

Contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral : une approche de contrôle stochastique

Ishak Hajjej

▶ **To cite this version:**

Ishak Hajjej. Contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral : une approche de contrôle stochastique. Optimisation et contrôle [math.OC]. Institut Polytechnique de Paris; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2020. Français. NNT : 2020IPPAG007 . tel-03021830

HAL Id: tel-03021830

https://theses.hal.science/tel-03021830

Submitted on 24 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

NNT : 2020IPPAG007

Thèse de doctorat

Contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral: une approche de contrôle stochastique

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'Ecole nationale de la statistique et de l'administration économique et à l'École nationale d'ingénieurs de Tunis

École doctorale n°574- École doctorale de mathématique Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 24 septembre 2020, par

ISHAK HAJJEJ

Composition du Jury :

Nizar TOUZI Professeur, École Polytechnique (CMAP)	Président
Stéphane VILLENEUVE Professeur, Université de Toulouse 1 (TSM-R)	Rapporteur
René AÏD Professeur, Université Paris-Dauphine (LEDa)	Rapporteur
Amel Ben ABDA Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (LAMSIN)	Examinatrice
Said HAMADENE Professeur, Le Mans université (LMM)	Examinateur
Caroline HILLAIRET Professeur, École nationale de la statistique et de l'administration économique (CREST)	Directrice de thèse
Mohamed MNIF Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (LAMSIN)	Directeur de thèse

Remerciements

L'achèvement de ce travail mené sur plusieurs années procure une grande satisfaction. Il est l'occasion de se remémorer les différentes embûches qu'il a fallu surmonter mais surtout les personnes qui m'ont aidé.

J'adresse mes chaleureux remerciements à ma directrice de thèse, Mme Caroline Hillairet, pour son aide sa gentillesse et son soutien tout au long de ces années. Elle n'a jamais de m'encourager, me conseiller, m'instruire et m'orienter afin d'arriver à mon but scientifique et moral.

J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse M. Mohamed MNIF, pour sa veille à tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés, son écoute et ses relectures, qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son energie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai un grand plaisir à travailler avec lui.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Stéphane Villeneuve et Monsieur René Aïd qui, en dépit de leur emploi du temps très chargé, ont accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie pour tout le temps qu'ils ont accordé à la lecture de mon travail. Leurs remarques pertinentes et corrections ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

Toute ma gratitude va également à Madame Amel Ben Abda, Monsieur Nizar Touzi et Monsieur Said Hamadene qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier profondément Monique Pontier, qui m'a beaucoup aidé dans mes travaux de recherche. Grâce à son soutien, sa patience et ses encouragements quoti-

diens ce travail a pu être mené à bout.

Je ne pourrais manquer d'exprimer ma gratitude envers Mourad Bellassoued, directeur du LAMSIN, et envers Francis Kramarz, directeur du CREST, pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire respectif et pour m'avoir permis de mener mes travaux de recherche dans les meilleures conditions. Je leur en serai à jamais redevable.

Merci à tous les doctorants en mathématiques de l'ENIT et de l'ENSAE pour leur amitié : Hamdi Houichet, Sarah Neffati, Chefia Ziri, Mouna Benderouiche et Lamia Ben Ajmia et El Mountasar Billah.

Plus personnellement, je tiens à remercier comme il se doit mes amis de toujours, qui ont toujours joué un rôle prépondérant dans ma vie. Je remercie Youcef Soiayssa, Oussema Belgacem, Tarek Hajjej, Saber Soiayssa, Mohamed Miled, Moez Mchergui, Safa Fourat.

Je remercie également mes parents Amor et Aicha car je ne serais pas là aujourd'hui s'ils ne m'avaient pas toujours encouragé et soutenu. J'aimerais exprimer ma gratitude envers mes sœurs Zaineb et Marwa, mes frères : Mohamed, Farouk et Ghoufrane pour leur amour, leur compréhension et leurs encouragements durant toutes ces années. Leur soutien inconditionnel m'a toujours permis de donner le meilleur de moi-même. Je dédie le fruit de mon travail à ma chère grande famille.

Table des matières

1 Introduction générale **1**

1.1 Le cadre politique et économique des partenariats public-privé 2
1.2 Les problèmes de principal-agent 3
1.3 Contrôle stochastique. Formulation forte versus formulation faible 8
1.4 Comparaison first et second best 10
1.5 Motivation de la thèse, résultats obtenus et contributions 11
1.6 Perspectives 15
1.7 Publications 16

2 Optimal contract with moral hazard for Public Private Partnerships **17**

2.1 Introduction 18
2.2 Public Private Partnership's optimal contracts 20
2.2.1 Effort and rent 20
2.2.2 A Stackelberg leadership model 21
2.2.3 Incentive compatible contract 23
2.3 Optimal controls and value functions for the public and the consortium 26
2.3.1 Formal derivation of the HJB equation 26
2.3.2 Verification theorem 27
2.3.3 Going back to the original set $\mathcal{A}^X$ of control processes 35
2.4 Numerical implementation 35
2.4.1 Howard's Algorithm 36
2.4.2 Effort and rent 37
2.4.3 Numerical results 37
Graph of the optimal rent r as a function of a 37

Sensibility of the results to parameter σ . . . 38
Sensibility of the results to parameter k . . . 40
2.5 Appendix . . . 41

3 Optimal stopping contract for Public Private Partnerships under moral hazard. 42
3.1 Introduction . . . 43
3.2 The Public Private Partnership model under moral hazard . . . 45
3.3 Incentive compatible contracts . . . 49
3.4 Hamilton Jacobi Bellman variational inequality . . . 59
3.4.1 The boundary condition . . . 63
3.4.2 Verification theorem . . . 63
3.4.3 Beyond the constant volatility case . . . 67
3.5 Appendix : Proof of Proposition 3.3.1 . . . 68

4 The first and the second best frameworks for Public Private Partnerships 73
4.1 Introduction . . . 74
4.2 The second best framework . . . 75
4.3 The dynamics of the objective function of the consortium . . . 77
4.4 Comparaison of the filtrations at the optimum . . . 82
4.5 The first best framework . . . 84
4.5.1 Numerical results . . . 89
4.5.2 Comparison between the value function in the first and in the second best 92

5 Étude théorique et numérique de l'existence et de la régularité de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman 93
5.1 Introduction . . . 95
5.2 Formulation du problème . . . 96
5.3 Une première méthode : existence de la solution de l'équation de HJB . . . 97
5.3.1 Croissance linéaire de la fonction valeur v . . . 98
5.3.2 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ borné . . . 99
5.3.3 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ non borné . 110
5.3.4 Identification de la fonction valeur avec la solution de l'équation de HJB 111
5.4 Deuxième méthode : existence de la solution de l'équation de HJB . . . 115
5.5 Résolution numérique de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman . . . 120
5.5.1 Discrétisation . . . 121

5.5.2 Forme matricielle . . . 123
5.5.3 Consistance et stabilité de la méthode d'approximation . . . 124
5.5.4 Principe du Maximum discret . . . 124
5.5.5 Itération sur les politiques ou algorithme de Howard . . . 127
5.6 Résolution numérique de l'inéquation variationnelle . . . 129
5.6.1 Forme matricielle . . . 129
5.6.2 Itération sur les politiques . . . 130
5.7 Application . . . 130
5.7.1 Méthode des différences finies . . . 131
5.7.2 Résultats numériques . . . 132
5.8 Appendice . . . 136

Table des figures

2.1 Optimal rent r^* function of the optimal effort a^*. 38
2.2 Value function v for different σ. 39
2.3 Optimal effort a^* for different σ. 39
2.4 Optimal rent r^* for different σ. 40

4.1 Comparaison between $\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds$ and $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$. 87
4.2 $t \mapsto \exp(-\delta t)H(t)$ for different x. 88
4.3 The variation of the Lagrange multiplier as a function of x. 89
4.4 Value Function (risk sharing). 90
4.5 Optimal effort (risk sharing). 90
4.6 Optimal rent(risk sharing). 91
4.7 Optimal rent function of the effort 91
4.8 Value Function in the first best and in the second best. 92

5.1 Méthode de tir 101
5.2 La rente optimale r^* en fonction de l'effort optimal a^*. 133
5.3 La fonction valeur v pour différent σ. 133
5.4 L'effort optimal a^* pour différent σ. 134
5.5 La rente optimale r^* pour différent σ. 134
5.6 La fonction valeur définie sur $[0, \bar{x}]$. 135

Liste des tableaux

4.1 *Values of the model's parameters* 89

5.1 *Région de continuation pour différentes valeurs de σ.* 135

Chapitre 1

Introduction générale

If the facts don't fit the theory, change the facts

Albert Einstein

Sommaire

1.1 Le cadre politique et économique des partenariats public-privé . . 2
1.2 Les problèmes de principal-agent 3
1.3 Contrôle stochastique. Formulation forte versus formulation faible 8
1.4 Comparaison first et second best 10
1.5 Motivation de la thèse, résultats obtenus et contributions 11
1.6 Perspectives 15
1.7 Publications 16

1.1 Le cadre politique et économique des partenariats public-privé

Ces dernières années, de nombreux pays développés ont connu une augmentation de leur dette publique. Le financement des entreprises publiques est devenu le centre des préoccupations économiques et politiques. Ainsi, le recours au secteur privé peut être considéré comme la meilleure solution. Le partenariat public-privé (PPP) a été introduit pour la première fois au Royaume-Uni en 1992 sous le nom de Private Finance Initiative (PFI) dans le but d'augmenter la capacité de financement publique, d'améliorer les services publics et de diminuer les dépenses.

Les PPP deviennent un moyen très important pour la fourniture de services publics. Un PPP est défini comme un accord à long terme entre une entité publique et un partenaire privé aussi appelé consortium, dans lequel le public externalise la construction et l'entretien d'un équipement (hôpital, université, prison ...). Le partenaire privé est chargé de la construction, de la gestion, de l'entretien des biens, de la prestation de services et du financement de l'investissement. Ces contrats sont également utilisés en Europe, au Canada, aux États-Unis et dans certains pays développés. Les PPP ont connu un essor très important ces dernières années en France (depuis 2008), non sans quelques soucis majeurs sur certains projets (Hôpital d'Évry, bâtiments de l'Université Paris Diderot. . .). En France, selon la loi de 2008, un contrat de PPP ne peut être utilisé que s'il est expressément justifié de déroger au droit commun, au regard de l'un des trois critères suivants : complexité, urgence et efficience économique.

La littérature économique s'est penchée sur le sujet. Auriol et Picard [5] ont discuté l'opportunité des contrats PPP lorsque l'entité publique et l'opérateur privé ne partagent pas les mêmes informations sur le paramètre de coût pendant la durée du projet. Iossa et Martimort [40] ont analysé les problèmes d'incitation pour les PPP. Iossa et al. [41] ont comparé les coûts et les bénéfices associés aux PPP. Ces études ont connu par la suite plusieurs extensions, par exemple, Hillairet et Pontier [35] ont étudié les PPP et leur pertinence, en tenant compte de l'éventualité de défaut de la contrepartie. Elles ont étudié les avantages et les inconvénients de PPP du point de vue réduction des coûts et dans le cas d'un consortium neutre au risque. Elles ont montré que lorsque le risque de faillite est inclus, l'externalisation ne peut être intéressante que lorsqu'on impose une pénalité à l'opérateur privé en cas de faillite et dans un certain contexte : coût élevé, pénalité suffisante, échéance courte. Espinosa et al. [29] ont traité le problème d'externalisation de la dette pour un gros investissement. Ils ont étudié l'impor-

tance d'externalisation dans le but de réduire la dette d'une collectivité publique. De plus, ils ont comparé deux situations : dans un premier cas, l'entreprise supporte la dette et l'investissement et externalise l'exploitation ; dans un deuxième cas, l'entreprise externalise à la fois la dette et l'exploitation. Ils ont étudié aussi le cas où l'entreprise possède une incertitude sur l'aversion au risque de la firme auprès de laquelle on externalise, dans ce cas il devient avantageux pour cette dernière de rentrer dans le contrat.

Le contrat de partenariat public-privé est de type "principal-agent" où le principal est le public et l'agent est le privé. Le problème de principal-agent étudie comment un principal incite un agent à gérer un projet en fonction d'un accord contractuel. Les applications de problème de principal-agent sont multiples notamment dans les domaines de la finance d'entreprise, de la gestion de portefeuille et sur les marchés de l'électricité (cf Alasseur et al. [2] et plus récemment Aïd et al. [1]).

1.2 Les problèmes de principal-agent

Dans cette section, on présente le problème de principal-agent et on étudie le problème du contrat optimal entre deux parties. L'une d'elles est appelée le principal et l'autre est appelée l'agent. Le principal propose un contrat, que l'agent est libre d'accepter ou de refuser, mais aucune des deux parties ne peut changer d'avis. L'agent ayant accepté le contrat effectue un effort, noté a, contingent à ce contrat. Le principal cherche à atteindre deux objectifs :

1. Il veut que l'agent accepte le contrat. Cela s'appelle une contrainte de réservation qui représente la valeur minimale $\underline{x}$ au-dessous de laquelle l'agent refusera le contrat.
2. Le principal souhaite retirer le maximum de bénéfices du contrat.

Alors, l'objectif est de construire un contrat, noté c, qui maximise l'utilité du principal, en assurant une valeur minimale à l'agent. Le contrat optimal pour le principal diffère selon que le principal observe ou non les efforts d'agent (first best, second best). On note par U_P et U_A les utilités respectives du principal et de l'agent. Dans la littérature, généralement on distingue trois types de contrat selon le niveau d'information, que l'on présente synthétiquement ci-dessous.

First-best (partage de risque) :

Dans ce cadre le principal observe l'effort fourni par l'agent. Les deux parties ont les mêmes informations. Elles doivent se mettre d'accord sur la façon de partager le risque entre elles. Le problème se reformule en un problème avec un seul individu "le principal", qui choisit à la

fois le contrat et les efforts sous la contrainte de réservation.
On désigne par X^a la valeur sociale du projet (aussi appelée output dans la littérature principal-agent) qui dépend de l'effort a. Étant donné un contrat c qui dépend de X^a, le problème de l'agent est donné par

$$V_A(a,c) = \mathbb{E}\Big[U_A(c(X^a)) - h(a)\Big]$$

où h représente le coût de l'effort, qui est une fonction strictement croissante et strictement convexe.
Étant donné un contrat c et un choix a de l'effort de l'agent, le problème du principal est défini par l'optimisation de l'application

$$(a,c) \to V_P(a,c) = \mathbb{E}\Big[U_P(X^a) - c(X^a)\Big]$$

sous la contrainte de réservation suivante

$$\mathbb{E}[U_A(c(X^a)) - h(a)] \geq \underline{x}.$$

Pour résoudre ce problème, on considère le problème non contraint suivant :

$$\sup_{c,a}\{\mathbb{E}[U_P(X^a) - c(X^a) + \lambda_{Lag}U_A(c,a)] - \lambda_{Lag}h(a) - \lambda\underline{x}\} \tag{1.2.1}$$

où λ_{Lag} est un multiplicateur de Lagrange utilisé pour satisfaire la contrainte de réservation. Ce problème a été étudié par Borch [11], Arrow [4] et Wilson [65]. Muller [50] a traité le cas où le principal et l'agent ont une utilité exponentielle, il a montré que le contrat optimal est linéaire en la valeur finale de l'output X_T. Cadenillas et al. [13] ont considéré le cas où l'agent peut contrôler à la fois le drift et la volatilité de l'output, en utilisant des méthodes de martingales pour résoudre le problème. Ce travail a été suivi par celui de Cvitanic et al. [19] en utilisant le principe du maximum.

Second-best (aléa moral) :

L'aléa moral correspond au cas où le principal est incapable d'observer l'effort de l'agent et il observe uniquement X. Le problème du principal est un jeu à deux étapes du type Stackelberg. Le principal résout le problème suivant :

1. Étant donné un contrat c, on calcule la meilleure réponse $a^*(c)$ de l'agent telle que

$$\sup_a \mathbb{E}[U_A(c,a) - h(a)] = \mathbb{E}[U_A(c,a^*(c)) - h(a^*(c))]$$

2. On résout le problème du principal

$$\sup_c \mathbb{E}[U_P(X^a) - c(X^a)] \tag{1.2.2}$$

sous la contrainte de réservation suivante

$$\mathbb{E}[U_A(c, a^*(c)) - h(a^*(c))] \geq \underline{x} \tag{1.2.3}$$

Le problème d'aléa moral a tout d'abord été considéré dans des modèles à temps discret. Ce problème a été introduit pour la première fois, en temps continu avec *un paiement terminal*, et en *horizon fini*, par Holmström et Milgrom [36]. En comparaison avec les méthodes traditionnelles à temps discret, les méthodes en temps continu conduisent à un calcul "plus simple" pour trouver le contrat optimal en résolvant une équation différentielle ordinaire. Cette équation permet de déterminer les stratégies optimales.

Dans le cadre d'aléa moral, Holmström et Milgrom [36] ont considéré que le principal est neutre au risque et l'agent est adverse au risque. Ils ont considéré que l'effort de l'agent impacte le drift du processus de l'output (X_t). Ils ont montré que si le principal et l'agent ont une utilité exponentielle, alors les contrats optimaux sont linéaires en X_T. Ce modèle a connu par la suite de nombreuses extensions. Schattler et Sung [58] ont généralisé ces résultats en utilisant une programmation dynamique et des méthodes de martingales. Sung [60] a montré que la linéarité du contrat optimal est toujours valable même si l'agent peut également contrôler la volatilité. Mastrolia et Possamai [49] ont considéré le cas où l'agent ne contrôle que le drift de l'output, en ajoutant une incertitude sur la volatilité. Cvitanic et al. [18] ont considéré une formulation générale du problème de principal-agent. Ils ont traité le cas où l'agent peut contrôler la volatilité de l'output. Ils ont montré que l'on peut réduire le problème de principal-agent avec aléa moral à un problème de contrôle stochastique, en particulier, la fonction valeur de l'agent apparaît comme une variable d'état du problème d'optimisation du principal. Leur approche consiste à restreindre la famille des contrats admissibles aux contrats pour lesquels, l'agent résout son problème par une programmation dynamique. Pour de tels contrats, le principal peut identifier quelle est la politique optimale pour l'agent, c'est celle qui maximise l'hamiltonien dont le maximum réalise la fonction valeur. Cvitanic et Zhang [21] et Williams [63] ont utilisé le principe du maximum ainsi que des systèmes Forward-Backward couplés pour résoudre ce type de problème. En général, le principe du maximum conduit à la caractérisation de contrats optimaux. Elie et Possamaï [28] ont étudié un contrat entre un principal et plusieurs agents. Chaque agent est responsable d'un projet et fait des efforts pour gérer son propre projet. Le principal et les agents ont une utilité exponentielle. Résoudre les problèmes des agents revient à résoudre une équation différentielle stochastique multidimensionnelle à croissance quadratique. Le problème du principal est réduit à un problème de

contrôle stochastique. Ils ont montré que les contrats optimaux sont linéaires en la valeur finale de l'output X_T. Récemment, Hu et al. [38] ont traité le problème de principal-agent dans des systèmes dégénérés, qui apparaissent naturellement dans des environnements à observation partielle où l'agent et le principal n'observent qu'une partie du système. Ils ont utilisé le principe de programmation dynamique et les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Tout d'abord, ils ont résolu le problème du principal dans un ensemble plus large de contrats défini par un système Forward-Backward donné par la condition de premier ordre du problème de l'agent. Ensuite, ils ont utilisé la condition suffisante du problème de l'agent pour vérifier que le contrat optimal obtenu appartient à l'ensemble des contrats admissibles. Aïd et al. [1] ont appliqué le problème de principal-agent dans le domaine de l'énergie. Ils ont modélisé des contrats incitatifs qui permettent une réponse adaptée en fonction de la demande globale énergétique. Ils ont considéré un producteur (principal) qui a une flexibilité limitée de production et qui verse une compensation incitative pour encourager le consommateur (l'agent) à réduire sa consommation moyenne. Le consommateur bénéficie toute l'année d'un tarif d'électricité moins cher que le tarif standard sauf à certaines périodes de pic de consommation choisies par le producteur où le prix est plus élevé. Le producteur n'observe pas les efforts du consommateur et il cherche à trouver le contrat optimal qui minimise le coût de production de l'énergie. Le producteur et le consommateur sont adverses au risque. Elie et al. [27] ont étendu le modèle de Aïd et al. [1] à un modèle avec champs moyen dans le cadre d'un nombre infini d'agents.

Dans la littérature, certains travaux considèrent un *paiement continu* avec *horizon infini ou aléatoire* dont l'un des travaux fondateurs est le papier de Sannikov [57]. Il a considéré un principal qui a la possiblité de licencier ou mettre l'agent à la retraite à tout moment. Il a considéré que l'agent est adverse au risque et le principal est neutre au risque. Le contrat optimal est écrit en fonction du processus de continuation de l'agent qui apparaît comme variable d'état du problème d'optimisation, Sannikov [57] a caractérisé le contrat optimal. Par ailleurs, il a utilisé une approche basée sur les équations différentielles stochastiques, des méthodes de martingales et la programmation dynamique communément utilisée dans la théorie du contrôle stochastique. Ces méthodes conduisent à une procédure de calcul simple pour trouver le contrat optimal en résolvant dans ce cas une équation différentielle ordinaire. Williams [64] a résolu un problème de principal-agent avec un paiement continu où les deux parties sont adverses au risque où l'agent ne contrôle que le drift de l'output.

Récemment Possamaï et Touzi [54] ont revisité le travail fondateur de Sannikov [57], en assistant sur les démonstrations techniques. Ce travail considère une situation de "Golden Parachute" qui correspond à une situation dans laquelle l'agent cesse tout effort à une date

aléatoire et reçoit un paiement par la suite, éventuellement sous la forme d'un paiement forfaitaire ou d'un paiement continu. Ils ont montré qu'un Golden Parachute n'existe que dans certaines circonstances spécifiques. Cela contraste avec les résultats de Sannikov, où la seule exigence est que le coût marginal d'effort d'un agent positif à zéro. Ils ont montré qu'il n'y a pas de Golden Parachute si ce paramètre est trop grand. Et cela n'arrive jamais si l'utilité marginale de l'agent est également concave et que sa fonction d'utilité a une courbure négative suffisamment grand en zero.

Cvitanic et al. [20] ont étudié les problèmes de principal agent avec aléa moral, ils ont considéré le cas où l'agent est payé *une seule fois à une date aléatoire*. Ils ont étendu le modèle de Holmström et Milgrom [36] en prenant en considération le fait que le principal est autorisé à licencier l'agent. Lorsque l'agent sort, une rémunération exogène lui est versée.

Anderson et al. [3] ont étudié le temps optimal de *remplacement* (soit par souci d'incitation, soit par souci de croissance) des gestionnaires d'une entreprise. Dans ce contexte, l'entreprise cherche à déterminer un contrat qui maximise son payoff. L'entreprise incite le gestionnaire à ne pas voler contrairement à la majorité des autres papiers de la littérature qui considèrent plutôt que le principal incite l'agent à faire des efforts.
Décamps et Villeneuve [24] ont étudié le temps optimal de *liquidation* d'une entreprise dont la rentabilité est impactée par l'effort inobservable de l'agent. Dans ce contexte, ils ont montré que le problème du principal est un problème de contrôle stochastique markovien à deux dimensions. [3] et [24] ont supposé que le principal et l'agent sont neutres au risque. Dans le modèle de Mason et Valimaki [48], le principal veut qu'un agent termine un projet, l'agent entreprend des efforts qui sont non observables et le principal ne paie que lors de l'achèvement du projet.

Dans tous les papiers précités, la modélisation est faite dans le cadre brownien où l'effort de l'agent impacte le drift et/ou la volatilité du processus de l'output. Certains travaux considèrent le cadre de processus de *Poisson* et l'effort de l'agent impacte l'intensité du saut du processus. Par exemple, Biais et al. [10] et Pagès et Possamai [52] ont traité un modèle dans lequel les efforts de l'agent (non observables) peuvent réduire l'intensité d'un processus de *Poisson* qui modélise la survenance de fortes pertes. Dans le modèle de Biais et al. [10] l'agent peut gérer un projet potentiellement rentable. Toutefois, ce projet entraîne des coûts et l'agent doit exercer des efforts non observables pour réduire les fortes pertes. Par ailleurs, le principal a une responsabilité illimitée et est capable de couvrir les coûts. Le principal et l'agent sont neutres au risque. Pagès et Possamai [52] ont considéré une banque (qui joue le

rôle de l'agent), qui a un grand nombre d'emprunts. La banque exerce une activité de surveillance coûteuse pour éviter le risque de défauts des emprunts. Les investisseurs (qui jouent le rôle de principal) souhaitent établir des contrats en maximisant leurs utilités et en incitant la banque à faire une surveillance efficace.
Hu et al.[39] ont considéré un problème d'aléa moral avec plusieurs principals et un agent. L'agent ne peut travailler que pour un seul agent à un moment donné, ils ont donc étudié un problème de "switching" d'un principal à un autre, dans lequel le temps de switching est modélisé par un temps aléatoire caractérisé par un processus de *Poisson* et l'agent influe sur le temps aléatoire en contrôlant l'intensité du processus de *Poisson*. Dans le cadre d'un nombre infini de principals, ils ont adopté la formulation avec champs moyen. Récemment, El Euch et al. [25] considèrent des markets makers qui contrôlent l'intensité d'arrivée des ordres à l'achat et à la vente (bid et ask) du carnet d'ordres ; le régulateur leur propose alors un contrat (ajusté sur les fees de trading) pour attirer la liquidité sur le marché.

Third-best (antisélection) :

Third-best est le cas où le principal ne connait pas parfaitement les caractéristiques de l'agent (par exemple sa richesse, son aversion au risque...). Les caractéristiques importantes restent masquées. Ce type de problème a été étudié par Sung [61], puis par Cvitanic et Zang [22] et Carlier et al. [14]. On ne détaillera pas ce type de contrat puisque dans cette thèse on ne s'intéressera qu'à des problèmes de type 'first' et 'second best'.

1.3 Contrôle stochastique. Formulation forte versus formulation faible

Le sujet de la thèse mêle à la fois une approche économique du problème, ainsi que des outils de contrôle stochastique. On considère une dynamique de l'état du système qui est influencée par un contrôle. Le contrôle est modélisé comme un processus adapté par rapport à une filtration. Dans cette thèse, l'état du système est la valeur sociale du projet, et les contrôles sont l'effort de l'agent et la rente versée par le public. Notre objectif est d'optimiser sur les contrôles une fonctionnelle dite fonction objectif et de déterminer la fonction valeur et les contrôles optimaux. Pour résoudre ce problème de contrôle, on utilise une approche basée sur le principe de la programmation dynamique. Ce principe a été initié par Bellman [7] dans les années 50 . Ce principe affirme que la fonction objectif le long de tout contrôle est une sur-martingale et est une martingale le long du contrôle optimal. Ainsi, le drift de la fonction valeur est nul à l'optimum (cf. El Karoui [26]). Ce principe nous conduit donc à une équa-

tion aux dérivées partielles (EDP) non linéaire de second ordre, appelée équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB) associée à la fonction valeur. Si on combine un problème de contrôle stochastique avec un problème d'arrêt optimal, l'équation d'HJB devient alors une inéquation variationnelle d'HJB. On prouve un théorème de vérification qui assure sous des conditions suffisantes qu'une solution régulière à l'équation, ou à l'inéquation variationnelle d'HJB, coïncident avec la fonction valeur. Ce théorème permet de caractériser le contrôle optimal. La preuve du théorème de vérification repose essentiellement sur la formule d'Itô. Ce théorème est traité dans de nombreux ouvrages par exemple : Krylov [44], Fleming et Rishel [30], Fleming et Soner [31]. Si la fonction valeur n'est pas régulière, on peut introduire le concept de solution de viscosité adaptée à ces équations. La notion de viscosité est introduite dans les années 80 par Crandall et Lions [16].

Une autre méthode pour résoudre le problème d'optimisation est d'utiliser des méthodes de martingales et de la dualité (cf. Rogers [56]) pour traiter les problèmes de first best, c'est ce que l'on fait dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, on résout numériquement l'équation et l'inéquation variationnelle d'HJB en utilisant des méthodes d'analyse numérique en se basant sur la méthode d'approximation de type différences finies (cf Lapeyre et al. [46]) via l'algorithme d'Howard : il s'agit de discrétiser l'équation, ou l'inéquation, associée en utilisant les méthodes de différences finies et de trouver une approximation de la solution d'une EDP aux noeuds d'une grille.

Dans cette thèse, on étudie le problème d'aléa moral par deux approches : formulation forte et formulation faible. Dans la formulation forte, on se fixe un espace de probabilité de référence. On cherche une solution forte de l'équation différentielle stochastique satisfaite par la valeur sociale du projet. On est dans le cadre d'aléa moral à cause de l'asymétrie d'information entre le public et le consortium, en particulier le public est incapable d'observer les efforts du consortium. Les deux parties n'ont pas les mêmes informations, c'est-à-dire n'observent pas les mêmes filtrations. Dans l'approche formulation forte, on considère différentes filtrations correspondant à différents niveaux d'informations comme dans le contexte de contrôle stochastique avec observation partielle (cf. Bensoussan [8]). Dans un premier temps, on résout le problème de contrôle sur un ensemble de contrôles plus grand qui correspondent aux contrôles adaptés par rapport à la filtration totale comprenant toute les informations du public et du consortium. Dans la modélisation du chapitre 2, on suppose que le public donne une rente minimale au consortium, on montre alors que l'effort optimal ne peut pas être égal à zéro. Ainsi le coefficient de diffusion de la dynamique de la fonction objectif du consortium est non nul, et donc on montre que les différents filtrations coïncident à l'optimum. Par contre, dans le chapitre 4, on ne suppose plus une rente minimale, ce qui fait le contrôle nul peut être un

contrôle optimal. Dans ce cas, on n'a plus forcément les égalités des filtrations à l'optimum. On peut montrer alors l'égalité des filtrations si le contrôle nul n'est pas un contrôle optimal.

Dans la formulation faible, on cherche une probabilité équivalente sous laquelle il existe une solution faible de l'EDS satisfaite par la valeur sociale du projet. Dans la formulation faible, on part avec une valeur sociale du projet qui suit un mouvement brownien sous une probabilité de référence. Dans cette approche, on suppose que le consortium change la distribution de la valeur sociale du projet en changeant son drift et cela revient à considérer une nouvelle probabilité qui dépend de l'effort du consortium. Le chapitre 3 adopte l'approche faible et suppose que le public a la possibilité d'arrêter le contrat à une date aléatoire. On montre alors que la dynamique de la fonction objectif du consortium est liée à une solution d'une EDSR avec horizon aléatoire. En particulier, on montre que optimiser la fonction objectif de l'agent revient à optimiser le générateur de l'EDSR en fonction de l'effort. Cette approche EDSR a été utilisée par Cvitanić, Possamaï et Touzi dans [18], dans le cadre où l'agent affecte la volatilité de l'output et avec un paiement terminal.

L'approche forte est une approche qui semble plus concrète pour résoudre le problème d'asymétrie d'information. De plus, cette approche est plus adaptée pour faire le lien et la comparaison avec le cadre de first best. Si l'effort optimal est différent de zéro, alors on peut résoudre le problème dans l'approche forte en montrant l'inégalité des filtrations à l'optimum et la solution forte et faible coïncident. Néanmoins, si ce n'est pas le cas, l'approche faible permet de résoudre le problème dans un cadre plus général avec moins d'hypothèses.

1.4 Comparaison first et second best

Il existe trois types de problème de principal-agent : first-best ou partage de risque, dans lequel le principal est parfaitement informé des efforts de l'agent et doit trouver un moyen de partager de manière optimale les risques associés au projet pour lequel il a engagé l'agent ; le second-best ou l'aléa moral, dans lequel l'effort de l'agent est non observable par le principal et le third-best dans lesquels certaines caractéristiques de l'agent restent masquées. Comparé au problème de first-best, le problème de second-best correspond à un jeu de type Stackelberg entre le principal et l'agent ; le principal propose un contrat, l'agent donne la meilleure réponse caractérisée par son effort. Ensuite, en tenant compte des efforts optimaux, le principal calcule le contrat optimal qui maximise son utilité.

Mastrolia et Possamai [49] ont traité un problème de principal-agent dans le cas où l'agent contrôle le drift de l'output et en ajoutant une incertitude sur la volatilité. Dans un premier temps, ils ont résolu le problème de first-best. Tout d'abord, ils ont considéré une sous-classe de contrats linéaires par rapport à la valeur finale de l'output et à sa variation quadratique, puis ils ont montré que les contrats optimaux dans la sous-classe sont en faits optimaux dans la classe de tous les contrats admissibles. Dans un deuxième temps, ils ont résolu le problème de second-best. Ils ont utilisé les EDSR pour obtenir une représentation probabiliste de la fonction valeur de l'agent. En particulier, cette représentation permet de caractériser l'action optimale choisie par l'agent.
Aïd et al. [1] ont modélisé des contrats incitatifs qui permettent une réponse adaptée en fonction de la demande globale énergétique. Ils ont montré que dans le cas de first-best, le prix de l'énergie est une combinaison convexe de la valeur marginale de l'énergie pour le consommateur et du coût marginal du producteur. Dans le cas de second-best, le prix de l'énergie est non constant et non linéaire et est une fonction décroissante du temps qui induit plus d'efforts au début de la période qu'à la fin. Muller [50] a montré que le contrat optimal de first best est linéaire en la valeur finale de l'output comme dans le cas de second best si on considère que le principal et l'agent ont une utilité exponentielle.

1.5 Motivation de la thèse, résultats obtenus et contributions

Dans cette thèse, on s'intéresse aux contrats de partenariat public-privé. Le problème majeur de ce type de contrat est l'asymétrie d'information entre les deux parties, à la fois dans les phases de négociation et de suivi du projet. En particulier, le public ne peut pas a priori observer l'effort du consortium : c'est un problème de principal-agent avec aléa moral. On suppose que le public est neutre au risque et le consortium est adverse au risque. Les PPP sont des contrats portant sur des dizaines d'années, il n'est pas réaliste de considérer un paiement terminal, on suppose que le public paie le consortium continûment. L'effort de l'agent n'impacte que le drift de la valeur sociale du projet et pas la volatilité. Par ailleurs, notre modèle étant en dimension 1, le fait d'observer X revient à observer sa variation quadratique et donc sa volatilité (au signe près).
Notre objectif est de proposer une modélisation permettant de fournir des éléments de comparaison et d'étude explicites tout en étant suffisamment proche de la réalité. Les contrats de PPP sont actuellement de plus en plus remis en question en France, notamment par un rapport du Sénat de 2014, qui parle de "bombe à retardement". Nous visons à caractériser le contrat optimal pour un PPP dans ce cadre d'asymétrie d'information, et d'étudier à long

terme les implications de tels contrats pour les pouvoirs publics. Notre étude apporte une réflexion quantitative à ce débat d'actualité. Ma thèse comporte 4 chapitres :

Chapitre 2 – Contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral.

Dans le chapitre 2, et dans un contexte similaire à celui de Sannikov [57], on étudie le problème de principal-agent. On considère un contrat perpétuel entre une entité publique et un consortium. On considère que le consortium prend en charge le coût initial du projet ainsi que les coûts de maintenance. L'effort que le consortium fait pour améliorer la valeur sociale du projet n'est pas observable par le public. Par ailleurs, le public verse une rente au consortium, pour compenser ses efforts et pour les coûts opérationnels. C'est lié au problème de principal-agent avec aléa moral. On considère un modèle de Stackelberg : le public est le leader en proposant un contrat caractérisé par sa rente et le consortium donne la meilleure réponse caractérisée par son effort. Notre objectif est de caractériser un tel contrat optimal pour le PPP dans le cadre d'asymétrie d'information. Notre approche repose sur des méthodes de martingale et de contrôle stochastique. Dans ce travail, on utilise une *formulation forte*, on considère différentes filtrations correspondant à différents niveaux d'informations comme dans le contexte de contrôle stochastique avec observation partielle (cf. Bensoussan [8], section 2.3). Comparée à un problème de contrôle classique, la difficulté de notre formulation provient du fait que le public ne peut pas observer l'effort du consortium. Il observe uniquement son impact sur la valeur sociale du projet X qui est le processus d'état du problème de contrôle. C'est un problème de contrôle stochastique non standard. L'idée pour surmonter cette difficulté consiste à reformuler le problème d'optimisation en terme de processus de valeur de continuation du consortium, celle-ci devenant le processus d'état du problème d'optimisation. Ce type de raisonnement a été introduit dans le problème de principal-agent en temps continu par Sannikov [57] . On résout le problème du contrôle sur un ensemble plus grand de contrôles qui sont adaptés par rapport à la filtration totale qui comprend toute les informations du public et du consortium. Une fois ramené à un problème de contrôle optimal classique, on établit l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB en abrégé) associée à la fonction valeur du public, puis on applique un théorème de vérification qui prouve qu'une solution de l'équation HJB coïncide avec la fonction valeur. Dans ce contexte d'asymétrie d'information, une discussion minutieuse sur la mesurabilité des processus optimaux a été réalisée, en particulier, on montre que les filtrations coïncident à l'optimum. De plus, on prouve l'existence de la solution de l'équation HJB, en se basant sur les résultats de Strulovici et Szydlowski [59] (voir chapitre

5).
On détermine le contrat optimal, en caractérisant la rente optimale et l'effort optimal. Une étude et résolution numérique ont été obtenues via une approximation numérique de l'équation HJB, en utilisant l'algorithme d'Howard : il s'agit de discrétiser l'équation de HJB en utilisant les méthodes de différences finies (voir chapitre 5). Un exemple numérique montre que, en particulier, la rente optimale est une fonction convexe et non linéaire de l'effort, contrairement à ce que supposent certains modèles de la littérature économique. Cette convexité est due à l'asymétrie d'information entre le consortium et l'entité publique.

Chapitre 3 – L'arrêt optimal du contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral

Dans le chapitre 3 de cette thèse, on s'intéresse au problème de principal-agent avec un horizon aléatoire. Puisque les PPP sont des contrats portant sur des dizaines d'années (20, 30 à 50 ans), notre modélisation doit insérer la possibilité de finir le contrat à des dates fixes ou aléatoires. Comme dans le chapitre 2, on considère un modèle de Stackelberg : on suppose que le public verse une rente au consortium, tandis que ce dernier donne une meilleure réponse caractérisée par son effort. De plus, le public a la possibilité d'arrêter le contrat à une date aléatoire et il donne alors une compensation au consortium. Ceci combine un problème de contrôle stochastique et un problème d'arrêt optimal dans un cadre d'aléa moral. Dans ce travail, on considère un contrat entre le public et le consortium. Le consortium fait un effort qui est non observable par le public pour améliorer la valeur sociale du projet.
Étant donné un contrat fixé, le public calcule la meilleure réponse du consortium, puis il résout son problème en prenant en compte le meilleur effort et en calculant le contrat optimal associé. On suppose que le consortium accepte le contrat uniquement si son payoff dépasse une contrainte de réservation. On est dans le cadre d'aléa moral à cause de l'asymétrie d'information entre les parties. Dans ce travail, on considère une approche différente du chapitre 2. Au lieu d'utiliser l'approche forte, on utilise *l'approche faible* : on suppose que le consortium change la distribution de la valeur sociale du projet en changeant son drift et cela revient à considérer une nouvelle probabilité qui dépend de l'effort du consortium. Comme précédemment on cherche une paramétrisation par la fonction de continuation du consortium. On montre que la dynamique de la fonction objectif du consortium est liée à une solution d'une EDSR avec un horizon aléatoire. Le générateur de l'EDSR dépend seulement que de Z. On donne une preuve de l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR plus simple que celle à Darling et Pardoux [23]. On prouve un théorème de comparaison. On étudie la dépendance du coefficient de la diffusion Z de l'EDSR en fonction de l'effort A de l'agent, on discute

de l'opportunité d'omettre la dépendance de Z en A en utilisant l'unicité de la solution de l'EDSR et le théorème de comparaison. On obtient une bijection qui lie Z et A. D'habitude dans la littérature, le problème d'optimisation consiste à maximiser un certain critère où Z est une variable de contrôle. Dans ce travail, on choisit A comme une variable de contrôle car elle représente une quantité physique et elle est donc plus interprétable que le contrôle Z. De plus, grâce à la bijection on caractérise les contrats incitatifs. On est ramené à un problème de contrôle stochastique standard et un problème d'arrêt optimal, on établit l'inéquation variationnelle d'Hamilton-Jacobi-Bellman (IVHJB en abrégé) associée à la fonction valeur du public. Puis on prouve un théorème de vérification et on caractérise les contrats optimaux.

Chapitre 4 – La formulation forte et le partage de risque pour le contrat de partenariat privé public

Dans la première partie du chapitre 4, on s'intéresse aussi au problème de partenariat privé public avec horizon aléatoire mais en utilisant la formulation forte : on considère une *formulation forte* ; on considère différentes filtrations correspondant à différents niveaux d'information comme dans le contexte de contrôle stochastique avec observation partielle (cf. Bensoussan [8]). Dans cette approche, contrairement à la formulation faible, on ne fait pas de changement de probabilité, on reste sur le même espace de probabilité. Dans ce chapitre, on suppose que les contrôles ne sont pas bornés contrairement au chapitre 2. On utilise des méthodes de martingale et de contrôle stochastique, on montre que l'inéquation variationnelle d'HJB et le théorème de vérification sont donnés comme dans la formulation faible (cf chapitre 3). Dans ce chapitre, l'effort optimal peut être égal à zéro, par conséquent, on ne peut pas montrer la coïncidence des filtrations à l'optimum.

Dans une deuxième partie, on traite le cadre de partage de risque (first-best), on suppose que le public et le consortium ont les mêmes informations, les deux parties partagent le risque entre elles, le problème devient un problème d'optimisation à un seul individu "le public" qui choisit à la fois la rente et l'effort. Le public verse une rente au consortium, l'agent fournit un effort, et le public souhaite arrêter le contrat à une date aléatoire et donne une compensation au privé. Pour résoudre ce problème, dans un premier temps, on suppose que le public n'arrête pas le contrat, alors on se ramène à un problème de contrôle stochastique et pour résoudre ce problème on utilise la dualité, en introduisant un multiplicateur de Lagrange. On considère le problème non contraint et on montre que la rente et l'effort sont des contrôles déterministes. Dans un deuxième temps, on traite le cas général, c'est-à-dire que le public arrête le contrat. Une étude numérique a été réalisée, on trace la courbe de la fonction valeur du public dans le

cadre d'aléa moral et dans le cadre de partage de risque, on trouve que la fonction publique de partage de risque est plus grande que celle avec aléa moral et la différence peut être interprétée comme la "valeur de l'information".

Chapitre 5 – Étude théorique et numérique de l'existence et régularité de l'équation d'HJB.

Dans le chapitre 5, dans une première partie, on étudie l'existence d'une solution de l'équation d'HJB associée au problème de contrôle stochastique qui apparaît dans le chapitre 2. On propose deux méthodes : dans la première, on détaille les résultats de Strulovici et Szydlowski [59]. Le résultat principal indique sous des conditions de continuité et de linéarité de coefficients de diffusion que la fonction valeur d'un problème de contrôle stochastique est deux fois différentiable et on résout l'équation de HJB correspondant à ce problème. Dans une deuxième méthode, on utilise les résultats de Fleming [30] sur les équations aux dérivées partielles, le principe du maximum et les résultats de Ladyzhenskaya [45] sur les équations elliptiques, pour montrer l'existence de la solution de l'équation d'HJB.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, on reprend les résultats de Lapeyre et al. [46] pour la résolution numérique d'une équation Hamilton Jacobi-Bellman et l'inéquation variationnelle dans le cadre de notre étude numérique. On discrétise l'équation ou l'inéquation associée en utilisant les méthodes de différences finies et on cherche une approximation de la solution d'une EDP aux noeuds d'une grille. On donne des conditions qui assurent que le problème discret admet une unique solution et qu'elle converge vers la solution continue. On donne l'algorithme qui permet de résoudre l'HJB et l'HJBVI : c'est l'algorithme d'Howard qui consiste à alterner deux suites (les contrôles et la fonction valeur). Tout d'abord, on calcule la politique optimale en fonction de la fonction valeur déjà calculée, puis on résout l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation d'HJB le contrôle optimal par le contrôle que l'on a calculé à l'étape précédente. Finalement, on résout numériquement l'inéquation variationnelle d'HJB qui apparaît dans le chapitre 3. On fait varier le paramètre de la volatilité, on constate que la fonction valeur du public est croissante par rapport à la volatilité, c'est-à-dire que le risque est supporté par le consortium.

1.6 Perspectives

Dans la continuité de ce travail, les perspectives sont nombreuses. Une des questions importantes que l'on pourra traiter dans les prochains travaux, est de regarder un cadre multidimensionnel, en supposant que l'effort affecte à la fois le drift et la volatilité de la valeur sociale.

On pourra aussi ajouter une incertitude sur le drift et voir les impacts sur les fonctions valeurs du principal et de l'agent. Une autre perspective de ce travail est de considérer un public avec plusieurs agents, en changeant le contrat d'un agent à un autre, on reformule alors notre problème en un problème de "switching" que l'on pourra étudier théoriquement et numériquement. De plus, on pourra étudier l'éventualité d'une pénalité imposée au consortium, en cas de non-respect des clauses du contrat.

1.7 Publications

1. Publication
   - I. Hajjej, C. Hillairet, M. Mnif, and M. Pontier. Optimal contract with moral hazard for public private partnerships. *Stochastics*, 89(6-7) :1015–1038, 2017 (cf. chapitre 2).
2. Article soumis
   - I. Hajjej, C. Hillairet, M. Mnif. Optimal stopping contract for Public Private Partnerships under moral hazard. *Submitted* (cf. chapitre 3).
3. Preprint
   - The Strong and the weak formulation for the public private parternship (cf. chapitre 4).
4. Communications en conférences :
   - Optimal stopping contract for Public Private Partnerships under moral hazard, 12th European Summer School in Financial Mathematics, 2 - 6, septembre 2019-Padova-Italie.
   - Optimal contract with moral hazard for Public Private Partnerships, CREMMA, 22-26, avril 2019- Tunis.
   - Optimal stopping contract for Public Private Partnerships under moral hazard, International Conference on Stochastic Analysis and Applications : Stochastic Control, information and applications 24-27 Octobre 2017- Tunis.

Chapitre 2

Optimal contract with moral hazard for Public Private Partnerships

We demand rigidly defined areas of doubt and uncertainty !

Douglas Adams

Sommaire

2.1 Introduction 18
2.2 Public Private Partnership's optimal contracts 20
2.2.1 Effort and rent 20
2.2.2 A Stackelberg leadership model 21
2.2.3 Incentive compatible contract 23
2.3 Optimal controls and value functions for the public and the consortium 26
2.3.1 Formal derivation of the HJB equation 26
2.3.2 Verification theorem 27
2.3.3 Going back to the original set $\mathcal{A}^X$ of control processes 35
2.4 Numerical implementation 35
2.4.1 Howard's Algorithm 36
2.4.2 Effort and rent 37
2.4.3 Numerical results 37
2.5 Appendix 41

Abstract

Public-Private Partnership (PPP) is a contract between a public entity and a consortium, in which the public outsources the construction and the maintenance of an equipment (hospital, university, prison...). One drawback of this contract is that the public may not be able to observe the effort of the consortium but only its impact on the social welfare of the project. We aim to characterize the optimal contract for a PPP in this setting of asymmetric information between the two parties. This leads to a stochastic control under partial information and it is also related to principal-agent problems with moral hazard. Considering a wider set of information for the public and using martingale arguments in the spirit of Sannikov [57], the optimization problem can be reduced to a standard stochastic control problem, that is solved numerically. We then prove that for the optimal contract, the effort of the consortium is explicitly characterized. In particular, it is shown that the optimal rent is not a linear function of the effort, contrary to some models of the economic literature on PPP contracts.

Keywords : Public Private Partnership, Stochastic control under partial information, HJB equation, Moral Hazard.

