HAL
open science

Simulation numérique et modélisation de l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur un jet diphasique : application au domaine de la propulsion fusée à ergols liquides

Nicolas Rutard

▶ **To cite this version:**

Nicolas Rutard. Simulation numérique et modélisation de l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur un jet diphasique : application au domaine de la propulsion fusée à ergols liquides. Génie des procédés. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. Français. NNT : 2019SACLC088 . tel-02919916

HAL Id: tel-02919916

https://theses.hal.science/tel-02919916

Submitted on 24 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2019SACLC088

Simulation numérique et modélisation de l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur un jet diphasique : application au domaine de la propulsion fusée à ergols liquides

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à CentraleSupélec

Ecole doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Énergétique

Thèse présentée et soutenue à Châtillon, le 22 novembre 2019, par

M. Nicolas Rutard

Composition du Jury :

M. Christophe Bailly Professeur, LMFA, École Centrale de Lyon	Rapporteur
M. Julien Réveillon Professeur, CORIA, Université de Rouen	Rapporteur
Mme Françoise Baillot Professeure, CORIA, Université de Rouen	Examinatrice
M. Michael Oschwald Professeur, DLR, Université de Aix-la-Chapelle (Aachen)	Président
M. François Vuillot Ingénieur de recherche, ONERA	Examinateur
Mme Marie Théron Docteure, CNES	Examinatrice
M. Sébastien Ducruix Directeur de recherche, CNRS, Laboratoire EM2C, CentraleSupélec	Directeur de thèse
M. Luc-Henry Dorey Docteur, ONERA	Encadrant de thèse

Thèse de doctorat

Remerciements

Cette thèse a pu voir le jour grâce au soutien d'un grand nombre de personnes, tant d'un point de vue technique que psychologique.

Je suis tout d'abord reconnaissant envers l'ONERA et le CNES qui ont co-financé ces travaux et m'ont permis de réaliser ce doctorat dans des conditions de travail idéales.

Je remercie également mes deux rapporteurs Christophe Bailly et Julien Réveillon pour la rigueur et la bienveillance dont ils ont fait preuve lors de la lecture et de l'évaluation de ce mémoire. Mes remerciements vont aussi à Michael Oschwald et François Vuillot pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux ainsi que pour leurs retours positifs suite à la soutenance. Un grand merci également à Françoise Baillot et son équipe pour avoir accepté de partager leur expérience et pour nous avoir ouvert les portes du CORIA et de leur banc expérimental. De même, merci à Marie Théron pour son aide et son implication tout au long de cette thèse. Merci évidemment aussi à mon directeur de thèse Sébastien Ducruix pour son expertise, mais également pour son optimisme indéfectible. Enfin, je souhaite témoigner ma reconnaissance à mon encadrant Luc-Henry Dorey qui a su tirer mes travaux au plus haut de leur potentiel de par son exigence et ses nombreux conseils avisés. Si je ne devais retenir qu'une chose (ou deux) de nos nombreuses discussions, il s'agirait probablement de ta capacité d'écoute et de la confiance que tu a su accorder à mon jugement. Un grand merci pour ton implication dans ce projet.

Je tiens de plus à remercier la direction du DMPE Pierre Millan et Olivier Dessornes pour m'avoir accueilli au sein du département et m'avoir offert la possibilité d'y rester par la suite pour débuter ma carrière d'Ingénieur de Recherche.

Il me semble également essentiel de remercier l'ensemble des membres de l'équipe de développement PLM, dont j'ai le plaisir de faire aujourd'hui partie, car c'est grâce à leur expertise que le code CEDRE offre aujourd'hui autant de possibilités. Avoir accès à un tel code de calcul multi-physique a été un véritable privilège pour moi.

Je ne peux évidemment pas rédiger ces remerciements sans m'attarder sur la bande du 5e étage. Aujourd'hui séparés sur plusieurs sites, vous avez tous participé à rendre cette période inoubliable. Un grand merci à Daniel, loubard du 6e arrondissement, pour sa bienveillance et à Pascale, coureuse de haut vol (ne me faites pas dire ce que je n'ai pas dit), pour son énergie ; à Dominique pour m'avoir fait découvrir les bienfaits du vin jaune sur les esprits torturés des thésards et à Gérard pour ses précieux conseils m'ayant évité de nombreuses chutes à ski ; à Jean-Michel et Julien pour leur bonne humeur qui manque terriblement à la salle café ; et enfin à Papi Lionel, baroudeur au grand cœur m'ayant légué son bureau d'exception, et à Luc-Henry, qui a le droit à deux mentions dans ces remerciements car il n'a pas été qu'un simple encadrant, il est également devenu un ami au fil du temps. Mais le 5e étage c'est aussi la fougue de la jeunesse ! (quelque chose me dit que je vais la regretter celle-là…) Mention spéciale à Clément, maître du diphasique, père du SEG et pourfendeur du pas de temps local conservatif ; à Aymeric, père lui aussi, d'un petit être beaucoup plus mignon mais moins conservatif (mwarf…) ; à Adrien C. pour m'avoir démontré que 4 ans ce n'est pas si long au final (oups) et à Quentin pour cette soirée à Milan qui restera dans les mémoires. Et pour finir, merci aux p'tits derniers de l'équipe : Adrien

L. pour ta mesure et ta finesse légendaires, mes deux co-bureaux Bastien et Dicolas, pour avoir supporté mes innombrables chutes de stylos et pour m'avoir aidé à démontrer que F = 0 est un résultat décevant, surtout lorsqu'il s'agit de déplacer des galettes, et enfin Pierre, gourou de la redoutée secte du MF5 (qui n'a de 5 que le nom). Un immense merci à cette équipe hors du commun qui, je n'en doute pas, continuera d'égayer mon quotidien à l'ONERA.

De nombreux autres amis m'ont offert leur soutien au cours de cette thèse, mais il me semble ambitieux d'en présenter une liste exhaustive. Je me contenterai donc de remercier Robin et Cyril avec qui j'ai eu la chance de pouvoir m'évader de temps à autres en planeur. Je ne connais pas de moyen plus efficace pour oublier nos soucis l'espace d'une journée.

Il me tient également à cœur de remercier mes parents, mon frère et ma sœur. Même sans vous en rendre toujours compte, vous avez été pour moi un point d'ancrage indispensable pour mener à bien mes études. Vous avez su trouver les mots pour m'encourager, me remotiver et m'aider parfois à m'évader lorsque le poids du travail se faisait trop ressentir. Je vous dois beaucoup, voire plus encore.

Pour finir, je tiens à remercier Marion, ma moitié, sans qui rien n'aurait été possible. Tels le glaive de Minos et le fil d'Ariane, ton soutien inconditionnel et ta tendresse m'ont permis d'arriver à bout de cette thèse et de m'échapper de son labyrinthe sans fin. Je ne te remercierai probablement jamais assez...

Table des matières

Introduction **1**
La propulsion spatiale à ergols liquides . . . 1
Les instabilités de combustion de haute fréquence . . . 4
Généralités . . . 4
Étude des instabilités thermoacoustiques en conditions d'injection transcritiques . . . 8
Étude des instabilités thermoacoustiques en conditions d'injection subcritiques . . . 11
Objectifs de la présente étude . . . 12

I Description des phénomènes et des moyens mis en œuvre **15**

1 Éléments de compréhension des phénomènes mis en jeu **17**
1.1 Processus d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux . . . 18
1.1.1 Nombres adimensionnels . . . 18
1.1.2 Classification des régimes d'atomisation . . . 19
1.1.3 Description des mécanismes à l'origine de l'atomisation du jet liquide . . . 21
1.1.4 Propriétés macroscopiques des jets coaxiaux en régime d'atomisation de type fibre . . . 28
1.2 Comportement de jets liquides inertes atomisés sous excitation acoustique . . . 30

2 Méthodes de simulation d'écoulements diphasiques atomisés **37**
2.1 Synthèse bibliographique . . . 38
2.1.1 Équations de bilan . . . 38
2.1.2 Méthodes de reconstruction de l'interface . . . 38
2.1.3 Méthodes de diffusion de l'interface . . . 42
2.1.4 Méthodes cinétiques . . . 44
2.1.5 Méthodologies de couplage des différentes approches . . . 50
2.2 Stratégie de simulation retenue pour l'étude . . . 52
2.2.1 Simulation des zones à phases séparées et mixtes . . . 53
2.2.2 Simulation des zones à phase dispersée . . . 64
2.2.3 Modélisation des termes sources . . . 68
2.2.4 Méthodes numériques de résolution . . . 73

II Évaluation et développement du code CEDRE pour la simulation de mécanismes acoustiques non linéaires **79**

3 Formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur une sphère rigide soumise à une onde acoustique multi-harmonique plane et stationnaire **81**
3.1 Introduction . . . 82
3.2 Notions générales sur la pression et la force de radiation acoustique . . . 84

3.3 Cas particulier d'un objet sphérique . . . 86
3.3.1 Formulation de la force de radiation acoustique instantanée . . . 86
3.3.2 Formulation de la force de radiation acoustique moyenne . . . 95
3.3.3 Démonstration de l'intérêt de la formulation multi-harmonique . . . 98

4 Excitation et propagation d'ondes acoustiques planes avec le code CEDRE 99
4.1 Solution analytique de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane . . . 100
4.2 Validation de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane par le code Cedre . . . 101
4.3 Validation de la méthode d'excitation pour imposer une onde acoustique stationnaire avec le code Cedre . . . 103

5 Simulation des mécanismes de radiation acoustique avec le code CEDRE 107
5.1 Validation du solveur dédié aux phases séparées . . . 108
5.1.1 Choix du schéma numérique pour l'approximation des flux convectifs . . . 108
5.1.2 Restitution du profil de pression de radiation acoustique autour d'un obstacle . 111
5.1.3 Restitution de la force de radiation acoustique . . . 114
5.2 Évaluation et développement du solveur dédié à la phase dispersée . . . 116
5.2.1 Restitution de la fragmentation des gouttes par la pression de radiation acoustique . . . 116
5.2.2 Restitution de la force de radiation acoustique sur les gouttes . . . 118

III Étude de la réponse d'un jet liquide atomisé sous excitation acoustique transverse par simulation numérique aux grandes échelles 121

6 Cas de simulation et spécificités numériques 123
6.1 Sélection et présentation de la configuration à simuler . . . 124
6.1.1 Choix du dispositif expérimental . . . 124
6.1.2 Présentation détaillée du dispositif expérimental retenu . . . 125
6.2 Définition des conditions d'injection . . . 127
6.3 Définition et caractérisation des perturbations acoustiques . . . 130
6.3.1 Définition de l'excitation acoustique . . . 130
6.3.2 Caractérisation du champ acoustique . . . 131
6.4 Mise en données des simulations numériques . . . 133
6.4.1 Définition du domaine de calcul et de sa discrétisation spatiale . . . 133
6.4.2 Définition des conditions aux limites . . . 136
6.4.3 Choix des modèles numériques . . . 139
6.4.4 Élaboration de la stratégie de simulation . . . 144

7 Illustration de la stratégie de simulation de jets diphasiques atomisés 147
7.1 Modélisation de l'atomisation primaire . . . 148
7.2 Modélisation de la fragmentation des gouttes du spray . . . 149
7.3 Comparaison aux résultats expérimentaux . . . 154

8 Comportement de l'écoulement diphasique face aux perturbations acoustiques 157
8.1 Comportement du cœur liquide sous excitation acoustique . . . 158
8.1.1 Aplatissement du cœur liquide . . . 158
8.1.2 Rétrécissement du cœur liquide . . . 161
8.2 Influence de l'excitation acoustique sur l'atomisation primaire . . . 166
8.2.1 Analyse du point de vue du solveur à phases séparées . . . 166
8.2.2 Analyse du point de vue du solveur à phase dispersée . . . 170
8.3 Réponse du spray à l'excitation acoustique . . . 175

8.3.1 Angle d'ouverture du spray 176
8.3.2 Couplage entre le système d'injection et les ondes acoustiques 185
8.3.3 Oscillation transverse des gouttes du spray 202
8.4 Conclusion du chapitre 204

IV Modélisation simplifiée de la déviation de jets liquides atomisés par les contraintes acoustiques 207

9 Mesure et modélisation de la déviation de la phase dispersée 209
9.1 Principe de mesure expérimentale de la déviation du spray 210
9.2 Comparaison des mesures numériques aux mesures expérimentales 211
9.3 Modélisation simplifiée de la trajectoire des gouttes 216

10 Mesure et modélisation de la déviation du cœur liquide 221
10.1 Première approche : modèle à l'équilibre 222
10.2 Seconde approche : calcul de trajectoire de paquets liquides 224
10.3 Application au PF-Onera 230

Conclusion générale 235

Perspectives 239

V Annexes 243

A Caractérisation d'un spray modélisé par l'approche sectionnelle affine 245
A.1 Traitement de données instantanées et locales 245
A.1.1 Distributions en taille de gouttes 245
A.1.2 Grandeurs moyennes sur l'espace des tailles 249
A.1.3 Diamètres statistiques 251
A.2 Traitement de données moyennes en temps et/ou en espace 253
A.2.1 Moyennes de grandeurs extensives 253
A.2.2 Moyennes de grandeurs intensives 258
A.2.3 Diamètres statistiques moyens 265

B Particularité de la modélisation de l'atomisation de la phase liquide au sein du DPS 269

C Schéma de flux HLLC et sa version bas-Mach 271
C.1 Schéma de flux HLLC 271
C.2 Correction bas-Mach du schéma de flux HLLC 273

D Formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur un cylindre rigide soumis à une onde acoustique multi-harmonique plane et stationnaire 275
D.1 Formulation de la force de radiation acoustique instantanée 275
D.2 Formulation de la force de radiation acoustique moyenne 285

E Formulation analytique de la pression de radiation acoustique issue d'une onde acoustique plane sans obstacle 287
E.1 Onde acoustique plane progressive 287
E.2 Onde acoustique plane stationnaire 288

F Conditions aux limites de non-réflexion dans le code Cedre 289
F.1 Formulation des conditions aux limites 289

F.2 Évaluation du caractère non réfléchissant 291

Références **293**

Introduction

La propulsion spatiale à ergols liquides

Un intérêt croissant ne cesse d'être porté au secteur spatial depuis la seconde moitié du XXème siècle. Celui-ci s'articule aujourd'hui autour de différentes missions telles que l'exploration scientifique, la conquête spatiale et le lancement de satellites artificiels. Quel que soit leur objectif final, ces différentes missions partagent toutes une nécessité commune : accéder au-delà de l'atmosphère. Pour cela, le mode de propulsion majoritairement utilisé actuellement est la propulsion chimique. Ce mode de propulsion est basé sur la troisième loi de Newton, ou principe d'action-réaction, et nécessite l'emport à la fois d'un combustible et d'un comburant. La combustion de ces deux éléments libère une énergie chimique importante transformée par la suite en énergie cinétique lors de l'accélération des produits de combustion par une tuyère, fournissant de ce fait la poussée nécessaire au décollage de l'engin spatial. Il existe deux catégories de moteurs spatiaux utilisant ce type de propulsion, à savoir :

- les moteurs à propulsion solide constitués d'un bloc de propergol composé à la fois du combustible et du comburant. Le bloc de propergol est percé en son centre par un canal longitudinal servant de chambre de combustion. La combustion de la surface interne du propergol produit alors les gaz de combustion qui seront ensuite expulsés par la tuyère. Ce type de moteur a pour principaux avantages d'être simple à concevoir et de fournir une poussée très importante. Celle-ci est cependant faiblement modulable et ne peut être stoppée avant la combustion complète du bloc de propergol. C'est ce type de moteur que l'on retrouve par exemple sur l'étage d'accélération à poudre (EAP) du lanceur européen Ariane 5 (cf. figure 1) qui fournit l'essentiel de la poussée au décollage.

- les moteurs à propulsion liquide. Cette catégorie de moteur fait appel à un couple d'ergols (le combustible et le comburant) stockés séparément sous forme liquide pour maximiser leur densité et ainsi minimiser le volume des réservoirs de stockage pressurisés. Deux types d'ergols liquides existent, à savoir les ergols stockables qui ont l'avantage de pouvoir être stockés à température ambiante (*e.g.* diméthylhydrazine et peroxyde d'azote) et les ergols cryogéniques plus performants mais associés à des contraintes technologiques plus importantes puisque stockés à des températures très faibles. Parmi les ergols cryogéniques, le couple le plus performant en terme d'impulsion spécifique [1] est le couple oxygène/hydrogène liquides (LOX/LH_2). L'hydrogène liquide présente cependant une densité assez faible et requiert ainsi un volume de stockage important. Le méthane liquide (LCH_4), plus dense, représente alors une alternative intéressante à l'hydrogène, malgré son efficacité moindre [2]. Les moteurs à propulsion liquide offrent une modularité de poussée et une I_{sp} plus importantes que les moteurs à propulsion solide et sont, pour certains, réallumables. Ils sont néanmoins plus complexes à concevoir. On retrouve ces moteurs

1. L'impulsion spécifique (I_{sp}) représente le temps pendant lequel un kilogramme de combustible peut produire une poussée équivalente à une masse d'un kilogramme dans le champ gravitationnel terrestre.

2. Le moteur Vulcain 2 propulsé par le couple d'ergols LOX/LH_2 offre une I_{sp} d'environ 430 s dans le vide, contre une I_{sp} de 380 s annoncée pour le moteur Raptor de SpaceX propulsé par le couple LOX/LCH_4.

notamment sur l'étage principal et l'étage supérieur cryotechniques (respectivement EPC et ESC) du lanceur Ariane 5 (cf. figure 1).

Les travaux de recherche dans lesquels s'inscrit cette thèse portent sur les technologies mises en œuvre pour la série de lanceurs Ariane, et plus particulièrement sur les moteurs à ergols cryogéniques. Différentes méthodes d'injection existent pour la mise en contact des ergols dans la chambre de combustion. Cependant, seule l'injection coaxiale sera traitée dans ce mémoire, car il s'agit là de la technologie principale retenue pour les lanceurs Ariane.

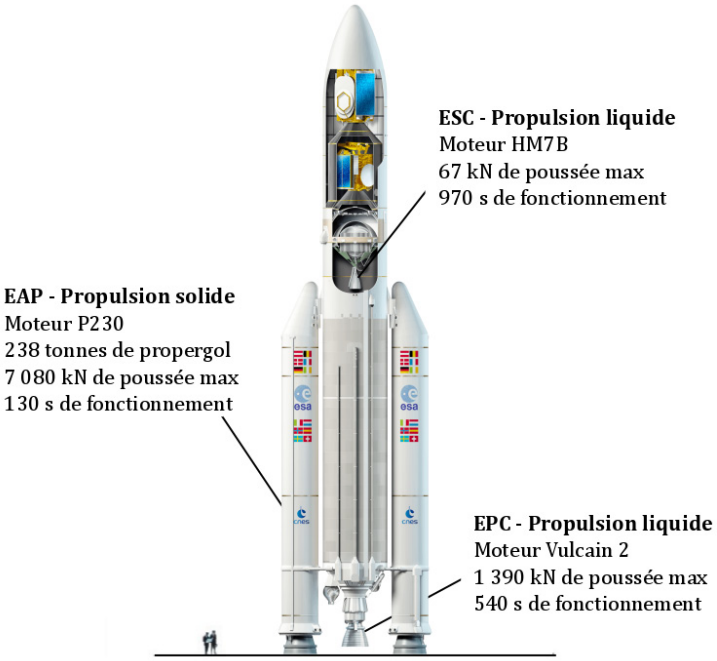


Figure 1 – Lanceur européen Ariane 5 ECA. Source : Arianespace.

(a) **(b)**

Figure 2 – Moteurs (a) HM7B et (b) Vulcain 2 du lanceur Ariane 5 ECA. Source : Capcom Espace.

Les moteurs cryotechniques sont en général associés à des pressions de fonctionnement très variées au cours de leur cycle de vie, avec notamment un allumage au sol à pression atmosphérique, des points de fonctionnement nominaux généralement à très haute pression de chambre ou encore des réallumages hors atmosphère. Selon les valeurs de pression dans la chambre de combustion, les ergols peuvent

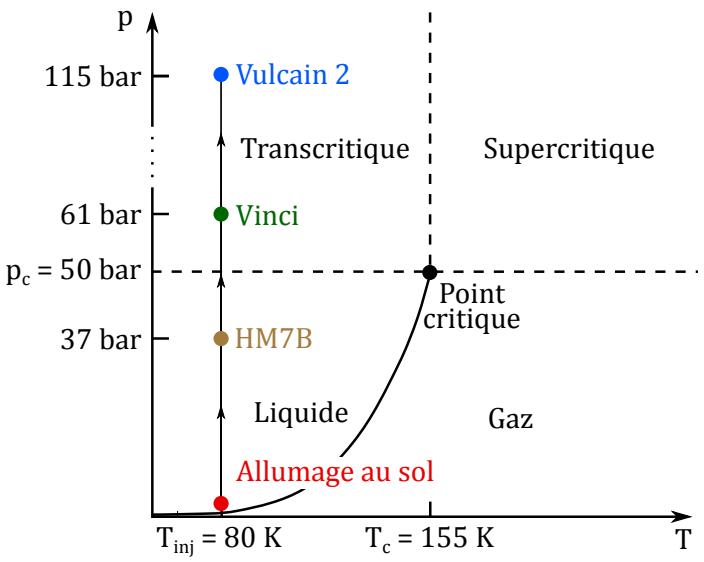


Figure 3 – Diagramme des phases de l'oxygène dans l'espace p-T et position des points de fonctionnement nominaux des moteurs de la série Ariane. Source : Nist.

alors être injectés sous des états thermodynamiques variables en fonction de leurs propriétés critiques. Plusieurs technologies de fonctionnement existent pour les moteurs cryotechniques, mais seuls les moteurs à cycle à générateur de gaz et à cycle Expandeur sont traités dans ce mémoire ; la première architecture étant utilisée par les moteurs HM7B et Vulcain 2 du lanceur Ariane 5 (cf. figure 2), et la deuxième étant utilisée par le moteur Vinci qui propulsera dans les prochaines années le deuxième étage du lanceur Ariane 6. Ces deux architectures diffèrent par la méthode d'entraînement des turbopompes destinées à alimenter la chambre de combustion en ergols. Néanmoins, leur point commun réside dans le passage préalable d'une part ou de la totalité du combustible dans un circuit de refroidissement régénératif autour des parois de la chambre afin de limiter leur température. Le combustible est ainsi chauffé à une température supérieure à sa température critique (33 K pour l'hydrogène et 191 K pour le méthane) et se voit injecté à l'état gazeux ou supercritique selon la pression dans la chambre de combustion (pression critique de 13 bar pour l'hydrogène et 46 bar pour le méthane). En ce qui concerne le comburant, sa température en sortie de turbopompe et à l'injection dans la chambre de combustion reste inférieure à sa température critique (155 K pour l'oxygène). On distingue alors, pour le LOX, deux états thermodynamiques possibles à l'injection selon la pression dans la chambre de combustion (cf. figure 3) :

1. l'état liquide lorsque la pression de chambre est inférieure à la pression critique du comburant (50 bar pour l'oxygène). On parle alors de régime de fonctionnement subcritique. Ce régime est associé au démarrage du moteur au sol à pression atmosphérique ou bien hors atmosphère dans le cas des moteurs réallumables et/ou réutilisables, mais également à des phases de fonctionnement nécessitant une poussée limitée. Dans le cas du moteur HM7B, ce régime de fonctionnement correspond même au point de fonctionnement nominal. Dans ce régime de fonctionnement, l'écoulement en sortie d'injecteur correspond alors à un jet liquide entouré d'un co-courant gazeux ou supercritique et fait intervenir des phénomènes physiques particuliers comme l'atomisation du jet, la fragmentation des gouttes ou encore leur évaporation.
2. l'état transcritique lorsque la pression de chambre est supérieure à la pression critique du comburant. On parle alors de régime de fonctionnement transcritique. Ce régime est associé au point de fonctionnement nominal pour la plupart des moteurs (*e.g.* Vulcain 2 et Vinci). Dans ces conditions, la tension de surface entre les deux fluides injectés devient négligeable, donnant lieu à un mélange des ergols qui n'est plus contrôlé par l'atomisation du jet dense mais par la turbulence.

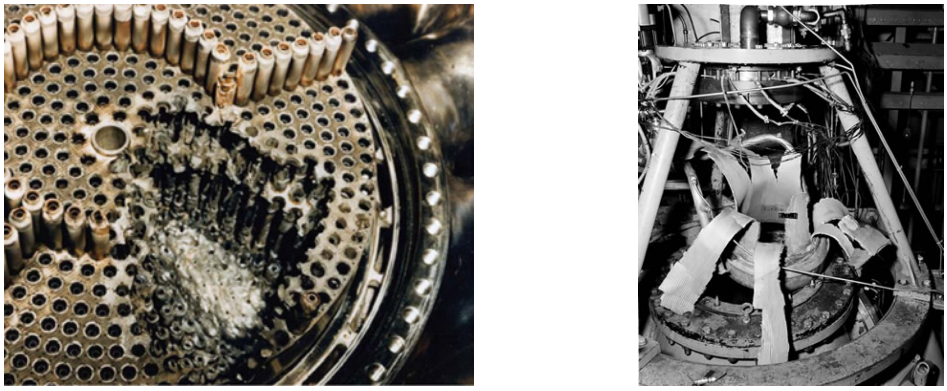
L'une des principales difficultés lors de la conception de moteurs-fusées à ergols liquides est d'assu-

rer la stabilité de la combustion tout au long de leur cycle de vie, les instabilités de combustion pouvant mener à l'échec de la mission.

Les instabilités de combustion de haute fréquence

Généralités

On distingue en général trois types d'instabilités de combustion (Barrère et Williams [8]) : les instabilités intrinsèques liées à la cinétique de combustion elle-même, les instabilités de basse fréquence liées au couplage entre le processus de combustion dans la chambre et le système d'alimentation en ergols, et les instabilités de Haute Fréquence (HF), ou instabilités thermoacoustiques. Ces dernières sont considérées comme les plus dévastatrices et sont issues d'un couplage complexe entre le processus de combustion des ergols et les fluctuations de pression au sein de la chambre de combustion conduisant à une augmentation rapide des contraintes mécaniques et thermiques sur les parois du système propulsif et la plaque d'injection. Les conséquences peuvent être dramatiques, allant d'une perte de performance du moteur à sa destruction totale, comme le montre la figure 4 représentant les dégâts causés par des instabilités de combustion HF à la plaque d'injection du moteur principal SSME de la navette spatiale américaine et une chambre de combustion testée sur le site *Rocket Engine Test Facility* de la Nasa en 1958.



(a) **(b)**

Figure 4 – Dégâts causés par des instabilités de combustion HF à (a) une plaque d'injection et (b) une chambre de combustion de moteurs à ergols liquides. Source : Nasa.

D'un point de vue théorique, le couplage thermoacoustique à l'origine des instabilités HF est issu de l'aspect fortement instationnaire de la combustion cryogénique. La turbulence de l'écoulement induit une oscillation répétée des flammes et une variation locale du taux de dégagement de chaleur $\dot{q}$. À travers la succession périodique de compressions et de détentes des gaz générée par ces ocillations, la flamme se conduit alors comme une source acoustique capable d'alimenter et d'amplifier les fluctuations de pression dans la chambre. Le critère le plus utilisé dans le domaine des instabilités de combustion pour évaluer la stabilité d'un système repose sur le principe de Rayleigh [128]. Celui-ci stipule que le couplage thermoacoustique est susceptible de conduire à une instabilité locale lorsque l'apport d'énergie acoustique par les fluctuations du taux de dégagement de chaleur $\dot{q}'$ intervient en une zone et un instant où les fluctuations de pression p' sont maximales, donc en phase. Ce principe conduit à la formulation du critère de Rayleigh local qui exprime que la combustion peut être localement instable si :

$$R_{local} = \frac{1}{T} \int_T p' \dot{q}' \, \mathrm{d}t > 0, \tag{1}$$

avec T un temps de moyenne suffisamment long. Dans une chambre de combustion dont on notera le volume V, des zones d'amplification et d'atténuation peuvent en réalité coexister et se compenser. Pour qu'un système puisse globalement être instable, le critère de Rayleigh global stipule :

$$R_{global} = \int_V R_{local} \, \mathrm{d}V > 0. \tag{2}$$

Pour aller plus loin dans la caractérisation de la stabilité d'un système, si l'on néglige l'écoulement moyen et qu'on considère le dégagement de chaleur moyen nul, on peut écrire le bilan local et instantané d'énergie acoustique dans le milieu réactif comme (Poinsot et Veynante [124]) :

$$\frac{\partial e_{ac}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}_{ac} = s_{ac} - d_{ac}, \tag{3}$$

avec

$$\begin{cases} e_{ac} = \dfrac{1}{2} \dfrac{p'^2}{c_0^2 \rho_0} + \dfrac{1}{2} \rho_0 \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}', \\ \boldsymbol{f}_{ac} = p' \boldsymbol{u}', \\ s_{ac} = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma p_0} p' \dot{q}', \end{cases} \tag{4}$$

où ρ_0, p_0 et c_0 sont respectivement la masse volumique, la pression et la vitesse du son à l'équilibre, tandis que $\boldsymbol{u}'$ est la vitesse acoustique et γ est l'indice adiabatique du milieu. Par ailleurs, e_{ac} est la densité volumique d'énergie acoustique, $\boldsymbol{f}_{ac}$ est la densité surfacique de flux d'énergie acoustique et s_{ac} représente le terme source acoustique volumique provenant de la combustion. Le terme d_{ac} représente quant à lui le terme de dissipation acoustique et est assez difficile à formuler de façon théorique. D'après ce bilan, l'énergie acoustique croît localement lorsque $s_{ac} > \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}_{ac} + d_{ac}$, *i.e.* lorsque la combustion apporte une énergie supérieure à la divergence du flux acoustique ajoutée au terme de dissipation. En intégrant sur le volume du système V et une durée T, le bilan d'énergie global moyen s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ac}}{\partial t} + \mathcal{F}_{ac} = \mathcal{S}_{ac} - \mathcal{D}_{ac}, \tag{5}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ac} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T \int_V e_{ac} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t, \\ \mathcal{F}_{ac} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T \oint_V \boldsymbol{f}_{ac} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t, \\ \mathcal{S}_{ac} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T \int_V s_{ac} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t, \\ \mathcal{D}_{ac} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T \int_V d_{ac} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t, \end{cases} \tag{6}$$

où $\mathrm{d}S$ est l'élément de surface pour l'intégration des flux et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal à cette surface. Si l'on reprend le critère de Rayleigh global (2), la croissance de l'énergie acoustique au sein de la chambre de combustion intervient alors lorsque $R_{global} > \gamma p_0 / (\gamma - 1) (\mathcal{F}_{ac} + \mathcal{D}_{ac})$. On démontre ainsi que le critère de Rayleigh (2) est une condition nécessaire mais non suffisante à l'instabilité du système propulsif. [3] Pour que les fluctuations de pression puissent être amplifiées par la combustion, il faut non seulement

3. On rappelle que l'écoulement et le dégagement de chaleur moyens ont été négligés pour obtenir ces équations. En réalité, Brear *et al.* [14] démontrent que, sans ces simplifications, des termes supplémentaires au terme de Rayleigh interviennent. Le critère de Rayleigh reste cependant le critère de stabilité le plus utilisé.

que les termes p' et $\dot{q}'$ soient en phase mais également que le dégagement de chaleur par la flamme soit suffisamment élevé pour compenser la dissipation des ondes dans la chambre. [4]

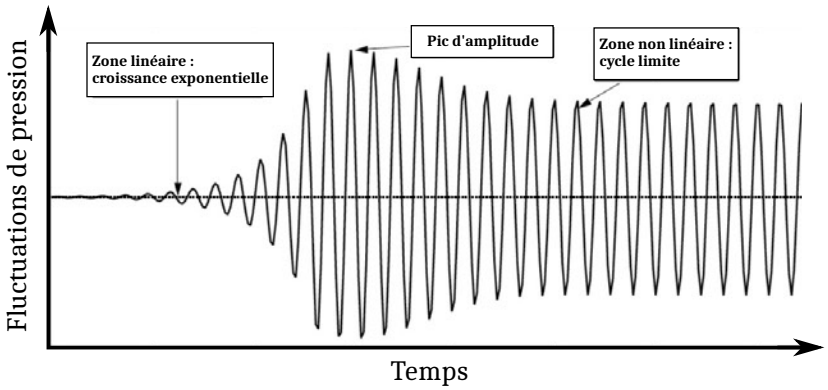


Figure 5 – Signal temporel de pression caractéristique d'un système propulsif instable (Poinsot et Veynante [124]).

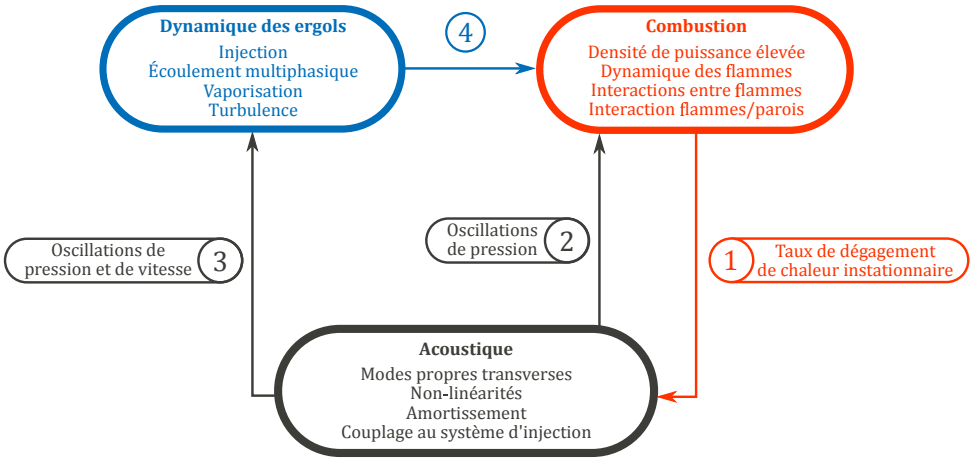


Figure 6 – Schématisation du processus de couplage thermoacoustique.

Dans les moteurs-fusées, les puissances thermiques en jeu sont très importantes (environ 3 GW pour le moteur Vulcain 2 [5]). Le processus de combustion représente ainsi une source acoustique importante et peut rapidement conduire à l'amplification des fluctuations de pression. À titre d'exemple, un signal temporel de pression caractéristique d'un système instable est présenté en figure 5 (Poinsot et Veynante [124]). On y observe une première zone d'amplification exponentielle contrôlée par des mécanismes de couplage linéaires. Si les fluctuations de pression ne conduisent pas à la destruction du moteur, l'amplification se poursuit jusqu'à atteindre un cycle limite contrôlé par des mécanismes non linéaires. Ce phénomène de saturation peut soit être dû à une croissance de la dissipation des ondes acoustiques ou à un déphasage des termes p' et $\dot{q}'$. Dans un moteur cryotechnique, le processus d'amplification intervient majoritairement pour les ondes de pression dont les fréquences correspondent aux modes propres de la chambre de combustion car celle-ci agit comme une caisse de résonance. Les fréquences associées sont en général de l'ordre du kHz, d'où le terme *instabilités de haute fréquence*. Par ailleurs, ce sont en général les modes transverses les plus destructeurs car il s'agit des modes acoustiques les moins susceptibles d'être amortis par la tuyère (Crocco et Zheng [25]). De façon schématique, le processus de couplage thermoacoustique est représenté en figure 6. L'approche théorique précédente

4. Notons que si les fluctuations p' et $\dot{q}'$ sont en opposition de phase, le terme source acoustique peut agir comme un terme puits conduisant à l'atténuation des ondes acoustiques.

5. Source : groupe Safran

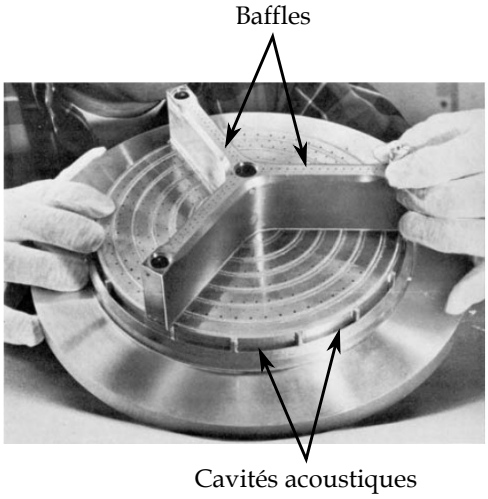


Figure 7 – Plaque d'injection équipée de baffles et de cavités acoustiques pour réduire les fluctuations de pression au sein d'une chambre de combustion (Harrje et Reardon [67]).

montre qu'il est assez simple d'évaluer l'influence ① des fluctuations du taux de dégagement de chaleur sur les ondes acoustiques. Il est en revanche plus compliqué d'évaluer l'interaction inverse ② des fluctuations de pression sur la flamme car celle-ci fait intervenir des mécanismes complexes fortement couplés et pour certains non linéaires. Par ailleurs, l'interaction ③-④ entre l'acoustique et l'écoulement diphasique réactif joue elle aussi un rôle important dans la réponse des flammes et la stabilité du système. Ce processus d'interaction dépend du régime d'injection considéré puisqu'il peut notamment faire intervenir les mécanismes d'atomisation, de fragmentation et d'évaporation dans le cas du régime subcritique associé à la présence de jets d'oxygène à l'état liquide. Dans le domaine des instabilités de combustion, le challenge principal réside ainsi dans la compréhension et la formulation de l'influence des ondes acoustiques sur la combustion des ergols à travers les circuits d'interaction ②, ③ et ④.

Au cours de la seconde moitié du XXème siècle, la préoccupation principale de la communauté spatiale était de résoudre le plus rapidement possible les problèmes de stabilité rencontrés sur les moteurs en cours de conception, avec des limitations budgétaires bien moins contraignantes qu'actuellement. À cette époque, la plupart des progrès dans le domaine ont ainsi été réalisés au moyen d'essais moteurs à échelle réelle durant lesquels étaient testées de façon répétée des solutions techniques telles que l'ajout de baffles ou de cavités acoustiques (cf. figure 7) pour réduire les fluctuations de pression au sein des chambres de combustion. L'exemple le plus parlant est celui du programme Apollo pour lequel plus de 2 000 essais ont été effectués pour résoudre les problèmes de stabilité de combustion rencontrés sur le moteur F-1. Un historique exhaustif des essais réalisés lors de ce programme est proposé par Oefelein et Yang [118]. L'apport de cette approche *trial and error* à la compréhension des mécanismes physiques en jeu était en revanche assez faible en raison de l'accès optique et instrumental limité inhérent aux conditions sévères de fonctionnement des moteurs. Par ailleurs, l'aspect confidentiel de ces travaux ne facilitait pas le partage efficace des connaissances dans le domaine. C'est pourquoi l'intégralité des connaissances pratiques et théoriques dans le domaine à la fin du XXème siècle a été regroupée dans différents ouvrages publics de référence (Harrje et Reardon [67], Anderson et Yang [3] et Culick [27]).

Pour continuer à faire progresser les connaissances dans le domaine tout en répondant au besoin actuel de l'industrie aérospatiale de réduire les coûts de conception des moteurs, une approche à trois volets a émergé depuis le début du siècle courant, combinant des expériences sur des configurations de laboratoire à échelle réduite, la simulation numérique CFD (*Computational Fluid Dynamics*) de haute performance et la modélisation bas-ordre (Poinsot [123]). La modélisation bas-ordre est notamment utilisée dans l'industrie lors de la conception des moteurs pour prédire la stabilité des systèmes propul-

sifs à bas coût. Ce type de modélisation, destiné à décrire de façon simple la relation entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur $\dot{q}'$ et les perturbations acoustiques, a été initié par Crocco et Zheng [25] avec le formalisme n-τ. Il s'agit là d'une approche linéaire reposant essentiellement sur la définition d'une relation explicite entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et les variations de pression du milieu entre un instant t et un instant $t - \tau$, où τ représente le délai entre l'injection des ergols et leur combustion. Dans cette approche, un paramètre supplémentaire n, également désigné comme l'indice d'interaction, est considéré pour représenter la sensibilité de la combustion des ergols aux fluctuations de pression. L'approche n-τ donne lieu à la relation locale suivante :

$$\frac{\dot{q}'}{\overline{q}} = n\frac{p'(t) - p'(t-\tau)}{\overline{p}} \tag{7}$$

où $\overline{q}$ et $\overline{p}$ représentent les moyennes temporelles du dégagement de chaleur et de la pression. Malgré une bonne estimation de la croissance initiale exponentielle des fluctuations de pression observée précédemment en figure 5, cette approche n'est pas adaptée pour prédire le phénomène de saturation non linéaire caractéristique des instabilités thermoacoustiques. Par conséquent, afin de prédire les amplitudes et les fréquences du cycle limite, qui sont des paramètres clés dans la conception d'un système propulsif, des approches non linéaires ont été proposées depuis et peuvent être divisées en deux groupes. La première repose sur l'idée que la combustion est le principal élément non linéaire régissant le phénomène de saturation. Les approches de ce groupe sont alors basées sur la définition et l'application de la fonction descriptive de flamme (FDF), selon laquelle la réponse des fluctuations du taux de dégagement de chaleur à la modulation acoustique est exprimée en fonction de la fréquence et de l'amplitude acoustique (Gelb et Vander Velde, Noiray *et al.* [55, 116]). Au contraire, la clé de voûte du second groupe est l'idée que les paramètres du cycle limite sont fixés par des non-linéarités acoustiques et peuvent être prédits en utilisant l'approche unifiée de Zinn et Lores [171] (voir aussi Culick [26]) basée sur la projection du champ de pression sur les modes propres du système et l'utilisation du modèle n-τ pour décrire l'évolution temporelle des fluctuations de pression de chacun des modes de façon indépendante.

Malgré leur rapidité d'exécution et le faible coût de calcul associé, ces approches bas-ordre souffrent indéniablement d'un faible degré de généralisation puisque les fonctions descriptives de flammes et les paramètres n-τ dépendent généralement du cas et des conditions de fonctionnement. Il est alors aujourd'hui essentiel de progresser vers une meilleure compréhension des mécanismes de couplage thermoacoustiques à l'origine des instabilités de combustion de manière à pouvoir décrire la dépendance de $\dot{q}'$ en fonction de p' de façon phénoménologique et non plus paramétrique. Puisque l'on a vu précédemment que les mécanismes de couplage dépendent du régime de fonctionnement considéré, notamment à cause de la différence de tension de surface, les différents travaux scientifiques réalisés dans le cas de régimes trans- et subcritiques sont présentés séparément dans la suite de cette introduction.

Étude des instabilités thermoacoustiques en conditions d'injection transcritiques

Pour progresser dans la compréhension des mécanismes de couplage thermoacoustique au sein des moteurs-fusées cryotechniques, une approche possible est de réaliser des campagnes expérimentales en laboratoire sur des configurations à échelle réduite. Le coût de fonctionnement de ce type de configuration est en effet moins important que pour des moteurs à échelle réelle. Par ailleurs, l'accès simplifié à la chambre de combustion offre des possibilités de métrologie bien plus importantes. Un certain degré de complexité doit cependant être conservé afin d'imposer des conditions de fonctionnement les plus représentatives possible des moteurs réels, sans quoi certains mécanismes physiques de grande importance pourraient faire défaut (*e.g.* interaction flamme-flamme ou flamme-paroi, couplage acoustique entre la chambre de combustion et le système d'injection des ergols, pression de chambre et puissance thermique insuffisantes, cf. Poinsot [123]).

L'une des configurations les plus intéressantes de la littérature dans le domaine est la chambre de combustion française BHP du banc Mascotte de l'Onera (Habiballah *et al.* [62]). Il s'agit d'une

chambre de combustion de section rectangulaire alimentée en oxygène et en hydrogène ou méthane par un injecteur coaxial isolé sous une pression moyenne maximale de 60 bar. Un des points forts de cette chambre est la présence d'une fenêtre transparente permettant de visualiser directement la flamme dans la zone proche du plan d'injection. Une seconde configuration de grand intérêt associée au banc Mascotte est la chambre de combustion BHP-HRM, cette fois-ci de section circulaire et alimentée en ergols par 5 injecteurs coaxiaux sous une pression moyenne maximale de 70 bar (Dorey *et al.* [34]). Malgré l'absence de fenêtre de visualisation, cette dernière configuration présente l'avantage de disposer d'une multitude de thermocouples permettant de mesurer précisément les échanges de chaleur à la paroi de la chambre. Une troisième configuration d'intérêt élevé est la chambre de combustion allemande BKD installée sur le banc P8 du DLR (Gröning *et al.* [61]). Il s'agit d'une chambre de combustion de section circulaire alimentée en oxygène et en hydrogène à travers 42 injecteurs coaxiaux et pouvant fonctionner jusqu'à une pression moyenne de 80 bar. Contrairement au BHP, le BKD ne présente aucune fenêtre de visualisation. L'accès optique à la zone de combustion est assuré par des sondes à fibre optique. Grâce à leurs méthodes de mesures de précision, ces trois chambres de combustion représentent aujourd'hui l'une des principales sources d'information permettant d'appréhender les mécanismes régissant la combustion au sein de moteurs cryotechniques. Cependant, les puissances mises en jeu dans ces configurations à échelle réduite sont évidemment bien inférieures à celles associées au moteurs-fusées (environ 3 MW pour le BHP et 80 MW pour le BKD, contre 3 GW pour le moteur Vulcain 2), ce qui complique grandement l'obtention de points de fonctionnement naturellement instables.

Des dispositifs d'excitation acoustique ont ainsi été conçus pour permettre l'analyse des mécanismes d'interaction entre les flammes et les ondes acoustiques dans des conditions de fonctionnement naturellement stables. Dans le cas du régime de fonctionnement transcritique, on retrouve notamment la chambre de combustion BKH du DLR. Il s'agit ici d'une chambre alimentée en oxygène et en hydrogène à travers 5 injecteurs coaxiaux montés en X et pouvant fonctionner sous une pression moyenne maximale de 60 bar. Un système de roue dentée associée à une tuyère secondaire permet d'exciter les modes transverses de la chambre et d'atteindre des fluctuations de pression maximales de l'ordre de 18% de la pression moyenne de chambre (valeur crête-à-crête). Cette chambre dispose elle aussi d'une fenêtre transparente permettant un accès optique direct à la zone de combustion. À travers cette fenêtre, une caméra à haute cadence d'acquisition assure l'enregistrement de la dynamique d'émission du radical OH^* qui est une espèce intermédiaire de la réaction et constitue une méthode de mesure du taux de dégagement de chaleur local et instantané (cf. Fdida *et al.* [48] pour une présentation détaillée des capacités de mesure). Par ailleurs, des capteurs de pression permettent d'opérer une reconstruction des champs stationnaires de pression et de vitesse acoustiques au sein de la chambre. Ces deux méthodes de mesure donnent ainsi simultanément accès aux fluctuations de pression et de vitesse ainsi qu'au taux de dégagement de chaleur relatif et permettent donc de calculer le critère de Rayleigh dans l'intégralité de la chambre. De cette façon, Hardi *et al.* [66] montrent notamment un couplage de la flamme à la fois avec les fluctuations de pression et les fluctuations de vitesse transverse dues au passage des ondes acoustiques. Une seconde caméra à haute cadence permet quant à elle l'acquisition simultanée de la dynamique des flammes et de l'écoulement d'ergols par ombroscopie. Grâce à cette méthode de mesure, Hardi *et al.* [65] montrent que les fluctuations de vitesse transverse dues au passage des ondes acoustiques induisent une oscillation périodique des gaz issus du co-courant d'hydrogène et conduisent à un battement transverse des flammes. De plus, ces fluctuations de vitesse transverse mènent à l'impact du gaz ambiant sur le cœur dense d'oxygène injecté à l'état transcritique. Les acquisitions ombroscopiques montrent alors l'arrachement transverse de poches denses de LOX à la fréquence d'excitation acoustique limitant le développement du cœur dense en aval du plan d'injection. Ce mécanisme d'interaction avec les ondes acoustiques conduit au final à une réduction de la longueur de chaque cœur dense et donc des flammes d'environ 30%. Dans le cas de moteurs-fusées, un tel rétrécissement de la zone de combustion concentre davantage le dégagement de chaleur, ce qui augmente les contraintes thermiques sur les injecteurs et les parois de la chambre. Par ailleurs, la concentration des flammes et du dégagement de chaleur peut également participer au couplage thermoacoustique selon le déphasage entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et les oscillations de pression.

Une seconde configuration à échelle réduite de grand intérêt dans l'étude des mécanismes d'interaction entre les flammes et l'acoustique est la chambre de combustion BHF installée sur le banc Mascotte et associée au dispositif d'excitation acoustique Vham (Méry *et al.* [114]). Dans cette configuration, 5 injecteurs permettent d'alimenter la chambre en oxygène et en méthane à une pression moyenne de chambre maximale de 60 bar. Le dispositif d'excitation Vham est quant à lui constitué d'une roue dentée modulant les débits d'éjection des gaz brûlés à travers les deux tuyères principales, ce qui permet d'exciter les modes transverses de la chambre jusqu'à des amplitudes de fluctuation de pression de près de 20% de la pression moyenne (valeur crête-à-crête). Grâce à une mesure à haute cadence des radicaux OH^* et CH^* ainsi qu'à une visualisation de l'écoulement par rétroéclairage, Méry [112] observe lui aussi une oscillation périodique importante des ergols et des flammes sous l'effet des fluctuations de vitesse transverse, ainsi qu'une réduction de la longueur des flammes. Par ailleurs, l'auteur montre également une déviation significative de la ligne centrale de chaque flamme vers ce qui semble être un ventre de vitesse acoustique (VAN pour *Velocity Anti-Node*). [6] Dans le cas du régime de fonctionnement transcritique, les informations recueillies sur la réponse des flammes aux fluctuations de vitesse transverse ont permis d'aboutir à la formulation d'un modèle bas-ordre détaillé par Gonzalez-Flesca *et al.* [58].

La simulation numérique aux grandes échelles (LES pour *Large Eddy Simulation*) a elle aussi fait ses preuves pour l'analyse des instabilités de combustion dans les moteurs-fusées. Par exemple, Selle *et al.* [135] démontrent la capacité de divers codes de calculs à reproduire les mécanismes physiques rencontrés en présence d'instabilités dans la chambre de combustion CVRC de l'université de Purdue aux États-Unis. Les mécanismes en question sont par exemple le déclenchement des instabilités par une perturbation acoustique initiale ou le phénomène d'hystérésis entre un comportement stable et instable lors de la variation de la longueur du système d'injection. Le lecteur est invité à se référer à Yu *et al.* [169] pour une description détaillée de la chambre CVRC.

Urbano *et al.* [155] démontrent quant à eux la capacité de la simulation numérique LES à reproduire l'écoulement au sein du BKD dans toute sa complexité, du système d'injection à la sortie de tuyère en passant par la chambre de combustion. Les auteurs reproduisent un premier point de fonctionnement stable et un second naturellement instable. Malgré l'incapacité du code à restituer l'instabilité naturelle de ce dernier point de fonctionnement, probablement à cause d'une dissipation excessive des ondes par le maillage lorsque l'amplitude initiale des oscillations de pression est trop faible, il est démontré qu'une perturbation violente de pression supérieure à 11% de la pression moyenne permet d'atteindre un cycle limite représentatif de celui observé expérimentalement. Dans un second article, Urbano et Selle [154] démontrent à l'aide de post-traitements innovants que les instabilités de combustion dans le BKD sont issues d'un couplage entre les oscillations de pression et les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et ne font pas intervenir la réponse des ergols aux fluctuations de vitesse transverse. Ils montrent ainsi que les flammes peuvent entretenir ou atténuer les instabilités de combustion selon leur position dans la chambre et donc dans le champ acoustique.

La chambre de combustion BHF munie de son boîtier d'excitation acoustique Vham a elle aussi été reproduite par la simulation numérique LES. Malgré une amplitude de fluctuation de pression 40% plus faible que celle enregistrée expérimentalement dans la chambre, Hakim *et al.* [64] démontrent dans leurs travaux la capacité de la simulation numérique à retrouver les mécanismes d'interaction entre l'acoustique, l'écoulement d'ergols et les flammes observés expérimentalement par Méry [112] : les flammes et les cœurs liquides sont plus compacts en présence des ondes acoustiques et oscillent périodiquement autour de l'axe d'injection sous l'effet des fluctuations de vitesse transverse du gaz. Un aplatissement des flammes dans la direction de propagation acoustique est également observé. Malgré le fait que cet aplatissement ne pouvait pas être détecté expérimentalement à cause de la direction d'observation proposée par la fenêtre transparente, ce mécanisme permet d'expliquer l'émission particulière du radical OH^* mesurée présentant deux zones plus intenses de part et d'autre de la ligne

6. Le ventre de vitesse acoustique correspond à la position dans le champ acoustique stationnaire où l'amplitude des fluctuations de vitesse est maximale.

centrale du jet. Dans un second article, Hakim *et al.* [63] simulent cette fois-ci une flamme cryogénique isolée positionnée en un VAN de manière à analyser l'influence de la fréquence d'excitation sur la réponse de l'écoulement réactif. Lorsque la fréquence d'excitation correspond à la fréquence naturelle du jet de LOX [7], celui-ci présente une forme sinusoïdale proche du battement d'un drapeau. Pour une fréquence d'excitation supérieure, le jet est droit et présente un mouvement d'oscillation transverse global sous l'effet des fluctuations de vitesse du gaz. Ce comportement a également été retrouvé plus tard par Gonzalez-Flesca *et al.* [57] dans le cas d'un jet de LOX injecté à l'état transcritique en un VAN sans écoulement co-courant gazeux. Ces simulations ont d'ailleurs conduit à la formulation d'un modèle analytique adapté à la reproduction du comportement oscillant du cœur dense sous excitation acoustique transverse.

L'ensemble de ces travaux expérimentaux et numériques réalisés dans le cas du régime d'injection transcritique semble ainsi démontrer que la réponse des ergols aux fluctuations de pression et de vitesse peut jouer un rôle significatif dans la réponse finale de la flamme aux ondes acoustiques (cf. circuit de couplage ③-④ de la figure 6). Ces mécanismes physiques ne pourraient pas être observés sur des moteurs-fusées à échelle réelle puisque aucun accès optique n'est alors possible. Par ailleurs, la simulation numérique peut s'avérer extrêmement intéressante pour compléter les observations réalisées expérimentalement et progresser ainsi plus rapidement vers une compréhension des mécanismes de couplage entre l'écoulement réactif et l'acoustique à l'origine des instabilités HF. La maîtrise de ces phénomènes physiques permet au final d'aboutir à la formulation de modèles simples adaptés à une approche bas-ordre beaucoup moins coûteuse.

Étude des instabilités thermoacoustiques en conditions d'injection subcritiques

Les travaux réalisés dans le cas du régime d'injection subcritique sont quant à eux moins nombreux. On a pourtant vu précédemment que ce régime d'injection était associé à des phases de fonctionnement différentes du régime transcritique. Avec l'ambition actuelle de l'industrie spatiale de se diriger vers des moteurs réallumables et réutilisables, les phases de fonctionnement subcritique telles que l'allumage hors atmosphère ou en atmosphère raréfiée, ou le fonctionnement stabilisé à bas régime devraient jouer un rôle de plus en plus important dans le cycle de vie des moteurs. Puisque les mécanismes physiques en jeu diffèrent grandement de ceux impliqués en régime transcritique, il apparaît essentiel de réaliser un effort de travail tout aussi important pour le régime subcritique.

Dans le cadre du groupement de recherche franco-allemand Rest initié par le Cnes et dédié à l'étude des instabilités de combustion HF dans les moteurs à ergols liquides, une chambre de combustion spécifique a été conçue. Cette Chambre de Recherche Commune (CRC) de forme cylindrique permet d'étudier la réponse d'une flamme cryogénique isolée soumise à des ondes acoustiques transverses en régime de fonctionnement subcritique. À l'instar du BKH, l'excitation acoustique est imposée à l'aide d'une roue dentée modulant le débit du gaz à travers une tuyère secondaire. L'un des atouts de cette configuration réside dans la modularité du positionnement de cette tuyère autour de la chambre, permettant de faire varier la position relative d'injection au sein du champ acoustique. De la même manière que pour les études mentionnées précédemment, l'acquisition simultanée des fluctuations de pression dans la chambre et de l'émission du radical OH^* permet de calculer le critère de Rayleigh local au cours du temps. Pour une flamme issue de la combustion LOX/GH_2 sous une pression de chambre moyenne de 10 bar et une amplitude de fluctuation de pression de 20% (valeur crête-à-crête), Knapp *et al.* [79] montrent que le couplage entre la flamme et l'acoustique intervient principalement à travers les fluctuations de pression p' (cf. circuit de couplage ② de la figure 6) malgré une injection effectuée proche d'un ventre de vitesse acoustique, donc d'un nœud de pression. [8] Au contraire, dans le cas d'une flamme

7. La fréquence naturelle du jet central est associée à un Strouhal de 0.36 d'après Gonzalez-Flesca *et al.* [57], avec le nombre de Strouhal défini comme $St = f\, D_l/U_l$. Dans cette expression, f est la fréquence, D_l le diamètre d'injection du jet central et U_l sa vitesse débitante.

8. Le nœud de pression correspond à la position dans le champ acoustique où l'amplitude de fluctuation de pression est nulle. Dans un champ acoustique stationnaire, les ventres de vitesse et les nœuds de pression sont confondus.

LOX/GCH_4 positionnée au même point du champ acoustique, Sliphorst *et al.* [141] démontrent que le couplage entre la flamme et l'acoustique intervient majoritairement à travers les fluctuations de vitesse transverse du gaz (cf. circuit de couplage ③-④ de la figure 6). D'après les auteurs, le temps caractéristique de réponse des gouttes de LOX est trop important dans cette configuration pour permettre aux fluctuations de vitesse du gaz d'influencer leur trajectoire. En revanche, le déphasage entre ces fluctuations de vitesse et le dégagement de chaleur instationnaire semble correspondre au temps caractéristique du mélange entre les deux ergols. Dans le cas particulier de ce point de fonctionnement, les fluctuations de vitesse transverse transportent en réalité l'oxygène fraîchement évaporé vers le haut puis le bas de la flamme à la fréquence d'excitation et favorisent ainsi le mélange entre les deux ergols.

La chambre de combustion BHF associée au dispositif d'excitation acoustique Vham permet elle aussi d'étudier la réponse de flamme en conditions d'injection subcritiques. Dans leurs travaux, Méry *et al.* [113] s'intéressent à 5 flammes LOX/GCH_4 sous une pression de chambre moyenne de 26 bar et une amplitude de fluctuation de pression de l'ordre de 20% (valeur-crête-à-crête). Dans ce cas, les flammes positionnées autour d'un VAN répondent de façon similaire aux cas transcritiques sous 60 bar de pression moyenne, *i.e.* avec une oscillation transverse des flammes sous l'effet des fluctuations périodiques de vitesse et une réduction significative de leur longueur. De plus, les flammes semblent être déviées vers le VAN dont la position varie au cours du temps par modification du champ de pression dans la chambre. Les flammes présentent par ailleurs une topologie semblable aux flammes aplaties observées par Hakim *et al.* [64] lors de la simulation numérique d'un point de fonctionnement transcritique.

En ce qui concerne la simulation numérique LES, aucune étude semblable à celles réalisées dans le cadre du régime de fonctionnement transcritique ne semble exister en subcritique. L'intérêt de ce type d'approche pour apporter des informations complémentaires sur la réponse de l'écoulement réactif aux ondes acoustiques est pourtant indéniable. C'est précisément la raison pour laquelle l'Onera travaille depuis plusieurs années sur le développement de méthodes numériques capables de reproduire les écoulements diphasiques multi-échelles caractéristiques des moteurs à ergols liquides en régime de fonctionnement subcritique. La présente étude s'inscrit d'ailleurs dans cette stratégie et constitue un premier pas vers la réalisation de simulations LES fiables de flammes diphasiques cryogéniques sous excitation acoustique pour l'étude des instabilités de combustion HF en régime de fonctionnement subcritique.

Objectifs de la présente étude

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objectif de participer au développement de la simulation numérique LES pour l'étude des instabilités de combustion de haute fréquence en conditions d'injection subcritiques. Dans une logique de complexité croissante et pour permettre une meilleure compréhension des résultats, nous nous intéresserons en particulier à la reproduction de l'influence d'ondes acoustiques d'amplitude et de fréquence élevées sur le comportement de jets liquides inertes. Tout au long de ces travaux, nous chercherons à démontrer les capacités de méthodes numériques existantes à reproduire les mécanismes d'interaction entre la phase liquide et les ondes acoustiques. Les simulations numériques réalisées permettront par ailleurs de compléter les observations expérimentales antérieures à ces travaux et d'accéder ainsi à une meilleure caractérisation des phénomènes physiques mis en jeu. Ce dernier objectif constitue un apport important à la démarche de recherche sur les instabilités de combustion de haute fréquence puisque, dans un cas réactif, l'influence des ondes sur l'écoulement diphasique peut jouer un rôle sur la réponse des flammes et donc sur la stabilité du système.

Dans la première partie de ce mémoire, des éléments bibliographiques sont présentés afin de réunir un ensemble d'informations nécessaires pour atteindre les objectifs de cette thèse. Nous décrivons tout d'abord dans le chapitre 1 les mécanismes physiques à l'origine de l'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux dans des conditions d'injection représentatives des moteurs à ergols liquides. Nous présentons ensuite, dans ce même chapitre, un certain nombre d'études expérimentales réalisées

par le passé par la communauté pour caractériser le comportement de jets liquides face à des ondes acoustiques de haute amplitude et haute fréquence. L'ensemble des mécanismes de réponse des jets aux perturbations acoustiques observés expérimentalement devra être reproduit par la simulation numérique au cours de ces travaux. Suite à la présentation détaillée des mécanismes physiques mis en jeu, les différentes méthodes proposées dans la littérature pour la simulation d'écoulements diphasiques atomisés sont présentées dans le chapitre 2. Cette synthèse bibliographique est d'ailleurs suivie d'une présentation plus approfondie de la stratégie de simulation retenue par l'Onera et développée au sein du code Cedre, qui sera utilisé tout au long de ces travaux.

