehat{Y} \cong \widehat{X}/(\widehat{X} \cap W)$ est sans torsion, par conséquent Y est connexe : en effet, si $\chi \in \widehat{X}$ est tel que $n\chi \in W$ pour un entier $n \geq 1$, alors $\chi \in W$ car W est un sous-espace $\mathbf{Q}$-vectoriel.

On affirme que l'image de Γ dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est un groupe fini. En effet, comme la $p_a(\Gamma)$-orbite de χ_0 est finie, on peut trouver un sous-groupe distingué Λ dans $p_a(\Gamma)$ d'indice fini qui fixe χ_0. On pose

$$\Gamma_0 := p_a^{-1}(\Lambda) \cap \Gamma.$$

Alors Γ_0 est un sous-groupe distingué d'indice fini dans Γ.

Soit $\gamma = (\theta, x) \in \Gamma_0$. L'équation ($**$) montre que $\chi(x) = 1$ pour tout χ dans la $p_a(\Gamma)$-orbite de χ_0 et par conséquent pour tout $\chi \in \widehat{X} \cap W$. En utilisant l'équation ($*$) de la partie 3.2.1, il s'ensuit que Γ_0 agit trivialement sous la représentation de Koopman $\pi_{X/Y}$ sur $\ell^2(\widehat{X/Y}) = \ell^2(\widehat{X} \cap W)$ associée à l'action de Γ sur X/Y. Ainsi, l'image de Γ_0 dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$ est finie. $\square$

Chapter 4

Traces sur les groupes discrets et algèbres de von Neumann

4.1 Définition et premières propriétés.

Soient Γ, G des groupes discrets et supposons que G agit par automorphismes sur Γ. On considère les fonctions de type positif sur Γ qui sont invariantes par G. De telles fonctions ont été étudiées dans [Tho64c] et [Tho64b].

Définition 4.1.1. (i) Une fonction $\varphi : \Gamma \to \mathbf{C}$ est appelée **trace G-invariante** si :

- φ est de type positif, c'est-à-dire, pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ et tout $\gamma_1, ..., \gamma_n \in G$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(\gamma_j^{-1} \gamma_i \geq 0,$$

- $\varphi(g(\gamma)) = \varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$,
- φ est normalisée, c'est-à-dire, $\varphi(e) = 1$.

On note $\mathrm{Tr}(\Gamma, G)$ l'ensemble des traces G-invariantes sur Γ. Dans le cas où $G = \Gamma$ et Γ agit sur lui-même par conjugaison, on écrit $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ au lieu de $\mathrm{Tr}(\Gamma, \Gamma)$.

(ii) L'ensemble $\mathrm{Tr}(\Gamma, G)$ est un ensemble compact convexe dans la boule unité de $\ell^\infty(\Gamma)$ muni de la topologie *faible. Soit $\mathrm{Char}(\Gamma, G)$ l'ensemble des points extrémaux dans $\mathrm{Tr}(\Gamma, G)$.

(iii) Les fonctions $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma, G)$ seront appelées **caractères G-invariants** sur Γ et sont caractérisées par la propriété suivante : si ψ est une fonction de type positif G-invariante sur Γ qui est dominée par φ (c'est-à-dire, $\varphi - \psi$ est une fonction de type positif), alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un $\lambda > 0$.

La preuve de la proposition suivante est immédiate. On remarque que si N est un sous-groupe distingué de Γ et G-invariant, alors G agit par automorphismes sur le groupe quotient Γ/N.

Proposition 4.1.2. *Soit N un sous-groupe G-invariant de Γ.*

(i) Supposons de plus que N est un sous-groupe distingué de Γ et soit $p : \Gamma \to \Gamma/N$ la projection canonique. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma/N, G)$, on a $\varphi \circ p \in \mathrm{Tr}(\Gamma, G)$.

(ii) Avec N comme en (i), l'image de l'application

$$\mathrm{Tr}(\Gamma/N, G) \to \mathrm{Tr}(\Gamma, G), \varphi \mapsto \varphi \circ p$$

est $\left\{\psi \in \mathrm{Tr}(\Gamma, G) | \psi_{|N} = \mathbf{1}_N\right\}$.

(iii) Avec N comme en (i), on a $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma/N, G)$ si et seulement si $\varphi \circ p \in \mathrm{Char}(\Gamma, G)$.

4.2 Fonctions de type positif normalisées et triplets GNS

Soit φ une fonction de type positif normalisée sur Γ. On rappelle (voir [BdlHV08, Theorem C.4.10]) qu'il existe un triplet appelé **triplet GNS** $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ associé à φ, constitué d'une représentation cyclique unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec un vecteur cyclique unitaire ξ tel que :

$$\varphi(\gamma) = \langle \pi(\gamma)\xi, \xi \rangle \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Le triplet $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ est unique au sens suivant : si $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ est un autre triplet GNS associé à φ, alors il existe un *unique* isomorphisme d'espaces de Hilbert $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tel que

$$U\pi(\gamma)U^{-1} = \pi'(\gamma) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ et } U\xi = \xi'$$

Les traces invariantes sur un sous-groupe de Γ peuvent être induites en des traces invariantes sur Γ.

Pour une fonction $\psi : Y \to \mathbf{C}$ définie sur un sous-ensemble Y d'un ensemble X, on note $\widetilde{\psi} : X \to \mathbf{C}$ donnée par

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) \text{ si } x \in Y, \\ 0 \text{ si } x \notin Y \end{cases} .$$

Proposition 4.2.1. *Soit N un sous-groupe G-invariant de Γ et $\psi \in \mathrm{Tr}(N, G)$. Alors $\widetilde{\psi} \in \mathrm{Tr}(\Gamma, G)$. De plus, si σ est une représentation GNS de N associée à ψ, alors la représentation GNS de Γ associée à $\widetilde{\psi}$ est équivalente à la représentation induite $\mathrm{Ind}_N^\Gamma \sigma$.*

Proof. Posons $\varphi = \widetilde{\psi}$. Il est évident que φ est G-invariant. Le fait que φ soit une fonction de type positif peut être directement vérifié à partir de la définition d'une telle fonction (voir [HR70, 32.43]). Comme le but est d'identifier la représentation GNS associée à φ, nous utiliserons une autre preuve pour ce fait.

Soit $(\sigma, \mathcal{K}, \eta)$ un triplet GNS associé à ψ. Soit $\pi = \mathrm{Ind}_N^\Gamma \sigma$ réalisée sur $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/N, \mathcal{K})$, comme dans [Fol95, Remark 2, §6.1]. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ défini par $\xi(N) = \eta$ et $\xi(\gamma N) = 0$ si $\gamma \notin N$. Alors $\varphi(\gamma) = \langle \pi(\gamma)\xi, \xi \rangle$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et ξ est un vecteur cyclique pour π. Ainsi $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ est un triplet GNS pour φ. □

Dans la suite, nous utiliserons de manière cruciale et à maintes reprises le lemme élémentaire suivant.

Lemme 4.2.2. Soit Γ un groupe discret, φ une fonction de type positif sur Γ telle que $\varphi(e) = 1$. Soit $\gamma \in \Gamma$. On suppose qu'il existe une suite $y_n \in \Gamma$ telle que

1. les y_n sont 2 à 2 distincts,
2. $\varphi(y_n^{-1} y_m) = 0$ pour tout $n \neq m$,
3. $\varphi(\gamma) = \varphi(y_n)$ pour tout n.

Alors $\varphi(\gamma) = 0$.

Proof. Soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ le triplet GNS associé à φ. Alors 1) et 2) montrent que la suite $\pi(y_n^{-1})\xi$ est une suite infinie de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et qu'elle est donc faiblement convergente vers 0 dans $\mathcal{H}$.

En effet

$$\langle \pi(y_m)\xi, \pi(y_n)\xi \rangle = \langle \pi(y_n^{-1})\pi(y_m)\xi, \xi \rangle = \varphi(y_n^{-1}y_m) = 0.$$

Par 3), il s'ensuit que

$$\varphi(\gamma) = \varphi(y_n) = \lim_n \langle \pi(y_n)\xi, \xi \rangle = 0.$$

□

Corollaire 4.2.3. *Soient $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telle que*

$$\varphi([x_n, \gamma]^{-1}[x_m, \gamma]) = 0 \textit{ pour tout } n \neq m,$$

où $[x_n, \gamma] = x_n^{-1}\gamma x_n \gamma^{-1}$. Alors $\varphi(\gamma) = 0$.

Proof. Posons $y_n = [x_n, \gamma]\gamma$; alors, par hypothèse et par invariance de φ, on a $\varphi(y_n^1 y_m) = 0$ pour tous $n \neq m$. Comme

$$\varphi(\gamma) = \varphi(x_n^{-1}\gamma x_n) = \varphi([x_n, \gamma]\gamma) = \varphi(y_n)$$

pour tout n, on conclut avec le Lemme 4.2.2 □

4.3 Fonctions de type positif et algèbres de von Neumann

Nous allons étudier les traces sur les groupes discrets au moyen des algèbres de von Neumann engendrées par leurs représentations GNS.

Proposition 4.3.1. *Soit G un groupe discret et Γ un sous-groupe distingué de G. Soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma, G)$ et soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à φ. Alors il existe une représentation unitaire $g \mapsto U_g$ de G sur $\mathcal{H}$ avec les propriétés suivantes :*

- *$U_g\pi(\gamma) = \pi(g^{-1}\gamma g)U_g$ pour tous $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$, et*

- $U_g\xi = \xi$ *pour tout* $g \in G$.

Proof. Soit $g \in G$. Soit la représentation unitaire π^g de Γ sur $\mathcal{H}$ définie par $\pi^g(\gamma) = \pi(g\gamma g^{-1})$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Comme φ est G-invariante, le triplet $(\pi^g, \mathcal{H}, \xi)$ est un autre triplet GNS associé à φ. Par conséquent, il existe un unique opérateur $U_g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tel que

$$U_g\pi(\gamma) = \pi(g^{-1}\gamma g)U_g, \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ et } U_g\xi = \xi.$$

L'unicité de U_g implique que $U_{g_1g_2} = U_{g_1}U_{g_2}$. En effet,

$$\begin{aligned} U_{g_1}U_{g_2}\pi(\gamma) &= U_{g_1}\pi(g_2\gamma g_2^{-1})U_{g_2} \\ &= \pi(g_1g_2\gamma g_2^{-1}g_1^{-1})U_{g_1}U_{g_2} \end{aligned}$$

et $U_{g_1}U_{g_2}\xi = \xi$. Ainsi $U_{g_1}U_{g_2}$ vérifie les mêmes conditions que $U_{g_1g_2}$; il s'ensuit que $U_{g_1g_2} = U_{g_1}U_{g_2}$, par unicité. L'application $g \mapsto U_g$ est donc bien une représentation. $\square$

La proposition suivante caractérise l'extrêmalité d'une trace invariante en termes d'algèbres de von Neumann.

Proposition 4.3.2. *Soient G un groupe discret et Γ un sous-groupe distingué de G. Soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma, G)$. Soient $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à φ et $g \mapsto U_g$ la représentation de G sur $\mathcal{H}$ comme dans la Proposition 4.3.1. Soit $\mathcal{M}_\varphi$ la sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ engendrée par $\pi(\Gamma) \cup \{U_g | g \in G\}$. Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $0 \leq T \leq I$, soit φ_T défini par $\varphi_T(\gamma) = \langle \pi(\gamma)T\xi, T\xi\rangle$ pour $\gamma \in \Gamma$. Alors $T \mapsto \varphi_T$ est une bijection entre $\{T \in \mathcal{M}'_\varphi | 0 \leq T \leq I\}$ et l'ensemble des fonctions de type positif sur Γ qui sont G-invariantes et qui sont dominées par φ. En particulier, on a $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma, G)$ si et seulement si $\mathcal{M}'_\varphi = \mathbf{C}I$.*

Proof. Comme il est bien connu, $T \mapsto \varphi_T$ est une bijection entre $\{T \in \pi(\Gamma)' | 0 \leq T \leq I\}$ et l'ensemble des fonctions de type positif sur Γ qui sont dominées par φ (appliquer [Dix77, Proposition 2.5.1] à l'$*$-algèbre $\mathbf{C}[\Gamma]$, avec le produit de convolution et l'involution donnée par $f^*(\gamma) = f(\gamma^{-1})$ pour $f \in \mathbf{C}[\Gamma]$).

Par conséquent, il suffit de vérifier que, pour $T \in \pi(\Gamma)'$ avec $0 \leq T \leq I$, la fonction φ_T est G-invariante si et seulement si $T \in \{U_g | g \in G\}'$.

Soit $T \in \mathcal{M}'_\varphi$ avec $0 \leq T \leq I$. Pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_T(g\gamma g^{-1}) &= \langle \pi(g\gamma g^{-1})T\xi, T\xi\rangle \\
&= \langle U_g\pi(\gamma)U_{g^{-1}}T\xi, T\xi\rangle \\
&= \langle \pi(\gamma)TU_{g^{-1}}\xi, TU_{g^{-1}}\xi\rangle \\
&= \langle \pi(\gamma)T\xi, T\xi\rangle \\
&= \varphi_T(\gamma),
\end{aligned}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ainsi φ_T est invariante par conjugaison.

Réciproquement, supposons que φ_T est G-invariante pour $T \in \pi(\Gamma)'$ avec $0 \leq T \leq I$. Soit $g \in G$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{U_{g^{-1}}TU_g}(\gamma) &= \langle \pi(\gamma)U_{g^{-1}}TU_g\xi, U_{g^{-1}}TU_g\xi\rangle \\
&= \langle \pi(\gamma)U_{g^{-1}}T\xi, U_{g^{-1}}T\xi\rangle \\
&= \langle U_g\pi(\gamma)U_{g^{-1}}T\xi, T\xi\rangle \\
&= \langle \pi(g\gamma g^{-1})T\xi, T\xi\rangle \\
&= \varphi_T(g\gamma g^{-1}) = \varphi_T(\gamma).
\end{aligned}$$

Ainsi, $U_{g^{-1}}TU_g$ est un multiple scalaire de T, par unicité de T. Comme U_g est unitaire, il s'ensuit que $U_{g^{-1}}TU_g = T$ pour tout $g \in G$. Ainsi, $T \in \mathcal{M}'_\varphi$. $\square$

Nous allons maintenant appliquer la Proposition 4.3.2 dans le cas $\Gamma = G$. Nous aurons besoin du résultat général suivant de la théorie des algèbres de von Neumann (pour la preuve, voir Théorème 3 du Chap.1, §6 dans [Dix69])

Fait : Soit τ une trace normale et fidèle sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$. Pour T dans le centre $Z(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ avec $0 \leq T \leq I$, soit $\tau_T : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ définie par $\tau_T(S) = \tau(ST)$ pour tout $S \in \mathcal{M}$. L'application $T \mapsto \tau_T$ est une bijection entre $\{T \in Z(\mathcal{M}) | 0 \leq T \leq I\}$ et l'ensemble des traces normales τ' sur $\mathcal{M}$ dominées par τ (c'est-à-dire, telles que $\tau'(S) \leq \tau(S)$ pour tout $S \in \mathcal{M}$ avec $S \geq 0$).

Corollaire 4.3.3. *Soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$ et soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à φ.*

(i) La forme linéaire $T \mapsto \langle T\xi, \xi\rangle$ est une trace fidèle et normale sur $\pi(\Gamma)''$.

(ii) Le commutant $\mathcal{M}'_\varphi$ de $\mathcal{M}_\varphi$ coïncide avec le centre de l'algèbre de von Neumann $\pi(\Gamma)''$ engendrée par $\pi(\Gamma)$. En particulier, $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma)$ si et seulement si $\pi(\Gamma)''$ est un facteur.

Proof. (i) On vérifie immédiatement que τ, défini comme ci-dessus, est une trace sur $\pi(\Gamma)''$. Il est clair que τ est normal. Soit $T \in \pi(\Gamma)''$ tel que $\tau(T^*T) = 0$. Alors $\| T\pi(\gamma)\xi \|^2 = \tau(\pi(\gamma)T^*T)\pi(\gamma)) = 0$, c'est-à-dire , $T\pi(\gamma)\xi = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; par conséquent $T = 0$ car ξ est un vecteur cyclique pour π. Ainsi τ est fidèle.

(ii) Remarquons tout d'abord que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$U_\gamma \pi(x) U_{\gamma^{-1}} = \pi(\gamma x \gamma^{-1}) = \pi(\gamma)\pi(x)\pi(\gamma^{-1}) \text{ pour tout } x \in \Gamma,$$

où $\gamma \mapsto U_\gamma$ est la représentation de Γ définie dans la Proposition 4.3.1. Ainsi, on a $U_\gamma T U_{\gamma^{-1}} = \pi(\gamma)T\pi(\gamma^{-1})$ pour tout $T \in \pi(\Gamma)''$ Il s'ensuit que le centre $\pi(\Gamma)'' \cap \pi(\Gamma)'$ de $\pi(\Gamma)''$ est contenu dans $\mathcal{M}'_\varphi$.

Réciproquement, soit $T \in \mathcal{M}'_\varphi$ vérifiant $0 \leq T \leq I$. Par la Proposition 4.3.2, φ_T est une fonction de type positif Γ-invariante dominée par φ. L'extension canonique de φ_T à $\pi(\Gamma)''$ est une trace normale τ_T sur $\pi(\Gamma)''$. Ainsi, par le résultat rappelé ci-dessus, $\tau_T = \tau_S$ pour un unique $S \in \pi(\Gamma)' \cap \pi(\Gamma)''$ avec $0 \leq S \leq I$. Ceci montre que $\varphi_T = \varphi_S$. Comme T et S appartiennent tous les deux à $\pi(\Gamma)'$, il s'ensuit que $T = S$. Donc, $T \in \pi(\Gamma)' \cap \pi(\Gamma)''$. Il s'ensuit que $\mathcal{M}'_\varphi$ est contenu dans $\pi(\Gamma)' \cap \pi(\Gamma)''$. □

Etant donnée une trace invariante sur Γ, il existe deux sous-groupes invariants de Γ qui joueront un rôle important par la suite.

Proposition 4.3.4. *Soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$. On définit :*

$$K_\varphi = \{\gamma \in \Gamma | \varphi(\gamma) = 1\} \textit{ et } P_\varphi = \{\gamma \in \Gamma || \varphi(\gamma)| = 1\}$$

Alors :

(i) K_φ et P_φ sont des sous-groupes fermés distingués de Γ avec $K_\varphi \subset P_\varphi$.

(ii) Pour $x \in P_\varphi$ et $\gamma \in \Gamma$, on a $\varphi(x\gamma) = \varphi(x)\varphi(\gamma)$, en particulier la restriction de φ à P_φ est un caractère unitaire Γ-invariant de P_φ.

(iii) On suppose que Γ est un sous-groupe distingué d'un groupe discret G et que $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma, G)$. Alors le sous-groupe $Z(G) \cap \Gamma$ est contenu dans P_φ, où $Z(G)$ est le centre de G.

Proof. Soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à φ. En utilisant le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, il est clair que

$$K_\varphi = \{\gamma \in \Gamma | \pi(\gamma)\xi = \xi\} \text{ et } P_\varphi = \{\gamma \in \Gamma | \pi(\gamma)\xi = \varphi(\gamma)\xi\}.$$

Les affirmations (i) et (ii) proviennent de ce fait.