2.1 Introduction

A Public Private Parternship contract is defined by the split between private and public tasks concerning a public services, namely : the design of the project, the construction (building), the financing and the maintenance (operate). DBFO means that all the four tasks are supported by the private partner. The goal of PPP contracts is to transfer the risk to the consortium, to provide a better value for money in the use of public funds. In France, by the law of 2008 endorsing the order of 17th June 2004, PPP contract can not be used except if it is expressly justified with regarded to at least one of the following criteria : emergency, complexity, economic efficiency...and actually the conclusion is that almost all projects are in emergency...

The relevance of outsourcing an investment in order to reduce the debt of a public entity has been studied in Espinosa et al. [29]. Here we do not focus on the cost of the construction but on the maintenance aspect of the PPP contract. Hillairet and Pontier propose in [35] a study on PPP and their relevance, assuming the eventuality of a default of the counterparty. In their model, as in other economic papers such as Iossa et al. [41], the rent is assumed to be a linear rule of the effort of the consortium : although this modelisation leads to tractable computations, it seems very "ad hoc" and economically questionable. The present work does

not assume any a priori form for the rent, and in our numerical example, it is shown that the optimal rent is actually not a linear rule.

This chapter focuses on the informational asymmetry issue in PPP contracts. Indeed, public and private partners obviously do not share the same information for negotiation, management and follow-up of the contract. Auriol-Picard [6] prove that Build-Operate-Transfer (BOT) contracts (a variant of PPP contracts) may be relevant for the public in case of better information of the private partner, provided a large enough number of concession candidates. But for example in France only three consortium are able to support a PPP contract (Bouygues, Vinci, Eiffage). The support mission of PPP (MAPPP in French, for Mission d'Appui aux PPP), responsible for evaluating the projects in view of legitimate the use of a PPP contract, aims also to reduce the information asymmetry between public entity and consortium. However, as pointed out by the General Inspectorate of Finance in December 2012, the multiple roles of the mission put it "de facto" in a potential situation of conflict of interest.

Besides, the public may not be able to observe the effort of the consortium, but only its impact on the social welfare of the project. Thus characterizing an optimal PPP contract in this setting of asymmetric information between both partners is related to principal-agent problems with moral hazard. As shown in book of Cvitanic et al. [22], a general theory can be used to solve these problems, by means of forward-backward stochastic differential equations. This work is inspired by the literature on dynamic contracting using recursive methods, and in particular the seminal paper of Sannikov [57] (2008). In Biais et al. [10], the agent is risk-neutral and his efforts, unobservable by the principal, reduce the likelihood of large (but relatively infrequent) losses of the size of a project : more precisely, the losses occur according to a Poisson process whose intensity is controlled by the agent. Pagès and Possamaï [52] propose an optimal contracting between competitive investors and an impatient bank monitoring a pool of long-term loans subject to Markov contagion. The unobservable bank monitoring decision affects the default intensity of an entity of the pool. Optimal contracting in a Brownian setting with risk-averse agent and principal has also been studied recently in Cvitanic et al. [17], by identifying a family of admissible contracts for which the optimal agent's action is explicitly characterized, and leading to a tractable case for CARA (exponential) utility functions.

In this chapter, due to the long maturity of PPP, we consider a perpetual contract between a public entity and a consortium. The consortium supports the initial cost of the project as well as the maintenance costs. The effort that the consortium does to improve the social value of the project is not observable by the public. Thus the rent the public pays to the consortium, to compensate him for his efforts and for the operational costs, is determined on the basis of the public information, that is according to the social value of the project. This is related

to principal/agent problem with moral hazard and our approach relies on stochastic control under partial information, as in Bensoussan [8]. We consider a Stackelberg leadership model : the public (the principal) is the leader by offering a contract (characterized by the rent), while the consortium (the agent) gives a best response (characterized by the effort). The aim of this chapter is to characterize such optimal contracts. To overcome the difficulty that the control process of the consortium (the effort) is not observable by the public, we restrict the family of admissible contracts to a set of contracts that lead to a tractable characterization of the consortium effort. This could be economically interpreted by the fact that others contracts, for which the public does not know what incentives they will provide to the consortium effort, will likely not be offered. Moreover, we theoretically prove that the optimal contract is indeed of this form. Finally we characterize optimal contracts and provide numerical solutions.

This chapter is organized as follows. Section 2.2 presents the problem, Section 2.3 provides the solution of this optimal control via Hamilton-Jacobi-Belman equation. Section 2.4 concludes with numerical illustrations based on the Howard algorithm.

2.2 Public Private Partnership's optimal contracts

Throughout the chapter, $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ is a filtered probability space, with $\mathbb{F}$ a Brownian filtration generated by a standard Brownian motion W.

2.2.1 Effort and rent

The **operational cost** $(C_s)_{s\geq 0}$ of the project, supported by the consortium (and not observed by the public), is a non-negative $\mathbb{F}$-adapted process

$$C_t = C_0 + kt + \sigma W_t, \tag{2.2.1}$$

where

- $C_0 > 0$ is the initial cost of the project, taking into account the construction of the infrastructure.
- C_t is the cumulative cost of the project over the period $[0, t]$, taking into account both the cost of the construction and the cost of the infrastructure maintenance.
- $k > 0$ and $\sigma > 0$ are respectively the drift and the volatility of the operational cost of the infrastructure maintenance.

Remark 2.2.1. *The cost process (C_s) is not necessarily non-negative for all s. Nevertheless, as it is proved in Appendix 2.5, a sufficient condition to get the cost non-negative on time interval $[0, T]$ with at least probability 0.95 is $C_0/(\sigma\sqrt{T}) \geq 1.96$.*

The consortium supports the operational cost and chooses the effort he does to improve his service for the project : the effort is a non-negative $\mathbb{F}$-adapted process $(A_s)_{s\geq 0}$, it improves the social value of the project. The social welfare, defined as the social value of the project plus the operational cost, is a $\mathbb{F}$-adapted process $(X_s)_{s\geq 0}$ given by

$$X_t := X_0 + \int_0^t (\varphi(A_s)ds + dC_s) = X_0 + \int_0^t (\varphi(A_s) + k)ds + \sigma dW_s \tag{2.2.2}$$

where X_0 is the initial value of the project (i.e. of the construction, it may be a function of C_0) and φ is specified hereafter.

The public observes the social value X of the project, but he does not observe directly the effort of the consortium. Thus his information is conveyed by the filtration $\mathbb{F}^X$ generated by the social value process X. The public chooses the rent he will pay to the consortium to compensate him for his efforts and the operational costs that he supports ; the rent is a non-negative $\mathbb{F}^X$-adapted process $(R_s)_{s\geq 0}$.

Thus we are looking for optimal control processes (R, A) with R adapted to the filtration generated by the observation X but itself is depending on the control process A. Remark that in our model the effort A only affects the drift and not the volatility of the social welfare X (the case of an impact both on the drift and the volatility will be done in a future work). We develop here a strong approach, in the context of stochastic control under partial observation as in Bensoussan [8] Section 2.3.

2.2.2 A Stackelberg leadership model

We define the respective optimization problems for the consortium and the public. Due to the long maturity of PPP contract (up to 30-50 years), we assume that the contract is perpetual. The public and the consortium have the same time preference parameter $\delta > 0$. Let us first define the functions involved in the formulation of the optimization problems :

Hypothèse 2.2.2.
- *U is the utility function of the consortium, strictly concave strictly increasing and satisfying $U(0) = 0$ and Inada's conditions $U'(\infty) = 0, U'(0) = \infty$.*
- *φ models the impact of the consortium's efforts on the social value, φ is strictly concave increasing satisfying $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(\infty) = 1$ (so $\varphi(x) \geq x$), $\varphi'(0) < \infty$.*
- *h is the cost of the effort for the consortium ; h is convex, $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$, (thus h is increasing) and $h'(\infty) = \infty$.*
- *$h \circ \psi^{-1}$ is convex where $\psi := \frac{1}{2}(\frac{h'}{\varphi'})^2$.*

Finally, the public does not want to pay a rent over a given amount $\bar{r}$.

Remark 2.2.3. *The function $\frac{h'}{\varphi'}$ is increasing positive, and $\psi(e) = \frac{1}{2}(\frac{h'}{\varphi'}(e))^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})^2 > 0$.*

We define different sets of admissible contracts, depending on the information flow :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{(R_s, A_s)_{s\geq 0} \quad \mathbb{F}\text{-adapted, } A_s \geq 0, ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e. \text{ such that} \\ &\quad U(R_s - k) - h(A_s) \geq 0 \; ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e. \text{ and } k \leq R_s \leq \bar{r}, \; \}. \\ \mathcal{A}^X &:= \mathcal{A} \cap \{(R_s, A_s)_{s\geq 0}, \text{ such that} \quad R \text{ is } \mathbb{F}^X\text{-adapted} \; \}.\end{aligned}$$

Those admissibility conditions ensure that entering into the contract provides a non-negative value for the consortium. Remark that (R, A) in $\mathcal{A}$ implies the following integrability properties

$$e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s + k)^- \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega), \; e^{-\delta s}(U(R_s - k) - h(A_s)) \text{ and } \frac{h'}{\varphi'}(A_s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \Omega). \tag{2.2.3}$$

We consider a Stackelberg leadership model : the public is the leader by offering a contract (characterized by the rent process R). The consortium gives a best response in terms of the effort process $(A_s)_{s\geq 0}$.

Objective function and continuation value for the consortium and for the public : The consortium aims to optimize the expectation of his aggregate utility of the rent minus the drift of the operational cost, minus the cost of his effort

$$A \to J_0^C(R, A) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\delta s}\left(U(R_s - k) - h(A_s)\right) ds\right). \tag{2.2.4}$$

The public anticipates the consortium's best response to propose the optimal contract and aims to optimize the expectation of the social welfare minus the rent paid to the consortium

$$\begin{aligned}R \to J_0^P(R, A) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\delta s}\left(dX_s - R_s ds\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\delta s}(dC_s + \varphi(A_s)ds) - R_s ds)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s + k)ds\right), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

the last equality being a consequence of the dynamics of the social welfare X and the fact that $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma dW_t\right) = 0$. According to (2.2.3), the integrals of both objective functions equation (2.2.4) and equation (2.2.5) are well defined. From a dynamic point of view, the objective function at time t for the consortium is $\mathbb{P}$-a.s.

$$J_t^C(R, A) := \mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-\delta(s-t)}\left(U(R_s - k) - h(A_s)\right) ds | \mathcal{F}_t\right) \tag{2.2.6}$$

while the objective function at time t for the public is $\mathbb{P}$-a.s.

$$J_t^P(R, A) := \mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s) - R_s + k)ds | \mathcal{F}_t^X\right). \tag{2.2.7}$$

The consortium chooses the effort A and the public chooses the rent R in the set of admissible contracts $\mathcal{A}^X$, such as to optimize their respective objective functions, leading to the corresponding continuation value process denoted respectively V^C and V^P.

More precisely, an effort process A is incentive compatible with respect to a given rent R if it optimizes the consortium's expected utility (defined in equation (2.2.4)) given R. The problem of the public is to find R (the contract) that optimizes his expected discounted profit (defined in equation (2.2.5)), given the corresponding incentive compatible effort A.

Compared to a classic optimization control problem, the difficulty of our formulation is that the public does not observe the control A of the consortium, but he observes only its impact on the social value X which is the state process of the optimization control problem. The state process X appears in an implicit way in the formulation of the optimization problem of the consortium, through the rent process R, control of the public. Thus there is no explicit link between the two controls A and R, the only indirect link involves the state process X. The trick to overcome this difficulty is to reformulate the optimization problems in terms of the consortium continuation value process V^C.

2.2.3 Incentive compatible contract

To encourage the consortium to follow the recommended effort, the public proposes an incentive compatible contract. This subsection characterizes the incentive compatible contracts for (R, A) in $\mathcal{A}$ the largest set of admissibility. As in Sannikov [57] or Cvitanic et al. [17] in a weak formulation setting, the following Proposition 2.2.4 characterizes the dynamics of consortium continuation value process. It is coherent with the result of [17], proved using BSDE's technics, in a more general framework.

Proposition 2.2.4. *If the contract $(R, A) \in \mathcal{A}$ is incentive compatible, with A taking value in $]0, \bar{a}[$ with $\bar{a} := h^{-1} \circ U(\bar{r} - k)$, then the dynamics of the consortium objective function is*

$$dJ_t^C(R, A) = \delta J_t^C(R, A)dt - (U(R_t - k) - h(A_t))dt + Y_t dW_t, \quad a.s.$$

where

$$Y_t = \sigma \frac{h'(A_t)}{\varphi'(A_t)} > 0. \tag{2.2.8}$$

Therefore, $A_t = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}\left(Y_t \sigma^{-1}\right)$, denoted as $A^*(Y_t)$, realizes the optimal value in (2.2.6) for the consortium. If R is the optimal rent for the public, then the corresponding incentive compatible effort takes value in $]0, \bar{a}[$ and the **incentive compatible** *dynamic of the consortium*

continuation value process is

$$dV_t^C = \delta V_t^C dt - (U(R_t - k) - h(A_t))dt + \sigma \frac{h'(A_t)}{\varphi'(A_t)} dW_t. \tag{2.2.9}$$

Remark 2.2.5. *Incentive compatible contracts imply that the effort A is necessarily defined as an $\mathbb{F}^{V^C} = (\sigma(V_s^C, s \leq t)_{t\geq 0}$ adapted process since it has to satisfy $A_t = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}\left(Y_t\sigma^{-1}\right)$ where $Y_t^2 = \frac{d}{dt}\langle V^C\rangle_t$.*

Proof For any admissible pair $(R, A) \in \mathcal{A}$, let us define the process

$$M_t^C(R, A) := e^{-\delta t} J_t^C(R, A) + \int_0^t e^{-\delta s} \left(U(R_s - k) - h(A_s)\right) ds, \;\; t \geq 0.$$

The pair $(R, A) \in \mathcal{A}$, $U(R_s - k) - h(A_s)$ takes its values in the bounded interval $[0, U(\bar{r} - k)]$. Therefore M^C is an $\mathbb{F}$-martingale, uniformly integrable, as an $\mathbb{F}$-conditional expectation of a bounded random variable : there exists a $\mathbb{F}$-predictable process Y [1]such that $e^{-\delta s}Y_s \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ and for any t :

$$e^{-\delta t} J_t^C(R, A) + \int_0^t e^{-\delta s}(U(R_s - k) - h(A_s))ds = J_0^C(R, A) + \int_0^t e^{-\delta s} Y_s dW_s. \tag{2.2.10}$$

The boundedness of $U(R_s - k) - h(A_s)$ implies that the process $e^{-\delta t} J_t^C(R, A)$ is uniformly bounded by the integral $\int_t^\infty e^{-\delta s} ds$ which goes to 0 when t goes to infinity. Thus t going to infinity in (2.2.10) leads to the consortium's objective value

$$\int_0^\infty e^{-\delta s}(U(R_s - k) - h(A_s))ds - \int_0^\infty e^{-\delta s} Y_s dW_s = J_0^C(R, A).$$

Using Definition (2.2.2)

$$J_0^C(R, A) = \int_0^\infty e^{-\delta s}(U(R_s - k) + Y_s\sigma^{-1}(\varphi(A_s) + k) - h(A_s))ds - \int_0^\infty e^{-\delta s}\sigma^{-1} Y_s dX_s. \tag{2.2.11}$$

The public observes the social value $(X_t)_{t\geq 0}$ but he could not make difference between the effort $(A_t)_{t\geq 0}$ and the Brownian motion $(W_t)_{t\geq 0}$. The consortium knows that the incentive contract proposed by the public does not optimize the integral $\int_0^\infty e^{-\delta s}\sigma^{-1} Y_s dX_s$. In order to motivate the consortium, the public proposes a contract such that the corresponding optimal effort $(A_t^*)_{t\geq 0}$ maximizes the concave function $a \to Y_t\sigma^{-1}\varphi(a) - h(a)$, for all t, $dt \otimes d\mathbb{P}$ almost everywhere.

It remains to prove that, for the "optimal" contract, the optimum on $[0, \bar{a}]$ of this function is not attained on the bounds of the interval (where $\bar{a} := h^{-1} \circ U(\bar{r} - k)$ is the upper bound of

1. The process Y depends on A. In this chapter, we have omitted the dependence of Y as a function of A, but we detailed this dependence in Chapter 3.

the effort). More precisely, we prove that if the incentive compatible effort is equal to 0 or to $\bar{a}$, then the public could propose a better contract (that is a rent) that will increase his value function.

Let $t \geq 0$ and $\eta > 0$ be fixed and consider the stochastic set $D_{t,\eta} := \{\omega : \ A_s^*(\omega) = 0 \text{ for } s \in [t, t+\eta]\}$. From the definition of the public continuation value process, $R_\cdot^* = k$ on $D_{t,\eta}$. Therefore, on this set, $V_\cdot^C$ is a constant process. Since the dynamics of the consortium continuation value process follows $dV_s^C = \delta V_s^C ds + Y_s dW_s$, on $D_{t,\eta}$, the uniqueness of the Itô decomposition implies $V_\cdot^C = Y_\cdot = 0$ on $D_{t,\eta}$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ a.e. On the other hand, on $D_{t,\eta}$, $A = 0, R = k$ implies $V_s^P = 0$. However, since the public is the leader, he could propose a rent to the consortium satisfying $R_s - k = U^{-1}(h(A_s))$. The concavity of the functions φ, h^{-1}, U, yields the function $g : x \to \varphi[h^{-1}(U(x))] - x$ is concave. Moreover it satisfies $g(0) = 0$, $g'(0) = +\infty$ and going to $-\infty$ when $x \to \infty$, thus $\sup_{x \geq 0}(\varphi[h^{-1}(U(x)]) - x) > 0$ and $V_s^P > 0$. This is a contradiction and $\mathbb{P}(D_{t,\eta}) = 0$. This shows that the incentive compatible effort for the "optimal" contract satisfies $A_t^* > 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$. Similarly $A_t^* < \bar{a}$ $dt \otimes d\mathbb{P}$. •

In the following, **all admissible contracts** (R, A) **are assumed incentive compatible**, and thus are denoted $(R, A^*(Y))$. With a slight abuse of notation we keep the same notations $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^X$. In the next section, we will first solve the problem under the set of controls $\mathcal{A}$, that is with no restriction of measurability on the rent process. As suggested by Remark 2.2.5, we will then check that the optimal controls (R^*, A^*) over $\mathcal{A}$ are functions of the consortium continuation value V^C. Thus equation (2.2.9) modeling the dynamics of the consortium value function is a Markovian diffusion, the solution of which being defined up to its explosion time τ. We will prove that $\tau = +\infty$ a.s.

The public value at time 0 over the class $\mathcal{A}$ is written as follows

$$v(x) := \sup_{(R, A=A^*(Y)) \in \mathcal{A}} J_0^P(R, A) = \sup_{(R, A=A^*(Y)) \in \mathcal{A}} E_x[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s + k)ds] \quad (2.2.12)$$

where E_x is the conditional expectation with respect to the event $\{V_0^C = x\}$. The fact that the effort $A = A^*(Y)$ is the best response of the consortium, for a given rent R, follows from the incentive compatible dynamic (2.2.9) of the state process V^C.

The next section characterizes, through a HJB equation, the function v that realizes the optimum for the public over the class of $\mathcal{A}$. But, actually we will prove that the optimal processes over the class $\mathcal{A}$ are in fact $\mathbb{F}^X$-adapted and the optimal value function for the public over the class $\mathcal{A}^X$ is indeed $v(V_0^C)$ (see Proposition 2.3.7). Thus we solve ultimately the original optimization problem over the class $\mathcal{A}^X$.

2.3 Optimal controls and value functions for the public and the consortium

We first solve the optimization problem (2.2.12) over the set of controls $\mathcal{A}$, that is done using the dynamic programming principle. Subsection 2.3.1 gives a formal derivation of the Hamilton Jacobi Bellman equation

$$\sup_{(r,a)\in\mathcal{C}} [-\delta w(x) + \mathcal{L}^{r,a} w(x) - r + \varphi(a) + k] = 0, \tag{2.3.1}$$

where the second order differential operator $\mathcal{L}^{r,a}$ is defined by

$$\mathcal{L}^{r,a} w(x) := w'(x)(\delta x - U(r-k) + h(a)) + \frac{1}{2} w''(x) \left(\sigma \frac{h'}{\varphi'}(a)\right)^2$$

and the control space $\mathcal{C}$ is defined by

$$\mathcal{C} := \{(r,a) \in [k, \bar{r}] \times \mathbb{R}^+,\ h(a) \leq U(r-k)\}. \tag{2.3.2}$$

Subsection 2.3.2 relates the HJB equation to the optimization problem (2.2.12), and characterizes the optimal controls and value functions over $\mathcal{A}$. We then prove in Subsection 2.3.3 that the optimal controls over the larger set $\mathcal{A}$ are actually in $\mathcal{A}^X$.

2.3.1 Formal derivation of the HJB equation

We assume that the public value function v (defined in equation (2.2.12)) is of class C^2. Standard methods (e.g. El Karoui [26] or Pham [53]) are used to provide the HJB equation that is satisfied by the public value function v. We give nevertheless some details for the sake of completeness.

Let $\eta > 0$, and $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$, the dynamic programming principle yields

$$v(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\int_0^\eta e^{-\delta s} (\varphi(A_s^*(Y)) - R_s + k) ds + e^{-\delta \eta} v(V_\eta^C) \right].$$

Itô's formula applied to the process $(e^{-\delta s} v(J_s^C(R, A^*(Y))))_{s\geq 0}$ and taking expectation yield

$$0 \geq \mathbb{E}_x [\int_0^\eta e^{-\delta s} (-\delta v(x) + \mathcal{L}^{R_s, A_s^*(Y)} v(J_s^C) + \varphi(A_s^*(Y)) - R_s + k) ds].$$

Dividing by η, letting η goes to 0, then using the continuity of the integrands and the mean value theorem we obtain

$$-\delta v(x) + v'(x)(\delta x - U(r-k) + h(a)) + \frac{1}{2} v"(x) (\sigma \frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2 - r + \varphi(a) + k \leq 0.$$

Since this holds for any control $(r,a) \in \mathcal{C}$, we obtain the inequality

$$\sup_{(r,a)\in\mathcal{C}} [-\delta v(x) + \mathcal{L}^{r,a} v(x) - r + \varphi(a) + k] \leq 0. \tag{2.3.3}$$

On the other hand, suppose that $(R^*, A^*(Y))$ is an optimal control for the class $\mathcal{A}$. Then the dynamic programming principle yields

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\eta e^{-\delta s} (\mathcal{L}^{R_s^*, A_s^*(Y)} v(J_s^C) + \varphi(A_s^*(Y)) - R_s^* + k) ds \right]$$

where V_s^C is the consortium value function at time s, given by the optimal control $(R^*, A^*(Y))$. By similar arguments, dividing by η, and sending η to 0, one has at time $t = 0$

$$-\delta v(x) + \mathcal{L}^{R_0^*, A_0^*(Y)} v(x) + \varphi(A_0^*(Y)) - R_0^* + k = 0$$

which combined with (2.3.3) yields (2.3.1).

A useful result to solve this HJB equation is the following.

Lemma 2.3.1. *The function v defined in (2.2.12) is a non-negative bounded function on $\mathbb{R}^+$.*

Proof For all $(R,A) \in \mathcal{A}$ and for any $t \geq 0$, $J_t^C(R,A) \geq 0$ thus $V_t^C \geq 0$. Therefore the function v is defined on $\mathbb{R}^+$.

For any $(r,a) \in \mathcal{C}$, $h(a) \leq U(r-k)$ and due to the concavity of φ, $\varphi(a) - (r-k) \leq \varphi'(0) h^{-1}(U(r-k)) - (r-k)$. Since the function $x \to \varphi'(0) h^{-1}(U(x)) - x$ is concave, going from 0 at $x = 0$ to $-\infty$ when $x \to \infty$, it admits the maximum

$$\sup_{x\geq 0} (\varphi'(0) h^{-1}(U(x)) - x) \tag{2.3.4}$$

which bounds v from above on $\mathbb{R}^+$. Besides, the constant control $R_t = k; A_t = 0,\ dt \otimes d\mathbb{P}$, *a.e.*, is admissible and incentive compatible (the best consortium's response to a minimum rent is zero effort). Using this control implies that $\forall x \geqslant 0, v(x) \geq 0$. •

2.3.2 Verification theorem

In this subsection the optimal control problem (2.2.12) is characterized as the solution of the HJB equation (2.3.1) via a verification theorem (cf. for instance El Karoui [26], Pham [53], Krylov [43] or Fleming-Rishel [30]). The following proposition provides the structure of the optimal control.

Proposition 2.3.2. *Suppose Assumption 2.2.2, then there exists a unique admissible optimal pair (r^*, a^*) which realizes the maximum in HJB equation (2.3.1). This optimal pair is defined*

by $r^*(x) = (k + (U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)}))\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge \bar{r}$ *and* $a^*(x) = \arg\max(a \to w'(x)h(a) + w"(x)\sigma^2\psi(a) + \varphi(a))$ *in the compact interval* $\left[0, h^{-1} \circ U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge (\bar{r} - k)\right)\right]$. *Moreover, the function* r^* *is continuous on* $\mathbb{R}^+$ *and* a^* *is Borel measurable on* $\left[0, h^{-1} \circ U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge (\bar{r} - k)\right)\right]$.

Example 2.3.3. *For instance, the hypotheses of Proposition 2.3.2 are satisfied for :* $\varphi(x) = x + \ln(1+x)$, $h(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x+4) - \frac{8}{3}$, *so* $h'(x) = \frac{2+x}{\sqrt{1+x}}$, $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $2\psi(x) = 1 + x$, $\psi^{-1}(x) = 2x - 1$. *The functions* φ *and* ψ *are concave, and* ψ^{-1} *is convex. Finally* $h"(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{2+x}{2(1+x)^{3/2}} = \frac{x}{2(1+x)^{3/2}} \geq 0$, h *is convex,* $h(0) = 0$, $h'(0) = 2$, h *convex yields* $h(x) \geq 2x$. *In this example, the coefficient of* $w''(x)$ *is* $\frac{1}{2}\sigma^2(1+a)$, *so it does not depend on* x.

Proof (i) *Change of variables* :

$$P = h(a) - U(r-k) \ ; \ Q = \frac{1}{2}(\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2 = \psi(a).$$

Recall $\psi : x \to \frac{1}{2}(\frac{h'(x)}{\varphi'(x)})^2$ is non decreasing since h is convex and φ concave. This change of variable is a bijection

$$[k, \bar{r}] \times \mathbb{R}_+ \to [-U(\bar{r}-k), 0] \times \mathbb{R}_+ \ ; (r, a) \mapsto (h(a) - U(r-k), \psi(a)).$$

with inverse

$$[-U(\bar{r}-k), 0] \times [\psi(0), \psi(\infty)) \to [k, \bar{r}] \times \mathbb{R}_+ \ ; \ (P, Q) \mapsto (k + U^{-1}[h \circ \psi^{-1}(Q) - P], \psi^{-1}(Q)).$$

The constraint $P \leq 0 \Leftrightarrow U(r-k) - h(a) \geq 0$ is the admissibility condition on control (r, a). Thus the HJB equation (2.3.1) is equivalent to

$$\sup_{-U(\bar{r}-k) \leq P \leq 0, \psi(0) \leq Q \leq \psi(\infty)} \left[w'(x)P + w"(x)\sigma^2 Q + \varphi(\psi^{-1}(Q)) - U^{-1}(h \circ \psi^{-1}(Q) - P))\right] = -\delta x w'(x) + \delta w(x).$$

(ii) *For any* C^2 *function* f *and under the hypotheses of Proposition 2.3.2, the function*

$$\mathcal{H} : \ (P, Q) \mapsto f'(x)P + f"(x)\sigma^2 Q + \varphi(\psi^{-1}(Q)) - U^{-1}(h \circ \psi^{-1}(Q) - P) + k$$

is strictly concave.

To prove that $\mathcal{H}$ is strictly concave, we check that $D^2(-\mathcal{H})(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ is a positive-definite matrix :

$$\partial^2_{P,P}\mathcal{H} < 0, \text{ and } \partial^2_{Q,Q}\mathcal{H} < 0 \text{ and } \partial^2_{P,P}\mathcal{H}\partial^2_{Q,Q}\mathcal{H} - (\partial^2_{P,Q}\mathcal{H})^2 > 0.$$

Computing the first order derivatives :

$$\begin{aligned} \partial_P\mathcal{H} &= (U^{-1})'(h \circ \psi^{-1}(Q) - P) + f'(x), \qquad (2.3.5) \\ \partial_Q\mathcal{H} &= \varphi'(\psi^{-1}(Q))(\psi^{-1})'(Q) - (U^{-1})'(h \circ \psi^{-1}(Q) - P).(h \circ \psi^{-1})'(Q) + \sigma^2 f"(x). \end{aligned}$$

Using the concavity of function U the second order derivative $\partial^2_{P,P}\mathcal{H}$ satisfies

$$\partial^2_{P,P}\mathcal{H} = -(U^{-1})"(h\circ\psi^{-1}(Q) - P)) < 0.$$

Other concavity arguments yield

$$\begin{aligned}\partial^2_{Q,Q}\mathcal{H} &= (\psi^{-1})"(Q)\varphi'\circ\psi^{-1}(Q) + ((\psi^{-1})'(Q))^2\varphi"\circ(\psi^{-1})(Q)\\ &- (h\circ\psi^{-1})"(Q)(U^{-1})'(h\circ\psi^{-1}(Q) - P)\\ &- ((h\circ\psi^{-1})'(Q))^2(U^{-1})"(h\circ\psi^{-1}(Q) - P) < 0.\end{aligned}$$

Finally

$$\partial^2_{P,Q}\mathcal{H} = (h\circ\psi^{-1})'(Q)(U^{-1})"(h\circ\psi^{-1}(Q) - P)$$

and since $(U^{-1})"(h\circ\psi^{-1}(Q) - P) > 0$, the Jacobian sign is the one of

$$-(\psi^{-1})"(Q)\varphi'\circ\psi^{-1}(Q) - ((\psi^{-1})'(Q))^2\varphi"\circ(\psi^{-1})(Q) + (h\circ\psi^{-1})"(Q)(U^{-1})'(h\circ\psi^{-1}(Q) - P)$$

which is positive (using again concavity arguments). Then

$$\partial^2_{P,P}\mathcal{H}\partial^2_{Q,Q}\mathcal{H} - (\partial^2_{P,Q}\mathcal{H})^2 > 0$$

and $\mathcal{H}$ is strictly concave.

(iii) *Existence of an optimal pair* (r^*, a^*).

In the HJB equation one has to maximize the function

$$g : r \mapsto -w'(x)U(r-k) - r.$$

When $w'(x) \geq 0$, this function is non-increasing and the optimum is k.

Otherwise, the function is concave and the optimum is achieved for

$$r^*(x) = (k + (U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0}) \wedge \bar{r}.$$

Moreover $x \to r^*(x)$ is continuous even at zero points of the function w' because $(U')^{-1}(\infty) = 0$.

The optimal pair has to satisfy the admissibility condition

$$0 \leq h(a^*) \leq U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge (\bar{r}-k)\right).$$

Since the function

$$a \mapsto w'(x)h(a) + w"(x)\sigma^2\psi(a) + \varphi(a)$$

is continuous on the compact interval $\left[0, h^{-1}\circ U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge (\bar{r}-k)\right)\right]$ there exists an optimal solution a^*. Moreover by a selection theorem (See Appendix B, Fleming

and Rishel [30]), there exists a Borel-measurable function a^* from $\left[0, h^{-1} \circ U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0} \wedge (\bar{r}-k)\right)\right]$ into $\mathbb{R}$. Finally, by construction (r^*, a^*) takes its values in $\mathcal{C}$. •

Proposition 2.3.4. *Define* $\bar{x} := \frac{1}{\delta}\left(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})\right)$ *and suppose Assumption 2.2.2. Then*
(i) The consortium initial value V_0^C *is in the interval* $[0, \bar{x}]$.
(ii) $v(\bar{x}) = 0$.

Proof i) We assume $V_0^C > \frac{1}{\delta}(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}))$ and we prove that it leads to a contradiction. Let $r_0 := k + U^{-1}(\delta V_0^C)$ and define the strict convex function $\tilde{h}(.) := h(.) - U'(r_0 - k)\varphi(.)$. Then $\delta V_0^C > Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})$, U increasing and U' decreasing imply that $U'(r_0 - k)\varphi'(0) < h'(0)$. For any control $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$, one has by strict concavity of the function U

$$U(R_s - k) < U(r_0 - k) + U'(r_0 - k)(R_s - r_0), \quad ds \otimes d\mathbb{P} \quad a.e. \text{ when } R_s \neq r_0. \tag{2.3.6}$$

and by strict convexity of $\tilde{h}(.) := h(.) - U'(r_0 - k)\varphi(.)$, with our choice of r_0, $h(0) = \varphi(0) = 0, \tilde{h}'(0) > 0$,

$$-h(A_s^*(Y)) < -U'(r_0 - k)(\varphi(A_s^*(Y))) \quad ds \otimes d\mathbb{P} \quad a.e. \text{ when } \quad A_s > 0. \tag{2.3.7}$$

For any control $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$ that is not identical to $(r_0, 0)$,

$$\begin{aligned} J_0^C(R, A^*(Y)) &= \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty e^{-\delta s}(U(R_s - k) - h(A_s^*(Y)))ds\Big) \\ &< \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty e^{-\delta s}(U(r_0 - k) + U'(r_0 - k)(R_s - \varphi(A_s^*(Y)) - r_0)ds\Big) \\ &< \frac{U(r_0 - k)}{\delta} - U'(r_0 - k)\Big(\frac{r_0 - k}{\delta} + \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Y)) - R_s + k)ds\Big)\Big), \end{aligned}$$

where the last inequality holds from (2.3.6) and (2.3.7). Since $r_0 = U^{-1}(\delta V_0^C) + k$, for $(R, A) \neq (r_0, 0)$,

$$\delta J_0^C(R, A) < \delta V_0^C - U'(r_0 - k)[r_0 - k + \delta J_0^P(R, A)]. \tag{2.3.8}$$

By taking the supremum over all admissible strategies, we get

$$\delta V_0^P \leq k - r_0 < 0. \tag{2.3.9}$$

On the other hand, by Lemma 2.3.1, one has $V_0^P \geq 0$. This gives a contradiction to (2.3.9), and V_0^C is necessarily smaller than $\frac{1}{\delta}\left(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})\right)$.

ii) We now prove that $v(\bar{x}) = 0$.
The proof follows the same lines as the previous part *i*) with this time $V_0^C = \bar{x} = \frac{1}{\delta}(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}))$.

We notice that the constant control $(r_0, 0)$, which leads to $J_0^C(r_0, 0) = \bar{x}$, is an admissible control and so the equality $V_0^C = \bar{x}$ makes sense. Let us recall that $r_0 = k + U^{-1}(\delta V_0^C)$, $U'(r_0 - k)\varphi'(0) = h'(0)$. For any control $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$, one has by concavity of the function U

$$U(R_s - k) \leqslant U(r_0 - k) + U'(r_0 - k)(R_s - r_0), \quad ds \otimes d\mathbb{P} \quad a.e.$$

and by convexity of $\tilde{h}$

$$-h(A_s^*(Y)) \leqslant -U'(r_0 - k)(\varphi(A_s^*(Y))) \quad ds \otimes d\mathbb{P} \quad a.e.$$

thus

$$J_0^C(R, A^*(Y)) \leqslant \frac{U(r_0 - k)}{\delta} - U'(r_0 - k)(\frac{r_0 - k}{\delta} + \mathbb{E}(\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Y)) - R_s + k)ds))$$

and $r_0 = k + U^{-1}(\delta \bar{x})$ implies

$$\delta J_0^C(R, A^*(Y)) \leqslant \delta \bar{x} - U'(r_0 - k)[r_0 - k + \delta J_0^P(R, A^*(Y))].$$

Taking the supremum over all incentive compatible admissible strategies, we get

$$\delta v(V_0^C) \leq k - r_0 \leq 0. \tag{2.3.10}$$

Besides $v \geqslant 0$ by Lemma 2.3.1. Therefore $v(\bar{x}) = 0$. •

Lemma 2.3.5. *The function v satisfies*

$$v(0) = \frac{1}{\delta} \sup_{0 \leq x \leq \bar{r} - k} (\varphi \circ h^{-1} \circ U(x) - x) \tag{2.3.11}$$

Proof Since every admissible control $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$ must satisfy $U(R_s - k) - h(A^*(Y)_s) \geq 0$, $ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e$, then the equality $V_0^C = 0$ holds for every control $(R^*, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$ satisfying $U(R_s^* - k) - h(A^*(Y)_s) = 0$, $ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e$ which is equivalent to

$$h^{-1} \circ U(R_s^* - k) = A^*(Y)_s,\ ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e.$$

In this class of controls, one has

$$\varphi \circ h^{-1} \circ U(R_s^* - k) - R_s^* + k \leq \sup_{k \leq r \leq \bar{r}} \left(\varphi \circ h^{-1} \circ U(r - k) - (r - k)\right)\ ds \otimes d\mathbb{P}\, a.e.$$

This shows that

$$V_0^P \leq \frac{1}{\delta} \sup_{k \leq r \leq \bar{r}} \left(\varphi \circ h^{-1} \circ U(r - k) - (r - k)\right),$$

and the equality holds when $(R_s^*, A^*(Y)_s) = (\hat{r}, \hat{a})\, ds \otimes d\mathbb{P}$ a.e. where $\hat{r}$ realizes the maximum of the function $r \longrightarrow \big(\varphi \circ h^{-1} \circ U(r-k) - (r-k)\big)$ on $[k, \bar{r}]$ and $\hat{a} = h^{-1} \circ U(\hat{r}-k)$. We easily check that the control $(\hat{r}, \hat{a})$ is indeed admissible (incentive compatible). This proves (2.3.11).

•

We now proceed to the verification Theorem (cf. [53] Th. 3.5.3., infinite horizon). Thanks to Proposition 2.3.4 and Lemma 2.3.5, we study the HJB equation on a bounded domain $[0, \bar{x}]$ with the Dirichlet boundary conditions

$$v(0) = \frac{1}{\delta} \sup_{0 \le x \le \bar{r}-k} (\varphi \circ h^{-1} \circ U(x) - x), \quad v(\bar{x}) = 0. \tag{2.3.12}$$

Theorem 2.3.6. *Under Assumption 2.2.2 the HJB equation (2.3.1) with boundary conditions (2.3.12) admits a unique solution w in $C^2((0,\bar{x})) \cap C^0([0,\bar{x}])$. Let $(a^*(x), r^*(x))$ be the argmax in the HJB equation (2.3.1). We assume that a^* is of bounded variation, then the associated stochastic differential equation*

$$dV_t^C = \delta V_t^C dt - (U(r^*(V_t^C) - k) - h(a^*(V_t^C))dt + \sigma \frac{h'(a^*(V_t^C)}{\varphi'(a^*(V_t^C))} dW_t, \; V_0^C = x \tag{2.3.13}$$

admits a unique strong solution denoted as V^C. We define the following controls :
$A_t^* := a^*(V_t^C), R_t^* := r^*(V_t^C)$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ almost everywhere. Then, (R^*, A^*) is the optimal control in $\mathcal{A}$. As a conclusion, the public value function satisfies $v(x) = w(x)$.

Remark that on the numerical simulations, a^* is decreasing and thus is indeed of bounded variation.

Proof Step 1 : The equation (2.3.1) admits an unique $C^2((0,\bar{x})) \cap C^0([0,\bar{x}]$ solution.
This follows from Theorem 1 in [59], whose assumptions are satisfied. Indeed the set of controls $\mathcal{C} = \{(r,a) \in [k,\bar{r}] \times \mathbb{R}^+, \; h(a) \le U(r-k)\}$ is a nonempty compact set. The coefficients of the HJB equation (2.3.1) are affine functions of the variable x, and continuous functions in the control (r,a), for each x, thus standard linear growth assumptions on the coefficients of (2.3.1) are satisfied. Under Assumption 2.2.2, the function $\frac{h'}{\varphi'}$ is increasing positive, and $0 < \frac{h'(0)}{\varphi'(0)} \le \frac{h'(a)}{\varphi'(a)}$. Therefore the volatitity coefficient of the HJB equation (2.3.1) admits a uniform lower bound. In addition, the coefficient $-r + \varphi(a) + k$ is bounded on $\mathcal{C}$. Therefore, applying Theorem 1 in [59], the HJB equation (2.3.1) has a twice continously differentiable solution in $(0,\bar{x})$, and continuous on $[0,\bar{x}]$.
Furthermore Proposition 2.3.2 proves that for all x there exists an admissible pair $(r^*(x), a^*(x))$ in $\mathcal{C}$ such that

$$-\delta w(x) + \mathcal{L}^{(r^*(x),a^*(x))} w(x) - r^*(x) + \varphi(a^*(x)) + k = \max_{(r,a)\in\mathcal{C}} \left[-\delta w(x) + \mathcal{L}^{r,a} w(x) - r + \varphi(a) + k)\right].$$

Step 2 : $w(x) \geq v(x)$

Let $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$ and the corresponding process $(J_t^C(R, A^*(Y)))_{t\geq 0}$ with dynamic

$$dJ_t^C(R, A^*(Y)) = \delta J_t^C(R, A^*(Y))dt - (U(R_t - k) - h(A_t^*(Y)))dt + \sigma \frac{h'(A_t^*(Y))}{\varphi'(A_t^*(Y))} dW_t,\ J_0^C(R, A^*(Y)) = x.$$

Applying Itô's formula to the process $(e^{-\delta t} w(J_t^C(R, A^*(Y))))_{t\geq 0}$

$$\begin{aligned} e^{-\delta T} w(J_T^C(R, A^*(Y))) = w(x) \quad &+ \quad \int_0^T e^{-\delta s}[-\delta w(J_s^C(R, A^*(Y))) + \mathcal{L}^{R, A^*(Y)} w(J_s^C)(R, A^*(Y))]ds \\ &- \quad \int_0^T e^{-\delta s} \sigma w'(J_s^C(R, A^*(Y))) \frac{h'(A_s^*(Y))}{\varphi'(A_s^*(Y))} dW_s \end{aligned}$$

with $w'(J_t^C(R, A^*(Y))) \frac{h'(A_t^*(Y))}{\varphi'(A_t^*(Y))}$ being a bounded process. Taking the expectation, for all T

$$\begin{aligned} E_x[e^{-\delta T} w(J_T^C(R, A^*(Y)))] \quad &= \quad w(x) + E_x[\int_0^T e^{-\delta s}[\mathcal{L}^{R_s, A_s^*(Y)} w(J_s^C(R, A^*(Y))) \\ &- \quad \delta w(J_s^C(R, A^*(Y)))]ds]. \end{aligned}$$

From the HJB equation (2.3.1), $\mathcal{L}^{R_s, A_s^*(Y)} w(J_s^C(R, A^*(Y))) - \delta w(J_s^C(R, A^*(Y))) \leq R_s - \varphi(A_s^*(Y)) - k$ thus

$$E_x[e^{-\delta T} w(J_T^C(R, A^*(Y)))] \leq w(x) + E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(-\varphi(A_s^*(Y)) - k + R_s)ds.$$

Using boundedness from above of $-\varphi(a) - k + r$ when $(r, a) \in \mathcal{C}$ (cf. the proof of Lemma 2.3.1) and admissibility conditions on $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$, one has $e^{-\delta s}| - \varphi(A_s) - k + R_s| \leq e^{-\delta s}(\varphi(A_s) + k - R_s)^- + e^{-\delta s} M \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$. By the dominated convergence theorem, we obtain

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(-\varphi(A_s^*(Y)) - k + R_s)ds] = E_x[\int_0^\infty e^{-\delta s}(-\varphi(A_s^*(Y)) - k + R_s)ds].$$

Besides, as w is a continuous function and J_T^C is bounded, one has

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} E_x[e^{-\delta T} w(J_T^C(R, A^*(Y)))] = 0 \text{ for all } (R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}.$$

Therefore

$$0 \leq w(x) + E_x[\int_0^\infty e^{-\delta s}(-\varphi(A_s^*(Y)) - k + R_s)ds],$$

so for any $(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}$ we get

$$w(x) \geq E_x[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Y)) + k - R_s)ds],$$

and

$$w(x) \geq \sup_{(R, A^*(Y)) \in \mathcal{A}} V_0^P(R, A^*(Y)) = v(x).$$

Step 3 : the SDE (2.3.13) admits a unique strong solution

Let us consider the SDE (2.3.13) associated to the optimal pair $(r^*(V_t^C), a^*(V_t^C))$, then $\tilde{V}_t^C := e^{-\delta t}V_t^C$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ a.e. satisfies the SDE

$$d\tilde{V}_t^C = -e^{-\delta t}(U(r^*(V_t^C) - k) - h(a^*(V_t^C))dt + \sigma e^{-\delta t}\frac{h'(a^*(V_t^C)}{\varphi'(a^*(V_t^C))}dW_t,\ V_0^C = x. \quad (2.3.14)$$

The existence of a strong solution of this SDE is given by Nakao [51] (Theorem p. 516), as the drift is bounded measurable, the volatility $\sigma\frac{h'}{\varphi'}(a^*)$ is strictly bounded from below and of bounded variation (since it is the case for a^*). The existence of a strong solution of the SDE (2.3.13) follows.

Step 4 : $w(x) \leq v(x)$

This solution actually is the process denoted as $(V_t^C)_{t\geq 0}$ meaning $V^C = J^C(R^*, A^*)$ where $R_s^* := r^*(V_s^C)$, $A^* := a^*(V_s^C)$, $ds \otimes d\mathbb{P}$ *a.e.*. We now repeat the above arguments of Step 2 :

$$e^{-\delta T}w(V_T^C) = w(x) + \int_0^T e^{-\delta s}[-\delta w(V_s^C) + \mathcal{L}^{R_s^*, A_s^*}w(V_s^C)]ds - \int_0^T e^{-\delta s}\sigma w'(V_s^C)\frac{h'(A_s^*)}{\varphi'(A_s^*)}dW_s.$$

Thus for all T

$$E_x[e^{-\delta T}w(V_T^C)] = w(x) + E_x[\int_0^T e^{-\delta s}[-\delta w(V_s^C) + \mathcal{L}^{R_s^*, A_s^*}w(V_s^C)]ds].$$

But since w satisfies the HJB equation (2.3.1) with such optimal controls we get

$$E_x[e^{-\delta T}w(V_T^C)] = w(x) + E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(R_s^* - k - \varphi(A_s^*))ds]$$

$$= w(x) - E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(R_s^* - k - \varphi(A_s^*))^- ds] + E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(R_s^* - k - \varphi(A_s^*))^+ ds].$$

Taking into account the boundedness of the controls $(r^*(V_t^C), a^*(V_t^C))_{t\geq 0}$ (cf. Proposition 2.3.2), the dominated convergence theorem allows us to get T going to infinity in $E_x[\int_0^T e^{-\delta s}(R_s^* - k - \varphi(A_s^*))ds]$. Besides, Fatou's lemma and boundedness of w allow us to get T going to infinity in $E_x[e^{-\delta T}w(V_T^C)]$. Therefore

$$w(x) \leq J_0^P(R^*, A^*) \leq v(x).$$

Conclusion : w is the public value function v defined in equation (2.2.12) and $(a^*(V_t^C), r^*(V_t^C))$ is a Markovian optimal control. •

2.3.3 Going back to the original set $\mathcal{A}^X$ of control processes

In this subsection, we will prove that the process V^C is $\mathbb{F}^X$-adapted.