Vient ensuite la présentation détaillée de la démarche de travail suivie au cours de cette thèse. Celle-ci est divisée en trois parties chacune composée de plusieurs chapitres. Dans la seconde partie de ce mémoire, des premiers éléments d'évaluation du code Cedre sont apportés pour la simulation numérique d'écoulements diphasiques en présence d'ondes acoustiques de haute amplitude. Le chapitre 3 est consacré à la formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur des éléments sphériques représentatifs de gouttes positionnées dans un champ acoustique stationnaire. La particularité de cette formulation réside dans la prise en compte de multiples harmoniques acoustiques dont la présence est caractéristique de niveaux acoustiques très élevés. Cette nouvelle formulation servira de référence tout au long de ces travaux. Le chapitre 4, quant à lui, est consacré à la validation du code pour la simulation de la propagation non linéaire d'ondes acoustiques de haute amplitude. Ces mécanismes de propagation particuliers doivent être restitués par le code pour assurer une représentation fidèle de l'ambiance acoustique au sein d'une chambre de combustion d'un moteur à ergols liquides. Ce chapitre sera également l'occasion d'élaborer une méthodologie d'excitation acoustique adaptée pour imposer une onde stationnaire dans un domaine de calcul. Dans le chapitre 5, les capacités du code à restituer le profil de pression de radiation acoustique autour d'un obstacle représentatif de la phase liquide ainsi que la force de radiation qui en résulte sont évaluées. Dans le cas de la phase dispersée, une évolution des modèles d'interaction entre la phase gazeuse et les gouttes est apportée.

Ces éléments de validation et d'évolution du code nous permettent, dans la troisième partie de ce mémoire, d'analyser par la simulation numérique le comportement d'un jet liquide atomisé soumis à une excitation acoustique transverse de haute amplitude. Les mécanismes de réponse de jets mentionnés dans l'introduction et plus tard dans la partie I doivent être restitués. Pour s'en assurer, une configuration expérimentale de référence est reproduite. Tout d'abord, le chapitre 6 est dédié à la sélection de la configuration la plus pertinente pour notre étude et à sa présentation détaillée. Suite à cette sélection, une première partie des résultats de simulation en l'absence d'excitation acoustique est présentée au chapitre 7 afin d'illustrer la méthodologie de simulation d'écoulements diphasiques avec le code Cedre. Le but est de faciliter ainsi la compréhension des analyses effectuées au chapitre 8 sur les résultats de la simulation en présence d'ondes acoustiques. Dans ce huitième chapitre, les données et observations expérimentales de la littérature sont utilisées comme éléments de validation des méthodes et modèles numériques utilisés. Notons par ailleurs qu'il s'agit là de la première simulation CFD d'un jet coaxial liquide/gaz en présence d'une excitation acoustique d'amplitude élevée dans des conditions d'injection subcritiques représentatives des moteurs à ergols liquides. Cette étude représente ainsi une toute nouvelle approche pour progresser dans la compréhension de l'influence d'ondes acoustiques sur l'atomisation et la dynamique de la phase liquide dans de telles situations. Les travaux présentés dans cette partie ont été soumis pour publication (Rutard *et al.* [132]).

Enfin, la partie IV est consacrée à la modélisation simplifiée du phénomène particulier de la déviation de la phase liquide par la force de radiation acoustique, observé à la fois dans le cas de jets inertes et réactifs. Le chapitre 9 concerne dans un premier temps uniquement la déviation de la phase dispersée par les contraintes acoustiques. La déviation des gouttes enregistrée lors de la simulation numérique est comparée 1) aux données expérimentales associées à la configuration retenue et 2) à une modélisation théorique du mécanisme. La déviation du cœur liquide est quant à elle étudiée au chapitre 10. Une approche simplifiée est proposée pour estimer rapidement et à moindre coût la déviation du cœur dense sous l'effet de la force de radiation acoustique.

Pour finir, un certain nombre d'éléments supplémentaires est présenté en Annexes, comme des éléments de calcul formulés lors de cette thèse pour le post-traitement de la simulation numérique LES, ou encore la formulation analytique multi-harmonique de la force de radiation acoustique exercée sur un objet cylindrique représentatif du cœur liquide dans un champ acoustique stationnaire.

Première partie

Description des phénomènes et des moyens mis en œuvre

Chapitre 1

Éléments de compréhension des phénomènes mis en jeu

La première partie de ce mémoire est destinée à fournir un ensemble d'éléments bibliographiques utiles à la compréhension des enjeux de ces travaux de thèse et des méthodes numériques utilisées. Dans le chapitre 1, nous présentons en premier lieu les mécanismes physiques à l'origine de l'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux dans des conditions d'injection représentatives des moteurs à ergols liquides. Ces premiers éléments phénoménologiques nous permettent ainsi, en deuxième partie de chapitre, d'appréhender plus facilement la réponse de jets liquides confrontés à des ondes acoustiques de haute amplitude. Un certain nombre d'études expérimentales réalisées par le passé par la communauté pour caractériser l'influence de telles ondes sur les écoulements diphasiques est présenté. Les résultats et conclusions associés seront utilisés dans la suite de ce mémoire comme référence de comparaison aux simulations numériques afin d'évaluer la pertinence des méthodes et modèles retenus pour la simulation d'écoulements diphasiques en présence de perturbations acoustiques. Le chapitre 2 sera d'ailleurs consacré à la présentation des différentes méthodes proposées dans la littérature pour la simulation de tels écoulements, et en particulier de la stratégie de simulation utilisée et évaluée tout au long de ces travaux.

Sommaire

1.1 Processus d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux 18
1.1.1 Nombres adimensionnels 18
1.1.2 Classification des régimes d'atomisation 19
1.1.3 Description des mécanismes à l'origine de l'atomisation du jet liquide 21
1.1.4 Propriétés macroscopiques des jets coaxiaux en régime d'atomisation de type fibre 28
1.2 Comportement de jets liquides inertes atomisés sous excitation acoustique 30

1.1 Processus d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux

1.1.1 Nombres adimensionnels

Les nombres adimensionnels généralement utilisés pour caractériser un jet liquide sont présentés ici. On utilisera les indices g et l pour faire référence aux écoulements gazeux et liquide respectivement. La géométrie d'un injecteur coaxial est représentée en figure 1.1. Le liquide est injecté à travers un canal cylindrique dont le diamètre de sortie est noté D_l, tandis que l'écoulement co-courant gazeux est issu d'un canal coaxial de diamètre extérieur D_g et d'épaisseur e.

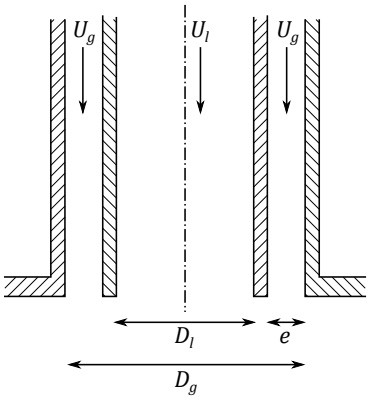


Figure 1.1 – Géométrie d'un injecteur coaxial.

En premier lieu, le nombre de Reynolds Re compare les forces d'inertie aux contraintes de viscosité à la sortie de l'injecteur. Il existe deux dérivations de ce nombre sans dimension : le nombre Re_g associé à l'écoulement gazeux co-courant et son équivalent Re_l caractérisant la phase liquide. Ces deux nombres sont définis par :

$$\mathrm{Re}_g = \frac{\rho_g U_g D_h}{\mu_g}, \tag{1.1}$$

et

$$\mathrm{Re}_l = \frac{\rho_l U_l D_l}{\mu_l}, \tag{1.2}$$

avec ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique, tandis que U correspond à la vitesse d'injection ou vitesse débitante du fluide. D_h correspond au diamètre hydraulique du canal coaxial défini par $4A/P$, avec A l'aire de la section de passage du canal et P le périmètre mouillé de cette section. Dans le cas d'injecteurs coaxiaux, le diamètre hydraulique vaut $D_h = 2e$. Le nombre de Reynolds est en partie utilisé pour caractériser le régime d'un écoulement (laminaire, transitoire ou turbulent).

Le second nombre sans dimension classiquement utilisé est le nombre de Weber, noté We, comparant les forces aérodynamiques à la tension de surface. Celui-ci est défini par :

$$\mathrm{We} = \frac{\rho_g \left(U_g - U_l\right)^2 D_l}{\sigma}, \tag{1.3}$$

avec σ le coefficient de tension de surface entre les deux fluides. Il est également possible de définir les nombres de Weber gazeux et liquide comme :

$$\mathrm{We}_g = \frac{\rho_g U_g^2 D_l}{\sigma}, \tag{1.4}$$

et

$$\mathrm{We}_l = \frac{\rho_l U_l^2 D_l}{\sigma}. \tag{1.5}$$

Le nombre de Weber gazeux We_g correspond en réalité au nombre de Weber aérodynamique We pour lequel la vitesse d'injection du liquide est considérée négligeable comparée à la vitesse du gaz.

L'association des nombres We_l et Re_l conduit à la définition d'un troisième nombre adimensionnel. Il s'agit du nombre d'Ohnesorge, noté Oh, comparant les forces de viscosité à la tension de surface. Celui-ci est défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Oh} &= \frac{\sqrt{\mathrm{We}_l}}{\mathrm{Re}_l}, \\ &= \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma D_l}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Le quatrième nombre sans dimension permettant de caractériser un jet liquide atomisé par un écoulement gazeux est le rapport des flux de quantité de mouvement J formulé comme :

$$\mathrm{J} = \frac{\rho_g U_g^2}{\rho_l U_l^2}. \tag{1.7}$$

La combinaison de ces différents nombres sans dimension permet également de définir J comme :

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{We}_g}{\underbrace{{\mathrm{Re}_l}^2\,\mathrm{Oh}^2}_{\mathrm{We}_l}} = \frac{\mathrm{We}}{\left(1 - \dfrac{U_l}{U_g}\right)^2 \underbrace{{\mathrm{Re}_l}^2\,\mathrm{Oh}^2}_{\mathrm{We}_l}}. \tag{1.8}$$

Pour finir, le rapport de mélange R_m compare les débits massiques des ergols à l'injection :

$$\mathrm{R}_m = \frac{\dot{m}_l}{\dot{m}_g}. \tag{1.9}$$

Ce nombre sans dimension n'est généralement utilisé qu'en présence d'écoulements réactifs et est proportionnel à l'inverse de la richesse utilisée dans le contexte des moteurs à combustion interne.

1.1.2 Classification des régimes d'atomisation

Le principe des injecteurs coaxiaux utilisés dans la propulsion liquide consiste à assister l'atomisation du jet liquide central par l'injection d'un écoulement co-courant gazeux. Le cisaillement entre les deux fluides conduit en effet à la déstabilisation du jet liquide dès la sortie de l'injecteur. Les déformations qui en résultent se propagent alors à la surface du jet et gagnent progressivement en amplitude, conduisant potentiellement à une éjection de fragments liquides. Il s'agit de l'atomisation primaire du jet liquide. Lorsque la vitesse d'injection de l'écoulement co-courant est suffisante, les fragments liquides ainsi créés subissent eux-mêmes un cisaillement élevé avec la phase gazeuse et vont eux aussi se déformer et se fragmenter en plus petites structures. Ce processus se poursuit alors jusqu'à atteindre un équilibre entre la tension de surface et les forces aérodynamiques. On parle cette fois-ci d'atomisation secondaire ou de fragmentation (Dumouchel [38]). Différentes études expérimentales des jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux ont permis d'établir une classification des différents régimes d'atomisation rencontrés. On distingue ainsi six régimes lorsque l'écoulement gazeux ne présente pas de *swirl*[1] (cf. figure 1.2) :

1. Pour une description de l'effet d'un écoulement gazeux *swirlé* sur l'atomisation d'un jet liquide, se référer à Lasheras et Hopfinger [87]

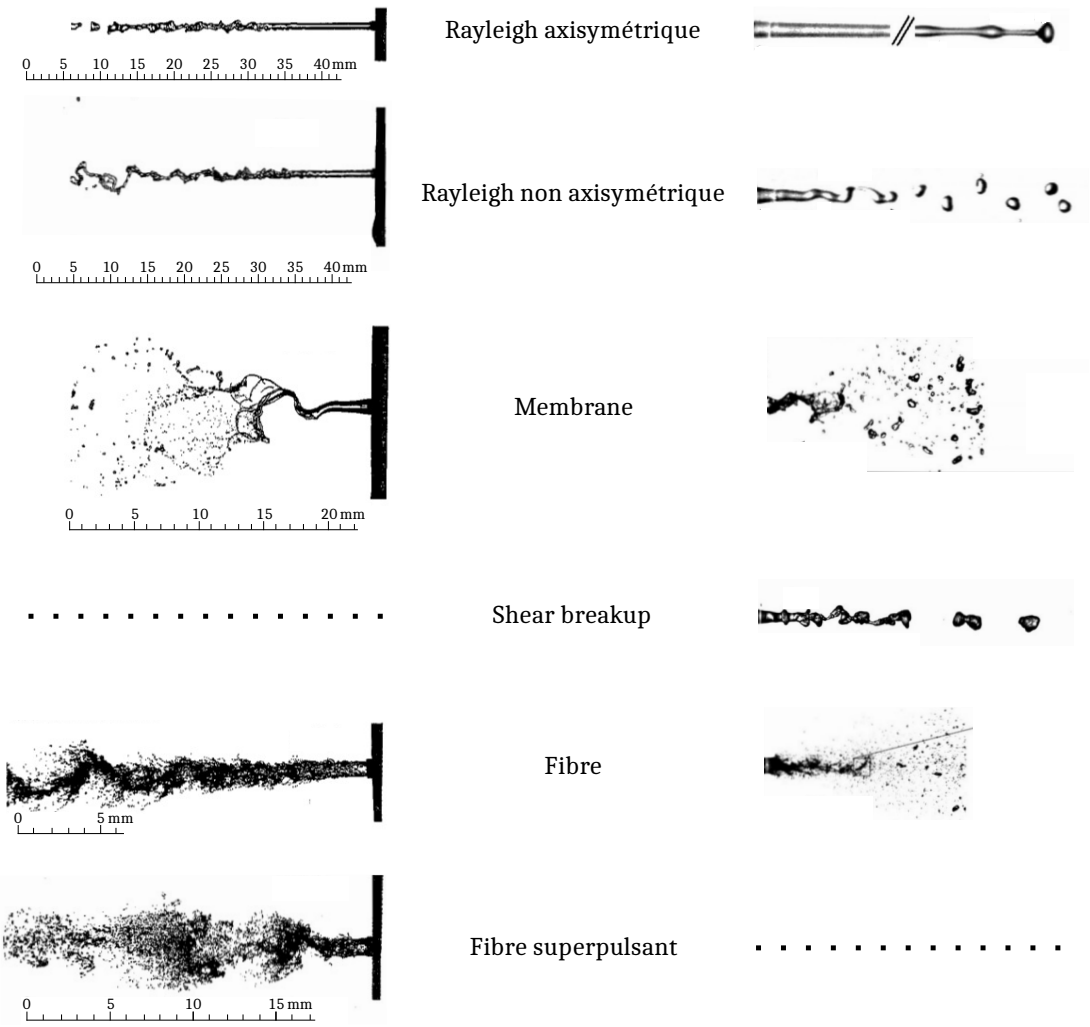


Figure 1.2 – Classification des régimes d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux. Gauche : Farago et Chigier [45], droite : Baillot *et al.* [7].

- le régime de Rayleigh axisymétrique. On rencontre ce régime d'atomisation lorsque les vitesses d'injection des deux fluides sont faibles. Ce régime est caractérisé par un jet liquide cylindrique à la surface duquel se propagent des instabilités longitudinales. Lorsque l'amplitude de ces instabilités est suffisante, le jet liquide se fragmente en structures liquides de dimension proche du diamètre d'injection D_l. Le jet présente une symétrie autour de l'axe d'injection.
- le régime de Rayleigh non axisymétrique. Celui-ci est issu d'une transition du régime précédent pour une vitesse d'injection du co-courant gazeux plus importante. La symétrie du jet est rompue et celui-ci emprunte une forme sinusoïdale avant de s'atomiser en structures liquides de dimension légèrement plus faible que le diamètre d'injection D_l.
- le régime de membrane. Dans ce régime, le cisaillement entre les deux fluides conduit le jet liquide à emprunter une forme de S. L'écoulement gazeux dans les zones de courbure du jet liquide conduit alors à l'atomisation du liquide en une multitude de gouttes de dimension bien inférieure au diamètre d'injection D_l.
- le régime d'atomisation par cisaillement, plus généralement mentionné comme *shear breakup*. La propagation d'instabilités particulières à la surface du jet liquide conduit à la formation de fins ligaments. Ces ligaments sont ensuite fragmentés en de plus petites gouttes sous l'effet du cisaillement avec l'écoulement gazeux. D'après les travaux de Lasheras et Hopfinger [87], ce régime correspond à une évolution du régime de membrane pour une vitesse d'injection du liquide plus

élevée.

- le régime fibre. Ce régime est caractérisé par une vitesse d'injection élevée du co-courant gazeux. Les contraintes aérodynamiques surpassent alors largement la tension de surface et conduisent à l'atomisation rapide du liquide en ligaments (fibres) autour et en aval du jet central. Ces ligaments se fragmentent ensuite en de très petites gouttes au contact de l'écoulement gazeux à haute vitesse. Il s'agit du régime d'atomisation mis en jeu dans les moteurs à ergols liquides à injecteurs coaxiaux.
- le régime fibre superpulsant. Il s'agit d'une transition possible du régime précédent lorsque la vitesse du co-courant gazeux est augmentée. Lors de ce régime, on observe une pulsation de l'atomisation du jet issue d'interactions entre celui-ci et des zones de recirculation du gaz en aval.

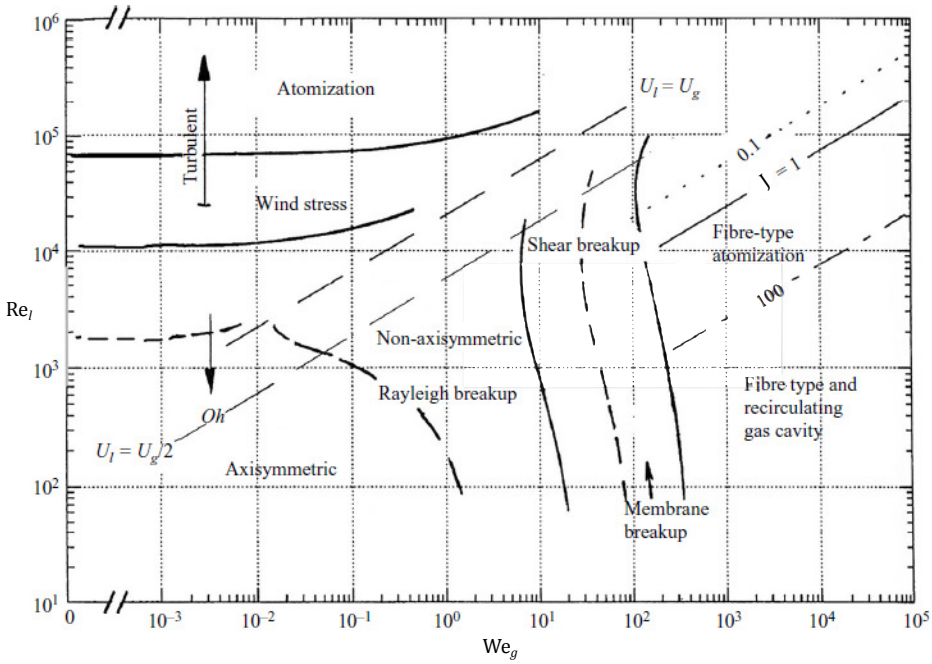


Figure 1.3 – Classification des régimes d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux en fonction des nombres sans dimension We_g, Re_l et J (issue de Lasheras et Hopfinger [87] et complétée par Baillot *et al.* [7]).

Divers auteurs ont souhaité délimiter ces différents régimes d'atomisation en fonction de certains des nombres sans dimension présentés précédemment. En particulier, Farago et Chigier [45] proposent une carte de régimes en fonction des nombres We et Re_l, tandis que Lasheras et Hopfinger [87] considèrent les trois nombres We_g, Re_l et J. La carte proposée par ces derniers auteurs est représentée en figure 1.3.

1.1.3 Description des mécanismes à l'origine de l'atomisation du jet liquide

Dans le cas de régimes d'atomisation caractérisés par un rapport de vitesses d'injection élevé entre les deux fluides (*e.g.* régime de type fibre dans les moteurs à ergols liquides), Marmottant et Villermaux [106] décrivent le scénario d'atomisation primaire du jet liquide de la manière suivante (cf. figure 1.4) :

1. Une instabilité longitudinale axisymétrique s'établit d'abord à la surface du jet liquide sous l'effet du cisaillement entre les deux fluides dès la sortie de l'injecteur. Cette instabilité est associée à une longueur d'onde notée $\lambda_{/\!/}$.

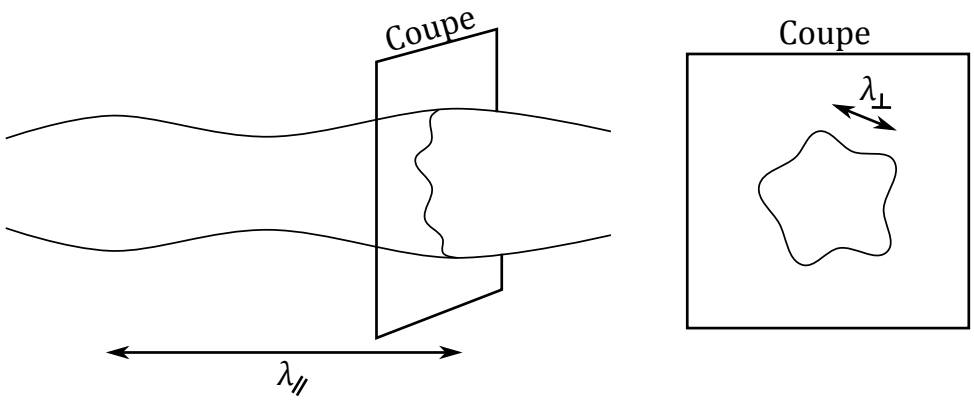


Figure 1.4 – Illustration des instabilités longitudinale et transverse à la surface d'un jet liquide (Marmottant et Villermaux [106]).

2. Le passage de l'instabilité longitudinale déstabilise la surface du jet liquide et conduit ainsi à la formation d'une instabilité secondaire cette fois-ci transverse dont la longueur d'onde associée est notée $\lambda_\perp$.
3. Les protubérances à la surface du jet issues de ces deux types d'instabilités sont accélérées par l'écoulement co-courant, conduisant alors à la formation de ligaments arrachés par la suite au jet liquide.

Pour compléter ce scénario, considérons également les étapes suivantes associées au processus de fragmentation :

4. Les ligaments arrachés au jet liquide sont déformés et fragmentés sous l'effet des contraintes aérodynamiques issues du cisaillement avec l'écoulement co-courant gazeux. Cette étape de fragmentation conduit à la création de gouttes de taille variable.
5. Les gouttes ainsi formées sont elles-mêmes déformées et fragmentées par les contraintes aérodynamiques jusqu'à atteindre un équilibre avec la tension de surface.

L'instabilité longitudinale de cisaillement

Une illustration des profils de vitesse dans les deux fluides à la sortie d'un injecteur coaxial est proposée par Marmottant [105] en figure 1.5. On y observe une couche limite dans chacun des deux fluides d'épaisseur δ_g dans le gaz et δ_l dans le liquide. Ces deux couches limites sont issues des frottements à la paroi au sein de l'injecteur et peuvent être considérées laminaires d'après Marmottant [105]. Dès la sortie de l'injecteur, le cisaillement entre les deux fluides va conduire à une accélération des particules du liquide à l'interface et ainsi inverser le profil de vitesse dans ce fluide. En revanche, le cisaillement n'a que peu d'influence sur la couche limite au sein du gaz car sa vitesse d'injection U_g est bien plus élevée.

L'influence d'une couche limite sur la stabilité de l'interface entre deux fluides de même densité a été analysée en premier lieu par Rayleigh [129] (cf. figure 1.6a). L'analyse en question consiste à résoudre les équations de l'hydrodynamique pour le système de masse volumique homogène en supposant une faible amplitude de perturbation initiale de l'interface. Cette hypothèse permet de linéariser les équations et conduit finalement à la formulation du taux d'accroissement des perturbations initiales. L'auteur démontre ainsi que l'épaisseur de la couche limite a une influence significative sur la stabilité du système. La situation décrite par Marmottant [105] et illustrée en figure 1.5 est en réalité plus complexe puisqu'elle met en jeu deux phases de masses volumiques très éloignées ($\rho_l/\rho_g \approx 10^3$ pour une interface liquide-gaz) et deux couches limites distinctes (une par fluide). Cependant, Villermaux [158] démontre dans un rapport non publié que l'influence de la couche limite dans le liquide sur la croissance des instabilités à la surface du jet est négligeable par rapport à celle du gaz car la viscosité du liquide est bien plus élevée. Une analyse de stabilité équivalente à celle de Rayleigh [129] est alors

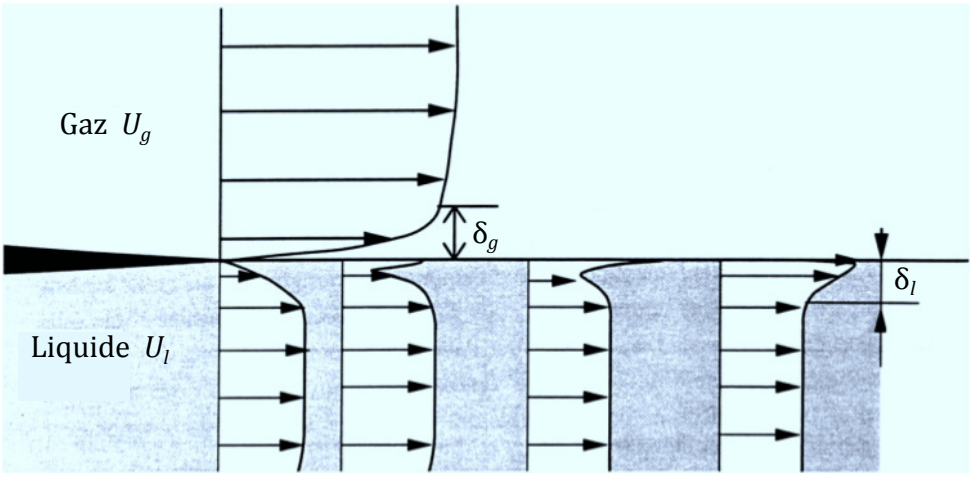


Figure 1.5 – Profils de vitesse à la sortie d'un injecteur coaxial (Marmottant [105]).

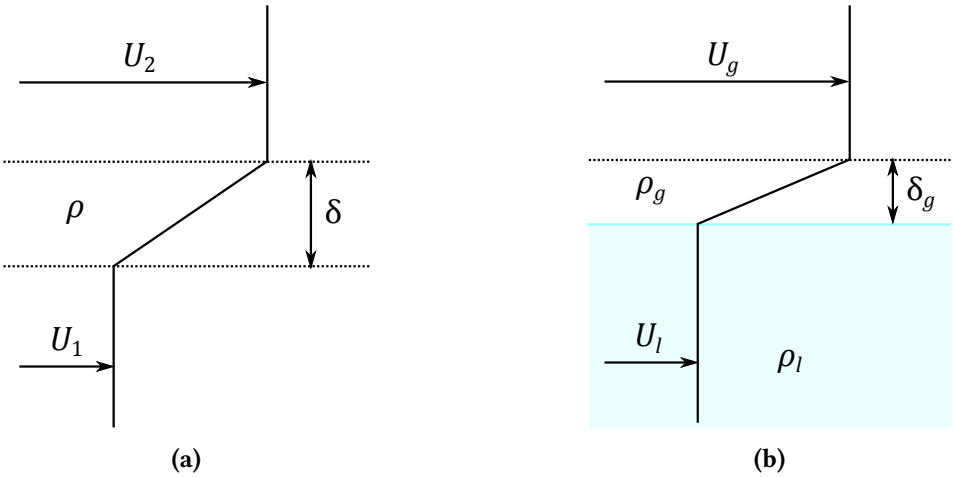


Figure 1.6 – Profils de vitesse considérés pour les analyses linéaires de stabilité de Rayleigh [129] et de Marmottant et Villermaux [106].

réalisée par Marmottant et Villermaux [106] en considérant uniquement la couche limite au sein du gaz (cf. figure 1.6b), son épaisseur δ_g étant définie par :

$$\delta_g = 7.9e\,\mathrm{Re}_g^{-1/2}\,. \tag{1.10}$$

Dans ce cas, les auteurs montrent que l'instabilité longitudinale de cisaillement privilégiée à la surface du liquide est caractérisée par une fréquence $f_{/\!/} \propto U_c/\delta_g(\rho_g/\rho_l)^{1/2}$, avec U_c la vitesse de convection de l'ondulation à la surface du jet définie par :

$$U_c = \frac{U_l\sqrt{\rho_l} + U_g\sqrt{\rho_g}}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_g}}. \tag{1.11}$$

Des expérimentations permettent à Marmottant et Villermaux [106] d'obtenir plus précisément les relations suivantes :

$$f_{/\!/} \approx \frac{U_c}{1.2\delta_g}\left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{1/2}, \tag{1.12}$$

et donc par extension :

$$\lambda_{/\!/} \approx 1.2\delta_g\left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

L'instabilité transverse et la formation de ligaments

D'après l'analyse précédente, les ondulations à la surface du jet issues de l'instabilité longitudinale se propagent le long de l'axe d'injection à une vitesse $U_c > U_l$. Dans le référentiel du jet liquide, les ondes de surface de longueur d'onde $\lambda_{/\!/}$ se propagent ainsi à une vitesse U_c - U_l. Au passage de ces ondes, le liquide subit donc une accélération périodique perpendiculaire à l'axe d'injection à une fréquence $f_\xi = (U_c - U_l)/\lambda_{/\!/}$. Si l'on note $\eta_{/\!/}$ l'amplitude des ondes de surface, l'évolution temporelle de l'élévation de l'interface ξ en un point donné dans le référentiel du liquide peut s'écrire :

$$\xi = -\eta_{/\!/} \sin(\omega_\xi t). \tag{1.14}$$

avec $\omega_\xi = 2\pi f_\xi$ la pulsation à laquelle oscille la surface. Dans ce cas, l'accélération perpendiculaire à laquelle est soumis le liquide est formulée par :

$$g_\xi = \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = \eta_{/\!/}\omega_\xi^2 \sin(\omega_\xi t). \tag{1.15}$$

Dans un cas représentatif des conditions d'injection des moteurs à ergols liquides, la fréquence d'oscillation dans le référentiel du jet liquide approche 700 Hz (Baillot *et al.* [7]). Pour une amplitude d'oscillation typique de 1 mm, l'amplitude de l'accélération perpendiculaire de la surface du jet atteint environ 20 000 m · s^{-2}, et est donc bien plus élevée que l'accélération gravitationnelle. Taylor [148] démontre alors que, dans le cas de jets plans, la phase d'accélération vers le liquide conduit à une situation instable. Le passage des ondes de surface induit alors la formation et l'amplification d'une instabilité secondaire cette fois-ci transverse (cf. figure 1.4). Marmottant et Villermaux [106] formulent, par une analyse linéaire de stabilité et l'analyse de campagnes expérimentales, la longueur d'onde préférentielle de cette instabilité comme :

$$\lambda_\perp = 2.8\delta_g \, \mathrm{We}_{\delta_g}^{-1/3} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{1/3}, \tag{1.16}$$

avec We_{δ_g} le nombre de Weber basé sur l'épaisseur de couche limite δ_g et défini comme $\mathrm{We}_{\delta_g} = \rho_g U_g^2 \delta_g / \sigma_l$. Comme l'illustre la figure 1.7, les crêtes issues de cette instabilité transverse sont par la suite accélérées le long du jet par le cisaillement avec l'écoulement co-courant gazeux. Des protubérances se forment alors puis s'allongent jusqu'à une taille finale ζ avant d'être arrachées au jet liquide. Il s'agit là du processus de formation des ligaments.

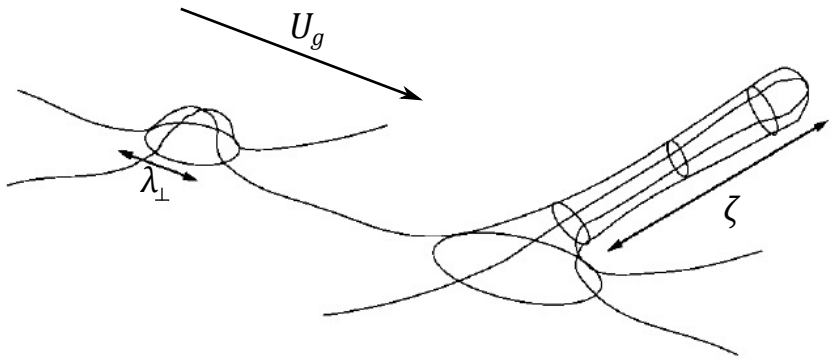


Figure 1.7 – Illustration de la création de ligaments par l'instabilité transverse à la surface du jet liquide (Marmottant et Villermaux [106]).

La fragmentation des ligaments

Une fois séparés du cœur liquide, ces ligaments continuent d'évoluer au sein de l'écoulement gazeux à haute vitesse. Ainsi, lorsque les contraintes aérodynamiques sont suffisamment importantes, les

ligaments se déforment et se brisent en de multiples gouttes. Il s'agit là du premier niveau de fragmentation. Lors de leurs travaux, Marmottant et Villermaux [106] se sont attachés à évaluer la taille caractéristique de ces premières gouttes. Pour cela, les auteurs ont mesuré par une méthode de visualisation ombroscopique le volume de l'ensemble des gouttes issues de la brisure d'un grand nombre de ligaments. La somme de ces volumes, notée ici V_0, représente alors le volume initial du ligament au moment où il est arraché au jet. Les auteurs définissent ainsi la grandeur $D_0 = (6V_0/\pi)^{1/3}$ représentant le diamètre qu'aurait chaque ligament s'il était rassemblé en une seule goutte sphérique au lieu de se fragmenter. Il leur est alors possible de tracer la distribution $p_L(D_0)$ des tailles caractéristiques des ligaments issus de l'atomisation primaire du jet. Celle-ci est quasi symétrique et très resserrée autour du diamètre moyen arithmétique que les auteurs formulent comme :

$$\langle D_0 \rangle \approx 0.23\lambda_\perp. \tag{1.17}$$

À partir des mesures précédentes du volume des gouttes issues de la fragmentation des ligaments, Marmottant et Villermaux [106] (cf. aussi Villermaux *et al.* [160]) tracent également la distribution des tailles de gouttes issues d'un ligament de taille donnée D_0. En adimensionnant la taille des gouttes D par le diamètre caractéristique du ligament père D_0, les auteurs remarquent que la distribution $p_B(D/D_0)$ est quasiment indépendante de la vitesse du co-courant gazeux à l'origine de la fragmentation des structures liquides. Il s'avère par ailleurs que cette distribution peut être approchée par une distribution Gamma du type :

$$p_B(D/D_0) = \frac{n^n}{\Gamma(n)}(D/D_0)^{n-1}\mathrm{e}^{-nD/D_0}, \tag{1.18}$$

où $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est la fonction Gamma. D'après Marmottant et Villermaux [106], la valeur moyenne de n se situe autour de 3.5. Par ailleurs, les auteurs mesurent la moyenne arithmétique $\langle D/D_0 \rangle$:

$$\langle D/D_0 \rangle \approx 0.4. \tag{1.19}$$

Puisque la taille initiale des ligaments suit elle-même une distribution donnée $p_L(D_0)$, la distribution globale des tailles de gouttes issues de la fragmentation des ligaments est obtenue par une convolution des deux distributions $p_L(D_0)$ et $p_B(D/D_0)$. Marmottant [105] démontre alors que cette distribution peut être approchée par :

$$p(D) = \frac{1}{\langle D \rangle}\mathrm{e}^{-D/\langle D \rangle}. \tag{1.20}$$

La moyenne de cette distribution globale $\langle D \rangle$ représente ainsi le diamètre moyen arithmétique des gouttes issues de la fragmentation de l'intégralité des ligaments. Aucune corrélation n'est apportée pour le calcul de $\langle D \rangle$.

Dans son rapport non publié, Villermaux [158] s'attache également à décrire la vitesse des gouttes directement issues de la fragmentation des ligaments. Pour cela, l'auteur suit une approche inspirée de travaux sur la chute de gouttes de pluie (cf. Villermaux et Eloi [161]). Lors de leur chute, les gouttes mères sont atomisées sous l'effet du cisaillement avec l'air ambiant, tout comme le sont les ligaments issus du jet liquide sous les contraintes aérodynamiques dues à l'écoulement co-courant gazeux. Lorsque les ligaments se brisent, les gouttes ainsi créées possèdent une vitesse intermédiaire entre les vitesses d'injection des deux fluides. L'auteur affirme notamment que la direction empruntée par les gouttes est sensiblement équivalente à celle du gaz, tandis que la norme de leur vitesse est principalement pilotée par la force de traînée. La vitesse moyenne des gouttes issues de l'atomisation des ligaments suit alors la relation de similarité suivante :

$$\langle v \rangle \sim C_D U_g \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}\frac{D_0}{D}, \tag{1.21}$$

où C_D est le coefficient de traînée d'une goutte isolée généralement définie par (Schiller et Naumann [134]) :

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_p < 1, \\ \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p}\left(1 + 0.15\,\mathrm{Re}_p^{0.687}\right) & \text{si} \quad 1 \leq \mathrm{Re}_p \leq 1000, \\ 0.445 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.22}$$

Dans cette expression, Re_p est le nombre de Reynolds particulaire défini par :

$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_g \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| D}{\mu_g}, \tag{1.23}$$

où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont respectivement les vitesses locales du gaz et de la goutte.

La fragmentation des gouttes

Les gouttes créées par la fragmentation des ligaments subissent elles-mêmes les contraintes aérodynamiques sous l'effet du cisaillement avec l'écoulement co-courant gazeux. Dans ce cas, les gouttes peuvent elles aussi se fragmenter jusqu'à atteindre une taille pour laquelle les contraintes aérodynamiques et la tension de surface se compensent. Différents régimes de fragmentation existent selon le différentiel de vitesse entre le milieu extérieur et les gouttes. Pilch et Erdman [122] proposent notamment la classification illustrée en figure 1.8 selon le nombre sans dimension de Weber appliqué aux gouttes de diamètre D et de vitesse locale $\boldsymbol{v}$ dans un gaz dont la vitesse est $\boldsymbol{u}$: $\mathrm{We} = \rho_g \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 D/\sigma$. Parmi ces régimes, le régime particulier *vibrational breakup* est en réalité ignoré la plupart du temps car pour les faibles valeurs de We associées, le processus de fragmentation est très lent comparé au temps de vie d'une goutte. Sur la base de cette classification, Pilch et Erdman [122] proposent ainsi la corrélation suivante pour estimer le temps τ_{br} nécessaire à la fragmentation des gouttes :

$$\frac{\tau_{br}}{\tau^*} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{We} \leq 12, \\ 6(\mathrm{We} - 12)^{-1/4} & \text{si} \quad 12 < \mathrm{We} \leq 18, \\ 2.45(\mathrm{We} - 12)^{1/4} & \text{si} \quad 18 < \mathrm{We} \leq 45, \\ 14.1(\mathrm{We} - 12)^{-1/4} & \text{si} \quad 45 < \mathrm{We} \leq 350, \\ 0.766(\mathrm{We} - 12)^{1/4} & \text{si} \quad 350 < \mathrm{We} \leq 2670, \\ 5.5 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.24}$$

où τ^* est une échelle de temps caractéristique définie comme :

$$\tau^* = \frac{D}{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|}\left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{1/2}. \tag{1.25}$$

Il est également possible de calculer la fréquence caractéristique de fragmentation $f_{br} = 1/\tau_{br}$. Notons qu'en réalité, le nombre de Weber critique We_c en dessous duquel la fragmentation n'intervient pas n'est pas strictement égal à 12. Pour les valeurs de Oh élevées (cf. équation (1.6)), Pilch et Erdman [122] indiquent en effet :

$$\mathrm{We}_c = 12(1 + 1.077\,\mathrm{Oh}^{1.6}). \tag{1.26}$$

En présence d'un jet liquide atomisé par un écoulement co-courant gazeux, Oh est de l'ordre de 10^{-3}. Il est donc possible, dans ce cas, de considérer la valeur particulière $\mathrm{We}_c = 12$.

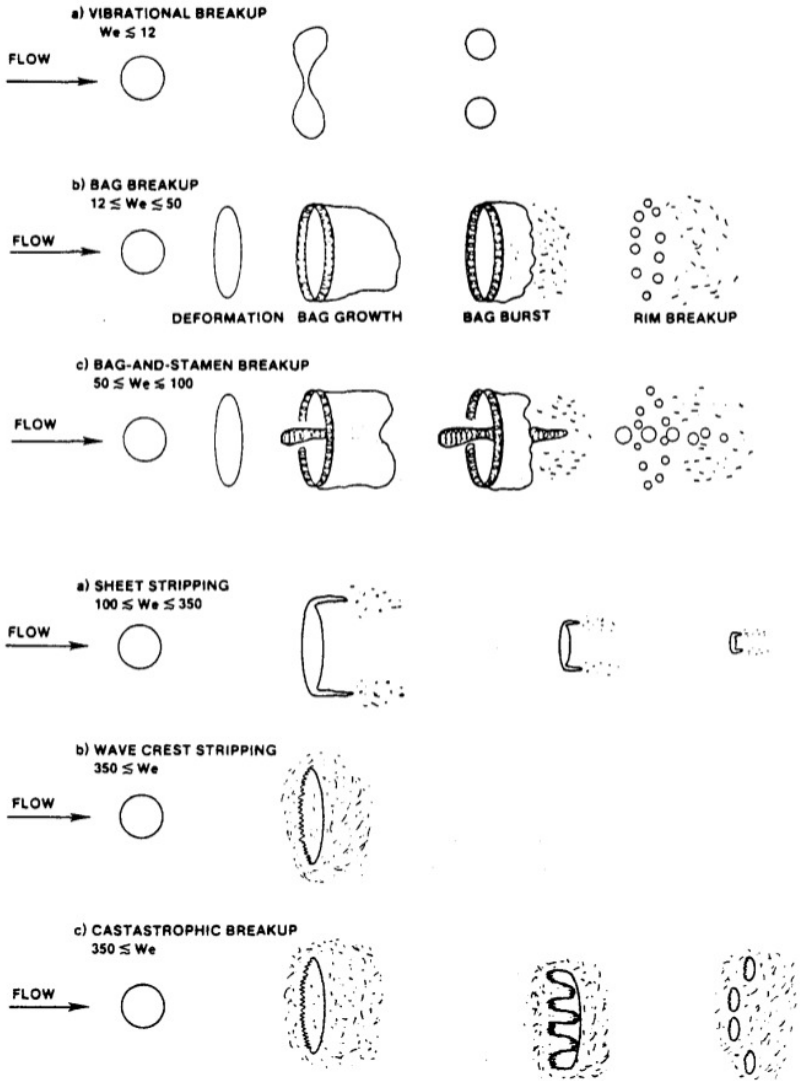


Figure 1.8 – Régimes de fragmentation d'après Pilch et Erdman [122].

Pilch et Erdman [122] formulent également le temps nécessaire τ_i pour initialiser le processus de fragmentation comme :

$$\frac{\tau_i}{\tau^*} = 1.9(\mathrm{We} - 12)^{-1/4}(1 + 2.2\,\mathrm{Oh}^{1.6}). \tag{1.27}$$

Dans le cas présent où Oh est très faible, cette formulation tend vers :

$$\frac{\tau_i}{\tau^*} = 1.9(\mathrm{We} - 12)^{-1/4}. \tag{1.28}$$

À partir des temps de rupture τ_{br} et τ_i, Wert [164] propose pour finir de modéliser le diamètre moyen de Sauter D_f associé à la distribution de la taille des gouttes filles issues de la fragmentation d'une goutte mère de diamètre D comme :

$$\frac{D_f}{D} = 0.32\,\mathrm{We}^{-1/3}\left(\frac{\tau_{br} - \tau_i}{\tau^*}\right)^{2/3}. \tag{1.29}$$

1.1.4 Propriétés macroscopiques des jets coaxiaux en régime d'atomisation de type fibre

Longueur du cœur liquide

Il existe plusieurs types de longueur de cœur liquide pour caractériser un jet et la définition donnée dans la littérature est parfois ambiguë, voire trompeuse. On peut s'intéresser dans un premier temps à mesurer la longueur instantanée de cœur liquide intact L_{lc}. Celle-ci correspond, à un instant donné, à la distance depuis le plan d'injection à partir de laquelle toutes les structures liquides sont détachées du jet principal. Il s'agit donc de la longueur de la phase continue reliée à l'injecteur, *i.e.* le cœur liquide. Évidemment, cette longueur évolue au cours du temps à chaque fois qu'un nouveau fragment est arraché à l'extrémité du cœur liquide. Il ne s'agit donc pas d'une longueur absolue. Certains auteurs définissent alors la longueur moyenne de cœur intact, notée ici $\overline{L_{lc}}$, comme la moyenne temporelle de L_{lc}. Cette longueur moyenne permet ainsi d'associer une valeur unique de longueur de cœur liquide pour chaque point de fonctionnement. C'est cette longueur que mesurent par exemple Eroglu *et al.* [42] par une méthode de visualisation ombroscopique. Les auteurs déduisent de ces mesures la corrélation suivante :

$$\frac{\overline{L_{lc}^{Ero}}}{D_l} = 0.66\,\mathrm{We}^{-0.4}\,\mathrm{Re}_l^{0.6}\,. \tag{1.30}$$

Le terme *longueur de cœur liquide intact* est également utilisé par certains auteurs pour définir ce que l'on appellera ici la longueur de cœur liquide potentiel. Cette longueur repose sur la mesure de la probabilité de présence de liquide dans l'espace notée *LPP*. Pour mesurer cette grandeur, Villermaux [159] utilise par exemple une technique de fluorescence laser associée à l'ajout d'un colorant particulier dans le liquide injecté. La concentration moyenne de colorant au cours du temps C est mesurée le long de l'axe d'injection et normalisée par la concentration initiale C_0 à l'intérieur de l'injecteur. L'auteur obtient ainsi une mesure en chaque point de l'espace de la probabilité de présence de liquide $LPP = C/C_0$, dont la valeur est bornée entre 0 et 1. Il définit ensuite la longueur de dilution L_x comme la distance depuis le plan d'injection à laquelle $LPP = x$. L'auteur propose finalement les corrélations suivantes :

$$\frac{L_{1.0}^{Vmx}}{D_l} = 6\,J^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{L_{0.5}^{Vmx}}{D_l} = 12\,J^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.31}$$

La longueur de cœur liquide potentiel est en réalité associée à la longueur particulière $L_{1.0}$. Cette longueur caractérise donc la distance maximale depuis le plan d'injection à laquelle le liquide est présent à tout instant. Elle n'est ainsi pas équivalente à la longueur moyenne de cœur liquide intact $\overline{L_{lc}}$. Pour des jets liquides présentant une variation temporelle élevée de L_{lc} ou soumis à un battement transverse important, ces deux longueurs peuvent même être très éloignées l'une de l'autre. Il est intéressant de noter que Lasheras et Hopfinger [87] retrouvent une corrélation très similaire à la précédente sur la base de travaux théoriques :

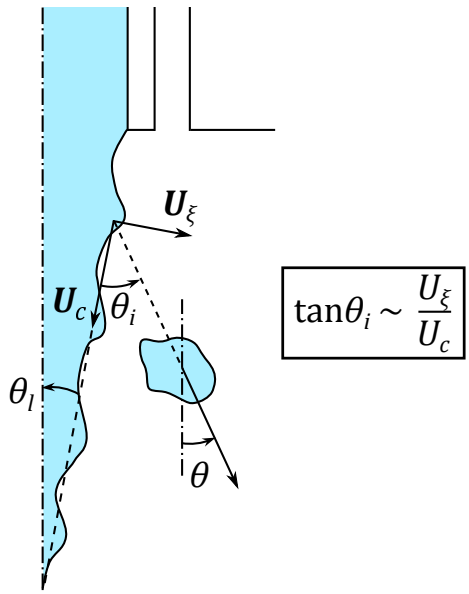
$$\frac{L_{1.0}^{L\&H}}{D_l} = \frac{6\,J^{-\frac{1}{2}}}{\left|1 - \dfrac{U_l}{U_g}\right|}. \tag{1.32}$$

Dans des travaux plus récents, Leroux *et al.* [96] proposent quant à eux :

$$\frac{L_{1.0}^{Lrx}}{D_l} = 10\,J^{-0.3}. \tag{1.33}$$

Angle de spray

L'angle du spray issu de l'atomisation d'un jet liquide est une grandeur qu'il est important de pouvoir caractériser puisqu'il influence directement l'angle d'ouverture de la flamme. Une analyse théorique est notamment proposée par Villermaux [159] pour estimer *a priori* cet angle en fonction des



θ_i : angle du spray par rapport à la surface du cœur liquide
θ_l : angle entre la surface du cœur liquide et l'axe d'injection
θ : angle du spray par rapport à l'axe d'injection

Figure 1.9 – Illustration de l'analyse théorique de Villermaux [159] pour estimer l'angle de spray.

conditions d'injection. Dans ces travaux, l'auteur formule de façon théorique la direction d'éjection des structures liquides lors de l'atomisation primaire du cœur liquide. Selon lui, la direction initiale empruntée par ces structures serait directement déterminée par le rapport entre la vitesse de croissance radiale U_ξ des crêtes formées à la surface du jet liquide par les instabilités longitudinales et transverses et de leur vitesse de convection U_c le long de l'interface. Si l'on note θ_i l'angle entre la surface du jet liquide et la direction initialement empruntée par les structures liquides arrachées, on a alors (cf. figure 1.9) :

$$\tan\theta_i \sim \frac{U_\xi}{U_c}, \tag{1.34}$$

avec

$$U_\xi = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \sim U_g \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{1/2}, \tag{1.35}$$

où, rappelons-le, ξ est l'élévation de l'interface au passage des instabilités de surface. Si l'on note cette fois-ci θ l'angle entre l'axe d'injection et la direction suivie initialement par les structures liquides, et θ_l l'angle entre l'axe d'injection et la surface du jet liquide, on peut alors écrire :

$$\theta = \theta_i - \theta_l. \tag{1.36}$$

D'après Villermaux [159], l'angle θ_i vaudrait environ 45° quelles que soient les conditions de fonctionnement dès lors que la vitesse d'injection de l'écoulement co-courant gazeux est nettement supérieure à celle du liquide (*i.e.* en régime d'atomisation de type fibre). Par ailleurs, l'angle θ_l peut quant à lui être évalué grâce à l'estimation de la longueur du cœur liquide. Si l'on utilise la corrélation précédente (1.31) de Villermaux [159], on obtient alors la corrélation suivante pour l'angle de spray :

$$\theta^{Vmx} = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{J^{1/2}}{12}\right). \tag{1.37}$$

À partir de données expérimentales, Leroux *et al.* [96] proposent quant à eux :

$$\theta^{Lrx} = \arctan\left(\frac{J^{0.3}}{3}\right). \tag{1.38}$$

Il est étonnant de remarquer que les deux corrélations précédentes décrivent une évolution opposée de l'angle du spray en fonction du nombre sans dimension J. En effet, d'après la relation (1.37), l'angle diminue lorsque le rapport J augmente, tandis qu'il augmente selon Leroux *et al.* [96]. Malgré cette contradiction, les deux corrélations conduisent à un angle équivalent pour un rapport $J = 10$ représentatif des conditions de fonctionnement mises en jeu dans les moteurs à ergols liquides ($\theta^{Vmx}(J = 10) \approx \theta^{Lrx}(J = 10) \approx 30°$).

Cette synthèse bibliographique relative à l'atomisation de jets liquides sous le cisaillement d'un écoulement co-courant gazeux met clairement en évidence l'aspect multi-échelle de ce type d'écoulement. Le liquide est d'abord présent sous la forme d'un jet continu dans une zone où l'écoulement est dit à *phases séparées*, puis s'atomise progressivement pour former des ligaments dont la taille caractéristique est proche du diamètre du cœur liquide. Dans cette zone, on qualifiera l'écoulement de *mixte*. Par la suite, le cisaillement opéré par l'écoulement co-courant gazeux conduit à la formation d'un spray de gouttes de tailles bien inférieures au diamètre du jet. On parle cette fois-ci de *phase dispersée*. Dans la suite de ce chapitre, l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur le comportement de jets atomisés, des plus grosses aux plus petites structures liquides, est décrite à l'aide d'observations expérimentales et numériques présentées dans la littérature.

1.2 Comportement de jets liquides inertes atomisés sous excitation acoustique

L'introduction de ce mémoire a révélé que le comportement des ergols face aux ondes acoustiques pouvait avoir une influence significative sur la réponse des flammes et la stabilité du système propulsif. Dans le cadre de l'étude des instabilités de combustion HF, plusieurs équipes de recherche se sont ainsi intéressées à décrire précisément l'ensemble des mécanismes d'interaction entre des ondes acoustiques et des jets liquides dans des conditions inertes. L'absence de flamme lors de ces travaux expérimentaux facilite grandement l'accès optique à la phase liquide et permet ainsi une meilleure analyse de sa réponse aux perturbations acoustiques. Pour que les mécanismes de réponse observés soient représentatifs des écoulements mis en jeu dans les moteurs-fusées, il est impératif de respecter certaines contraintes comme 1) injecter le liquide selon un régime d'atomisation de type fibre et 2) imposer des fluctuations de pression d'amplitude de l'ordre de 10% de la pression moyenne de chambre (valeur crête-à-crête) [2], soit un niveau acoustique de l'ordre de 165 dB dans de l'air à pression atmosphérique.

Dans le domaine, Miesse [109] est l'un des premiers à s'intéresser à l'effet d'ondes acoustiques sur des jets liquides. L'auteur démontre notamment lors de ses travaux que les jets libres (*i.e.* sans écoulement co-courant gazeux) répondent de façon plus significative à des perturbations acoustiques transverses que longitudinales. Il observe en particulier une réduction significative de la longueur du jet liquide une fois soumis aux perturbations acoustiques, mais ne décrit cependant pas le mécanisme à l'origine de cette atomisation précoce. En présence d'ondes acoustiques transverses, l'auteur observe également une oscillation du jet dans la direction de propagation des ondes.

De façon similaire, Buffum et Williams [15] étudient par la suite le comportement d'un jet liquide libre turbulent sous une excitation acoustique transverse de fréquence maximale de 500 Hz. Lorsque le jet liquide est positionné en un ventre de vitesse acoustique (VAN), les auteurs observent une oscillation transverse du jet liquide dès lors que le niveau acoustique dépasse 130 dB. L'amplitude d'oscillation du

2. Il est généralement fait référence aux instabilités de combustion de haute fréquence dès lors que les oscillations de pression en jeu dépassent 10% de la pression moyenne de chambre (valeur crête-à-crête) (Hardi *et al.* [65], Huang et Huzel [72])

jet ne devient cependant mesurable qu'à partir de 140 dB et augmente rapidement avec l'intensité d'excitation acoustique. Au-delà de 160 dB, le jet s'atomise. Les auteurs expliquent l'oscillation transverse du jet par l'action de la force de traînée exercée par le gaz lors du passage des ondes acoustiques. De plus, il est démontré qu'augmenter le diamètre d'injection du liquide ou sa masse volumique conduit à une réduction de l'amplitude d'oscillation du jet car la masse de liquide à déplacer est plus importante. Par ailleurs, une amplitude d'oscillation maximale est obtenue lorsque le temps mis par les particules de liquide constituant le jet pour parcourir la chambre est égal à la moitié de la période acoustique. Enfin, il est démontré dans cette étude que l'utilisation du coefficient de traînée classiquement utilisé pour les cylindres solides soumis à un écoulement stationnaire conduisait à une sous-évaluation de l'oscillation du jet d'un ordre de grandeur. En effet, les fluctuations de vitesse issues du passage des ondes acoustiques ainsi que le plissement de la surface du jet turbulent induisent une augmentation des contraintes exercées par le gaz sur le jet.

Plus tard, le laboratoire AFRL de l'Armée de l'Air américaine conçoit un dispositif permettant d'étudier le comportement de jets d'azote liquide libres sous une excitation acoustique transverse de 180 dB au maximum et une fréquence maximale de presque 5 000 Hz. Outre ces impressionnantes caractéristiques acoustiques, le dispositif en question a par ailleurs la particularité de fonctionner à des pressions et températures variables autour du point critique de l'azote ($p_c^{N_2} = 34\,\text{bar}$; $T_c^{N_2} = 126\,\text{K}$) afin de permettre une injection du fluide à l'état sub- ou supercritique. Pour une injection en un VAN du champ acoustique, Chehroudi et Talley [20] observent alors une modification significative de la forme du jet liquide principalement à l'état subcritique pour une pression proche du point critique. Le jet liquide est en effet aplati dans la direction de propagation des ondes et s'élargit au contraire dans la direction orthogonale. Au-delà d'une longueur d'un ou deux diamètres d'injecteur en aval du plan d'injection, le jet liquide se transforme ainsi en une nappe caractérisée par une atomisation bien plus importante. Le dispositif expérimental est par la suite modifié de manière à permettre l'étude du comportement de jets coaxiaux constitués d'un écoulement d'azote liquide au centre dont l'atomisation est assistée par un écoulement co-courant d'azote gazeux. Sous une excitation acoustique équivalente à la précédente mais à des vitesses d'injection assez faibles, Chehroudi et Talley [19] observent alors cette fois-ci le jet liquide emprunter une forme sinusoïdale proche du battement d'un drapeau équivalente notamment à ce qu'obtiennent plus tard Gonzalez-Flesca *et al.* [57] par la simulation numérique dans le cas d'un jet libre d'oxygène injecté à l'état transcritique. Aucun aplatissement du jet central n'est en revanche observé dans ces conditions. Pour des vitesses d'injection plus représentatives des écoulements associés aux moteurs à ergols liquides, le jet central présente une forme sinusoïdale encore plus prononcée sous l'effet des fluctuations de vitesse dues au passage des ondes acoustiques (cf. figure 1.10). Dès la sortie de l'injecteur, la phase liquide est alors entraînée périodiquement vers le co-courant gazeux injecté à haute vitesse, favorisant ainsi le cisaillement entre les deux fluides. Dans ce cas, les auteurs observent une réduction significative de la longueur du jet liquide central pouvant aller jusqu'à 50% de sa taille initiale (cf. Chehroudi *et al.* [21], Davis et Chehroudi [29] ou encore Davis et Chehroudi [28]).

Dans le cadre du groupement de recherche franco-allemand Rest dédié à l'étude des instabilités de combustion HF dans les moteurs à ergols liquides, le laboratoire du Coria a lui aussi réalisé de nombreuses études de jets liquides sous excitation acoustique transverse de haute fréquence. Dans le cas d'un jet libre soumis à un niveau et une fréquence acoustiques respectifs d'environ 157 dB et 1 000 Hz et positionné en un VAN du champ acoustique, Carpentier *et al.* [18] observent un aplatissement du liquide dans la direction de propagation acoustique similaire à ce qu'observaient Chehroudi et Talley [20]. Ce phénomène d'aplatissement, également observé dans des cas réactifs (*e.g.* Hakim *et al.* [64]), est issu d'après les auteurs des contraintes exercées sur le jet par la pression de radiation acoustique. L'aplatissement du jet intervient selon eux lorsque ces contraintes sont suffisamment élevées pour contrer l'effet de la tension de surface. Dans le cas d'un jet liquide dont l'atomisation est assistée par un écoulement co-courant gazeux, Baillot *et al.* [7] retrouvent également cet aplatissement dès lors qu'une valeur seuil d'amplitude acoustique est atteinte (cf. figure 1.11). Les auteurs définissent même un nombre adimensionnel et une valeur critique à partir de laquelle le jet peut être déformé. Ils démontrent ainsi que le diamètre du jet et les niveaux acoustiques considérés lors des travaux de

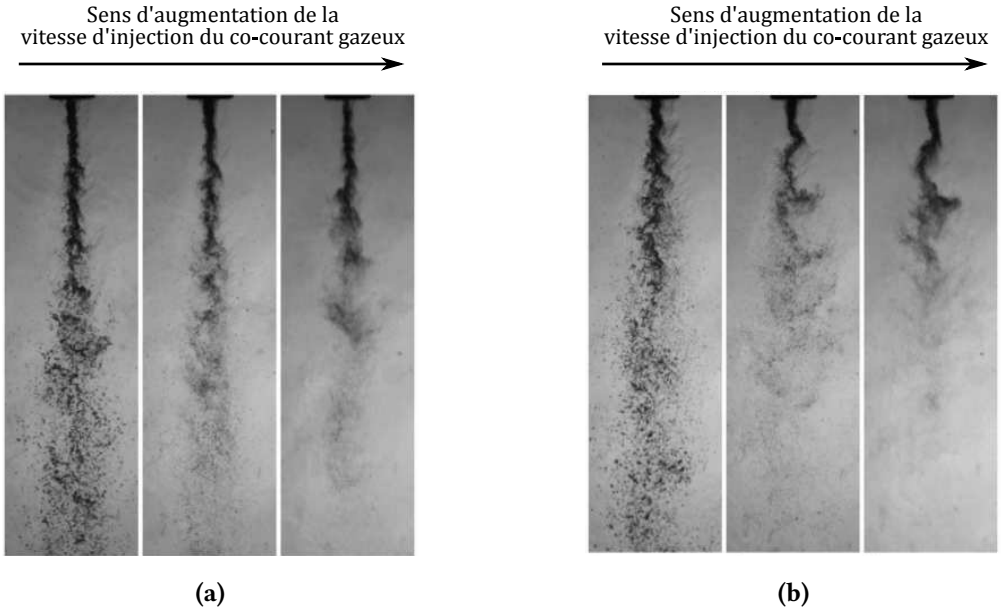
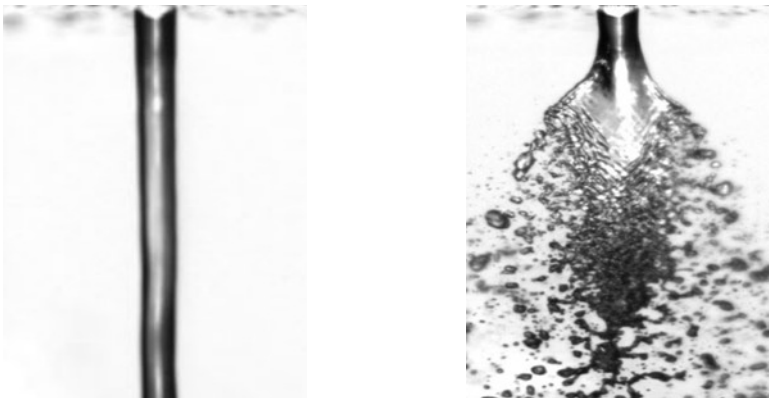


Figure 1.10 – Jets coaxiaux LN_2/GN_2 pour différentes vitesses d'injection (a) sans et (b) avec excitation acoustique transverse à 3 kHz (Davis et Chehroudi [28]).