Soit $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma, G)$ et $z \in Z(G) \cap \Gamma$. Alors $\pi(z)$ commute avec $\pi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et avec U_g pour tout $g \in G$, où $g \mapsto U_g$ est la représentation de G associée à φ comme dans la Proposition 4.3.1. Par la Proposition 4.3.2, $\pi(z)$ est un multiple scalaire de I et par conséquent $z \in P_\varphi$.

□

Corollaire 4.3.5. *Soit* $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma)$ *alors* $\varphi(zx) = \varphi(z)\varphi(x)$ *pour tout* $z \in Z(\Gamma)$

Le résultat suivant concerne la restriction d'un caractère d'un groupe G à un sous-groupe distingué de G et jouera un rôle crucial dans la suite ; ce résultat a été démontré dans [Tho64c, Lemma 14]. Nous en donnons une preuve plus transparente et plus courte, basée sur le lien établi plus haut entre caractères et algèbres de von Neumann.

Théorème 4.3.6. *Soit G un groupe discret, N un sous-groupe distingué de G et* $\psi \in \mathrm{Char}(G)$. *Alors* $\psi_{|N} \in \mathrm{Char}(N, G)$.

Proof. Soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à ψ. Posons $\varphi := \psi_{|N}$ et soit $\mathcal{K}$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ engendré par $\{\pi(x)\xi | x \in N\}$. Alors $(\pi_{|N}, \mathcal{K}, \xi)$ est un triplet GNS associé à φ.

Soit $g \mapsto U_g$ la représentation de G sur $\mathcal{H}$ associée à ψ comme dans la Proposition 4.3.1. Comme $U_g \pi(x) U_{g^{-1}} = \pi(gxg^{-1})$, et $U_g \xi = \xi$ pour tous $g \in G$, $x \in N$, le sous-espace $\mathcal{K}$ est invariant par U_g pour tout $g \in G$. La représentation de G sur $\mathcal{K}$ associée à φ est donc $g \mapsto U_g|\mathcal{K}$.

Par la Proposition 4.3.2, il suffit de montrer que $\mathcal{M}'_\varphi = \mathbf{C}I$, où $\mathcal{M}_\varphi$ est la sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ engendrée par $\{\pi(x)_{|\mathcal{K}} | x \in N\} \cup \{U_{g|\mathcal{K}} | g \in G\}$.

Soit $T \in \mathcal{M}'_\varphi$ vérifiant $0 \leq T \leq I$. Posons $\eta := T\xi$. On remarque que $U_g \eta = \eta$ pour tout $g \in G$, car T commute avec tout les U_g. Considérons la fonction linéaire τ' sur $\pi(G)''$ donnée par $\tau'(S) = \langle S\eta, \eta \rangle$ pour $S \in \pi(G)''$. On affirme que τ' est une trace normale sur $\pi(G)''$. En effet, il est clair que

τ est normale; de plus, pour $g, h \in G$, on a

$$\begin{aligned}\tau'(ghg^{-1}) &= \langle \pi(ghg^{-1})T\xi, T\xi\rangle \\ &= \langle \pi(h)TU_{g^{-1}}\xi, TU_{g^{-1}}\xi\rangle \\ &= \langle \pi(h)T\xi, T\xi\rangle = \tau'(h).\end{aligned}$$

Soit $\tau'' := \tau + \tau'$, où τ est la trace fidèle sur $\pi(G)''$ définie par φ, comme dans le Corollaire 4.3.3. Alors τ'' est une trace fidèle et normale sur $\pi(G)''$ et τ'' est dominée par τ et τ'. Comme $\pi(G)''$ est un facteur, il s'ensuit que τ et τ' sont toutes les deux proportionnelles à τ''. Par conséquent, il existe $\lambda > 0$ tel que $\tau' = \lambda\tau$. En particulier, on a

$$\langle \pi(x)T\xi, T\xi\rangle = \langle \pi(x)\sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}\xi\rangle \text{ pour tout } x \in N.$$

Comme $T \in (\pi(N)|\mathcal{K})'$ et $0 \leq T \leq I$, il s'ensuit que $T = \sqrt{\lambda}I_{\mathcal{K}}$. □

Le résultat suivant ramène la description des caractères d'un produit de groupes à celle de ses facteurs ; il a été démontré dans [Tho64c] et nous en donnons une preuve plus transparente et plus courte.

Théorème 4.3.7. *Soient* Γ_1, Γ_2 *des groupes discrets. Alors*

$$\mathrm{Char}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \{\varphi_1 \otimes \varphi_2 | \varphi_1 \in \mathrm{Char}(\Gamma_1), \varphi_2 \in \mathrm{Char}(\Gamma_2)\}.$$

Proof. Posons $\Gamma := \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Pour $i = 1, 2$, soit $\varphi_i \in \mathrm{Char}(\Gamma_i)$. Démontrons que $\varphi := \varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathrm{Char}(\Gamma)$. Soit $(\pi_i, \mathcal{H}_i, \xi_i)$ un triplet GNS associé à φ_i. Alors $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ est un triplet GNS associé à φ où π est la représentation produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ et $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$. Par la Proposition 4.3.3, il faut montrer que $\pi(\Gamma)''$ est un facteur. Pour cela, il faut prouver que l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ engendrée par $\pi(\Gamma)'' \cup \pi(\Gamma)'$ coïncide avec $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ceci est en effet le cas: $\pi(\Gamma)''$ contient $\pi_1(\Gamma_1)'' \otimes I$ et $I \otimes \pi_2(\Gamma_2)''$, $\pi(\Gamma)'$ contient $\pi_1(\Gamma_1)' \otimes I$ et $I \otimes \pi_2(\Gamma_2)$; par conséquent $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, où $\mathcal{M}_i$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_i(\Gamma_i) \cup \pi_i(\Gamma_i)'$. Comme $\varphi_i \in \mathrm{Char}(\Gamma_i)$, on a $\mathcal{M}_i = \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$. Ainsi $\mathcal{M}$ contient l'algèbre de von Neumann engendrée par $\{T_1 \otimes T_2 | T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)\}$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Réciproquement, soit $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma)$. Soit $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ un triplet GNS associé à φ. Par la Proposition 4.3.3, $\mathcal{M} := \pi(\Gamma)''$ est un facteur.

Pour $i = 1, 2$, on pose $\mathcal{M}_i := \pi(\Gamma_i)''$, où on identifie Γ_i avec le sous-groupe correspondant de Γ. On affirme que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des facteurs. En effet, comme $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2'$, le centre $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_1'$ de $\mathcal{M}_1$ est contenu dans $\mathcal{M}_2' \cap \mathcal{M}_1'$. Comme $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ engendre $\mathcal{M}$, il s'ensuit que $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_1'$ est contenu dans $\mathcal{M}'$ et donc dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. Par conséquent $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_1' = \mathbf{C}I$, car $\mathcal{M}$ est un facteur. Ainsi, $\mathcal{M}_1$, et de façon similaire $\mathcal{M}_2$ sont des facteurs.

On rappelle que $\mathcal{M}$ a une trace fidèle et normale τ donnée par $\tau(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$ pour $T \in \mathcal{M}$. La restriction $\tau^{(1)}$ de τ à $\mathcal{M}_1$ est une trace fidèle et normale sur $\mathcal{M}_1$. Pour tout $T_2 \in \pi(\Gamma_2)'$ avec $0 \leq T_2 \leq I$ et $T \neq 0$, soit $\tau^{(1)}_{T_2}$ la forme linéaire positive et normale définie sur $\mathcal{M}_1$ donnée par $\tau^{(1)}_{T_2}(T_1) = \tau(T_1T_2)$ pour $T_1 \in \mathcal{M}_1$. Pour $T_1, T_1' \in \mathcal{M}_1$, on a

$$\tau^{(1)}_{T_2}(T_1T_1') = \tau(T_1T_1'T_2) = \tau(T_1T_2T_1') = \tau(T_1'T_1T_2) = \tau^{(1)}_{T_2}(T_1'T_1).$$

Ainsi, $\tau^{(1)}_{T_2}$ est une trace normale sur $\mathcal{M}_1$. Il est clair que $\tau^{(1)}_{T_2}$ est dominée par $\tau^{(1)}$. Comme $\mathcal{M}_1$ est un facteur, il s'ensuit par le résultat cité avant le Corollaire 4.3.3 qu'il existe un scalaire $\lambda(T_2) \geq 0$ tel que $\tau^{(1)}_{T_2} = \lambda(T_2)\tau^{(1)}$, c'est-à-dire,

$$\tau(T_1T_2) = \lambda(T_2)\tau(T_1) \text{ pour tout } T_1 \in \mathcal{M}_1.$$

En prenant $T_1 = I$, on voit que $\lambda(T_2) = \tau(T_2)$. Il s'ensuit que

$$\tau(T_1T_2) = \tau(T_1)\tau(T_2) \text{ pour tous } T_1 \in \mathcal{M}_1, T_2 \in \mathcal{M}_2$$

et en particulier $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, pour $\varphi_i = \varphi_{|\Gamma_i}$. □

On rappelle (voir Proposition 4.1.2) que, quand N est un sous-groupe distingué d'un groupe G, on peut identifier $\mathrm{Char}(G/N)$ avec le sous-ensemble $\{\varphi \in \mathrm{Char}(G) | \varphi_{|N} = 1\}$ de $\mathrm{Char}(G)$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.7.

Corollaire 4.3.8. *Soient $\Gamma, \Gamma_1, ..., \Gamma_r$ des groupes discrets et soit $p : \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_r \to \Gamma$ un homomorphisme surjectif. Alors*

$$\mathrm{Char}(\Gamma) = \{\varphi = \varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_r | \varphi_{|N} = 1 \text{ et } \varphi_i \in \mathrm{Char}(\Gamma_i), i = 1, ..., r\},$$

où N est le noyau de p. En particulier, pour $\varphi \in \mathrm{Char}(\Gamma)$, on a

$$\varphi(g_1...g_n) = \varphi(g_1)...\varphi(g_n)$$

pour tout $g_i \in p(\{e\} \times ... \times \Gamma_i \times ... \times \{e\})$.

Chapter 5

Caractères de groupes unipotents

5.1 Traces invariantes sur les groupes abéliens

Soit A un groupe abélien discret

Définition 5.1.1. On rappelle que le dual de Pontrjagin $\widehat{A}$ de A est l'ensemble des morphismes de groupes continus $A \to \mathbb{U}$. C'est un groupe abélien compact. Alors $\mathrm{Tr}(A)$ est l'ensemble des fonctions de type positif normalisées sur A et $\mathrm{Char}(A) = \widehat{A}$.

Définition 5.1.2.
- On écrit $\mathrm{Prob}(\widehat{A})$ pour l'ensemble des mesures de probabilité régulières sur les ensembles boréliens de $\widehat{A}$.
- Pour $\mu \in \mathrm{Prob}(\widehat{A})$, on note $\mathcal{F}(\mu) : A \to \mathbf{C}$ la transformée de Fourier-Stieltjes de μ, donnée par

$$\mathcal{F}(\mu)(a) = \int_{\widehat{A}} \chi(a) d\mu(\chi) \text{ pour tout } a \in A.$$

Alors, par le théorème de Bochner (voir par exemple [HR70, §33]), l'application $\mathcal{F} : \mu \mapsto \mathcal{F}(\mu)$ est une bijection entre $\mathrm{Prob}(\widehat{A})$ et $\mathrm{Tr}(A)$.

Soit G un groupe agissant par automorphismes sur A. Alors G agit par automorphismes continus sur $\mathrm{Tr}(A)$ et $\widehat{A} = \mathrm{Char}(A)$, via l'action duale donnée par $\varphi^g(a) = \varphi(g^{-1}(a))$ pour $\varphi \in \widehat{A}, g \in G, a \in A$. Soit $(g, \mu) \mapsto g_*\mu$ l'action induite de G sur $\mathrm{Prob}(\widehat{A})$; ainsi, $g_*\mu$ est l'image de $\mu \in \mathrm{Prob}(\widehat{A})$ sous l'application $\chi \mapsto \chi^g$.

Définition 5.1.3. Soit $\mathrm{Prob}(\widehat{A})^G$ le sous-ensemble de $\mathrm{Prob}(\widehat{A})$ constitué des mesures de probabilité G-invariantes, et notons $\mathrm{Prob}(\widehat{A})^G_{erg}$ les mesures dans $\mathrm{Prob}(\widehat{A})^G$ qui sont ergodiques.

Proposition 5.1.4. *Soient A un groupe abélien discret et G un groupe agissant par automorphismes sur A. La transformée de Fourier-Stieltjes $\mathcal{F}$: $\mathrm{Prob}(\widehat{A}) \to \mathrm{Tr}(A)$ se restreint en des bijections $\mathcal{F} : \mathrm{Prob}(\widehat{A})^G \to \mathrm{Tr}(A, G)$ et $\mathcal{F} : \mathrm{Prob}(\widehat{A})^G_{erg} \to \mathrm{Char}(A, G)$.*

Proof. L'affirmation provient du fait que $\mathcal{F} : \mathrm{Prob}(\widehat{A}) \to \mathrm{Tr}(A)$ est une application affine G-équivariante et que $\mathrm{Prob}(\widehat{A})^G_{erg}$ est l'ensemble des points extrémaux dans l'ensemble compact convexe $\mathrm{Prob}(\widehat{A})^G$. $\square$

5.2 Groupes algébriques unipotents

Soit U_n le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes $n \times n$ pour $n \geq 1$. Alors U_n est le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ et son algèbre de Lie est l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_n$ des matrices triangulaires supérieures strictes. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{u}_n \to U_n$ est une bijection et par la formule de Campbell-Hausdorff, il existe une application polynomiale $P : \mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n \to \mathfrak{u}_n$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ telle que $\exp(X)\exp(Y) = \exp(P(X, Y))$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{u}_n$. On note $\log : U_n \to \mathfrak{u}_n$ l'application inverse de exp.

Soit $\mathfrak{u}$ une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbf{Q}$. Alors par les théorèmes de Ado et Engel, $\mathfrak{u}$ peut être vue comme une sous-algèbre de $\mathfrak{u}_n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors $\exp(\mathfrak{u})$ est un sous-groupe algébrique de U_n.

Soit U le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ unipotent, c'est-à-dire un sous-groupe algébrique de U_n pour un certain $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{u} = \log(U)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{u}_n$ et $\exp : \mathfrak{u} \to U$ est une bijection (pour cela voir [Mil17, Chap.14]).

Pour tout $u \in U$, l'automorphisme de U donné par conjugaison avec u induit un automorphisme $\mathrm{Ad}(u)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ donnée par la propriété

$$\exp(Ad(u)(X)) = u \exp(X) u^{-1} \text{ pour tout } X \in \mathfrak{u}.$$

On observe qu'une fonction φ sur U est centrale (c'est-à-dire invariante sur les classes de conjugaison de U) si et seulement si la fonction $\varphi \circ \exp$ sur $\mathfrak{u}$ est $\mathrm{Ad}(U)$-invariante.

5.3 Résultat principal

Soient U un groupe unipotent algébrique sur $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. Soit $\widehat{\mathfrak{u}}$ le dual du groupe abélien $(\mathfrak{u}, +)$.

On rappelle que U agit par la représentation adjointe Ad sur $\mathfrak{u}$. L'action coadjoint Ad^* de U est l'action duale de U sur $\widehat{\mathfrak{u}}$.

Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$, on pose

$$\mathfrak{k}_\lambda = \{X \in \mathfrak{u} | \lambda(\mathrm{Ad}(u)(tX)) = 1 \text{ pour tous } u \in U, t \in \mathbf{Q}\}$$

et

$$\mathfrak{p}_\lambda = \{X \in \mathfrak{u} | \lambda(\mathrm{Ad}(u)(tX)) = \lambda(tX) \text{ pour tous } u \in U, t \in \mathbf{Q}\}.$$

Alors $\mathfrak{k}_\lambda$ et $\mathfrak{p}_\lambda$ sont des idéaux de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{k}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\lambda$.

On rappelle que la quasi-orbite de $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ sous l'action coadjointe Ad^* de U est l'adhérence de son orbite $\mathrm{Ad}^*(u)\lambda$ dans $\widehat{\mathfrak{u}}$.

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.3.1. *Soit U un groupe unipotent algébrique sur $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$, soit $\varphi_\lambda : U \to \mathbf{C}$ définie par*

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda(X) & \text{si } x = \exp X, X \in \mathfrak{p}_\lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a :

(i) $\mathrm{Char}(U) = \{\varphi_\lambda | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}\}$.

(ii) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$, on a $\varphi_{\lambda_1} = \varphi_{\lambda_2}$ si et seulement si λ_1 et λ_2 ont la même quasi-orbite sous l'action coadjointe Ad^* *de U.*

Par conséquent, l'application

$$\Phi : \widehat{\mathfrak{u}} \to \mathrm{Char}(U), \qquad \lambda \to \varphi_\lambda$$

induit une bijection

$$\widetilde{\Phi} : \widehat{\mathfrak{u}}/\mathrm{Ad}^* \to \mathrm{Char}(U).$$

5.4 Preuve de la partie (i) du Théorème 5.3.1.

Pour démontrer le Théorème 5.3.1 nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 5.4.1. Soient M et N deux sous-groupes d'un groupe nilpotent non abélien G tels que M est distingué et $Z(G) \subseteq N$. Si $M \supsetneq N$ alors il existe un élément $x \in M \setminus N$ tel que $(x, G) \subset N$ et $(x, G) \neq \{e\}$, où $(x, G) = \{xgx^{-1}g^{-1} | g \in G\}$.

Proof. Soit $M^{(0)} = M$; on définit $M^{(k)}$ de manière récursive par $M^{(k+1)} = (M^{(k)}, G)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Comme M est distingué, on a $M^{(k)} \subseteq M$ pour tout k. Ainsi on a $M^{(n)} \subseteq N$ pour un certain $n \neq 0$ minimal car G est nilpotent. Ainsi $(M^{(n-1)}, G) \subseteq N$ mais $M^{(n-1)} \nsubseteq N$. Soit alors $x \in M^{(n-1)} \setminus N$. Comme $Z(G) \subset N$, on a $x \notin Z(G)$ et le sous-ensemble (x, G) de N est donc $\neq \{e\}$. □

Soit U un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. On rappelle que si $\mathfrak{i}$ est un idéal de $\mathfrak{u}$, alors l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{u}/\mathfrak{i}$ est une algèbre de Lie nilpotent sur $\mathbf{Q}$. Le groupe nilpotent correspondant $U/\exp\mathfrak{i}$ est un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$. Si on désigne par

$$\rho : U \to U/\exp(\mathfrak{i}) \text{ et } \rho' : \mathfrak{u}/\mathfrak{u}/\mathfrak{i}$$

les projections canoniques, on a $\exp\circ\rho' = \rho \circ \exp$, où $\exp : \mathfrak{u} \to U$ et $\exp : \mathfrak{u}/\mathfrak{i} \to U/\exp\mathfrak{i}$ sont les applications exponentielles. On a également $\rho'(\mathrm{Ad}(u)X) = \mathrm{Ad}(\rho(u))\rho'(X)$ pour tous $u \in U$ et $X \in \mathfrak{u}$.

Soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(U)$. Soit P_φ et K_φ définit par la Proposition 4.3.4. Alors pour tout $x \in P_\varphi$ on a $(x, U) \subset K_\varphi$ où $(x, U) = \{xyx^{-1}y^{-1}, y \in U\}$

Montrons que les fonctions φ_λ qui apparaissent dans le Théorème 5.3.1 sont bien des éléments de $\mathrm{Tr}(U)$.

Lemme 5.4.2. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\rho' : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda$ l'application canonique. Alors on a :

(i) $\mathfrak{p}_\lambda = \rho'^{-1}(z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda))$, où $z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda)$ est le centre de $\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda$.

(ii) $\varphi_\lambda \in \mathrm{Tr}(U)$.

Proof. Notons $\rho : U \to U/\exp \mathfrak{k}_\lambda$ l'application canonique.

Preuve de (i) : Pour $X \in \mathfrak{u}$, on a

$$\begin{aligned} X \in \rho'^{-1}(z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda)) &\Leftrightarrow \rho'(X) \in z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ad}(\rho(u))\rho'(X) = \rho'(X), \qquad \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow \rho'(\mathrm{Ad}(u)X) = \rho'(X), \qquad \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ad}(u)X - X \in \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ad}(u)tX - tX \in \mathfrak{k}_\lambda, \qquad \forall u \in U, t \in \mathbf{Q} \\ &\Leftrightarrow \lambda(\mathrm{Ad}(u)tX) = \lambda(tX) \qquad \forall u \in U, t \in \mathbf{Q} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{p}_\lambda. \end{aligned}$$

Preuve de (ii) : Il est clair que $\varphi_\lambda(e) = 1$. Comme $uxu^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(u)X)$ pour tous $x = \exp X$ et $u \in U$, φ_λ est invariante par conjugaison. Il suffit donc de montrer que φ_λ est de type positif.

Comme $\lambda = 1$ sur $\mathfrak{k}_\lambda$, on a $\lambda = \lambda' \circ \rho'$ pour un $\lambda' \in \widehat{\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda}$. Par (i), on a donc $\varphi_\lambda = \varphi' \circ \rho$ pour la fonction $\varphi' : U/\exp \mathfrak{k}_\lambda \to \mathbf{C}$ définie par

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \lambda'(X) \text{ si } x = \exp(X) \text{ pour } X \in Z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda) \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme la restriction de λ' à $z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda)$ est un caractère unitaire de $z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda)$, la fonction $\widetilde{\lambda'|_{z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}\lambda)}}$ est de type positif sur $\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda$ par la Proposition 4.2.1. De plus la restriction de exp à $z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda)$ est un isomorphisme de groupes exp : $z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}_\lambda) \to Z(U/\exp \mathfrak{k}_\lambda)$, où $Z(U/\exp \mathfrak{k}_\lambda)$ est le centre de $U/\exp \mathfrak{k}_\lambda$. Il s'ensuit que $\varphi' = \widetilde{\lambda'|_{z(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}\lambda)}} \circ \log$ est une fonction de type positif sur $U/\exp \mathfrak{k}_\lambda$. Par conséquent, $\varphi_\lambda = \varphi' \circ \rho$ est une fonction de type positif sur U. $\square$

Preuve de (i) du Théorème 5.3.1

Etape 1 :

On va montrer que, pour tout $\varphi \in \mathrm{Char}(U)$, il existe $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ tel que $\varphi = \varphi_\lambda$. On montre ce résultat par récurrence forte sur la dimension n de $\mathfrak{u}$. Le cas $n = 1$ étant trivial, on suppose que $n > 1$ et que l'assertion est vraie pour tout groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ dont l'algèbre de Lie est de dimension $< n$.

Soit $\varphi' = \varphi|_{Z(U)}$ la restriction de φ au centre $Z(U)$ de U. Alors, par le Corollaire 4.3.5, $\varphi' \in \widehat{Z(U)}$. Deux cas se présentent :

(i) Soit il existe un sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ du centre $z(\mathfrak{u})$ de $\mathfrak{u}$ tel que φ' est trivial sur $\exp \mathfrak{k}$.

(ii) Soit il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ de $z(\mathfrak{u})$ tel que φ' est trivial sur $\exp \mathfrak{k}$.

Supposons dans un premier temps qu'il existe un sous-espace vectoriel non nul $k \subseteq z(\mathfrak{u})$ tel que φ' est trivial sur $\exp \mathfrak{k}$. Ainsi φ est trivial sur $\exp \mathfrak{k}$. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est contenue dans le centre de $\mathfrak{u}$ et est donc un idéal de $\mathfrak{u}$. Ainsi $K = \exp \mathfrak{k}$ est un sous-groupe distingué de U. Alors U/K est un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}/k$. Soient $\rho : U \to U/K$ est $\rho' : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}/\mathfrak{k}$ les projections canoniques.

Par la Proposition 4.1.2, il existe donc $\varphi_1 \in \mathrm{Char}(U/K)$ tel que $\varphi = \varphi_1 \circ \rho$. Ainsi, par l'hypothèse de récurrence appliquée à U/K, il existe $\theta \in \widehat{\mathfrak{u}}$ tel que $P_\theta = P_{\varphi_1}$ et $\varphi_1 = \varphi_\theta$.

Soit alors $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ défini par $\lambda(X) = \theta(\rho'(X))$. On veut montrer que $\varphi = \varphi_\lambda$. On sait déjà que $\varphi = \varphi_1 \circ \rho = \varphi_\theta \circ \rho$.

On a

$$\varphi(\exp X) = \varphi_\theta(\exp \rho'(X)) = \begin{cases} \theta(\rho'(X)) \text{ si } \rho'(X) \in \mathfrak{p}_\theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$\varphi_\lambda(\exp X) = \begin{cases} \lambda(X) \text{ si } X \in \mathfrak{p}_\lambda \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi il faut vérifier que $\mathfrak{p}_\theta = \rho'(\mathfrak{p}_\lambda)$ et que sur cet ensemble $\theta = \lambda \circ \rho'$ or ce dernier point est vérifié par définition. Il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{p}_\theta = \rho'(\mathfrak{p}_\lambda)$.

Soit $X \in \mathfrak{p}_\lambda$. Alors

$$\lambda(\mathrm{Ad}(y)(tX)) = \lambda(tX), \forall t \in \mathbf{Q}, y \in U$$

c'est-à-dire

$$\theta \circ \rho'(\mathrm{Ad}(y)(tX)) = \theta \circ \rho'(tX) = \theta(t\rho'(X))$$

Comme $\rho'(\mathrm{Ad}(y)(tX)) = \mathrm{Ad}(yK))(t\rho'(X))$, on a bien

$$\theta(\mathrm{Ad}(yK))(t\rho'(X)) = \theta(t\rho'(X)), \forall t \in \mathbf{Q}, yK \in U/K,$$

c'est-à-dire $X \in \mathfrak{p}_\theta$. Donc $\rho'(\mathfrak{p}_\lambda) \subset \mathfrak{p}_\theta$. On montre de même que $\mathfrak{p}_\theta \subset \rho'(\mathfrak{p}_\lambda)$.

Ainsi on a bien $\varphi = \varphi_\lambda$.

On suppose maintenant qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ de $z(\mathfrak{u})$ tel que φ' est trivial sur $\exp \mathfrak{k}$. On va montrer qu'alors $P_\varphi = Z(U)$ (on rappelle que $P_\varphi = \{u \in U || \varphi(u)| = 1\}$; voir Proposition 4.3.4) et que toute extension $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ de $(\varphi \circ \exp)|_{z(\mathfrak{u})}$ à $\mathfrak{u}$ vérifie $\mathfrak{p}_\lambda = z(\mathfrak{u})$.

On commence par remarquer que $Z(U) \subset P_\varphi$, par le Corollaire 4.3.5. Supposons par l'absurde, que $P_\varphi \neq Z(U)$. Alors par le lemme 5.4.1 avec $N = Z(U)$, $M = P_\varphi$, il existe $x \in P_\varphi \setminus Z(U)$ tel que (x, U) est un sous-ensemble $\neq \{e\}$ de $Z(U)$. Pour tout $u \in U$ on a

$$\varphi(xux^{-1}u^{-1}) = \varphi(x)\varphi(ux^{-1}u^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1,$$

car $\varphi|_{P_\varphi}$ est un caractère unitaire de P_φ. Ainsi φ est trivial sur $(x, U) = \exp([X, \mathfrak{u}])$ pour $X = \log x$. Comme le sous-espace vectoriel $[X, \mathfrak{u}]$ est non trivial, ceci contredit l'hypothèse de départ. Ainsi nécessairement $P_\varphi = Z(U)$.

Soit maintenant $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ tel que $\lambda = \varphi \circ \exp$ sur $z(\mathfrak{u})$. Par le Lemme 5.4.2 plus haut, $\varphi_\lambda \in \mathrm{Char}(U)$. De plus φ_λ coïncide avec φ' sur $Z(U)$. Alors en appliquant de nouveau le Lemme 5.4.1 avec $N = Z(U)$ et $M = P_\lambda = \exp \mathfrak{p}_\lambda$, on déduit comme plus haut que $P_\lambda = Z(U)$. Ainsi $P_\lambda = P_\varphi = Z(U)$ et φ_λ et φ coïncident sur $Z(U)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\varphi = 0$ en dehors de $Z(U)$.

Nous allons montrer le fait plus général suivant : soit $\varphi \in \mathrm{Tr}(U)$ (donc non nécessairement extrémale) telle que $Z(U) = P_\varphi$ et telle qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul de $z(\mathfrak{u})$ sur lequel $\varphi \circ \exp$ est trivial ; alors $\varphi = 0$ sur $U \setminus Z(U)$.

En effet, soit Z_n la suite centrale ascendante de U définie par $Z_1 = centre(U)$ et si $p_n : U \to U/Z_n$ est la projection naturelle sur U/Z_n alors $Z_{n+1} = p_n^{-1}(centre(U/Z_n))$.

Alors U étant unipotent cette suite est finie : il existe un n_0 tel que $U = Z_n$ pour tout $n \geq n_0$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\varphi(x) = 0$ pour tout $n > 1$ et tout $x \in Z_n \setminus Z_1$.

Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur $n \geq 2$. Soit $x \in Z_2 \setminus Z_1$. Comme il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul de $z(\mathfrak{u})$ sur lequel $\varphi \circ \exp$ est trivial, on peut trouver $y \in U$ tel que $\varphi([x, y]) \neq 1$.

Comme $\varphi(x) = \varphi([x, y]x)$ et comme $[x, y] \in Z(U) \subset P_\varphi$, on a

$$\varphi(x) = \varphi([x, y])\varphi(x)$$

Il s'ensuit que $\varphi(x) = 0$, car $\varphi([x, y]) \neq 1$.

Supposons le résultat vrai pour $n > 1$ regardons le cas $n + 1$. Alors si $n \geq n_0$ le résultat est direct : $Z_n = Z_{n+1} = U$. Sinon soit $x \in Z_{n+1} \setminus Z_n$ alors il existe une suite $(y_k)_k \subset U$ tel que $x_k = [y_k, x] \in Z_n$ sont 2 à 2 distincts et $x_{k'}^{-1} x_k \notin Z_1$ pour tout $k \neq k'$. Alors par hypothèse de récurrence $\varphi(x_{k'}^{-1} x_k) = 0$. Ainsi par le Corollaire 4.2.3 $\varphi(x) = 0$ ce qui conclut la preuve.

Etape 2 :

Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. On va montrer que φ_λ est un point extrémal de $\mathrm{Tr}(U)$. On procède par récurrence sur la dimension n de U. La cas $n = 1$ étant trivial, on suppose l'assertion vraie pour tous les groupes unipotents de dimension $< n$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Tr}(U)$ et $t \in]0, 1[$ tel que

$$\varphi_\lambda = t\varphi_1 + (1 - t)\varphi_2.$$

La restriction de φ_λ à $P_\lambda = \exp \mathfrak{p}_\lambda$ est un caractère unitaire de P_λ et les restrictions de φ_1 et φ_2 à P_λ sont des fonctions de type positif normalisées sur P_λ. Il s'ensuit que φ_1 et φ_2 coïncident avec φ_λ sur P_λ.

Dans un premier temps, supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ de $z(\mathfrak{u})$ sur lequel $\varphi_\lambda \circ \exp|_{\mathfrak{k}}$ est trivial. Alors $\varphi_\lambda, \varphi_1$ et φ_2 peuvent être considérés comme des éléments de $\mathrm{Tr}(U/\exp \mathfrak{k})$. Par hypothèse de récurrence, on conclut que $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_\lambda$ et donc $\varphi_\lambda \in \mathrm{Char}(U)$.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ de $z(\mathfrak{u})$ tel que $\varphi_\lambda \circ \exp|_{\mathfrak{k}}$ est trivial. Alors, comme on l'a vu dans l'Etape 1, on a $P_\lambda = Z(U)$. Comme φ_1 et φ_2 coïncident sur $Z(U)$, on a donc aussi $P_{\varphi_1} = Z(U)$ et $P_{\varphi_2} = Z(U)$. De nouveau, par ce qui a été prouvé dans l'Etape 1, on a $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$ sur $U \setminus Z(U)$. Donc $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_\lambda$ et $\varphi_\lambda \in \mathrm{Char}(U)$.

5.5 Preuve de la partie (ii) du Théorème 5.3.1.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Ad}^*(U)\lambda} = \overline{Ad^*(U)\lambda'}$. Pour cela on va montrer la proposition suivante et le résultat en découlera immédiatement.

Par la suite, la loi de $\widehat{\mathfrak{u}}$ sera notée additivement ; de plus en identifiant $(\mathfrak{u}, +)$ à $\mathbf{Q}^n$ au moyen d'une base, on identifiera également $\widehat{\mathfrak{u}}$ au solénoïde adélique $\mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n$ (voir Section 2.5).

Proposition 5.5.1. *Soit* $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ *alors* $\overline{\mathrm{Ad}^*(U).\lambda} = \lambda + \mathfrak{p}_\lambda^\perp$.

Pour cela on va déterminer $\overline{\mathrm{Ad}^*(U)\lambda}$ pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. On va montrer dans un premier temps que cette quasi-orbite est plate, c'est-à-dire qu'il existe un sous-solénoïde V de $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ tel que la quasi-orbite de λ est $\lambda + V$. Dans un deuxième temps, on montrera que $V = \mathfrak{p}_\lambda^\perp$.

5.5.1 Les quasi-orbites sont plates

On observera qu'un sous-groupe fermé V du solénoïde adélique $\mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n$ est un sous-solénoïde si et seulement si $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^n \cong \widehat{\mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n}$ (voir Lemme 6.2.9) ; dans ce cas, on a $V \cong \mathbf{A}^k/\mathbf{Q}^k$ pour un certain $k \neq n$.

On montre ici la proposition suivante :

Proposition 5.5.2. *Soit* $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. *Alors* $\overline{\mathrm{Ad}^*(U)\lambda}$ *est "plat" c'est-à-dire qu'il existe un sous-solénoïde* V *de* $\widehat{\mathfrak{u}} = \mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n$ *tel que la quasi-orbite de* λ *est* $\lambda + V$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Soit $P(\mathbf{Q}^k, \mathbf{A}/\mathbf{Q})$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel des polynômes en k-variables rationnelles avec coefficients dans $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$.

Lemme 5.5.3. Soit $\{p_1, ..., p_n\}$ un ensemble linéairement indépendant de polynômes dans $P(\mathbf{Q}^k, \mathbf{A}/\mathbf{Q})$ sans terme constant. Alors l'image de $\mathbf{Q}^k$ par $(p_1, ..., p_n)$ est dense dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$.

Pour la preuve voir [CPJ94, Lemma 5].

Le lemme suivant traite du cas de polynômes dans $P(\mathbf{Q}^k, \mathbf{A}/\mathbf{Q})$ qui ne sont plus nécessairement indépendants.

Lemme 5.5.4. Soit $\{p_1, ..., p_n\}$ un ensemble de polynômes dans $P(\mathbf{Q}^k, \mathbf{A}/\mathbf{Q})$ sans terme constant. Alors l'adhérence de l'image de $\mathbf{Q}^k$ par $p := (p_1, ..., p_n)$ est un sous-solénoïde V de $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$. Plus précisément, V est le sous-groupe de $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$ annulé par $K = \ker T_p$, où T_p est l'application $\mathbf{Q}$-linéaire donnée par

$$T_p : \mathbf{Q}^n \to P(\mathbf{Q}^k, \mathbf{A}/\mathbf{Q}), q = (q_1, ..., q_n) \mapsto q \cdot p = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Proof. Lorsque K est trivial alors les polynômes sont linéairement indépendants ainsi ils vérifient les hypothèses du lemme précédent le résultat est donc vérifié avec $s = n$.

Supposons maintenant que $K = \ker T_p$ est non nul. Alors K est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^n$. Donc $K^\perp$ est un sous-solénoïde de $\mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n$. Ainsi, on peut identifier $K^\perp$ à $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-s}$ pour un entier $s \leq n$. On remarque que $p(\mathbf{Q}^k) \subset K^\perp$. On doit donc montrer que $p(\mathbf{Q}^k)$ est dense dans $K^\perp$.

Soit W un sous-espace vectoriel supplémentaire de K dans $\mathbf{Q}^n$ et soit $\{q^{(1)}, ..., q^{(n-s)}\}$ un base de W. Soit

$$\pi : K^\perp \to (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-s}, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mapsto (q(1) \cdot \alpha, ..., q^{(n-s)} \cdot \alpha).$$

On considère alors l'application

$$\pi \circ p : \mathbf{Q}^k \to (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-s}.$$

Les composantes de $\pi \circ p$ forment un ensemble indépendant de polynômes sans terme constant. Par le Lemme 5.5.3, $\pi \circ p(\mathbf{Q}^k)$ est dense dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-s}$.

Montrons que π est un homéomorphisme ; ceci impliquera que $p(\mathbf{Q}^k)$ est dense dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-s} = K^\perp$ et terminera la preuve.

L'application π est injective ; en effet, soit $\alpha \in K^\perp$ tel que $q^{(i)} \cdot \alpha = \mathbf{Q}$ pour tout $i \in \{1, ..., n-s\}$; alors, comme $\alpha \in K^\perp$, on a $q \cdot \alpha = \mathbf{Q}$ pour tout $q \in \mathbf{Q}^n$ et donc $\alpha = 0$ dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$.

L'application π est surjective ; en effet, l'image de $K^\perp$ contient $\pi \circ p(\mathbf{Q}^k)$ qui est dense. Cette image est fermée car $K^\perp$ est compact et π est continue. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Preuve de la Proposition 5.5.2.

Comme dit plus haut, on identifie $(\mathfrak{u}, +)$ à $\mathbf{Q}^n$ et $\widehat{\mathfrak{u}}$ à $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$.

Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tous $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{Q}^n$ et $x = \exp(x_1, ..., x_n) \in U$, on a

$$\mathrm{Ad}^*(x)\lambda = \lambda + \sum_{k=1}^{N} \frac{(ad^*)^k(x_1, ..., x_n)}{k!}\lambda = \lambda + \sum_{k=1}^{N} p_k(x_1, ..., x_n),$$

Où les p_k sont applications polynomiales de $\mathbf{Q}^n$ à valeurs dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$, sans terme constant.

Le Lemme 5.5.4 montre alors que $\overline{\mathrm{Ad}^*(U)\lambda} = \lambda + V$ pour un sous-solénoïde V de $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^n$.