Proposition 2.3.7. *Under the assumptions of Theorem 2.3.6, the unique strong solution to the stochastic differential equation (2.3.13) admits an infinite explosion time, and the filtrations $\mathbb{F}^X$, $\mathbb{F}^{V^C}$ and $\mathbb{F}$ coincide at the optimum.*

Proof First, as R and A are bounded, the strong solution of the SDE (2.3.13) does not explode. Besides, $\mathbb{F}^{V^C}$ and $\mathbb{F}^X$ are obviously included in $\mathbb{F}$.
(i) We first express V^C as the solution of the SDE (2.3.13)

$$dV_t^C = \delta V_t^C dt - (U(r^*(V_t^C) - k) - h(a^*(V_t^C)))dt + \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(V_t^C))dW_t.$$

Under the assumptions of Theorem 2.3.6, this SDE admits an unique strong solution, thus the filtrations generated by W and V^C coincide since $\sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(V_t^C))$ the coefficient of dW_t is positive (cf. Corollary 1.12 of Revuz-Yor [55]).
(ii) On the other hand, by definition :

$$dX_t = (\varphi(a^*(V_t^C)) + k)dt + \sigma dW_t,$$

thus, since $\sigma > 0$,

$$dW_t = \frac{1}{\sigma}[dX_t - (\varphi(a^*(V_t^C)) + k)dt]$$

and

$$dV_t^C = \delta V_t^C dt - (U(r^*(V_t^C) - k) - h(a^*(V_t^C))dt + \frac{h'}{\varphi'}(a^*(V_t^C))\left(-(\varphi(a^*(V_t^C)) + k)dt + dX_t\right).$$

Once again, under the assumptions of Theorem 2.3.6, V^C is a strong solution of this stochastic differential equation driven by X so this process V^C is $\mathbb{F}^X$-adapted. Therefore the three filtrations $\mathbb{F}^{V^C}$, $\mathbb{F}^X$ and $\mathbb{F}$ coincide at the optimum.

•

2.4 Numerical implementation

The consortium continuation value is the state parameter used in the resolution of the stochastic control problem of Section 2.3. Proposition 2.3.4 gives an upper bound for the consortium initial value $V_0^C \in [0, \bar{x}]$.

2.4.1 Howard's Algorithm

The HJB-equation (2.3.1) is written as follows

$$\sup_{(r,a)\in\mathcal{C}}\left[-\delta v(x)+v'(x)(\delta x-U(r-k)+h(a))+\frac{1}{2}v"(x)(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2-r+\varphi(a)+k\right]=0. \tag{2.4.1}$$

Let Δ be the finite difference step on the state coordinate and $(x_i)_{i=1,N}$, $x_i = i\Delta$, be the points of the grid Ω_Δ. The equation (2.4.1) is discretized by replacing the first and second derivatives of v with the following approximations

$$v'(x)\simeq\begin{cases}\frac{v(x+\Delta)-v(x)}{\Delta} & \text{if } \delta x+h(a)-U(r-k)\geq 0\\ \frac{v(x)-v(x-\Delta)}{\Delta} & \text{if not}\end{cases}$$

$$v''(x)\simeq\frac{v(x+\Delta)-2v(x)+v(x-\Delta)}{\Delta^2}.$$

$$v(0)=\frac{1}{\delta}\sup_{0\leq x\leq\bar{r}-k}\varphi\circ h^{-1}\circ U(x)-x,\ v(\bar{x})=0.$$

where $\bar{x}=\frac{1}{\delta}\left(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})\right)=N\Delta$.
This leads to the system of $(N-1)$ equations with $(N-1)$ unknowns $(v^\Delta(y_i))_{i=1,\dots N-1}$:

$$\max_{(r,a)\in\mathcal{C}}\left[A^{\Delta,(r,a)}v^\Delta(x_i)+B^{\Delta,(r,a)}\right]=0$$

where $B^{\triangle,(r,a)}$ is given by

$$B^{\triangle,(r,a)}=\begin{pmatrix}-r+\varphi(a)+k+(\frac{b^-(\Delta)}{\Delta}+\frac{a(\Delta}{\Delta^2})v(0)\\ -r+\varphi(a)+k\\ \vdots\\ \vdots\\ -r+\varphi(a)+k\end{pmatrix}$$

the matrix $A^{\Delta,(r,a)}$ is defined as follows :

$$[A^{\Delta,(r,a)}]_{i,i-1}=\frac{b^-(y_i)}{\Delta}+\frac{a(x_i)}{\Delta^2};\ [A^{\Delta,(r,a)}]_{i,i}=c(y_i)-\frac{|b(x_i)|}{\Delta}-2\frac{a(x_i)}{\Delta^2};[A^{\Delta,(r,a)}]_{i,i+1}=\frac{b^+(x_i)}{\Delta}+\frac{a(x_i)}{\Delta^2};$$

with $b^+(x)=\max(b(x),0)$, $b^-(x)=\max(-b(x),0)$ and

$$\begin{aligned}c(x) &= -\delta\\ b(x) &= (h(a)-U(r-k))+\delta x,\\ a(x) &= \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2.\end{aligned}$$

To solve the latter equation we use an iterative Howard algorithm (cf. Howard [37]). It consists in computing two sequences $(r^n(x_i), a^n(x_i))_{i=1,\dots N-1}$ and $(v^{\Delta,n}(y_i))_{i=1,\dots N-1}$ (starting from (r^1, a^1) chosen arbitrary) :

• step $2n-1$: to the strategy (r^n, a^n) we compute $v^{\Delta,n}$ solution of the linear system

$$A^{\Delta,(r^n,a^n)} v^{\Delta} + B^{\Delta,(r^n,a^n)} = 0$$

on the grid Ω^{Δ}.

• step $2n$: $v^{\Delta,n}$ is associated with a strategy

$$(r^{n+1}, a^{n+1}) \in \arg \max_{(r,a)\in\mathcal{C}} (A^{\Delta,(r,a)} v^{\Delta,n} + B^{\Delta,(r,a)}).$$

The convergence of the Howard algorithm holds when the matrix $A^{\Delta,(r,a)}$ satisfies the discrete maximum principle : a sufficient condition is that $A^{\Delta,(r,a)}$ is diagonally dominant. This is the case since $c(x) < 0$.

2.4.2 Effort and rent

We recall $r^*(x) = (k + (U')^{-1}(\frac{-1}{v'(x)})\mathbf{1}_{v'(x)<0}) \wedge \bar{r}$
and $a^*(x) = \arg\max(a \to v'(x)h(a) + v"(x)\sigma^2\psi(a) + \varphi(a))$
in the compact interval $\left[0, h^{-1} \circ U\left((U')^{-1}(\frac{-1}{v'(x)})\mathbf{1}_{v'(x)<0}) \wedge (\bar{r} - k)\right)\right]$.

If $v'(x) \geq 0$ $r^*(x) = k$, and $a^*(x) = \arg\max(a \to v'(x)h(a) + v"(x)\sigma^2\psi(a) + \varphi(a))$ in the compact interval $[0, h^{-1}(0)] = \{0\}$.

If $v'(x) < 0$ $r^*(x) = (k + (U')^{-1}(\frac{-1}{v'(x)})) \wedge \bar{r}$, and $a^*(x) = \arg\max(a \to v'(x)h(a) + v"(x)\sigma^2\psi(a) + \varphi(a))$ in the compact interval $\left[0, h^{-1} \circ U\left(((U')^{-1}(\frac{-1}{v'(x)})\mathbf{1}_{v'(x)<0}) \wedge (\bar{r} - k)\right)\right]$.

2.4.3 Numerical results

In this section we choose $U(x) = \sqrt{x}$ and the functions of the example 2.3.3 : $\varphi(x) = x + \ln(1+x)$, $h(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x+4) - \frac{8}{3}$, so $2\psi(x) = 1 + x$.
We choose the parameter $\delta = 0.1$. We restrict our figures to $x \in \left[0, \frac{1}{\delta}\left(Uo(U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})\right)\right]$ (cf. Proposition 2.3.4), that is $[0, 5]$ in our numerical example.
In Figure 2.2, Figure 2.3 and Figure 2.4, $k = 2$ and σ varies : $\sigma = 0.5, 0.8$ or 1. Figure 2.1 gives the optimal rent function of the optimal effort, for $k = 2$ and $\sigma = 0.8$.
We observe that v and a^* are non-increasing functions of the consortium value.

Graph of the optimal rent r as a function of a

The more interesting observation is that the optimal rent is an increasing convex function of the optimal effort. This contradicts the usual assumption of linear dependence between rent

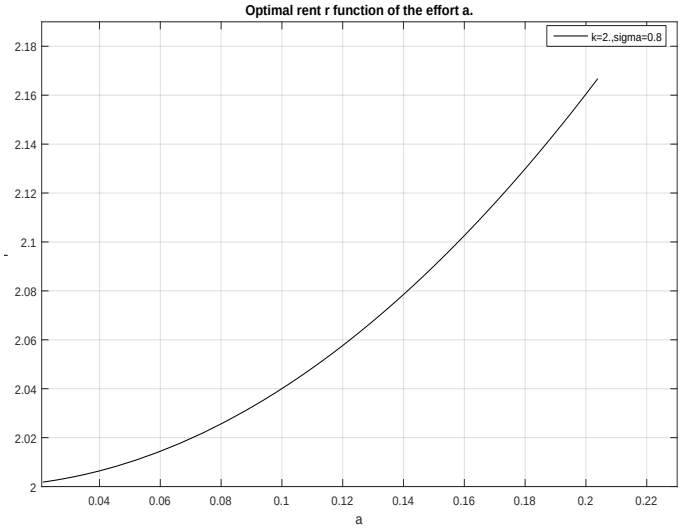


FIGURE 2.1 – Optimal rent r^* function of the optimal effort a^*.

and effort. Besides, the qualitative behaviour of these optimal parameters is the same with respect to both σ and k.

Sensibility of the results to parameter σ

According to Figure 2.2, it seems that the optimal public value function is increasing with respect to σ : the risk is supported by the consortium. The same behavior is observed for the optimal effort (Figure 2.3) and for the optimal rent (Figure 2.4) in case of x large enough. But, when x is lower the optimal effort is decreasing. In case of a low level of the private continuation value x, the consortium is not ready to provide more efforts. This behavior is

observed for any parameter k.

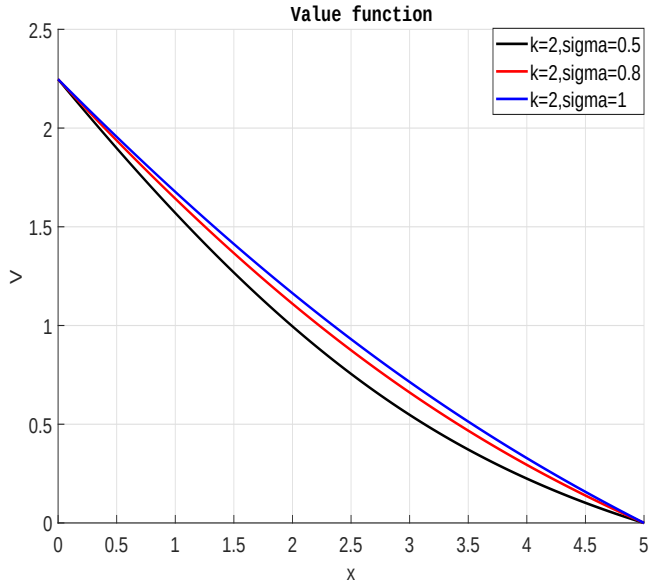


FIGURE 2.2 – Value function v for different σ.

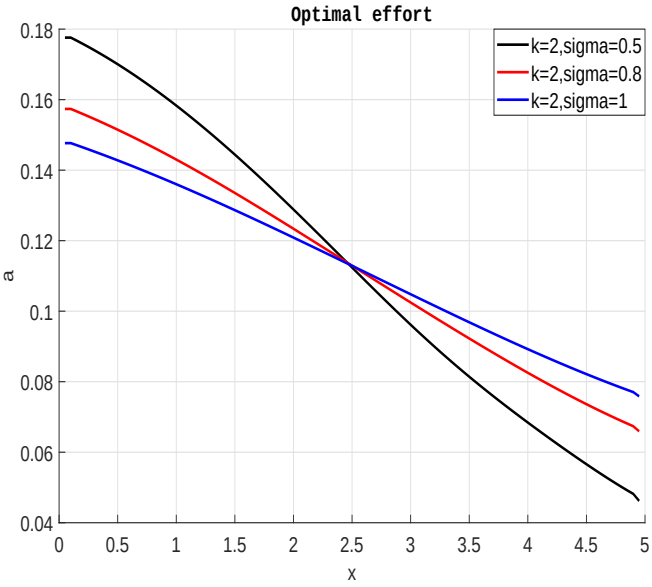


FIGURE 2.3 – Optimal effort a^* for different σ.

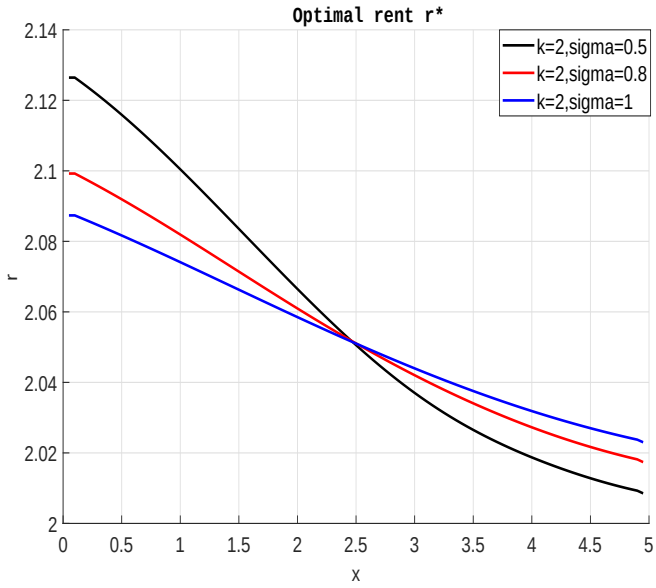


FIGURE 2.4 – Optimal rent r^* for different σ.

Sensibility of the results to parameter k

Actually, the true parameter control is $r - k$, so, as it could be expected, the parameter k has no impact on the behaviors of v, r, and a.

Conclusion

This chapter provides a characterisation of optimal public private partnership contracts in a moral hazard framework, using martingale methods and stochastic control. A numerical example shows that, in particular, the optimal rent is a convex (and not linear) function of the effort. This convexity, due to the information asymmetry between the consortium and the public entity, implies for the public entity a more and more costly contract to encourage the consortium to do more efforts. This feature should be taken into account in the models concerning PPP contracts.

2.5 Appendix

We need to know some sufficient conditions to get the cost process (C_s) non-negative on a time interval $[0,T]$. Recall the Inverse Gaussian law $(IG(\lambda,\mu))$ with density on $\mathbb{R}^+$

$$f(t,\mu,\lambda)=\left(\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{\lambda}{2\mu^2 t}(t-\mu)^2).$$

The cost process C is a drifted Brownian motion and the event

$$\{\inf_{0\leq s\leq T}C_s\geq 0\}=\{\inf_{0\leq s\leq T}ks+\sigma W_s\geq -C_0\}=\{\sup_{0\leq s\leq T}(-ks-\sigma W_s)\leq C_0\}=\{T_{C_0}>T\}$$

where T_{C_0} is an hitting time. It is well known (cf. [42] for instance) that the law of T_{C_0} is $IG(-\frac{C_0}{k},\frac{C_0^2}{\sigma^2})$ meaning that we would like to bound with 0.05 (for instance)

$$\mathbb{P}\{\inf_{0\leq s\leq T}C_s\leq 0\}=\int_0^T\frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{k^2}{2\sigma^2 t}(t+\frac{C_0}{k})^2)dt=\int_0^T\frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{(kt+C_0)^2}{2\sigma^2 t})dt.$$

After the change of variable $x^2=\frac{C_0^2}{t\sigma^2}$, since $k>0$ this probability is bounded by

$$\int_0^T\frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{C_0^2}{2\sigma^2 t}))dt=2\int_{C_0/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx=\Phi(C_0/(\sigma\sqrt{T}))$$

where Φ is the distribution function of the standard Gaussian law. A sufficient condition to get the cost non-negative on time interval $[0,T]$ with at least probability 0.95 is

$$C_0/(\sigma\sqrt{T})\geq 1.96.$$

Chapitre 3

Optimal stopping contract for Public Private Partnerships under moral hazard.

There are two ways to do great mathematics. The first is to be smarter than everybody else. The second way is to be stupider than everybody else – but persistent.

Raoul Bott

Sommaire

3.1 Introduction 43
3.2 The Public Private Partnership model under moral hazard 45
3.3 Incentive compatible contracts 49
3.4 Hamilton Jacobi Bellman variational inequality 59
3.4.1 The boundary condition 63
3.4.2 Verification theorem 63
3.4.3 Beyond the constant volatility case 67
3.5 Appendix : Proof of Proposition 3.3.1 68

Abstract

This chapter studies optimal Public Private Partnerships contracts between a public entity and a consortium, in continuous-time and with a continuous payment, and the possibility for the public to stop the contract. The public ("she") pays a continuous rent to the consortium ("he"), while the latter gives a best response characterized by his effort. This effort impacts the drift of the social welfare, until a terminal date decided by the public when she stops the contract and gives compensation to the consortium. Usually, the public can not observe the effort done by the consortium, leading to a principal agent's problem with moral hazard. We solve this optimal stochastic control with optimal stopping problem in this context of moral hazard. The public value function is characterized by the solution of an associated Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality. The public value function and the optimal effort and rent processes are computed numerically by using the Howard algorithm. In particular, the impact of the social welfare's volatility on the optimal contract is studied.

Keywords : Moral Hazard, Public Private Partnership, stochastic control, optimal stopping, Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality, Howard algorithm.

3.1 Introduction

Public-private partnership (PPP) is defined as a long-term contract between a private party and a public entity, for the construction and/or the management of an asset or public service, in which the consortium takes the risks and a great responsibility to manage the project. Typically, the consortium is making an effort to improve the social value of the project in exchange to a rent payed by the public. The objective of PPP contracts is to ensure a better quality-price ratio in the use of public funds. But a major problem of this type of contracts is the asymmetry of information between the two parties, both in the negotiation and monitoring phases of the project. In particular, the public can usually not observe the effort done by the consortium. It is a principal agent's problem with moral hazard. Numerous situations in the economic literature lead to principal agent's formulation. For example in Biais et al. [10], respectively in Pagès and Possamai [52], the unobservable effort of the agent reduces the intensity of a Poisson process describing the arrival of large losses, or respectively the default time of a pool of long term loans.

The first paper on principal agent problems in continuous-time is the paper of Holmstrom and Milgrom [36]. They considered a Brownian setting in which the agent controls the drift of the output process, and receives a lumpsum payment at the end of the contract, that is a finite time horizon. In their setting, the agent is risk averse with Constant Absolute Risk Aversion and

the principal is risk-neutral. Williams [63] and Cvitanic and Zhang [21] extended those results to more general utility functions. In those situations, the optimal contract (characterized by the lumpsum payment) is a linear function of the output process terminal value. A general theory, using coupled systems of Forward Backward Stochastic Differential Equations, is developed in the monograph of Cvitanic and Zhang [22]. Still in a framework of a lumpsum payment on a finite horizon, Cvitanic et al. [17, 18] considered a general formulation in which the agents efforts impact both the drift and the volatility of the output process, using second-order BSDE in a non Markovian stochastic control setting.

Nevertheless, due to the long maturity of PPP contracts (around 30 to 50 years), it seems unreasonable to propose to the consortium a unique payment at the maturity of the contract. For example, Hajjej et al. [33] derived the optimal perpetual contract (characterized by a rent) using techniques of stochastic control under partial information. This chapter proposes a similar modeling with a continuous payment in random horizon, but adding the possibility of stopping the contract at a fixed or a random time, decided by the public. This combines optimal stochastic control and optimal stopping in this context of moral hazard. The seminal paper of Sannikov [57] proposed a tractable model, in a continuous-time setting and with continuous payment, to study the optimal contract and the optimal time of retiring/firing the agent. The optimal contract is written as a function of the agent's continuation value, which appears as the state variable of the problem. Recently Possamaï and Touzi [54] revisited the seminal paper of Sannikov [57]. They considered a situation of "Golden Parachute" which corresponds to a situation in which the agent ceases any effort at some positive stopping time, and receives a payment. They showed that a Golden Parachute only exists in certain specific circumstances. This contrasts with Sannikov's results, where the only requirement is a positive agent's marginal cost of effort at zero. They showed that there is no Golden Parachute if this parameter is too large. Anderson et al. [3] studied the optimal replacement time (either for the sake of incentive provision, or for the sake of growth) of managers operating for a long-lived firm. Décamps and Villeneuve [24] studied the optimal strategic liquidation time, in a framework where the firm's profitability is impacted by the unobservable managerial effort of the agent. In this setting the principal's problem appears to be a 2-dimensional fully degenerated Markov control problem and the optimal contract that implements full effort is derived. Both papers [3] and [24] assume the agents and the principal to be risk neutral.

In this chapter, we consider a contract between a public entity and a consortium, in a continuous-time setting. The consortium is making effort to improve the social value of the project, driven by a one-dimensional Brownian motion. The effort is not observable by the public, that must choose a continuous rent she will pay to the agent in compensation to his

effort. We assume that the effort only affects the drift and not the volatility of the social value. Indeed in a one-dimensional setting, controlling the volatility would imply that the effort is observable, through the quadratic variation of the social value. We also assume that the volatility of the social value is known, contrary to the paper of Mastrolia and Possamai [49] in which the agent and the principal faced both uncertainty on the volatility of the output. Our aim is to study qualitatively the impact of the volatility parameter on the optimal contract. Since PPP are contracts covering decades, our model tackles the possibility for the public to stop the contract at a random date. The public pays a rent to the consortium, while the latter gives a best response characterized by his effort until a terminal date decided by the public when she stops the contract and gives compensation to the consortium. We assume that the consortium will accept the contract only if his expected payoff exceeds his reservation value $\underline{x}$. As in Sannikov [57], we assume that the agent is risk averse and that the principal is risk neutral. We consider a Stackelberg leadership model between the public and the consortium, that can be solved in two steps. First, given a fixed contract, the public computes the best effort of the consortium. Then, the public solves her problem by taking into account the best effort of the consortium and computes the associated optimal contract.

Our approach is inspired by the seminal paper of Sannikov [57], to which we provide a rigorous mathematical framework using Backward Stochastic differential equations (BSDE), stochastic control and optimal stopping technics. As it is standard in the literature, we use the weak approach, that is the agent changes the distribution of the social value of the project, by making the probability measure depend on agent's effort. We derive the Hamilton Jacobi Bellman variational inequality characterizing the public value function. Finally we provide numerical solutions using Howard algorithm.

The outline of the chapter is as follows. In Section 3.2, we formulate the problem, using the weak approach and we describe the public and the consortium problems. In Section 3.3, we determine the incentive compatible contract and we provide the dynamics of the consortium objective function, using the BSDE technique. In Section 3.4, we derive the Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality associated to the public value function and we provide a verification theorem. Technical results on BSDE with random horizon are postponed in the Appendix.

3.2 The Public Private Partnership model under moral hazard

In this section, we work under the weak formulation as it is done usually in the principal-agent literature. Let W be a standard one dimensional Brownian motion defined on a pro-

bability space $(\Omega, \mathbb{P})$, and $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ is the filtration generated by W, satisfying the usual conditions of right-continuity and completeness.
We introduce the social value of the project that is observed by the public

$$X_t := X_0 + \sigma W_t,\ t \geq 0\ \mathbb{P}\ a.s \tag{3.2.1}$$

where

- $X_0 > 0$ is the initial value of the project.
- $\sigma > 0$ is the volatility of the operational cost of the infrastructure maintenance, that is assumed to be constant. [1]

Remark 3.2.1. *We could take σ equal to 1 in (3.2.1). If $\sigma \equiv 1$, then X is the canonical process defined on Ω the set of continuous paths starting from X_0 and $\mathbb{P}$ is the Wiener measure on Ω. In this chapter, $\sigma \not\equiv 1$ and we study numerically the sensitivity of the value function, the optimal effort and the optimal rent to the volatility parameter σ.*

In the weak formulation, the agent changes the distribution of the process X, by making the underlying probability measure $\mathbb{P}^A$ depend on agent's effort A. We define the process $\gamma^A = (\gamma_t^A)_{t\geq 0}$ by

$$\gamma_t^A := \exp\left[\int_0^t \frac{\varphi(A_s)}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}\right)^2 ds\right] = \mathcal{E}\left[\int_0^t \frac{\varphi(A_s)}{\sigma} dW_s\right]\ t \geq 0\ \mathbb{P}\ a.s$$

where φ is specified hereafter.
We denote by $\mathcal{T}$ the set of all $\mathbb{F}$-stopping times and for $t \geq 0$, we define the set $\mathcal{T}_t := \{\tau \in \mathcal{T}\ s.t\ \tau \geq t\}$.
We fix $\hat{p} \in (2, \infty)$ and we consider

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\hat{p}} \ :=\ & \{(A_s)_{s\geq 0}\ \mathbb{F}\text{-progressively measurable process, } A_s \geq 0\ ds \otimes d\mathbb{P}\ a.e. \\ & \text{such that } \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathbb{E}[(\frac{\gamma_\tau^A}{\gamma_t^A})^{\hat{p}}|\mathcal{F}_t] < \infty,\ \forall\ t \geq 0\}.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

The probability measure $\mathbb{P}^A$ is defined by $\frac{d\mathbb{P}^A}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \gamma_t^A$ for all $t \geq 0$. Then, $\mathbb{P}^A$ and $\mathbb{P}$ are equivalent. By Girsanov's theorem, the process $(W_t^A)_{t\geq 0}$ defined by

$$W_t^A := W_t - \int_0^t \frac{\varphi(A_s)}{\sigma} ds,\ \text{for } t \geq 0$$

is a $\mathbb{P}^A$-Brownian motion and the social value of the project is given by :

1. This could be generalized to a regular $\mathbb{F}$-progressive map $\sigma(X_t)$, this will be further discussed in Section 3.4.3.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi(A_s)ds + \sigma W_t^A,\ t \geq 0\ \mathbb{P}\ a.s. \tag{3.2.3}$$

The public observes the social value X of the project, but she does not observe directly the effort of the consortium : this a situation of moral hazard. She chooses the rent she will pay to the consortium to compensate him for his efforts and the operational costs that he supports. The public could end the contract at the date τ, where τ is a stopping time in $\mathcal{T}$.
A contract is a triplet $\Gamma = ((R_t)_t, \tau, \xi)$ where R is a non-negative $\mathbb{F}$-progressively measurable process, $\tau \in \mathcal{T}$, and ξ is a non negative $\mathcal{F}_\tau$-mesurable random variable which represents the cost of stopping the contract.

Remark 3.2.2. *Contrary to a strong formulation (cf. Hajjej et al. [33]), the filtrations $\mathbb{F}^X$ and $\mathbb{F}$ coincide in the weak formulation, where $\mathbb{F}^X$ is the filtration generated by the social value process X and $\mathbb{F}$ is the Brownian filtration generated by the standard Brownian motion W.*

We now define the respective optimization problems for the consortium and the public. Let us first define the functions involved in the formulation of the optimization problems :

Hypothèse 3.2.3.

- *φ is the function that models the marginal impact of the consortium's efforts on the social value, φ is C^2 strictly concave, bounded, increasing, $\varphi(0) = 0$ and $\varphi'(0) > 0$. We denote by $\|\varphi\|_\infty := \sup_{a\geq 0} |\varphi(a)|$.*
- *$U : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is the utility function of the consortium, strictly concave increasing and satisfying $U(0) = 0$ and Inada's conditions $U'(\infty) = 0,\ U'(0) = \infty$.*
- *h is the cost of the effort for the consortium ; h is C^2, strictly convex increasing, $h(0) = 0$.*

In this chapter, the time preference parameter λ of the consortium is not necessarily equal to δ the one of the public, in general it is usual to assume that the consortium is more impatient than the public ($\lambda \geq \lambda$).

Given a contract $\Gamma = ((R_t)_t, \tau, \xi)$ offered by the principal, the consortium gives a best response in terms of an effort process A : this is a Stackelberg leadership model. The consortium accepts the contract only if his expected payoff exceeds his reservation value $\underline{x}$.

1. Agent's best response

$$A^* \in \underset{A\in\mathcal{A}_\rho^C}{\arg\max}\, \mathbb{E}^A \left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \right] \tag{3.2.4}$$

where, for some $\rho > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\rho^C &:= \{(A_s)_{s\geq 0} \in \mathcal{A}^{\hat{p}}, \text{ such that } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{\rho s}|h(A_s)|^2 ds] < \infty \\ &\qquad \text{and } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{\rho s}|\varphi(A_s)|^2 ds] < \infty\}.\end{aligned}$$

The *objective function* starting at time t for the consortium is $\mathbb{P}^A$-a.s.

$$J_t^C(\Gamma, A) := \mathbb{E}^A\left[\int_t^\tau e^{-\lambda(s-t)}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right].$$

As the process $(J_t^C(\Gamma, A))_{0\leq t\leq \tau}$, is continuous and $\mathbb{P}^A \sim \mathbb{P}$, we have

$$J_t^C(\Gamma, A) = \mathbb{E}^A\left[\int_t^\tau e^{-\lambda(s-t)}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right], \ \forall t \in [\![0, \tau]\!] \ \mathbb{P}\, a.s. \tag{3.2.5}$$

in which $[\![., .]\!]$ denotes a stochastic interval.

2. Given the best response of the agent, the public entity (the principal) aims to maximize the social value of the project minus the rent. Since $\mathbb{E}^A\left[e^{-\delta\tau}X_\tau\right] = \mathbb{E}^A\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}\varphi(A_s)ds\right]$ by Doob's optional sampling theorem, the principal problem is formulated by

$$\sup_{\Gamma\in\mathcal{A}_\rho^P} \sup_{P^{A^*}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}^{A^*}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \tag{3.2.6}$$

subject to the reservation constraint

$$\mathbb{E}^{A^*}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s^*))ds + e^{-\lambda\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \geq \underline{x}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\rho^P &:= \big\{((R_s)_{s\geq 0}, \tau, \xi) \ : \ R \text{ is } \mathbb{F}\text{-progressively measurable process,} \\ &\qquad R_s \geq 0 \ ds \otimes d\mathbb{P} \ a.e. \text{ and } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{\rho s}(U(R_s)^2 \vee R_s^2)ds] < \infty, \\ &\qquad \tau \in \mathcal{T}, \ \xi \ \mathcal{F}_\tau\text{-measurable s.t. } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\rho\tau}\xi^2 \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}] < \infty\big\},\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

where $x \vee y := \max(x, y)$ and

$$\mathcal{P} := \left\{\mathbb{P}^{A^*} \sim \mathbb{P}, A^* \in \underset{A\in\mathcal{A}_\rho^C}{\arg\max}\, \mathbb{E}^A\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]\right\}.$$

The *objective function* starting at time t for the public is $\mathbb{P}^{A^*}$-a.s.

$$J_t^P(\Gamma, A^*) := \mathbb{E}^{A^*}\left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s^*) - R_s)ds - e^{-\delta(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right].$$

Using the same arguments as in (3.2.5), we have

$$J_t^P(\Gamma, A^*) = \mathbb{E}^{A^*}\left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s^*) - R_s)ds - e^{-\delta(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right], \ \forall t \in [\![0,\tau]\!] \ \mathbb{P}\ a.s. \tag{3.2.8}$$

3.3 Incentive compatible contracts

The aim of this section is to determine the incentive compatible contracts and to provide the dynamics of the consortium objective function J^C. To achieve this, one first needs to prove an existence and uniqueness result for a certain type of BSDE with random horizon.
As we will see later, the objective function for the agent is related to the solution of the following BSDEs with a random time horizon τ

$$Y_t = \zeta \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_t^\tau g(s,\omega,Z_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s, \tag{3.3.1}$$

where the generator $g : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ does not depend on Y.
BSDEs with random horizon have been studied by some authors. Chen [15] considered a random horizon which could be infinite and assumed that the constant of Lipschitz of the generator is time-dependent and square integrable on $[0,\infty]$: this assumption is not satisfied in our case, since the Lipschitz coefficient C_g is constant. Darling and Pardoux [23] studied a BSDE with finite random horizon. In our case, we cover the finite and the infinite random horizon. We give in the Appendix the proof of the existence and uniqueness of a solution to the BSDE (3.3.1), under the following assumptions

(H1) The generator $g : [0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies, for each $z \in \mathbb{R}$, $g(.,.,z)$ is a progressively measurable process and for some $\rho > 0$, we have

$$\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau}|\zeta|^2 \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_0^\tau e^{\rho s}|g(s,\omega,0)|^2 ds\right] < \infty.$$

(H2) g is Lipschitz with respect to z, i.e. there exists a constant $C_g > 0$ such that

$$|g(s,\omega,z_1) - g(s,\omega,z_2)| \leq C_g|z_1 - z_2| \ ds \otimes d\mathbb{P}\ a.e.$$

We introduce the following spaces for a fixed stopping time $\tau \in \mathcal{T}$ and for some $\rho > 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^2_\rho(\tau): &= \{Y \text{ } \mathbb{R}\text{-valued, } \mathbb{F}\text{-progressively measurable process such that} \\
&\quad ||Y||_{\mathcal{S}^2_\rho(\tau)} := \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le s\le\tau} e^{\rho s}|Y_s|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}, \\
\mathcal{H}^2_\rho(\tau): &= \{Z \text{ } \mathbb{R}\text{-valued, } \mathbb{F}\text{-progressively measurable process such that} \\
&\quad ||Z||_{\mathcal{H}^2_\rho(\tau)} := \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}|Z_s|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}, \\
L^2_\rho(\mathcal{F}_\tau): &= \{\zeta \text{ } \mathbb{R}\text{-valued, } \mathcal{F}_\tau\text{-measurable random variable such that } \mathbb{E}[e^{\rho\tau}|\zeta|^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}] < \infty\}.
\end{aligned}
$$

The existence and uniqueness of a solution to the BSDE (3.3.1) is given in the following proposition.

Proposition 3.3.1. *Let τ be a stopping time in $\mathcal{T}$, $\zeta \in L^2_\rho(\mathcal{F}_\tau)$, g satisfy Assumptions (H1) and (H2). For $\rho > C_g^2$, there exists a unique solution $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$ to the BSDE (3.3.1).*

The proof is postponed in the Appendix.
Thanks to the boundedness of the function φ, the generator of the BSDE, that the consortium value function must satisfy, is Lipchitz with respect to the variable z. To the best of our knowledge, such condition is crucial to prove the existence of a unique pair (Y, Z) satisfying a BSDE with random horizon (see Darling and Pardoux [23]).

Proposition 3.3.1 is used to determine the incentive compatible contract and to provide the dynamics of the consortium objective function. This will be particularly useful in what follows to reformulate the optimization problems in terms of the consortium objective function J^C.

Lemma 3.3.2. *Suppose Assumption 3.2.3 and $\rho > \frac{\|\varphi\|^2_\infty}{\sigma^2}$. For any admissible contract $\Gamma \in \mathcal{A}^P_\rho$ and for any $A \in \mathcal{A}^C_\rho$, there exists $Z^A \in \mathcal{H}^2_{\rho-2\lambda}(\tau)$ such that the dynamics of the consortium objective function evolves according to the BSDE with random terminal condition*

$$
dJ^C_t(\Gamma, A) = -\left[-\lambda J^C_t(\Gamma, A) + U(R_t) + \psi(A_t, Z^A_t)\right] dt + Z^A_t dW_t, \;\; J^C_\tau(\Gamma, A) = \xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \tag{3.3.2}
$$

where

$$
\psi(a, z) := -h(a) + z\frac{\varphi(a)}{\sigma}. \tag{3.3.3}
$$

Proof For any admissible contract $\Gamma \in \mathcal{A}^P_\rho$, for any $A \in \mathcal{A}^C_\rho$ and for any $t \in [\![0, \tau[\![$, we define

the integrable process

$$\begin{aligned} M_t^C(\Gamma,A): &= e^{-\lambda t}J_t^C(\Gamma,A)+\int_0^t e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^A}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\gamma_t^A}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\gamma_\tau^A\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+\gamma_\tau^A e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right], \end{aligned}$$

where the last equality is obtained using Bayes formula.
As $(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\gamma_\tau^A(\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}})|\mathcal{F}_t\right)$ is a $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-local martingale, by the martingale representation theorem, there exists an $\mathbb{F}$-progressively measurable process χ such that :[2]

$$M_t^C(\Gamma,A)=\frac{1}{\gamma_t^A}\left(M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t\chi_s dW_s\right).$$

Thus $d(\gamma_t^A M_t^C(\Gamma,A))=\chi_t dW_t$, using Itô's formula, we obtain

$$\begin{aligned} M_t^C(\Gamma,A) &= M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}dW_s-\int_0^t\frac{M_s^C(\Gamma,A)}{Z_s^A}dZ_s^A-\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}ds \\ &\quad+\int_0^t M_s^C(\Gamma,A)(\frac{\varphi(A_s)}{\sigma})^2ds \\ &= M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}dW_s-\int_0^t M_s^C(\Gamma,A)\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}dW_s-\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}ds \\ &\quad+\int_0^t M_s^C(\Gamma,A)(\frac{\varphi(A_s)}{\sigma})^2ds \\ &= M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}(dW_s-\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}ds)+\int_0^t M_s^C(\Gamma,A)\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}(\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}ds-dW_s) \\ &= M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t\frac{U_s}{Z_s^A}dW_s^A-\int_0^t M_s^C(\Gamma,A)\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}dW_s^A \\ &= M_0^C(\Gamma,A)+\int_0^t(\frac{U_s}{Z_s^A}-M_s^C(\Gamma,A)\frac{\varphi(A_s)}{\sigma})dW_s^A \end{aligned}$$

Then denoting $Z_s^A=e^{\lambda s}(\frac{\chi_s}{\gamma_s^A}-M_s^C(\Gamma,A)\frac{\varphi(A_s)}{\sigma})\ ds\otimes d\mathbb{P}$ a.e, we deduce

$$e^{-\lambda t}J_t^C(\Gamma,A)=M_0(\Gamma,A)-\int_0^t e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+\int_0^t e^{-\lambda s}Z_s^A dW_s^A,$$

and we obtain

$$dJ_t^C(\Gamma,A)=-\left(-\lambda J_t^C(\Gamma,A)+U(R_t)-h(A_t)\right)dt+Z_t^A dW_t^A,$$

which implies that under $\mathbb{P}$

$$dJ_t^C(\Gamma,A)=-\left(-\lambda J_t^C(\Gamma,A)+(U(R_t)-h(A_t))+Z_t^A\frac{\varphi(A_t)}{\sigma}\right)dt+Z_t^A dW_t,\ J_\tau^C(\Gamma,A)=\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}. \tag{3.3.4}$$

2. It is important to work under the probability measure $\mathbb{P}$ and not $\mathbb{P}^A$. Indeed, although the inclusion $\mathbb{F}^A=\sigma(W^A)\subseteq\mathbb{F}$ holds, the reverse inclusion is not true in general case (see the Tsirel'son's example in [66]).

The associated Backward Stochastic Differential Equation (BSDE (A, R, τ, ξ) in short) is given by

$$\begin{cases} dY_t &= -\left(-\lambda Y_t + U(R_t) + \psi(A_t, Z_t^A)\right) dt + Z_t^A dW_t, \\ Y_\tau &= \xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

where ψ is defined by (3.3.3).
Considering the discounted quantities

$$(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t^A) = (e^{-\lambda t} Y_t, e^{-\lambda t} Z_t^A),\ t \in [\![0, \tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s,$$

$(\tilde{Y}, \tilde{Z}^A)$ satisfies the BSDE

$$\begin{cases} d\tilde{Y}_t &= -\left(\tilde{U}(R_t) + \tilde{\psi}(A_t, \tilde{Z}_t^A)\right) dt + \tilde{Z}_t^A dW_t, \\ \tilde{Y}_\tau &= e^{-\lambda\tau} \xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}, \end{cases} \tag{3.3.6}$$

where

$$\begin{cases} \tilde{h}(A_t) &:= e^{-\lambda t} h(A_t), \\ \tilde{U}(R_t) &:= e^{-\lambda t} U(R_t), \\ \tilde{\psi}(A_t, \tilde{Z}_t^A) &:= -\tilde{h}(A_t) + \tilde{Z}_t^A \frac{\varphi(A_t)}{\sigma}. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

The generator of the BSDE (3.3.6) depends only on $\tilde{Z}^A$ and is defined by $g(t, \omega, z) := \tilde{U}(R_t) - \tilde{h}(A_t) + z\frac{\varphi(A_t)}{\sigma}$. From the definition of the sets $\mathcal{A}_\rho^C$ and $\mathcal{A}_\rho^P$, the generator $g : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $(H1)$ and g satisfies $(H2)$ since φ is bounded. Then from Proposition 3.3.1, there exists a unique $(\tilde{Y}, \tilde{Z}^A) \in \mathcal{S}_\rho^2(\tau) \times \mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ solving the BSDE (3.3.6). Therefore, there exists a unique (Y, Z^A) solving the BSDE (3.3.5) such that

$$\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le s\le\tau} e^{(\rho-2\lambda)s}|Y_s|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ and } \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^\tau e^{(\rho-2\lambda)s}|Z_s^A|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

•

We are interested in BSDE (3.3.6) for which we prove a comparison theorem.

Theorem 3.3.3. *(Comparison theorem)*
Let $(R^i, \tau, \xi^i) \in \mathcal{A}_\rho^P$ and $A^i \in \mathcal{A}_\rho^C$ for $i = 1, 2$, and for $\tau \in \mathcal{T}$. Let $(\tilde{Y}^i, \tilde{Z}^i) \in \mathcal{S}_\rho^2(\tau) \times \mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ be the solution of the following BSDE

$$\begin{cases} d\tilde{Y}_t^i &= -\left(\tilde{U}(R_t^i) + \tilde{\psi}(A_t^i, \tilde{Z}_t^i)\right) dt + \tilde{Z}_t^i dW_t, \\ \tilde{Y}_\tau^i &= e^{-\lambda\tau} \xi^i \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

If $\xi^1 \leq \xi^2$ $\mathbb{P}$ *a.s and*

$$\tilde{U}(R_t^1) + \tilde{\psi}(A_t^1, \tilde{Z}_t^1) \leq \tilde{U}(R_t^2) + \tilde{\psi}(A_t^2, \tilde{Z}_t^1) \text{ for all } t \in [\![0, \tau[\![\ \mathbb{P}, a.s., \tag{3.3.9}$$

then

$$\tilde{Y}_t^1 \leq \tilde{Y}_t^2 \text{ for all } t \in [\![0, \tau[\![\ \mathbb{P} \ a.s.$$

Proof Let $n \in \mathbb{N}$, we denote

$$\tau_n := \inf\{s \geq 0 : |\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2| > n\} \wedge \tau \wedge n.$$

From (3.3.8), we have

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t^1 - \tilde{Y}_t^2 &= \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{U}(R_s^1) - \tilde{U}(R_s^2) + \tilde{\psi}(A_s^1, \tilde{Z}_s^1) - \tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^2)\right) ds - \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2\right) dW_s \\
&+ \tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2 \\
&= \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{U}(R_s^1) - \tilde{U}(R_s^2) + \tilde{\psi}(A_s^1, \tilde{Z}_s^1) - \tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^2) + \tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^1) - \tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^1)\right) ds \\
&- \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2\right) dW_s + \tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2 \\
&\leq \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^1) - \tilde{\psi}(A_s^2, \tilde{Z}_s^2)\right) ds - \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2\right) dW_s \\
&+ \tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2,
\end{aligned}$$

where the last inequality is obtained by using Inequality (3.3.9). We obtain

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t^1 - \tilde{Y}_t^2 &\leq \int_t^{\tau_n} (\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2) \frac{\varphi(A_s^2)}{\sigma} ds - \int_t^{\tau_n} \left(\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2\right) dW_s + \tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2 \\
&= -\int_t^{\tau_n} \left(\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2\right) dW_s^{A^2} + \tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2,
\end{aligned}$$

where $(W_t^{A^2} = W_t - \int_0^t \frac{\varphi(A_s^2)}{\sigma} ds)_{t \geq 0}$ is $\mathbb{P}^{A^2}$-Brownian motion.
By taking the conditional expectation under $\mathbb{P}^{A^2}$, the stochastic integral $\int_t^{\tau_n} (\tilde{Z}_s^1 - \tilde{Z}_s^2) dW_s^{A^2}$ vanishes. As $\tilde{Y}^i$ is $\mathbb{F}$-progressively measurable process, we obtain

$$\tilde{Y}_t^1 - \tilde{Y}_t^2 \leq \mathbb{E}^{A^2} \left[\tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2 | \mathcal{F}_t\right].$$

Since $\hat{p} \in (2, \infty)$, there exists a unique $\varepsilon \in (0, 1)$ such that $\hat{p} = 2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$. We define $p := 1 + \varepsilon \in (1, 2)$. We fix $q_1 := \frac{2}{2-p}$ and let q_2 be the conjugate of q_1 i.e. $q_2 = \frac{2}{p}$.

$$\begin{aligned}
\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}^{A^2} \left[|\tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2|^p | \mathcal{F}_t\right] &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\left|\frac{\gamma_{\tau_n}^{A^2}}{\gamma_t^{A^2}} (\tilde{Y}_{\tau_n}^1 - \tilde{Y}_{\tau_n}^2)\right|^p | \mathcal{F}_t\right] \\
&\leq C \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left[\left|\frac{\gamma_\tau^{A^2}}{\gamma_t^{A^2}}\right|^{\hat{p}} | \mathcal{F}_t\right]^{\frac{2-p}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq \tau} |\tilde{Y}_s^1|^2 | \mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq \tau} |\tilde{Y}_s^2|^2 | \mathcal{F}_t\right]\right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

where the first equality is obtained using Bayes formula.
As $\sup_{0\le s\le\tau}|\tilde{Y}^i_s|\in L^2(\mathbb{P})\ \forall i\in\{1,2\}$, the conditional expectation $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le\tau}|\tilde{Y}^i_s||\mathcal{F}_t\right]\in L^2(\mathbb{P})$.
In addition $A\in\mathcal{A}^{\hat{p}}$ which implies $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\gamma^{A^2}_{\tau_n}}{\gamma^{A^2}_t}(\tilde{Y}^1_{\tau_n}-\tilde{Y}^2_{\tau_n})\right|^p|\mathcal{F}_t\right]<\infty$, therefore $\left(\tilde{Y}^1_{\tau_n}-\tilde{Y}^2_{\tau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly integrable under $\mathbb{P}^{A^2}$. This implies the convergence in $L^1(\mathbb{P}^{A^2})$. We may pass to the limit as $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{A^2}\left[\tilde{Y}^1_{\tau_n}-\tilde{Y}^2_{\tau_n}|\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}^{A^2}\left[\lim_{n\to\infty}(\tilde{Y}^1_{\tau_n}-\tilde{Y}^2_{\tau_n})|\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}^{A^2}\left[\tilde{Y}^1_{\tau}-\tilde{Y}^2_{\tau}|\mathcal{F}_t\right]\le 0.$$

Therefore, $\tilde{Y}^1_t\le\tilde{Y}^2_t,\mathbb{P}\ a.s,\forall t\in[\![0,\tau[\![$. By continuity of $\tilde{Y}^1$ and $\tilde{Y}^2$, we have

$$\tilde{Y}^1_t\le\tilde{Y}^2_t,\ \forall t\in[\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$$

•

Corollary 3.3.4. *For any $A\in\mathcal{A}^C_\rho$ and for any admissible contract $\Gamma\in\mathcal{A}^P_\rho$, if there exists $A^*\in\mathcal{A}^C_\rho$ such that $\psi(A_t,Z^A_t)\le\psi(A^*_t,Z^A_t)\ \forall t\in[\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$, then*

$$J^C_t(\Gamma,A)\le J^C_t(\Gamma,A^*),\ \textit{for all } t\in[\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.,$$

where $(J^C_t(\Gamma,A^*))_{t\ge0}$ satisfies

$$\begin{cases} dJ^C_t(\Gamma,A^*) &= -\left[-\lambda J^C_t(\Gamma,A^*)+U(R_t)+\psi(A^*_t,Z^A_t)\right]dt+Z^A_t dW_t,\\ J^C_\tau(\Gamma,A^*) &= \xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}.\end{cases}\tag{3.3.10}$$

Proof This is a direct consequence of the comparison theorem. •

Lemma 3.3.5. *For any $\Gamma\in\mathcal{A}^P_\rho$ and A^* the best response (if it exists), we have*

$$U(R_t)-h(A^*_t)\ \ge 0,\ dt\otimes d\mathbb{P}\ a.e.$$

Proof (i) Let $\Gamma\in\mathcal{A}^P_\rho$ and A^* be the best response. We fix $\varepsilon>0$ and $\omega\in\Omega$. By definition of $J^C(\Gamma,A^*)$, there exists $A^{\varepsilon,\omega}\in\mathcal{A}^C_\rho$, which is an ε-optimal control for $J^C_{\tau'}(\Gamma,A^*)$, for all τ' stopping time, $\tau\ge\tau'$, a.s, i.e.

$$J^C_{\tau'(\omega)}(\Gamma,A^*)(\omega)-\varepsilon\le J^C_{\tau'(\omega)}(\Gamma,A^{\varepsilon,\omega})(\omega).\tag{3.3.11}$$

By definition of J^C_0 and by Corollary 3.3.4, we have for any $A\in\mathcal{A}^C_\rho$

$$\begin{aligned} &J^C_0(\Gamma,A^*)\\ &\ge\ J^C_0(\Gamma,A)=\mathbb{E}^A\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]\\ &\ge\ \mathbb{E}^A\Big[\int_0^{\tau'}e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds\Big]\\ &+\ \mathbb{E}^A\Big[e^{-\lambda\tau'}\mathbb{E}^A\Big[\int_{\tau'}^{\tau}e^{-\lambda(s-\tau')}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda(\tau-\tau')}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}})|\mathcal{F}_{\tau'}\Big]\Big]\\ &=\ \mathbb{E}^A\left[\int_0^{\tau'}e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda\tau'}J^C_{\tau'}(\Gamma,A)\right].\end{aligned}$$

We fix $A \in \mathcal{A}_\rho^C$ and we define the process

$$\widehat{A}_s(\omega) = \begin{cases} A_s(\omega), & s \in [\![0, \tau'(\omega)]\!], \\ A_s^{\varepsilon,\omega}(\omega), & s \in]\!]\tau'(\omega), \tau]\!]. \end{cases}$$

We can show by the measurable selection theorem (see. Chapter 7 in Bertsekas and Shreve [9]) that the process $\widehat{A}$ is progressively measurable. By using again the law of iterated conditional expectation, Bayes formula and from (3.3.11), we get

$$\begin{aligned} J_0^C(\Gamma, A^*) &\geq J_0^C(\Gamma, \widehat{A}) = \mathbb{E}^{\widehat{A}}\left[\int_0^{\tau'} e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau'} J_{\tau'}^C(\Gamma, A^{\varepsilon,\omega})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau'} \gamma_s^{\widehat{A}} e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + \gamma_{\tau'}^{\widehat{A}} e^{-\lambda\tau'} J_{\tau'}^C(\Gamma, A^{\varepsilon,\omega})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau'} \gamma_s^{A} e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + \gamma_{\tau'}^{A} e^{-\lambda\tau'} J_{\tau'}^C(\Gamma, A^{\varepsilon,\omega})\right] \\ &\geq \mathbb{E}^A\left[\int_0^{\tau'} e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau'} J_{\tau'}^C(\Gamma, A^*)\right] - \varepsilon. \end{aligned}$$

Let ε go to 0, we obtain the inequality :

$$J_0^C(\Gamma, A^*) \geq \mathbb{E}^A\left[\int_0^{\tau'} e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau'} J_{\tau'}^C(\Gamma, A^*)\right]. \tag{3.3.12}$$

We consider then the set

$$\mathcal{C}_{\tau',R,A^*} := \{(s,\omega) \in [\![0, \tau']\!] \times \Omega, \text{ such that } U(R_s) - h(A_s^*) < 0\}.$$

If $Leb \otimes \mathbb{P}(\mathcal{C}_{\tau',R,A^*}) > 0$, where Leb denotes the Lebesgue measure, then the choice of control $A_s'^* = h^{-1}(U(R_s))$ on $\mathcal{C}_{\tau',R,A^*}$ and $A_s'^* = A_s^*$ on $\mathcal{C}_{\tau',R,A^*}^c$ increases the criteria given in (3.3.12) which is in contradiction with the definition of A^* given in (3.2.4). Therefore, the effort A^* satisfies

$$U(R_s) - h(A_s^*) \geq 0, \ ds \otimes d\mathbb{P} \ a.e.$$

•

The following lemma is technical and will be useful later to parametrize the optimal response A^* as a deterministic function of Z^A for A admissible control.