Buffum et Williams [15] étaient trop faible pour permettre cet aplatissement. De même, malgré le niveau acoustique de 180 dB imposé par Davis et Chehroudi [28], les fluctuations de pression résiduelles au VAN du champ acoustique étaient trop importantes pour permettre aux ondes de déformer le jet liquide central. En revanche, Baillot *et al.* [7] démontrent que l'amplitude de pression nécessaire à l'aplatissement du liquide dans le cas de jets libres est inférieure aux cas de jets coaxiaux, ce qui explique pourquoi Chehroudi et Talley [20] ont bien observé le phénomène. Le dispositif expérimental de Baillot *et al.* [7] est par la suite modifié de manière à atteindre des niveaux acoustiques de l'ordre de 166 dB. Cela permet alors à Ficuciello *et al.* [52] de quantifier l'influence de l'amplitude d'excitation acoustique sur l'épaisseur de jets en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique (jet initialement cylindrique, cf. figure 1.2). Dans le cas du régime d'atomisation de type fibre représentatif des écoulements associés aux moteurs à ergols liquides, l'accès optique au cœur liquide est en revanche compliqué par la présence de nombreuses gouttes dans le champ de visualisation. Les auteurs démontrent cependant que pour ce type de régime, les ligaments et gouttes issus de l'atomisation du jet central sont eux-mêmes soumis aux contraintes de radiation acoustique et peuvent ainsi être déformés et atomisés par celles-ci. Dans le prolongement de ces travaux expérimentaux, le Coria a également effectué des études théoriques des mécanismes de radiation acoustique de manière à expliquer plus précisément les observations expérimentales précédentes. Notamment, Baillot *et al.* [7] formulent de façon analytique le profil de pression de radiation acoustique autour d'une sphère positionnée dans un champ acoustique stationnaire de longueur d'onde bien supérieure au diamètre de l'objet. Cette formulation est ensuite reprise et étendue par Ficuciello [51] à des objets cylindriques et sphériques de dimension quelconque représentant respectivement le jet dense central et une goutte issue de son atomisation. Pour cela, Ficuciello [51] s'appuie sur les travaux de King [78], Zhuk [170] et Wu *et al.* [166] et effectue un travail important de clarification et de consolidation de leur démarche initiale. Les formulations analytiques généralisées de Ficuciello [51] permettent alors de démontrer que le profil de pression de radiation acoustique est hétérogène autour de l'objet lorsque celui-ci est positionné en dehors d'un PAN du champ acoustique, conduisant ainsi potentiellement à l'aplatissement de la phase dense. L'auteur démontre par ailleurs que la pression de radiation acoustique apparaît dès lors qu'il existe un différentiel de masse volumique entre les deux fluides et ne nécessite pas la présence d'une tension de surface. La théorie généralisée de Ficuciello [51] peut alors être appliquée à la fois à des cas sub- et transcritiques pour expliquer le mécanisme d'aplatissement observé expérimentalement dans



(a) (b)

Figure 1.11 – Aplatissement d'un jet liquide eau/air initialement en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique (Baillot *et al.* [7]). (a) Sans et (b) avec excitation acoustique à 159 dB (jet positionné en un VAN). Visualisation dans le plan orthogonal à l'axe de propagation acoustique.

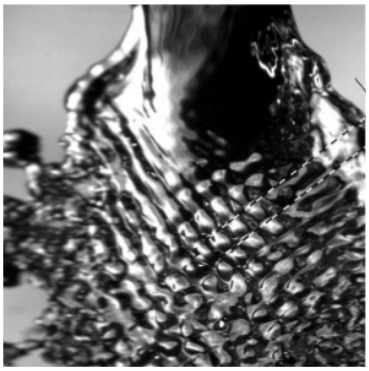
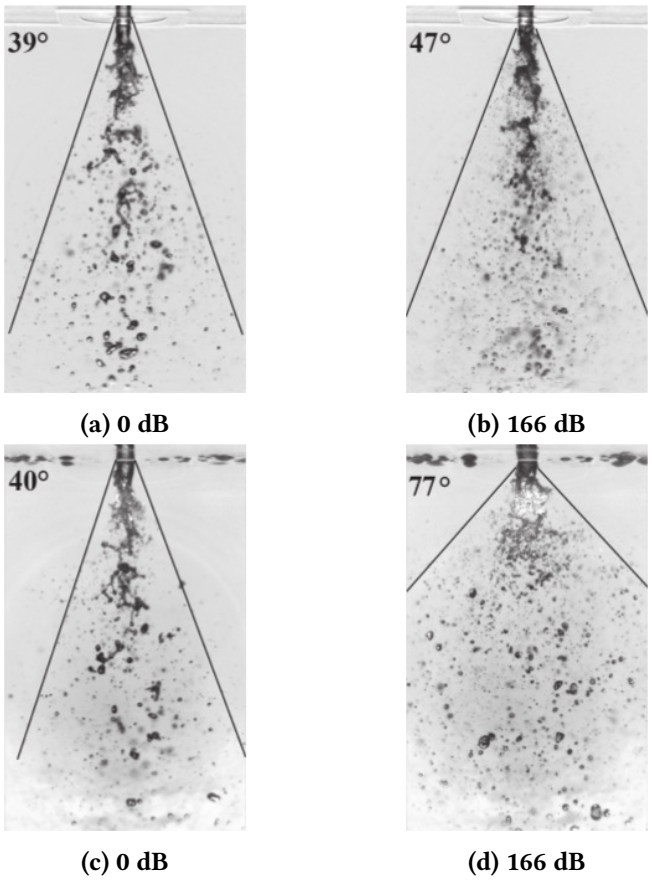


Figure 1.12 – Instabilités de Faraday à la surface d'un jet liquide aplati par une onde acoustique (Baillot *et al.* [7]).

des conditions de fonctionnement inertes et réactives.

Les travaux de Carpentier *et al.* [18] et Baillot *et al.* [7] démontrent également la formation d'un réseau d'instabilités à la surface du jet liquide lorsque celui-ci est aplati par les contraintes acoustiques (cf. figure 1.12). Ce mécanisme est en réalité semblable à ce qui est observé par Faraday [44] pour des films liquides en contact avec une surface solide vibrante. C'est pourquoi il est fait mention dans les travaux du Coria d'instabilités de Faraday. Le phénomène est particulièrement visible lorsque le jet liquide est initialement dans un régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique et conduit à l'éjection de fines gouttelettes dans la direction normale à la nappe (*i.e.* la direction de propagation des ondes acoustiques). Par la suite, Ficuciello *et al.* [52] démontrent que, dans le cas de jets en régime d'atomisation de type membrane (régime intermédiaire entre le régime de Rayleigh axisymétrique et le régime de type fibre, cf. figure 1.2), ces instabilités et l'éjection de gouttes qui en résulte conduisent à une augmentation de l'angle de spray d'une valeur initiale de 15° à 39° dans la direction de propagation des ondes acoustiques. Dans la direction orthogonale, les auteurs observent une augmentation de l'angle plus importante de 17° à 105° qui semble également issue de l'aplatissement du jet, mais sans décrire le mécanisme qui en est à l'origine. Dans le cas d'un régime d'atomisation de type fibre, l'augmentation de l'angle est plus faible, avec une variation de 39° à 47° dans la direction de propagation acoustique et de 40° à 77° dans la direction orthogonale (cf. figure 1.13).

Lorsque le jet est positionné en un VAN du champ acoustique, Baillot *et al.* [7] observent également



(a) 0 dB **(b) 166 dB**

(c) 0 dB **(d) 166 dB**

Figure 1.13 – Augmentation de l'angle de spray d'un jet liquide eau/air en régime d'atomisation de type fibre (Ficuciello *et al.* [52]). (a-b) Visualisation dans le plan contenant l'axe acoustique et (c-d) dans le plan orthogonal.

une modification significative du processus d'atomisation du cœur liquide. Pour des jets initialement en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique ou membrane, l'aplatissement et les instabilités de Faraday qui en résultent conduisent à une atomisation précoce du jet liquide et à une réduction importante de sa longueur. Pour observer le même phénomène en régime d'atomisation de type fibre, il faut attendre les travaux de Ficuciello *et al.* [52] pour lesquels les niveaux acoustiques sont plus élevés. Contrairement aux travaux de Miesse [109] et Davis et Chehroudi [28], la réduction de la longueur du cœur liquide ne semble pas liée ici à une oscillation transverse de la phase liquide vers les zones de cisaillement important. Lorsque le jet est positionné au contraire en ventre de pression (PAN pour *Pressure Anti-Node*) du champ acoustique, Baillot *et al.* [7] observent également une modification importante du processus d'atomisation du jet liquide. Cependant, puisqu'en cette position la pression de radiation acoustique autour du cœur liquide est homogène, aucun aplatissement n'est observé. Les auteurs démontrent que ce sont en réalité les fluctuations de pression au sein de l'injecteur, engendrées elles-mêmes par les fluctuations de pression dans la cavité, qui conduisent à une modulation périodique du débit d'injection du co-courant gazeux à la fréquence d'excitation acoustique. L'atomisation du jet liquide est alors promue lors des phases où le débit d'injection du gaz co-courant augmente.

Lorsque le jet liquide est positionné entre un PAN et un VAN du champ acoustique, les travaux théoriques de King [78], Wu *et al.* [166] et Ficuciello [51] démontrent également que les contraintes acoustiques peuvent conduire à une déviation de la phase liquide, qu'il s'agisse du cœur liquide ou des gouttes. En effet, le profil de pression de radiation acoustique autour du jet ou des gouttes n'est pas symétrique lorsque le liquide est injecté entre ces deux positions du champ acoustique. Une force résultante s'exerce ainsi sur la phase dense et conduit dans le cas présent à une déviation vers le VAN le plus proche. Dans leurs travaux, Carpentier *et al.* [18] observent ce phénomène pour des jets liquides

(a) 0 dB **(b) 166 dB**

Figure 1.14 – Déviation par la force de radiation acoustique d'un jet liquide eau/air en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique (Ficuciello *et al.* [52]). Visualisation dans le plan contenant l'axe de propagation acoustique.

libres cylindriques et proposent un premier modèle théorique pour évaluer *a priori* l'amplitude de déviation du jet. Malgré une reproduction qualitative du phénomène, ce modèle ne permet cependant pas de restituer la déviation du jet de façon précise. Dans le cas de jets liquides dont l'atomisation est assistée par un écoulement co-courant gazeux, Ficuciello *et al.* [52] observent eux aussi une déviation du cœur liquide vers le VAN le plus proche, principalement lorsque le régime d'atomisation correspond à un régime de type Rayleigh axisymétrique (cf. figure 1.14). Un second modèle est alors proposé pour estimer l'amplitude de déviation du jet. Celui-ci permet de retrouver des valeurs en accord avec les mesures expérimentales, excepté lorsque le jet est positionné en un ventre d'intensité acoustique [3] (IAN pour *Intensity Anti-Node*). En effet, une portion de l'énergie acoustique est consommée en cette position pour déformer le cœur liquide, réduisant ainsi la quantité d'énergie disponible pour la déviation. Baillot *et al.* [7] retrouvent eux aussi le phénomène de déviation dans le cas de gouttes liquides issues d'un film d'eau disposé sur le toit d'une cavité acoustique. Les trajectoires de ces gouttes sous l'effet de la gravité et des contraintes acoustiques démontrent que les structures liquides sont déviées vers le VAN le plus proche. Si leur vitesse initiale est opposée à la force de radiation acoustique, les auteurs observent alors les gouttes se diriger d'abord vers le PAN le plus proche, puis ralentir pour finalement faire demi-tour et se diriger vers le VAN. En présence de jets liquides en régime d'atomisation de type membrane ou fibre, Ficuciello *et al.* [52] notent par ailleurs un décentrement du spray vers le VAN le plus proche du point d'injection, ce phénomène étant le plus marqué pour une injection en un IAN du champ acoustique. Par ailleurs, lorsque le niveau acoustique dépasse 154 dB, le décentrement augmente de façon exponentielle. Dans un cas réactif, ce processus de déviation peut conduire à une répartition hétérogène de la phase liquide dans la chambre de combustion et ainsi alimenter localement les instabilités de combustion HF.

Il existe peu d'autres travaux dédiés à l'analyse de l'influence d'ondes acoustiques sur le comportement de jets coaxiaux représentatifs des moteurs à ergols liquides. Des travaux équivalents ont cependant été réalisés dans le cadre spécifique de l'étude des instabilités de combustion de basse fréquence dans les moteurs aéronautiques. Dans ce type de moteur, la phase liquide, qui correspond cette fois-ci au combustible, est également atomisée par le cisaillement avec un écoulement co-courant gazeux à haute vitesse. Il existe un grand nombre de technologies différentes pour l'injection des fluides (Lefebvre [95]). Quel que soit le dispositif retenu, la phase liquide est en général présente dans la chambre de combustion essentiellement sous la forme d'un brouillard de gouttes. Dans certains cas, une nappe liquide est présente mais celle-ci est très rapidement atomisée par l'écoulement co-courant. Dans leurs

3. L'intensité acoustique est la puissance par unité de surface transportée par les ondes acoustiques. Elle est définie comme le produit entre les fluctuations de vitesse et de pression.

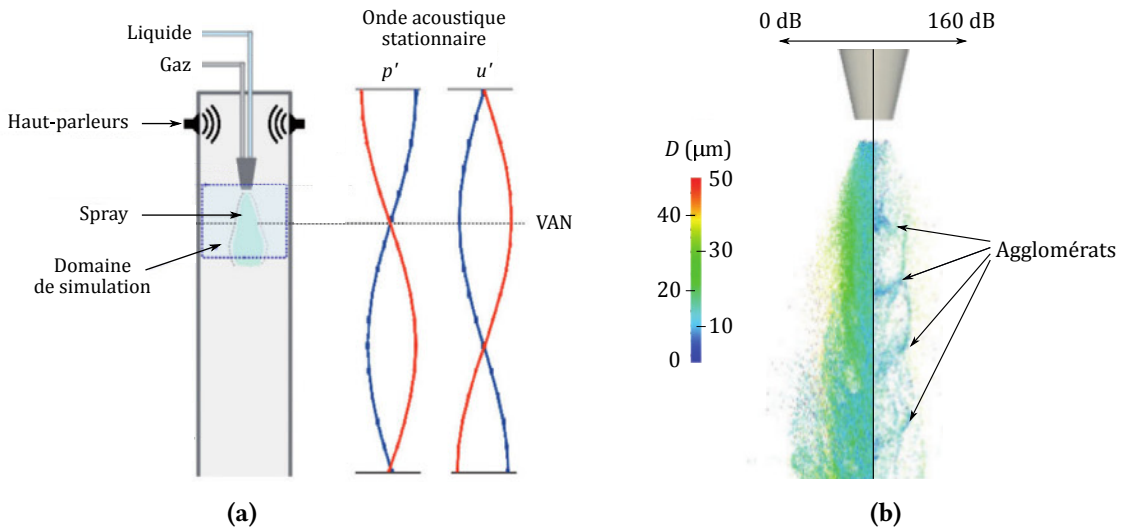


Figure 1.15 – Simulation numérique d'un spray sous excitation acoustique longitudinale (Achury et Polifke [2]).

travaux, Gajan *et al.* [54] se sont notamment intéressés à la réponse d'un spray issu d'une injection *swirlée* à des ondes acoustiques longitudinales caractéristiques des instabilités de combustion de basse fréquence. Dans ce cas précis, les ondes acoustiques sont associées à une amplitude de fluctuations de l'ordre de 2.5% de la pression moyenne de chambre et à une fréquence acoustique d'environ 180 Hz seulement. Par ailleurs, la cavité acoustique est conçue afin d'imposer un ventre de vitesse acoustique au centre du spray. Dans ce cas, le passage des ondes acoustiques dans le système d'injection induit une fluctuation du débit d'injection du gaz co-courant. Le processus d'atomisation de la nappe liquide à la sortie de l'injecteur est ainsi impacté et engendre une production périodique de gouttes à la fréquence acoustique. De plus, les fluctuations de vitesse longitudinales du gaz induisent une oscillation de la vitesse de convection des gouttes le long de l'axe d'injection sous l'effet de la force de traînée, avec une amplitude plus ou moins élevée selon la taille des fragments liquides. Les plus petites gouttes vont alors suivre ces oscillations de vitesse et subir ce que Giuliani [56] appelle l'*effet accordéon*. Combinées à la modification périodique du processus d'atomisation de la nappe liquide, ces oscillations de vitesse vont conduire à une agglomération de gouttes à intervalle régulier le long de l'axe d'injection, avec une quantité croissante de petites gouttes dans ces agglomérats. Le même phénomène a été observé expérimentalement par Kumara Gurubaran et Sujith [81] mais aussi numériquement par Achury et Polifke [2] pour des niveaux acoustiques d'environ 160 dB et une fréquence d'excitation de 240 Hz. Une illustration de la situation étudiée est présentée en figure 1.15a, tandis que la figure 1.15b illustre le phénomène d'agglomération des gouttes. Dans un cas réactif, cela conduit à un apport variable et hétérogène de combustible à la zone de combustion et peut ainsi influencer le couplage thermoacoustique. Bien que tous ces travaux ne concernent que la propagation d'ondes acoustiques longitudinales de basse fréquence, les travaux de Baillot *et al.* [7] ont démontré que des fluctuations transverses peuvent elles aussi conduire à une oscillation du débit d'injection du co-courant gazeux lorsque l'injecteur est positionné hors d'un VAN du champ acoustique. Dans un cas réactif, la production intermittente de gouttes par l'atomisation du cœur liquide pourrait donc aussi bien jouer un rôle dans le couplage thermoacoustique au sein des moteurs à ergols liquides.

Les processus d'interaction entre les ondes acoustiques et la phase liquide mentionnés ci-dessus constituent un ensemble de phénomènes qui doivent pouvoir être restitués par la simulation numérique si l'on souhaite, à plus long terme, utiliser cet outil pour l'étude des instabilités de combustion HF en régime d'injection subcritique. Pour cela, il est évidemment nécessaire en premier lieu de pouvoir simuler de façon fiable la dynamique des jets liquides atomisés en l'absence de perturbations acoustiques. Les principales approches pour modéliser ce type d'écoulement sont synthétisées dans le chapitre 2.

Chapitre 2

Méthodes de simulation d'écoulements diphasiques atomisés

Les mécanismes physiques présentés au chapitre 1 seront utilisés comme référence tout au long de ces travaux afin de réaliser une évaluation complète des méthodes numériques utilisées dans le code Cedre pour la simulation d'écoulements diphasiques représentatifs des moteurs-fusées à ergols liquides. La principale difficulté associée à la simulation numérique de jets liquides atomisés consiste à formuler une méthode de modélisation à même de décrire l'ensemble des échelles de l'écoulement diphasique qui soit à la fois robuste, précise et dont le coût de calcul associé soit raisonnable pour des applications complexes et proches de cas industriels. Dans le chapitre 2, les principales approches utilisées pour modéliser ce type d'écoulement sont présentées de façon synthétique et non exhaustive afin d'en présenter les avantages et inconvénients respectifs. Cette synthèse est en particulier inspirée des travaux de Le Touze [90] et Odier [117]. Suite à cette synthèse bibliographique, la stratégie de simulation retenue par l'Onera et développée dans le code Cedre est présentée de façon détaillée.

Sommaire

2.1 Synthèse bibliographique . . . 38
2.1.1 Équations de bilan . . . 38
2.1.2 Méthodes de reconstruction de l'interface . . . 38
2.1.3 Méthodes de diffusion de l'interface . . . 42
2.1.4 Méthodes cinétiques . . . 44
2.1.5 Méthodologies de couplage des différentes approches . . . 50
2.2 Stratégie de simulation retenue pour l'étude . . . 52
2.2.1 Simulation des zones à phases séparées et mixtes . . . 53
2.2.2 Simulation des zones à phase dispersée . . . 64
2.2.3 Modélisation des termes sources . . . 68
2.2.4 Méthodes numériques de résolution . . . 73

2.1 Synthèse bibliographique

2.1.1 Équations de bilan

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les écoulements diphasiques associés aux jets liquides atomisés sont constitués d'inclusions liquides de tailles variées au sein d'un milieu gazeux, les deux phases étant séparées l'une de l'autre par une interface en mouvement. Malgré la présence potentielle d'inclusions liquides de taille très faible, celles-ci restent bien plus grandes que l'échelle moléculaire. Dans ce cas, la mécanique des milieux continus s'applique et il est possible de décrire mathématiquement l'écoulement grâce aux équations de conservation monophasiques appliquées aux deux phases isolées. Dans le cas simplifié d'un écoulement inerte constitué de deux phases d'indice k ne contenant chacune qu'une seule espèce, il s'agit des équations bien connues de Navier-Stokes compressibles définies pour chaque phase comme :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \dfrac{\partial \rho_k}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_k \boldsymbol{u}_k) & = & 0, & & \\ \dfrac{\partial \rho_k \boldsymbol{u}_k}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_k \boldsymbol{u}_k \otimes \boldsymbol{u}_k) & = & \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\tau}_k - p_k \boldsymbol{I}) & + & \boldsymbol{f}_k, \\ \dfrac{\partial \rho_k e_{t,\,k}}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[(\rho_k e_{t,\,k} + p_k)\boldsymbol{u}_k\right] & = & \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\tau}_k\cdot\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{J}_{e_{t,\,k}}\right) & + & \boldsymbol{f}_k\cdot\boldsymbol{u}_k. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Dans ce système d'équations, ρ_k désigne la masse volumique de la phase k, $\boldsymbol{u}_k$ est son vecteur vitesse et p_k sa pression, tandis que $\boldsymbol{f}_k$ représente le vecteur des forces volumiques appliquées à la phase k, $\boldsymbol{\tau}_k$ est le tenseur des contraintes visqueuses, $\boldsymbol{I}$ est le tenseur identité, $\otimes$ est le produit tensoriel et $\boldsymbol{\nabla}\cdot()$ désigne l'opérateur de divergence. Enfin, $e_{t,\,k}$ désigne l'énergie totale spécifique de la phase k, tandis que $\boldsymbol{J}_{e_{t,\,k}}$ est le flux d'énergie totale. Ces équations sont valides en tout point de l'écoulement à l'exception de l'interface où il existe des sauts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie exprimés par les relations de saut suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \rho_k\,(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{w}_I)\cdot\boldsymbol{n}_k & = & 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \left[\rho_k \boldsymbol{u}_k \otimes (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{w}_I) - (\boldsymbol{\tau}_k - p_k \boldsymbol{I})\right]\cdot\boldsymbol{n}_k & = & \boldsymbol{M}_I^{\sigma}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \left[\rho_k e_{t,\,k}(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{w}_I) - (\boldsymbol{\tau}_k - p_k \boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{J}_{e_{t,\,k}}\right]\cdot\boldsymbol{n}_k & = & E_I^{\sigma}. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Ici, $\boldsymbol{w}_I$ représente le vecteur vitesse de l'interface et $\boldsymbol{n}_k$ le vecteur unitaire normal à celle-ci et orienté vers l'extérieur de la phase k. $\boldsymbol{M}_I^{\sigma}$ et E_I^{σ} désignent quant à eux la quantité de mouvement et l'énergie associées à la tension de surface au niveau de l'interface. Leur expression fait notamment intervenir le coefficient de tension de surface σ et les propriétés géométriques locales de l'interface.

Il existe différentes approches pour modéliser ce type d'écoulement : les approches nécessitant une reconstruction de l'interface et les approches à interface diffuse. Dans le cas où la phase liquide n'est présente que sous la forme de gouttes sphériques de petite dimension, il est également possible d'utiliser une approche statistique. On présente dans un premier temps les approches conduisant à une reconstruction de l'interface.

2.1.2 Méthodes de reconstruction de l'interface

La première façon de modéliser les écoulement diphasiques consiste à résoudre les équations de conservation monophasiques au sein de chaque fluide de façon isolée et, au niveau de l'interface, d'utiliser les conditions de saut comme *conditions aux limites* entre les deux phases. Pour cela, il est nécessaire de procéder à une reconstruction précise de l'interface de manière à connaître à chaque instant sa position et sa forme. Les méthodes associées à une reconstruction de l'interface peuvent être classées selon

différentes familles : les méthodes Lagrangiennes, également appelées méthodes de suivi d'interface ou *front tracking*, et les méthodes Eulériennes, également appelées méthodes de capture d'interface ou *front capturing*. Quelle que soit l'approche considérée, la reconstruction précise de l'interface à l'intérieur des cellules du maillage permet en théorie une description de toutes les zones de l'écoulement diphasique et de toutes les échelles de structures liquides, à condition d'imposer un raffinement de maillage suffisant. En réalité, le coût élevé de calcul associé conduit à une utilisation très faible de ces méthodes pour décrire la phase dispersée, excepté dans le cas d'applications académiques (*e.g.* Luret *et al.* [102]). Pour les cas particuliers d'écoulements réactifs, utiliser ce type d'approche pour décrire l'ensemble de l'écoulement diphasique est inenvisageable car l'évaporation conduit progressivement à des structures liquides dont la taille tend vers zéro. Par ailleurs, les méthodes de reconstruction d'interface sont principalement utilisées pour simuler des écoulements incompressibles.

Méthode Lagrangienne de suivi de l'interface

L'approche de suivi d'interface largement développée par Unverdi et Tryggvason [153] (cf. également Tryggvason *et al.* [152]) repose sur un suivi Lagrangien de marqueurs ponctuels advectés par le champ de vitesse local. Comme le représente la figure 2.1, les marqueurs distribués sur l'ensemble de l'interface diphasique définissent ainsi sa position à chaque instant. Une reconstruction de l'interface est nécessaire après l'étape d'advection par une connexion linéaire ou polynomiale des marqueurs. Cette méthode présente l'intérêt principal d'être très précise puisqu'elle permet de résoudre des caractéristiques de l'interface plus petites que la taille des cellules du maillage. La précision de la méthode dépend cependant en partie du nombre de marqueurs suivis et requiert une redistribution régulière des marqueurs sur l'interface pouvant conduire à des coûts de calcul importants. Par ailleurs, cette méthode rend difficilement compte des processus de coalescence et de fragmentation de la phase liquide (Unverdi et Tryggvason [153]).

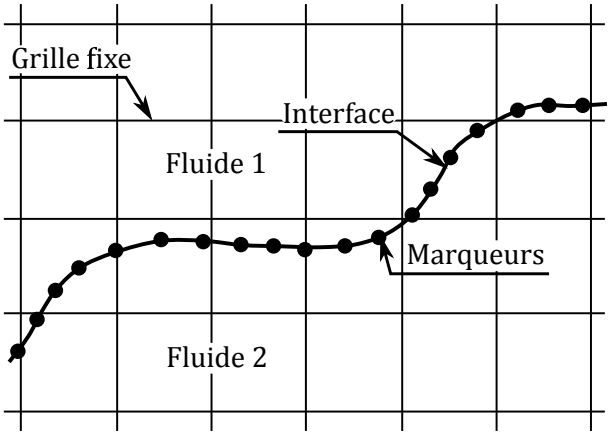


Figure 2.1 – Illustration de l'approche Lagrangienne de suivi d'interface (Tryggvason *et al.* [152]).

Méthodes Eulériennes de capture de l'interface

⋆⋆ *La méthode Vof (Volume Of Fluid)* ⋆⋆

Initialement proposée par Hirt et Nichols [71], cette approche consiste à rajouter aux équations de Navier-Stokes incompressibles une équation de transport d'un scalaire α représentant la fraction volumique de liquide. Cette approche Eulérienne permet donc de connaître précisément la quantité de liquide présente dans chaque cellule du maillage, les valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ étant respectivement associées à des zones de gaz pur ou de liquide pur, tandis qu'une valeur de α comprise entre 0 et 1 indique la présence de l'interface dans la cellule concernée. La position exacte de l'interface au sein de ces cellules *mixtes* reste cependant inconnue en l'état. Il est alors nécessaire d'avoir recours à une méthode

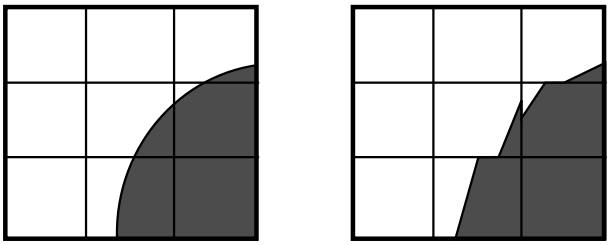


Figure 2.2 – Illustration de la méthode de reconstruction d'interface PLIC associée à l'approche Eulérienne Vof (Odier [117]). Gauche : écoulement d'origine ; droite : reconstruction PLIC.

de reconstruction de l'interface particulière, la plus utilisée étant la méthode PLIC (*Piecewise Linear Interpolation Construction*, cf. par exemple Youngs [168]). Dans un cas 2D, cette méthode consiste à modéliser l'interface par un segment dont l'orientation et la position au sein de chaque cellule *mixte* sont déterminées par la fraction volumique locale de liquide ainsi que par celle des cellules voisines (cf. figure 2.2). Dans le cas d'un maillage 3D non structuré, la reconstruction de l'interface est en revanche bien plus complexe. La méthode Vof présente l'avantage d'être conservative en masse et d'être facilement parallélisable. Pour accroître sa précision, cette méthode peut être combinée à une méthode d'adaptation de maillage autour de l'interface (cf. par exemple Malik *et al.* [103], Fuster *et al.* [53] et Popinet [126]).

⋆⋆ *La méthode Level Set* ⋆⋆

La seconde méthode de capture d'interface est la méthode *Level Set* introduite par Osher et Sethian [120] (cf. également Sussman *et al.* [145]). Cette méthode repose initialement sur l'advection d'une fonction scalaire représentant cette fois-ci la distance signée à l'interface et pouvant être définie comme :

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{à l'interface,} \\ \varphi > 0 & \text{dans le liquide,} \\ \varphi < 0 & \text{dans le gaz.} \end{cases} \tag{2.3}$$

L'interface est ainsi représentée par les iso-surfaces de valeur nulle. La connaissance de la distance à l'interface la plus proche est une information supplémentaire par rapport à la méthode Vof et permet de calculer plus simplement et plus précisément les propriétés géométriques de l'interface. Elle permet par ailleurs de gérer plus facilement les processus de coalescence et de fragmentation. En revanche, cette méthode souffre principalement de non-conservation de la masse. En réponse à ce défaut majeur, Olsson et Kreiss [119] proposent de remplacer la fonction *Level Set* signée d'origine par une fonction tangente hyperbolique. En contrepartie, l'utilisation de cette nouvelle fonction scalaire conduit à des défauts de robustesse liés à la sensibilité du calcul de la normale à l'interface face aux variations de la fonction tangente hyperbolique. Desjardins *et al.* [30] proposent alors une méthode mixte basée sur la reconstruction de la fonction distance signée d'origine à partir de la fonction tangente hyperbolique puis le calcul de la normale à l'interface à partir de cette fonction reconstruite. Pour augmenter la précision de la méthode *Level Set* et réduire les problèmes de conservation de la masse, il est également possible, à l'instar de l'approche Vof, d'employer une méthode d'adaptation de maillage autour de l'interface (cf. par exemple Ngo et Choi [115] et Herrmann [69]).

Méthodes mixtes

⋆⋆ *Combinaison des approches de suivi d'interface et Level Set* ⋆⋆

Il existe également des approches dites *mixtes* basées sur la combinaison de différentes méthodes afin de retenir les points forts de chacune d'entre elles. Enright *et al.* [41] proposent notamment de coupler la méthode de suivi Lagrangien de l'interface à la méthode *Level Set*. L'idée de cette approche

est d'améliorer l'aspect conservatif en masse de la méthode *Level Set* grâce à la précision naturelle de la méthode Lagrangienne, tout en conservant la capacité de la méthode *Level Set* à gérer plus facilement les processus de coalescence et de fragmentation. Les auteurs proposent de distribuer des marqueurs ponctuels autour de l'interface et de leur associer une valeur de distance à l'interface et un signe dépendant de la phase. L'interface est quant à elle transportée par une méthode *Level Set* classique. Lorsque le signe assigné à une particule change en cours de calcul, cela signifie que la particule a traversé l'interface et révèle ainsi une mauvaise capture de l'interface par la méthode Eulérienne. L'interface est alors réajustée de sorte que la particule en question retrouve son signe et sa position relative à l'interface. De la même manière que pour la méthode Lagrangienne seule, l'ajout, la suppression et la redistribution des particules au cours du temps autour de l'interface est nécessaire pour assurer la précision de la méthode. D'après les auteurs, cette méthode démontre des propriétés de conservation de la masse comparables à la méthode VOF et une précision équivalente à la méthode Lagrangienne classique. Le coût associé est en revanche élevé et la mise en œuvre sur une configuration 3D compressible n'est pas triviale.

⋆⋆ *Combinaison des approches Level Set et VOF* ⋆⋆

SUSSMAN et PUCKETT [144] introduisent quant à eux une méthode combinant les avantages des deux méthodes Eulériennes *Level Set* et VOF. À chaque instant, la fonction *Level Set* est corrigée pour correspondre à la distance exacte de l'interface reconstruite par la méthode VOF. L'approche *Level Set* assure ainsi une bonne précision de calcul des propriétés géométriques de l'interface tandis que la méthode VOF assure la conservation de la masse au cours du temps. D'après les auteurs, cette approche couplée est particulièrement intéressante pour les écoulements présentant d'importants changements de topologies pour lesquels la méthode *Level Set* classique peut conduire à une perte de masse de 20%, contre moins de 1% pour la méthode couplée. Différentes applications de cette approche peuvent être trouvées dans la littérature telles que la simulation de jets Diesel par MÉNARD *et al.* [111] et par SHINJO et UMEMURA [137].

Un aspect que nous n'avons pas traité jusque là est le lien entre les méthodes de modélisation de l'interface et la modélisation de la turbulence. En particulier, dans le cas d'une formulation LES (*Large Eddy Simulation*), les équations résolues sont filtrées de manière à ne résoudre que les plus grandes échelles de l'écoulement captées par le maillage. Dans ce cas, il est important de pouvoir modéliser l'action des plus petites structures sur l'écoulement. Un nombre significatif de travaux est recensé dans la littérature dans le cas d'écoulements monophasiques, tandis que les cas d'applications aux écoulements multiphasiques sont plus rares. Dans le cas particulier de l'atomisation de jets liquides, il est possible de se référer à CHESNEL *et al.* [22] qui s'intéressent à la modélisation des termes turbulents dits de sous-maille et à leur influence sur l'évolution de l'interface diphasique modélisée par l'approche couplée *Level Set*/VOF présentée à l'instant.

Traitement des discontinuités et des relations de saut

Outre la problématique principale de reconstruction précise de l'interface, les méthodes mentionnées précédemment nécessitent également de porter une attention particulière au traitement numérique de la discontinuité des variables de part et d'autre de l'interface (densité, pression, ...) et à la restitution de la tension de surface. Il existe deux méthodes classiques pour traiter ces problèmes :

- la méthode CSF (*Continuum Surface Force*) introduite par BRACKBILL *et al.* [13]. Cette méthode consiste à étaler l'interface et à lisser les discontinuités associées sur une épaisseur de plusieurs cellules du maillage à l'aide d'une fonction particulière. Les propriétés de l'écoulement à travers l'interface s'expriment alors comme une moyenne pondérée par cette même fonction (ODIER [117]). Dans cette approche, la tension de surface, qui est un phénomène purement surfacique, est reformulée selon un point de vue volumique.
- la méthode *Ghost Fluid* proposée par FEDKIW *et al.* [50] qui permet quant à elle de s'affranchir de l'épaississement de l'interface. Dans cette méthode, les variables discontinues sont prolongées de

manière continue dans des cellules fantômes de chaque côté de l'interface. La discrétisation des variables est alors plus précise que dans la méthode CSF et la tension de surface est retranscrite grâce à la connaissance des conditions de saut.

2.1.3 Méthodes de diffusion de l'interface

Modèle général homogénéisé

Le principe de l'approche à interface diffuse est de dériver un système d'équations unique valable dans l'ensemble de l'écoulement diphasique, y compris au niveau de l'interface, à partir d'une homogénéisation du système (2.1). Pour une description détaillée de ce procédé d'homogénéisation, le lecteur est invité à se référer aux travaux de Ishii et Hibiki [75] ainsi que de Drew et Passman [35]. Dans ce contexte, le modèle le plus général qui puisse être obtenu est le modèle dit *à 7 équations* initialement proposé par Baer et Nunziato [5] et étendu par la suite par Saurel et Abgrall [133] grâce à l'introduction de termes de pression, de vitesse et d'énergie totale spécifique d'interface p_I, $\boldsymbol{u}_I$ et $e_{t,\,I}$. Si, pour simplifier la présentation du modèle, on ne considère pas les termes diffusifs des équations bilan, le modèle en question est défini par le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
\dfrac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot(\alpha_k\rho_k\boldsymbol{u}_k) & = & \delta_k\Gamma_I, & & & & \\
\dfrac{\partial \alpha_k \rho_k \boldsymbol{u}_k}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot(\alpha_k\rho_k\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{u}_k+\alpha_k p_k\boldsymbol{I}) & = & \delta_k\boldsymbol{u}_I\Gamma_I & + & \delta_k\boldsymbol{F}_I & + & p_I\boldsymbol{\nabla}\alpha_k, \\
\dfrac{\partial \alpha_k \rho_k e_{t,\,k}}{\partial t} & + & \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[(\alpha_k\rho_k e_{t,\,k}+\alpha_k P_k)\boldsymbol{u}_k\right] & = & \delta_k e_{t,\,I}\Gamma_I & + & \delta_k\boldsymbol{F}_I\cdot\boldsymbol{u}_I & - & p_I\dfrac{\partial\alpha_k}{\partial t} \quad + \quad \delta_k Q_I, \\
\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial t} & + & \boldsymbol{u}_I\cdot\boldsymbol{\nabla}\alpha_k & = & \delta_k A_I, & & & &
\end{array}\right. \tag{2.4}$$

avec α_k la fraction volumique de la phase k et $\delta_k = (-1)^k$. On remarque alors que, contrairement aux approches précédentes de reconstruction d'interface, aucune relation de saut n'intervient. Il est en contrepartie nécessaire de modéliser les termes Γ_I, $\boldsymbol{F}_I$, Q_I et A_I qui rendent compte des échanges de masse [1], de quantité de mouvement et d'énergie entre les deux phases à travers l'interface du fait du déséquilibre entre leurs potentiels chimiques g_k, leurs vitesses, leurs températures T_k et leurs pressions. Une modélisation de ces termes est proposée par Labois [82] :

$$\begin{array}{lllllll}
\Gamma_I & = & \lambda_g\left(\dfrac{g_1}{T_1}-\dfrac{g_2}{T_2}\right), & \qquad & Q_I & = & \lambda_T\left(T_1-T_2\right), \\
\boldsymbol{F}_I & = & \lambda_u\left(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\right), & & A_I & = & \lambda_p\left(p_2-p_1\right),
\end{array} \tag{2.5}$$

où les coefficients λ_g, λ_u, λ_T et λ_p peuvent être formulés à partir de temps de relaxation relatifs à chacune des grandeurs g, $\boldsymbol{u}$, T et p. C'est dans l'expression de ces temps de relaxation que se trouve la modélisation des phénomènes physiques tels que l'évaporation, les effets de la traînée et les transferts de chaleur.

En ce qui concerne la modélisation des termes de pression et de vitesse d'interface p_I et $\boldsymbol{u}_I$ présents dans le système d'équations (2.4), un grand nombre de formulations est proposé dans la littérature. On peut notamment citer la formulation de Baer et Nunziato [5] :

$$\left\{\begin{array}{lll}\boldsymbol{u}_I & = & \boldsymbol{u}_1 \\ p_I & = & p_2\end{array}\right., \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{lll}\boldsymbol{u}_I & = & \boldsymbol{u}_2 \\ p_I & = & p_1\end{array}\right. . \tag{2.6}$$

1. Dans la formulation présentée ici où une seule espèce est présente par phase, l'échange de masse à travers l'interface ne peut intervenir que si les deux phases considérées sont composées de la même espèce dans deux états thermodynamiques différents. Dans le cas contraire, le terme Γ_I est nul.

Une seconde formulation est également proposée par Saurel et Abgrall [133] dans laquelle la vitesse d'interface est associée à la vitesse du centre de masse du mélange :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_I &= Y_1\boldsymbol{u}_1 + Y_2\boldsymbol{u}_2, \\ p_I &= \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \alpha_k p_k, \end{cases} \tag{2.7}$$

avec Y_k la fraction massique de la phase k telle que $\rho Y_k = \alpha_k \rho_k$ et $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$. Seulement cette formulation ne permet pas d'assurer une production positive d'entropie dans l'ensemble du système diphasique. Pour cela, Coquel *et al.* [23] proposent de conserver la vitesse du centre de masse comme vitesse d'interface et d'exprimer la pression d'interface par une formulation tenant compte de la température des phases :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_I &= Y_1\boldsymbol{u}_1 + Y_2\boldsymbol{u}_2, \\ p_I &= \mu p_1 + (1-\mu)p_2 \qquad \text{avec} \qquad \mu = Y_2T_2 / \displaystyle\sum_{k=1}^{2} Y_kT_k. \end{cases} \tag{2.8}$$

Relaxation du modèle général

Pour simplifier la modélisation de l'écoulement et réduire le nombre d'équations à résoudre, il est possible d'effectuer certaines hypothèses sur les temps de relaxation introduits précédemment. Malgré la dépendance de ces temps au cas d'application étudié et aux phénomènes physiques rencontrés, Labois [82] affirme que les pressions des deux phases relaxent généralement plus rapidement vers l'équilibre que leurs vitesses, qui elles-mêmes relaxent plus vite vers l'équilibre que les températures. En dernier lieu, les potentiels chimiques sont en général les grandeurs les plus lentes à relaxer vers l'équilibre. Sur la base de ce constat, il est possible, selon la précision et le coût de modélisation souhaités, de considérer que l'un ou plusieurs de ces temps de relaxation sont nuls et donc de supposer un équilibre local instantané entre les phases pour les grandeurs associées. De cette hypothèse découle un ensemble de modèles dérivés synthétisés dans le tableau 2.1. À l'exception du premier modèle dit *à 6 équations*, ces modèles dérivés présentent tous l'avantage d'être hyperboliques comme le modèle général.

Le modèle à 4 équations correspond au modèle retenu actuellement par l'Onera pour la modélisation d'écoulements diphasiques associés aux moteurs-fusées à ergols liquides en conditions d'injection subcritiques. Ce modèle particulier conduit à un système caractérisé par une unique pression, une unique température et une unique vitesse pour le mélange diphasique. Il s'agit en réalité du système d'équations de Navier-Stokes compressibles multi-espèces. Le choix d'une approche à interface diffuse est en partie justifié par sa capacité naturelle à traiter les écoulements diphasiques compressibles et potentiellement réactifs. Les modèles à interface diffuse ont par ailleurs l'avantage de ne présenter aucune difficulté particulière en présence de maillages non structurés et de permettre une parallélisation massive des calculs. Il s'agit donc d'une approche idéale pour un code multi-physique comme le code Cedre de l'Onera. Ces méthodes offrent par ailleurs des possibilités de couplage relativement simples avec des méthodes spécifiquement adaptées à la modélisation de la phase dispersée.

Un aspect qui n'a pas été traité ici est que la modélisation des transferts interfaciaux, quel que soit le modèle à interface diffuse considéré, requiert dans l'idéal la connaissance de la topologie de l'interface. Or, par définition, le procédé d'homogénéisation conduit à une perte d'information sur les détails de l'interface. Il est alors possible, pour résoudre cette difficulté, d'ajouter au modèle une équation de transport de la densité d'aire interfaciale. La résolution de cette équation nécessite de modéliser les termes de production et de destruction d'interface. Les premiers sont associés au plissement de l'interface par la turbulence, à l'atomisation primaire ou encore à la fragmentation, tandis que la destruction de l'interface est liée par exemple à l'évaporation et la coalescence. Pour une description détaillée des enjeux associés à cette équation supplémentaire, le lecteur est invité à se référer par exemple à la thèse

Nom du modèle	Variable relaxée	Équations résolues
Modèle à 7 équations	–	√ 2× masse √ 2× QDM √ 2× énergie √ 1× frac. vol.
Modèle à 6 équations	p	√ 2× masse √ 2× QDM √ 2× énergie
Modèle à 5 équations (*e.g.* Murrone et Guillard [110])	p et $\boldsymbol{u}$	√ 2× masse √ 1× QDM √ 2× énergie
Modèle à 4 équations (*e.g.* Le Touze [90])	p, $\boldsymbol{u}$ et T	√ 2× masse √ 1× QDM √ 1× énergie
Modèle à 3 équations	p, $\boldsymbol{u}$, T et g	√ 1× masse √ 1× QDM √ 1× énergie

Table 2.1 – Hiérarchie de modèles diphasiques obtenus par relaxation du modèle général (Le Touze [90]).

de Le Touze [90]. L'ajout d'équations supplémentaires pour le transport de variables géométriques caractérisant l'aspect local de l'interface est également possible (cf. Essadki *et al.* [43] et Cordesse *et al.* [24]).

2.1.4 Méthodes cinétiques

Que l'on utilise une approche à reconstruction d'interface ou bien à interface diffuse, un raffinement de maillage important est nécessaire en théorie pour décrire précisément l'intégralité d'un jet liquide atomisé, y compris la phase dispersée. Le raffinement requis pour cela est même inenvisageable dans le cas d'applications industrielles comme la simulation d'un moteur-fusée faisant intervenir plusieurs centaines d'injecteurs. Pour modéliser la zone du spray de l'écoulement diphasique où les gouttes peuvent être considérées sphériques et suffisamment éloignées les unes des autres, il est préférable d'utiliser une approche spécifique dite *statistique* s'appuyant sur un formalisme similaire à l'équation de Maxwell-Boltzmann dédiée à décrire les écoulements gazeux en zone raréfiée, *i.e.* lorsque les interactions entre molécules peuvent être négligées. Dans le cas d'un écoulement diphasique, l'équation à résoudre est l'équation cinétique de Williams-Boltzmann.

L'équation cinétique de Williams-Boltzmann

L'équation cinétique de Williams-Boltzmann (Williams [165]) décrit l'évolution de la fonction densité numérique de gouttes, ou *Number Density Function* (NDF), dépendant des variables de temps t, de position $\boldsymbol{x}$, de vitesse $\boldsymbol{v}$, de taille s (diamètre, surface ou volume) et de température θ [2]. Si l'on note la NDF $\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)$, l'expression mathématique $\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta$ représente le nombre de particules dans le volume $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ au voisinage du point $\boldsymbol{x}$ à l'instant t, dont la taille est comprise entre s et

2. On suppose ici que la température à l'intérieur des particules est uniforme, ce qui revient à supposer une conductivité thermique infinie.

$s + \mathrm{d}s$, et ayant une vitesse et une température respectivement comprises entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$, et entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. L'équation cinétique régissant l'évolution de $\mathcal{F}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{v}\mathcal{F}) + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{T}}\mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{K}\mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathcal{R}\mathcal{F}) = \Gamma + Q, \tag{2.9}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot ()$ et $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \cdot ()$ désignent respectivement la divergence dans l'espace physique et dans l'espace des vitesses. Selon cette équation, l'évolution au cours du temps de la NDF en un point donné de l'espace est issue :

- du transport des gouttes : $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{v}\mathcal{F})$.
- des forces extérieures. Dans le cas de gouttes liquides portées par une phase gazeuse nettement moins dense, la force de traînée est généralement considérée prépondérante. Dans ce cas $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ désigne la force de traînée massique.
- des transferts de masse avec la phase porteuse par évaporation et par condensation. La variation de la taille des gouttes s est ainsi représentée par le terme $\mathcal{K}$.
- des transferts de chaleur avec la phase porteuse conduisant à une variation de la température des particules représentée par le terme $\mathcal{R}$.
- des processus de fragmentation et de coalescence désignés par les termes sources Γ et Q.

Il est en pratique possible de résoudre cette équation en discrétisant l'intégralité de l'espace des phases, *i.e.* l'ensemble des variables $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)$ dont dépend $\mathcal{F}$. L'utilisation de cette approche est néanmoins coûteuse et irréaliste dans le cas d'applications industrielles. Pour limiter le coût de calcul associé, il est alors possible d'appréhender la résolution de cette équation selon deux approches distinctes : l'approche Lagrangienne et l'approche Eulérienne.

Approche Lagrangienne pour la résolution de l'équation cinétique

L'approche Lagrangienne pour la résolution de l'équation cinétique repose sur le suivi Lagrangien des particules en résolvant les équations particulières régissant l'évolution de leur position, taille, vitesse et température. Suivre individuellement chaque particule aurait évidemment un coût très important. L'idée de cette approche consiste alors à réduire le nombre d'objets à suivre en regroupant un certain nombre de particules réelles considérées comme ayant globalement les mêmes positions, vitesses, tailles et températures à un instant donné sous la forme de particules numériques. Si l'on considère ici une particule numérique numérotée i, il est possible de relier son poids $\omega_i(t)$ au nombre total de particules réelles qu'elle contient à l'instant t. Dans ce cas, la NDF peut s'écrire sous la forme de diracs comme :

$$\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(t) \delta_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i(t)} \delta_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_i(t)} \delta_{s=s_i(t)} \delta_{\theta=\theta_i(t)}, \tag{2.10}$$

où les variables $(\boldsymbol{x}_i(t), \boldsymbol{v}_i(t), s_i(t), \theta_i(t))$ correspondent respectivement à la position, la vitesse, la taille, et la température des particules réelles contenues dans la particule numérique i à l'instant t. N représente par ailleurs le nombre de particules numériques considérées. Pour une description détaillée des méthodes de suivi Lagrangien de gouttes contenues dans un spray, le lecteur est invité à se référer par exemple à Hijlkema [70]. Pour plus de détails sur la modélisation des processus de fragmentation et de coalescence grâce notamment à l'utilisation d'algorithmes de Monte-Carlo, il est également possible de s'appuyer par exemple sur les travaux de O'Rourke [121] et de Ruger *et al.* [131]. Nous nous contenterons ici de synthétiser les différents avantages et inconvénients de cette approche Lagrangienne.

Cette approche présente tout d'abord l'avantage d'être parmi les plus précises et les moins diffusives. Par ailleurs, le suivi Lagrangien des gouttes ou des groupements de gouttes conduit à une prise en compte naturelle des croisements de trajectoires et facilite ainsi la modélisation des processus de collision. L'un des principaux atouts de cette approche réside également dans le traitement naturel

de l'interaction de la phase porteuse sur les gouttes grâce à des modèles simples formulés à l'échelle d'une goutte isolée. En contrepartie, cette approche souffre des difficultés habituelles inhérentes aux méthodes Lagrangiennes telles que le coût de calcul élevé en présence d'un grand nombre d'inclusions liquides à modéliser ou encore un équilibrage de la charge compliqué dans le cas de calculs massivement parallèles. De plus, l'aspect ponctuel des particules et des termes sources associés nécessite de procéder à une étape de projection délicate sur la grille eulérienne pour modéliser leur influence sur la phase porteuse.

Approche Eulérienne pour la résolution de l'équation cinétique

L'approche Eulérienne vise quant à elle à réduire la complexité de l'équation cinétique (2.9) de Williams-Boltzmann en diminuant son nombre de degrés de liberté. Cette approche repose en réalité sur la résolution d'équations de transport d'un certain nombre de moments de la NDF. On définit ainsi dans un premier temps la notion de *moment*. Dans le domaine des statistiques, un moment $\mathcal{M}_k$ d'ordre k d'une fonction quelconque $f(t)$ à une seule variable est défini par :

$$\mathcal{M}_k = \int_t t^k f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

À titre d'exemple, la moyenne d'une fonction (également appelée espérance en probabilité) est à relier au moment d'ordre 1 de cette fonction, tandis que la variance est à relier au moment d'ordre 2. Dans le cas de la NDF à plusieurs variables $\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)$, on désigne par $\mathcal{M}_{i,j,k,l,m}$ le moment d'ordre (i, j, k) selon les trois composantes de vitesse v_X, v_Y et v_Z, d'ordre l en taille et d'ordre m en température. Celui-ci est défini par la relation :

$$\mathcal{M}_{i,j,k,l,m}(t, \boldsymbol{x}) = \int_{v_X}\int_{v_Y}\int_{v_Z}\int_s\int_\theta v_X^i v_Y^j v_Z^k s^l \theta^m \mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}v_Z\,\mathrm{d}v_Y\,\mathrm{d}v_X. \tag{2.12}$$

Selon cette définition, une équation de transport d'un moment donné $\mathcal{M}_{i,j,k,l,m}$ de la NDF peut être obtenue en intégrant l'équation cinétique (2.9) comme :

$$\int_{v_X}\int_{v_Y}\int_{v_Z}\int_s\int_\theta v_X^i v_Y^j v_Z^k s^l \theta^m \text{ Eq. (2.9)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}v_Z\,\mathrm{d}v_Y\,\mathrm{d}v_X. \tag{2.13}$$

Comme l'énonce par exemple Sibra [139] dans sa thèse, une équation formulée pour un moment d'ordre n fait elle-même appel à des moments d'ordre supérieur $n+1$. À moins de connaître une infinité de moments, cette approche conduit donc à une perte d'information et par conséquent à un système d'équations non fermé. Afin de fermer le système à résoudre, il est alors nécessaire de formuler au préalable certaines hypothèses sur la forme de la NDF. On distingue pour cela deux catégories de méthodes : 1) les méthodes basées sur l'utilisation de techniques de quadrature pour estimer les moments inconnus d'ordres les plus élevés en fonction de moments d'ordres inférieurs (on peut évoquer notamment la méthode QMOM de McGraw [108] mais d'autres méthodes sont décrites plus en détail par Emre *et al.* [40]) et 2) les méthodes qui nous intéressent particulièrement dans le cadre de ce mémoire, basées sur l'établissement préalable d'un système d'équations de conservation dit *semi-cinétique*. Dans cette seconde catégorie, la procédure de fermeture s'effectue en deux étapes successives.

La première étape consiste à établir le système d'équations de conservation semi-cinétique en question. Pour cela, une première hypothèse concernant la forme de la NDF est à formuler. Notamment, l'hypothèse de Laurent et Massot [88] consiste à découpler les distributions en vitesse, taille et température, en écrivant :

$$\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta) = \phi_n(t, \boldsymbol{x}, s) f_{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s) f_\theta(t, \boldsymbol{x}, s, \theta), \tag{2.14}$$

où $f_{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s)$ et $f_\theta(t, \boldsymbol{x}, s, \theta)$ sont les fonctions densité de probabilité de vitesse et température conditionnées par la taille tandis que $\phi_n(t, \boldsymbol{x}, s)$ est la distribution numérique en taille par unité de volume

dont l'intégrale selon s conduit à la densité numérique de gouttes locale. Cette dernière distribution s'obtient formellement par l'intégration de la NDF sur les variables vitesse et température (moment d'ordre 0 en v_X, v_Y, v_Z et θ) :

$$\phi_n(t, \boldsymbol{x}, s) = \mathcal{M}_{0,0,0,0}(t, \boldsymbol{x}, s) = \int_{v_X} \int_{v_Y} \int_{v_Z} \int_{\theta} \mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}v_Z \, \mathrm{d}v_Y \, \mathrm{d}v_X. \tag{2.15}$$

Si l'on souhaite retenir ce moment parmi les moments à transporter par le système d'équations de conservation final, il est possible de dériver une équation de transport pour ϕ_n de la même façon que pour la formulation (2.13) mais en intégrant uniquement selon la vitesse et la température. De la même façon, on peut définir d'autres moments et les équations de transport associées et ainsi obtenir le système semi-cinétique :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{M}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mathcal{M}}) + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathcal{K})}{\partial s} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mathcal{T}}, \mathcal{R}, \Gamma, Q), \tag{2.16}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ est le vecteur des différents moments en vitesse et température que l'on souhaite transporter, $\boldsymbol{F}$ est le vecteur des flux dans l'espace physique, $\boldsymbol{G}$ est le vecteur des flux dans l'espace des tailles et $\boldsymbol{H}$ est une fonction vectorielle issue de l'intégration des termes restants de l'équation cinétique (2.9) selon la vitesse et la température. En pratique, le choix et le nombre de moments transportés dépendent en partie des hypothèses réalisées sur la forme des fonctions densité de probabilité $f_{\boldsymbol{v}}$ et f_θ et de la précision souhaitée.

Pour la seconde étape, il est nécessaire de formuler de nouvelles hypothèses cette fois-ci sur la forme de la distribution en taille ϕ_n afin de pouvoir ensuite intégrer le système semi-cinétique (2.16) sur l'espace des tailles et ainsi obtenir le système d'équations de conservation final à résoudre.

⋆⋆ *Hypothèses pour les distributions en température et en vitesse* ⋆⋆

Comme nous venons de l'énoncer, le choix des moments en vitesse et température à transporter dépend essentiellement des hypothèses formulées sur la forme des distributions normalisées de ces variables $f_{\boldsymbol{v}}$ et f_θ. Rappelons que ces distributions représentent la manière dont sont réparties la vitesse et la température de particules situées à un instant t dans un volume de contrôle autour du point $\boldsymbol{x}$ et dont la taille est voisine de s. Dans le cas général, si l'on considère que la répartition locale des vitesses et températures des particules est le résultat de processus aléatoires, alors la représentation des distributions $f_{\boldsymbol{v}}$ et f_θ nécessite au minimum la connaissance des moments d'ordre 1 (espérance) et d'ordre 2 (variance). Cependant, le transport des moments d'ordre 2 peut en réalité s'avérer coûteux. Il peut alors être intéressant, selon la précision de calcul visée, de considérer une dispersion nulle de la vitesse et de la température autour de leurs valeurs moyennes $\overline{\boldsymbol{v}}$ et $\overline{\theta}$ pour toutes les particules de taille équivalente situées au même endroit à un instant donné et ainsi réduire le nombre de moments à transporter pour ces deux variables (Laurent et Massot [88]). On parle alors d'hypothèse de monodispersion en vitesse et température. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par une NDF exprimée comme :

$$\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta) = \phi_n(t, \boldsymbol{x}, s) \delta\Big[\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}, s)\Big] \, \delta\Big[\theta - \overline{\theta}(t, \boldsymbol{x}, s)\Big], \tag{2.17}$$

où $\delta[\cdot]$ est la distribution de Dirac. On comprend bien à la lecture de cette expression, que l'hypothèse simplificatrice de monodispersion en vitesse et température conduit à concentrer tout l'effort de modélisation de la NDF sur la discrétisation de l'espace des tailles. En contrepartie, cette approche se traduit par une structure mathématique faiblement hyperbolique et peut conduire à des difficultés numériques notamment en cas de croisements de trajectoires puisque, en réalité, les particules n'ont localement pas la même vitesse (Sibra [139]). Pour corriger ces problèmes, des méthodes basées sur une fermeture Gaussienne en vitesse ont été formulées de manière à rendre compte de la polydispersion en vitesse. On peut notamment citer les travaux de Vié *et al.* [162] qui reposent sur une fonction Gaussienne Anisotrope. De nouvelles méthodes numériques dédiées doivent cependant être construites pour le transport sur des maillages non structurés ainsi que pour des sprays coalescents et évaporants (Dupif [39]).

⋆⋆ *Hypothèses pour la distribution en taille* ⋆⋆

À l'instar des distributions en vitesse et en température, il est possible de faire l'hypothèse de monodispersion en taille des particules. Cependant, dans le contexte de sprays évaporants, la polydispersion en taille est un aspect essentiel à modéliser. Pour cela, plusieurs approches de discrétisation de la distribution en taille des particules existent (cf. figure 2.3). La première de ces approches est l'approche multi-classe, ou *sampling method* en anglais. Celle-ci consiste à discrétiser la distribution en taille des particules comme une somme de N_c distributions de Dirac, conduisant à la formulation suivante :

$$\phi_n(t, \boldsymbol{x}, s) = \sum_{k=1}^{N_c} n^k(t, \boldsymbol{x})\, \delta\Big[s - \bar{s}^k(t, \boldsymbol{x})\Big], \tag{2.18}$$

où $n^k(t, \boldsymbol{x})$ et $\bar{s}^k(t, \boldsymbol{x})$ sont respectivement la densité numérique et la taille moyenne des particules de la classe k.

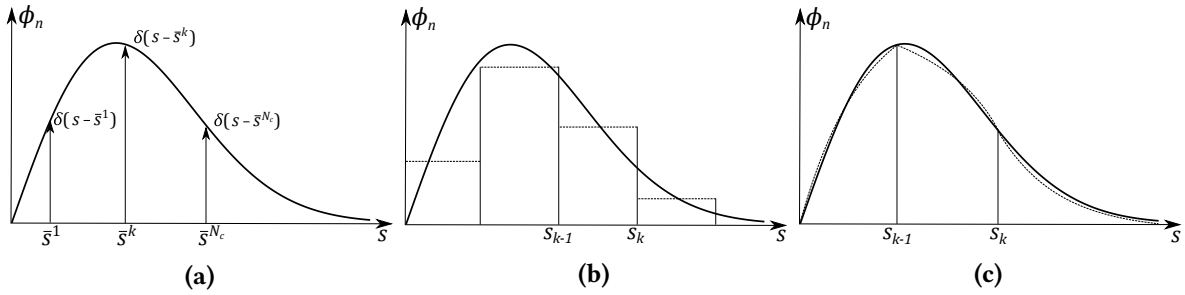


Figure 2.3 – Discrétisation de la distribution en taille des particules selon les approches (a) multi-classe, (b) sectionnelle à un moment (OSM) et (c) sectionnelle à deux moments (TSM) (Le Touze [90]).