5.5.2 Preuve de la Proposition 5.5.1

Proof. Par la Proposition 5.5.2 on sait que l'adhérence dans $\widehat{\mathfrak{u}}$ de la quasi-orbite de λ notée additivement est $\lambda + V$ avec un sous-solénoïde V de $\widehat{\mathfrak{u}} \cong \mathbf{A}^n/\mathbf{Q}^n$.

Montrons dans un premier temps que $\mathrm{Ad}^*(U)\lambda \subset \lambda + \mathfrak{p}_\lambda^\perp$. En effet soient $W \in \mathfrak{p}_\lambda$ et $Y \in \mathfrak{u}$. Alors

$$\mathrm{Ad}^*(\exp(-Y))\lambda(W) = \lambda(\mathrm{Ad}(\exp Y)W) \tag{5.5.1}$$
$$= \lambda(W) \tag{5.5.2}$$

par définition de $\mathfrak{p}_\lambda$. Ainsi $\mathrm{Ad}^*(U)\lambda \subset \lambda + \mathfrak{p}_\lambda^\perp$.

Montrons maintenant la réciproque.

Par ce qui précède, V est le sous-groupe fermé de $\widehat{\mathfrak{u}}$ engendré par $\mathrm{Ad}^*(U)\lambda - \lambda$ et $V \subset \mathfrak{p}_\lambda$. Il faut donc montrer que $\mathfrak{p}_\lambda^\perp \subset V$. Par dualité, il suffit pour cela de montrer que $V^\perp$ est contenu dans $\mathfrak{p}_\lambda$. Soit $X \in V^\perp$ et soit $t \in \mathbf{Q}$. Comme $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel, on a $tX \in V^\perp$ et donc

$$(\mathrm{Ad}^*(u)\lambda - \lambda)(tX) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\lambda(\mathrm{Ad}(u)tX) = \lambda(tX)$$

pour tout $u \in U$. Ceci montre que $X \in \mathfrak{p}_\lambda$ et conclut la preuve. □

Preuve de (ii) du Théorème 5.3.1

Proof. Soient $\lambda, \lambda' \in \widehat{\mathfrak{u}}$. La Proposition 5.5.1 montre que λ et λ' ont les mêmes quasi-orbites si et seulement si

$$\lambda + \mathfrak{p}_\lambda = \lambda' + \mathfrak{p}_{\lambda'}.$$

Supposons que $\lambda + \mathfrak{p}_\lambda = \lambda' + \mathfrak{p}_{\lambda'}$. Alors $\lambda' = \lambda + \lambda_1$ pour un $\lambda_1 \in \mathfrak{p}_\lambda^\perp$. Montrons que $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda'}$. Soit $x \in \mathfrak{p}_\lambda$. Comme $\lambda_1 \in \mathfrak{p}_\lambda^\perp$ et comme $\mathfrak{p}_\lambda$ est un idéal de $\mathfrak{u}$, on a $\lambda_1(\mathrm{Ad}(u)(tX)) = 1$ et donc

$$\lambda'(\mathrm{Ad}(u)(tX)) = \lambda(\mathrm{Ad}(u)(tX))\lambda_1(\mathrm{Ad}(u)(tX)) = \lambda(\mathrm{Ad}(u)(tX))$$

pour tout $u \in U$ et $t \in \mathbf{Q}$. Ceci implique que $X \in \mathfrak{p}_{\lambda'}$. De manière symétrique, si $X \in \mathfrak{p}_{\lambda'}$, alors $X \in \mathfrak{p}_\lambda$. On a donc $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda'}$. Comme, de plus, $\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda} = \lambda'|_{\mathfrak{p}_{\lambda'}}$, on a $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}$.

Réciproquement, supposons que $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}$. Alors, par définition, on a $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda'}$ et $\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda} = \lambda'|_{\mathfrak{p}_{\lambda'}}$. Ceci implique que

$$\lambda + \mathfrak{p}_\lambda^\perp = \lambda' + \mathfrak{p}_{\lambda'}^\perp.$$

□

5.6 Traces sur U et traces invariantes sur $\mathfrak{u}$

On reprend les notations de la Section 5.5 : soit U un groupe algébrique unipotent sur $\mathbf{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Nous allons maintenant considérer l'ensemble $\mathrm{Tr}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$ des traces sur le groupe additif $(\mathfrak{u}, +)$ qui sont invariante par l'action adjointe Ad de U sur $\mathfrak{u}$. On a l'analogue suivant du Théorème 5.3.1.

On rappelle que, si ψ est une fonction de type positif sur un sous-groupe de $\mathfrak{u}$, alors son extension triviale $\widetilde{\psi}$ à $\mathfrak{u}$ est une fonction de type positif sur $\mathfrak{u}$.

Théorème 5.6.1. *Soit U un groupe unipotent algébrique sur $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. Alors on a :*

(i) $\mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U)) = \{\widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}} | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}\}$.

(ii) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$, on a $\widetilde{\lambda_1|_{\mathfrak{p}_{\lambda_1}}} = \widetilde{\lambda_2|_{\mathfrak{p}_{\lambda_2}}}$ si et seulement si λ_1 et λ_2 ont la même quasi-orbite sous l'action coadjointe Ad^* *de U.*

Par conséquent, l'application

$$\widehat{\mathfrak{u}} \to \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U)), \qquad \lambda \mapsto \widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}}$$

induit une bijection

$$\widehat{\mathfrak{u}}/\mathrm{Ad}^* \to \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U)).$$

Proof. La preuve du Théorème 5.6.1 est similaire à celle du Théorème 5.3.1 :

Preuve de la partie (i) :soit $\psi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$; alors $\psi' = \psi|_{z(\mathfrak{u})}$ est un caractère unitaire de $z(\mathfrak{u})$. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ une extension de ψ' à $\mathfrak{u}$. On montre que $\psi = \widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}}$ par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{u}$. S'il existe un sous-espace vectoriel non nul $\mathfrak{k}$ de $z(\mathfrak{u})$ tel que ψ' est trivial sur $\mathfrak{k}$, on peut considérer que $\psi' \in \mathrm{Char}(\mathfrak{u}/\mathfrak{k}, \mathrm{Ad}(U/\exp\mathfrak{k}))$ et on conclut par hypothèse de récurrence.

S'il n'existe pas de sous-espace vectoriel non nul de $z(\mathfrak{u})$ sur lequel ψ' est trivial, alors on montre avec les mêmes arguments que ceux du Théorème 5.3.1 (en utilisant la version du Lemme 5.4.1 pour les algèbres de Lie nilpotentes) que $\mathfrak{p}_\lambda = z(\mathfrak{u})$ et que $\psi = 0$ sur $\mathfrak{u} \setminus z(\mathfrak{u})$. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$. Alors $\widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}}$ est une fonction de type positif sur $\mathfrak{u}$ et est clairement U-invariante. Les mêmes arguments que ceux du Théorème 5.3.1 montrent que $\widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}}$ est un point extrémal de $\mathrm{Tr}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$.

La preuve de la partie (ii) est également la même que celle pour la partie (ii) du Théorème 5.3.1. □

Corollaire 5.6.2. *Soit U le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ unipotent. Soit $\varphi : U \to \mathbf{C}$. Alors $\varphi \in \mathrm{Tr}(U)$ si et seulement si $\varphi \circ \exp \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$. Ainsi l'application*

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U)) \to \mathrm{Tr}(U), \;\; \psi \mapsto \psi \circ \log$$

est une bijection.

Proof. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$, on a

$$\varphi_\lambda \circ \exp = \widetilde{\lambda|_{\mathfrak{p}_\lambda}}.$$

Les Théorèmes 5.3.1 et5.6.1 montrent alors qu'on a $\varphi \in \mathrm{Char}(U)$ si et seulement si $\varphi \circ \exp \in \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$.

Comme chaque élément de $\mathrm{Tr}(U)$ (respectivement de $\mathrm{Tr}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$) est une limite simple de combinaisons convexes de fonctions de $\mathrm{Char}(U)$ (respectivement de $\mathrm{Char}(\mathfrak{u}, \mathrm{Ad}(U))$) , l'assertion en découle. □

Soit G un groupe agissant par automorphisme sur U. Tout $g \in G$ induit un automorphisme $X \mapsto g(X)$ de $\mathfrak{u}$ donné par la propriété

$$\exp(g(X)) = g(\exp(X)) \text{ pour tout } X \in \mathfrak{u}.$$

Alors G agit par automorphismes sur $\widehat{\mathfrak{u}}$, action induite par l'action duale.

Comme l'application $\psi \mapsto \psi \circ \log$ est tautologiquement G-équivariante, le résultat suivant est une conséquence immédiate du Corollaire 5.6.2 et de la Proposition 5.1.4. Le résultat suivant jouera un rôle crucial dans la preuve des résultats du Chapitre 6.

Corollaire 5.6.3. *Soit U ayant les hypothèse de la Proposition 5.6.2 et soit G un groupe agissant par automorphismes sur U. Supposons que l'image de G dans* $\mathrm{Aut}(U)$ *contiennent $Int(U)$.*

(i) L'application

$$\mathrm{Char}(\mathfrak{u}, G) \to \mathrm{Char}(U, G),\ \ \psi \mapsto \psi \circ \log$$

est une bijection

(ii) L'application

$$\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^{G}_{erg} \to \mathrm{Char}(U, G),\ \ \mu \mapsto \mathcal{F}(\mu) \circ \log$$

est une bijection.

Nous aurons plus tard besoin du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.6.4. Soit U vérifiant les hypothèses de la Proposition 5.6.2 et $g \in \mathrm{Aut}(U)$. Soit N un sous-groupe distingué de U. Pour $X \in \mathfrak{u}$, l'ensemble

$$A := \{t \in \mathbf{Q} |\, \exp(-tX) \exp(g(tX)) \in N\}$$

est un sous-groupe de $\mathbf{Q}$.

Proof. On observe tout d'abord que $0 \in A$. Soient $t, s \in A$. Alors

$$\begin{aligned}
&\exp(-(t-s)X) \exp(g((t-s)X)) \\
&= \exp(sX) \exp(-tX) \exp(g(tX)) \exp(g(-sX)) \\
&= \exp(sX) \exp(-tX) \exp(g(tX)) \exp(g(-sX)) \exp(sX) \exp(-sX) \\
&= \exp(sX) \left[\exp(-tX) \exp(g(tX)) \exp(g(-sX)) \exp(sX)\right] \exp(-sX) \\
&= \exp(sX) \left[\exp(-tX) \exp(g(tX)) (\exp(-sX) \exp(g(sX)))^{-1}\right] \exp(-sX)
\end{aligned}$$

Comme N est un sous-groupe distingué de U, il s'ensuit que $t - s \in A$. $\square$

Chapter 6

Caractères de groupes algébriques

6.1 Enoncé du résultat principal.

Soit G le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique connexe sur $\mathbf{Q}$. Soit $G = LU$ une décomposition de Levi de G. Où U est le radical unipotent de G et L est un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{Q}$. Le groupe U est un groupe algébrique unipotent. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ de U est une algèbre de Lie sur $\mathbf{Q}$ et l'application exponentielle : $\mathfrak{u} \to U$ est un morphisme de variétés algébriques bijectif. Pour tout $g \in G$, l'automorphisme de U donné par conjugaison par g induit un automorphisme $\mathrm{Ad}(g)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ de U.

Soit $\widehat{\mathfrak{u}}$ le dual de Pontrjagin de $\mathfrak{u}$. A tout $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ on associe les sous-ensembles $\mathfrak{k}_\lambda$,$\mathfrak{p}_\lambda$ de $\mathfrak{u}$ et L_λ de L suivants :

- $\mathfrak{k}_\lambda$ est l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{u}$ tels que
$$\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = 1 \text{ pour tout } g \in G, t \in \mathbf{Q};$$
- $\mathfrak{p}_\lambda$ est l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{u}$ tels que
$$\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \lambda(tX) \text{ pour tout } g \in G, t \in \mathbf{Q};$$
- L_λ est l'ensemble des $g \in L$ tels que $\mathrm{Ad}(g)(X) \in X + \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $X \in \mathfrak{u}$.

Alors $\mathfrak{k}_\lambda$ et $\mathfrak{p}_\lambda$ sont des idéaux $\mathrm{Ad}(G)$-invariants de $\mathfrak{u}$, $K_\lambda = \exp(\mathfrak{k}_\lambda)$ et $P_\lambda = \exp(\mathfrak{p}_\lambda)$ sont des sous-groupes algébriques connexes G-invariants de U, et L_λ est un sous-groupe algébrique distingué dans L. De plus,

$$\chi_\lambda : P_\lambda \to S^1, \ \exp(X) \mapsto \lambda(X)$$

est un caractère unitaire G-invariant de P_λ qui est trivial sur K_λ.

Soit G le groupe des points $\mathbf{Q}$-rationnels d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$. Un sous-groupe à un paramètre unipotent de G est un sous-groupe de G de la forme $\{u(t)|t \in \mathbf{Q}\}$, où $u : \mathbf{Q} \to G$ est un homomorphisme rationnel non trivial.

On peut alors énoncer le résultat principal de ce mémoire :

Théorème 6.1.1. *Soit G le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe linéaire algébrique connexe sur $\mathbf{Q}$. Supposons que G est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soit $G = LU$ une décomposition de Levi de G. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\varphi \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$, on définit $\Phi_{(\lambda,\varphi)} : G \to \mathbf{C}$ par :*

$$\Phi_{(\lambda,\varphi)} = \begin{cases} \varphi(g_1)\chi_\lambda(u) & \textit{si } g = g_1 u \textit{ avec } g_1 \in L_\lambda, u \in P_\lambda \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

(i) On a $\mathrm{Char}(G) = \{\Phi_{(\lambda,\varphi)} | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}, \varphi \in \mathrm{Char}(L_\lambda)\}$

(ii) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\varphi_1 \in \mathrm{Char}(L_{\lambda_1}), \varphi_2 \in \mathrm{Char}(L_{\lambda_2})$. Alors $\Phi_{(\lambda_1,\varphi_1)} = \Phi_{(\lambda_2,\varphi_2)}$ si et seulement si λ_1 et λ_2 ont la même quasi-orbite sous l'action coadjointe Ad^* et si $\varphi_1 = \varphi_2$.

Remarque 6.1.2. *(i) Dans le cas où G est unipotent, c'est-à-dire $G = U$ on retrouve la description de $\mathrm{Char}(G)$ du chapitre 5.6*

(ii) L'hypothèse selon laquelle G est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents est équivalente à l'hypothèse selon laquelle la composante de Levi L de G est semi-simple et $L^+ = L$, où L^+ est le sous-groupe de L défini comme dans [BT73, §6]; une condition nécessaire pour avoir l'égalité $L^+ = L$ est que tout sous-groupe normal algébrique simple non trivial de L soit anisotropique (c'est-à-dire, a un $\mathbf{Q}$-rang ≥ 1). Il est connu que $L^+ = L$ quand L est simple ou quasi-simple (voir [Ste16, Lemma 64]).

On peut reformuler le Théorème 6.1.1 en terme de représentation factorielle de G. On rappelle qu'une **représentation factorielle** d'un groupe G est une représentation unitaire π de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que la sous-algèbre de von Neumann $\pi(G)''$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un facteur; π est dite **de**

type fini si $\pi(G)''$ est un facteur fini. On notera $\mathrm{Fac}_{fin}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations factorielles de type fini de G, pour la relation de quasi-équivalence (voir [Dix77, Chap. 6, Chap. 17]).

Le résultat suivant provient directement du Théorème 6.1.1 à l'aide de la Proposition 4.2.1.

Théorème 6.1.3. *Soit $G = LU$ comme dans le Théorème 6.1.1.*

(i) Pour tout $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et pour toute représentation factorielle σ de type fini de L_λ, la représentation induite $\pi_{(\lambda,\sigma)} := \mathrm{Ind}_{L_\lambda P_\lambda}^G \chi_\lambda \sigma$ est une représentation factorielle de type fini de G et on a

$$\mathrm{Fac}_{fin}(G) = \left\{\pi_{(\lambda,\sigma)} | \lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}, \sigma \in \mathrm{Fac}_{fin}(L_\lambda)\right\}$$

où on identifie $\pi_{(\lambda,\sigma)}$ et σ avec leur classes de quasi-équivalence.

(ii) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\sigma_1 \in \mathrm{Fac}_{fin}(L_{\lambda_1})$, $\sigma_2 \in \mathrm{Fac}_{fin}(L_{\lambda_2})$. Alors $\pi_{(\lambda_1,\sigma_1)} = \pi_{(\lambda_2,\sigma_2)}$ si et seulement si λ_1 et λ_2 ont la même quasi-orbite sous l'action co-adjointe Ad^* et si σ_1 et σ_2 sont quasi-équivalentes.

Dans le cas où G est simple le résultat suivant a été démontré dans [Bek19].

Théorème 6.1.4. *Soit G le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique connexe sur $\mathbf{Q}$ quasi-$\mathbf{Q}$-simple. Supposons que G est engendré par ses éléments unipotents. Alors*

$$\mathrm{Char}(G) = \left\{\widetilde{\chi} | \chi \in \widehat{Z}\right\} \cup \{\mathbf{1}_G\},$$

où Z est le centre de G.

6.2 Preuve du Théorème 6.1.1.

6.2.1 Restriction au radical unipotent.

Soit G le groupe des $\mathbf{Q}$-points d'un groupe algébrique linéaire connexe sur $\mathbf{Q}$ et soit $G = LU$ une décomposition de Levi de G.

Soit $\psi \in \mathrm{Char}(G)$. Posons $\varphi := \psi_{|U}$. Par la Proposition 4.3.6, $\varphi \in \mathrm{Char}(U, G)$. Ainsi par le Corollaire 5.6.3, $\varphi = \mathcal{F}(\mu) \circ \log$ pour un unique $\mu \in \mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G_{erg}$ où $\mathfrak{u}$ est l'algèbre de Lie de U.

On veut déterminer l'ensemble $\mathrm{Prob}(\widehat{\mathfrak{u}})^G_{erg}$. Soit $b_1, ..., b_d$ une base de $\mathfrak{u}$ sur $\mathbf{Q}$. On fixe un caractère unitaire non trivial e de $\mathbf{A}$ qui est trivial sur $\mathbf{Q}$. Pour tout $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbf{A}^d$, soit $\lambda_a \in \widehat{\mathfrak{u}}$ défini par

$$\lambda_a(x) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i) \text{ pour tout } x = \sum_{i=1}^{d} x_i b_i \in \mathfrak{u}.$$

L'application $a \mapsto \lambda$ se factorise en un isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d \to \widehat{\mathfrak{u}},\ a + \mathbf{Q}^d \mapsto \lambda_a$$

(voir Theorem 3 dans Chap.IV, §3 de [Wei74]). Ainsi $\widehat{\mathfrak{u}}$ peut être identifié avec le solénoïde adélique $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$. On regarde maintenant comment se transpose l'action de $GL(\mathfrak{u})$ sur $\widehat{\mathfrak{u}}$ via cette identification.

Posons $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$. Alors $GL_d(\mathbf{Q}) \subset GL_d(\mathbf{Q}_p)$ agit de manière usuelle sur $\mathbf{Q}^d$ pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, l'action diagonale induite de $GL_d(\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{A}^d$ conserve donc le réseau $\mathbf{Q}^d$, donnant donc une action (à gauche) de $GL_d(\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$.