Lemma 3.3.6. *Suppose Assumption 3.2.3. Let define* $A^*(z) := \arg\max_{a \geq 0} \psi(a, z)$, *for* $z \in \mathbb{R}$.
If $z > \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$, *then* $A^*(z) = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{z}{\sigma})$ *and if* $z \leq \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$, *then* $A^*(z) = 0$.
Moreover, A^* *is a bijection from* $\{0\} \cup (\sigma\frac{h'}{\varphi'}(0), \infty)$ *to* $[0, \infty)$.

Proof We fix $z \in \mathbb{R}$. Under Assumption 3.2.3, $(\frac{h'}{\varphi'})'(a) = \dfrac{h''(a)\varphi'(a) - \varphi''(a)h'(a)}{(\varphi'(a))^2} > 0$ for all $a \geq 0$. This shows that $\frac{h'}{\varphi'}$ is invertible from $[0,\infty)$ into $[\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}, \infty)$.
First case : $z > \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$. The function ψ, defined in Equation (3.3.3), is strictly concave, the first-order necessary condition of optimality $\frac{\partial\psi}{\partial a}(A^*(z), z) = 0$ is sufficient and is equivalent to

$$z = \sigma\frac{h'(A^*(z))}{\varphi'(A^*(z))}. \tag{3.3.13}$$

Thus A^* is a bijection from $(\sigma\frac{h'}{\varphi'}(0), \infty)$ to $(0,\infty)$.
Second case : $0 < z \leq \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$. Then Equation (3.3.13) is not well defined. The optimum could not be positive. In the neighborhood of 0, the function ψ must be decreasing, otherwise $A^*(z) = 0$ is not a maximum. The necessary condition of optimality $\frac{\partial\psi}{\partial a}(0,z) = -h'(0) + z\frac{\varphi'(0)}{\sigma} \leq 0$ is satisfied in 0. As the function ψ is strictly concave, the latter condition is sufficient. This shows that $A^*(z) = 0$.
Third case : $z \leq 0$. The function $\psi(z,.)$ is decreasing in a and so $A^*(z) = 0$. In particular, $A^*(0) = 0$, and so Lemma 3.3.6 is proved. •

It is important to study conditions under which a bijection between $(A^*_t)_{t\geq 0}$ and $(Z^A_t)_{t\geq 0}$ holds.

Proposition 3.3.7. *Let $\Gamma \in \mathcal{A}^P_\rho$ and $A \in \mathcal{A}^C_\rho$. There exists a bijection between the process $(Z^A_t)_{t\geq 0}$ and the optimal effort $(A^*_t)_{t\geq 0}$, the bijection is given by*

$$A^*_t = A^*(Z^A_t) = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{Z^A_t}{\sigma})\mathbf{1}_{\{Z^A_t>0\}},$$

or equivalently

$$Z^A_t = (\sigma\frac{h'}{\varphi'})(A^*(Z^A_t))\mathbf{1}_{\{A^*(Z^A_t)>0\}}.$$

Proof We consider the stochastic set $\mathcal{D} = \{(t,\omega), A^*_t(\omega) > 0\}$. From Lemma 3.3.6, we have $Z^A_t = \sigma\frac{h'(A^*_t)}{\varphi'(A^*_t)}$. As h and φ are increasing (see Assumption 3.2.3), $(Z^A_t)_{t\geq 0}$ is a positive process. The function $\frac{h'}{\varphi'}$ being invertible gives a bijection between Z^A_t and A^*_t.
Now we consider $\mathcal{D}^C := \{(t,\omega), A^*_t(\omega) = 0\}$. On this set, from Lemma 3.3.6, we have $Z^A_t \leq \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$.
By Lemma 3.3.5, we have $U(R_t) \geq h(0) = 0$ which implies that $R_t \geq U^{-1}(0) = 0$. From the definition of the objective function for the public, $R^*_t = 0$ on $\mathcal{D}^C$. For $(t,\omega) \in \mathcal{D}^C$, the consortium does not receive any rent from the public and does not provide any effort, we have

from Equation (3.3.10)

$$dJ_t^C(R^*,\tau,\xi,A^*) \;=\; -\left[-\lambda J_t^C(R^*,\tau,\xi,A^*)+\frac{Z_t^A}{\sigma}\varphi(A_t^*)\right]dt+Z_t^A dW_t.$$

On the other hand, for $(t,\omega)\in\mathcal{D}^C$, $e^{-\lambda t}J_t^C(R^*,\tau,\xi,A^*)$ is constant since $R_t^*=A_t^*=0$, which yields

$$dJ_t^C(R^*,\tau,\xi,A^*) \;=\; \lambda J_t^C(R^*,\tau,\xi,A^*)dt.$$

The uniqueness of the Itô decomposition implies $Z_t^A=0$ *a.s.* This shows $A_t^*=A^*(Z_t^A)=(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{Z_t^A}{\sigma})\mathbf{1}_{\{Z_t^A>0\}}$. •

Proposition 3.3.8. *We assume that the generator defined by* $(t,\omega,z)\mapsto g(t,\omega,z):=\tilde{U}(R_t)-\tilde{h}(A^*(e^{\lambda t}z))+z\frac{\varphi(A^*(e^{\lambda t}z))}{\sigma}$ *satisfies the Assumptions* $(H1)$ *and* $(H2)$ *with Lipschitz coefficient* C_g *satisfying* $C_g^2<\rho$*. Then, the dynamics of* J^C *for any incentive compatible contract* $(\Gamma,A^*(Z))$ *is given by the BSDE with random terminal condition*

$$\begin{aligned} dJ_t^C(\Gamma,A^*(Z)) &= -\left(-\lambda J_t^C(\Gamma,A^*(Z_t))+U(R_t)+\psi(A^*(Z_t),Z_t)\right)dt+Z_t dW_t,\\ J_\tau^C(\Gamma,A^*(Z)) &= \xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}, \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

where $A^*(Z)$ *is defined in Lemma 3.3.6.*

Proof For $\Gamma\in\mathcal{A}_\rho^P$ and $A^*(Z)\in\mathcal{A}_\rho^C$, we consider the BSDE

$$dY_t=-\left(-\lambda Y_t+U(R_t)+\psi(A^*(Z_t),Z_t)\right)dt+Z_t dW_t,\;\; Y_\tau=\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}. \tag{3.3.15}$$

Or equivalently

$$d\tilde{Y}_t=-\left(\tilde{U}(R_t)-\tilde{h}(A^*(e^{\lambda t}\tilde{Z}_t))+\tilde{Z}_t\frac{\varphi(A^*(e^{\lambda t}\tilde{Z}_t))}{\sigma}\right)dt+\tilde{Z}_t dW_t,\;\; \tilde{Y}_\tau=e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \tag{3.3.16}$$

From the statement of the Proposition, Assumptions $(H1)$ and $(H2)$ are satisfied. From Proposition 3.3.1, there exists a unique solution $(\tilde{Y},\tilde{Z})\in\mathcal{S}_\rho^2(\tau)\times\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ to the BSDE (3.3.16) or equivalently there exists a unique $(Y,Z)\in\mathcal{S}_{\rho-2\lambda}^2(\tau)\times\mathcal{H}_{\rho-2\lambda}^2(\tau)$ which solves (3.3.15). On the other hand, as $(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\gamma_\tau^{A^*(Z)}(\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A^*(Z_s)))ds+e^{-\lambda\tau}\xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}})|\mathcal{F}_t\right)$ is a $(\mathbb{P},\mathbb{F})$- local martingale, by applying the martingale representation theorem as in Lemma 3.3.2, there exists a progressively measurable process $(Z_t^{A^*(Z)})_t$ such that :

$$\begin{aligned} dJ_t^C(\Gamma,A^*(Z)) &= -\left(-\lambda J_t^C(\Gamma,A^*(Z))+U(R_t)-h(A^*(Z_t))+Z_t^{A^*(Z)}\frac{\varphi(A^*(Z_t))}{\sigma}\right)dt\\ &+ Z_t^{A^*(Z)}dW_t,\\ J_\tau^C(\Gamma,A^*(Z^A)) &= \xi\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}. \end{aligned}$$

The uniquenees of the solution yields that

$$Z_t = Z_t^{A^*(Z)},\ \mathbb{P}\ a.s,\ \forall t \in [\![0,\tau[\![.$$

Moreover, as $\tilde{\psi}(A^*(e^{\lambda t}\tilde{Z}_t),\tilde{Z}_t) \geq \tilde{\psi}(A_t,\tilde{Z}_t)\ \mathbb{P}\ a.s\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \forall A \in \mathcal{A}_\rho^C$, by Corollary 3.3.4 we have for all $A \in \mathcal{A}_\rho^C$

$$J_t^C(\Gamma,A) \leq J_t^C(\Gamma,A^*(Z)),\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$$

•

Corollary 3.3.9. *For $\Gamma \in \mathcal{A}_\rho^P$ and $A^*(Z) \in \mathcal{A}_\rho^C$ the best response, the objective function $J_t^C(\Gamma,A^*(Z))$ satisfies*

$$J_t^C(\Gamma,A^*(Z)) \geq 0\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$$

Proof We consider the contract $\Gamma = (R,\tau,\xi) \in \mathcal{A}_\rho^P$ and $A^*(Z) \in \mathcal{A}_\rho^C$ the best response, then by Lemma 3.3.5, we have $U(R_t) - h(A^*(Z_t)) \geq 0\ \forall\ t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s$, beside $\xi \geq 0\ \mathbb{P}\ a.s$. We consider the strategy $(\Gamma^0,A^0) = (0,0,\tau,0)$. Then $(0,0)$ solves the BSDE $(0,0,\tau,0)$. By Theorem 3.3.3 with the strategy (Γ^0,A^0), we have

$$J_t^C(\Gamma,A^*(Z)) \geq 0,\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$$

•

Remark 3.3.10. *If we take $\varphi(x) = 1-\exp(-\alpha x)$ and $h(x) = \exp(\beta x) - 1$ for positive reals α and β, then the generator of the BSDE (3.3.16) is given by*

$$g(t,\omega,z) = \begin{cases} \tilde{U}(R_t) + e^{-\lambda t} + \frac{z}{\sigma} - z^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{e^{\lambda t}\alpha}{\beta\sigma}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} + e^{-\lambda t}\left(\frac{e^{\lambda t}\alpha}{\beta\sigma}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right), & \text{if } e^{\lambda t}z > \sigma\frac{\beta}{\alpha}, \\ \tilde{U}(R_t), & \text{if } e^{\lambda t}z \leq \sigma\frac{\beta}{\alpha}. \end{cases}$$

The generator g satisfies the Assumptions $(H1)$ and $(H2)$ since
$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}|g(s,\omega,0)|^2ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}|\tilde{U}(R_s)|^2ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}|U(R_s)|^2ds\right] < \infty$.
For the numerical study, we will choose such functions.

We now reformulate the stochastic control problem with J^C as state variable and the contract Γ and the best effort $A^*(Z)$ as control processes. Usually in the literature (see Sannikov [57] and Cvitanic et al. [18]), the optimization problem consists in maximizing a certain criterion where the control variables are given by Γ and $(Z_t)_{t\geq 0}$ which is a standard mixed stopping-regular stochastic control problem. In this chapter, we keep the explicit control $(A^*(Z_t))_{t\geq 0}$ instead of $(Z_t)_{t\geq 0}$, since $(A^*(Z_t))_{t\geq 0}$ represents a physical quantity and thus it is more quantifiable and interpretable than the control $(Z_t)_{t\geq 0}$ which is a diffusion coefficient.

3.4 Hamilton Jacobi Bellman variational inequality

From now on, we adopt a forward point of view for the dynamics of the consortium objective function which evolves according to the following forward SDE

$$\begin{aligned} dJ_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)) &= \left(\lambda J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)) - U(R_t) + h(A^*(Z_t)) - Z_t\frac{\varphi(A^*(Z_t))}{\sigma}\right)dt + Z_t dW_t, \\ J_0^C(x,R,\tau,A^*(Z)) &= x. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Using the characterization of the incentive compatible contracts, the optimization problem of the public can be written as a standard stochastic control problem. The state process is the consortium objective function J^C whose dynamics is given by (3.4.1). The control processes are given by R, τ and $A^*(Z) \in \mathcal{A}_\rho^C$ and the value function given by (3.2.6) is formulated as :

$$v(x) := \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}} \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))\right], \tag{3.4.2}$$

where $\mathbb{E}_x^{A^*(Z)}$ is the conditional expectation with respect to the initial event $\{J_0^C(x,R,\tau,A^*(Z)) = x\}$ and

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} := \Big\{&(R,\tau,A^*(Z)) : \ R \geq 0 \ \mathbb{F}\text{-progressively measurable process s.t.} \\ &\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{\rho s}(U(R_s)^2 \vee R_s^2)ds] < \infty, \ \tau \in \mathcal{T}, A^*(Z) \in \mathcal{A}_\rho^C\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

The value function v in (3.4.2) is defined on $\mathbb{R}^+$ since $J_t^C(\Gamma, A^*(Z)) \geq 0$ by Corollary 3.3.9.
The set

$$\mathcal{S} := \{x \geq 0 : v(x) \leq -x\}$$

is called the stopping region and is of particular interest : whenever the state is in this region, it is optimal to stop the contract immediately. Its complement $\mathcal{S}^c$ is called the continuation region.
We apply the dynamic programming principle, which takes the following form : for all stopping time $\eta \in \mathcal{T}$, we have

$$\begin{aligned} v(x) = \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}} \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}\Big[&\int_0^{\tau\wedge\eta} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))\mathbf{1}_{\tau<\eta} \\ &+ e^{-\delta\eta}v(J_\eta^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\mathbf{1}_{\eta\leq\tau}\Big], \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

which is used to derive the Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality (HJBVI) associated to the value function

$$\min\left\{\delta w(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}[\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r], w(x) + x\right\} = 0, \ x \in (0,\infty), \tag{3.4.5}$$

where the second order differential operator $\mathcal{L}^{a,r}$ is defined by

$$\mathcal{L}^{a,r}w(x) := \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2\mathbf{1}_{\{a>0\}}w"(x) + [\lambda x - U(r) + h(a)]w'(x).$$

Formal derivation of the HJBVI

We assume that the public value function v (defined in Equation (3.4.2)) is of class C^2. Standard methods (cf. for example Touzi [62]) are used to provide the HJBVI. We give nevertheless some details for the sake of completeness. We organize the proof into two steps.
i) First, we show that :

$$\min\left\{\delta v(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}[\mathcal{L}^{a,r}v(x) + \varphi(a) - r], v(x) + x\right\} \geq 0.$$

By definition of v, it is clear that $v(x) + x \geq 0$ (take $\tau = 0$ in (3.4.2) which implies $v(x) \geq -J_0^C(x, R, \tau, A^*(Z)) = -x$).
We define

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \left(e^{-\delta s}v'(J_s^C)\sigma\frac{h'(A^*(Z_t))}{\varphi'(A^*(Z_t))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t)>0\}}\right)^2 ds \geq n\} \wedge \inf\{t \geq 0 : J_t^C - J_0^C \geq n\} > 0.$$

We fix h a positive constant, for $\tau > h$, we have from (3.4.4)

$$v(x) \geq \mathbb{E}^{A^*(Z)}\left[\int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds + e^{-\delta(h\wedge\tau_n)}v(J_{h\wedge\tau_n}^C)\right]. \tag{3.4.6}$$

We next apply Itô's formula to $(e^{-\delta s}v(J_s^C))_{s\geq 0}$ between 0 and $h \wedge \tau_n$

$$\begin{aligned}
v(x) &= e^{-\delta(h\wedge\tau_n)}v(J_{h\wedge\tau_n}^C) - \int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}\{-\delta v(J_s^C) + v'(J_s^C)[(\lambda J_s^C - U(R_s) + h(A^*(Z_s)))\\
&+ \frac{1}{2}v''(J_s^C)(\frac{\sigma h'(A^*(Z_s)}{\varphi'(A^*(Z_s))})^2\mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}}]\}ds + \int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}\sigma v'(J_s^C)\frac{h'(A^*(Z_s))}{\varphi'(A^*(Z_s))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}}dW_s^A\\
&= e^{-\delta h\wedge\tau_n}v(J_{h\wedge\tau_n}^C) - \int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}[-\delta v(J_s^C) + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}v(J_s^C)]ds\\
&+ \int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}\sigma v'(J_s^C)\frac{h'(A^*(Z_s))}{\varphi'(A^*(Z_s))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}}dW_s^A.
\end{aligned}$$

Taking the expectation

$$v(x) = e^{-\delta(h\wedge\tau_n)}v(J_{h\wedge\tau_n}^C) - \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[\int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}(-\delta v(J_s^C)ds + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}v(J_s^C))ds].$$

By (3.4.6), we have

$$0 \geq \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}\int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}(-\delta v(J_s^C) + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}v(J_s^C) + \varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds].$$

For all $\omega \in \Omega$, there exists $N(\omega)$ such that for $n \geq N(\omega)$, we have, $h \wedge \tau_n(\omega) = h$. Dividing by h, letting h goes to 0 then using the continuity of the integrands and the mean value theorem, $\frac{1}{h}\int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}(-\delta v(J_s^C) + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s} v(J_s^C) + \varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds$ converges to

$$-\delta v(x) + v'(x)[\lambda x - U(r) + h(a)] + \frac{1}{2}v"(x)(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2\mathbf{1}_{\{a>0\}} - r + \varphi(a).$$

As the state process (J_t^C) lies in ball with radius n, centered at J_0^C, $\frac{1}{h}\int_0^{h\wedge\tau_n} e^{-\delta s}(-\delta v(J_s^C) + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s} v(J_s^C) + \varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds$ is bounded by a positive constant M independent of ω. Applying dominated convergence theorem, we obtain the inequality

$$\delta v(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{[\lambda x - U(r) + h(a)]v'(x) + \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2\mathbf{1}_{\{a>0\}}v''(x) - r + \varphi(a)\} \geq 0.$$

ii) We use a contradiction argument in order to prove the reverse inequality. Assuming that there exists x_0 such that

$$v(x_0) + x_0 > 0 \text{ and } \delta v(x_0) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}v(x_0) + \varphi(a) - r\} > 0 \tag{3.4.7}$$

we work towards a contradiction of the dynamic programming principale (3.4.4). We introduce the function

$$\varphi_1(x) := v(x) + \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0|^2.$$

From (3.4.7), we have

$$\sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}v(x_0) + \varphi(a) - r\} < \delta v(x_0).$$

Then, there exists $\widehat{\eta} = \eta(x_0) > 0$ such that $\forall (a,r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{L}^{a,r}v(x_0) + \varphi(a) - r \leq \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}v(x_0) + \varphi(a) - r\} \leq \delta v(x_0) - \widehat{\eta}$$

By the continuity of the functions v, v' and v'', there exists $\beta > 0,\ h > 0$ such that $\forall x \in \mathcal{B} = \{x, |x - x_0| \leq h\}$, we have

$$v(x) \geq -x + \beta \text{ and } \mathcal{L}^{a,r}\varphi_1(x) + \varphi(a) - r \leq \delta\varphi_1(x) - \frac{\widehat{\eta}}{2}.$$

Therefore, we obtain

$$v(x) \geq -x+\beta \text{ and } \delta\varphi_1(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}\varphi_1(x)+\varphi(a)-r\} \geq \frac{\widehat{\eta}}{2} \geq 0\ \forall x \in \mathcal{B} = \{x, |x-x_0| \leq h\}. \tag{3.4.8}$$

Moreover, $\forall x \in \partial\mathcal{B}$

$$(v-\varphi_1)(x) = -\frac{\varepsilon}{2}h^2 < 0 \tag{3.4.9}$$

Next, we consider the $\mathbb{F}$ stopping time

$$\theta := \inf\{t>0 : J_t^C \notin \mathcal{B} | J_0^C = x_0\}.$$

For an arbitrary stopping rule $\tau \in \mathcal{T}$, we compute by Itô's formula :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}v(J^C_{\tau\wedge\theta}) - v(x_0)] &= \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[(e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}v - e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}\varphi_1)(J^C_{\tau\wedge\theta})] \\
&+ \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}\varphi_1(J^C_{\tau\wedge\theta}) - \varphi_1(x_0)] \\
&= \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}(v-\varphi_1)(J^C_{\tau\wedge\theta})] \\
&+ \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[\int_0^{\theta\wedge\tau} e^{-\delta s}(-\delta\varphi_1(J_s^C) + \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}\varphi_1(J_s^C))ds].
\end{aligned}$$

As $-\delta\varphi_1(x) + \mathcal{L}^{a,r}\varphi_1(x) \leq r - \varphi(a)\ \forall x \in \mathcal{B}$ by (3.4.8) this provides :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}v(J^C_{\tau\wedge\theta}) - v(x_0)] &\leq \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\theta\wedge\tau)}(v-\varphi_1)(J^C_{\tau\wedge\theta})] \\
&+ \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[\int_0^{\theta\wedge\tau} e^{-\delta s}(R_s - \varphi(A^*(Z_s))ds].
\end{aligned}$$

Then, as $v(x) \geq -x + \beta$, $\forall x \in \mathcal{B}$ by (3.4.8) :

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\geq \mathbb{E}^{A^*(Z)}[\int_0^{\tau\wedge\theta} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds] - \mathbb{E}^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\tau\wedge\theta)}(v-\varphi_1)(J^C_{\tau\wedge\theta})] \\
&+ \mathbb{E}^{A^*(Z)}[(-e^{-\delta\tau}J_\tau^C + e^{-\delta\tau}\beta)\mathbf{1}_{\tau<\theta} + e^{-\delta\theta}v(J_\theta^C)\mathbf{1}_{\theta\leq\tau}]
\end{aligned}$$

by (3.4.9)

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\geq \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[\int_0^{\tau\wedge\theta} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds] + \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\tau\wedge\theta)}\frac{\varepsilon}{2}h^2\mathbf{1}_{\tau\geq\theta} \\
&+ (-e^{-\delta\tau}J_\tau^C + e^{-\delta\tau}\beta)\mathbf{1}_{\tau<\theta} + e^{-\delta\theta}v(J_\theta^C)\mathbf{1}_{\theta\leq\tau}] \\
&\geq \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[\int_0^{\tau\wedge\theta} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds + e^{-\delta\theta}v(J_\theta^C)\mathbf{1}_{\tau\geq\theta} - e^{-\delta\tau}J_\tau^C\mathbf{1}_{\tau<\theta}] \\
&+ \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}[e^{-\delta(\tau\wedge\theta)}\frac{\varepsilon}{2}h^2 \wedge e^{-\delta\tau}\beta]
\end{aligned}$$

which is in contradiction with the dynamic programming principle (3.4.4). •

3.4.1 The boundary condition

Lemma 3.4.1 gives the boundary condition $v(0)$.

Lemma 3.4.1. *The function v defined in (3.4.2) satisfies*

$$v(0) = 0 \tag{3.4.10}$$

Proof

We have $J_0^C(0, R, \tau, A^*(Z)) = 0$. From Corollary 3.3.9, we have $J_t^C(\Gamma, A^*(Z)) \geq 0$, so for all $t \geq 0$, $J_t^C(0, R, \tau, A^*(Z))$ is non-negative almost surely. Since J_t^C satisfies the SDE (3.4.1) and for obtaining a non-negative solution, we must have $Z = 0$ $\mathbb{P}a.s$. From the bijection between the process $(Z_t)_{t\geq 0}$ and the optimal effort $(A_t^*)_{t\geq 0}$ (see Proposition 3.3.7), we must have $A_t^* = 0$ $dt \otimes \mathbb{P}a.e$. Therefore, from the definition of the value function (3.4.2), it is optimal for the public to choose $R^* = 0$ $\mathbb{P}a.s$ and $\tau = 0$ $\mathbb{P}a.s$. This shows $v(0) = 0$.

•

3.4.2 Verification theorem

In order to provide the verification theorem, a first lemma shows that the public value function satisfies a linear growth condition.

Lemma 3.4.2. *There exists a positive constant K such that for all $x \geq 0$, $|v(x)| \leq K + x$.*

Proof From the definition (3.4.2) of the value function v and for all $(R, 0, A^*(Z)) \in \mathcal{Y}$ we have $v(x) \geq -J_0^C(x, R, 0, A^*(Z)) = -x$. Moreover, since $J_\tau^C(x, R, \tau, A^*(Z)) \geq 0$ $\mathbb{P}$ $a.s$,

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}} \mathbb{E}_x^{A^*(Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right] \\ &\leq \sup_{y\geq 0} \frac{1}{\delta}\{\varphi \circ h^{-1} \circ (U(y)) - y\} =: K. \end{aligned}$$

This implies that $|v(x)| \leq x + K$. •

Theorem 3.4.3. *Let $w \in C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfying a linear growth condition, and we assume that*

$$\sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}} \mathbb{E}[|e^{-\delta\tau} J_\tau^C(x, R, \tau, A^*(Z))|^2] < \infty, \tag{3.4.11}$$

then we have :

(i) For $x \geq 0$, if w satisfies $\delta w(x) \geq \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{\mathcal{L}^{a,r} w(x) + \varphi(a) - r\}$ and $w(x) \geq -x$, then $w(x) \geq v(x)$.

(ii) Suppose that there exists two measurable non-negative functions (a^*, r^*) *defined on* $[0,\infty)$ *s.t.*

$$\sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}w(x)+\varphi(a)-r\}=\mathcal{L}^{a^*(x),r^*(x)}w(x)+\varphi(a^*(x))-r^*(x),\ \ x\in(0,\infty),$$

and that the SDE

$$dJ_t^C=\left(\lambda J_t^C-U(r^*(J_t^C))+h(a^*(J_t^C)))-Z_t\frac{a^*(J_t^C)}{\sigma}\right)dt+Z_tdW_t,\quad J_0^C=x$$

admits a unique solution $\widehat{J_t^C}$. *We define*

$$\tau^*:=\ \inf\{t\geq 0\ :\ w(\widehat{J_t^C})\leq-\widehat{J_t^C}\}\tag{3.4.12}$$

and we assume that $(r^*(\widehat{J^C}),\tau^*,a^*(\widehat{J^C}))$ *lies in* $\mathcal{Y}$ *and* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\rho\tau^*}\widehat{J_{\tau^*}^C}^2\mathbf{1}_{\{\tau^*<\infty\}}]<\infty$.
If w *is a solution of (3.4.5) with boundary condition given by (3.4.10), then*
(a) $w=v$, *and* τ^* *is an optimal stopping time for the problem (3.4.2).*

(b) The optimal rent is given by $r^*(x)=(U')^{-1}(-\frac{1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0}$.

Proof

(i) Let $x\geq 0$ and $n\in\mathbb{N}$, for an admissible contract $(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}$, we denote

$$\tau_n\ :=\ \tau\wedge\inf\{t\geq 0:|w'(J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\sigma\frac{h'(A^*(Z_t))}{\varphi'(A^*(Z_t))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t)>0\}}|>n\}.$$

Applying Itô's formula to the process $(e^{-\delta t}w(J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z))))_{t\geq 0}$ between time 0 en τ_n

$$\begin{aligned}w(x)\ &=\ e^{-\delta\tau_n}w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))-\int_0^{\tau_n}e^{-\delta s}[-\delta w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\\&+\ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds\\&+\ \int_0^{\tau_n}e^{-\delta s}w'(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\sigma\frac{h'(A^*(Z_s))}{\varphi'(A^*(Z_s))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}}dW_s^{A^*(Z)}.\end{aligned}$$

Taking the expectation

$$\begin{aligned}w(x)\ &=\ \mathbb{E}^{A^*(Z)}\Bigg[e^{-\delta\tau_n}w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))-\int_0^{\tau_n}e^{-\delta s}[-\delta w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\\&+\ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds\Bigg]\\&\geq\ \mathbb{E}^{A^*(Z)}\left[e^{-\delta\tau_n}w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))+\int_0^{\tau_n}e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s))-R_s)ds\right]\\&=\ \mathbb{E}\left[\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}e^{-\delta\tau_n}w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))+\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n}e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s))-R_s)ds\right]\end{aligned}\tag{3.4.13}$$

where the inequality is obtained by using the assumption $\delta w(x) \geq \sup_{a,r}\{\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r\}$ and the last equality is obtained by using the Bayes formula.
We first study the limit of the second term of (3.4.13). Since $\hat{p} \in (2, \infty)$, there exists a unique $\varepsilon \in (0,1)$ such that $\hat{p} = 2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$. We define $p := 1 + \varepsilon \in (1,2)$. We fix $q_1 := \frac{2}{2-p}$ and let q_2 be the conjugate of q_1 i.e. $q_2 = \frac{2}{p}$. We have

$$\mathbb{E}\left[\left|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}|^{pq_1}\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right|^{pq_2}\right]^{\frac{1}{q_2}}.$$

Thanks to our choice of p, q_1 and q_2, we have $pq_1 = \hat{p}$ and $pq_2 = 2$. By using Cauchy Schwartz, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right|^p\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}|^{\hat{p}}\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}ds \int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)^2 ds\right]^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}|^{\hat{p}}\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)^2 ds\right]^{\frac{1}{q_2}}.\end{aligned}$$

By using the definition of the set $\mathcal{A}^{\hat{p}}$ and the integrability conditions on $\mathcal{A}_\rho^C$ and $\mathcal{A}_\rho^P$, we obtain

$$\begin{aligned}&\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds|^p\right] \\ &\leq C \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left[|\gamma_\tau^{A^*(Z)}|^{\hat{p}}\right]^{\frac{2-p}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}|\varphi(A^*(Z_s))|^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}|R_s|^2 ds\right]\right)^{\frac{p}{2}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

So, we have $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds|^p\right] < \infty$, for this fixed $p > 1$, therefore $\left(\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly integrable under $\mathbb{P}$. This implies the convergence in $L^1(\mathbb{P})$ (see Theorem A.1.2 in [53]) and we may pass to the limit as $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right] = \mathbb{E}\left[\gamma_\tau^{A^*(Z)}\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right]. \tag{3.4.14}$$

The same methodology applies for studying the limit of the first term of (3.4.13). As w satisfies a linear growth condition, we have with $q_1 = \frac{2}{2-p}$ and its conjugate $q_2 = \frac{2}{p}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^A e^{-\delta\tau_n} w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))|^p\right] &\leq \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^A e^{-\delta\tau_n} K(1 + J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))|^p\right] \\ &\leq (K \vee 1)\mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^A + \gamma_{\tau_n}^A e^{-\delta\tau_n} J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z))|^p\right] \\ &\leq (K \vee 1)\left(\mathbb{E}[(\gamma_{\tau_n}^A)^p] + \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^A|^{pq_1}\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n} J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z))|^{pq_2}\right]^{\frac{1}{q_2}}\right).\end{aligned}$$

Inequality (3.4.11) and the integrability conditions on $\mathcal{A}^{\hat{p}}$ imply

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)} e^{-\delta\tau_n} w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))|^p\right] \\
&\quad\leq\quad (K\vee 1)\left(\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\left[(\gamma_\tau^{A^*(Z)})^p\right] + \sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\left[(\gamma_\tau^{A^*(Z)})^{\hat{p}}\right]^{\frac{1}{q_1}} \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}}\mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))|^2\right]^{\frac{1}{q_2}}\right) \\
&\quad<\quad \infty.
\end{aligned}$$

Then, we may pass to the limit as $n\to\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}\gamma_{\tau_n}^{A^*(Z)} w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau}\gamma_\tau^{A^*(Z)} w(J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\right]. \tag{3.4.15}$$

By (3.4.14) and (3.4.15), together with (3.4.13), we have

$$w(x)\geq \mathbb{E}^{A^*(Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s))-R_s)ds + e^{-\delta\tau}w(J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\right].$$

Since $w(J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\geq -J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))$, this leads to

$$w(x)\geq \mathbb{E}^{A^*(Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s))-R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))\right].$$

By taking the supremum, we obtain

$$w(x)\geq \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{Y}}\mathbb{E}^{A^*(Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s))-R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))\right] = v(x).$$

(ii)-a. We now consider the feedback control $(r^*(\widehat{J^C}),\tau^*,a^*(\widehat{J^C}))$ which is assumed to be in $\mathcal{Y}$. We denote

$$\tau_n \;:=\; \tau^*\wedge\inf\{t\geq 0 : |w'(\widehat{J_t^C})\sigma\frac{h'(a^*(\widehat{J_t^C})}{\varphi'(a^*(\widehat{J_t^C})}\mathbf{1}_{\{a^*(\widehat{J_t^C})>0\}}|>n\}.$$

Observe that $w(\widehat{J_t^C})>-\widehat{J_t^C}$ on $[\![0,\tau_n[\![\subset[\![0,\tau^*[\![$. Then on $[\![0,\tau_n[\![$, by (3.4.5) we have

$$\delta w(\widehat{J_t^C}) - [\mathcal{L}^{a^*(\widehat{J_t^C}),r^*(\widehat{J_t^C})}w(\widehat{J_t^C}) + \varphi(a^*(\widehat{J_t^C})) - r^*(\widehat{J_t^C})] = 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
w(x) &= \mathbb{E}^{a^*(\widehat{J^C})}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J_{\tau_n}^C}) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}\big(-\delta w(\widehat{J_s^C}) + \mathcal{L}^{a^*(\widehat{J_s^C}),r^*(\widehat{J_s^C})}w(\widehat{J_s^C})\big)ds\right] \\
&= \mathbb{E}^{a^*(\widehat{J^C})}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J_{\tau_n}^C}) + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J_s^C})) - r^*(\widehat{J_s^C}))ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}\gamma_{\tau_n}^{a^*(\widehat{J^C})}w(\widehat{J_{\tau_n}^C}) + \gamma_{\tau_n}^{a^*(\widehat{J^C})}\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J_s^C})) - r^*(\widehat{J_s^C}))ds\right].
\end{aligned}$$

Similarly to (i), we show that $\left(\gamma_\tau^{a^*(\widehat{J^C})} \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J}_s^C))-r^*(\widehat{J}_s^C))ds\right)_n$ and $\left(\gamma_{\tau_n}^{a^*(\widehat{J^C})} w(\widehat{J}_{\tau_n}^C)\right)_n$ are uniformly integrable under $\mathbb{P}$. Passing to the limit as $n \to \infty$, $\tau_n \to \tau^*$ a.s. and since $w(\widehat{J}_{\tau^*}^C) = -\widehat{J}_{\tau^*}^C$, we obtain

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}^{a^*(\widehat{J^C})}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J}_s^C)) - r^*(\widehat{J}_s^C))ds - e^{-\delta\tau^*}\widehat{J}_{\tau^*}^C\right] \\ &= J_0^P(r^*(\widehat{J^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J^C})) \\ &\leq v(x). \end{aligned}$$

We conclude that $w = v$ and $(r^*(\widehat{J^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J^C}))$ is an optimal feedback control.
(ii)-b. For x fixed, we maximize the function

$$f(x,.) : r \mapsto -w'(x)U(r) - r.$$

When $w'(x) \geq 0$, the function $f(x,.)$ is non-increasing and the optimum is achieved for $r = 0$. Otherwise, the function $f(x,.)$ is concave and the optimal rent is given by $r^*(x) = \arg\max_r(f(x,r))$. Therefore

$$r^*(x) = (U')^{-1}(\frac{-1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0}.$$

Furthermore, since $(U')^{-1}(\infty) = 0$, $x \to r^*(x)$ is continuous even at zero points of the function w'. •

Remark 3.4.4. *To study the BSDE (3.3.14), we need only L^2-integrability conditions on the terminal condition i.e. $J_\tau^C(\Gamma, A^*(Z)) = \xi$. However, to prove the verification theorem, we need to strengthen this integrability condition by assuming a boundedness condition in L^2.*

Remark 3.4.5. *Since we do not assume that the controls are in a bounded domain, the regularity of the principal value function v is not obvious. Nevertheless, one could characterize the principal value function v as the unique viscosity solution of the associated HJBVI in the class of sublinear functions.*

3.4.3 Beyond the constant volatility case

In all the chapter, we assumed that the volatility of the project social value is constant. One could generalize to a positive map σ, $\mathbb{F}$-progressive. We assume also, that the map $(x,a) \longrightarrow \frac{\varphi(a)}{\sigma(x)}$ is bounded by a positive constant. This assumption replaces the boundedness of φ. In this case, the best response of the agent depends on two variables and becomes $A^*(x,z) = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{z}{\sigma(x)})$. Then the state process is now two-dimensional, the first component being the

social value of the project and the second component being the consortium objective function. They evolve according to the following forward SDEs

$$\begin{aligned} dX_t^x &= \sigma(X_t^x)dW_t,\ X_0^x = x, \\ dJ_t^{C,y} &= -\left(-\lambda J_t^{C,y} + U(R_t) - h(A^*(X_t^x, Z_t)) + Z_t \frac{\varphi(A^*(X_t^x, Z_t))}{\sigma(X_t^x)}\right) dt + Z_t dW_t, J_0^{C,y} = y. \end{aligned}$$

The control processes are given by R, τ and $A^*(X^x, Z) \in \mathcal{A}_\rho^C$, and the principal value function is given by :

$$v(x,y) := \sup_{(R,\tau,A^*(X^x,Z))\in\mathcal{Y}} \mathbb{E}^{A^*(X^x,Z)}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(X_s^x, Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau} J_\tau^{C,y}\right],$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} := \Big\{ & (R, \tau, A^*(X^x, Z))\ R \geq 0, R\ \mathbb{F}\text{-progressively measurable process s.t.} \\ & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{\rho s}(U(R_s)^2 \vee R_s^2)ds] < \infty,\ \tau \in \mathcal{T}, A^*(X^x, Z) \in \mathcal{A}_\rho^C \Big\}. \end{aligned}$$

The associated Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality (HJBVI) associated to the value function is

$$\min\left\{\delta w(x,y) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} [\mathcal{L}^{a,r} w(x,y) + \varphi(a) - r], w(x,y) + y\right\} = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}\times(0,\infty),$$

where the second order differential operator $\mathcal{L}^{a,r}$ is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{a,r} w(x,y) &:= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{2}(\sigma(x)\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2 \mathbf{1}_{\{a>0\}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{h'(a)}{\varphi'(a)}\mathbf{1}_{\{a>0\}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}(x,y)\right) \\ &+ [\lambda y - U(r) + h(a)]\frac{\partial w}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Remark 3.4.6. *The numerical results of this chapter are postponed in Chapter 5*

3.5 Appendix : Proof of Proposition 3.3.1

We give in the Appendix a proof of the existence and uniqueness of a solution to the BSDE (3.3.1) as its generator does not depend in Y. We prove directly that $Y \in \mathcal{S}_\rho^2(\tau)$ and we construct a contraction ϕ with respect only to Z from $\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ onto $\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$. We recall that in Darling and Pardoux [23] studied a BSDE with finite random horizon and the generator of BSDE depends on (Y, Z), they make intermediate steps, first they showed that $Y \in \mathcal{H}_\rho^2(\tau)$,

then they constructed a contraction from $\mathcal{H}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$ onto $\mathcal{H}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$. We recall that in our case, we cover the finite and the infinite case.

We give the proof of the existence and uniqueness of a solution (Y, Z) to the BSDE (τ, ξ, g) in $\mathcal{S}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$

$$Y_t = \zeta \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_t^\tau g(s, \omega, Z_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s.$$

Let $v = (V_s)_{s\geq 0} \in \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$ and we associate

$$Y_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}\left[\zeta \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_{t\wedge\tau}^\tau g(s, \omega, V_s)ds|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right]. \tag{3.5.1}$$

We consider the martingale $M_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}\left[\zeta \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_0^\tau g(s, \omega, V_s)ds|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right]$ which is square integrable under the assumptions on (ζ, g). By the martingale representation theorem, there exists a unique process $Z \in \mathcal{H}^2_0(\tau)$ such that

$$M_{t\wedge\tau} = M_0 + \int_0^{t\wedge\tau} Z_s dW_s.$$

We have

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau} &= \mathbb{E}\left[\zeta \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_{t\wedge\tau}^\tau g(s, \omega, V_s)ds|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right] \\ &= M_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} g(s, \omega, V_s)ds \\ &= M_0 - \int_0^{t\wedge\tau} g(s, \omega, V_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau} Z_s dW_s. \end{aligned}$$

Observe by Doob's inequality that

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau} |\int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s dW_s|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^\tau |Z_s|^2 ds\right] < \infty.$$

Under Assumptions $(H1)$-$(H2)$, we deduce that Y lies in $\mathcal{S}^2_0(\tau)$.

- We show that $Z \in \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$.

Let $n \in \mathbb{N}$, we denote

$$\tau_n := \inf\{s \geq 0 : e^{\rho s}|Y_s| > n\} \wedge \tau \wedge n.$$

Applying Itô's formula to the process $(e^{\rho t}|Y_t|^2)_{t\geq 0}$ between time 0 and τ_n , we have

$$|Y_0|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}|Z_r|^2 dr = e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}(-\rho|Y_r|^2 + 2Y_r g(r, \omega, V_r))dr - \int_0^{\tau_n} 2e^{\rho r} Y_r Z_r dW_r.$$

As $g(t, \omega, .)$ is Lipschitz with Lipschitz coefficient C_g, we have

$$2yg(t, \omega, v) \leq 2|y||g(t, \omega, 0)| + 2C_g|y||v|.$$

Using the Young's inequality $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ twice for $\varepsilon = \frac{1}{2}C_g^2$ and $\varepsilon = \frac{1}{2}$, we obtain

$$\begin{aligned} 2yg(t,\omega,v) &\leq \frac{1}{2}C_g^2|y|^2 + 2\frac{|g(t,\omega,0)|^2}{C_g^2} + \frac{1}{2}C_g^2|y|^2 + 2|v|^2 \\ &= C_g^2|y|^2 + 2|v|^2 + 2\frac{|g(t,\omega,0)|^2}{C_g^2}, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

which implies

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}|Z_r|^2 dr &\leq e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}(-\rho + C_g^2)|Y_r|^2 dr + \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2 + 2|V_r|^2)dr \\ &- \int_0^{\tau_n} 2e^{\rho r}Y_r Z_r dW_r. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

From the definition of τ_n, we have

$$|e^{\rho r}Y_r Z_r| \leq n|Z_r| \ \forall\ r \in [\![0,\tau_n]\!]\ \mathbb{P}\ a.s.$$

As $Z \in \mathcal{H}_0^2(\tau)$, the stochastic integral $(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\rho r}Y_r Z_r dW_r)_{t\geq 0}$ is a martingale.
Taking $\rho > C_g^2$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} e^{\rho r}|Z_r|^2 dr\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2 + \int_0^{\tau_n} e^{\rho r}2|V_r|^2 dr + \frac{2}{C_g^2}\int_0^{\tau_n} e^{\rho r}|g(r,\omega,0)|^2 dr\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2 + \int_0^{\tau} e^{\rho r}2|V_r|^2 dr + \frac{2}{C_g^2}\int_0^{\tau} e^{\rho r}|g(r,\omega,0)|^2 dr\right] \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

From Equation (3.5.1), by using the inequality $2ab \leq a^2 + b^2$, Jensen's inequality and since $\tau_n \leq \tau$ a.s., we have

$$\begin{aligned} e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2 &= e^{\rho\tau_n}\left(\mathbb{E}\left[\zeta\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} + \int_{\tau_n}^{\tau} g(s,\omega,V_s)ds|\mathcal{F}_{\tau_n}\right]\right)^2 \\ &\leq 2\left(\left(\mathbb{E}\left[e^{\frac{\rho\tau_n}{2}}\zeta\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau_n}\right]\right)^2 + \left(\mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau} e^{\frac{\rho\tau_n}{2}}|g(s,\omega,V_s)|ds|\mathcal{F}_{\tau_n}\right]\right)^2\right). \end{aligned}$$

By taking the expectation and using Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2\right] &\leq 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau_n}^{\tau} e^{\frac{\rho\tau_n}{2}}|g(s,\omega,V_s)|ds\right)^2\right]\right) \\ &= 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau_n}^{\tau} e^{\frac{\rho}{2}(\tau_n-s)}e^{\frac{\rho s}{2}}|g(s,\omega,V_s)|ds\right)^2\right]\right) \\ &\leq 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^{\tau} e^{\rho(\tau_n-s)}ds\int_{\tau_n}^{\tau} e^{\rho s}|g(s,\omega,V_s)|^2 ds\right]\right) \\ &\leq 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{\rho}(1-e^{-\rho(\tau-\tau_n)})\int_0^{\tau} e^{\rho s}(|g(s,\omega,0)|^2 + C_g^2|V_s|^2)ds\right]\right) \\ &\leq 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{\rho s}(|g(s,\omega,0)|^2 + C_g^2|V_s|^2)ds\right]\right), \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

where the third inequality is obtained by Assumption $(H2)$.

