



**HAL**  
open science

# Contributions à l'estimation de l'attitude et à la détection de l'hypovigilance au volant

Tristan Bonargent

► **To cite this version:**

Tristan Bonargent. Contributions à l'estimation de l'attitude et à la détection de l'hypovigilance au volant. Automatique / Robotique. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMC212 . tel-03053718

**HAL Id: tel-03053718**

**<https://theses.hal.science/tel-03053718>**

Submitted on 11 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

**Pour obtenir le diplôme de doctorat**

**Spécialité AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE**

**Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie**

### **Contributions à l'estimation de l'attitude et à la détection de l'hypovigilance au volant**

**Présentée et soutenue par  
Tristan BONARGENT**

**Thèse soutenue publiquement le 12/10/2020  
devant le jury composé de**

M. CHRISTOPHE AUBRUN	Professeur des universités, Université de Lorraine	Rapporteur du jury
M. MALEK GHANES	Professeur des universités, École Centrale de Nantes	Rapporteur du jury
Mme VALÉRIE BUDINGER	Professeur, ISAE-SUPAERO	Président du jury
Mme AUDREY CHARTRIN	Ingénieur de recherche, KAD	Membre du jury
Mme XUEFANG LIN-SHI	Professeur des universités, INSA Lyon	Membre du jury
M. TOMAS MENARD	Maître de conférences HDR, Université Caen Normandie	Membre du jury
M. ERIC PIGEON	Maître de conférences, Université Caen Normandie	Membre du jury
M. OLIVIER GEHAN	Maître de conférences HDR, ENSICAEN	Directeur de thèse

**Thèse dirigée par OLIVIER GEHAN, Laboratoire d'Automatique de Caen (LAC)**





## Remerciements

Ce manuscrit est le résultat de 3 ans de travail réalisé avec l'association du laboratoire d'automatique de Caen et l'entreprise KAD! Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la Recherche).

Je souhaite tout d'abord remercier l'entreprise KAD! d'avoir financé cette thèse avec le soutien de l'ANRT.

Je remercie aussi vivement Monsieur Tomas Ménard, maître de conférences HDR, et Monsieur Éric Pigeon, maître de conférences, qui m'ont conseillé, guidé et soutenu pendant ces années de thèse. Je remercie également mon directeur de thèse Monsieur Olivier Géhan, maître de conférences HDR, et tous les membres du laboratoire, en particulier Monsieur Mathieu Pouliquen et Monsieur Miloud Frikel, pour leur accueil.

Je remercie également Monsieur Karl Auzou, président de la société KAD!, ainsi que Madame Audrey Chartrin et Monsieur Fabrice Nègre pour m'avoir accueilli au sein de KAD!

Merci à Monsieur Nicolas Bessot, maître de conférences, et Madame Marion Hay, post-doctorante, du laboratoire COMETE avec qui j'ai beaucoup appris pendant ces années de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Christophe Aubrun et Monsieur Malek Ghanes, professeurs des universités, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce manuscrit. Merci également à Madame Xuenfang Lin-Shi, professeur des universités, et à Madame Valerie Budinger, professeur ERE, pour avoir examiné ce travail et assisté à la soutenance.

Un grand merci aux doctorants du laboratoire Romain, Clément, Abdelhak, José-Luis, Leticia, Hicham et Guillaume avec qui j'ai passé de très bons moments.

Pour finir, je remercie toute ma famille et mes amis de m'avoir soutenu pendant cette thèse.



# Contributions

**Les contributions suivantes ont été réalisées dans le cadre de la thèse :**

T. BONARGENT, T. MENARD, E. PIGEON et O. GEHAN (déc. 2019). « Observer and first-order low-pass filter based attitude estimation for rigid bodies subject to external acceleration ». Dans : *Conference on Decision and Control*. IEEE : Nice, France, p. 629-634. DOI : [10.1109/CDC40024.2019.9030202](https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9030202)

T. BONARGENT, T. MÉNARD, E. PIGEON, M. POULIQUEN et O. GEHAN (mai 2020). « Observer design for nonlinear systems with multi-rate sampled outputs - Application to attitude estimation ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 997-1002. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143923](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143923)

T. BONARGENT, T. MÉNARD, O. GEHAN et E. PIGEON (2020). « Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with multi-rate outputs and uncertainties - Application to attitude estimation with gyro bias ». Dans : *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Soumis

T. BONARGENT, E. PIGEON, N. BESSOT, M. POULIQUEN, O. GEHAN, T. MENARD, D. DAVENNE et M. FRIKEL (mai 2018). « Amélioration de la qualité des quantificateurs reliés aux performances du conducteur pour la détermination de l'hypovigilance au volant ». Dans : *ICSAT'2018 International Conference on signals, Automatic and Telecommunications*. Beni Mellal, Morocco. URL : <https://hal-normandie-univ.archives-ouvertes.fr/hal-01838310>

M. HAY, T. BONARGENT, E. PIGEON, M. POULIQUEN, D. DAVENNE et N. BESSOT (oct. 2018). *Détermination d'algorithmes de prédiction de l'hypovigilance chez des volontaires sains sur simulateur de conduite Projet DCube (Driving Drowsiness Detection)*. Published : Colloque GDR sommeil - Les nouvelles méthodologies en sommeil. URL : <https://hal-normandie-univ.archives-ouvertes.fr/hal-02135263>

## Les contributions suivantes ont été réalisées sur d'autres thématiques :

T. BONARGENT, E. PIGEON, T. MARTIN, M. POULIQUEN, O. GEHAN, T. MENARD et M. M'SAAD (sept. 2018). « Identification of quantifiers related to circadian rhythm variations ». Dans : *UKACC International Conference on Control 2018*. IEEE : Sheffield, United Kingdom, p. 462-467. DOI : [10.1109/CONTROL.2018.8516835](https://doi.org/10.1109/CONTROL.2018.8516835)

T. MARTIN, T. BONARGENT, S. BESNARD, G. QUARCK, B. MAUVIEUX, E. PIGEON, P. DENISE et D. DAVENNE (juin 2020). « Vestibular stimulation by 2G hypergravity modifies resynchronization in temperature rhythm in rats ». Dans : *Scientific Reports* 10(1). Publisher : Nature Publishing Group, p. 9216. DOI : [10.1038/s41598-020-65496-x](https://doi.org/10.1038/s41598-020-65496-x)

R. AUBER, M. POULIQUEN, A. GOUDJIL, E. PIGEON, O. GEHAN, T. MENARD, P. A. CHAPON, S. MOUSSAY et T. BONARGENT (déc. 2019). « Identification for Switched FIR Linear Systems using Binary Measurements ». Dans : *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 791-796. DOI : [10.1109/CDC40024.2019.9029940](https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029940)

A. GOUDJIL, M. POULIQUEN, E. PIGEON, O. GEHAN et T. BONARGENT (mai 2020). « Continuous-time Identification for a class of Switched Linear Systems ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 521-526. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143853](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143853)

H. OUALLA, M. POULIQUEN, M. FRIKEL, S. SAFI et T. BONARGENT (mai 2020). « Spectral Analysis for System Identification from Input/Output Binary Measurements ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 731-734. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143871](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143871)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>État de l'art sur l'estimation de l'attitude d'un corps rigide</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Définition de l'attitude d'un corps rigide . . . . .	7
2.2.1	Définition d'un corps rigide . . . . .	7
2.2.2	Définition des référentiels mis en jeu . . . . .	7
2.2.3	Notion d'attitude . . . . .	9
2.2.4	Représentation de l'attitude . . . . .	9
2.2.4.1	Matrice de rotation . . . . .	9
2.2.4.2	Les angles d'Euler . . . . .	10
2.2.4.3	Les quaternions . . . . .	12
2.3	Capteurs inertiels et magnétiques utilisés pour l'estimation de l'attitude . . . . .	13
2.3.1	Accéléromètre . . . . .	13
2.3.2	Magnétomètre . . . . .	14
2.3.3	Gyromètre . . . . .	16
2.4	État de l'art sur l'estimation de l'attitude . . . . .	17
2.4.1	Estimation statique . . . . .	17
2.4.1.1	Énoncé du problème . . . . .	17
2.4.1.2	Algorithmes estimant une matrice de rotation . . . . .	18
2.4.1.3	Algorithmes estimant un quaternion . . . . .	18
2.4.2	Estimation dynamique . . . . .	20
2.4.2.1	Modèles dynamiques . . . . .	20
2.4.2.2	Approche stochastique . . . . .	22
2.4.2.3	Approche déterministe . . . . .	25
2.5	Conclusion . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Estimation de l'attitude d'un corps soumis à une accélération externe</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction	30
3.2	État de l'art sur l'estimation de l'attitude dans le cas d'un mouvement accéléré	30
3.2.1	Utilisation de mesures de vitesse et/ou de position	30
3.2.2	Séparation des phases statiques et dynamiques	31
3.2.3	Utilisation d'un modèle pour l'accélération	32
3.3	Estimation de l'attitude par observateur et filtre passe-bas	33
3.3.1	Modèle du système de l'attitude	33
3.3.1.1	Modèle physique	33
3.3.1.2	Modèle de synthèse	34
3.3.2	Synthèse des observateurs	36
3.3.2.1	Conception du filtre passe bas	36
3.3.2.2	Premier observateur	37
3.3.2.3	Deuxième observateur	40
3.3.3	Application des observateurs	43
3.3.3.1	Simulations	43
3.3.3.2	Application dans un contexte réel	47
3.4	Conclusion	49
<b>4</b>	<b>Observateur adaptatif pour une classe de systèmes non-linéaires incertains avec des sorties multi-échantillonnées - application au problème de l'estimation de l'attitude</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction	56
4.2	État de l'art sur l'estimation d'état de systèmes à sorties multi-échantillonnées	57
4.2.1	Observateurs d'état	57
4.2.2	Observateurs adaptatifs	59
4.3	Observateur adaptatif proposé	60
4.3.1	Classe de systèmes considérée	61
4.3.1.1	Structure des non-linéarités	62
4.3.1.2	Mesures de la classe de systèmes considérée	63
4.3.2	Résultats principaux	64
4.3.2.1	Synthèse de l'observateur	64
4.3.2.2	Résultat de convergence	66
4.4	Application à l'estimation de l'attitude	77
4.4.1	Modèle du système	77

4.4.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	79
4.4.3	Simulations . . . . .	80
4.5	Conclusion . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Détection de l'hypovigilance chez le conducteur</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	90
5.2	État de l'art sur la détection de l'hypovigilance au volant . . . . .	90
5.2.1	Définition de l'hypovigilance . . . . .	91
5.2.2	Mesures liées au niveau d'hypovigilance . . . . .	91
5.2.2.1	Les mesures physiologiques . . . . .	92
5.2.2.2	Les mesures basées sur le comportement du véhicule . . . . .	94
5.2.2.3	Les mesures traduisant le comportement du conducteur . . . . .	96
5.2.2.4	Les mesures subjectives . . . . .	97
5.2.3	Extraction de données corrélées au niveau de vigilance . . . . .	97
5.2.3.1	Extraction de grandeur par analyse temps-fréquence . . . . .	98
5.2.3.2	Estimation de l'Objective Sleepiness Score . . . . .	99
5.2.4	Calcul des indicateurs . . . . .	100
5.2.5	Algorithmes permettant d'estimer un niveau d'hypovigilance . . . . .	102
5.2.5.1	Analyse discriminante . . . . .	102
5.2.5.2	Méthode des $k$ plus proches voisins . . . . .	103
5.2.5.3	Machine à vecteurs de supports . . . . .	104
5.2.5.4	Réseau de neurones artificiels . . . . .	107
5.2.6	Quantificateurs de performance . . . . .	108
5.3	Détermination des grandeurs discriminantes pour la détection de l'hypovigilance des conducteurs . . . . .	109
5.3.1	Acquisition des données . . . . .	110
5.3.2	Extraction de signaux porteurs d'informations . . . . .	110
5.3.3	Préparation des données . . . . .	112
5.3.4	Algorithme de classification utilisé . . . . .	113
5.3.5	Sélection des grandeurs . . . . .	114
5.3.6	Comparaison des performances . . . . .	115
5.4	Conclusion . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>119</b>

---

<b>A</b>	<b>Rappels sur des notions concernant les rotations</b>	<b>123</b>
A.1	Rotation dans l'espace . . . . .	123
A.2	Matrice de rotation . . . . .	124
A.3	Quaternion . . . . .	124
<b>B</b>	<b>Preuves des inégalités du chapitre 4</b>	<b>127</b>
B.1	Preuve de l'inégalité 1 . . . . .	127
B.2	Preuve de l'inégalité 2 . . . . .	128
B.3	Preuve de l'inégalité 3 . . . . .	129
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>
	<b>Résumé</b>	<b>149</b>

# Table des figures

2.1	Représentation d'un corps rigide . . . . .	7
2.2	Représentation des repères . . . . .	8
2.3	Représentation des angles d'Euler pour la séquence ZYX . . . . .	11
2.4	Représentation d'un changement d'attitude à l'aide d'une seule rotation . . . . .	12
2.5	Principe de fonctionnement d'un accéléromètre . . . . .	14
2.6	Lignes de Champ magnétique terrestre . . . . .	15
2.7	Principe de fonctionnement d'un gyromètre vibrant . . . . .	16
2.8	Transformation sans parfum . . . . .	25
2.9	Principe de l'estimation par observateur . . . . .	26
3.1	Vitesse angulaire $\omega(t)$ . . . . .	44
3.2	Mesures $a(t)$ et $m(t)$ sans accélération externe . . . . .	45
3.3	Angles d'euler sans accélération externe . . . . .	46
3.4	Erreurs $\ R - \hat{R}\ $ sans accélération externe . . . . .	47
3.5	Accélération externe de la seconde simulation . . . . .	48
3.6	Erreur entre la version filtrée de l'accélération et $g_0$ . . . . .	49
3.7	Représentation fréquentielle de l'accélération externe . . . . .	50
3.8	Erreurs $\ R - \hat{R}\ $ avec une accélération externe d'amplitude moyenne . . . . .	51
3.9	Erreurs $\ R - \hat{R}\ $ avec une accélération externe d'haute amplitude . . . . .	51
3.10	Salle Kinovis à l'Inria, Grenoble (MICHEL, GENEVÈS, FOURATI et LAYAÏDA (2017)) . . . . .	52
3.11	Erreurs entre les Angles d'Euler de références et ceux estimés pour le premier jeu de données . . . . .	52
3.12	Erreurs entre les Angles d'Euler de références et ceux estimés pour le deuxième jeu de données . . . . .	53
3.13	Erreurs $\ R - \hat{R}\ $ pour le premier jeu de données . . . . .	54
3.14	Erreurs $\ R - \hat{R}\ $ pour le deuxième jeu de données . . . . .	54
4.1	Vitesse de rotation . . . . .	81

4.2	Instants d'échantillonnages des deux sorties . . . . .	81
4.3	Accélération et champ magnétique bruités . . . . .	82
4.4	Angles d'Euler pour la première simulation . . . . .	83
4.5	Angles d'Euler pour la seconde simulation . . . . .	84
4.6	Erreur entre les sorties réelles et les sorties estimées pour la première simulation	85
4.7	Erreur entre les sorties réelles et les sorties estimées pour la seconde simulation	86
4.8	Erreur $\ \hat{R}(t) - R(t)\ $ pour la première simulation . . . . .	86
4.9	Erreur $\ \hat{R}(t) - R(t)\ $ pour la seconde simulation . . . . .	87
4.10	Biais du gyromètre réel et estimé pour la première simulation . . . . .	87
4.11	Biais du gyromètre réel et estimé pour la seconde simulation . . . . .	88
5.1	Allure de l'EEG en fonction des bandes de fréquences (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)) . . . . .	93
5.2	Représentation d'un ECG . . . . .	94
5.3	Représentation d'un EOG et de sa dérivée . . . . .	95
5.4	Principe de la méthode des $k$ plus proches voisins . . . . .	104
5.5	Représentation d'une machine à vecteurs de supports . . . . .	105
5.6	Représentation d'un réseau de neurones . . . . .	107
5.7	Pose des électrodes mesurant l'EEG et l'EOG . . . . .	111
5.8	Extraction du rythme cardiaque . . . . .	112
5.9	Schéma de la procédure complète . . . . .	113
A.1	Représentation d'une rotation dans l'espace . . . . .	123

# Liste des tableaux

3.1 Erreurs quadratiques moyennes . . . . .	49
5.1 Bande de fréquence caractéristique de l'EEG . . . . .	92
5.2 Correspondance entre un niveau de KSS et le comportement du conducteur	97
5.3 Grille de score de l'OSS . . . . .	100
5.4 Comparaison des quantificateurs de performance . . . . .	116



# Liste des symboles

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ dans l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
$SO(3)$	Groupe spécial orthogonal
$\mathbb{H}$	Ensemble des quaternions unitaires
$\mathbb{Q}$	Ensemble des quaternions
$\max x$	Valeur maximale de $x$
$\min x$	Valeur minimale de $x$
$\sup x$	Borne supérieure de $x$
$\inf x$	Borne inférieure de $x$
$I_n$	Matrice identité de dimensions $n \times n$
$t$	Variable temporelle
$ x $	Valeur absolue de $x$
$\ M\ $	Norme de $M$
$\det M$	Déterminant de $M$
$\text{adj } M$	Matrice adjointe de $M$
$\text{tr } M$	Trace de $M$
$a \wedge b$	Produit vectoriel entre $a$ et $b$
$a \cdot b$	Produit scalaire entre $a$ et $b$
$q \otimes p$	Produit de quaternions en $q$ et $p$
$\dot{x}(t)$	Dérivée temporelle de $x(t)$



# Acronymes

<b>NED</b>	<b>N</b> orth <b>E</b> ast <b>D</b> own
<b>SVD</b>	<b>S</b> ingular <b>V</b> alue <b>D</b> ecomposition
<b>FOAM</b>	<b>F</b> ast <b>O</b> ptimal <b>A</b> ttitude <b>M</b> atrix
<b>QUEST</b>	<b>Q</b> Uaternion <b>E</b> STimator
<b>GPS</b>	<b>G</b> lobal <b>P</b> ositioning <b>S</b> ystem
<b>EEG</b>	<b>E</b> lectro <b>E</b> ncéphalo <b>G</b> rame
<b>ECG</b>	<b>E</b> lectro <b>C</b> ardio <b>G</b> rame
<b>EOG</b>	<b>E</b> lectro- <b>O</b> culo <b>G</b> rame
<b>OSS</b>	<b>O</b> bjective <b>S</b> leepiniess <b>S</b> core
<b>TLC</b>	<b>T</b> ime to <b>L</b> ine <b>C</b> rossing
<b>Lanex</b>	<b>L</b> ANe <b>E</b> Xit
<b>SVM</b>	<b>S</b> éparateur à <b>V</b> aste <b>M</b> arge
<b>VP</b>	<b>V</b> rai <b>P</b> ositif
<b>VN</b>	<b>V</b> rai <b>N</b> égatif
<b>FP</b>	<b>F</b> aux <b>P</b> ositif
<b>FN</b>	<b>F</b> aux <b>N</b> égatif



## Chapitre 1

# Introduction Générale

L'attitude d'un objet, ou encore son orientation, est une donnée qui est de plus en plus utilisée de nos jours. Il existe une grande diversité d'applications qui nécessitent de l'estimer. On la retrouve dans des domaines tels que le contrôle des véhicules (aériens, terrestres ou marins) ou la capture de mouvement (réalité virtuelle, analyse de posture). Pour pouvoir estimer cette attitude, il est nécessaire d'avoir un dispositif contenant des capteurs liés à l'orientation de l'objet considéré. Parmi ces capteurs, il est commun de retrouver un accéléromètre mesurant l'accélération de l'objet, un magnétomètre mesurant le champ magnétique environnant et un gyromètre mesurant la vitesse angulaire de l'objet. Ces capteurs ont la particularité de pouvoir être miniaturisés et ainsi de pouvoir être intégrés dans des systèmes embarqués nécessitant un espace restreint. Il existe de nombreuses variétés d'appareils utilisés pour estimer l'orientation d'un objet. De nos jours, l'appareil le plus accessible, calculant l'attitude à partir de ces grandeurs physiques, est le smartphone. L'orientation du smartphone permet d'améliorer l'expérience de l'utilisateur en l'assistant pendant son utilisation. Cette orientation peut également servir pour la détection de l'hypovigilance afin de connaître l'orientation du véhicule, donnée liée à l'état de vigilance du conducteur.

À partir des mesures acquises, il est nécessaire d'utiliser un algorithme pour estimer l'attitude de l'objet. Il existe principalement deux catégories d'algorithmes. Les premiers estimateurs introduits traitent du problème de Wahba. Ces algorithmes permettent d'estimer l'attitude de façon statique, c'est-à-dire qu'ils estiment l'orientation à un instant donné sans prendre en compte les données passées. Ce problème consiste à déterminer une matrice orthogonale calculée à partir d'un problème d'optimisation, en aillant la connaissance de mesures de vecteurs dans le repère mobile lié au corps rigide et dont les composantes sont connues dans le repère fixe de référence (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008); MARKLEY (1999)). Quant aux estimateurs de la seconde approche, ils permettent d'estimer

l'attitude de façon dynamique, c'est-à-dire d'estimer l'attitude au cours du temps, à partir d'un modèle dynamique. Parmi ces estimateurs, il y a les filtres lorsqu'une approche stochastique est considérée (LEFFENS, MARKLEY et SHUSTER (1982)) et les observateurs d'états lorsqu'une approche déterministe est mise en œuvre (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008)).

Plusieurs problèmes pratiques peuvent se poser lorsque l'on cherche à estimer l'attitude. Par exemple, si l'objet considéré est soumis à une accélération externe, les algorithmes précédemment mentionnés ne sont pas adaptés. En effet, ils supposent que l'objet considéré n'est soumis à aucune accélération externe, et donc que l'accéléromètre mesure directement la projection du vecteur du champ de pesanteur dans le repère de l'objet. Dans de nombreux cas pratiques, une accélération externe vient s'ajouter à la mesure de l'accéléromètre, ce qui dégrade la qualité de l'estimation donnée par ces algorithmes. Ainsi, pour éviter une dégradation de l'estimation, on peut par exemple prendre en compte des mesures supplémentaires telles que la vitesse ou la position de l'objet (HUA (2010)). Il est également possible de séparer les phases de présence et d'absence d'accélération externe et d'adapter l'estimateur lorsque cette accélération est présente (MAKNI, FOURATI et KIBANGOU (2014)).

Un autre problème souvent rencontré en pratique est la présence d'un biais sur les mesures du gyromètre. En effet, la structure des gyromètres typiquement utilisés entraîne un biais dans les mesures qui varie lentement et qui est souvent considéré comme constant. Ce biais doit être estimé conjointement avec l'attitude afin d'estimer la vitesse de rotation non-biaisée. Cette vitesse est ensuite utilisée pour donner une estimation fiable de l'orientation du corps considéré. Dans ce contexte, il est possible d'utiliser un observateur adaptatif permettant d'estimer l'état et les paramètres inconnus du système. En effet, pour cette application le biais peut être assimilé à un paramètre inconnu et peut donc être estimé à l'aide d'un observateur adaptatif (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008); BATISTA, SILVESTRE et OLIVEIRA (2012); THIENEL et SANNER (2003)). En pratique, on peut également rencontrer un autre problème lorsque plusieurs capteurs sont utilisés. En effet, il n'est pas rare que les capteurs mis en jeu ne soient pas synchronisés entre eux et que chaque capteur possède une période d'échantillonnage irrégulière. Pour cela, il est possible de prendre en compte la nature discrète des mesures dans la structure de l'observateur (FARZA, BOURAOUI, MÉNARD, BEN ABDENNOUR et M'SAAD (2014)).

La détection de l'hypovigilance du conducteur fait partie des nombreuses problématiques où la connaissance de l'attitude est utile, pouvant être obtenue à l'aide des algorithmes

précédemment mentionnés. L'hypovigilance se caractérise par la baisse de la vigilance du conducteur causant une dégradation de ses performances. Elle survient principalement lors de longs trajets monotones ou lorsque le conducteur manque de sommeil (CROO, BANDMANN, MACKAY, RUMAR et VOLLENHOVEN (2001)). La baisse de vigilance pendant la conduite est une source non-négligeable d'accidents de la route qu'il est important de détecter afin de contribuer à leurs préventions. Pour pouvoir détecter une phase d'hypovigilance, il est nécessaire de mesurer des grandeurs physiques liées à l'état du conducteur (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)). On retrouve parmi ces mesures des données physiologiques telles que l'électroencéphalogramme ou encore des données liées aux performances du conducteur telles que la position latérale de la voiture sur la voie. Ces mesures liées aux performances du conducteur peuvent être facilement obtenues en simulation, mais il peut être nécessaire d'estimer l'attitude du véhicule en situation réelle afin de les obtenir. À partir de ces grandeurs, des indicateurs sont calculés pour pouvoir ensuite estimer le niveau d'hypovigilance à l'aide d'un algorithme. Les algorithmes typiquement utilisés pour cela sont des méthodes de classifications supervisées permettant de discriminer l'état du conducteur.

Ce manuscrit de thèse est organisé de la façon suivante :

Le chapitre 2 introduit les notions nécessaires à l'appréhension de l'estimation de l'attitude. Nous présenterons tout d'abord les définitions et les hypothèses qui permettent de préciser le contexte. En effet, l'attitude d'un objet peut être représentée par plusieurs objets mathématiques tels qu'une matrice de rotation ou un quaternion, et ce choix dépend du contexte d'utilisation. De même, plusieurs capteurs inertiels ou magnétiques permettant d'acquérir des mesures liées à l'attitude peuvent être utilisés. Nous présenterons donc ceux qui sont classiquement présents dans une centrale inertielle et qui peuvent être intégrés dans un système embarqué. Finalement, un état de l'art non-exhaustif des différentes méthodes d'estimation de l'attitude sera établi.

Le chapitre 3 contient les travaux sur l'estimation de l'attitude lorsque le corps est soumis à une accélération externe non-négligeable. Pour cela, nous rappellerons dans un premier temps les solutions présentes dans la littérature. Ensuite, en nous basant sur l'hypothèse que les composantes du spectre de l'accélération externe sont hautes fréquences, nous proposerons une approche qui est basée sur une réécriture du système utilisant cette hypothèse. Deux observateurs sont proposés qui permettent dans le premier cas une précision accrue de l'estimation et dans le second un temps de calcul réduit. Pour finir,

les performances de ces observateurs seront validées en simulation puis dans un contexte réel. Ces travaux ont été présentés en conférence dans BONARGENT, MENARD, PIGEON et GEHAN (2019).

Le chapitre 4 est consacré aux observateurs adaptatifs, estimant conjointement l'état et les paramètres inconnus d'une classe de systèmes non-linéaires incertains avec des sorties multi-échantillonnées. Nous proposerons dans ce chapitre un nouvel observateur adaptatif permettant d'estimer conjointement l'état et les paramètres inconnus en temps continu à partir de données discrètes. Plus spécifiquement, la classe de système considérée est multi-sorties et les sorties sont supposées échantillonnées de façon irrégulières et indépendantes entre les sorties. Cet observateur sera ensuite appliqué au problème de l'estimation simultanée de l'attitude d'un corps rigide et du biais du gyromètre à partir de données simulées typiquement présentes dans une centrale inertielle. Deux contributions ont été réalisées sur cette problématique. La première est une communication dans une conférence dans BONARGENT, MÉNARD, PIGEON, POULIQUEN et GEHAN (2020) et la seconde est la soumission d'un article de revue dans BONARGENT, MÉNARD, GEHAN et PIGEON (2020).

Le chapitre 5 porte sur la détection de l'hypovigilance du conducteur. Nous allons dans un premier temps analyser les différentes étapes utilisées dans la littérature afin d'estimer un niveau de vigilance. Pour cela nous présenterons des grandeurs liées à l'état du conducteur qui sont classiquement acquises pour cette problématique. Ensuite, nous introduirons des indicateurs basés sur les grandeurs obtenues pour qu'ils puissent être utilisés par un algorithme d'estimation du niveau d'hypovigilance. Les algorithmes les plus utilisés, qui sont classiquement des méthodes de classification, seront ensuite présentés. Dans un deuxième temps, nous montrerons, à partir de données acquises pour le projet européen DCUBE, quelles sont les grandeurs les plus importantes à mesurer pour la détection de l'hypovigilance. Plus précisément, nous montrerons qu'il est possible d'estimer un niveau d'hypovigilance fiable à partir de données non-intrusives pour le conducteur. Cette problématique a été soulevée par l'entreprise KAD! afin de pouvoir conceptualiser un dispositif fiable et non-intrusif de détection de l'hypovigilance.

## Chapitre 2

# État de l'art sur l'estimation de l'attitude d'un corps rigide

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Définition de l'attitude d'un corps rigide</b>	<b>7</b>
2.2.1	Définition d'un corps rigide	7
2.2.2	Définition des référentiels mis en jeu	7
2.2.3	Notion d'attitude	9
2.2.4	Représentation de l'attitude	9
<b>2.3</b>	<b>Capteurs inertiels et magnétiques utilisés pour l'estimation de l'attitude</b>	<b>13</b>
2.3.1	Accéléromètre	13
2.3.2	Magnétomètre	14
2.3.3	Gyromètre	16
<b>2.4</b>	<b>État de l'art sur l'estimation de l'attitude</b>	<b>17</b>
2.4.1	Estimation statique	17
2.4.2	Estimation dynamique	20
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>

---

## 2.1 Introduction

L'estimation de l'attitude est un sujet qui a reçu beaucoup d'attention au cours de ces dernières décennies. Il concerne les algorithmes permettant d'estimer l'orientation ou encore la posture d'un objet par rapport à une référence et à partir de données issues de capteurs appropriés.

L'importante diversité des domaines d'application explique l'importance de cette problématique et l'engouement qu'elle suscite. D'importants travaux ont été réalisés permettant notamment d'estimer l'attitude de véhicules dans les domaines de l'aéronautique avec les drones (HUA, DUCARD, HAMEL, MAHONY et RUDIN (2014)), de l'astronautique avec les satellites (PERRIER (2011)), de la navigation terrestre avec les robots (VAGANAY, ALDON et FOURNIER (1993); ROUMELIOTIS, SUKHATME et BEKEY (1999)) ou de la navigation marine (ELKAIM (2002)). Cette estimation peut aussi bien servir pour les véhicules non-autonomes qu'autonomes afin de faciliter leur conduite dans le premier cas ou simplement pour rendre leur navigation possible et fiable dans le second. L'estimation de l'attitude peut servir dans des domaines complètement différents comme par exemple la capture de mouvement. Elle peut, en effet, être utilisée pour l'analyse de posture humaine (FOURATI, MANAMANNI et HANDRICH (2012)) afin de servir dans le divertissement pour reproduire de façon réaliste les mouvements naturels (BACHMANN (2000)) ou à des fins médicales pour, par exemple, assister lors de la réhabilitation après un accident vasculaire cérébral (ZHOU, HU, HARRIS et HAMMERTON (2006)) ou encore pour aider la microchirurgie (ANG, KHOSLA et RIVIERE (2004)). Elle intervient également dans l'analyse de posture animale (FOURATI, MANAMANNI, AFILAL et HANDRICH (2014)) pour en apprendre plus sur leur comportement.

Ce chapitre est consacré à l'état de l'art sur l'estimation de l'attitude d'un corps rigide. Pour cela, les éléments nécessaires pour appréhender la notion d'attitude seront mis en avant dans la section 2.2. Ensuite, différents capteurs inertiels et magnétiques pouvant être utilisés pour l'estimation de l'attitude d'un corps seront introduits dans la section 2.3. Pour finir, l'état de l'art sera présenté dans la dernière section 2.4. Différentes méthodes d'estimation seront décrites en fonction du contexte d'application. Ce chapitre permettra également d'introduire différentes notions qui seront réutilisées dans les chapitres suivants.

## 2.2 Définition de l'attitude d'un corps rigide

Dans cette section, différents éléments nécessaires à l'appréhension de la notion d'attitude vont être introduits.

### 2.2.1 Définition d'un corps rigide

Un corps rigide est un solide qui ne se déforme pas, même sous l'action de forces extérieures. En d'autres termes, les distances entre l'ensemble des points matériels constituant le solide restent constantes au cours du temps. La représentation d'un tel corps est montrée figure 2.1.

En réalité, tout corps peut être déformé s'il est soumis à une force importante. Dire qu'un corps est rigide reste donc une approximation. Cependant, lorsque cette hypothèse de rigidité est correctement établie et que les forces mises en jeu ne sont pas trop importantes, elle devient une bonne approximation qui ne dévie pas trop de la réalité.

Un corps rigide représenté en trois dimensions possède six degrés de liberté : trois pour la position de son centre de gravité et trois pour son orientation.

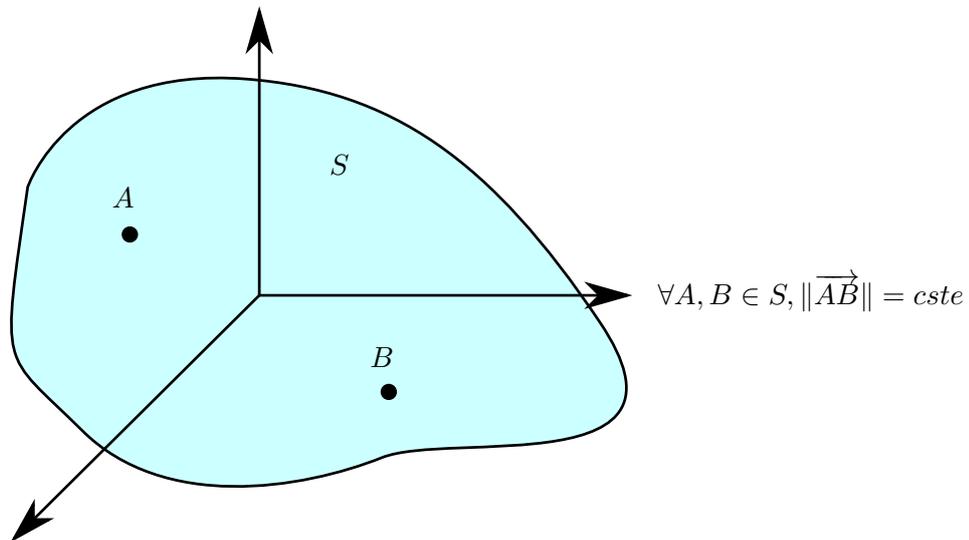


FIGURE 2.1 – Représentation d'un corps rigide

### 2.2.2 Définition des référentiels mis en jeu

Pour pouvoir définir précisément l'attitude d'un corps, il est nécessaire de définir tout d'abord deux systèmes de coordonnées. Le premier est le référentiel galiléen de référence

$\mathcal{I}(x_{\mathcal{I}}, y_{\mathcal{I}}, z_{\mathcal{I}})$ . Plusieurs choix de repère sont possibles ici. Celui qui a été retenu est le référentiel le plus utilisé dans la littérature en l'occurrence le référentiel NED (North-East-Down). Il correspond à un repère orthonormal dont le premier vecteur de base pointe vers le nord, le second vers l'est et le dernier vers le centre de la terre. Bien que ce ne soit pas un référentiel galiléen, il sera supposé l'être pour la suite. Ainsi, les effets de la rotation de la terre ne seront pas pris en compte dans les équations cinématiques définies plus tard dans ce chapitre. Cette hypothèse est une bonne approximation tant que les applications ne requièrent pas une haute précision. Le deuxième est le repère mobile lié à l'objet en mouvement  $\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{B}})$ , lui aussi orthonormal. La représentation de ces deux systèmes de coordonnées est illustrée sur la figure 2.2.

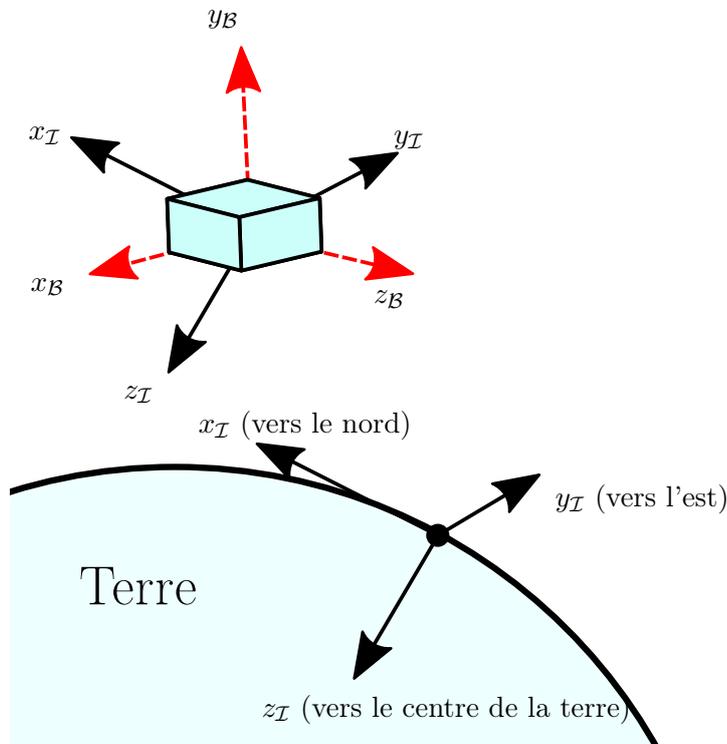


FIGURE 2.2 – Représentation des repères

**Remarque 2.1.** Pour simplifier les notations, il a été choisi de ne pas écrire la flèche surmontant les vecteurs. Ainsi, un vecteur  $\vec{v}$  sera écrit  $v$  pour la suite.

### 2.2.3 Notion d'attitude

L'attitude d'un objet correspond à son orientation dans l'espace. Ainsi, l'attitude représente la transformation nécessaire pour permettre à deux objets identiques dont les centres de gravité sont au même endroit, mais qui pourtant ne coïncident pas, de coïncider parfaitement. En effet, ces deux objets ont une attitude différente.

En utilisant les repères définis dans la sous-section précédente, l'attitude du corps est définie par la rotation permettant de superposer  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{I}$ , en supposant qu'ils aient la même origine. L'attitude est donc entièrement définie par une rotation, donc un axe et un angle. La définition d'une rotation dans l'espace est rappelée en annexe [A](#).

### 2.2.4 Représentation de l'attitude

Comme nous l'avons vu, l'attitude est définie par une rotation. Il existe plusieurs façons de représenter les rotations en mathématiques, telles que par les matrices de rotations, les angles d'Euler ou encore les quaternions. Ces objets ont des caractéristiques différentes et donc la représentation utilisée changera suivant le problème considéré. En effet, certains possèdent des propriétés mathématiques favorables et d'autres ont une dimension plus faible et donc sont davantage utilisés dans les systèmes à faibles ressources calculatoires tels que les systèmes embarqués. Dans cette section nous allons présenter les trois représentations énoncées précédemment. Bien qu'il en existe d'autres, celles-ci ont été choisies puisque ce sont les plus utilisées dans la littérature.

#### 2.2.4.1 Matrice de rotation

Une matrice de rotation est une matrice de taille  $3 \times 3$  qui peut représenter l'orientation d'un corps. La définition exacte d'une matrice de rotation est rappelée en annexe [A](#). On rappelle que  $\mathcal{I}$  est le repère inertiel et  $\mathcal{B}$  le repère lié au corps. En considérant  $x_{\mathcal{I},\mathcal{B}}, y_{\mathcal{I},\mathcal{B}}, z_{\mathcal{I},\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$  les coordonnées des axes principaux de  $\mathcal{B}$  exprimés dans  $\mathcal{I}$ , il est possible de créer une matrice  $3 \times 3$  en concaténant les coordonnées précédemment introduites de la façon suivante (MURRAY, LI et SASTRY (2017))

$$R = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{I},\mathcal{B}} & y_{\mathcal{I},\mathcal{B}} & z_{\mathcal{I},\mathcal{B}} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Ainsi, la concaténation de ces coordonnées donne la matrice  $R$  qui représente la matrice de rotation permettant de passer de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{I}$ , en supposant que ces deux repères aient la même origine.

Grâce aux matrices de rotations, il est possible d'exprimer simplement la relation entre les coordonnées  $v_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^3$  d'un point, relatives au repère  $\mathcal{I}$ , et les coordonnées  $v_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$  de ce même point, relatives au repère  $\mathcal{B}$ . En effet, la relation permettant de passer du repère  $\mathcal{B}$  au repère  $\mathcal{I}$  est la suivante

$$v_{\mathcal{I}} = Rv_{\mathcal{B}} \quad (2.2)$$

Comme  $R$  est une matrice de rotation, on a  $R^{-1} = R^T$ . Il est donc possible de définir le passage de  $\mathcal{I}$  vers  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire l'opération inverse avec

$$v_{\mathcal{B}} = R^T v_{\mathcal{I}} \quad (2.3)$$

#### 2.2.4.2 Les angles d'Euler

Un repère de référence  $\mathcal{I}$  peut être transformé en un repère  $\mathcal{B}$  (de même origine) en faisant trois rotations successives autour de 3 axes de référence. Les angles nécessaires pour permettre une telle transformation sont appelés angles d'Euler. Ces rotations doivent se faire autour d'axes à définir et dans un ordre précis, car elles ne sont pas commutatives (RAPTIS et VALAVANIS (2007)). Ainsi, en plus des trois angles, il est nécessaire de connaître autour de quels axes les rotations doivent être réalisées pour arriver au repère souhaité. Ils sont définis à partir d'une séquence d'Euler.

Il existe 12 séquences d'Euler différentes : six symétriques (XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ et ZYZ) et six antisymétriques (XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY et ZYX). Parmi celles-ci, deux ont été davantage utilisées dans la littérature. La première est la séquence symétrique ZXZ. Les étapes, dont les repères intermédiaires sont notés  $\mathcal{I}'_s$  et  $\mathcal{I}''_s$ , sont les suivantes :

- la précession autour de l'axe  $z_{\mathcal{I}}$ , qui transforme  $\mathcal{I}(x_{\mathcal{I}}, y_{\mathcal{I}}, z_{\mathcal{I}})$  en  $\mathcal{I}'_s(u, v, z_{\mathcal{I}})$  ;
- la nutation autour du nouvel axe  $u$ , qui transforme  $\mathcal{I}'_s(u, v, z_{\mathcal{I}})$  en  $\mathcal{I}''_s(u, w, z_{\mathcal{B}})$  ;
- la rotation propre autour du nouvel axe  $z_{\mathcal{B}}$ , qui finalement transforme  $\mathcal{I}''_s(u, w, z_{\mathcal{B}})$  en  $\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{B}})$ .

Et la deuxième est celle antisymétrique ZYX, notamment utilisée dans l'aéronautique. Les étapes, dont les repères intermédiaires sont notés  $\mathcal{I}'_a$  et  $\mathcal{I}''_a$ , sont les suivantes :

- le lacet  $\psi$  autour de l'axe  $z_{\mathcal{I}}$ , qui transforme  $\mathcal{I}(x_{\mathcal{I}}, y_{\mathcal{I}}, z_{\mathcal{I}})$  en  $\mathcal{I}'_a(u, v, z_{\mathcal{I}})$  ;
- le roulis  $\theta$  autour du nouvel axe  $v$ , qui transforme  $\mathcal{I}'_a(u, v, z_{\mathcal{I}})$  en  $\mathcal{I}''_a(x_{\mathcal{B}}, v, w)$  ;
- le tangage  $\phi$  autour du nouvel axe  $x_{\mathcal{B}}$ , qui finalement transforme  $\mathcal{I}''_a(x_{\mathcal{B}}, v, w)$  en  $\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{B}})$ .

Ces transformations sont illustrées figure 2.3.

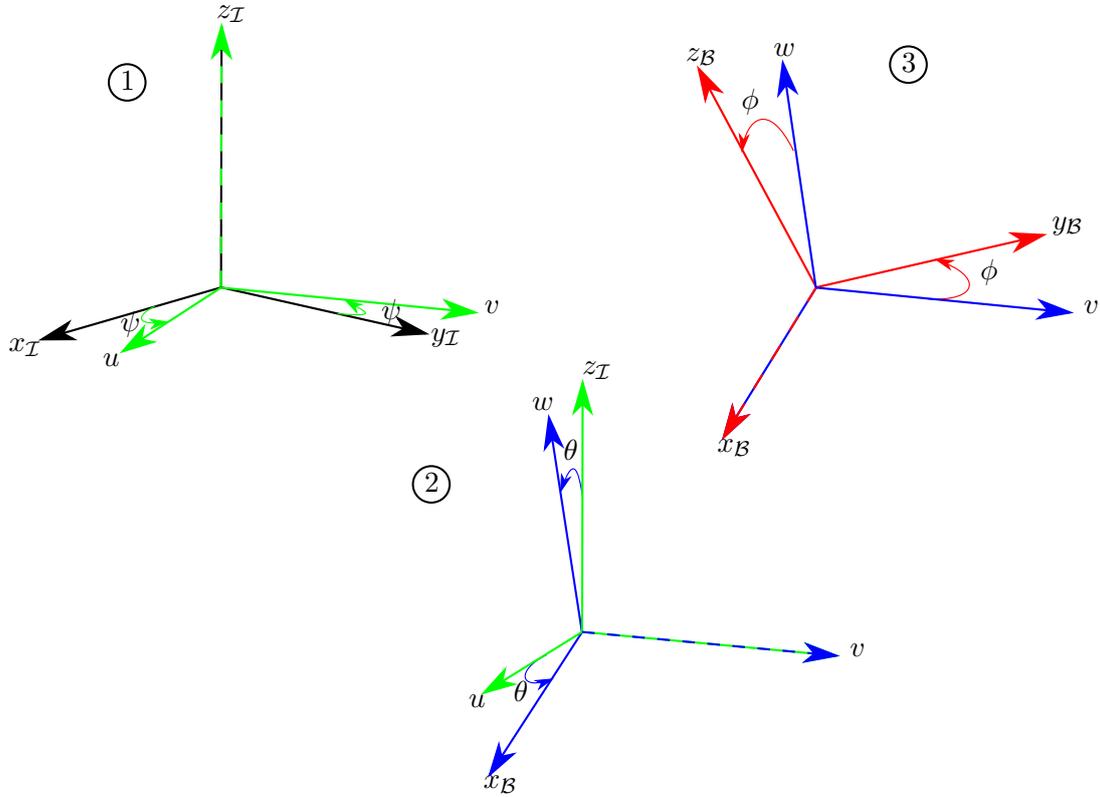


FIGURE 2.3 – Représentation des angles d'Euler pour la séquence ZYX

Il existe une relation entre les angles d'Euler et les matrices de rotation. Pour la séquence d'Euler ZYX, la relation suivante peut être établie

$$R_{ZYX} = R_X(\phi)R_Y(\theta)R_Z(\psi) \quad (2.4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

avec  $R_{ZYX}$  la matrice de rotation associée à cette séquence.

### 2.2.4.3 Les quaternions

Tout passage d'une attitude à une autre dans l'espace peut être obtenu à l'aide d'une seule rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe  $u$ , comme illustré sur la figure 2.4. L'attitude peut ainsi être représentée à l'aide d'un vecteur de dimension 4 comportant ces deux informations. Les quaternions font partie de cette catégorie de vecteurs (KUIPERS (2000)).

Un quaternion  $q$  peut s'écrire  $q = (q_0 \quad q_u^T)^T$  en séparant le premier élément  $q_0 \in \mathbb{R}$  qui représente la partie scalaire et  $q_u \in \mathbb{R}^3$  qui représente la partie vectorielle. Il est possible de relier ces deux éléments avec la rotation précédemment décrite, en considérant que le vecteur  $u$  est unitaire, avec

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ u \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En optant pour cette représentation, il peut être remarqué qu'une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $u$  donne le même résultat qu'une rotation d'angle  $-\theta$  autour de l'axe  $-u$ .

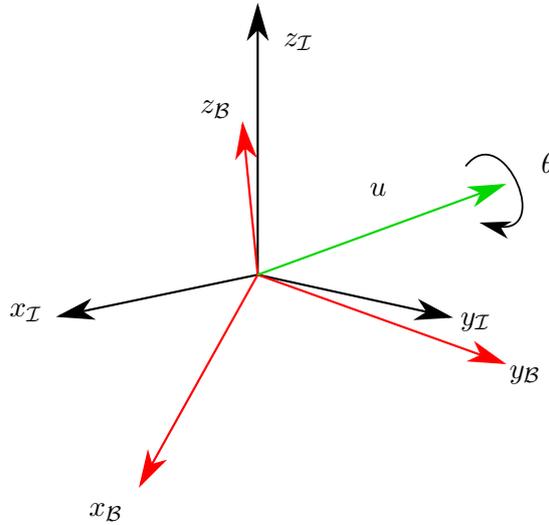


FIGURE 2.4 – Représentation d'un changement d'attitude à l'aide d'une seule rotation

Les propriétés mathématiques des quaternions sont rappelées dans l'annexe A. Pour qu'un quaternion puisse représenter une rotation, il doit être unitaire, c'est-à-dire que  $\|q\| = 1$ . Ainsi, tous les quaternions seront considérés unitaires par la suite. Ils font donc partie de l'espace vectoriel suivant :

$$\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid q^T q = 1\}. \quad (2.8)$$

Ceci permet d'exprimer la relation du passage d'un vecteur  $v_{\mathcal{I}}$  exprimé dans  $\mathcal{I}$  en un vecteur  $v_{\mathcal{B}}$  exprimé dans  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathcal{I}} \end{pmatrix} = q^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \otimes q \quad (2.9)$$

et inversement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = q \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathcal{I}} \end{pmatrix} \otimes q^{-1}. \quad (2.10)$$

Il est possible d'établir une relation entre un quaternion et la matrice de rotation correspondante. En effet, en écrivant  $q_u = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$ , on a :

$$R = \begin{pmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

## 2.3 Capteurs inertiels et magnétiques utilisés pour l'estimation de l'attitude

Afin de pouvoir estimer l'attitude d'un objet, il est nécessaire d'avoir connaissance de certains aspects inertiels (liés à ce corps) à partir de capteurs. Cette section va donner des détails sur les capteurs couramment utilisés dans les centrales inertiels. Nous n'allons pas énumérer exhaustivement toutes les possibilités de mesure. Les seuls capteurs mis en jeu ici sont l'accéléromètre, le magnétomètre et le gyromètre.