Soit $\theta \in GL(\mathfrak{u})$ et soit $A \in GL_d(\mathbf{Q})$ sa matrice selon la base $b_1, ..., b_d$. On peut vérifier que

$$\lambda_a \circ \theta = \lambda_{A^t a} \text{ pour tout } a \in \mathbf{A}^d.$$

Ainsi, pour résumer la discussion précédente.

Proposition 6.2.1. *Le choix d'une base de $\mathfrak{u}$ définit un isomorphisme de groupes topologiques $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d \to \widehat{\mathfrak{u}}$, qui est équivariant pour l'action de $GL_d(\mathbf{Q})$ donné par la transposé inverse de la matrice sur $\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ et l'action duale de $GL(\mathfrak{u})$ sur $\widehat{\mathfrak{u}}$. Cet isomorphisme induit une bijection*

$$Prob(\mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d)^{G'}_{erg} \to Prob(\widehat{\mathfrak{u}})^G_{erg},$$

pour tout sous groupe G de $GL(\mathfrak{u})$, où G' est le sous-groupe de $GL_d(\mathbf{Q})$ correspondant à G.

6.2.2 Mesures de probabilité invariantes et adhérence d'orbites sur les solénoïdes S-adiques

Fixons un entier $d \geq 1$ et soit S un sous-ensemble fini de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ avec $\infty \in S$. On rappelle que

$$\mathbf{Q}_S^d := \prod_{p \in S} \mathbf{Q}_p^d$$

et que $\mathbf{Z}[1/S]$ est le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ engendré par 1 et $\{1/p | p \in S \cap \mathcal{P}\}$. Alors $\mathbf{Z}[1/S]$ s'injecte diagonalement en un sous-anneau discret et cocompact de $\mathbf{Q}_S^d$.

Soit G un sous-groupe algébrique de GL_d défini sur $\mathbf{Q}$. Pour tout sous-anneau R d'une extension de $\mathbf{Q}$, on note $G(R)$ le groupe des éléments de G à coefficients dans R et de déterminant inversible dans R. En particulier, $G(\mathbf{Q}) = G \cap GL_d(\mathbf{Q})$. Le groupe produit

$$G(\mathbf{Q}_s) := \prod_{p \in S} G(\mathbf{Q}_p)$$

est un groupe localement compact et agit sur $\mathbf{Q}_S^d$ de manière évidente. Le groupe $G(\mathbf{Z}[1/S])$ s'injecte diagonalement comme un sous-groupe discret de $G(\mathbf{Q}_S)$. Comme $G(\mathbf{Z}[1/S])$ préserve $\mathbf{Z}[1/S]^d$, cela donne une action de $G(\mathbf{Z}[1/S])$ sur le solénoïde S-adique

$$X_S := \mathbf{Q}_s^d / \mathbf{Z}[1/S]^d.$$

Un sous-groupe à un paramètre unipotent de $G(\mathbf{Q}_S)$ est un sous-groupe de $G(\mathbf{Q}_S)$ de la forme $\{(u_p(t_p))_{p \in S} | t_p \in \mathbf{Q}_p, p \in S\}$ pour des sous-groupes à un paramètre unipotents $\{u_p(t) | t \in \mathbf{Q}_p\}$ de $G(\mathbf{Q}_p)$ pour $p \in S$.

On cherche à décrire les mesures de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariantes sur X_S ainsi que les adhérences d'orbites de points de X_S. Nos résultats seront déduits de théorèmes de Ratner caractérisant les mesures invariantes ergodiques et les adhérences d'orbites pour les groupes de Lie S-adiques engendrés par des éléments unipotents (voir [Rat95] et [MT94]); en fait, nous aurons besoin de la version plus précise des résultats de Ratner dans le cas S-arithmétique de [Tom00].

Mesures de probabilité invariantes.

Soit Y un sous-groupe fermé de X_S et pour $x \in X_S$, on note $\mu_{x+Y} \in \mathrm{Prob}(X_S)$ l'image de la mesure de Haar normalisée μ_Y par l'application $X_S \to X_S$ donnée par la translation par x.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^d$. On note $V(\mathbf{Q}_p)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}_p^d$ engendré par V pour $p \in S$. Alors $V(\mathbf{Q}_S) := \prod_{p \in S} V(\mathbf{Q}_p)$ est un sous-espace de $\mathbf{A}^d$ et $V(\mathbf{Z}[1/S]) := V \cap \mathbf{Z}[1/S]^d$ est un réseau cocompact de $V(\mathbf{Q}_S)$. Ainsi, $V(\mathbf{Q}_S)/V(\mathbf{Z}[1/S])$ est un sous-solénoïde de X_S, c'est-à-dire un sous-groupe fermé et connexe de X_S.

Proposition 6.2.2. *Supposons que $G(\mathbf{Q}_S)$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soit μ une mesure de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariante ergodique sur les sous-ensembles boréliens de X_S . Il existe un couple (a, V) constitué d'un point $a \in \mathbf{Q}_S^d$ et d'un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant de $\mathbf{Q}^d$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $g(a) \in a + V(\mathbf{Q}_S)$ pour tout $g \in G(\mathbf{Q}_S)$;

(ii) $\mu = \mu_{x+Y}$, où x et Y sont les images de a et $V(\mathbf{Q}_S)$ dans X_S.

Proof. On considère le produit semi-direct $\widetilde{G} := G(\mathbf{Q}_S) \ltimes \mathbf{Q}_S^d$, donné par l'action naturelle de $G(\mathbf{Q}_S)$ sur $\mathbf{Q}_S^d$. Alors $\widetilde{G}$ est un groupe localement compact contenant $\widetilde{\Gamma} := G(\mathbf{Z}[1/S]) \ltimes \mathbf{Z}[1/S]^d$ comme sous-groupe discret. Comme $G(\mathbf{Q}_S)$ est engendré par des éléments unipotents, il n'existe par de morphisme non trivial $G \to GL_1$ défini sur $\mathbf{Q}$. Il s'ensuit que $\Gamma := G(\mathbf{Z}[1/S])$ a un covolume fini dans $G(\mathbf{Q}_S)$ (voir [Bor63, Theorem 5.6]) et donc que $\widetilde{\Gamma}$ est un réseau S-arithmétique dans $\widetilde{G}$.

On utilise maintenant la "technique de suspension" de [Wit94] pour obtenir une mesure de probabilité $G(\mathbf{Q}_S)$-invariante et ergodique $\widetilde{\mu}$ sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$.

On plonge X_S comme sous-espace de $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$; observons que l'action de $G(\mathbf{Z}[1/S])$ par automorphismes sur X_S devient l'action de $G(\mathbf{Z}[1/S])$ par translation sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ sous ce plongement.

On considère μ comme une mesure de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariante sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ qui est supportée par l'image de X_S. Soit $\widetilde{\mu}$ la mesure de probabilité sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ définie par

$$\widetilde{\mu} = \int_{G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma} t_g(\mu) d\nu(g\Gamma).$$

où ν est l'unique mesure de probabilité $G(\mathbf{Q}_S)$-invariante sur $G(\mathbf{Q}_S)\Gamma$ et $t_g(\mu)$ est l'image de μ par la translation par g. Alors $\widetilde{\mu}$ est $G(\mathbf{Q}_S)$-invariante et est ergodique sous cette action.

Par le raffinement [Tom00, Theorem 2] du théorème de Ratner, il existe un sous-groupe $\mathbf{Q}$-algébrique L de G, un sous-espace vectoriel $L(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$, un sous-groupe d'indice fini H de $L(\mathbf{Q}_S) \ltimes V(\mathbf{Q}_S)$ et un élément $g \in \widetilde{G}$ avec les propriétés suivantes :

- $G(\mathbf{Q}_S) \subset H^g := gHg^{-1}$;
- $H \cap \widetilde{\Gamma}$ est un réseau dans H;

- $\widetilde{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité H^g-invariante sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ supportée par $H^g g\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$.

Comme $\widetilde{G} = G(\mathbf{Q}_S) \ltimes \mathbf{Q}_S^d$, il existe $g' \in G(\mathbf{Q}_S)$ tel que $g'g = a \in \mathbf{Q}_S^d$. Alors $G(\mathbf{Q}_S) \subset H^a$ et, comme μ est $G(\mathbf{Q}_S)$-invariante, $\widetilde{\mu}$ coïncide avec la mesure de probabilité H^a-invariante supportée par $H^a a\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$. On peut donc supposer ci-dessus que $g = a \in \mathbf{Q}_S^d$.

L'image $t_{a^{-1}}(\widetilde{\mu})$ de $\widetilde{\mu}$ par la translation par a^{-1} coïncide avec l'unique mesure de probabilité H-invariante sur $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ supportée par $H\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$.

Remarquons que $G(\mathbf{Q}_S) \subset H^a$ implique que

$$g(a) - a \in V(\mathbf{Q}_S) \text{ pour tout } g \in G(\mathbf{Q}_S),$$

où on écrit $g(a)$ pour gag^{-1}.

Soit

$$p : \widetilde{G}/\widetilde{\Gamma} \to G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$$

l'application naturelle $G(\mathbf{Q}_S)$-invariante. On a

$$t_{a^{-1}}(\widetilde{\mu}) = \int_{G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma} t_{a^{-1}} t_g((\mu)) d\nu(g\Gamma). \tag{$*$}$$

et $t_{a^{-1}} t_g((\mu))(p^{-1} g\Gamma/\Gamma) = 1$ pour tout $g \in G(\mathbf{Q}_S)$. Donc, la formule ($*$) fournit une décomposition de $t_{a^{-1}}(\widetilde{\mu})$ en intégrale sur $G(\mathbf{Q}_S)/G(\mathbf{Z}[1/S])$ de mesures de probabilité supportées par les fibres de p.

Maintenant, sachant que $t_{a^{-1}}(\widetilde{\mu})$ est la mesure de probabilité H-invariante supportée par $H\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$, on peut effectuer une seconde décomposition de $t_{a^{-1}}(\widetilde{\mu})$ sur $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$. Les mesures supportées par les fibres de p dans cette dernière décomposition sont des translatées de la mesure de Haar normalisées μ_Y de l'image Y de $H \cap \mathbf{Q}_S^d$ dans $X_S \cong \mathbf{Q}_S^d\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$. Par unicité, il s'ensuit que $t_{a^{-1}}(\mu) = \mu_Y$, c'est-à-dire, $\mu = \mu_{x+Y}$, où a est l'image de x dans X_S (pour plus de détails, voir la preuve du Corollaire 5.8 dans [Wit94]).

Pour finir la preuve, observons que, comme $V(\mathbf{Q}_S)$ est divisible, il n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini et donc $H \cap \mathbf{Q}_S^d = H \cap V(\mathbf{Q}_S) = V(\mathbf{Q}_S)$. □

Les couples (x, Y) comme dans la Proposition 6.2.2 pour lesquels μ_{x+Y} est ergodique sont caractérisés par le résultat général suivant.

Pour un groupe compact X, on note $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes continus de X et $\mathrm{Aff}(X) = \mathrm{Aut}(X) \ltimes X$ le groupe des transformations affines de X.

Proposition 6.2.3. *Soient G un groupe dénombrable, X un groupe abélien compact et $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action de G par automorphismes sur X. Soit $x_0 \in X$ et soit Y un sous-groupe fermé connexe de X tel que $x_0 + Y$ est G-invariant. Alors Y est G-invariant et $\alpha_g(x_0) - x_0 \in Y$ pour tout $g \in G$. De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) μ_{x_0+Y} *n'est pas ergodique sous la restriction de l'action de G à $x_0 + Y$;*

(ii) *il existe un sous-groupe propre fermé et connexe Z de Y et un sous-groupe d'indice fini H de G tel que $\alpha_h(x) - x \in Z$ pour tous $x \in x_0 + Y$ et $h \in H$;*

(iii) *pour tout $x \in x_0 + Y$, l'ensemble $\{\alpha_g(x) - x | g \in G\}$ n'est pas dense dans Y;*

(iv) *il existe un sous-ensemble A de $x_0 + Y$ avec $\mu_{x_0+Y}(A) > 0$ tel que $\{\alpha_g(x) - x | g \in G\}$ n'est pas dense dans Y pour tout $x \in A$.*

Proof. Le fait que Y soit G-invariant et que $\alpha_g(x) - x \in Y$ pour tout $g \in G$ est évident.

L'application $t : x_0 + Y \to Y$ donnée par la translation par $-x_0$ entrelace l'action α de G sur $x_0 + Y$ avec l'action $\beta : G \to \mathrm{Aff}(Y)$ par transformation affine de Y, donnée par

$$\beta_g(z) = \alpha_g(z) + \alpha_g(x_0) - x_0 \text{ pour tous } g \in G, z \in Y.$$

De plus, l'image de μ_{x_0+Y} sous t est la mesure de Haar μ_Y sur Y.

Supposons que l'action β n'est pas ergodique. Alors il existe un sous-groupe propre fermé connexe Z de Y qui est invariant sous l'action α de G et un sous-groupe d'indice fini H de G tel que l'image de H dans $\mathrm{Aff}(X/Y)$, pour l'action induite par β, est triviale (voir Proposition 3.1.1). Cela signifie que $\alpha_h(x) - x \in Z$ pour tous $x \in x_0 + Y$ et $h \in H$. Ainsi, (i) implique (ii).

Supposons que (ii) soit vérifiée et soit $x \in Y$. Alors l'image de $\{\alpha_g(x) - x | g \in G\}$ dans Y/Z est finie. Cependant, comme Y est connexe, Y/Z a un indice infini dans Y et donc $\{\alpha_g(x) - x | g \in G\}$ n'est pas dense dans Y. Ainsi, (ii) implique (iii).

Le fait que (iii) implique (iv) est évident. Supposons que β est ergodique. Comme le support de μ_Y est Y, pour μ_Y-presque tout $y \in Y$, la $\beta(G)$-orbite de y est dense dans Y, c'est-à-dire, $\{\alpha_g(x) - x | g \in G\}$ est dense dans X pour μ_{x_0+Y}-presque tout $x \in x_0 + Y$. Ainsi, (iv) implique (i). $\square$

Nous aurons besoin d'une description des mesures de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariantes (non nécessairement ergodiques) sur X_S. Pour cela, on adapte pour notre problème certaines idées de [MS95, §2], où de telles descriptions ont été données dans le cas de groupes de Lie réels.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels $G(\mathbf{Q})$-invariants V de $\mathbf{Q}^d$. Pour $V \in \mathcal{H}$, on définit $\mathcal{N}(V,S) \subset \mathbf{Q}_S^d$ l'ensemble des $a \in \mathbf{Q}_S^d$ avec les propriétés suivantes :

- $g(a) \in a + V(\mathbf{Q}_S)$ pour tout $g \in G(\mathbf{Z}[1/S])$ et
- $\varphi(\{g(a) - a | g \in G(\mathbf{Z}[1/S])\})$ est dense dans $\varphi(V(\mathbf{Q}_S))$.

Lemme 6.2.4. Pour $V, W \in \mathcal{H}$, on a $\varphi(\mathcal{N}(V,S)) \cap \varphi(\mathcal{N}(W,S)) \neq \emptyset$ si et seulement si $V = W$.

Proof. Supposons que $\varphi(\mathcal{N}(V,S)) \cap \varphi(\mathcal{N}(W,S)) \neq \emptyset$. Alors, il existe $a \in \mathcal{N}(V,S)$ et $b \in \mathbf{Z}[1/S]^d$ tels que $a + b \in \mathcal{N}(W,S)$. Il s'ensuit que $\varphi(\{g(a) - a | g \in G(\mathbf{Z}[1/S])\})$ est un sous-ensemble dense de $\varphi(V)$ et de $\varphi(W)$. Par conséquent, $\varphi(V(\mathbf{Q}_S)) = \varphi(W(\mathbf{Q}_S))$. Cela implique que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V(\mathbf{R})$ est contenu dans $W(\mathbf{R}) + \mathbf{Z}[1/S]^d$ et donc dans $W(\mathbf{R})$, par connexité. Par conséquent, $V \subset W$. De même, on a $W \subset V$. □

On peut maintenant donner une description des mesures $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariantes finies sur X_S.

Proposition 6.2.5. *Supposons que $G(\mathbf{Q}_S)$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents et soit $\mu \in \mathrm{Prob}(X_S)$ une mesure de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariante sur X_S. Pour $V \in \mathcal{H}$, on note μ_V la restriction de μ à $\varphi(\mathcal{N}(V,S))$.*

(i) On a
$$\mu(\bigcup_{V \in \mathcal{H}} \varphi(\mathcal{N}(V,S))) = 1;$$
de plus, $\mu_V(\varphi(\mathcal{N}(V',S)) = 0$ pour tous $V, V' \in \mathcal{H}$ avec $V' \neq V$ donc on a une décomposition
$$\mu = \bigoplus_{V \in \mathcal{H}} \mu_V.$$

(ii) *Soit $V \in \mathcal{H}$ tel que $\mu_V \neq 0$. Alors μ_V est $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariante. De plus, si*

$$\mu_V = \int_\Omega \nu_{V,\omega} d\omega$$

est une décomposition de μ_V en composantes $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariantes ergodiques $\nu_{V,\omega}$, alors, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\nu_{W,\omega} = \mu_{x_\omega+Y}$, où $Y = \varphi(V(\mathbf{Q}_S))$ et $x_\omega = \varphi(a_\omega)$ pour un $a_\omega \in \mathcal{N}(V,S)$.

Proof. Soit

$$\mu_V = \int_\Omega \nu_\omega d\omega$$

une décomposition de μ en mesures de probabilité $G(\mathbf{Z}[1/S])$-invariantes ergodiques ν_ω sur X_S .

Fixons tous les $\omega \in \Omega$. Par la Proposition 6.2.2, il existe $a_\omega \in \mathbf{Q}_S^d$ et $V_\omega \in \mathcal{H}$ tels que $g(a_\omega) \in a_\omega + V_\omega(\mathbf{Q}_S)$ pour tout $g \in G(\mathbf{Z}[1/S])$ et $v_\omega = \mu_{x+Y_\omega}$, où $Y_\omega = \varphi(V_\omega(\mathbf{Q}_S))$ et $x_\omega = \varphi(a_\omega)$. Comme $\mu_{x_\omega+Y_\omega}$ est ergodique, il existe un sous-ensemble A_ω de $x_\omega + Y_\omega$ avec $\mu_{x_\omega+Y_\omega}(A_\omega) = 1$ tel que la $G(\mathbf{Z}[1/S])$-orbite de x est dense dans $x_\omega + Y_\omega$ pour tout $x \in A_\omega$ (voir Proposition 6.2.3). Il est clair que $x \in \varphi(\mathcal{N}(V_\omega, S))$ pour tout $x \in A_\omega$.

Il s'ensuit que $\nu_\omega(\varphi(\mathcal{N}(V_\omega, S)) = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$ et par conséquent $\mu(\bigcup_{V\in\mathcal{H}} \varphi(\mathcal{N}(V_\omega, S)) = 1$. Comme les sous-ensembles mesurables $\varphi(\mathcal{N}(V,S))$ de X_S sont mutuellement disjoints (6.2.4) et comme $\mathcal{H}$ est dénombrable, on a une décomposition en somme directe

$$\mu = \bigoplus_{V\in\mathcal{H}} \int_{\omega:V_\omega=V} \nu_\omega d\omega$$

et $\mu_V = \int_{\omega:V_\omega=V} \nu_\omega d\omega$ avec $\nu_\omega = \mu_{x_\omega+Y}$ où $Y = V(\mathbf{Q}_S)$ et $x_\omega = \varphi(a_\omega)$ pour un certain $a_\omega \in \mathcal{N}(V,S)$. □

Adhérences d'orbites.