Une seconde approche plus précise est l'approche dite *sectionnelle*. Celle-ci repose sur une discrétisation continue par morceaux de la distribution en taille ϕ_n en prenant en compte un nombre N_s de sections au sein desquelles la forme de la distribution est déduite d'un ensemble de moments sur la taille s. Cette approche donne lieu à la formulation suivante pour la distribution en taille :

$$\phi_n(t, \boldsymbol{x}, s) = \sum_{k=1}^{N_c} \phi_n^k(t, \boldsymbol{x}, s). \tag{2.19}$$

Ici, l'intégration sur l'espace des tailles de la distribution ϕ_n^k associée à la section k conduit à la densité numérique de gouttes n^k dans cette section. Selon cette approche, les tailles minimales et maximales de chaque section k notées respectivement s_{k-1} et s_k sont figées et les différentes sections peuvent échanger de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au cours des processus d'évaporation, de fragmentation et de coalescence. Plusieurs options sur la forme de la distribution au sein de chacune des sections peuvent être trouvées dans la littérature (cf. figure 2.3). La première de ces options consiste à représenter ϕ_n^k par une valeur constante dans l'espace des tailles, cette valeur pouvant évidemment varier d'une section à une autre. On parle alors de méthode de discrétisation à un seul moment, ou *One Size Moment* (OSM) en anglais, puisqu'un seul moment en taille est nécessaire pour la reconstruction des distributions par section (Laurent et Massot [88]). Des méthodes plus précises à deux moments, *Two Size Moment* (TSM) en anglais, existent également. Dans ce cas, plusieurs façons de représenter les distributions par section sont possibles, telles que la représentation exponentielle (cf. Dufour et Villedieu [37]) ou la représentation affine (cf. Laurent *et al.* [89] et Sibra *et al.* [138] pour son application à un écoulement réactif). Évidemment, le transport de deux moments en taille pour ces méthodes conduit à un coût de calcul plus important. Pour des besoins en précision plus importants, il existe même des méthodes d'ordre élevé comme la méthode EMSM (*Eulerian Multi Size Moment*) à quatre moments en

taille développée par Kah *et al.* [76]. La précision de cette méthode est telle qu'une seule section permet en théorie de discrétiser la distribution en taille.

Quel que soit le nombre de moments en taille transportés, la connaissance de la forme de la distribution en taille ϕ_n permet d'obtenir le système final d'équations Eulériennes décrivant la phase dispersée en intégrant le système semi-cinétique (2.16) sur l'espace des tailles :

$$\int_s \text{Sys. (2.16)}\, \mathrm{d}s. \tag{2.20}$$

Puisque le système finalement résolu dépend des hypothèses formulées sur la forme de la distribution en taille des particules, aucun système en particulier n'est détaillé ici. Le système retenu dans le cadre de ces travaux de thèse est présenté en détail en section 2.2.2. Malgré cela, il est important de préciser ici que, quel que soit le nombre de moments en taille transportés, l'approche sectionnelle nécessite de formuler une hypothèse supplémentaire sur les distributions en vitesse et température des particules de manière à fermer le système d'équations final. Il est en effet nécessaire de considérer que, dans chaque section, la vitesse et la température ne dépendent pas de la taille des gouttes. Cette hypothèse est en réalité plus restrictive que l'hypothèse de monodispersion en vitesse et température puisqu'il ne s'agit plus seulement de considérer une seule vitesse et une seule température pour une taille de gouttes donnée, mais pour toutes les tailles d'une section donnée. La NDF initialement formulée par l'équation (2.17) devient dans ce cas :

$$\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta) = \sum_{k=1}^{N_s} \phi_n^k(t, \boldsymbol{x}, s)\delta\left[\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}^k(t, \boldsymbol{x})\right] \delta\left[\theta - \overline{\theta}^k(t, \boldsymbol{x})\right], \tag{2.21}$$

où $\overline{\boldsymbol{v}}^k$ et $\overline{\theta}^k$ sont les vitesse et température moyennes d'une section k donnée. On comprend alors par la présentation de cette dernière hypothèse que la méthode EMSM mentionnée précédemment n'est pas adaptée à la description de sprays pour lesquels la polydispersion en vitesse (ou en température) est importante. En effet, l'intérêt de cette méthode est de pouvoir réduire de façon significative le nombre de sections à suivre. Du fait de l'hypothèse restrictive de monodispersion par section, une discrétisation sectionnelle de l'ordre d'une à deux sections pour l'approche EMSM conduit à une reconstruction peu représentative de la distribution en vitesse de la phase dispersée. Par ailleurs, considérer plus de sections est finalement très coûteux en temps de calcul et inabordable pour des simulations sur des configurations industrielles. En réalité, il existe des méthodes particulières pour mieux représenter la distribution en vitesse dans chaque section. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer par exemple à Vié *et al.* [163] pour une application aux méthodes EMSM.

Problématique des conditions initiales du spray

Malgré les différences marquées entre ces deux approches, les méthodes Lagrangienne et Eulérienne de modélisation du spray font face à une problématique commune : l'initialisation du spray à modéliser. En effet, avant de pouvoir transporter les gouttes, il est nécessaire de les créer comme elles le seraient dans la réalité par l'intermédiaire des processus d'atomisation primaire et de fragmentation des ligaments. Les deux approches mentionnées ici étant basées sur une résolution de l'équation cinétique (2.9), celles-ci ne sont à première vue pas adaptées à la modélisation de l'écoulement diphasique dans les zones à phases séparées et mixtes. Dans leurs travaux, Apte *et al.* [4] optent cependant pour une méthodologie originale consistant à appliquer le suivi Lagrangien de gouttes dès la sortie de l'injecteur. Dans ce cas, le jet liquide central est remplacé par l'injection de grosses gouttes dont le diamètre initial est celui de l'injecteur. Selon une approche basée sur l'analyse de Kolmogorov, les auteurs représentent l'atomisation du jet liquide par une succession d'étapes de fragmentation des gouttes injectées jusqu'à atteindre un équilibre entre le niveau de turbulence de l'écoulement gazeux et la tension de surface exercée sur les gouttes. Malgré la capacité de cette approche à restituer les paramètres de l'écoulement diphasique tels que la longueur du jet central ou bien la taille des gouttes autour de ce dernier, il

est évidemment impossible de restituer de cette façon la déstabilisation de l'interface du cœur liquide (Gorokhovski et Herrmann [59]).

Une autre approche a également été suivie par Pourouchottamane *et al.* [127] dans le cas de jets issus d'injecteurs de moteurs-fusées cryotechniques. Celle-ci consiste à représenter le cœur liquide par une condition à la limite figée à partir de laquelle sont injectées les gouttes. Cette approche ne permet évidemment pas non plus de restituer la dynamique du cœur liquide mais présente l'avantage de simplifier considérablement la modélisation de l'écoulement diphasique dans le cas de jets à l'état stationnaire. Il s'agit là de l'approche initialement appliquée dans le code Cedre de l'Onera avant que les travaux de Le Touze [90] n'aboutissent à une méthodologie de simulation plus complexe reproduisant la dynamique de l'intégralité des structures liquides. Selon l'approche de Pourouchottamane *et al.* [127], les propriétés des gouttes injectées à partir de la condition à la limite représentant le cœur liquide doivent être présumées et imposées grâce à des données expérimentales où à des corrélations de la littérature.

2.1.5 Méthodologies de couplage des différentes approches

Nous venons de voir que les méthodes de suivi/capture d'interface ou à interface diffuse étaient particulièrement adaptées à la modélisation des écoulements diphasiques dans les zones à phases séparées et potentiellement également dans les zones mixtes, mais nécessitaient des maillages bien trop fins pour modéliser la phase dispersée. À l'inverse, les méthodes cinétiques sont bien plus adaptées à la modélisation de la phase dispersée mais ne conviennent pas ou peu pour simuler les zones à phases séparées et mixtes. Pour s'affranchir des restrictions associées à chaque approche, divers travaux ont été réalisés dans le but de proposer des méthodologies de couplage entre les méthodes de suivi/capture/diffusion d'interface et les méthodes cinétiques.

Tomar *et al.* [150] proposent par exemple d'utiliser l'approche Vof associée à une méthode d'adaptation de maillage pour décrire l'écoulement diphasique dans les zones où les structures liquides sont les plus grosses et une méthode de suivi Lagrangien de particules pour modéliser la phase dispersée. Dans ces travaux, le couplage entre les deux méthodes est basé sur une évaluation de la fraction volumique de liquide dans chaque cellule. Une structure liquide indépendante est décrite par un ensemble de cellules contiguës dont la fraction volumique n'est pas nulle. Dès lors que le volume d'une structure donnée est inférieur à un critère seuil, la masse de liquide associée ainsi que la quantité de mouvement sont transférées du solveur Vof au solveur particulaire Lagrangien sous la forme d'une particule sphérique de même volume. Par ailleurs, un transfert inverse est possible dès que des gouttes s'approchent de l'interface capturée par la méthode Vof. Cette méthodologie de couplage a d'abord été validée par les auteurs puis appliquée à la simulation d'un jet liquide en régime d'atomisation de type fibre issu d'un injecteur coaxial. Rappelons néanmoins que les approches à reconstruction d'interface sont principalement utilisées pour la simulation d'écoulements incompressibles et non réactifs.

Selon un principe assez similaire, Herrmann [68] (cf. également Herrmann [69]) procède au couplage entre une approche *Level Set* pour la modélisation des plus grosses structures liquides et une méthode de suivi Lagrangien de particules pour modéliser la phase dispersée. Une des particularités de cette méthodologie de couplage réside dans l'utilisation de deux maillages distincts par l'approche Eulérienne. Un premier maillage non structuré est en effet utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles tandis qu'un second potentiellement plus raffiné et cette fois-ci cartésien est utilisé pour résoudre l'équation de transport de la fonction *Level Set*. Ce dernier maillage est par ailleurs associé à une méthode d'adaptation de maillage de manière à accroître la précision de capture de l'interface. Le couplage entre l'approche *Level Set* et le suivi Lagrangien des particules est quant à lui basé sur l'évaluation du volume et de la forme des structures liquides. Lorsqu'une structure est jugée à la fois suffisamment sphérique et de volume inférieur au volume des cellules du maillage utilisé pour résoudre les équations du fluide, la masse ainsi que la quantité de mouvement du liquide sont transférées de l'approche Eulérienne au solveur particulaire. À l'instar des travaux de Tomar *et al.* [150], un trans-

fert inverse est proposé lorsque les gouttes s'approchent de l'interface. Cette méthodologie de couplage a pu être appliquée par Herrmann [68] à la simulation de l'atomisation d'un jet liquide turbulent caractéristique des jets de moteurs Diesel et à la simulation de l'atomisation d'un jet liquide en régime de type fibre issu d'un injecteur coaxial représentatif des jets de moteurs-fusées cryotechniques par Kim et Moin [77]. Ces derniers auteurs démontrent alors une très bonne restitution des propriétés du jet liquide en comparant les résultats aux travaux expérimentaux de Marmottant et Villermaux [106].

Dans la continuation des méthodologies de couplage Euler/Lagrange, Zuzio *et al.* [172] proposent quant à eux de coupler une approche hybride *Level Set*/Vof similaire à celle de Sussman et Puckett [144] et Ménard *et al.* [111] pour modéliser les plus grosses structures liquides à une méthode de suivi Lagrangien de particules pour modéliser le spray. Par ailleurs, une méthode d'adaptation de maillages cartésiens est employée de manière à accroître la précision de capture de l'interface déjà améliorée par la combinaison *Level Set*/Vof. Dans cette approche, le couplage entre les différentes zones de l'écoulement diphasique est réalisé sur la base du niveau de discrétisation de chaque structure liquide. Lorsqu'une structure est incluse dans moins de huit cellules et peut être considérée comme quasiment sphérique, alors la masse et la quantité de mouvement du liquide associées sont transférées vers le solveur Lagrangien. Si la structure n'est contenue que dans une seule cellule, le critère géométrique ne s'applique plus et le liquide est automatiquement transféré vers le solveur Lagrangien. Un transfert inverse Lagrangien/Eulérien est également disponible, celui-ci étant formulé différemment selon la taille des gouttes impactantes. Lorsque ces gouttes sont très petites vis-à-vis du raffinement de maillage local, leur masse et quantité de mouvement sont directement ajoutées au solveur Eulérien. Dans le cas de plus grosses gouttes, celles-ci sont projetées dans le champ Eulérien par une reconstruction des fonctions *Level Set* et Vof associées. Cette méthodologie de couplage a pu être appliquée par Zuzio *et al.* [172] à la simulation de l'atomisation d'une nappe liquide.

Il existe également des méthodologies de couplage faisant appel à des méthodes à interface diffuse pour la modélisation des plus grosses structures liquides. Par exemple, Beau [9], puis plus tard Lebas [92], propose d'associer une modélisation à 4 équations sans prise en compte de la tension de surface pour décrire l'écoulement diphasique dans les zones à phases séparées à une méthode de suivi Lagrangien de particules pour modéliser le spray, principalement pour des applications de jets libres issus d'injecteurs de moteurs Diesel. Selon cette approche, le couplage entre les deux types de modélisation est réalisé dans toutes les cellules du maillage associées à une fraction volumique de liquide inférieure à une valeur seuil, cette fraction volumique traduisant le niveau de dilution de la phase liquide dans le gaz et l'éloignement des particules fluides les unes des autres. La particularité de cette méthodologie de couplage est qu'elle repose sur la résolution d'une équation de transport de la densité d'aire interfaciale qui, associée au volume local de liquide, permet de calculer la taille moyenne des gouttes créées dans chaque cellule concernée par le transfert Euler/Lagrange par atomisation primaire.

De façon similaire, Zuzio *et al.* [174] (cf. également Blanchard [11]) proposent eux aussi de coupler une méthode à interface diffuse à une méthode de suivi Lagrangien de particules. Dans un premier temps, Zuzio *et al.* [174] procèdent au transfert du liquide du champ Eulérien vers le spray Lagrangien à travers une surface définie préalablement par l'utilisateur. L'intégralité du liquide traversant cette surface est transférée vers le solveur Lagrangien par la création de gouttes dont la taille suit une loi log-normal aux paramètres imposés tandis que la vitesse et le poids des particules numériques sont calculés de façon à conserver la masse et la quantité de mouvement du liquide lors du transfert. Dans sa thèse, Blanchard [11] propose une évolution du couplage en basant le transfert entre solveurs sur une évaluation de la fraction volumique locale de liquide et de son gradient. Dès lors que ces deux grandeurs sont inférieures à des valeurs seuil imposées par l'utilisateur, l'interface est considérée trop diffusée pour permettre une description satisfaisante des structures liquides et la masse ainsi que la quantité de mouvement du fluide sont transférées vers le spray de gouttes. Cette méthodologie de couplage a pu être appliquée par Blanchard [11] à la simulation de l'atomisation d'une nappe liquide.

Pour finir, un couplage entre une approche à interface diffuse et une méthode Eulérienne de résolution de l'équation cinétique est proposée par Le Touze [90] lors de sa thèse. L'approche à interface

diffuse correspond à une modélisation à 4 équations tandis que le spray est associé à une méthode sectionnelle affine pour la discrétisation de l'espace des tailles de gouttes. Le couplage entre les deux types de modélisation est réalisé dès lors qu'une quantité suffisante de liquide est soumise localement à un cisaillement important avec la phase gazeuse. Dans cette approche, les propriétés des gouttes créées lors du transfert vers le solveur particulaire sont imposées constantes et uniformes à l'aide de corrélations de la littérature. Par ailleurs, un transfert inverse du spray vers la phase liquide dense est disponible pour restituer l'impact des gouttes sur le cœur liquide. Cette méthodologie a été appliquée à la simulation d'un écoulement diphasique réactif caractéristique des flammes issues d'injecteurs coaxiaux dans les moteurs-fusées cryotechniques en conditions de fonctionnement subcritiques. Il s'agit de l'approche de modélisation retenue par l'Onera au sein du code Cedre. Ce choix est justifié notamment par l'aspect naturel du couplage Euler/Euler entre les différentes zones de l'écoulement diphasique. En outre, le code Cedre étant destiné à la simulation de configurations industrielles complexes, la possibilité d'appliquer cette méthodologie de couplage à la simulation de cas réactifs sur maillages non structurés nécessitant une parallélisation massive du calcul la rend particulièrement intéressante.

Cette présentation synthétique des différentes méthodes de modélisation d'écoulements diphasiques rencontrées dans la littérature permet ainsi de visualiser le cadre dans lequel s'inscrit l'approche retenue par l'Onera et appliquée au cours de cette thèse. Une description détaillée du code Cedre ainsi que des méthodes et modèles numériques utilisés est proposée dans la suite de manière à permettre au lecteur d'appréhender l'ensemble des choix et orientations suivis lors de ces travaux de thèse.

2.2 Stratégie de simulation retenue pour l'étude

La stratégie de simulation d'écoulements diphasiques atomisés instationnaires retenue dans cette thèse a été formulée et développée par Le Touze [90] et fait aujourd'hui partie intégrante du code Cedre de l'Onera. Selon cette stratégie, l'écoulement gazeux ainsi que les plus grosses structures liquides sont décrits à l'aide d'une approche à interface diffuse à 4 équations (cf. section 2.1.3), également appelée approche à fluide localement homogène. Le fluide en question correspond ici à un mélange diphasique décrit dans chaque cellule du maillage par une seule température, une seule vitesse et une seule pression et pouvant contenir, selon la zone de l'écoulement considérée, à la fois des espèces gazeuses et liquides. Parmi les plus grosses structures liquides décrites par cette approche, on retrouve le cœur liquide en sortie d'injecteur et, si le raffinement du maillage le permet, les premiers ligaments issus de son atomisation. En revanche, comme cela a été mentionné en section 2.1.4, il est inenvisageable de poursuivre cette description jusqu'aux gouttes car le coût de calcul associé serait bien trop important. La modélisation du spray est alors assurée par une approche statistique Eulérienne basée sur le transport de moments de la NDF. Plus précisément, une méthode sectionnelle d'ordre 2 à reconstruction affine est retenue pour la discrétisation de l'espace des tailles de gouttes. Selon cette approche Eulérienne, le liquide est supposé se trouver sous forme de gouttes sphériques transportées par la phase gazeuse du fluide homogène. Au cours du temps, ces gouttes sont susceptibles de se fragmenter. [3]

Le couplage entre ces deux approches Eulériennes passe par le transfert de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie de la phase liquide d'une représentation à phases séparées à une représentation à phase dispersée à l'aide de termes sources modélisant l'atomisation primaire du jet et la fragmentation des ligaments. Un transfert inverse est également possible dans le cas où les gouttes décrites par l'approche statistique impactent le cœur liquide ou des ligaments. On désignera cette situation par le terme *pseudo-coalescence* pour la distinguer du mécanisme de coalescence entre gouttes non considéré ici. La stratégie de couplage est illustrée en figure 2.4. Les deux approches Eulériennes mentionnées ci-dessus sont développées au sein du code Cedre sous la forme de deux solveurs distincts respectivement nommés Charme et Spirée. Nous y ferons cependant référence dans la suite de

3. Dans un cas réactif, les gouttes peuvent également s'évaporer. Ce mécanisme n'est cependant pas décrit ici car la stratégie de simulation de Le Touze [90] n'est appliquée dans ce mémoire qu'à des écoulements inertes.

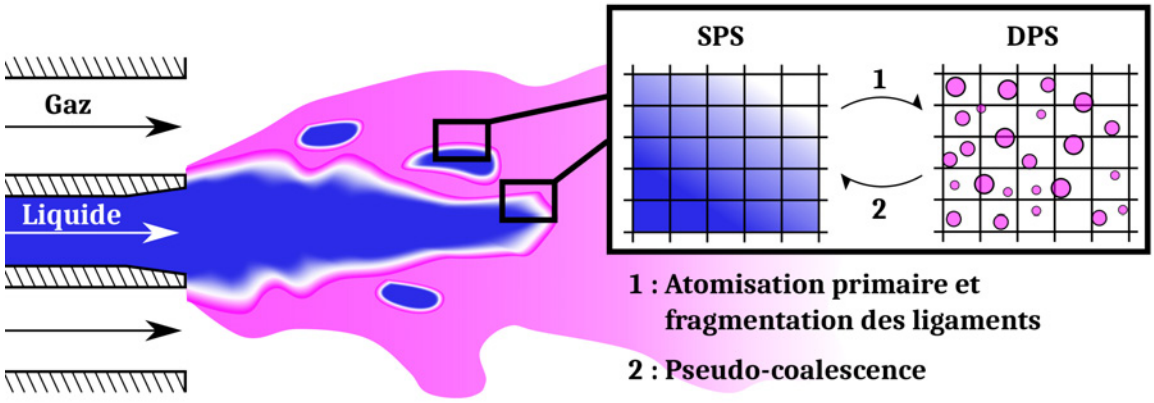


Figure 2.4 – Schématisation de la stratégie de couplage entre le SPS et le DPS pour la simulation d'écoulements diphasiques atomisés avec le code Cedre.

ce mémoire sous le nom de SPS et DPS, pour *Separated Phases Solver* et *Dispersed Phase Solver*. Le détail des équations résolues par chacun de ces solveurs est présenté dans la suite de ce mémoire.

2.2.1 Simulation des zones à phases séparées et mixtes

Système d'équations de conservation

Il a été évoqué en section 2.1.3 que l'approche à interface diffuse à 4 équations correspond en réalité au système d'équations de Navier-Stokes compressibles multi-espèces. Celui-ci se compose des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations peuvent être écrites dans le cadre général des écoulements réactifs présentant plusieurs espèces par phase. Cependant, puisque l'application visée dans ce mémoire concerne les jets liquides évoluant dans un gaz inerte sous excitation acoustique, nous nous contenterons ici de présenter les équations de conservation dans le cadre d'écoulements diphasiques inertes ne présentant qu'une seule espèce par phase. L'espèce gazeuse et l'espèce liquide seront associées respectivement aux indices g et l.

⋆⋆ *Équations de conservation de la masse* ⋆⋆

Le principe de conservation de la masse stipule que la masse totale d'un système fermé est constante dans le temps. Par conséquent, la variation temporelle de la masse dans un système fluide ouvert tel qu'une cellule du maillage ne peut être due qu'à la résultante des flux de masse à travers les frontières de celui-ci. Dans le cadre de la stratégie de simulation retenue ici, le système fluide concerné par ce principe correspond à l'union du fluide homogène traité par l'approche à 4 équations et de la phase dispersée. Selon le point de vue du SPS seul, la masse de liquide n'est en effet pas conservée puisqu'elle peut être transférée au DPS lors de l'atomisation du jet liquide. De même, le phénomène de pseudo-coalescence peut conduire au transfert inverse de masse liquide du DPS au SPS. Si l'on écrit le principe de conservation de la masse dans chaque cellule du maillage pour chaque espèce, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \rho Y_g}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho Y_g \boldsymbol{u}\right) & = & 0, \\ \dfrac{\partial \rho Y_l}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho Y_l \boldsymbol{u}\right) & = & S_M, \end{array}\right. \tag{2.22}$$

avec Y_i la fraction massique de l'espèce i, $\rho = \sum_i \rho Y_i$ la masse volumique du mélange homogène et $\boldsymbol{u}$ son unique vitesse. Quant au terme S_M, celui-ci représente le transfert entre les deux solveurs lors de l'atomisation du jet ou de l'impact des gouttes sur les plus grosses structures liquides. Évidemment, ce terme source doit également être considéré dans les équations de conservation de la phase dispersée et affecté d'un signe opposé de manière à conserver la masse totale du système. Notons par ailleurs qu'il

n'y a ici aucun terme de flux de diffusion moléculaire car les deux espèces considérées sont associées à deux phases distinctes non miscibles. Si les deux phases sont mélangées en sous-maille au cours du calcul, c'est uniquement de manière artificielle en raison de la diffusion de l'interface.

⋆⋆ *Équation de conservation de la quantité de mouvement* ⋆⋆

La seconde loi de Newton stipule que, dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la résultante des forces qui lui sont appliquées. À l'instar du principe de conservation de la masse, si l'on ne considère que le système fluide associé au SPS, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_C - p\boldsymbol{I}) + \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{S}_U, \tag{2.23}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\tau}_C$ représentent respectivement les contraintes de cisaillement visqueux et de tension de surface, p est l'unique pression du mélange homogène, $\boldsymbol{I}$ désigne la matrice identité, $\boldsymbol{g}$ est l'accélération gravitationnelle et enfin $\boldsymbol{S}_U$ correspond au terme source de transfert de quantité de mouvement par couplage avec la phase dispersée. Ce terme source doit lui aussi être considéré dans les équations de conservation de la phase dispersée et affecté d'un signe opposé de manière à conserver la quantité de mouvement totale du système.

Pour modéliser les contraintes de cisaillement visqueux, il est possible de suivre l'hypothèse de fluide newtonien pour la majorité des fluides usuels. Selon cette hypothèse, le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est proportionnel à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation, notée $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, selon la relation :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\mathcal{S}} + \eta (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I}, \tag{2.24}$$

où μ désigne la viscosité dynamique du mélange et η sa seconde viscosité. En faisant l'hypothèse de Stokes qui permet de relier ces deux termes, le tenseur des contraintes visqueuses peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \left[\boldsymbol{\mathcal{S}} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I} \right] = 2\mu \boldsymbol{\mathcal{D}}, \tag{2.25}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est le déviateur de la partie symétrique du tenseur des taux de déformation, elle-même s'écrivant :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u})^T \right], \tag{2.26}$$

avec $(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u})^T$ le tenseur transposé de $\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}$. Pour modéliser la viscosité dynamique de chaque fluide, il existe différentes approches. Dans ce mémoire, la viscosité du gaz est supposée suivre la loi de Sutherland [146] :

$$\mu_g(T) = \mu_{0,g} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}, \tag{2.27}$$

dépendant d'une viscosité $\mu_{0,g}$ à la température de référence T_0, ainsi que d'une température T_S dite *de Sutherland*. En revanche, les cas simulés étant associés à des fluctuations de température négligeables pour le liquide, sa viscosité μ_l est considérée constante. Puisque les deux espèces sont mélangées artificiellement dans chaque maille contenant l'interface, leurs viscosités doivent être moyennées pour modéliser la viscosité du mélange. Pour cela, nous utilisons une moyenne pondérée par la masse de chaque espèce :

$$\mu(T) = \sum_i Y_i \mu_i(T). \tag{2.28}$$

En ce qui concerne les contraintes de tension de surface $\boldsymbol{\tau}_C$, rappelons que le modèle à 4 équations ne permet pas de connaître la position de l'interface diphasique à l'échelle de sous-maille. On utilise

alors l'approche CSF (*Continuum Surface Force*) de Brackbill *et al.* [13], selon laquelle les forces capillaires sont représentées par une densité volumique de force $\boldsymbol{F}^C$ au second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, que l'on peut écrire comme :

$$\boldsymbol{F}^C = \sigma\kappa\delta_I\boldsymbol{n}_I, \tag{2.29}$$

avec σ le coefficient de tension de surface, κ la courbure locale de l'interface et $\boldsymbol{n}_I$ sa normale, et δ_I la distribution de Dirac portée par l'interface. Puisque l'interface est diffuse, on ne connaît *a priori* ni sa courbure ni sa normale. Ces grandeurs sont alors modélisées comme :

$$\delta_I\boldsymbol{n}_I \approx \boldsymbol{\nabla}\alpha_l \qquad ; \qquad \kappa \approx \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\alpha_l}{\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|}\right), \tag{2.30}$$

où α_l désigne la fraction volumique de liquide et $\boldsymbol{\nabla}\alpha_l$ son gradient, dont les valeurs sont celles moyennées dans la maille, et dont le calcul ne nécessite pas la connaissance précise de la position de l'interface. La fraction volumique est liée à la masse volumique ρ du mélange homogène, à la masse volumique $\rho_l(P,T)$ de l'espèce liquide pure aux pression et température du mélange, et à la fraction massique Y_l de l'espèce liquide par la relation :

$$\alpha_l = \frac{\rho Y_l}{\rho_l(P,T)}. \tag{2.31}$$

L'expression $\rho_l(P,T)$ n'est autre que la loi d'état utilisée pour décrire l'espèce liquide et définie plus loin dans ce mémoire. Pour finir, il existe une formulation conservative des forces capillaires appelée CSS (*Continuum Surface Stress*) faisant apparaître la divergence du tenseur des contraintes capillaires rencontrée dans l'équation (2.23) :

$$\boldsymbol{F}^C = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}_C, \tag{2.32}$$

avec $\boldsymbol{\tau}_C$ exprimé comme :

$$\boldsymbol{\tau}_C = \sigma\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\alpha_l}{\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|}\otimes\frac{\boldsymbol{\nabla}\alpha_l}{\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|}\right). \tag{2.33}$$

⋆⋆ *Équation de conservation de l'énergie totale* ⋆⋆

L'énergie totale massique du fluide est la somme de son énergie interne massique e et de son énergie cinétique massique :

$$e_t = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{2.34}$$

L'équation de conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$\frac{\partial\rho e_t}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho e_t\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\Big[(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}_C)\cdot\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{u}\Big] - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_{e_t} + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u} + S_E, \tag{2.35}$$

où $\boldsymbol{J}_{e_t}$ est le flux d'énergie totale, tandis que S_E désigne le terme source d'énergie lié aux échanges avec la phase dispersée. Puisque les deux espèces sont non miscibles, le flux d'énergie totale s'exprime grâce à la loi de Fourier comme :

$$\boldsymbol{J}_{e_t} = -\lambda\boldsymbol{\nabla}T, \tag{2.36}$$

où λ désigne la conductivité thermique du mélange. Pour l'espèce gazeuse, la conductivité thermique suit la loi d'Eucken :

$$\lambda_g(T) = \mu_g(T)\left[c_{p,g}(T) + \frac{5}{4}r_g\right], \tag{2.37}$$

où r_g désigne le facteur de volume du gaz. La capacité calorifique massique à pression constante $c_{p,g}(T)$ est quant à elle exprimée selon une forme polynomiale dont les coefficients sont issus de données de la littérature. Pour l'espèce liquide, puisque les fluctuations de température sont négligeables dans les cas considérés dans ce mémoire, sa conductivité thermique λ_l et sa capacité calorifique massique à pression constante $c_{p,l}$ sont considérées constantes. Comme pour la viscosité, la conductivité thermique du mélange est finalement calculée comme la moyenne des conductivités des deux espèces pondérées par leur masse :

$$\lambda(T) = \sum_i Y_i \lambda_i(T). \tag{2.38}$$

⋆⋆ *Formulation vectorielle* ⋆⋆

Il est également possible de formuler les équations de conservation présentées précédemment de façon vectorielle. Pour cela, nous introduisons le vecteur des quantités conservées $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho Y_g & \rho Y_l & \rho \boldsymbol{u} & \rho e_t \end{pmatrix}^t, \tag{2.39}$$

ainsi que le vecteur des variables naturelles $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} p & T & \boldsymbol{u} & Y_g & Y_l \end{pmatrix}^t. \tag{2.40}$$

Nous pouvons également définir les vecteurs des flux convectifs $\boldsymbol{F}$, des flux diffusifs $\boldsymbol{\varphi}_D$ et des flux capillaires $\boldsymbol{\varphi}_C$ comme :

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho Y_g \boldsymbol{u} \\ \rho Y_l \boldsymbol{u} \\ \rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + p\boldsymbol{I} \\ (\rho e_t + p)\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{u} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{\nabla} T \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\tau}_C \\ \boldsymbol{\tau}_C \cdot \boldsymbol{u} \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Pour finir, on définit le vecteur des termes sources $\boldsymbol{S}$ comme la somme des vecteurs $\boldsymbol{S}_G$, $\boldsymbol{S}_L$ et $\boldsymbol{S}_F$ regroupant respectivement les termes sources liés à la gravité, au couplage entre la phase liquide du SPS et la phase dispersée et au couplage entre le gaz et la phase dispersée :

$$\boldsymbol{S} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \boldsymbol{g} \\ \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}_G} + \boldsymbol{S}_L + \boldsymbol{S}_F. \tag{2.44}$$

C'est dans la formulation des vecteurs $\boldsymbol{S}_L$ et $\boldsymbol{S}_F$ que l'on retrouve les termes sources S_M, $\boldsymbol{S}_U$ et S_E liés au couplage entre les deux solveurs. La formulation de ces termes sources de couplage est traitée plus tard

en section 2.2.3. Avec les notations précédemment introduites, le système des équations de conservation du mélange homogène s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{\varphi}_D + \boldsymbol{\varphi}_C\right) = \boldsymbol{S}. \tag{2.45}$$

Modélisation de la turbulence

⋆⋆ *Stratégie de simulation numérique de la turbulence* ⋆⋆

En mécanique des fluides, un écoulement est dit *turbulent* lorsque se forment en son sein des tourbillons. Ce type d'écoulement est donc caractérisé par une fluctuation de la vitesse du fluide dans le temps et l'espace. Selon la théorie de la cascade de Kolmogorov [80], un écoulement turbulent présente un caractère fortement multi-échelles. Dans l'espace spectral, il est classiquement fait mention de trois échelles caractéristiques (cf. figure 2.5) :

1. l'échelle intégrale $\mathcal{L}$ constituée des plus gros tourbillons. Il s'agit de la zone de production de l'énergie cinétique turbulente à partir de l'énergie cinétique de l'écoulement moyen.
2. l'échelle inertielle associée au transfert d'énergie des plus gros tourbillons vers les plus petites structures, autrement dit vers les plus grandes valeurs de longueur d'onde κ. Pour une turbulence homogène isotrope, on peut montrer que la densité spectrale d'énergie E décroît dans la zone inertielle en $\log E(\kappa) \propto -\frac{5}{3} \log \kappa$.
3. l'échelle de Kolmogorov η_K constituée des plus petites structures tourbillonnaires. À cette échelle, l'énergie cinétique des tourbillons est progressivement dissipée sous forme de chaleur.

Notons que la théorie de la cascade de Kolmogorov [80], ou théorie de la cascade directe, ne prévoit pas l'existence d'un transfert inverse d'énergie des petites échelles vers les plus grandes occasionné par des processus d'appariement et d'enroulement tourbillonnaires. Malgré la démonstration récente de l'existence d'un tel transfert, son intensité reste toutefois inférieure à celle du transfert direct.

Pour prendre en compte l'ensemble du spectre des échelles de la turbulence lors de simulations numériques, il existe trois approches principales :

1. la Simulation Numérique Directe (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation* en anglais) repose sur une résolution de l'ensemble du spectre des échelles de la turbulence et ne nécessite donc aucun travail de modélisation. Il s'agit cependant d'une approche très coûteuse puisqu'elle nécessite une discrétisation spatiale et temporelle très élevée pour pouvoir capter l'ensemble des structures jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, ainsi que leur dynamique.
2. la Simulation aux Grandes Échelles (ou LES pour *Large Eddy Simulation* en anglais) consiste à résoudre les structures jusqu'à une échelle de coupure κ_c située dans la zone inertielle. Les structures de taille inférieure dites de *sous-maille* n'étant pas résolues, leur effet sur les grandes échelles et l'écoulement moyen doit être modélisé.
3. l'approche RANS (pour *Reynolds Averaged Navier Stokes* en anglais) décrit quant à elle l'écoulement de manière statistique. Les variables de l'écoulement sont décomposées en une composante moyenne et une composante fluctuante due à la turbulence. Les équations de conservation sont alors appliquées aux grandeurs moyennes, tandis que l'influence des fluctuations sur l'écoulement moyen est modélisé.

L'approche nous intéressant ici est l'approche LES. Celle-ci est donc décrite plus en détail dans la suite de ce mémoire.

⋆⋆ *Filtrage LES des équations de conservation* ⋆⋆

L'approche LES est basée sur une opération de filtrage des équations de conservation instantanées présentées précédemment. Le filtre en question est un filtre passe-haut dans l'espace physique (ou passe-bas dans l'espace spectral), ce qui signifie que les structures turbulentes dont la taille est supérieure à celle du filtre Δ sont résolues, contrairement aux structures de sous-maille de taille inférieure.

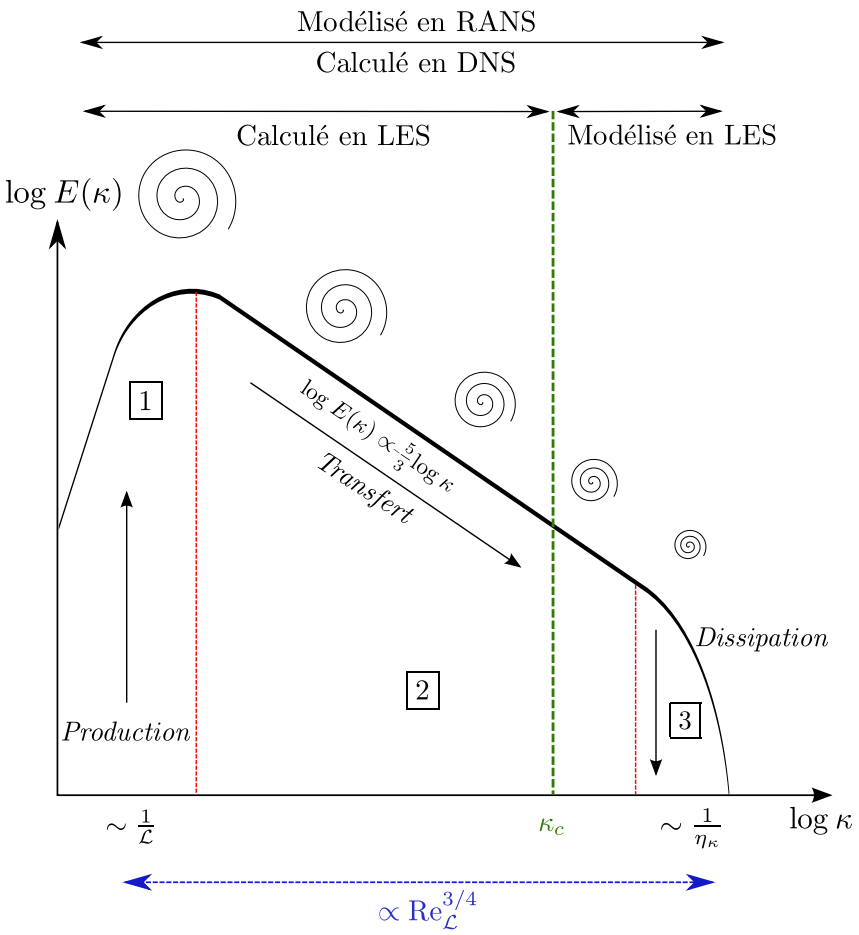


Figure 2.5 – Schématisation de la cascade de Kolmogorov et des stratégies de simulation DNS, LES et RANS.

Un modèle de sous-maille doit alors être utilisé pour restituer l'effet de ces structures non résolues sur l'écoulement résolu. Le champ filtré spatialement d'une variable ϕ est noté $\overline{\phi}$ tandis que la partie non résolue est notée ϕ'. Cette décomposition, nommée décomposition de Reynolds, s'avère cependant mal adaptée aux cas où la masse volumique ρ est variable et fait apparaître des corrélations difficiles à modéliser dans les équations. La décomposition de Favre [46] s'avère alors plus adaptée, avec une moyenne pondérée par la masse volumique comme :

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi'', \qquad \widetilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}}. \tag{2.46}$$

Quel que soit le filtre utilisé, le filtrage LES des équations de conservation introduit des termes supplémentaires qu'il est nécessaire de modéliser ou bien de négliger si cela se justifie.

Cette opération de filtrage n'est pas détaillée ici, seul le système final est présenté. On introduit d'abord le vecteur $\overline{\boldsymbol{Q}}$ des quantités conservées filtrées :

$$\overline{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\widetilde{Y_g} & \overline{\rho}\widetilde{Y_l} & \overline{\rho}\widetilde{\boldsymbol{u}} & \overline{\rho}\widetilde{e_t} \end{pmatrix}^t, \qquad \overline{\rho} = \sum_i \overline{\rho}\widetilde{Y_i}, \tag{2.47}$$

ainsi que le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ des variables naturelles filtrées au sens de Favre :

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{T} & \widetilde{\boldsymbol{u}} & \widetilde{Y_g} & \widetilde{Y_l} \end{pmatrix}^t, \qquad \sum_i \widetilde{Y_i} = 1. \tag{2.48}$$

On introduit également les vecteurs filtrés des flux convectifs $\widehat{\boldsymbol{F}}$, des flux diffusifs $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_D$ et des flux capillaires $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_C$:

$$\widehat{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\widetilde{Y}_g\widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \overline{\rho}\widetilde{Y}_l\widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \overline{\rho\widetilde{\boldsymbol{u}}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}} + \overline{p}\boldsymbol{I} \\ (\overline{\rho\widetilde{e}_t} + \overline{p})\widetilde{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} = \overline{\boldsymbol{Q}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}} + \overline{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{I} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{\boldsymbol{\tau}} \\ \overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{J}}_{e_t} \end{pmatrix}, \quad (2.50) \qquad \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{\boldsymbol{\tau}}_C \\ \overline{\boldsymbol{\tau}}_C \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

ainsi que le vecteur des termes sources filtrés $\widehat{\boldsymbol{S}}$ formulé comme la somme des vecteurs $\widehat{\boldsymbol{S}}_G$, $\widehat{\boldsymbol{S}}_L$ et $\widehat{\boldsymbol{S}}_F$ regroupant respectivement les termes sources filtrés liés à la gravité, au couplage entre la phase liquide du SPS et la phase dispersée, et au couplage entre le gaz et la phase dispersée :

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{\rho}\boldsymbol{g} \\ \overline{\rho}\boldsymbol{g} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix}}_{\widehat{\boldsymbol{S}}_G} + \widehat{\boldsymbol{S}}_L + \widehat{\boldsymbol{S}}_F. \quad (2.52)$$

Le filtrage des équations de conservation fait également apparaître des termes croisés entre les parties résolues et non résolues de différentes variables. Ces termes croisés sont non fermés et sont regroupés sous la forme d'un vecteur de flux turbulents $\boldsymbol{F}_T$ défini par :

$$\boldsymbol{\varphi}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\overline{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}} - \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}\right) \\ \left[\overline{(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_c) \cdot \boldsymbol{u}} - (\overline{\boldsymbol{\tau}} - \overline{\boldsymbol{\tau}}_c) \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}\right] + \left[(\overline{\rho\widetilde{e}_t} + \overline{p})\widetilde{\boldsymbol{u}} - \overline{(\rho e_t + p)\boldsymbol{u}}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{\tau}^t \\ -\boldsymbol{J}^t_{e_t} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Les notations $\boldsymbol{\tau}^t$ et $\boldsymbol{J}^t_{e_t}$ désignent respectivement le tenseur des contraintes turbulentes et le flux de diffusion turbulente de l'énergie totale.

Finalement, le système des équations de conservation filtrées s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{Q}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{F}} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_D - \boldsymbol{\varphi}_T + \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_C\right) = \widehat{\boldsymbol{S}}. \quad (2.54)$$

⋆⋆ *Fermeture des termes laminaires* ⋆⋆

Les flux de diffusion laminaires (par opposition au terme *turbulent*) sont évalués à partir des variables résolues selon les différentes expressions déjà introduites lors de la présentation des équations de conservation instantanées, et moyennant certaines approximations :

$$\overline{\boldsymbol{J}}_{e_t} \approx -\lambda(\widetilde{T})\boldsymbol{\nabla}\widetilde{T}. \quad (2.55)$$

De même, les tenseurs filtrés des contraintes visqueuses et capillaires s'expriment uniquement en fonction de variables résolues selon les expressions déjà introduites lors de la présentation des équations de conservation instantanées :

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(\widetilde{T})\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{I}\right] = 2\mu(\widetilde{T})\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \qquad \overline{\boldsymbol{\tau}}_C = \sigma(\widetilde{T})\|\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\alpha}\|\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\alpha}}{\|\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\alpha}\|}\otimes\frac{\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\alpha}}{\|\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\alpha}\|}\right). \tag{2.56}$$

Par ailleurs, en toute rigueur, les termes sources de couplage avec la phase dispersée devraient prendre en compte l'effet de la turbulence. Cette interaction est cependant complexe à modéliser. Il est donc supposé que l'expression des termes sources de couplage filtrés, $\overline{S}_M$, $\overline{S}_U$ et $\overline{S}_E$ repose uniquement sur des quantités résolues.

⋆⋆ *Fermeture des termes turbulents* ⋆⋆

Le tenseur des contraintes turbulentes $\boldsymbol{\tau}^t = \overline{\rho}\left(\widetilde{\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}} - \widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}\right)$ peut être décomposé en trois contributions : le tenseur de Léonard caractérisant les interactions entre les échelles résolues, le tenseur croisé correspondant aux interactions entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille, et le tenseur de Reynolds représentant les interactions entre les échelles de sous-maille. En toute rigueur, la modélisation du tenseur des contraintes turbulentes devrait prendre en compte cette décomposition triple. Cependant, l'approche généralement retenue consiste à ne prendre en compte que le tenseur de Reynolds. Par analogie avec la formulation du tenseur des contraintes visqueuses laminaires (2.25), le tenseur des contraintes turbulentes est considéré, d'après l'approximation de Boussinesq, comme proportionnel à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation filtrée $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$:

$$\boldsymbol{\tau}^t \approx 2\mu_t\left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{S}}} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{I}\right] - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\boldsymbol{I} = 2\mu_t\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}} - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\boldsymbol{I}, \tag{2.57}$$

où k désigne l'énergie cinétique turbulente, tandis que μ_t représente la viscosité turbulente. Pour modéliser ces deux termes, différents modèles existent en LES. Le modèle le plus classique est celui de Smagorinsky [142], selon lequel la viscosité turbulente s'exprime :

$$\mu_t = \overline{\rho}l^2\sqrt{2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}:\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}, \qquad l = \min(C_S\Delta, \kappa\|\boldsymbol{d}_p\|), \tag{2.58}$$

où Δ désigne toujours la taille du filtre LES, $\kappa \approx 0.41$ est la constante de Karman, $C_S \approx 0.18$ est la constante de Smagorinsky dont la valeur théorique a été initialement proposée par Lilly [100], et $\boldsymbol{d}_p$ est un vecteur permettant d'annuler la viscosité de sous-maille à proximité des parois. L'opérateur $() : ()$ désigne quant à lui le produit tensoriel doublement contracté. L'énergie cinétique turbulente de sous-maille, notée k_{SGS}, est approchée par :

$$k_{SGS} \approx \frac{2}{0,3}C_s^2\Delta^2\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}:\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}. \tag{2.59}$$

Dans le cadre de cette thèse, le modèle de Smagorinsky est retenu au sein du gaz. En revanche, aucun modèle n'est utilisé dans les mailles de mélange entre les deux fluides. En effet, la grande majorité des travaux dédiés à la turbulence sont consacrés aux écoulements monophasiques et souvent incompressibles. La validité du modèle de Smagorinsky dans ces mailles de mélange n'est ainsi pas avérée. Il est alors préférable d'adopter une approche implicite ILES (pour *Implicit Large Eddy Simulation* en anglais). Avec cette approche, la dissipation physique de l'énergie turbulente par les échelles de sous-maille n'est pas modélisée. On considère qu'elle est d'une certaine manière déjà contenue dans la dissipation numérique générée artificiellement par les schémas de discrétisation spatiale des équations de conservation. L'approche implicite est également utilisée au sein du liquide.

En ce qui concerne le flux de diffusion turbulente d'énergie $\boldsymbol{J}^t_{e_t}$, celui-ci est modélisé selon une hypothèse analogue au flux de diffusion laminaire :

$$\boldsymbol{J}^t_{e_t} = -\lambda^t\boldsymbol{\nabla}\widetilde{T}, \tag{2.60}$$

où le coefficient de conductivité thermique turbulent λ^t est évalué comme :

$$\lambda^t = \frac{\mu_t}{0.9} \sum_i \widetilde{Y}_i c_{p,i}(\widetilde{T}). \tag{2.61}$$

Dans la suite de ce chapitre, les notations relatives au filtrage turbulent sont omises pour favoriser la clarté des expressions.

Changement de variables et fermeture thermodynamique

⋆⋆ *Algorithme itératif de Newton* ⋆⋆

La résolution du système des équations de conservation nécessite de procéder à chaque itération du calcul au changement de variables $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U}(\boldsymbol{Q})$ entre le vecteur des quantités conservées $\boldsymbol{Q}$ et celui des variables naturelles $\boldsymbol{U}$. Si l'on suppose les quantités conservées $\boldsymbol{Q}^n$ connues à un instant t^n, l'avancement en temps du système (cf. section 2.2.4 relative à l'intégration temporelle) permet de calculer les quantités conservées contenues dans le vecteur $\boldsymbol{Q}^{n+1}$ à l'instant t^{n+1}. La connaissance des quantités $(\rho Y_i)^{n+1}$, $(\rho \boldsymbol{u})^{n+1}$ et $(\rho e_t)^{n+1}$ permet par la suite de déterminer également les variables ρ^{n+1}, Y_i^{n+1}, $\boldsymbol{u}^{n+1}$, e_t^{n+1} et e^{n+1} grâce aux changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1} &= \sum_i (\rho Y_i)^{n+1}, & Y_i^{n+1} &= \frac{(\rho Y_i)^{n+1}}{\rho^{n+1}}, \\
\boldsymbol{u}^{n+1} &= \frac{(\rho \boldsymbol{u})^{n+1}}{\rho^{n+1}}, & e_t^{n+1} &= \frac{(\rho e_t)^{n+1}}{\rho^{n+1}}, & e^{n+1} &= e_t^{n+1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{u}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pour déterminer intégralement le vecteur des variables primitives $\boldsymbol{U}^{n+1}$, il reste cependant à obtenir les variables naturelles p^{n+1} et T^{n+1} à partir de la masse volumique et de l'énergie interne du mélange. Pour cela, il est fait appel à un procédé itératif de Newton résolvant de manière approchée les formes différentielles suivantes :

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial \rho}_{|e} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial p}{\partial e}_{|\rho} \mathrm{d}e, \qquad \mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial \rho}_{|e} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial T}{\partial e}_{|\rho} \mathrm{d}e, \tag{2.63}$$

où la notation $\partial x/\partial y_{|z}$ représente la dérivée partielle d'une variable x par rapport à une seconde variable y en considérant la variable z constante. L'algorithme itératif de Newton s'exprime à chaque sous-itération comme :

$$\begin{aligned}
p^{j+1} &\approx p^j + \overline{\frac{\partial p}{\partial \rho}_{|e}} \left(\rho^{n+1} - \overline{\rho}\right) + \overline{\frac{\partial p}{\partial e}_{|\rho}} \left(e^{n+1} - \overline{e}\right), \\
T^{j+1} &\approx T^j + \overline{\frac{\partial T}{\partial \rho}_{|e}} \left(\rho^{n+1} - \overline{\rho}\right) + \overline{\frac{\partial T}{\partial e}_{|\rho}} \left(e^{n+1} - \overline{e}\right).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Les notations $\overline{\bullet}$ correspondent ici à des grandeurs moyennes pour le mélange homogène calculées à chaque sous-itération de l'algorithme à partir de p^j, T^j et Y_i^{n+1} :

$$\left\{\overline{\rho}, \overline{e}, \overline{\frac{\partial x}{\partial y}_{|z}}\right\} = f\left(p^j, T^j, Y_i^{n+1}\right). \tag{2.65}$$

Les grandeurs Y_i^{n+1}, ρ^{n+1} et e^{n+1} sont figées au cours de l'exécution de l'algorithme, tandis que les états p^j et T^j sont initialisés à p^n et T^n puis remplacés au début de chaque sous-itération par les valeurs p^{j+1} et T^{j+1} précédemment calculées. Lorsque les différences $|p^{j+1} - p^j|$ et $|T^{j+1} - T^j|$ deviennent inférieures à la précision souhaitée, la convergence est supposée atteinte. L'algorithme est stoppé et les états p^{j+1} et T^{j+1} sont affectés à p^{n+1} et T^{n+1}.

Pour exécuter cet algorithme, il est donc nécessaire de connaître les dérivées partielles de la pression et de la température par rapport à la masse volumique et l'énergie interne évaluées pour le mélange homogène. En pratique, celles-ci sont plutôt exprimées en fonction de dérivées partielles par rapport à la température et la pression, qui conduisent à des paramètres physiques plus facilement mesurables. Il est possible, à partir de plusieurs relations thermodynamiques (cf. Le Touze [90] pour plus de détails), d'exprimer ces dérivées partielles comme :

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial p}{\partial \rho}}_{|e} &= \frac{1}{\Delta}\overline{\frac{\partial e}{\partial T}}_{|p}, & \overline{\frac{\partial p}{\partial e}}_{|\rho} &= -\frac{1}{\Delta}\overline{\frac{\partial \rho}{\partial T}}_{|p}, \\
\overline{\frac{\partial T}{\partial \rho}}_{|e} &= -\frac{1}{\Delta}\overline{\frac{\partial e}{\partial p}}_{|T}, & \overline{\frac{\partial T}{\partial e}}_{|\rho} &= \frac{1}{\Delta}\overline{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{|T},
\end{aligned} \tag{2.66}$$

où nous avons posé :

$$\Delta = \overline{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{|T}\,\overline{\frac{\partial e}{\partial T}}_{|p} - \overline{\frac{\partial \rho}{\partial T}}_{|P}\,\overline{\frac{\partial e}{\partial p}}_{|T} > 0. \tag{2.67}$$

Il reste alors à déterminer les dérivées partielles de l'énergie interne et de la masse volumique par rapport à la pression et la température. Pour cela, il faut d'abord choisir une modélisation thermodynamique pour chacune des deux phases, puis définir une loi de mélange permettant d'obtenir les valeurs moyennes $\overline{\bullet}$.

⋆⋆ *Modélisation thermodynamique de la phase gazeuse* ⋆⋆

Les propriétés thermodynamiques de la phase gazeuse sont modélisées selon la loi d'état des gaz parfaits. Celle-ci est particulièrement adaptée aux écoulements d'air à pression modérée considérés dans ce mémoire pour lesquels il est possible de négliger les interactions moléculaires de type Van der Waals. Cette loi relie la pression, la température et la masse volumique selon la relation suivante :

$$p = \rho_g r_g T, \tag{2.68}$$

où la constante $r_g = R/M_g$ ne dépend que de la constante des gaz parfaits $R = 8.314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ et de la masse molaire du gaz M_g. Il est alors possible d'établir les relations nécessaires au changement de variables $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U}(\boldsymbol{Q})$ (cf. Le Touze [90]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial T}_{|p} &= c_{p,g}(T) - r_g, & \frac{\partial e}{\partial p}_{|T} &= 0, \\
\frac{\partial \rho}{\partial T}_{|p} &= -\frac{p}{r_g T^2}, & \frac{\partial \rho}{\partial p}_{|T} &= \frac{1}{r_g T},
\end{aligned} \tag{2.69}$$

où, rappelons-le, la capacité calorifique massique à pression constante du gaz $c_{p,g}(T)$ est exprimée selon une forme polynomiale dont les coefficients sont issus de données de la littérature. Par ailleurs, pour une transformation isentropique, la loi des gaz parfaits conduit à la formulation de la vitesse du son suivante :

$$c_g = \sqrt{\gamma_g r_g T}. \tag{2.70}$$

avec γ_g le coefficient adiabatique du gaz.

⋆⋆ *Modélisation thermodynamique de la phase liquide* ⋆⋆

Pour la phase liquide, les propriétés thermodynamiques sont modélisées selon une loi d'état adaptée aux liquides compressibles. Elle relie la pression, la température et la masse volumique selon la relation suivante :

$$\rho_l(p,T) = \rho_0 \frac{1+\beta_0(p-p_0)}{1+\alpha_0(T-T_0)}, \qquad \alpha_0|T-T_0| \ll 1, \qquad \beta_0|P-P_0| \ll 1. \tag{2.71}$$

Dans cette relation, ρ_0, α_0 et β_0 désignent respectivement la masse volumique du liquide et ses coefficients thermoélastiques de dilatation isobare et de compressibilité isotherme à l'état de référence caractérisé par la pression p_0 et la température T_0. Notons que cette loi d'état n'est valable que pour de faibles variations autour de l'état de référence. En ce qui concerne les dérivées partielles de la masse volumique et de l'énergie interne, on obtient par le calcul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p}_{|T} = \frac{\beta_0 \rho_0}{1 + \alpha_0 (T - T_0)}, \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T}_{|p} = -\alpha_0 \rho_0 \frac{1 + \beta_0 (p - p_0)}{\left[1 + \alpha_0 (T - T_0)\right]^2} = \frac{-\alpha_0 \rho}{1 + \alpha_0 (T - T_0)}, \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial e}{\partial T}_{|p} = c_{p,l} - \frac{p}{\rho_0} \frac{\alpha_0}{1 + \beta_0 (p - p_0)}, \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial e}{\partial p}_{|T} = \frac{\beta_0 p (1 - \alpha_0 T_0) - \alpha_0 T (1 - \beta_0 p_0)}{\rho_0 \left[1 + \beta_0 (p - p_0)\right]^2}. \tag{2.75}$$

Contrairement au gaz, rappelons que la capacité calorifique massique $c_{p,l}$ est considérée constante. Enfin, la vitesse du son s'écrit (cf. Le Touze [90]) :

$$c_l = \frac{1 + \alpha_0 (T - T_0)}{\sqrt{\beta_0 \rho_0 \left[1 + \alpha_0 (T - T_0)\right] - \alpha_0^2 T / c_{p,l}}}. \tag{2.76}$$

⋆⋆ *Loi de mélange* ⋆⋆

Pour pouvoir résoudre l'algorithme de Newton (2.64), il est nécessaire de définir une loi de mélange entre les deux phases au sein des mailles contenant l'interface diffuse. Cette loi de mélange doit nous permettre de calculer les dérivées partielles de l'énergie interne et de la masse volumique moyennes pour le mélange à partir des mêmes dérivées définies pour chacune des phases. Le choix effectué dans le SPS consiste à considérer le mélange comme idéal et donc de négliger les effets de mélange. Pour toute grandeur massique $\overline{\varphi}$, cette hypothèse se traduit par une moyenne pondérée par la masse de chaque espèce :

$$\overline{\varphi} = \sum_i Y_i \varphi_i, \qquad \varphi = \left\{ c_p, c_v, \frac{\partial e}{\partial T}_{|p}, \frac{\partial e}{\partial p}_{|T}, \dots \right\}, \tag{2.77}$$

où φ_i désigne la même grandeur calculée pour l'espèce i. Cette expression permet ainsi d'obtenir, entre autres, les valeurs moyennes des dérivées partielles de l'énergie interne. En revanche, elle ne permet pas d'obtenir des grandeurs qui ne sont pas massiques, telles que les dérivées partielles de la masse volumique. Pour cela, la stratégie adoptée consiste à introduire le paramètre $\mathcal{R}$, défini indépendamment des lois d'état par :

$$\mathcal{R} = \frac{p}{\rho T}. \tag{2.78}$$

Dans le cas de la loi des gaz parfaits, cette relation conduit à :

$$\mathcal{R} = r, \qquad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}_{|T} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T}_{|p} = 0, \tag{2.79}$$

tandis que pour la loi d'état de liquide compressible, la relation donne :

$$\mathcal{R} = \frac{p}{\rho_0 T} \frac{1 + \alpha_0 (T - T_0)}{1 + \beta_0 (p - p_0)}, \tag{2.80}$$

ainsi que :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}_{|T} = \frac{1}{\rho T} \frac{1 - \beta_0 p_0}{1 + \beta_0 (p - p_0)}, \qquad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T}_{|p} = -\frac{p}{\rho T^2} \frac{1 - \alpha_0 T_0}{1 + \alpha_0 (T - T_0)}. \tag{2.81}$$

Puisque le paramètre $\mathcal{R}$ ainsi que ses dérivées partielles sont des grandeurs massiques, la relation (2.77) peut leur être appliquée :

$$\overline{\mathcal{R}} = \sum_i Y_i \mathcal{R}_i, \qquad \overline{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}}_{|T} = \sum_i Y_i \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial p}_{|T}, \qquad \overline{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T}}_{|p} = \sum_i Y_i \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial T}_{|p}. \tag{2.82}$$

Il est enfin possible de calculer les valeurs moyennes pour les grandeurs non massiques en les exprimant en fonction de $\mathcal{R}$ et de ses dérivées partielles. Pour la masse volumique du mélange, on a par exemple :

$$\overline{\rho} = \frac{p}{\overline{\mathcal{R}} T}. \tag{2.83}$$

Ses dérivées partielles s'écrivent alors (cf. Le Touze [90]) :

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{|T} = \frac{\overline{\rho}}{p} \left[1 - \frac{p}{\overline{\mathcal{R}}} \overline{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}}_{|T} \right], \tag{2.84}$$

$$\tag{2.85}$$

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial T}}_{|p} = -\frac{\overline{\rho}}{T} \left[1 + \frac{T}{\overline{\mathcal{R}}} \overline{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial T}}_{|p} \right]. \tag{2.86}$$

L'obtention de ces expressions permet ainsi finalement de fermer le système des équations de conservation du SPS.