### 2.3.1 Accéléromètre

L'accéléromètre est un capteur permettant de mesurer l'accélération d'un corps. Pour faciliter l'explication de son principe de fonctionnement, nous considérons le cas unidimensionnel, mais le cas tridimensionnel est très similaire. Son fonctionnement est basé sur le principe fondamental de la dynamique. En fixant un ressort à un support fixe et à une masse mobile et si cette dernière subit une accélération, suivant la figure 2.5, il est possible de caractériser son mouvement, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, par  $F = ma = -kx$ .

Ainsi, en mesurant la position  $x$ , l'accélération peut être obtenue en utilisant la relation  $a = -\frac{k}{m}x$ .

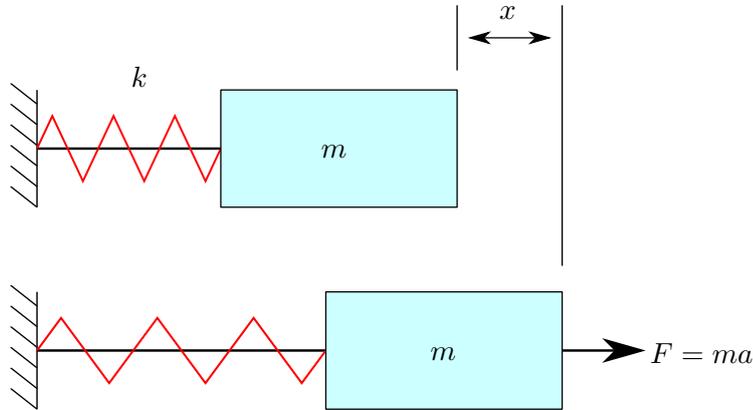


FIGURE 2.5 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre

Le principe a été décrit dans une direction orthogonale au champ de pesanteur terrestre. Lorsque nous revenons en trois dimensions, il faut prendre en compte la force soumise au corps à cause de la pesanteur. En effet, ce type de capteur mesure l'accélération externe plus le champ de pesanteur. Ainsi, la mesure peut s'écrire

$$a(t) = R^T(t)(a_e(t) - g_0) + \mu_a \quad (2.12)$$

avec  $a_e(t)$  l'accélération externe exprimée dans le repère  $\mathcal{I}$ ,  $g_0$  le champ de pesanteur et  $\mu_a$  le bruit de mesure qui peut être d'amplitude relativement importante.

### 2.3.2 Magnétomètre

Il existe sur terre un champ magnétique venant du noyau de la planète. Il est possible d'assimiler ce noyau à un aimant placé au centre de la terre et dont le pôle Sud serait dirigé vers le pôle Nord magnétique, comme le montre la figure 2.6. À noter que le pôle Nord géographique et le pôle nord magnétique sont différents et que ce dernier se déplace chaque jour. C'est d'ailleurs vers lui que les boussoles pointent.

Ainsi, le champ magnétique peut être représenté par un vecteur  $m_0$  comportant l'intensité dans trois directions : le nord, l'est (dont l'intensité est parfois négligée) et le centre de la terre. Il diffère en fonction du lieu où l'objet se trouve, mais varie aussi en fonction du temps. C'est pour cela que des modèles existent tel que le World Magnetic Model. Ils permettent de calculer en fonction de la latitude et de la longitude les composantes du vecteurs  $m_0$ . Ce modèle est mis à jour, tous les cinq ans en temps normal, pour permettre de corriger les déviations du Nord magnétique.

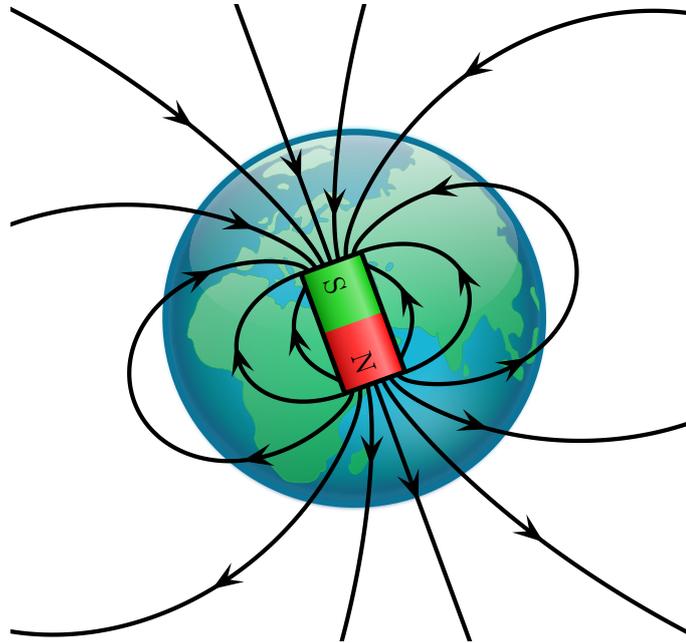


FIGURE 2.6 – Lignes de Champ magnétique terrestre

En ce qui concerne le magnétomètre, c'est un capteur qui mesure la résultante du champ magnétique terrestre, exprimée en Tesla, dans le repère mobile relié au corps en mouvement. Plusieurs architectures existent, la plus couramment utilisée repose sur le phénomène magnétique appelé effet Hall. Grâce à ce phénomène, une différence de potentiel est créée aux bornes d'un semi-conducteur lorsqu'il est soumis à un champ magnétique et qu'un courant le traverse (RAMSDEN (2006)).

Ainsi, lorsque le capteur n'est pas perturbé par une autre source de champ magnétique que celui de la terre, tel qu'un aimant, sa mesure donne

$$m(t) = R^T(t)m_0 + \mu_m \quad (2.13)$$

avec  $m_0$  le champ magnétique terrestre et  $\mu_m$  le bruit de mesure. Ce bruit de mesure est assez faible par rapport à celui de l'accéléromètre (MAHONY et HAMEL (2007)). À noter qu'un magnétomètre doit être calibré pour obtenir l'équation (2.13), car des phénomènes, créant un biais sur les mesures, peuvent exister. Des algorithmes se basant sur les données brutes permettent de les retirer (OZYAGCILAR (2015)).

### 2.3.3 Gyromètre

Un gyromètre permet de mesurer la vitesse angulaire d'un corps en mouvement dans son repère mobile  $\mathcal{B}$  par rapport à un repère fixe  $\mathcal{I}$ . Parmi les gyromètres disponibles, celui couramment utilisé dans les centrales inertielles, grâce à sa taille et à son faible coût, est le gyromètre vibrant (LÉGER (1999)). Son principe de fonctionnement repose sur l'apparition d'une force de Coriolis lorsque le corps en mouvement est soumis à une rotation.

Comme pour l'accéléromètre, l'explication se fera pour la mesure de la vitesse angulaire suivant une seule direction, mais se généralise directement pour les deux autres. En effet, dans le dispositif, deux masses en opposition sont mises en mouvement à une vitesse sinusoïdale  $v_x$  sur un axe  $x$ . L'apparition d'une vitesse angulaire  $\omega_z$  sur l'axe  $z$  entraîne l'apparition d'une force de Coriolis sur l'axe  $y$ . Cela engendre un déplacement dans cette même direction dont il est possible de mesurer l'amplitude, à l'aide de matériaux sensibles possédant des propriétés piézoélectriques. Grâce à cela, la vitesse angulaire peut être calculée, puisqu'il existe une relation entre ce déplacement et la vitesse de rotation  $\omega_z$  du corps (BISWAS (2015)). Ce principe est illustré figure 2.7.

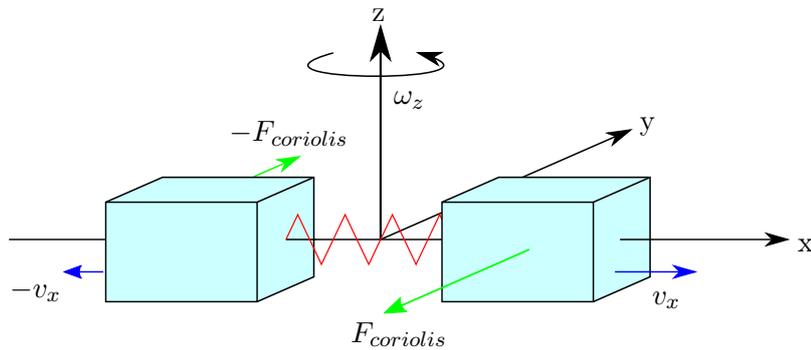


FIGURE 2.7 – Principe de fonctionnement d'un gyromètre vibrant

La mesure donnée par un gyromètre peut être décrite par

$$\omega_b(t) = \omega(t) + b_\omega + \mu_\omega \quad (2.14)$$

avec  $\omega(t)$  la vitesse angulaire instantanée du corps solide,  $b_\omega$  le biais du gyromètre et  $\mu_\omega$  le bruit de mesure. Le biais présent dans cette mesure peut être caractérisé par sa faible variation au cours du temps. Il n'est ainsi pas rare de le considérer constant et donc de faire l'approximation suivante

$$\dot{b}_\omega = 0 \quad (2.15)$$

## 2.4 État de l'art sur l'estimation de l'attitude

Dans cette section, nous allons mettre en évidence les techniques principales pouvant être utilisées pour estimer l'attitude d'un corps. Elles peuvent être séparées en deux parties distinctes. La première est consacrée aux algorithmes qui estiment de façon statique l'attitude, ce qui correspond au problème de Wahba, et la seconde est dédiée aux estimateurs qui sont utilisés pour estimer de façon dynamique l'orientation du corps.

### 2.4.1 Estimation statique

Une première catégorie d'estimateur a été élaborée afin de répondre à la problématique énoncée par Wahba. Ces estimateurs permettent d'estimer l'attitude d'un corps à un instant donné avec les données disponibles, sans prendre en compte les mesures précédentes.

#### 2.4.1.1 Énoncé du problème

Pour estimer l'attitude d'un corps, Grace Wahba a énoncé en 1965 son problème éponyme : le problème de Wahba (WAHBA (1965)). Elle s'était demandée s'il était possible d'estimer l'attitude d'un satellite en ayant à disposition  $n \geq 2$  mesures de vecteurs exprimés dans  $\mathcal{B}$  et dont les composantes sont également connues dans  $\mathcal{I}$ . Elle a établi que pour estimer l'attitude, il fallait résoudre un problème d'optimisation en déterminant la matrice orthogonale  $R$  minimisant au sens des moindres carrés la fonction coût suivante

$$J(R) = \frac{1}{2} \sum_i^n a_i |b_i - Rr_i|^2 \quad (2.16)$$

avec  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des vecteurs mesurés dans le repère mobile  $\mathcal{B}$ ,  $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des vecteurs correspondant dans le repère fixe  $\mathcal{I}$  et  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des poids.

Il est possible de réécrire le problème en notant que (MARKLEY (1987))

$$J(R) = \lambda_0 - \text{tr}(RM^T) \quad (2.17)$$

avec

$$\lambda_0 = \sum_i^n a_i \quad \text{et} \quad M = \sum_i^n a_i b_i r_i^T. \quad (2.18)$$

Ainsi, la fonction coût est minimisée lorsque la trace  $\text{tr}(RM^T)$  est maximisée. Quelques exemples d'algorithmes permettant de résoudre ce problème vont être exposés.

### 2.4.1.2 Algorithmes estimant une matrice de rotation

Le premier algorithme, SVD pour Singular Value Decomposition, est basé sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M$  (MARKLEY (1987)). En effet, il est possible d'écrire cette matrice sous la forme factorisée suivante

$$M = USV^T \quad (2.19)$$

avec  $S = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$ , et  $U$  et  $V$  des matrices orthogonales. Il a été montré que la matrice de rotation  $R$  peut ensuite être obtenue avec

$$R = UDV^T \quad (2.20)$$

avec  $D = \text{diag}(1, 1, \det(U) \det(V))$ . Bien que cet algorithme soit l'un des plus robustes, il fait aussi partie de ceux qui sont les plus demandeurs de ressources (MARKLEY (1999)). C'est pourquoi d'autres algorithmes ont été élaborés par la suite.

Parmi eux, il y a notamment l'algorithme FOAM (Fast Optimal Attitude Matrix). Celui-ci est basé sur l'estimation de la plus grande racine  $\lambda_{\max}$  du polynôme suivant

$$(\lambda^2 - \|M\|^2)^2 - 8\lambda \det(M) - 4\|\text{adj}(M)\|^2 \quad (2.21)$$

avec  $\text{adj}(M)$  la matrice adjointe de  $M$ . Cette racine permet ensuite de calculer la matrice  $R$  en utilisant l'expression suivante :

$$R = [(\kappa + \|M\|^2) M + \lambda_{\max} \text{adj}(M^T) - MM^T M] / \zeta \quad (2.22)$$

avec  $\kappa = \frac{1}{2} (\lambda_{\max}^2 - \|M\|^2)$  et  $\zeta = \kappa \lambda_{\max} - \det(M)$

La difficulté de cette méthode repose ainsi sur le calcul de la bonne racine  $\lambda_{\max}$  de (2.21). Elle peut notamment être calculée par récurrence à l'aide de la méthode de Newton par exemple (MARKLEY (1993)).

### 2.4.1.3 Algorithmes estimant un quaternion

Parmi les algorithmes estimant un quaternion, un des premiers donnant une solution au problème de Wahba est celui nommé q-method (LERNER (1978)). La fonction coût précédemment écrite en fonction de la matrice de rotation peut être écrite avec les quaternions de la façon suivante

$$J(q) = \lambda_0 - q^T K q \quad (2.23)$$

avec

$$K = \begin{pmatrix} S - I_3 \operatorname{tr} M & z \\ z^T & \operatorname{tr} M \end{pmatrix}, \quad S = M + M^T \quad \text{et} \quad z = \sum_{i=1}^n a_i b_i \wedge r_i \quad (2.24)$$

Ainsi, cette fois, l'objectif est de maximiser le terme  $q^T K q$ . Il a été montré que le quaternion optimal le faisant est égal au vecteur propre à droite normalisé associé à la plus grande valeur propre de  $K$  tel que

$$K q_{\text{opt}} = \lambda_{\max} q_{\text{opt}} \quad (2.25)$$

La fonction coût devient alors

$$J(q_{\text{opt}}) = \lambda_0 - \lambda_{\max} \quad (2.26)$$

Dans le cas où les deux plus grandes valeurs propres sont égales, il n'y a pas unicité du quaternion solution. Cela se traduit par le fait que le nombre de données disponibles ne soit pas suffisant et qu'il faut rajouter au moins une mesure.

À l'instar de l'algorithme SVD estimant une matrice de rotation, cet algorithme est coûteux en nombre d'opérations et d'autres ont été élaborés pour trouver une solution plus rapidement.

C'est le cas d'un des algorithmes les plus utilisés : l'algorithme QUEST (quaternion estimator) (SHUSTER et OH (1981)). Il a été montré que le quaternion optimal peut s'écrire de la façon suivante

$$q_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + |x|^2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

avec

$$x = [\alpha I + (\lambda_{\max} - \operatorname{tr}(B)) S + S^2] z, \quad (2.28)$$

$$\gamma = \alpha (\lambda_{\max} + \operatorname{tr}(B)) - \det S, \quad (2.29)$$

et

$$\alpha = \lambda_{\max}^2 - (\operatorname{tr}(B))^2 + \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(S)) \quad (2.30)$$

Pour calculer ce quaternion, il est nécessaire d'obtenir une valeur de  $\lambda_{\max}$ . Celle-ci est calculée à partir de l'équation suivante

$$0 = \gamma (\lambda_{\max} - \operatorname{tr}(B)) - z^T [\alpha I_3 + (\lambda_{\max} - \operatorname{tr}(B)) S + S^2] z. \quad (2.31)$$

Cette équation d'ordre 4 en  $\lambda_{\max}$  n'est autre que le polynôme caractéristique de  $\det(\lambda_{\max} I_4 - K) = 0$ . La méthode de Newton appliquée à cette équation est adaptée

pour obtenir par récurrence une valeur de  $\lambda_{\max}$ , en prenant  $\lambda_0$  en condition initiale, celle-ci étant proche de la valeur souhaitée (MARKLEY (1999)).

## 2.4.2 Estimation dynamique

Il est possible d'estimer l'attitude d'un corps à l'aide d'une estimation dynamique. Dans ce cas, l'attitude est calculée en fonction du temps grâce au modèle dynamique qui lui est associé. L'estimation requiert la connaissance de la vitesse angulaire en plus des vecteurs mesurés dans  $\mathcal{B}$  dont on connaît les composantes dans  $\mathcal{I}$ . La qualité de l'estimation se voit ainsi améliorée.

### 2.4.2.1 Modèles dynamiques

Deux modèles dynamiques sont typiquement utilisés dans la littérature pour estimer l'attitude. Ils sont basés sur les équations de la cinématique régissant la dynamique de rotation d'un corps solide.

Il est tout d'abord possible d'utiliser une représentation par matrice de rotation avec le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{R} &= R(\omega_b - b_\omega - \mu_\omega)_\times \\ \dot{b}_\omega &= \mu_b \end{cases} \quad (2.32)$$

où  $\mu_\omega$  et  $\mu_b$  sont des incertitudes de modèle, et  $\omega_\times \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice antisymétrique associée à  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  définie par

$$\omega_\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Le deuxième modèle utilise, quant à lui, une représentation par quaternion avec le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\omega_b - b_\omega - \mu_\omega)q \\ \dot{b}_\omega &= \mu_b \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\omega_\times \end{pmatrix}$ .

Cette relation peut se récrire

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{2}\Omega(\omega_b)q - \frac{1}{2}\Xi(q)b_\omega - \frac{1}{2}\Xi(q)\mu_\omega \\ \dot{b}_\omega &= \mu_b \end{cases} \quad (2.35)$$

avec  $\Xi(q) = \begin{pmatrix} -q_u^T \\ q_0 I_3 + (q_u)_\times \end{pmatrix}$ . À noter qu'il est aussi possible d'établir la dynamique de rotation à partir des angles d'Euler, avec

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \omega, \quad (2.36)$$

mais cette équation différentielle n'est pas linéaire et n'est donc pas classiquement utilisée.

À partir de ces modèles, il est possible d'établir la dynamique des vecteurs mis en jeu. Ici, les équations seront établies à l'aide de matrices de rotation, mais elles peuvent également s'écrire avec des quaternions, en utilisant la relation (2.9) ou la relation (2.11). En effet, dans le cas où  $n \in \mathbb{N}$  mesures de vecteurs  $v_i \in \mathcal{B}$  dans le repère mobile lié au corps sont acquises, il est possible d'écrire que

$$v_i = R^T v_{0i} + \mu_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

avec  $v_{0i} = (v_{0i,1}, v_{0i,2}, v_{0i,3})^T \in \mathcal{I}$  le vecteur associé à  $v_i$  dont la direction est connue,  $\mu_i$  un bruit blanc et  $R$  la matrice de rotation. Ainsi les vecteurs  $\hat{v}_i$ , estimations de  $v_i$  sont définis de la façon suivante :

$$\hat{v}_i = \hat{R}^T v_{0i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.38)$$

avec  $\hat{R}$  l'estimation de  $R$ . En plus de ces  $n$  vecteurs, il est nécessaire de mesurer la vitesse de rotation  $\omega_b$  définie dans la section 2.3.3.

Lorsque par exemple les seules mesures acquises sont celles fournies par l'accéléromètre, le magnétomètre et le gyromètre, dans ce cas  $n = 2$  puisque deux vecteurs, dont les directions sont connues dans le repère inertiel, sont mis en jeu. Il est cependant possible de créer artificiellement une dernière mesure à partir de l'accéléromètre et du magnétomètre, et donc d'avoir  $n = 3$ , en faisant le produit vectoriel des deux premières mesures :

$$c = a \wedge m \quad \text{et} \quad c_0 = g_0 \wedge m_0 \quad (2.39)$$

Ainsi, le vecteur  $c$  est une mesure dans  $\mathcal{B}$  et  $c_0$  est son équivalent dans  $\mathcal{I}$

### 2.4.2.2 Approche stochastique

Une première approche considérant un processus stochastique, c'est-à-dire mettant en jeu des variables aléatoires, peut être utilisée pour l'estimation de l'attitude à travers l'utilisation d'un filtre.

Diverses structures de filtre ont été utilisées dans divers domaines dont celui de l'estimation de l'attitude. Cette section est consacrée aux principales formes de filtres utilisés dans ce contexte, notamment aux différentes formes du filtre de Kalman.

#### Filtre de Kalman Étendu :

Le filtre de Kalman a d'abord été mis en place dans le cadre de systèmes linéaires donnant l'estimation optimale au problème donné. Il a été ensuite étendu afin qu'il soit utilisé avec des systèmes non-linéaires perdant le côté optimal de la solution. Ainsi, le filtre de Kalman étendu est utilisé pour un système non-linéaire stochastique.

Dans notre contexte, la grandeur qui est classiquement estimée à l'aide d'un filtre de Kalman est le quaternion représentant l'attitude de l'objet, bien qu'il soit possible de la faire avec les matrices de rotations (RUITER (2014)). Le modèle mis en jeu est celui de l'équation (2.34) en considérant que le quaternion  $q$  et le biais  $b_\omega$  sont des variables aléatoires, suivant une loi Gaussienne et que les incertitudes  $\mu_\omega$  et  $\mu_b$  sont des bruits blancs (LEFFENS, MARKLEY et SHUSTER (1982) ; CRASSIDIS (1996) ; KIM et GOLNARAGHI (2004)). L'objectif est alors d'estimer l'état  $x$  donné par

$$x = \begin{pmatrix} q \\ b_\omega \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

en ayant à disposition l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ , respectivement définie par

$$u = \omega_b \text{ et } y = h(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Ainsi, en prenant

$$f(x, u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega(\omega_b - b_\omega)q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

le filtre de Kalman étendu, appliqué à ce système, est le suivant (LEFFENS, MARKLEY et SHUSTER (1982))

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \\ \dot{P} &= AP + PA^T + MM^T - PC^T(NN^T)^{-1}CP \end{cases} \quad (2.43)$$

avec  $\hat{x}$  l'état estimé,  $M$  et  $N$  deux matrices de covariance associées respectivement aux bruits de processus et aux bruits de mesures,  $P$  la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,  $K = PC^T(NN^T)^{-1}$  et,  $A$  et  $C$  respectivement les jacobiennes de  $f$  et de  $h$  définies par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Omega(\omega_b - \hat{b}_\omega) & -\frac{1}{2}\Xi(\hat{q}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \left( \left. \frac{\partial h}{\partial q} \right|_{\hat{x}} \quad 0 \right). \quad (2.44)$$

Le principal défaut des filtres de Kalman étendus réside dans le fait qu'il n'est pas possible de garantir la convergence de l'estimation vers l'état du système. En effet, il est possible que l'erreur  $\tilde{x}$  diverge lorsque les conditions initiales de l'observateur sont trop éloignées de leurs vraies valeurs ou lorsque le modèle diffère trop de la réalité. Il faut aussi noter qu'à travers les matrices  $A$  et  $C$ , le modèle a été linéarisé, ce qui l'éloigne davantage du modèle réel.

Il existe d'autres utilisations du Filtre de Kalman Étendu. Il peut être envisagé de l'appliquer sur l'erreur entre la vraie attitude  $q$  et l'attitude dite nominale  $q_{nom}$ , c'est-à-dire celle qui serait calculée en boucle ouverte, sans terme de correction. En considérant  $\delta q$  la rotation nécessaire pour obtenir  $q$  à partir de  $q_{nom}$ , on peut écrire (MARKLEY (2003a)) :

$$q = \delta q \otimes q_{nom}. \quad (2.45)$$

Ainsi, l'objectif est de trouver la dynamique de  $\delta q$  et d'utiliser un filtre de Kalman pour l'estimer. L'intérêt de cette pratique repose sur la considération de petites variations  $\delta q$ . De cette façon, certaines approximations, possibles seulement lorsque les angles mis en jeu sont petits, peuvent être appliquées et les linéarisations faites engendrent moins d'erreurs puisque l'état reste proche de l'origine (SOLÀ (2015)). Un autre avantage non-négligeable, si le quaternion  $\delta q$  est dans  $\mathbb{H}$  alors cela va être aussi le cas pour le quaternion estimé.

Plusieurs approches permettent de trouver la dynamique de  $\delta q$ . Il peut être envisagé de dériver le terme  $\delta q = q \otimes q_{nom}^{-1}$  puis de simplifier les termes pouvant l'être (SOLÀ (2015); KOCH, WHEELER, BEARD, MCLAIN et BRINK (2017)). Autrement, il est possible d'appliquer le filtre de Kalman sur le vecteur  $u$  défini dans (2.7), en se servant de l'équation suivante

(MARKLEY (2003b); HALL, KNOEBEL et MCLAIN (2008))

$$\delta q(u) \simeq \bar{1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

avec  $\bar{1}$  le quaternion unitaire.

Ces filtres sont appelés filtres de Kalman étendus multiplicatifs en raison de la forme de l'erreur donnée dans (2.45). Il est cependant possible de considérer l'erreur  $\Delta q = q - q_{nom}$  afin de former un filtre de Kalman étendu additif. Bien que cette écriture soit moins élégante, elle a l'avantage d'avoir un concept plus simple que celui du filtre de Kalman étendu multiplicatif. Pour réaliser l'estimation, un terme est rajouté dans la correction pour permettre à l'estimation de conserver une norme unitaire (MARKLEY (2003b); BAR-ITZHACK, DEUTSCHMANN et MARKLEY (1991)).

Dans la majorité des situations, les données issues des capteurs sont des signaux discrets. Il est ainsi nécessaire de discrétiser le modèle continu sous la forme

$$\begin{cases} x_k &= f_k(x_{k-1}, u_k) + w_k \\ y_k &= h_k(x_k) + v_k \end{cases} \quad (2.47)$$

avec  $x_k$  l'état discret,  $y_k$  la sortie discrète,  $u_k$  l'entrée discrète,  $f_k$  et  $h_k$  des fonctions non-linéaires et  $w_k$  et  $v_k$  des bruits blancs Gaussien. L'estimation de l'état discret  $\hat{x}_k$  dans le cadre du filtre de Kalman étendu se fait alors en deux étapes. La première est une étape de prédiction à partir des données à l'instant  $k - 1$  et la deuxième est l'étape de mise à jour lorsque les échantillons de l'instant  $k$  ont été acquis. Un gain jouant le même rôle que le gain  $K$  de l'équation (2.43) est alors calculé. Ces étapes sont faites à partir des linéarisations locales des fonctions non-linéaires.

#### **Filtre de Kalman sans parfum :**

Le principe du filtre de Kalman sans parfum est de regarder comment se propage une distribution Gaussienne à travers les fonctions non-linéaires caractérisant la dynamique du système. Pour cela, l'idée est de fixer  $2n + 1$  points sigma, à partir des paramètres de la distribution de référence (moyenne et écart type), et de calculer ensuite les paramètres de la distribution obtenue par l'application de la fonction non-linéaire. Ces derniers servent à calculer l'état estimé. Ce principe est illustré figure 2.8. Il diffère de celui du filtre de Kalman étendu puisque pour celui-ci, la distribution approximée est obtenue à l'aide des linéarisations des fonctions non-linéaires.

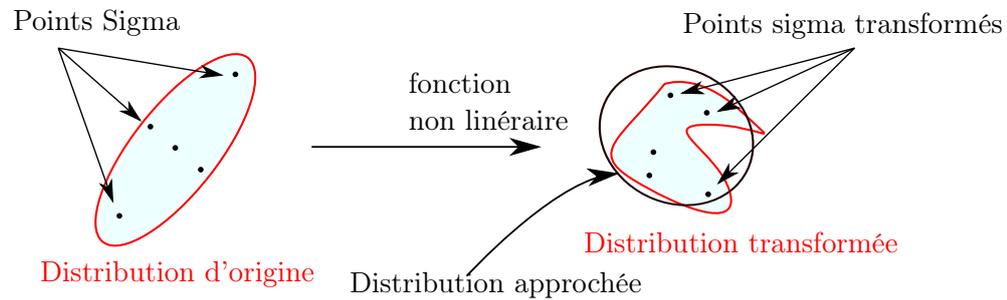


FIGURE 2.8 – Transformation sans parfum

Contrairement au filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman sans parfum n'utilise pas de linéarisation. Cela engendre de meilleurs résultats au détriment d'un temps de calcul légèrement plus important (MARINA, PEREDA, GIRON-SIERRA et ESPINOSA (2012)). Le filtre de Kalman sans parfum demande aussi plus de paramètres de synthèse et peut donc être plus difficile à mettre en œuvre (CRASSIDIS et MARKLEY (2003)).

#### Filtre particulaire :

Le filtre particulaire est basé sur un principe similaire au filtre de Kalman sans parfum, sauf que la distribution d'origine n'est pas nécessairement une distribution Gaussienne, mais peut prendre la forme désirée. Aussi, la distribution approchée n'est pas, non plus, une distribution gaussienne. Contrairement aux points sigma du filtre de Kalman sans parfum, ceux du filtre particulaire, appelés particules, ne sont pas choisis de façon déterministe mais choisis aléatoirement en fonction de la distribution d'origine considérée (CHENG et CRASSIDIS (2004)). Le filtre particulaire permet donc d'avoir une plus grande liberté, mais requiert une bonne connaissance du système mis en jeu. Des filtres particuliers ont été mis en œuvre pour l'estimation de l'attitude avec entre autres des distributions d'origine Gaussienne ou suivant une loi uniforme (CHENG et CRASSIDIS (2004); WON, MELEK et GOLNARAGHI (2010)).

#### Autres filtres de Kalman :

D'autres catégories de filtre de Kalman existent dans la littérature comme le filtre de Kalman à cubage (KIANI et POURTAKDOUST (2014); TANG, LIU et ZHANG (2012)) mais ceux-ci sont utilisés plus marginalement, en fonction du contexte d'application.

#### 2.4.2.3 Approche déterministe

Il est possible d'estimer l'orientation d'un objet en adoptant une approche déterministe, c'est-à-dire en ne prenant pas en compte d'éventuels phénomènes aléatoires. Autrement dit, un système déterministe aura le même comportement pour deux simulations différentes, si

ses conditions initiales sont les mêmes dans les deux cas. L'estimation sera faite à l'aide d'un observateur d'état.

Les observateurs d'état sont des algorithmes permettant d'estimer des variables non-mesurées à partir du modèle dynamique du système considéré, de ses entrées  $u(t)$  et de ses sorties  $y(t)$ . Ils sont utilisés lorsque qu'il n'est pas possible ou trop onéreux de placer un capteur mesurant les grandeurs souhaitées. L'observateur joue ainsi le rôle d'un capteur logiciel permettant de calculer  $\hat{x}(t)$ , l'estimation de l'état  $x(t)$  du système. Le schéma permettant d'illustrer ce principe se trouve dans la figure 2.9.

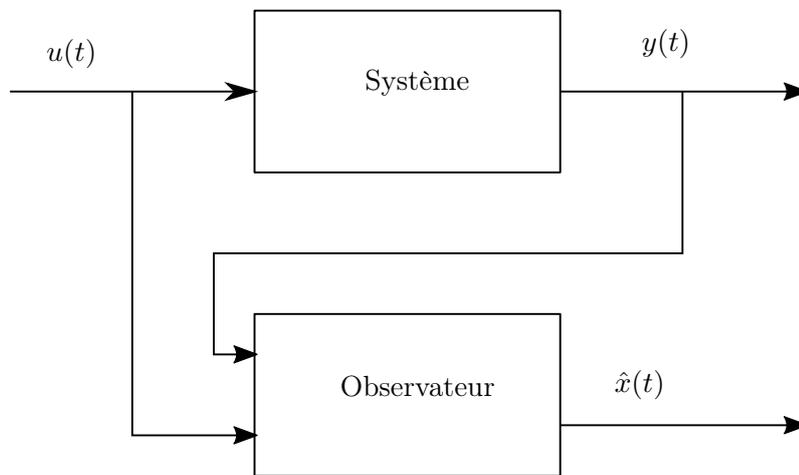


FIGURE 2.9 – Principe de l'estimation par observateur

Les observateurs permettant d'estimer l'attitude peuvent être séparés en deux groupes. Les observateurs du premier groupe estiment une matrice de rotation dans le groupe spécial orthogonal  $SO(3)$  (définie dans l'équation (A.3)) ou un quaternion dans  $\mathbb{H}$  (définie dans l'équation (2.8)). Quant aux observateurs du second groupe, ils estiment une matrice dans  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  et non plus forcément dans  $SO(3)$ .

#### Observateurs estimant dans $SO(3)$ ou dans $\mathbb{H}$ :

Plusieurs observateurs fournissant une estimation dans  $SO(3)$  ou  $\mathbb{H}$  ont été élaborés (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008) ; VASCONCELOS, SILVESTRE et OLIVEIRA (2008) ; MARTIN et SALAÜN (2010) ; FOURATI, MANAMANNI, AFILAL et HANDRICH (2009)). L'observateur proposé par MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008), connu pour sa relative simplicité

de mise en œuvre, est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{R}} &= \hat{R} \left( (\omega_b - \hat{b}_\omega)_\times + k_p(\sigma)_\times \right) \\ \dot{\hat{b}}_\omega &= -k_I \sigma \\ \sigma &= \sum_{i=1}^n k_i v_i \wedge \hat{v}_i \end{cases} \quad (2.48)$$

avec  $k_p > 0$ ,  $k_I > 0$  et  $k_i > 0$  les paramètres de synthèse l'observateur les  $k_i$  sont choisis de façon à avoir les valeurs propres de  $M_0 = \sum_{i=1}^n k_i v_{0i} v_{0i}^T$  distinctes. Les  $\hat{v}_i$  sont calculés à partir de l'équation (2.38). À noter que pour ce type d'observateur, contrairement aux filtres de Kalman, les gains doivent être déterminés par l'utilisateur. Ils doivent être fixés avec un grand soin en fonction du système considéré et de la dynamique de l'estimation souhaitée.

Il a été prouvé que cet observateur est localement exponentiellement stable et qu'il converge vers la bonne solution pour presque toutes les conditions initiales. Il est, en effet, impossible de garantir une stabilité globale lorsque les estimées appartiennent à  $SO(3)$ , à cause de la topologie de  $SO(3)$  (BHAT et BERNSTEIN (2000)).

#### Observateurs estimant dans $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ :

Dans cette seconde catégorie, la géométrie des matrices de rotation de  $SO(3)$  a été délibérément oubliée, estimant ainsi l'attitude dans  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Ces observateurs convergent asymptotiquement vers une matrice appartenant à  $SO(3)$  en l'absence de bruit, mais cette matrice peut ne pas appartenir à  $SO(3)$ . Cependant, la stabilité est globale contrairement aux observateurs de la catégorie précédente (BATISTA, SILVESTRE et OLIVEIRA (2014)).

En décomposant la matrice  $\hat{R}$  de la façon suivante :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^T \\ \hat{z}_2^T \\ \hat{z}_3^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ avec } \hat{z}_i \in \mathbb{R}^3 \text{ pour } i = 1, \dots, 3 \quad (2.49)$$

il est possible de ramener le problème de l'estimation de la matrice de rotation en un problème d'estimation d'un vecteur de taille 9, défini de la façon suivante :

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9. \quad (2.50)$$

L'observateur proposé par BATISTA, SILVESTRE et OLIVEIRA (2012) prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}}_i &= -S(\omega_b)\hat{v}_i - S(v_i)\hat{b}_\omega + \alpha_i(v_i - \hat{v}_i) & \text{pour } i = 1, \dots, n \\ \dot{\hat{b}}_\omega &= \sum_{i=1}^n \beta_i S(v_i)(v_i - \hat{v}_i) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -S_3(\omega_b - \hat{b}_\omega)\hat{x}_2 + C_2^T Q^{-1}(\hat{v} - C_2\hat{x}_2) \end{cases} \quad (2.51)$$

où  $S(\omega) = \omega_\times$ ,  $S_3(\omega) = \text{diag}(\omega_\times, \omega_\times, \omega_\times)$ , les  $\alpha_i > 0$ , les  $\beta_i > 0$  et la matrice symétrique définie positive  $Q$  sont les paramètres de synthèse de l'observateur,  $\hat{v} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_n \end{pmatrix}$  et  $C_2 =$

$$\begin{pmatrix} v_{01,1}I_3 & v_{01,2}I_3 & v_{01,3}I_3 \\ & \vdots & \\ v_{0n,1}I_3 & v_{0n,2}I_3 & v_{0n,3}I_3 \end{pmatrix}.$$

La convergence exponentielle globale est vérifiée pour cet observateur. D'autres formes de ce type d'observateur ont été également élaborées dans ce même contexte (BATISTA, SILVESTRE et OLIVEIRA (2014); MARTIN et SARRAS (2016b)).

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence les différents aspects concernant le domaine de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide. Dans un premier temps la définition de l'attitude d'un corps rigide et les notions permettant d'appréhender les différentes techniques d'estimation ont été introduites. Différents capteurs ont été présentés ensuite. Ils permettent d'obtenir des informations utiles à l'estimation de l'attitude. Ce sont ceux qui sont usuellement présents dans les centrales inertielle pouvant être intégrés dans des systèmes de façon miniature. Finalement, deux catégories de techniques d'estimations ont été présentées. Dans la première catégorie, l'estimation est statique, c'est-à-dire que l'estimation est seulement réalisée à un instant donné. Dans la seconde catégorie, le modèle dynamique de rotation est utilisé ce qui permet une estimation dynamique, c'est-à-dire qu'on estime l'attitude continuellement au cours du temps.

## Chapitre 3

# Estimation de l'attitude d'un corps soumis à une accélération externe

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>État de l'art sur l'estimation de l'attitude dans le cas d'un mouvement accéléré</b>	<b>30</b>
3.2.1	Utilisation de mesures de vitesse et/ou de position	30
3.2.2	Séparation des phases statiques et dynamiques	31
3.2.3	Utilisation d'un modèle pour l'accélération	32
<b>3.3</b>	<b>Estimation de l'attitude par observateur et filtre passe-bas</b>	<b>33</b>
3.3.1	Modèle du système de l'attitude	33
3.3.2	Synthèse des observateurs	36
3.3.3	Application des observateurs	43
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'estimation de l'attitude dans le cas d'un mouvement accéléré. Lorsque le corps est en mouvement accéléré, les estimations données en utilisant l'accéléromètre se trouvent dégradées. En effet, l'accélération externe  $a_e$  de l'équation (2.12) devient dans ce cas non-négligeable. De ce fait, l'accélération mesurée n'est plus seulement une rotation du vecteur représentant le champ de pesanteur. Ce chapitre est divisé en deux parties principales. Dans un premier temps, l'état de l'art portant sur la problématique soulevée sera présenté dans la section 3.2. Ensuite, la section 3.3 sera consacrée aux solutions proposées pour garder une estimation de bonne qualité, même en présence d'une accélération externe.

### 3.2 État de l'art sur l'estimation de l'attitude dans le cas d'un mouvement accéléré

Cette section est consacrée aux différentes méthodes existantes dans la littérature et pouvant être utilisées dans le cas où il y a un mouvement accéléré.

#### 3.2.1 Utilisation de mesures de vitesse et/ou de position

L'utilisation de données relatives à la position et/ou à la vitesse de l'objet considéré peut améliorer l'estimation de l'orientation lorsque le solide considéré est soumis à une accélération externe. Afin d'utiliser ces données, un modèle augmenté est créé en incluant la dynamique de la vitesse de l'objet et la dynamique de sa position, si celle-ci est disponible également. Ainsi, le modèle de l'attitude d'un objet, prenant en compte ces mesures exprimées dans le repère inertiel  $\mathcal{I}$  et sans considérer les bruits est le suivant (GRIP, FOSSEN, JOHANSEN et SABERI (2015)) :

$$\begin{cases} \dot{R} &= RS(\omega_b - b_\omega) \\ \dot{b}_\omega &= 0 \\ \dot{p} &= v \\ \dot{v} &= a_e = Ra + g_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $p$ ,  $v$  et  $a_e$  représentant respectivement la position, la vitesse et l'accélération externe exprimée dans le repère inertiel  $\mathcal{I}$ . À noter que les effets de la rotation de la terre ne sont pas pris en compte dans le modèle de la vitesse, comme auparavant dans celui de la rotation, puisque le repère NED a été supposé galiléen, ce qui n'est pas le cas en réalité

(voir BRYNE, HANSEN, ROGNE, SOKOLOVA, FOSSEN et al. (2017) par exemple pour un modèle les prenant en compte).

Dans la littérature, il existe principalement trois types de méthode selon les données acquises, en plus des mesures inertielles et magnétiques. La première utilise seulement la vitesse donnée par le GPS dans le repère inertiel (HUA (2010) ; MARTIN et SALAÜN (2008) ; ROBERTS et TAYEBI (2011)). La deuxième utilise la position et la vitesse dans le repère  $\mathcal{I}$  à l'aide également d'un GPS (JOHANSEN, HANSEN et FOSSEN (2016) ; GRIP, FOSSEN, JOHANSEN et SABERI (2013) ; BRYNE, HANSEN, ROGNE, SOKOLOVA, FOSSEN et al. (2017) ; GRIP, SABERI et JOHANSEN (2012) ; GRIP, FOSSEN, JOHANSEN et SABERI (2015)). Et la dernière utilise la position dans le repère  $\mathcal{B}$  (BONNABEL, MARTIN et ROUCHON (2008) ; TRONI et WHITCOMB (2013) ; HUA, MARTIN et HAMEL (2016)). Dans ce dernier cas, la vitesse peut être acquise par exemple avec un sonar basé sur l'effet Doppler.

L'utilisation de mesures venant d'un GPS entraîne cependant des inconvénients. En effet, la précision de la mesure est souvent assez faible (entre 3 et 10 mètres) et sa période d'échantillonnage est relativement élevée, de l'ordre de la seconde. De plus, le GPS nécessite une utilisation en extérieur puisque les signaux des satellites sont peu ou pas visibles en intérieur.

### 3.2.2 Séparation des phases statiques et dynamiques

Une autre alternative permettant d'améliorer l'estimation de l'attitude lors d'un mouvement accéléré est de séparer les phases statiques, représentant les mouvements non-accelérés, et les phases dynamiques, représentant les mouvements accélérés, pour adapter l'estimation. L'idée est d'utiliser la norme de l'accélération donnée par l'accéléromètre pour discriminer les deux phases. En effet, celle-ci est égale à la norme du champ de pesanteur  $g_0$  sans présence d'accélération externe, mais cette égalité devient fautive dans le cas contraire.

#### Discrimination de la phase :

Une première possibilité est d'utiliser directement la norme de la mesure donnée par l'accéléromètre  $a$ . Ainsi, en fixant un seuil, le concept est de considérer le mouvement comme dynamique lorsque l'écart entre cette norme et la norme de la constante  $g_0$  est supérieur à ce seuil (REHBINDER et HU (2004) ; LEE, PARK et ROBINOVITCH (2012)).

Une approche stochastique est également réalisable pour différencier les phases statiques et dynamiques (MAKNI, FOURATI et KIBANGOU (2014) ; MAKNI (2016)). Pour cela, une fonction de détection est créée à partir de l'espérance mathématique de la norme de l'accélération en considérant  $a_e = 0$ . Ensuite, la phase est classée comme statique si la

fonction de détection donne un résultat inférieur à un seuil et dynamique dans le cas contraire. Ce seuil est établi de façon à maximiser la probabilité de détection à partir d'une probabilité de fausse détection donnée.

Il est également possible d'utiliser la variance glissante de l'accélération. Si celle-ci est supérieure à un seuil, le mouvement est considéré comme dynamique (RENAUDIN et COMBETTES (2014))

À noter que le principe de séparation de phases peut aussi être appliqué sur les mesures données par le magnétomètre. Cette séparation ne sera plus basée sur le fait que le mouvement soit statique ou non, mais sur le fait d'avoir ou non la présence d'une perturbation magnétique externe venant s'ajouter au champ magnétique terrestre (SABATINI (2006)).

#### **Conséquence sur l'estimation :**

Lorsque la phase a été discriminée, il existe plusieurs approches pour adapter l'estimation. Il peut être envisagé de ne pas prendre en compte les mesures lors des phases dynamiques (REHBINDER et HU (2004) ; LEE, PARK et ROBINOVITCH (2012)). De ce fait, aucune correction n'est apportée et l'estimation se fait en boucle ouverte partir du modèle du système. Cette technique donne de bons résultats cependant, les phases d'accélération ne doivent pas durer trop longtemps sinon l'estimation sera dégradée à cause du manque d'information disponible (LEE, PARK et ROBINOVITCH (2012)).

Autrement, pour l'utilisation d'un filtre de Kalman, il peut être intéressant de calculer la matrice de covariance associée au bruit de mesure à partir des résidus de l'accélération externe (SUH (2010) ; MAKNI, FOURATI et KIBANGOU (2014) ; MAKNI (2016)). Contrairement à la technique précédente, ceci permet de conserver le terme correctif pendant les phases d'accélération et d'adapter le gain du Filtre à la phase considérée.

### **3.2.3 Utilisation d'un modèle pour l'accélération**

Des informations concernant l'accélération externe peuvent être disponibles pour certaines applications. En effet, lorsque que l'on connaît le modèle de l'accélération du système mis en œuvre, il est possible de l'utiliser pour estimer l'attitude à l'aide d'un observateur. Ceci est réalisable dans certaines applications, en robotique par exemple avec un drone (MARTIN et SALAUN (2010) ; MARTIN et SARRAS (2016a)). En effet, un drone possède une géométrie connue avec des actionneurs dont il est possible de modéliser l'influence sur l'accélération. Les équations du modèle sont obtenues en utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.

### 3.3 Estimation de l'attitude par observateur et filtre passe-bas

Nous allons voir dans ce chapitre une solution permettant d'estimer l'attitude d'un objet, pouvant être soumis à une accélération externe. L'approche proposée est basée sur le filtrage de l'accélération exprimée dans le repère  $\mathcal{I}$ . En effet, dans ce repère, l'accélération mesurée, outre les bruits de mesure, est la somme du champ de pesanteur  $g_0$  et de l'accélération externe  $a_e(t)$ . L'idée est de réécrire le modèle de l'attitude en intégrant un filtre passe-bas dont sa sortie est approximativement égale aux vecteurs de mesures connus dans le repère fixe. Ceci permet de limiter les effets hautes-fréquences de l'accélération externe. Ainsi, l'attitude est estimée par un observateur appliqué sur ce nouveau système. Deux observateurs vont être proposés dans ce chapitre afin d'estimer une matrice de rotation. Le premier observateur nécessite l'inversion d'une matrice variant dans le temps, c'est pourquoi un deuxième observateur a été synthétisé permettant d'éviter ce problème. L'estimation de la matrice de rotation appartient de façon générale à  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  puisque la géométrie des matrices de rotation  $SO(3)$  a été délibérément oubliée.

#### 3.3.1 Modèle du système de l'attitude

Dans cette section, nous allons présenter le modèle considéré pour l'attitude. Dans un premier temps le modèle physique sera présenté. Ce modèle physique sera ensuite réécrit sous une forme adaptée afin de synthétiser un observateur.

##### 3.3.1.1 Modèle physique

L'attitude qui va être mise en jeu est une matrice de rotation  $R \in SO(3)$ , représentant une rotation du référentiel  $\mathcal{I}$  vers le référentiel  $\mathcal{B}$ , et dont la dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{R}(t) = R(t)(\omega(t))_{\times}, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

avec  $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$  la vitesse angulaire du corps dans le repère  $\mathcal{B}$ . Une mesure de celle-ci est fournie par un gyromètre qui sera supposé non-biaisé. On suppose que l'on possède en plus un accéléromètre et un magnétomètre.

Les mesures  $a(t)$  fournies par l'accéléromètre peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$a(t) = R^T(t)(a_e(t) - g_0) \quad (3.3)$$

où  $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & G \end{pmatrix}^T$ , avec  $G \simeq 9.81m.s^{-2}$ , le champ de pesanteur et  $a_e(t)$  l'accélération externe.

D'un autre côté, les données issues du magnétomètre  $m(t)$  sont sous la forme suivante :

$$m(t) = R^T(t)m_0 \quad (3.4)$$

où  $m_0$  est le vecteur constant du champ magnétique terrestre.

Nous allons maintenant présenter les hypothèses qui seront faites dans ce chapitre.

**Hypothèse 3.1.** *Pour tout  $t \geq 0$ , les vecteurs  $a(t)$  et  $m(t)$  ne sont pas colinéaires, plus précisément, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\|a(t) \wedge m(t)\| \geq \alpha, \forall t \geq 0$ .*

De façon plus générale, on considère que 3 vecteurs indépendants  $v_i(t) \in \mathbb{R}^3$  sont disponibles dans le repère  $\mathcal{B}$ , et qu'ils sont donnés sous la forme suivante :

$$v_i(t) = R^T(t)(b_i + p_i(t)) \quad (3.5)$$

où  $b_i \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de référence connu dans le repère  $\mathcal{I}$  et  $p_i(t) \in \mathbb{R}^3$  est une perturbation inconnue variant dans le temps. L'hypothèse 3.1 permet éventuellement de lever cette contrainte de disponibilité puisqu'il est possible de prendre comme troisième vecteur  $c = a \wedge m$ . De cette façon, trois vecteurs linéairement indépendants sont disponibles bien que seules les données d'accélération et de champ magnétique soient acquises.

De plus, les perturbations  $p_i, i = 1, 2, 3$ , et leurs dérivées sont supposées bornées.