By (3.5.4) and (3.5.5) and monotone convergence theorem, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right] &\leq 2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]+\frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}(|g(s,\omega,0)|^2+C_g^2|V_s|^2)ds\right]\right)\\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}2|V_r|^2dr+\frac{2}{C_g^2}\int_0^\tau e^{\rho r}|g(r,\omega,0)|^2dr\right].\end{aligned}$$

As Assumption $(H1)$ holds and $V\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$, we deduce that $Z\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$.

- We show that $Y\in\mathcal{S}_\rho^2(\tau)$.

Applying Itô's formula to the process $(e^{\rho t}|Y_t|^2)_{t\geq 0}$ between time $t\wedge\tau_n$ and τ_n

$$e^{\rho(t\wedge\tau_n)}|Y_{t\wedge\tau_n}|^2+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr=e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}e^{\rho r}(-\rho|Y_s|^2+2Y_rg(r,\omega,V_r))dr-\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}2e^{\rho r}Y_rZ_rdW_r.$$

Repeating the same argument as in (3.5.2) and by taking $\rho>C_g^2$, we obtain

$$\begin{aligned}e^{\rho(t\wedge\tau_n)}|Y_{t\wedge\tau_n}|^2 &+ \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr\leq e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2+2|V_r|^2)dr\\ &- 2\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}e^{\rho r}Y_rZ_rdW_r.\end{aligned}$$

By Burkholder-Davis-Gundy inequality, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t}|Y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2+\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2+2|V_r|^2)dr\right]\\ &+ C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}e^{2\rho r}|Y_r|^2|Z_r|^2dr\right)^{\frac{1}{2}}\right].\end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n}e^{2\rho r}|Y_r|^2|Z_r|^2dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t/2}|Y_t|\left(\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t}|Y_t|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right].\end{aligned}$$

So, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t}|Y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2+\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2+2|V_r|^2)dr\right]\\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t}|Y_t|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right],\end{aligned}$$

we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau_n}e^{\rho t}|Y_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau_n}|Y_{\tau_n}|^2+\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2+2|V_r|^2)dr\right]+C^2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n}e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right].$$

By using the inequality (3.5.5) and the monotone convergence theorem, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\rho t}|Y_t|^2\right] &\leq 2\left(2\left(\mathbb{E}\left[e^{\rho\tau}\zeta^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]+\frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}(|g(s,\omega,0)|^2+C_g^2|V_s|^2)ds\right]\right)\right.\\ &+ \left.\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}(\frac{2}{C_g^2}|g(r,\omega,0)|^2+2|V_r|^2)dr\right]+C^2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}|Z_r|^2dr\right]\right).\end{aligned}$$

As (H1) holds, $V\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ and $Z\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$, we deduce that $Y\in\mathcal{S}_\rho^2(\tau)$.

- We contruct a contraction mapping

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\rho^2(\tau) &\to \mathcal{H}_\rho^2(\tau)\\ V &\mapsto \Phi(V)=Z\end{aligned}$$

defined by

$$Y_{t\wedge\tau}=\zeta\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}+\int_{t\wedge\tau}^\tau g(s,\omega,V_s)ds-\int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s dW_s. \tag{3.5.6}$$

We denote by :

$$v := V-V',\ z:=Z-Z',\ y:=Y-Y',$$

where Y and Y' are defined from (3.5.1). We have $y_\tau=0$, and

$$dy_t=-\{g(t,\omega,V_t)-g(t,\omega,V_t')\}dt+z_t dW_t.$$

Applying Itô's formula to $e^{\rho t}|y_t|^2$ between 0 and τ, and using $|g(r,\omega,V_r)-g(r,\omega,V_r')|\leq C_g|v_r|$, we obtain

$$\int_0^\tau e^{\rho r}|z_r|^2dr \leq \int_0^\tau e^{\rho r}[-\rho|y_r|^2+2C_g|y_r v_r|]dr-2\int_0^\tau e^{\rho r}y_r z_r dW_r.$$

Taking the expectation and by using the Young's inequality $2ab\leq\varepsilon a^2+\frac{b^2}{\varepsilon}$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}|z_r|^2dr\right]\leq\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho r}[-\rho+\varepsilon C_g^2]|y_r|^2dr\right]+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{\rho s}|v_r|^2dr\right].$$

Choosing $\rho>\varepsilon C_g^2$ and $\varepsilon>1$, it yields that Φ is a contraction mapping, so there exists a unique solution $(Y,Z)\in\mathcal{S}_\rho^2(\tau)\times\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ solving the BSDE (3.3.1).

Chapitre 4

The first and the second best frameworks for Public Private Partnerships

> Mathematical proofs should only be communicated in private and to consenting adults.
>
> Victor Klee

Sommaire

4.1 Introduction 74
4.2 The second best framework 75
4.3 The dynamics of the objective function of the consortium 77
4.4 Comparaison of the filtrations at the optimum 82
4.5 The first best framework 84
4.5.1 Numerical results 89
4.5.2 Comparison between the value function in the first and in the second best 92

4.1 Introduction

In the first part of this chapter, we consider a contract between a public entity and a consortium with a random horizon and with a continuous payment. The public and the consortium do not share the same information, in particular, the public may not observe the effort of the consortium but only its impact on the social value of the project. It is a principal agent's problem with moral hazard. This work is related to a literature on dynamic contracting problems in continuous time. [1] The public gives a continuous rent to the consortium, while the latter gives a best effort, until a terminal date decided by the public when she stops the contract and gives a compensation to the consortium. As usually in contract theory, the model is formulated in a weak formulation, that is we search a new probability under which there exits a weak solution of the SDE of the social value of the project. In the weak formulation, we start with a social value of the project that follows a Brownian motion under a reference probability. We assume that the consortium changes the distribution of the social value of the project by changing the drift and this amounts to considering a new probability that depends on the effort of the consortium (see Chapter 3). In this chapter, we adopt a different approach. Instead of adopting the weak formulation, we adopt the strong formulation of stochastic control. Instead of using a change of probability measure, we consider in the strong formulation different filtrations corresponding to the different level of information as in the context of stochastic control under partial observation (see Bensoussan [8] Section 2.3). We fix a probability space, the public observes the social value of the project, but she may not observe the drift and the Brownian motion. We solve the control problem on a larger set of controls that correspond to the adapted controls with respect to the total filtration which contains all information of the public and the consortium. In the optimum, we prove the filtrations coincide. In this chapter, we assume that the controls are not bounded, finally we compare the results of this chapter with Chapter 2.

In the second part of this chapter, we study the first-best framework, we assume that the public and the consortium have the same information, the two parts share the risk between themselves. The problem is a stochastic control problem for a single individual "the public", who chooses both the rent and the efforts. In this framework, we consider the strong formulation, in order to compare the first and the second best.

To solve the problem of the first-best, in the first step, we assume that the public does not stop the contract, we come back to a stochastic control problem, we show that the optimal

1. Holmstrom and Milgrom [36], Williams [63], Sannikov [57], Cvitanic et al. [22], Cvitanic et al. [20], Cvitanic et Zhang [21], Hu et al. [38], Elie et Possamaï [28].

rent and the optimal effort are deterministic controls. In the second step, we solve the general case. Finally, we conclude with numerical illustrations.

4.2 The second best framework

In this section, we work under the strong formulation, we solve the second best problem for public private partnerships. Let W be a standard one dimensional Brownian motion under some probability space with probability measure $\mathbb{P}$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ is the filtration generated by W (satisfying the usual conditions of right-continuity and completeness). This is the same framework as in the Chapter 3 in particular on controls sets and we consider an optimal stochastic control and optimal stopping. Here, instead of adopting the weak formulation, we will adopt the strong formulation of stochastic control, that already used in Chapter 2. Instead of using a change of probability measure, we consider in the strong formulation different filtrations corresponding to the different level of information as in the context of stochastic control under partial observation. We fix a probability space, we search a strong solution of the SDE of the social value of the project, we solve the control problem on a larger set of controls that correspond to the controls adapted to the global filtration including all information of the public and the consortium.

In the strong formulation, the social value of the project is a $\mathbb{F}$-adapted process $(X_s)_{s\geq 0}$ given by

$$X_t := X_0 + \int_0^t \varphi(A_s)ds + \sigma W_t, \tag{4.2.1}$$

where

- $X_0 > 0$ is the initial value of the project.
- $\sigma > 0$ is the volatility of the operational cost of the infrastructure maintenance, that is assumed to be constant.

Equation 4.2.1 is the same dynamic as the one for X under $\mathbb{P}^A$ (see Equation (3.2.1) in Chapter 3) in the weak formulation.

We are in the context of asymmetric information. The public observes the social value X of the project, but she does not observe directly the effort of the consortium. Thus his information is conveyed by the filtration $\mathbb{F}^X$ generated by the social value process X. We consider a Stackelberg leadership model between the public and the consortium : we assume that given a contract $\Gamma = ((R_s)_s, \tau, \xi)$, the public computes the best response of the consortium. Then, the public solves her problem by taking into account the best effort of the consortium and computes the associated optimal contract.

The effort (unobserved) is a $\mathbb{F}$-progressively measurable process, the rent is a non-negative

$\mathbb{F}^X$-progressively measurable process $(R_s)_{s\geq 0}$, τ is a stopping time in $\mathcal{T}_X$, where $\mathcal{T}_X$ is the set of all finite $\mathbb{F}^X$ stopping times and finally ξ is non negative, $\mathcal{F}_\tau^X$ measurable random variable. In the weak formulation, the effort A and the rent R are a $\mathbb{F}$-progressively measurable process.

We assume that given a contract $\Gamma = ((R_s)_s, \tau, \xi)$ offered by the principal, the consortium gives a best response in terms of an effort process A : this is a Stackelberg leadership model. The consortium accepts the contract only if his expected payoff exceeds his reservation value $\underline{x}$.
We define the following sets of admissible contracts, depending on the information flow for some $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\rho &:= \{\big((R_s)_{s\geq 0}, \tau, \xi, (A_s)_{s\geq 0}\big) \ R \text{ is } \mathbb{F}\text{-progressively measurable } R_s \geq 0,\ \tau \in \mathcal{T}, \xi \text{ integrable } \mathcal{F}_\tau \\
&\quad \text{measurable, } A \text{ is } \mathbb{F} \text{ -progressively measurable, } A_s \geq 0 \ ds \otimes d\mathbb{P} \ a.e \text{ such that} \\
&\quad e^{\rho s}(U(R_s) - h(A_s)) \text{ and } e^{\rho s}(\varphi(A_s) - R_s) \in L^2([0,\tau] \times \Omega)\} \qquad (4.2.2) \\
\mathcal{D}_\rho^X &:= \mathcal{D}_\rho \cap \{\big((R_s)_{s\geq 0}, \tau, \xi, (A_s)_{s\geq 0}\big), \text{such that } R \text{ is } \mathbb{F}^X\text{-progressively measurable, } \tau \in \mathcal{T}_X \\
&\quad \text{and } \xi \text{ is } \mathcal{F}_\tau^X \text{ measurable } \}.
\end{aligned}$$

where $\mathcal{T}$ is the set of all $\mathbb{F}$- finite stopping times. $\mathcal{D}_\rho^X$ is similar as the set $\mathcal{D}_\rho$ but with different measurabilities for the controls.

We define the objective functions of the public and the consortium.
Objective function and continuation value for the consortium and for the public :
The consortium aims to optimize the expectation under the probability $\mathbb{P}$ (and not under $\mathbb{P}^A$ as in the weak formulation) of his aggregate utility of the rent minus the cost of his effort plus the cost of stopping contact multiplied by the discount factor.

$$A \to J_0^{C,S}(\Gamma, A) = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}\xi\right).$$

The *objective function* starting from time t for the consortium is, conditionally on $\mathcal{F}_t$ and is given by

$$J_t^{C,S}(\Gamma, A) := \mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-\lambda(s-t)}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda(\tau-t)}\xi|\mathcal{F}_t\right). \qquad (4.2.3)$$

The public anticipates the consortium's best response A^* to propose the optimal contract and aims to optimize the expectation under the probability $\mathbb{P}$, not under the probability $\mathbb{P}^A$ of the social value minus the rent paid to consortium minus the cost of stopping contract

multiplied by the discount factor.

$$\begin{aligned}\Gamma \to J_0^{P,S} &= \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-\delta s}(dX_s - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi\right), \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi\right).\end{aligned}$$

subject to the reservation constraint

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s^*))ds + e^{-\lambda\tau}\xi\right) \geq \underline{x}.$$

while the *objective function* starting from time t for the public is, conditionally on $\mathcal{F}_t^X$ and is given by

$$J_t^{P,S}(\Gamma, A) := \mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s^*) - R_s)ds - e^{-\delta(\tau-t)}\xi|\mathcal{F}_t^X\right). \tag{4.2.4}$$

In the weak formulation, the objective function for the consortium and the public are computed under the probability measure $\mathbb{P}^A$ and are conditionally on $\mathcal{F}_t$, while the objective functions are computed under $\mathbb{P}$ in the strong formulation, the objective function for consortium is, conditionally on $\mathcal{F}_t$ and the objective function for the public is, conditionally on $\mathcal{F}_t^X$.

4.3 The dynamics of the objective function of the consortium

In this section, we characterize the incentive compatible contracts in $\mathcal{D}_\rho$ the largest set of admissibility, and we show that the dynamics of the objective function of the consortium is the same as in the weak approach. Indeed in the weak formulation, the dynamics of the social value is given by $dX_t = \varphi(A_t)dt + \sigma dW_t^A$, where W_t^A is $\mathbb{P}^A$-Brownian motion, while in the strong formulation, the dynamics of the social value is given by $dX_t = \varphi(A_t)dt + \sigma dW_t$, where W is $\mathbb{P}$ Brownian motion. In the weak formulation, we have a change of probability under which we compute the objective function, this change of probability is compensated by the fact that our social value is under $\mathbb{P}$ and it has the same dynamics under $\mathbb{P}^A$ in the strong formulation. Therefore, we have the same dynamics of the objective function of the consortium for a strong and weak formulation.

Lemma 4.3.1. *Suppose Assumption 3.2.3. For $\rho > \frac{\|\varphi\|_\infty^2}{\sigma^2}$. For any admissible contract $(\Gamma, A) \in \mathcal{D}_\rho$, there exists $Z^A \in \mathcal{H}_\rho^2(\tau)$ such that the dynamics of the consortium objective function evolves according to the BSDE with random terminal condition*

$$dJ_t^C(\Gamma, A) = \left[\lambda J_t^C(\Gamma, A) - U(R_t) - \psi(A_t, Z_t^A)\right]dt + Z_t^A dW_t,\ J_\tau^C(\Gamma, A) = \xi, \tag{4.3.1}$$

where

$$\psi(a,z) := -h(a) + z\frac{\varphi(a)}{\sigma}. \tag{4.3.2}$$

If there exists $A^* \in \mathcal{D}_\rho$ *such that* $\psi(A_t, Z_t^A) \leq \psi(A_t^*, Z_t^A),\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s$*, then*

$$J_t^C(\Gamma, A) \leq J_t^C(\Gamma, A_t^*),\ \forall t \in [\![0,\tau[\![\ \mathbb{P}\ a.s.$$

•

The proof of Lemma 4.3.1 is similar to the proof of Lemma 3.3.2 in Chapter 3, but in this proof, we do not make a change of probability. We use the Itô formula and the martingale representation theorem.
The associated Backward Stochastic Differential Equation of (4.3.1) is given by

$$\begin{cases} dY_t &= -\left(-\lambda Y_t + U(R_t) + \psi(A_t, Z_t^A)\right)dt + Z_t^A dW_t \\ Y_\tau &= \xi \end{cases} \tag{4.3.3}$$

There exists a unique (Y, Z^A) solving the BSDE (4.3.3) such that

$$\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\leq s\leq\tau}|e^{(\rho-\lambda)s}Y_s|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ and } \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^\tau |e^{(\rho-\lambda)s}Z_s^A|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Lemma 4.3.2. *Suppose Assumption 3.2.3. Let* z *be a real number. We define,* $A^*(z) := \arg\max_{a\geq 0}\psi(a,z)$*. If* $z > \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$*, then* $A^*(z) = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{z}{\sigma})$ *and if* $z \leq \sigma\frac{h'(0)}{\varphi'(0)}$*, then* $A^*(z) = 0$*.*
Moreover, A^* *is a bijection from* $\{0\} \cup (\sigma\frac{h'}{\varphi'}(0), \infty)$ *to* $[0,\infty)$*.*

We enlarge the set of admissible controls by choosing them $\mathbb{F}$-progressively measurable. The following proposition gives the bijection between the process $(Z_t^A)_{t\geq 0}$ and the optimal effort $(A_t^*)_{t\geq 0}$.

Proposition 4.3.3. *Let* $(\Gamma, A) \in \mathcal{D}_\rho$*. There exists a bijection between the process* $(Z_t^A)_{t\geq 0}$ *and the optimal effort* $(A_t^*)_{t\geq 0}$*, the bijection is given by*

$$A_t^* = A^*(Z_t^A) = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{Z_t^A}{\sigma})\mathbf{1}_{\{Z_t^A>0\}},$$

or equivalently

$$Z_t^A = (\sigma\frac{h'}{\varphi'})(A^*(Z_t^A))\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t^A)>0\}}.$$

The following proposition characterizes the incentive compatible contracts in $\mathcal{D}_\rho$ the largest set of admissibility.

Proposition 4.3.4. *We assume that the generator defined by* $g(t,\omega,z) := \tilde{U}(R_t) - e^{-\lambda t}h(A^*(z)) + z\frac{\varphi(A^*(z))}{\sigma}$ *satisfies the Assumptions* $(H1)$ *and* $(H2)$ *with Lipschitz coefficient* C_g *satisfying* $C_g^2 < \rho$. *Then, the dynamics of* J^C *for any incentive compatible contract* $(\Gamma, A^*(Z))$ *is given by the BSDE with random terminal condition*

$$dJ_t^C(\Gamma, A^*(Z)) = -\left(-\lambda J_t^C(\Gamma, A^*(Z_t)) + U(R_t) + \psi(A^*(Z_t), Z_t)\right)dt + Z_t dW_t,\ J_\tau^C(\Gamma, A^*(Z)) = \xi \tag{4.3.4}$$

where $A^*(Z)$ *is defined in Lemma 4.3.2.* •

As in the chapter 2, by using the characterization of the incentive compatible contracts, the optimization problem of the public can be written as a standard stochastic control problem.

- From now on, we adopt a forward point of view for the dynamics of the consortium objective function which evolves according to the following forward SDE

$$\begin{aligned} dJ_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)) &= \left(\lambda J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)) - U(R_t) + h(A^*(Z_t)) - Z_t\frac{\varphi(A^*(Z_t))}{\sigma}\right)dt + Z_t dW_t, \\ J_0^C(x,R,\tau,A^*(Z)) &= x. \end{aligned}$$

- The public value at time 0 is written as follows

$$v(x) := \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}} \mathbb{E}_x\left(\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Z)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^{C,S}(\Gamma, A^*(Z))\right), \tag{4.3.5}$$

  where $\mathcal{G}$ is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \{&(R,\tau,A^*(Z))\ R \geq 0\ \mathbb{F}\text{-progressively measurable}, \tau \in \mathcal{T}, A^*(Z) \geq 0\ \mathbb{F}\text{-progressively} \\ &\text{measurable such that } e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Z)) - R_s) \in L^1([0,\tau]\times\Omega)\}. \end{aligned}$$

- We apply the Hamilton Jacobi Bellman Variational Inequality (HJBVI) associated to the value function, which takes the following form :

$$\min\left\{\delta w(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}[\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r], w(x) + x\right\} = 0,\ x \in (0,\infty), \tag{4.3.6}$$

  where the second order differential operator $\mathcal{L}^{a,r}$ is defined by

$$\mathcal{L}^{a,r}w(x) := \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2\mathbf{1}_{a>0}w"(x) + [\lambda x - U(r) + h(a)]w'(x).$$

- The boundary condition is given by :

$$v(0) = 0$$

- Similarly to the proof of Lemma 3.4.2 in Chapter 3, we can prove that the public value function satisfies a linear growth condition.

Theorem 4.3.5. *(Verification theorem) Let $w \in C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfying a linear growth condition. We assume that*

$$\sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}} \mathbb{E}[|e^{-\delta\tau} J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))|] < \infty. \tag{4.3.7}$$

Then we have :

(i) For $x \geq 0$, if w satisfies $\delta w(x) \geq \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{\mathcal{L}^{a,r} w(x) + \varphi(a) - r\}$ and $w(x) \geq -x$, then $w(x) \geq v(x)$.

(ii) Suppose that there exists two measurable non-negative functions (a^*, r^*) defined on $(0,\infty)$ such that

$$\sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{\mathcal{L}^{a,r} w(x) + \varphi(a) - r\} = \mathcal{L}^{a^*(x),r^*(x)} w(x) + \varphi(a^*(x)) - r^*(x), \quad x \in (0,\infty),$$

and that the SDE

$$dJ_t^C = \left(\lambda J_t^C - U(r^*(J_t^C)) + h(a^*(J_t^C))) - Z_t \frac{a^*(J_t^C)}{\sigma}\right) dt + Z_t dW_t, \quad J_0^C = x$$

admits a unique solution $\widehat{J_t^C}$. We define

$$\tau^* := \inf\{t \geq 0 \ : \ w(\widehat{J_t^C}) \leq -\widehat{J_t^C}\} \tag{4.3.8}$$

and we assume that $(r^*(\widehat{J_t^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J_t^C}))$ lies in $\mathcal{G}$ and $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\rho\tau^*} \widehat{J_{\tau^*}^C}^2 \mathbf{1}_{\{\tau^*<\infty\}}] < \infty$.

If w is a solution of (4.3.6), then

(a) $w = v$, and τ^* is an optimal stopping time for the problem (4.3.5).

(b) The optimal rent is given by $r^*(x) = (U')^{-1}(-\frac{1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0}$.

•

In Theorem (4.3.5), we need less integrability conditions on the utility functions of the consortium and the public because we do not make a change of probability to go from $\mathbb{P}$ to $\mathbb{P}^A$.

Proof

(i) Let $x \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$, for an admissible contract $(R,\tau,A^*(Z)) \in \mathcal{G}$, we denote

$$\tau_n := \tau \wedge \inf\{t : |w'(J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\sigma \frac{h'(A^*(Z_t))}{\varphi'(A^*(Z_t))}| > n\}.$$

Applying Itô's formula to the process $(e^{-\delta t} w(J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z))))_{t\geq 0}$ between time 0 en τ_n

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-\delta\tau_n} w(J_{\tau_n}^C(x,R,\tau,A^*(Z))) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}[-\delta w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z))) \\ &+ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s} w(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s} w'(J_s^C(x,R,\tau,A^*(Z)))\sigma \frac{h'(A^*(Z_s))}{\varphi'(A^*(Z_s))} \mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}} dW_s. \end{aligned}$$

Taking the expectation

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\Big[e^{-\delta\tau_n} w(J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}[-\delta w(J^C_s(x,R,\tau,A^*(Z))) \\ &+ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s} w(J^C_s(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds\Big] \\ &\geq \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n} w(J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))) + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right], \end{aligned}$$

where the inequality is obtained by using the assumption $\delta w(x) \geq \sup_{a,r}\{\mathcal{L}^{a,r} w(x) + \varphi(a) - r\}$. By using the definition of the set $\mathcal{D}_\rho$ we have

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\big] \leq \mathbb{E}\big[\int_0^{\infty} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\big].$$

Therefore, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\big] < \infty$, so we have $(\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}\varphi(A^*(Z_s) - R_s)ds)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly integrable. Thus, we have the convergence in $\mathbb{L}^1$ and we may pass to the limit as $n \to \infty$, and we get

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds] = \mathbb{E}[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds]. \tag{4.3.9}$$

As w satisfies a linear growth condition, we have

$$\mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n} w(J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))|\right] \leq \mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n} K(1 + J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))|\right]$$

By using 4.3.7, we have

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n} w(J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))|\right] < \infty.$$

Then, we may pass to the limit as $n \to \infty$, and we get

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_n} w(J^C_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))] = E[e^{-\delta\tau} w(J^C_{\tau}(x,R,\tau,A^*(Z)))]. \tag{4.3.10}$$

By (4.3.9) and (4.3.10), we have

$$w(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds + e^{-\delta\tau} w(J^C_{\tau}(x,R,\tau,A^*(Z)))\right].$$

Since $w(J^C_\tau(x,R,\tau,A^*(Z))) \geq -J^C_\tau(x,R,\tau,A^*(Z))$, this leads to

$$w(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau} J^C_{\tau}(x,R,\tau,A^*(Z))\right].$$

By taking the supremum, we obtain

$$w(x) \geq \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(x,R,\tau,A^*(Z))\right] = v(x).$$

(ii)-a. We now consider the feedback control $(r^*(\widehat{J^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J^C})$ which is assumed to be in $\mathcal{G}$. Let τ^* be the stopping time introduced in (4.3.8). Then $\tau^* \in \mathcal{T}$. We denote

$$\tau_n \ := \ \tau^* \wedge \inf\{t : |w'(\widehat{J_t^C})\sigma\frac{h'(a^*(\widehat{J_t^C})}{\varphi'(a^*(\widehat{J_t^C})}| > n\}.$$

Observe that $w(\widehat{J_t^C}) > -\widehat{J_t^C}$ on $[\![0,\tau_n[\![\subset [\![0,\tau^*[\![$. Then on $[\![0,\tau_n[\![$, by (4.3.6)

$$\delta w(\widehat{J_t^C}) - [\mathcal{L}^{a^*(\widehat{J_t^C}),r^*(\widehat{J_t^C})}w(\widehat{J_t^C}) + \varphi(a^*(\widehat{J_t^C})) - r^*(\widehat{J_t^C})] = 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J_{\tau_n}^C}) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}\big(-\delta w(\widehat{J_s^C}) + \mathcal{L}^{a^*(\widehat{J_s^C}),r^*(\widehat{J_s^C})}w(\widehat{J_s^C})\big)ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J_{\tau_n}^C}) + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J_s^C})) - r^*(\widehat{J_s^C}))ds\right]. \end{aligned}$$

Similarly to (i), we show that $(\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J_s^C})) - r^*(\widehat{J_s^C}))ds)_n$ and $\left(w(\widehat{J_{\tau_n}^C})\right)_n$ are uniformly integrable. We may pass to the limit $n \to \infty$, $\tau_n \to \tau^*$ a.s, and since $w(\widehat{J_{\tau^*}^C}) = -\widehat{J_{\tau^*}^C}$, we obtain

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J_s^C})) - r^*(\widehat{J_s^C}))ds - e^{-\delta\tau^*}\widehat{J_{\tau^*}^C}\right] \\ &= J_0^P(r^*(\widehat{J^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J^C})) \\ &\leq v(x). \end{aligned}$$

We conclude that $w = v$ and $(r^*(\widehat{J^C}), \tau^*, a^*(\widehat{J^C}))$ is an optimal feedback control. •

4.4 Comparaison of the filtrations at the optimum

We have three filtrations : $\mathbb{F}$ is the filtration generated by the standard Brownian motion W (global filtration), $\mathbb{F}^X$ is the filtration generated by the social value process X and $\mathbb{F}^{J^{C,S}}$ is the the filtration generated by the process $J^{C,S}$. If the optimal effort can not equal to zero, we show that the filtrations coincide at the optimum. If the optimal effort can equal to zero, we have only $\mathbb{F}^{J^{C,S}}$ and $\mathbb{F}^X$ included in $\mathbb{F}$.

The following proposition proves that if the optimal effort can not equal to zero, then the three filtrations coincide at the optimum and in particular the process $J^{C,S}(x,R,\tau,A^*(Z))$ is $\mathbb{F}^X$-adapted.

Proposition 4.4.1. *We denote by* $\mathbf{J}_t^{C,S} = J_t^{C,S}(x,R,\tau,A^*(Z))$. *We assume that the optimal effort can not equal to zero, and that the stochastic differential equation*

$$d\mathbf{J}_t^{C,S} = \lambda \mathbf{J}_t^{C,S} dt - \left(U(r^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) - h(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) \right) dt + \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))dW_t,\ \mathbf{J}_0^{C,S} = x, \quad (4.4.1)$$

admits a unique strong solution. Then the filtrations $\mathbb{F}^X$, $\mathbb{F}^{J^{C,S}(\Gamma,A^*(Z))} = \mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}}$ *and* $\mathbb{F}$ *coincide at the optimum.*

Proof Obviously, $\mathbb{F}^X$ and $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}}$ are included in $\mathbb{F}$.

1. - $\mathbf{J}^{C,S}$ is solution of (4.4.1) then, $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}} \subset \mathbb{F}$.
   - Since $\sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))$ is positive (by assumption), by (4.4.1), we have

     $$dW_t = \frac{1}{\sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))} \left[d\mathbf{J}_t^{C,S} - \left(\lambda \mathbf{J}_t^{C,S} - U(r^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) + h(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) - \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) \right) dt \right].$$

     Then, we have $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}}$. Therefore, the filtrations generated by W and $\mathbf{J}^{C,S}$ coincide ($\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}}$)

2. By definition :

   $$dX_t = \varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))dt + \sigma dW_t,\ X_0 \text{ is given.}$$

   Since $\sigma > 0$, we obtain

   $$dW_t = \frac{1}{\sigma}[dX_t - \varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))dt] \quad (4.4.2)$$

   we have

   $$\begin{aligned} d\mathbf{J}_t^{C,S} &= \lambda \mathbf{J}_t^{C,S} dt - \left(U(r^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) - h(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) + \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) \right) dt \\ &+ \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S})) \left[-\varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{C,S}))dt + dX_t \right], \\ \mathbf{J}_0^{C,S} &= x. \end{aligned}$$

   Under this form the process X appears as the unique source of noise driving (4.4.3). From (4.4.1) and (4.4.2), the SDE (4.4.3) admits a unique solution, then $\mathbf{J}^{C,S}$ is $\mathbb{F}^X$-adapted, hence $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{C,S}} \subset \mathbb{F}^X$.

Therefore the three filtrations $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^X$ and $\mathbb{F}^{J^{C,S}(x,R,\tau,A^*(Z))}$ coincide at the optimum. •

Remark 4.4.2. *If the optimal effort can equal to zero, we have only* $\mathbb{F}^{J^{C,S}}$ *and* $\mathbb{F}^X$ *included in* $\mathbb{F}$.

4.5 The first best framework

In this section, we compare the first-best and the second-best. We use in Section 4.2 and in Section 4.3 the strong formulation to solve the second-best. It is reasonable to consider the strong formulation to solve the first-best.
In the risk sharing framework, the public and the consortium have the same information. They have to agree how to share the risk between themselves. The public observes both X and the effort A. We distinguish two cases : either the public does not stop the contract, or she stops the contract. In this section, τ can be infinite.

1. **We assume that the public does not stop the contract : we impose $\tau = \infty$ and $\xi = 0$.**

The problem is a stochastic control problem for a single individual "the public", who chooses both the rent and the effort, under the reservation constraint. We are faced with the following optimization problem

$$v(x) = \sup_{(R,A)\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds\right]$$

subject to the reservation constraint

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds\right] \geq \underline{x} \tag{4.5.1}$$

where

$$\mathcal{C} \quad := \quad \{(R_s, A_s)_{s\geq 0} \text{ such that } (R_s, \infty, A_s) \in \mathcal{D}_\rho\},$$

where $\mathcal{D}_\rho$ is given by (4.2.2).
We introduce a Lagrange multiplier λ_{Lag} in order to solve this problem, and we consider the unconstrained problem.

$$\begin{aligned}\sup_{(R,A)\in\mathcal{C}} &\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds\right] + \lambda_{Lag}(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds\right] - \underline{x})\right\} \\ &= \sup_{(R,A)\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds + \lambda_{Lag}[e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds]\right] - \lambda_{Lag}\underline{x}.\end{aligned}$$

The first order conditions for maximization inside the expectation yield

$$\begin{cases} e^{-\delta t}\varphi'(A_t^*) - \lambda_{Lag}e^{-\lambda t}h'(A_t^*) = 0, \\ -e^{-\delta t} + \lambda_{Lag}e^{-\lambda t}U'(R_t^*) = 0. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

So, we get

$$U'(R_t^*) = \frac{h'}{\varphi'}(A_t^*) = \frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)t}. \tag{4.5.3}$$

If $\delta = \lambda$, the optimal A^* and R^* are both constant. In any case, the optimal rent R^* and the optimal effort A^* are deterministic controls and are given by

$$R_t^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)t}) \text{ and } A_t^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)t}). \tag{4.5.4}$$

It follows that

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s^*) - h(A_s^*))ds\right] = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right)\right)ds.$$

The first order condition with respect to λ_{Lag} gives

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s^*) - h(A_s^*))ds\right] = \underline{x}.$$

Binding the participation constraint (4.5.1) for the optimal controls provides the optimal multiplier λ_{lag}, which is solution of the equation

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right)\right)ds = \underline{x}. \tag{4.5.5}$$

Example 4.5.1. *Suppose that the utility functions are given by :* $\varphi(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, $h(x) = \exp(\beta x) - 1$, *so* $\varphi'(x) = \alpha\exp(-\alpha x)$, $h'(x) = \beta\exp(\beta x)$, $\frac{h'}{\varphi'}(x) = \frac{\beta}{\alpha}\exp((\beta+\alpha)x)$ *and* $(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha+\beta}\log(\frac{\alpha}{\beta}x)$, $U(x) = cx^p$, $(U')^{-1}(x) = (\frac{x}{pc})^{\frac{1}{p-1}}$
In this case, (4.5.4) yields the expressions

$$A_t^* = \frac{1}{\alpha+\beta}\log\left(\frac{\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\exp((\lambda-\delta)t)\right) \text{ and } R_t^* = \frac{1}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{1}{p-1}}}\exp\left(\frac{(\lambda-\delta)t}{p-1}\right),$$

with λ_{Lag} *is solution to the following equation*

$$\frac{c}{(pc\lambda_{lag})^{\frac{p}{p-1}}(\lambda - \frac{p}{p-1}(\lambda-\delta))} + \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\frac{\alpha+\beta}{\lambda\alpha+\beta\delta} = x.$$

2. **General case : We study the optimal stopping for the contract in this sharing setting.**

In the risk sharing framework, we are faced with the optimization problem

$$\sup_{(R,\tau,A)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^C(\Gamma, A)\right],$$

subject to the reservation constraint

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}\xi\right] \geq \underline{x}.$$

where $\mathcal{E} = \{(R, \tau, A)\ R \geq 0,\ \tau \in \mathcal{T},\ A \in \mathbb{R}^+$ such that $e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))$ and $e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s) \in L^1(\mathbb{R} \times \Omega)\}$.

We denote by $H(t) := \varphi(A_t^*) - R_t^*$. We study the sign of the function H. First of all, we start by studding the monotonicity of the function H. Since $\lambda > \delta$ and $\lambda_{Lag} > 0$ (by (4.5.2) and U' is increasing), we have $t \mapsto \frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}$ is increasing. The concavity of the function φ and the convexity of the function h yields the function $t \to (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$ is increasing. The concavity of U and the decrease of U' yields the function $t \to (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$ is decreasing. Therefore the optimal rent is decreasing and the optimal effort is increasing in time. By monotonicity of the function φ the function $t \to H(t)$ is increasing.

So we have the following cases :

1. If $H(0) > 0$, it is optimal for the public to never stop the contract ($\tau = \infty$ is optimal).
2. If $H(0) \leq 0$, and if there exists a t_0 such that $H(t_0) = 0$, we compute : $\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds$ and $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$.
   (a) If $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$, it is optimal for the public to never stop the contract ($\tau = \infty$ is optimal) because the profit is greater than the loss.
   (b) If $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds| \geq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$, it is optimal for the public to not offer the contract to the consortium ($\tau = 0$ is optimal) because she knows that the loss will be greater than the profit.

The following figure compares $\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds$ and $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$. If $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$, it is not optimal for the public to stop the contract. If $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s)ds| \geq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s)ds$, it is optimal for the public to not offer the contract to the consortium.

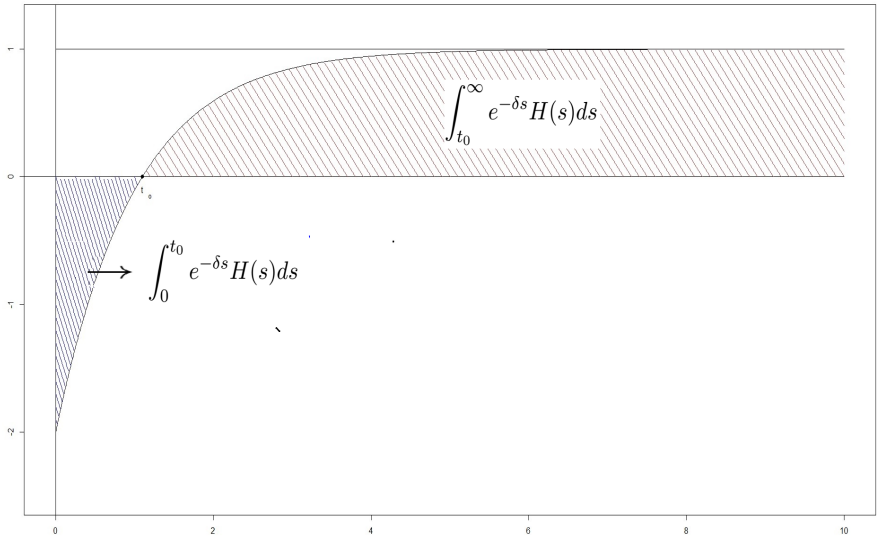


FIGURE 4.1 – Comparaison between $\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H(s) ds$ and $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta s} H(s) ds$.

The following proposition gives the possible cases in the risk sharing setting.

Proposition 4.5.2. *If the public does not stop the contract, the optimal rent R^* and the optimal effort A^* are deterministic controls and are given by*

$$R_t^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}) \text{ and } A_t^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}).$$

with the optimal multiplier λ_{Lag} is solution of the equation

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) \right) ds = \underline{x}.$$

The function $H(t) := \varphi(A_t^*) - R_t^*$ is increasing, and we have the following cases :

1. *If $H(0) > 0$, it is optimal for the public to never end the contact.*
2. *Otherwise :*
   (a) *If $\int_0^{\infty} e^{-\delta s} H(s) ds > 0$, it is not optimal for the public to end the contract ($\tau^* = \infty$ is optimal).*
   (b) *If $\int_0^{\infty} e^{-\delta s} H(s) ds < 0$, the public does not offer the contract to the consortium ($\tau^* = 0$ is optimal).*

•

The monotonicity of the controls with respect to x

We consider the following application :

$$G : \lambda_{Lag} \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(U \left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) - h \left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) \right) ds.$$

Since $\lambda > \delta$ and $\lambda_{Lag} > 0$, we have $\lambda_{Lag} \mapsto \frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s}$ is decreasing. The decrease of U' yields the function $\lambda_{Lag} \mapsto (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s})$ is increasing. U is increasing, so we have $\lambda_{Lag} \mapsto U \left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s}) \right)$ is increasing. The concavity of the function φ and the convexity of the function h yield the function $\lambda_{Lag} \to (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$ is decreasing. The function h is increasing, so we have $\lambda_{Lag} \to h \left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}) \right)$ is decreasing. Therefore, G is increasing with respect to λ_{Lag}.

Proposition 4.5.3. *The optimal rent is increasing and the optimal effort is decreasing with respect to x.*

Proof

A^* and R^* depends on x through λ_{Lag}, therefore x impacts $H_t(x) = \varphi(A_t^*(x)) - R_t^*(x)$.
For a fixed t, we have $x \to \frac{1}{\lambda_{Lag(x)}} e^{(\lambda-\delta)t}$ is decreasing, and by the concavity of U and the decrease of U' yields the function $x \to (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag(x)}} e^{(\lambda-\delta)t})$ is increasing. Therefore, the rent is increasing with respect to x. The concavity of the function φ and the convexity of the function h yield the function $x \to (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag(x)}} e^{(\lambda-\delta)t})$ is decreasing. Therefore the optimal effort is decreasing with respect to x. Therefore the function H is decreasing with respect to x.

•

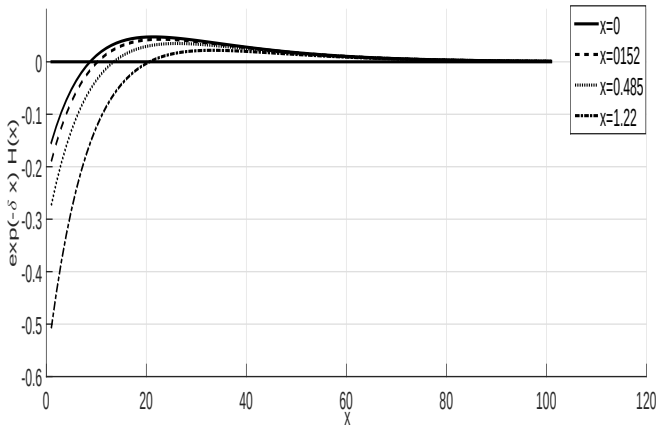


FIGURE 4.2 – $t \mapsto \exp(-\delta t)H(t)$ for different x.

4.5.1 Numerical results

We recall that on the set $\{\tau^* \neq 0\}$ the optimal rent is given by $R_t^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)t})$ and the optimal effort is given by $A_t^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)t})$ with λ_{Lag} is solution of the equation

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right)\right)ds = \underline{x}. \tag{4.5.6}$$

We performed numerical tests with the parameters given in Table 1

TABLE 4.1 – *Values of the model's parameters*

δ	λ	$U(x)$	$\varphi(x)$	$h(x)$	α	β
0.065	0.08	$\frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}$	$1-\exp(-\alpha x)$	$\exp(\beta x)-1$	0.035	0.017

To determine the continuation region, first we search λ_{Lag} solution of (4.5.6). Second, we compute $H(0) = \varphi(A_0) - R_0$, if $H(0) \leq 0$ we compute $\int_0^\infty e^{-\delta s}H(s)ds$. Third we search x such that $\int_0^\infty e^{-\delta s}H(s)ds \leq 0$. We find that the continuation region is equal to $[0, 0.64]$ (see Figure 4.7).
The following figure represents the variation of the Lagrange multiplier as a function of x.

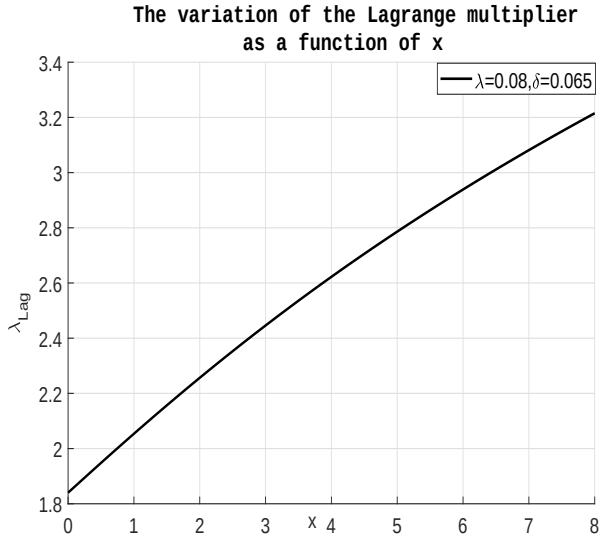


FIGURE 4.3 – The variation of the Lagrange multiplier as a function of x.

The following figure represent the value function for the public. The continuation region is equal to $[0, 0.64]$.

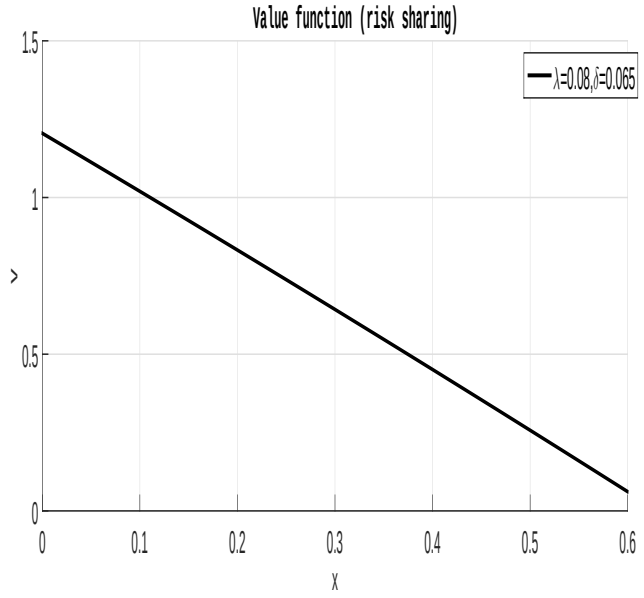


FIGURE 4.4 – Value Function (risk sharing).

The following figures represent the optimal rent function of the effort, the optimal effort, the optimal rent for $t = 0$. The optimal effort is decreasing in x and the optimal rent is increasing in x.

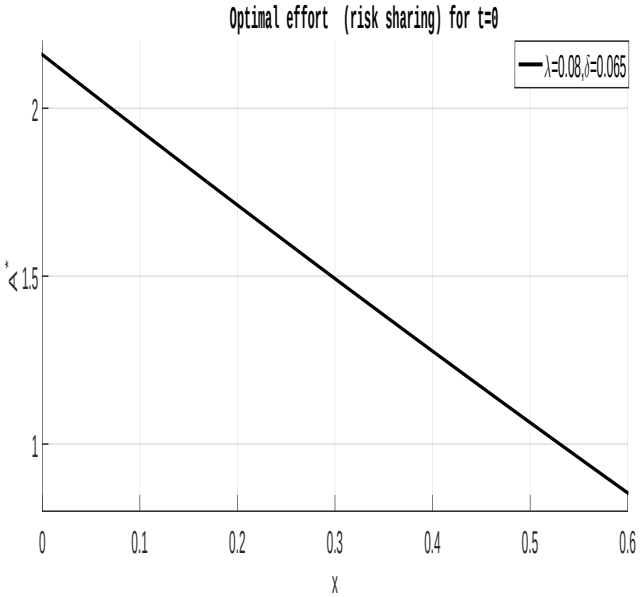


FIGURE 4.5 – Optimal effort (risk sharing).

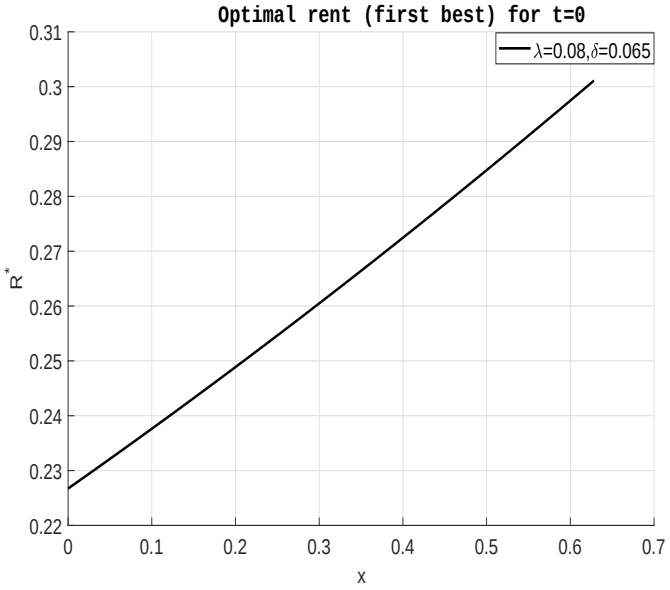


FIGURE 4.6 – Optimal rent(risk sharing).