On étudie maintenant la description des adhérences d'orbites de points dans X_S. On rappelle que $\varphi : \mathbf{Q}_S^d \to X_S$ est la projection canonique.

Proposition 6.2.6. *Supposons que $G(\mathbf{Q}_S)$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soient $a \in \mathbf{Q}_S^d$ et $x = \varphi(a) \in X_S$. Il existe un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $g(a) \in a + V(\mathbf{Q}_S)$ *pour tout* $g \in G(\mathbf{Q}_S)$*;*

(ii) l'adhérence de la $G(\mathbf{Z}[1/S])$*-orbite de* x *dans* X_S *coïncide avec* $x + \varphi(V(\mathbf{Q}_S))$*.*

Proof. Comme dans la preuve de la Proposition 6.2.2 on considère le produit semi-direct $\widetilde{G} = G(\mathbf{Q}_S) \ltimes \mathbf{Q}_S^d$ et on injecte X_S comme sous-ensemble fermé de $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$, où $\widetilde{\Gamma} = G(\mathbf{Z}[1/S]) \ltimes \mathbf{Z}[1/S]^d$.

Par la version [Tom00, Theorem 1] du théorème de Ratner sur les adhérences d'orbites, il existe un sous-groupe $\mathbf{Q}$-algébrique L de G, un sous-espace vectoriel $L(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ et un sous-groupe d'indice fini H de $L(\mathbf{Q}_S) \ltimes V(\mathbf{Q}_S)$ avec les propriétés suivantes :

- $G(\mathbf{Q}_S) \subset H^a := aHa^{-1}$;
- $H \cap \widetilde{\Gamma}$ est un réseau dans H;
- l'adhérence $\overline{G(\mathbf{Q}_S)x}$ de la $G(\mathbf{Q}_S)$-orbite de x est $H^a x$, c'est-à-dire, $aH\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}$.

On affirme que

$$\overline{G(\mathbf{Z}[1/S])x} = \overline{G(\mathbf{Q}_S)x} \cap X_S.$$

En effet, il suffit de montrer que $\overline{G(\mathbf{Q}_S)x} \cap X_S$ est contenu dans $\overline{G(\mathbf{Z}[1/S])x}$.

Posons $\Gamma = G(\mathbf{Z}[1/S])$ et $\Lambda = \mathbf{Z}[1/S]^d$. On choisit un domaine fondamental $\Omega \subset G(\mathbf{Q}_S)$ pour $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$ qui est un voisinage de e et un compact fondamental $K \subset \mathbf{Q}_S^d$ pour $\mathbf{Q}_S^d/\Lambda$.

Soit $y = b + \Lambda \in \widehat{G(\mathbf{Q}_S)}x \cap X_S$. Alors, il existe une suite $g_n \in G(\mathbf{Q}_S)$ telle que $\lim_n (g_n, e)x = y$. On écrit $g_n = \omega_n \gamma_n$ pour $\omega_n \in \Omega$ et $\gamma_n \in \Gamma$ et $\gamma_n(a) = k_n + \lambda_n$ pour $k_n \in K$ et $\lambda_n \in \Lambda$. Alors

$$\begin{aligned}(e, b)\widetilde{\Gamma} &= \lim_n (g_n, e)x = \lim_n (\omega_n, e)(\gamma_n, \gamma_n(a))\widetilde{\Gamma} \\ &= \lim_n (\omega_n, e)(e, k_n)\widetilde{\Gamma} = \lim_n (\omega_n, \omega_n(k_n))\widetilde{\Gamma}.\end{aligned}$$

D'une part, il s'ensuit que $\lim_n \omega_n \delta_n = e$ pour certains $\delta_n \in \Gamma$. Ainsi pour n grand, on a $\omega_n \delta_n \in \Omega$ et, comme $\omega_n \in \Omega$, on a $\delta_n = e$, c'est-à-dire $\lim_n \omega_n = e$.

D'autre part, comme K est compact, on peut supposer que $\lim_n k_n = k \in K$ existe. Ainsi on a $\lim_n(\omega_n, \omega_n(k_n)) = (e, k)$ et donc $b + \Lambda = k + \Lambda$ et

$$b + \Lambda = \lim_n(k_n + \Lambda) = \lim_n(\gamma_n(a) + \Lambda),$$

c'est-à-dire, $y = b + \Lambda \in \overline{G(\mathbf{Z}[1/S])x}$.

On a

$$\left(aH\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma}\right) \cap X_S = \varphi(a + H \cap V(\mathbf{Q}_S))$$

et, comme dans la preuve de la Proposition 6.2.2 $H \cap V(\mathbf{Q}_S) = V(\mathbf{Q}_S)$, ce qui conclut la preuve.

□

6.2.3 Mesures de probabilité invariantes et adhérence d'orbites sur les solénoïdes adéliques.

Nous passons maintenant à la description de mesures de probabilité invariantes et des adhérences d'orbites sur le solénoïde adélique $X = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$. Le résultat suivant a été démontré dans [BF20] comme conséquence de la Proposition 6.2.5

Théorème 6.2.7. *Supposons que $G(\mathbf{Q})$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soit μ une mesure de probabilité $G(\mathbf{Q})$-invariante ergodique sur les sous-ensembles boréliens de $X = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$. Il existe un couple (a, V) constitué d'un point $a \in \mathbf{A}^d$ et d'un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ tel que*

$$\mu = \mu_{x+Y}$$

pour $x = \varphi(a)$ et $Y = \varphi(V(\mathbf{Q}))$. De plus, a peut être choisi tel que l'ensemble $\{g(a) - a | g \in G(\mathbf{Q})\}$ est dense dans $V(\mathbf{A})$.

L'analogue du théorème précédent pour les adhérences d'orbite est également démontré dans [BF20] comme conséquence de la Proposition 6.2.6

Théorème 6.2.8. *Supposons que $G(\mathbf{Q})$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. Soient $a \in \mathbf{Q}^d$ et $x = \varphi(a) \in X$. Il existe un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ tel que l'adhérence de la $G(\mathbf{Q})$-orbite de x dans X coïncide avec $x + \varphi(V(\mathbf{A}))$.*

6.2.4 Caractères invariants sur $\mathbf{Q}^d$.

Soit G un sous-groupe algébrique de GL_d défini sur $\mathbf{Q}$. A l'aide de la transformée de Fourier on donne maintenant la versions duale du Théorème 6.2.7 et terme de caractères $G(\mathbf{Q})$-invariants sur $\mathbf{Q}^d$.

On rappelle (voir la Section 6.2.1) que, après le choix d'un caractère unitaire non trivial e de $\mathbf{A}$ qui est trivial sur $\mathbf{Q}$, on peut identifier $\widehat{\mathbf{Q}^d}$ avec $X = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$ via l'application $GL_d(\mathbf{Q})$-équivariante

$$X \to \widehat{\mathbf{Q}^d},\ a + \mathbf{Q}^d \mapsto \lambda_a,$$

où

$$\lambda_a(q) = e(\langle a, q\rangle) \text{ pour tout } q = (q_1, ..., q_d) \in \mathbf{Q}^d,$$

et $\langle a, q\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i q_i$ pour $a \in \mathbf{A}^d$.

Par la dualité de Pontrjagin, l'application

$$q \mapsto (a + \mathbf{Q}^d \mapsto \lambda_a(q))$$

est un isomorphisme $GL_d(\mathbf{Q})$-équivariant entre $\mathbf{Q}^d$ et le groupe dual $\widehat{X}$ de X. L'annulateur d'un sous-ensemble Y de X dans $\mathbf{Q}^d \cong \widehat{X}$ est

$$Y^\perp = \left\{q \in \mathbf{Q}^d | \lambda_a(q) = 1 \text{ pour tout } a + \mathbf{Q}^d \in Y\right\}.$$

Si Y est un sous-groupe fermé, alors l'application

$$q + Y^\perp \mapsto (a + \mathbf{Q}^d \mapsto \lambda_a(q))$$

est un isomorphisme entre $\mathbf{Q}^d/Y^\perp$ et $\widehat{Y}$.

On aura besoin de la caractérisation des sous-solénoïdes de X suivante.

On rappelle que φ est la projection $\mathbf{A}^d \to X$.

Lemme 6.2.9. Soient $\mathcal{Y}(X)$ l'ensemble des sous-groupes fermés connexes de X et $\mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{Q}^d$. L'application $V \to \varphi(V(\mathbf{A}))$ est une bijection $GL_d(\mathbf{Q})$-équivariante entre $\mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d)$ et $\mathcal{Y}(X)$ et l'application $Y \mapsto Y^\perp$ est une bijection $GL_d(\mathbf{Q})$-équivariante entre $\mathcal{Y}(X)$ et $\mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d)$.

Proof. Il est clair que $\varphi(V(\mathbf{A})) \in \mathcal{Y}(X)$ et que $\varphi(W(\mathbf{A})) \neq \varphi(V(A))$ pour tous $V, W \in \mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d)$ tels que $V \neq W$.

Soit $Y \in \mathcal{Y}(X)$. Alors $\widehat{Y}$ est sans torsion (voir Theorem 23.18 dans [HR79]), c'est-à-dire, $\mathbf{Q}^d/Y^\perp$ est sans torsion. Il s'ensuit que $Y^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^d$, c'est-à-dire, $Y^\perp \in \mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d)$. On a

$$\begin{aligned}
Y = (Y^\perp)^\perp &= \{a \in \mathbf{Q}^d \in \mathbf{A}^d | \lambda_a(q) = 1 \text{ pour tout } q \in Y^\perp\} \\
&= \{a + \mathbf{Q}^d \in \mathbf{A}^d | \lambda_a(tq) = 1 \text{ pour tous } q \in Y^\perp, t \in \mathbf{Q}\} \\
&= \{a + \mathbf{Q}^d \in \mathbf{A}^d | e(t\langle a, q\rangle) = 1 \text{ pour tous } q \in Y^\perp, t \in \mathbf{Q}\} \\
&= \{a + \mathbf{Q}^d \in \mathbf{A}^d | \langle a, q\rangle \in \mathbf{Q} \text{ pour tout } q \in Y^\perp\}.
\end{aligned}$$

Pour le sous-espace vectoriel

$$V := \{a \in \mathbf{Q}^d | \langle a, q\rangle \in \mathbf{Q} \text{ pour tout } q \in Y^\perp\}$$

de $\mathbf{Q}^d$, on a $Y = \varphi(V(\mathbf{A}))$. Ainsi les applications

$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d) \to \mathcal{Y}(X),\ V \mapsto \varphi(V(\mathbf{A}))$$

et

$$\mathcal{Y}(X) \to \mathbf{Gr}(\mathbf{Q}^d),\ Y \mapsto Y^\perp$$

sont des bijections. □

Pour $a \in \mathbf{A}^d$, soit P_a le sous-espace $\mathbf{Q}$-vectoriel engendré par $\{g(a) - a | g \in G(\mathbf{Q})\}^\perp$; ainsi

$$\begin{aligned}
P_a &= \bigcap_{g \in G(\mathbf{Q}), t \in \mathbf{Q}} \{q \in \mathbf{Q}^d | \lambda_{g(a)}(tq) = \lambda(tq)\} \\
&= \bigcap_{g \in G(\mathbf{Q})} \{q \in \mathbf{Q}^d | \langle g(a) - a, q\rangle \in \mathbf{Q}\}
\end{aligned}$$

et P_a est un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant de $\mathbf{Q}^d$. On définit $\chi_a : \mathbf{Q}^d \to \mathbf{C}$ par

$$\chi_a(q) = \begin{cases} \lambda_a(q) \text{ si } q \in P_a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On remarque que χ_a est $G(\mathbf{Q})$-invariant et est de type positif (voir 4.2.1) c'est-à-dire, $\chi_a \in \mathrm{Tr}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q}))$.

On rappelle que deux points $x, y \in X$ appartiennent à la même $G(\mathbf{Q})$-quasi-orbite si leur $G(\mathbf{Q})$-orbites ont la même adhérence dans X.

Théorème 6.2.10. *Supposons que $G(\mathbf{Q})$ est engendré par ses sous-groupes à un paramètre unipotents. L'application*

$$\mathbf{A}^d \to \mathrm{Tr}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q})), \;\; a \mapsto \chi_a$$

a $\mathrm{Char}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q}))$ *comme image et se factorise en une bijection*

$$X/\sim \to \mathrm{Char}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q})),$$

où $X/\sim$ *est l'espace des* $G(\mathbf{Q})$*-quasi-orbites dans* $X = \mathbf{A}^d/\mathbf{Q}^d$.

Proof. Identifions $\mathbf{Q}^d$ avec $\widehat{X}$, la transformée de Fourier de X est l'application

$$\mathcal{F} : \mathrm{Prob}(X) \to \mathrm{Tr}(\mathbf{Q}^d)$$

donnée par

$$\mathcal{F}(\mu)(q) = \int_X \lambda_a(q) d\mu(a + \mathbf{Q}^n) \text{ pour tous } \mu \in \mathrm{Prob}(X), q \in \mathbf{Q}^d.$$

On rappelle (voir Proposition 5.1.4) que $\mathcal{F}$ se restreint en une bijection

$$\mathcal{F} : \mathrm{Prob}(X)_{erg}^{G(\mathbf{Q})} \to \mathrm{Char}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q})).$$

Soit $a \in \mathbf{A}^d$. Par le Lemme 6.2.9, il existe un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q})$-invariant V de $\mathbf{Q}^d$ tel que $Y^\perp = P_a$ pour $Y = \varphi(V(\mathbf{A}))$.

Soit $\mu = \mu_{x+Y}$ pour $x = \varphi(a)$.

- *Première étape.* On affirme que $\mathcal{F}(\mu_{x+Y}) = \chi_a$.

  En effet, pour tout $q \in \mathbf{Q}^d$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mu_{x+Y})(q) &= \int_Y \lambda_{a+b}(q) d\mu_Y(b + \mathbf{Q}^d) \\ &= \lambda_a(q) \int_Y \lambda_b(q) d\mu_Y(b + \mathbf{Q}^d).\end{aligned}$$

  Or, $\int_Y \lambda_b(q) d\mu_Y(b + \mathbf{Q}^d) = 0$, chaque fois que $b + \mathbf{Q}^d \mapsto \lambda_b(q)$ est un caractère non trivial de Y, par relations d'orthogonalité. Ceci prouve l'affirmation.

- *Deuxième étape.* On affirme que $\chi_a \in \mathrm{Char}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q}))$. Par la première étape, il suffit de montrer que μ_{x+Y} est ergodique.

  Supposons par contradiction que μ_{x+Y} n'est pas ergodique. On observe que $G(\mathbf{Q})$ est connexe (pour la topologie de Zariski) et n'a donc pas de sous-groupe d'indice fini propre. Ainsi, par la Proposition 6.2.3, il existe un sous-groupe propre fermé connexe Z de Y tel que $g(x+y) \in x+y+Z$ pour tous $g \in G$ et $y \in Y$. Par le Lemme 6.2.9, on peut écrire $Z = \varphi(W(\mathbf{A}))$ pour un sous-espace $\mathbf{Q}$-vectoriel propre $G(\mathbf{Q})$-invariant W de V. Ainsi, on a $g(x) - x \in \varphi(W(\mathbf{A}))$ pour tout $g \in G$. Ceci implique que

  $$\varphi(W(\mathbf{A}))^{\perp} = P_a = Y^{\perp} = \varphi(V(\mathbf{A}))^{\perp},$$

  ce qui donne une contradiction car $W \neq V$.

- *Troisième étape.* On affirme que l'adhérence de la $G(\mathbf{Q})$-orbite de x coïncide avec $x + Y$.

  En effet par le Théorème 6.2.8, il existe un sous-espace vectoriel $G(\mathbf{Q}$-invariant W de $\mathbf{Q}^d$ tel que l'adhérence de la $G(\mathbf{Q})$-orbite de $x \in X$ coïncide avec $x+\varphi(W(\mathbf{A}))$, c'est-à-dire, $g(x)-x \in \varphi(W(\mathbf{A}))$ pour tout $g \in G$. Comme dans la deuxième étape, cela implique que $W = V$.

- *Quatrième étape.* On affirme que $\mathrm{Char}(\mathbf{Q}^d, G(\mathbf{Q})) = \{\chi_a | a \in \mathbf{A}^d\}$.

  En effet, cela provient du Théorème 6.2.7 et des deux premières étapes.

- *Cinquième étape.* Soit $a_1, a_2 \in \mathbf{A}^d$. On affirme que $\chi_{a_1} = \chi_{a_2}$ si et seulement si $x_1 = \varphi(a_1)$ et $x_2 = \varphi(a_2)$ appartiennent à la même $G(\mathbf{Q})$-quasi-orbite.

  En effet, on remarque que $P_{g(a)} = P_a$ et $\chi_{g(a)} = \chi_a$ pour tous $a \in \mathbf{A}^d$ et $g \in G(\mathbf{Q})$. Il s'ensuit que $\chi_{a_1} = \chi_{a_2}$ si x_1 et x_2 appartiennent à la même quasi-orbite.

  Réciproquement, on suppose que $\chi_{a_1} = \chi_{a_2}$. Ainsi $P_{a_1} = P_{a_2}$ et $\lambda_{a_1} = \lambda_{a_2}$ sur P_{a_1}. Ainsi $Y_1 = Y_2$, où $Y_i = P_{a_i}^{\perp}$ pour $i = 1, 2$, et $x_1 - x_2 \in Y_1$. Par conséquent, $x_1 + Y_1 = x_2 + Y_2$, et donc, par la troisième étape, x_1 et x_2 appartiennent à la même quasi-orbite.

$\square$

6.2.5 Conclusion de la preuve du Théorème 6.1.1.

Soient G vérifiant les hypothèse du Théorème 6.1.1, $G = LU$ une décomposition de Levi de G, et $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie de U.

Soit $\psi \in \mathrm{Char}(G)$.

- *Première étape.* Posons $\varphi := \psi_{|U} \circ \exp$. On affirme qu'il existe $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}$ tel que φ coïncide avec l'extension triviale à $\mathfrak{u}$ de la restriction de λ à $\mathfrak{p}_\lambda$, où $\mathfrak{p}_\lambda$ est le sous-espace vectoriel G-invariant de $\mathfrak{u}$ donné par

  $$\mathfrak{p}_\lambda = \{X \in \mathfrak{u} | \lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \lambda(x) \text{ pour tous } g \in G, t \in \mathbf{Q}\}.$$

  En effet, par ce qui a été dit en sous-section 6.2.1, $\varphi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, G)$. L'affirmation s'ensuit donc par le Théorème 6.2.10.

- *Deuxième étape.* On affirme que

  $$\psi(\exp(X)g) = \psi(\exp(X))\psi(g) \text{ pour tous } g \in G, X \in \mathfrak{p}_\lambda.$$

  En effet, comme

  $$|\psi(\exp(X))| = |\psi(X)| = |\lambda(X)| = 1$$

  pour tout $X \in \mathfrak{p}_\lambda$, l'affirmation provient de la Proposition 4.3.4.ii.