2.2.2 Simulation des zones à phase dispersée

L'approche retenue dans le code Cedre pour la simulation de la phase dispersée est basée sur une approche Eulérienne pour la résolution d'équations de transport de moments de la fonction densité numérique de gouttes (NDF). Par l'intégration de l'équation cinétique de Williams-Boltzmann (2.9) selon les variables vitesse et température, on obtient dans un premier temps le système d'équations semi-cinétique (2.16) pour lequel les moments transportés de la NDF contenus dans le vecteur $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ dépendent des hypothèses réalisées sur la forme des distributions en vitesse et température des gouttes. Dans le code Cedre l'hypothèse de monodispersion pour ces deux variables est retenue afin de limiter le nombre de moments à transporter et donc le coût des simulations. Selon cette hypothèse, toutes les gouttes de même taille situées dans un même volume de contrôle à un instant donné sont supposées avoir la même vitesse et la même température. Comme expliqué en section 2.1.4, effectuer cette simplification conduit à concentrer tout l'effort de modélisation de la NDF sur la discrétisation de l'espace des tailles. Dans ce but, l'approche retenue dans le code est la méthode sectionnelle à deux moments avec reconstruction affine de la distribution en taille de gouttes par unité de volume ϕ_n. Cette approche présente l'intérêt d'être compatible avec la description des mécanismes d'atomisation primaire et de fragmentation conduisant à une répartition des gouttes sur l'ensemble du spectre des tailles. Par ailleurs, la méthode de reconstruction affine a l'avantage d'être moins chère que l'approche exponentielle tout en assurant une précision de reconstruction suffisante pour les applications visées dans ce mémoire (Le Touze [90], Sibra [139]). Les équations résolues par le solveur Eulérien pour la phase dispersée (DPS pour *Dispersed Phase Solver* en anglais) sont détaillées dans la suite de ce mémoire directement sous forme vectorielle.

Système d'équations de conservation

Les simulations réalisées dans ces travaux de thèse mettent en jeu des écoulements inertes à température quasi constante et homogène. Il est alors possible de ne résoudre aucune équation de conservation de l'énergie interne. Dans ce cas, le vecteur des quantités conservées $\boldsymbol{q}^k$ peut s'écrire pour chaque section k utilisée pour discrétiser la distribution en taille de gouttes :

$$\boldsymbol{q}^k = \begin{pmatrix} \rho^k \\ \rho^k \boldsymbol{v}^k \\ n^k \end{pmatrix}, \tag{2.87}$$

où ρ^k et n^k sont respectivement la masse volumique et la densité numérique de gouttes dans la section k, tandis que $\boldsymbol{v}^k$ représente leur vitesse [4]. De ce jeu de variables $\boldsymbol{q}^k$, il est également possible de calculer la fraction volumique de gouttes α^k ainsi que le diamètre moyen D^k des inclusions dans la section k comme :

$$\alpha^k = \frac{\rho^k}{\rho_0}, \qquad D^k = \left(\frac{6\alpha^k}{\pi n^k}\right)^{1/3}, \tag{2.88}$$

où, rappelons-le, ρ_0 représente la masse volumique du liquide à la température de référence T_0, qui s'avère correspondre dans la suite de ce mémoire à la température d'injection du liquide. Notons que le diamètre moyen D^k peut être assimilé à un diamètre statistique de type D_{30} représentant le diamètre d'une goutte dont le volume est égal au volume moyen des inclusions contenues dans la section k. Comme pour le système d'équations de conservation résolu par le SPS, il est ensuite nécessaire de définir le vecteur des flux de quantité de mouvement. Pour chaque section k, celui-ci est calculé comme :

$$\boldsymbol{q}^k \otimes \boldsymbol{v}^k = \begin{pmatrix} \rho^k \boldsymbol{v}^k \\ \rho^k \boldsymbol{v}^k \otimes \boldsymbol{v}^k \\ n^k \boldsymbol{v}^k \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Enfin, introduisons les vecteurs des termes sources $\boldsymbol{s}_G^k$, $\boldsymbol{s}_L^k$, $\boldsymbol{s}_F^k$ et $\boldsymbol{s}_B^k$ respectivement liés, pour chaque section k, à la gravité, au couplage entre la phase liquide du SPS et la phase dispersée, au couplage entre le gaz et la phase dispersée, et aux transferts entre sections du DPS dus à la fragmentation des gouttes. Tandis que les expressions des vecteurs $\boldsymbol{s}_L^k$, $\boldsymbol{s}_F^k$ et $\boldsymbol{s}_B^k$ seront détaillées plus tard en section 2.2.3, le vecteur $\boldsymbol{s}_G^k$ est défini ici comme :

$$\boldsymbol{s}_G^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^k \boldsymbol{g} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.90}$$

Avec les notations précédemment introduites, le système des équations de conservation pour une section k s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}^k}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{q}^k \otimes \boldsymbol{v}^k\right) = \boldsymbol{s}_G^k + \boldsymbol{s}_L^k + \boldsymbol{s}_F^k + \boldsymbol{s}_B^k. \tag{2.91}$$

Discrétisation de la distribution en taille de gouttes

La résolution du système d'équations de conservation (2.91) repose en grande partie sur la discrétisation de la distribution numérique en taille de gouttes par unité de volume ϕ_n. Dans le cadre de l'approche sectionnelle avec reconstruction affine retenue dans le code Cedre (Sibra [139]), la variable

4. Rappelons que selon l'approche sectionnelle, l'hypothèse de monodispersion en vitesse et température conduit à considérer une seule vitesse et une seule température pour toutes les tailles d'une section k donnée.

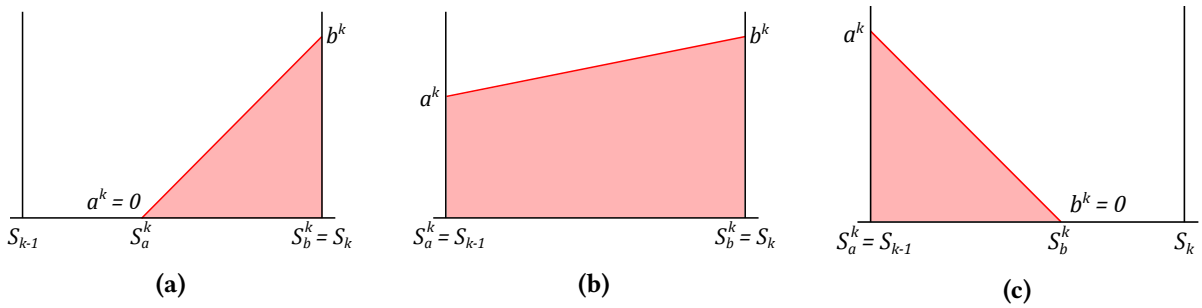


Figure 2.6 – Illustration des situations possibles pour la reconstruction affine de la distribution numérique en taille de gouttes par section (Sibra [139]).

taille selon laquelle la distribution ϕ_n est considérée affine par morceaux n'est autre que la surface des gouttes S. Si l'on note N_s le nombre total de sections considérées pour discrétiser ϕ_n, il est possible d'écrire à chaque instant et dans chaque volume de contrôle :

$$\phi_n(S) = \sum_{k=1}^{N_s} \phi_n^k(S), \tag{2.92}$$

où ϕ_n^k représente la distribution numérique en taille des gouttes contenues dans la section k. Pour définir l'expression de ϕ_n^k, nous introduisons les termes S_{k-1} et S_k représentant respectivement les bornes figées minimale et maximale de surface de gouttes de chaque section k. Ces bornes sont représentées sur la figure 2.6 illustrant la façon dont sont définies les distributions dans chaque section. Comme on peut le voir sur cette figure, les distributions affines au sein de chacune des sections sont caractérisées par deux extremums locaux dont les coordonnées sont notées (S_a^k, a^k) et (S_b^k, b^k). Il est important de noter que, selon cette représentation, les abscisses S_a^k et S_b^k ne sont pas obligatoirement égales aux bornes fixes de la section S_{k-1} et S_k. Par conséquent, trois situations peuvent être rencontrées (cf. figure 2.6) :

$$\begin{array}{llllllll} \text{(a)} & a^k & = & 0 & \text{et} & S_b^k & = & S_k, \\ \text{(b)} & S_a^k & = & S_{k-1} & \text{et} & S_b^k & = & S_k, \\ \text{(c)} & b^k & = & 0 & \text{et} & S_a^k & = & S_{k-1}. \end{array} \tag{2.93}$$

De façon générale, il est ainsi possible d'exprimer les distributions numériques par section ϕ_n^k comme :

$$\phi_n^k(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \in [S_{k-1}, S_a^k[\quad \text{ou} \quad S \in]S_b^k, S_k[, \\ a^k + \left(b^k - a^k\right) \dfrac{S - S_a^k}{S_b^k - S_a^k} & \text{si} \quad S \in [S_a^k, S_b^k]. \end{cases} \tag{2.94}$$

Selon cette approche, il apparaît nécessaire de déterminer à chaque instant et dans chaque volume de contrôle les paramètres déterminants S_a^k, S_b^k, a^k et b^k. Cependant, ce sont en réalité les quantités n^k et ρ^k qui sont transportées par le système d'équations de conservation (2.91). Sibra [139] définit dans ce cas une procédure d'inversion particulière permettant de passer du système (n^k, ρ^k) au système de coordonnées (S_a^k, S_b^k, a^k, b^k). Par définition, n^k et ρ^k peuvent être exprimées comme :

$$n^k = \int_{S_{k-1}}^{S_k} \phi_n^k(S)\,\mathrm{d}S, \qquad \rho^k = \frac{\rho_0}{6\sqrt{\pi}} \int_{S_{k-1}}^{S_k} S^{3/2} \phi_n^k(S)\,\mathrm{d}S. \tag{2.95}$$

Dans le cadre de cette procédure d'inversion, introduisons tout d'abord les paramètres suivants :

$$\begin{cases} \Delta S_k &= S_k - S_{k-1}, \\ S_{5/2}^k &= \dfrac{2}{5}\left(S_k^{5/2} - S_{k-1}^{5/2}\right), \\ S_{7/2}^k &= \dfrac{2}{7}\left(S_k^{7/2} - S_{k-1}^{7/2}\right), \\ A^k &= S_k S_{5/2}^k - S_{7/2}^k, \\ B^k &= S_{7/2}^k - S_{k-1} S_{5/2}^k, \\ C^k &= \dfrac{B^k - A^k}{2}. \end{cases} \tag{2.96}$$

Pour chaque section, nous sommes également amenés à considérer les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_{S_a}^k\left(X, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) &= 2X^5 + 4\sqrt{S_k}X^4 + 6S_kX^3 + \left(8S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)X^2 \\ & \quad + \left(10S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{2n^k}\right)\sqrt{S_k}X + \left(5S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)S_k, \\ f_{S_b}^k\left(X, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) &= 2X^5 + 4\sqrt{S_{k-1}}X^4 + 6S_{k-1}X^3 + \left(8S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)X^2 \\ & \quad + \left(10S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{2n^k}\right)\sqrt{S_{k-1}}X + \left(5S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)S_{k-1}. \end{cases} \tag{2.97}$$

Selon la situation rencontrée parmi les trois situations illustrées en figure 2.6, la procédure d'inversion de Sibra [139] consiste alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \begin{cases} f_{S_a}^k\left(\sqrt{S_a^k}, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_b^k = S_k \\ a^k = 0 \\ b^k = \dfrac{2n^k}{S_k - S_a^k} \end{cases} && \text{si} \quad \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\rho^k > \frac{2n^kB^k}{\Delta S_k{}^2}, \\ &\text{(b)} \quad \begin{cases} S_a^k = S_{k-1} \quad \text{et} \quad S_b^k = S_k \\ a^k = \dfrac{n^kB^k/\Delta S_k - 3\sqrt{\pi}\rho^k\Delta S_k/\rho_0}{C^k} \\ b^k = -\dfrac{n^kA^k/\Delta S_k - 3\sqrt{\pi}\rho^k\Delta S_k/\rho_0}{C^k} \end{cases} && \text{si} \quad \frac{2n^kA^k}{\Delta S_k{}^2} \leq \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\rho^k \leq \frac{2n^kB^k}{\Delta S_k{}^2}, \\ &\text{(c)} \quad \begin{cases} f_{S_b}^k\left(\sqrt{S_b^k}, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_a^k = S_{k-1} \\ a^k = \dfrac{2n^k}{S_b^k - S_{k-1}} \\ b^k = 0 \end{cases} && \text{sinon.} \end{aligned} \tag{2.98}$$

Grâce à cette procédure d'inversion, il est donc possible de reconstruire à chaque instant et dans chaque volume de contrôle la distribution numérique en taille de gouttes par unité de volume à partir des valeurs de n^k et ρ^k de toutes les sections, puis d'utiliser cette information pour le calcul des termes sources du système (2.91) définis dans la suite de ce chapitre.

2.2.3 Modélisation des termes sources

Couplage entre la phase liquide du mélange homogène et la phase dispersée

Les systèmes d'équations (2.45) et (2.91) respectivement liés à la description du mélange homogène par le SPS et du spray par le DPS, ont mis en évidence des termes sources de couplage entre ces deux solveurs. Les mécanismes d'atomisation primaire du cœur liquide et de fragmentation des plus gros ligaments captés par le maillage sont notamment représentés par des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie de la phase liquide décrite par le solveur à interface diffuse vers le spray. Les termes sources liés à ces transferts sont le terme $\boldsymbol{S}_L$ présent dans les équations du SPS et le terme $\boldsymbol{s}_L^k$ présent dans celles du spray. Par ailleurs, des transferts inverses du spray vers la phase liquide du SPS sont également considérés de manière à modéliser l'impact des gouttes sur les plus grosses structures liquides introduit précédemment sous le terme *pseudo-coalescence*.

⋆⋆ *Modélisation du transfert par atomisation primaire et fragmentation des ligaments* ⋆⋆

Dans la stratégie de simulation adoptée par Le Touze [90], le transfert de masse entre les deux solveurs par atomisation primaire et fragmentation des ligaments est formulé comme :

$$S_a = \rho Y_l f_a \lambda_a \left(Y_l\right), \tag{2.99}$$

avec Y_l désignant la fraction massique locale de liquide dans le mélange homogène. Dans chaque volume de contrôle, le débit d'atomisation est donc proportionnel à ρY_l, la masse de liquide par unité de volume, ainsi qu'à une fréquence caractéristique f_a et à une fonction d'efficacité λ_a uniquement dépendante de Y_l.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, le processus d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs coaxiaux dépend principalement du différentiel local de vitesse entre l'écoulement co-courant gazeux et le liquide. Cependant, dans le contexte particulier de la modélisation à interface diffuse à 4 équations, le mélange est supposé être localement homogène, et par conséquent n'est décrit que par une seule vitesse moyenne $\boldsymbol{u}$. Il est dans ce cas choisi de relier la fréquence caractéristique f_a à l'intensité du gradient local de vitesse. Celle-ci peut être évaluée sous différentes formes (critère Q, vorticité ω, etc.), parmi lesquelles Le Touze [90] choisit la fréquence turbulente f_t. Dans le cadre de la LES des écoulements compressibles, cette fréquence est estimée à partir du déviateur de la partie symétrique du tenseur des taux de déformation (cf. équation (2.26)) :

$$f_a = f_t = \sqrt{2\mathcal{D} : \mathcal{D}}. \tag{2.100}$$

En ce qui concerne la fonction d'efficacité λ_a dont dépend la formulation du terme source d'atomisation (2.99), son rôle est d'assurer que le transfert entre les deux solveurs soit réalisé dans des zones de l'écoulement où le volume occupé par la phase liquide du mélange homogène est faible. En effet, puisque le SPS ne tient pas compte du volume occupé par la phase dispersée, tout transfert de masse entre les deux solveurs résulte inévitablement en une variation de la densité moyenne du mélange, et par conséquent en une variation de pression parasite. Dans les zones de l'écoulement où la fraction volumique de la phase gazeuse est significative, la grande compressibilité du gaz conduit à des variations de pression beaucoup plus faibles que dans le liquide dont la compressibilité est bien plus élevée. Pour assurer que le transfert de masse entre solveurs n'intervienne que dans des zones contenant peu de liquide, l'idée est de tirer profit du fait que l'interface soit diffuse en réalisant le transfert au bord de la zone de diffusion numérique. La formulation suivante de la fonction d'efficacité est ainsi retenue :

$$\lambda_a \left(Y_l\right) = 1 - \tanh\left(4Y_l^2\right). \tag{2.101}$$

Sa forme est illustrée en figure 2.7.

Une fois la masse de liquide à transférer d'un solveur à l'autre déterminée par le terme source d'atomisation (2.99), il reste nécessaire de modéliser les gouttes ainsi créées au sein du DPS. Dans

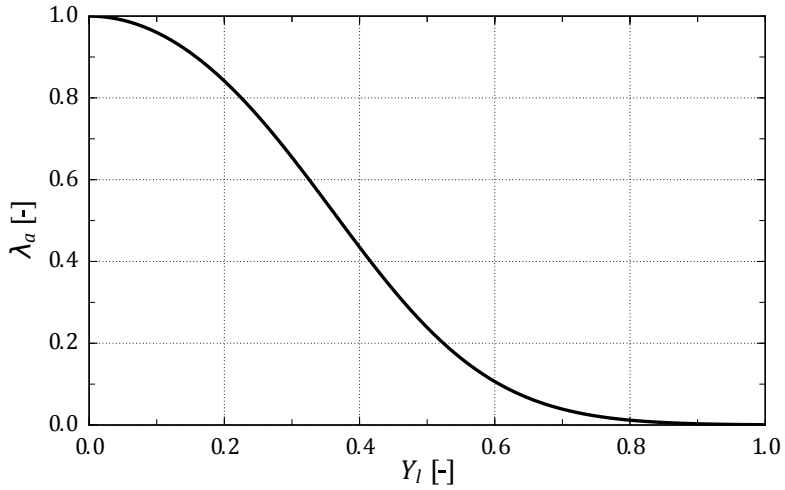


Figure 2.7 – Forme de la fonction d'efficacité λ_a en fonction de la fraction massique de liquide.

l'idéal, cette modélisation devrait être capable de prédire des distributions à l'échelle de chaque volume de contrôle, sur la base de considérations locales telles que la forme des structures liquides atomisées ou le différentiel de vitesse avec l'écoulement co-courant gazeux. Cependant, l'hypothèse de mélange homogène ne permet pas de connaître ces informations locales. À l'heure actuelle, la modélisation de l'atomisation au sein du DPS est alors réalisée à partir d'une estimation des propriétés moyennes des gouttes issues directement de l'atomisation du cœur liquide et de la fragmentation des ligaments (cf. section 6.4.3 pour plus de détail sur cette estimation). On supposera alors que toutes les gouttes créées sont associées à :

1. un même diamètre moyen D_a. Celui-ci peut être assimilé à un diamètre statistique de type D_{30} représentant le diamètre d'une goutte dont le volume est égal au volume moyen des inclusions constituant le spray (cf. annexe A pour plus de détail sur les diamètres statistiques). On impose par ailleurs que le transfert par atomisation se produise toujours vers la même section du DPS. Puisque la coalescence entre gouttes n'est pas considérée dans ce mémoire, leur taille ne peut que diminuer au cours du temps sous l'effet de la fragmentation. La section receveuse est donc définie comme la dernière section du DPS, notée N_s, contenant les plus grosses gouttes. Notons qu'il est possible de démontrer assez facilement qu'imposer un diamètre moyen unique tout en figeant la section receveuse conduit en réalité à imposer une fonction de densité de probabilité numérique constante et homogène dans l'ensemble des cellules concernées par le transfert entre solveurs (cf. annexe B pour lire la démonstration).

2. la même norme de vitesse $\|\boldsymbol{v}_a\|$. La direction du vecteur vitesse reste quant à elle celle du mélange homogène dans chacune des mailles, ce qui implique :

$$\boldsymbol{v}_a = \|\boldsymbol{v}_a\| \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \tag{2.102}$$

   où, rappelons-le, $\boldsymbol{u}$ est le vecteur vitesse du mélange dans le SPS.

⋆⋆ *Modélisation du transfert par pseudo-coalescence* ⋆⋆

L'impact des gouttes avec les structures liquides décrites par le SPS, processus également appelé *pseudo-coalescence*, est lui aussi modélisé par un transfert entre les deux solveurs. À l'inverse du processus d'atomisation, le transfert associé à la pseudo-coalescence est en revanche opéré depuis les sections du spray vers la phase liquide du SPS. La formulation du terme source de transfert de masse est très

similaire à la formulation du terme d'atomisation (2.99) :

$$s_c^k = \rho^k f_c \lambda_c (\alpha_l), \tag{2.103}$$

avec α_l désignant la fraction volumique locale de liquide dans le mélange homogène. Dans chaque volume de contrôle, le débit d'échange par pseudo-coalescence dans chaque section k est donc proportionnel à ρ^k, la masse de liquide par unité de volume dans la section, ainsi qu'à une fréquence caractéristique f_c égale en réalité au pas temps d'intégration des termes sources Δt, et à une fonction d'efficacité λ_c uniquement dépendante de α_l.

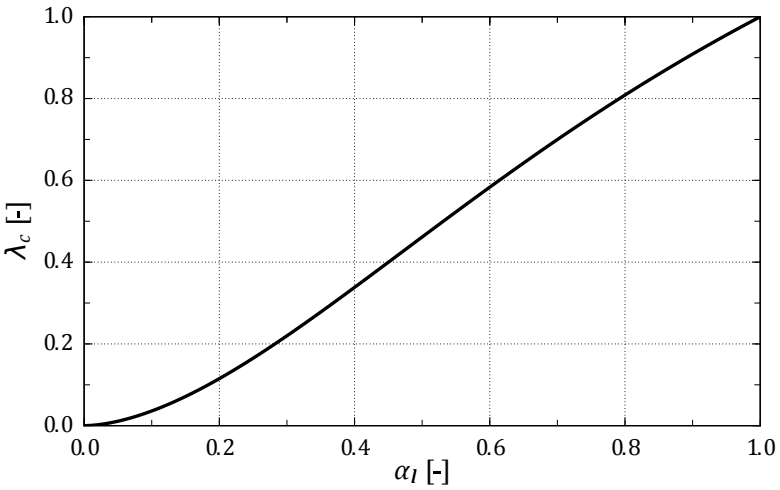


Figure 2.8 – Forme de la fonction d'efficacité λ_c en fonction de la fraction volumique de liquide.

Pour les mêmes raisons que dans le cas de l'atomisation, il est primordial de réaliser le transfert entre solveurs au sein de volumes de contrôle où la fraction volumique de la phase liquide est la plus faible possible dans le mélange homogène. Dans le cas contraire, la variation de la densité moyenne du fluide s'accompagne inévitablement d'une importante variation de pression en raison de la très faible compressibilité de la phase liquide par rapport à celle du gaz. Cependant, cette contrainte numérique s'oppose au sens physique du modèle qui demande d'opérer le transfert en présence de beaucoup de liquide. Un compromis est donc réalisé par la formulation suivante de la fonction d'efficacité λ_c :

$$\lambda_c (\alpha_l) = 1 - \tanh(-2 \log \alpha_l), \tag{2.104}$$

dont la forme est illustrée en figure 2.8.

⋆⋆ *Expression des termes sources $\boldsymbol{S}_L$ et $\boldsymbol{s}_L^k$* ⋆⋆

La formulation des termes de transfert par atomisation (2.99) et de pseudo-coalescence (2.103) conduit à exprimer les termes sources $\boldsymbol{S}_L$ et $\boldsymbol{s}_L^k$ rencontrés dans les équations de conservation des deux solveurs (2.45) et (2.91) comme :

$$\boldsymbol{S}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -S_a + \sum_{k=1}^{N_s} s_c^k \\ -S_a \boldsymbol{v}_a + \sum_{k=1}^{N_s} s_c^k \boldsymbol{v}^k \\ -S_a \left[e_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_a \cdot \boldsymbol{v}_a \right] + \sum_{k=1}^{N_s} s_c^k \left[e_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^k \cdot \boldsymbol{v}^k \right] \end{pmatrix}, \tag{2.105}$$

et

$$\boldsymbol{s}_L^k = \begin{pmatrix} -s_c^k \\ -s_c^k \boldsymbol{v}^k \\ -\dfrac{s_c^k}{m^k} \end{pmatrix} \quad k \neq N_s, \qquad \boldsymbol{s}_L^{N_s} = \begin{pmatrix} S_a - s_c^{N_s} \\ S_a \boldsymbol{v}_a - s_c^{N_s} \boldsymbol{v}^{N_s} \\ \dfrac{S_a}{m(D_a)} - \dfrac{s_c^{N_s}}{m^{N_s}} \end{pmatrix}, \tag{2.106}$$

avec $m^k = \rho_0 \pi {D^k}^3/6$ la masse d'une goutte dont le diamètre est égal au diamètre moyen D^k des gouttes de la section k. De façon équivalente, $m(D_a) = \rho_0 \pi {D_a}^3/6$ est la masse d'une goutte dont le diamètre est égal au diamètre moyen d'atomisation D_a. Puisque les écoulements étudiés dans ce mémoire sont isothermes, la masse volumique et l'énergie interne massique du liquide pur peuvent être considérées constantes et respectivement égales à $\rho_0 = \rho(T_0)$ et $e_0 = e(T_0)$.

Couplage entre la phase gazeuse du mélange homogène et la phase dispersée

Du fait du cisaillement important expérimenté par les gouttes sous l'effet de l'écoulement co-courant gazeux, la force de traînée exercée sur les gouttes ne peut pas être négligée. Celle-ci est responsable d'un transfert de quantité de mouvement entre la phase gazeuse du fluide et les gouttes de chaque section. Si l'on note $\boldsymbol{F}_{drag}$ la force de traînée s'exerçant sur une goutte sphérique isolée de diamètre D et de vitesse $\boldsymbol{v}$ évoluant dans un milieu gazeux de masse volumique ρ_g et de vitesse $\boldsymbol{u}$, alors elle s'exprime :

$$\boldsymbol{F}_{drag} = \frac{1}{8}\pi D^2 \rho_g C_D \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}). \tag{2.107}$$

Le coefficient C_D désigne ici le coefficient de traînée de la goutte. Pour une goutte sphérique, on utilise la corrélation de Schiller et Naumann [134] exprimée comme :

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_p < 1, \\ \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p}\left(1 + 0.15\,\mathrm{Re}_p^{0.687}\right) & \text{si} \quad 1 \leq \mathrm{Re}_p \leq 1000, \\ 0.445 & \text{sinon}, \end{cases} \tag{2.108}$$

avec le nombre de Reynolds particulaire défini comme :

$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_g D \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|}{\mu_g}, \tag{2.109}$$

où μ_g est la viscosité dynamique de la phase porteuse. Pour obtenir la force de traînée moyenne $\boldsymbol{F}_{drag}^{\boldsymbol{k}}$ exercée sur les gouttes d'une section k donnée, il suffit d'intégrer l'expression de la force de traînée exercée sur une goutte isolée (2.107) sur l'intervalle de taille de la section.

La connaissance de cette force par section permet ensuite d'exprimer les termes sources d'échange entre la phase gazeuse et les gouttes comme :

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{F}_{drag}^k \\ -\sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{F}_{drag}^k \cdot \boldsymbol{v}^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{s}_F^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F}_{drag}^k \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.110}$$

Échanges entre les sections du spray par fragmentation

La fragmentation des gouttes sous l'effet du cisaillement avec l'écoulement gazeux est modélisée à l'échelle d'une goutte isolée, puis transcrite dans le formalisme sectionnel, faisant alors intervenir des transferts entre les différentes sections du DPS. Pour effectuer ces transferts, trois éléments doivent être évalués : le temps caractéristique τ_{br} nécessaire à la fragmentation d'une goutte mère isolée de diamètre D et de vitesse $\boldsymbol{v}$, ainsi que le diamètre moyen D_f et la vitesse moyenne $\boldsymbol{v}_f$ des gouttes filles créées par fragmentation. La corrélation (1.24) de Pilch et Erdman [122] est utilisée pour le calcul du temps de rupture τ_{br}. Dans la suite, nous utiliserons en réalité la fréquence de fragmentation f_{br} définie comme l'inverse de τ_{br}. Le diamètre moyen des goutte filles D_f est quant à lui estimé par la corrélation (1.29) de Wert [164]. Pour finir, il est supposé que le processus de fragmentation est associé à une dissipation nulle de la vitesse, de telle sorte qu'il est possible de considérer la vitesse des gouttes filles $\boldsymbol{v}_f$ comme étant égale à la vitesse de la goutte mère $\boldsymbol{v}$.

À ce stade, il reste à formuler le terme source $\boldsymbol{s}_B^k$ qui apparaît dans le système d'équations de conservation (2.91) du DPS. Nous définissons dans un premier temps l'opérateur de fragmentation Γ déjà rencontré dans l'expression (2.9) de l'équation cinétique de Williams-Boltzmann (Williams [165]). On rappelle également que $\mathcal{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)$ représente la fonction densité numérique de gouttes. Par ailleurs, la fréquence de fragmentation f_{br} est elle aussi une fonction de $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, s, \theta)$. En omettant l'écriture des dépendances en t, $\boldsymbol{x}$ et θ, Dufour [36] propose la forme suivante pour l'opérateur de fragmentation :

$$\Gamma(\boldsymbol{v}, s) = \int_{\Omega_s} f_{br}(\boldsymbol{v}^*, s^*)\, \mathcal{F}(\boldsymbol{v}^*, s^*)\, \mathcal{H}(s, \boldsymbol{v}, s^*, \boldsymbol{v}^*)\, \mathrm{d}s^*\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^* - f_{br}(\boldsymbol{v}, s)\, \mathcal{F}(\boldsymbol{v}, s), \tag{2.111}$$

où $\mathcal{H}$ est une fonction représentant le nombre probable de gouttes ayant une taille comprise entre s et $s + \mathrm{d}s$, une vitesse comprise entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$, et qui sont issues de la fragmentation d'une goutte mère de taille s^* et de vitesse $\boldsymbol{v}^*$. De plus, l'espace d'intégration est $\Omega_s =]s, +\infty[\times \mathrm{R}^3$. L'opérateur Γ modélise donc deux effets :

- l'augmentation du nombre de gouttes de taille s en raison de la fragmentation possible de toute goutte mère de taille $s^* > s$,
- la diminution du nombre de gouttes de taille s en raison de leur propre fragmentation.

Pour exprimer la fonction $\mathcal{H}$, il est possible de découpler les distributions en vitesse et en taille en écrivant :

$$\mathcal{H}(s, \boldsymbol{v}, s^*, \boldsymbol{v}^*) = g_v(s, \boldsymbol{v}, s^*, \boldsymbol{v}^*)\, g_s(s, s^*, \boldsymbol{v}^*), \tag{2.112}$$

où g_v et g_s sont les distributions en vitesse et en taille des fragments issus d'une goutte mère de taille s^* et de vitesse $\boldsymbol{v}^*$. En réalité, puisque la vitesse des fragments est supposée être celle de la goutte mère, la distribution g_v s'écrit :

$$g_v(s, \boldsymbol{v}, s^*, \boldsymbol{v}^*) = g_v(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^*) = \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^*). \tag{2.113}$$

Il reste à postuler la forme de la distribution en taille des fragments g_s. Dufour [36] propose l'expression suivante :

$$g_s(s, s^*, \boldsymbol{v}^*) = \phi_1(s, s^*, \boldsymbol{v}^*) \exp\left[-\phi_2(s, s^*, \boldsymbol{v}^*)\right]. \tag{2.114}$$

L'expression des fonctions $\phi_1(s, s^*, \boldsymbol{v}^*)$ et $\phi_2(s, s^*, \boldsymbol{v}^*)$ dépend du choix de la variable taille (surface ou rayon). Pour fermer ces deux fonctions, Dufour [36] utilise le modèle de Wert [164] (1.29) qui prédit le diamètre moyen de Sauter des fragments. Pour finir, les composantes du vecteur source $\boldsymbol{s}_B^k$ qui apparaît dans le système d'équations de conservation (2.91) du DPS sont obtenues en intégrant l'opérateur de fragmentation Γ selon la température et la vitesse. Les procédures de calcul de ces intégrales et les critères de stabilité sont présentés en détail dans la thèse de Dufour [36].

2.2.4 Méthodes numériques de résolution

Discrétisation spatiale

⋆⋆ *Méthode des volumes finis en approche cell-center* ⋆⋆

La résolution des systèmes d'équations (2.45) et (2.91) respectivement associés au SPS et au DPS repose sur la méthode des volumes finis en approche dite *cell-center*. Celle-ci repose sur une décomposition du domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière est notée $\partial\Omega$, en un ensemble de volumes de contrôle également appelés *cellules*. De manière générale, ces volumes de contrôle correspondent à des polyèdres $V_{c,i}$ possédant un nombre quelconque de faces, elles-mêmes définies par un nombre quelconque de sommets. On note $|V_{c,i}|$ le volume d'une cellule, et $\partial V_{c,i}$ l'aire totale de ses faces. Par ailleurs, $\mathcal{V}(i)$ désigne le voisinage par face de l'élément $V_{c,i}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments voisins $V_{c,j}$ partageant une face S_{ij} avec $V_{c,i}$. De plus, $|S_{ij}|$ désigne l'aire de la face S_{ij}, et $\boldsymbol{n}_{ij}$ est un vecteur normal à cette face dirigé vers l'extérieur de la cellule $V_{c,i}$. Enfin, $\boldsymbol{B}_i$ désigne le barycentre de la cellule $V_{c,i}$.

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les systèmes d'équations de conservation (2.45) et (2.91) sur les volumes de contrôle définis précédemment :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \displaystyle\int_{V_{c,i}} \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}\,\mathrm{d}V & + & \displaystyle\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V & = & \displaystyle\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\varphi}_D-\boldsymbol{\varphi}_C\right)\,\mathrm{d}V + \int_{V_{c,i}} \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}V, \\ \displaystyle\int_{V_{c,i}} \frac{\partial \boldsymbol{q}^k}{\partial t}\,\mathrm{d}V & + & \displaystyle\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{q}^k\otimes\boldsymbol{v}^k\right)\,\mathrm{d}V & = & \displaystyle\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{s}^k\,\mathrm{d}V, \end{array}\right. \tag{2.115}$$

où $\boldsymbol{s}^k$ désigne la somme des vecteurs sources $\boldsymbol{s}_G^k+\boldsymbol{s}_L^k+\boldsymbol{s}_F^k+\boldsymbol{s}_B^k$. En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski à ce nouveau système, il est possible de relier l'intégrale de la divergence d'un vecteur à l'intégrale de surface du flux défini par ce vecteur. Il nous permet d'écrire ici, pour un champ de vecteur $\boldsymbol{A}$ quelconque, et avec $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal extérieur en tout point de la frontière $\partial V_{c,i}$:

$$\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V_{c,i}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.116}$$

De plus, dans l'approche *cell-center*, les variables sont évaluées au centre des cellules, selon l'approximation :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \boldsymbol{Q}_i & = & \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{B}_i\right) & \approx & \displaystyle\frac{1}{|V_{c,i}|}\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}V, \\ \boldsymbol{q}_i^k & = & \boldsymbol{q}^k\left(\boldsymbol{B}_i\right) & \approx & \displaystyle\frac{1}{|V_{c,i}|}\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{q}^k\,\mathrm{d}V. \end{array}\right. \tag{2.117}$$

La même approximation est utilisée concernant les termes sources :

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q}_i\right) & \approx & \displaystyle\frac{1}{|V_{c,i}|}\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}V, \\ \boldsymbol{s}^k\left(\boldsymbol{q}_i^k\right) & \approx & \displaystyle\frac{1}{|V_{c,i}|}\int_{V_{c,i}} \boldsymbol{s}^k\,\mathrm{d}V. \end{array}\right. \tag{2.118}$$

En permutant les opérateurs de dérivation et d'intégration temporelle, et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, il est possible d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lllll} |V_{c,i}|\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_i}{\partial t} & + & \displaystyle\int_{\partial V_{c,i}} \left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\varphi}_D+\boldsymbol{\varphi}_C\right)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S & = & |V_{c,i}|\,\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q}_i\right), \\ |V_{c,i}|\dfrac{\partial \boldsymbol{q}_i^k}{\partial t} & + & \displaystyle\int_{\partial V_{c,i}} \left(\boldsymbol{q}^k\otimes\boldsymbol{v}^k\right)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S & = & |V_{c,i}|\,\boldsymbol{s}^k\left(\boldsymbol{q}_i^k\right). \end{array}\right. \tag{2.119}$$

Puisque chaque cellule $V_{c,i}$ est polyédrique, il vient ensuite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |V_{c,i}|\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_i}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\int_{S_{ij}} \left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\varphi}_D+\boldsymbol{\varphi}_C\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}S \;=\; |V_{c,i}|\,\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q}_i\right), \\ |V_{c,i}|\dfrac{\partial \boldsymbol{q}_i^k}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\int_{S_{ij}} \left(\boldsymbol{q}^k\otimes\boldsymbol{v}^k\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}S \;=\; |V_{c,i}|\,\boldsymbol{s}^k\left(\boldsymbol{q}_i^k\right). \end{array}\right. \tag{2.120}$$

À ce stade, on associe à chaque vecteur flux une fonction de flux numérique ϕ, dont le but est d'approximer l'intégrale du flux sur une face :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \phi_C\left(\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{n}_{ij}\right) & \approx & \dfrac{1}{|S_{ij}|}\displaystyle\int_{S_{ij}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}S, \\ \phi_D\left(\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{n}_{ij}\right) & \approx & \dfrac{1}{|S_{ij}|}\displaystyle\int_{S_{ij}} \left(\boldsymbol{\varphi}_D-\boldsymbol{\varphi}_C\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}S, \\ \phi_d^k\left(\boldsymbol{q}_i^k,\boldsymbol{q}_j^k,\boldsymbol{n}_{ij}\right) & \approx & \dfrac{1}{|S_{ij}|}\displaystyle\int_{S_{ij}} \left(\boldsymbol{q}^k\otimes\boldsymbol{v}^k\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}S. \end{array}\right. \tag{2.121}$$

La discrétisation en volumes finis des systèmes d'équations du mélange homogène et d'une section de la phase dispersée s'écrit donc finalement :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_i}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\frac{|S_{ij}|}{|V_{c,i}|}\left[\phi_C\left(\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{n}_{ij}\right)-\phi_D\left(\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{n}_{ij}\right)\right] \;=\; \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q}_i\right), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{q}_i^k}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\frac{|S_{ij}|}{|V_{c,i}|}\phi_d^k\left(\boldsymbol{q}_i^k,\boldsymbol{q}_j^k,\boldsymbol{n}_{ij}\right) \;=\; \boldsymbol{s}^k\left(\boldsymbol{q}_i^k\right). \end{array}\right. \tag{2.122}$$

Notons qu'il s'agit ici de la formulation dite *semi-discrète* de la méthode des volumes finis. Il reste encore à proposer une stratégie d'intégration temporelle (cf. section 2.2.4). Par ailleurs, le système (2.122) correspond à une formulation d'ordre 1 en espace pour la partie convective des équations. En effet, les schémas de flux ϕ_D, ϕ_C et ϕ_d^k prennent pour arguments les valeurs moyennes $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{Q}_j$, $\boldsymbol{q}_i^k$ et $\boldsymbol{q}_j^k$ stockées aux centres des cellules. Afin de réduire la diffusion numérique, une discrétisation spatiale d'ordre 2 peut être obtenue.

⋆⋆ *Méthode de discrétisation spatiale d'ordre 2* ⋆⋆

Pour permettre une discrétisation spatiale d'ordre 2, la méthode Muscl est utilisée dans le code Cedre. Cette technique, proposée initialement par van Leer [156], consiste à remplacer dans l'expression des flux numériques les valeurs aux centres des cellules par des valeurs reconstruites aux faces, sans changer l'expression des flux eux-mêmes. Si l'on note $\boldsymbol{Q}_{ij}$ et $\boldsymbol{Q}_{ji}$, ainsi que $\boldsymbol{q}_{ij}^k$ et $\boldsymbol{q}_{ji}^k$, les valeurs reconstruites de part et d'autre d'une face S_{ij}, alors le système (2.122) devient à l'ordre 2 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}_i}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\frac{|S_{ij}|}{|V_{c,i}|}\left[\phi_C\left(\boldsymbol{Q}_{ij},\boldsymbol{Q}_{ji},\boldsymbol{n}_{ij}\right)-\phi_D\left(\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{n}_{ij}\right)\right] \;=\; \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q}_i\right), \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{q}_i^k}{\partial t} & + & \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}(i)}\frac{|S_{ij}|}{|V_{c,i}|}\phi_d^k\left(\boldsymbol{q}_{ij}^k,\boldsymbol{q}_{ji}^k,\boldsymbol{n}_{ij}\right) \;=\; \boldsymbol{s}^k\left(\boldsymbol{q}_i^k\right). \end{array}\right. \tag{2.123}$$

Il existe un certain nombre de méthode Muscl différentes dans le contexte de l'approche des volumes finis. Dans le cadre de ce mémoire, la méthode utilisée est une méthode dite *multipente* développée par Le Touze *et al.* [91]. Le choix de cette méthode est justifié par le fait qu'elle se révèle plus robuste et potentiellement plus précise que d'autres méthodes dites *monopentes*.

⋆⋆ *Approximation des flux convectifs* ⋆⋆

L'expression des fonctions de flux convectifs ϕ_C et ϕ_d^k associées respectivement au SPS et au DPS ne dépend pas de l'ordre de la discrétisation spatiale.

Dans le cas du SPS, les équations résolues ne sont autres que les équations d'Euler pour la partie convective, auxquelles sont ajoutés des termes de diffusion et des termes sources. Les méthodes numériques utilisées pour approximer les flux convectifs proviennent donc de la littérature classique dédiée au système des équations d'Euler, qui est par nature strictement hyperbolique. Dans le cadre de la méthode des volumes finis, la résolution de ce système d'équations met en jeu une projection de la solution sur des fonctions continues par morceaux. Cela conduit en réalité à résoudre le problème de Riemann au niveau de chaque face du maillage, avec pour condition initiale :

$$\boldsymbol{U}(x, t = 0) = \boldsymbol{U}_0(x) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L & \text{si} \quad x < 0 \\ \boldsymbol{U}_R & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}, \tag{2.124}$$

$\boldsymbol{U}_L$ et $\boldsymbol{U}_R$ désignant respectivement les états à gauche et à droite de la face considérée. Il existe une multitude d'approches pour résoudre ce problème dans le cadre de la méthode des volumes finis. Celles-ci ne sont pas présentées ici, mais le lecteur est invité à se référer aux travaux de Toro [151] pour plus de détail. Au sein du SPS, la formulation des flux convectifs repose sur des schémas décentrés basés sur la résolution approchée du problème de Riemann exact. Notamment, l'un des schémas utilisés dans ce mémoire est le schéma HLLC (Toro [151]) connu pour sa grande robustesse en présence de gradients importants de masse volumique. Ce schéma assure également une faible dissipation des discontinuités de contact dans le cas d'écoulements multifluides. Malgré tout, le schéma HLLC se révèle excessivement dissipatif en présence d'écoulements à faible nombre de Mach, comme par exemple pour des jets liquides à faible vitesse d'injection. Pour limiter cette dissipation numérique, une version dite *bas-Mach* de ce schéma (HLLC-BM) a ainsi été proposée par Zuzio *et al.* [173] sur la base des travaux de Li et Gu [98]. Cette version bas Mach est basée sur l'introduction d'un terme correctif au sein du schéma HLLC, destiné à s'activer dans les zones à faible nombre de Mach et à dégénérer vers la formulation initiale du schéma HLLC lorsque la vitesse du fluide augmente. Cette version bas Mach est elle aussi disponible au sein du code Cedre et est utilisée dans ce mémoire. Pour une description de ces deux schémas, le lecteur est invité à lire l'annexe C.

Dans le cas du DPS, l'absence de terme de pression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit à résoudre un système d'équations de nature faiblement hyperbolique. Une des conséquences directes est le développement possible de zones d'accumulations non physiques de particules. Contrairement au cas des équations d'Euler, la création de zones de vide est aussi une solution possible du système. Pour ces raisons, il est impossible d'utiliser les schémas classiques développés pour les équations d'Euler. Des schémas dédiés présentés par Bouchut *et al.* [12] sont alors utilisés.

⋆⋆ *Approximation des flux diffusifs et capillaires* ⋆⋆

Le rôle de la fonction flux numérique ϕ_D, introduite par le système d'équations (2.123), est d'approximer les vecteurs $\boldsymbol{\varphi}_D$ et $\boldsymbol{\varphi}_C$ des flux diffusifs et capillaires. Or, nous avons vu en section 2.2.1 que les flux de diffusion de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que les flux capillaires sont formulés en fonction des variables d'état $\boldsymbol{U}$ ainsi que de leurs gradients $\boldsymbol{\nabla U}$. Puisque dans la formulation volumes finis les flux de diffusion sont évalués aux faces des cellules, il apparaît nécessaire de procéder à une interpolation de $\boldsymbol{U}$ et de $\boldsymbol{\nabla U}$ au niveau de ces faces. Pour cela, des moyennes pondérées sont calculées à partir des états et des gradients dans les cellules $V_{c,i}$ et $V_{c,j}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}_{ij} & = & f\left(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j\right), \\ (\boldsymbol{\nabla U})_{ij} & = & f_\nabla\left(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j, (\boldsymbol{\nabla U})_i, (\boldsymbol{\nabla U})_j\right). \end{cases} \tag{2.125}$$

Dans ces moyennes, la pondération prend en compte les distances respectives à la face S_{ij} des barycentres de cellule $\boldsymbol{B}_i$ et $\boldsymbol{B}_j$. Pour évaluer la fonction ϕ_D, il suffit ensuite d'utiliser ces variables interpolées dans les modèles associés à chaque flux (cf. section 2.2.1).

Intégration temporelle

⋆⋆ *Splitting d'opérateurs* ⋆⋆

Une fois les systèmes semi discrétisés (2.122) (discrétisation spatiale d'ordre 1) ou (2.123) (discrétisation spatiale d'ordre 2) formulés, il reste à proposer une stratégie numérique d'intégration temporelle afin de déterminer les états actualisés à l'instant t^{n+1} à partir des états au temps précédent t^n. Il est en général possible de considérer une intégration globale de tous les termes des équations. Cependant, il a été démontré que cette approche n'est pas la mieux adaptée pour les simulations d'écoulements diphasiques présentant des termes sources raides (Doisneau *et al.* [33]). Dans ce cas, il s'avère qu'une intégration découplée des opérateurs de transport et des termes sources de couplage est plus robuste. On parle alors de *splitting* d'opérateurs. Cette méthode d'intégration temporelle permet par ailleurs l'utilisation de pas de temps plus élevés et adaptés à chaque opérateur, et donc de réduire les coûts de simulation. C'est cette méthode qui est utilisée dans le code Cedre.

⋆⋆ *Avancement en temps* ⋆⋆

Une fois les différents opérateurs d'intégration temporelle définis, il reste à spécifier les schémas d'avancement en temps utilisés. Le code Cedre dispose d'un certain nombre de schémas explicites et implicites. Cependant, seuls les schémas explicites sont présentés ici et utilisés dans ce mémoire. La majorité de ces schémas peut être formulée selon le formalisme générique des méthodes itératives de Runge-Kutta (Butcher [17]), c'est-à-dire des méthodes à un seul pas, mais éventuellement à plusieurs étapes [5].

Pour établir une formulation générique de ces schémas, définissons d'abord le système suivant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{F}\Big[t, \boldsymbol{Q}(t)\Big], \tag{2.126}$$

où $\boldsymbol{Q}$ peut désigner ici le vecteur des quantités conservées du mélange homogène ou celui de la phase dispersée, et où $\boldsymbol{F}\Big[t, \boldsymbol{Q}(t)\Big]$ regroupe tous les termes autres que la dérivée temporelle des systèmes d'équations de conservation des deux solveurs (flux et termes sources). L'idée du formalisme de Runge-Kutta à plusieurs étapes est alors d'intégrer le système (2.126) sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$:

$$\boldsymbol{Q}(t^{n+1}) = \boldsymbol{Q}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{F}\Big[t, \boldsymbol{Q}(t)\Big]\, \mathrm{d}t, \tag{2.127}$$

en utilisant un schéma d'intégration à s étapes intermédiaires pour calculer l'intégrale. Si l'on note $\boldsymbol{\phi}_t(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n)$ la fonction associée à ce schéma, avec $\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{Q}(t^n)$ et Δt^n le pas de temps à l'itération n tel que $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$, on peut alors formuler la méthode de Runge-Kutta à s étapes comme :

$$\boldsymbol{Q}^{n+1} = \boldsymbol{Q}^n + \Delta t^n \boldsymbol{\phi}_t(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n), \tag{2.128}$$

avec la fonction $\boldsymbol{\phi}_t(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n)$ définie par :

$$\boldsymbol{\phi}_t(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n) = \sum_{i=1}^{s} b_i \boldsymbol{k}^i(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n), \tag{2.129}$$

$$\boldsymbol{k}^i(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n) = \boldsymbol{F}\Big[t^n + \Delta t^n c_i, \boldsymbol{Q}^n + \Delta t^n \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \boldsymbol{k}^j(t^n, \boldsymbol{Q}^n, \Delta t^n)\Big] \quad 1 \leq i \leq s. \tag{2.130}$$

5. Une méthode à un pas ne requiert le stockage des variables qu'au seul instant t^n, même si éventuellement plusieurs étapes intermédiaires sont nécessaires afin d'obtenir l'instant suivant t^{n+1}. Une méthode à plusieurs pas nécessite en revanche le stockage de plusieurs instants précédents, par exemple t^n et t^{n-1} pour une méthode à deux pas.

Par définition, nous avons également :

$$\forall i, \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}. \tag{2.131}$$

Un schéma donné est donc défini par le nombre d'étapes s ainsi que par les coefficients a_{ij} et b_i. On représentera généralement cela sous la forme d'un tableau, dit tableau de Butcher [17] :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} . \tag{2.132}$$

Notons que dans le cas des méthodes explicites, la matrice des coefficients $a_{i,j}$ est strictement triangulaire inférieure. Le tableau de Butcher se simplifie ainsi en :

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array} . \tag{2.133}$$

On comprend donc qu'il puisse exister un très grand nombre de schémas aux propriétés différentes. Nous présentons ici les trois schémas explicites utilisés dans ce mémoire :

- le schéma explicite d'Euler à une seule étape et d'ordre 1. Celui-ci est associé au tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} . \tag{2.134}$$

  Ce schéma correspond en réalité à une estimation de l'intégrale présente dans l'équation (2.127) par la méthode des rectangles ;

- le schéma explicite prédicteur-correcteur, également appelé schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou simplement RK2. Il s'agit d'un schéma à deux étapes défini par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} ; \tag{2.135}$$

- un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 3 que l'on appelle plus simplement RK3. Il s'agit d'un schéma à trois étapes défini par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array} . \tag{2.136}$$

Il est important de préciser que la stabilité des schémas explicites est conditionnée par un critère de type CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*). Le nombre CFL est défini comme :

$$\text{CFL} = (\|\boldsymbol{u}\| + c)\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,, \tag{2.137}$$

où $\boldsymbol{u}$ et c désignent respectivement la vitesse convective et la vitesse du son, Δt et Δx étant les pas de temps et d'espace. Le pas de temps Δt doit alors respecter :

$$\Delta t < \mathrm{CFL}_{max} \frac{\Delta x}{\|\boldsymbol{u}\| + c}, \tag{2.138}$$

avec CFL_{max} la valeur maximale admissible du nombre CFL. Cette valeur limite de stabilité dépend du schéma considéré et de l'ordre de la discrétisation spatiale. Dans le cas d'une discrétisation spatiale d'ordre 2, on a par exemple généralement $\mathrm{CFL}_{max} \approx 0.5$ pour le schéma RK2 et $\mathrm{CFL}_{max} \approx 0.8$ pour le schéma RK3.

Deuxième partie

Évaluation et développement du code CEDRE pour la simulation de mécanismes acoustiques non linéaires

Chapitre 3

Formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur une sphère rigide soumise à une onde acoustique multi-harmonique plane et stationnaire

La deuxième partie de ce mémoire est destinée à évaluer la capacité du code Cedre à restituer les mécanismes d'interaction entre une onde acoustique d'amplitude élevée évoluant dans un milieu gazeux et les structures liquides d'un jet atomisé. Tout d'abord, le chapitre 3 est consacré à la formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur des gouttes soumises à un champ acoustique stationnaire composé de plusieurs harmoniques. Cette nouvelle formulation, dont l'importance est démontrée en fin de chapitre, servira de référence tout au long de ce mémoire et conduira par ailleurs au développement du code. Le chapitre 4 sera quant à lui consacré à la validation du solveur Navier-Stokes pour la simulation de la propagation non linéaire d'ondes acoustiques de haute amplitude et à l'élaboration d'une méthodologie d'excitation acoustique pour imposer une onde stationnaire dans un domaine de calcul. Le chapitre 5 présentera quant à lui la stratégie de validation et d'évolution du code Cedre pour la restitution des mécanismes de radiation acoustique associés à la présence de structures liquides dans un champ acoustique stationnaire.

Sommaire

3.1 Introduction 82
3.2 Notions générales sur la pression et la force de radiation acoustique 84
3.3 Cas particulier d'un objet sphérique 86
3.3.1 Formulation de la force de radiation acoustique instantanée 86
3.3.2 Formulation de la force de radiation acoustique moyenne 95
3.3.3 Démonstration de l'intérêt de la formulation multi-harmonique 98

3.1 Introduction

Il a été fait mention en section 1.2 de l'impact significatif que pouvait avoir la pression de radiation acoustique sur les jets liquides atomisés. En général, les travaux relatifs à l'étude de cette pression de radiation sont réalisés dans le cadre de la lévitation acoustique (*e.g.* Lierke *et al.* [99], Yarin *et al.* [167]) et ne fait intervenir des ondes acoustiques composées que d'une seule fréquence. Selon Leung *et al.* [97], l'influence des harmoniques issues des non-linéarités acoustiques sur la force de radiation exercée sur un élément sphérique tel qu'une goutte dans une chambre de résonance ne peut être négligée au-delà de niveaux acoustiques de l'ordre de 150 dB, soit une amplitude crête-à-crête de fluctuation de pression dans de l'air d'à peine 2% de la pression atmosphérique. Or, dans le domaine de la propulsion spatiale à ergols liquides, il est généralement fait référence aux instabilités de combustion de haute fréquence dès lors que les oscillations de pression en jeu dépassent environ 10% de la pression moyenne de chambre (valeur crête-à-crête) (Hardi *et al.* [65], Huang et Huzel [72]). Dans ce cas, les formulations analytiques de la littérature issues de considérations mono-harmoniques ne peuvent pas s'appliquer. Il est alors choisi dans ce chapitre de proposer une formulation multi-harmonique de la force de radiation acoustique exercée sur une sphère rigide représentant une goutte. Cette formulation pourra ainsi être utilisée comme référence tout au long de ce mémoire. Le même développement est réalisé en annexe D pour un élément cylindrique plus représentatif du cœur liquide et des plus gros ligaments caractéristiques des jets liquides dont l'atomisation est assistée par un co-courant gazeux. Bien que la force de radiation acoustique soit généralement intégrée en temps dans la littérature, la nouvelle formulation multi-harmonique de ce chapitre est présentée sous une forme instantanée de manière à pouvoir être ensuite utilisée dans le cadre de simulations numériques instationnaires.

Lors des premiers travaux destinés à l'analyse théorique des mécanismes de radiation acoustique, l'influence de la viscosité du milieu ambiant était généralement négligée. C'est par exemple le cas des travaux de King [78] et Leung *et al.* [97] qui proposent une formulation analytique de la force de radiation acoustique moyenne sur une période acoustique $\langle F_{rad} \rangle_T$ exercée sur un objet sphérique en présence d'ondes acoustiques mono-harmoniques se propageant dans un fluide parfait. Des travaux similaires ont également été réalisés par Zhuk [170] et Wu *et al.* [166] pour des objets cylindriques. En 1956, Mawardi [107] affirme cependant qu'en présence d'objets de dimension non négligeable comparée à la longueur d'onde acoustique, une part de l'énergie acoustique incidente est dissipée dans la couche limite autour de cet objet. Une formulation analytique équivalente à celle de King [78] est alors proposée par la suite par Doinikov [32] pour prendre en compte l'influence de la viscosité sur les contraintes acoustiques exercées sur un objet sphérique.

La formulation analytique générale de Doinikov [32] $\langle F_{rad} \rangle_T^{Dkv}$ est comparée dans le tableau 3.1 à la formulation de King [78] $\langle F_{rad} \rangle_T^{King}$ adaptée aux fluides parfaits. Ces deux formulations sont équivalentes lorsque l'épaisseur de viscosité δ est très faible devant le rayon R de la sphère et la longueur d'onde acoustique λ (cf. cas ① du tableau), que l'on considère le cas d'une goutte dans un gaz ou d'une bulle dans un liquide. En revanche, si l'épaisseur de viscosité devient bien plus grande que le rayon de la sphère (cf. cas ② du tableau), plusieurs ordres de grandeur peuvent alors séparer les deux expressions. Il n'est dans ce cas plus possible de négliger les effets de la viscosité du milieu sur la force de radiation acoustique. Dans le cas d'une goutte dont la masse volumique est nettement plus importante que celle du milieu ambiant, la déviation engendrée par les contraintes acoustiques peut même changer de sens. Il est alors essentiel de déterminer l'importance qu'a la viscosité du milieu ambiant dans le cas de moteurs-fusées. Pour cela, nous nous intéressons ici à deux points de fonctionnement représentatifs des conditions rencontrées dans les moteurs à ergols liquides. Le premier point de fonctionnement PF-Onera (Rutard *et al.* [132]) n'est autre que celui simulé lors de la troisième partie de ce mémoire destinée à l'étude des mécanismes de réponse d'un jet diphasique coaxial inerte sous excitation acoustique transverse par la simulation numérique aux grandes échelles. Le deuxième point de fonctionnement considéré correspond au point de fonctionnement PF2 associé au banc Mascotte de l'Onera muni du boîtier Vham destiné à l'étude de la réponse de flammes subcritiques LOX/GCH_4 sous excitation acoustique transverse de haute fréquence (*e.g.* voir Méry *et al.* [113]). Pour ces deux

points de fonctionnement, l'épaisseur de viscosité est évaluée et comparée à la taille caractéristique des gouttes issues de l'atomisation primaire du jet liquide dans le tableau 3.2. D'après celui-ci, les deux dimensions sont du même ordre de grandeur dans les deux cas. Il est alors difficile de conclure à propos de l'effet de la viscosité du milieu ambiant sur les contraintes acoustiques exercées sur les gouttes dans les situations qui nous intéressent. Cependant, les travaux expérimentaux de la littérature destinés à l'étude de jets liquides atomisés sous excitation acoustique semblent tous dévoiler une déviation de la phase liquide vers le ventre de vitesse acoustique (VAN) le plus proche du point d'injection, que ce soit dans des cas inertes (*e.g.* voir Ficuciello *et al.* [52]) ou réactifs (*e.g.* voir Méry [112]), ce qui semble indiquer que l'on se trouve dans le cas où l'épaisseur de viscosité est faible. Pour la formulation multi-harmonique de la force de radiation acoustique qui suit, notre choix se porte alors naturellement sur l'approche retenue par King [78] dans un contexte mono-harmonique, qui néglige donc la viscosité du milieu ambiant.

	① $k_{ac}R \ll 1 \ll \frac{\sqrt{2}}{\delta}R$	② $k_{ac}R \ll \frac{\sqrt{2}}{\delta}R \ll 1$
Goutte dans un gaz	$\langle F_{rad}\rangle_T^{Dkv} = \langle F_{rad}\rangle_T^{King}$ Déviation vers VAN	$\lvert\langle F_{rad}\rangle_T^{Dkv}\rvert \gg \lvert\langle F_{rad}\rangle_T^{King}\rvert$ Déviation vers PAN
Bulle dans un liquide	$\langle F_{rad}\rangle_T^{Dkv} = \langle F_{rad}\rangle_T^{King}$ Déviation vers VAN	$\lvert\langle F_{rad}\rangle_T^{Dkv}\rvert \gg \lvert\langle F_{rad}\rangle_T^{King}\rvert$ Déviation vers VAN

Table 3.1 – Comparaison des formulations analytiques de la force de radiation acoustique moyenne autour d'une sphère avec ou sans prise en compte de la viscosité du milieu ambiant.

$\delta = \left(\frac{\nu_0}{\pi f_{ac}}\right)^{\frac{1}{2}}$, c_0 et ν_0 : épaisseur de viscosité, vitesse du son et viscosité cinématique dans le milieu ambiant.
f_{ac}, $k_{ac} = \frac{2\pi f_{ac}}{c_0}$ et $\lambda = \frac{c_0}{f_{ac}}$: fréquence, nombre d'onde et longueur d'onde acoustiques.

	PF-Onera (Rutard *et al.* [132])	Vham PF2 (Méry *et al.* [113])
Rayon R [µm]*	50	15
Fréquence acoustique f_{ac} [Hz]†	≈ 1 000	3 200
Vitesse du son c_0 [m · s^{-1}]	346	1 130
Viscosité cinématique ν_0 [m · s^{-1}]	1.6×10^{-5}	1.8×10^{-5}
Épaisseur de viscosité δ [µm]	71	42
$k_{ac}R$ [-]	9.1×10^{-4}	2.7×10^{-4}
$\frac{\sqrt{2}}{\delta}R$ [-]	1	0.5

Table 3.2 – Évaluation de l'épaisseur de viscosité pour des gouttes de rayon R = 50 µm pour les points de fonctionnement PF-Onera et Vham PF2.

* Le rayon utilisé correspond au rayon moyen des gouttes issues de l'atomisation du jet liquide estimé par Marmottant et Villermaux [106] (cf. section 1.1.3)

† Pour simplifier, un seul mode acoustique est considéré pour chacun des points de fonctionnement.

3.2 Notions générales sur la pression et la force de radiation acoustique

Ficuciello [51] a récemment effectué un travail important de clarification de la démarche initialement proposée par King [78], Zhuk [170] et Wu *et al.* [166] afin de définir de façon analytique la pression de radiation acoustique autour d'objets sphériques ou cylindriques, ainsi que la force de radiation résultante. Dans la suite de ce chapitre, l'ensemble de sa démarche est par conséquent présentée et utilisée pour nous permettre d'aboutir ensuite à la formulation recherchée de la force de radiation acoustique instantanée s'exerçant sur une sphère positionnée dans un champ acoustique composé de plusieurs harmoniques.