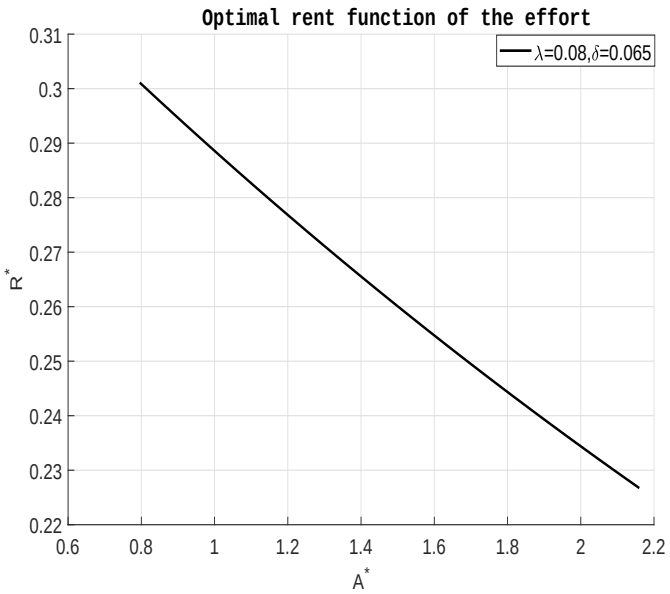


FIGURE 4.7 – Optimal rent function of the effort

4.5.2 Comparison between the value function in the first and in the second best

The following graph represents the value function of the public in the first best and in the second best : the difference represents the "value of information". The value function for the public in the first best is greater than the value function for the public in the second best. In the first best, the continuation region is equal to $[0, 0.64]$. In the second best, the continuation region is equal to $[0, 2.88]$. The value function in first best case is equal to zero in the stopping region ($\tau = 0$ is optimal), but in second best case the value function is equal to $-x$ in the stopping region.

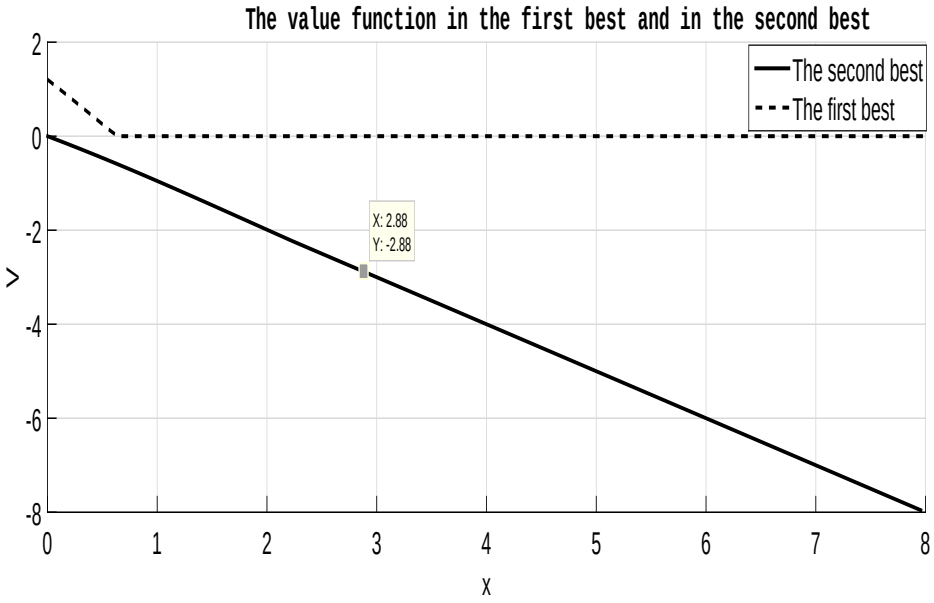


FIGURE 4.8 – Value Function in the first best and in the second best.

Chapitre 5

Étude théorique et numérique de l'existence et de la régularité de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

> For every transaction, there is someone willing to buy and someone willing to sell at an agreed price, both believing that it's good value and that the counter– party is a little crazy.
>
> Coree T. Sol

Sommaire

5.1 Introduction 95
5.2 Formulation du problème 96
5.3 Une première méthode : existence de la solution de l'équation de HJB 97
5.3.1 Croissance linéaire de la fonction valeur v 98
5.3.2 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ borné . . 99
5.3.3 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ non borné 110
5.3.4 Identification de la fonction valeur avec la solution de l'équation de HJB 111
5.4 Deuxième méthode : existence de la solution de l'équation de HJB 115
5.5 Résolution numérique de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman . . 120
5.5.1 Discrétisation 121

5.5.2 Forme matricielle 123
5.5.3 Consistance et stabilité de la méthode d'approximation 124
5.5.4 Principe du Maximum discret 124
5.5.5 Itération sur les politiques ou algorithme de Howard 127
5.6 Résolution numérique de l'inéquation variationnelle 129
5.6.1 Forme matricielle 129
5.6.2 Itération sur les politiques 130
5.7 Application 130
5.7.1 Méthode des différences finies 131
5.7.2 Résultats numériques 132
5.8 Appendice 136

5.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre on étudie l'existence d'une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) à croissance linéaire et deux fois différentiable. Ce chapitre fournit deux méthodes pour prouver la régularité de la fonction valeur, basées sur des conditions simples et faciles à vérifier.

Ce type de problème a été etudié par plusieurs chercheurs notamment, Krylov (1980) [44] considère un espace d'état borné et un espace de contrôle convexe. Gilbarg et Trudinger (2001) [32] supposent que les coefficients de diffusion sont continus au sens de Hölder. Fleming et Soner (1993, p.161) [31] considèrent un domaine du contrôle borné et des coefficients bornés avec des dérivées continues par rapport à la variable de l'état.

La première méthode démontre que la fonction valeur d'un problème du contrôle optimal est deux fois différentiable. Elle suit les techniques de papier de Strulovici et Szydlowski [59] dont le résultat principal indique que, dans des conditions de continuité et de linéarité, la fonction valeur d'un problème de contrôle optimal est deux fois différentiable et résout l'équation de HJB correspondant à ce problème. Le théorème s'applique également aux espaces d'états bornés et non bornés, et exige seulement que le contrôle soit à valeurs dans un ensemble compact, en particulier l'espace de contrôle n'a pas besoin d'être convexe. Ce chapitre détaille les preuves de Strulovici et Szydlowski [59].

Sous les mêmes hypothèses que celles de la première méthode, une deuxième méthode utilise les résultats de Fleming [30] sur les équations aux dérivées partielles, le principe du maximum et les résultats de Ladyzhenskaya [45] sur les équations elliptiques dans un domaine borné, pour montrer l'existence de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) seulement dans un domaine borné. Dans cette méthode, on se concentre uniquement sur l'équation de HJB. On prouve que l'équation de HJB a une solution deux fois différentiable à croissance linéaire. Cette méthode donne un algorithme qui permet d'approcher la solution de l'équation de HJB.

La deuxième partie (section 5.4) de ce chapitre est consacrée à la résolution numérique de l'équation de Hamilton Jacobi Bellman et de l'inéquation variationnelle en horizon infini via l'algorithme d'Howard : il s'agit de discrétiser l'équation et l'inéquation associée en utilisant les méthodes de différences finies et de trouver une approximation de la solution d'une EDP aux noeuds d'une grille. Nous donnons des conditions qui assurent que le problème discret admet une unique solution et que cette solution converge vers la solution du problème continu aux points du maillage si le pas de discrétisation tend vers zero. Dans ce chapitre, on détaille les résultats de Lapeyre et al. [46] pour la résolution numérique d'une équation Hamilton

Jacobi-Bellman et de l'inéquation variationnelle.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 5.2 présente le problème général de contrôle optimal en donnant des hypothèses suffisantes pour l'existence de la solution de l'équation de HJB. La section 5.3 présente la première méthode en détaillant les preuves de Strulovici et Szydlowski [59]. La section 5.4 fournit la seconde méthode pour montrer l'existence de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, ce qui conclut la partie théorique.
Les sections 5.5, 5.6 et 5.7 constituent la partie numérique. La section 5.5 présente la résolution de l'équation HJB. La section 5.6 présente un cadre général de la résolution de l'inéquation variationnelle HJB. Dans la section 5.7, on résout numériquement l'inéquation variationnelle HJB que l'on a trouvé dans le chapitre 3. Par souci de complétude, un appendice rappelle les théorèmes classiques utilisés dans les sections 5.3 et 5.4.

5.2 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini un mouvement brownien W. On considère le processus $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, contrôlé par le processus (A_t) qui est $\mathbb{F}$-adapté, et l'équation différentielle stochastique donnée par

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t, A_t)dt + \sigma(X_t, A_t)dW_t \\ X_0 &= x\in \chi = [\underline{x}, \overline{x}] \text{ ou } \chi = \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Definition 5.2.1. *Un contrôle est dit admissible s'il est adapté à la filtration $\mathbb{F}$ et s'il existe un compact non vide κ de $\mathbb{R}$ tel que $A_t \in \kappa$ $dt\otimes d\mathbb{P}$.a,e. et tel que l'EDS (5.2.1) a une unique solution forte.*
L'ensemble des contrôles admissibles est noté par $\mathcal{A}$.

L'objectif est de maximiser sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des contrôles admissibles une fonctionnelle $J(x,.)$ définie par

$$J(x, A) = \mathbb{E}_x[\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f(X_t, A_t)dt]$$

avec X_t solution de l'EDS (5.2.1) ayant pour valeur initiale $X_0 = x$ et pour contrôle A ; la fonction f est positive, fonction de gain, et δ est un coefficient d'actualisation. On définit alors la fonction valeur

$$v(x) = \sup_{A\in\mathcal{A}} J(x, A),\ x \in \chi. \tag{5.2.2}$$

Les hypothèses suivantes sont essentiellement des hypothèses de Lipschitz en x et à croissance au plus linéaire sur les coefficients de l'EDS (5.2.1) et sur la fonction de gain.

Hypothèse 5.2.2. *Pour tout x, x' dans χ, pour tout $a \in \kappa$ on a*

$$|\mu(x,a) - \mu(x',a)| + |\sigma(x,a) - \sigma(x',a)| + |f(x,a) - f(x',a)| \leq K|x - x'|,$$

et les fonctions $a \to \mu(x,a), \sigma(x,a), f(x,a)$ sont continues pour tout $x \in \chi$.

Hypothèse 5.2.3. *Il existe K_1^μ, K_2^μ, K^σ, K^f, et $\underline{\sigma}$ tel que $K_2^\mu < \delta$ et $0 < \underline{\sigma} \leq |\sigma(x,a)|$, $|\mu(x,a)| \leq K_1^\mu + K_2^\mu|x|$, $|\sigma(x,a)| \leq K^\sigma(1+|x|)$, et $|f(x,a)| \leq K^f(1+|x|)$ pour tout $(x,a) \in \chi \times \kappa$*

Notre objectif est de prouver que la fonction valeur v est deux fois différentiable dans l'intérieur de χ et qu'elle est solution de l'équation de HJB :

$$0 = \sup_{a \in \kappa}[-\delta w(x) + f(x,a) + \mu(x,a)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)w"(x)] \tag{5.2.3}$$

avec les conditions au bord $w(\underline{x}) = \underline{w}$ et $w(\overline{x}) = \overline{w}$.

5.3 Une première méthode : existence de la solution de l'équation de HJB

On détaille dans cette section la preuve du théorème suivant.

Théorème 5.3.1. *(Strulovici-Szydlowski, théorème 1 [59]) Sous les hypothèses 5.2.2-5.2.3, on a :*

1. *La fonction valeur est finie à croissance linéaire : $|v(x)| \leqslant K_v(1+|x|)$ pour une certaine constante positive K_v.*
2. *L'équation de HJB (5.2.3) a une solution deux fois différentiable à croissance linéaire.*
3. *Toute solution de l'équation de HJB (5.2.3) à croissance linéaire est égale à la fonction valeur. En particulier, la fonction valeur est deux fois différentiable et c'est l'unique solution à croissance linéaire de l'équation de HJB (5.2.3).*

La preuve du théorème se compose des étapes suivantes :

étape 1 : Montrer que la fonction valeur v est finie à croissance linéaire.

étape 2 : Montrer l'existence d'une solution w de l'équation de HJB (5.2.3) à croissance linéaire et deux fois différentiable.

étape 3 : Montrer que toute solution w de l'équation de HJB (5.2.3) est égale à la fonction de valeur v du problème.

Ces étapes impliquent qu'une solution de l'équation de HJB (5.2.3) à croissance linéaire coïncide avec la fonction valeur du problème et par conséquent montre l'unicité, item 3 du théorème 5.3.1.

5.3.1 Croissance linéaire de la fonction valeur v

On a besoin d'un lemme intermédiaire pour montrer l'item 1 du théorème 5.3.1.

Lemme 5.3.2. *(Strulovici-Szydlowski [59])*
Pour tout contrôle admissible A, pour X_t solution de l'EDS (5.2.1), $\delta > K_2^\mu$, ,f à croissance linéaire et sous les hypothèses 5.2.2-5.2.3 on a

1. $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}|X_t|e^{-\delta t}=0$ *et*
2. $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t}|f(X_t, A_t)|dt] < +\infty$

Preuve
1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = |x|$ pour $|x| \geq 1$ et $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$ pour $|x| < 1$, φ est de classe C^1, et classe C^2 sauf en -1 et 1 et on a les encadrements suivants $|\varphi'(x)| \leq 1$, $|x| \leq \varphi(x) \leq |x| + 1$ et $|\varphi"(x)| \leq 1$ pour $x \leq 1$ et $|\varphi"(x)| = 0$ si $|x| > 1$.
On applique la formule d'Itô, pour tout contrôle admissible (A_t) :

$$\varphi(X_t) = \varphi(x) + \int_0^t [\mu(X_s, A_s)\varphi'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s, A_s)\varphi"(X_s)]ds + \int_0^t \sigma(X_s, A_s)\varphi'(X_s)dW_s.$$

Puisque $|\sigma(x, A)| \leq K^\sigma(1 + |x|)$, $|\varphi'(x)| \leq 1$, $|x| \leq \varphi(x)$, φ' et φ" sont bornées, on a

$$|\mu(X_s, A_s)\varphi'(A_s)| \leq |\mu(X_s, A_s)| \leq K_1 + K_2|X_s| \leq K_1 + K_2\varphi(X_s).$$

On prend l'espérance, on définit $\Phi_t(x) = \mathbb{E}_x(\varphi(X_t))$, on a

$$(*)\ \Phi_t(x) \leq \varphi(x) + \int_0^t \left((K_1^\mu + K_2^\mu\Phi_s(x)) + \frac{1}{2}\tilde{K}\right) ds$$

où $\tilde{K} = \max_{(x,a)\in[-1,1]\times\kappa} \sigma^2(x, a)$, x entre 1 et -1 car $|\varphi"(x)| = 0$ si $|x| > 1$.
On note $\Psi_t(x) = \Phi_t(x) + \frac{C}{K_2^\mu} \geq \Phi_t(x)$ car $\frac{C}{K_2^\mu} \geq 0$ avec $C = K_1^\mu + \frac{\tilde{K}}{2}$.
L'inégalité $(*)$ implique

$$\Psi_t(x) \leq (\varphi(x) + \frac{C}{K_2^\mu}) + \int_0^t K_2^\mu\Psi_s(x)ds$$

et le lemme de Gronwall implique que

$$\Phi_t(x) \leq \Psi_t(x) \leq (\varphi(x) + \frac{C}{K_2^\mu}) \exp(K_2^\mu t), \tag{5.3.1}$$

et donc

$$E_x|X_t| \leq \Phi_t(x) \leq \Psi_t(x) \leq (\varphi(x) + \frac{C}{K_2^\mu}) \exp(K_2^\mu t).$$

En particulier il vient $\mathbb{E}(|X_t|e^{-\delta t}) \longrightarrow_{t \longrightarrow +\infty} 0$ puisque $K_2^\mu < \delta$.

2. C'est une simple conséquence du point 1 et du fait que f est à croissance linéaire uniformément en a.

$$E_x|f(X_t, A_t)| \leq K^f(1 + E_x|X_t|) \leq K^f[1 + (\varphi(x) + \frac{C}{K_2^\mu}) \exp(K_2^\mu t)].$$

On conclut en utilisant $\delta > K_2^\mu$.

•

Ce lemme combiné avec les conditions de croissance linéaire de f et le fait que $K_2^\mu < \delta$ implique immédiatement que v est finie et à croissance linéaire. En effet, la fonction f satisfait la condition de croissance linéaire : il existe une constante K^f telle que $|f(X_t, A_t)| \leq K^f(1 + |X_t|$, pour tout contrôle admissible A, soit

$$\mathbb{E}_x|X_t| \leq (1 + |x| + \frac{c}{K_2^\mu}) \exp(K_2^\mu t) \leq cte(1 + |x|) \exp(K_2^\mu t), \ \forall A$$

Ce qui implique : il existe une constante K telle que pour tout A

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\int_0^\infty e^{-\delta t}|f(X_t, A_t)|dt] &\leq K^f \int_0^\infty e^{-\delta t}(1 + \mathbb{E}_x|X_t|)dt \\ &\leq K \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{K_2^\mu t} dt < \infty \end{aligned}$$

Remarque 5.3.3. *Si $K_2^\mu = \delta$, on suppose alors que f est bornée et on a immédiatement $\forall A$, $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t}|f(X_t, A_t)|dt] \leq \frac{1}{\delta}\|f\|$.*

Ceci achève la preuve de l'étape 1 du théorème 5.3.1.

5.3.2 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ borné

Nous montrons ici l'existence d'une solution de classe C^2 à croissance linéaire de l'équation de HJB (5.2.3). Cette proposition est exactement l'item 2 du théorème 5.3.1.

Proposition 5.3.4. *(Strulovici-Szydlowski [59])*
Sous les hypothèses 5.2.2 -5.2.3, l'équation (5.2.3) a une solution deux fois différentiable dans $\chi = [\underline{x}, \overline{x}]$ à croissance linéaire. •

Ce résultat découle de la proposition 5.3.9 ci-dessous, qui repose sur les conditions suivantes pour une fonction arbitraire $\overline{H}(x, p, q)$ définie sur $\chi \times \mathbb{R}^2$.

Condition 5.3.5. *Il existe des constantes $M > 0$ et $K > 0$ tel que $\forall (x,p,q) \in \chi \times \mathbb{R}^2$*
i) $|\overline{H}(x,p,q)| \leq M(1+|p|+|q|)$,
ii) $|\overline{H}(x,p,q) - \overline{H}(x,\tilde{p},\tilde{q})| \leq K(|p-\tilde{p}|+|q-\tilde{q}|)$,
iii) $\overline{H}$ *est continue sur* χ *pour tout* (p,q).

Remarque 5.3.6. *ii) et iii) impliquent i) lorsque* χ *est borné.*

Condition 5.3.7. *Pour tout* $(x,q) \in \chi \times \mathbb{R}$, $p \to \overline{H}(x,p,q)$ *est décroissante.*

Condition 5.3.8. *Pour tout* $\overline{K} > 0$, *il existe* K_1,$K_2 > \overline{K}$ *tel que pour tout* $x \in \chi$, *et* $\epsilon \in \{-1,1\}$,

$$\overline{H}(x, K_1 + K_2|x|, \epsilon K_2) < 0 \text{ et } \overline{H}(x, -K_1 - K_2|x|, \epsilon K_2) > 0$$

Proposition 5.3.9. *(Strulovici-Szydlowski [59])*
Supposons que $\overline{H}$ *satisfait les conditions 5.3.5, 5.3.7, 5.3.8, alors pour* $\underline{v}$ *et* $\overline{v} \in \mathbb{R}$, *il existe une solution deux fois différentiable de l'équation*

$$w"(x) + \overline{H}(x,w,w') = 0 \ ; \ w(\underline{x}) = \underline{v}, \ w(\overline{x}) = \overline{v}. \tag{5.3.2}$$

En outre, il existe une constante positive K_v *tel que :*

$$|w(x)| \leq K_v(1+|x|) \text{ pour tout } x \in \chi, \tag{5.3.3}$$

c'est-à-dire que w *est à croissance linéaire.*

Le problème (5.3.2) est un problème "Boundary Value Problem"(BVP) défini par :

$$\begin{cases} y" = & f(x,y,y') \\ y(a) = & \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (BVP)$$

Nous approchons une solution du problème (5.3.2), en utilisant une suite de solutions de problèmes de valeur initiale impliquant un paramètre t qui représente la pente à l'origine. Ces problèmes ont la forme

$$\begin{cases} y" = & f(x,y,y') \\ y(a) = & \alpha, y'(a) = t \end{cases} \quad (IVP)$$

Nous allons choisir des paramètres $t = t_k$ de telle sorte que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} y(b,t_k) = y(b) = \beta$$

où $y(.,t_k)$ est solution de (IVP) avec $t = t_k$ et y est solution de (BVP).
Cette technique est appelée "méthode de tir" (cf. Figure 5.1).

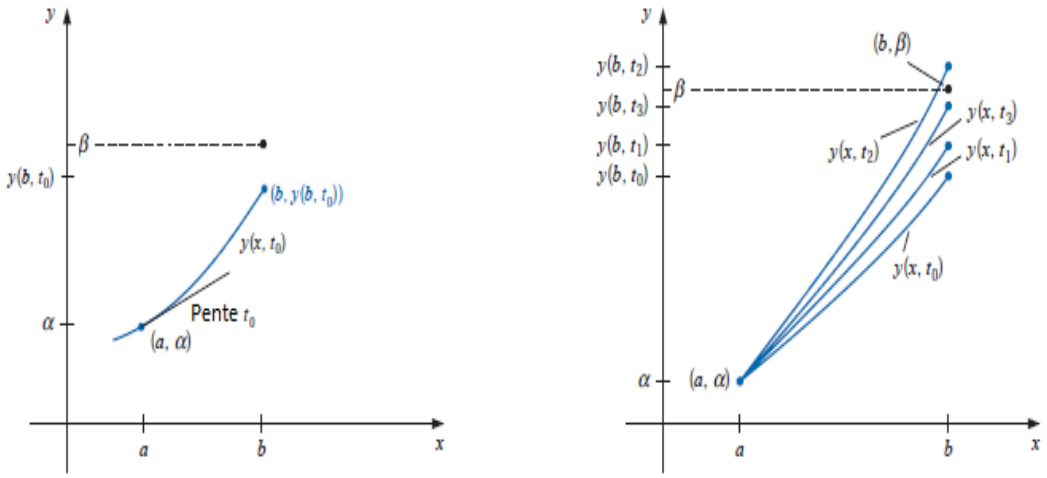


FIGURE 5.1 – Méthode de tir
Burden et Faires [12]

Nous commençons par deux résultats relatifs à l'existence de solutions de (IVP) et leur continuité par rapport à la condition initiale.
Soit la fonction $(p,q) \to (q, -H(x,p,q))$ où $x \in \chi$ et H vérifie la condition 5.3.5.

Lemme 5.3.10. *(Hartman [34])*

- *Si la fonction H satisfait la condition 5.3.5, l'équation différentielle ordinaire, pour tout $x_0 \in \chi$ et $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$*

$$(p'(x), q'(x)) = (q(x), -H(x, p(x), q(x)) \ x \in \chi \tag{5.3.4}$$

  de condition initiale (p_0, q_0) a une unique solution différentiable dans χ.
  On note $p(., p_0, q_0)$ la solution de (5.3.4) de condition initiale (p_0, q_0).
- *De plus la solution de (5.3.4) $p(., p_0, q_0)$ est uniformément continue en (p_0, q_0).*

Preuve (i) Soit (p_0, q_0). On définit par récurrence $\forall x \in \chi$

$$\begin{cases} q_{n+1}(x) & = q_0 - \int_{x_0}^{x} H(s, p_n(s), q_n(s))ds, \\ p_{n+1}(x) & = p_0 + \int_{x_0}^{x} q_n(s)ds. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Soit $\alpha > 0$; ces fonctions $p_n, q_n,\ n \geq 0$, sont continues par définition sur $[x_0, x_0 + \alpha]$. On montre par récurrence la propriété :

$$(P_n)\ |p_{n+1}(x) - p_n(x)| + |q_{n+1}(x) - q_n(x)| \leq (M+1)(1 + |p_0| + |q_0|)\frac{(K+1)^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où K est la constante de Lipschitz de H.

Pour $n = 0$, (P_0) est vraie en effet :

On a $|p_1(x) - p_0| = (x - x_0)|q_0|$ et $|q_1(x) - q_0| \leq M(x - x_0)(1 + |p_0| + |q_0|)$. Alors

$$\begin{aligned} |p_1(x) - p_0| + |q_1(x) - q_0| &\leq (x - x_0)|q_0| + M(x - x_0)(1 + |p_0| + |q_0|) \\ &\leq (M + 1)|q_0|(x - x_0) + M(1 + |p_0|)(x - x_0) \\ &\leq (M + 1)(1 + |p_0| + |q_0|)(x - x_0). \end{aligned}$$

Supposons vraies les propriétés $(P_0), ..., (P_{n-1})$, c'est-à-dire

$$|p_n(x) - p_{n-1}(x)| + |q_n(x) - q_{n-1}(x)| \leq (M + 1)(1 + |p_0| + |q_0|)\frac{(K + 1)^{n-1}(x - x_0)^n}{n!}.$$

On déduit de la condition 5.3.5 ii) :

$$\begin{aligned} |p_{n+1}(x) - p_n(x)| + |q_{n+1}(x) - q_n(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |q_n(s) - q_{n-1}(s)|ds \\ &+ \int_{x_0}^{x} |H(s, p_{n-1}(s), q_{n-1}(s)) - H(s, p_n(s), q_n(s))|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |q_n(s) - q_{n-1}(s)|ds \\ &+ K\int_{x_0}^{x} (|p_n(s) - p_{n-1}(s)| + |q_n(s) - q_{n-1}(s)|)ds \\ &= (K + 1)\int_{x_0}^{x} |q_n(s) - q_{n-1}(s)|ds \\ &+ K\int_{x_0}^{x} |p_n(s) - p_{n-1}(s)|ds \\ &\leq (K + 1)\int_{x_0}^{x} (|p_n(s) - p_{n-1}(s)| + |q_n(s) - q_{n-1}(s)|)ds \\ &\leq (K + 1)\int_{x_0}^{x} (M + 1)(1 + |p_0| + |q_0|)(K + 1)^{n-1}\frac{(s - x_0)^n}{n!} \\ &= (K + 1)^n(M + 1)(1 + |p_0| + |q_0|)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

c'est-à-dire (P_n).

En vertu de (P_n), il découle que les séries :

$$p_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[p_{n+1}(x) - p_n(x)] \text{ et } q_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[q_{n+1}(x) - q_n(x)]$$

sont uniformément convergentes dans $[x_0, x_0 + \alpha]$ et donc définit la limite

$$\begin{cases} p(x) : &= \lim_{n\to\infty} p_n(x), \\ q(x) : &= \lim_{n\to\infty} q_n(x). \end{cases} \tag{5.3.6}$$

Puisque $H(x,.)$ est Lipschitz, $|H(x,p_n(x),q_n(x)) - H(x,p(x),q(x))| \leq K(|p_n(x)-p(x)| + |q_n(x)-q(x)|)$ converge uniformément vers zéro dans $[x_0, x_0+\alpha]$. Par suite en passant à la limite dans (5.3.5) et en utilisant la condition 5.3.5 iii) (continuité de H), on montre que (5.3.6) est solution de (5.3.4).

(ii) On prouve maintenant l'unicité : soit $z=(r,t)$ une autre solution solution de (5.3.4) de condition initiale (p_0,q_0).

$$\begin{cases} t(x) &= q_0 - \int_{x_0}^{x} H(s,r(s),t(s))ds \\ r(x) &= p_0 + \int_{x_0}^{x} t(s)ds. \end{cases}$$

On montre par récurrence la propriété :

$$(Q_n)\ |r(x)-p_n(x)| + |t(x)-q_n(x)| \leq \frac{(K+1)^n(x-x_0)^n}{n!}(M+1)\int_{x_0}^{x}(1+|r(s)|+|t(s)|)ds. \tag{5.3.7}$$

Pour $n=0$, (Q_0) est vraie en effet :

$$\begin{aligned} |r(x)-p_0| + |t(x)-q_0| &\leq \int_{x_0}^{x}|t(s)|ds + \int_{x_0}^{x}|H(s,r(s),t(s))|ds \\ &\leq (M+1)\int_{x_0}^{x}(1+|r(s)|+|t(s)|)ds. \end{aligned}$$

Supposons vraies les propriétés $(Q_0),...,(Q_n)$, c'est-à-dire

$$|r(x)-p_n(x)| + |t(x)-q_n(x)| \leq \frac{(K+1)^n(x-x_0)^n}{n!}(M+1)\int_{x_0}^{x}(1+|r(s)|+|t(s)|)ds.$$

On déduit de la condition 5.3.5 ii)

$$\begin{aligned} |r(x)-p_{n+1}(x)| + |t(x)-q_{n+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x}|t(s)-q_n(s)|ds + \int_{x_0}^{x}|H(s,r(s),t(s)) - H(s,p_n(s),q_n(s))|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x}|t(s)-q_n(s)|ds + K\int_{x_0}^{x}(|r(s)-p_n(s)| + |t(s)-q_n(s)|)ds \\ &\leq (K+1)\int_{x_0}^{x}(|r(s)-p_n(s)| + |t(s)-q_n(s)|)ds \\ &\leq (K+1)\int_{x_0}^{x}(K+1)^n(M+1)\frac{(s-x_0)^n}{n!}ds\int_{x_0}^{x}(1+|r(s)|+|t(s)|)ds \\ &= (K+1)^{n+1}(M+1)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(1+|r(s)|+|t(s)|)ds \end{aligned}$$

c'est- à-dire (Q_{n+1}).

Si $n\to\infty$ dans (5.3.7), alors $r(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$ et $t(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x)$.

iii) La preuve de l'item 2 du lemme 5.3.10 est une conséquence du théorème 2.1, p.94 Hartman [34]. •

Proposition 5.3.11. *On suppose que H satisfait la condition 5.3.5, alors l'(IVP)*

$$w"(x) + H(x, w, w') = 0 \ ; \ w(\underline{x}) = \underline{v}, w'(\underline{x}) = s \tag{5.3.8}$$

admet une unique solution deux fois différentiable. On note $w_{\underline{v},s}$ cette solution.

Preuve : C'est une conséquence du lemme 5.3.10 appliqué à la fonction $-H$ qui vérifie la condition 5.3.5 avec les conditions au bord $x_0 = \underline{x}$, $p_0 = \underline{v}$, $q_0 = s$. Ce lemme garantit que (5.3.8) a une unique solution deux fois différentiable et la solution est uniformément continue en x pour la condition initiale $(\underline{v}, s)$. •

Les deux lemmes qui suivent sont les derniers outils utiles à la preuve de la proposition 5.3.9. L'idée de cette preuve est que, à partir d'une suite de solutions du problème (IVP), on peut résoudre le problème (BVP) associé aux conditions de bord $v(\underline{x}) = \underline{v}$; $v(\overline{x}) = \overline{v}$.

Lemme 5.3.12. *(Strulovici-Szydlowski [59])*
On note par $sig(x)$ le signe de x. Soit H satisfaisant la condition 5.3.8 : il existe K_1, K_2 constantes assez grandes pour que $b_1(x) = -K_1 - K_2|x|$ et $b_2(x) = K_1 + K_2|x|$ satisfassent les inégalités

$$b_1''(x) + H(x, b_1, b_1') > 0 \ ; \ b_2''(x) + H(x, b_2, b_2') \ < 0, \ \forall x \neq 0$$

et pour que les contraintes $\underline{v} \in (b_1(\underline{x}), b_2(\underline{x}))$ et $\overline{v} \in (b_1(\overline{x}), b_2(\overline{x}))$ soient satisfaites.

Preuve H satisfaisant la condition 5.3.8, avec K_1 et K_2 assez grands,
$b_2''(x) + H(x, b_2(x), b_2'(x)) = H(x, b_2(x), sig(x)K_2)$ est strictement négative
et $b_1''(x) + H(x, b_1(x), b_1'(x)) = H(x, b_1(x), sig(-x)K_1)$ est strictement positive.
Puis on peut choisir K_1 et K_2 plus grands (si nécessaire) pour avoir également

$$b_1(\overline{x}) \leq \overline{v} \leq b_2(\overline{x}) \text{ et } b_1(\underline{x}) \leq \underline{v} \leq b_2(\underline{x}).$$

•

Lemme 5.3.13. *(Strulovici-Szydlowski [59])*
Soit H une fonction de Lipschitz satisfaisant la condition 5.3.7 et la condition 5.3.5 (ii). Il existe s_1 et s_2 tels que la solution de (5.3.8) vérifie $w_{\underline{v},s}(\underline{x}) < b_1(\underline{x})$ pour $s \leq s_1$ et $w_{\underline{v},s}(\overline{x}) > b_2(\overline{x})$ pour $s \geq s_2$.

Preuve

- Par translation du problème on peut supposer que $\underline{x} = \underline{v} = 0$. En effet, on pose $w_s(x) = (\underline{v} - \overline{v})\frac{u_s(x-\underline{x})}{u_s(\overline{x}-\underline{x})} + \overline{v}$. Donc $\bar{x} > 0$.
  On considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} u_s''(x) + Ku_s'(x) + H(x, u_s(x), 0) + \varepsilon = 0, \ x \geq 0 \\ u_s(0) = 0, u_s'(0) = s \end{cases}$$

  où K est la constante de Lipschitz de H et ε est une constante positive.
- On montre que $u_s'(\bar{x})$ est minorée par une fonction linéaire de s dans un domaine borné.
  On fixe $s > 0$. Soit $\tilde{x}_s = \inf\{x > 0;\ u_s'(x) = 0\}$. Dans $[0, \tilde{x}_s]$, on a $u_s(x) \geq 0$. La condition 5.3.7, montre que $H(x, u_s(x), 0) < H(x, 0, 0)$ pour $x \in [0, \tilde{x}_s]$.
  Soit $M = \max_{x\in[0,\overline{x}]} |H(x, 0, 0| + \varepsilon > 0$ et $x \in [0, \tilde{x}_s]$, alors

$$\forall x \in [0, \tilde{x}_s],\ u_s''(x) + Ku_s'(x) + M \geq 0.$$

  On applique l'inégalité de Gronwall à la fonction $x \to g(x) = -u_s'(x) - \frac{M}{K}$ qui vérifie $g'(x) = -u_s''(x) \leq M + Ku_s' = -Kg(x)$ dans $[0, \tilde{x}_s]$ et on conclut que

$$\forall x \in [0, \tilde{x}_s],\ u_s'(x) \geq [s + \frac{M}{K}] \exp(-Kx) - \frac{M}{K} \tag{5.3.9}$$

- On montre qu'il existe s assez grand pour que $u_s(\overline{x}) \geq b_2(\overline{x})$:
  L'inéquation (5.3.9) appliquée à $\tilde{x}_s$, qui vérifie par définition $u'(\tilde{x}_s) = 0$, montre

$$\tilde{x}_s \geq \frac{1}{K} \log(\frac{s + \frac{M}{K}}{\frac{M}{K}}).$$

  Par suite il existe s_2 tel que

$$\forall s \geq s_2,\ \tilde{x}_s \geq \bar{x}$$

  En intégrant (5.3.9) $u_s'(x) \geq (s + \frac{M}{K})e^{-Kx} - \frac{M}{K}$ sur $[0, \bar{x}]$ on obtient :

$$\int_0^{\bar{x}} u_s'(x)dx \geq \int_0^{\bar{x}} \left[(s + \frac{M}{K})e^{-Kx} - \frac{M}{K}\right] dx,$$

  par suite

$$u_s(\bar{x}) \geq \frac{1}{K}(s + \frac{M}{K})(1 - e^{-k\bar{x}}) - \bar{x}\frac{M}{K}. \tag{5.3.10}$$

  On fait tendre s vers l'infini : puisque $\overline{x} > 0$, il existe s assez grand tel que

$$u_s(\overline{x}) \geq K_1 + K_2\overline{x} = b_2(\overline{x}). \tag{5.3.11}$$

- On montre que $w_{0,s} \geq u_s$, où on note $w_{0,s}$ la solution de (5.3.8) de condition initiale $(0, s)$:
  La condition de Lipschitz de H implique que $\forall x, u_s, u'_s$,

$$-Ku'_s \leq H(x, u_s, 0) - H(x, u_s, u'_s)$$

soit

$$u''_s(x) + H(x, u_s(x), u'_s(x)) \leq u''_s(x) + H(x, u_s(x), 0) + Ku'_s(x) = -\varepsilon < 0, \quad (5.3.12)$$

ou encore

$$u''_s(x) \leq -H(x, u_s, u'_s) - \varepsilon, \quad \text{d'où } u''_s(0) \leq -\varepsilon - H(0, 0, s)$$

puisque $u_s(0) = 0$ et $u'_s(0) = s$.
Par ailleurs $w_{0,s}(0) = 0$, $w'_{0,s}(0) = s$ et $w''_{0,s}(0) = -H(0, 0, s)$ implique $u''_s(0) < w''_{0,s}(0)$ car $u'_s(0) = 0$ et par continuité dans un voisinage de 0 $u''_s(t) < w''(t)$ et dans ce voisinage

$$u'_s(x) = s + \int_0^x u''_s(t)dt < s + \int_0^x w''_{0,s}(t)dt = w'_{0,s}(x)$$

et donc $u'_s(x) < w'_{0,s}(x)$ au voisinage de 0.
On montre que $u'_s < w'_{0,s}$ $\forall\ x \in (0, \overline{x}]$ et donc $u_s < w_{0,s}$:
En effet on suppose par contradiction qu'il existe $x > 0$ tel que $u'_s(x) = w'_{0,s}(x)$ et soit $\tilde{x}_s = \inf\{x > 0, u'_s(x) = w'_{0,s}(x)\}$ et $\forall t \in]0, \tilde{x}_s[$, $u'_s(t) < w'_{0,s}(t)$, ce qui implique que

$$u_s(\tilde{x}_s) = u_s(0) + \int_0^{\tilde{x}} u'_s(t)dt < w_{0,s}(0) + \int_0^{\tilde{x}_s} w'_{0,s}(t)dt = w_{0,s}(\tilde{x}_s)$$

alors $u_s(\tilde{x_s}) < w_{0,s}(\tilde{x}_s)$.
En utilisant $-Ku'_s(x) \leq H(x, u_s(x), 0) - H(x, u_s(x), u'_s(x))$ et la définition de u_s, on a vu en (5.3.12) $u''_s(x) + H(x, u_s, u'_s) \leq -\varepsilon < 0$. Alors la condition 5.3.7 et le fait que $u'_s(\tilde{x}_s) = w'_{0,s}(\tilde{x}_s)$ entrainent :

$$u''_s(\tilde{x}_s) < -H(\tilde{x}_s, u_s(\tilde{x}_s), u'_s(\tilde{x}_s)) \leq -H(\tilde{x}_s, w_{0,s}(\tilde{x}_s), w'_{0,s}(\tilde{x}_s)) = w''_{0,s}(\tilde{x}_s).$$

Par définition de $\tilde{x}_s$ $\forall x < \tilde{x}_s$, $u'_s(x) < w'_{0,s}(x)$ et $u'_s(\tilde{x}_s) = w'_{0,s}(\tilde{x}_s)$ d'où

$$w''_{0,s}(\tilde{x}_s) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{w'_{0,s}(\tilde{x}_s) - w'_{0,s}(\tilde{x}_s - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{u'_s(\tilde{x}_s) - u'_s(\tilde{x}_s - \varepsilon)}{\varepsilon} = u''_s(\tilde{x}_s).$$

D'où la contradiction, et donc $u'_s(x) < w'_{0,s}(x)$ et donc

$$u_s \leq w_{0,s}. \quad (5.3.13)$$

- Enfin, puisque u_s est minoré par une fonction linéaire de s (voir l'inéquation (5.3.10)), il existe s assez grand pour que $b_2(\overline{x}) \leq u_s(\overline{x})$, et donc tel que

$$b_2(\overline{x}) \leq w_{0,s}(\overline{x}). \tag{5.3.14}$$

L'existence de s_1, tel que $w_{\underline{v},s}(\underline{x}) < b_1(\underline{x})$ pour $s \leq s_1$ se montre de façon symétrique. •

Preuve de la proposition 5.3.9

Dans la preuve du lemme 5.3.13, (5.3.13) et (5.3.14) montrent que qu'il existe s_2 assez grand pour que $w_{0,s_2}(\overline{x}) \geq u_{s_2}(\overline{x}) \geq b_2(\overline{x})$ (et de façon symétrique il existe s_1 assez petit pour que $w_{0,s_1}(\underline{x}) \leq u_{s_1}(\underline{x}) \leq b_1(\underline{x})$.
Soit $\mathcal{H} : [s_1, s_2] \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{H}(s) = w_{0,s}(\overline{x})$.
D'après le lemme 5.3.10, $\mathcal{H}$ est continue sur $[s_1, s_2]$, donc le théorème des valeurs intermédiaires montre que toutes les valeurs comprises entre $w_{0,s_1}(\overline{x})$ et $w_{0,s_2}(\overline{x})$ sont atteintes par un $s \in [s_1, s_2]$. A fortiori toute valeur, dont par exemple $\overline{v}$ (d'après le lemme 5.3.12) entre $b_1(\overline{x})$ et $b_2(\overline{x})$ est une image par $\mathcal{H}$: il existe $s \in [s_1, s_2]$ telle que $\mathcal{H}(s) = w_{0,s}(\overline{x}) = \overline{v}$ donc $w_{0,s}$ solution de (5.3.8) est égale à w_s solution de (5.3.2).

On montre que w est à croissance linéaire :
La fonction H vérifie la condition 5.3.8 avec K_1, K_2, et soit b_1 et b_2 les fonctions construites à partir de ces constantes dans le lemme 5.3.12 qui vérifient $\underline{v} \in (b_1(\underline{x}), b_2(\underline{x}))$ et $\overline{v} \in (b_1(\overline{x}), b_2(\overline{x}))$.
On fixe les points $b_1(\overline{x})$ et $b_2(\overline{x})$, et on augmente K_1 et K_2, alors $b_1(\underline{x})$ décroit et $b_2(\underline{x})$ croit en sorte que le graphe de w_s sur $[\underline{x}, \overline{x}]$ se trouve entre les deux droites graphes de b_1 et b_2, c'est-à-dire $\forall x \in [\underline{x}, \overline{x}]$, $b_1(x) \leq w_s(x) \leq b_2(x)$. Alors w_s satisfait $-K_v(1 + |x|) \leq w(x) \leq K_v(1 + |x|)$ dans $[\underline{x}, \overline{x}]$, où $K_v = K_1 \vee K_2$.
Ceci achève la preuve de la proposition 5.3.9.

Preuve de la proposition 5.3.4.

Nous appliquons la proposition 5.3.9 à l'équation (5.2.3) en vérifiant les conditions 5.3.5, 5.3.7, 5.3.8.
L'équation (5.2.3) peut s'écrire comme suit

$$w''(x) + H(x, w, w') = 0 \tag{5.3.15}$$

avec

$$H(x, p, q) = \sup_{a \in \kappa} \frac{2}{\sigma^2(x, a)}(-\delta p + f(x, a) + \mu(x, a)q) \tag{5.3.16}$$

On va montrer que H satisfait les conditions 5.3.5, 5.3.7 et 5.3.8 pour pouvoir appliquer

la proposition 5.3.9. On pose

$$h(a,x,p,q) := \frac{2}{\sigma^2(x,a)}(-p\delta + f(x,a) + \mu(x,a)q). \tag{5.3.17}$$

Condition 5.3.7 : Puisque δ et σ^2 sont positives, h est décroissante en p et par conséquent la condition 5.3.7 est également satisfaite par l'application $p \to \sup_{a\in\mathbb{R}} h(a,x,p,q)$.

Condition 5.3.5 : on montre successivement les items ii), i) et iii).
item ii) : On utilise l'inégalité suivante :

$$|H(x,p,q) - H(x,\tilde{p},\tilde{q})| \leq \max_{a\in\kappa} \frac{2}{\sigma^2(x,a)} |(-\delta p + f(x,a) + \mu(x,a)q) - (-\delta\tilde{p} + f(x,a) + \mu(x,a)\tilde{q})|$$

Cela et $\forall(x,a), |\sigma(x,a)| \geq \underline{\sigma}$ impliquent que

$$|H(x,p,q) - H(x,\tilde{p},\tilde{q})| \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^2}(\delta|p-\tilde{p}| + (K_1^\mu + K_2^\mu|x|)|q-\tilde{q}|).$$

Cela prouve la condition de Lipschitz, soit la condition 5.3.5 ii) puisque x appartient au compact $[\underline{x},\overline{x}]$.
item i) : On fait une première majoration

$$|H(x,p,q) \leq \max_{a\in\kappa} \frac{2}{\sigma^2(x,a)}(\delta|p| + K^f(1+|x|) + (K_1^\mu + K_2^\mu|x|)|q|),$$

puis utilisant que x appartient au compact $[\underline{x},\overline{x}]$ il vient :

$$|H(x,p,q) \leq \frac{2}{\underline{\sigma}^2}(\delta|p| + C_1 + C_2|q|) \leq \max(\frac{2\delta}{\underline{\sigma}^2}, \frac{2C_1}{\underline{\sigma}^2}, \frac{2C_2}{\underline{\sigma}^2})(1+|p|+|q|) \leq M(1+|p|+|q|).$$

item iii) : L'hypothèse 5.2.2 et $\forall(x,a),\ \sigma(x,a) \geq \underline{\sigma}$ montrent que $\frac{f(x,a)}{\sigma^2(x,a)}$, $\frac{p}{\sigma^2(x,a)}$ et $\frac{\mu(x,a)}{\sigma^2(x,a)}$ sont continues en a et Lipschitz en x, uniformément en a. Ceci permet de montrer que h est continue en (x,a). En effet on fixe p, q, et on suppose que (a_n,x_n) converge vers (a,x) :

$$|h(x,a,p,q) - h(x_n,a_n,p,q)| \quad\leq\quad |h(x,a,p,q) - h(x,a_n,p,q)| + |h(x,a_n,p,q) - h(x_n,a_n,p,q)|.$$

Le premier terme converge vers zéro par continuité de h en a et le second terme converge vers zéro puisque h est Lipschitz en x, uniformément en a. On applique le théorème de Berge (théorème 5.8.5 en appendice) avec :

- $X = [\underline{x},\overline{x}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $Y = F(x) = \kappa,\ \forall x \in \chi$.
- $f = h$ est continue sur $X \times Y$.
- $\mathcal{P}(Y) = \kappa$ est un compact non vide.

— $H(x,p,q) = \max_{a\in\kappa} h(a,x,p,q)$.

On peut donc appliquer le théorème de Berge et conclure que H est continue en x.

Condition 5.3.8 :

$$H(x, K_1 + K_2|x|, \varepsilon K_2) = \max_{a\in\kappa}(\frac{2}{\sigma^2(x,a)}(-\delta(K_1 + K_2|x|) + f(x,a) + \mu(x,a)\varepsilon K_2)$$

Par l'hypothèse 5.2.3, il existe K_1^μ, K_2^μ, K^σ, K^f, et $\underline{\sigma}$ tels que $K_2^\mu < \delta$ et $0 < \underline{\sigma} \leq |\sigma(x,a)|$, $|\mu(x,a)| \leq K_1^\mu + K_2^\mu|x|$, et $|f(x,a)| \leq K^f(1+|x|)$ pour tout $(x,a) \in \chi \times \kappa$;
donc $H(x, K_1 + K_2|x|, \varepsilon K_2) < 0$ dès que pour tout $x \in \chi$

$$-\delta(K_1 + K_2|x|) + K^f(1+|x|) + \varepsilon(K_1^\mu + K_2^\mu|x|)K_2 < 0,$$

ce qui est équivalent à

$$-\delta K_1 + K^f + \varepsilon K_1^\mu K_2 + |x|(-\delta K_2 + K^f + K_2^\mu \varepsilon K_2) < 0$$

Lorsque $K_2^\mu < \delta$ ou $\varepsilon = -1$, cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in X$ si et seulement si

$$K_2 \geq \frac{K^f}{\delta - \varepsilon K_2^\mu} \text{ et } K_1 > \frac{K^f + K_1^\mu K_2}{\delta},$$

soit pour K_1 et K_2 assez grands.