**Hypothèse 3.2.** *Il existe  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  tel que*

$$\|p_i(t)\| \leq \gamma_1 \text{ et } \|\dot{p}_i(t)\| \leq \gamma_2 \quad (3.6)$$

*pour  $i = 1, 2, 3$  et pour tout  $t \geq 0$ .*

### 3.3.1.2 Modèle de synthèse

Le modèle physique que l'on vient d'introduire va être réécrit sous une forme adaptée permettant de synthétiser les observateurs qui seront présentés dans ce chapitre. Commençons par réécrire la partie dynamique. De façon similaire à BATISTA, SILVESTRE et OLIVEIRA (2012), présenté dans la section 2.4.2.3, la matrice  $R$  peut s'écrire sous une forme

vectorielle. En décomposant  $R$ , comme suit :

$$R(t) = \begin{pmatrix} z_1^T(t) \\ z_2^T(t) \\ z_3^T(t) \end{pmatrix}, \quad z_i(t) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

et en réorganisant les éléments de  $R(t)$  de la façon suivante

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9 \quad (3.8)$$

on peut directement montrer, à partir de l'équation (3.2), que la dynamique du modèle de synthèse s'écrit

$$\dot{x}_2(t) = -S_3(\omega(t))x_2(t) \quad (3.9)$$

où

$$S_3(x) = \text{diag}(x_\times, x_\times, x_\times) \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \quad (3.10)$$

Nous allons maintenant réécrire la partie concernant les mesures. En utilisant l'équation (3.5), les 3 mesures peuvent être écrites de façon plus générale comme suit :

$$b_i + p_i(t) = W_i(t)x_2(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

avec

$$W_i(t) = \begin{pmatrix} v_i^T(t) & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & v_i^T(t) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & v_i^T(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 9} \quad (3.12)$$

Il est possible de compacter cette expression afin d'obtenir l'égalité suivante :

$$B + P(t) = W(t)x_2(t) \quad (3.13)$$

avec  $B = \begin{pmatrix} b_1^T & b_2^T & b_3^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^9$ ,  $P(t) = \begin{pmatrix} p_1^T(t) & p_2^T(t) & p_3^T(t) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^9$  et

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ W_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \quad (3.14)$$

À noter que grâce aux hypothèses 3.1 et 3.2, la matrice  $W(t)$  est inversible et bornée pour tout  $t \geq 0$ , plus précisément, on peut noter qu'il existe  $\nu_1, \nu_2 > 0$  tel que

$$\nu_1 I_9 \leq W(t) \leq \nu_2 I_9, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Synthèse des observateurs

Deux observateurs vont être synthétisés dans cette section afin de répondre à la problématique d'estimation de l'attitude en présence d'une accélération externe. Comme nous l'avons présenté, l'idée est de filtrer les mesures avec un filtre passe-bas pour éliminer l'accélération externe. Donc dans un premier temps nous allons concevoir le filtre passe-bas. Ensuite, deux observateurs vont être synthétisés. Le premier observateur nécessite l'inversion d'une matrice variant dans le temps, une opération coûteuse en ressources matérielles. C'est la raison pour laquelle un deuxième observateur sera proposé permettant d'estimer l'attitude sans inversion de matrice.

#### 3.3.2.1 Conception du filtre passe bas

Comme présenté précédemment, notre système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) &= -S_3(\omega(t))x_2(t) \\ B + P(t) &= W(t)x_2(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

L'objectif est de reconstruire  $x_2(t)$ . Cependant, la sortie  $B + P(t)$  n'est pas connue puisque seulement  $B$  l'est. L'idée est basée sur le fait qu'on suppose que les composantes du spectre des perturbations sont hautes fréquences. Ainsi, la sortie du système augmenté suivant

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{\tau}(-x_1(t) + W(t)x_2(t)) \quad (3.17)$$

$$\dot{x}_2(t) = -S_3(\omega(t))x_2(t) \quad (3.18)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3.19)$$

est approximativement égale à  $B$ . En effet,  $P(t)$  est filtrée par le premier étage du système (3.17)-(3.18). Celui-ci est en fait simplement un filtre passe bas du premier ordre, avec une constante de temps  $\tau > 0$ , et dont la fonction de transfert est donnée par  $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ .

À noter que le système augmenté (3.17)-(3.18)-(3.19) est uniformément observable puisque la matrice  $W(t)$  est inversible pour tout  $t \geq 0$  sous l'hypothèse 3.1. Ainsi, la synthèse d'un observateur est possible.

### 3.3.2.2 Premier observateur

Le premier observateur que nous proposons est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) &= \frac{1}{\tau}(-\hat{x}_1(t) + W(t)\hat{x}_2(t)) + k_1(B - \hat{x}_1(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= -S_3(\omega(t))\hat{x}_2(t) + k_2W^{-1}(t)(B - \hat{x}_1(t)) \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $K = \begin{pmatrix} k_1 I_9 & k_2 I_9 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$  est le gain de l'observateur et est choisi de façon à avoir la matrice

$$\bar{A} \triangleq A - KC = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{\tau} + k_1)I_9 & \frac{1}{\tau}I_9 \\ -k_2I_9 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Hurwitz, avec

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}I_9 & \frac{1}{\tau}I_9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} I_9 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Le résultat suivant établit la convergence de l'observateur, dans le cas où il n'y a pas de perturbation

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $P(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  et que les gains  $k_1, k_2$  sont choisis de façon à ce que la matrice  $\bar{A}$  soit Hurwitz, alors l'état de l'observateur (3.20) converge exponentiellement vers l'état du système (3.17)-(3.18).*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que dans le cas où il n'y a pas de perturbation, nous avons  $W(t)x_2(t) = B$  pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi  $\varepsilon(t) = x_1(t) - B$  converge exponentiellement vers zéro, puisque le filtre passe bas du premier ordre  $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$  a un gain statique égal à 1. Il existe donc  $\alpha, \beta > 0$  tel que  $\|\varepsilon(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}$ .

Considérons le vecteur d'erreur d'estimation  $e = \begin{pmatrix} e_1^T & e_2^T \end{pmatrix}^T$ , avec  $e_1 = (x_1 - \hat{x}_1)$ ,  $e_2 = W\tilde{x}_2$  et  $\tilde{x}_2 = (x_2 - \hat{x}_2)$ . Puisque  $P(t) \equiv 0$ , nous pouvons montrer que

$$\dot{W}(t) = W(t)S_3(\omega(t)). \quad (3.23)$$

En utilisant le fait que  $B - \hat{x}_1(t) = e_1(t) - \varepsilon(t)$ , nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(W(t)x_2(t)) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt}(W(t)\hat{x}_2(t)) = k_2 e_1(t) - k_2 \varepsilon \quad (3.25)$$

et donc

$$\dot{e}(t) = \bar{A}e(t) + K\varepsilon(t). \quad (3.26)$$

En intégrant le système (3.26), le signal d'erreur  $e(t)$  est donné par

$$e(t) = e^{\bar{A}t}e(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-s)}K\varepsilon(s)ds. \quad (3.27)$$

Puisque  $\bar{A}$  est supposée être Hurwitz, il existe  $\gamma, \varphi > 0$  tel que  $\|e^{\bar{A}t}\| \leq \varphi e^{-\gamma t}$  (nous pouvons d'ailleurs supposer, sans perte de généralité, que  $\gamma \neq \alpha$ ), et donc

$$\|e(t)\| \leq \varphi e^{-\gamma t}\|e(0)\| + \beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \varphi e^{-\gamma t} \int_0^t e^{-(\alpha-\gamma)s} ds \quad (3.28)$$

$$\leq \varphi e^{-\gamma t}\|e(0)\| + \beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \varphi e^{-\gamma t} \frac{e^{-(\alpha-\gamma)t} - 1}{\gamma - \alpha} \quad (3.29)$$

$$\leq \varphi e^{-\gamma t}\|e(0)\| + \beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \varphi \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha} \quad (3.30)$$

Ceci montre la convergence exponentielle vers zéro de  $e_1(t)$  et de  $e_2(t)$ . Comme  $W(t)$  vérifie (3.15),  $\tilde{x}_2(t)$  converge également exponentiellement vers zéro.  $\square$

Le corollaire qui suit donne le résultat de la stabilité pratique dans le cas où la perturbation est non-nulle mais bornée.

**Corollaire 3.1.** *Supposons que l'accélération externe vérifie l'hypothèse 3.2 et que  $k_1, k_2$  sont choisis de façon à avoir la matrice  $\bar{A}$  Hurwitz, alors l'erreur de l'observateur (3.20)  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^T & \tilde{x}_2^T \end{pmatrix}^T$ , avec  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  et  $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$  est bornée à la limite, c'est-à-dire, il existe une borne  $G > 0$  tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{x}(t)\| \leq G \quad (3.31)$$

*Démonstration.* Dans le cas où la perturbation  $P(t)$  est non-nulle, la dynamique de  $W(t)x_2(t)$  est donnée par

$$\frac{d}{dt}(W(t)x_2(t)) = \dot{P}(t) \quad (3.32)$$

et la sortie du filtre passe-bas par  $x_1(t) = B + \varepsilon(t)$ .

On peut montrer que le signal  $\varepsilon(t)$  est borné. En effet, comme la dynamique de  $\varepsilon(t)$  est donnée par l'équation différentielle suivante

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\tau}(-\varepsilon(t) + P(t)), \quad (3.33)$$

$\varepsilon(t)$  correspond à la somme de deux signaux. Le premier est la version filtrée de  $P(t)$  par le filtre du premier ordre. Quant au second, il correspond à un signal convergeant exponentiellement vers zéro, en raison d'une condition initiale possiblement incorrecte.

Soit  $e = \begin{pmatrix} e_1^T & e_2^T \end{pmatrix}^T$ , avec  $e_1 = \tilde{x}_1$ ,  $e_2 = W\tilde{x}_2$ . Nous pouvons ainsi écrire, en utilisant les équations (3.25) et (3.32) que

$$\dot{e}(t) = \bar{A}e(t) + K\varepsilon(t) + D\dot{P}(t) \quad (3.34)$$

avec  $D = \begin{bmatrix} 0_9 & I_9 \end{bmatrix}^T$ . Nous pouvons directement voir que l'erreur  $e(t)$  est pratiquement bornée puisque la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, et  $\varepsilon(t)$  et  $\dot{P}(t)$  sont uniformément bornés. Ce qui montre que  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  sont bornés à la limite grâce à (3.15).  $\square$

**Remarque 3.1.** *Le corollaire 3.1 permet seulement d'obtenir la convergence pratique. En effet, il y a deux sources d'erreur pour la reconstruction de l'attitude. La première est due au fait que la sortie du système (3.17)-(3.18) n'est pas parfaitement connue, puisqu'il a été supposé qu'elle est égale à  $B$  dans l'observateur. Et la seconde est due au fait que le modèle de  $W(t)x_2(t)$  est incertain, à cause de la dérivée non nulle de  $P(t)$ . Il n'est donc pas possible d'obtenir une erreur arbitrairement petite. Cependant, l'estimation donnée par l'observateur reste très satisfaisante comme montrent les résultats de la section 3.3.3.*

### 3.3.2.3 Deuxième observateur

Un deuxième observateur ne nécessitant pas d'inversion matricielle va être présenté. Le deuxième observateur que nous proposons est donné par

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= \frac{1}{\tau}(-\hat{x}_1(t) + W(t)\hat{x}_2(t)) \\ &\quad + k_1 W(t)W^T(t)(B - \hat{x}_1(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= -S_3(\omega(t))\hat{x}_2(t) + k_2 W^T(t)(B - \hat{x}_1(t))\end{aligned}\quad (3.35)$$

Il est possible de montrer le résultat suivant dans le cas où il n'y a pas de perturbation.

**Théorème 3.2.** *Supposons que  $P(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  et que les gains de l'observateur sont choisis de façon à vérifier  $k_1 > 0$  et  $k_2 = \frac{k_1}{2}$ , alors l'état de l'observateur (3.35) converge exponentiellement vers l'état du système (3.17)-(3.18).*

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, un lemme nécessaire à la preuve doit être présenté.

**Lemme 3.1** (lemme 3.4 p.102 KHALIL (2002)). *Considérons l'équation scalaire différentielle suivante :*

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (3.36)$$

où  $f(t, u)$  est continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $u$  pour tout  $t > 0$  et  $u(t) \in \mathbb{R}$ . Soit  $[t_0, T)$  ( $T$  pouvant être infini) l'intervalle maximum d'existence de la solution  $u(t) \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Soit  $v(t)$  une fonction continue dont la dérivée supérieure à droite  $D^+v(t)$  satisfait l'inégalité différentielle

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u(t_0), \quad (3.37)$$

avec  $v(t) \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Alors  $v(t) \leq u(t)$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ .

Démontrons maintenant le théorème 3.2.

*Démonstration du théorème 3.2.* Pour la suite, la plus petite et la plus grande valeur propre d'une matrice  $M$  sont notés  $\lambda_{\min}(M)$  et  $\lambda_{\max}(M)$  respectivement.

Notons  $e = \begin{pmatrix} e_1^T & e_2^T \end{pmatrix}^T$ ,  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ ,  $e_2 = W(t)\tilde{x}_2$  et  $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ . Les équations des erreurs sont données par

$$\dot{e}_1 = -\frac{1}{\tau}e_1 + \frac{1}{\tau}e_2 - k_1WW^Te_1 + k_1WW^T\varepsilon \quad (3.38)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{k_1}{2}WW^Te_1 + \frac{k_1}{2}WW^T\varepsilon \quad (3.39)$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante

$$V(e) = e^TMe, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}I_9 & -\frac{1}{4}I_9 \\ -\frac{1}{4}I_9 & \frac{1}{2}I_9 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Celle-ci est une fonction candidate Lyapunov valide puisque  $M$  est définie positive et qu'il existe donc  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$  tel que  $\varrho_1\|e\| \leq \sqrt{V(e)} \leq \varrho_2\|e\|$ .

Nous obtenons ainsi

$$\dot{V}(e) = -\frac{1}{2\tau}\|e_1\|^2 - \frac{k_1}{4}e_1^TWW^Te_1 + \frac{1}{\tau}e_2^Te_1 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\tau}e_2^Te_2 + \frac{k_1}{4}e_1^TWW^T\varepsilon \\ & \leq -e^TNe + 2\sigma_2\sqrt{V(e)}\|\varepsilon\| \end{aligned} \quad (3.42)$$

où

$$N = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{k_1\lambda_1}{4}\right)I_9 & -\frac{1}{2\tau}I_9 \\ -\frac{1}{2\tau}I_9 & \frac{1}{2\tau}I_9 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

avec  $\lambda_1 = \inf_{t \geq 0} \lambda_{\min}(W(t)W^T(t))$ ,  $\lambda_2 = \sup_{t \geq 0} \lambda_{\max}(W(t)W^T(t))$  et  $\sigma_2 = \frac{k_1\lambda_2}{8\varrho_1}$ . Nous pouvons noter que  $\lambda_1 > 0$  grâce à l'équation (3.15) et  $\lambda_2 < +\infty$  puisque la perturbation  $P(t)$  est supposée uniformément bornée.

De plus, puisque  $N$  est définie positive lorsque  $k_1\lambda_1 > 0$ , il existe  $\sigma_1 > 0$  tel que

$$\dot{V}(e) \leq -2\sigma_1V(e) + 2\sigma_2\sqrt{V(e)}\|\varepsilon\| \quad (3.44)$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{V(e)}) \leq -\sigma_1\sqrt{V(e)} + \sigma_2\|\varepsilon\| \quad (3.45)$$

Nous obtenons ainsi la preuve en appliquant le lemme de comparaison 3.1 en suivant la même logique que pour les dernières lignes de la preuve du théorème 3.1.  $\square$

**Corollaire 3.2.** *Supposons que l'accélération externe vérifie l'hypothèse 3.2 et que les gains sont choisis tel que  $k_1 > 0$  et  $k_2 = \frac{k_1}{2}$ , alors l'erreur de l'observateur (3.35)  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^T & \tilde{x}_2^T \end{pmatrix}^T$ , avec  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  et  $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$  est bornée à la limite, c'est-à-dire qu'il existe une borne  $G > 0$  telle que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{x}(t)\| \leq G \quad (3.46)$$

La preuve du corollaire 3.2 combine les mêmes idées que celles du corollaire 3.1 et du théorème 3.2.

*Démonstration.* Notons  $e = \begin{pmatrix} e_1^T & e_2^T \end{pmatrix}^T$ ,  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ ,  $e_2 = W(t)\tilde{x}_2$  et  $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ , les équations des erreurs sont données par

$$\dot{e}_1 = -\frac{1}{\tau}e_1 + \frac{1}{\tau}e_2 - k_1WW^Te_1 + k_1WW^T\varepsilon \quad (3.47)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{k_1}{2}WW^Te_1 + \frac{k_1}{2}WW^T\varepsilon + \dot{P} \quad (3.48)$$

Considérons la fonction de Lyapounov candidate suivante

$$V(e) = e^T M e, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}I_9 & -\frac{1}{4}I_9 \\ -\frac{1}{4}I_9 & \frac{1}{2}I_9 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Celle-ci est une fonction de Lyapounov candidate valide puisque  $M$  est définie positive et qu'il existe donc  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$  tels que  $\varrho_1\|e\| \leq \sqrt{V(e)} \leq \varrho_2\|e\|$ .

Nous obtenons ainsi

$$\dot{V}(e) = -\frac{1}{2\tau}\|e_1\|^2 - \frac{k_1}{4}e_1^TWW^Te_1 + \frac{1}{\tau}e_2^Te_1 \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\tau}e_2^Te_2 + \frac{k_1}{4}e_1^TWW^T\varepsilon - \frac{1}{2}e_1^T\dot{P} + e_2^T\dot{P} \\ & \leq -e^T N e + 2\sigma_2\sqrt{V(e)}\|\varepsilon\| + 2\sigma_3\sqrt{V(e)}\|\dot{P}\| \end{aligned} \quad (3.51)$$

où

$$N = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{k_1\lambda_1}{4}\right)I_9 & -\frac{1}{2\tau}I_9 \\ -\frac{1}{2\tau}I_9 & \frac{1}{2\tau}I_9 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

avec  $\lambda_1 = \inf_{t \geq 0} \lambda_{\min}(W(t)W^T(t))$ ,  $\lambda_2 = \sup_{t \geq 0} \lambda_{\max}(W(t)W^T(t))$ ,  $\sigma_2 = \frac{k_1 \lambda_2}{8\epsilon_1}$  et  $\sigma_3 = \frac{1}{2\epsilon_1}$ .

De plus, puisque  $N$  est définie positive lorsque  $k_1 \lambda_1 > 0$ , il existe  $\sigma_1 > 0$  tel que

$$\dot{V}(e) \leq -2\sigma_1 V(e) + 2\sigma_2 \sqrt{V(e)} \|\varepsilon\| + 2\sigma_3 \sqrt{V(e)} \|\dot{P}\| \quad (3.53)$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{V(e)}) \leq -\sigma_1 \sqrt{V(e)} + \sigma_2 \|\varepsilon\| + \sigma_3 \|\dot{P}\| \quad (3.54)$$

Rappelons que, comme vu dans la preuve du corollaire 3.2,  $\varepsilon(t)$  et  $\dot{P}(t)$  sont uniformément bornés. Nous obtenons ainsi la preuve de la convergence pratique en appliquant le lemme de comparaison 3.1.  $\square$

### 3.3.3 Application des observateurs

Le comportement des observateurs proposés va être illustré, dans un premier temps, à travers des simulations et, dans un deuxième temps, à travers des données réelles. Pour cela, leurs performances seront comparées entre elles et avec celles de l'observateur de Mahony (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008)) défini dans la section 2.4.2.3.

Les paramètres des observateurs vont être les mêmes pour toutes les applications. La constante de temps du filtre est fixée à  $\tau = 2s$ . Les gains du premier observateur sont  $k_1 = 0.7$  et  $k_2 = 1.4$  et ceux du deuxième observateur sont  $k_1 = 10$  et  $k_2 = k_1/2 = 5$ . Concernant les gains de l'observateur de Mahony, ils sont fixés à  $k_1 = k_2 = k_p = 1$ . Les données du gyromètres sont supposés sans biais.

La matrice de rotation initiale a été fixée à  $R(0) = I_3$  pour tous les observateurs mis en œuvre. Pour comparer les performances, les erreurs  $\|R(t) - \hat{R}(t)\|$  seront affichées et les erreurs quadratiques moyennes seront calculées.

#### 3.3.3.1 Simulations

Pour toutes les simulations, les rotations seront représentées avec la séquence d'Euler antisymétrique ZYX de façon à avoir le lacet  $\psi$ , le roulis  $\theta$  et le tangage  $\phi$  qui suivent l'équation suivante

$$\begin{cases} \psi(t) &= 50 \sin\left(\frac{2\pi(t-1.2\pi)}{8}\right) \\ \theta(t) &= 60 \sin\left(\frac{2\pi(t-1.6\pi)}{8.5}\right) \\ \phi(t) &= 30 \left[ \sin\left(\frac{2\pi(t-1.1\pi)}{5}\right) + 1.2 \right] \end{cases} \quad (3.55)$$

La dynamique de rotation est donnée par l'équation

$$\dot{R}(t) = R(t)(\omega(t))_{\times} \quad (3.56)$$

et la vitesse angulaire déduite est représentée sur la figure 3.1.

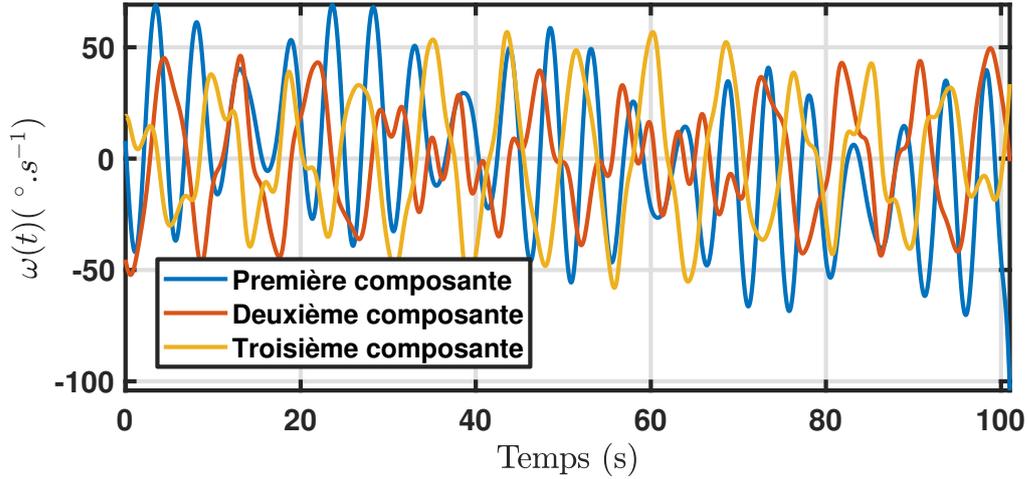


FIGURE 3.1 – Vitesse angulaire  $\omega(t)$

Les mesures issues de l'accéléromètre et du magnétomètre sont données par

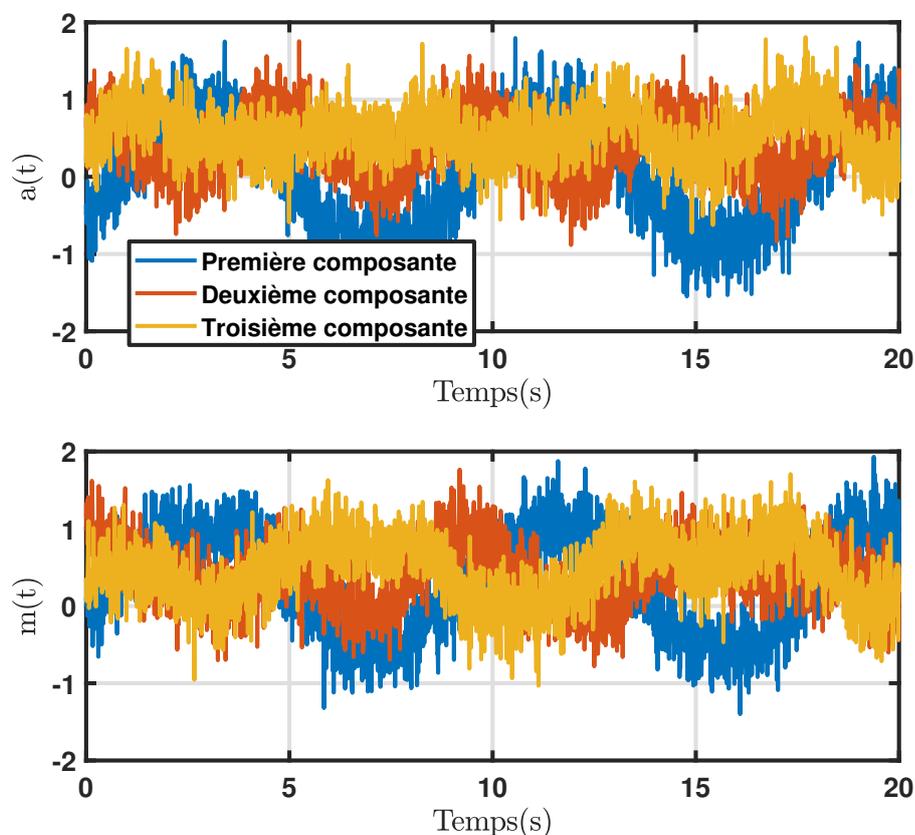
$$a(t) = R^T(t)(a_e(t) - g_0) + \varepsilon_a(t) \quad (3.57)$$

$$m(t) = R^T(t)m_I + \varepsilon_m(t) \quad (3.58)$$

avec  $a_e$  l'accélération externe qui sera prise différente pour chaque simulation,  $g_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$  et  $m_I = (0.434 \ -0.0091 \ 0.9008)^T$ ,  $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_m$  des bruits blancs Gaussien de moyenne nulle et d'écart type égal à 0.3. Il peut être remarqué ici que les normes de  $g_0$  et  $m_0$  sont unitaires. Les mesures de  $a(t)$  et de  $m(t)$ , dans le cas où il n'y a pas d'accélération externe, sont visibles figure 3.2.

Trois simulations ont été réalisées.

- Pour la première, l'accélération externe est nulle, seul le bruit est présent. Les angles d'Euler et leur versions reconstruites ainsi que les erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  sont représentés respectivement figures 3.3 et 3.4. Les trois observateurs ont de bonnes performances, même si les observateurs proposés dans ce chapitre filtrent mieux le bruit, ce qui a un effet direct sur l'estimation. Il est possible de voir que le deuxième observateur converge moins rapidement que le premier. Cela est dû au fait que la dynamique de

FIGURE 3.2 – Mesures  $a(t)$  et  $m(t)$  sans accélération externe

l'erreur dépend de  $W(t)W^T(t)$  et donc devient moins rapide si les valeurs propres de cette matrice sont petites, alors que le premier observateur a une dynamique d'erreur indépendante de  $W(t)$ . Les erreurs quadratiques moyennes de l'observateur 1, observateur 2 et de l'observateur de Mahony sont respectivement égales à  $1.02^\circ$ ,  $1.21^\circ$  et  $1.53^\circ$ .

- Dans la deuxième simulation, une accélération externe d'un ordre de grandeur de  $\frac{g_0}{2}$  est considérée. Celle-ci est représentée sur la figure 3.5. Le spectre de ce signal est présentée sur la figure 3.7. L'erreur entre la version filtrée de l'accélération donnée par le premier observateur et le champ de pesanteur  $g_0$  est représentée sur figure 3.6. Cette figure montre que l'accélération externe a été correctement filtrée puisque son amplitude a été considérablement réduite. Ceci montre que la constante de temps  $\tau$  du filtre passe bas a été correctement choisie. Les erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  pour les différents observateurs sont reportées sur la figure 3.8. Les deux observateurs proposés ont de bonnes performances. Il peut être remarqué que l'accélération externe rend

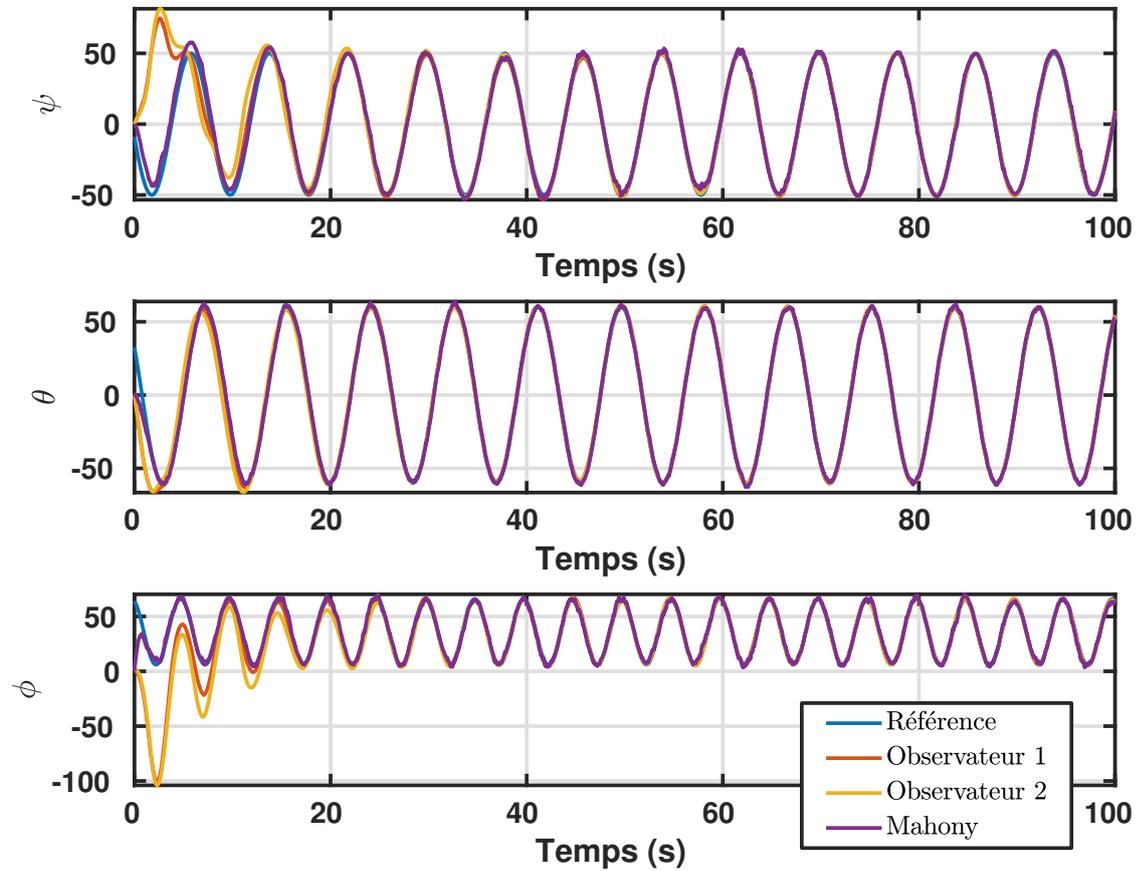
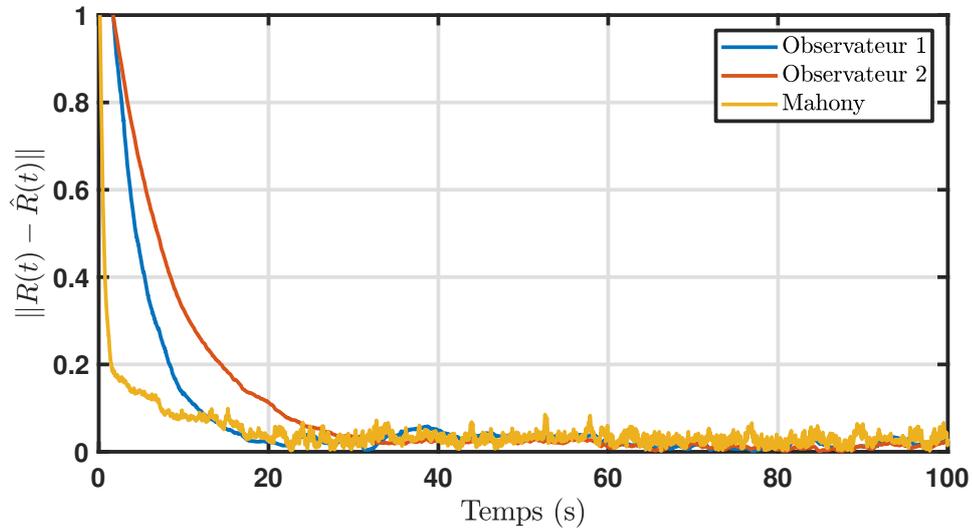


FIGURE 3.3 – Angles d'euler sans accélération externe

l'observateur de Mahony moins performant. Les erreurs quadratiques moyennes de l'observateur 1, de l'observateur 2 et de l'observateur de Mahony sont respectivement égales à  $1.83^\circ$ ,  $1.97^\circ$  et  $3.00^\circ$ .

- Dans la troisième simulation, l'accélération externe est prise égale à 2.5 fois celle de la simulation précédente et est donc assez élevée. Les erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  sont visibles sur la figure 3.9. Les deux observateurs proposés présentent de bonnes performances, par contre l'observateur de Mahony voit son estimation fortement dégradée. Les erreurs quadratiques moyennes des observateurs 1, 2 et de celui de Mahony sont respectivement égales à  $2.02^\circ$ ,  $2.16^\circ$  et  $5.78^\circ$ .

Les erreurs quadratiques moyennes des simulations ont été regroupées dans le tableau 3.1.

FIGURE 3.4 – Erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  sans accélération externe

### 3.3.3.2 Application dans un contexte réel

Les observateurs ont aussi été appliqués dans un contexte réel. Les données utilisées sont issues d'une étude visant à comparer les différents algorithmes qui estiment l'attitude d'objets (MICHEL, GENEVÈS, FOURATI et LAYAÏDA (2017)). Elles sont disponibles et réutilisables sous licence libre CeCILL. Les auteurs ont fait en sorte de décrire plusieurs types d'utilisation d'un smartphone (tels que l'écriture d'un message ou le fait de courir) et d'utiliser les données acquises par ce dernier pour estimer l'orientation. Afin de juger la qualité de l'estimation, un système appelé Kinovis, utilisant 20 caméras dans une salle, permet de donner avec une précision de 0.5 degré, l'attitude du téléphone. Une photographie de la salle est présentée figure 3.10.

Les données issues du smartphone qui ont été utilisées sont l'accélération, le champ magnétique non-calibré et la vitesse de rotation sans biais. Le champ magnétique a été calibré avec l'algorithme décrit dans OZYAGCILAR (2015). Aussi, les données d'accélération et de champ magnétique ont été normalisées afin d'avoir leur vecteurs associés  $g_0$  et  $m_0$  unitaires. Deux jeux de données ont été utilisés pour comparer les performances des observateurs : le premier avec une accélération externe relativement faible, décrivant une personne en train d'écrire un message sur son téléphone et le deuxième avec une accélération externe relativement grande, décrivant quelqu'un en train de courir et dont le téléphone est situé dans une de ses poches.

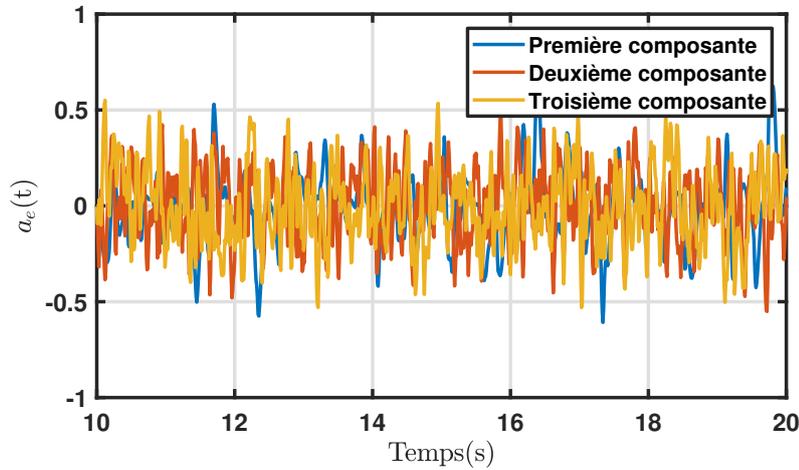


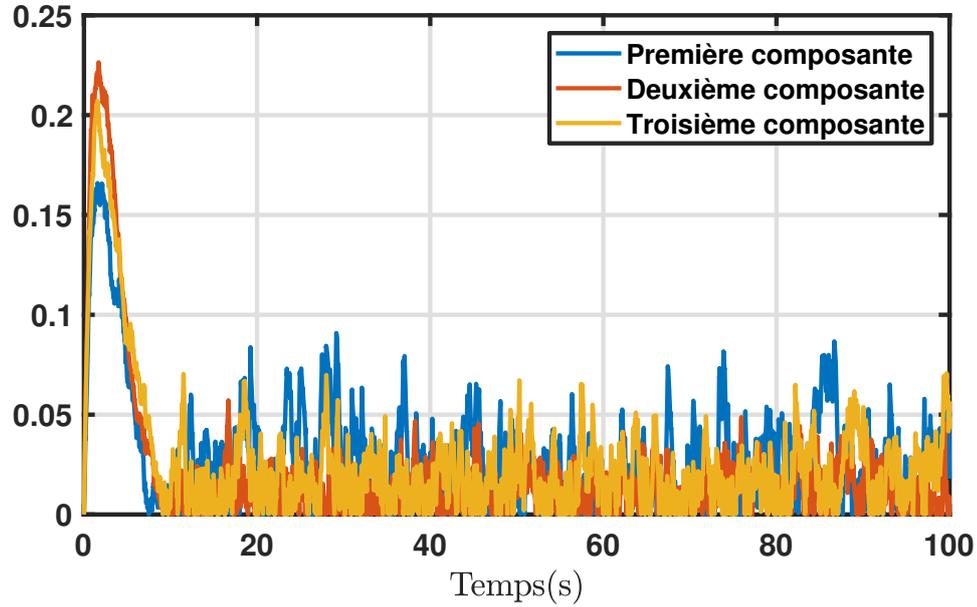
FIGURE 3.5 – Accélération externe de la seconde simulation

Pour ces deux cas de figures, les estimations des deux observateurs ont été comparées avec l'observateur de Mahony et avec l'attitude donnée par le smartphone. Le smartphone en question utilise le système d'exploitation Android.

Pour le premier jeu de données, les erreurs entre les angles d'Euler données par le système Kinovis et celles estimées, ainsi que les erreurs  $\|R - \hat{R}\|$ , sont représentées respectivement figures 3.11 et 3.13. Lorsque le téléphone est utilisé pour écrire un message, les performances des trois observateurs mis en jeu sont similaires et l'algorithme utilisé par le smartphone est un peu moins performant. Les erreurs quadratiques moyennes de l'observateurs 1, de l'observateur 2, de l'observateur de Mahony et de l'algorithme du téléphone sont respectivement  $9.34^\circ$   $9.37^\circ$   $12.07^\circ$  et  $9.48^\circ$ . Ainsi les deux observateurs proposés dans ce chapitre sont ceux qui donnent les meilleures estimations.

Quant au deuxième jeu de données, représentant le mouvement d'une personne ayant son smartphone dans sa poche et qui court, les résultats sont visibles sur les figures 3.12 et 3.14. Il peut être remarqué que les erreurs sont plus élevées dans ce cas mais l'estimation reste de bonne qualité pour les deux observateurs proposés et pour le smartphone. L'observateur de Mahony est celui qui offre l'estimation la moins précise. En effet, les erreurs quadratiques moyennes sont, dans le même ordre que le paragraphe précédent, respectivement  $11.23^\circ$ ,  $11.32^\circ$ ,  $18.30^\circ$  et  $12.18^\circ$ .

L'ensemble des erreurs quadratiques moyennes a été regroupé dans le tableau 3.1.

FIGURE 3.6 – Erreur entre la version filtrée de l'accélération et  $g_0$ 

	Observateur 1	Observateur 2	Observateur Mahony	Smartphone
Simulation 1	1.02	1.21	1.53	×
Simulation 2	1.83	1.97	3.00	×
Simulation 3	2.02	2.16	5.78	×
Application 1	9.34	9.37	12.07	9.48
Application 2	11.23	11.32	18.30	12.18

TABLE 3.1 – Erreurs quadratiques moyennes

### 3.4 Conclusion

Deux observateurs différents ont été présentés dans ce chapitre. Ils permettent d'estimer l'attitude d'un corps rigide même s'il est soumis à une accélération externe. Le premier observateur nécessite une inversion d'une matrice à temps variant. C'est pourquoi un deuxième observateur a été synthétisé permettant d'éviter ce problème. Une étude sur la convergence de ces observateurs a été également proposée.

Le comportement des observateurs a été illustré à travers des exemples utilisant des données construites puis réelles. Elles montrent les bonnes performances des observateurs développés en les comparant avec celles de l'observateur proposé dans MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008). En effet, l'attitude est correctement reconstruite même en présence d'une accélération externe d'amplitude bien supérieure à celle du champ de pesanteur  $g_0$ .

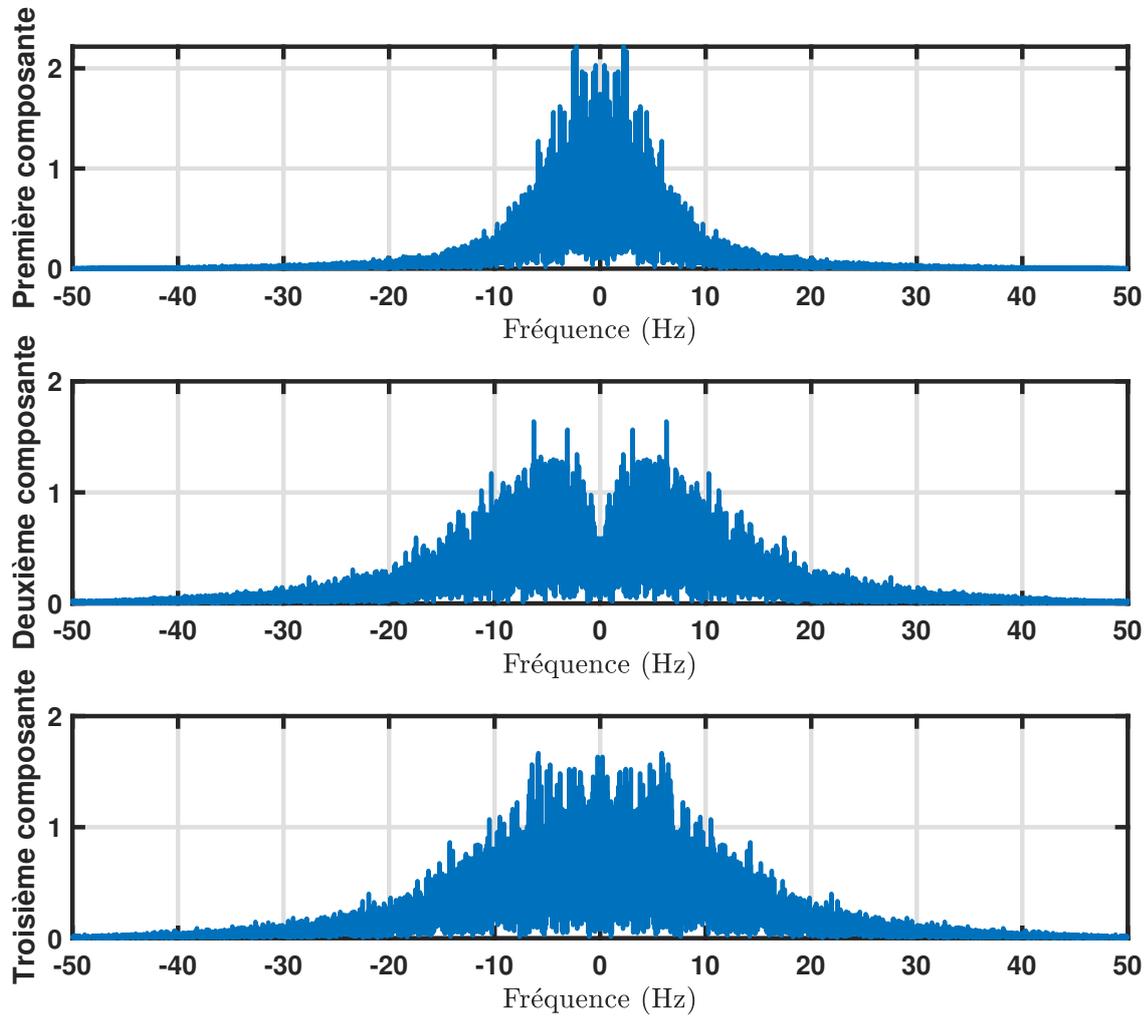


FIGURE 3.7 – Représentation fréquentielle de l'accélération externe

Le principal inconvénient des observateurs proposés repose sur le fait que la matrice de rotation estimée ne respecte pas la géométrie de  $SO(3)$  c'est-à-dire appartient de façon générale à  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  et non spécifiquement à  $SO(3)$ .