- *Troisième étape.* Pour tous $g \in G$ et $X \in \mathfrak{u}$, on a

  $$\psi(g) = \psi(\exp(-X)\exp(\mathrm{Ad}(g)(X))g).$$

  En effet, on a

  $$\begin{aligned}\psi(g) &= \psi(\exp(-X) g \exp(X)) \\ &= \psi(\exp(-X)\exp(\mathrm{Ad}(g)X))g).\end{aligned}$$

  On rappelle que

  $$\mathfrak{k}_\lambda = \{X \in \mathfrak{u} | \lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = 1 \text{ pour tous } g \in G, t \in \mathbf{Q}\};$$

  on observe que $K_\lambda = \exp \mathfrak{k}_\lambda$ est en général strictement contenu dans $K_\psi \cap U$ où

  $$K_\psi := \{g \in G | \psi(g) = 1\}.$$

Soit
$$G_\lambda = \{g \in G | \mathrm{Ad}(g)(X) \in X + \mathfrak{k}_\lambda \text{ pour tout } X \in \mathfrak{u}\}.$$

Supposons que $G_\lambda \neq G$ et soit $g \in G \setminus G_\lambda$. Remarquons que ceci implique que $\lambda \neq \mathbf{1}_{\mathfrak{u}}$. On fixe $X \in \mathfrak{u}$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(X) - X \notin \mathfrak{k}_\lambda$. Soit

$$A := \{t \in \mathbf{Q} | \exp(-tX)\exp(\mathrm{Ad}(g)(tX)) \in K_\psi\}.$$

Par le Lemme 5.6.4. A est un sous-groupe de $\mathbf{Q}$.

- *Quatrième étape.* On affirme que $A \neq \mathbf{Q}$.

  En effet, supposons par contradiction, que $A = \mathbf{Q}$. Alors

$$\exp(-tX)\exp(\mathrm{Ad}(g)(tX)) \in K_\psi \text{ pour tout } t \in \mathbf{Q}.$$

  Par la formule de Campbell-Hausdorff, il existe $Y_1, Y_2, ..., Y_r \in \mathfrak{u}$ tels que

$$\exp(-tX)\exp(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} t^k Y_k\right) \text{ pour tout } t \in \mathbf{Q},$$

  où $Y_1 = \mathrm{Ad}(g)(X) - X$. On a alors

$$\lambda(\sum_{k=1}^{r} t^k Y_k) = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{Q}.$$

  En identifiant $\mathfrak{u}$ avec $\mathbf{Q}^d$ via une bases $\{X_1, ..., X_d\}$, le caractère λ de $\mathfrak{u}$ est donné pour un certain $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbf{A}^d$ par la formule

$$\lambda(\sum_{i=1}^{d} q_i X_i) = e(\sum_{i=1}^{d} a_i q_i) \text{ pour tous } (q_1, ..., q_d) \in \mathbf{Q}^d$$

  pour un caractère unitaire non trivial e de $\mathbf{A}$ qui est trivial sur $\mathbf{Q}$ (voir sous-section 6.2.1). Il s'ensuit que

$$e\left(\sum_{k=1}^{r} t^k \left(\sum_{i=1}^{d} a_i q_{k,i}\right)\right) = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{Q}.$$

où $(q_{k,i})_{i=1}^d$ sont les coordonnées de Y_k dans $\{X_1, ..., X_d\}$. Ceci implique que $\sum_{i=1}^d a_i q_{k,i} \in \mathbf{Q}$ pour tout $k = 1, ..., r$. En effet, sinon l'image de l'ensemble

$$\left\{\sum_{k=1}^r t^k \left(\sum_{i=1}^d a_i q_{k,i}\right) |t \in \mathbf{Q}\right\}\}$$

serait dense dans $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ (voir [BM16, Theorem 5.2]) et cela contredirait la non-trivialité de e.

En particulier, on a $\sum_{i=1}^d a_i q_{1,i} \in \mathbf{Q}$ et comme $Y_1 = g(X) - X$, on obtient $\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX) - tX) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{Q}$. Ainsi, $\mathrm{Ad}(g)(X) - X \in \mathfrak{k}_\lambda$ et c'est une contradiction.

- *Cinquième étape.* Soit $g \in G \setminus G_\lambda$. On affirme que $\psi(g) = 0$.

  En effet, soit $X \in \mathfrak{u}$ et $A \subset \mathbf{Q}$ comme dans l'étape quatre ; Posons

  $$B := \{t \in \mathbf{Q} | \exp(-tX) \exp(\mathrm{Ad}(g)(tX)) \in P_\psi\}$$

  Alors $A \subset B$ et, par le Lemme 5.6.4 une fois de plus, B est un sous-groupe de $\mathbf{Q}$. Deux cas peuvent arriver.

  - Premier cas : $A \subsetneq B$. Alors, il existe $t \in \mathbf{Q}$ tel que

    $$\exp(-tX) \exp(\mathrm{Ad}(g)(tX) \in P_\psi \setminus K_\psi.$$

    Alors en utilisant les étapes deux et trois, on a

    $$\psi(g) = \psi(\exp(-X) \exp(\mathrm{Ad}(g)(X)))\psi(g)$$

    et par conséquent $\psi(g) = 0$, car $\psi((\exp(-X) \exp(\mathrm{Ad}(g)(X))) \neq 1$.
  - Second cas : $A = B$. Alors B est un sous-groupe propre de $\mathbf{Q}$, par l'étape quatre. Alors, B est d'indice infini dans $\mathbf{Q}$ et on peut trouver une suite infinie $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbf{Q}$ telle que $t_n - t_m \notin B$ pour tout $n \neq m$.

    Posons

    $$u_n := \exp(-t_n X) \exp(g(t_n X)), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Pour $n \neq m$, on a

$$\begin{aligned} u_n u_m^{-1} &= \exp(-t_n X)\exp(g((t_n - t_m)X))\exp(t_m X) \\ &= \exp(-t_m X)(\exp(-(t_n - t_m)X)\exp(g((t_n - t_m)X)))\exp(t_m X); \end{aligned}$$

comme $\exp(-(t_n - t_m)X)\exp(g((t_n - t_m)X) \notin P_\psi$ et comme P_ψ est un sous-groupe distingué de U, on a donc $u_n u_m^{-1} \notin P_\psi$ et par conséquent

$$\psi(u_n u_m^{-1}) = 0 \text{ pour tous } n \neq m,$$

par la première étape.

Comme u_n coïncide avec le commutateur $[\exp(t_n X), g]$ dans G, il s'ensuit par le Lemme 4.2.3 que $\psi(g) = 0$.

Il reste donc à déterminer la restriction de ψ à G_λ.

Comme $\psi_{K_\lambda} = \mathbf{1}_{K_\lambda}$, on peut voir ψ comme un caractère du groupe algébrique G/K_λ, et on peut donc supposer que $K_\lambda = \{e\}$. Alors G_λ est le centralisateur de U dans G et est un sous-groupe algébrique connexe distingué de G. Soit $G_\lambda = L_1 U_1$ une décomposition de Levi de G_λ. Comme U_1 est un sous-groupe caractéristique unipotent de G_λ on a $U_1 \subset U$. De plus, L_1 est un sous-groupe algébrique semi-simple de G et donc L_1 est contenu dans un sous-groupe de Levi de G. Comme deux sous-groupes de Levi de G sont conjugués (voir [Mos56]) on peut supposer que $L_1 \subset L$, c'est-à-dire, $L_1 = L$.

- *Sixième étape.* On affirme qu'il existe $\varphi_1 \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$ tel que

$$\psi(gu) = \varphi_1(g)\psi(u) \text{ pour tous } g \in L_\lambda, u \in U.$$

En effet, comme L_λ est un sous-groupe algébrique distingué de L et comme L est semi-simple, on peut trouver un sous-groupe distingué M de L qui centralise L_λ et tel que $L = L_\lambda M$. Alors $G = L_\lambda M U$, et MU centralise L_λ. Ainsi l'affirmation, vient de la Proposition 4.3.7 (voir également le Corollaire 4.3.8).

- *Septième étape.* Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{u}}, \varphi_1 \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$ et $\Psi_{(\lambda,\varphi_1)} : G \to \mathbf{C}$ définit comme dans le Théorème 6.1.1. On affirme que $\psi := \Phi_{(\lambda,\varphi_1)} \in \mathrm{Char}(G)$.

En effet il est clair (voir Proposition 4.2.1) que $\psi \in \mathrm{Tr}(G)$. On écrit

$$\psi = \int_\Omega \psi_\omega d\nu(\omega)$$

comme une intégrale sur un espace probabilisé (Ω, ν) avec $\psi_\omega \in \mathrm{Char}(G)$ pour tout ω.

Alors $\varphi := \psi_{|U} \circ \exp$ coïncide avec l'extension triviale à $\mathfrak{u}$ de la restriction de λ à $\mathfrak{p}_\lambda$, où $\mathfrak{p}_\lambda$ est défini comme ci-dessus. Il s'ensuit par le Théorème 6.2.10 que $\varphi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{u}, G)$. Ceci implique que la restriction de ψ_ω à U coïncide avec $\psi_{|U}$ pour (ν-presque) tout ω.

Soit $\omega \in \Omega$. La cinquième étape appliquée à $\psi_\omega \in \mathrm{Char}(G)$, montre que $\psi_\omega = 0$ sur $G \setminus G_\lambda$, où G_λ est défini comme ci-dessus. Par la sixième étape, également appliquée à ψ_ω, il existe $\varphi_1^\omega \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$ tel que

$$\psi_\omega(gu) = \varphi_1^\omega(g)\psi(u) \text{ pour tous } g \in L_\lambda, u \in U.$$

Comme résultat, on a

$$\varphi_1 = \int_\Omega \varphi_1^\omega d\nu(\omega)$$

Comme $\varphi_1 \in \mathrm{Char}(L_\lambda)$, il s'ensuit que $\varphi_1^\omega = \varphi_1$ et par conséquent $\psi_\omega = \psi$ pour (ν-presque) tout ω. Ceci montre que $\varphi \in \mathrm{Char}(G)$.

- *Huitième étape.* Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mathfrak{u}}$ et $\varphi_1 \in \mathrm{Char}(L_{\lambda_1}), \varphi_2 \in \mathrm{Char}(L_{\lambda_2})$. On affirme que $\Psi_{(\lambda_1,\varphi_1)} = \Psi_{(\lambda_2,\varphi_2)}$ si et seulement si λ_1 et λ_2 ont la même adhérence de G-orbite et $\varphi_1 = \varphi_2$.

  En effet, posons $\psi_i = \Psi_{(\lambda_i,\varphi_i)}$ pour $i = 1, 2$. Par le Théorème 6.2.10, $\psi_{1|U} = \psi_{2|U}$ si et seulement si les adhérences des G-orbites de λ_1 et de λ_2 coïncident. Alors $\mathfrak{k}_{\lambda_1} = \mathfrak{k}_{\lambda_2}$ et par conséquent $G_{\lambda_1} = G_{\lambda_2}$. L'affirmation provient de ces faits.

Chapter 7

Exemples

On se propose à présent d'étudier quelques exemples.

Le lemme suivant sera très utile pour la suite.

Lemme 7.0.1. Soit un groupe G vérifiant les hypothèses du Théorème 6.1.1. Soit $X \in \mathfrak{u}$. Alors $X \in \mathfrak{p}_\lambda$ si et seulement si $\mathrm{Ad}(g)(X) - X \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $g \in G$

Proof. En effet soit $X \in \mathfrak{p}_\lambda$ alors

$$\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \lambda(tX) \text{ pour tous } g \in G, t \in \mathbf{Q}$$

ainsi

$$\lambda(\mathrm{Ad}(g')\mathrm{Ad}(g)(tX)) = \lambda(\mathrm{Ad}(g'g)(tX)) = \lambda(tX) = \lambda(\mathrm{Ad}(g')(tX))$$

pour tous $g, g' \in G, t \in \mathbf{Q}$

Donc

$$\lambda(\mathrm{Ad}(g')(t(\mathrm{Ad}(g)(X) - X))) = 1 \text{ pour tous } g, g' \in G, t \in \mathbf{Q}$$

Soit $\mathrm{Ad}(g)(X) - X \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $g \in G$.

Réciproquement si $\mathrm{Ad}(g)(X) - X \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $g \in G$ alors

$$\lambda(t(\mathrm{Ad}(g)(X) - X)) = 1 \text{ pour tous } t \in \mathbf{Q}, g \in G$$

Soit

$$\lambda(t\mathrm{Ad}(g)(X) - tX) = 1 \text{ pour tous } t \in \mathbf{Q}, g \in G$$

et donc $\lambda(\mathrm{Ad}(g)(tX) = \lambda(tX)$ pour tous $t \in \mathbf{Q}, g \in G$. $\square$

7.1 Groupes unipotents.

7.1.1 Groupe de Heisenberg.

Soit $H_3(\mathbf{Q})$ le groupe de Heisenberg de dimension 3 sur $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire, le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est engendré sur $\mathbf{Q}$ par les éléments $\{A, B, C\}$ où $[A, B] = C$. Ainsi $H_3(\mathbf{Q})$ est défini par :

$$H_3(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^3 \text{ avec la loi } (x, y, z)(x', y', z') = (x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}(xy'-x'y)).$$

Le centre de $H_3(\mathbf{Q})$ est $Z = \{(0, 0, z), z \in \mathbf{Q}\}$.

Proposition 7.1.1. *Soit $\varphi : H_3(\mathbf{Q}) \to \mathbf{C}$ alors $\varphi \in \mathrm{Char}(H_3(\mathbf{Q}))$ si et seulement si φ est de l'une des formes suivantes :*

(i) φ est le relevé à $H_3(\mathbf{Q})$ d'un caractère unitaire du groupe abélien $H_3(\mathbf{Q})/Z$

(ii) $\varphi = \widetilde{\psi}$ où $\psi \in \mathrm{Char}(Z) = \widehat{Z}$.

Preuve de la proposition 7.1.1. Par le Théorème 5.3.1 il suffit d'étudier les éléments de $\widehat{\mathfrak{h}}$. Ainsi soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}$. Alors par la preuve de cette proposition soit il existe un sous-espace non trivial de $\mathfrak{z}$ sur lequel λ est trivial soit $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z}$. Or $\mathfrak{z} = Vect(Z)$ étant de dimension 1, s'il existe un sous-espace non trivial de $\mathfrak{z}$ c'est nécessairement $\mathfrak{z}$ tout entier.

On a donc

(i) soit $\lambda_{|\mathfrak{z}} = 1$ alors φ_λ est le relevé à $H_3(\mathbf{Q})$ d'un caractère unitaire du groupe abélien $H_3(\mathbf{Q})/Z$

(ii) soit $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z}$ et donc $\varphi_\lambda = \widetilde{\lambda|_{\mathfrak{z}}}$

□

7.1.2 Groupe nilpotent sur 3 générateurs libre de pas 2.

Soit $\mathfrak{n}_{3,2}$ l'algèbre de Lie libre nilpotente d'ordre 2 sur $\mathbf{Q}$, $\mathfrak{n}_{3,2}$ est une algèbre de Lie de dimension 6 qui peut être réalisée comme suit. Posons $V_1 = V_2 = \mathbf{Q}^3$ et définissons un crochet de Lie sur l'espace vectoriel $\mathfrak{n}_{3,2} = V_1 \oplus V_2$ par

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = (0, 2(X_1 \wedge X_2)) \text{ pour tout } X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbf{Q}^3,$$

où $X_1 \wedge X_2$ est le produit vectoriel classique sur $\mathbf{Q}^3$. Alors le centre de $\mathfrak{n}_{3,2}$ est V_2.

Soit $N_{3,2} = \exp(\mathfrak{n}_{3,2})$ le groupe de Lie unipotent connexe et simplement connexe correspondant. Le groupe $N_{3,2}$ est $V_1 \oplus V_2$ muni de la loi

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + x_1 \wedge x_2) \text{ pour tout } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Q}^3;$$

l'application $\exp : \mathfrak{n}_{3,2} \to N_{3,2}$ est alors l'identité.

Pour une partie P de V_2, on notera $P^\perp$ l'orthogonal pour le produit scalaire usuel de P dans V_2.

Proposition 7.1.2. *Soit $\varphi : N_{3,2} \to \mathbf{C}$ alors $\varphi \in \mathrm{Char}(N_{3,2})$ si et seulement si φ est de l'une des formes suivantes :*

1. *$\varphi = \widetilde{\chi}$, où $\chi \in \widehat{Z}$ est tel qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel V de dimension ≥ 2 de Z sur lequel χ est trivial ;*
2. *il existe un sous espace P de dimension 2 de V_2, $\delta \in \widehat{P^\perp}$ et $\chi \in \widehat{Z}$ tels que*
$$\varphi((x, y)) = \begin{cases} \delta(x)\chi(y) \text{ si } x \in P^\perp \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ;$$
3. *$\varphi = \chi \circ p$ où $p : N_{3,2} \to N_{3,2}/Z$ la projection et $\chi \in \widehat{V_1}$.*

Preuve de la Proposition 7.1.2. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{n}_{3,2}}$.

- *Première étape.* On affirme que
$$\{Ad((x, y))(X_0, Y_0), (x, y) \in N_{3,2}\} = (X_0, Y_0 + X_0^\perp)$$
où $X_0^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(X_0)$ dans $\mathbf{Q}^3$.

  En effet, pour $(X_0, Y_0) \in \mathfrak{n}_{3,2}$ et $(x, y) \in N_{3,2}$,
$$\mathrm{Ad}((x, y))(X_0, Y_0) = (X_0, Y_0 + x \wedge X_0).$$

- *Deuxième étape.* On affirme que $(X, Y) \in \mathfrak{p}_\lambda$ si et seulement si $(0, X^\perp) \in \mathfrak{k}_\lambda$. En effet par le Lemme 7.0.1 si $(X, Y) \in \mathfrak{p}_\lambda$ alors $\mathrm{Ad}((x, y))(X, Y) - (X, Y) \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $(x, y) =\in N_{3,2}$. Ainsi par l'étape précédente $(0, X^\perp) \subset \mathfrak{k}_\lambda$.

- *Troisième étape.* Soit $\lambda \in \mathfrak{n}_{3,2}$ alors on affirme que $\mathfrak{k}_\lambda$ et $\mathfrak{p}_\lambda$ vérifient l'une de ces conditions.

  - $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_2 = \{0\}$, $\mathfrak{p}_\lambda = V_2$
  - $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_2 = D$ une droite, $\mathfrak{p}_\lambda = V_2$
  - $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_2 = P$ un plan, $\mathfrak{p}_\lambda = (P^\perp, V_2)$
  - $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_2 = V_2$,$\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{u}$.

  En effet $k_\lambda \cap V_2$ est un sous-espace de V_2 et par l'étape précédente $\mathfrak{p}_\lambda$, contenant V_2, peut être définie directement à partir de $\mathfrak{k}_\lambda$.

- *Quatrième étape.* On affirme que si l'on est dans l'un des deux premiers cas nécessairement $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_1 = \{0\}$. Et si $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_2 = P$ un plan alors $\mathfrak{k}_\lambda \cap V_1 = \{0\}$ ou $D = P^\perp$.