Lorsque $K_2^\mu = \delta$ et $\varepsilon = 1$ il vient :

$$H(x, K_1 + K_2|x|, K_2) = \max_{a\in\kappa}(\frac{2}{\sigma^2(x,a)}(-\delta(K_1 + K_2|x|) + f(x,a) + \mu(x,a)K_2) < 0$$

dès que pour tout $x \in \chi$

$$-\delta K_1 + K^f + K_1^\mu K_2 + K^f|x| \leq -\delta K_1 + K^f + K_1^\mu K_2 + K^f \sup_{x\in\chi}|x| < 0$$

ce qui est vrai pour

$$K_1 \geq \frac{K^f(1 + \sup_{x\in\chi}|x|) + K_1^\mu K_2}{\delta}.$$

Les trois conditions de la proposition 5.3.9 étant vérifiées, cela termine la preuve de la proposition 5.3.4 avec l'existence d'une solution deux fois différentiable à croissance linéaire de l'équation de HJB (5.2.3) pour des conditions au bord arbitraires, c'est-à-dire l'item 2 du théorème 5.3.1 dans le cas de χ borné.

5.3.3 Existence d'une solution régulière de l'équation HJB, cas χ non borné

On montre maintenant la proposition 5.3.4 quand χ est non borné, $\underline{x} = -\infty$ et/ou $\overline{x} = +\infty$. Précisément, on établit l'existence d'une fonction w de classe C^2 qui satisfait

$$w'' = -H(x, w, w') \tag{5.3.18}$$

et $|w(x)| \leq K_v(1 + |x|)$ $\forall x \in \chi$, avec K_v est une constante positive.
Les étapes de la preuve ci-dessous s'inspirent des idées suggérées dans l'appendice B de Strulovici et Szydlowski [59] où, de fait, la preuve n'est pas complète. Pour simplifier, on se concentre sur le cas où $\chi = \mathbb{R}$, le cas où $\underline{x}$ ou $\overline{x}$ est fini découle facilement de cet argument.

• Soit K_1 et K_2 les deux constantes qui apparaissent dans la condition 5.3.8 concernant la fonction H et soit b_1, b_2 les fonctions construites à partir de ces constantes dans le lemme 5.3.12. Dans la preuve ci-dessus de la proposition 5.3.9, on a montré que (5.3.2) a une unique solution w de classe C^2 sur tout intervalle fini $[\underline{\chi}, \overline{\chi}]$, avec $w(\underline{\chi}) = \underline{v}$ et $w(\overline{\chi}) = \overline{v}$ dont le graphe est compris entre ceux des fonctions b_1 et b_2. De plus, on sait que cette solution w satisfait $-K_v(1 + |x|) \leq w(x) \leq K_v(1 + |x|)$ dans $[\underline{\chi}, \overline{\chi}]$, avec $K_v = \max\{K_1, K_2\}$ qui ne dépend pas de l'intervalle choisi.

• On définit une suite de solutions (w_n) au problème (5.3.2) associé à l'intervalle $[\underline{x}_n, \overline{x}_n]$ et aux conditions aux bords $w(\underline{x}_n) = \underline{v}_n$ et $w(\overline{x}_n) = \overline{v}_n$, les valeurs $\underline{v}_n$, $\overline{v}_n$ appartenant respectivement aux intervalles $(b_1(\underline{x}_n), b_2(\underline{x}_n))$ et $(b_1(\overline{x}_n), b_2(\overline{x}_n))$, $\underline{x}_n$ et $\overline{x}_n$ tendant respectivement vers $-\infty$ ou $+\infty$.

• On utilise le théorème 5.8.10 (Arzelà-Ascoli) (cf. appendice) et on montre que cette procédure donne effectivement une solution. Pour cela, on montre que la famille des dérivées $\{w_n'\}$ est équicontinue, en utilisant le lemme suivant (Hartman [34], p 428) :

Lemme 5.3.14. *(Hartman [34])*
Soit Φ une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^\infty \frac{s}{\Phi(s)} ds = \infty \tag{5.3.19}$$

et soit $R, \tilde{x}$ deux constantes strictement positives. Alors il existe un nombre M tel que si $w(x)$ est de classe C^2 dans $[0, \overline{x}]$ avec $\overline{x} > \tilde{x}$ et satisfait $|w(x)| \leq R$ et $|w''(x)| \leq \Phi(|w'(x)|)$, alors $|w'(x)| \leq M$ dans $[0, \overline{x}]$. La constante M dépend seulement de R, Φ et $\tilde{x}$. •

En effet, pour tout domaine borné $\chi_0 = [\underline{\chi}, \overline{\chi}]$ et toute solution w de (5.3.2) sur ce domaine telle que $w(\underline{\chi}) \in (b_1(\underline{\chi}), b_2(\underline{\chi}))$ et $w(\overline{\chi}) \in (b_1(\overline{\chi}), b_2(\overline{\chi}))$, en utilisant (5.3.2) et la condition 5.3.5 (ii) on a

$$|w''(x)| = |H(x, w(x), w'(x)| \leq |H(x, w(x), 0)| + K|w'(x)| \leq \bar{K} + K|w'(x)| \tag{5.3.20}$$

où K est la constante de Lipschitz de H dans χ_0 et $\bar{K}$ vient du fait que $(x, w(x))$ est borné, de fait appartient à $\chi_0 \times [b_1(\underline{\chi}), b_2(\overline{\chi})]$.
La fonction $\Phi : x \to \bar{K} + Kx$ satisfait (5.3.19) et w est bornée par les fonctions b_1 et b_2. Le lemme 5.3.14 implique que la suite (w'_n) est bornée sur le compact χ_0. De plus l'inéquation (5.3.20) implique que w''_n est uniformément bornée sur χ_0.
• On utilise maintenant la procédure suivante : on considère le domaine borné $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$. On a vu que les fonctions w_n, w'_n et $w"_n$ sont bornées dans l'intervalle $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$, uniformément en n. Par le théorème 5.8.10 (Arzelà-Ascoli), il existe une sous-suite de (w_n) qui converge uniformément vers une fonction $\tilde{w}_1$ de classe C^1 dans $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$. De plus la famille $\{w''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, car w''_n satisfait $w''_n(x) = -H(x, w_n(x), w'_n(x))$ où H est continue Lipschitzienne et les familles $\{w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{w'_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont équicontinues. Ceci implique qu'il existe une sous sous-suite de w_n (notée (u_k)) qui converge uniformément vers une fonction $\tilde{w}_1$ cette fois de classe C^2 dans $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$. Cela implique également que $\tilde{w}_1$ satisfait $\tilde{w}''_1(x) = -H(x, \tilde{w}_1(x), \tilde{w}'_1(x))$. Par construction, $b_1(x) \le w_n(x) \le b_2(x)$ dans $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$, et par conséquent, $\tilde{w}_1$ est également compris entre b_1 et b_2.
• Puis, on prend le domaine borné $[\underline{x}_2, \overline{x}_2] \supset [\underline{x}_1, \overline{x}_1]$. En utilisant le dernier argument, il existe une sous-suite (u_{k_l}) de la première sous-suite pour laquelle u_{k_l} converge uniformément vers une fonction $\tilde{w}_2$ dans $[\underline{x}_2, \overline{x}_2]$. Par définition les fonctions $\tilde{w}_1$ et $\tilde{w}_2$ sont égales dans $[\underline{x}_1, \overline{x}_1]$.
• Pour conclure, en procédant de manière itérative, on peut couvrir tout le domaine χ. On définit la fonction w par $w(x) = \tilde{w}_k(x)$ pour $x \in [\underline{x}_k, \overline{x}_k] \setminus [\underline{x}_{k-1}, \overline{x}_{k-1}]$, elle résout le problème (5.3.2) et, $\forall x \in \mathbb{R}$, w est de classe C^2 au voisinage de ce point x et elle est bornée par b_1 et b_2. Elle satisfait également $|w(x)| \le K_v(1 + |x|),\ \forall x \in \mathbb{R}$. •

5.3.4 Identification de la fonction valeur avec la solution de l'équation de HJB

Dans cette sous-section, on démontre l'item 3 du théorème 5.3.1, auusi bien pour $\chi = [\underline{x}, \overline{x}]$ que pour $\chi = \mathbb{R}$.
Comme indiqué précédemment, la continuité de H en x est utilisée pour garantir que la fonction valeur est deux fois différentiable. Cette continuité de H vient d'une application du théorème de Berge 5.8.5 à la fonction objectif h (5.3.17).

La preuve de l'item 3 suit celle du théorème 3.5.3 de Pham [53] : qui montre que la solution de l'équation d'HJB coïncide avec la fonction valeur donnée par

$$v(x) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_x[\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f(X_t, A_t)dt],\ x \in \chi,$$

Théorème 5.3.15. *(Pham [53])*
Soit w une solution de l'équation de HJB (5.2.3) à croissance linéaire.
(i) Supposons que $\delta > K_2^{\mu}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \delta w(x) - \sup_{a\in\kappa}[\mathcal{L}^a w(x) + f(x,a)] \geq 0, \tag{5.3.21}$$

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} \sup e^{-\delta T}\mathbb{E}[w(X_T^x)] \geq 0. \tag{5.3.22}$$

avec $\mathcal{L}^a w(x) = \mu(x,a)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)w"(x)$.
Alors la fonction valeur v vérifie $v(x) \leq w(x)$.
(ii) Supposons de plus que pour tout $x \in \chi$, il existe une fonction mesurable $\widehat{a}(x)$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ telle que :

$$(*)\ \delta w(x) - \sup_{a\in\kappa}[\mathcal{L}^a w(x) + f(x,a)] = \delta w(x) - \mathcal{L}^{\widehat{a}(x)} w(x) - f(x,\widehat{a}(x)) = 0$$

et que l'équation différentielle stochastique, de condition initiale $X_0 = x$,

$$(**)\ dX_s = b(X_s,\widehat{a}(X_s))ds + \sigma(X_s,\widehat{a}(X_s)dW_s$$

admet une unique solution, notée $\widehat{X_\cdot^x}$, vérifiant $\widehat{a}(\widehat{X}_s^x) \in \mathcal{A}$ et

$$(***)\ \liminf_{T\to\infty} e^{-\delta T}\mathbb{E}[w(\widehat{X}_T^x] \leq 0.$$

Alors $w(x) = v(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et $\widehat{a}$ est un contrôle optimal, c'est à dire que $v(x) = J(x,\widehat{a})$.

Remarque 5.3.16. *(Pham[53] remarque 3.5.6)*
Dans le cas où l'espace des contrôles κ est réduit à un singleton a_0, le théorème de vérification est une version du théorème de représentation de Feynman-Kac. Ce théorème stipule que si w est de classe C^2, à croissance quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et solution du problème

$$\delta w(x) - \mathcal{L}^{a_0} w(x) - f(x,a_0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\lim_{T\to\infty} e^{-\beta T}\mathbb{E}[w(X_T^x)] = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

alors w admet la représentation

$$w(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} f(X_t^x, a_0)dt\right].$$

Preuve
(i) Soit $A \in \mathcal{A}$, puisque $w \in C^2$, on a par la formule de Itô appliquée au processus $t \to$

$e^{-\delta t}w(X_t)$ entre 0 et $\theta_n = T \wedge \tau_n$ où τ_n est le temps l'arrêt $\tau_n = \inf\{t : |w'(X_t^A)\sigma(X_t^A, A_t)| \geq n\}, n \in \mathbb{N}, T \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{-\delta(T\wedge\tau_n)}w(X_{T\wedge\tau_n}) &= w(x) + \int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\delta t}\Big(-\delta w(X_t) + \mu(X_t, A_t)w'(X_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, A_t)w''(X_t)\Big)dt + \int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\delta t}\sigma(X_t, A_t)w'(X_t)dW_t \end{aligned}$$

Le processus arrêté $\{\int_0^{\cdot\wedge\tau_n} e^{-\delta t}\sigma(X_t, A_t)w'(X_t)dW_t\}$ est une martingale et en prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\delta(T\wedge\tau_n)}w(X_{T\wedge\tau_n})\right] = w(x) + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\delta t}\left(-\delta w(X_t) + \mu(X_t, A_t)w'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, A_t)w''(X_t)\right)dt.$$

Puisque w satisfait (5.3.21) pour tout A de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\delta t}f(X_t^A, A_t)dt\right] \leq w(x) - \mathbb{E}\left[e^{-\delta(T\wedge\tau_n)}w(X_{T\wedge\tau_n})dt\right] \tag{5.3.23}$$

Par la condition de croissance linéaire de w et le lemme 5.3.2, $\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\delta T}w(X_T)] = 0$. On prend la limite de (5.3.23) lorsque T et n tendent vers l'infini, on a $w(x) \geq J(x, A)$ et par suite

$$v(x) := \sup_A \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}f(X_t^A, A_t)dt\right] \leq w(x).$$

(ii) Notons $\widehat{X}_s^x$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_s &= b(X_s, \widehat{a}(X_s))ds + \sigma(X_s, \widehat{a}(X_s))dW_s \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

Alors en appliquant la formule d'Itô $e^{-\delta t}w(\widehat{X}_t^x)$ entre 0 et T et en prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T}w(\widehat{X}_T^x)] = w(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta u}[-\delta w(\widehat{X}_u^x) + \mathcal{L}^{\widehat{a}(\widehat{X}_u^x)}w(\widehat{X}_u^x)]du\right]$$

Or par hypothèse sur $\widehat{a}(x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\delta w(x) - \mathcal{L}^{\widehat{a}(x)}w(x) - f(x, \widehat{a}(x)) = 0$$

d'où :

$$\mathbb{E}[e^{-\delta T}w(\widehat{X}_T^x)] = w(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta u}f(\widehat{X}_u^x, \widehat{a}(\widehat{X}_u^x)du\right]$$

En faisant tendre T vers l'infini et d'après la propriété (***) du théorème, on obtient ainsi

$$w(x) \leq J(x, \widehat{a}) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta u}f(\widehat{X}_u^x, \widehat{a}(\widehat{X}_u^x))du\right],$$

et donc $w(x) = v(x) = J(x, \widehat{a})$. •

Remarque 5.3.17. *Si $K_2^\mu = \delta$, alors on suppose que f est bornée et on a le résultat suivant. Soit w une solution bornée de l'équation de HJB (5.2.3) et f est bornée, alors on vérifie (i) et on a bien $w(x) = v(x)$.*

Application au théorème de vérification du chapitre 2 : On prend l'exemple du chapitre 2, où les hypothèses du théorème 5.3.15 sont satisfaites pour :

$$\begin{cases} \chi &= [0, \frac{1}{\delta}\left(U \circ (U')^{-1}(\frac{h'(0)}{\varphi'(0)})\right)] \\ \kappa &= \{(r,a) \in [k, \bar{r}] \times \mathbb{R}^+, h(a) \leq U(r-k)\} \\ \mathcal{L}^{(r,a)}w(x) : &= w'(x)(\delta x - U(r-k) + h(a)) + \frac{1}{2}w''(x)\left(\sigma\frac{h'}{\varphi'}(a)\right)^2 \\ f(x,A) &= -r + \varphi(a) + k \\ dX_s &= = dV_s^C = \delta V_s^C ds - (U(R_s - k) - h(A_s))ds + \sigma\frac{h'(A_s)}{\varphi'(A_s)}dW_s \\ b(x,a,r) &= \delta x - U(r-k) + h(a), \\ \sigma(x,a) &= \sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)}, \\ K_2^\mu &= \delta. \end{cases}$$

où h est une fonction convexe, U et φ sont des fonctions concaves et k est une constante positive.

Il existe $(\widehat{r}(x), \widehat{a}(x)) \in \kappa$ (d'après, théorème 2.3.6 dans le chapitre 2) tel que,

$$\delta w(x) - \sup_{(r,a)\in\mathcal{A}}[\mathcal{L}^{(r,a)}w(x) + f(x,A)] = \delta w(x) - \mathcal{L}^{(\widehat{r}(x),\widehat{a}(x))}w(x) - f(x,(\widehat{r}(x),\widehat{a}(x)))$$

et

$$dV_t^C = \delta V_t^c dt - (U(\widehat{r}(V_t^C) - k) - h(\widehat{a}(V_t^C)))dt + \sigma\frac{h'(\widehat{a}(V_t^C))}{\varphi'(\widehat{a}(V_t^C))}dW_t,\ V_0^C = x$$

admet une unique solution.

Par ailleurs, comme w est une fonction continue et J_T^C est bornée, on a

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_x[e^{-\delta T}w(J_T^C(R,A))] = 0.$$

En conclusion, $w(x) = v(x)$.

Autre exemple(cf. Pham [53]).

On considère un problème d'investissement d'une unité de production. La valeur K_t de son capital à la date t varie selon le taux d'investissement I_t en capital et le prix S_t par unité de capital :

$$dK_t = K_t\frac{dS_t}{S_t} + I_t dt$$

La dette L_t évolue selon le taux d'intérêt r, la consommation C_t et le taux de productivité P_t du capital :

$$dL_t = rL_t dt - \frac{K_t}{S_t}dP_t + (I_t + C_t)dt.$$

Le modèle d'évolution du processus (S_t, P_t) est donné par

$$\begin{cases} dS_t &= S_t\left(\mu dt + \sigma_1 dW_t^1\right) \\ dP_t &= bdt + \sigma_2 dW_t^2 \end{cases}$$

où (W^1, W^2) est un mouvement brownien de dimension 2 et $\mu,\ b,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ sont des constantes, $\sigma_1,\ \sigma_2 > 0$. La valeur nette de l'unité de production est

$$X_t = K_t - L_t$$

On note $k_t := \frac{K_t}{X_t}$ et $c_t := C_t/X_t$ les variables de contrôle et $Y_t = \log S_t$. La dynamique du système contrôlé est gouvernée par

$$\begin{cases} dX_t &= X_t[k_t(\mu - r + be^{-Y_t}) + (r - c_t)]dt + k_t X_t \sigma_1 dW_t^1 + k_t X_t e^{-Y_t}\sigma_2 dW_t^2 \\ dY_t &= (\mu - \frac{\sigma_1^2}{2})dt + \sigma_1 dW_t^1 \end{cases}$$

La fonction valeur est donnée par

$$v(x,y) = \sup_{(k,c)\in\mathcal{A}(x,y)} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(c_t X_t^{x,y})dt\right].$$

où $\mathcal{A}(x,y)$ est l'ensemble des processus de contrôle (k,c) progressifs à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et U est une fonction d'utilité puissance :

$$U(C) = \frac{C^\gamma}{\gamma},\ C \geq 0,\ \text{où } 0 < \gamma < 1,$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée est :

$$\beta w - \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial y} - rx\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \inf_{c\geq 0}\left[cx\frac{\partial w}{\partial x} - U(cx)\right]$$
$$+ \inf_{k\geq 0}\left[-k(\mu - r + be^{-y})x\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2}k^2x^2(\sigma_1^2 + e^{-2y}\sigma_2^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - kx\sigma_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = 0$$

De plus, il existe $(\widehat{k}(y), \widehat{c}(y))$ réalisant cet infimum et $\lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\beta T} w(X_T^{x,y}, Y_T^x)\right] = 0$, ce qui permet de vérifier la condition de transversalité du théorème 5.3.15. Les hypothèses du théorème 5.3.15 sont vérifiées, donc $w(x) = v(x)$.

5.4 Deuxième méthode : existence de la solution de l'équation de HJB

Dans cette section, on utilise une autre méthode pour montrer que l'équation de HJB a une solution deux fois différentiable à croissance linéaire dans un domaine borné. On utilise les

résultats de Fleming [30] pour les équations différentielles partielles, le principe du maximum et les résultats de Ladyzhenskaya et Ural'tseva [45] pour les équations elliptiques.
Comme dans le lemme 5.3.13, on peut supposer que $\underline{x} = \underline{v} = 0$. On rappelle que l'équation de HJB s'écrit sous la forme suivante :

$$\sup_{a\in\kappa}\left(-\delta w(x)+\mu(x,a)w'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)w''(x)+f(x,a)\right)=0,\ \ w(0)=w(\overline{x})=0,$$

$$\text{soit}\ \sup_{a\in\kappa}\left(-\frac{\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}w(x)+\frac{\mu(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}w'(x)+w''(x)+\frac{f(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}\right)=0.$$

L'équation de HJB peut s'écrire comme suit :

$$\sup_{a\in\kappa}\left(w''(x)+w'(x)b(x,a)+c(x,a)w(x)+g(x,a)\right)=0$$

avec

$$\begin{cases} c(x,a) &= \frac{-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)} \\ b(x,a) &= \frac{\mu(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)} \\ g(x,a) &= \frac{f(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)} \end{cases}$$

L'équation de HJB est de la forme suivante :

$$\sup_{a\in\kappa}\left(\mathcal{L}^a w(x)+g(x,a)\right)=0 \text{ dans } [0,\bar{x}]\ ;\ w(0)=w(\bar{x})=0 \tag{5.4.1}$$

avec

$$\mathcal{L}^a w(x)=w''(x)+w'(x)b(x,a)+c(x,a)w(x)$$

Proposition 5.4.1. *Sous les hypothèses 5.2.2-5.2.3, l'équation de HJB (5.4.1) a une solution deux fois différentiable à croissance linéaire.*

La preuve de l'existence de la solution de l'équation de HJB (5.4.1) se compose des cinq étapes suivantes :

- **Première étape** : On considère le système suivant :

$$v''(x)+v'(x)b(x,a)+c(x,a)v(x)+g(x,a)=0\ \forall x\in\chi\in[0,\overline{x}]$$

On note :$\mathcal{L}^a v(x)=v''(x)+v'(x)b(x,a)+c(x,a)v(x)$
On vérifie les hypothèses du théorème 5.8.3 (Section 5.8) de Gilbarg et Trudinger avec $\alpha=1$ qui donnent des conditions suffisantes pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Dirichlet :
— $\mathcal{L}^a$ est strictement elliptique et $c=\frac{-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}<0$

— $\Omega = [0, \overline{x}]$ est un domaine borné.
— $g(x,a) = \frac{f(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}$ est bornée, en effet :

$$|g(x,a)| = |\frac{f(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}| \leq \frac{f(x,a)}{\frac{1}{2}\underline{\sigma}^2} \leq \frac{K^f(1+|x|)}{\frac{1}{2}\underline{\sigma}^2} \leq M_1 \text{ car } x \in [0,\overline{x}]$$

— Les coefficients de $\mathcal{L}^a$ sont bornés, en effet :
  — $|c(x,a)| = |\frac{-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}| \leq \frac{\delta}{\frac{1}{2}\underline{\sigma}^2}$
  — $|b(x,a)| = |\frac{\mu(x,a)}{\frac{1}{2}\sigma^2(x,a)}| \leq \frac{K_1^\mu + K_2^\mu|x|}{\frac{1}{2}\underline{\sigma}^2} \leq M_2$
— Reste à montrer que g et les coefficients de $\mathcal{L}^a$ appartiennent à $C^1(\chi)$: g, b, c, sont des fonctions continues et dérivables sur $[0,\overline{x}] = \chi$ et continues sur κ dont le dénominateur $\sigma^2(x,a) \geq c > 0$. Ils sont donc bornés de classe $C^{0,1}$ sur χ.

Ainsi, le théorème 5.8.3 de Gilbarg et Trudinger [32] montre que le système suivant : $\forall a \in \kappa$

$$\mathcal{L}^a v(x) + g(x,a) = 0, \ x \in [0,\bar{x}] \ ; \ v(0) = v(\bar{x}) = 0$$

admet une unique solution notée $v^a \in C^{2,1}$, $(\alpha = 1)$ (voir définition 5.8.2).

- **Deuxième étape** : On définit une suite de fonctions $(v^1, v^2, ...)$ définies sur $[0,\bar{x}]$ et les contrôles $((a_0),(a_1),...)$ comme suit : on choisit $v_0 = 0$ et $x \mapsto a_0(x) = \arg\max g(x,a)$ définie par le théorème 5.8.6 de sélection mesurable (section 5.8). Puis v^1 est la solution de $\mathcal{L}^{a_0} v(x) + g(x,a_0) = 0$ et $a_1(x) = \arg\max_a \mathcal{L}^a v^1(x) + g(x,a)$. On suppose a_{n-1} définie et on construit v^n comme unique solution du problème suivant (étape 1) :

$$0 = \mathcal{L}^{a_{n-1}} v(x) + g(x, a_{n-1}) \text{ et } v(0) = v(\bar{x}) = 0. \tag{5.4.2}$$

Puis on définit a_n comme solution de

$$\mathcal{L}^{a_n} v^n + g(.,a_n) = \max_a [\mathcal{L}^a v^n + g^a] \tag{5.4.3}$$

qui existe par le théorème 5.8.6.

On montre que v^n est croissante. Par (5.4.2) et (5.4.3)

$$\mathcal{L}^{a_{n+1}} v^{n+1} + g^{a_{n+1}} \geq \mathcal{L}^{a_n} v^{n+1} + g(.,a_n) = 0$$

Par la définition (5.4.2) au rang $n+2$

$$\mathcal{L}^{a_{n+1}} v^{n+2} + g^{a_{n+1}} = 0.$$

Alors

$$\mathcal{L}^{a_{n+1}}v^{n+1} + g^{a_{n+1}} \geq \mathcal{L}^{a_{n+1}}v^{n+2} + g^{a_{n+1}} = 0.$$

Donc :

$$\mathcal{L}^{a_{n+1}}v^{n+1} \geq \mathcal{L}^{a_{n+1}}v^{n+2},$$

et par le principe du maximum (théorème 5.8.4), on obtient

$$\forall x \in [0, \overline{x}],\ v^{n+1}(x) \leqslant v^{n+2}(x).$$

La suite $v^1, v^2, ...$ est croissante, soit v sa limite lorsque $n \longrightarrow \infty$.

- **Troisième étape** : Il s'agit de prouver que lorsque $n \longrightarrow \infty$, v^n, $(v^n)'$ et $(v^n)''$ converge vers v, v' et v''.

  On utilise les résultats de Fleming [30] (Appendice E, page 205) : on note L^2 l'espace des fonctions de carré intégrable. Si $(v^l,\ l = 1, 2, ...)$ est une suite de fonctions tendant vers v dans L^2 et si la suite $||(v^l)'||_2$ est bornée , alors la suite $(v^l)'$ converge faiblement vers v' dans L^2 lorsque $l \longrightarrow \infty$, de même la suite $(v^l)''$ converge faiblement vers v'' dans L^2.

  (i) Convergence de $(v^n,\ n \in \mathbb{N})$ dans L^2 : on a par (5.4.2)

$$(v^n)''(x) + (v^n)'(x)b(x, a_{n-1}) + c(x, a_{n-1})v^n(x) + g(x, a_{n-1}) = 0,\ v^n(0) = v^n(\overline{x}) = 0. \tag{5.4.4}$$

  Soit x_n le point du compact χ où v^n est maximum (rappelons que $(v^0) = 0$ et v^n croissante implique que $v^n \geq 0$) : ce point ne peut être ni 0, ni $\overline{x}$ où la fonction est nulle ; donc $x_n \in (0, \overline{x})$, $(v^n)'(x_n) = 0$ et $(v^n)''(x_n) < 0$.

  Par suite

$$(v^n)''(x_n)+c(x_n, a_n)v^n(x_n)+g(a_n, x_n) = (v^n)''(x_n)-\frac{2\delta}{\sigma^2(x_n, a_n)}v^n(x_n)+\frac{2f(x_n, a_n)}{\sigma^2(x_n, a_n)} = 0.$$

  Donc on a immédiatement

$$v^n(x_n) = \frac{(v^n)''(x_n)}{\frac{2\delta}{\sigma^2(x_n,a_n)}} + \frac{f(x_n, a_n)}{\delta}.$$

  Par conséquent $\|v^n\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\delta}$. Le théorème de convergence monotone de Lebesgue montre alors que v^n converge dans $L^2(0, \overline{x})$.

  (ii) Pour montrer que $||(v^n)'||_2$ est bornée, on utilise les résultats de Ladyzhenskaya et Ural'tseva [45] (théorème de Ladyzhenskaya et Ural'tseva) pour le système d'équations elliptiques 5.8.9 (section 5.8).

  Tout d'abord on vérifie l'hypothèse 5.8.7 du théorème 5.8.9 : notre système est de la forme suivante

$$\mathcal{L}^a v(x) + g(x) = 0\ x \in [0, \bar{x}]\ ;\ v(0) = v(\bar{x}) = 0 \text{ avec}$$

— $\Omega = [0, \bar{x}]$ est borné.

— $\mathcal{L}^a$ est elliptique.

— $n = N = 1$,

— $f_i = \varphi = 0,\ f = g$.

— Dans l'étape 1, on a montré que g et tous les coefficients de L sont bornés.

On a $||g||_2^2 < \infty$, comme $||v^n(x_n)||_2 \leq M$, d'après le théorème 5.8.9, il existe c_1 et c_2 tels que

$$||(v^n)'||_2 \leq c_1||(v)^n||_2^2 + c_2||g||_2^2.$$

Donc la suite $\{(v^n)'\}$ converge faiblement vers v' dans L^2 (cf. Fleming et Rishel [31] Appendice E, p. 205), de même pour les autres dérivées partielles d'ordre ≥ 1.

- **Quatrième étape** : On montre que v est la solution de $\sup_a[L^a v + g(., a)] = 0$.

Par (5.4.3) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{a_n} v^n + g(., a_n) &\geq \mathcal{L}^a v^n + g(., a), \quad \forall a \in \kappa \\ \mathcal{L}^{a_n} v^n + g(., a^n) - \underbrace{(\mathcal{L}^{a_n} v^{n+1} + g(., a_n))}_{=0} &\geq \mathcal{L}^a v^n + g(., a) \\ \mathcal{L}^{a_n}(v^n - v^{n+1}) &\geq \mathcal{L}^a v^n + g(., a) \end{aligned}$$

Si $n \longrightarrow \infty$, le membre de droite converge faiblement vers $\mathcal{L}^a v + g(., a)$, et le membre de gauche converge faiblement vers 0 ; en effet quelque soit a :
$\mathcal{L}^a(v^n - v^{n+1}) = (v^n - v^{n+1})'' + (v^n - v^{n+1})'b(x, a) + c(x, a)(v^n - v^{n+1})$, d'après l'étape 1, g et les coefficients de $\mathcal{L}^a$ sont bornés, il vient $\mathcal{L}^{a_n}(v^n - v^{n+1})$ converge faiblement vers 0, et de même $\mathcal{L}^a v^n + g(., a)$ converge faiblement vers $\mathcal{L}^a v + g(., a)$.
Par conséquent

$$\mathcal{L}^a v + g(., a) \leqslant 0 \text{ p.s.}$$

Par le théorème 5.8.6 de sélection mesurable, il existe une fonction mesurable a^* telle que $\mathcal{L}^{a^*} v + g(., a^*) = \max_{a \in \kappa} \mathcal{L}^a v + g^a$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{a^*} v + g(., a^*) &\geqslant \mathcal{L}^{a_n} v + g(., a_n) \\ &\geq \mathcal{L}^{a_n} v + g(., a_n) - \underbrace{(\mathcal{L}^{a_n} v^{n+1} + g(., a_n))}_{=0} \\ &= \mathcal{L}^{a_n}(v - v^{n+1}) \\ &\rightharpoonup 0 \end{aligned}$$

parce que

$$v^{n+1} \rightharpoonup_{n \to +\infty} v, (v^{n+1})' \rightharpoonup_{n \to +\infty} (v)' \text{ and } (v^{n+1})'' \rightharpoonup_{n \to +\infty} (v)''.$$

Donc $\mathcal{L}^{a^*}v + g(.,a^*) \leq 0$ et par suite

$$L^{a^*}v + g(.,a^*) = 0$$

Alors,

$$-v''(x) + \sup_{a\in\kappa}[c(x,a)v(x) - b(x,a)v'(x) - g(x,a)] = 0$$

a une solution qui appartient à $C^{2,1}$. En conclusion, l'équation d'HJB admet une solution dans $C^{2,1}$.

5.5 Résolution numérique de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman

L'étude théorique nous a conduit à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

$$\sup_{a\in\kappa}[-\delta w(x) + \mathcal{L}^a w(x) + f(x,a)] \quad = 0, \ \forall x \in \chi \tag{5.5.1}$$

avec $\mathcal{L}^a w(x) = \mu(x,a)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)w"(x)$. Notre objectif est de résoudre numériquement l'équation (5.5.1).

1) Si χ est un domaine non borné. En vue d'une résolution numérique de (5.5.1), il est important de se ramener à un domaine borné. En général, on utilise deux procédures :

- **Localisation du problème :** il s'agit de se restreindre à un domaine borné et à imposer des conditions aux limites pour étudier les comportements de la solution à l'infini.
- **Changement de variables :** il s'agit de transformer le domaine initial en un domaine borné. Par exemple on suppose que $\chi = [0,\infty[$, on fait le changement de variable $y = \frac{x}{1+x}$ qui transforme $[0,\infty[$ en $[0,1[$. C'est cette dernière procédure que l'on va utiliser ici.

On pose $\tilde{J}(y) := (1-y)w(x)$ alors, $w(x) = \frac{1}{1-y}\tilde{J}(y)$, alors $\tilde{J}$ vérifie :

$$w'(x) = (1-y)\tilde{J}'(y) + \tilde{J}(y), \tag{5.5.2}$$

$$w"(x) = (1-y)^3\tilde{J}"(y). \tag{5.5.3}$$

Après le changement de variables, l'équation (5.5.1) devient :

$$\sup_{a\in\mathcal{A}} \left[\tilde{J}(y)[-\frac{\delta}{1-y} + \mu(\frac{y}{1-y},a)] + \overline{\mathcal{L}}^a\tilde{J}(y) + f(\frac{y}{1-y},a)\right] = 0, \tag{5.5.4}$$

$$\tilde{J}(0) = w(0) \text{ et } \tilde{J}(1) \text{ est donné} \tag{5.5.5}$$

où $\overline{\mathcal{L}}^a \tilde{J}(y) = \mu(\frac{y}{1-y}, a)(1-y)\tilde{J}'(y) + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{y}{1-y}, a)(1-y)^3\tilde{J}"(y) = \bar{\mu}(y,a)\tilde{J}'(y) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}(y,a)\tilde{J}"(y)$.
et

$$\begin{cases} \bar{\mu}(y,a) & = \mu(\frac{y}{1-y}, a)(1-y), \\ \bar{\sigma}^2(y,a) & = \sigma^2(\frac{y}{1-y}, a)(1-y)^3. \end{cases}$$

2) Si χ est un domaine borné ($\chi = [\underline{x}, \overline{x}]$). L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman est donnée par :

$$\begin{cases} \sup\limits_{a\in\kappa}[-\delta w(x) + \mathcal{L}^a w(x) + f(x,a)] & = 0 \\ w(\underline{x}) = \underline{w}, \ w(\overline{x}) = \overline{w}, \end{cases} \tag{5.5.6}$$

avec

$$\mathcal{L}^a w(x) = \mu(x,a)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)w''(x)$$

5.5.1 Discrétisation

Pour discrétiser l'équation (5.5.6), on peut utiliser des méthodes d'approximation de type élément finis ou différences finies. On utilise la méthode des différences finies qui consiste à trouver une approximation de la solution d'une EDP aux nœuds d'une grille régulière.
L'opérateur différentiel $\mathcal{L}^a$ sera remplacé par un opérateur discret $\overline{\mathcal{L}}^{\Delta,a}$, où Δ note la discrétisation.

Discrétisation en espace :
Soit $\Delta = \frac{1}{N}$, ($N \in \mathbb{N}^*$) le pas de discrétisation en espace et soit $(x_i)_{i=1,N}$ les points de la grille. Tout d'abord, on donne les approximations usuelles pour construire $\overline{\mathcal{L}}^{\Delta,a} w$.

D'après le développement de Taylor, si w est une fonction de classe C^2 en x alors on a :

$$w(x+\Delta) = \quad w(x) + \Delta w'(x) + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

$$w(x-\Delta) = w(x) - \Delta w'(x) + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

On a donc les schémas d'approximation suivants :

- **Approximation de la dérivée première :**
  - *Schéma symétrique*

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{w(x+\Delta) - w(x-\Delta)}{2\Delta} + \mathcal{O}(\Delta) \\ &\simeq \frac{w(x+\Delta) - w(x-\Delta)}{2\Delta}. \end{aligned}$$

— *Schéma décentré positif :*

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{w(x+\Delta)-w(x)}{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta) \\ &\simeq \frac{w(x+\Delta)-w(x)}{\Delta}. \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

— *Schéma décentré négatif :*

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{w(x)-w(x-\Delta)}{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta) \\ &\simeq \frac{w(x)-w(x-\Delta)}{\Delta}. \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

— **Approximation de la dérivée seconde :**

$$\begin{aligned} w''(y) &= \frac{w(x+\Delta)-2w(x)+w(x-\Delta)}{\Delta^2} + \mathcal{O}(\Delta) \\ &\simeq \frac{w(x+\Delta)-2w(x)+w(x-\Delta)}{\Delta^2}. \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

En utilisant le schéma décentré positif (5.5.7), le schéma décentré négatif (5.5.8) et le schéma donné par (5.5.9) pour discrétiser l'opérateur $\overline{\mathcal{L}}^{\Delta,a}$, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}^{\Delta,a}w(x) &= \frac{w(x+\Delta)-w(x)}{\Delta}\mu(x,a)^+ + \frac{w(x)-w(x-\Delta)}{\Delta}\mu(x,a)^- \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)\frac{w(x+\Delta)-2w(x)+w(x-\Delta)}{\Delta^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\Delta^2}\sigma^2(x,a) - \frac{\mu(x,a)^-}{\Delta}\right)w(x-\Delta) + \left(\frac{\mu(x,a)^-}{\Delta} - \frac{\mu(x,a)^+}{\Delta} - \frac{\sigma^2(x,a)}{\Delta^2}\right)w(x) \\ &+ \left(\frac{\mu(x,a)^+}{\Delta} + \frac{\sigma^2(x,a)}{2\Delta^2}\right)w(x+\Delta) \\ &= \left(\frac{1}{2\Delta^2}\sigma^2(x,a) - \frac{\mu(x,a)^-}{\Delta}\right)w(x-\Delta) + \left(-\frac{|\mu(x,a)|}{\Delta} - \frac{\sigma^2(x,a)}{\Delta^2}\right)w(x) \\ &+ \left(\frac{\mu(x,a)^+}{\Delta} + \frac{\sigma^2(x,a)}{2\Delta^2}\right)w(x+\Delta) \end{aligned}$$

avec $\mu(x,a)^+ = \max(\mu(x,a),0)$ et $\mu(x,a)^- = \max(-\mu(x,a),0)$.

5.5.2 Forme matricielle

Soit $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ la matrice associée à l'opérateur $\overline{\mathcal{L}}^{\Delta,a}$. En posant

$$\begin{aligned} A_{i\Delta} &= A(i\Delta) = \left(\frac{1}{2\Delta^2}\sigma^2(i\Delta,a) - \frac{\mu(i\Delta,a)^-}{\Delta} \right), \\ B_{i\Delta} &= B(i\Delta) = \left(-\frac{|\mu(i\Delta,a)|}{\Delta} - \frac{\sigma^2(i\Delta,a)}{\Delta^2} \right), \\ C_{i\Delta} &= C(i\Delta) = \left(\frac{\mu(i\Delta,a)^+}{\Delta} + \frac{\sigma^2(i\Delta,a)}{2\Delta^2} \right), \end{aligned}$$

la matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ est de taille $(N-1)\times(N-1)$ donnée par :

$$\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a} = \begin{pmatrix} B_\Delta & C_\Delta & 0 & \dots & 0 \\ A_{2\Delta} & B_{2\Delta} & C_{2\Delta} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & A_{(N-2)\Delta} & B_{(N-2)\Delta} & C_{(N-2)\Delta} \\ 0 & \dots & 0 & A_{(N-1)\Delta} & B_{(N-1)\Delta} \end{pmatrix} \tag{5.5.10}$$

$$\bar{l}^{\Delta,a} = \begin{pmatrix} f(\Delta,a) + A_\Delta w(\underline{x}) \\ f(2\Delta,a) \\ \vdots \\ f((N-2)\Delta,a) \\ f((N-1)\Delta,a) + C_{(N-1)\Delta} w(\overline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.5.11}$$

où encore, la matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ est définie comme suit :
$[\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}]_{i,i-1} = \frac{1}{2\Delta^2}\sigma^2(i\Delta,a) - \frac{\mu(i\Delta,a)^-}{\Delta}$; $[\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}]_{i,i} = -\frac{|\mu(i\Delta,a)|}{\Delta} - \frac{\sigma^2(i\Delta,a)}{\Delta^2}$; $[\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}]_{i,i+1} = \frac{\mu(i\Delta,a)^+}{\Delta} + \frac{\sigma^2(i\Delta,a)}{2\Delta^2}$;

L'équation (5.5.6) sera, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \sup\limits_{a\in\kappa}\left[(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}-\delta I)w(x_i)+\overline{l}^{\Delta,a}\right]=0,\ \forall i\in\{1,..N-1\} \\ w(\underline{x})=\underline{w}, \\ w(\overline{x})=\overline{w}. \end{cases} \tag{5.5.12}$$

où I est une matrice identité de taille $(N-1)\times(N-1)$.

5.5.3 Consistance et stabilité de la méthode d'approximation

On donne ici les définitions de consistance et de stabilité de la méthode d'approximation qui assurent que le problème discret (5.5.12) admet une unique solution w^{Δ} et que cette solution converge vers la solution w continue du problème (5.5.6) aux points du maillage lorsque les pas de discrétisation Δ tendent vers 0. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini.

Définition 5.5.1. *Définition* 7.14 *Lapeyre et al. [46]*
Le schéma numérique (5.5.12) est dit consistant avec l'équation (5.5.1) si pour toute fonction C^{∞} donnée v on a :

$$|\mathcal{L}^a v(x)-\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}v(x)|\leq C|\Delta|^p \tag{5.5.13}$$

avec $p>0$, p désigne l'ordre du schéma numérique et C est une constante qui ne dépend ni de Δ ni de x point du maillage.

En général, les solutions de l'équation (5.5.6) ne sont pas C^{∞}, il faut établir des majorations de type (5.5.13) pour des fonctions moins régulières.

Définition 5.5.2. *Définition* 7.16 *Lapeyre et al. [46]*
Le schéma numérique (5.5.12) est dit stable au sens de la norme L_∞ si la matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ est inversible et et si la norme L_∞ de la matrice $(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a})^{-1}$ est majorée indépendamment de Δ et de a :

$$||(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a})^{-1}||_\infty\leq C,$$

où la norme L_∞ est définie sur l'ensemble des matrices pour $v=(v(i),\ i\in\mathcal{E})$ par $|v|_\infty:=\max\limits_{i\in\mathcal{E}}|v(i)|$ et $\|Q\|_\infty:=\max\limits_{|v|_\infty<1}|Qv|_\infty$ pour $Q=(Q(i,j),\ (i,j)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E})$.

5.5.4 Principe du Maximum discret

On donne ici quelques résultats sur les matrices, en particulier sur les matrices stochastiques et on introduit le concept de principe de maximum discret. Ce principe est similaire au principe de maximum pour les opérateurs elliptiques continus.

Définition 5.5.3. *Définition* 1.5.1 *Lapeyre et al. [46]*
On dit que $(P(i,j),\ i \in \mathcal{E},\ j \in \mathcal{E})$ *est une matrice stochastique, si on a :*

$$P(i,j) \geq 0,\ \forall i,j \in \mathcal{E} \text{ et } \sum_{j\in\mathcal{E}} P(i,j) = 1\ \forall i \in \mathcal{E}.$$

Définition 5.5.4. *Définition* 1.5.3 *Lapeyre et al. [46]*
On dit qu'une matrice $A = (A(i,j),\ i \in \mathcal{E},\ j \in \mathcal{E})$ *satisfait au principe du maximum discret si et seulement si* $\forall\ v = (v(i),\ i \in \mathcal{E})$

$$\left(\max_{i\in\mathcal{E}} v(i) > 0\right) \Rightarrow (Av(i^*) < 0) \text{ où } i^* \in \arg\max_{i\in\mathcal{E}} v(i).$$

Corollaire 5.5.5. *Corollaire* 1.5.4 *Lapeyre et al. [46]*
Si A *satisfait le principe du maximum discret, alors pour tout* $v = (v(i), i \in \mathcal{E})$

$$(Av(i) \geq 0,\ \forall i \in \mathcal{E}) \Rightarrow (v(i) \leq 0,\ \forall\ i \in \mathcal{E}).$$

Lemme 5.5.6. *Toute matrice vérifiant le principe du maximum discret est inversible.*

Preuve
Soit $v = (v(i),\ i \in \mathcal{E})$ tels que $Av = 0$, i.e tel que

$$\forall i \in \mathcal{E},\ \sum_{j\in\mathcal{E}} A(i,j)v(j) = 0,$$

il s'agit de montrer que v est le vecteur nul.
Soit $i^* \in \mathcal{E}$ tel que

$$v(i^*) = \max\{v(i),\ i \in \mathcal{E}\}.$$

A satisfait au principe du maximum discret : si $v(i^*) > 0$ alors on $Av(i^*) < 0$, or $Av(i^*) = 0$ donc $v(i^*) \leq 0$, on déduit que $\forall i,\ v(i) \leq 0$. De même pour $-v$, on a $A(-v(i^*)) < 0$, or $-Av(i^*) = 0$ donc $-v(i^*) \leq 0$ on déduit que $\forall i,\ v(i) \geq 0$. Alors $v = 0$ et par suite A est inversible. •

Proposition 5.5.7. *Proposition* 1.5.6 *Lapeyre et al. [46]*
Soient P *une matrice stochastique,* D *une matrice diagonale avec* $D_{ii} \geq 0$ *et* I *la matrice identité,* P, D *et* I *ont les mêmes dimensions. Alors la matrice* $P - I - D$ *satisfait le principe du maximum discret.*

Preuve
Soit $v = (v(i), i \in \mathcal{E})$ et on suppose que $\max_{i\in\mathcal{E}} v(i) \geq 0$. Soit $i^* \in \arg\max_{i\in\mathcal{E}} v(i)$. On a alors

$v(i^*) \geq 0$. Soit $L = P - I - D$. On montre que $Lv(i^*) \leq 0$. On a :

$$\begin{aligned} Lv(i^*) &= \sum_{j\in\mathcal{E}} L(i^*,j)v(j) = L(i^*,i^*)v(i^*) + \sum_{j\neq i} L(i^*,j)v(j) \\ &\leq L(i^*,i^*)v(i^*) + \sum_{j\neq i^*} L(i^*,j)v(i^*), \end{aligned}$$

puisque $v(j) \leq v(i^*)$ et $L(i^*,j) = P(i^*,j) \geq 0 \ \forall\ i^* \neq j$. Par suite

$$Lv(i^*) \leq \sum_{j\in\mathcal{E}} L(i^*,j)v(i^*) = -D(i^*,i^*) \leq 0.$$

•

Définition 5.5.8. *Lapeyre et al. [46] Une matrice $A = (A(i,j),\ i \in \mathcal{E},\ j \in \mathcal{E})$ est dite à diagonale dominante de paramètre λ, si*

- $A(i,j) \geq 0,\ \forall i,\ j \in \mathcal{E},\ i \neq j$,
- $\exists \lambda > 0$ *tel que* $\sum_{j\in\mathcal{E}} A(i,j) \leq -\lambda < 0$ *pour tout* $i \in \mathcal{E}$,

Proposition 5.5.9. *Proposition* 1.5.8 *Lapeyre et al. [46]*
Soit A une matrice à diagonale dominante de paramètre λ, alors A satisfait le principe du maximum discret. A est donc inversible.

Preuve Soit $i^* \in \arg\max_{i\in\mathcal{E}}\{v(i)\}$. On suppose que $\max_{i\in\mathcal{E}} v(i) \geq 0$. On a alors $v(i^*) \geq 0$. On montre que $Av(i^*) \leq 0$. On a

$$\begin{aligned} Av(i^*) &= \sum_{j\in\mathcal{E}} A(i^*,j)v(j) = A(i^*,i^*)v(i^*) + \sum_{j\neq i^*} A(i^*,j)v(j) \\ &\leq \sum_{j\in\mathcal{E}} A(i^*,j)v(i^*) \leq -\lambda v(i^*) < 0. \end{aligned}$$

•

On donne maintenant une condition suffisante de stabilité.