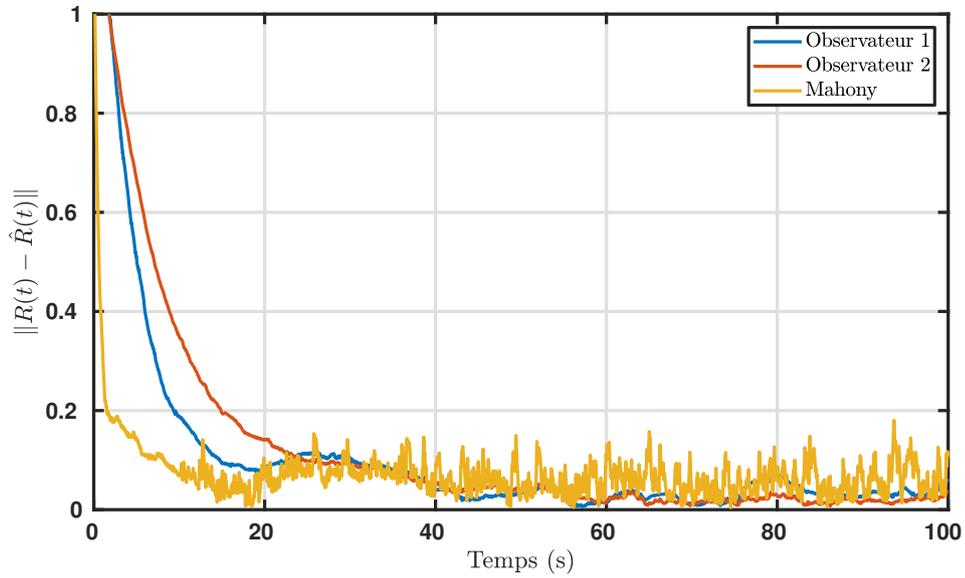


FIGURE 3.8 – Erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  avec une accélération externe d'amplitude moyenne

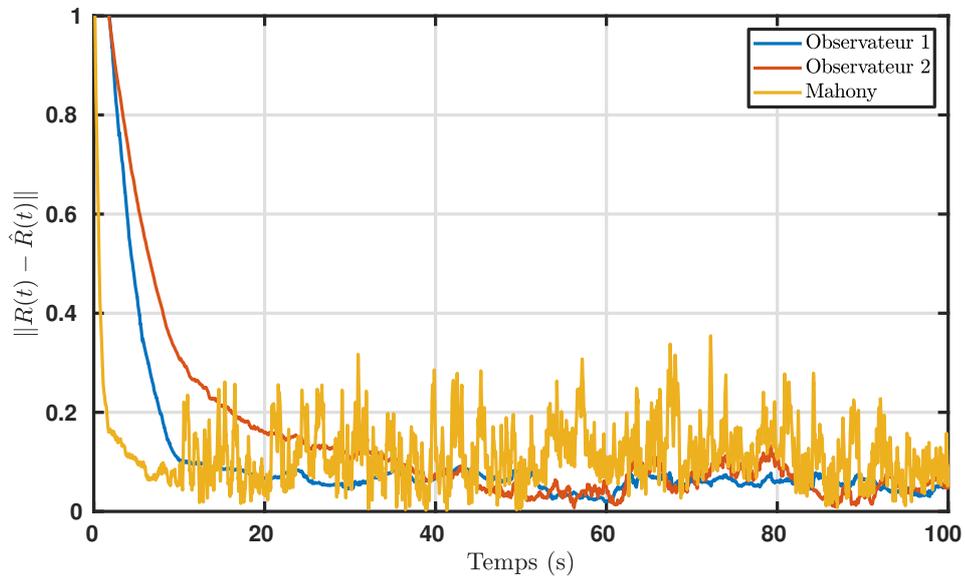


FIGURE 3.9 – Erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  avec une accélération externe d'haute amplitude



FIGURE 3.10 – Salle Kinovis à l’Inria, Grenoble (MICHEL, GENEVÈS, FOURATI et LAYAÏDA (2017))

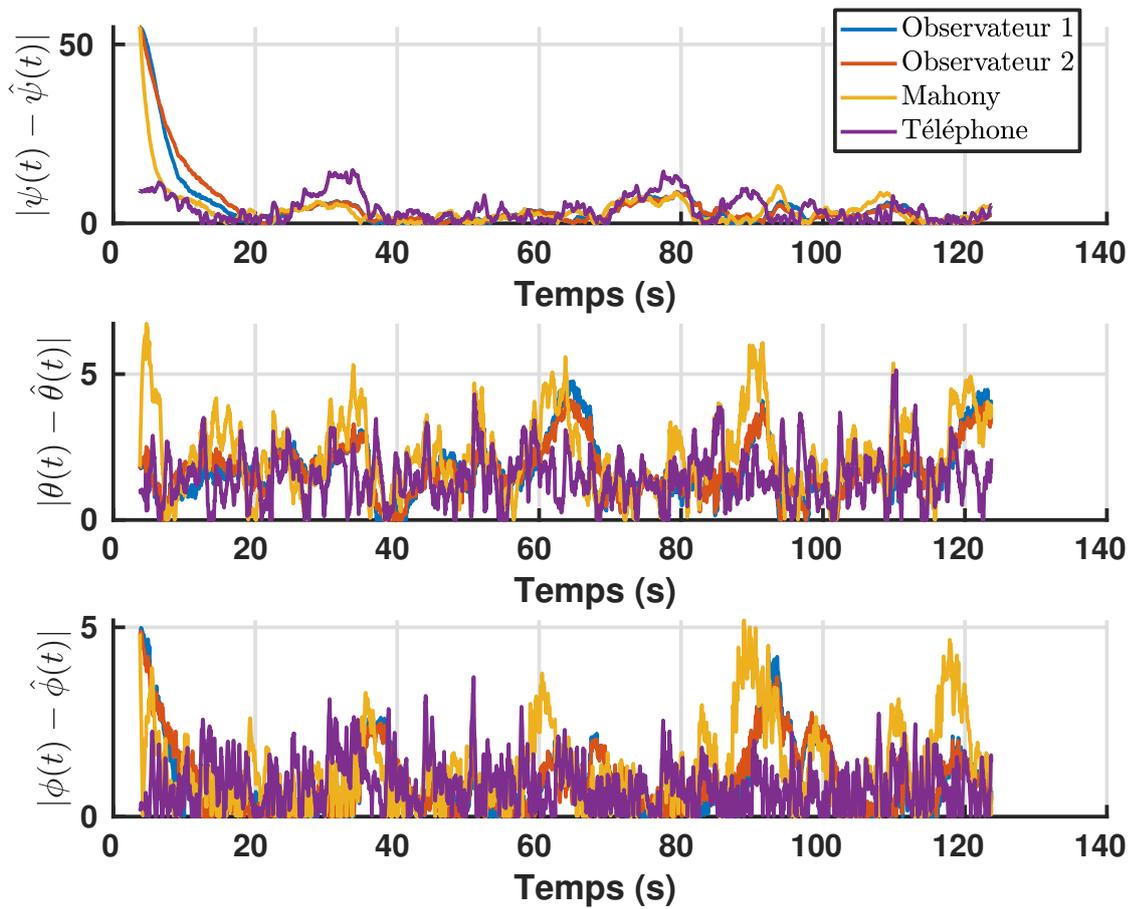


FIGURE 3.11 – Erreurs entre les Angles d’Euler de références et ceux estimés pour le premier jeu de données

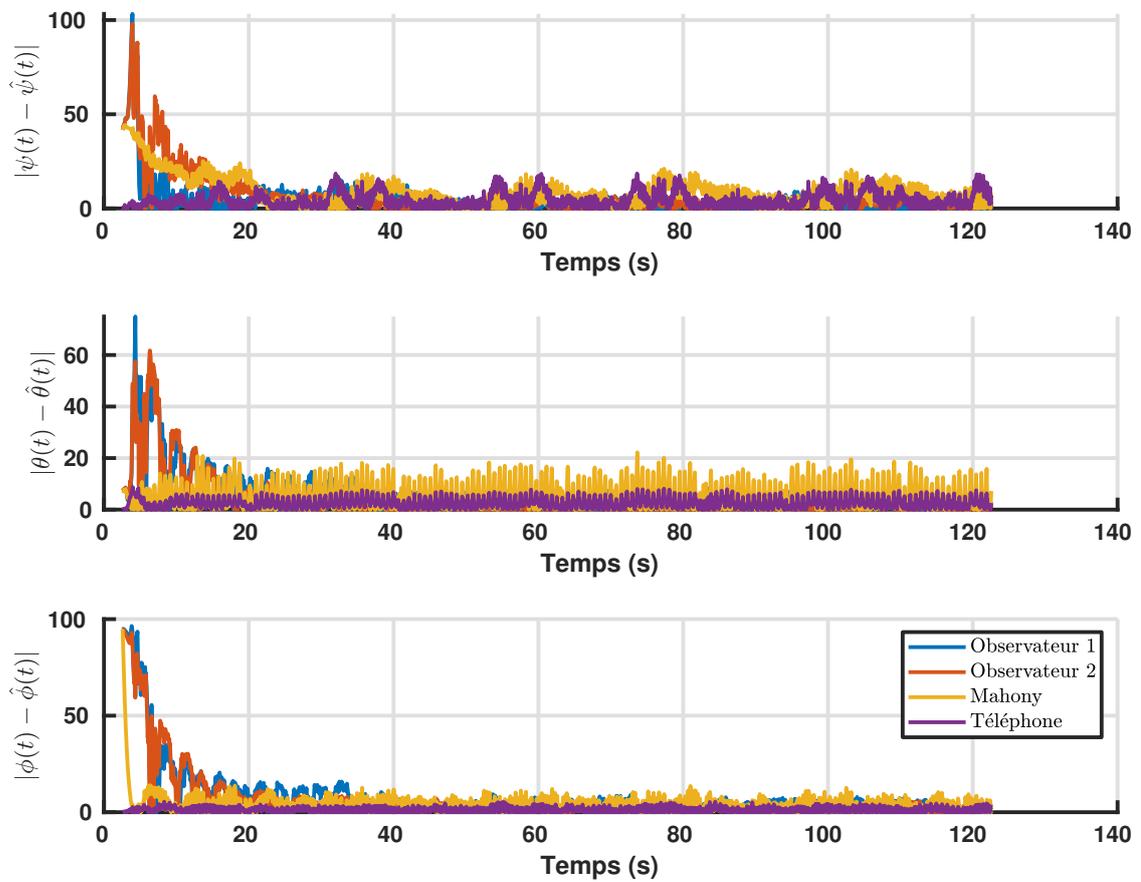


FIGURE 3.12 – Erreurs entre les Angles d'Euler de références et ceux estimés pour le deuxième jeu de données

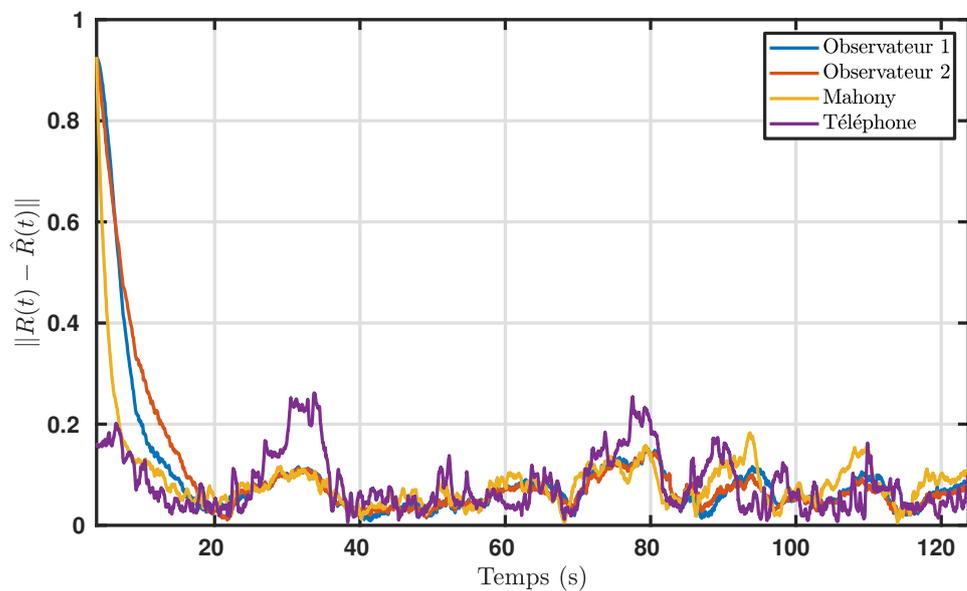


FIGURE 3.13 – Erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  pour le premier jeu de données

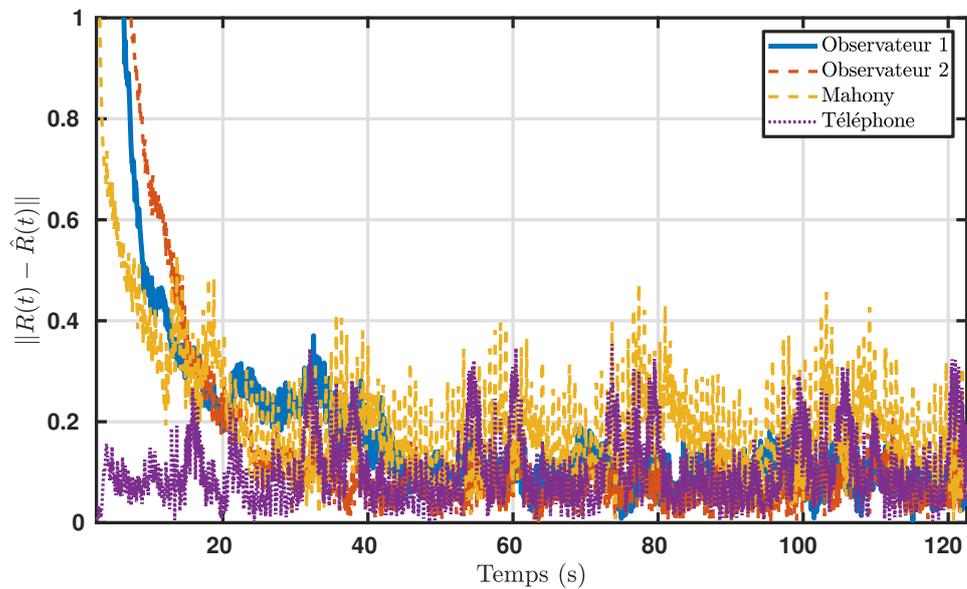


FIGURE 3.14 – Erreurs  $\|R - \hat{R}\|$  pour le deuxième jeu de données

## Chapitre 4

# Observateur adaptatif pour une classe de systèmes non-linéaires incertains avec des sorties multi-échantillonnées - application au problème de l'estimation de l'attitude

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>État de l'art sur l'estimation d'état de systèmes à sorties multi-échantillonnées</b>	<b>57</b>
4.2.1	Observateurs d'état	57
4.2.2	Observateurs adaptatifs	59
<b>4.3</b>	<b>Observateur adaptatif proposé</b>	<b>60</b>
4.3.1	Classe de systèmes considérée	61
4.3.2	Résultats principaux	64
<b>4.4</b>	<b>Application à l'estimation de l'attitude</b>	<b>77</b>
4.4.1	Modèle du système	77
4.4.2	Synthèse de l'observateur	79
4.4.3	Simulations	80
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>

---

## 4.1 Introduction

La synthèse d'observateurs d'états pour des systèmes non-linéaires a été étudiée depuis plusieurs décennies. Ces observateurs permettent d'estimer l'état d'un système non-linéaire en ayant la connaissance de ses entrées et de ses sorties. Lorsqu'un observateur est mis en œuvre dans un contexte réel, il peut être intéressant de prendre en compte, dans la structure de l'observateur, la nature discrète des mesures. En effet, la plupart des observateurs existants dans la littérature prennent en compte seulement des mesures à temps continu, alors qu'en pratique, les mesures ne sont disponibles qu'à certains instants discrets. De plus, lorsque différents capteurs sont utilisés, on peut être amené à considérer plusieurs périodes d'échantillonnages, une pour chaque capteur. En effet, on peut trouver des systèmes non-linéaires avec des sorties multi-échantillonnées dans beaucoup de disciplines. On peut les retrouver, par exemple, dans les centrales inertielles qui regroupent des capteurs qui peuvent avoir des périodes d'échantillonnages asynchrones (NÜTZI, WEISS, SCARAMUZZA et SIEGWART (2011)), ou en imposant une réduction des périodes d'échantillonnages pour réduire la consommation d'énergie (MAKNI, FOURATI et KIBANGOU (2014)). Il est possible aussi de les retrouver pour la détection de défauts (FADALI (2003)). Tout ceci montre l'importance de synthétiser des observateurs permettant d'estimer l'état de systèmes non-linéaires possédant des sorties discrètes.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser particulièrement aux systèmes possédant en plus des paramètres inconnus. Les observateurs permettant d'estimer conjointement l'état d'un système et les paramètres inconnus sont appelés des observateurs adaptatifs. Ces observateurs ont également reçu beaucoup d'attention ces dernières années. Ce type d'observateur est, par exemple, adapté à la problématique de l'estimation de l'attitude. En effet, le biais du gyromètre peut être considéré comme paramètre inconnu et peut ainsi être estimé grâce à un observateur adaptatif.

Ainsi, dans ce chapitre nous allons considérer la synthèse d'observateurs adaptatifs pour des systèmes présentant des sorties multi-échantillonnées. La section 4.2 sera consacrée à l'état de l'art sur les observateurs estimant l'état de systèmes à sorties multi-échantillonnées. La classe de systèmes mise en œuvre ainsi que la synthèse de l'observateur proposé dans ce chapitre seront ensuite présentées dans la section 4.3. Enfin, cet observateur sera appliqué, dans la section 4.4, au problème de l'estimation de l'attitude dans le cas où il y a un biais sur le gyromètre.

## 4.2 État de l'art sur l'estimation d'état de systèmes à sorties multi-échantillonnées

Comme nous l'avons vu précédemment, certains systèmes possèdent des paramètres inconnus. Nous allons voir dans une première partie un état de l'art sur les observateurs d'état, c'est-à-dire permettant d'estimer l'état de systèmes ne présentant pas de paramètres inconnus et la section suivante est consacrée aux observateurs adaptatifs, c'est-à-dire estimant conjointement l'état et les paramètres inconnus.

### 4.2.1 Observateurs d'état

De nombreuses solutions ont été proposées pour estimer l'état d'un système non-linéaire (MOHD ALI, HA HOANG, HUSSAIN et DOCHAIN (2015)). Parmi les nombreuses approches existantes dans le cas de sorties à temps continu, on peut mentionner par exemple les observateurs grand gain (GAUTHIER, HAMMOURI et OTHMAN (1992)), les observateurs pour les systèmes Lipschitz (RAJAMANI (1998)) et les observateurs basés sur le théorème auxiliaire de Lyapounov (KAZANTZIS et KRAVARIS (1998)). Lorsqu'il est question de mesures multi-échantillonnées, il y a principalement deux approches. On peut tout d'abord discrétiser le système mis en jeu et adopter une approche entièrement discrète. Sinon, il est possible d'utiliser une approche hybride en considérant des mesures discrètes et un système à temps continu afin de garder le sens physique du modèle continu du système.

#### Approche par observateurs discrets :

En suivant une approche entièrement discrète, les filtres de Kalman sont souvent utilisés pour répondre à la problématique (SINOPOLI, SCHENATO, FRANCESCHETTI, POOLLA, JORDAN et al. (2004); GOPALAKRISHNAN, KAISARE et NARASIMHAN (2011); LI, SHAH et XIAO (2008)). L'estimation est alors faite en deux étapes, l'étape de prédiction et l'étape de mise à jour. Dans ARMESTO et TORNERO (2004) et ARMESTO, TORNERO et VINCZE (2007), à cause de la nature discrète du système, les mesures doivent être disponibles à des instants périodiques. Deux filtres de Kalman sont également utilisés dans FATEHI et HUANG (2017), le premier pour les instants périodiques et le second pour ceux apériodiques. Un observateur à horizon glissant, basé sur une optimisation, a aussi été considéré dans LÓPEZ-NEGRETE et BIEGLER (2012) pour reconstruire l'état du système. De plus, un observateur a été proposé dans MOARREF et RODRIGUES (2014) en établissant l'hypothèse que les périodes d'échantillonnage de chaque sortie ont un plus grand diviseur commun. Cette méthode peut être difficile à mettre en œuvre en raison de sa forte sensibilité aux

conditions initiales. Un échantillonneur a été utilisé dans BEIKZADEH et MARQUEZ (2014) et LING et KRAVARIS (2017) afin de calculer les sorties entre deux échantillons. Ces sorties estimées sont ensuite utilisées pour estimer l'état.

#### **Approche par observateurs continus-discrets :**

La seconde approche permet d'avoir une estimation en temps continu à partir de données discrètes. Cette continuité peut être utile lors de la mise en œuvre de loi de commande ou à des fins de surveillance de système. Un observateur à gain constant a été proposé dans LING et KRAVARIS (2017), en utilisant la linéarisation exacte du modèle avec le théorème auxiliaire de Lyapounov (KAZANTZIS et KRAVARIS (1998)). En d'autres termes, les auteurs ont utilisé l'équation différentielle exacte à temps continu pour estimer l'état et pour mettre à jour la sortie lorsqu'une donnée est reçue par un capteur. L'inconvénient principal de cette approche réside dans le fait que la plupart des systèmes ne peuvent pas être linéarisés facilement puisqu'il faut résoudre une équation aux dérivées partielles. De plus, la synthèse de l'observateur génère des discontinuités de l'état estimé, ce qui peut ne pas être souhaité lorsque l'état est utilisé pour contrôler le système mis en jeu, par exemple pour le contrôle d'un système mécanique. Un autre observateur a été synthétisé dans SHEN, ZHANG et XIA (2017) pour des systèmes multi-échantillonnés avec des échantillons retardés. Les auteurs utilisent un observateur à gain constant évitant le problème de linéarisation, mais les périodes d'échantillonnages considérées peuvent être trop petites pour être mises en œuvre dans des conditions réelles. Des observateurs continus-discrets de type grand gain ont été également étudiés dans la littérature pour des classes de systèmes ayant une structure triangulaire (BOURAOUI, FARZA, MÉNARD, BEN ABDENNOUR, M'SAAD et al. (2015) ; FARZA, M'SAAD, FALL, PIGEON, GEHAN et al. (2014) ; HERNÁNDEZ-GONZÁLEZ, FARZA, MÉNARD, TARGUI, M'SAAD et al. (2016) ; FARZA, BOURAOUI, MÉNARD, BEN ABDENNOUR et M'SAAD (2014)). De plus, une combinaison d'un observateur à grand gain et d'un filtre de Kalman étendu a été proposée dans FEDDAOUI, BOIZOT, BUSVELLE et HUGEL (2018) et SEBESTA et BOIZOT (2014), estimant l'état en temps continu. Il combine les matrices de covariances des bruits de processus et des bruits de mesures du filtre de Kalman classique avec des paramètres du grand gain. Ceci permet de réduire l'effet du bruit tout en gardant les avantages de l'approche grand gain. Cependant, l'observateur peut entraîner des discontinuités dans l'état estimé.

### 4.2.2 Observateurs adaptatifs

Lorsqu'un système possède des paramètres inconnus, il est envisageable de mettre en œuvre un observateur adaptatif pour estimer l'état et ces paramètres. Dans la majorité des cas, les paramètres sont considérés constants lorsqu'il est question d'observateur adaptatif. C'est pourquoi les observateurs adaptatifs présentés dans ce chapitre ne prennent en compte que des paramètres constants.

#### Sorties disponibles à temps continu :

La plupart des travaux dédiés aux observateurs adaptatifs considèrent des systèmes dont les sorties sont disponibles à temps continu. Parmi les premières contributions, on retrouve celles consacrées aux systèmes linéaires invariants dans le temps tels que KREISSELMEIER (1977) et LUDERS et NARENDRA (1973) et par la suite celles consacrées aux systèmes linéaires variants dans le temps (ZHANG et CLAVEL (2001); ZHANG (2002)).

Un nombre important d'articles a traité de systèmes non-linéaires avec un paramétrage linéaire. Une idée consiste à chercher des nouvelles coordonnées où la dynamique de l'erreur est linéaire. Ces changements de coordonnées permettent généralement de transformer le système sous forme canonique (BASTIN et GEVERS (1988); MARINO et TOMEI (1991); MARINO, SANTOSUOSSO et TOMEI (2001)).

Par la suite, la considération de classes plus grandes, comprenant des systèmes avec un paramétrage non-linéaire, a reçu beaucoup d'attention. Parmi les études traitant de ce sujet, les auteurs de LOH, ANNASWAMY et SKANTZE (1999) ont utilisé un algorithme d'optimisation MinMax permettant d'éviter les limites de la méthode de descente du gradient pour les systèmes adaptatifs ayant un paramétrage concave/convexe. De façon similaire, une approche d'optimisation a été utilisée pour un contrôle adaptatif dans LOH, ANNASWAMY et SKANTZE (1999). Des observateurs grand gain ont été proposés pour des systèmes possédant une structure triangulaire. Ces observateurs ont, en effet, été considérés pour des systèmes mono-entrée mono-sortie dans GRIP, SABERI et JOHANSEN (2011) et dans MENARD, MAUCHE, TARGUI, BOURAOUI, FARZA et al. (2014), et pour des systèmes multi-entrées multi-sorties dans FARZA, M'SAAD, MÉNARD, LTAIEF et MAATOUG (2018). Un observateur se basant sur le concept des ensembles faiblement attractifs a aussi été présenté dans TYUKIN, STEUR, NIJMEIJER et LEEUWEN (2013). Cependant, la convergence asymptotique de ce dernier observateur n'est pas garantie.

#### Sorties disponibles à temps discret :

Bien que la plupart des travaux concernent les mesures à temps continus, pour des systèmes réels, seulement des données à des instants discrets sont fournis par les capteurs.

Une approche entièrement discrète permettant de reconstruire conjointement l'état et les paramètres inconnus en temps discret a été mise en œuvre pour des systèmes linéaires (GUYADER et ZHANG (2003)) et pour des systèmes non-linéaires (CACCAVALE, PIERRI et VILLANI (2008); SRINIVASARENGAN, RAGOT, AUBRUN et MAQUIN (2018)).

Une autre approche permet d'estimer en temps continu l'état à partir du modèle continu et en utilisant des mesures discrètes. Ceci permet d'obtenir une convergence globale dans beaucoup de cas, contrairement à l'approche entièrement discrète qui, typiquement, n'assure qu'une convergence semi-globale (ARCAK et NEŠIĆ (2004)). Ainsi, plusieurs observateurs estimant l'état en continu à partir des données discrètes ont été proposés. En effet, une classe de systèmes affines multi-entrées multi-sorties avec un paramétrage linéaire a été considérée dans HANN et AHMED-ALI (2014) et une classe de systèmes affine mono-entrée mono-sortie avec un paramétrage non-linéaire a été étudiée dans FARZA, BOURAOUI, MÉNARD, BEN ABDENNOUR et M'SAAD (2014). Un observateur adaptatif a été synthétisé, de façon similaire, pour une classe de systèmes entrées multiples sorties multiples dans ZHAO et HUA (2017).

### 4.3 Observateur adaptatif proposé

Dans tous les travaux mentionnés dans l'état de l'art, la convergence a été obtenue pour de larges classes de systèmes, cependant aucune incertitude dans la dynamique n'a été considérée alors que c'est relativement courant en pratique. De plus, les sorties sont supposées être synchronisées, ce qui veut dire que les mesures des différentes sorties doivent être obtenues aux mêmes instants d'échantillonnage. Ceci peut ne pas être le cas en pratique lorsque les capteurs mis en jeu ne sont pas synchronisés ou ont des périodes d'échantillonnage différentes. Ainsi, dans ce chapitre, on considère la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes multi-entrées multi-sorties, uniformément observable, avec une structure triangulaire, une dynamique comprenant des incertitudes et des sorties multi-échantillonnées. De plus, ces sorties peuvent être asynchrones et peuvent avoir des instants d'échantillonnages irréguliers. L'observateur proposé dans ce chapitre estime en temps continu l'état du système à partir de données discrètes, en utilisant une approche de type grand gain. La convergence exponentielle est prouvée à l'aide d'une approche utilisant des fonctions de Lyapounov sous une condition d'excitation persistante et en supposant que, pour chaque sortie, la période d'échantillonnage correspondante peut être majorée par une borne donnée. Un des avantages de cette approche réside dans le fait qu'il est assez facile de la mettre en œuvre puisqu'il y a seulement quelques paramètres de synthèse.

Pour le reste de ce chapitre, on note respectivement  $\lambda_{\min}(M)$  et  $\lambda_{\max}(M)$  la valeur propre minimale et maximale de  $M$ , où  $M$  est une matrice carrée symétrique. Pour une fonction continue  $t \mapsto M(t)$  où pour tout  $t \geq 0$ ,  $M(t)$  est une matrice symétrique, on note  $\bar{\lambda}_{\max}(M) = \sup_{t \geq 0} \lambda_{\max}(M(t))$  et  $\underline{\lambda}_{\min}(M) = \inf_{t \geq 0} \lambda_{\min}(M(t))$ .

### 4.3.1 Classe de systèmes considérée

On considère, dans ce chapitre, la classe de systèmes non-linéaires dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Psi(u(t), x(t))\rho + g(u(t), x(t), \rho) + B\varepsilon(t) \quad (4.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée,  $\rho \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des paramètres inconnus et  $\varepsilon \in \mathbb{R}^q$  l'incertitude inconnue variant dans le temps.

De plus, on suppose que l'état  $x$ , le vecteur de paramètres inconnus  $\rho$  et les incertitudes  $\varepsilon$  peuvent être décomposés de la façon suivante

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{bmatrix} \text{ avec } x^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_{\lambda_i}^i \end{bmatrix}, \quad x_j^i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, \lambda_i, \quad (4.2)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho^1 \\ \vdots \\ \rho^q \end{bmatrix}, \quad \rho^i = \begin{bmatrix} \rho_1^i \\ \vdots \\ \rho_{p_i}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_i}, \quad i = 1, \dots, q, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^q \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon^i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad (4.3)$$

et que la dynamique de chaque sous vecteur  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, q$  est donnée par :

$$\dot{x}^i = \begin{cases} A^i x^i + \Psi^i(u, x)\rho^i + g^i(u, x, \rho) + B^i \varepsilon^i, & \text{si } \rho^i \text{ n'est pas vide} \\ A^i x^i + g^i(u, x, \rho) + B^i \varepsilon^i, & \text{si } \rho^i \text{ est vide} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$A^i = \begin{bmatrix} 0_{n_i} & I_{n_i} & 0_{n_i} & \cdots & 0_{n_i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_{n_i} \\ \vdots & & & \ddots & I_{n_i} \\ 0_{n_i} & \cdots & \cdots & \cdots & 0_{n_i} \end{bmatrix}, \quad B^i = \begin{bmatrix} 0_{n_i} \\ \vdots \\ 0_{n_i} \\ I_{n_i} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\Psi^i = \begin{bmatrix} \Psi_{1,1}^i & \cdots & \Psi_{1,p_i}^i \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_{\lambda_i,1}^i & \cdots & \Psi_{\lambda_i,p_i}^i \end{bmatrix} \text{ avec } \Psi_{j,l}^i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad g^i = \begin{bmatrix} g_1^i \\ \vdots \\ g_{\lambda_i}^i \end{bmatrix} \text{ avec } g_j^i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad (4.6)$$

**Remarque 4.1.** On peut noter que  $\rho^i$  contient les sous-composantes de  $\rho$  qui ne sont pas présentes dans les dynamiques des  $x^1, \dots, x^{i-1}$  et qui apparaissent pour la première fois dans les dynamiques des  $x^i$ . Ainsi, des  $\rho^i$  peuvent être vides si aucun nouveau paramètre n'apparaît dans les dynamiques des  $x^i$ . De plus, lorsqu'un nouveau paramètre inconnu apparaît, il est supposé apparaître de façon linéaire.

#### 4.3.1.1 Structure des non-linéarités

Soit  $i \in \{1, \dots, q\}$ , détaillons maintenant la structure des fonctions non-linéaires  $\Psi^i$  et  $g^i$  présentes dans les dynamiques des  $x^i$ . Plus précisément, spécifions la dépendance de  $\Psi^i$  et de  $g^i$  par rapport à l'état  $x$  et aux paramètres inconnus  $\rho$ .

Premièrement, les fonctions  $\Psi^i$  et  $g^i$  sont supposées avoir une structure triangulaire selon l'état  $x$  à la fois par rapport aux sous-états  $x^1, \dots, x^q$  et pour tous les sous-états  $x^i$  par rapport à  $x_1^i, \dots, x_{\lambda_i}^i$ , c'est-à-dire, pour  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, \lambda_i$ ,  $l = 1, \dots, p_i$  :

$$g_j^i(u, x, \rho) = g_j^i(u, x^1, \dots, x^{i-1}, x_1^i, \dots, x_j^i, \rho) \quad (4.7)$$

$$\Psi_{j,l}^i(u, x) = \Psi_{j,l}^i(u, x^1, \dots, x^{i-1}, x_1^i, \dots, x_j^i) \quad (4.8)$$

Afin de détailler la structure de  $g^i$  selon les paramètres inconnus  $\rho$ , introduisons tout d'abord les indices  $\nu_l^i \in \mathbb{N}$ ,  $l = 1, \dots, p_i$ , représentant les sous-composantes de  $x_{\nu_l^i}^i$  où  $\rho_l^i$  apparaît pour la première fois, c'est-à-dire tel que

$$\Psi_{\nu_l^i, l}^i \neq 0 \text{ et } \Psi_{j, l}^i \equiv 0 \text{ si } j \neq \nu_l^i \quad (4.9)$$

Similairement à la structure des non-linéarités par rapport à l'état, la fonction  $g^i$  est supposée avoir une structure triangulaire par rapport aux sous-composantes  $\rho^1, \dots, \rho^q$  et une structure spécifique pour chaque sous-composante par rapport à  $\rho_1^i, \dots, \rho_{p_i}^i$ , c'est-à-dire, pour  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, \lambda_i$ ,  $l = 1, \dots, p_i$  :

$$\frac{\partial g_j^i}{\partial \rho^k}(u, x, \rho) \equiv 0 \text{ si } k > i \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_j^i}{\partial \rho_l^i}(u, x, \rho) \equiv 0 \text{ si } \nu_l^i \geq j \quad (4.10)$$

**Remarque 4.2.** La première condition de (4.10) veut dire que  $g_j^i$  ne peut pas dépendre des sous-composantes de  $\rho$  qui ne sont pas apparues linéairement pour la première fois dans les dynamiques des  $x^1, \dots, x^i$  alors que la deuxième condition exprime le fait que  $g_j^i$  ne peut pas dépendre des sous-composantes des  $\rho^i$  qui ne sont pas apparues linéairement pour la première fois dans les dynamiques des  $x_1^i, \dots, x_{j-1}^i$ .

#### 4.3.1.2 Mesures de la classe de systèmes considérée

On suppose que seules les premières sous-composantes  $x_1^i$  de chaque sous-état  $x^i$  sont mesurées. C'est-à-dire, les sorties mesurées  $y^i \in \mathbb{R}^{n_i}$  sont données par

$$y^i = x_1^i = C^i x^i, \text{ avec } C^i = \begin{bmatrix} I_{n_i} & 0_{n_i} & \dots & 0_{n_i} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

De plus, chaque sortie est supposée être échantillonnée à des instants indépendants et possiblement irréguliers, c'est-à-dire :

$$y^1(t_l^1) = C^1 x^1(t_l^1) \quad (4.12)$$

⋮

$$y^q(t_l^q) = C^q x^q(t_l^q) \quad (4.13)$$

pour  $l \in \mathbb{N}$ , et les instants d'échantillonnages sont supposés vérifiés

$$t_0^1 < t_1^1 < t_2^1 < \dots, \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} t_l^1 = +\infty \text{ et } |t_{l+1}^1 - t_l^1| < \tau_M^1 \quad (4.14)$$

⋮

$$t_0^q < t_1^q < t_2^q < \dots, \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} t_l^q = +\infty \text{ et } |t_{l+1}^q - t_l^q| < \tau_M^q \quad (4.15)$$

avec  $\tau_M^i = \sup_l t_{l+1}^i - t_l^i$ .

### 4.3.2 Résultats principaux

Nous allons maintenant exposer les résultats principaux de ce chapitre. Dans un premier temps, les paramètres et la synthèse de l'observateur vont être introduits. Ensuite, la preuve de convergence de l'observateur proposé va être présentée.

#### 4.3.2.1 Synthèse de l'observateur

Afin de synthétiser l'observateur qui reconstruit conjointement l'état et les paramètres inconnus du système (4.1), nous devons, tout d'abord, introduire quelques notations.

Premièrement, définissons une suite d'entiers  $(\delta_k)_{k=1,\dots,q}$  qui sera utilisée dans la synthèse de l'observateur :

$$— \delta_k \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, q \text{ est définie telle que } \delta_q = 1 \text{ et } \delta_k \geq \lambda_{k+1} \delta_{k+1}.$$

De plus, définissons

$$— \Delta_i(\theta) = \text{diag} \left( I_{n_i}, \frac{1}{\theta^{\delta_i}} I_{n_i}, \dots, \frac{1}{\theta^{\delta_i(\lambda_i-1)}} I_{n_i} \right)$$

$$— \Omega_i(\theta) = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta^{\delta_i \nu_1^i}}, \dots, \frac{1}{\theta^{\delta_i \nu_{p_i}^i}} \right)$$

avec  $\theta$  un paramètre de l'observateur.

Présentons maintenant quelques identités qui seront utilisées dans la preuve de convergence. La démonstration de ces identités est directe, en utilisant la définition des matrices mises en jeu, et est donc omise.

**Proposition 4.1.** *Les identités suivantes sont vérifiées pour  $i = 1, \dots, q$  :*

1.  $C^i \Delta_i^{-1}(\theta) = C^i$ ,
2.  $\Delta_i(\theta) A^i \Delta_i^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_i} A^i$ ,
3.  $\Delta_i(\theta) B^i = \frac{1}{\theta^{\delta_i(\lambda_i-1)}} B^i$ ,
4.  $\Delta_i(\theta) \Psi^i \Omega_i^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_i} \Psi^i$ .

L'état de l'observateur est donné par  $\hat{x} = \left[ \hat{x}^{1T} \quad \dots \quad \hat{x}^{qT} \right]^T \in \mathbb{R}^n$  avec  $\hat{x}^i \in \mathbb{R}^{\lambda_i n_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

Ainsi, pour  $i = 1, \dots, q$  et  $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$

— si  $\rho^i$  n'est pas vide, la dynamique de  $\hat{x}^i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}^i(t) &= A^i \hat{x}^i(t) + \Psi^i(u(t), \hat{x}(t)) \hat{\rho}^i(t) + g^i(u(t), \hat{x}(t), \hat{\rho}(t)) \\ &\quad - \theta^{\delta_i} \Delta_i^{-1}(\theta) \left( S_i^{-1} + \Upsilon^i(t) P_i(t) \Upsilon^{iT}(t) \right) C^{iT} \varrho^i(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\dot{\hat{\rho}}^i(t) = -\theta^{\delta_i} \Omega_i^{-1}(\theta) P_i(t) \Upsilon^{iT} C^{iT} \varrho^i(t) \quad (4.17)$$

$$\dot{\varrho}^i(t) = -\theta^{\delta_i} C^i (S_i^{-1} + \Upsilon^i(t) P_i(t) \Upsilon^{iT}(t)) C^{iT} \varrho^i(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{\Upsilon}^i(t) = \theta^{\delta_i} \left( A^i - S_i^{-1} C^{iT} C^i \right) \Upsilon^i(t) + \theta^{\delta_i} \Psi^i(u(t), \hat{x}(t)) \quad (4.19)$$

$$\dot{P}_i(t) = -\theta^{\delta_i} P_i(t) \Upsilon^{iT}(t) C^{iT} C^i \Upsilon^i(t) P_i(t) + \theta^{\delta_i} P_i(t) \quad (4.20)$$

avec  $\varrho_i(t_k^i) = (\hat{x}_1^i(t_k^i) - y^i(t_k^i))$ ,  $\Upsilon^i(0) = 0$ ,  $P_i(0) = P_i^T(0) > 0$ ,  $\hat{x}^i(0) \in \mathbb{R}^{\lambda_i n_i}$  et  $\hat{\rho}^i(0) \in \mathbb{R}^{p_i}$  qui peuvent être choisis arbitrairement.

— si  $\rho^i$  est vide, la dynamique de  $\hat{x}^i$  est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}^i(t) = A^i \hat{x}^i(t) + g^i(u(t), \hat{x}(t), \hat{\rho}(t)) - \theta^{\delta_i} \Delta_i^{-1}(\theta) S_i^{-1} C^{iT} e^{-\theta^{\delta_i} \Gamma_1^i(t-t_k^i)} (\hat{x}_1^i(t_k^i) - y^i(t_k^i)) \quad (4.21)$$

avec  $\hat{x}^i(0) \in \mathbb{R}^{\lambda_i n_i}$  et  $\hat{\rho}^i(0) \in \mathbb{R}^{p_i}$  qui peuvent être choisis arbitrairement.

La matrice  $S_i$  est la matrice symétrique définie positive solution de

$$S_i + S_i A^{iT} + S_i A^i - C^{iT} C^i = 0 \quad (4.22)$$

De plus, on peut montrer que  $\Gamma^i = S_i^{-1} C^{iT}$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma^i = \begin{bmatrix} \Gamma_1^i I_{n_i} \\ \vdots \\ \Gamma_{\lambda_i}^i I_{n_i} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec  $\Gamma_k^i = \binom{\lambda_i}{k} = \frac{\lambda_i!}{k!(\lambda_i-k)!} \in \mathbb{R}$  le coefficient binomial.

**Remarque 4.3.** Les équations (4.16) et (4.21) peuvent sembler différentes, mais il peut être noté que si  $\Psi^i \equiv 0$  dans (4.16), alors les équations (4.16) et (4.21) sont strictement équivalentes. En effet, étant donné la structure de  $\Gamma_i$ , on peut montrer que si  $\Psi^i \equiv 0$ , alors  $\varrho^i(t) = e^{-\theta^{\delta_i} \Gamma_1^i(t-t_k^i)} (\hat{x}_1^i(t_k^i) - y^i(t_k^i))$  pour  $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$ .

### 4.3.2.2 Résultat de convergence

Afin d'obtenir la convergence de l'observateur proposé, quelques hypothèses doivent être supposées sur le système (4.1) et en particulier l'observabilité des paramètres inconnus .

**Hypothèse 4.1.** *L'état  $x$ , l'entrée  $u$  et les paramètres inconnus  $\rho$  sont bornés, c'est-à-dire, il existe des ensembles compacts  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,  $x(t) \in \mathbf{X}$ ,  $u(t) \in \mathbf{U}$  et  $\rho \in \Lambda$ .*

**Hypothèse 4.2.** *Les fonctions  $\Psi^i(u, x)$  sont continues sur  $\mathbf{U} \times \mathbf{X}$  et bornées en dehors de  $\mathbf{U} \times \mathbf{X}$ .*

**Hypothèse 4.3.** *Les fonctions  $g^i(u, x, \rho)$  sont Lipschitz par rapport à  $(x, \rho)$  uniformément par rapport à  $u$ . Leurs constantes de Lipschitz sont notées  $L_g^i$ .*

**Hypothèse 4.4.** *Les fonctions  $\Psi^i(u, x)$  sont Lipschitz par rapport à  $x$  uniformément par rapport à  $u$ . Leurs constantes de Lipschitz sont notées  $L_\Psi^i$ .*

**Hypothèse 4.5.** *Les incertitudes sont bornées, c'est-à-dire, pour  $i = 1, \dots, q$ , il existe  $\kappa_\varepsilon^i \geq 0$  tel que*

$$\|\varepsilon^i(t)\| \leq \kappa_\varepsilon^i, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.24)$$

**Remarque 4.4.** *Pour le reste du chapitre, la notation suivante sera utilisée :*

$$\Psi_{\max}^i = \sup_{t \geq 0} \|\Psi^i(u(t), \hat{x}(t))\| \quad (4.25)$$

$$\rho_{\max}^i = \max_{l=1, \dots, p_i} |\rho_l^i| \quad (4.26)$$

**Hypothèse 4.6.** *Pour  $i = 1, \dots, q$  tel que  $\rho^i$  n'est pas vide, l'entrée  $u$  est telle que pour n'importe quelle trajectoire du système (4.16)-(4.20) partant de  $(\hat{x}(0), \hat{\rho}(0)) \in \mathbf{X} \times \Lambda$ , la matrice  $C^i \Upsilon^i(t)$  est à excitation persistante. C'est-à-dire, il existe des constantes  $\bar{\gamma}$  et  $\underline{\gamma}$  (indépendantes de  $\theta$ ) et  $T > 0$  telles que pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\underline{\gamma} I_{n_i} \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^{iT}(s) C^{iT} C^i \Upsilon^i(s) ds \leq \bar{\gamma} I_{n_i} \quad (4.27)$$

**Remarque 4.5.** *L'hypothèse 4.6 implique que les matrices  $P_i$  sont symétriques définies positives et que pour  $i = 1, \dots, q$  tel que  $\rho^i$  n'est pas vide, il existe  $\gamma_i > 0$  (indépendant de  $\theta$ ) tel que*

$$\lambda_{\min}(P_i^{-1}) \geq \gamma_i, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.28)$$

Pour plus de détail concernant ce résultat, voir FARZA, M'SAAD, MAATOUG et KAMOUN (2009) et ZHANG et CLAVEL (2001).

Nous pouvons maintenant établir le résultat de convergence de l'observateur proposé dans ce chapitre.

**Théorème 4.1.** *Considérons le système (4.4) sous les hypothèses 4.1 à 4.6. On suppose que  $\theta \geq 1$  vérifie pour  $i = 1, \dots, q$*

$$\frac{\theta^{\delta_i}}{4} \geq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} L_g^i \sqrt{\lambda_i (1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2)}}{\sqrt{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)}} + \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \sqrt{\lambda_i} \max(1, \Upsilon_{\max}^i)}{\sqrt{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)}} \quad (4.29)$$

avec  $\lambda_i$  le nombre de sous-composantes du  $i$ -ième bloc de l'état  $x^i$ ,  $\Upsilon_{\max}^i$  la borne supérieure de  $\Upsilon^i$ ,  $L_g^i$  la constante de Lipschitz de  $g^i$ ,  $L_{\Psi}^i$  la constante de Lipschitz de  $\Psi^i$ ,  $\rho_{\max}^i$  la valeur maximale de  $|\rho_t^i|$  et  $\gamma_i$  définie dans (4.28). Si, pour chaque bloc  $i = 1, \dots, q$ , la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M^i$  est choisie telle que

$$\tau_M^i < \frac{8 + \min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)}{(\theta^{\delta_i} (\max(1, \Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i)) + L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \max(1, \Upsilon_{\max}^i)) \sqrt{2}} \quad (4.30)$$

avec  $\Psi_{\max}^i$  la borne supérieure de  $\Psi^i$ , alors il existe  $\alpha^i(\theta) \geq 0$  et  $\beta^i \geq 0$ , avec  $\beta^i$  indépendant de  $\theta$  et des incertitudes, tel que l'inégalité suivante est vérifiée

$$(\|\tilde{x}^i(t)\| + \|\tilde{\rho}^i(t)\|) \leq \alpha^i(\theta) e^{-\frac{\theta^{\delta_i}}{8} t} + \theta^{-\delta_i} \beta^i (\kappa_{\varepsilon}^1 + \dots + \kappa_{\varepsilon}^i) \quad (4.31)$$

avec  $\tilde{x}^i = \hat{x}^i - x^i$ ,  $\tilde{\rho}^i = \hat{\rho}^i - \rho^i$  et  $\kappa_{\varepsilon}^i$  la borne supérieure de  $\varepsilon^i$ .

Avant de procéder à la preuve de ce théorème, des lemmes techniques nécessaires à la preuve de convergence doivent être d'abord présentés.

**Lemme 4.1.** *Pour chaque  $i = 1, \dots, q$  tel que  $\rho^i$  n'est pas vide, le vecteur correspondant  $\Upsilon^i$  est de norme bornée, c'est-à-dire*

$$\Upsilon_{\max}^i = \sup_{t \geq 0} \|\Upsilon_i(u(t), \hat{x}(t))\| < +\infty \quad (4.32)$$

*Démonstration.* Soit le changement de variable tel que

$$\tilde{\Upsilon}^i(t) = \Upsilon^i\left(\frac{t}{\theta^{\delta_i}}\right). \quad (4.33)$$

Ainsi, la dynamique de  $\tilde{\Upsilon}^i$  est donnée par

$$\dot{\tilde{\Upsilon}}^i(t) = (A^i - S_i^{-1}C^{iT}C^i)\tilde{\Upsilon}^i(t) + \Psi^i\left(u\left(\frac{t}{\theta^{\delta_i}}\right), \hat{x}\left(\frac{t}{\theta^{\delta_i}}\right)\right). \quad (4.34)$$

Ce qui permet de montrer que

$$\tilde{\Upsilon}^i(t) = e^{\bar{A}^i t}\tilde{\Upsilon}^i(0) + \int_0^t e^{\bar{A}^i(t-s)}\Psi^i\left(u\left(\frac{s}{\theta^{\delta_i}}\right), \hat{x}\left(\frac{s}{\theta^{\delta_i}}\right)\right) ds \quad (4.35)$$

où  $\bar{A}^i = A^i - S_i^{-1}C^{iT}C^i$ .

Comme, d'après l'hypothèse 4.2, la fonction  $\Psi^i$  est de norme bornée et comme la matrice  $\bar{A}^i$  est Hurwitz,  $\tilde{\Upsilon}^i$  est bornée et sa borne supérieure est indépendante de  $\theta$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 4.2.** Soit  $w : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  vérifiant l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}(w^2(t)) \leq -aw^2(t) + b \int_{t-\tau}^t w^2(s)ds + ce^{-dt} + k \quad (4.36)$$

avec  $a > 0, b \geq 0, \tau > 0, c \geq 0, d > 0, k \geq 0$  et  $\tau < \min\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{a}{b}, \frac{1}{\sqrt{2}a}\right)$ . Alors il existe  $\bar{\alpha} \geq 0$  tel que l'inégalité suivante est vérifiée

$$w(t)^2 \leq \bar{\alpha}e^{-\bar{\beta}t} + \frac{2k}{a} \quad (4.37)$$

où  $\bar{\beta} = \min\left(\frac{a}{2}, d\right)$ .

*Démonstration.* Traitons tout d'abord du cas  $b = 0$ . On a ainsi

$$\frac{d}{dt}(w^2(t)) \leq -aw^2(t) + ce^{-dt} + k \quad (4.38)$$

Définissons maintenant la fonction de Lyapounov candidate suivante

$$\Theta(w) = w^2(t) \quad (4.39)$$

Sa dérivée peut être majorée de la façon suivante

$$\dot{\Theta}(w) \leq -\frac{a}{2}\Theta(w) + ce^{-dt} + k \quad (4.40)$$

La résolution de l'équation  $\dot{y}(t) = -\frac{a}{2}y(t) + ce^{-dt} + k$  et l'application du lemme de comparaison 3.1 montrent le résultat pour  $b = 0$ .

Considérons maintenant le cas  $b > 0$ , notons  $\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = \frac{b}{a} \left( \frac{e^{\alpha\tau} - 1}{\alpha} \right)$  and  $\gamma = 1 - \beta$ , ainsi, on a

$$0 < \beta \leq \frac{b}{a} \left( \frac{1 + \sqrt{2}\alpha\tau - 1}{\alpha} \right) \quad (4.41)$$

$$\leq \frac{b}{a} \sqrt{2}\tau \quad (4.42)$$

$$\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.43)$$

L'inégalité (4.41) est obtenue en utilisant le fait que

$$e^x \leq 1 + \sqrt{2}x, \quad \forall x \in \left( 0, \frac{1}{2} \right) \quad (4.44)$$

et comme  $\tau$  est choisi de façon à avoir  $\tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}a}$ , cela assure que  $\alpha\tau \in \left( 0, \frac{1}{2} \right)$ . L'inégalité (4.43) est obtenue en utilisant le fait que  $\tau$  est choisi tel que  $\tau \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{a}{b}$ .

On a prouvé jusqu'à maintenant que  $\beta \in \left( 0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ , ce qui implique directement que  $\gamma \in \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ .

Définissons maintenant la fonction de Lyapounov candidate suivante

$$\Theta(w_t) = w^2(t) + b \int_0^\tau \int_{t-s}^t e^{\gamma\alpha(\nu-t+s)} w^2(\nu) d\nu ds \quad (4.45)$$

où  $w_t(s) = w(t+s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ . Ainsi, sa dérivée peut être majorée de la façon suivante

$$\dot{\Theta}(w_t) = \frac{d}{dt}(w^2(t)) - b\gamma\alpha \int_0^\tau \int_{t-s}^t e^{\gamma\alpha(\nu-t+s)} w^2(\nu) d\nu ds + b \int_0^\tau e^{\gamma\alpha s} w^2(t) - w^2(t-s) ds \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left( -aw^2(t) + b \int_{t-\tau}^t w^2(s) ds + ce^{-dt} + k \right) - \gamma\alpha (\Theta(w_t) - w^2(t)) \\ &\quad + b \left( \frac{e^{\gamma\alpha\tau} - 1}{\gamma\alpha} \right) w^2(t) - b \int_{t-\tau}^t w^2(s) ds \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\leq -\gamma\alpha\Theta(w_t) - aw^2(t) + \gamma\alpha w^2(t) + b \left( \frac{e^{\alpha\tau} - 1}{\alpha} \right) w^2(t) + ce^{-dt} + k \quad (4.48)$$

$$\leq -\frac{a}{2}\Theta(w_t) + \left( -a + \gamma\frac{a}{\sqrt{2}} + a(1-\gamma) \right) w^2(t) + ce^{-dt} + k \quad (4.49)$$

$$\leq -\frac{a}{2}\Theta(w_t) - \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \gamma a w^2(t) + ce^{-dt} + k \quad (4.50)$$

$$\leq -\frac{a}{2}\Theta(w_t) + ce^{-dt} + k \quad (4.51)$$

L'inégalité (4.48) est obtenue en utilisant le fait que la fonction  $x \rightarrow \left( \frac{e^{x\tau} - 1}{x} \right)$  est continue sur  $(0, +\infty)$  et croissante, et  $\gamma \in (0, 1)$ . De plus, l'inégalité (4.49) est obtenue en utilisant le fait que  $\beta = 1 - \gamma$  et  $\gamma \in \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ .

La résolution de l'équation  $\dot{y}(t) = -\frac{a}{2}y(t) + ce^{-dt} + k$  et l'application du lemme de comparaison 3.1 concluent la preuve.  $\square$

Passons maintenant à la preuve du résultat principal.

*Preuve du théorème 4.1.* La preuve de convergence est séparée en trois parties. Premièrement, des coordonnées adaptées sont définies et leurs dérivées correspondantes sont calculées. Dans une deuxième partie, des fonctions de Lyapounov candidates sont définies et des majorations impliquant leurs dérivées sont obtenues. Pour finir, un raisonnement par récurrence est utilisé pour obtenir la convergence.

### Partie 1 : Équation de l'erreur

Soit  $t \geq 0$  et notons pour  $i = 1, \dots, q$  :  $\tilde{x}^i = \hat{x}^i - x^i$ ,  $\tilde{\rho}^i = \hat{\rho}^i - \rho^i$  et  $k_i = \max \{k \in \mathbb{N} | t_k^i \leq t\}$ , alors

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= A^i \tilde{x}^i + \tilde{g}^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}, x, \rho) + \Psi^i(u, \hat{x}) \hat{\rho}^i - \Psi^i(u, x) \rho^i - B^i \varepsilon^i(t) \\ &\quad - \theta^{\delta_i} \Delta_i^{-1}(\theta) \left( S_i^{-1} + \Upsilon^i P_i \Upsilon^{iT} \right) C^{iT} \varrho^i(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}^i = -\theta^{\delta_i} \Omega_i^{-1}(\theta) P_i \Upsilon^{iT} C^{iT} \varrho^i \quad (4.53)$$

où  $\tilde{g}^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}, x, \rho) = g^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}) - g^i(u, x, \rho)$ . Afin de simplifier les notations dans la preuve, on ne fait pas de différence dans l'écriture entre le cas où  $\rho^i$  est vide et le cas où il ne l'est pas. En effet, selon la remarque 4.3, on peut directement voir que l'équation d'erreur, pour le cas  $\rho^i$  vide, peut aussi s'écrire comme les équations (4.52)-(4.53) en considérant que  $\Psi^i = 0$  et  $\bar{\rho}^i = 0$ .