Considérons ici un fluide parfait et compressible dans lequel se propage une onde acoustique. Sans viscosité, l'équation d'Euler s'applique :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho}, \tag{3.1}$$

avec p la pression du fluide, $\boldsymbol{u}$ sa vitesse et ρ sa masse volumique. Dans le cas où l'amplitude des fluctuations de pression au passage de l'onde acoustique est modérée, il est possible de linéariser certaines variables autour de l'état de référence d'indice 0 comme l'enthalpie spécifique h et la pression : $h = h_0 + h'$ et $p = p_0 + p'$. De plus, l'écoulement peut être considéré isentropique. L'enthalpie spécifique est alors formulée comme :

$$\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \tag{3.2}$$

où encore :

$$h - h_0 = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{3.3}$$

Il est possible de relier le gradient $\boldsymbol{\nabla} h$ au gradient de pression comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} h &= \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}p} \boldsymbol{\nabla} p, \\ &= \frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ainsi, en associant les équations (3.3) et (3.4) à l'équation d'Euler (3.1), on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{3.5}$$

En considérant l'écoulement comme irrotationnel ($\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{u} = 0$), il est possible de définir le potentiel de vitesse ϕ tel que $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. De plus, l'identité vectorielle suivante est respectée : $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\, (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})\, /2$. L'intégration spatiale de l'équation (3.5) conduit alors à :

$$-\dot{\phi} + \frac{1}{2} q^2 + \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = f(t), \tag{3.6}$$

où $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$, $q^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$ et $f(t)$ est issue de l'intégration et ne dépend que du temps. Pour simplifier, il est possible de remplacer ϕ par $\phi + \int f(t)\, \mathrm{d}t$ sans changer la relation $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. Dans ce cas, l'équation (3.6) devient :

$$-\dot{\phi} + \frac{1}{2} q^2 + \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0. \tag{3.7}$$

Selon la formule de Taylor, la partie fluctuante de l'enthalpie spécifique autour de l'état de référence peut être approchée par :

$$\begin{aligned} h' &= \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}p}_{|p=p_0}(p-p_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}p^2}_{|p=p_0}(p-p_0)^2 + o((p-p_0)^2) \\ &= \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2c_0^2} + o(p'^2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $c_0 = \left(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho_{|\rho=\rho_0}\right)^{1/2}$ est la vitesse du son dans le milieu à l'état de référence. Selon cette formulation, l'équation (3.7) peut s'écrire :

$$p' = \rho_0\dot{\phi} + \frac{p'^2}{2\rho_0c_0^2} - \frac{\rho_0}{2}q^2 + o(p'^2). \tag{3.9}$$

Au final, si l'on ne conserve que les termes de premier et second ordres, l'équation (3.9) devient :

$$p' = \rho_0\dot{\phi} + \frac{\rho_0}{2c_0^2}\dot{\phi}^2 - \frac{\rho_0}{2}q^2. \tag{3.10}$$

Cette équation, formulée d'abord par King [78] et dont l'obtention a été nettement clarifiée par Ficuciello [51], est un résultat clef sur lequel nous nous appuierons dans la suite de ce chapitre. La pression de radiation acoustique p_{rad} est en effet définie comme la moyenne temporelle des fluctuations locales de pression sur une période acoustique $T = 1/f_{ac}$:

$$p_{rad} = \langle p' \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T p' \,\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Quelle que soit la nature des ondes acoustiques (progressives ou stationnaires), la distribution de p_{rad} diffère grandement selon qu'un obstacle se présente sur le parcours des ondes ou non.

Lorsque l'onde acoustique se propage dans un milieu sans obstacle, la moyenne temporelle de $\dot{\phi}$ est nulle. La pression de radiation peut ainsi être reformulée :

$$p_{rad} = \frac{\langle p'^2 \rangle_T}{2\rho_0c_0^2} - \frac{\rho_0}{2}\langle q^2 \rangle_T. \tag{3.12}$$

Dans ce cas, p_{rad} apparaît comme la différence entre les énergies acoustiques potentielle et cinétique moyennes (Lee et Wang [93]). Dans la littérature, la pression de radiation acoustique est fréquemment associée aux non-linéarités acoustiques car elle peut être négligée lorsque l'amplitude des fluctuations de pression est très faible. En effet, dans le domaine de l'acoustique linéaire, il est généralement fait l'hypothèse que les fluctuations de pression sont suffisamment faibles pour ne considérer que le premier terme d'ordre 1 dans la formulation des fluctuations de pression (3.10). Puisque la moyenne temporelle de $\dot{\phi}$ est nulle dans le cas où l'onde acoustique se propage sans rencontrer d'obstacle, cette hypothèse conduit à une valeur nulle de la pression de radiation acoustique dans l'ensemble du milieu quelle que soit la nature de l'onde. En revanche, lorsque l'amplitude d'oscillation acoustique est plus importante, tout en restant suffisamment faible pour valider l'hypothèse d'écoulement isentropique, les termes de second ordre de l'équation (3.10) ne peuvent plus être négligés. Dans ce cas, p_{rad} est potentiellement non nulle, même sans obstacle, et dépend de la nature de l'onde. [1]

Dans le cas où un obstacle est positionné dans le champ acoustique, les ondes sont réfléchies à sa surface, modifiant ainsi la distribution des fluctuations de pression p' à proximité. Si cette distribution

1. Pour compléter cette analyse des propriétés non linéaires de la pression de radiation acoustique, p_{rad} est formulée en annexe E dans le cas d'une onde progressive ou stationnaire sans obstacle.

est asymétrique, une force de radiation acoustique $\boldsymbol{F}_{rad}$ s'exerce alors sur l'obstacle. Celle-ci est définie par :

$$\boldsymbol{F}_{rad} = -\oiint_S p'\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S, \tag{3.13}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'objet orienté vers l'extérieur et S sa surface. Dans le cas où l'objet est libre, la force de radiation acoustique peut engendrer un déplacement de celui-ci dans la direction de propagation des ondes acoustiques. Pour formuler cette force de façon analytique, il est nécessaire de pouvoir exprimer les fluctuations de pression p' et donc, d'après l'équation (3.10), le potentiel de vitesse ϕ.

Si l'on note $\boldsymbol{U}$ la vitesse de déplacement de l'objet, la dérivée du potentiel de vitesse dans un repère centré sur l'objet s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \dot{\phi} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{3.14}$$

Par ailleurs, d'après Lamb [84], puisque le fluide reste en contact avec l'objet au cours de son déplacement, la condition à la limite suivante est respectée à sa surface :

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} = u_n = -\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{n}, \tag{3.15}$$

avec $u_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ la composante normale de vitesse du fluide en tout point à la surface de l'objet. Pour une onde acoustique d'amplitude modérée, le potentiel de vitesse ϕ est solution de l'équation d'onde acoustique définie par :

$$\nabla^2\phi - \left(\partial^2\phi/\partial t^2\right)/c_0^2 = 0. \tag{3.16}$$

Puisque cette équation est linéaire, le potentiel de vitesse peut être scindé en une contribution incidente ϕ_{in} et une contribution réfléchie à la surface de l'obstacle $\phi_{réf}$: $\phi = \phi_{in} + \phi_{réf}$. À ce stade, le caractère mono- ou multi-harmonique de l'onde acoustique n'a pas encore été considéré. Dans le cas d'une onde acoustique composée de N_h harmoniques, le caractère linéaire de l'équation d'onde (3.16) permet également de décomposer le potentiel de vitesse en fonction des contributions de chaque mode comme :

$$\phi = \sum_{i=1}^{N_h}\phi_i = \sum_{i=1}^{N_h}\left(\phi_{in,\,i} + \phi_{réf,\,i}\right). \tag{3.17}$$

C'est sur la base de cette décomposition que l'on propose dans la suite de ce chapitre de formuler analytiquement la force de radiation acoustique dans un contexte multi-harmonique. Pour aller plus loin dans cette formulation, il est néanmoins nécessaire d'effectuer une hypothèse quant à la forme de l'obstacle. Dans la suite de ce chapitre, on considère un objet sphérique soumis à une onde acoustique plane stationnaire multi-harmonique. Cet objet sphérique représente en réalité une goutte issue de l'atomisation d'un jet liquide. Rappelons que la même dérivation est réalisée en annexe D pour un élément cylindrique plus représentatif du cœur liquide et des plus gros ligaments.

3.3 Cas particulier d'un objet sphérique

3.3.1 Formulation de la force de radiation acoustique instantanée

Considérons ici un objet sphérique de rayon R quelconque, positionné dans un champ acoustique plan stationnaire. La figure 3.1 définit les référentiels cartésien (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$) et sphérique (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$) centrés sur l'objet. Dans le cas d'une onde acoustique plane, la distribution spatiale des fluctuations

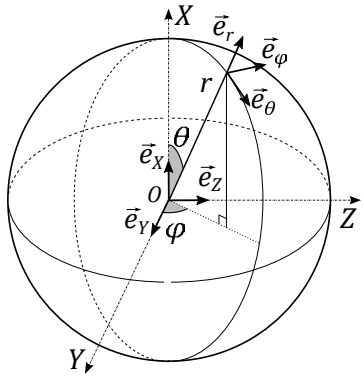


Figure 3.1 – Définition des référentiels cartésien (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$) et sphérique (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$) considérés.

de pression à la surface de la sphère suit une symétrie de révolution autour de l'axe acoustique. Si l'on considère des ondes acoustiques se propageant le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$, l'équation (3.13) donne :

$$\boldsymbol{F}_{rad} = -2\pi R^2 \int_0^\pi p' \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \boldsymbol{e}_X. \tag{3.18}$$

La force de radiation acoustique induit alors un déplacement de la sphère le long de l'axe acoustique, soit $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_X$. Comme l'indique King [78], la condition à la limite (3.15) devient ainsi :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r}_{|r=R} = U \cos\theta. \tag{3.19}$$

En combinant les équations (3.10) et (3.18) et en posant $\mu = \cos\theta$, il est possible d'exprimer la force de radiation acoustique comme :

$$\begin{aligned} F_{rad} &= -2\pi R^2 \int_{-1}^{1} p' \mu \, \mathrm{d}\mu, \\ &= -2\pi R^2 \rho_0 \int_{-1}^{1} (\dot{\phi} + \frac{1}{2c_0^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}q^2)\mu \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pour évaluer cette force, il apparaît alors nécessaire d'exprimer le potentiel de vitesse. Dans le cas d'une onde plane se propageant le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$, King [78] exprime le potentiel de vitesse de l'onde incidente ϕ_{in} dans le référentiel (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$) comme [2] :

$$\phi_{in} = \sum_{i=1}^{N_h} \phi_{in,\,i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_h} A_i \left(e^{-\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}(X+h)} + e^{\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}(X+h)}\right) e^{\mathbf{i}(\omega_i t + \psi_i)}, \tag{3.21}$$

avec $A_i = p_{ac,\,i}/(\rho_0\, c_0\, k_{ac,\,i})$, $p_{ac,\,i}$ étant l'amplitude des fluctuations de pression du mode acoustique i, $\omega_i = 2\pi f_{ac,\,i}$ sa pulsation, $f_{ac,\,i}$ sa fréquence, ψ_i sa phase et $k_{ac,\,i} = \omega_i/c_0$ son nombre d'onde. De plus, t est le temps, X correspond à la coordonnée le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$ et h représente la distance entre le centre de la sphère et un ventre de pression acoustique (PAN) de référence commun à tous les harmoniques.

Dans un milieu fermé comme une chambre de combustion d'un moteur à ergols liquides, les modes acoustiques susceptibles de croître par résonance sont ceux dont la fréquence est une des fréquences

2. Cette formulation correspond à un champ acoustique défini par $p'(X) = \sum_{i=1}^{N_h} -p_{ac,\,i} \sin(\omega_i t + \psi_i) \cos(k_{ac,\,i}(X+h))$ loin de l'objet. Proche de l'objet, le champ de pression est en revanche modifié par l'onde réfléchie.

propres du système. Dans ce cas, si l'on note $f_{ac,\,1}$ la fréquence fondamentale du système, alors la fréquence de l'harmonique i est $f_{ac,\,i} = i f_{ac,\,1}$. Dans ces conditions, les travaux de King [78] nous permettent d'exprimer la partie réelle du potentiel de vitesse (composantes incidente et réfléchie incluses) dans le référentiel (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$) comme :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\{\phi\} &= \sum_{i=1}^{N_h} \mathbb{R}\{\phi_i\},\\ &= \sum_{i=1}^{N_h}\left[\cos\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{R}_{n,\,i}(r)\mathcal{P}_n(\cos\theta)\right] + \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{S}_{n,\,i}(r)\mathcal{P}_n(\cos\theta)\right]\right],\end{aligned} \tag{3.22}$$

avec $\Phi_i = \omega_i t + \psi_i$. Pour simplifier, l'opérateur $\mathbb{R}\{\cdot\}$ sera omis par la suite. Dans cette formulation, $\mathcal{P}_n(\cos\theta)$ est le polynôme de Legendre de degré n tandis que les deux fonctions $\mathcal{R}_{n,\,i}(r)$ et $\mathcal{S}_{n,\,i}(r)$ sont définies par :

$$\begin{cases}\mathcal{R}_{n,\,i}(r) &= \dfrac{A_i}{(k_{ac,\,i}r)^{n+1}}(2n+1)\cos\left(k_{ac,\,i}h + \frac{1}{2}n\pi\right)\dfrac{\mathcal{F}_n(k_{ac,\,i}r)}{\mathcal{H}_n^2(k_{ac,\,i}r)},\\ \mathcal{S}_{n,\,i}(r) &= -\dfrac{A_i}{(k_{ac,\,i}r)^{n+1}}(2n+1)\cos\left(k_{ac,\,i}h + \frac{1}{2}n\pi\right)\dfrac{\mathcal{G}_n(k_{ac,\,i}r)}{\mathcal{H}_n^2(k_{ac,\,i}r)}.\end{cases} \tag{3.23}$$

On définit également les fonctions $\mathcal{F}_n(k_{ac,\,i}r)$, $\mathcal{G}_n(k_{ac,\,i}r)$ et $\mathcal{H}_n(k_{ac,\,i}r)$ par :

$$\begin{cases}\mathcal{F}_n(k_{ac,\,i}r) &= (k_{ac,\,i}r)^2 f_{n+1}(k_{ac,\,i}r) - n f_n(k_{ac,\,i}r) \qquad \text{si} \quad n \neq 1,\\ \mathcal{F}_1(k_{ac,\,i}r) &= (k_{ac,\,i}r)^2 f_2(k_{ac,\,i}r) - (1-\eta)\, f_1(k_{ac,\,i}r),\end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases}\mathcal{G}_n(k_{ac,\,i}r) &= (k_{ac,\,i}r)^2 g_{n+1}(k_{ac,\,i}r) - n g_n(k_{ac,\,i}r) \qquad \text{si} \quad n \neq 1,\\ \mathcal{G}_1(k_{ac,\,i}r) &= (k_{ac,\,i}r)^2 g_2(k_{ac,\,i}r) - (1-\eta)\, g_1(k_{ac,\,i}r),\end{cases} \tag{3.25}$$

et

$$\mathcal{H}_n^2(k_{ac,\,i}r) = \mathcal{F}_n^2(k_{ac,\,i}r) + \mathcal{G}_n^2(k_{ac,\,i}r), \tag{3.26}$$

avec $\eta = \rho_0/\rho_1$ le rapport entre les masses volumiques du milieu ρ_0 et de l'objet ρ_1. Enfin, les fonctions $f_n(k_{ac,\,i}r)$ et $g_n(k_{ac,\,i}r)$ respectent :

$$\begin{cases} f_n(k_{ac,\,i}r) &= (-1)^n (k_{ac,\,i}r)^{-n}\left(\dfrac{\pi}{2k_{ac,\,i}r}\right)^{1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_{ac,\,i}r),\\ g_n(k_{ac,\,i}r) &= (k_{ac,\,i}r)^{-n}\left(\dfrac{\pi}{2k_{ac,\,i}r}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ac,\,i}r),\end{cases} \tag{3.27}$$

avec $J_\nu(k_{ac,\,i}r)$ la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν.

Il est important de préciser ici que pour aboutir aux expressions (3.21) et (3.22), King [78] a été contraint de considérer le terme h constant, malgré le fait que ce terme dépende en réalité du temps puisque l'objet se déplace sous l'effet de la force de radiation acoustique. De façon implicite, King [78] considère donc que le déplacement de l'objet au cours d'une période d'oscillation est très petit devant la longueur d'onde acoustique et peut donc être négligé dans l'expression du potentiel de vitesse. Bien que cette hypothèse simplifie l'expression analytique du potentiel de vitesse dans le référentiel (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$), la formulation (3.22) qui en découle présente le défaut de conduire, une fois introduite dans l'expression (3.20), à négliger l'influence du déplacement de l'objet sur la force de radiation acoustique.

Pour aboutir à une formulation finale de $\boldsymbol{F}_{rad}$ prenant en compte cette influence dans l'hypothèse d'un faible déplacement de l'objet, King [78] reformule l'équation (3.14) comme :

$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - U\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + U\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \tag{3.28}$$

et l'intègre dans l'expression (3.20) de la force de radiation acoustique qui devient alors :

$$\begin{aligned} F_{rad} \;=\; & \underbrace{-\,2\pi R^2\rho_0\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}_{|r=R}\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_l} \underbrace{-\,2\pi R^2\rho_0\int_{-1}^{1}\left(-U\mu\frac{\partial\phi}{\partial r}_{|r=R} + U\frac{\mu^2-1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\mu}_{|r=R}\right)\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_U} \\ & \underbrace{-\,\frac{\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\dot{\phi}^2\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_\phi} + \underbrace{\pi R^2\rho_0\int_{-1}^{1}q^2\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_q}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ainsi, on voit apparaître dans l'expression (3.29) le terme F_U représentant une part de l'influence du déplacement de l'objet de vitesse U sur F_{rad}. Notons que cette expression est valable que l'on considère le terme h constant ou non dans l'expression du potentiel de vitesse ϕ. Les conséquences de considérer la variation temporelle de h comme négligeable sont détaillées dans la suite de ce chapitre lors du développement des termes F_l, F_U, F_ϕ et F_q. Les conclusions associées découlent de discussions réalisées dans le cadre de la coopération avec le Coria (Baillot et Rutard [6]).

Outre l'aspect multi-harmonique, l'originalité des développements qui suivent réside dans la considération du caractère instantané des équations. En effet, c'est en général la moyenne temporelle de la force de radiation acoustique qui est considérée dans la littérature. Puisque cette nouvelle formulation multi-harmonique est destinée à être utilisée dans le cadre de simulations numériques instationnaires, l'aspect instantané des équations ne peut pas être omis ici. Aucune intégration temporelle n'est donc réalisée.

Formulation analytique de F_l

Le terme F_l de l'équation (3.29) représente la dérivée temporelle du potentiel de vitesse ϕ dans le référentiel lié à l'objet. De manière à en simplifier le calcul, King [78] considère que l'influence du déplacement de l'objet sur ce terme est négligeable et qu'il peut être approché à l'ordre 1 par la dérivée partielle en temps $\dot{\phi}$ du potentiel de vitesse tout en considérant h constant dans l'expression (3.22). Le développement du potentiel de vitesse induit alors :

$$F_l = -2\pi R^2\rho_0\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{N_h}\omega_i\left[\cos\Phi_i\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu)\right] - \sin\Phi_i\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu)\right]\right]\mu\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.30}$$

D'après la définition des polynômes de Legendre, il est possible de prouver la propriété suivante :

$$\int_{-1}^{1}\mathcal{P}_n(\mu)\mathcal{P}_m(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & \text{si} \quad m = n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.31}$$

Ainsi, puisque $P_1(\mu) = \mu$, F_l devient :

$$\boxed{F_l = \frac{4}{3}\pi R^2\rho_0\sum_{i=1}^{N_h}\omega_i\left[\sin\Phi_i\mathcal{R}_{1,\,i}(R) - \cos\Phi_i\mathcal{S}_{1,\,i}(R)\right].} \tag{3.32}$$

F_l est donc la somme des contributions d'ordre 1 de chaque harmonique à la force de radiation acoustique.

Formulation analytique de F_U

Le terme F_U d'ordre 2 permet de tenir compte du déplacement de l'objet lors de l'évaluation de F_{rad}. Ce terme est donc nul dans le cas d'une sphère immobile. D'après la condition à la limite (3.19), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} F_U &= -2\pi R^2 \rho_0 U \int_{-1}^{1} \left(U\mu^2 + \frac{\mu^2 - 1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}_{|r=R} \right) \mu \, \mathrm{d}\mu, \\ &= -2\pi R \rho_0 U \int_{-1}^{1} \left(\mu^2 - 1\right) \frac{\partial \phi}{\partial \mu}_{|r=R} \mu \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Comme précédemment, ce terme est évalué en considérant h constant dans l'expression (3.22) du potentiel de vitesse. L'influence du déplacement de l'objet sur F_{rad} n'est donc prise en compte qu'à travers la vitesse de déplacement de l'objet U. Une intégration par partie combinée à la propriété (3.31) des polynômes de Legendre conduit à :

$$\begin{aligned} F_U &= -2\pi R \rho_0 U \left(\underbrace{\left[(\mu^2 - 1)\mu\phi \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \underbrace{(3\mu^2 - 1)}_{=2\mathcal{P}_2(\mu)} \phi \, \mathrm{d}\mu \right), \\ &= 4\pi R \rho_0 U \int_{-1}^{1} \mathcal{P}_2(\mu) \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{R}_{n,\,i}(R) \mathcal{P}_n(\mu) \right] + \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{S}_{n,\,i}(R) \mathcal{P}_n(\mu) \right] \right] \mathrm{d}\mu, \\ &= \frac{8}{5} \pi R \rho_0 U \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \mathcal{R}_{2,\,i}(R) + \sin\Phi_i \mathcal{S}_{2,\,i}(R) \right]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Le principe fondamental de la dynamique indique :

$$F_{rad} = -2\pi R^2 \int_{-1}^{1} p' \mu \, \mathrm{d}\mu = m_s \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \tag{3.35}$$

avec $m_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1$ la masse de la sphère [3]. Afin de formuler la vitesse de déplacement de la sphère U, King [78] affirme qu'il est suffisant de ne considérer que le terme d'ordre 1 des fluctuations de pression (3.10). L'équation (3.35) conjuguée à la propriété des polynômes de Legendre (3.31) devient alors :

$$\begin{aligned} U &= -\frac{2\pi R^2 \rho_0}{m_s} \int_{-1}^{1} \phi \mu \, \mathrm{d}\mu, \\ &= -\frac{3\eta}{2R} \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{R}_{n,\,i}(R) \mathcal{P}_n(\mu) \right] + \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{S}_{n,\,i}(R) \mathcal{P}_n(\mu) \right] \right] \mu \, \mathrm{d}\mu, \\ &= -\frac{\eta}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \mathcal{R}_{1,\,i}(R) + \sin\Phi_i \mathcal{S}_{1,\,i}(R) \right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

3. Selon Lamb [84], puisque la sphère est en mouvement, un terme supplémentaire s'ajoute au potentiel de vitesse : $\phi_s = UR^3 \cos\theta/(2r^2)$. Une fois intégré sur la surface de la sphère, ce terme donne lieu à une force $F_s = -m'_s \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ dans l'équation (3.35). Dans ce cas, $m'_s = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0$ peut être vue comme une masse ajoutée à la masse de la sphère. Cependant, puisque $\rho_0 \ll \rho_1$ dans le cas d'une goutte liquide dans un milieu gazeux, cette masse ajoutée peut être négligée ici.

On obtient alors finalement :

$$\boxed{F_U = -\frac{8}{5}\pi\rho_0\eta \sum_{i=1}^{N_h}\left[\cos\Phi_i\mathcal{R}_{1,\,i}(R) + \sin\Phi_i\mathcal{S}_{1,\,i}(R)\right]\sum_{i=1}^{N_h}\left[\cos\Phi_i\mathcal{R}_{2,\,i}(R) + \sin\Phi_i\mathcal{S}_{2,\,i}(R)\right].} \tag{3.37}$$

Contrairement à F_l, la composante F_U contient des termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation analytique de F_ϕ

Le terme F_ϕ de l'équation (3.29) est un terme d'ordre 2 issu des fluctuations de la densité d'énergie potentielle acoustique. En décomposant le potentiel de vitesse selon les contributions des différents harmoniques, on a :

$$F_\phi = -\frac{\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{i=1}^{N_h}\dot{\phi}_i^{\,2} + 2\sum_{1\le i<j\le N_h}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j\right)\mu\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.38}$$

D'après l'équation (3.28), il est possible de considérer avec une précision d'ordre 2 :

$$\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j \approx \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}t}, \tag{3.39}$$

ce qui donne lieu à :

$$F_\phi = \underbrace{-\frac{\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{N_h}\left(\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}_{|r=R}\right)^2\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_{\phi 1}}\underbrace{-\frac{2\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left(\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}_{|r=R}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}t}_{|r=R}\right)\mu\,\mathrm{d}\mu}_{F_{\phi 2}}. \tag{3.40}$$

Si l'on considère, tout comme pour le terme F_l, que l'influence du déplacement de l'objet sur F_ϕ est négligeable, le développement de ϕ selon l'équation (3.22) conduit à :

$$\begin{aligned} F_{\phi 1} = &-\frac{\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\cos^2\Phi_i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu)\right)^2\right]\mu\,\mathrm{d}\mu \\ &-\frac{\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\sin^2\Phi_i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu)\right)^2\right]\mu\,\mathrm{d}\mu \\ &+\frac{2\pi R^2\rho_0}{c_0^2}\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\cos\Phi_i\sin\Phi_i\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{m,\,i}(R)\mathcal{P}_m(\mu)\right]\mu\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.41}$$

D'après la définition des polynômes de Legendre, il peut être démontré que :

$$\int_{-1}^{1}\mathcal{P}_n(\mu)\mathcal{P}_m(\mu)\mu\,\mathrm{d}\mu = \begin{cases}\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \mathcal{B}_n & \text{si} \quad m = n+1, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.42}$$

Par conséquent, en posant $\alpha_i = k_{ac,\,i}R$, $F_{\phi 1}$ devient :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\phi 1} \;=\; & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) \right] \\ & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \sin^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) \right] \\ & +\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos\Phi_i \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,i}(R) \Big) \right]. \end{aligned}} \tag{3.43}$$

$F_{\phi 1}$ est donc la somme des contributions d'ordre 2 de chaque harmonique liées aux fluctuations de la densité d'énergie potentielle acoustique.

En ce qui concerne le terme $F_{\phi 2}$ de l'équation (3.40), le développement du potentiel de vitesse selon les contributions des différents modes acoustiques donne :

$$\begin{aligned} F_{\phi 2} \;=\; & -\; \frac{2\pi R^2 \rho_0}{c_0^2} \int_{-1}^{1} \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\omega_i\omega_j \cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{m,\,j}(R)\mathcal{P}_m(\mu) \right] \mu\,\mathrm{d}\mu \\ & -\; \frac{2\pi R^2 \rho_0}{c_0^2} \int_{-1}^{1} \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\omega_i\omega_j \sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}_{m,\,j}(R)\mathcal{P}_m(\mu) \right] \mu\,\mathrm{d}\mu \\ & +\; \frac{2\pi R^2 \rho_0}{c_0^2} \int_{-1}^{1} \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\omega_i\omega_j \cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}_{m,\,j}(R)\mathcal{P}_m(\mu) \right] \mu\,\mathrm{d}\mu \\ & +\; \frac{2\pi R^2 \rho_0}{c_0^2} \int_{-1}^{1} \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\omega_i\omega_j \sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{P}_n(\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{m,\,j}(R)\mathcal{P}_m(\mu) \right] \mu\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.44}$$

D'après la propriété du polynôme de Legendre (3.42), on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\phi 2} \;=\; & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\ & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\ & +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\ & +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right]. \end{aligned}} \tag{3.45}$$

Contrairement à $F_{\phi 1}$, la composante $F_{\phi 2}$ représente les termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation analytique de F_q

Le terme F_q de l'équation (3.29) est un terme d'ordre 2 issu des fluctuations de la densité d'énergie cinétique acoustique. L'expression de q^2 en coordonnées sphériques est :

$$\begin{aligned} q^2 &= \|-\boldsymbol{\nabla}\phi\|^2, \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.46}$$

En utilisant cette formulation et la condition à la limite (3.19), le terme F_q de l'équation (3.29) devient :

$$\begin{aligned} F_q &= \pi R^2 \rho_0 \int_{-1}^{1} \left[U^2 \mu^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}_{|r=R} \right)^2 \right] \mu \, \mathrm{d}\mu, \\ &= \pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu}_{|r=R} \right)^2 (1-\mu^2) \mu \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.47}$$

En décomposant le potentiel de vitesse selon les contributions de chaque mode acoustique, on a :

$$\begin{aligned} F_q = & \underbrace{\pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N_h} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \mu}_{|r=R} \right)^2 (1-\mu^2) \mu \, \mathrm{d}\mu}_{F_{q1}} \\ & \underbrace{+ 2\pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{1 \le i < j \le N_h} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \mu}_{|r=R} \frac{\partial \phi_j}{\partial \mu}_{|r=R} \right] (1-\mu^2) \mu \, \mathrm{d}\mu}_{F_{q2}} . \end{aligned} \tag{3.48}$$

D'après l'équation (3.22), le terme F_{q1} peut être reformulé :

$$\begin{aligned} F_{q1} = & \pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos^2 \Phi_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \right)^2 \right] (1-\mu^2) \, \mu \, \mathrm{d}\mu \\ + & \pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sin^2 \Phi_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \right)^2 \right] (1-\mu^2) \, \mu \, \mathrm{d}\mu \\ + & 2\pi \rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos \Phi_i \sin \Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{m,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} \right] (1-\mu^2) \, \mu \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.49}$$

D'après la définition des polynômes de Legendre, il est possible de démontrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} (1-\mu^2) \mu \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} \dfrac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} = \mathcal{A}_n & \text{si} \quad m = n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.50}$$

Le terme F_{q1} s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{q1} = & 2\pi \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos^2 \Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \mathcal{R}_{n,\,i}(R) \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) \right] \\ + & 2\pi \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sin^2 \Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \mathcal{S}_{n,\,i}(R) \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) \right] \\ + & 2\pi \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos \Phi_i \sin \Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R) \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) \mathcal{S}_{n,\,i}(R) \Big) \right]. \end{aligned}} \tag{3.51}$$

F_{q1} est donc la somme des contributions d'ordre 2 de chaque harmonique liées aux fluctuations de la densité d'énergie cinétique acoustique.

En ce qui concerne le terme F_{q2} de l'équation (3.48), le développement de ϕ selon les contributions des différents modes acoustiques donne :

$$\begin{aligned}
F_{q2} \quad = \quad & 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[[\cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}_{m,\,j}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} \right] \left(1-\mu^2\right) \mu \, \mathrm{d}\mu \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[[\sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{m,\,j}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} \right] \left(1-\mu^2\right) \mu \, \mathrm{d}\mu \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[[\cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_{m,\,j}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} \right] \left(1-\mu^2\right) \mu \, \mathrm{d}\mu \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[[\sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}_{m,\,j}(R) \frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial \mu} \right] \left(1-\mu^2\right) \mu \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

D'après la propriété des polynômes de Legendre (3.50), on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}
F_{q2} \quad = \quad & 2\pi\rho_0 \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[\cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[\sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[\cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
+ \quad & 2\pi\rho_0 \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left[\sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right].
\end{aligned}} \tag{3.53}$$

Contrairement à F_{q1}, la composante F_{q2} représente les termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation complète de F_{rad}

Puisque l'on a considéré tout au long de ce chapitre le terme h constant dans l'expression du potentiel de vitesse, on obtient au final le système d'équations suivant qui n'est valable que pour des vitesses de déplacement faibles de l'objet considéré :

Système d'équations (3.54)

$$F_{rad} = F_l + F_U + F_{\phi 1} + F_{\phi 2} + F_{q1} + F_{q2},$$

$$F_l = \frac{4}{3}\pi R^2 \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \omega_i \left[\sin\Phi_i \mathcal{R}_{1,\,i}(R) - \cos\Phi_i \mathcal{S}_{1,\,i}(R) \right],$$

$$F_U = -\frac{8}{5}\pi\rho_0\eta \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \mathcal{R}_{1,\,i}(R) + \sin\Phi_i \mathcal{S}_{1,\,i}(R) \right] \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \mathcal{R}_{2,\,i}(R) + \sin\Phi_i \mathcal{S}_{2,\,i}(R) \right],$$

$$
\begin{aligned}
F_{\phi 1} \;=\; & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) \right] \\
& -\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \sin^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos\Phi_i \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,i}(R) \Big) \right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\phi 2} \;=\; & -\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& -\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\alpha_i\alpha_j \sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{q1} \;=\; & \quad 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sin^2\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos\Phi_i \sin\Phi_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,i}(R) \Big) \right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{q2} \;=\; & \quad 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\cos\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\sin\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\cos\Phi_i \sin\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{S}_{n,\,j}(R) \Big) \right] \\
& +\; 2\pi\rho_0 \sum_{1\le i<j\le N_h} \left[\sin\Phi_i \cos\Phi_j \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \Big(\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,j}(R) + \mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\mathcal{R}_{n,\,j}(R) \Big) \right].
\end{aligned}
$$

3.3.2 Formulation de la force de radiation acoustique moyenne

Comme précisé précédemment, c'est en général la moyenne temporelle de la force de radiation acoustique qui est considérée dans la littérature. Celle-ci est définie par :

$$
\langle F_{rad} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T F_{rad}\, \mathrm{d}t, \tag{3.55}
$$

où T est la période acoustique, également définie comme l'inverse de la fréquence d'oscillation. Dans le cas présent, où plusieurs harmoniques de fréquence $f_{ac,\,i} = i f_{ac,\,1}$ sont considérés, la période de moyenne

T est la période acoustique la plus élevée, *i.e.* $T = T_{ac,\,1}$. D'après le système (3.54), la moyenne temporelle de la force de radiation acoustique peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\langle F_{rad}\rangle_T &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(F_l + F_U + F_\phi + F_q\right)\,\mathrm{d}t, && (3.56)\\ &= \langle F_l\rangle_T + \langle F_U\rangle_T + \langle F_{\phi 1}\rangle_T + \langle F_{\phi 2}\rangle_T + \langle F_{q1}\rangle_T + \langle F_{q2}\rangle_T. && (3.57)\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque chaque mode acoustique constitue un harmonique du mode principal de fréquence $f_{ac,\,1}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos\Phi_i \cos\Phi_j\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \frac{\cos\left((\omega_i-\omega_j)t+\psi_i-\psi_j\right)+\cos\left((\omega_i+\omega_j)t+\psi_i+\psi_j\right)}{2}\,\mathrm{d}t,\\ &= \begin{cases}\dfrac{T}{2} & \text{si} \quad i=j,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} && (3.58)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin\Phi_i \sin\Phi_j\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \frac{\cos\left((\omega_i-\omega_j)t+\psi_i-\psi_j\right)-\cos\left((\omega_i+\omega_j)t+\psi_i+\psi_j\right)}{2}\,\mathrm{d}t,\\ &= \begin{cases}\dfrac{T}{2} & \text{si} \quad i=j,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} && (3.59)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos\Phi_i \sin\Phi_j\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \frac{\sin\left((\omega_i+\omega_j)t+\psi_i+\psi_j\right)-\sin\left((\omega_i-\omega_j)t+\psi_i-\psi_j\right)}{2}\,\mathrm{d}t,\\ &= 0, && (3.60)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin\Phi_i \cos\Phi_j\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \frac{\sin\left((\omega_i+\omega_j)t+\psi_i+\psi_j\right)+\sin\left((\omega_i-\omega_j)t+\psi_i-\psi_j\right)}{2}\,\mathrm{d}t,\\ &= 0. && (3.61)\end{aligned}$$

On obtient alors au final :

$$\boxed{\langle F_l\rangle_T = 0,} \tag{3.62}$$

$$\boxed{\langle F_U\rangle_T = -\frac{4}{5}\pi\rho_0\eta\sum_{i=1}^{N_h}\left[\mathcal{R}_{1,\,i}(R)\mathcal{R}_{2,\,i}(R)+\mathcal{S}_{1,\,i}(R)\mathcal{S}_{2,\,i}(R)\right],} \tag{3.63}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle F_{\phi 1}\rangle_T &= -\pi\rho_0\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\right]\\ &\quad -\pi\rho_0\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\right],\end{aligned}} \qquad \boxed{\langle F_{\phi 2}\rangle_T = 0,} \tag{3.64}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle F_{q1}\rangle_T &= \pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n\mathcal{R}_{n,\,i}(R)\mathcal{R}_{n+1,\,i}(R)\right] \\ &+ \pi\rho_0 \sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n\mathcal{S}_{n,\,i}(R)\mathcal{S}_{n+1,\,i}(R)\right],\end{aligned}} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle F_{q2}\rangle_T = 0.} \tag{3.65}$$

D'après ces résultats, la déviation moyenne de l'objet par le mécanisme de radiation acoustique provient uniquement des termes d'ordre 2 de l'équation (3.10). De plus, les termes de couplage entre harmoniques s'annulent. En conséquence, la force moyenne exercée sur l'objet sphérique est la somme des contributions moyennes de chaque harmonique isolé.

Dans le cas mono-harmonique, il est possible de simplifier les expressions en omettant la notation i relative aux harmoniques. Dans ce cas, si l'on note $\alpha = k_{ac}R$, la formulation tronquée proposée par Ficuciello [51] pour $n \in [0, 2]$ est bien retrouvée :

$$\langle F_{rad}\rangle_T = \pi\rho_0\left[\frac{4}{5}\Big(\mathcal{R}_1(R)\mathcal{R}_2(R) + \mathcal{S}_1(R)\mathcal{S}_2(R)\Big)\left(1-\eta-\frac{\alpha^2}{3}\right) - \frac{2}{3}\alpha^2\Big(\mathcal{R}_0(R)\mathcal{R}_1(R) + \mathcal{S}_0(R)\mathcal{S}_1(R)\Big)\right]. \tag{3.66}$$

D'après King [78], l'erreur relative sur la valeur de la force de radiation acoustique moyenne engendrée par cette troncature est inférieure à 0.1% lorsque $\alpha = 1$. En ce qui concerne la pression de radiation acoustique autour d'un cylindre, Ficuciello [51] démontre également par une étude de convergence détaillée que l'erreur de troncature est inférieure à 2% lorsque $\alpha < 0.4$. Cette approximation semble donc raisonnable dans le cas d'une sphère dont le rayon est nettement inférieur à la longueur d'onde acoustique ($\alpha \ll 1$). Dans ce cas, il est possible de considérer $\mathcal{H}_n^2(\alpha) \approx \mathcal{F}_n^2(\alpha)$ et les simplifications suivantes peuvent être réalisées :

$$\left\{\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{\alpha^{2n+1}}, \\ g_n(\alpha) &= \frac{1}{1\times 3\times\ldots\times(2n+1)}. \end{aligned}\right. \tag{3.67}$$

On retient alors dans ce cas :

$$\left\{\begin{aligned} &f_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3} \quad ; \quad f_2(\alpha) = \frac{3}{\alpha^5} \quad ; \quad f_3(\alpha) = \frac{15}{\alpha^7}, \\ &g_1(\alpha) = \frac{1}{3} \quad ; \quad g_2(\alpha) = \frac{1}{15} \quad ; \quad g_3(\alpha) = \frac{1}{105}, \end{aligned}\right. \tag{3.68}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \quad ; \quad \mathcal{F}_1(\alpha) = \frac{2+\eta}{\alpha^3} \quad ; \quad \mathcal{F}_2(\alpha) = \frac{9}{\alpha^5}, \\ &\mathcal{G}_0(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3} \quad ; \quad \mathcal{G}_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{15} - \frac{1-\eta}{3} \quad ; \quad \mathcal{G}_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{105} - \frac{2}{15}, \end{aligned}\right. \tag{3.69}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{R}_0(R) = A\cos(k_{ac}h) \quad ; \quad \mathcal{S}_0(R) = -\frac{\alpha^3}{3}A\cos(k_{ac}h), \\ &\mathcal{R}_1(R) = -\frac{3\alpha}{2+\eta}A\sin(k_{ac}h) \quad ; \quad \mathcal{S}_1(R) = \frac{\alpha^6 - 5(1-\eta)\alpha^4}{5(2+\eta)^2}A\sin(k_{ac}h), \\ &\mathcal{R}_2(R) = -\frac{5\alpha^2}{9}A\cos(k_{ac}h) \quad ; \quad \mathcal{S}_2(R) = \frac{\alpha^9 - 14\alpha^7}{1701}A\cos(k_{ac}h). \end{aligned}\right. \tag{3.70}$$

Ainsi, comme il l'a été démontré par King [78], la force de radiation acoustique moyenne dans un cas mono-harmonique où $\alpha \ll 1$ s'écrit :

$$\langle F_{rad}\rangle_T = \pi\rho_0 A^2\alpha^3\sin(2k_{ac}h)\frac{1+\frac{2}{3}(1-\eta)}{2+\eta}. \tag{3.71}$$

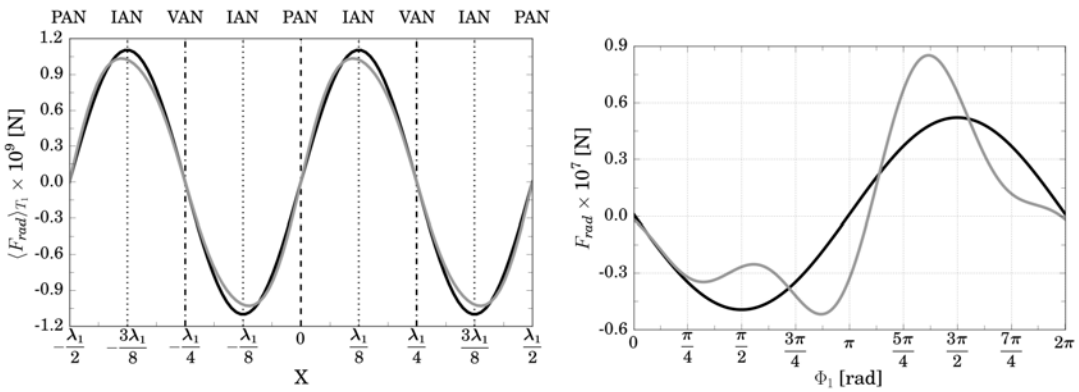
3.3.3 Démonstration de l'intérêt de la formulation multi-harmonique

L'intérêt de la formulation multi-harmonique (3.54) est démontré ici pour le cas particulier du point de fonctionnement PF-Onera simulé en troisième partie de mémoire. On considère ici une goutte d'eau dans un milieu ambiant constitué uniquement d'air ($\eta = 1.2 \times 10^{-3}$). Le rayon de la goutte $R = 50\,\mu$m est représentatif de la taille caractéristique des gouttes issues de l'atomisation primaire du jet liquide. Pour cette démonstration, nous comparons les forces de radiation évaluées pour deux ondes acoustiques, l'une mono- et l'autre multi-harmonique. La moyenne temporelle de la force de radiation est évaluée selon la position de la goutte le long de l'axe acoustique (noté *a.a.*) grâce à l'équation (3.57), tandis que son évolution temporelle en un ventre d'intensité (IAN) est évaluée à l'aide du système (3.54). Les propriétés acoustiques de chacune des ondes sont présentées dans le tableau 3.3. L'amplitude de fluctuation de pression pour l'onde mono-harmonique est évaluée de manière à conserver l'énergie acoustique E_{ac} de l'onde multi-harmonique ($E_{ac} \propto \sum_i p'^2_{rms,\,i}$ avec $p'_{rms,\,i}$ la valeur efficace des fluctuations de pression de chaque mode i). L'évolution de la valeur moyenne de la force de radiation acoustique $\langle F_{rad} \rangle_T$ selon la position de la goutte le long de l'axe acoustique est représentée en figure 3.2a. D'après celle-ci, la présence de deux harmoniques supplémentaires induit un écart relatif maximal de 9% en $X = 3\lambda_1/20$, *i.e.* entre un IAN et un VAN. La figure 3.2b représente quant à elle l'évolution temporelle de la force au cours d'une période acoustique pour une goutte située en un IAN du champ acoustique, soit la position d'injection retenue pour la simulation réalisée en partie III. On voit sur cette figure que F_{rad} est fortement influencée par la présence des deux harmoniques supplémentaires, avec un écart relatif maximal significatif de 74% pour $\Phi_1 = 4\pi/3$. On comprend alors l'importance de considérer ces harmoniques lors de l'évaluation des contraintes acoustiques exercées sur la phase liquide.

	Mono-harmonique	Multi-harmonique*		
Mode i	1	1	2	3
Fréquence acoustique $f_{ac,\,i}$ [kHz]	≈ 1	≈ 1	≈ 2	≈ 3
Amplitude de pression acoustique $p_{ac,\,i}$ [Pa]	5 241	5 135	887	555
Phase ψ_i [rad]	π	π	2.3	1.83

Table 3.3 – Propriétés des ondes acoustiques pour la comparaison des formulations mono- et multi-harmoniques de la force de radiation acoustique.

* Se référer au chapitre 6 pour la définition de cette excitation acoustique.



(a) (b)

Figure 3.2 – Comparaison des formulations mono- et multi-harmoniques de la force de radiation acoustique (a) moyenne le long de l'*a.a.* et (b) instantanée en un IAN. ▬ Formulation mono-harmonique, ▬ formulation multi-harmonique.

Chapitre 4

Excitation et propagation d'ondes acoustiques planes avec le code CEDRE

La force de radiation acoustique exercée sur une goutte a été formulée au chapitre 3 selon un formalisme multi-harmonique adapté à la présence de fortes non-linéarités acoustiques. Le chapitre 4 est quant à lui consacré à la validation de la simulation d'ondes acoustiques stationnaires de haute amplitude avec le code Cedre. Dans un premier temps, la propagation non linéaire d'une onde acoustique à travers un guide d'onde est simulée et comparée à la solution analytique. Une méthode d'excitation acoustique pour imposer une onde stationnaire dans une cavité est ensuite proposée et validée. Les éléments traités dans ces deux chapitres nous conduiront ensuite, au chapitre 5, à évaluer la capacité du code à restituer les effets de la pression de radiation acoustique sur la phase liquide.

Sommaire

4.1 Solution analytique de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane . . . 100
4.2 Validation de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane par le code Cedre . . . 101
4.3 Validation de la méthode d'excitation pour imposer une onde acoustique stationnaire avec le code Cedre . . . 103

4.1 Solution analytique de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane

Dans les moteurs-fusées à ergols liquides, les niveaux acoustiques sont suffisamment élevés pour conduire à la déformation des ondes lors de leur propagation. Ce mécanisme, décrit en détail notamment par Goursolle [60], est illustré en figure 4.1 pour une onde progressive initialement de forme sinusoïdale. L'onde acoustique est composée d'une phase de détente ($p' < 0$) et d'une phase de compression ($p' > 0$). Lorsque l'amplitude des oscillations de pression est élevée, la variation de température du milieu associée conduit à une variation de la vitesse du son non négligeable autour de sa valeur à l'équilibre c_0. La phase de compression, associée à une augmentation locale de la température, va ainsi se propager à une vitesse plus importante que la phase de détente. On assiste alors à une déformation de l'onde au cours de sa propagation jusqu'à une distance donnée L_{choc} à partir de laquelle se forme un choc dit faible. Cette distance peut être calculée comme (Blackstock [10]) :

$$L_{choc} = \frac{\rho_0 c_0^3}{\omega \beta p_{ac}}, \tag{4.1}$$

pour des fluctuations de pression initiales d'amplitude p_{ac}, de fréquence f_{ac} et de pulsation $\omega = 2\pi f_{ac}$, et avec ρ_0 la masse volumique du milieu dans lequel l'onde se propage, c_0 la vitesse du son à l'équilibre et β le coefficient de non-linéarité. Pour un gaz parfait, ce dernier s'écrit $\beta = (\gamma + 1)/2$, avec γ l'indice adiabatique. Au-delà de la distance de formation du choc, celui-ci s'amortit progressivement. Dans l'espace spectral, où l'onde peut être décomposée en une série de Fourier, cette déformation conduit à un transfert progressif de l'énergie acoustique des petites vers les hautes fréquences. Or, il a été démontré dans le chapitre 3 que la présence de multiples harmoniques acoustiques pouvait impacter de façon significative la force de radiation acoustique exercée sur la phase liquide. Il est alors essentiel, dans le cadre de cette étude, de vérifier que la propagation non linéaire d'ondes acoustiques est bien restituée par le code Cedre.

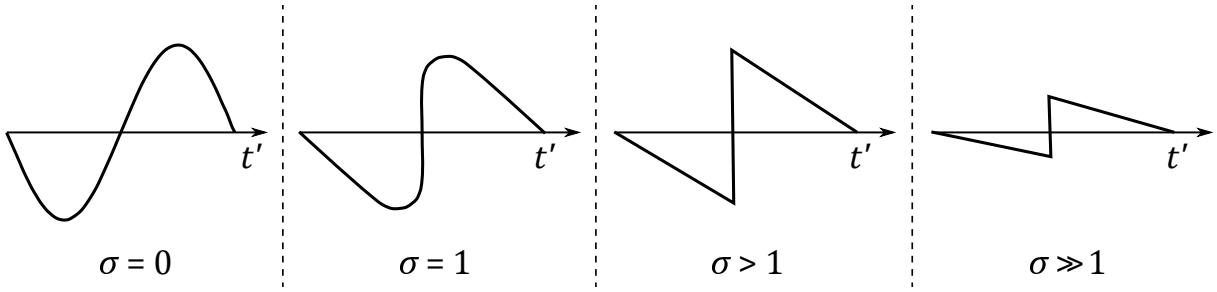


Figure 4.1 – Illustration de la déformation d'une onde plane de haute amplitude par les non-linéarités acoustiques (Blackstock [10]). $\sigma = X/L_{choc}$, $t' = t - X/c_0$.

Pour effectuer cette validation, l'approche suivie est tirée des travaux de Langenais *et al.* [86]. Celle-ci consiste à simuler la propagation d'une onde acoustique plane de haute amplitude initialement sinusoïdale et à comparer sa déformation à la solution analytique de Blackstock [10] formulée pour un fluide parfait. Selon cette formulation, les fluctuations de pression après un temps t et à une distance X de la source acoustique s'expriment :

$$p'(X,t) = p_{ac} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left[n\left(\omega t - k_{ac} X\right)\right], \tag{4.2}$$

avec

$$B_n = \frac{2}{n\pi} V_b + \frac{2}{n\pi\sigma} \int_{\sigma V_b}^{\pi} \cos\left[n\left(\Phi - \sigma \sin \Phi\right)\right] \mathrm{d}\Phi \qquad \text{et} \qquad V_b = \sin\left(\sigma V_b\right), \tag{4.3}$$

où $k_{ac} = \omega/c_0$ est le nombre d'onde acoustique, V_b représente l'amplitude du choc et $\sigma = X/L_{choc}$. Dans la zone précédant la formation du choc ($\sigma < 1$), l'auteur démontre que cette formulation est équivalente à la solution analytique de Fubini exprimée comme :

$$p'(X,t) = p_{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) \sin\left[n\left(\omega t - k_{ac}X\right)\right], \tag{4.4}$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. En revanche, dès lors que le choc est pleinement formé et présente un amortissement suffisant ($\sigma > 3.5$), la formulation (4.2) tend vers la solution analytique de Fay [47] qui s'écrit :

$$p'(X,t) = p_{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1+\sigma)} \sin\left[n\left(\omega t - k_{ac}X\right)\right]. \tag{4.5}$$

Notons qu'il est possible de tenir compte de l'amortissement de l'onde par la viscosité du milieu en considérant une décroissance exponentielle des coefficients B_n au cours de la propagation de l'onde.

4.2 Validation de la propagation non linéaire d'une onde acoustique plane par le code Cedre

On simule ici la propagation d'une onde acoustique de haute amplitude au sein d'un guide d'onde parallélépipédique (cf. figure 4.2). L'excitation acoustique est réalisée en imposant une oscillation de pression sinusoïdale continue à la condition à la limite d'entrée du domaine à une fréquence de 1 kHz caractéristique des fréquences en jeu en présence d'instabilités thermoacoustiques dans les moteurs-fusées. Le niveau acoustique imposé est quant à lui initialement de 168 dB afin d'assurer la déformation de l'onde au cours de sa propagation. Par ailleurs, puisque ce sont les modes propres de la chambre de combustion qui sont amplifiés en présence d'instabilités thermoacoustiques, la propagation de l'onde est étudiée ici sur une longueur égale à la longueur d'onde λ_1 du mode excité. En aval du domaine de calcul, une condition à la limite de non-réflexion à pression imposée p_{atm} permet de laisser sortir l'onde. Un coefficient de réflexion $|R| \leq 10^{-3}$ est imposé pour toute onde acoustique de fréquence supérieure à 1 kHz. La méthode de non-réflexion utilisée est basée sur une relaxation des états à la limite (cf. annexe F pour une description des conditions aux limites de non-réflexion). Dans le cas présent, le coefficient de relaxation σ_{rel} associé vaut environ 10^{-7}. Les conditions aux limites latérales sont quant à elles des conditions de glissement (viscosité et vitesse normale à la limite nulles) afin de s'affranchir des effets de parois.

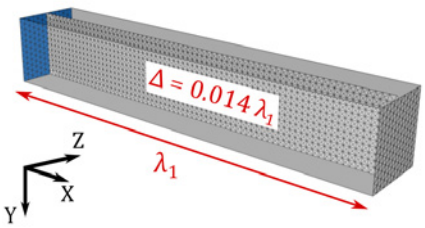


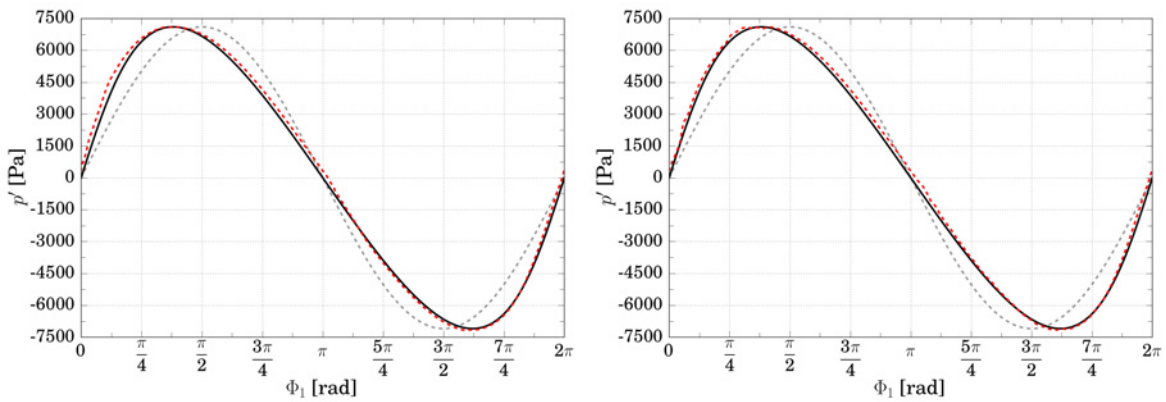
Figure 4.2 – Représentation 3D du domaine de calcul et de sa discrétisation spatiale. ■ Condition à la limite d'excitation acoustique.

D'après la formulation théorique (4.2) de Blackstock [10], la déformation de l'onde à cette distance est telle que 99.97% de l'énergie acoustique est contenue dans la gamme de fréquence [1 kHz, 3 kHz], soit les trois premiers modes acoustiques. Afin de minimiser la dissipation numérique de l'onde lors de son déplacement, la discrétisation spatiale du domaine est alors définie de façon à assurer une fréquence de

coupure f_c supérieure à 3 kHz. D'après les travaux de Langenais *et al.* [85], un minimum de 20 points par longueur d'onde (PPW = 20) est nécessaire pour discrétiser une onde acoustique avec le code Cedre à l'ordre 2. Après application d'une marge de précaution de 20%, la taille des cellules est imposée ici à $\Delta = 0.014\,\lambda_1$, soit une fréquence de coupure $f_c = 3\,600$ Hz. [1]

Deux schémas de flux ont été mentionnés en section 2.2.4 pour l'évaluation des flux convectifs entre chaque cellule du maillage, à savoir les schémas HLLC et HLLC-BM pour les écoulements à faible nombre de Mach (cf. annexe C pour plus de précisions sur ces schémas). Ces deux schémas sont comparés ici de manière à déterminer lequel des deux est le plus adapté pour la simulation d'un jet diphasique sous excitation acoustique de haute amplitude. Les fluctuations de pression à une distance λ_1 de la source acoustique sont tracées en figure 4.3 pour les deux schémas de flux. La déformation de l'onde par les non-linéarités acoustiques y est clairement visible, avec un décalage des extremums de pression par rapport à la sinusoïde de départ caractéristique du différentiel de vitesse du son entre les phases de compression et de détente. Notons cependant qu'aucun choc n'apparaît puisque, dans ce cas précis, la longueur de formation de choc reste supérieure à la longueur d'onde λ_1 pour des niveaux acoustiques inférieurs à 176 dB environ (cf. équation (4.1)). Une correspondance quasi parfaite entre les deux profils et la solution analytique (4.2) est retrouvée, avec un écart relatif maximal de 0.4% de l'amplitude de fluctuations en $\Phi_1 = \pi$ pour les deux schémas de flux.

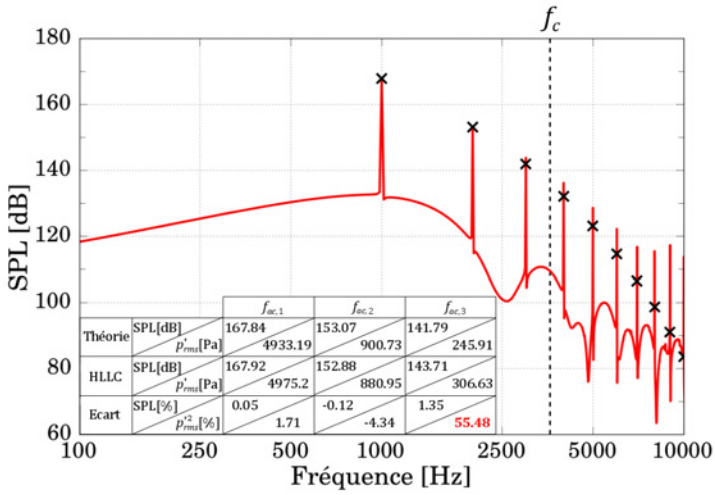
Dans l'espace spectral, la comparaison des niveaux acoustiques des trois premiers modes à la solution analytique est effectuée en figure 4.4. Celle-ci révèle un écart relatif croissant avec la fréquence considérée. Quel que soit le schéma retenu, cet écart est maximal pour le troisième mode, avec une valeur de 1.35% pour le schéma HLLC et de seulement 0.21% pour le schéma HLLC-BM. Au-delà de la fréquence de coupure, les écarts à la théorie sont évidemment plus importants mais ne représentent qu'une infime part de l'énergie acoustique du signal. Malgré les faibles écarts enregistrés, rappelons que l'échelle décibel n'est pas linéaire et n'est pas représentative de l'énergie acoustique E_{ac} proportionnelle à $\sum_i p'^2_{rms,\,i}$, avec $p'_{rms,\,i}$ la valeur efficace des fluctuations de pression de chaque mode i. Ainsi, si l'on compare les valeurs de $p'^2_{rms,\,i}$ des simulations à la solution analytique, un écart relatif d'environ 55% est obtenu pour le troisième mode acoustique avec le schéma de flux HLLC contre seulement 7% avec le schéma HLLC-BM. La version bas mach du schéma de flux est donc bien plus précise pour décrire le troisième mode acoustique associé à un faible niveau acoustique et donc à des fluctuations de vitesse également faibles. Cette conclusion doit cependant être modérée puisque le troisième mode acoustique ne contient en réalité que 0.2% de l'énergie acoustique totale du signal. Quoi qu'il en soit, il est démontré ici que la propagation non linéaire d'ondes acoustiques de haute amplitude est correctement reproduite par le code tant que la fréquence de coupure du maillage le permet.



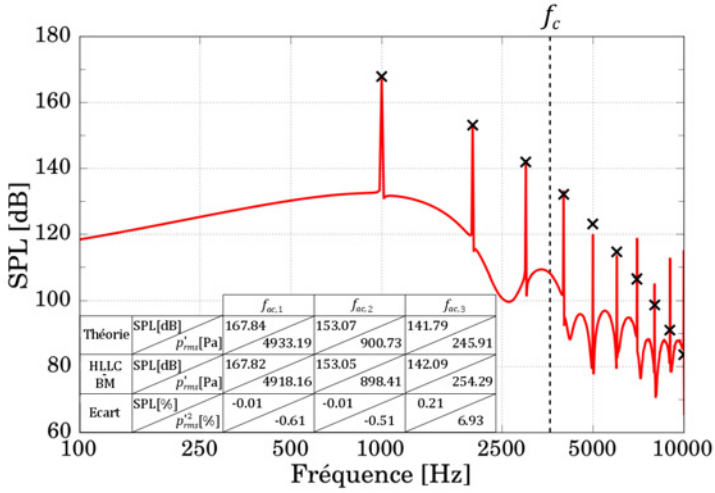
(a) Schéma de flux HLLC **(b) Schéma de flux HLLC-BM**

Figure 4.3 – Fluctuations de pression à une distance λ_1 de la source acoustique : ━ solution analytique, ━ CFD, ━ sinusoïde initiale.

1. La fréquence de coupure est calculée ici comme $f_c = c_0/(PPW\,\Delta)$.



(a) Schéma de flux HLLC



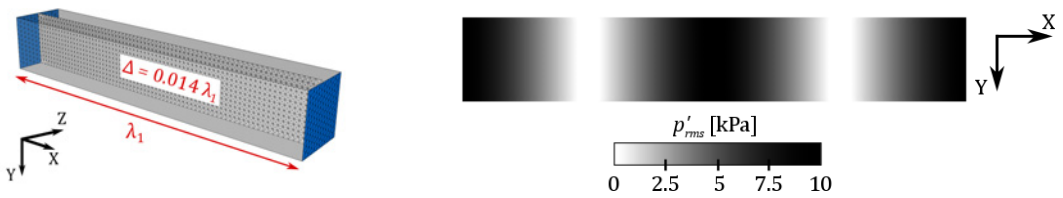
(b) Schéma de flux HLLC-BM

Figure 4.4 – Spectres fréquentiels à une distance λ_1 de la source acoustique : × solution analytique, — CFD.

4.3 Validation de la méthode d'excitation pour imposer une onde acoustique stationnaire avec le code Cedre

La propagation non linéaire d'ondes acoustiques ayant été validée dans la section précédente, l'objectif consiste maintenant à définir une méthode d'excitation acoustique pour imposer une onde stationnaire au sein du domaine de calcul. Une fois validée, cette méthode d'excitation permettra par la suite de réaliser la simulation d'un jet diphasique soumis à un champ acoustique stationnaire de haute amplitude.