Proposition 5.5.10. *Proposition* 7.1.1 *Lapeyre et al. [46]*
Le schéma est stable si la matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ (5.5.10) est à diagonale dominante de paramètre λ et on a l'estimation

$$||(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a})^{-1}||_\infty \leq \frac{1}{\lambda}$$

Preuve Si $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ est à diagonale dominante alors d'après la proposition 5.5.9, la matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ satisfait le principe de maximum discret et elle est inversible.
Soit v^Δ solution de l'équation linéaire $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}v^\Delta + \bar{l}^{\Delta,a} = 0$. On a pour tout i,

$$-\sum_{j\neq i}(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a})(i,j)\|v^\Delta\|_\infty \leq -\sum_{j\neq i}(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a})(i,j)v^\Delta(j).$$

Alors,

$$-\sum_{j=1}^{N}\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(i,j)\|v^{\Delta}\|_{\infty}+\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(i,i)\|v^{\Delta}\|_{\infty}-\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(i,i)v^{\Delta}(i)\leq-\sum_{j=1}^{N}\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(i,j)v^{\Delta}(j)\leq\|\bar{l}^{\Delta,a}\|_{\infty}.$$

D'où,

$$\delta\|v^{\Delta}\|_{\infty}+\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(i,i)(\|v^{\Delta}\|_{\infty}-v^{\Delta}(i))\leq\|\bar{l}^{\Delta,a}\|_{\infty}$$

S'il existe i_0 tel que $v(i_0)^{\Delta}=\|v^{\Delta}\|_{\infty}$ on obtient $\|v^{\Delta}\|_{\infty}\leq\frac{1}{\lambda}\|\bar{l}^{\Delta,a}\|_{\infty}$, sinon il existe un indice i_0 tel que $-v(i_0)=\|v\|_{\infty}$ et on reprend le raisonnement avec $w=-v$, on obtient $\|v^{\Delta}\|_{\infty}\leq\frac{1}{\lambda}\|\bar{l}^{\Delta,a}\|_{\infty}$. Ceci achève la preuve de la proposition. •

5.5.5 Itération sur les politiques ou algorithme de Howard

Ce algorithme consiste à alterner deux étapes :

1. On calcule la politique optimale en fonction de la fonction valeur v déjà calculée.
2. On résout l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation de Bellman, le contrôle optimal réel par le contrôle que l'on a déjà calculé précédemment.

L'algorithme consiste à alterner deux suites, les stratégies $(a^n(x_i))_{i=1,\dots N-1}$ et les valeurs $(v^n(x_i))_{i=1,\dots N-1}$ en partant d'une politique initiale a^0 définies par :

- On fixe une condition d'arrêt ξ (de l'ordre de 10^{-3}).
- **Initialisation** : On fixe un contrôle initial a^0.
- **Étape** $2n-1$: Cette étape consiste à chercher v^n à partir de la stratégie a^n solution de

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n}-\delta I)v^n(x)+\bar{l}^{\Delta,a^n}(x)=0. \tag{5.5.14}$$

- **Étape** $2n$: À partir de la fonction v^n, on cherche une nouvelle stratégie A^{n+1} telle que

$$a^{n+1}(x)\in\{\arg\max_{a\in\kappa}(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}-\delta I)v^n(x)+\bar{l}^{\Delta,a}(x)\}.$$

- **Test d'arrêt** : Le critère d'arrêt est $|v^{n+1}-v^n|\leq\xi$. •

On montre que la suite $(v^n,n\in\mathbb{N})$ converge vers la solution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman et que $(a^n,n\in\mathbb{N})$ converge vers la stratégie optimale a^*.

Théorème 5.5.11. *Soit $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue par l'algorithme d'Howrad. On suppose qu'il existe une sur-solution de (5.5.12), c'est-à-dire une fonction W telle que*

$$\max_{a\in\kappa}\{\overline{\mathbb{L}}^{a}-\delta I)W-l^a\}\leq 0 \tag{5.5.15}$$

Alors

1. *La suite* $(v^n, n \geq 0)$ *est majorée.*
2. *La suite* $(v^n, n \geq 0)$ *est croissante.*

Donc, La suite $(v^n, n \in \mathbb{N})$ *converge vers* v^* *de façon monotone.*

Preuve

1. Par définition de v^n, on a

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)v^n + \bar{l}^{\Delta,a^n} = 0$$

et

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)W + \bar{l}^{\Delta,a^n} \leq 0$$

donc, on a

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)(W - v^n) \leq 0$$

l'opérateur $(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)$ satisfait le principe du maximum discret pour tout $x \in \mathcal{E}$. On déduit par le corollaire 5.5.5 que $W \geq v^n$. Par suite la suite $(v^n, n \geq 0)$ est majorée.

2. La suite $(v^n, n \geq 0)$ est croissante. En effet, compte tenu de l'équation (5.5.14) considérée à l'étape n et $n+1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)v^n - (\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,A^{n+1}} - \delta I)v^{n+1} + \bar{l}^{\Delta,a^n} - \bar{l}^{\Delta,A^{n+1}} \\ &= (\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^{n+1}} - \delta I)(v^n - v^{n+1}) + (\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^{n+1}})v^n + \bar{l}^{\Delta,a^n} - \bar{l}^{\Delta,a^{n+1}}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de a^{n+1}, on a

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^{n+1}} - \delta I)v^n + \bar{l}^{\Delta,a^{n+1}} \geq (\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \Delta I)v^n + \bar{l}^{\Delta,a^n},$$

on a alors

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^{n+1}})v^n + \bar{l}^{a^n} - \bar{l}^{a^{n+1}} \leq 0.$$

ce qui implique que

$$(\overline{\mathbb{L}}^{a^{n+1}} - \delta I)(v^n - v^{n+1}) \geq 0.$$

Par conséquent, par le principe du maximum discret, $v^{n+1} \geq v^n$. Par suite $(v^n, n \geq 0)$ est croissante.

La suite $(v^n, n \in \mathbb{N})$ est croissante et majorée, par suite la suite converge. Soit v^* sa limite. •

5.6 Résolution numérique de l'inéquation variationnelle

On considère le problème mixte d'arrêt optimal et de contrôle stochastique en horizon infini suivant :

$$v(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}, A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta t} f(X_t, A_t)dt + e^{-\delta \tau} g(X_\tau)\right], \tag{5.6.1}$$

avec X_t est la solution de (5.2.1), $\mathcal{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.
L'étude théorique nous a conduit à résoudre l' inéquation variationnelle d'HJB (IVHJB) suivante :

$$\min\{\delta w(x) - \mathcal{L}^a w(x) - f(x), v(x) - g(x)\} = 0 \ x \in \chi, \tag{5.6.2}$$

avec $\mathcal{L}^a w(x) = \mu(x, a)w'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, a)w"(x)$. Notre objectif est de résoudre numériquement l'IVHJB (5.6.2).

Pour résoudre numériquement l'inéquation variationnelle d'HJB (5.6.2), on utilise les mêmes étapes que dans la résolution de l'équation (5.5.1), aux quelles se rajoute une étude supplémentaire qui consiste à partitionner l'espace en une région de continuation D_1^n et à une région d'arrêt D_2^n. On utilise les méthodes des différences finies (voir sous-section 5.5.1) pour discrétiser l'IVHJB (5.6.2), puis on résout l'inéquation discrète sur une grille discrétisée en espace en utilisant l'algorithme de Howard. Mais, étant donné que l'on résout une inéquation variationnelle, dans ce cas, on introduit deux partitions D_1^n et D_2^n en comparant les deux équations qui apparaissent dans l'IVHJB. Puis on cherche la fonction valeur dans chaque partition.

5.6.1 Forme matricielle

On utilise les mêmes étapes que dans la section 5.5, l'IVHJB (5.6.2) sera, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \min\{\sup\limits_{a \in \kappa}\left[(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a} - \delta I)w(x_i) + \bar{l}^{\Delta,a}\right], w(x_i) - g(x_i)\} = 0, \ \forall i \in \{1, ..N-1\} \\ w(\underline{x}) = \underline{w}, \\ w(\overline{x}) = \overline{w}. \end{cases} \tag{5.6.3}$$

avec $\Delta = \frac{1}{N}$, et $x_i = i\Delta$ les points de grille Ω_Δ. La matrice $\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}$ et le second membre $\bar{l}^{\Delta,a}$ sont données respectivement par (5.5.10) et (5.5.11).

5.6.2 Itération sur les politiques

Une fois encore on utilise l'algorithme d'Howard pour résoudre l'IVHJB (5.6.3) ; rappeleons qu'il consiste à alterner deux suites $(a^n(x_i)_{i=1,..N-1})_{n\geq 1}$ et $(w^n(x_i)_{i=1,..N-1})_{n\geq 1}$, en partant d'une valeur w^1 définies par :

- On fixe un critère d'arrêt ξ (de l'ordre de 10^{-3}).
- **Initialisation :** on fixe une valeur w^1.
- **Étape** $2n-1$: $w^{\Delta,n}$ est associé à une stratégie

$$a^n \in \arg\max_a \{(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a}(x) - \delta I)w^{\Delta,n} + \bar{l}^{\Delta,a}(x)\}.$$

- **Étape** $2n$: À partir de la stratégie a^n, on calcule une partition $(D_1^n \cup D_2^n)$ définie par :
  $(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)w^{\Delta,n}(x) + \bar{l}^{\Delta,a^n}(x) \leq w^{\Delta,n} + g(x)$, dans D_1^n.
  $(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^n} - \delta I)w^{\Delta,n}(x) + \bar{l}^{\Delta,a^n}(x) \geq w^{\Delta,n} + g(x)$, dans D_2^n.
  La solution $w^{\Delta,n+1}$ est obtenue en résolvant les deux systèmes linéaires suivants :

$$(\overline{\mathbb{L}}^{\Delta,a^{n+1}} - \delta I)w^{\Delta,n+1}(x) + \bar{l}^{\Delta,a^{n+1}}(x) = 0, \text{ dans } D_1^n,$$

  et

$$w^{\Delta,n}(x) + g(x), \text{ dans } D_2^n.$$

- **Test d'arrêt** : Le critère d'arrêt est $|w^{\Delta,n+1}(x) - w^{\Delta,n}(x)| \leq \xi$.

5.7 Application

Dans cette section, on résout numériquement l'inéquation variationnelle d'HJB qui apparaît dans le chapitre 3, en utilisant le changement de variable, on rappelle que l'IVHJB est donnée comme suit :

$$\min\left[\delta v(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\{[\lambda x - U(r) + h(a) - \frac{h'(a)}{\varphi'(a)}\varphi(a)]v'(x) + \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2 v''(x) - r + \varphi(a)\}, v(x) + x\right] = 0 \tag{5.7.1}$$

pour tout $x \in [0,\infty)$.
Le domaine $[0,\infty)$ est non borné, alors il est nécessaire pour une résolution numérique de se ramener à un domaine borné. On utilise le changement de variable (5.5.2) :

$$\begin{cases} y & = \frac{x}{1+x}, \\ J(y) & = (1-y)v(x). \end{cases}$$

Alors v' vérifie

$v'(x) = J(y) + J'(y)(1-y)\ ;\ v"(x) = J"(y)(1-y)^3$

et la fonction J satisfait

$$\min\left\{\inf_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\gamma(y)J(y) + \bar{\mathcal{L}}^{a,r}J(y) - \varphi(a) + r\}, \frac{J(y)}{1-y} + \frac{y}{1-y}\right\} = 0 \tag{5.7.2}$$

pour tout $y \in [0,1)$, avec

$$\bar{\mathcal{L}}^{a,r}J(y) = \beta(y)J'(y) + \alpha(y)J''(y)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma(y) & = \frac{\delta}{1-y} - \frac{\lambda y}{1-y} + U(r) - h(a) + \frac{h'(a)}{\varphi'(a)}\varphi(a). \\ \beta(y) & = -\lambda y + (1-y)[-h(a) + u(r) + \frac{h'(a)}{\varphi'(a)}\varphi(a)]. \\ \alpha(y) & = -\frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2(1-y)^3. \end{cases}$$

avec $J(0) = v(0), J(1) = -1$.

La solution de (5.7.2) est approchée par la méthode numérique suivante :

i) Approcher l'inégalité variationnelle (5.7.2) en utilisant la méthode des différences finies.

ii) Résoudre l'équation discret en utilisant l'algorithme d'Howard.

5.7.1 Méthode des différences finies

Soit Δ le pas de discrétisation et $(y_i)_{i=1,N}$, $y_i = i\Delta$ les points de la grille Ω_Δ.

L'équation (5.7.2) est discrétisée en remplaçant les dérivées première et secondaire de J par les approximations suivantes :

$$J'(x) \simeq \begin{cases} \frac{J(y+\Delta)-J(y)}{\Delta} & \text{si } \beta(y) \geq 0 \\ \frac{J(y)-J(y-\Delta)}{\Delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J''(y) \simeq \frac{J(y+\Delta) - 2J(y) + J(y-\Delta)}{\Delta^2},$$

$$J(0) = v(0),\ J(1) = -1.$$

On obtient un système de $N-1$ équations avec $N-1$ inconnues :

$$\min[\inf_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\in\mathbb{R}^+}[A^{\Delta,(a,r)}J^\Delta(y_i) + B^{\Delta,(a,r)}], \frac{J^\Delta(y_i)}{1-y_i} + \frac{y_i}{1-y_i}] = 0 \tag{5.7.3}$$

où $B^{\triangle,(r,z)}$ est donnée par

$$B^{\triangle,(a,r)} = \begin{pmatrix} -\varphi(a) + r + (\frac{\beta^-(\Delta)}{\Delta} + \frac{\alpha(\Delta)}{\Delta^2})J(\underline{y}) \\ -\varphi(a) + r \\ \vdots \\ -\varphi(a) + r \\ -\varphi(a) + r + (\frac{\beta^+((N-1)\Delta)}{\Delta} + \frac{\alpha((N-1)\Delta)}{\Delta^2})J(1) \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{\Delta,(a,r)}$ est définie comme suit :

$$[A^{\Delta,(a,r)}]_{i,i-1} = \frac{\beta^-(y_i)}{\Delta} + \frac{\alpha(y_i)}{\Delta^2};\ [A^{\Delta,(a,r)}]_{i,i} = \gamma(y_i) - \frac{|\beta(y_i)|}{\Delta} - 2\frac{\alpha(y_i)}{\Delta^2};\ [A^{\Delta,(a,r)}]_{i,i+1} = \frac{\beta^+(y_i)}{\Delta} + \frac{\alpha(y_i)}{\Delta^2};$$

avec $\beta^+(y) = \max(\beta(y), 0)$, $\beta^-(y) = \max(-\beta(y), 0)$.
Le système d'inégalités (5.7.3) est résolu en utilisant l'algorithme d'Howard utilisé comme suit :

- Initialisation : on fixe une valeur $J^{\Delta,1}$.
- Étape $2n-1$. A partir de $J^{\Delta,n}$, on calcule (a^n, r^n)

$$(a^n, r^n) \in \arg\min_{a,r} \left\{ A^{\Delta,(a,r)} J^{\Delta,n} + B^{\Delta,(a^n,r^n)} \right\}$$

- Étape $2n$. A partir de (a^n, r^n), on calcule la partition $(D_1^n \cup D_2^n)$ telle que

$$\begin{aligned} A^{\Delta,(a^n,r^n)} J^{\Delta,n} + B^{\Delta,(a^n,r^n)} &\leq \tfrac{J^{\Delta,n}}{1-y_i} + \tfrac{y_i}{1-y_i},\ i = 1...N-1,\ \text{dans } D_1^n, \\ A^{\Delta,(a^n,r^n)} J^{\Delta,n}(J_i) + B^{\Delta,(a^n,r^n)} &\geq \tfrac{J^{\Delta,n}}{1-y_i} + \tfrac{y_i}{1-y_i},\ i = 1...N-1,\ \text{dans } D_2^n. \end{aligned}$$

  La solution $J^{\Delta,n+1}$ est obtenue en résolvant les deux systèmes linéaires suivants :

$$A^{\Delta,(a^n,r^n)} J^{\Delta,n+1} + B^{\Delta,(a^n,r^n)} = 0,\ i = 1...N-1,\ \text{dans } D_1^n,$$

  and

$$\frac{J^{\Delta,n+1}}{1-y_i} + \frac{y_i}{1-y_i} = 0,\ i = 1...N-1,\ \text{dans } D_2^n.$$

- Si $|J^{\Delta,n+1} - J^{\Delta,n}| \leq \varepsilon$, on arrête, sinon, on passe à l'étape $2n+1$.

5.7.2 Résultats numériques

Pour les illustrations suivantes, nous avons choisi les fonctions suivantes : $\varphi(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, $h(x) = \exp(\beta x) - 1$ et $U(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}$; $\alpha = 0.035$ et $\beta = 0.017$.

Dans les figures 5.3–5.5, $\delta = 0.08$, $\lambda = 0.065$ et σ varie : $\sigma = 1.2,\ 3.2$ ou 4. On part de $v(0) = 0$. On trace la fonction valeur, l'effort optimal et la rente optimale dans la région du continuation.

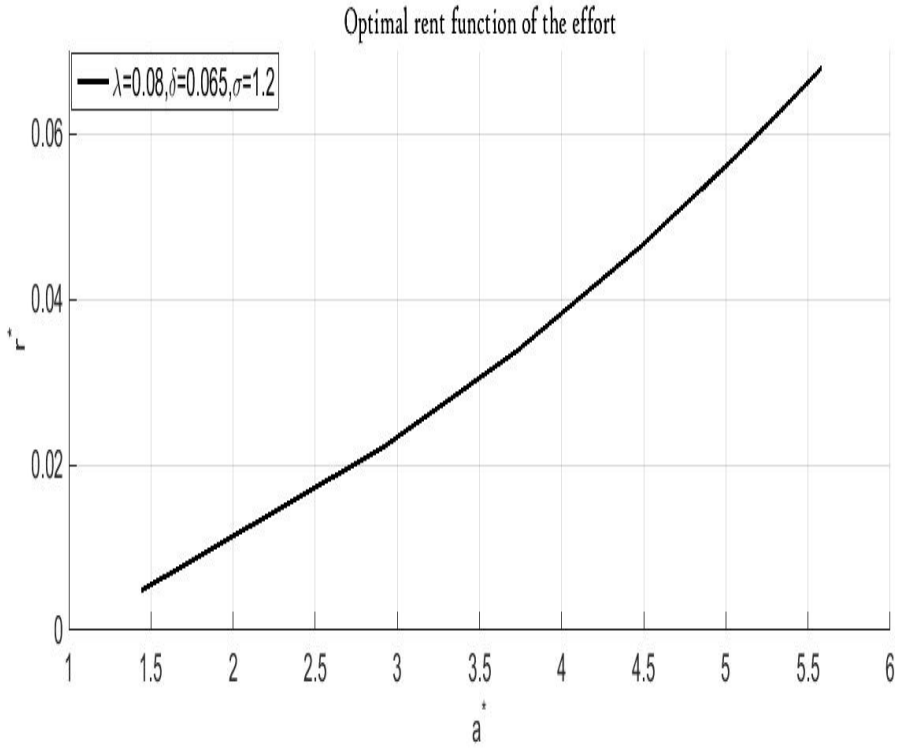


FIGURE 5.2 – La rente optimale r^* en fonction de l'effort optimal a^*.

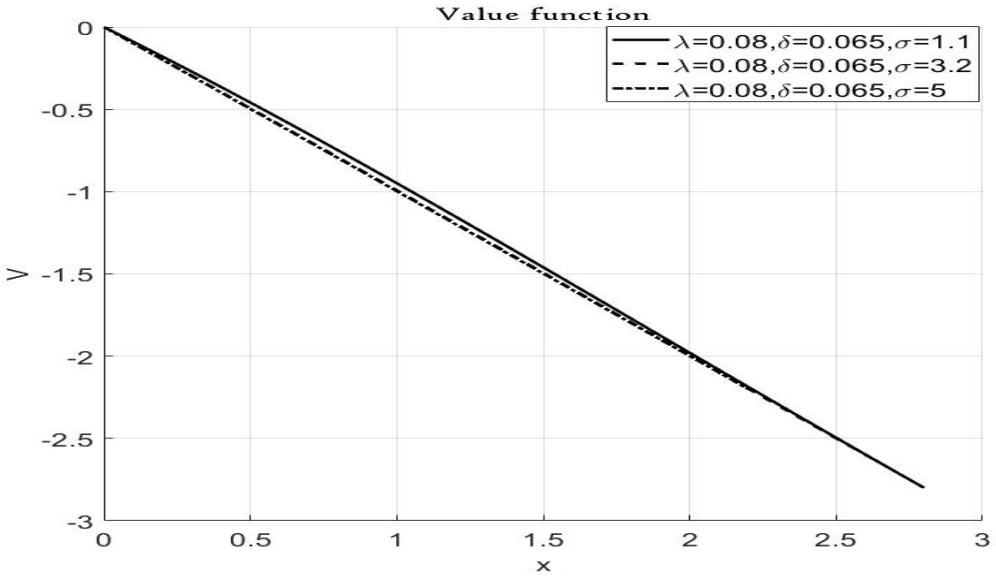


FIGURE 5.3 – La fonction valeur v pour différent σ.

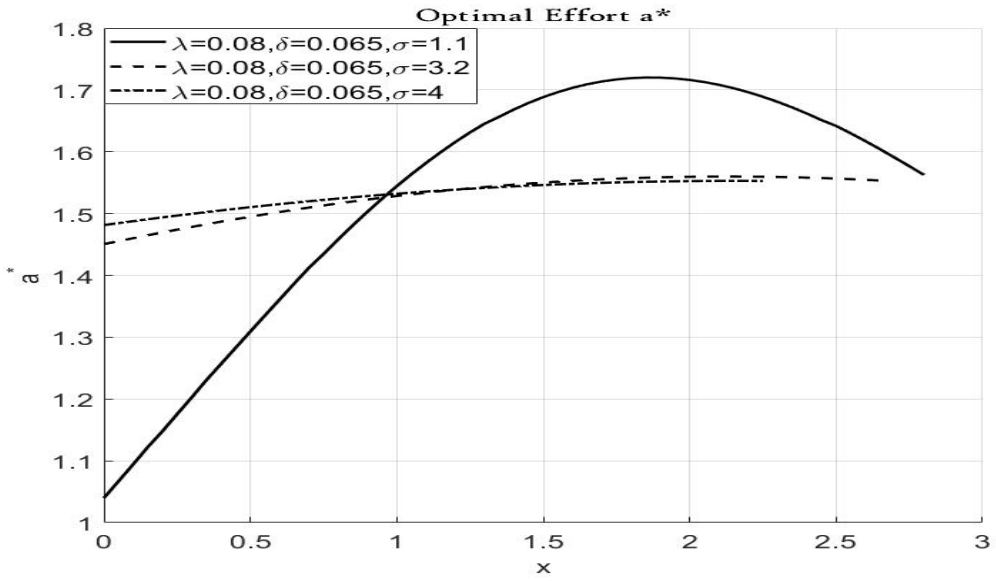


FIGURE 5.4 – L'effort optimal a^* pour différent σ.

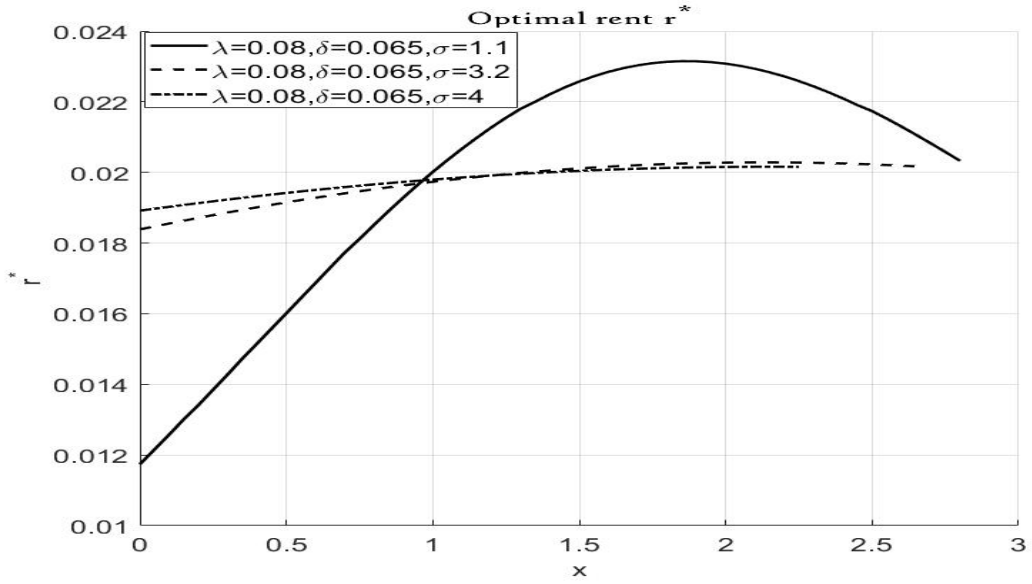


FIGURE 5.5 – La rente optimale r^* pour différent σ.

D'après la figure 5.2, la rente optimale est une fonction convexe, croissante de l'effort. Par ailleurs la fonction valeur du public v est décroissante par rapport à σ : plus il y a de risque moins le profit est important. D'après les figure 5.4- 5.5, l'effort optimal et la rente optimale

sont décroissantes par rapport σ si x promis est petit. Si x promis est petit, le consortium n'est pas prêt à fournir plus d'efforts. Si x promis est grand, le consortium supporte le risque et produit des efforts. D'après la figure 5.3, la zone de continuation dépend de la volatilité : plus la volatilité est élevée, plus la zone de continuation est petite. Le tableau suivant représente la zone du continuation $\mathcal{S}^c = \{x \geq 0 : \ v(x) > -x\}$ pour différentes valeurs de σ.

σ	Région de continuation $\mathcal{S}^C$
1.1	$[0, 2.88]$
3.2	$[0, 2.65]$
4	$[0, 2.25]$

TABLE 5.1 – *Région de continuation pour différentes valeurs de σ.*

La figure 5.6 représente la fonction valeur pour $\sigma = 1.1$, la région de continuation est alors égale à $[0, 2.88]$. Dans la région de continuation la fonction valeur est convexe. Dans la région d'arrêt la fonction valeur est linéaire et est égale à moins la fonction identité $(v(x) = -x)$.

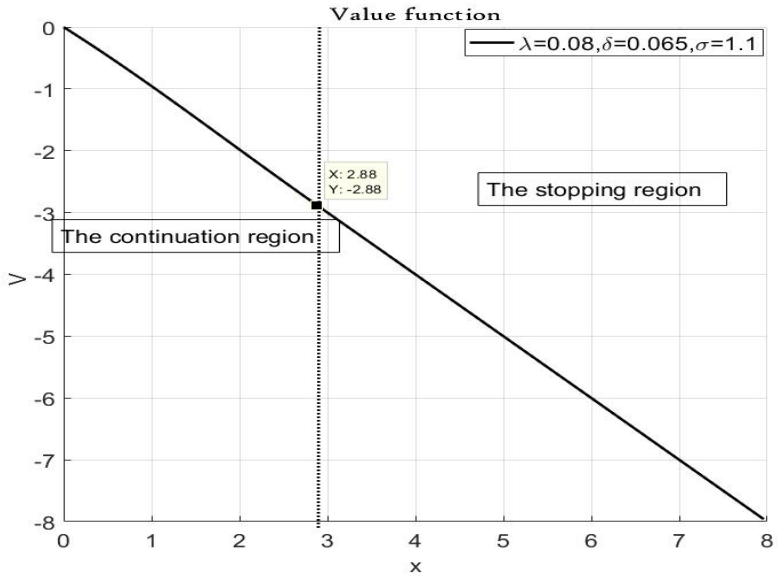


FIGURE 5.6 – La fonction valeur définie sur $[0, \bar{x}]$.

5.8 Appendice

On regroupe ici les énoncés des théorèmes utilisés dans le chapitre 5.

Définition 5.8.1. *(Le Dret [47])*
On dit que u est est holdérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constante C telle que, pour tout couple de points (x, y) dans $\bar{\Omega}$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

On note que u est continue et l'on pose

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y\in\bar{\Omega},x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}},$$

et dans le cas où $\bar{\Omega}$ est borné,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^{0}(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

Cette quantité est une norme des fonctions höldériennes $C^{0,\alpha}(\Omega)$ qui en fait un espace de Banach.
L'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \|u\|_{C^{k}(\bar{\Omega})} + \max_{\gamma=k} |\partial^{\gamma} u|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$

Définition 5.8.2. *(cf. pages 51-52 du livre de Gilbarg et Trudinger [32])*
Pour $0 < \alpha \leq 1$,

$$||u||_{C^{2,\alpha}} = ||u||_2 + ||u'||_2 + ||u"||_2 + \sup_{x,y\in[0,\bar{x}],x\neq y} \frac{|u''(x) - u''(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

•

On note $Du = (D_1 u, ...D_n u)$, avec $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.
On considère l'équation suivante

$$Lu = a^{ij}(x) D_{ij} u + b(x) D_j u + c(x) u = g(x), \ i, j = 1, 2...n,$$

avec g et les coefficients de L sont définis dans un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 5.8.3. *(Théorème 6.13. Gilbarg et Trudinger)*
Soit L strictement elliptique dans un domaine borné Ω, avec $c \leqslant 0$, g et les coefficients de L sont bornés et appartiennent à $C^{0,\alpha}(\Omega)$. On suppose que pour chaque $x \in \partial\Omega$, il existe une boule de rayon r, centrée à y, telle que : $B(y, r) \cap \partial\Omega = \{x\}$. Alors si φ est continue dans $\partial\Omega$, le problème de Dirichlet

$$Lu = g \text{ in } \Omega, \ u = \varphi \text{ on } \partial\Omega,$$

admet une unique solution $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Théorème 5.8.4. *(Principe du maximum, Friedman)*
Soit L elliptique dans Ω avec $c \leqslant 0$ dans Ω. On suppose que u et $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et satisfont $Lu \geq Lv$ dans Ω, $u \leqslant v$ sur $\partial\Omega$. Alors $u \leqslant v$ dans Ω

Théorème 5.8.5. *(Théorème du maximum de Berge)*
Soient deux espaces métriques : $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continue, et $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une application continue à valeur dans un compact non vide.
la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \quad X \quad &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \max\{f(x,y) | y \in F(x)\} \quad \textit{est continue dans } X. \end{aligned}$$

Théorème 5.8.6. *(Théorème de sélection mesurable)*
Soit X un espace métrisable séparable et $(S, \sum)$ un espace mesurable. Soit $\varphi : S \twoheadrightarrow X$ une correspondance faiblement mesurable avec des valeurs compactes non vides, et on suppose $f : S \times X \longrightarrow X$ une fonction. On définit la fonction valeur $m : S \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$m(x) = \max_{x \in \varphi(s)} f(s,x)$$

et la correspondance $\mu : S \twoheadrightarrow X$ par

$$\mu(s) = \{x \in \varphi(s) : f(s,x) = m(s)\}$$

alors

- *la fonction valeur m est mesurable,*
- *la correspondance* $\arg\max \mu$ *a des valeurs non vides et compactes,*
- *la correspondance* $\arg\max \mu$ *et admet une sélection mesurable.*

•

On considère le système suivant :

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)u_{x_j} + A_i(x)u] + B_i(x)u_{x_i} + B(x)u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f \tag{5.8.1}$$

dans un domaine borné Ω, où
$i = 1, ..., N,\ u = (u^1(x), ..., u^N(x)),\ f_i = (f_i^1(x), ..., f_i^N(x))$ et $f = (f^1(x), ..., f^N(x)), A_i(x),\ B_i(x)$ et $B(x)$ sont des matrices carrées avec N^2 éléments et $a_{i,j}$ sont des scalaires. La fonction $\varphi(x)$ donne la condition au bord

$$u|_S = \varphi|_S. \tag{5.8.2}$$

avec S est le bord de Ω.
On considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.8.7. *1. $a_{i,j}$ satisfait l'inégalité suivante*

$$\nu \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2 \leq a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2;\ \nu,\ \mu \text{ constantes } > 0 \tag{5.8.3}$$

2.

$$a_i^{im}, b_i^{im} ||_{L_q(\Omega)},\ ||b^{im}||_{L_{q/2}(\Omega)} < \mu,\ q > n. \tag{5.8.4}$$

3. $||f_i||_{L^2(\Omega)},\ ||f||_{L^{\frac{2\widehat{n}}{\widehat{n}+2}}(\Omega)},\ ||\varphi||_{W_2^1(\Omega)} < \infty$ *avec* $\widehat{n} = n$ *pour* $n > 2$ *et* $\widehat{n} = 2 + \varepsilon$, *avec* $\varepsilon > 0$, *pour* $n = 2$

où $||V||_{W_2^1(\Omega)} = \sqrt{(V.V)_{W_2^1(\Omega)}}$; $(V.W)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega V(x)W(x)dx$, *et* $W_2^1(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Remarque 5.8.8. *L'item 1 de l'hypothèse 5.8.7 implique que l'équation (5.8.1) est une équation uniformément elliptique .*

Théorème 5.8.9. *(Théorème 1.1. Ladyzhenskaya et Ural'tseva [45])*
Sous l'hypothèse 5.8.7, on a l'inégalité suivante :

$$||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \leq c(q)||u||^2_{L^2(\Omega)} + c\left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^{\frac{2\widehat{n}}{\widehat{n}+2}}(\Omega)}\right) + c(q,\Omega)||\varphi||^2_{W_2^1(\Omega)},$$

avec c dépend de n et μ de l'équation (5.8.3), la quantité $c(q)$ dépend de n, N, μ, ν et q de (5.8.4) et $c(q,\Omega)$ dépend de Ω.

Théorème 5.8.10. *(Arzelà–Ascoli) Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact et soit $(f_n))_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{D}$. Si la famille $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément bornée et équicontinue sur $\mathcal{D}$ alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ qui converge uniformément dans $\mathcal{D}$ vers une fonction $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.*

Définition 5.8.11. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définie sur $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{D}$ s'il existe $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M\ \forall x \in \mathcal{D}, f \in \mathcal{F}$*

Définition 5.8.12. *$\mathcal{F}$ est dit équicontinue sur $\mathcal{D}$ si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $x, y \in \mathcal{D}$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

Définition 5.8.13. *Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in H$ (x est la limite simple de la suite (x_n)) si on a :*

— *pour tout $y \in H$, la suite $(< y|x_n >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $< y, x >$.*

Bibliographie

[1] R. Aïd, D. Possamaï, and N. Touzi. Optimal electricity demand response contracting with responsiveness incentives. *arXiv preprint arXiv :1810.09063*, 2018. [3, 6, 11]

[2] C. Alasseur, I. Ekeland, R. Elie, N. H. Santibáñez, and D. Possamaï. An adverse selection approach to power pricing. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 58(2) :686–713, 2020. [3]

[3] R. W. Anderson, M. C. Bustamante, S. Guibaud, and M. Zervos. Agency, firm growth, and managerial turnover. *The Journal of Finance*, 73(1) :419–464, 2018. [7, 44]

[4] K. J. Arrow. The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. *The Review of Economic Studies*, 31(2) :91–96, 1964. [4]

[5] E. Auriol and P. M. Picard. Government outsourcing : Public contracting with private monopoly. *The Economic Journal*, 119(540) :1464–1493, 2009. [2]

[6] E. Auriol and P. M. Picard. A theory of bot concession contracts. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 89 :187–209, 2013. [19]

[7] R. Bellmann. Dynamic programming princeton university press. *Princeton, NJ*, 1957. [8]

[8] A. Bensoussan. *Stochastic Control of Partially Observable Systems*. Cambridge University Press, 2004. [9, 12, 14, 20, 21, 74]

[9] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve. *Stochastic Optimal Control : The Discrete-Time Case*. Athena Scientific, 2004. [55]

[10] B. Biais, T. Mariotti, J.-C. Rochet, and S. Villeneuve. Large risks, limited liability, and dynamic moral hazard. *Econometrica*, 78(1) :73–118, 2010. [7, 19, 43]

[11] K. Borch. Equilibrium in a reinsurance market. In *Foundations of Insurance Economics*, pages 230–250. Springer, 1992. [4]

[12] R. L. Burden and J. D. Faires. Numerical analysis, brooks. *Cole Pub*, 7, 1997. [101]

[13] A. Cadenillas, J. Cvitanić, and F. Zapatero. Optimal risk-sharing with effort and project choice. *Journal of Economic Theory*, 133(1) :403–440, 2007. [4]

[14] G. Carlier, I. Ekeland, and N. Touzi. Optimal derivatives design for mean–variance agents under adverse selection. *Mathematics and Financial Economics*, 1(1) :57–80, 2007. [8]

[15] Z. Chen. Existence and uniqueness for bsde with stopping time. *Chinese Science Bulletin*, 43(2) :96–99, 1998. [49]

[16] M. G. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1) :1–42, 1983. [9]

[17] J. Cvitanić, D. Possamaï, and N. Touzi. Moral hazard in dynamic risk management. *Management Science*, 63(10) :3328–3346, 2016. [19, 23, 44]

[18] J. Cvitanić, D. Possamaï, and N. Touzi. Dynamic programming approach to principal–agent problems. *Finance and Stochastics*, 22(1) :1–37, 2018. [5, 10, 44, 58]

[19] J. Cvitanic, X. Wan, and J. Zhang. First-best contracts for continuous-time principal-agent problems. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006, 2004. [4]

[20] J. Cvitanic, X. Wan, and J. Zhang. Principal-agent problems with exit options. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 8(1), 2008. [7, 74]

[21] J. Cvitanić and J. Zhang. Optimal compensation with adverse selection and dynamic actions. *Mathematics and Financial Economics*, 1(1) :21–55, 2007. [5, 44, 74]

[22] J. Cvitanic and J. Zhang. *Contract Theory in Continuous-Time Models*. Springer Science & Business Media, 2013. [8, 19, 44, 74]

[23] R. W. Darling and E. Pardoux. Backwards sde with random terminal time and applications to semilinear elliptic pde. *The Annals of Probability*, 25(3) :1135–1159, 1997. [13, 49, 50, 68]

[24] J.-P. Décamps and S. Villeneuve. A two-dimensional control problem arising from dynamic contracting theory. *Finance and Stochastics*, 23(1) :1–28, 2019. [7, 44]

[25] O. El Euch, T. Mastrolia, M. Rosenbaum, and N. Touzi. Optimal make-take fees for market making regulation. *Available at SSRN 3174933*, 2018. [8]

[26] N. El Karoui. Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour IX-1979*, pages 73–238. Springer, 1981. [8, 26, 27]

[27] R. Elie, E. Hubert, T. Mastrolia, and D. Possamaï. Mean-field moral hazard for optimal energy demand response management. *arXiv preprint arXiv :1902.10405*, 2019. [6]

[28] R. Elie and D. Possamaï. Contracting theory with competitive interacting agents. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(2) :1157–1188, 2019. [5, 74]

[29] G. E. Espinosa, C. Hillairet, B. Jourdain, and M. Pontier. Reducing the debt : is it optimal to outsource an investment ? *Mathematics and Financial Economics*, 10(4) :457–493, 2016. [2, 18]

[30] W. H. Fleming and R. W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2012. [9, 15, 27, 30, 95, 116, 118]

[31] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, volume 25. Springer Science & Business Media, 2006. [9, 95, 119]

[32] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. springer, 2015. [95, 117, 136]

[33] I. Hajjej, C. Hillairet, M. Mnif, and M. Pontier. Optimal contract with moral hazard for public private partnerships. *Stochastics*, 89(6-7) :1015–1038, 2017. [44, 47]

[34] P. Hartman. On boundary value problems for systems of ordinary, nonlinear, second order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 96(3) :493–509, 1960. [101, 103, 110]

[35] C. Hillairet and M. Pontier. A modelization of public–private partnerships with failure time. *Stochastic Analysis and Related Topics*, 22 :91–117, 2012. [2, 18]

[36] B. Holmstrom and P. Milgrom. Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 55(2) :303–328, 1987. [5, 7, 43, 74]

[37] R. A. Howard. *Dynamic programming and Markov processes*. John Wiley, 1960. [37]

[38] K. Hu, Z. Ren, and N. Touzi. Continuous-time principal-agent problem in degenerate systems. *arXiv preprint arXiv :1910.10527*, 2019. [6, 74]

[39] K. Hu, Z. Ren, and J. Yang. Principal-agent problem with multiple principals. *arXiv preprint arXiv :1904.01413*, 2019. [8]

[40] E. Iossa and D. Martimort. The simple microeconomics of public-private partnerships. *Journal of Public Economic Theory*, 17(1) :4–48, 2015. [2]

[41] E. Iossa, D. Martimort, and J. Pouyet. Partenariats public-privé. *Revue économique*, 59(3) :437–449, 2008. [2, 18]

[42] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Science & Business Media, 2009. [41]

[43] N. V. Krylov. *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order*, volume 7. Springer, 1987. [27]

[44] N. V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2008. [9, 95]

[45] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elleptic equations*, volume 46. Academic Press, 1968. [15, 95, 116, 118, 138]

[46] B. Lapeyre, A. Sulem, and D. Talay. Simulation of financial models : Mathematical foundations and applications. *to appear*, 2005. [9, 15, 95, 124, 125, 126]

[47] H. Le Dret. *Équations aux Dérivées Partielles Elliptiques non Linéaires*, volume 72. Springer, 2013. [136]

[48] R. Mason and J. Välimäki. Dynamic moral hazard and project completion. 2007. [7]

[49] T. Mastrolia and D. Possamaï. Moral hazard under ambiguity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 179(2) :452–500, 2018. [5, 11, 45]

[50] H. M. Müller. The first-best sharing rule in the continuous-time principal-agent problem with exponential utility. *Journal of Economic Theory*, 79 :276–280, 1998. [4, 11]

[51] S. Nakao. On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations. *Osaka Journal of Mathematics*, 9(3) :513–518, 1972. [34]

[52] H. Pagès and D. Possamaï. A mathematical treatment of bank monitoring incentives. *Finance and Stochastics*, 18(1) :39–73, 2014. [7, 19, 43]

[53] H. Pham. *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization With Financial Applications*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2009. [26, 27, 32, 65, 111, 112, 114]

[54] D. Possamaï and N. Touzi. Is there a golden parachute in sannikov's principal-agent problem ? *arXiv preprint arXiv :2007.05529*, 2020. [6, 44]

[55] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, volume 293. Springer Science & Business Media, 2013. [35]

[56] L. Rogers. Duality in constrained optimal investment and consumption problems : a synthesis. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002*, pages 95–131. Springer, 2003. [9]

[57] Y. Sannikov. A continuous-time version of the principal-agent problem. *The Review of Economic Studies*, 75(3) :957–984, 2008. [6, 12, 18, 19, 23, 44, 45, 58, 74]

[58] H. Schättler and J. Sung. The first-order approach to the continuous-time principal–agent problem with exponential utility. *Journal of Economic Theory*, 61(2) :331–371, 1993. [5]

[59] B. Strulovici and M. Szydlowski. On the smoothness of value functions and the existence of optimal strategies in diffusion models. *Journal of Economic Theory*, 159 :1016–1055, 2015. [12, 15, 32, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 104, 110]

[60] J. Sung. Linearity with project selection and controllable diffusion rate in continuous-time principal-agent problems. *The RAND Journal of Economics*, pages 720–743, 1995. [5]

[61] J. Sung. Optimal contracts under adverse selection and moral hazard : a continuous-time approach. *The Review of Financial Studies*, 18(3) :1021–1073, 2005. [8]

[62] N. Touzi. *Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE*, volume 29. Springer Science & Business Media, 2012. [60]

[63] Williams. On dynamic principal-agent problems in continuous time. *University of Wisconsin, Madison*, 2009. [5, 44, 74]

[64] N. Williams. A solvable continuous time dynamic principal–agent model. *Journal of Economic Theory*, 159 :989–1015, 2015. [6]

[65] R. Wilson. The theory of syndicates. *Econometrica : journal of the Econometric Society*, pages 119–132, 1968. [4]

[66] M. Yor. *Some Aspects of Brownian Motion : Part II : Some Recent Martingale Problems*. Birkhäuser, 2012. [51]

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES HADAMARD

Titre : Contrat optimal pour les partenariats public-privé avec aléa moral : une approche de contrôle stochastique.

Mots clés : Partenariat public-privé, principal-agent, aléa moral, partage du risque, contrôle stochastique avec observation partielle, inéquation variationnelle d'HJB, algorithme d'Howard.

Résumé : Dans cette thèse, on s'intéresse aux contrats de partenariat public-privé (PPP). Un PPP est un contrat à long terme entre une entité publique et une partie privée, aussi appelée consortium, dans lequel le public externalise la construction et/ou la gestion d'un bien public. Le consortium prend le risque et la responsabilité de gérer le projet. Le public s'engage en contre partie à lui verser une rente. Cependant, les efforts du consortium pour améliorer la valeur sociale du projet ne sont pas observables par le public. C'est un problème de principal-agent avec aléa moral où le principal est le public et l'agent est le privé. On suppose que le public paie le consortium continument et l'effort de l'agent affecte le drift de la valeur sociale du projet. On suppose que le public est neutre au risque et le consortium est adverse au risque. Dans le chapitre 2 de la thèse, on considère un contrat perpétuel entre une entité publique et un consortium. On caractérise le contrat optimal dans ce cadre d'aléa moral. On utilise une formulation forte : on considère différentes filtrations correspondant à différents niveaux d'informations comme dans le contexte de contrôle stochastique avec observation partielle. Dans cette approche, on utilise des méthodes de martingale et de contrôle stochastique. Dans le chapitre 3, on considère un problème du partenariat public-privé avec horizon aléatoire, dans lequel le public a la possibilité d'arrêter le contrat à une date aléatoire et donne une compensation au consortium. On résout ce problème de contrôle stochastique avec un problème d'arrêt optimal dans ce cadre d'aléa moral. Dans ce chapitre, on utilise la formulation faible : on suppose que le consortium change la distribution de la valeur sociale du projet en changeant son drift et cela revient à considérer une nouvelle mesure de probabilité qui dépend de l'effort de l'agent. Dans le chapitre 4, on s'intéresse aussi au problème de partenariat public-privé avec un horizon aléatoire mais en utilisant la formulation forte. Puis, on traite la cadre de partage de risque : on suppose que le public et le consortium ont les mêmes informations. On analyse numériquement la valeur d'information. Dans le chapitre 5, on étudie l'existence d'une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman qui apparaît dans notre étude théorique. Puis, on développe des résultats numériques pour la résolution numérique d'une équation Hamilton Jacobi-Bellman et l'inéquation variationnelle dans le cadre de notre étude numérique.

Title : Optimal contract for public-private partnerships with moral hazard : a stochastic control approach.

Keywords : Public Private Partnership, principal-agent, risk sharing, moral hazard, stochastic control under partial information, HJB variational inequality, Howard algorithm

Abstract : In this thesis, we are interested in the contract with moral hazard for public private partnerships (PPP). PPP is defined as a long-term contract between a private party and a public entity, for the construction and/or the management of an asset or public service, in which the consortium takes the risks and a responsibility to manage the project. The public undertakes to pay him a rent. However, the effort that the consortium does to improve the social value of the project is not observable by the public. It is a principal-agent problem with moral hazard, in which the principal is the public and the agent is the consortium. We assume that the public pays the consortium continuously and the effort of the consortium affects the drift of the social value of the project. We assume that the agent is risk averse and the public is risk-neutral. In chapter 2 of the thesis, we consider a perpetual contract between a public entity and a consortium. We characterize the optimal contract in this moral hazard framework. We use the strong formulation : we consider different filtrations corresponding to the different level of information as in the context of stochastic control under partial observation. In this approach, we use martingale methods and stochastic control techniques. In chapter3, we consider a public-private partnership problem with a random horizon, in which the public has the possibility to stop the contract at a fixed or a random time and gives compensation to the consortium. We solve this optimal stochastic control with optimal stopping problem in this context of moral hazard. We use the weak approach, that is the agent changes the distribution of the social value of the project by changing the drift and this amounts to considering a new probability that depends on the effort of the consortium. In the chapter 4, we also consider the problem of public-private partnership with a random horizon but using the strong formulation. Then, we deal with the risk-sharing framework, we assume that the public and the consortium have the same information. We analyze numerically the value of information. Chapter 5 focuses on the existence of a solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation that appears in our theoretical study. Then, we detail the numerical results for the numerical resolution of a Hamilton Jacobi-Bellman equation and variational inequality as part of our numerical study.

Institut Polytechnique de Paris
91120 Palaiseau, France