Notons maintenant  $\bar{x}^i = \Delta_i(\theta)\tilde{x}^i$  et  $\bar{\rho}^i = \Omega_i(\theta)\tilde{\rho}^i$ , ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= \theta^{\delta_i} \bar{A}^i \bar{x}^i + \Delta_i(\theta) \tilde{g}^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}, x, \rho) + \Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i(u, \hat{x}, x) \rho^i + \Delta_i(\theta) \Psi(u, \hat{x}) \Omega_i^{-1}(\theta) \bar{\rho}^i \\ &\quad - \theta^{\delta_i} \left( S_i^{-1} + \Upsilon^i P_i \Upsilon^{iT} \right) C^{iT} z^i - \theta^{\delta_i} \Upsilon^i P_i \Upsilon^{iT} C^{iT} C^i \bar{x}^i - \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} B^i \varepsilon^i(t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}^i = -\theta^{\delta_i} P_i \Upsilon^{iT} C^{iT} C^i \bar{x}^i - \theta^{\delta_i} P_i \Upsilon^{iT} C^{iT} z^i \quad (4.55)$$

où  $\bar{A}^i = \left( A^i - S_i^{-1} C^{iT} C^i \right)$ ,  $z^i = \left( \varrho^i(t) - C^i \bar{x}^i(t) \right)$  et  $\tilde{\Psi}^i(u, \hat{x}, x) = \Psi^i(u, \hat{x}) - \Psi(u, x)$ .

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= \theta^{\delta_i} \bar{A}^i \bar{x}^i + \Delta_i(\theta) \left[ \tilde{g}^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}, x, \rho) + \tilde{\Psi}^i(u, \hat{x}, x) \rho^i \right] \\ &\quad + \theta^{\delta_i} \Psi^i(u, \hat{x}) \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} S_i^{-1} C^{iT} z^i + \Upsilon^i \dot{\tilde{\rho}}^i - \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} B^i \varepsilon^i(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Soit  $\eta^i = \bar{x}^i - \Upsilon^i \bar{\rho}^i$ , on a ainsi

$$\dot{\eta}^i = \dot{\tilde{x}}^i - \dot{\Upsilon}^i \bar{\rho}^i - \Upsilon^i \dot{\tilde{\rho}}^i \quad (4.57)$$

$$= \theta^{\delta_i} \bar{A}^i \eta^i + \Delta_i(\theta) \left[ \tilde{g}^i(u, \hat{x}, \hat{\rho}, x, \rho) + \tilde{\Psi}^i(u, \hat{x}, x) \rho^i \right] - \theta^{\delta_i} S_i^{-1} C^{iT} z^i - \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} B^i \varepsilon^i(t) \quad (4.58)$$

## Partie 2 : Fonctions de Lyapounov

Définissons maintenant les fonctions de Lyapounov candidates  $V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i) = V_1^i(\eta^i) + V_2^i(\bar{\rho}^i)$  avec  $V_1^i(\eta^i) = \eta^{iT} S_i \eta^i$  et  $V_2^i(t, \bar{\rho}^i) = \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1}(t) \bar{\rho}^i$ . Ces fonctions sont des fonctions de Lyapounov valides puisque  $S_i$  et  $P_i^{-1}(t)$  sont des matrices symétriques définies positives. De plus, grâce à l'hypothèse 4.6, les valeurs propres de  $P_i^{-1}(t)$  sont bornées intérieurement indépendamment de  $t$  et de  $\theta$  (voir la remarque 4.5 pour plus de détails). La dérivée de  $V_1$

est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^i &= \theta^{\delta_i} \left( \eta^{iT} (A^i - S_i^{-1} C^{iT} C^i)^T S_i + S_i (A_i - S_i^{-1} C^{iT} C^i) \right) \eta^i \\ &\quad + 2\theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^{iT} z^i + 2\eta^{iT} S_i (\Delta_i(\theta) \tilde{g}^i) + 2\eta^{iT} S_i (\Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i \rho^i) - 2\theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \eta^{iT} S_i (B^i \varepsilon^i(t)) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} &= -\theta^{\delta_i} \eta^{iT} S_i \eta^i - \theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^{iT} C^i \eta^i \\ &\quad + 2\theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^{iT} z^i + 2\eta^{iT} S_i (\Delta_i(\theta) \tilde{g}^i) + 2\eta^{iT} S_i (\Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i \rho^i) - 2\theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \eta^{iT} S_i (B^i \varepsilon^i(t)) \end{aligned} \quad (4.60)$$

où l'égalité (4.60) est obtenue en utilisant l'équation (4.22). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le fait que  $\|C^i\| = \|B^i\| = 1$  et l'hypothèse 4.5, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^i(\eta^i) &\leq -\theta^{\delta_i} \eta^{iT} S_i \eta^i - \theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^{iT} C^i \eta^i + 2\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \|\Delta_i(\theta) \tilde{g}^i\| \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \|\Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i \rho^i\| + 2 \frac{\theta^{\delta_i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \|z^i\| \\ &\quad + 2\theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \kappa_\varepsilon^i \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

De plus, en utilisant les inégalités suivantes (dont leurs preuves sont données en annexe dans les sections B.1, B.2 et B.3) :

**Inégalité 1.**  $\|\Delta_i(\theta) \tilde{g}^i\| \leq \frac{C_1^i}{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}} \sqrt{V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i)} + \frac{C_2^i}{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}} \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\| + \|\tilde{\rho}^k\|)$ , avec

$$C_1^i = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} L_g^i \sqrt{\lambda_i (1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2)}}{\sqrt{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)}} \quad (4.62)$$

$$C_2^i = L_g^i \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \quad (4.63)$$

**Inégalité 2.**  $\|\Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i \rho^i\| \leq \frac{C_3^i}{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}} \sqrt{V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i)} + \frac{C_4^i}{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}} \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\| + \|\tilde{\rho}^k\|)$  avec

$$C_3^i = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} L_\Psi^i \rho_{\max}^i \sqrt{\lambda_i} \max(1, \Upsilon_{\max}^i)}{\sqrt{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)}} \quad (4.64)$$

$$C_4^i = L_\Psi^i \rho_{\max}^i \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \quad (4.65)$$

**Inégalité 3.**  $\|z^i\| \leq C_5^i(\theta) \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds + C_6^i \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t-\tau_M^i}^t (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) ds$  avec

$$C_5^i(\theta) = \frac{\theta^{\delta_i} (\max(1, \Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i)) + L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \max(1, \Upsilon_{\max}^i)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \sqrt{2} \quad (4.66)$$

$$C_6^i = (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \quad (4.67)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^i(\eta^i) &\leq -\theta^{\delta_i} \eta^{iT} S_i \eta^i - \theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^iT C^i \eta^i + 2(C_1^i + C_3^i) V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i) \\ &\quad + 2(C_2^i + C_4^i) \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\| + \|\tilde{\rho}^k\|) \\ &\quad + 2\theta^{\delta_i} \frac{C_5^i(\theta)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds \\ &\quad + 2\theta^{\delta_i} \frac{C_6^i}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) ds \\ &\quad + 2\theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \kappa_{\varepsilon}^i \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \sqrt{V_1^i(\eta^i)} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Nous allons maintenant obtenir une majoration de la dérivée de  $V_2^i$ . On a

$$\dot{V}_2^i = \dot{\bar{\rho}}^{iT} P_i^{-1} \bar{\rho}^i + \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} \dot{\bar{\rho}}^i - \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} \dot{P}_i P_i^{-1} \bar{\rho}^i \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} &= -\theta^{\delta_i} \bar{x}^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i P_i P_i^{-1} \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} P_i \Upsilon^{iT} C^iT C^i \bar{x}^i + 2\theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} P_i \Upsilon^{iT} C^iT z_i \\ &\quad + \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} (P_i \Upsilon^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i P_i - P_i) P_i^{-1} \bar{\rho}^i \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} &= -\theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \eta^i \\ &\quad - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i + 2\theta^{\delta_i} \|\Upsilon^i\| \|\bar{\rho}^i\| \|z^i\| \\ &\quad + \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} P_i^{-1} \bar{\rho}^i \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\theta^{\delta_i} \eta^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \eta^i - \theta^{\delta_i} \bar{\rho}^{iT} \Upsilon^{iT} C^iT C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i \\ &\quad + 2\theta^{\delta_i} \sqrt{V_2^i(\bar{\rho}^i)} \left( \frac{C_5^i(\theta)}{\sqrt{\gamma_i}} \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds + \frac{C_6^i}{\sqrt{\gamma_i}} \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) ds \right) \\ &\quad - \theta^{\delta_i} V_2^i(\bar{\rho}^i) \end{aligned} \quad (4.72)$$

avec  $C_5^i(\theta)$  et  $C_6^i$  donnés par l'inégalité 3 et en utilisant l'hypothèse 4.6.

Une majoration de la dérivée de  $V^i$  est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}^i &\leq -\theta^{\delta_i} V^i - \theta^{\delta_i} (C^i \eta^i + C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i)^T (C^i \eta^i + C^i \Upsilon^i \bar{\rho}^i) + 2(C_1^i + C_3^i) V^i \\
&\quad + 2\theta^{\delta_i} C_7^i(\theta) \sqrt{V^i} \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds + \sqrt{V^i} \sum_{k=1}^{i-1} (C_2^i + C_4^i) (\|\tilde{x}^k\| + \|\tilde{\rho}^k\|) \\
&\quad + 2\theta^{\delta_i} \sqrt{V^i} \sum_{k=1}^{i-1} C_8^i \int_{t-\tau_M^i}^t (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) ds \\
&\quad + 2\theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \kappa_\varepsilon^i \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \sqrt{V^i}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\text{avec } C_7^i(\theta) = \frac{C_5^i(\theta)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \text{ and } C_8^i = \frac{C_6^i}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})}.$$

Finalement, on peut voir directement qu'il existe  $\theta_i^* \geq 1$  tel que pour tout  $\theta \geq \theta_i^*$  on a

$$\theta^{\delta_i} - 2(C_1^i + C_3^i) \geq \frac{\theta^{\delta_i}}{2} \tag{4.74}$$

Ce qui mène à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\sqrt{V^i}) &\leq -\frac{\theta^{\delta_i}}{4} \sqrt{V^i} + \theta^{\delta_i} C_7^i(\theta) \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds + (C_2^i + C_4^i) \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\| + \|\tilde{\rho}^k\|) \\
&\quad + \theta^{\delta_i} C_8^i \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) ds + \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i} \kappa_\varepsilon^i \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

### Partie 3 : Raisonnement par récurrence

Procédons maintenant au raisonnement par récurrence pour  $i = 1, \dots, q$ . Nous allons montrer que la convergence exponentielle de  $(\|\tilde{x}^1\| + \|\tilde{\rho}^1\|), \dots, (\|\tilde{x}^{i-1}\| + \|\tilde{\rho}^{i-1}\|)$  vers une boule, dont le rayon dépend linéairement des bornes des incertitudes  $\kappa_\varepsilon^1, \dots, \kappa_\varepsilon^{i-1}$  et de  $\theta$  avec une puissance négative, quand  $t$  tend vers l'infini, implique la convergence exponentielle de  $(\|\tilde{x}^i\| + \|\tilde{\rho}^i\|)$  vers une boule dont le rayon dépend linéairement de  $\kappa_\varepsilon^1, \dots, \kappa_\varepsilon^i$ . Plus précisément, on va montrer que pour  $i = 1, \dots, q$ , il existe  $C_9^i, C_{10}^i \geq 0$ , avec  $C_{10}^i$  indépendant de  $\theta$ , tel que  $(\|\tilde{x}^i\| + \|\tilde{\rho}^i\|)$  vérifie l'inégalité suivante :

$$(\|\tilde{x}^i(t)\| + \|\tilde{\rho}^i(t)\|) \leq C_9^i(\theta) e^{-\frac{\theta^{\delta_i}}{8} t} + \theta^{-\delta_i} C_{10}^i (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^i) \tag{4.76}$$

Pour  $i = 1$ , si  $\theta$  est choisi tel que  $\theta \geq \theta_1^*$ , la majoration suivante sur la dérivée de  $\sqrt{V^1}$  peut être obtenue

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{V^1}) \leq -\frac{\theta^{\delta_1}}{4}\sqrt{V^1} + \theta^{\delta_1}C_7^1(\theta) \int_{t-\tau_M^1}^t \sqrt{V^1(s)}ds + \theta^{-(\lambda_1-1)\delta_1}\kappa_\varepsilon^1\sqrt{\lambda_{\max}(S_1)} \quad (4.77)$$

L'application du lemme 4.2 avec  $w^2 = \sqrt{V^1}$ ,  $a = \frac{\theta^{\delta_1}}{4}$ ,  $b = \theta^{\delta_1}C_7^1(\theta)$ ,  $c = 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$  choisis arbitrairement,  $k = \theta^{-(\lambda_1-1)\delta_1}\sqrt{\lambda_{\max}(S_1)}\kappa_\varepsilon^1$  et  $\tau = \tau_M^1$ , donne l'existence de  $\bar{C}_9^1 \geq 0$  tel que  $\sqrt{V^1}$  vérifie l'inégalité suivante

$$\sqrt{V^1} \leq \bar{C}_9^1 e^{-\frac{\theta^{\delta_1}}{8}t} + \theta^{-\lambda_1\delta_1}\bar{C}_{10}^1\kappa_\varepsilon^1 = \bar{C}_9^1 e^{-\frac{\theta^{\delta_1}}{8}t} + \theta^{-\lambda_1\delta_1}\bar{C}_{10}^1\kappa_\varepsilon^1 \quad (4.78)$$

avec  $\bar{C}_{10}^1 = 2\sqrt{\lambda_{\max}(S_1)}$ , à condition que

$$\tau_M^1 < \min\left(\frac{1}{4C_7^1(\theta)}, \frac{8}{\theta}\right) \quad (4.79)$$

Ce qui donne la condition sur  $\tau_M^1$  suivante :

$$\tau_M^1 \leq \frac{8 + \min(\lambda_{\min}(S_1), \gamma_1)}{(\theta^{\delta_1}(\max(1, \Psi_{\max}^1 + \Upsilon_{\max}^1)) + L_g^1(1 + \Upsilon_{\max}^1) + L_\Psi^1\rho_{\max}^1 \max(1, \Upsilon_{\max}^1))\sqrt{2}} \quad (4.80)$$

Donc, puisque  $(\|\tilde{x}^1\| + \|\tilde{\rho}^1\|) \leq \theta^{(\lambda_1-1)\delta_1} \frac{(1+\Upsilon_{\max}^1)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}, \sqrt{\gamma_1})} \sqrt{V^1}$ , on obtient

$$(\|\tilde{x}^1\| + \|\tilde{\rho}^1\|) \leq C_9^1(\theta)e^{-\frac{\theta^{\delta_1}}{8}t} + C_{10}^1\theta^{-\delta_1}\kappa_\varepsilon^1 \quad (4.81)$$

avec  $C_9^1 = \theta^{(\lambda_1-1)\delta_1} \frac{(1+\Upsilon_{\max}^1)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}, \sqrt{\gamma_1})} \bar{C}_9^1$  et  $C_{10}^1 = \frac{(1+\Upsilon_{\max}^1)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}, \sqrt{\gamma_1})} \bar{C}_{10}^1$ .

Maintenant, supposons que  $(\|\tilde{x}^1\| + \|\tilde{\rho}^1\|), \dots, (\|\tilde{x}^{i-1}\| + \|\tilde{\rho}^{i-1}\|)$  vérifient l'inégalité (4.76) et prouvons que  $(\|\tilde{x}^i\| + \|\tilde{\rho}^i\|)$  la vérifie également.

Si  $\theta$  est choisi tel que  $\theta \geq \theta_i^*$ , en utilisant l'inégalité (4.75) et les hypothèses de récurrence,

on peut montrer que la dérivée de  $\sqrt{V^i}$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\sqrt{V^i}) &\leq -\frac{\theta^{\delta_i}}{4}\sqrt{V^i} + \theta^{\delta_i}C_7^i(\theta) \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)}ds + \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i}\kappa_\varepsilon^i\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \\
&\quad + (C_2^i + C_4^i) \sum_{k=1}^{i-1} \left[ C_9^k e^{-\frac{\theta^{\delta_k}}{8}t} + \theta^{-\delta_k} C_{10}^k (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^k) \right] \\
&\quad + \theta^{\delta_i} C_8^i \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t-\tau_M^i}^t \left[ C_9^k e^{-\frac{\theta^{\delta_k}}{8}s} + \theta^{-\delta_k} C_{10}^k (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^k) \right] ds \quad (4.82) \\
&\leq -\frac{\theta^{\delta_i}}{4}\sqrt{V^i} + \theta^{\delta_i}C_7^i(\theta) \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)}ds + \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i}\kappa_\varepsilon^i\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (C_2^i + C_4^i)C_9^k + C_8^i C_9^k 8 \left( \frac{e^{\tau_M^i \theta^{\delta_i}} - 1}{\theta^{\delta_i}} \right) \right] e^{-\frac{\theta^{\delta_i}}{8}t} \\
&\quad + \theta^{\delta_i - \delta_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (C_2^i + C_4^i)C_{10}^k + C_8^i \tau_M^i C_{10}^k \right] (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^{i-1}) \quad (4.83)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant le fait que  $(\delta_k)$  soit décroissante.

Ainsi, l'application du lemme 4.2 avec

- $w^2 = \sqrt{V^i}$ ,
- $a = \frac{\theta^{\delta_i}}{4}$ ,
- $b = \theta^{\delta_i} C_7^i(\theta)$ ,
- $c = \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (C_2^i + C_4^i)C_9^k + C_8^i C_9^k 8 \left( \frac{e^{\tau_M^i \theta^{\delta_i}} - 1}{\theta^{\delta_i}} \right) \right]$ ,
- $d = \frac{\theta^{\delta_i}}{8}$  et
- $k = \theta^{\delta_i - \delta_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (C_2^i + C_4^i)C_{10}^k + C_8^i \tau_M^i C_{10}^k \right] (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^{i-1}) + \theta^{-(\lambda_i-1)\delta_i}\kappa_\varepsilon^i\sqrt{\lambda_{\max}(S_i)}$ ,

et en utilisant le fait que  $\delta_{i-1} \geq \lambda_i \delta_i$ , on montre qu'il existe  $\bar{C}_9^i \geq 0$  tel que

$$\sqrt{V^i} \leq \bar{C}_9^i e^{-\frac{\theta^{\delta_i}}{8}t} + \theta^{-\lambda_i \delta_i} \bar{C}_{10}^i (\kappa_\varepsilon^1 + \dots + \kappa_\varepsilon^i) \quad (4.84)$$

avec  $\bar{C}_{10}^i = \max \left( \left[ \sum_{k=1}^{i-1} (C_1^{i,k} + C_2^{i,k}) C_8^k + C_6^{i,k} \tau_M^i C_8^k \right], \sqrt{\lambda_{\max}(S_i)} \right)$ , à condition que

$$\tau_M^i < \min \left( \frac{1}{4C_7^i(\theta)}, \frac{8}{\theta^{\delta_i}} \right) \quad (4.85)$$

Ce qui donne la condition sur  $\tau_M^i$  suivante :

$$\tau_M^i \leq \min \left( \frac{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)^2}{4(\theta^{\delta_i}(\max(1, \Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i)) + L_g^i(1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \max(1, \Upsilon_{\max}^i)) \sqrt{2}}, \frac{8}{\theta^{\delta_i}} \right) \quad (4.86)$$

Finalement, comme  $(\|\tilde{x}^i\| + \|\tilde{\rho}^i\|) \leq \theta^{(\lambda_i-1)\delta_i} \frac{(1+\Upsilon_{\max}^i)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \sqrt{V^i}$ , on obtient

$$(\|\tilde{x}^i\| + \|\tilde{\rho}^i\|) \leq C_9^i(\theta) e^{-\frac{\theta^{\delta_i}}{8} t} + \theta^{-\delta_i} C_{10}^i(\kappa_{\varepsilon}^1 + \dots + \kappa_{\varepsilon}^i) \quad (4.87)$$

avec  $C_9^i(\theta) = \theta^{(\lambda_i-1)\delta_i} \frac{(1+\Upsilon_{\max}^i)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \bar{C}_9^i$  et  $C_{10}^i = \frac{(1+\Upsilon_{\max}^i)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \bar{C}_{10}^i$ .

Ceci conclue la preuve.  $\square$

## 4.4 Application à l'estimation de l'attitude

On considère le problème de l'estimation simultanée de l'attitude d'un corps rigide et du biais du gyromètre à partir de données issues d'une centrale inertielle. Plus précisément, les mesures sont acquises à partir de trois capteurs utilisés communément : un accéléromètre, un magnétomètre et un gyromètre. On suppose que les mesures du gyromètre possèdent un biais.

### 4.4.1 Modèle du système

L'attitude du corps rigide est représentée à chaque instant  $t \geq 0$  par une matrice de rotation  $R(t) \in SO(3)$  du référentiel  $\mathcal{B}$  vers le référentiel  $\mathcal{I}$  dont la dynamique est régie par l'équation de la cinématique suivante

$$\dot{R}(t) = R(t)(\omega(t))_{\times} \quad (4.88)$$

où  $\omega(t)$  est la vitesse angulaire non biaisée du corps dans le repère  $\mathcal{B}$ . La première mesure acquise est la vitesse angulaire biaisée  $\omega_b(t)$  du corps rigide exprimée dans  $\mathcal{B}$  et est donnée par

$$\omega_b(t) = \omega(t) + b_{\omega} \quad (4.89)$$

où  $b_{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  est le biais du gyromètre. Ce biais est considéré constant et donc  $\dot{b}_{\omega} = 0$ .

De plus, les mesures données par l'accéléromètre et par le magnétomètre, pouvant être vues comme le résultat d'une rotation de deux vecteurs constants et non-colinéaires du

repère  $\mathcal{I}$  vers le repère  $\mathcal{B}$ , sont acquises. D'un côté, nous avons la mesure de l'accéléromètre, résultante de la rotation du vecteur du champ de pesanteur  $g_0$ , donnée par

$$a(t) = R^T(t)g_0 \quad (4.90)$$

où  $g_0 = [0 \ 0 \ G]^T$ . D'un autre côté, nous avons la mesure du magnétomètre, résultante de la rotation du vecteur du champ magnétique terrestre  $m_0$ , donnée par

$$m(t) = R^T(t)m_0 \quad (4.91)$$

avec  $m_0 = [m_a \ m_b \ m_c]^T$ . Une autre grandeur peut être déduite de ces deux mesures précédentes. C'est le produit vectoriel entre  $a$  et  $m$ , défini par

$$c(t) = a(t) \wedge m(t) \quad (4.92)$$

L'hypothèse suivante est faite sur  $c(t)$  :

**Hypothèse 4.7.** *Pour tout  $t \geq 0$ ,  $a(t)$  et  $m(t)$  sont non-colinéaires et donc  $c(t) \neq 0$ .*

À partir de ces trois dernières mesures, nous définissons le vecteur d'observation de la façon suivante

$$v(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ m(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad (4.93)$$

Pour finir, la dynamique du vecteur d'observation  $v$  est définie par la relation suivante

$$\dot{v}(t) = -S^3(\omega(t))v(t) = -S^3(\omega_b(t))v(t) + S^3(b)v(t) \quad (4.94)$$

ce qui peut se récrire

$$\dot{v}(t) = -S^3(\omega_b(t))v(t) - S^9(v(t))b \quad (4.95)$$

où  $S^3(\omega) = \text{diag}(\omega_\times, \omega_\times, \omega_\times) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  et  $S^9(v) = \begin{bmatrix} a_\times \\ m_\times \\ c_\times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ .

### 4.4.2 Synthèse de l'observateur

Nous allons maintenant écrire le modèle sous la forme du système (4.4) et avec ses notations. Le système peut être séparé en deux sous-systèmes. Le premier décrit le comportement de la vitesse angulaire. En effet, la dérivée troisième de la vitesse angulaire est considérée comme une incertitude inconnue. Ainsi, le modèle mathématique s'écrit de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 &= x_2^1 \\ \dot{x}_2^1 &= x_3^1 \\ \dot{x}_3^1 &= \varepsilon^1 \\ y^1 &= x_1^1 = \omega_b \end{cases} \quad (4.96)$$

Le deuxième sous-système décrit la dynamique du vecteur d'observation précédemment définie dans l'équation (4.95). En notant  $b_\omega = \rho^2$ , on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 &= -S^3(x_1^1)x_1^2 - S^9(x_1^1)\rho^2 \\ y^2 &= x_1^2 = v \end{cases} \quad (4.97)$$

Passons maintenant à la synthèse de l'observateur. Comme on peut le remarquer, le premier bloc d'état ne contient pas de paramètre inconnu. Ainsi, la dynamique de la vitesse angulaire estimée  $\hat{x}^1$  peut s'écrire en une équation comme dans (4.21). Ceci n'est pas vrai pour le deuxième bloc d'état puisque  $\rho^2$  doit être estimé. L'observateur complet est donné par l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^1(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^1 \\ \hat{x}_3^1 \\ 0 \end{bmatrix} - \theta^{\delta_1} \Delta_1^{-1}(\theta) \Gamma^1 e^{-\theta^{\delta_1} \Gamma_1^1 (t-t_k^1)} (\hat{y}^1(t) - y^1(t)) \\ \hat{y}^1(t) = \hat{x}_1^1(t) \\ \dot{\hat{x}}^2(t) = -S^3(\hat{x}_1^1(t))\hat{x}_1^2(t) - S^9(\hat{x}_1^1(t))\rho^2 - \theta^{\delta_2} \Delta_2^{-1}(\theta) (I_9 + \Upsilon^2(t)P_2(t)\Upsilon^{2T}(t)) \varrho^2(t) \\ \dot{\rho}^2(t) = -\theta^{\delta_2} P_2(t)\Upsilon^{2T}(t)\varrho^2(t) \\ \dot{\varrho}^2(t) = -\theta^{\delta_2} (I_9 + \Upsilon^2(t)P_2(t)\Upsilon^{2T}(t)) \varrho^2(t) \\ \dot{\Upsilon}^2(t) = -\theta^{\delta_2} \Upsilon^2(t) - \theta^{\delta_2} S^9(\hat{x}_1^1(t)) \\ \dot{P}_2(t) = -\theta^{\delta_2} P_2(t)\Upsilon^{2T}(t)\Upsilon^2(t)P_2(t) + \theta^{\delta_2} P_2(t) \\ \hat{y}^2(t) = \hat{x}_1^2(t) \end{cases} \quad (4.98)$$

avec  $\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 3I_3 \\ 3I_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$ ,  $\delta_1 \geq 1$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\Delta_1(\theta) = \text{diag} \left( I_3, \frac{1}{\theta^{\delta_1}} I_3, \frac{1}{\theta^{2\delta_1}} I_3 \right)$  et  $\Delta_2(\theta) = I_9$ .

L'estimation donnée par le second bloc de l'observateur n'est pas directement la matrice de rotation  $R(t)$ . En effet, une fois que le vecteur d'observation est estimé, la matrice de rotation estimée est déduite en utilisant l'équation suivante

$$\hat{R}(t) = C_2^{-1} \hat{x}_1^2(t) \quad (4.99)$$

où  $C_2$  est une matrice inversible et constante, faisant intervenir  $g_0$  et  $m_0$ , définie par

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & GI_3 \\ m_a I_3 & m_b I_3 & m_c I_3 \\ -Gm_b I_3 & Gm_a I_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

À noter que dans cette application, la structure particulière de  $SO(3)$  de la matrice de rotation est omise et l'estimation appartient de façon générale à  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$

### 4.4.3 Simulations

Des simulations permettant la reconstruction de l'attitude avec l'observateur donné par (4.98) ont été réalisées avec des données générées similairement à celles du chapitre 3 (avec un biais additionnel sur le gyromètre), présentées dans la section 3.3.3.1. La vitesse de rotation  $\omega$  générée est représentée sur la figure 4.1. De plus, les instants d'échantillonnages des deux sorties ont été choisis tels que  $\tau_m^1 \leq t_{k+1}^1 - t_k^1 \leq \tau_M^1$  et  $\tau_m^2 \leq t_{k+1}^2 - t_k^2 \leq \tau_M^1$  avec  $\tau_m^1 = 0.1s$ ,  $\tau_M^1 = 0.2s$ ,  $\tau_m^2 = 0.4s$  et  $\tau_M^2 = 0.6s$ . Ceux-ci sont présentés sur la figure 4.2. Les paramètres de l'observateur ont été choisis avec les valeurs  $\theta = 2$  et  $\delta_1 = 3$ . Pour finir, les vecteurs constants ont été fixés à  $g_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9.81 \end{bmatrix}^T$  et  $m_0 = \begin{bmatrix} 0.434 & -0.0091 & -0.9008 \end{bmatrix}^T$ .

Deux simulations ont été réalisées. La première simulation est réalisée sans bruit sur les sorties contrairement à la deuxième simulation où un bruit Gaussien est ajouté sur l'accéléromètre et le magnétomètre. Leurs écarts-type sont égaux à  $\sigma_a = 0.16m/s^2$  pour l'accéléromètre et  $\sigma_m = 0.04\mu T$  pour le magnétomètre. Ces deux signaux sont représentés sur la figure 4.3.

Il peut être remarqué que de bonnes performances sont obtenues pour les deux simulations. En effet, dans le cas où il n'y pas de bruit, l'attitude estimée est très proche de sa valeur réelle, comme on peut voir sur la figure 4.4 où les angles d'Euler, de la séquence

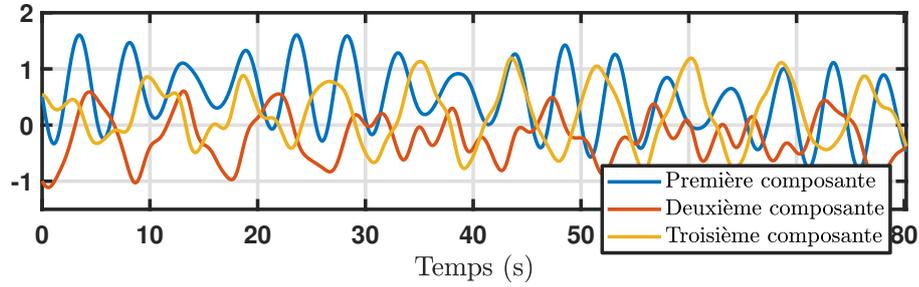
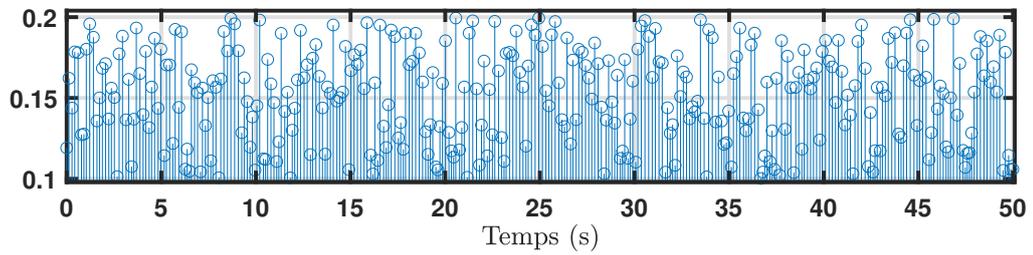
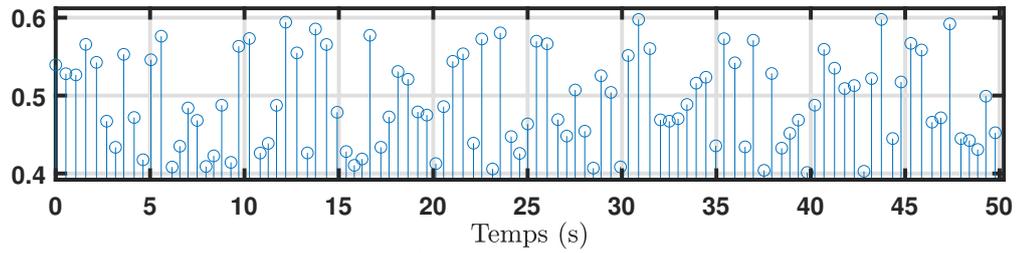


FIGURE 4.1 – Vitesse de rotation



a) Première sortie



b) Deuxième sortie

FIGURE 4.2 – Instants d'échantillonnages des deux sorties

d'Euler ZYX, correspondant à  $R$  et  $\hat{R}$  sont représentés. En fait, comme prévu par les résultats théoriques, les incertitudes du premier sous-système empêchent l'attitude estimée d'être exactement égale à l'attitude générée. Les erreurs entre les sorties estimées et les sorties réelles, et l'erreur  $\|\hat{R}(t) - R(t)\|$ , présentées respectivement sur la figure 4.6 et 4.8, confirment les bonnes performances. Lorsqu'un bruit est ajouté, les performances restent bonnes, cependant l'erreur est plus élevée, comme on peut le voir sur les figures 4.7 et 4.9. En effet, on peut voir que les angles d'Euler correspondant à  $R$  et  $\hat{R}$ , représentés sur la figure 4.5, ne sont pas aussi proches des angles d'Euler de la première simulation. Concernant les biais, montrés sur les figures 4.10 et 4.11, ils sont estimés correctement pour les deux simulations, mais avec une erreur plus faible dans le cas où il n'y a pas de bruit.

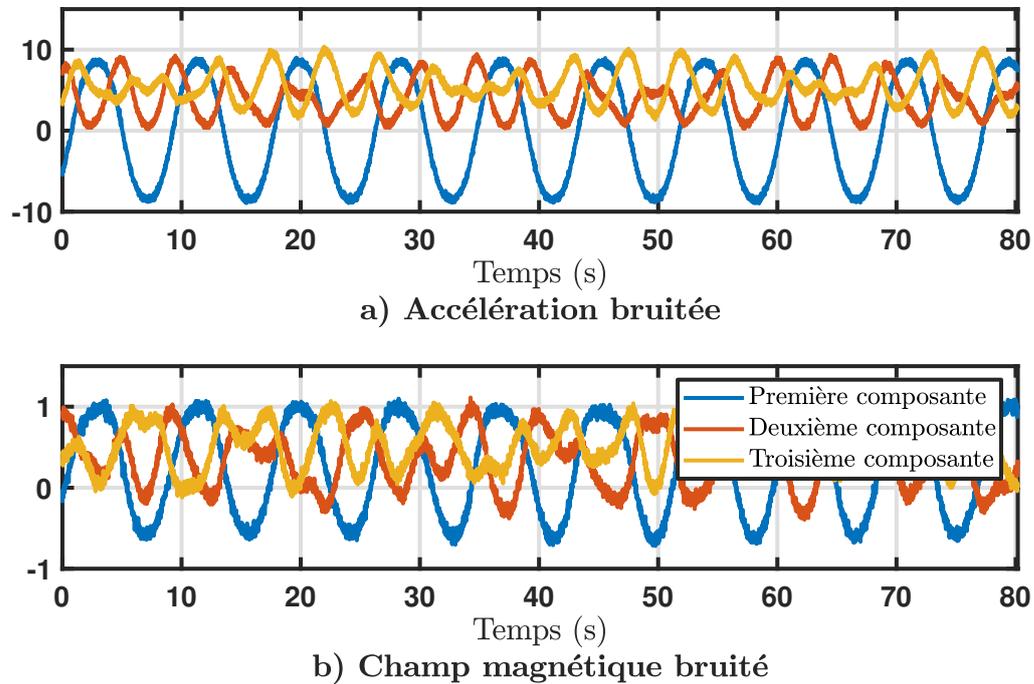


FIGURE 4.3 – Accélération et champ magnétique bruités

## 4.5 Conclusion

Un observateur adaptatif grand gain a été proposé dans ce chapitre. Cet observateur permet d'estimer conjointement l'état et les paramètres inconnus d'une classe de systèmes non-linéaires avec des incertitudes et des sorties multi-échantillonnées. La caractéristique principale de l'estimation réside dans le fait que les instants d'échantillonnages de chaque sortie peuvent être irréguliers et asynchrones. De plus, la structure de type grand gain permet d'avoir un nombre raisonnable de paramètres de synthèse : le paramètre du grand gain  $\theta$  et les puissances  $\delta_k$  associées à chaque bloc. Des conditions suffisantes ont été proposées permettant d'assurer que l'erreur d'estimation converge dans une boule dont le rayon peut être choisi aussi petit que voulu en choisissant correctement le paramètre  $\theta$ . De plus, les performances de l'observateur ont été validées à travers le problème de l'estimation simultanée de l'attitude d'un corps rigide et du biais d'un gyromètre.

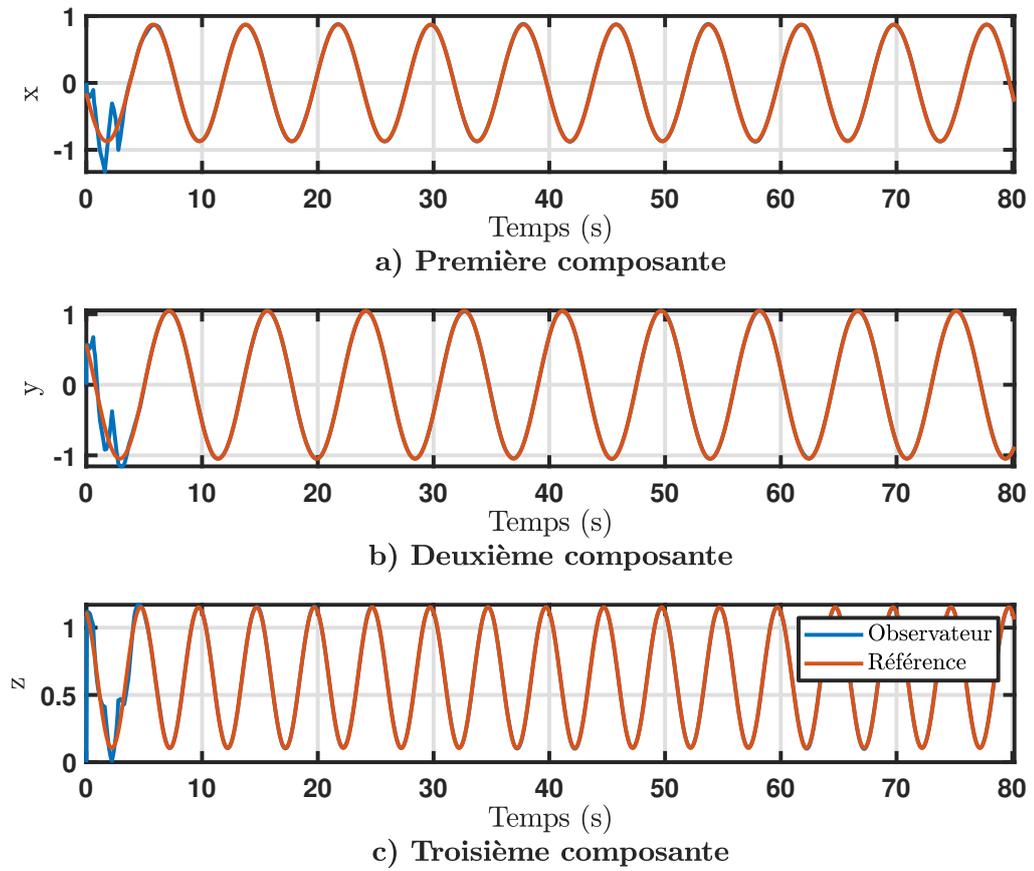


FIGURE 4.4 – Angles d'Euler pour la première simulation

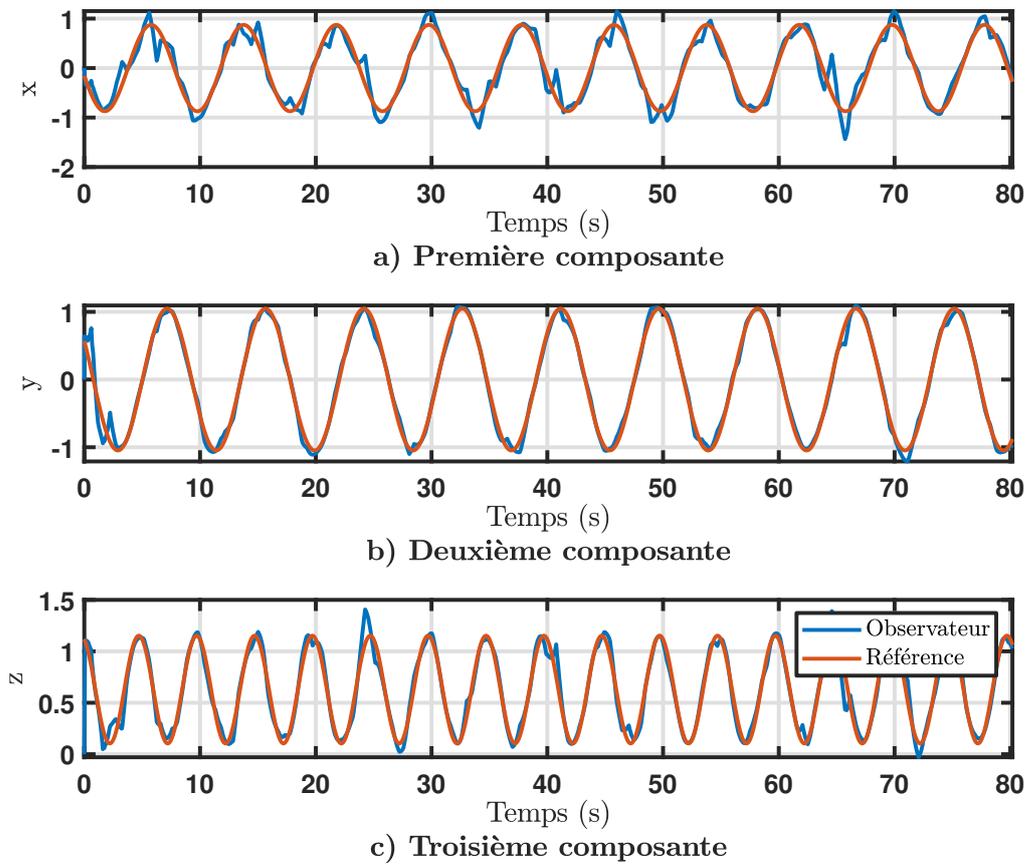
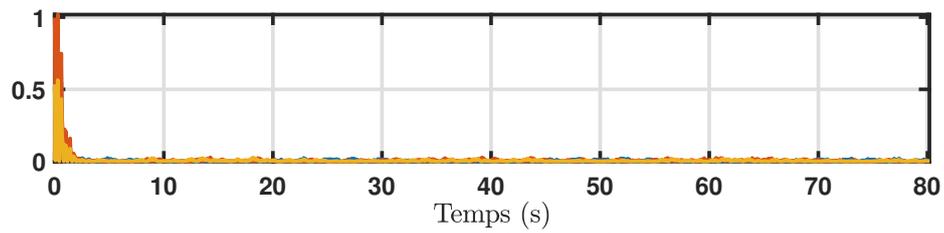
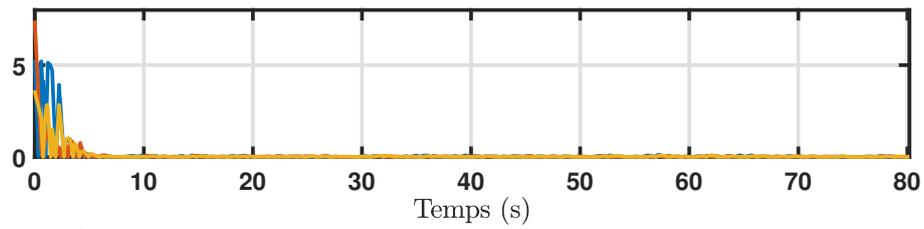


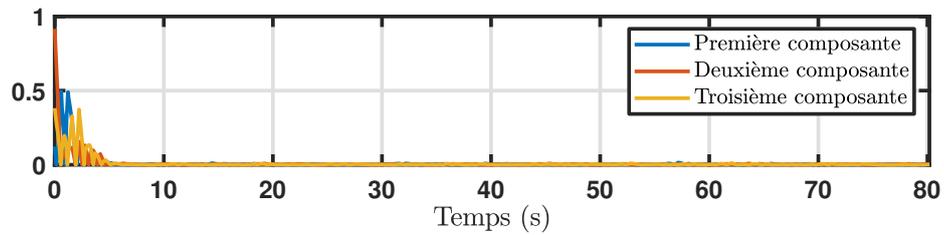
FIGURE 4.5 – Angles d'Euler pour la seconde simulation



a) Erreur entre la vitesse de roation réelle et la vitesse de rotation estimée



b) Erreur entre l'accélération réelle et l'accélération estimée



c) Erreur entre le champ magnétique réel et le champ magétique estimé

FIGURE 4.6 – Erreur entre les sorties réelles et les sorties estimées pour la première simulation

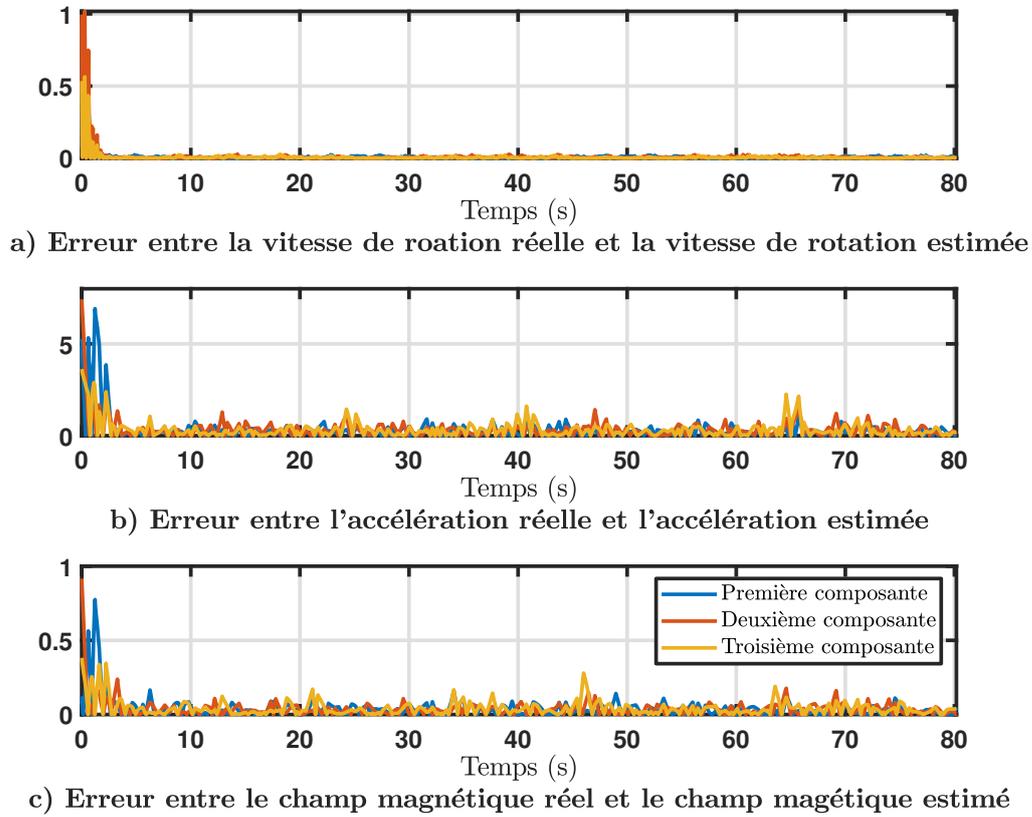


FIGURE 4.7 – Erreur entre les sorties réelles et les sorties estimées pour la seconde simulation

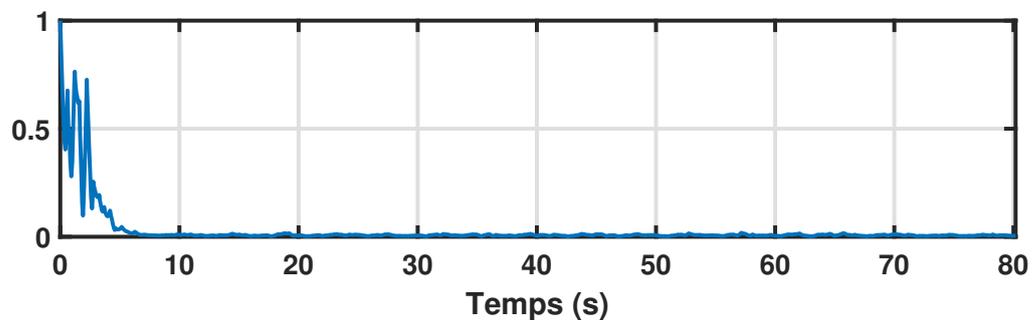
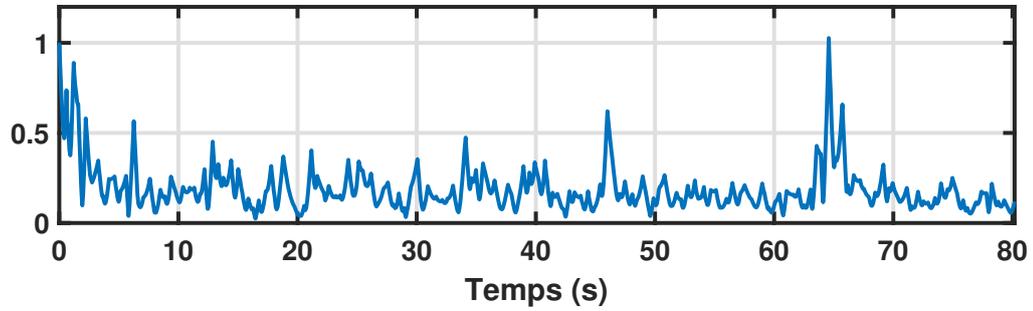
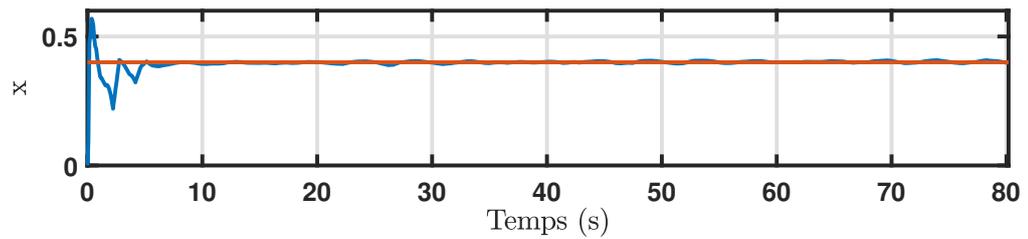
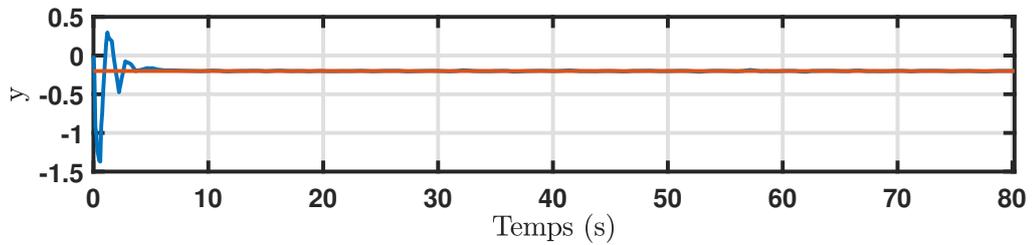


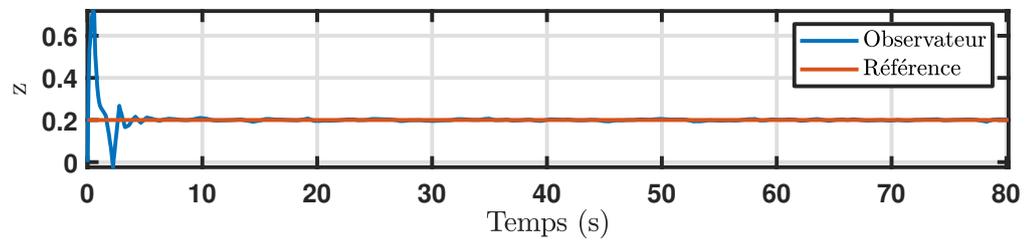
FIGURE 4.8 – Erreur  $\|\hat{R}(t) - R(t)\|$  pour la première simulation

FIGURE 4.9 – Erreur  $\|\hat{R}(t) - R(t)\|$  pour la seconde simulation

a) Première composante



b) Deuxième composante



c) Troisième composante

FIGURE 4.10 – Biais du gyromètre réel et estimé pour la première simulation

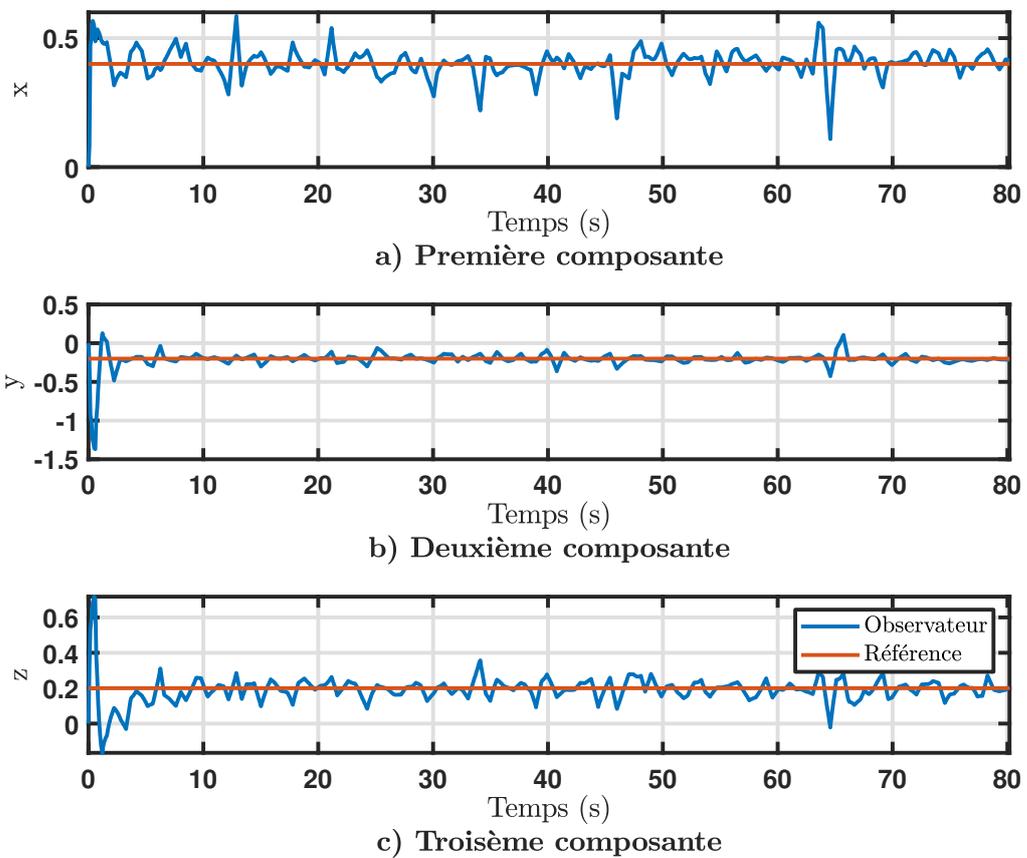


FIGURE 4.11 – Biais du gyromètre réel et estimé pour la seconde simulation

## Chapitre 5

# Détection de l'hypovigilance chez le conducteur

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>5.2</b>	<b>État de l'art sur la détection de l'hypovigilance au volant</b>	<b>90</b>
5.2.1	Définition de l'hypovigilance	91
5.2.2	Mesures liées au niveau d'hypovigilance	91
5.2.3	Extraction de données corrélées au niveau de vigilance	97
5.2.4	Calcul des indicateurs	100
5.2.5	Algorithmes permettant d'estimer un niveau d'hypovigilance	102
5.2.6	Quantificateurs de performance	108
<b>5.3</b>	<b>Détermination des grandeurs discriminantes pour la détection de l'hypovigilance des conducteurs</b>	<b>109</b>
5.3.1	Acquisition des données	110
5.3.2	Extraction de signaux porteurs d'informations	110
5.3.3	Préparation des données	112
5.3.4	Algorithme de classification utilisé	113
5.3.5	Sélection des grandeurs	114
5.3.6	Comparaison des performances	115
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>

---

## 5.1 Introduction

L'hypovigilance au volant est un phénomène qui concerne tous les conducteurs et est l'une des premières causes d'accident de la route. Elle se caractérise par une baisse des performances du conducteur et par une perte d'attention portée à la tâche en cours (SAHAYADHAS, SUNDARAJ, MURUGAPPAN et PALANIAPPAN (2015) ; VERSTER et ROTH (2013)). Parmi les principales causes qui jouent un rôle prépondérant à la dégradation de la vigilance, il y a entre autres la longueur et la monotonie du trajet, une mauvaise qualité du sommeil ou encore une prise de substances telles que de l'alcool ou des médicaments (CROO, BANDMANN, MACKAY, RUMAR et VOLLENHOVEN (2001)). Selon le bilan de l'accidentalité de l'année 2018 (ONISR (2018)), l'hypovigilance serait responsable, en France, de 11% des accidents mortels de la route et surviendrait dans 15% des cas sur autoroute. Il est donc primordial de détecter l'hypovigilance d'un conducteur pour l'informer de son état.