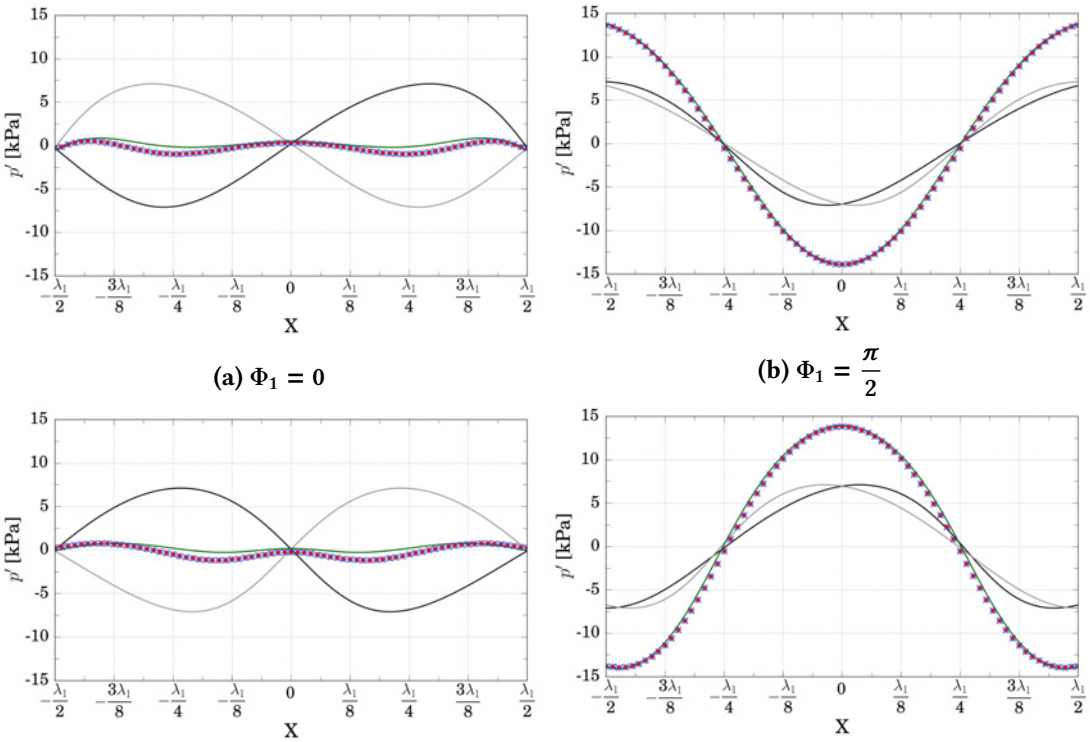
Le guide d'onde utilisé précédemment ainsi que la discrétisation spatiale associée sont conservés pour cette étude. En revanche, la méthode d'excitation proposée ici consiste cette fois à imposer les mêmes fluctuations de pression en amont et en aval du domaine (cf. figure 4.5a). Il s'agit d'une méthode similaire à celle employée par Rey *et al.* [130] permettant d'injecter deux ondes acoustiques progressives de même amplitude et à la même phase au sein du domaine. L'interaction de ces deux ondes conduit à une onde stationnaire d'amplitude égale à la somme des deux ondes progressives, avec des ventres de pression positionnés aux limites d'excitation et au centre du domaine (cf. figure 4.5b). Selon cette méthodologie d'excitation acoustique, une non-réflexion quasi totale des ondes doit être imposée aux



(a) (b)

Figure 4.5 – Représentations (a) de la discrétisation spatiale du domaine de calcul et (b) du champ de p'_{rms}. ■ Conditions aux limites d'excitation acoustique.

conditions aux limites d'excitation (cf. annexe F pour le détail de la stratégie de non-réflexion retenue dans le code Cedre). Pour cela, ces conditions aux limites sont toutes deux associées à un coefficient de réflexion identique au cas précédent ($|R| \leq 10^{-3}$ pour toute onde acoustique de fréquence supérieure à 1 kHz).



(a) $\Phi_1 = 0$ (b) $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$

(c) $\Phi_1 = \pi$ (d) $\Phi_1 = \frac{3\pi}{2}$

Figure 4.6 – Fluctuations de pression le long de l'axe acoustique au cours du temps : ▬ onde entrante théorique à gauche, ▬ onde entrante théorique à droite, ▬ onde stationnaire résultante théorique, × HLLC + HLLC-BM.

Les fluctuations de pression le long du domaine de calcul résultant de deux ondes progressives opposées de 168 dB sont comparées à la solution analytique en figure 4.6 à différents instants pour les deux schémas de flux HLLC et HLLC-BM. La solution analytique est obtenue ici en sommant deux ondes de mêmes amplitude et phase mais de directions de propagation opposées avec la formulation (4.2) de Blackstock [10]. Sur ces figures, la déformation croissante des ondes progressives dans l'espace est bien visible. La présence de multiples harmoniques induites par les non-linéarités acoustiques conduit alors à des fluctuations de pression résultantes non nulles à $\Phi_1 = 0$ et $\Phi_1 = \pi$ et à une onde stationnaire légèrement aplatie par rapport à une sinusoïde pure à $\Phi_1 = \pi/2$ et $\Phi_1 = 3\pi/2$. D'un point de vue quantitatif, l'erreur relative la plus importante est observée aux ventres de vitesse ($X = \pm\lambda_1/4$) et vaut

environ 5% de l'amplitude des fluctuations de pression quel que soit le schéma de flux considéré. Cette erreur est considérée suffisamment faible pour valider la méthode d'excitation acoustique définie ici et l'appliquer dans la suite de l'étude.

Chapitre 5

Simulation des mécanismes de radiation acoustique avec le code CEDRE

La simulation de la propagation non linéaire d'ondes acoustiques de haute amplitude par le code Cedre a été validée au chapitre 4. Dans ce cinquième chapitre, on souhaite à présent évaluer la capacité des deux solveurs SPS et DPS à restituer les mécanismes de radiation acoustique à l'origine de l'aplatissement et de la déviation de structures liquides sous excitation acoustique. Dans le cas du solveur dédié à la simulation des phases séparées, on démontre d'abord l'intérêt d'utiliser un schéma de flux bas Mach pour l'évaluation des flux convectifs lorsque le liquide est soumis à une excitation acoustique transverse. Par la suite, la méthode d'excitation acoustique proposée au chapitre 4 est appliquée à la simulation d'une sphère rigide positionnée en un ventre de vitesse puis d'intensité d'une onde acoustique stationnaire de manière à valider la restitution 1) du profil de pression de radiation acoustique autour de l'objet et 2) de la force résultante. Pour compléter ce chapitre, on s'intéressera à la prise en compte des effets de la pression de radiation acoustique sur la phase dispersée par le DPS. Suite à toutes ces étapes de validation, la partie III de ce mémoire sera dédiée à l'étude du comportement d'un jet liquide atomisé sous excitation acoustique transverse par la simulation numérique.

Sommaire

5.1 Validation du solveur dédié aux phases séparées . . . 108
5.1.1 Choix du schéma numérique pour l'approximation des flux convectifs . . . 108
5.1.2 Restitution du profil de pression de radiation acoustique autour d'un obstacle . 111
5.1.3 Restitution de la force de radiation acoustique . . . 114
5.2 Évaluation et développement du solveur dédié à la phase dispersée . . . 116
5.2.1 Restitution de la fragmentation des gouttes par la pression de radiation acoustique . . . 116
5.2.2 Restitution de la force de radiation acoustique sur les gouttes . . . 118

5.1 Validation du solveur dédié aux phases séparées

5.1.1 Choix du schéma numérique pour l'approximation des flux convectifs

La restitution des mécanismes de radiation acoustique par le SPS dépend avant tout de sa capacité à restituer le profil de pression autour des structures liquides. En présence d'ondes acoustiques dans les moteurs-fusées, les fluctuations de vitesse transverse du gaz sont associées à des nombres de Mach relativement faibles [1] de l'ordre de 10^{-2}. Dans les zones en aval du cœur liquide où la vitesse du co-courant gazeux est réduite mais où subsistent des ligaments, ces faibles valeurs de nombre de Mach peuvent conduire à une dissipation excessive de la part du schéma numérique utilisé par le solveur Navier-Stokes pour l'évaluation des flux convectifs et ainsi détériorer la précision du champ de pression. C'est notamment le cas du schéma de flux HLLC (cf. annexe C). Nous allons ainsi démontrer, dans la suite de ce chapitre, l'intérêt d'utiliser le schéma de flux bas Mach HLLC-BM pour la simulation d'écoulements multiphasiques sous excitation acoustique.

On considère, pour cette démonstration, le cas d'un écoulement 2D stationnaire d'air autour d'un cylindre solide immobile de rayon R symbolisant le jet liquide de nos applications. Pour être représentatif des vitesses acoustiques rencontrées dans les moteurs-fusées, l'écoulement en champ lointain est imposé à un nombre de Mach $M = 10^{-2}$. Puisque l'on s'intéresse ici à la précision des schémas numériques pour l'évaluation des flux convectifs, les termes de diffusion des équations de Navier-Stokes sont ignorés. Cela revient à considérer le fluide parfait et à résoudre les équations d'Euler. Le domaine de calcul associé à cette étude correspond à un carré de longueur $20R$ centré sur le cylindre afin de s'affranchir des effets de bords (cf. figure 5.1). La discrétisation spatiale du domaine comporte une zone de raffinement circulaire de rayon $3R$ autour du cylindre avec une taille caractéristique de cellule $\Delta = 0.067R$ suivie d'une zone de déraffinement progressif jusqu'à une taille $\Delta = 2R$ aux limites du domaine. La direction de l'écoulement est fixée de droite à gauche à l'aide d'une condition à la limite à vitesse imposée à droite et à pression imposée à p_{atm} à gauche. Les conditions aux limites restantes correspondent quant à elles à des conditions de glissement.

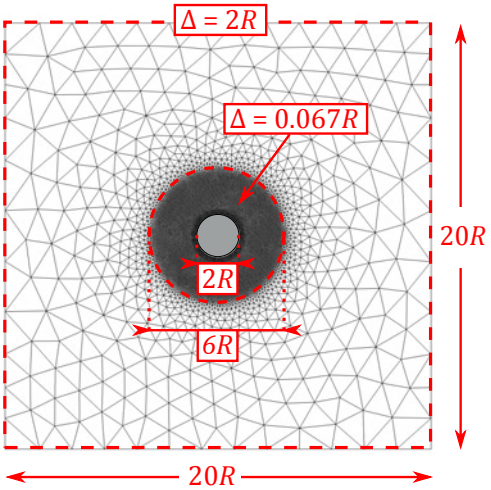


Figure 5.1 – Représentation du domaine de calcul 2D et de sa discrétisation spatiale.

Pour évaluer la précision des schémas de flux considérés, la solution numérique est comparée à la solution analytique formulée dans le cas d'écoulements stationnaires incompressibles ($M < 0.3$). Dans

1. Le nombre de Mach annoncé est évalué pour le point de fonctionnement Vham PF2 pour lequel les gaz à l'équilibre ont une masse volumique proche de $2.5\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et sont associés à une vitesse du son avoisinant $1\,100\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On considère ici des fluctuations de pression de l'ordre de 10% (valeur crête-à-crête) de la pression moyenne de chambre de 26 bar.

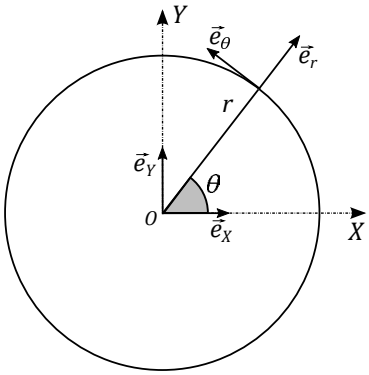


Figure 5.2 – Définition des coordonnées cartésiennes (O, e_X, e_Y) et polaires (O, e_r, e_θ) considérées.

ce cas, la réécriture des équations d'Euler conduit à l'équation de Bernoulli :

$$\begin{aligned} & p + \frac{\rho q^2}{2} = cst \\ \rightarrow \quad & p = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(q_\infty^2 - q^2\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

où p et ρ sont respectivement la pression et la masse volumique du gaz tandis que l'on note $q^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse du gaz. L'indice ∞ représente ici les valeurs en champ lointain. Puisque le fluide ne présente aucune viscosité, l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel ($\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{u} = 0$). Il est alors possible de définir le potentiel de vitesse ϕ tel que $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. Pour le cas particulier du cylindre immobile considéré ici, Lamb [84] formule le potentiel de vitesse en coordonnées polaires (cf. figure 5.2) comme :

$$\phi = q_\infty \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos\theta, \tag{5.2}$$

Les composantes de vitesse du fluide s'écrivent alors :

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = q_\infty \cos\theta\,(\alpha - 1), \tag{5.3}$$

et

$$u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = q_\infty \sin\theta\,(\alpha + 1), \tag{5.4}$$

avec $\alpha = R^2/r^2$. Puisque $q^2 = u_r^2 + u_\theta^2$, les équations (5.1), (5.3) et (5.4) conduisent à formuler le coefficient de pression C_p comme :

$$\begin{aligned} C_p(r,\theta) &= \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho q_\infty^2}, \\ &= 2\alpha\cos(2\theta) - \alpha^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Les isolignes de C_p obtenues avec les deux schémas de flux HLLC et HLLC-BM sont comparées à la solution analytique en figure 5.3. Dans le cas du schéma HLLC, les isolignes issues de l'*extrados* du cylindre sont comprimées par rapport à la solution analytique tandis qu'un crénelage important est observé en aval de l'objet, dans la zone de plus faible vitesse du fluide. Dans le cas du schéma HLLC-BM, les niveaux de C_p sont bien mieux représentés sur l'*extrados* du cylindre et le crénelage en aval de celui-ci est corrigé. Une imprécision persiste cependant en aval de l'objet où le lobe de $C_p = 0.8$ fait défaut. Si l'on compare l'erreur absolue $\Delta C_p = |C_{p,\,num} - C_{p,\,théo}|$ entre la simulation et la théorie en figure 5.4, on

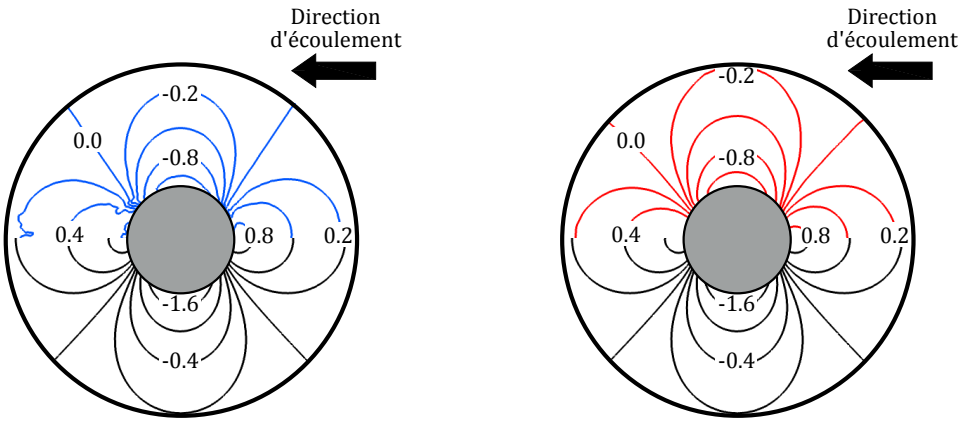


Figure 5.3 – Isolignes de C_p autour du cylindre : — théorie, — HLLC, — HLLC-BM.

voit que les erreurs sont effectivement concentrées sur l'*intrados* et l'*extrados* du cylindre et en aval de celui-ci quel que soit le schéma de flux considéré, avec cependant des niveaux d'erreurs maximaux trois à quatre fois supérieurs dans le cas du schéma HLLC. Dans les deux cas, les imprécisions s'expliquent par la diffusion des schémas de type HLLC. Dans le cas d'un fluide parfait, la vorticité définie comme $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{u}$ est conservée au cours du temps. Puisqu'aucune vorticité n'est injectée en entrée, celle-ci devrait en théorie rester nulle dans l'intégralité du domaine. Seulement, la diffusion des schémas numériques de type HLLC est à l'origine d'une viscosité numérique plus ou moins importante qui contribue à invalider l'hypothèse de fluide parfait. La conservation de la vorticité n'est ainsi plus vérifiée. Dans le cas présent, la figure 5.5 représentant la vorticité au sein du fluide met en évidence une production de vorticité aux parois du cylindre. La vorticité ainsi produite se propage ensuite par convection du fluide et participe à la déviation de la solution par rapport à la solution analytique. Comme nous le montrons en annexe C, le schéma HLLC-BM est basé sur l'introduction d'un terme correctif au sein du schéma HLLC. Ce terme correctif est destiné à s'activer dans les zones à faible nombre de Mach et à dégénérer vers la

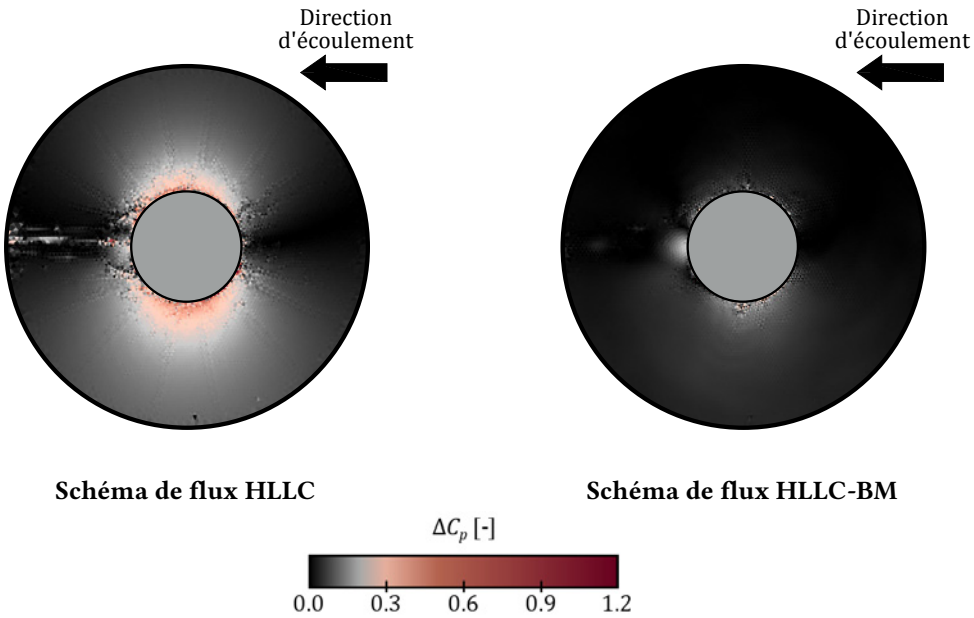


Figure 5.4 – Champ d'erreur absolue $\Delta C_p = |C_{p,\,num} - C_{p,\,théo}|$.

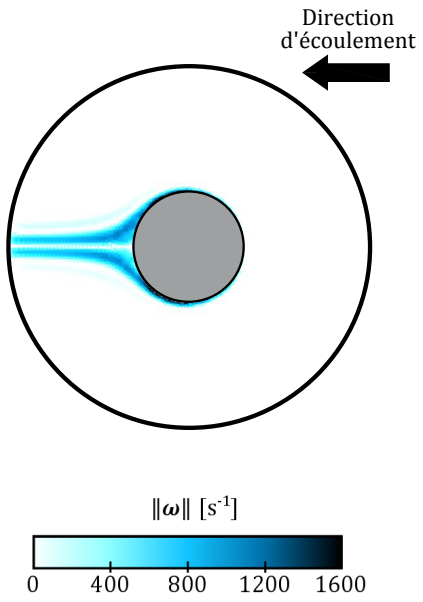


Figure 5.5 – Champ de vorticité autour du cylindre pour le schéma de flux HLLC-BM.

formulation initiale du schéma HLLC lorsque la vitesse du fluide augmente. Grâce à cette correction, le schéma corrigé conduit à une dissipation réduite dans les zones de faible vitesse, d'où le niveau d'erreur réduit.

Il est ainsi démontré que, dans une situation caractéristique de nos cas d'application, le schéma de flux HLLC-BM est plus précis pour décrire le champ de pression autour d'un obstacle tel qu'un jet liquide positionné dans un champ acoustique stationnaire. Associée à la description plus précise de la propagation non linéaire d'ondes acoustiques de haute amplitude démontrée au chapitre 4, cette conclusion conduit à retenir le schéma de flux HLLC-BM dans la suite de ce mémoire.

5.1.2 Restitution du profil de pression de radiation acoustique autour d'un obstacle

Lorsqu'un jet liquide atomisé par un co-courant gazeux est positionné dans un champ acoustique stationnaire, les travaux expérimentaux du Coria (cf. section 1.2) mettent en évidence une déformation potentielle des structures liquides par la pression de radiation acoustique selon leur position et leur taille. Dans ses travaux, Ficuciello [51] formule le profil de p_{rad} autour d'objets cylindriques et sphériques de rayon R symbolisant des structures liquides positionnées dans un champ acoustique stationnaire mono-harmonique en l'absence de viscosité. Dans le cas particulier où la dimension de l'objet est faible devant la longueur d'onde acoustique λ (*i.e.* $\kappa = 2\pi R/\lambda \ll 1$), p_{rad} peut être approchée par les formulations du tableau 5.1. Dans ces expressions, $k_{ac} = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde acoustique, h est la distance entre le centre de l'objet et un PAN du champ acoustique, $\eta = \rho_0/\rho_1$ est le rapport des masses volumiques des deux fluides et θ est la coordonnée angulaire autour de l'objet (cf. figure D.1 pour un objet cylindrique et figure 3.1 pour un objet sphérique). De plus, p^*_{rad} est la pression de radiation acoustique normalisée par le facteur $\overline{P} = p^2_{ac}/(\rho_0 c_0^2)$ qui peut être vu comme le double de l'énergie acoustique moyenne par unité de volume en champ lointain. À titre d'exemple, les profils de $p^*_{rad}(\theta)$ pour des objets cylindriques ou sphériques immobiles situés en un VAN d'un champ acoustique sont reproduits en figure 5.6. On peut voir que la pression de radiation acoustique présente des valeurs minimales négatives dans la direction perpendiculaire à l'axe acoustique ($\theta \equiv \pi/2 \mod \pi$) entraînant une succion à la surface de l'obstacle. D'après Ficuciello [51], dans le cas de structures liquides, si la variation de pression de radiation acoustique autour de l'objet définie comme $\Delta p_{rad} = |p_{rad,\,max} - p_{rad,\,min}|$ dépasse la pression de Laplace due à la tension superficielle, *i.e.* $\Delta p_{Lap} = \sigma/R$ pour un cylindre et $\Delta p_{Lap} = 2\sigma/R$ pour

Objet cylindrique	$p^*_{rad}(\theta) = \dfrac{p_{rad}(\theta)}{\overline{P}}$	$=$	$\dfrac{\cos^2(k_{ac}h)}{4}$
		$+$	$\dfrac{\sin^2(k_{ac}h)}{(1+\eta)^2}\Big(\eta^2\cos^2\theta + (2\eta-1)\sin^2\theta\Big)$
		$-$	$\dfrac{\kappa\sin(2k_{ac}h)}{2(1+\eta)}\Big(\sin\theta\sin(2\theta)(1-\eta)+\cos\theta\Big).$
Objet sphérique	$p^*_{rad}(\theta) = \dfrac{p_{rad}(\theta)}{\overline{P}}$	$=$	$\dfrac{\cos^2(k_{ac}h)}{4}$
		$+$	$\dfrac{9\sin^2(k_{ac}h)}{4(2+\eta)^2}\Big(\eta^2\cos^2\theta + (2\eta-1)\sin^2\theta\Big)$
		$-$	$\dfrac{\kappa\sin(2k_{ac}h)}{4(2+\eta)}\Big(5\sin^2\theta(1-\eta)+3\Big)\cos\theta.$

Table 5.1 – Formulation mono-harmonique du profil de pression de radiation acoustique autour d'objets cylindriques ou sphériques dans un champ acoustique stationnaire sans viscosité (Ficuciello [51]).

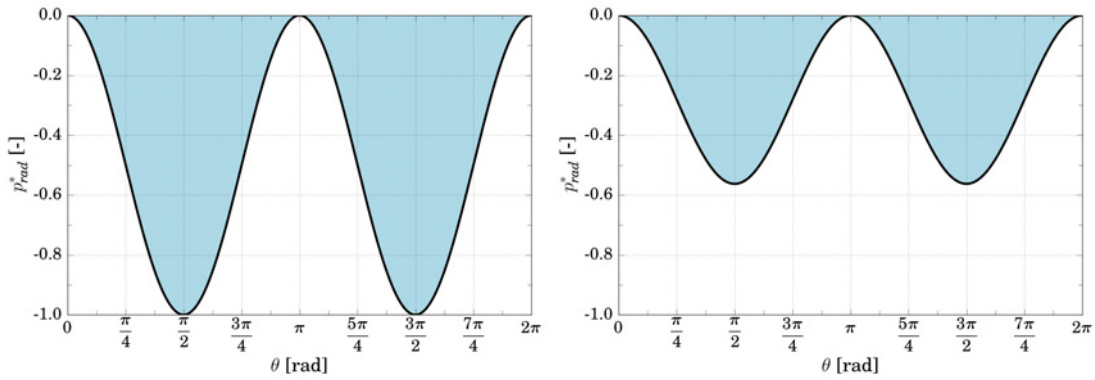


Figure 5.6 – Profils de pression de radiation acoustique normalisée autour (a) d'un cylindre et (b) d'une sphère immobiles (R = 1mm ; κ = 0.018 ; η = 0). : succion à la surface de l'objet.

une sphère, alors les contraintes de radiation acoustique conduisent à un aplatissement des structures et potentiellement à leur atomisation.

Nous souhaitons déterminer dans un premier temps si ce mécanisme peut intervenir dans des configurations représentatives des moteurs-fusées, notamment pour les plus grosses structures liquides résolues par le SPS. Pour une configuration donnée où les propriétés acoustiques et d'injection des fluides sont connues, il est possible d'évaluer *a priori* la taille caractéristique des structures liquides pour laquelle la pression de radiation acoustique s'équilibrerait avec la tension de surface. Deux situations sont considérées ici : la première est associée aux conditions de fonctionnement PF-Onera (Rutard *et al.* [132]) simulées dans la partie III de ce mémoire tandis que la seconde correspond au point de fonctionnement PF2 du Vham destiné à l'étude de la réponse de flammes subcritiques LOX/GCH_4 sous excitation acoustique transverse (*e.g.* voir Méry *et al.* [113]). Les caractéristiques de ces deux points de fonctionnement sont présentées dans le tableau 5.2. Pour simplifier cette étude, seul un mode acoustique est considéré pour chacune des configurations. De plus, il est supposé en première approximation que les structures liquides résolues par le SPS sont de forme cylindrique puisqu'il s'agit du cœur liquide et des plus gros ligaments. Dans ce cas, les contraintes acoustiques parviennent à contrer la tension de

	PF-Onera (Rutard *et al.* [132])*	Vham PF2 (Méry *et al.* [113])
ρ_0 - ρ_1 [kg · m^{-3}]	1.187 - 1 000	2.7 - 1 190
σ [N · m^{-1}]	7.2×10^{-2}	$1.6 \times 10^{-2\,\dagger}$
c_0 [m · s^{-1}]	346	1 130
p_{ac} [Pa]	5 135	5×10^5
f_{ac} [kHz]	≈ 1	3.2
Position	IAN	VAN

Table 5.2 – Caractéristiques des points de fonctionnement PF-Onera et Vham PF2.

* La définition du point de fonctionnement est présentée au chapitre 6.
† Tension de surface mesurée à T = 85 K à la saturation, *i.e.* pour de l'oxygène liquide entouré de sa propre vapeur. Source : Nist.

surface pour des diamètres de structures liquides supérieurs à 0.27 D_l pour le cas inerte PF-Onera et à 1.5×10^{-4} D_l pour le PF2 du Vham. La grandeur D_l représente ici le diamètre d'injection du jet central associé à chacun des deux points de fonctionnement. Dans les deux cas, il est ainsi fortement probable que les mécanismes de radiation acoustique puissent déformer le cœur et les plus gros ligaments liquides et ainsi participer à leur atomisation. C'est pourquoi la capacité du SPS à restituer les mécanismes de radiation acoustique est évaluée dans la suite de ce chapitre.

Pour cette étape de validation, on s'intéresse ici à la simulation d'un champ acoustique stationnaire autour d'une sphère solide immobile positionnée dans un domaine parallélépipédique. La solution analytique exacte du profil de p_{rad} autour de la sphère dans une telle situation a été formulée par Ficuciello [51] comme [2] :

$$\begin{aligned} p_{rad}(\theta) = & - \frac{\rho_0}{4R^2}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial\mu}\Big)^2 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_n\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial\mu}\Big)^2\Big]\sin^2\theta \\ & + \frac{\rho_0 k_{ac}^2}{4}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n\mathcal{P}_n(\mu)\Big)^2 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_n\mathcal{P}_n(\mu)\Big)^2\Big] \\ & + \frac{\rho_0\eta}{2R^2}\Big[\mathcal{R}_1\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_n\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial\mu} + \mathcal{S}_1\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_n\frac{\partial\mathcal{P}_n}{\partial\mu}\Big]\sin^2\theta + \frac{\rho_0\eta^2}{4R^2}\left(\mathcal{R}_1^2+\mathcal{S}_1^2\right)\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec $\mu = \cos\theta$ et $\mathcal{P}_n(\mu)$ le polynôme de Legendre de degré n. Les fonctions $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{S}_n$ ont d'ores et déjà été définies au chapitre 3 par le système (3.23). Contrairement à la formulation présentée dans le tableau 5.1, l'expression (5.6) est valable quelle que soit la dimension de l'objet. Puisque la sphère est immobile dans le cas considéré ici, les termes de cette expression liés au mouvement de la sphère doivent être ignorés. En pratique, il suffit pour cela de considérer le rapport de masse volumique entre les deux fluides η comme étant nul. De manière à pouvoir comparer le profil de p_{rad} autour de l'objet à cette solution analytique, les équations résolues par la simulation numérique sont les équations d'Euler (viscosité du milieu nulle). De plus, la sphère de rayon R = 3 mm est positionnée en un VAN de manière à retrouver une amplitude de pression de radiation acoustique maximale. À l'instar du chapitre 4, l'excitation acoustique est réalisée en imposant les fluctuations de pression aux limites latérales du domaine de calcul orthogonales à l'axe acoustique, tandis que les limites parallèles et les parois de la sphère sont associées à des conditions de glissement. La fréquence et le niveau acoustique imposés sont respectivement de 1 kHz et 152 dB de chaque côté du domaine. À cette amplitude, il reste possible de négliger la déformation des ondes lors de leur propagation dans la cavité. La discrétisation spatiale du domaine de calcul est représentée en figure 5.7. La taille des cellules dans la zone acoustique est définie

2. Une erreur typographique dans la formulation de Ficuciello [51] a été corrigée ici : le facteur $\rho_0 k_{ac}^2/(4R^2)$ du second terme est remplacé par $\rho_0 k_{ac}^2/4$.

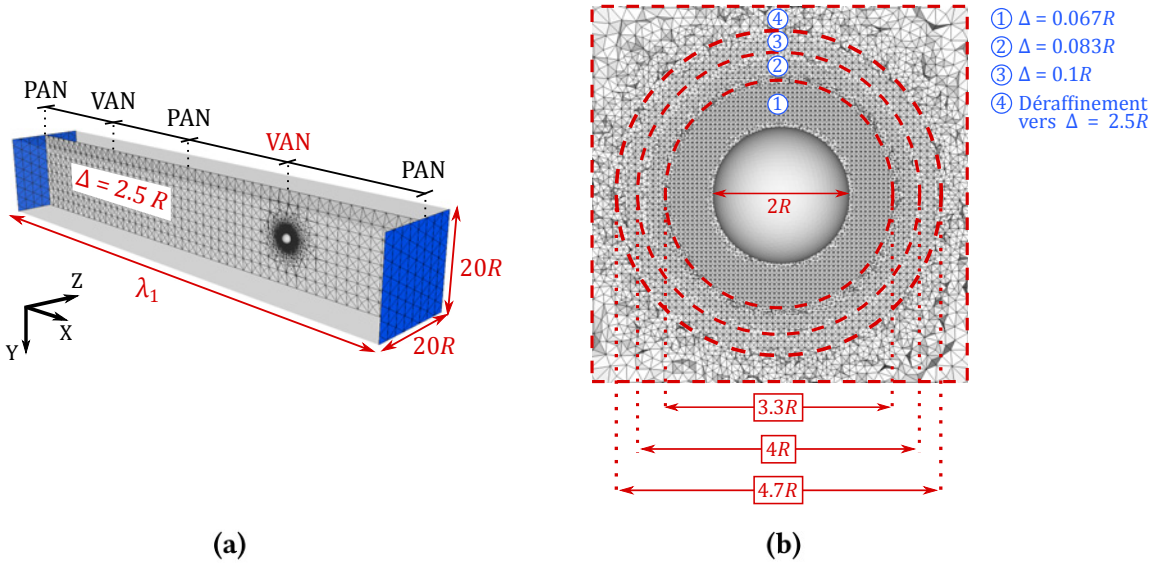


Figure 5.7 – Représentations (a) 3D et (b) 2D de la discrétisation spatiale du domaine de calcul. ■ Conditions aux limites d'excitation acoustique.

à $\Delta = 2.5R$ et permet d'assurer une fréquence de coupure d'environ 2 300 Hz. Le niveau de raffinement à la surface de la sphère est quant à lui identique à celui considéré précédemment pour le choix du schéma de flux ($\Delta = 0.067R$) mais suit une croissance plus rapide vers la zone acoustique de manière à optimiser le coût de calcul.

Pour le calcul de la pression de radiation acoustique, la moyenne temporelle des fluctuations de pression est calculée sur une période acoustique en chaque cellule (cf. équation (3.11)) puis projetée sur la surface de la sphère. Le champ de p_{rad} ainsi obtenu est représenté en figure 5.8a. On y observe une zone de dépression autour des coordonnées $\theta \equiv \pi/2 \mod \pi$ caractéristique du VAN. Le profil de p_{rad} sur le plan $Z = 0$ est tracé en figure 5.8b et comparé à la solution analytique (5.6). La correspondance des deux profils est quasiment parfaite excepté au minimum de pression où l'écart relatif atteint 2.9%. Ce faible écart est représentatif de l'erreur quantifiée précédemment lors du choix du schéma de flux et démontre que la précision de celui-ci est suffisante pour retrouver le profil de pression de radiation acoustique autour de l'objet symbolisant ici la phase liquide.

5.1.3 Restitution de la force de radiation acoustique

Lorsque l'objet, qu'il soit sphérique ou cylindrique, est positionné entre un PAN et un VAN du champ acoustique stationnaire, le profil de pression de radiation est asymétrique. Dans ce cas, une force résultante est exercée sur l'objet. Dans le cas de jets liquides atomisés, il a été démontré par Ficuciello *et al.* [52] que cette force pouvait conduire à la déviation progressive des structures liquides vers le VAN le plus proche (cf. section 1.2). Il est donc important de vérifier la restitution de cette force par le SPS avant de réaliser la simulation numérique d'un jet sous excitation acoustique. Dans la littérature, il est majoritairement fait référence à la force de radiation acoustique moyenne dans le temps $\langle F_{rad} \rangle_T$. Cependant, l'aspect instationnaire des jets diphasiques sous excitation acoustique nous conduit ici à nous intéresser également à la force de radiation acoustique instantanée.

Pour valider la restitution de cette force par le SPS, la configuration simulée est similaire à la précédente, avec une sphère solide immobile de rayon $R = 3$ mm positionnée dans un domaine parallélépipédique soumis à un champ acoustique stationnaire. La sphère est cependant positionnée en un IAN du mode acoustique principal afin de maximiser l'amplitude de la force de radiation acoustique F_{rad}. Deux simulations sont réalisées, l'une avec une excitation acoustique mono-harmonique et l'autre avec une excitation multi-harmonique. La discrétisation spatiale du domaine de calcul est alors adaptée avec

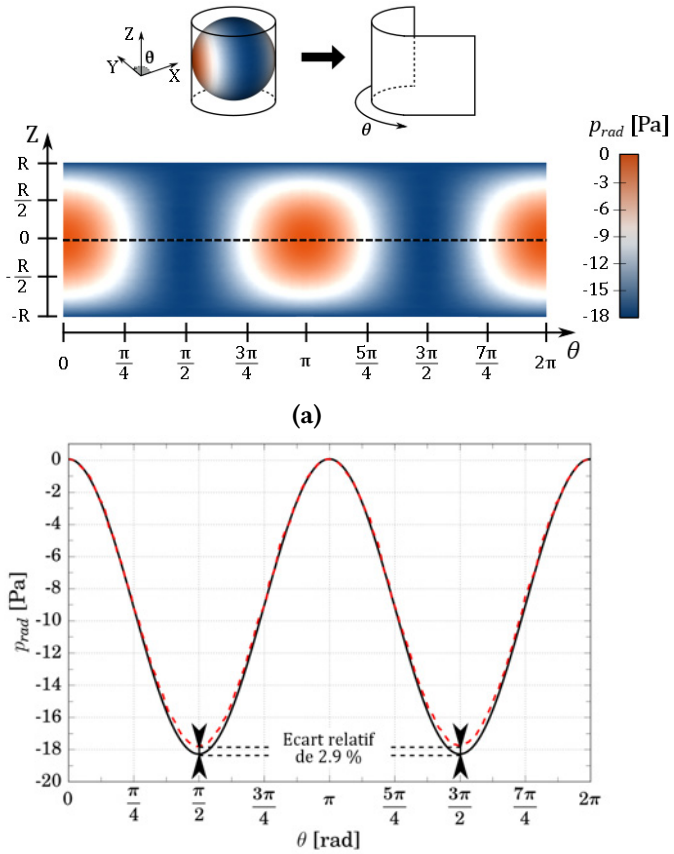


Figure 5.8 – (a) Champ de p_{rad} à la surface de la sphère positionnée en un VAN. (b) Profil de p_{rad} dans le plan $Z = 0$: ▬ solution analytique, ▬ CFD.

une taille de cellule en champ lointain fixée à $\Delta = 1.67R$, soit une fréquence de coupure de 3 500 kHz environ (cf. figure 5.9). La discrétisation spatiale proche de la sphère est en revanche identique au cas précédent (cf. figure 5.7). Pour cette étape de validation, la solution analytique multi-harmonique (3.54) de la force de radiation acoustique formulée au chapitre 3 est utilisée comme référence.

Dans un premier temps, une excitation acoustique mono-harmonique de fréquence 1 kHz est imposée à très faible amplitude (124 dB de chaque côté du domaine) de manière à assurer une absence totale de déformation des ondes lors de leur propagation. L'évolution temporelle de F_{rad} associée à cette simulation est tracée en figure 5.10a. Dans ce cas, les solutions numériques et analytiques concordent avec un écart relatif maximal négligeable de 0.6% pour la valeur instantanée et seulement 0.1% pour la valeur

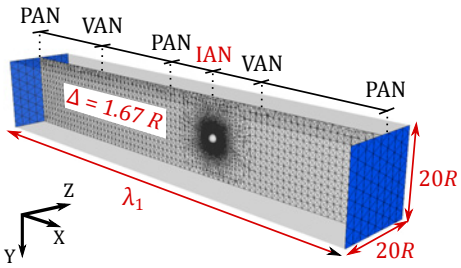
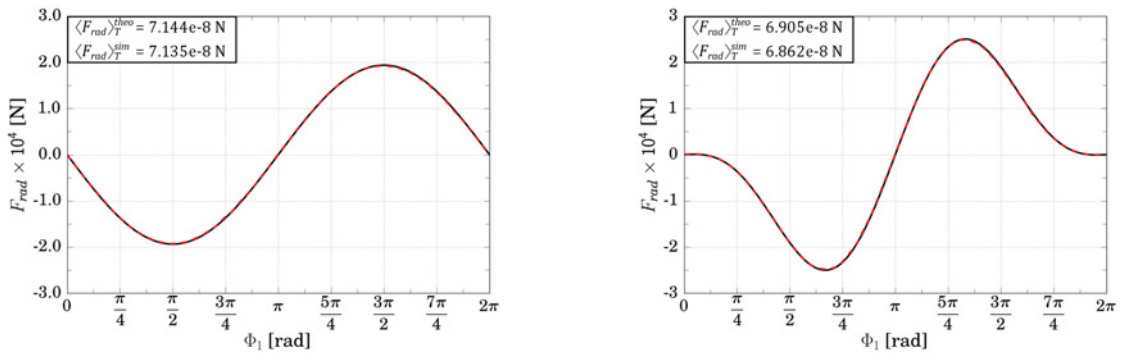


Figure 5.9 – Représentation 3D de la discrétisation spatiale du domaine de calcul. ■ Conditions aux limites d'excitation acoustique.



(a) **(b)**

Figure 5.10 – Force de radiation acoustique exercée sur une sphère solide immobile en un IAN d'un champ acoustique stationnaire. Cas (a) mono-harmonique et (b) multi-harmonique. ━ Solution analytique, ━ ━ CFD.

moyenne $\langle F_{rad}\rangle_T$. Une deuxième simulation est réalisée avec cette fois une excitation acoustique multi-harmonique afin de démontrer l'impact non négligeable des modes secondaires sur les mécanismes de radiation acoustique. Deux modes acoustiques sont considérés, le premier étant associé à une fréquence de 1 kHz et à un niveau acoustique de 129.8 dB ; le deuxième à une fréquence de 2 kHz et à un niveau acoustique de 115 dB. Les niveaux acoustiques des deux modes excités sont définis de manière à conserver la même énergie acoustique que pour le cas mono-harmonique précédent. L'évolution temporelle de F_{rad} associée à ce cas de figure est tracée en figure 5.10b. On remarque alors que la présence du second mode acoustique influence de façon significative l'évolution des contraintes appliquées à l'objet malgré son amplitude 5 à 6 fois plus faible que le mode principal. Dans le cas d'une structure liquide, on imagine que cela peut avoir un impact sur la dynamique de réponse aux ondes acoustiques et démontre une nouvelle fois l'intérêt de la formulation multi-harmonique développée au chapitre 3. En ce qui concerne l'écart à la solution analytique, un écart relatif de seulement 0.6% est noté sur les valeurs instantanées et moyennes de la force de radiation acoustique. On démontre ainsi la capacité du SPS et des méthodes numériques associées à restituer les mécanismes de radiation acoustique sur des objets symbolisant la phase liquide. Leurs effets sur la dynamique et l'atomisation d'un jet liquide sont étudiés par la suite dans la partie III.

5.2 Évaluation et développement du solveur dédié à la phase dispersée

5.2.1 Restitution de la fragmentation des gouttes par la pression de radiation acoustique

Tout comme le cœur liquide et les ligaments, les gouttes issues de l'atomisation du jet peuvent être déformées sous l'effet de la pression de radiation acoustique. Dans le cas d'un jet diphasique représentatif des moteurs-fusées à ergols liquides, Ficuciello *et al.* [52] démontrent que cette déformation est maximale pour une injection en un VAN du champ acoustique et peut conduire à une fragmentation accrue des gouttes et ainsi modifier de façon significative la granulométrie du spray. De la même manière que pour les ligaments, il est possible d'évaluer *a priori* la taille caractéristique des gouttes pour laquelle la pression de radiation acoustique s'équilibre avec la tension de surface. Cette évaluation est réalisée cette fois-ci en considérant les gouttes sphériques avec $\Delta p_{Lap} = 2\sigma/R$ et Δp_{rad} évalué selon la formulation sphérique du tableau 5.1. Dans le cas inerte PF-Onera associé à une injection en un IAN, l'équilibre entre les contraintes acoustiques et la tension de surface est atteint pour des diamètres de gouttes de l'ordre de 0.93 D_l. Il semble donc peu probable dans ce cas que la pression de radiation

acoustique ait un effet significatif sur la forme et le processus de fragmentation des gouttes, celles-ci ayant une taille bien inférieure à 0.93 D_l. Dans le cas du point de fonctionnement VHAM PF2 associé au banc MASCOTTE, le diamètre d'équilibre est quant à lui d'environ 5.5×10^{-4} D_l en un VAN. Dans ce cas, la déformation par la pression de radiation acoustique pourrait bien influencer le processus de fragmentation des gouttes.

Selon la méthodologie de simulation des écoulements diphasiques atomisés retenue dans le code CEDRE, les gouttes représentées selon un point de vue Eulérien par le DPS ont une taille bien inférieure aux plus petites cellules du maillage. Puisque le couplage entre le milieu ambiant décrit par le SPS et la phase dispersée n'est réalisé qu'à travers des termes sources spécifiques au sein des équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, le volume occupé par la phase dispersée n'est ainsi pas pris en compte par le gaz porteur. Dans ce cas, le profil de pression de radiation acoustique autour de la goutte est inconnu. Le développement d'un modèle spécifique est donc indispensable si l'on souhaite pouvoir restituer le processus de fragmentation des gouttes lié à leur déformation par la pression de radiation acoustique. Puisque ce processus de fragmentation spécifique n'intervient pas dans le cas du point de fonctionnement PF-ONERA simulé dans la suite de ce mémoire, un tel modèle ne sera pas nécessaire dans la suite de l'étude. Malgré cela, une première approche est proposée ici pour la simulation de cas réactifs pour lesquels la pression de radiation acoustique peut jouer un rôle dans l'atomisation du jet liquide.

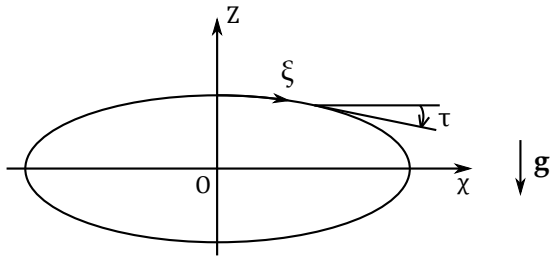


FIGURE 5.11 – Représentation de la déformation d'une goutte par la pression de radiation acoustique (YARIN *et al.* [167]). Propagation acoustique selon l'axe Z.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la déformation de gouttes initialement sphériques par la pression de radiation acoustique (*e.g.* YARIN *et al.* [167], LEE *et al.* [94]). Dans le cadre de leurs travaux liés à la lévitation acoustique, YARIN *et al.* [167] proposent ainsi une méthode pour évaluer la forme d'une goutte à l'équilibre dans un champ acoustique stationnaire. Selon cette méthode, la pression interne à la surface de la goutte suit l'expression $p = p_0 + p_{rad} - \sigma K$, où p_0 est la pression à l'équilibre dans le milieu ambiant, σ est la tension de surface entre les deux fluides et K est la courbure de la goutte (négative pour une surface convexe et positive autrement ; $K = 2/R$ dans le cas d'une sphère). Si l'on néglige l'écoulement interne à la goutte, l'équation de Bernoulli et plusieurs principes géométriques simples permettent aux auteurs d'aboutir aux formules suivantes pour le calcul de la forme de la goutte :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\xi} &= C + \dfrac{gZ\rho_1}{\sigma} + \dfrac{p_{rad}}{\sigma} - \dfrac{\sin\tau}{\chi}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\xi} &= \cos\tau, \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} &= \sin\tau, \end{cases} \tag{5.7}$$

avec χ et Z les coordonnées d'un point à la surface de la goutte, ξ la coordonnée curviligne de ce point le long de la surface, τ l'angle entre l'axe horizontal et la tangente à la surface en ce point et enfin g l'accélération gravitationnelle (cf. figure 5.11). En imaginant que l'on connaisse le profil des fluctuations de pression p' autour de la goutte à chaque instant, il serait possible de remplacer p_{rad}

par cette variable instantanée [3]. En supposant que la déformation des gouttes est infiniment rapide, un processus itératif sur le système (5.7) permettrait, à partir de là, d'évaluer la forme théorique des gouttes à chaque instant. Un critère limite sur la forme des gouttes conduisant à leur rupture permettrait alors de modéliser le processus de fragmentation sous contraintes acoustiques. Cependant, une telle modélisation nécessiterait avant tout de formuler le profil de fluctuation de pression p' autour de gouttes de géométrie quelconque. En effet, seule la formulation pour des gouttes sphériques existe actuellement dans la littérature. Formuler et développer cette modélisation peut être envisagé comme perspectives de ces travaux de thèse.

5.2.2 Restitution de la force de radiation acoustique sur les gouttes

À l'instar des plus grosses structures liquides, des études expérimentales ont démontré que la force de radiation acoustique pouvait conduire à une déviation des gouttes lorsque celles-ci évoluent entre un PAN et un VAN du champ acoustique, que ce soit dans un cas inerte (Ficuciello *et al.* [52]) ou réactif (Méry [112]). Rappelons que cette force résulte de l'asymétrie du champ de fluctuation de pression autour des structures liquides. Cependant, la méthodologie de simulation d'écoulements diphasiques atomisés retenue ne permet pas en l'état de restituer cette force puisque le profil de pression autour des gouttes est inconnu. Pour restituer la déviation potentielle des gouttes par les contraintes acoustiques, une modélisation spécifique doit alors être développée au sein du DPS.

Par le passé, il a été démontré dans la littérature que l'interaction entre plusieurs gouttes d'un spray pouvait influencer la force de radiation acoustique exercée sur celles-ci (Silva et Bruus [140]). En effet, en présence d'un spray, les ondes acoustiques sont réfléchies à la surface de chacune des gouttes le constituant. Chaque goutte voit ainsi une onde incidente constituée en réalité de l'onde initiale en champ lointain conjuguée à une multitude d'ondes réfléchies par les autres gouttes du spray. Dans ce cas, l'expression de la force de radiation acoustique exercée sur une goutte isolée ne convient plus. Il s'agit là d'une situation similaire à ce qui est observé pour l'évaporation de gouttes. En effet, il a été démontré que la présence de gouttes voisines pouvait conduire à une réduction importante du taux d'évaporation d'une goutte par rapport à un cas où celle-ci serait isolée (*e.g.* Labowsky [83] et Marberry *et al.* [104]). L'influence de gouttes voisines sur l'évaporation d'une goutte ou la force de traînée exercée sur celle-ci est d'autant plus grande que la densité du spray est élevée. Pour simplifier la formulation de ce premier modèle de force de radiation acoustique au sein du code, il est alors considéré que la densité du spray est suffisamment faible pour négliger les effets d'interaction entre gouttes. Cette hypothèse pourra évidemment être remise en question en fonction des résultats de simulation.

Dans leurs travaux, Mawardi [107] et Doinikov [32] affirment qu'il est possible de décomposer la force F exercée sur une goutte soumise à une onde acoustique en une force de radiation acoustique F_{rad} et une force de traînée F_{drag}. En l'état, cette dernière est déjà modélisée grâce aux termes sources (2.110) $\boldsymbol{S}_F$ et $\boldsymbol{s}_F^k$ destinés au couplage entre la phase gazeuse et la phase dispersée. Pour modéliser l'action de la force de radiation acoustique sur les gouttes de chaque section k du DPS, un terme supplémentaire $\boldsymbol{F}_{rad}^k$ est ajouté comme tel :

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{k=1}^{N_s} \left(\boldsymbol{F}_{drag}^k + \boldsymbol{F}_{rad}^k \right) \\ -\sum_{k=1}^{N_s} \left(\boldsymbol{F}_{drag}^k + \boldsymbol{F}_{rad}^k \right) \cdot \boldsymbol{v}^k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{s}_F^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F}_{drag}^k + \boldsymbol{F}_{rad}^k \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

3. Pour rappel, la pression de radiation p_{rad} n'est autre que la moyenne temporelle de fluctuations de pression p' (cf. équation (3.11))

Puisque la force de traînée est évaluée à chaque instant du calcul, il est essentiel de modéliser la force de radiation acoustique selon un point de vue instantané pour assurer une consistance entre les deux forces. La formulation multi-harmonique instantanée (3.54) développée au chapitre 3 est utilisée ici. Étant donnée sa complexité, il est choisi, contrairement à la force de traînée, de ne pas intégrer l'expression sur l'intervalle de taille de chaque section du DPS. Le diamètre moyen D^k de chaque section (cf. définition (A.2)) est directement utilisé pour l'évaluation du terme F_{rad}^k : $F_{rad}^k = F_{rad}\left(D^k\right) n^k$. La modélisation de cette force devrait ainsi permettre une meilleure restitution des effets des contraintes acoustiques sur la dynamique du jet liquide simulé en partie III.

Troisième partie

Étude de la réponse d'un jet liquide atomisé sous excitation acoustique transverse par simulation numérique aux grandes échelles

Chapitre 6

Cas de simulation et spécificités numériques

La partie II de ce mémoire a permis d'évaluer, grâce à des cas numériques simples, la capacité du code Cedre à simuler la propagation d'ondes acoustiques de haute amplitude et à restituer les effets de la pression de radiation acoustique sur des éléments représentant les structures liquides d'un jet atomisé. Dans le cas de la phase dispersée, un modèle restituant l'action de la force de radiation acoustique sur les gouttes a été formulé pour des ondes acoustiques multi-harmoniques puis a été développé au sein du code. Cette troisième partie est destinée à la reproduction et l'analyse par la simulation numérique du comportement d'un jet liquide atomisé sous excitation acoustique transverse de haute amplitude. Les travaux présentés dans cette partie ont été soumis pour publication (Rutard *et al.* [132]). Le chapitre 6 est dédié à la sélection et à la présentation de la configuration simulée. Les conditions de fonctionnement retenues ainsi que les caractéristiques de l'excitation acoustique y sont également présentées en détail, suivies par la mise en donnée complète des simulations. Par la suite, des résultats sans excitation acoustique seront exploités au chapitre 7 de manière à illustrer la méthodologie de simulation d'écoulements diphasiques avec le code Cedre dans un cas concret. Enfin, le chapitre 8 sera dédié quant à lui à l'analyse des mécanismes de réponse du jet diphasique une fois soumis aux ondes acoustiques.

Sommaire

6.1 Sélection et présentation de la configuration à simuler . . . 124
6.1.1 Choix du dispositif expérimental . . . 124
6.1.2 Présentation détaillée du dispositif expérimental retenu . . . 125
6.2 Définition des conditions d'injection . . . 127
6.3 Définition et caractérisation des perturbations acoustiques . . . 130
6.3.1 Définition de l'excitation acoustique . . . 130
6.3.2 Caractérisation du champ acoustique . . . 131
6.4 Mise en données des simulations numériques . . . 133
6.4.1 Définition du domaine de calcul et de sa discrétisation spatiale . . . 133
6.4.2 Définition des conditions aux limites . . . 136
6.4.3 Choix des modèles numériques . . . 139
6.4.4 Élaboration de la stratégie de simulation. . . . 144

6.1 Sélection et présentation de la configuration à simuler

6.1.1 Choix du dispositif expérimental

L'un des objectifs de cette partie est d'évaluer la capacité du code Cedre à reproduire le comportement de jets liquides atomisés soumis à des ondes acoustiques transverses. Pour cela, il est nécessaire de sélectionner et reproduire une configuration expérimentale parmi celles présentées dans la littérature, dont les résultats serviront de référence lors de la comparaison aux simulations numériques réalisée au chapitre 8. Pour répondre aux besoins de cette étude, le dispositif retenu doit :

- se restreindre à l'étude de jets inertes. En effet, nos travaux concernent précisément la reproduction par le code des mécanismes d'interaction entre l'acoustique et l'écoulement diphasique, de manière à pouvoir, à plus long terme, en étudier l'impact sur la combustion et la stabilité des systèmes propulsifs. Or, la présence de flammes ainsi que les hautes pressions et températures associées aux écoulements réactifs semblables à ceux rencontrés au sein de moteurs-fusées à ergols liquides compliquent l'accès à tout type d'instrumentation de mesure. Il est donc difficile de recueillir des données expérimentales relatives au comportement de la phase liquide dans de telles conditions. L'absence de combustion est donc souhaitable pour ce type d'analyse.
- permettre une excitation acoustique d'amplitude et de fréquence représentatives des perturbations acoustiques impliquées dans les moteurs en conditions de fonctionnement instable. Traditionnellement, un point de fonctionnement est considéré instable lorsque les fluctuations de pression atteignent au minimum environ 10% de la pression moyenne de chambre (valeur crête-à-crête) (Hardi *et al.* [65], Huang et Huzel [72]). L'expérience démontre également que, dans les moteurs-fusées à ergols liquides, la présence de la tuyère induit un amortissement des perturbations plus important pour les modes acoustiques longitudinaux que pour les modes transverses (Crocco et Zheng [25]). Ces derniers sont ainsi généralement les plus dévastateurs une fois couplés à la combustion et sont caractérisés par des fréquences de l'ordre du kHz.
- traiter les jets coaxiaux en régime d'atomisation de type fibre, caractéristiques des moteurs-fusées à ergols liquides en conditions de fonctionnement subcritiques.
- fournir un maximum de résultats quantifiant la réponse de l'écoulement à l'acoustique de manière à permettre une comparaison la plus complète possible avec les simulations numériques.
- présenter une géométrie simple afin de réduire les coûts de calcul. En effet, une géométrie complexe impose l'utilisation d'un maillage fortement raffiné localement, augmentant ainsi considérablement les temps de restitution. En présence d'injecteurs coaxiaux, la dimension limitante est généralement l'épaisseur de la lèvre séparant l'injection du gaz de celle du liquide.

Parmi les dispositifs expérimentaux mentionnés en section 1.2, seuls deux d'entre eux semblent répondre aux exigences listées ci-dessus. Le premier dispositif est celui de Davis et Chehroudi [28], utilisé pour caractériser le comportement de jets coaxiaux LN_2/GN_2 en régime d'injection subcritique soumis à une excitation acoustique transverse d'amplitude pouvant aller jusqu'à environ 14% (valeur crête-à-crête) de la pression moyenne de chambre de 15 bar. Dans cette configuration, la position d'injection est fixée au niveau d'un ventre de vitesse acoustique. Le second dispositif d'intérêt est celui de Ficuciello *et al.* [52]. Celui-ci met en jeu des jets coaxiaux eau/air injectés dans une cavité acoustique à pression atmosphérique et présente la particularité de permettre la variation de la position d'injection le long de l'axe acoustique. Cette modularité rend ce dispositif particulièrement intéressant. En effet, la réponse du jet aux perturbations acoustiques dépend principalement de sa position sur l'axe acoustique. Notamment, le phénomène de déviation transverse du liquide par la force de radiation n'intervient qu'entre les ventres de pression (PAN) et de vitesse (VAN) du champ acoustique et est maximal aux ventres d'intensité (IAN). La configuration de Ficuciello *et al.* [52] présente donc un intérêt particulier comparé à celle de Davis et Chehroudi [28]. Par ailleurs, l'évolution du dispositif d'excitation acoustique par rapport aux travaux antérieurs de Baillot *et al.* [7] permet d'atteindre des niveaux acoustiques maximaux d'environ 166 dB, soit une amplitude de 11% (valeur crête-à-crête) de la pression moyenne de chambre. Enfin, seul le dispositif de Ficuciello *et al.* [52] permet de caractériser le

comportement du spray à travers des mesures ombroscopiques. C'est donc naturellement que ce dispositif a été sélectionné pour la suite de nos travaux. Ses caractéristiques sont présentées plus en détail dans la suite de ce chapitre.

6.1.2 Présentation détaillée du dispositif expérimental retenu

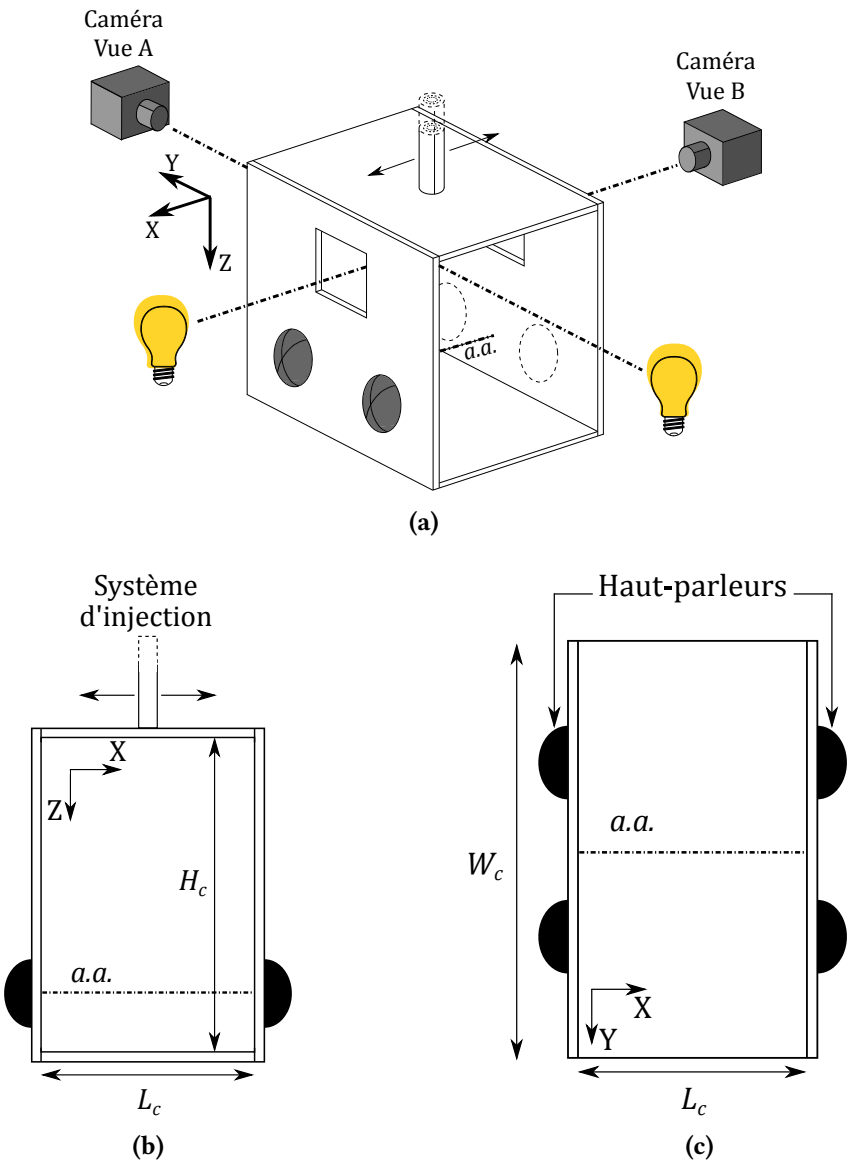


Figure 6.1 – Schématisation du dispositif expérimental du Coria. (a) Vue 3D avec représentation du système d'acquisition par ombroscopie. (b) Vue A contenant l'axe acoustique (*a.a.*). (c) Vue de dessus.