  En effet s'il existe $X \in V_1$ tel que $(X, 0) \in \mathfrak{k}_\lambda$ alors par la deuxième étape $(0, X^\perp) \subset \mathfrak{k}_\lambda$ avec $X^\perp$ un espace de dimension 2.

  On obtient donc finalement les cas suivants :

  1. $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z} = V_2$
  2. $\mathfrak{k}_\lambda = (0, D)$ D une droite de V_2 alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z} = V_2$,
  3. $\mathfrak{k}_\lambda = (0, P)$ P un plan de V_2 alors $\mathfrak{p}_\lambda = (P^\perp, V_2)$
  4. $\mathfrak{k}_\lambda = (D, P)$ avec $P = D^\perp$, D une droite dans $\mathbf{Q}^3$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = (D, V_2)$
  5. $\mathfrak{k}_\lambda = (0, V_2)$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$
  6. $\mathfrak{k}_\lambda = (D, V_2)$, D une droite de $\mathbf{Q}^3$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$
  7. $\mathfrak{k}_\lambda = (P, V_2)$, P un plan de $\mathbf{Q}^3$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$
  8. $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$ alors $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$

- *Cinquième étape.* On observe que

  - dans les cas 1 et 2, $\varphi_\lambda = \widetilde{\chi}, \chi \in \widehat{Z}$, tel qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel V de dimension ≥ 2 de Z tel que $\chi_{|V} = 1$;

– dans les cas 3 et 4, on remarque qu'alors il existe un sous-espace vectoriel P de dimension 2 de V_2, $\delta \in P^\perp$ et $\chi \in \widehat{Z}$ tel que $\chi_{|P} \equiv 1$ tels que

$$\varphi((x,y)) = \begin{cases} \delta(x)\chi(y) \text{ si } (x \in P^\perp \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

– dans les cas 5 à 8, $V_2 \subset \mathfrak{k}_\lambda$. Alors $\varphi_{\lambda|V_2} \equiv 1$, c'est-à-dire φ_λ est le relevé à $N_{3,2}$ d'un élément de $\mathrm{Char}(N_{3,2}/V_2) = \mathrm{Char}(V_1) = \widehat{V_1}$.

□

7.2 Groupes algébriques.

7.2.1 Radical abélien.

Soit V_n un espace vectoriel de dimension n et G un groupe semi-simple engendré par ses sous-groupes à 1 paramètre unipotents. On suppose que $G \curvearrowright V_n$ de manière irréductible et fidèle. Alors

$$\mathrm{Char}(G \ltimes V_n) = \{\delta_e\} \cup \mathrm{Char}(G)$$

Proof. On remarque dans un premier temps que V_n étant un espace vectoriel donc un groupe abélien on pourra confondre V_n et $\mathfrak{v}_n$.

Supposons que G agisse de manière irréductible sur V_n, alors les seuls sous-espaces vectoriels G-invariants de V_n sont $\{0\}$ et V_n. Soit $\lambda \in \widehat{V_n}$, alors, $\mathfrak{k}_\lambda$ et $\mathfrak{p}_\lambda$ étant des sous-espaces vectoriels G-invariants de V_n, on a nécessairement

$$\mathfrak{k}_\lambda = \{0\} \text{ ou } V_n$$

et

$$\mathfrak{p}_\lambda = \{0\} \text{ ou } V_n$$

Or on remarque que, par le Lemme 7.0.1, si $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$, alors nécessairement$\mathfrak{p}_\lambda = \{0\}$.

Ainsi il n'y a que deux cas possibles :

(i) soit $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda = \{0\}$ et alors nécessairement $L_\lambda = \{e_G\}$ et donc $\varphi_\lambda = \delta_e$

(ii) soit $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda$ et alors $L_\lambda = G$ et donc $\varphi_{\lambda|V_n} \equiv 1$, autrement dit φ_λ est le relevé à $G \ltimes V_n$ d'un élément de $\mathrm{Char}(G)$.

$\square$

Exemple 5. Soit l'espace vectoriel $V_{n+1} = \mathbf{Q}[X,Y]_n$ des polynômes homogènes de degré n. Et soit l'action de $SL_2(\mathbf{Q}) \curvearrowright V_{n+1}$ par

$$g.P(X,Y) = P(aX+bY, cX+dY), \text{ pour tous } g \in SL_2(\mathbf{Q}), P \in V_{n+1}$$

où a,b,c,d sont tels que $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Alors cette action est irréductible (voir [Heu10]). Ainsi

$$\mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q}) \ltimes V_n) = \{\delta\} \cup \mathrm{Char}(SL_2(\mathbf{Q}))$$

7.2.2 Radical Heisenberg.

Soit le groupe $G = SL_2(\mathbf{Q}) \ltimes H_3(\mathbf{Q})$ où l'action de $SL_2(\mathbf{Q})$ sur $H_3(\mathbf{Q})$ est donnée par

$$g.(x,y,z) = (x_g, y_g, z) \text{ pour tous } g \in SL_2(\mathbf{Q}), (x,y,z) \in H_3(\mathbf{Q})$$

où $\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} := g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 7.2.1. *Soit $\varphi : G \to \mathbf{C}$, alors $\varphi \in \mathrm{Char}(G)$ si et seulement si φ est de l'une des formes suivantes :*

(i) φ est le relevé à G d'un caractère unitaire de $SL_3(\mathbf{Q})$

(ii) $\varphi = \mathbf{1}_Z$

(iii) $\varphi = \widetilde{\psi}$ où $\psi \in \widehat{Z} \setminus \{\mathbf{1}\}$

Preuve de la Proposition 7.2.1. Par le Théorème 6.1.1 il s'agit dans un premier temps d'étudier les éléments de $\widehat{\mathfrak{h}}$.

Ainsi soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}$. On affirme qu'alors trois cas se présentent à nous.

- $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z}$ et $L_\lambda = \{I_2\}$;
- $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z}$ et $L_\lambda = \{I_2\}$;
- $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{h}$ et $L_\lambda = SL_2(\mathbf{Q})$.

En effet l'action de $SL_2(\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{Q}^2 \setminus \{(0,0\}$ étant transitive nécessairement, $\mathfrak{k}_\lambda$ étant stable par action de G, si $\mathfrak{k}_\lambda$ contient un élément n'appartenant pas à $\mathfrak{z}$, nécessairement $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{h}$. Ainsi soit $\mathfrak{k}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{z}$ soit $\mathfrak{h}$.

De plus

- si $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$ ou si $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{z}$ par le Lemme 7.0.1 nécessairement, étant donné l'action de $SL_2(\mathbf{Q})$ sur $H_3(\mathbf{Q})$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{z}$ et $L_\lambda = \{I_2\}$
- si $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{h}$ il est clair que $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{h}$ et $L_\lambda = SL_2(\mathbf{Q})$

Ainsi les trois cas précédents nous montrent que les caractères de G sont bien ceux donnés dans la Proposition 7.2.1. □

7.2.3 Radical nilpotent libre de pas 2.

On remarque que, pour une matrice $A \in GL_3(\mathbf{Q})$, on a

$$A(X) \wedge A(Y) = (\det A)(A^t)^{-1}(X \wedge Y) \text{ pour tous } X, Y \in \mathbf{Q}^3$$

Soit $N_{3,2}$ comme dans 7.1.2.

Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(N_{3,2})$ de $N_{3,2}$ est le sous-groupe de $GL_6(\mathbf{Q})$ des matrices $g_{A,B}$ de la forme

$$g_{A,B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & (\det A)(A^t)^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $A \in GL_3(\mathbf{Q})$ et $B \in M_3(\mathbf{Q})$. Pour cela voir [BG15, Exemple 35]. Nous nous intéresserons au cas où $B = 0$ et $A \in SL_3(\mathbf{Q})$.

Proposition 7.2.2. *Soit $G = SL_3(\mathbf{Q}) \ltimes N_{3,2}$. Soit $\varphi : G \to \mathbf{C}$. Alors $\varphi \in \mathrm{Char}(G)$ si et seulement si φ est de l'une des formes suivantes.*

1. $\varphi = \delta_0$,
2. $\varphi = \mathbf{1}_{V_2}$
3. $\varphi = \psi \circ p$ *où* $p : G \to Sl_3(\mathbf{Q})$ *la projection canonique et* $\psi \in Char(Sl_3(\mathbf{Q}))$

Preuve de la Proposition 7.2.2. Soit $\lambda \in \widehat{\mathfrak{n}_{3,2}}$ alors 3 cas se présentent à nous :

(i) $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$, $\mathfrak{p}_\lambda = \{0\}$, $L_\lambda = \{I_3\}$

(ii) $\mathfrak{k}_\lambda = V_2$, $\mathfrak{p}_\lambda = V_2$, $L_\lambda = \{I_3\}$

(iii) $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$, $L_\lambda = SL_3(\mathbf{Q})$

En effet

(i) si $\mathfrak{k}_\lambda = \{0\}$ alors par la Proposition 7.0.1, $(X,Y) \in \mathfrak{p}_\lambda$ si et seulement si $\mathrm{Ad}(g)(X,Y) - (X,Y) = 0$ pour tout $g \in G$ en particulier pour $g = (A,(0,0))$ cela donne

$$(AX - X, {}^tA^{-1}Y - Y) = (0,0) \text{ pour tout } A \in Sl_3(\mathbf{Q})$$

Ainsi nécessairement $(X,Y) = (0,0)$ et donc $\mathfrak{p}_\lambda = \{0\}$. Enfin si $A \in L_\lambda$ alors $(AX, {}^tA^{-1}Y) = (X,Y)$ pour tout $(X,Y) \in \mathfrak{n}_{3,2}$ donc $A = I_3$ et $L_\lambda = \{I_3\}$. Ainsi $\varphi = \delta_0$

(ii) Si il existe $Y \neq 0$ tel que $(0,Y) \in \mathfrak{k}_\lambda$ et si pour tout $X \neq 0$, on a $(X,Y) \notin \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $Y \in \mathbf{Q}^3$ alors

$$\{\mathrm{Ad}(A)(0,Y), A \in Sl_3(\mathbf{Q})\} = \{(0, {}^tA^{-1}), A \in Sl_3(\mathbf{Q})\} = V_2 \setminus \{0\}$$

Ainsi $\mathfrak{k}_\lambda = V_2$ De plus soit $(X,Y) \in \mathfrak{p}_\lambda$ alors par la proposition 7.0.1 $\mathrm{Ad}(g)(X,Y) - (X,Y) \in \mathfrak{k}_\lambda$, en particulier pour $g = (A,0)$ on a

$$(AX - X, {}^tA^{-1}Y - Y) \in \mathfrak{k}_\lambda = V_2 \text{ pour tout } A \in SL_3(\mathbf{Q})$$

Soit $AX - X = 0$ pour tout $A \in Sl_3(\mathbf{Q})$ et donc $X = 0$. Ainsi $\mathfrak{p}_\lambda = V_2$. Enfin $A \in L_\lambda$ si et seulement si $(AX, {}^tA^{-1}Y) \in (X,Y) + \mathfrak{k}_\lambda$ ainsi $AX = X$ pour tout $X \in \mathbf{Q}^3$ soit $A = I_3$. Ainsi $L_\lambda = \{I_3\}$. Ainsi $\varphi = \mathbf{1}_{V_2}$.

(iii) Si il existe $X \neq 0$ tel qu'il existe Y tel que $(X,Y) \in \mathfrak{k}_\lambda$. Alors par l'action adjointe de $N_{3,2}$ sur $\mathfrak{n}_{3,2}$ $(X, Y + X^\perp) \subset \mathfrak{k}_\lambda$ et $\mathfrak{k}_\lambda$ étant un sous espace, il existe un $Y' \neq 0$ tel que $(0,Y') \in \mathfrak{k}_\lambda$ et donc par ce qui précède $V_2 \in \mathfrak{k}$. De plus par l'action adjointe de $Sl_3(\mathbf{Q})$ sur $\mathfrak{n}_{3,2}$ $(AX, {}^tA^{-1}) \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $A \in Sl_3(\mathbf{Q})$ et donc $(AX, V_2) \in \mathfrak{k}_\lambda$ pour tout $A \in Sl_3(\mathbf{Q})$. Ainsi finalement $\mathfrak{k}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$. Dans ce cas nécessairement $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{n}_{3,2}$ et $L_\lambda = SL_3(\mathbf{Q})$. Ainsi $\varphi = \psi \circ p$ où $p : G \to Sl_3(\mathbf{Q})$ la projection canonique et $\psi \in \mathrm{Char}(Sl_3(\mathbf{Q}))$

□

Bibliography

[AE12] Miklós Abért and Gábor Elek. Dynamical properties of profinite actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(6):1805–1835, 2012.

[BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Bek07] Bachir Bekka. Operator-algebraic superridigity for $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$. *Invent. Math.*, 169(2):401–425, 2007.

[Bek19] Bachir Bekka. Character rigidity of simple algebraic groups. preprint, 2019.

[BF20] Bachir Bekka and Camille Francini. Characters of algebraic groups over a number field. preprint, 2020.

[BG12] J. Bourgain and A. Gamburd. A spectral gap theorem in $\mathrm{SU}(d)$. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5):1455–1511, 2012.

[BG15] Bachir Bekka and Yves Guivarc'h. On the spectral theory of groups of affine transformations of compact nilmanifolds. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 48(3):607–645, 2015.

[BM16] Vitaly Bergelson and Joel Moreira. Van der Corput's difference theorem: some modern developments. *Indag. Math. (N.S.)*, 27(2):437–479, 2016.

[Bor63] Armand Borel. Some finiteness properties of adele groups over number fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (16):5–30, 1963.

[BT73] Armand Borel and Jacques Tits. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97:499–571, 1973.

[CM84] A. L. Carey and W. Moran. Characters of nilpotent groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 96(1):123–137, 1984.

[CPJ94] Lawrence Corwin and Carolyn Pfeffer Johnston. On factor representations of discrete rational nilpotent groups and the Plancherel formula. *Pacific J. Math.*, 162(2):261–275, 1994.

[Dix69] Jacques Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[Dix77] Jacques Dixmier. *C^*-algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.

[dJR79] Andrés del Junco and Joseph Rosenblatt. Counterexamples in ergodic theory and number theory. *Math. Ann.*, 245(3):185–197, 1979.

[Fol95] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[FS99] Alex Furman and Yehuda Shalom. Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):1037–1061, 1999.

[Fur76] Harry Furstenberg. A note on Borel's density theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55(1):209–212, 1976.

[Hal43] Paul R. Halmos. On automorphisms of compact groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:619–624, 1943.

[Heu10] Jean-Romain Heu. *Dynamique des actions de semi-groupes d'endomorphismes sur des nilvariétés*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2010.

[HR63] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[HR70] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. II: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, volume 115 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979. Structure of topological groups, integration theory, group representations.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Kap49] Irving Kaplansky. Groups with representations of bounded degree. *Canadian J. Math.*, 1:105–112, 1949.

[Kir65] A. A. Kirillov. Positive-definite functions on a group of matrices with elements from a discrete field. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 162:503–505, 1965.

[KS89] Bruce Kitchens and Klaus Schmidt. Automorphisms of compact groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(4):691–735, 1989.

[Mil17] J. S. Milne. *Algebraic groups*, volume 170 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017. The theory of group schemes of finite type over a field.

[Mos56] G. D. Mostow. Fully reducible subgroups of algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78:200–221, 1956.

[MS95] Shahar Mozes and Nimish Shah. On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(1):149–159, 1995.

[MT94] G. A. Margulis and G. M. Tomanov. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 116(1-3):347–392, 1994.

[Ovc71] S. V. Ovcinnikov. Positive definite functions on Chevalley groups. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, (8(111)):77–87, 1971.

[PT16] Jesse Peterson and Andreas Thom. Character rigidity for special linear groups. *J. Reine Angew. Math.*, 716:207–228, 2016.

[Rat95] Marina Ratner. Raghunathan's conjectures for Cartesian products of real and p-adic Lie groups. *Duke Math. J.*, 77(2):275–382, 1995.

[Sch81] Klaus Schmidt. Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(2):223–236, 1981.

[Ste16] Robert Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*, volume 66 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[Tho64a] Elmar Thoma. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. *Math. Z.*, 85:40–61, 1964.

[Tho64b] Elmar Thoma. Über positiv-definite Klassenfunctionen abzählbarer Gruppen. *Math. Z.*, 84:389–402, 1964.

[Tho64c] Elmar Thoma. Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen. *Math. Ann.*, 153:111–138, 1964.

[Tit72] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20:250–270, 1972.

[Tom00] George Tomanov. Orbits on homogeneous spaces of arithmetic origin and approximations. In *Analysis on homogeneous spaces* *and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 265–297. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.

[VK81] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Characters and factor representations of the infinite symmetric group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 257(5):1037–1040, 1981.

[Wei74] André Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin, third edition, 1974. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 144.

[Wit94] Dave Witte. Measurable quotients of unipotent translations on homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 345(2):577–594, 1994.

Titre : Caractères de groupes algébriques sur Q et mesures invariantes sur les solénoïdes.

Mots clés : algèbres d'opérateurs, théorie ergodique, groupes algébriques, solénoïdes, trou spectral, caractères.

Résumé : Cette thèse comporte deux parties dans lesquelles les mesures de probabilités invariantes sur les solénoïdes jouent un rôle majeur. Les solénoïdes (c'est-à-dire les groupes abéliens compacts connexes de dimension topologique finie) sont des généralisations naturelles des tores usuels.
Dans la première partie, nous étudions les groupes de transformations affines de solénoïdes ; nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour que l'action d'un tel groupe possède un trou spectral quand le solénoïde est muni de la mesure de Haar.
Dans la deuxième partie nous étudions les traces et caractères des groupes algébriques sur le corps des nombres rationnels.
Les traces d'un groupe dénombrable sont des fonctions de type positif sur le groupe qui sont invariantes par conjugaison. Les caractères (c'est-à-dire les traces qui sont indécomposables dans un certain sens) sont des généralisations des caractères usuels des représentations de dimension finie et interviennent en théorie des algèbres d'opérateurs ainsi que dans l'étude des sous-groupes distingués aléatoires.
Nous commençons par classifier ces caractères dans le cas des groupes unipotents. Puis nous étendons cette classification au cas des groupes algébriques généraux, à l'aide de l'étude du cas unipotent et de la détermination des mesures invariantes sur les solénoïdes adéliques.

Title : Characters of algebraic groups over Q and invariant measure on solenoids.

Keywords : algèbres d'opérateurs, théorie ergodique, groupes algébriques, solénoïdes, trou spectral, caractères.

Abstract : This thesis is divided in two parts in which the invariant probability measures on solenoids play a major role. The solenoids (that is a compact finite dimensional connected abelian group) are a natural generalization of the usual torus.
In the first part, we will study the action of groups on a solenoid by affine transformation; we obtain a necessary and sufficient condition for the action of such a group to have the spectral gap property when the solenoid is provided with the Haar measure.
In the second part we will study the trace and characters of algebraic groups over the field of rational numbers.
The trace of a countable group are function of positive type on the group which are invariant under conjugation. The characters (that are the indecomposable traces in a certain way) are generalization of the usual characters of finite dimensional representations and intervene in the theory of operator algebra and in the study of invariant random subgroups.
We begin with the classification of this characters in the case of unipotent groups.Then we extend this classification to general algebraic groups, using the study of the unipotent case et the establishment of the invariant measure on adelic solenoids.