Ce chapitre est consacré à la méthodologie permettant d'estimer l'état de vigilance d'un conducteur. Ce chapitre a aussi pour objectif de montrer la possibilité de détecter l'hypovigilance à partir de mesures non-intrusives, c'est-à-dire ne gênant pas le conducteur. Pour cela, il sera séparé en deux parties. La première partie est consacrée à l'état de l'art sur la détection de l'hypovigilance, permettant de mettre en avant différentes techniques pour estimer le niveau de vigilance d'un conducteur. Quant à la deuxième partie, elle sera consacrée à la validation de l'hypothèse selon laquelle il est possible d'estimer un niveau de vigilance fiable à partir de données non-intrusives. En effet, cette problématique a été soulevée par l'entreprise KAD! dans l'optique de concevoir un dispositif permettant de signaler l'hypovigilance à partir de mesures ne gênant pas le conducteur et facilement mesurables en situation réelle. Pour cela, des données issues du projet européen DCUBE seront traitées. Ces données ont été acquises à partir d'essais par des volontaires faits sur un simulateur de conduite au sein du laboratoire comète.

## 5.2 État de l'art sur la détection de l'hypovigilance au volant

Dans cette section, nous allons décrire les différentes notions nécessaires à la détection de l'hypovigilance. Pour cela, nous allons dans un premier temps donner une définition de l'hypovigilance. Différentes grandeurs physiques pouvant être mesurées vont ensuite être décrites. Des méthodes de traitement des données mesurées seront ensuite introduites. Pour finir, plusieurs algorithmes permettant d'estimer un niveau de vigilance à partir des données traitées seront présentés.

### 5.2.1 Définition de l'hypovigilance

L'hypovigilance au volant est une notion relativement complexe. Elle se définit par une diminution de l'attention portée à la tâche en cours et par une dégradation des performances au cours du temps (SAHAYADHAS, SUNDARAJ, MURUGAPPAN et PALANIAPPAN (2015) ; VERSTER et ROTH (2013)). Dans le cas général, elle peut être divisée en deux groupes : la fatigue et la distraction (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)).

La distraction a lieu lors d'événements qui interfèrent le bon déroulement de la conduite. Les quatre événements principaux sont la distraction visuelle (événement en dehors de la route), la distraction cognitive (être perdu dans ses pensées), la distraction auditive (répondre à un appel) ou encore la distraction biomécanique (contrôler le volume de l'autoradio) (RANNEY, GARROTT et GOODMAN (2001)).

La fatigue est liée à l'état du conducteur. Certains facteurs comme le manque de sommeil, le temps de conduite, la monotonie de la route ou encore la consommation de substances psychotropes peuvent augmenter la somnolence (CROO, BANDMANN, MACKAY, RUMAR et VOLLENHOVEN (2001) ; ONISR (2018)). La fatigue est l'état intermédiaire entre le sommeil et l'éveil.

Les effets de la fatigue sont multiples et différents pour chaque personne. Les plus importants sont énumérés ci-dessous (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)) :

- Augmentation de la fréquence des bâillements ;
- Sensation de déprime et d'irritation ;
- Rêverie ;
- Difficulté pour garder les yeux ouverts et sensations de brûlure dans les yeux ;
- Conduite nonchalante ;
- Difficulté à rester concentré ;
- Hochement de la tête ;
- Déviation de la trajectoire ;
- Coups de volant ;
- Changement du rythme cardiaque.

### 5.2.2 Mesures liées au niveau d'hypovigilance

Pour détecter l'hypovigilance d'un conducteur, il est nécessaire de mesurer différentes grandeurs physiques liées à son état de vigilance. On recense quatre catégories de mesures dans la littérature (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011) ; DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014) ; SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2012)) :

les mesures subjectives, les mesures basées sur le comportement du véhicule, les mesures physiologiques du conducteur et les mesures traduisant le comportement du conducteur. Nous allons maintenant détailler ces différentes catégories.

### 5.2.2.1 Les mesures physiologiques

Les mesures physiologiques permettent d'acquérir des informations sur l'activité de l'organisme du conducteur. Les capteurs généralement utilisés sont des sondes placées directement sur la peau. Ces grandeurs sont, pour la plupart, difficiles à mesurer et sont intrusives pour le conducteur.

#### Électroencéphalogramme :

L'électroencéphalogramme mesure l'activité électrique des neurones à l'aide d'électrodes placées sur le cuir chevelu (ALIOUA (2015)). La donnée brute de l'EEG n'est cependant pas exploitable directement. Il est nécessaire d'extraire des ondes cérébrales situées à des intervalles de fréquence donnés pour en tirer des observations. Les quatre intervalles typiquement utilisés sont les intervalles  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  et  $\delta$ . La correspondance entre les intervalles et l'état physique de la personne est présentée dans la table 5.1. Il est possible de déterminer la bande prédominante dans un EEG en analysant son allure. En effet, comme le montre la figure 5.1, des motifs caractéristiques pouvant être présents sur un EEG permettent d'estimer l'état de la personne. L'EEG a été largement accepté comme grandeur fiable pour la détection de l'hypovigilance et est souvent utilisé comme référence (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)).

Bande	Intervalle (Hz)	Description
$\delta$	[0,5,4]	Sommeil profond chez les adultes
$\theta$	[4,8]	Somnolence chez les adultes et inactivité
$\alpha$	[8,12]	Relaxation et fermeture des yeux
$\beta$	[12,30]	Éveil, réflexion et concentration
$\gamma$	>30	Tâche cognitives

TABLE 5.1 – Bande de fréquence caractéristique de l'EEG

#### Électrocardiogramme :

L'électrocardiogramme est une mesure permettant d'avoir une représentation de l'activité du cœur. Une schématisation d'une mesure d'un ECG est représentée sur la figure 5.2.

À partir de mesures d'ECG, il est possible d'extraire des signaux porteurs d'information sur le niveau d'hypovigilance. On peut par exemple extraire le rythme cardiaque. En effet, la variabilité de la fréquence cardiaque est une donnée importante dont la valeur varie au cours

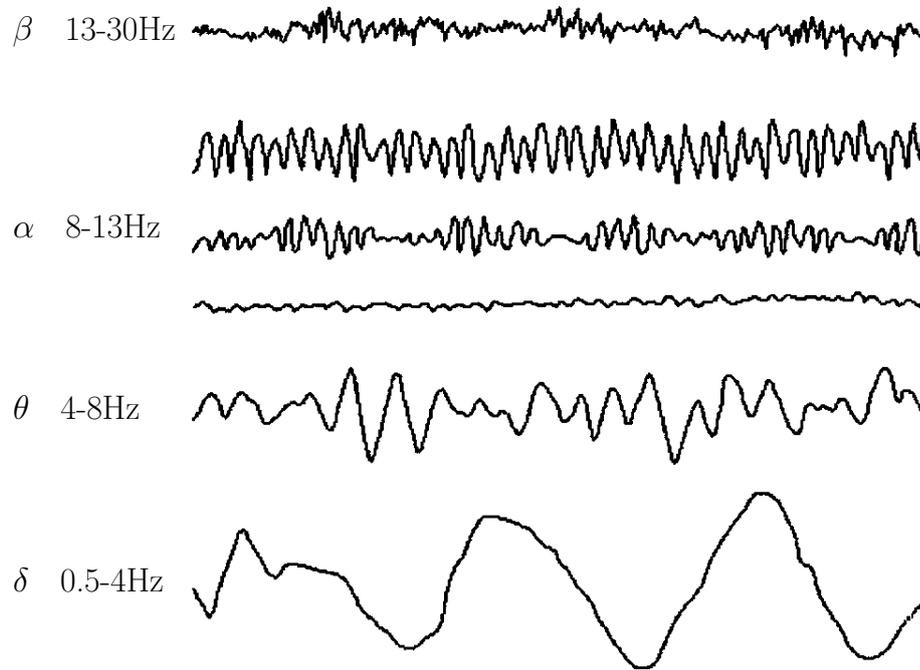


FIGURE 5.1 – Allure de l'EEG en fonction des bandes de fréquences (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011))

de la conduite. Il peut aussi être intéressant d'extraire les caractéristiques basses fréquences dans l'intervalle  $[0.04, 0.015]$ Hz et les caractéristiques hautes fréquences dans  $[0.14, 0.4]$ Hz. Le rapport entre les caractéristiques basses fréquences et hautes fréquences diminue lors du passage à un état d'hypovigilance (SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2012); MAHACHANDRA, YASSIERLI, SUTALAKSANA et SURYADI (2012); KHUSHABA, KODAGODA, LAL et DISSANAYAKE (2011); SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2013)).

#### Électro-oculogramme :

L'Électro-oculogramme est un signal mesuré par des électrodes situées autour des yeux. Il permet d'analyser précisément l'activité oculaire telle que la fréquence de clignement, l'amplitude des clignements, le temps entre deux clignements, le temps d'ouverture et de fermeture ou encore la vitesse d'ouverture et de fermeture des yeux (PICOT (2009); KHUSHABA, KODAGODA, LAL et DISSANAYAKE (2011); CHEN, ZHAO, ZHANG et ZOU (2015)). Toutes ces grandeurs sont obtenues à partir de l'EOG et de sa dérivée comme montré sur la figure 5.3. Ces valeurs sont déduites à l'aide de seuils permettant de connaître l'état des yeux. Il est important de les déterminer correctement et il est recommandé de les calculer par une phase d'apprentissage pour chaque personne (PICOT (2009)).

#### Électromyogramme :

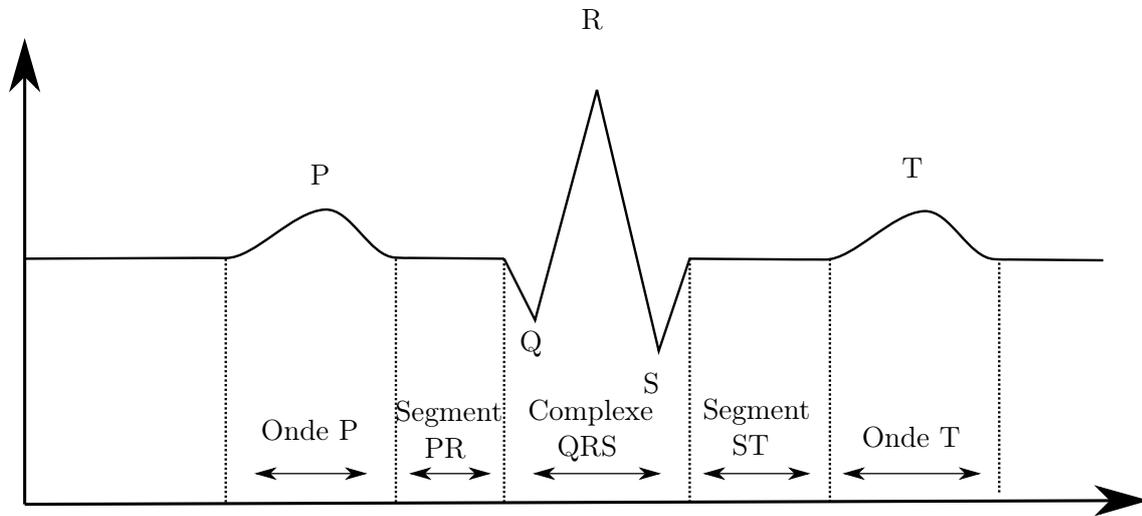


FIGURE 5.2 – Représentation d'un ECG

L'électromyogramme est une mesure du niveau d'activité d'un muscle. Le plus couramment, pour la détection de la fatigue au volant, l'activité est mesurée sur les deltoïdes et les trapèzes (SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2013); SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2012)). L'EMG se mesure à l'aide de capteurs positionnés sur la peau. Une analyse fréquentielle peut être réalisée pour extraire des informations d'un EMG (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011))

#### L'activité électrodermale :

L'activité électrodermale est une autre grandeur qu'il peut être intéressant de mesurer. Elle représente la conductance cutanée et est souvent acquise à partir de sondes placées sur des doigts (DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014); HWANG, KIM, HONG et PARK (2016)). L'activité électrodermale varie en fonction de la température ce qui peut poser problème pour exploiter cette grandeur.

#### Mouvement du thorax et de l'abdomen :

Le mouvement du thorax et de l'abdomen peut être mesuré afin d'avoir une donnée concernant le rythme de respiration du conducteur (SOLAZ, LAPARRA-HERNÁNDEZ, BANDE, RODRÍGUEZ, VELEFF et al. (2016)). La fréquence et l'amplitude de la respiration peuvent être des mesures intéressantes pour détecter l'hypovigilance.

#### 5.2.2.2 Les mesures basées sur le comportement du véhicule

Les mesures basées sur le comportement du véhicule traduisent l'attitude du conducteur à travers des données concernant le véhicule. Cela peut être la position latérale du véhicule

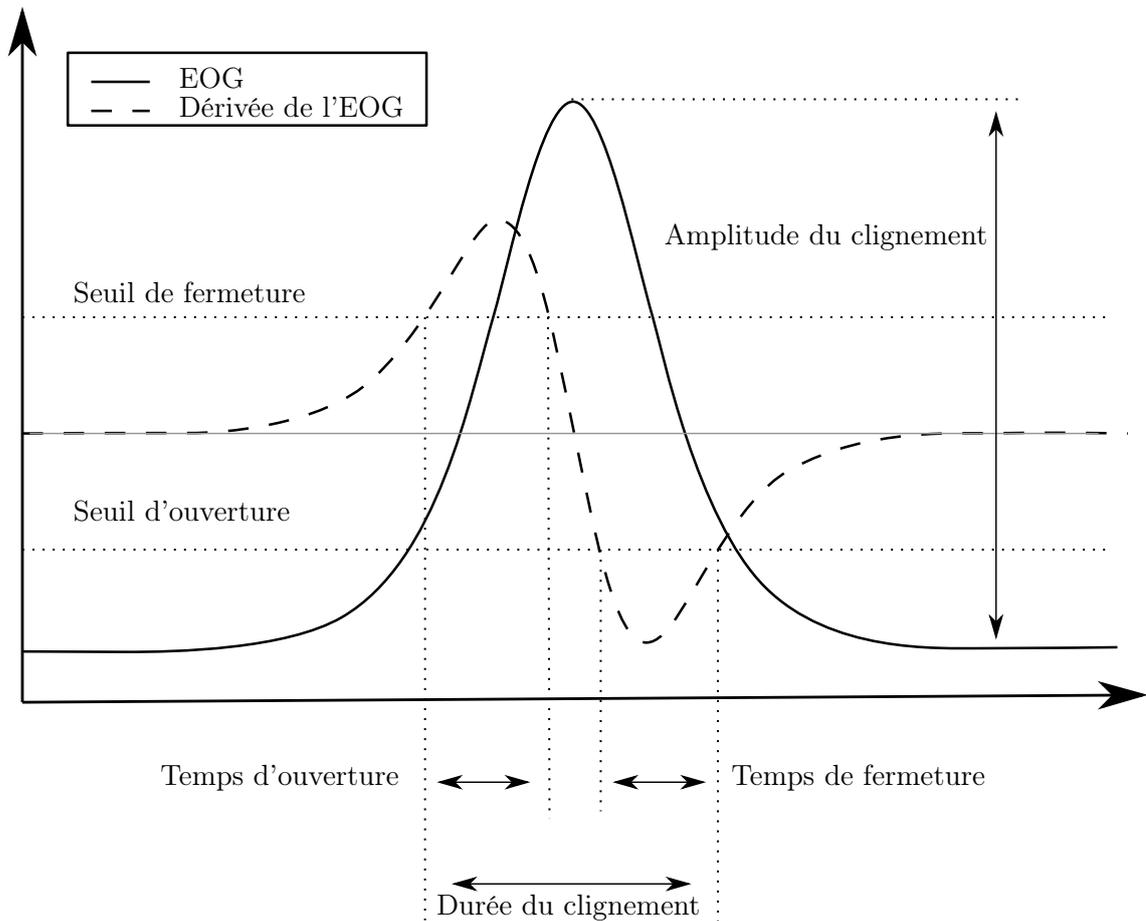


FIGURE 5.3 – Représentation d'un EOG et de sa dérivée

sur la route, l'angle du volant, la vitesse ou même l'appui des pédales. La plupart de ces données peuvent être faciles à récupérer en simulation, mais peuvent poser problème en conduite réelle.

#### Position latérale :

La position latérale de la voiture correspondant à la position par rapport à la voie empruntée est une grandeur importante pour la détection de l'hypovigilance. En effet, pour certaines personnes, la déviation de la trajectoire par rapport au centre de la route a tendance à augmenter lorsque la personne commence à être hypovigilante (SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2012); DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)). L'acquisition de cette mesure ne pose pas de problème en simulation, mais ce n'est pas le cas en situation réelle. En effet, la mesure de position peut être obtenue par un GPS, mais ce capteur n'a pas la précision requise pour répondre à la problématique. Il peut donc être

intéressant d'estimer la position, avec en plus la connaissance de mesures acquises par une centrale inertielle, à l'aide d'un observateur d'état comme décrit dans la section 3.2.1.

#### **Angle du volant :**

L'angle du volant est une grandeur couramment utilisée pour l'estimation de la vigilance. La tendance des conducteurs à faire des micro-corrrections diminue lorsque la fatigue augmente (SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2012)). Cette grandeur est perturbée par les changements de direction. Il peut donc être intéressant de ne pas prendre en compte les mesures lors des changements de routes et lors des virages lorsque la structure des routes est connue.

#### **Autres mesures :**

D'autres mesures peuvent être reliées au niveau de vigilance (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011); DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014)). Par exemple, l'acquisition de la pression du conducteur sur le siège permet de remarquer, dans certains cas, un décalage du centre de gravité entre un état vigilant et un état hypovigilant. L'appui sur les pédales d'accélération et de frein, la vitesse de la voiture ou encore le couple exercé sur le volant peuvent aussi être intéressants à mesurer.

### **5.2.2.3 Les mesures traduisant le comportement du conducteur**

Les mesures traduisant le comportement du conducteur sont des mesures souvent acquises par une caméra, mais peuvent aussi être des mesures acquises par un accéléromètre. Ces mesures ne sont pas intrusives du fait de leurs méthodes d'acquisition.

#### **Données issues d'un enregistrement vidéo :**

Lorsqu'un conducteur commence à devenir hypovigilant, les caractéristiques de son visage changent (JO, LEE, PARK, KIM et KIM (2014); AZIM, JAFFAR et MIRZA (2014)). Ces caractéristiques sont déduites d'un enregistrement du visage du conducteur pendant sa conduite. Ainsi, la difficulté réside dans le traitement du flux vidéo. Les données pouvant être extraites sont : la fréquence de clignement, la direction du regard et de la tête, la fréquence de bâillement, la position, la vitesse et le diamètre de la pupille, la durée de fermeture des yeux ou encore la fixité du regard. Une autre grandeur appelée PERCLOS (percentage eye closure), représentant le pourcentage de temps où les yeux sont considérés fermés, est aussi souvent calculée puisqu'elle est réputée être très significative de l'état de vigilance (BERGASA, NUEVO, SOTELO, BAREA et LOPEZ (2006); LIANG, REYES et LEE (2007); MIYAJI, KAWANAKA et OGURI (2009); DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014)).

#### **Données issues d'un accéléromètre :**

Un accéléromètre peut également être utilisé pour enregistrer l'évolution de l'activité du conducteur pendant sa conduite. Cette activité aurait tendance à diminuer lorsque le conducteur entre dans une phase d'hypovigilance.

#### 5.2.2.4 Les mesures subjectives

Les mesures subjectives sont des mesures obtenues par une personne demandant au conducteur d'évaluer son niveau de vigilance. La plus connue est le Karolinska Sleepiness Scale (KSS) qui est une échelle de mesure de la somnolence, allant de 1 à 9 (AKERSTEDT et GILLBERG (1990); SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2013)). La correspondance entre une valeur de KSS et le comportement du conducteur est détaillée dans la table 5.2. Des études ont montré que cette grandeur est liée à l'EEG ce qui valide la fiabilité de cette grandeur (DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011)). Cependant, ces mesures nuisent à l'estimation du niveau de vigilance puisque le questionnement peut sortir le conducteur d'une phase d'hypovigilance. De plus, du fait que les questions sont émises à des intervalles de temps régulier, le KSS ne permet pas de détecter les variations brusques de l'état de vigilance.

Niveau	Description
1	Extrêmement éveillé
2	Très éveillé
3	Éveillé
4	Plutôt éveillé
5	Ni éveillé ni somnolent
6	Quelques signes de somnolence
7	Somnolent, mais aucun effort pour rester éveillé
8	Somnolent, quelques efforts pour rester éveillé
9	Très somnolent, difficultés pour rester éveillé, combat contre le sommeil

TABLE 5.2 – Correspondance entre un niveau de KSS et le comportement du conducteur

#### 5.2.3 Extraction de données corrélées au niveau de vigilance

Certaines grandeurs, telles que l'électroencéphalogramme et l'électrocardiogramme ne peuvent être utilisées directement. Il est nécessaire d'extraire des informations corrélées à l'état de vigilance.

### 5.2.3.1 Extraction de grandeur par analyse temps-fréquence

Une analyse temps-fréquence peut être réalisée pour extraire les ondes cérébrales de l'EEG ou le rythme cardiaque de l'ECG. Plusieurs approches peuvent être envisagées et les plus couramment utilisées dans la littérature sont la transformée de Fourier à court terme (PICOT (2009); PURDON, PIERCE, MUKAMEL, PRERAU, WALSH et al. (2013); ZABIDI, MANSOR, LEE et CHE WAN FADZAL (2012)) et la transformée en ondelettes (GRAMATIKOV et GEORGIEV (1995); CROWE, GIBSON, WOOLFSON et SOMEKH (1992)).

#### Transformée de Fourier à court terme :

La transformée de Fourier à court terme permet de faire une analyse temps-fréquence d'un signal. L'idée est de faire glisser une fenêtre  $g(t)$  sur un signal  $x(t)$  et de calculer la transformée de Fourier des signaux obtenus (HLAWATSCH et AUGER (2008); RIOUL et FLANDRIN (1992)). Une fenêtre est généralement une fonction paire dont le maximum se trouve en 0. Parmi les fenêtres les plus utilisées, on retrouve les fenêtres de Hanning et de Hamming, par exemple.

Ainsi, en définissant la fonction glissante suivante

$$g_{t,f}(s) = g(s - t)e^{-j2\pi fs}, \quad (5.1)$$

la transformée du signal  $x(t)$  est donnée par

$$STFT(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)g_{t,f}(s)ds \quad (5.2)$$

Le choix de la taille de la fenêtre est primordial pour pouvoir faire une bonne analyse d'un signal. En effet, c'est la taille de cette fenêtre qui fixe la résolution temporelle et la résolution fréquentielle. Il faut cependant faire un compromis entre les deux puisque, en effet, plus cette taille est grande plus la résolution fréquentielle est bonne mais plus la résolution temporelle est mauvaise, et inversement. Ce phénomène est le défaut principal de la transformée de Fourier à court terme.

Pour ensuite pouvoir faire une analyse spectrale, il est possible de tracer le spectrogramme en calculant la densité spectrale d'énergie

$$E(t, f) = |STFT(t, f)|^2 \quad (5.3)$$

#### Transformée en ondelettes :

La transformée en ondelettes fait intervenir des ondelettes, qui sont des fonctions représentant des petites ondulations (HLAWATSCH et AUGER (2008) ; RIOUL et FLANDRIN (1992)). Cette transformée est basée sur la dilatation et la translation d'une ondelette  $\psi(t)$  par la relation suivante

$$\psi_{t,a}(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{s-t}{a}\right). \quad (5.4)$$

Les ondelettes les plus connues sont les ondelettes de Meyer et de Morlet. On peut ainsi définir la transformée en ondelettes du signal  $x(t)$  par

$$WT(t, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\psi_{t,a}(s)ds \quad (5.5)$$

Similairement à la transformée de Fourier à court terme, il est possible de tracer un scalogramme (équivalent du spectrogramme) en calculant la densité spectrale d'énergie :

$$E(t, a) = |WT(t, a)|^2 \quad (5.6)$$

Cette représentation donne une analyse de la densité spectrale en fonction du temps et du facteur de dilatation. Il peut être intéressant de faire une approximation permettant de faire un lien entre le facteur de dilatation  $a$  et la fréquence  $f$ . Pour cela, il est possible d'utiliser la relation suivante

$$f \simeq \frac{f_w}{a} \quad (5.7)$$

avec  $f_w$  la fréquence centrale de l'ondelette, pouvant être calculée en cherchant la fréquence maximisant le module de sa transformée de Fourier.

L'avantage de cette méthode réside dans la résolution fréquentielle et temporelle. En effet, la transformée en ondelette permet d'avoir une plus grande flexibilité dans la résolution fréquentielle, par rapport à celle de la transformée de Fourier à court terme, en choisissant correctement le facteur de dilatation et la forme de l'ondelette (CHUN-LIN (2010)).

### 5.2.3.2 Estimation de l'Objective Sleepiness Score

L'électroencéphalogramme et l'electro-oculogramme contiennent l'information d'éveil d'une personne. En observant directement l'allure de ces signaux temporels, il est possible d'identifier l'état de fatigue actuel de la personne en estimant l'objective sleepiness score (OSS) (PICOT, CHARBONNIER et CAPLIER (2010)). Pour obtenir ce score, il faut tout d'abord, analyser l'EEG en identifiant les motifs caractéristiques d'appartenance à une bande de fréquences (SHARABATY (2007)) :  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  ou  $\delta$ . Les différentes allures de l'EEG en

fonction des bandes de fréquences sont visibles sur la figure 5.1. En parallèle, il faut analyser l'EOG en s'intéressant aux clignements et aux mouvements oculaires lents. Ainsi, tous les signaux de l'EEG et de l'EOG doivent être manuellement classés par des physiologistes sur des fenêtres de temps (par exemple 20 secondes) pour en déduire la valeur de l'OSS. Cette variable estimée est comprise entre 0 et 4. La grille de scorage correspondante est disponible table 5.3.

Score OSS	Durée cumulée $t$ des ondes $\alpha$ et/ou $\theta$	Clignements et mouvements oculaires
0	Négligeable	Normaux
1	$0.5 \leq t < 5$	Normaux
2	$5 \leq t < 10$	Normaux
	$0.5 \leq t < 5$	Lents
3	$5 \leq t < 10$	Lents
	$t \geq 10$	Normaux
4	$t \geq 10$	Lents

TABLE 5.3 – Grille de score de l'OSS

#### 5.2.4 Calcul des indicateurs

Lorsque les mesures corrélées au niveau de vigilance sont disponibles, il est nécessaire de faire un traitement avant qu'elles ne soient utilisées par un algorithme de détection d'hypovigilance. Les indicateurs déduits sont obtenus par des calculs faits sur des fenêtres temporelles glissantes de tailles  $n$  afin de mettre en avant les effets de la variation du niveau de vigilance du conducteur.

##### Indicateurs statistiques :

La moyenne et l'écart type sont les deux indicateurs qui sont les plus couramment calculés afin de montrer une différence dans une variable entre un état vigilant et un état hypovigilant (JANSSEN (2003); SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2013); DONG, HU, UCHIMURA et MURAYAMA (2011); SANDBERG, AKERSTEDT, ANUND, KECKLUND et WAHDE (2011); WIERWILLE (1994)). Il est possible de les calculer pour un signal  $x$  sur une fenêtre glissante avec les relations suivantes :

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x(t-i) \quad (5.8)$$

pour la moyenne glissante et

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x(t-i) - \bar{x}(t))^2}{n-1}} \quad (5.9)$$

pour l'écart type glissant. D'autres études calculent en plus des indicateurs tels que la médiane, le maximum et le minimum (SAHAYADHAS, SUNDARAJ et MURUGAPPAN (2013); JO, LEE, PARK, KIM et KIM (2014))

#### Time to line crossing (TLC) :

Le TLC (Time To Line Crossing) est un indicateur calculé à partir de la position latérale et de la vitesse latérale du véhicule. Il représente le temps restant avant qu'une partie du véhicule ne franchisse une limite de la voie empruntée si le conducteur ne modifie pas sa trajectoire (FRIEDRICHS (2010)). Il peut être calculé de la façon suivante (DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014)) :

$$TLC = \begin{cases} \frac{d_R - p(t)}{\dot{p}(t)} & \text{si } \dot{p}(t) < 0 \\ \frac{d_L - p(t)}{\dot{p}(t)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.10)$$

avec  $p(t)$  la position latérale du véhicule,  $d_R$  et  $d_L$  les seuils de droite et de gauche dépendant de la géométrie de la route. Il est ainsi nécessaire de connaître la largeur de la voie. Il est aussi possible de prendre la moyenne glissante du TLC comme indicateur.

#### Lanex :

Le lanex mesure la tendance d'un conducteur à sortir de la voie empruntée (DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014)). Il est défini à partir du nombre de fois où le conducteur dépasse la limite gauche ou la limite droite de la voie empruntée dans un intervalle de temps donné. Il peut être calculé de la façon suivante :

$$Lanex = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \theta(p(t-i)) \quad (5.11)$$

avec  $p(t)$  la position latérale et

$$\theta(p(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > d_L \\ 1 & \text{si } p(t) < d_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $d_R$  et  $d_L$  sont les seuils de droite et de gauche dépendant de la géométrie de la route.

**Rapid steering-wheel movement (RSWM) :**

Un indicateur basé sur l'angle du volant, appelé RSWM (Rapid Steering-Wheel Movement), est calculé pour mettre en avant les mouvements rapides de volant venant des mouvements brusques faits par le conducteur (DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014) ; WIERWILLE (1994)). Il est calculé de la façon suivante

$$RSWM = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h(\dot{\alpha}(t-i)) \quad (5.13)$$

avec  $\alpha(t)$  l'angle du volant et

$$h(\dot{\alpha}(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\dot{\alpha}(t)| > d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.14)$$

où  $d$  est un seuil arbitraire au-delà duquel les mouvements sont considérés comme rapide.

**5.2.5 Algorithmes permettant d'estimer un niveau d'hypovigilance**

Il est nécessaire d'établir un algorithme afin d'estimer un niveau d'hypovigilance à partir des indicateurs précédemment définis. Ces algorithmes sont typiquement des méthodes de classifications supervisées permettant de classer un échantillon en ayant la connaissance d'une base de données d'apprentissage. En effet, la plupart des algorithmes de classification supervisée apprennent des informations contenues dans la base d'apprentissage pour estimer la classe d'appartenance d'une donnée à traiter. Dans cette section, quatre méthodes de classification vont être détaillées. Ce sont celles qui sont couramment utilisées pour la détection de l'hypovigilance au volant.

**5.2.5.1 Analyse discriminante**

L'analyse discriminante est une méthode de classification basée sur la formule de Bayes (BISHOP (1995)). On suppose la connaissance d'une variable  $x \in \mathbb{R}^n$  associée à une des classes d'appartenance de l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_m\}$ . Ainsi, la formule de Bayes établie la relation concernant la probabilité *a posteriori*  $P(y = y_k|x)$  suivante :

$$P(y = y_k|x) = \frac{P(y = y_k)P(x|y = y_k)}{\sum_{i=1}^m P(y = y_i)P(x|y = y_i)} \quad (5.15)$$

avec  $P(y = y_k)$  la probabilité *a priori* d'appartenance à la classe  $k$  et  $P(x|y = y_k)$  la densité de probabilité des  $x$  conditionnellement à la classe  $y_k$ . Ainsi, l'objectif est de trouver  $k$

maximisant  $P(y = y_k|x)$ . Ceci permet de définir la fonction de décision  $h(x)$  de la façon suivante

$$h(x) = \arg \max_k (P(y = y_k|x)) = \arg \max_k (P(y = y_k)P(x|y = y_k)) \quad (5.16)$$

Le problème revient donc à la détermination de  $P(y = y_k)$  et de  $P(x|y = y_k)$ . Concernant la probabilité *a priori*  $P(y = y_k)$ , il n'y a pas de règle à proprement parler et sa détermination dépend du contexte. Il n'est pas rare de la choisir égale à la proportion d'échantillons appartenant à la classe  $k$  dans la banque de données d'apprentissage (BISHOP (1995)).

Dans l'analyse discriminante, on suppose que la densité de probabilité  $P(x|y = y_k)$  suit une loi normale multidimensionnelle. Ainsi la densité de probabilité s'écrit de la façon suivante

$$P(x|y = y_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma_k)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x-\mu_k)} \quad (5.17)$$

avec  $\mu_k$  le centre et  $\Sigma_k$  la variance des points de classe  $k$  dans la base de données d'apprentissage.

À l'aide de cette formule, il est possible de redéfinir la fonction de décision, en prenant le logarithme de  $P(y = y_k|x)$ . Cette fonction devient alors

$$h(x) = \arg \max_k \left( \ln(P(y = y_k)) - \frac{1}{2} \ln(\det(\Sigma_k)) - \frac{1}{2}(x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) \right) \quad (5.18)$$

Sous cette forme, nous venons de définir l'analyse discriminante quadratique. Lorsqu'on parle d'analyse discriminante linéaire, une hypothèse supplémentaire est établie. En effet, on suppose dans ce cas que les matrices de covariance de chaque classe sont identiques. Ceci permet de simplifier la fonction de décision en retirant le terme  $\frac{1}{2} \ln(\det(\Sigma_k))$  puisqu'il ne dépend plus de  $k$ . Avec cette hypothèse, l'analyse discriminante linéaire permet de séparer linéairement les classes entre elles.

Il est assez commun d'utiliser une analyse discriminante (linéaire ou quadratique) pour estimer un niveau de vigilance, car elle est relativement facile à mettre en œuvre et donne de bons résultats avec une charge de calcul assez faible (SAHAYADHAS, SUNDARAJ, MURUGAPPAN et PALANIAPPAN (2015); KHUSHABA, KODAGODA, LAL et DISSANAYAKE (2011)).

### 5.2.5.2 Méthode des $k$ plus proches voisins

La méthode des  $k$  plus proches voisins est une méthode de classification ayant un concept intuitif (COOMANS et MASSART (1982)). En ayant à disposition une base d'apprentissage,

le principe est de regarder à quelle classe appartiennent les  $k$  plus proches points de l'échantillon à classer. La classe de cet échantillon est alors estimée à la classe prédominante dans les  $k$  plus proches points. En suivant ce principe, illustré figure 5.4, cette méthode ne nécessite pas de phase d'apprentissage et donc aucun modèle n'est calculé. Ainsi, cette méthode à deux paramètres, le nombre  $k$  et la fonction distance utilisée. Lors de l'utilisation de cette méthode, il faut veiller à ce qu'il n'y ait pas une classe avec un nombre de points trop important par rapport aux autres, sinon l'estimation risque d'être dégradée (COOMANS et MASSART (1982)).

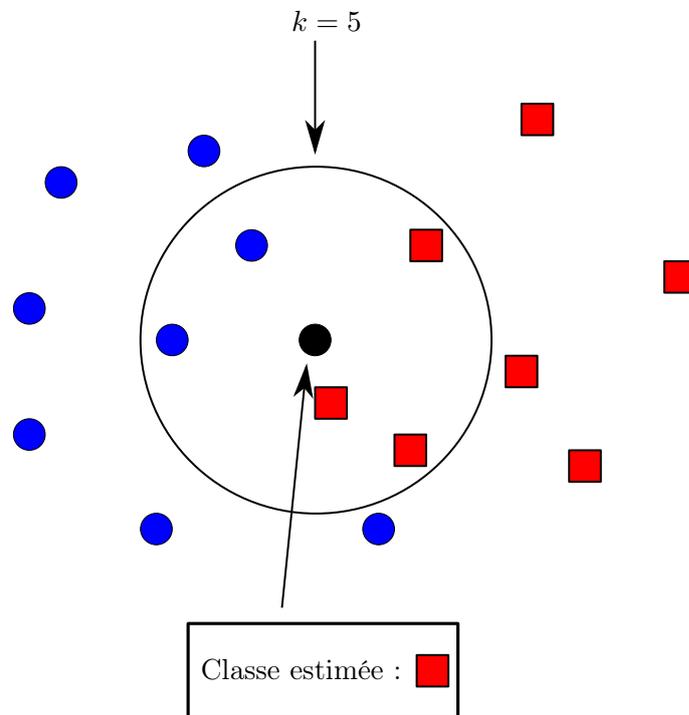


FIGURE 5.4 – Principe de la méthode des  $k$  plus proches voisins

Cette méthode est couramment utilisée dans la littérature pour l'estimation du niveau d'hypovigilance (LI, ZHANG et ZHAO (2017); SAHAYADHAS, SUNDARAJ, MURUGAPPAN et PALANIAPPAN (2015)). Elle est réputée pour donner de bons résultats en un temps de calcul qui peut être long.

### 5.2.5.3 Machine à vecteurs de supports

Une machine à vecteurs de support est un algorithme de classification basé sur un principe d'optimisation (HU et ZHENG (2009)). En considérant un jeu de donnée  $(x_1, \dots, x_n)^T$  de

taille  $n$  associé à une classe  $(y_1, \dots, y_n)^T$  dont chaque élément  $y_i$  vaut 1 ou  $-1$ , l'objectif est de trouver les poids  $w$  et  $b$  de façon à créer un hyperplan séparateur des classes suivant

$$w^T x + b = 0. \quad (5.19)$$

Ainsi, la fonction de décision permettant de classer les échantillons est définie de la façon suivante

$$h(x) = \text{sign}(w^T x + b). \quad (5.20)$$

L'idée derrière ce problème d'optimisation est de trouver les échantillons de la base d'apprentissage permettant de maximiser les marges entre l'hyperplan et les deux classes. Cette marge est définie par la distance entre l'hyperplan et les échantillons les plus proches. Ces échantillons les plus proches de l'hyperplan sont d'ailleurs appelés vecteurs supports. La représentation de ce concept est illustrée figure 5.5. Cette méthode de classification est appelée machine à vecteurs de supports car ce sont les vecteurs de supports qui la définissent. En effet, seuls les vecteurs de supports permettent de former l'hyperplan et donc seul quelques points de la base d'apprentissages sont utiles à la définition de l'hyperplan.

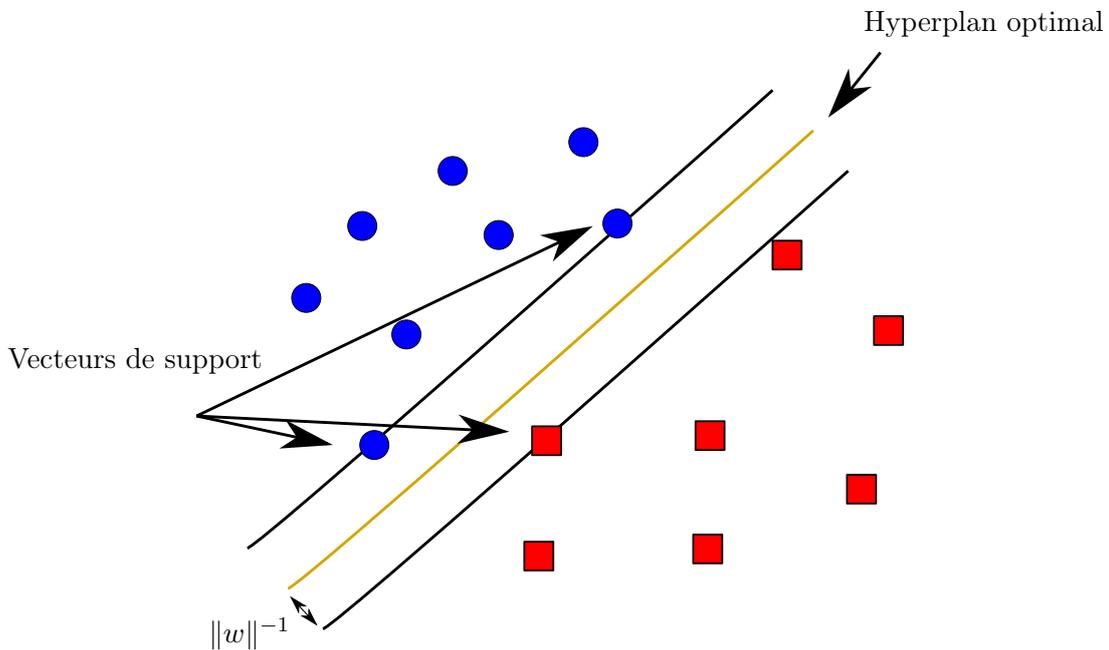


FIGURE 5.5 – Représentation d'une machine à vecteurs de supports

Pour trouver les poids  $w$  et  $b$ , il est possible de se ramener au problème d'optimisation suivant

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} w^T w \text{ sous les contraintes } y_i(w^T x_i + b) \geq 1. \quad (5.21)$$

Cette formulation de ce problème d'optimisation est exprimée sous sa formulation primale. Un problème d'optimisation peut aussi être vu sous une forme duale. Sous cette forme, le problème d'optimisation des machines à vecteurs de supports a pour objectif de trouver les  $\alpha_i$  solutions du problème d'optimisation suivant

$$\text{maximiser } \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \text{ sous les contraintes } \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i = 0 \text{ et } \alpha_i \geq 0 \quad (5.22)$$

En notant  $\alpha_i^{opt}$  les valeurs optimales des  $\alpha_i$  et  $b^{opt}$  la valeur optimale de  $b$  obtenue à partir des  $\alpha_i^{opt}$ , la fonction de décision devient la suivante

$$h(x) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^{opt} y_i x^T x_i + b^{opt} \right) \quad (5.23)$$

En exprimant le problème de cette façon, seules les classes linéairement séparables peuvent être traitées. En se ramenant dans un espace plus grand, à l'aide de fonctions noyau, il est possible de traiter les classes séparables non-linéairement. L'objectif est ainsi de trouver l'hyperplan optimal dans le nouvel espace. En considérant  $\phi$  une transformation permettant de passer dans le nouvel espace, le problème d'optimisation devient le suivant (BISHOP (2006)) :

$$\text{maximiser } \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j) \text{ sous les contraintes } \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i = 0 \text{ et } \alpha_i \geq 0 \quad (5.24)$$

avec  $K$  une fonction noyau vérifiant  $K(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$ . Les fonctions noyaux typiquement utilisées sont le noyau polynomial et le noyau sigmoïde.

Les machines à vecteurs de support ont été utilisées pour le problème de l'hypovigilance au volant (YEO, LI, SHEN et WILDER-SMITH (2009); LIANG, REYES et LEE (2007); HU et ZHENG (2009)). Ces algorithmes donnent des résultats très satisfaisants avec un temps de calcul faible.

#### 5.2.5.4 Réseau de neurones artificiels

Les réseaux de neurones artificiels sont des algorithmes de classifications largement utilisés dans la littérature (BISHOP (1995)). Cette méthode tire son nom de l'analogie faite avec les neurones biologiques présents dans les cerveaux. En effet, un réseau de neurones est constitué de plusieurs couches de neurones et de connexions. Ces connexions sont présentes entre les neurones de deux couches qui se suivent. Ces connexions sont appelées synapses. La première couche est appelée couche d'entrée et comprend autant de neurones que d'entrées. La dernière couche est appelée couche de sortie et permet de donner le résultat de classification et les autres couches sont les couches cachées. La représentation d'un réseau est représentée sur la figure 5.6.

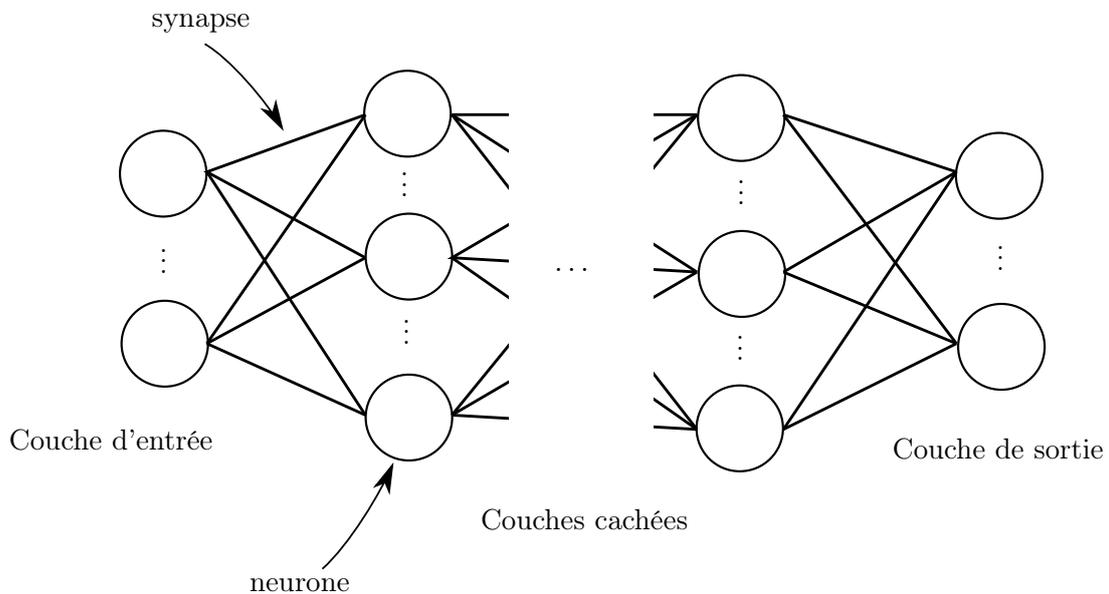


FIGURE 5.6 – Représentation d'un réseau de neurones

Chaque synapse entrant dans un neurone est associée à un poids. Ces entrées pondérées sont mises en entrée d'une fonction d'agrégation permettant de calculer un scalaire. Ce scalaire est ensuite donné en entrée d'une fonction d'activation donnant la sortie du neurone. Ainsi, en considérant que la fonction d'agrégation est une somme pondérée, la sortie  $y$  d'un neurone en ayant les entrées  $x_i$  peut s'écrire

$$y = \psi \left( b + \sum_{i=1}^n w_i x_i \right) \quad (5.25)$$

avec  $\psi$  la fonction d'activation,  $w_i$  les poids associés aux entrées et  $b$  le seuil du neurone. Plusieurs fonctions d'activations sont classiquement utilisées comme la fonction sigmoïde, la fonction d'Heaviside ou encore la fonction tangente hyperbolique.

Comme la plupart des algorithmes de classification supervisés, il est nécessaire de passer par une phase d'apprentissage avec une base de données. Cette phase d'apprentissage permet de calculer les poids et les seuils intervenants dans les neurones. L'algorithme de rétropropagation du gradient est souvent utilisé pour mettre à jour les poids lors de la phase d'apprentissage, de la dernière à la première couche. Cet algorithme permet de modifier les poids associés aux synapses qui contribuent le plus à l'augmentation de l'erreur.

Ainsi un réseau de neurones est un algorithme complexe avec un nombre relativement important de considération à faire. Il faut tout d'abord définir la structure du réseaux à travers :

- Le nombre de couches
- Le nombre de neurones par couche
- La fonction d'agrégation
- La fonction d'activation

et il faut choisir l'algorithme d'apprentissage.

Les réseaux de neurones ont reçu beaucoup d'attention pour traiter le problème de la détection de l'hypovigilance (LI, ZHANG et ZHAO (2017) ; DAZA, BERGASA, BRONTE, YEBES, ALMAZÁN et al. (2014) ; CHEN, ZHAO, ZHANG et ZOU (2015)). Ils donnent de bons résultats, mais il peut être difficile de les mettre en oeuvre puisqu'il y a beaucoup de paramètres à choisir.

### 5.2.6 Quantificateurs de performance

Après avoir entraîné l'algorithme de classification avec la base d'apprentissage, il est nécessaire de quantifier la qualité du classifieur sur une autre base de donnée, dite de test, contenant des données non présentes dans la base d'apprentissage. Pour cela, quatre éléments doivent être introduits :

- VP : vrais positifs
- FP : faux positifs
- VN : vrais négatifs
- FN : faux négatifs

À partir de ces informations, quatre quantificateurs peuvent être définies (POWERS et AILAB (2011)) : l'accuracy, la précision, le rappel et la valeur F.

L'accuracy, terme laissé en anglais pour le différencier de la précision, est la grandeur permettant de connaître la performance dans sa globalité. Elle représente la proportion d'échantillons correctement classés sur la proportion totale. Elle est notée  $A$  et est calculée par :

$$A = \frac{VP + VN}{VP + FP + VN + FN} \quad (5.26)$$

Quant à la précision  $P$ , elle permet de connaître la proportion des échantillons classés hypovigilants qui le sont vraiment contrairement au rappel  $R$  qui est la proportion des échantillons classés hypovigilants qui ont été correctement identifiés. Ils sont définis par :

$$P = \frac{VP}{VP + FP} \quad (5.27)$$

$$R = \frac{VP}{VP + FN} \quad (5.28)$$

En règle générale, il faut choisir un compromis entre les deux, c'est pour cela qu'une dernière grandeur est définie. La valeur  $F$  est définie par :

$$F = 2 \frac{P \times R}{P + R} \quad (5.29)$$

Toutes ces caractéristiques donnent un résultat entre 0 et 1.

### 5.3 Détermination des grandeurs discriminantes pour la détection de l'hypovigilance des conducteurs

Nous allons maintenant, nous intéresser aux résultats principaux de ce chapitre. L'objectif est de montrer qu'il est possible de détecter l'hypovigilance d'un conducteur à partir de mesures non-intrusives et facilement mesurables. Les résultats mettront aussi en avant les mesures qui sont les plus importantes pour obtenir une estimation fiable de l'état du conducteur.

Cette étude a été réalisée dans le cadre du projet européen DCUBE (Driving Drowsiness Detection) dont un des objectifs est de déterminer quelles sont les grandeurs discriminantes pour la détection de l'hypovigilance. En effet, il a été demandé à des volontaires sains, âgés de 20 à 80 ans, de conduire sur un simulateur tout en ayant de nombreux capteurs mesurant des grandeurs physiques classiquement acquises. Ces données ont ensuite été pré-traitées puis traitées avant d'être sélectionnées pour être finalement utilisées par le classifieur. Le classifieur utilisé est un algorithme des  $k$  plus proches voisins. Cet algorithme a été choisi au

vu des résultats qu'il donne pour ce sujet dans la littérature. Une comparaison des résultats en fonction des signaux considérés met en évidence les cas de figure envisageables pour détecter l'hypovigilance en situation réelle.

### 5.3.1 Acquisition des données

Dans le cadre de ce projet, il a été demandé à des volontaires de conduire sur un simulateur afin de déceler les signes précurseurs de l'hypovigilance au volant. Pendant leur période de conduite, différentes grandeurs ont été mesurées.

Il y a tout d'abord les mesures physiologiques. Elles sont obtenues par des capteurs, plus ou moins intrusifs, directement placés sur le corps du volontaire. Des sondes ont été placées pour notamment mesurer :

- Les températures main gauche (MG), main droite (MD), nombril (NOMB) et zone sous clavière (ZSC),
- L'électroencéphalogramme (EEG),
- L'électro-oculogramme (EOG),
- L'électrocardiogramme (ECG),
- La réponse électrodermale (RED),
- Le mouvement du thorax et de l'abdomen (respo1 et respo2).

Un exemple de pose des différentes sondes pour l'électroencéphalogramme et l'électro-oculogramme est montré sur la figure 5.7.

Les mesures caractérisant les performances de conduites du conducteur sont obtenues directement par le simulateur, qui enregistre toutes les grandeurs nécessaires durant la simulation. Parmi les signaux disponibles, trois vont être utilisés :

- La position latérale (VOIE),
- L'accélération (ACC),
- L'angle du volant (CAP).

### 5.3.2 Extraction de signaux porteurs d'informations

Les signaux bruts de l'EEG, de l'ECG, de l'EOG et de mouvement du thorax et de l'abdomen ne sont pas utilisables tels quels. Il est nécessaire d'extraire tout d'abord une grandeur qui pourrait potentiellement évoluer au fur et à mesure de la baisse de vigilance.

La première grandeur extraite est l'OSS. Elle a été obtenue en suivant le protocole explicité dans la section 5.2.3.2. Comme l'objectif de ce chapitre est de montrer si le conducteur est, ou non, hypovigilant, l'OSS (score allant de 0 à 4) a été ensuite binarisé



FIGURE 5.7 – Pose des électrodes mesurant l'EEG et l'EOG

afin de représenter ces deux états : vigilant pour les scores 0 et 1 sinon hypovigilant. La variable binaire ainsi formée est la variable de référence dont l'estimation par l'algorithme de classification sera le but.

Pour ce qui est de l'électrocardiogramme et des signaux de respiration, les variables intéressantes sont respectivement la fréquence cardiaque (BPM) et la fréquence de respiration (RESP1 et RESP2). L'extraction de ces informations a été faite par une analyse temps-fréquence à l'aide d'un spectrogramme. Ces données ont été extraites en se focalisant sur les fréquences d'intérêt (par exemple entre 0.66 Hz et 1.66Hz pour l'ECG) puis en sélectionnant la fréquence majoritairement présente dans cet intervalle de fréquence. Cette extraction est représentée sur la figure 5.8 pour le cas de la fréquence cardiaque.

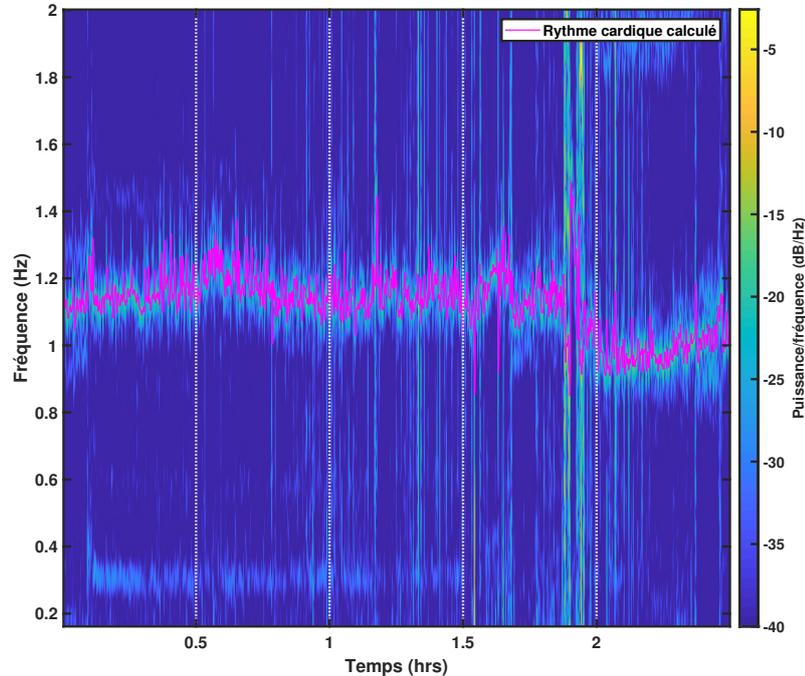


FIGURE 5.8 – Extraction du rythme cardiaque

### 5.3.3 Préparation des données

Un pré-traitement pour chacune des mesures acquises ou extraites est réalisé pour qu'elles soient utilisables par l'algorithme de classification. Deux indicateurs vont être déduits pour chaque grandeur.

Le premier indicateur est la moyenne glissante  $\bar{x}$  (moy). Pour chaque échantillon, une moyenne est calculée sur une fenêtre glissante. Elle est calculée à partir de l'équation (5.8).

Le deuxième indicateur est l'écart type glissant  $\sigma_x$  (std). De la même façon que précédemment, pour chaque échantillon, un écart type est calculé sur une fenêtre glissante. Il représente ainsi la dispersion des données dans un intervalle de temps donné. Il est possible de le calculer à l'aide de l'équation (5.9).

Pour les premiers points, les moyennes et les écarts-types sont calculés avec le nombre de points disponibles. Il faut noter ici que la largeur des fenêtres utilisées doit être spécifiée. Cette valeur n'est *a priori* pas triviale et doit être choisie de façon à avoir les meilleurs résultats de classification avec une validation croisée.

**Remarque 5.1.** Il a été choisi dans cette étude de ne pas utiliser de grandeurs prenant en compte la géométrie de la route empruntée comme le LANEX (lane exit) ou le TLC (time to line crossing). Ce choix a été fait puisqu'il est difficile actuellement d'obtenir des informations fiables, en situation réelle, concernant le réseau routier emprunté.

Toute la procédure pour estimer le niveau d'hypovigilance est résumée sur la figure 5.9.

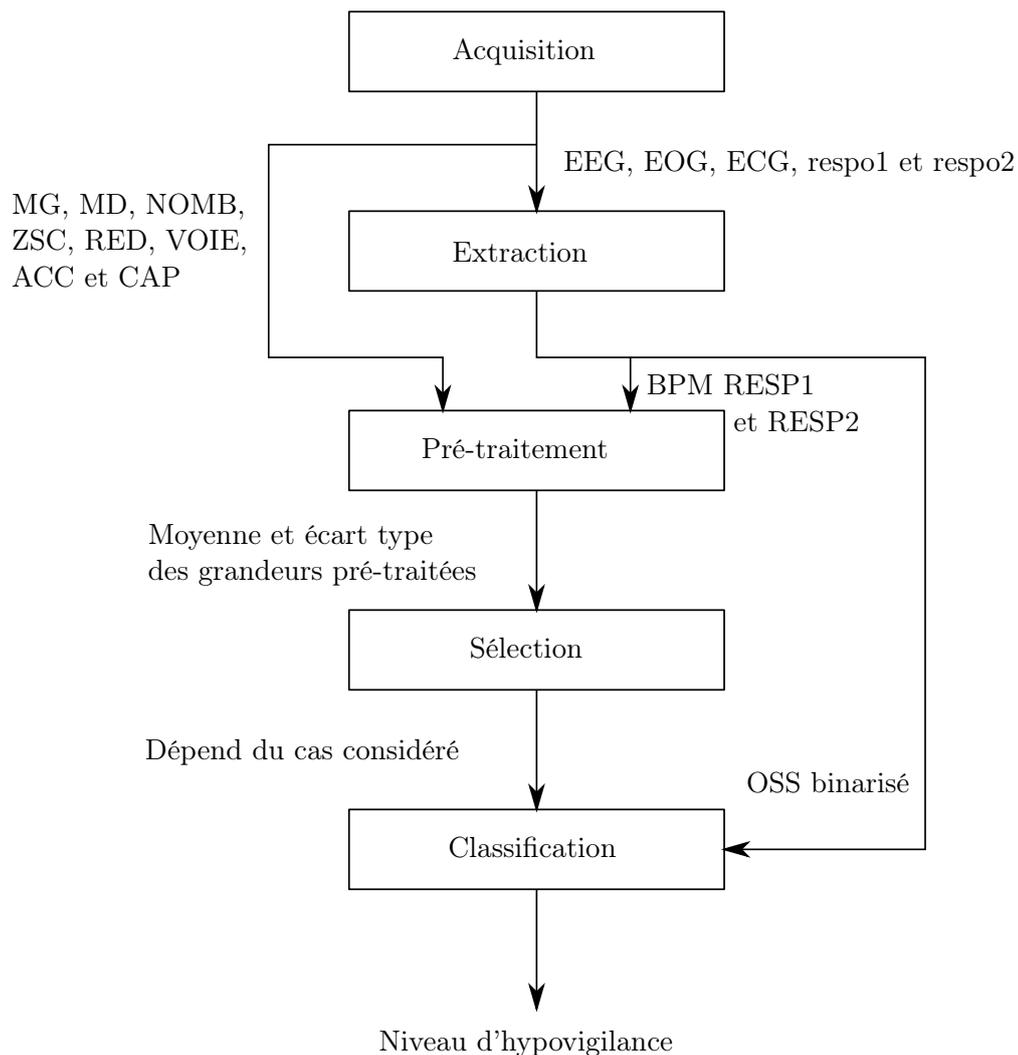


FIGURE 5.9 – Schéma de la procédure complète

### 5.3.4 Algorithme de classification utilisé

L'algorithme utilisé a été choisi en comparant les performances obtenues des méthodes de classifications introduites dans la section 5.2.5. Pour comparer les performances, l'accuracy

$A$  a été calculé à partir des résultats de classification de chaque algorithme en utilisant tous les indicateurs disponibles. L'algorithme qui a été sélectionné est la méthode des  $k$  plus proches voisins. Le principe de fonctionnement de cette méthode est décrit dans la section 5.2.5.2. Pour cet algorithme, il y a principalement deux critères à choisir : quelle norme utiliser pour le calcul de la distance et quel est le nombre de voisins à considérer. Pour cette étude, la norme euclidienne a été choisie pour 5 voisins puisque ce sont les paramètres donnant la meilleur accuracy  $A$ .

### 5.3.5 Sélection des grandeurs

Les résultats de l'étude vont mettre en évidence les grandeurs physiques utiles pour la détection de l'hypovigilance au volant. Pour cela, plusieurs cas ont été sélectionnés, chacun d'eux regroupant un jeu d'entrées différent. Les détails des 6 cas sont décrits dans la liste ci-dessous :

- Cas 1 : Toutes les grandeurs sont utilisées pour un total de 22 entrées.
- Cas 2 : Seules les grandeurs pertinentes sont utilisées. La pertinence d'une entrée a été évaluée à l'aide d'un algorithme de sélection de caractéristiques YANG, WANG et ZUO (2012). Celui utilisé est basé sur l'analyse en composantes principales. Cet algorithme permet, en lui fournissant toutes les entrées, d'attribuer un poids à chaque entrée, représentatif de leurs pertinences. Ainsi, il permet de retirer *a priori* celles qui ne sont pas utiles et celles qui sont redondantes. Pour ce cas, les variables gardées sont celles qui ont un poids non nul.
- Cas 3 : Toutes les grandeurs issues des performances du conducteur ont été mises en entrées. À cela est ajouté le rythme cardiaque. Cette situation représenterait le cas où un dispositif réel serait mis en place, en ne mesurant que des grandeurs non-intrusives. En effet, le rythme cardiaque pourrait être mesuré par un bracelet connecté et les autres à l'aide d'une centrale inertielle, par exemple.
- Cas 4 : Seulement certaines des grandeurs physiologiques ont été prises en compte.
- Cas 5 : Ce cas est similaire au Cas 3 mais sans aucune mesure physiologique, c'est-à-dire sans le rythme cardiaque.
- Cas 6 : Seules les grandeurs vraiment pertinentes ont été sélectionnées. Cela a été fait en ne prenant que les 7 grandeurs ayant les poids les plus élevés avec l'algorithme de sélection.

Afin de comparer la qualité des estimations données par l'algorithme, les quantificateurs  $A$ ,  $F$ ,  $R$  et  $P$  seront calculés comme décrit dans la section 5.2.6.

### 5.3.6 Comparaison des performances

Les données ont été séparées en deux pour tous les cas décrits précédemment. La première partie, qui représente 20% des données, a été fournie au classifieur en tant que base d'apprentissage. À savoir que dans cette partie, les échantillons décrits comme positifs et ceux décrits comme négatifs ont été répartis équitablement. Seulement 20% des données ont été utilisées en apprentissage car une grande partie des échantillons sont classés vigilants. La deuxième partie va servir à donner les résultats.

Ainsi, pour chaque cas, les résultats de classification vont être donnés avec les variables  $A$ ,  $P$ ,  $R$  et  $F$  sous forme de pourcentage. Tous les résultats ainsi qu'un récapitulatif des données utilisées sont présents dans le tableau 5.4.

Il peut être tout d'abord remarqué que, lorsque toutes les grandeurs sont mises en entrées (cas 1), l'estimation est de très bonne qualité. Après une première sélection (cas 2), l'estimation est très légèrement plus faible. Cependant, l'algorithme donne le meilleur résultat lorsque la sélection est plus restrictive (cas 6). Ainsi, les informations les plus utiles sont contenues dans les températures des mains, la position latérale du véhicule, la réponse électrodermale, la fréquence cardiaque et la fréquence de respiration. Lorsque seules les grandeurs caractérisant les performances de conduites sont utilisées (cas 5), un score satisfaisant de 85% est obtenu. L'ajout de la fréquence cardiaque (cas 3) permet de rendre l'estimation bien meilleure en atteignant les 95%. Le dernier cas (cas 4) obtient une très bonne estimation, en utilisant seulement des grandeurs physiologiques. Pour tous les cas, la précision  $P$  est proche de 100%. Ainsi, la plupart des échantillons évalués hypovigilants le sont vraiment. C'est au niveau du rappel  $R$  qu'il est possible de voir l'origine de la baisse de la qualité de l'estimation : le plus souvent, un échantillon mal estimé est un échantillon faux négatif.

Il est possible de comparer ces résultats avec ceux de la littérature. Les études utilisant des données physiologiques, donc intrusives, obtiennent des résultats allant de 77% à 98% (CHEN, ZHAO, ZHANG et ZOU (2015); KHUSHABA, KODAGODA, LAL et DISSANAYAKE (2011); NOORI et MIKAEILI (2016); KARTSCH, BENATTI, SCHIAVONE, ROSSI et BENINI (2018)). Dans le cas contraire, lorsque seulement des données non-intrusives sont utilisées, en prenant en compte principalement de données extraites d'un flux vidéo, on retrouve une détection de 83% pour LIANG, REYES et LEE (2007), de 90% pour ZANDI, QUDDUS, PREST et COMEAU (2019) et de 99% pour JO, LEE, PARK, KIM et KIM (2014). Le principal inconvénient de ces trois dernières études réside dans le fait qu'il y ait besoin d'une caméra.

Cas		1	2	3	4	5	6
MD	std	×	×		×		×
	moy	×			×		
MG	std	×	×		×		×
	moy	×			×		
ZSC	std	×	×				
	moy	×					
NOMB	std	×					
	moy	×					
VOIE	std	×	×	×		×	
	moy	×	×	×		×	×
ACC	std	×		×		×	
	moy	×	×	×		×	
CAP	std	×	×	×		×	
	moy	×	×	×		×	
BPM	std	×	×	×			×
	moy	×		×			
RESP1	std	×	×		×		×
	moy	×	×		×		×
RESP2	std	×	×				
	moy	×	×				
RED	std	×	×		×		×
	moy	×			×		
Nombre d'entrées		22	14	8	8	6	7
A		98.44	98.38	95.21	98.32	85.37	98.75
P		99.95	99.94	99.98	99.97	99.86	99.94
R		98.26	98.20	94.55	98.10	83.33	98.62
F		99.10	99.06	97.19	99.03	90.85	99.27

TABLE 5.4 – Comparaison des quantificateurs de performance

En effet, dans une situation réelle, des phénomènes tels qu'une variation de luminosité peut empêcher le bon traitement de la vidéo.

Les résultats obtenus montrent que pour une application industrielle, il est possible d'obtenir une estimation fiable du niveau de vigilance à partir de données mesurables relativement facilement dans un contexte réel et sans gêner le conducteur. En effet, comme on a vu pour le cas 3, l'association des grandeurs traduisant le comportement du véhicule avec la grandeur du rythme cardiaque, pouvant être mesurée avec un bracelet connecté, permet de répondre à la problématique.

## 5.4 Conclusion

En décrivant les différentes étapes permettant d'estimer le niveau d'hypovigilance d'un conducteur, ce chapitre met en avant les différentes grandeurs physiques nécessaires à la bonne détection des phases de baisse de vigilance. Il a notamment été montré qu'il était possible d'obtenir une très bonne estimation en ne considérant que des mesures non-intrusives pour le conducteur. Il serait maintenant intéressant de valider ce résultat à travers des données issues de conduites réelles.



## Chapitre 6

# Conclusion générale

Dans ce manuscrit de thèse, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide et à la détection de l'hypovigilance au volant, qui est une application dont la connaissance de l'attitude est utile. Plus particulièrement, nous nous sommes penchés sur trois problématiques : l'estimation de l'attitude lorsque le corps est soumis à une accélération externe non-négligeable, la synthèse d'un observateur adaptatif permettant d'estimer conjointement l'état et les paramètres inconnus d'une classe de systèmes non-linéaires incertains possédant des sorties multi-échantillonnées et la détection de l'hypovigilance au volant à partir de mesures non-intrusives.

La première contribution est présentée dans le chapitre 3. En effet, comme nous l'avons vu, l'estimation de l'attitude se trouve dégradée si le corps considéré est accéléré. Il faut donc prendre en compte ce phénomène explicitement. Nous avons donc proposé un observateur permettant de limiter les effets hautes-fréquences de l'accélération externe. À cet effet, nous avons réécrit le modèle dynamique de l'attitude en intégrant un filtre passe-bas. La sortie de ce nouveau modèle est approximativement égale aux vecteurs de mesures connus dans le repère fixe. Dans ce cadre, nous avons synthétisé des observateurs d'état, sur ce nouveau modèle, permettant d'estimer l'attitude tout en diminuant l'impact de l'accélération externe sur la qualité de l'estimation de l'orientation. Les performances des observateurs proposés ont été illustrées à travers des simulations et dans un contexte réel en les comparant avec celles d'un observateur de référence synthétisé par Robert Mahony (MAHONY, HAMEL et PFLIMLIN (2008)). Le travail réalisé pour cette problématique a été présenté dans une conférence dans BONARGENT, MENARD, PIGEON et GEHAN (2019).

La deuxième contribution, exposée dans le chapitre 4, concerne les observateurs adaptatifs permettant d'estimer conjointement l'état et les paramètres inconnus d'une classe de

systèmes non-linéaires incertains possédant des sorties multi-échantillonnées. En effet, dans un contexte réel, chaque capteur d'un système peut avoir des périodes d'échantillonnages irrégulières et indépendantes des autres capteurs. De plus, certains systèmes présentent des paramètres inconnus qu'il faut estimer ainsi que des incertitudes. Nous avons proposé un observateur de type grand gain qui permet d'estimer l'état et les paramètres inconnus pour cette classe de systèmes. L'observateur proposé a été appliqué au problème de l'estimation de l'attitude lorsque les mesures du gyromètre sont biaisées afin d'estimer la matrice de rotation décrivant l'attitude et le biais constant du gyromètre. Ce travail a donné lieu à une communication dans une conférence avec BONARGENT, MÉNARD, PIGEON, POULIQUEN et GEHAN (2020) et a été soumis dans une revue dans BONARGENT, MÉNARD, GEHAN et PIGEON (2020).

La dernière contribution, traitée dans le chapitre 5, concerne la détection de l'hypovigilance au volant. En effet, nous avons montré qu'il est possible d'estimer un niveau d'hypovigilance fiable à partir de données non-intrusives pour le conducteur. Ce résultat, que nous avons établi à partir de données issues d'un simulateur de conduite dans le cadre du projet européen DCUBE, permet de confirmer l'idée qu'il est possible de concevoir un dispositif permettant de prévenir le conducteur qu'il est hypovigilant. Ce dispositif a cependant besoin de connaître avec précision les données concernant le véhicule. Ces données peuvent être estimées à l'aide d'un algorithme estimant l'attitude du véhicule. Nous avons montré notamment que, pour détecter l'hypovigilance, il est possible d'utiliser le rythme cardiaque (pouvant être mesuré par une montre) et des données concernant le véhicule, telles que la position latérale de la voiture sur la route et l'accélération du véhicule. Nous avons montré avec ce résultat qu'il est possible de concevoir un dispositif permettant de détecter les phases d'hypovigilance dans un contexte réel, avec des grandeurs facilement mesurables et ne gênant pas le conducteur.

Le travail réalisé dans ce manuscrit permet d'ouvrir plusieurs perspectives :

- La première concerne la prise en compte de l'accélération externe pour ne pas dégrader la qualité de l'estimation de l'attitude. Nous avons utilisé, dans ce manuscrit, un filtre passe-bas conjointement avec un observateur pour estimer l'attitude limitant ainsi les effets de l'accélération externe. Le filtre qui a été considéré est d'ordre 1. La considération de filtres basse-bas d'ordre supérieur permettrait de mieux filtrer l'accélération externe et ainsi d'améliorer les performances.

- 
- Nous avons vu qu'en situation réelle, la structure du gyromètre peut entraîner un biais dans les mesures de la vitesse de rotation. Aussi, il pourrait être intéressant, dans la problématique de la présence d'accélération externe, d'intégrer l'estimation du biais du gyromètre afin de répondre simultanément aux deux principaux obstacles de l'estimation de l'attitude.
  - Les résultats concernant la détection de l'hypovigilance montrent qu'il est possible d'estimer un niveau d'hypovigilance à partir de données non-intrusives. Ces résultats ont été obtenus à partir d'une étude sur un simulateur de conduite. Il serait maintenant intéressant de valider cette hypothèse dans le cadre de conduites réelles en se servant des algorithmes d'estimation de l'attitude.



## Annexe A

# Rappels sur des notions concernant les rotations

### A.1 Rotation dans l'espace

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension trois. On appelle rotation d'axe  $u$  et d'angle  $\theta$  la transformation qui à tout point  $M$  de  $E$  associe le point  $M'$  définie de la façon suivante. Si  $P$  est le plan orthogonal à  $u$  passant par  $M$  et  $C$  est le point d'intersection entre  $u$  et  $P$ , alors  $M'$  est l'image de  $M$  de la rotation plane dans  $P$  de centre  $C$  et d'angle  $\theta$ .

La représentation d'une tel rotation est illustrée figure A.1.

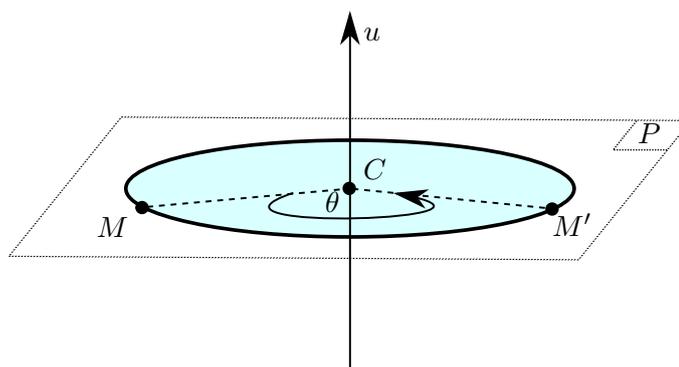


FIGURE A.1 – Représentation d'une rotation dans l'espace

## A.2 Matrice de rotation

Les matrices de rotations possèdent des caractéristiques particulières qui vont être rappelées. Soit une matrice  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .  $R$  est une matrice de rotation de dimension 3 si elle vérifie deux conditions.

La matrice  $R$  doit d'abord vérifier la relation suivante

$$RR^T = R^T R = I_3. \quad (\text{A.1})$$

Une matrice vérifiant seulement cette condition est appelée matrice orthogonale. Une matrice orthogonale représente des transformations unitaires telles que des rotations ou des réflexions. La condition (A.1) permet de montrer que  $R^{-1} = R^T$ . Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut  $\det(R) \pm 1$ .

Pour qu'une matrice orthogonale soit une matrice de rotation, il faut également que la condition suivante soit respectée

$$\det(R) = +1 \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, les matrices rotation correspondent au groupe spécial orthogonal  $SO(3)$  définie par

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I_3, \det(R) = 1\} \quad (\text{A.3})$$

## A.3 Quaternion

Un quaternion est nombre hypercomplexe qui peut s'écrire sous la forme

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (\text{A.4})$$

où  $q_0, q_1, q_2$  et  $q_3$  sont des nombres réels et,  $i, j$  et  $k$  sont des symboles.

L'ensemble des quaternions  $\mathbb{Q}$  est un espace vectoriel de dimension 4 dont la norme est la norme euclidienne. Il forme aussi un groupe s'il est muni de la multiplication de quaternions  $\otimes$ . Cette multiplication est distributive et associative mais pas commutative.

Les symboles  $i, j$  et  $k$  respectent les relations suivantes

$$i \otimes i = j \otimes j = k \otimes k = i \otimes j \otimes k = -1 \quad (\text{A.5})$$

À partir de ces relations, on peut montrer que

$$i \otimes j = -j \otimes i = k \quad j \otimes k = -k \otimes j = i \quad k \otimes i = -i \otimes k = j \quad (\text{A.6})$$

Il est possible d'adopter une représentation vectoriel d'un quaternion en notant

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_u \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

avec  $q_0$  la composante scalaire et  $q_u = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$  la composante vectorielle.

Le conjugué d'un quaternion  $q = (q_0, q_u^T)^T$  est  $\bar{q} = (q_0, -q_u^T)^T$ .

De plus, la norme d'un quaternion  $\|q\|$  est définie par

$$\|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q \otimes \bar{q} \quad (\text{A.8})$$

Ce qui permet d'introduire le quaternion inverse  $q^{-1}$ . Si  $\|q\| \neq 0$ , on a

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \quad (\text{A.9})$$

Le produit de deux quaternions  $q = (q_0, q_u^T)^T$  et  $p = (p_0, p_u^T)^T$  peut s'écrire

$$q \otimes p = \begin{pmatrix} q_0 p_0 - q_u \cdot p_u \\ q_0 p_u + p_0 q_u + q_u \wedge p_u \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

où  $\wedge$  correspond au produit vectoriel et  $\cdot$  au produit scalaire.

Il est également possible de montrer qu'en considérant un quaternion  $q = (q_0, q_u^T)^T$  et un vecteur  $\omega \in \mathbb{R}^3$  on ait la relation suivante

$$\Omega(\omega)q = \Xi(q)\omega \quad (\text{A.11})$$

avec  $\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\omega_\times \end{pmatrix}$  et  $\Xi(q) = \begin{pmatrix} -q_u^T \\ q_0 I_3 + (q_u)_\times \end{pmatrix}$



## Annexe B

# Preuves des inégalités du chapitre 4

### B.1 Preuve de l'inégalité 1

On a

$$\|\Delta_i(\theta)\tilde{g}^i\|^2 = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \theta^{-2(j-1)\delta_i} \|\tilde{g}_j^i\|^2 \quad (\text{B.1})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\lambda_i} (L_g^i)^2 \theta^{-2(j-1)\delta_i} \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|) \right) + \left( \sum_{k=1}^j \|\tilde{x}_k^i\|^2 \right) + \left( \sum_{l=1, \nu_l^i < j}^{p_i} \|\tilde{\rho}_l^i\|^2 \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^{\lambda_i} (L_g^i)^2 \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\lambda_i} (L_g^i)^2 \left( \sum_{k=1}^j \theta^{-2(j-1)\delta_i + 2(k-1)\delta_i} \|\tilde{x}_k^i\|^2 \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\lambda_i} (L_g^i)^2 \left( \sum_{l=1, \nu_l^i < j}^{p_i} \theta^{-2(j-1)\delta_i + 2\nu_l^i \delta_i} \|\tilde{\rho}_l^i\|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\leq (L_g^i)^2 \sum_{j=1}^{\lambda_i} \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|^2) \right) + (\|\tilde{x}^i\|^2 + \|\tilde{\rho}^i\|^2) \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\leq (L_g^i)^2 \lambda_i \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|^2) \right) + (\|\eta^i\|^2 + (1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2) \|\tilde{\rho}^i\|^2) \right] \quad (\text{B.5})$$

où l'inégalité (B.2) vient de la structure de  $g$  donnée par (4.7) et (4.10), et l'inégalité (B.5) est obtenue en utilisant le fait que  $\bar{x}^i = \eta^i + \Upsilon^i \bar{\rho}^i$  et le lemme 4.1. Finalement, on obtient

$$\|\Delta_i(\theta)\tilde{g}^i\|^2 \leq (L_g^i)^2 \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|^2) \right) + (L_g^i)^2 \lambda_i \left( \frac{V_1^i(\eta^i)}{\lambda_{\min}(S_i)} + \frac{(1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2)V_2^i(\bar{\rho}^i)}{\lambda_{\min}(P_i^{-1})} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\leq (L_g^i)^2 \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|^2) \right) + (L_g^i)^2 \lambda_i \left( \frac{V_1^i(\eta^i)}{\lambda_{\min}(S_i)} + \frac{(1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2)V_2^i(\bar{\rho}^i)}{\gamma_i} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\leq (L_g^i)^2 \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} (\|\tilde{x}^k\|^2 + \|\tilde{\rho}^k\|^2) \right) + \frac{(L_g^i)^2 \lambda_i (1 + (\Upsilon_{\max}^i)^2)}{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)} V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i) \quad (\text{B.8})$$

où l'inégalité (B.7) est obtenues en utilisant l'hypothèse 4.6 et la remarque 4.5.

## B.2 Preuve de l'inégalité 2

Similairement à la preuve de l'inégalité 1, on a

$$\|\Delta_i(\theta)\tilde{\Psi}^i \rho^i\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\lambda_i} \theta^{-2(j-1)\delta_i} \|\tilde{\Psi}_j^i\|^2 \|\rho^i\|^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\lambda_i} (L_{\Psi}^i)^2 \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + \left( \sum_{k=1}^j \theta^{-2(j-1)\delta_i} \|\tilde{x}_k^i\|^2 \right) \right] (\rho_{\max}^i)^2 \quad (\text{B.10})$$

$$\leq (L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \sum_{j=1}^{\lambda_i} \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + \|\tilde{x}^i\|^2 \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\leq (L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \lambda_i \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + (\|\eta^i\|^2 + (\Upsilon_{\max}^i)^2 \|\bar{\rho}^i\|^2) \right] \quad (\text{B.12})$$

où l'inégalité (B.10) est obtenue en utilisant la structure de  $\Psi^i$  donnée par (4.8) et la notation introduite dans la remarque 4.4 et l'inégalité (B.12) est obtenue en utilisant le fait

que  $\bar{x}^i = \eta^i + \Upsilon^i \bar{\rho}^i$  et le lemme 4.1. Finalement, on obtient

$$\|\Delta_i(\theta) \tilde{\Psi}^i \rho^i\|^2 \leq (L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \lambda_i \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + \left( \frac{V_1^i(\eta^i)}{\lambda_{\min}(S_i)} + \frac{(\Upsilon_{\max}^i)^2 V_2^i(\bar{\rho}^i)}{\lambda_{\min}(P_i^{-1})} \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\leq (L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \lambda_i \left[ \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + \left( \frac{V_1^i(\eta^i)}{\lambda_{\min}(S_i)} + \frac{(\Upsilon_{\max}^i)^2 V_2^i(\bar{\rho}^i)}{\gamma_i} \right) \right] \quad (\text{B.14})$$

$$\leq (L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} \|\tilde{x}^k\|^2 \right) + \frac{(L_{\Psi}^i)^2 (\rho_{\max}^i)^2 \lambda_i \max(1, (\Upsilon_{\max}^i)^2)}{\min(\lambda_{\min}(S_i), \gamma_i)} V^i(\eta^i, \bar{\rho}^i) \quad (\text{B.15})$$

où l'inégalité (B.14) est obtenue en utilisant l'hypothèse 4.6 et la remarque 4.5.

### B.3 Preuve de l'inégalité 3

La dérivée de  $z^i$  est donnée par

$$\dot{z}^i = \dot{\rho}^i - C^i \dot{\bar{x}}^i(t) \quad (\text{B.16})$$

$$= -C^i \left( \theta^{\delta_i} A^i \bar{x}^i + \Delta_i(\theta) [\tilde{g}^i + \tilde{\Psi}^i \rho^i] + \theta^{\delta_i} \Psi^i \bar{\rho}^i \right) \quad (\text{B.17})$$

Ainsi, l'utilisation du fait que  $z^i(t_{k_i}^i) = 0$  permet de montrer que

$$z^i(t) = - \int_{t_{k_i}^i}^t C^i \left( \theta^{\delta_i} A^i \bar{x}^i(s) + \Delta_i(\theta) [\tilde{g}^i(s) + \tilde{\Psi}^i(s) \rho^i] + \theta^{\delta_i} \Psi^i(s) \bar{\rho}^i \right) ds \quad (\text{B.18})$$

$$\|z^i(t)\| \leq \int_{t-\tau_M^i}^t \left\| C^i \left( \theta^{\delta_i} A^i \bar{x}^i(s) + \Delta_i(\theta) [\tilde{g}^i(s) + \tilde{\Psi}^i(s) \rho^i] + \theta^{\delta_i} \Psi^i(s) \bar{\rho}^i \right) \right\| ds \quad (\text{B.19})$$

Procédons de la même manière que les inégalités 1 et 2, en utilisant le fait que  $\|C^i A^i\| = 1$  et en utilisant la notation  $\Psi_{\max}^i$  et  $\rho_{\max}^i$  comme dans la remarque 4.4, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \|z^i(t)\| &\leq \int_{t-\tau_M^i}^t \theta^{\delta_i} (\|\bar{x}^i(s)\| + \Psi_{\max}^i \|\bar{\rho}^i(s)\|) + (L_g^i (\|\bar{x}^i(s)\| + \|\bar{\rho}^i(s)\|) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \|\bar{x}^i(s)\|) ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} \left[ L_g^i (\|\tilde{x}^k(s)\| + \|\tilde{\rho}^k(s)\|) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \|\tilde{x}^k(s)\| \right] ds \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

L'utilisation du fait que  $\bar{x}^i = \eta^i + \Upsilon^i \bar{\rho}^i$  et du lemme 4.1 montre que  $\|x^i\| \leq \|\eta^i\| + \Upsilon_{\max}^i \|\bar{\rho}^i\|$ , et donc

$$\begin{aligned} \|z^i(t)\| &\leq \int_{t-\tau_M^i}^t \left( \theta^{\delta_i} + (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \right) \|\eta^i(s)\| ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_M^i}^t \left( \theta^{\delta_i} (\Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i) + (L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \Upsilon_{\max}^i) \right) \|\bar{\rho}^i(s)\| ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \|\tilde{x}^k(s)\| + L_g^i \|\bar{\rho}^k(s)\| \right] ds \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t-\tau_M^i}^t \frac{(\theta^{\delta_i} + L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \sqrt{V_1^i(s)} \\ &\quad + \frac{(\theta^{\delta_i} (\Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i) + (L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \Upsilon_{\max}^i))}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_i^{-1})}} \sqrt{V_2^i(s)} ds \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$+ \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \left[ \|\tilde{x}^k(s)\| + \|\bar{\rho}^k(s)\| \right] ds \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t-\tau_M^i}^t \frac{(\theta^{\delta_i} + L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \sqrt{V_1^i(s)} \\ &\quad + \frac{(\theta^{\delta_i} (\Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i) + (L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \Upsilon_{\max}^i))}{\sqrt{\gamma_i}} \sqrt{V_2^i(s)} ds \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$+ (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \|\tilde{x}^k(s)\| + \|\bar{\rho}^k(s)\| \right] ds \quad (\text{B.25})$$

où l'inégalité (B.25) est obtenue en utilisant l'hypothèse 4.6.

En utilisant l'inégalité  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \sqrt{a+b}$  pour  $a, b \geq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|z^i(t)\| &\leq \frac{\theta^{\delta_i} (\max(1, \Psi_{\max}^i + \Upsilon_{\max}^i)) + L_g^i (1 + \Upsilon_{\max}^i) + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i \max(1, \Upsilon_{\max}^i)}{\min(\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}, \sqrt{\gamma_i})} \sqrt{2} \\ &\quad \times \int_{t-\tau_M^i}^t \sqrt{V^i(s)} ds \\ &\quad + (L_g^i + L_{\Psi}^i \rho_{\max}^i) \int_{t-\tau_M^i}^t \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \|\tilde{x}^k(s)\| + \|\bar{\rho}^k(s)\| \right] ds \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

# Bibliographie

- AKERSTEDT, T. et M. GILLBERG (mai 1990). « Subjective and objective sleepiness in the active individual ». Dans : *The International Journal of Neuroscience* 52(1-2), p. 29-37. DOI : [10.3109/00207459008994241](https://doi.org/10.3109/00207459008994241) (cf. p. 97).
- ALIOUA, N. (mar. 2015). « Extraction et analyse des caractéristiques faciales : application à l'hypovigilance chez le conducteur ». Thèse de doct. INSA de Rouen. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01161968/document> (cf. p. 92).
- ANG, W. T., P. KHOSLA et C. RIVIERE (sept. 2004). « Kalman filtering for real-time orientation tracking of handheld microsurgical instrument ». Dans : *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. T. 3, 2574-2580 vol.3. DOI : [10.1109/IROS.2004.1389796](https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389796) (cf. p. 6).
- ARCAK, M. et D. NEŠIĆ (nov. 2004). « A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation ». Dans : *Automatica* 40(11), p. 1931-1938. DOI : [10.1016/j.automatica.2004.06.004](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.06.004) (cf. p. 60).
- ARMESTO, L. et J. TORNERO (sept. 2004). « SLAM based on Kalman filter for multi-rate fusion of laser and encoder measurements ». Dans : *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. T. 2, 1860-1865 vol.2. DOI : [10.1109/IROS.2004.1389668](https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389668) (cf. p. 57).
- ARMESTO, L., J. TORNERO et M. VINCZE (juin 2007). « Fast Ego-motion Estimation with Multi-rate Fusion of Inertial and Vision ». Dans : *The International Journal of Robotics Research* 26(6), p. 577-589. DOI : [10.1177/0278364907079283](https://doi.org/10.1177/0278364907079283) (cf. p. 57).
- AUBER, R., M. POULIQUEN, A. GOUDJIL, E. PIGEON, O. GEHAN, T. MENARD, P. A. CHAPON, S. MOUSSAY et T. BONARGENT (déc. 2019). « Identification for Switched FIR Linear Systems using Binary Measurements ». Dans : *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 791-796. DOI : [10.1109/CDC40024.2019.9029940](https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029940) (cf. p. iv).
- AZIM, T., M. A. JAFFAR et A. M. MIRZA (mai 2014). « Fully automated real time fatigue detection of drivers through Fuzzy Expert Systems ». Dans : *Applied Soft Computing* 18, p. 25-38. DOI : [10.1016/j.asoc.2014.01.020](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.01.020) (cf. p. 96).

- BACHMANN, E. R. (déc. 2000). « Inertial and magnetic tracking of limb segment orientation for inserting humans into synthetic environments. » Thèse de doct. Monterey, California. Naval Postgraduate School. URL : <https://calhoun.nps.edu/handle/10945/9341> (cf. p. 6).
- BAR-ITZHACK, I., J. DEUTSCHMANN et F. MARKLEY (1991). « Quaternion normalization in additive EKF for spacecraft attitude determination ». Dans : *Navigation and Control Conference*. American Institute of Aeronautics et Astronautics. DOI : [10.2514/6.1991-2706](https://doi.org/10.2514/6.1991-2706) (cf. p. 24).
- BASTIN, G. et M. GEVERS (juil. 1988). « Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 33(7), p. 650-658. DOI : [10.1109/9.1273](https://doi.org/10.1109/9.1273) (cf. p. 59).
- BATISTA, P., C. SILVESTRE et P. OLIVEIRA (fév. 2012). « Globally exponentially stable cascade observers for attitude estimation ». Dans : *Control Engineering Practice* 20(2), p. 148-155. DOI : [10.1016/j.conengprac.2011.10.005](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2011.10.005) (cf. p. 2, 28, 34).
- BATISTA, P., C. SILVESTRE et P. OLIVEIRA (déc. 2014). « Attitude and earth velocity estimation - Part I : Globally exponentially stable observer ». Dans : *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, p. 121-126. DOI : [10.1109/CDC.2014.7039369](https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7039369) (cf. p. 27, 28).
- BEIKZADEH, H. et H. J. MARQUEZ (sept. 2014). « Multirate Observers for Nonlinear Sampled-Data Systems Using Input-to-State Stability and Discrete-Time Approximation ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 59(9), p. 2469-2474. DOI : [10.1109/TAC.2014.2304377](https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2304377) (cf. p. 58).
- BERGASA, L., J. NUEVO, M. SOTELO, R. BAREA et M. LOPEZ (mar. 2006). « Real-Time System for Monitoring Driver Vigilance ». Dans : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 7(1), p. 63-77. DOI : [10.1109/TITS.2006.869598](https://doi.org/10.1109/TITS.2006.869598) (cf. p. 96).
- BHAT, S. P. et D. S. BERNSTEIN (jan. 2000). « A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon ». Dans : *Systems & Control Letters* 39(1), p. 63-70. DOI : [10.1016/S0167-6911\(99\)00090-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00090-0) (cf. p. 27).
- BISHOP, C. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Information Science and Statistics. Springer-Verlag : New York. ISBN : 978-0-387-31073-2 (cf. p. 106).
- BISHOP, C. M. (1995). *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, Inc. : USA. ISBN : 978-0-19-853864-6 (cf. p. 102, 103, 107).

- BISWAS, D. (avr. 2015). « Recognition of elementary upper limb movements in nomadic environment ». Thèse de doct. URL : <http://eprints.soton.ac.uk/id/eprint/381192> (cf. p. 16).
- BONARGENT, T., T. MÉNARD, O. GEHAN et E. PIGEON (2020). « Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with multi-rate outputs and uncertainties - Application to attitude estimation with gyro bias ». Dans : *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Soumis (cf. p. iii, 4, 120).
- BONARGENT, T., T. MENARD, E. PIGEON et O. GEHAN (déc. 2019). « Observer and first-order low-pass filter based attitude estimation for rigid bodies subject to external acceleration ». Dans : *Conference on Decision and Control*. IEEE : Nice, France, p. 629-634. DOI : [10.1109/CDC40024.2019.9030202](https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9030202) (cf. p. iii, 4, 119).
- BONARGENT, T., T. MÉNARD, E. PIGEON, M. POULIQUEN et O. GEHAN (mai 2020). « Observer design for nonlinear systems with multi-rate sampled outputs - Application to attitude estimation ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 997-1002. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143923](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143923) (cf. p. iii, 4, 120).
- BONARGENT, T., E. PIGEON, N. BESSOT, M. POULIQUEN, O. GEHAN, T. MENARD, D. DAVENNE et M. FRIKEL (mai 2018). « Amélioration de la qualité des quantificateurs reliés aux performances du conducteur pour la détermination de l'hypovigilance au volant ». Dans : *ICSAT'2018 International Conference on signals, Automatic and Telecommunications*. Beni Mellal, Morocco. URL : <https://hal-normandie-univ.archives-ouvertes.fr/hal-01838310> (cf. p. iii).
- BONARGENT, T., E. PIGEON, T. MARTIN, M. POULIQUEN, O. GEHAN, T. MENARD et M. M'SAAD (sept. 2018). « Identification of quantifiers related to circadian rhythm variations ». Dans : *UKACC International Conference on Control 2018*. IEEE : Sheffield, United Kingdom, p. 462-467. DOI : [10.1109/CONTROL.2018.8516835](https://doi.org/10.1109/CONTROL.2018.8516835) (cf. p. iv).
- BONNABEL, S., P. MARTIN et P. ROUCHON (déc. 2008). « Symmetry-preserving Observers ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 53(11), p. 2514-2526. DOI : [10.1109/TAC.2008.2006929](https://doi.org/10.1109/TAC.2008.2006929) (cf. p. 31).
- BOURAOU, I., M. FARZA, T. MÉNARD, R. BEN ABDENNOUR, M. M'SAAD et H. MOSRATI (2015). « Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs - Application to the estimation of kinetic rates in bioreactors ». Dans : *Automatica* 55, p. 78-87. DOI : [10.1016/j.automatica.2015.02.036](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.02.036) (cf. p. 58).
- BRYNE, T. H., J. M. HANSEN, R. H. ROGNE, N. SOKOLOVA, T. I. FOSSEN et T. A. JOHANSEN (juin 2017). « Nonlinear Observers for Integrated INS\GNSS Navigation :

- Implementation Aspects ». Dans : *IEEE Control Systems* 37(3), p. 59-86. DOI : [10.1109/MCS.2017.2674458](https://doi.org/10.1109/MCS.2017.2674458) (cf. p. 31).
- CACCAVALE, F., F. PIERRI et L. VILLANI (mar. 2008). « Adaptive Observer for Fault Diagnosis in Nonlinear Discrete-Time Systems ». Dans : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 130(2). DOI : [10.1115/1.2837310](https://doi.org/10.1115/1.2837310) (cf. p. 60).
- CHEN, L.-l., Y. ZHAO, J. ZHANG et J.-z. ZOU (nov. 2015). « Automatic detection of alertness/drowsiness from physiological signals using wavelet-based nonlinear features and machine learning ». Dans : *Expert Systems with Applications* 42(21), p. 7344-7355. DOI : [10.1016/j.eswa.2015.05.028](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.05.028) (cf. p. 93, 108, 115).
- CHENG, Y. et J. CRASSIDIS (2004). « Particle Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation ». Dans : *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics et Astronautics. DOI : [10.2514/6.2004-5337](https://doi.org/10.2514/6.2004-5337) (cf. p. 25).
- CHUN-LIN, L. (2010). « A Tutorial of the Wavelet Transform ». Dans : *NTUEE* (cf. p. 99).
- COOMANS, D. et D. L. MASSART (jan. 1982). « Alternative k-nearest neighbour rules in supervised pattern recognition : Part 1. k-Nearest neighbour classification by using alternative voting rules ». Dans : *Analytica Chimica Acta* 136, p. 15-27. DOI : [10.1016/S0003-2670\(01\)95359-0](https://doi.org/10.1016/S0003-2670(01)95359-0) (cf. p. 103, 104).
- CRASSIDIS, J. L. et F. L. MARKLEY (2003). « Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation ». Dans : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26(4), p. 536-542. DOI : [10.2514/2.5102](https://doi.org/10.2514/2.5102) (cf. p. 25).
- CRASSIDIS, J. L. M. (mai 1996). « Attitude Estimation Using Modified Rodrigues Parameters ». Dans : *Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium 1996*. URL : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19960035754> (cf. p. 22).
- CROO, H., M BANDMANN, M MACKAY, K RUMAR et P VOLLENHOVEN (2001). *The role of driver fatigue in commercial road transport crashes*. European Transport Safety Council. URL : <https://etsc.eu/the-role-of-driver-fatigue-in-commercial-road-transport-crashes/> (cf. p. 3, 90, 91).
- CROWE, J. A., N. M. GIBSON, M. S. WOOLFSON et M. G. SOMEKH (mai 1992). « Wavelet transform as a potential tool for ECG analysis and compression ». Dans : *Journal of Biomedical Engineering*. Annual Scientific Meeting 14(3), p. 268-272. DOI : [10.1016/0141-5425\(92\)90063-Q](https://doi.org/10.1016/0141-5425(92)90063-Q) (cf. p. 98).
- DAZA, I., L. BERGASA, S. BRONTE, J. YEBES, J. ALMAZÁN et R. ARROYO (jan. 2014). « Fusion of Optimized Indicators from Advanced Driver Assistance Systems (ADAS)

- for Driver Drowsiness Detection ». Dans : *Sensors* 14(1), p. 1106-1131. DOI : [10.3390/s140101106](https://doi.org/10.3390/s140101106) (cf. p. [91](#), [94](#), [96](#), [101](#), [102](#), [108](#)).
- DONG, Y., Z. HU, K. UCHIMURA et N. MURAYAMA (juin 2011). « Driver Inattention Monitoring System for Intelligent Vehicles : A Review ». Dans : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 12(2), p. 596-614. DOI : [10.1109/TITS.2010.2092770](https://doi.org/10.1109/TITS.2010.2092770) (cf. p. [3](#), [91-97](#), [100](#)).
- ELKAIM, G. H. (2002). « System identification for precision control of a wingsailed GPS-guided catamaran ». Thèse de doct. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002PhDT.....11E> (cf. p. [6](#)).
- FADALI, M. S. (jan. 2003). « Observer-based robust fault detection of multirate linear system using a lift reformulation ». Dans : *Computers & Electrical Engineering* 29(1), p. 235-243. DOI : [10.1016/S0045-7906\(01\)00008-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7906(01)00008-8) (cf. p. [56](#)).
- FARZA, M., I. BOURAOUI, T. MÉNARD, R. BEN ABDENNOUR et M. M'SAAD (juin 2014). « Sampled output observer design for a class of nonlinear systems ». Dans : *2014 European Control Conference (ECC)*, p. 312-317. DOI : [10.1109/ECC.2014.6862309](https://doi.org/10.1109/ECC.2014.6862309) (cf. p. [58](#)).
- FARZA, M., M. M'SAAD, M. L. FALL, E. PIGEON, O. GEHAN et R. MOSRATI (avr. 2014). « Continuous-Discrete Time Observer for a class of MIMO Nonlinear Systems ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control*, p. 1060 -1065. DOI : [10.1109/TAC.2013.2283754](https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2283754) (cf. p. [58](#)).
- FARZA, M., M. M'SAAD, T. MAATOUG et M. KAMOUN (oct. 2009). « Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems ». Dans : *Automatica* 45(10), p. 2292-2299. DOI : [10.1016/j.automatica.2009.06.008](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.06.008) (cf. p. [67](#)).
- FARZA, M., M. M'SAAD, T. MÉNARD, A. LTAIEF et T. MAATOUG (avr. 2018). « Adaptive observer design for a class of nonlinear systems. Application to speed sensorless induction motor ». Dans : *Automatica* 90, p. 239-247. DOI : [10.1016/j.automatica.2017.12.058](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.12.058) (cf. p. [59](#)).
- FARZA, M., I. BOURAOUI, T. MÉNARD, R. BEN ABDENNOUR et M. M'SAAD (nov. 2014). « Adaptive observers for a class of uniformly observable systems with nonlinear parametrization and sampled outputs ». Dans : *Automatica* 50(11), p. 2951-2960. DOI : [10.1016/j.automatica.2014.10.032](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.032) (cf. p. [2](#), [60](#)).
- FATEHI, A. et B. HUANG (mai 2017). « Kalman filtering approach to multi-rate information fusion in the presence of irregular sampling rate and variable measurement delay ». Dans : *Journal of Process Control* 53, p. 15-25. DOI : [10.1016/j.jprocont.2017.02.010](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2017.02.010) (cf. p. [57](#)).

- FEDDAOUI, A., N. BOIZOT, E. BUSVELLE et V. HUGEL (oct. 2018). « High-gain extended Kalman filter for continuous-discrete systems with asynchronous measurements ». Dans : *International Journal of Control* 0(0), p. 1-14. DOI : [10.1080/00207179.2018.1539525](https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1539525) (cf. p. 58).
- FOURATI, H., N. MANAMANNI, L. AFILAL et Y. HANDRICH (oct. 2009). « A rigid body attitude estimation for Bio-logging application : A quaternion-based nonlinear filter approach ». Dans : *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 558-563. DOI : [10.1109/IRoS.2009.5354478](https://doi.org/10.1109/IRoS.2009.5354478) (cf. p. 26).
- FOURATI, H., N. MANAMANNI, L. AFILAL et Y. HANDRICH (fév. 2014). « Complementary Observer for Body Segments Motion Capturing by Inertial and Magnetic Sensors ». Dans : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19(1), p. 149-157. DOI : [10.1109/TMECH.2012.2225151](https://doi.org/10.1109/TMECH.2012.2225151) (cf. p. 6).
- FOURATI, H., N. MANAMANNI et Y. HANDRICH (fév. 2012). « Fusion de données, estimation de la posture et navigation à l'estime : Application au Bio-logging ». Thèse de doct. Editions Universitaires Européennes. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00690144> (cf. p. 6).
- FRIEDRICHS, F. (août 2010). « Drowsiness Monitoring by Steering and Lane Data based Features under Real Driving Conditions ». Dans : Zenodo. DOI : [10.5281/zenodo.42038](https://doi.org/10.5281/zenodo.42038) (cf. p. 101).
- GAUTHIER, J. P., H. HAMMOURI et S. OTHMAN (juin 1992). « A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(6), p. 875-880. DOI : [10.1109/9.256352](https://doi.org/10.1109/9.256352) (cf. p. 57).
- GOPALAKRISHNAN, A., N. S. KAISARE et S. NARASIMHAN (jan. 2011). « Incorporating delayed and infrequent measurements in Extended Kalman Filter based nonlinear state estimation ». Dans : *Journal of Process Control* 21(1), p. 119-129. DOI : [10.1016/j.jprocont.2010.10.013](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.10.013) (cf. p. 57).
- GOUDJIL, A., M. POULIQUEN, E. PIGEON, O. GEHAN et T. BONARGENT (mai 2020). « Continuous-time Identification for a class of Switched Linear Systems ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 521-526. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143853](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143853) (cf. p. iv).
- GRAMATIKOV, B. et I. GEORGIEV (mai 1995). « Wavelets as alternative to short-time Fourier transform in signal-averaged electrocardiography ». Dans : *Medical and Biological Engineering and Computing* 33(3), p. 482-487. DOI : [10.1007/BF02510534](https://doi.org/10.1007/BF02510534) (cf. p. 98).
- GRIP, H. F., T. I. FOSSEN, T. A. JOHANSEN et A. SABERI (juin 2013). « Nonlinear observer for GNSS-aided inertial navigation with quaternion-based attitude estimation ». Dans :

- 2013 American Control Conference*, p. 272-279. DOI : [10.1109/ACC.2013.6579849](https://doi.org/10.1109/ACC.2013.6579849) (cf. p. 31).
- GRIP, H. F., A. SABERI et T. A. JOHANSEN (sept. 2011). « Estimation of states and parameters for linear systems with nonlinearly parameterized perturbations ». Dans : *Systems & Control Letters* 60(9), p. 771-777. DOI : [10.1016/j.sysconle.2011.03.012](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.03.012) (cf. p. 59).
- GRIP, H. F., T. I. FOSSEN, T. A. JOHANSEN et A. SABERI (jan. 2015). « Globally exponentially stable attitude and gyro bias estimation with application to GNSS/INS integration ». Dans : *Automatica* 51, p. 158-166. DOI : [10.1016/j.automatica.2014.10.076](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.076) (cf. p. 30, 31).
- GRIP, H. F., A. SABERI et T. A. JOHANSEN (juil. 2012). « Observers for interconnected nonlinear and linear systems ». Dans : *Automatica* 48(7), p. 1339-1346. DOI : [10.1016/j.automatica.2012.04.008](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.04.008) (cf. p. 31).
- GUYADER, A. et Q. ZHANG (sept. 2003). « Adaptive Observer for Discrete Time Linear Time Varying Systems ». Dans : *IFAC Proceedings Volumes*. 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2003), Rotterdam, The Netherlands, 27-29 August, 2003 36(16), p. 1705-1710. DOI : [10.1016/S1474-6670\(17\)35006-1](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35006-1) (cf. p. 60).
- HALL, J. K., N. B. KNOEBEL et T. W. MCLAIN (mai 2008). « Quaternion attitude estimation for miniature air vehicles using a multiplicative extended Kalman filter ». Dans : *2008 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, p. 1230-1237. DOI : [10.1109/PLANS.2008.4570043](https://doi.org/10.1109/PLANS.2008.4570043) (cf. p. 24).
- HANN, C. A. B. et T. AHMED-ALI (2014). « Continuous adaptive observer for state affine sampled-data systems ». Dans : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 24(4), p. 669-681. DOI : [10.1002/rnc.2912](https://doi.org/10.1002/rnc.2912) (cf. p. 60).
- HAY, M., T. BONARGENT, E. PIGEON, M. POULIQUEN, D. DAVENNE et N. BESSOT (oct. 2018). *Détermination d'algorithmes de prédiction de l'hypovigilance chez des volontaires sains sur simulateur de conduite Projet DCube (Driving Drowsiness Detection)*. Published : Colloque GDR sommeil - Les nouvelles méthodologies en sommeil. URL : <https://hal-normandie-univ.archives-ouvertes.fr/hal-02135263> (cf. p. iii).
- HERNÁNDEZ-GONZÁLEZ, O., M. FARZA, T. MÉNARD, B. TARGUI, M. M'SAAD et C. M. ASTORGA-ZARAGOZA (déc. 2016). « A cascade observer for a class of MIMO non uniformly observable systems with delayed sampled outputs ». Dans : *Systems & Control Letters* 98, p. 86-96. DOI : [10.1016/j.sysconle.2016.10.006](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.10.006) (cf. p. 58).

- HLAWATSCH, F. et F. AUGER, éd. (2008). *Time-frequency analysis : concepts and methods*. Digital signal and image processing series - DSP. ISTE : London. ISBN : 978-1-84821-033-2 (cf. p. 98, 99).
- HU, S. et G. ZHENG (mai 2009). « Driver drowsiness detection with eyelid related parameters by Support Vector Machine ». Dans : *Expert Systems with Applications* 36(4), p. 7651-7658. DOI : [10.1016/j.eswa.2008.09.030](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.09.030) (cf. p. 104, 106).
- HUA, M., G. DUCARD, T. HAMEL, R. MAHONY et K. RUDIN (jan. 2014). « Implementation of a Nonlinear Attitude Estimator for Aerial Robotic Vehicles ». Dans : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22(1), p. 201-213. DOI : [10.1109/TCST.2013.2251635](https://doi.org/10.1109/TCST.2013.2251635) (cf. p. 6).
- HUA, M.-D. (juil. 2010). « Attitude estimation for accelerated vehicles using GPS/INS measurements ». Dans : *Control Engineering Practice*. Special Issue on Aerial Robotics 18(7), p. 723-732. DOI : [10.1016/j.conengprac.2010.01.016](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2010.01.016) (cf. p. 2, 31).
- HUA, M.-D., P. MARTIN et T. HAMEL (jan. 2016). « Stability analysis of velocity-aided attitude observers for accelerated vehicles ». Dans : *Automatica* 63, p. 11-15. DOI : [10.1016/j.automatica.2015.10.014](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.10.014) (cf. p. 31).
- HWANG, T., M. KIM, S. HONG et K. S. PARK (août 2016). « Driver drowsiness detection using the in-ear EEG ». Dans : *2016 38th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, p. 4646-4649. DOI : [10.1109/EMBC.2016.7591763](https://doi.org/10.1109/EMBC.2016.7591763) (cf. p. 94).
- JANSSEN, W. (mar. 2003). *Comment améliorer le comportement du conducteur pour qu'il soit sûr - La fatigue du conducteur ?* OECD Publishing. ISBN : 978-92-821-2304-1 (cf. p. 100).
- JO, J., S. J. LEE, K. R. PARK, I.-J. KIM et J. KIM (mar. 2014). « Detecting driver drowsiness using feature-level fusion and user-specific classification ». Dans : *Expert Systems with Applications* 41(4), p. 1139-1152. DOI : [10.1016/j.eswa.2013.07.108](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.07.108) (cf. p. 96, 101, 115).
- JOHANSEN, T. A., J. M. HANSEN et T. I. FOSSEN (oct. 2016). « Nonlinear Observer for Tightly Integrated Inertial Navigation Aided by Pseudo-Range Measurements ». Dans : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 139(1). DOI : [10.1115/1.4034496](https://doi.org/10.1115/1.4034496) (cf. p. 31).
- KARTSCH, V. J., S. BENATTI, P. D. SCHIAVONE, D. ROSSI et L. BENINI (sept. 2018). « A sensor fusion approach for drowsiness detection in wearable ultra-low-power systems ». Dans : *Information Fusion* 43, p. 66-76. DOI : [10.1016/j.inffus.2017.11.005](https://doi.org/10.1016/j.inffus.2017.11.005) (cf. p. 115).

- KAZANTZIS, N. et C. KRAVARIS (juil. 1998). « Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem ». Dans : *Systems & Control Letters* 34(5), p. 241-247. DOI : [10.1016/S0167-6911\(98\)00017-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(98)00017-6) (cf. p. [57](#), [58](#)).
- KHALIL, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. ISBN : 978-0-13-067389-3 (cf. p. [40](#)).
- KHUSHABA, R. N., S. KODAGODA, S. LAL et G. DISSANAYAKE (jan. 2011). « Driver drowsiness classification using fuzzy wavelet-packet-based feature-extraction algorithm ». Dans : *IEEE transactions on bio-medical engineering* 58(1), p. 121-131. DOI : [10.1109/TBME.2010.2077291](https://doi.org/10.1109/TBME.2010.2077291) (cf. p. [93](#), [103](#), [115](#)).
- KIANI, M. et S. H. POURTAKDOUST (déc. 2014). « Adaptive Square-Root Cubature-Quadrature Kalman Particle Filter for satellite attitude determination using vector observations ». Dans : *Acta Astronautica* 105(1), p. 109-116. DOI : [10.1016/j.actaastro.2014.08.021](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.08.021) (cf. p. [25](#)).
- KIM, A. et M. GOLNARAGHI (avr. 2004). « A quaternion-based orientation estimation algorithm using an inertial measurement unit ». Dans : *PLANS 2004. Position Location and Navigation Symposium (IEEE Cat. No.04CH37556)*, p. 268-272. DOI : [10.1109/PLANS.2004.1309003](https://doi.org/10.1109/PLANS.2004.1309003) (cf. p. [22](#)).
- KOCH, D., D. WHEELER, R. BEARD, T. MCLAIN et K. BRINK (août 2017). « Relative Multiplicative Extended Kalman Filter for Observable GPS-Denied Navigation ». Dans : *Faculty Publications*. URL : <http://hdl.lib.byu.edu/1877/3919> (cf. p. [23](#)).
- KREISSELMEIER, G. (fév. 1977). « Adaptive observers with exponential rate of convergence ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 22(1), p. 2-8. DOI : [10.1109/TAC.1977.1101401](https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401) (cf. p. [59](#)).
- KUIPERS, J. B. (2000). *Quaternions and rotation sequences*. Princeton University Press. ISBN : 978-0-691-10298-6 (cf. p. [12](#)).
- LEE, J. K., E. J. PARK et S. N. ROBINOVITCH (août 2012). « Estimation of Attitude and External Acceleration Using Inertial Sensor Measurement During Various Dynamic Conditions ». Dans : *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 61(8), p. 2262-2273. DOI : [10.1109/TIM.2012.2187245](https://doi.org/10.1109/TIM.2012.2187245) (cf. p. [31](#), [32](#)).
- LEFFENS, E., F. MARKLEY et M. SHUSTER (1982). « Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation ». Dans : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 5(5), p. 417-429. DOI : [10.2514/3.56190](https://doi.org/10.2514/3.56190) (cf. p. [2](#), [22](#), [23](#)).
- LÉGER, P. (1999). « Gyroscopes mécaniques vibrants ». Dans : *Techniques de l'ingénieur Grandeurs mécaniques*. URL : <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/grandeurs-mecaniques-42407210/gyroscopes-mecaniques-vibrants-r1942/> (cf. p. [16](#)).

- LERNER, G. (1978). « Three-Axis Attitude Determination ». Dans : *Spacecraft Attitude Determination and Control*. James R. Wertz, Dordrecht, Holland, D. Reidel. Astrophysics and Space Science Library. ISBN : 978-94-009-9907-7. DOI : [10.1007/978-94-009-9907-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7_12) (cf. p. 18).
- LI, W., S. L. SHAH et D. XIAO (jan. 2008). « Kalman filters in non-uniformly sampled multirate systems : For FDI and beyond ». Dans : *Automatica* 44(1), p. 199-208. DOI : [10.1016/j.automatica.2007.05.009](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.05.009) (cf. p. 57).
- LI, Z., Q. ZHANG et X. ZHAO (sept. 2017). « Performance analysis of K-nearest neighbor, support vector machine, and artificial neural network classifiers for driver drowsiness detection with different road geometries ». Dans : *International Journal of Distributed Sensor Networks* 13(9). DOI : [10.1177/1550147717733391](https://doi.org/10.1177/1550147717733391) (cf. p. 104, 108).
- LIANG, Y., M. L. REYES et J. D. LEE (juin 2007). « Real-Time Detection of Driver Cognitive Distraction Using Support Vector Machines ». Dans : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 8(2), p. 340-350. DOI : [10.1109/TITS.2007.895298](https://doi.org/10.1109/TITS.2007.895298) (cf. p. 96, 106, 115).
- LING, C. et C. KRAVARIS (déc. 2017). « Multi-rate sampled-data observers based on a continuous-time design ». Dans : *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 3664-3669. DOI : [10.1109/CDC.2017.8264198](https://doi.org/10.1109/CDC.2017.8264198) (cf. p. 58).
- LOH, A.-P., A. ANNASWAMY et F. SKANTZE (sept. 1999). « Adaptation in the presence of a general nonlinear parameterization : an error model approach ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(9), p. 1634-1652. DOI : [10.1109/9.788531](https://doi.org/10.1109/9.788531) (cf. p. 59).
- LÓPEZ-NEGRETE, R. et L. T. BIEGLER (avr. 2012). « A Moving Horizon Estimator for processes with multi-rate measurements : A Nonlinear Programming sensitivity approach ». Dans : *Journal of Process Control* 22(4), p. 677-688. DOI : [10.1016/j.jprocont.2012.01.013](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2012.01.013) (cf. p. 57).
- LUDERS, G. et K. NARENDRA (oct. 1973). « An adaptive observer and identifier for a linear system ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 18(5), p. 496-499. DOI : [10.1109/TAC.1973.1100369](https://doi.org/10.1109/TAC.1973.1100369) (cf. p. 59).
- MAHACHANDRA, M., YASSIERLI, I. Z. SUTALAKSANA et K. SURYADI (juil. 2012). « Sensitivity of heart rate variability as indicator of driver sleepiness ». Dans : *2012 Southeast Asian Network of Ergonomics Societies Conference (SEANES)*, p. 1-6. DOI : [10.1109/SEANES.2012.6299577](https://doi.org/10.1109/SEANES.2012.6299577) (cf. p. 93).
- MAHONY, R. et T. HAMEL (2007). « Robust Nonlinear Observers for Attitude Estimation of Mini UAVs ». Dans : *Advances in Unmanned Aerial Vehicles : State of the Art and the*

- Road to Autonomy*. Sous la dir. de K. P. VALAVANIS. Intelligent Systems, Control and Automation : Science and Engineering. Springer Netherlands : Dordrecht, p. 343-375. DOI : [10.1007/978-1-4020-6114-1\\_11](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6114-1_11) (cf. p. 15).
- MAHONY, R., T. HAMEL et J. PFLIMLIN (juin 2008). « Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 53(5), p. 1203-1218. DOI : [10.1109/TAC.2008.923738](https://doi.org/10.1109/TAC.2008.923738) (cf. p. 1, 2, 26, 43, 49, 119).
- MAKNI, A. (mar. 2016). « Fusion de données inertielles et magnétiques pour l'estimation de l'attitude sous contrainte énergétique d'un corps rigide accéléré ». Thèse de doct. Grenoble Alpes. URL : <http://www.theses.fr/2016GREAT025> (cf. p. 31, 32).
- MAKNI, A., H. FOURATI et A. KIBANGOU (juin 2014). « Adaptive Kalman filter for MEMS-IMU based attitude estimation under external acceleration and parsimonious use of gyroscopes ». Dans : *2014 European Control Conference (ECC)*, p. 1379-1384. DOI : [10.1109/ECC.2014.6862535](https://doi.org/10.1109/ECC.2014.6862535) (cf. p. 2, 31, 32, 56).
- MARINA, H. G. de, F. J. PEREDA, J. M. GIRON-SIERRA et F. ESPINOSA (nov. 2012). « UAV Attitude Estimation Using Unscented Kalman Filter and TRIAD ». Dans : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59(11), p. 4465-4474. DOI : [10.1109/TIE.2011.2163913](https://doi.org/10.1109/TIE.2011.2163913) (cf. p. 25).
- MARINO, R., G. SANTOSUOSSO et P. TOMEI (juin 2001). « Robust adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 46(6), p. 967-972. DOI : [10.1109/9.928609](https://doi.org/10.1109/9.928609) (cf. p. 59).
- MARINO, R. et P. TOMEI (1991). « Global adaptive observers and output-feedback stabilization for a class of nonlinear systems ». Dans : *Foundations of Adaptive Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Sous la dir. de P. V. KOKOTOVIĆ, p. 455-493. DOI : [10.1007/BFb0044782](https://doi.org/10.1007/BFb0044782) (cf. p. 59).
- MARKLEY, F. L. (mar. 2003a). « Attitude Error Representations for Kalman Filtering ». Dans : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26(2), p. 311-317. DOI : [10.2514/2.5048](https://doi.org/10.2514/2.5048) (cf. p. 23).
- MARKLEY, F. L. (déc. 2003b). « Multiplicative Versus Additive Filtering for Spacecraft Attitude Determination ». URL : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20040037784> (cf. p. 24).
- MARKLEY, L. (nov. 1987). « Attitude Determination Using Vector Observations and the Singular Value Decomposition ». Dans : *Journal of the Astronautical Sciences* 38 (cf. p. 17, 18).
- MARKLEY, L. (juil. 1993). « Attitude Determination from Vector Observations : A Fast Optimal Matrix Algorithm ». Dans : *Journal of the Astronautical Sciences* 41 (cf. p. 18).

- MARKLEY, L. (fév. 1999). « 30 Years of Wahba's Problem ». Dans : (cf. p. 1, 18, 20).
- MARTIN, P. et E. SALAÜN (jan. 2008). « An Invariant Observer for Earth-Velocity-Aided Attitude Heading Reference Systems ». Dans : *IFAC Proceedings Volumes*. 17th IFAC World Congress 41(2), p. 9857-9864. DOI : [10.3182/20080706-5-KR-1001.01668](https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.01668) (cf. p. 31).
- MARTIN, P. et E. SALAÜN (juil. 2010). « Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system ». Dans : *Control Engineering Practice*. Special Issue on Aerial Robotics 18(7), p. 712-722. DOI : [10.1016/j.conengprac.2010.01.012](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2010.01.012) (cf. p. 26).
- MARTIN, P. et E. SALAUN (mai 2010). « The true role of accelerometer feedback in quadrotor control ». Dans : *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE : Anchorage, AK, p. 1623-1629. DOI : [10.1109/ROBOT.2010.5509980](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2010.5509980) (cf. p. 32).
- MARTIN, P. et I. SARRAS (déc. 2016a). « A semi-global model-based state observer for the quadrotor using only inertial measurements ». Dans : *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, p. 7123-7128. DOI : [10.1109/CDC.2016.7799367](https://doi.org/10.1109/CDC.2016.7799367) (cf. p. 32).
- MARTIN, P. et I. SARRAS (2016b). « A simple global observer for attitude and gyro biases ». Dans : *Mathematics*, p. 7 (cf. p. 28).
- MARTIN, T., T. BONARGENT, S. BESNARD, G. QUARCK, B. MAUVIEUX, E. PIGEON, P. DENISE et D. DAVENNE (juin 2020). « Vestibular stimulation by 2G hypergravity modifies resynchronization in temperature rhythm in rats ». Dans : *Scientific Reports* 10(1). Publisher : Nature Publishing Group, p. 9216. DOI : [10.1038/s41598-020-65496-x](https://doi.org/10.1038/s41598-020-65496-x) (cf. p. iv).
- MENARD, T., A. MAUCHE, B. TARGUI, I. BOURAOUI, M. FARZA et M. M'SAAD (juin 2014). « Adaptive high gain observer for uniformly observable systems with nonlinear parametrization ». Dans : *2014 European Control Conference (ECC)*, p. 1735-1740. DOI : [10.1109/ECC.2014.6862310](https://doi.org/10.1109/ECC.2014.6862310) (cf. p. 59).
- MICHEL, T., P. GENEVÈS, H. FOURATI et N. LAYAÏDA (mar. 2017). « On Attitude Estimation with Smartphones ». Dans : *IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications*. URL : <https://hal.inria.fr/hal-01376745v1/> (cf. p. 47, 52).
- MIYAJI, M., H. KAWANAKA et K. OGURI (oct. 2009). « Driver's cognitive distraction detection using physiological features by the adaboost ». Dans : *2009 12th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, p. 1-6. DOI : [10.1109/ITSC.2009.5309881](https://doi.org/10.1109/ITSC.2009.5309881) (cf. p. 96).

- MOARREF, M. et L. RODRIGUES (juin 2014). « Observer design for linear multi-rate sampled-data systems ». Dans : *2014 American Control Conference*, p. 5319-5324. DOI : [10.1109/ACC.2014.6858838](https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858838) (cf. p. 57).
- MOHD ALI, J., N. HA HOANG, M. A. HUSSAIN et D. DOCHAIN (mai 2015). « Review and classification of recent observers applied in chemical process systems ». Dans : *Computers & Chemical Engineering* 76, p. 27-41. DOI : [10.1016/j.compchemeng.2015.01.019](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2015.01.019) (cf. p. 57).
- MURRAY, R. M., Z. LI et S. S. SASTRY (déc. 2017). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. 1<sup>re</sup> éd. CRC Press. ISBN : 978-1-315-13637-0. DOI : [10.1201/9781315136370](https://doi.org/10.1201/9781315136370) (cf. p. 9).
- NOORI, S. M. R. et M. MIKAEILI (2016). « Driving Drowsiness Detection Using Fusion of Electroencephalography, Electrooculography, and Driving Quality Signals ». Dans : *Journal of Medical Signals and Sensors* 6(1), p. 39-46. URL : <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4786962/> (cf. p. 115).
- NÜTZI, G., S. WEISS, D. SCARAMUZZA et R. SIEGWART (jan. 2011). « Fusion of IMU and Vision for Absolute Scale Estimation in Monocular SLAM ». Dans : *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 61(1), p. 287-299. DOI : [10.1007/s10846-010-9490-z](https://doi.org/10.1007/s10846-010-9490-z) (cf. p. 56).
- ONISR (2018). *Bilan de l'accidentalité routière de l'année 2018*. Observatoire national interministériel de la sécurité routière, p. 201 (cf. p. 90, 91).
- OUALLA, H., M. POULIQUEN, M. FRIKEL, S. SAFI et T. BONARGENT (mai 2020). « Spectral Analysis for System Identification from Input/Output Binary Measurements ». Dans : *2020 European Control Conference (ECC)*. Saint Petersburg, Russia, p. 731-734. DOI : [10.23919/ECC51009.2020.9143871](https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143871) (cf. p. iv).
- OZYAGCILAR, T. (2015). « Calibrating an eCompass in the Presence of Hard and Soft Iron Interference ». Dans : *Freescale Semiconductor Ltd.*, p. 18 (cf. p. 15, 47).
- PERRIER, R. (sept. 2011). « Estimation de l'attitude d'un satellite à l'aide de caméras pushbroom et de capteurs stellaires ». thesis. Grenoble. URL : <http://www.theses.fr/2011GREN040> (cf. p. 6).
- PICOT, A. (nov. 2009). « Driver drowsiness detection using both physiological and video information ». Theses. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00440959> (cf. p. 93, 98).
- PICOT, A., S. CHARBONNIER et A. CAPLIER (mai 2010). « Drowsiness detection based on visual signs : blinking analysis based on high frame rate video ». Dans : *2010 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC'10)*.

- Austin, Texas, United States, n.c. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00449307> (cf. p. 99).
- POWERS, D. et AILAB (jan. 2011). « Evaluation : From precision, recall and F-measure to ROC, informedness, markedness & correlation ». Dans : *J. Mach. Learn. Technol* 2, p. 2229-3981. DOI : [10.9735/2229-3981](https://doi.org/10.9735/2229-3981) (cf. p. 108).
- PURDON, P. L., E. T. PIERCE, E. A. MUKAMEL, M. J. PRERAU, J. L. WALSH, K. F. K. WONG, A. F. SALAZAR-GOMEZ, P. G. HARRELL, A. L. SAMPSON, A. CIMENSER, S. CHING, N. J. KOPELL, C. TAVARES-STOECKEL, K. HABEEB, R. MERHAR et E. N. BROWN (mar. 2013). « Electroencephalogram signatures of loss and recovery of consciousness from propofol ». Dans : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110(12), E1142-E1151. DOI : [10.1073/pnas.1221180110](https://doi.org/10.1073/pnas.1221180110) (cf. p. 98).
- RAJAMANI, R. (mar. 1998). « Observers for Lipschitz nonlinear systems ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 43(3). Conference Name : IEEE Transactions on Automatic Control, p. 397-401. DOI : [10.1109/9.661604](https://doi.org/10.1109/9.661604) (cf. p. 57).
- RAMSDEN, E. (fév. 2006). *Hall-Effect Sensors : Theory and Applications*. Newnes : Amsterdam ; Boston. ISBN : 978-0-7506-7934-3 (cf. p. 15).
- RANNEY, T. A., W. R. GARROTT et M. J. GOODMAN (juin 2001). *Nhtsa Driver Distraction Research : Past, Present, and Future*. SAE Technical Paper 2001-06-0177. Warrendale, PA : SAE International (cf. p. 91).
- RAPTIS, I. A. et K. P. VALAVANIS (2007). « Airplane Basic Equations of Motion and Open-Loop Dynamics ». Dans : *Advances in Unmanned Aerial Vehicles : State of the Art and the Road to Autonomy*. Sous la dir. de K. P. VALAVANIS. Intelligent Systems, Control and Automation : Science and Engineering. Springer Netherlands : Dordrecht, p. 49-72. DOI : [10.1007/978-1-4020-6114-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6114-1_3) (cf. p. 10).
- REHBINDER, H. et X. HU (avr. 2004). « Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies ». Dans : *Automatica* 40(4), p. 653-659. DOI : [10.1016/j.automatica.2003.11.002](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2003.11.002) (cf. p. 31, 32).
- RENAUDIN, V. et C. COMBETTES (déc. 2014). « Magnetic, Acceleration Fields and Gyroscope Quaternion (MAGYQ)-Based Attitude Estimation with Smartphone Sensors for Indoor Pedestrian Navigation ». Dans : *Sensors* 14(12), p. 22864-22890. DOI : [10.3390/s141222864](https://doi.org/10.3390/s141222864) (cf. p. 32).
- RIOUL, O. et P. FLANDRIN (juil. 1992). « Time-scale energy distributions : a general class extending wavelet transforms ». Dans : *IEEE Transactions on Signal Processing* 40(7). Conference Name : IEEE Transactions on Signal Processing, p. 1746-1757. DOI : [10.1109/78.143446](https://doi.org/10.1109/78.143446) (cf. p. 98, 99).

- ROBERTS, A. et A. TAYEBI (déc. 2011). « On the attitude estimation of accelerating rigid-bodies using GPS and IMU measurements ». Dans : *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, p. 8088-8093. DOI : [10.1109/CDC.2011.6161005](https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6161005) (cf. p. 31).
- ROUMELIOTIS, S., G. SUKHATME et G. BEKEY (mai 1999). « Smoother based 3D attitude estimation for mobile robot localization ». Dans : *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*. T. 3, 1979-1986 vol.3. DOI : [10.1109/ROBOT.1999.770398](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1999.770398) (cf. p. 6).
- RUITER, A. H. J. de (juin 2014). « SO(3)-constrained Kalman filtering with application to attitude estimation ». Dans : *2014 American Control Conference*, p. 4937-4942. DOI : [10.1109/ACC.2014.6858692](https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858692) (cf. p. 22).
- SABATINI, A. (juil. 2006). « Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing ». Dans : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 53(7), p. 1346-1356. DOI : [10.1109/TBME.2006.875664](https://doi.org/10.1109/TBME.2006.875664) (cf. p. 32).
- SAHAYADHAS, A., K. SUNDARAJ et M. MURUGAPPAN (déc. 2012). « Detecting Driver Drowsiness Based on Sensors : A Review ». Dans : *Sensors* 12(12), p. 16937-16953. DOI : [10.3390/s121216937](https://doi.org/10.3390/s121216937) (cf. p. 91, 93-96).
- SAHAYADHAS, A., K. SUNDARAJ et M. MURUGAPPAN (juin 2013). « Drowsiness detection during different times of day using multiple features ». Dans : *Australasian Physical & Engineering Sciences in Medicine* 36(2), p. 243-250. DOI : [10.1007/s13246-013-0200-6](https://doi.org/10.1007/s13246-013-0200-6) (cf. p. 93, 94, 97, 100, 101).
- SAHAYADHAS, A., K. SUNDARAJ, M. MURUGAPPAN et R. PALANIAPPAN (déc. 2015). « Physiological signal based detection of driver hypovigilance using higher order spectra ». Dans : *Expert Systems with Applications* 42(22), p. 8669-8677. DOI : [10.1016/j.eswa.2015.07.021](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.07.021) (cf. p. 90, 91, 103, 104).
- SANDBERG, D., T. AKERSTEDT, A. ANUND, G. KECKLUND et M. WAHDE (mar. 2011). « Detecting Driver Sleepiness Using Optimized Nonlinear Combinations of Sleepiness Indicators ». Dans : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 12(1), p. 97-108. DOI : [10.1109/TITS.2010.2077281](https://doi.org/10.1109/TITS.2010.2077281) (cf. p. 100).
- SEBESTA, K. D. et N. BOIZOT (jan. 2014). « A Real-Time Adaptive High-Gain EKF, Applied to a Quadcopter Inertial Navigation System ». Dans : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 61(1), p. 495-503. DOI : [10.1109/TIE.2013.2253063](https://doi.org/10.1109/TIE.2013.2253063) (cf. p. 58).
- SHARABATY, H. (2007). « Diagnostic de la somnolence d'un opérateur : analyse automatique de signaux physiologiques ». Thèse de doct. Université de Toulouse. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00197161> (cf. p. 99).

- SHEN, Y., D. ZHANG et X. XIA (jan. 2017). « Continuous observer design for a class of multi-output nonlinear systems with multi-rate sampled and delayed output measurements ». Dans : *Automatica* 75(Supplement C), p. 127-132. DOI : [10.1016/j.automatica.2016.09.028](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.09.028) (cf. p. 58).
- SHUSTER, M. D. et S. D. OH (1981). « Three-axis attitude determination from vector observations ». Dans : *Journal of Guidance and Control* 4(1), p. 70-77. DOI : [10.2514/3.19717](https://doi.org/10.2514/3.19717) (cf. p. 19).
- SINOPOLI, B., L. SCHENATO, M. FRANCESCHETTI, K. POOLLA, M. I. JORDAN et S. S. SASTRY (sept. 2004). « Kalman filtering with intermittent observations ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 49(9), p. 1453-1464. DOI : [10.1109/TAC.2004.834121](https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834121) (cf. p. 57).
- SOLÀ, J. (mar. 2015). « Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter ». URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01122406> (cf. p. 23).
- SOLAZ, J., J. LAPARRA-HERNÁNDEZ, D. BANDE, N. RODRÍGUEZ, S. VELEFF, J. GERPE et E. MEDINA (jan. 2016). « Drowsiness Detection Based on the Analysis of Breathing Rate Obtained from Real-time Image Recognition ». Dans : *Transportation Research Procedia*. Transport Research Arena TRA2016 14, p. 3867-3876. DOI : [10.1016/j.trpro.2016.05.472](https://doi.org/10.1016/j.trpro.2016.05.472) (cf. p. 94).
- SRINIVASARENGAN, K., J. RAGOT, C. AUBRUN et D. MAQUIN (mar. 2018). « An adaptive observer design approach for discrete-time nonlinear systems ». Dans : *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 28. DOI : [10.2478/amcs-2018-0004](https://doi.org/10.2478/amcs-2018-0004) (cf. p. 60).
- SUH, Y. S. (déc. 2010). « Orientation Estimation Using a Quaternion-Based Indirect Kalman Filter With Adaptive Estimation of External Acceleration ». Dans : *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 59(12), p. 3296-3305. DOI : [10.1109/TIM.2010.2047157](https://doi.org/10.1109/TIM.2010.2047157) (cf. p. 32).
- TANG, X., Z. LIU et J. ZHANG (juil. 2012). « Square-root quaternion cubature Kalman filtering for spacecraft attitude estimation ». Dans : *Acta Astronautica* 76, p. 84-94. DOI : [10.1016/j.actaastro.2012.02.009](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.02.009) (cf. p. 25).
- THIENEL, J. et R. SANNER (nov. 2003). « A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(11), p. 2011-2015. DOI : [10.1109/TAC.2003.819289](https://doi.org/10.1109/TAC.2003.819289) (cf. p. 2).
- TRONI, G. et L. L. WHITCOMB (mai 2013). « Preliminary experimental evaluation of a Doppler-aided attitude estimator for improved Doppler navigation of underwater

- vehicles ». Dans : *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 4134-4140. DOI : [10.1109/ICRA.2013.6631160](https://doi.org/10.1109/ICRA.2013.6631160) (cf. p. 31).
- TYUKIN, I. Y., E. STEUR, H. NIJMEIJER et C. van LEEUWEN (août 2013). « Adaptive observers and parameter estimation for a class of systems nonlinear in the parameters ». Dans : *Automatica* 49(8), p. 2409-2423. DOI : [10.1016/j.automatica.2013.05.008](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.05.008) (cf. p. 59).
- VAGANAY, J., M. ALDON et A. FOURNIER (mai 1993). « Mobile robot attitude estimation by fusion of inertial data ». Dans : *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 277-282 vol.1. DOI : [10.1109/ROBOT.1993.291995](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1993.291995) (cf. p. 6).
- VASCONCELOS, J. F., C. SILVESTRE et P. OLIVEIRA (jan. 2008). « A Nonlinear Observer for Rigid Body Attitude Estimation using Vector Observations ». Dans : *IFAC Proceedings Volumes*. 17th IFAC World Congress 41(2), p. 8599-8604. DOI : [10.3182/20080706-5-KR-1001.01454](https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.01454) (cf. p. 26).
- VERSTER, J. C. et T. ROTH (sept. 2013). « Vigilance decrement during the on-the-road driving tests : The importance of time-on-task in psychopharmacological research ». Dans : *Accident Analysis & Prevention* 58, p. 244-248. DOI : [10.1016/j.aap.2012.10.005](https://doi.org/10.1016/j.aap.2012.10.005) (cf. p. 90, 91).
- WAHBA, G. (juil. 1965). « A Least Squares Estimate of Satellite Attitude ». Dans : *SIAM Review* 7(3), p. 409-409. DOI : [10.1137/1007077](https://doi.org/10.1137/1007077) (cf. p. 17).
- WIERWILLE, W. (1994). *Research on vehicle-based driver status/performance monitoring : Development, validation, and refinement of algorithms for detection of driver drowsiness : (526682009-001)*. Rapp. tech. type : dataset. American Psychological Association. DOI : [10.1037/e526682009-001](https://doi.org/10.1037/e526682009-001) (cf. p. 100, 102).
- WON, S.-h. P., W. W. MELEK et F. GOLNARAGHI (mai 2010). « A Kalman/Particle Filter-Based Position and Orientation Estimation Method Using a Position Sensor/Inertial Measurement Unit Hybrid System ». Dans : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57(5), p. 1787-1798. DOI : [10.1109/TIE.2009.2032431](https://doi.org/10.1109/TIE.2009.2032431) (cf. p. 25).
- YANG, W., K. WANG et W. ZUO (2012). « Neighborhood Component Feature Selection for High-Dimensional Data ». Dans : *Journal of computers* 7(1), p. 161 (cf. p. 114).
- YEO, M. V., X. LI, K. SHEN et E. P. WILDER-SMITH (jan. 2009). « Can SVM be used for automatic EEG detection of drowsiness during car driving? » Dans : *Safety Science* 47(1), p. 115-124. DOI : [10.1016/j.ssci.2008.01.007](https://doi.org/10.1016/j.ssci.2008.01.007) (cf. p. 106).
- ZABIDI, A., W. MANSOR, Y. K. LEE et C. W. N. F. CHE WAN FADZAL (sept. 2012). « Short-time Fourier Transform analysis of EEG signal generated during imagined

- writing ». Dans : *2012 International Conference on System Engineering and Technology (ICSET)*, p. 1-4. DOI : [10.1109/ICSEngT.2012.6339284](https://doi.org/10.1109/ICSEngT.2012.6339284) (cf. p. 98).
- ZANDI, A. S., A. QUDDUS, L. PREST et F. J. E. COMEAU (mai 2019). « Non-Intrusive Detection of Drowsy Driving Based on Eye Tracking Data : » dans : *Transportation Research Record*. DOI : [10.1177/0361198119847985](https://doi.org/10.1177/0361198119847985) (cf. p. 115).
- ZHANG, Q. (mar. 2002). « Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems ». Dans : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(3), p. 525-529. DOI : [10.1109/9.989154](https://doi.org/10.1109/9.989154) (cf. p. 59).
- ZHANG, Q. et A. CLAVEL (déc. 2001). « Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time varying systems ». Dans : *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 3886-3891 vol.4 (cf. p. 59, 67).
- ZHAO, G. et C. HUA (sept. 2017). « Continuous–discrete-time adaptive observers for nonlinear systems with sampled output measurements ». Dans : *International Journal of Systems Science* 48(12), p. 2599-2609. DOI : [10.1080/00207721.2017.1324924](https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1324924) (cf. p. 60).
- ZHOU, H., H. HU, N. D. HARRIS et J. HAMMERTON (jan. 2006). « Applications of wearable inertial sensors in estimation of upper limb movements ». Dans : *Biomedical Signal Processing and Control* 1(1), p. 22-32. DOI : [10.1016/j.bspc.2006.03.001](https://doi.org/10.1016/j.bspc.2006.03.001) (cf. p. 6).

**Résumé :**

Cette thèse porte sur l'estimation de l'attitude de corps rigides et sur la détection de l'hypovigilance au volant. Lorsque l'on cherche à estimer l'attitude, plusieurs problèmes pratiques peuvent se poser. Une première problématique concerne l'estimation de l'attitude lorsque le corps est soumis à une accélération externe non-négligeable. Nous proposons, dans ce contexte, des observateurs permettant d'estimer l'attitude de l'objet considéré tout en limitant les effets de l'accélération externe sur la qualité de l'estimation. Nous nous sommes également intéressés à un autre problème pratique : le biais du gyromètre. En effet, la structure des gyromètres peut entraîner un biais dans les mesures. Ce biais peut être assimilé à un paramètre inconnu, et doit être estimé. Pour cela, nous avons synthétisé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non-linéaires incertains avec des sorties multi-échantillonnées. Ces sorties, correspondant à plusieurs capteurs, peuvent être échantillonnées de façon irrégulière et indépendamment les unes des autres. L'observateur proposé a été en particulier appliqué au problème de l'estimation simultanée de l'attitude et du biais. Cette thèse porte également sur la détection de l'hypovigilance au volant qui est un des nombreux domaines d'application de l'estimation de l'attitude. Nous avons montré que le niveau de vigilance d'un conducteur peut être estimé à partir de données non-intrusives. Cette problématique a été soulevée afin de pouvoir conceptualiser un dispositif fiable et non-intrusif de détection de l'hypovigilance.

**Mots clés :** Estimation de l'attitude, observateur d'état, observateur adaptatif, sorties multi-échantillonnées, détection de l'hypovigilance

**Abstract :**

This thesis focuses on the estimation of the attitude of rigid bodies and on the detection of driver drowsiness. When estimating attitude, several practical problems may arise. A first problem concerns the estimation of attitude when the body is subject to a non-negligible external acceleration. We propose, in this context, observers that estimate the attitude of the considered object while limiting the effects of the external acceleration on the quality of the estimate. We have also addressed another practical problem : the gyroscope bias. Indeed, the structure of gyroscopes can lead to a bias in the measurements. This bias can be assimilated to an unknown parameter and must be estimated. For this purpose, we have designed an adaptive observer for a class of uncertain non-linear systems with multi-sampled outputs. These outputs, corresponding to several sensors, can be sampled irregularly and independently of each other. The proposed observer has been applied in particular to the problem of simultaneous estimation of attitude and bias. This thesis also deals with the detection of driver drowsiness, which is one of the many fields of application of attitude estimation. We have shown that the driver's level of drowsiness can be estimated from non-intrusive data. This issue was raised in order to conceptualize a reliable and non-intrusive device for detecting drowsiness.

**Keywords :** Attitude estimation, state observer, adaptive observer, multi-rated outputs, drowsiness detection