Le dispositif expérimental du Coria associé aux travaux de Ficuciello *et al.* [52] est schématisé en figure 6.1. Celui-ci est constitué d'une cavité acoustique rectangulaire de dimensions $L_c \times H_c \times W_c$, ouverte dans sa largeur. Le dispositif d'excitation acoustique comporte deux paires de haut-parleurs à compression à membrane situées sur la partie basse des parois latérales de la cavité acoustique. Dans cette configuration, les ondes acoustiques se propagent donc selon l'axe X. Le système d'injection, quant à lui, est positionné sur la partie supérieure de la cavité acoustique, autrement dit son toit. La direction d'injection correspond ainsi à l'axe vertical Z. Deux configurations d'injection peuvent être étudiées avec ce dispositif : la première consiste en un injecteur unique dont la position peut varier

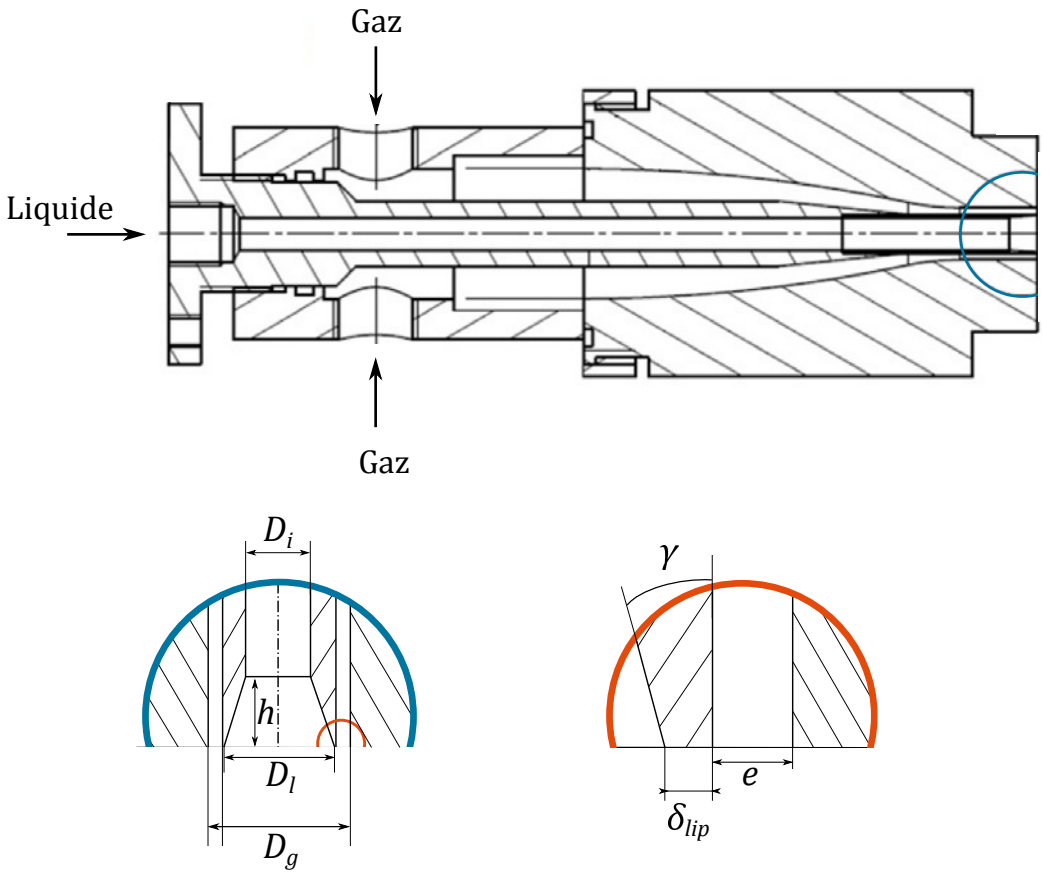
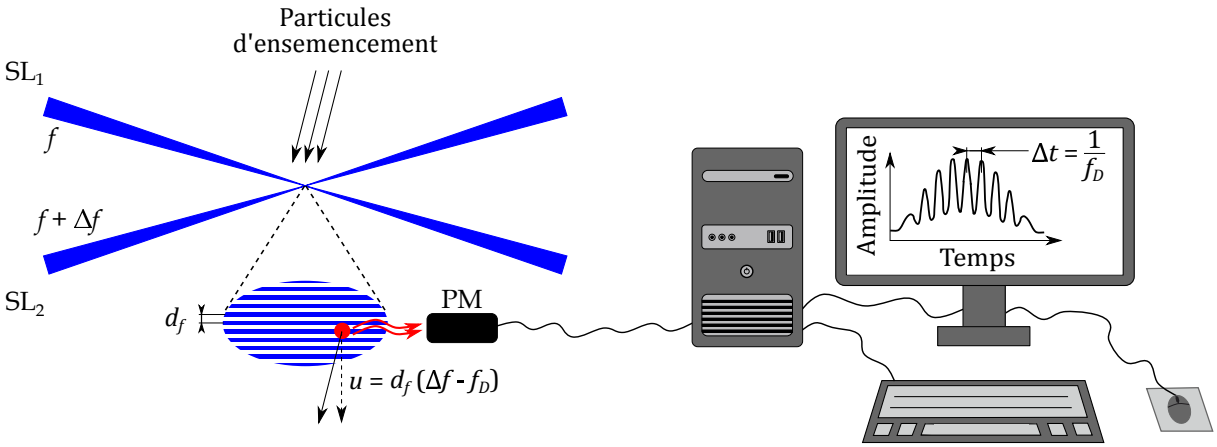


Figure 6.2 – Schématisation du système d'injection du Coria (Ficuciello [51]).

le long de l'axe acoustique (noté *a.a.*), tandis que la seconde est constituée de trois injecteurs reliés à un même dôme d'injection de manière à étudier le couplage acoustique entre le système d'injection et la cavité principale. Dans le cas de cette étude, notre attention se porte uniquement sur la première configuration. L'injection des fluides se fait alors à l'aide d'un seul injecteur coaxial schématisé sur la figure 6.2. Le liquide est injecté au centre par un pitot de diamètre initial D_i et de diamètre final D_l après un chanfrein de hauteur h. Le gaz, quant à lui, est injecté par un tube coaxial d'épaisseur e et de diamètre extérieur D_g. Enfin, l'épaisseur de la lèvre séparant l'écoulement liquide de l'écoulement gazeux est notée δ_{lip}. Notons que la sortie de l'injecteur, désignée comme le *plan d'injection* dans la suite de ce mémoire, coïncide avec la face interne du toit de la cavité acoustique (pas de *recess* ou retrait du pitot central dans l'injecteur).

Le système de mesure principal associé à ce dispositif expérimental s'appuie sur la visualisation rétro-éclairée à haute cadence de l'écoulement diphasique. Cette technique consiste de façon simplifiée à placer l'objet à visualiser, *i.e.* le jet liquide dans le cas présent, entre une caméra et une source de lumière continue. La cadence d'acquisition est de 6 273 Hz à une résolution de 800 × 1 280 pixels. Deux directions de visualisation sont proposées, à savoir la direction de propagation acoustique grâce à deux accès optiques de part et d'autre de la cavité acoustique (vue B sur la figure 6.1a), et la direction orthogonale via les deux ouvertures dans la largeur de la cavité (vue A sur la figure 6.1a). Après des post-traitements adaptés, les images ainsi obtenues donnent accès à différentes mesures telles que la mesure de la longueur du cœur liquide ainsi que son épaisseur (uniquement en l'absence de gouttes dans la ligne de vision), la mesure de l'angle de spray, des mesures granulométriques en champ large ou rapproché, ou encore la mesure de déviation du cœur liquide et du spray par rapport à l'axe d'injection.

Par ailleurs, des mesures de vitesse du co-courant gazeux sont également réalisées à la sortie de l'injecteur à l'aide d'un système de vélocimétrie laser Doppler (LDV). Ce système de mesure, schématisé



SL : Source laser
PM : Photomultiplicateur

Figure 6.3 – Schématisation de la méthode de mesure LDV unidirectionnelle.

en figure 6.3, consiste à croiser deux rayons laser mono-chromatiques, collimatés [1] et cohérents [2] dans la zone où la vitesse du fluide doit être acquise. Suivant le principe d'interférence d'ondes, le croisement de ces deux rayons laser forme alors un volume de mesure ellipsoïde présentant un réseau de franges de haute intensité lumineuse dont la distance d_f les unes des autres est fixe et dépend principalement de la longueur d'onde λ associée aux lasers. Une fois le co-courant gazeux ensemencé en particules, celles-ci vont alors émettre des ondes lumineuses à une fréquence donnée f_D au passage des franges. Ce signal lumineux est ensuite récupéré par un photomultiplicateur. Par ailleurs, la détermination du sens de propagation des particules est réalisée par défilement des franges d'interférence en modifiant légèrement la fréquence d'une des deux sources laser d'une valeur Δf. La composante de vitesse perpendiculaire aux franges est alors calculée comme $u = d_f(\Delta f - f_D)$. Dans le cas du dispositif expérimental du Coria, deux couples de lasers sont utilisés de manière à acquérir à la fois les composantes de vitesse verticale et transverse du gaz.

Le dispositif expérimental présenté ci-dessus permet d'étudier une large gamme de conditions d'injection, allant du régime d'atomisation de type Rayleigh axi-symétrique au régime de type fibre. Notre intérêt se porte cependant uniquement sur ce dernier puisqu'il s'agit du régime d'atomisation caractéristique des moteurs-fusées à ergols liquides. Le point de fonctionnement retenu pour notre étude est défini dans la suite de ce chapitre.

6.2 Définition des conditions d'injection

Plusieurs points de fonctionnement correspondant à un régime d'atomisation de type fibre ont été étudiés par le passé au Coria. Les travaux de Ficuciello *et al.* [52] présentent notamment un point de fonctionnement défini par un nombre de Reynolds liquide $\mathrm{Re}_l = 3\,200$ et un nombre de Weber gazeux $\mathrm{We}_g = 224$. Cependant, la vitesse d'injection du liquide associée à ces conditions de fonctionnement est considérée trop faible pour permettre un temps de restitution des simulations acceptable. Un nouveau point de fonctionnement que l'on nomme PF-Onera est donc défini par la suite conjointement avec le Coria. Pour limiter le temps de restitution des simulations numériques, la vitesse moyenne du liquide U_l au niveau du plan d'injection est augmentée au maximum des capacités du dispositif expérimental. Les paramètres thermodynamiques du fluide ainsi que la géométrie d'injection étant fixés, cette

1. Une lumière collimatée est constituée de rayons quasiment parallèles. La dispersion lumineuse au cours de la propagation des rayons est alors réduite au maximum.

2. Deux ondes sont dites cohérentes lorsqu'elles ont un déphasage constant l'une par rapport à l'autre et une fréquence équivalente.

	PF-Onera	BHP A-10	Vham PF2
Espèces	Air/eau	LOX/GH_2	LOX/GCH_4
Pression chambre [bar]	1	10	26
Rapport de mélange R_m [-]	$> 15^*$	2.1	1.3
Rapport des flux de quantité de mouvement J [-]	4	15	1.9
Nombre de Reynolds à l'injection du liquide Re_l [-]	$\sim 10^4$	5.5×10^4	3.2×10^4
Nombre de Reynolds à l'injection du gaz Re_g [-]	$\sim 10^4$	2.0×10^5	1.7×10^5
Nombre de Weber gazeux We_g [-]	$4.9 \times 10^{2\dagger}$	$2.9 \times 10^{4\ddagger}$	$2.7 \times 10^{3\ddagger}$

Table 6.1 – Données caractéristiques d'injection associées à différents dispositifs expérimentaux. Données thermodynamiques : source Nist.

* Étant donné l'absence d'oxydant et de combustible dans ce cas inerte, une valeur de substitution est calculée comme le rapport entre le débit massique d'injection du liquide et celui du gaz. La valeur exacte ne peut être indiquée pour des raisons de confidentialité.

† Valeur calculée avec une tension de surface mesurée pour de l'eau en contact avec de l'air à pression atmosphérique et $T = 300\,\mathrm{K}$.

‡ Valeur calculée avec une tension de surface mesurée à $T = 85\,\mathrm{K}$ à la saturation, *i.e.* pour de l'oxygène liquide entouré de sa propre vapeur.

modification induit alors une augmentation de Re_l (cf. équation (1.2)), dont la valeur exacte retenue ne peut être indiquée ici pour des raisons de confidentialité (ordre de grandeur de 10^4). En revanche, une augmentation de la vitesse d'injection du liquide sans changement des conditions d'injection du co-courant gazeux peut sensiblement modifier le régime d'atomisation du jet. En effet, d'après les travaux de Lasheras et Hopfinger [87], un point de fonctionnement défini par $Re_l \sim 10^4$ et $We_g = 224$ serait à la limite de transition entre un régime d'atomisation de type membrane et un régime de type fibre (cf. figure 6.4). Ainsi, de manière à assurer une atomisation en régime fibre, la vitesse d'injection du co-courant gazeux est elle aussi augmentée. À l'instar du liquide, fixer la vitesse d'injection du gaz tout en ayant une géométrie d'injecteur donnée revient à fixer la valeur de We_g (cf. équation (1.4)). Cependant, d'après Ficuciello *et al.* [52], une augmentation de We_g à amplitude d'excitation acoustique fixe induit une diminution de la réponse du jet aux perturbations. En effet, le co-courant gazeux agit comme une barrière protégeant l'écoulement liquide des ondes acoustiques. Sur la base des travaux passés du Coria, une valeur maximale est alors définie à $We_g = 490$. Les caractéristiques du point de fonctionnement finalement obtenu sont présentées dans le tableau 6.1.

Pour compléter, il est intéressant de comparer ces nouvelles conditions à des points de fonctionnement définis dans la littérature pour l'étude des écoulements réactifs représentatifs des moteurs-fusées à ergols liquides. Deux points de comparaison du banc Mascotte sont présentés ici : le point de fonctionnement A-10 du Boitier Haute Pression (BHP) ainsi que le point PF2 du Vham. Le premier a été défini de manière à étudier la combustion d'un jet LOX/GH_2 isolé en conditions d'injection subcritiques (*e.g.* voir Fdida *et al.* [49]), tandis que le second est destiné à l'étude de la réponse de flammes subcritiques LOX/GCH_4 sous excitation acoustique transverse de haute fréquence (*e.g.* voir Méry *et al.* [113]). Les caractéristiques de ces deux points de fonctionnement sont elles aussi présentées dans le tableau 6.1. Pour faciliter leur comparaison, les trois points de fonctionnement mentionnés sont positionnés sur le diagramme des régimes d'atomisation proposé par Lasheras et Hopfinger [87] et représenté en figure 6.4. Sur ce diagramme, les iso-lignes de J = 1 et J = 50 sont rajoutées pour chaque fluide et géométrie associés (cf. équation (1.7)). Ces iso-lignes délimitent respectivement les bornes supérieure et inférieure

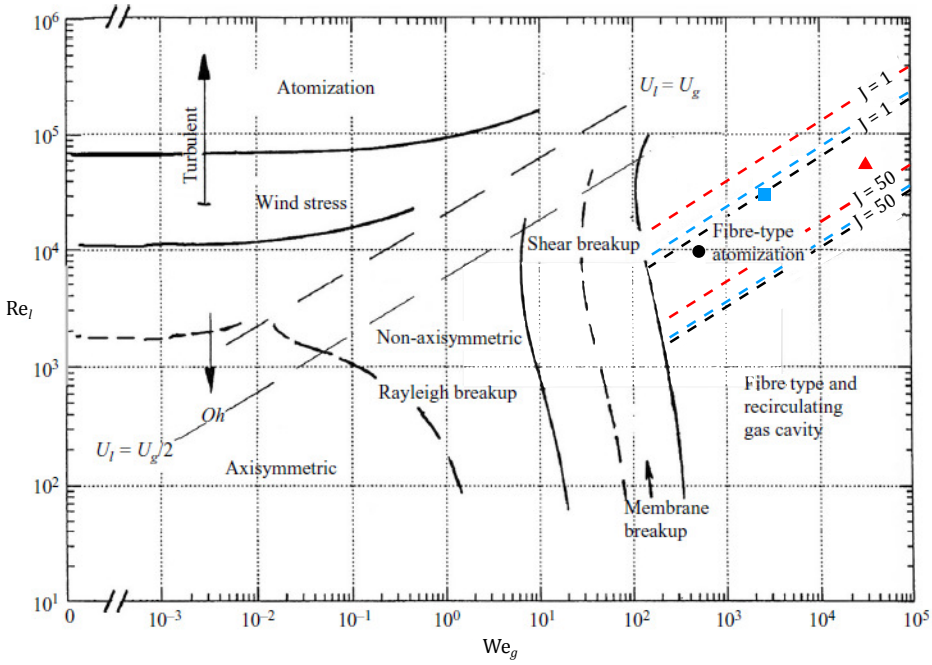


Figure 6.4 – Classification des régimes d'atomisation de jets liquides issus d'injecteurs co-axiaux en fonction des nombres sans dimension We_g, Re_l et J (issue de Lasheras et Hopfinger [87] et complétée par Baillot *et al.* [7]). ● PF-Onera ■ Vham PF2 ▲ BHP A-10.

de la zone de régime d'atomisation de type fibre classique, *i.e.* sans recirculation du gaz en aval du cœur liquide. On peut voir tout d'abord que le PF-Onera est bien contenu dans cette zone, ce qui est un point essentiel de la démarche. Si l'on compare ensuite les caractéristiques de ces nouvelles conditions à celles des points BHP A-10 et Vham PF2, on peut noter des écarts non négligeables sur les ordres de grandeur de Re_l, Re_g et We_g. Ces écarts sont dus au fait que l'air et l'eau ont des viscosités plus élevées que les fluides utilisés dans des configurations réactives ; à savoir : GCH_4, GH_2 et LOX. De même, le coefficient de tension superficielle de l'eau dans l'air est nettement supérieur à celui de l'oxygène liquide dans du méthane ou de l'hydrogène gazeux. Par ailleurs, les écarts entre les conditions inertes et réactives peuvent également être attribués à la différence de débit massique d'injection du co-courant gazeux, beaucoup plus faible dans le cas inerte. En effet, dans les moteurs-fusées à ergols liquides, le débit massique de fuel est maximisé pour assurer un rapport de mélange inférieur à la stœchiométrie [3] afin d'optimiser les performances du moteur. De plus, dans le cas de bancs expérimentaux de laboratoire comme le banc Mascotte, l'écart à la stœchiométrie doit être accentué de manière à limiter la température des gaz brûlés et ainsi le besoin en refroidissement des parois et hublots. Au contraire, pour les configurations inertes, le débit massique d'air est minimisé afin de limiter l'effet barrière du gaz et ainsi assurer une réponse suffisamment importante de l'écoulement aux perturbations acoustiques. C'est pourquoi le We_g est bien plus faible pour les conditions inertes.

Malgré les nettes différences d'ordres de grandeur en terme de Re_l, Re_g et We_g, le critère primordial déterminant la pertinence du point de fonctionnement inerte défini précédemment est la valeur du rapport des flux de quantité de mouvement J. En effet, les travaux du Coria ont montré dans le passé que la réponse du jet aux perturbations acoustiques était fortement conditionnée à la fois par le type de régime d'atomisation associé, mais également par la longueur du cœur liquide (Baillot *et al.* [7], Ficuciello *et al.* [52]). Or, J est le paramètre principal déterminant cette longueur en régime d'atomisation de type fibre (Lasheras et Hopfinger [87]). La valeur de J = 4 associée au PF-Onera est plus proche de celle associée au point Vham PF2 que de celle du point BHP A-10. Cela est en accord avec l'objectif

3. Le rapport de mélange à la stœchiométrie est de 4 pour le couple LOX/GH_2 et de 8 pour le couple LOX/GCH_4.

de ces travaux puisque les mécanismes de réponse de l'écoulement inerte aux ondes acoustiques seront ainsi représentatifs de ce qui a pu être observé dans le passé pour le point Vham PF2. L'aspect inerte du PF-Onera permettra même d'étudier plus facilement la réponse de la phase liquide et nous fournira ainsi de nouvelles informations.

6.3 Définition et caractérisation des perturbations acoustiques

6.3.1 Définition de l'excitation acoustique

Les conditions d'injection étant fixées, il est maintenant nécessaire de définir l'excitation acoustique à imposer. Comme il l'a été mentionné lors de la sélection du dispositif expérimental à reproduire numériquement, notre intérêt se porte uniquement sur les perturbations acoustiques transverses de haute fréquence. Dans le cas du dispositif de Ficuciello *et al.* [52] retenu pour cette étude, la cavité acoustique a été dimensionnée de manière à ce que la fréquence d'excitation associée au second mode acoustique transverse (mode 2T) de la cavité soit de l'ordre du kHz, et soit donc représentative de la fréquence des ondes acoustiques en jeu lors d'instabilités thermoacoustiques dans les moteurs-fusées.

Les travaux du Coria ont démontré dans le passé que la réponse d'un jet diphasique soumis à de telles perturbations acoustiques dépendait de sa position sur l'axe acoustique (Baillot *et al.* [7], Ficuciello *et al.* [52]). Le choix de cette position est donc primordial pour notre étude et doit permettre d'observer un maximum de mécanismes de réponse. Cinq positions d'injection sont envisagées ici : les ventres de pression (PAN), d'intensité (IAN) et de vitesse acoustiques (VAN) associés au mode acoustique fondamental 2T, ainsi que les deux positions intermédiaires (PAN-IAN et IAN-VAN). Le ventre d'intensité acoustique est défini comme la position à laquelle le produit entre les fluctuations de pression et de vitesse transverse dans la direction d'excitation acoustique est maximal. D'après les travaux passés du Coria, les différents mécanismes de réponse d'un jet sous excitation acoustique transverse susceptibles d'intervenir sont synthétisés dans le tableau (6.2) selon la position d'injection dans le champ acoustique. Ces mécanismes sont :

- l'aplatissement des structures liquides par la pression de radiation acoustique p_{rad} dans le plan contenant l'axe acoustique. Rappelons que la distribution spatiale de cette grandeur autour du cœur liquide et des gouttes peut être approximée par les formules du tableau 5.1. Lorsque cette distribution n'est pas homogène et que l'amplitude des perturbations acoustiques est suffisante, la structure liquide est aplatie. Ce mécanisme intervient donc à toutes les positions sur l'axe acoustique excepté au PAN. De plus, il est maximal au VAN, où la différence entre le maximum et le minimum de p_{rad} autour du liquide est la plus importante.
- l'augmentation de l'angle de spray dans le plan orthogonal à l'axe acoustique. D'après Ficuciello *et al.* [52], ce mécanisme est directement lié à la déformation du cœur liquide par la pression de radiation acoustique. Il survient donc aux mêmes positions sur l'axe acoustique que l'aplatissement des structures liquides. Il en est de même pour son maximum d'amplitude.
- la déviation des structures liquides par la force de radiation acoustique. En certaines positions sur l'axe acoustique, l'intégration de p_{rad} à la surface d'une structure liquide peut conduire à une force résultante non nulle. Pour des géométries sphériques ou cylindriques, cette force peut être formulée selon les équations (3.54) et (D.44), et peut conduire à une déviation de la phase liquide vers le VAN le plus proche. Ce mécanisme intervient à toutes les positions sur l'axe acoustique excepté aux PAN et VAN où le profil de p_{rad} est symétrique. De plus, il est maximal aux IAN.
- l'oscillation transverse du spray. Par frottement, les fluctuations de vitesse transverses du gaz induites par les perturbations acoustiques entraînent les gouttes du spray. Ce mécanisme intervient à toutes les positions sur l'axe acoustique excepté au PAN, où la vitesse acoustique est nulle à chaque instant. De plus, il est maximal à la position du maximum de vitesse acoustique, *i.e.* aux VAN.

Puisque l'on souhaite maximiser le nombre de mécanismes de réponse du jet aux ondes acoustiques tout en assurant des amplitudes de réponse suffisantes pour être mesurées, une injection en un IAN semble être la plus adaptée. Par ailleurs, l'amplitude d'excitation acoustique est imposée au maximum des capacités du banc expérimental, soit une amplitude des fluctuations de pression d'environ 11 500 Pa (valeur crête-à-crête). Pour une onde acoustique purement sinusoïdale, cela se traduirait par un niveau acoustique de 166.2 dB. Le champ acoustique résultant au sein de la cavité est caractérisé dans la suite de ce chapitre.

	PAN	PAN-IAN	IAN	IAN-VAN	VAN
Aplatissement des structures liquides	✗	✓	✓	✓	✓
Augmentation de l'angle du spray	✗	✓	✓	✓	✓
Déviation des structures liquides	✗	✓	✓	✓	✗
Oscillation transverse du spray	✗	✓	✓	✓	✓

Table 6.2 – Synthèse des mécanismes de réponse d'un jet diphasique à des perturbations acoustiques transverses selon la position d'injection sur l'axe acoustique. ✗ absent ; ✓ peut intervenir si niveau acoustique suffisant ; ◯ maximum d'amplitude.

6.3.2 Caractérisation du champ acoustique

La caractérisation du champ acoustique expérimental a été réalisée lors de la thèse de Ficuciello [51] à l'aide de simulations numériques basées sur la résolution de l'équation de Helmholtz (forme stationnaire de l'équation d'onde (3.16)). Pour ces simulations, une fluctuation de vitesse nulle a été imposée en condition aux limites pour modéliser les parois de la cavité acoustique, tandis que le système complet a été placé dans un domaine de simulation plus large de manière à permettre la propagation des ondes à travers les ouvertures de la cavité. Le champ acoustique obtenu à l'intérieur de cette cavité est présenté en figure 6.5. Sur celle-ci, le rectangle gris délimite la zone dans laquelle le champ acoustique peut être considéré plan et stationnaire. Étant donnée la taille présumée du cœur liquide associé aux conditions d'injection définies précédemment (ordre de grandeur de 10 D_l), il est possible de considérer seulement la zone contenue dans ce rectangle lors des simulations numériques à venir, ce qui permettra de contenir leur coût et de simplifier le traitement de l'excitation acoustique.

De manière à caractériser précisément les perturbations acoustiques dans cette zone, une mesure locale des fluctuations de pression a été réalisée par le Coria. Le signal expérimental brut est représenté en figure 6.6. Les coordonnées du point de mesure sont $(X, Y, Z) = (-L_c/2, 0, D_l)$. L'origine étant placée au centre de la face interne du toit de la cavité acoustique, cela correspond à un PAN localisé au niveau d'une paroi latérale à une distance D_l du plan d'injection. Afin de réduire les contraintes mécaniques appliquées aux haut-parleurs, le signal est composé de trois étapes de 300 ms chacune : une première rampe d'amplitude croissante, un plateau d'amplitude nominale d'environ 11 500 Pa (valeur crête-à-crête) et une seconde rampe d'amplitude décroissante. Dans la suite de cette étude, nous souhaitons pouvoir reproduire ces fluctuations de pression le plus précisément possible tout en ne considérant qu'un nombre minimum d'harmoniques afin de limiter le nombre de cellules nécessaire à la discrétisation spatiale du domaine de calcul (cf. discussion sur le calcul de la fréquence de coupure d'un maillage). Une transformation de Fourier discrète (DFT) appliquée au signal de la figure 6.6 sur l'intégralité du plateau central de 300 ms révèle que 98.3% de l'énergie acoustique totale du signal est comprise dans l'échantillon de fréquence [0 Hz ; 3 000 Hz], plus précisément dans les modes acoustiques 2T, 4T et 6T de la cavité. Les fluctuations de pression de la figure 6.6 en période nominale peuvent alors être approximées par :

$$p'(t) = -\sum_{i=1}^{3} p_{ac,\,i} \sin\left(2\pi f_{ac,\,i} t + \psi_i\right), \tag{6.1}$$

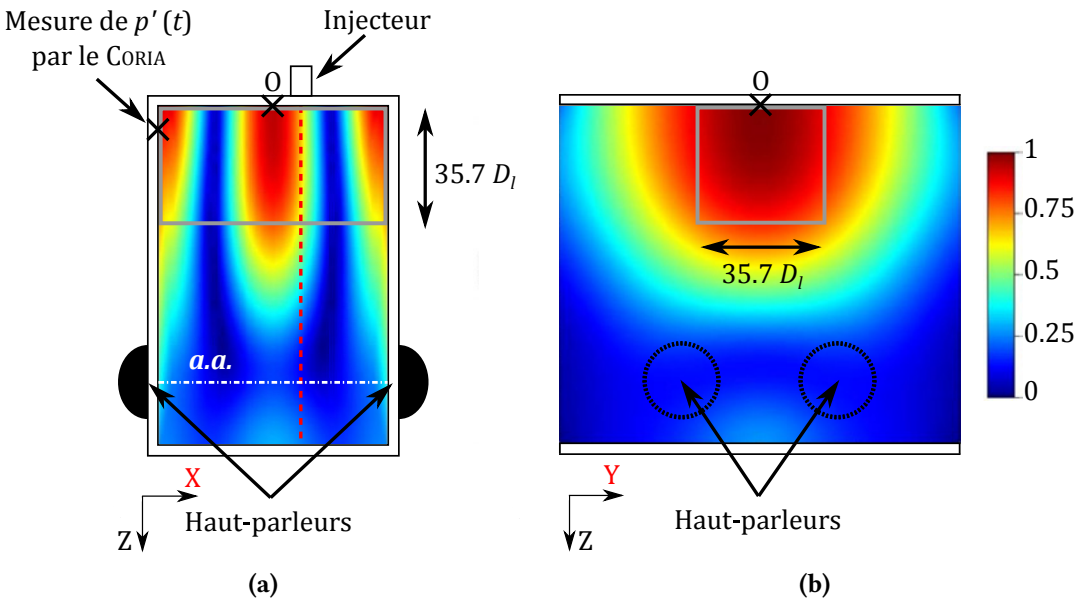


Figure 6.5 – Champs 2D expérimental de l'écart type normalisé de la pression au sein de la cavité acoustique (Ficuciello [51]). (a) Plan de visualisation contenant l'*a.a.* (Vue A). (b) Plan de visualisation orthogonal à l'*a.a.* (Vue B). – – IAN. ▭ Zone où l'on peut considérer le champ acoustique plan et stationnaire.

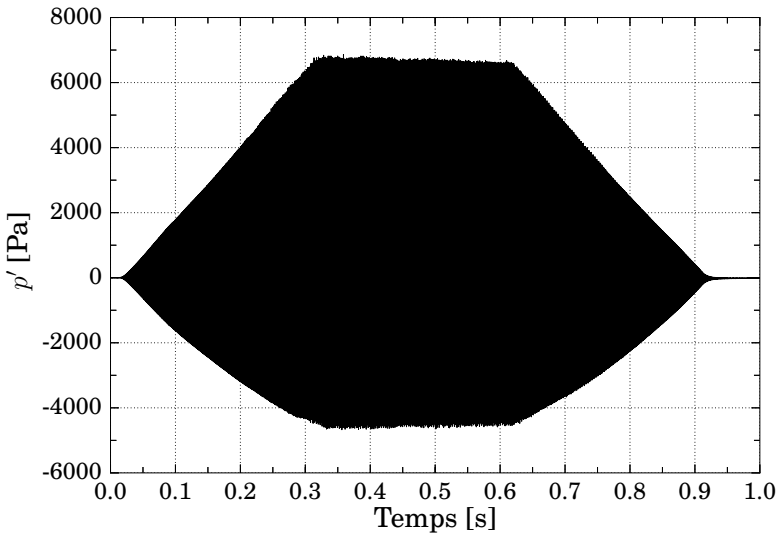


Figure 6.6 – Fluctuations de pression mesurées par le Coria en un PAN latéral de la cavité acoustique.

i	Mode	$f_{ac,\,i}$ [kHz]	$p_{ac,\,i}$ [Pa]	ψ_i [rad]
1	2T	≈ 1	5 135	π
2	4T	≈ 2	887	2.3
3	6T	≈ 3	555	1.83

Table 6.3 – Caractéristiques du signal de pression acoustique en un PAN latéral de la cavité.

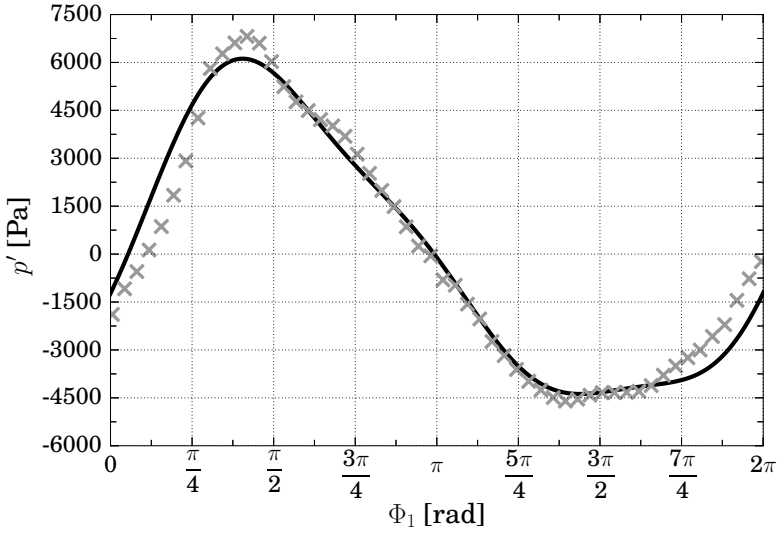


Figure 6.7 – Fluctuations de pression en un PAN latéral de la cavité acoustique. × Signal expérimental. ▬ Reconstruction analytique avec les modes 2T, 4T et 6T.

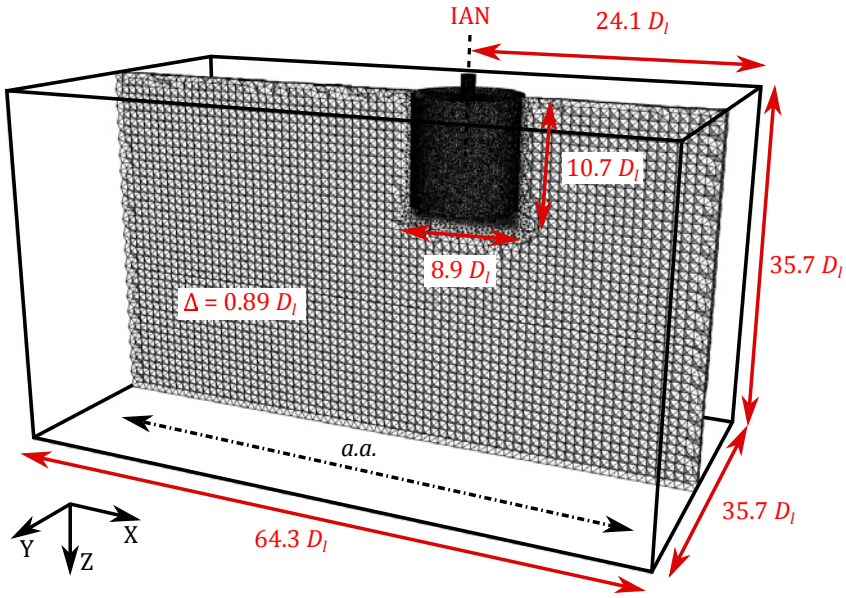
où $p_{ac,\,i}$, $f_{ac,\,i}$ et ψ_i sont respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase de chaque mode i. Leurs valeurs sont déterminées par la DFT précédente et sont fournies dans le tableau 6.3. La figure 6.7 présente la comparaison entre le signal expérimental en période nominale et la reconstruction des fluctuations de pression par la formule (6.1) sur une période acoustique du mode 2T. Sur cette figure, on vérifie que les trois modes considérés suffisent à reproduire de façon relativement précise le signal expérimental, avec une erreur relative maximale d'environ 10%. Il est alors raisonnable de ne considérer que ces trois modes lors de l'excitation acoustique associée à nos simulations numériques.

6.4 Mise en données des simulations numériques

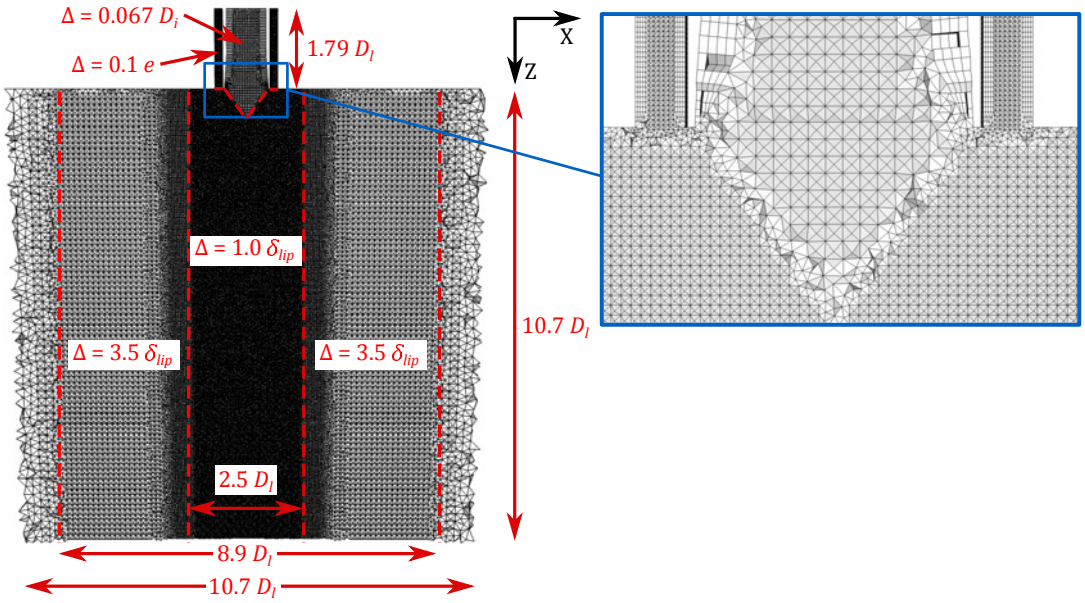
6.4.1 Définition du domaine de calcul et de sa discrétisation spatiale

Comme détaillé dans la section précédente, notre intérêt lors de cette étude se porte uniquement sur la zone de la cavité dans laquelle le champ acoustique peut être considéré plan et stationnaire. Le domaine de calcul associé, de dimensions $64.3\,D_l \times 35.7\,D_l \times 35.7\,D_l$, est représenté en 3D sur la figure 6.8. L'injecteur coaxial présenté en figure 6.2 est quant à lui réduit à une hauteur de $1.79\,D_l$ de manière à minimiser les coûts de calcul. La discrétisation spatiale du domaine de calcul est assurée par un maillage non structuré de 28 M de cellules composé de prismes et de tétraèdres. La topologie de ce maillage est représentée en figure 6.8.

Une première zone de raffinement du maillage de forme cylindrique, de hauteur $10.7\,D_l$ et de diamètre $2.5\,D_l$ est définie à la sortie de l'injecteur. Cette zone est destinée en premier lieu à capter les instabilités se propageant à la surface du jet liquide responsables de son atomisation. Les dimensions des instabilités longitudinales et transverses générées par le cisaillement entre les deux fluides peuvent



(a)



(b)

Figure 6.8 – Représentation de la discrétisation spatiale du domaine de calcul. (a) Vue 3D en champ lointain. (b) Vue 2D rapprochée du plan d'injection.

être estimées respectivement par les relations (1.13) et (1.16) proposées par Marmottant et Villermaux [106]. Pour les conditions d'injection associées à cette étude, ces relations aboutissent aux valeurs suivantes : $\lambda_{/\!/} = 14.0\,\delta_{lip}$ et $\lambda_{\perp} = 5.6\,\delta_{lip}$. Par ailleurs, Baillot *et al.* [7] ont noté la formation d'instabilités de Faraday à la surface du jet liquide sous l'effet des perturbations acoustiques transverses, pouvant impacter le processus d'atomisation primaire. La longueur d'onde de ces instabilités peut être estimée par la formule suivante :

$$\lambda_F = \left(\frac{8\sigma\pi}{\rho_l f_{ac}^2}\right)^{1/3}, \tag{6.2}$$

avec σ le coefficient de tension de surface et ρ_l la masse volumique du liquide. Cette formulation aboutit à une valeur de $6.3\,\delta_{lip}$ dans notre cas d'étude si l'on ne considère que la fréquence d'excitation $f_{ac,\,1}$ associée au mode 2T de la cavité acoustique. La taille moyenne des cellules dans la première zone de raffinement est alors imposée à $\Delta = \delta_{lip}$, soit environ six points pour discrétiser la longueur d'onde la plus petite $\lambda_{\perp}$.

Un déraffinement radial progressif est ensuite opéré jusqu'à un second cylindre de même hauteur et de diamètre $8.9\,D_l$ destiné à discrétiser la zone contenant majoritairement la phase dispersée. Dans cette zone, la contrainte principale repose sur la résolution de l'écoulement gazeux à l'origine du transport et de la fragmentation des gouttes du spray. Pour la simulation numérique aux grandes échelles, il est généralement accepté qu'au moins 80% de l'énergie cinétique turbulente doit être résolue (Pope [125]). Cela est d'autant plus important qu'aucun terme turbulent n'est considéré dans les équations du DPS. Dans ce cas, le rapport entre la taille de filtre (et donc ici de cellule) Δ et la dimension de l'échelle intégrale L_t est estimé à $\Delta/L_t = 0.083$ (Pope [125]). Lors de leurs travaux, Buresti *et al.* [16] affirment qu'au-delà d'une certaine distance du plan d'injection, les tourbillons formés en amont dans l'écoulement co-courant gazeux autour du jet liquide se rejoignent pour former une turbulence pleinement développée. Sur la base de cette observation, il est alors possible de considérer que les plus gros tourbillons en aval du jet ont une taille de l'ordre de D_g et donc d'estimer la taille de cellule nécessaire à $0.083\,D_g$, soit $\Delta = 3.5\,\delta_{lip}$.

Le même raisonnement est appliqué pour la définition du maillage dans l'injecteur. Les dimensions caractéristiques de L_t associées aux écoulements liquide et gazeux sont respectivement estimées par le diamètre interne D_i de l'injecteur liquide en amont du chanfrein et l'épaisseur e du co-courant gazeux. Les tailles de mailles imposées dans l'injecteur jusqu'au plan d'entrée dans la cavité sont alors de $0.067\,D_i$ dans le liquide et de $0.1\,e$ dans le co-courant gazeux. Par ailleurs, une évolution progressive de la taille des mailles entre l'injecteur et la zone de raffinement du cœur liquide est imposée de manière à retrouver un total de deux cellules dans l'épaisseur de lèvre de l'injecteur. Il s'agit là d'un nombre insuffisant de mailles pour discrétiser les tourbillons formés au contact des lèvres par le cisaillement entre les deux fluides. Cependant, raffiner davantage en cette zone particulière conduirait à un coup de calcul prohibitif. On sait malgré tout que la taille de ces tourbillons augmente en aval du plan d'injection. La taille de maille $\Delta = \delta_{lip}$ imposée dans la zone de raffinement du cœur liquide permettra donc d'accéder rapidement à une description suffisante de ces tourbillons en aval de l'injecteur. En ce qui concerne la discrétisation de l'écoulement au sein de l'injecteur, quatre couches de prismes de dimension $\Delta/2$ sont rajoutées sur chaque paroi excepté sur la lèvre, induisant ainsi une valeur de y^+ de 15 dans l'écoulement d'air et de 19 dans l'écoulement d'eau. [4]

Pour finir, le reste du domaine de calcul est discrétisé de manière à minimiser la dissipation numérique des ondes acoustiques lors de leur propagation le long de l'axe acoustique. D'après les travaux de Langenais *et al.* [85], un minimum de 20 points par longueur d'onde est nécessaire pour discrétiser une onde acoustique avec le code Cedre à l'ordre 2. Dans le cas de notre étude, la longueur d'onde

4. La grandeur y^+ correspond à la distance adimensionnée à la paroi. Elle peut être vu comme le nombre de Reynolds calculé dans la cellule adjacente à la paroi, avec la taille de la cellule comme dimension de référence. Il est généralement considéré qu'une valeur $y^+ \sim 1$ est nécessaire pour assurer une évaluation correcte du frottement à la paroi. Pour une valeur de $y^+ > 10$-20, l'utilisation d'un modèle de paroi est nécessaire pour restituer le profil de vitesse moyenne à la paroi.

minimale à discrétiser est associée au mode acoustique 6T, soit $\lambda_3 = 21.4\,D_l$. Après application d'une marge empirique de 20%, la taille des cellules dans la zone acoustique est alors imposée à $\Delta = 0.89\,D_l$, soit 24 points par longueur d'onde du mode acoustique 6T et une fréquence de coupure $f_c \approx 3\,500\,\text{Hz} > f_{ac,\,3}$.

6.4.2 Définition des conditions aux limites

Conditions d'injection

Dans la configuration expérimentale de Baillot *et al.* [7] reproduite ici par la simulation numérique, les deux fluides s'écoulent dans un tube de longueur $17.9\,D_l$ avant d'être injectés dans la cavité acoustique. Afin de limiter le temps de restitution des simulations numériques, seul un dixième de cette longueur est reproduit. Les conditions d'injection des deux fluides en amont de l'injecteur correspondent à des conditions aux limites de type *entrée subsonique* à vitesse imposée. Pour chacun des fluides, un profil de vitesse homogène et constant est imposé. Pour des raisons de confidentialité relatives à la configuration expérimentale reproduite, les vitesses débitantes ne peuvent pas être indiquées ici. Celles-ci sont calculées de façon à respecter les nombres We_g et J à l'injection retenus en section 6.2 ($\text{We}_g = 490$ et $\text{J} = 4$).

En présence d'une excitation acoustique, les travaux de Baillot *et al.* [7] mentionnés en section 1.2 ont mis en évidence une propagation des ondes acoustiques dans le système d'injection. Puisque la partie simulée de l'injecteur est plus courte que l'injecteur expérimental, il apparaît nécessaire de pouvoir assurer la non-réflexion des ondes au niveau des conditions aux limites d'injection. Pour cela, un procédé de relaxation est utilisé et présenté en détail en annexe F. Dans le cas présent, il est choisi d'imposer un coefficient de réflexion $|R| \leq 10^{-3}$ pour toute onde acoustique de fréquence $f_{ac} \geq f_{ac,\,1}$. Le coefficient de relaxation σ_{rel} associé vaut environ 10^{-7}.

En ce qui concerne les limites latérales et la lèvre de l'injecteur, celles-ci sont associées à des conditions de type *parois adhérentes*.

Méthode d'excitation acoustique

La méthode d'excitation acoustique retenue ici est similaire à celle proposée et validée en section 4.3 pour imposer un champ acoustique stationnaire au sein du domaine de calcul. Pour obtenir une onde stationnaire identique à la figure 6.7, les fluctuations de pression suivantes sont imposées aux deux conditions aux limites orthogonales à l'axe acoustique :

$$p'(t) = -\sum_{i=1}^{3} p_{ac,\,i}\,\sin\left(2\pi f_{ac,\,i}t + \psi_i\right), \tag{6.3}$$

avec l'amplitude, la fréquence et la phase de chaque mode définies dans le tableau 6.3. Cependant, contrairement à la cavité acoustique considérée en section 4.3, les limites du domaine parallèles à l'axe acoustique sont des frontières libres. Il est donc impossible dans le cas présent d'imposer une condition de glissement à ces limites car cela ne permettrait pas d'évacuer les fluides hors du domaine de calcul. Par ailleurs, une simple condition à la limite de sortie à pression imposée constante ne serait pas représentative des conditions expérimentales. Il est donc choisi ici d'imposer les fluctuations de pression résultant de l'excitation acoustique également aux limites parallèles à l'axe acoustique. Seulement, les hautes amplitudes d'excitation conduisent ici, de la même manière qu'en section 4.3, à une déformation progressive des ondes au cours de leur propagation le long de l'axe acoustique, ce qui empêche d'imposer la simple superposition des deux signaux d'excitation. Il est ainsi nécessaire d'imposer le signal déformé lors de l'excitation acoustique. Pour cela, la méthodologie suivante est retenue (illustration en figure 6.9) :

1. un premier calcul de propagation acoustique dans une cavité parallélépipédique de longueur λ_1 est réalisé. De façon identique à la section 4.3, le champ de pression initial au sein du domaine

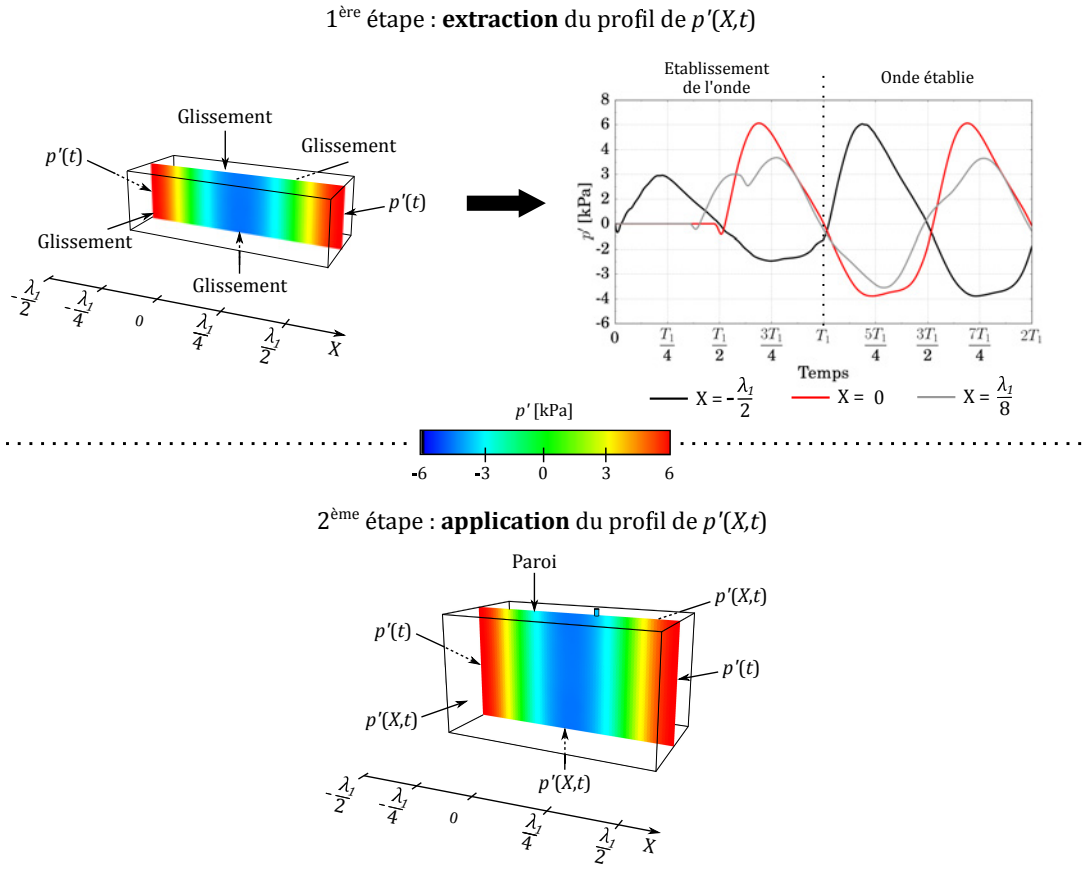


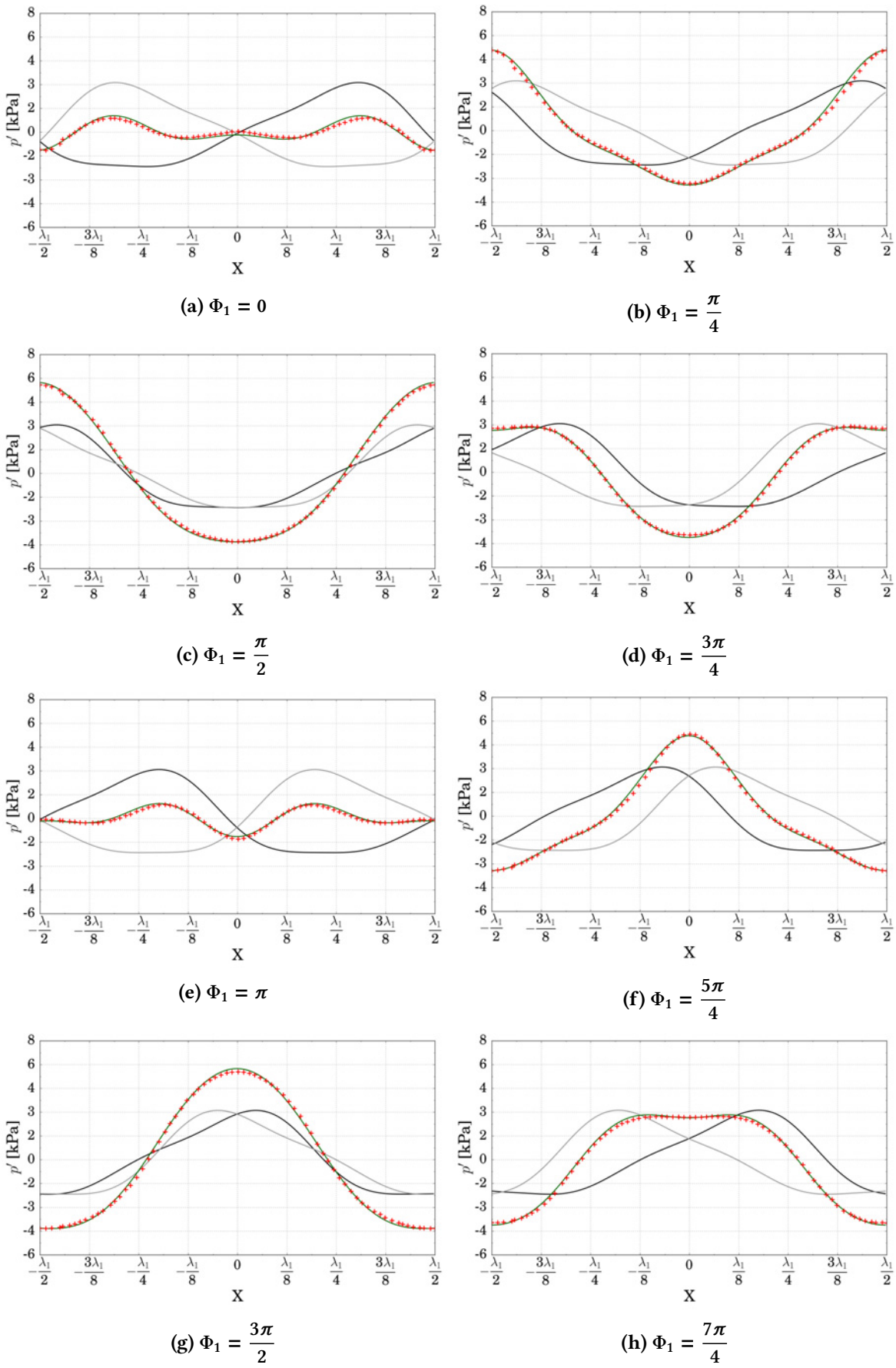
Figure 6.9 – Méthodologie d'excitation acoustique pour la simulation MC.

est homogène et les fluctuations de pression définies par l'équation (6.3) sont imposées aux deux conditions aux limites orthogonales à l'axe acoustique. Les limites parallèles à l'axe acoustique sont quant à elles associées à des conditions aux limites de glissement. Les fluctuations de pression dans la cavité sont alors extraites au cours du temps tout le long de l'axe acoustique de manière à pouvoir les utiliser par la suite. Pour cette étape, deux périodes acoustiques $T_1 = 1/f_{ac,\,1}$ sont simulées (comme représenté sur la figure 6.9) : la première correspond à la période d'établissement de l'onde stationnaire et la seconde à une période où l'onde est établie.

2. les profils de fluctuation de pression $p'(X,t)$ extraits à l'étape précédente sont par la suite imposés aux frontières libres lors de la simulation du PF-Onera, *i.e.* aux conditions aux limites latérales parallèles à l'axe acoustique et à la condition à la limite aval. La limite supérieure est quant à elle associée à une condition de type *paroi adhérente*. Lors de la première période d'excitation, le profil de fluctuation de pression extrait au cours de la période d'établissement de la simulation précédente est utilisé, tandis que le profil établi est imposé pour le reste du calcul.

Il est important de préciser que, contrairement aux campagnes expérimentales effectuées par le Coria, les fluctuations de pression sont imposées dès le départ à leur maximum d'amplitude. En effet, imposer une rampe d'excitation comme celle représentée en figure 6.6 nécessiterait des temps de calcul trop importants pour atteindre le régime établi. Notons également que, de façon identique aux simulations effectuées en section 4.3, il est nécessaire d'imposer une non-réflexion la plus complète possible des ondes aux conditions aux limites d'excitation acoustique. Comme pour les conditions aux limites d'injection, un coefficient de réflexion $|R| \leq 10^{-3}$ est alors imposé pour toute onde acoustique de fréquence $f_{ac} \geq f_{ac,\,1}$.

Comme en section 4.3, cette nouvelle méthodologie est validée en comparant les profils de fluctuation de pression le long de l'axe acoustique à la solution analytique de Blackstock [10]. Cette comparaison donne lieu aux figures 6.10. Une erreur relative maximale de 3% de l'amplitude d'excitation est



(a) $\Phi_1 = 0$

(b) $\Phi_1 = \frac{\pi}{4}$

(c) $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$

(d) $\Phi_1 = \frac{3\pi}{4}$

(e) $\Phi_1 = \pi$

(f) $\Phi_1 = \frac{5\pi}{4}$

(g) $\Phi_1 = \frac{3\pi}{2}$

(h) $\Phi_1 = \frac{7\pi}{4}$

Figure 6.10 – Profils de fluctuation de pression le long de l'axe acoustique X au cours du temps une fois l'onde stationnaire établie : — onde entrante théorique à gauche, — onde entrante théorique à droite, — onde stationnaire résultante théorique, + Résultat de la simulation Cedre.

observée au cours d'une période acoustique au niveau des VAN du mode fondamental, validant ainsi la méthodologie d'excitation acoustique. Notons que la présence de modes acoustiques harmoniques de phases différentes conduit à des fluctuations de pression résiduelles de l'ordre de 1 000 Pa aux VAN du mode fondamental.

6.4.3 Choix des modèles numériques

Pour cette étude, on applique la stratégie de simulation d'écoulements diphasiques atomisés du code Cedre. Les modèles et méthodes numériques utilisés sont synthétisés dans le tableau 6.4. Le SPS résout ainsi les équations de Navier-Stokes compressibles multi-espèces pour la simulation de l'écoulement en phases séparées tandis que le DPS est consacré à la modélisation du spray via une approche Eulérienne. La description de la distribution de la taille des gouttes est assurée par une méthode sectionnelle avec reconstruction affine pour laquelle trois sections sont considérées. Leurs bornes sont définies de façon empirique et sont présentées dans le tableau 6.4. Le couplage *two-way* entre les deux solveurs est réalisé à travers les termes sources de traînée, de radiation acoustique, d'atomisation primaire et de pseudo-coalescence.

Modélisation des contraintes de radiation acoustique sur les gouttes

Comme indiqué en section 5.2.2, un modèle spécifique a été formulé et développé au cours de ces travaux afin de restituer l'action de la force de radiation acoustique sur les gouttes du spray. La force de radiation acoustique $\boldsymbol{F}_{rad}^k$ exercée sur les gouttes de chacune des sections k du DPS est calculée à partir de la formulation multi-harmonique instantanée (3.54) développée au chapitre 3, et ajoutée au terme de force de traînée dans l'évaluation des termes sources d'échange entre solveurs $\boldsymbol{S}_F$ et $\boldsymbol{s}_F^k$ (5.8). Le diamètre moyen D^k de chaque section (cf. définition (A.2)) est directement utilisé pour l'évaluation de F_{rad}^k : $F_{rad}^k = F_{rad}\left(D^k\right) n^k$.

La formulation multi-harmonique (3.54) de la force de radiation acoustique impose d'indiquer en argument d'entrée du modèle la position d'un ventre de pression (PAN) commun à tous les modes acoustiques excités de manière à évaluer la distance h entre cette position et les gouttes. Dans le cas du PF-Onera, le PAN de référence correspond à une des conditions aux limites d'excitation acoustique. De même, les amplitudes de fluctuation de pression $p_{ac,\,i}$ associées à chaque mode acoustique considéré, ainsi que leurs fréquences et leurs phases, doivent être indiquées en arguments d'entrée du modèle. Dans le cas d'une excitation acoustique donnant lieu à un champ stationnaire plan, les fréquences et phases de chaque mode n'évoluent pas au cours de la propagation des ondes. En revanche, les amplitudes de fluctuation de pression $p_{ac,\,i}$ associées à chaque mode acoustique considéré peuvent évoluer au cours de la propagation non linéaire des ondes. Pour assurer une évaluation la plus précise possible de la force de radiation acoustique exercée sur les gouttes, il convient alors d'indiquer en arguments d'entrée du modèle les amplitudes de fluctuation au PAN le plus proche de la position d'injection du liquide. Sans cela, l'erreur commise lors du calcul de F_{rad} est d'autant plus grande que la déformation des ondes est élevée.

Pour le cas particulier du PF-Onera, le jet diphasique est injecté au niveau d'un ventre d'intensité acoustique (IAN) plus proche du ventre de pression situé au centre de la cavité que des deux ventres situés aux extrémités (cf. figure 6.5a). Utiliser les amplitudes de fluctuation de pression $p_{ac,\,i}$ enregistrées aux limites d'excitation du domaine pour le calcul de la force de radiation acoustique mène donc à une imprécision qu'il est nécessaire d'évaluer. Pour cela, une simulation numérique unidimensionnelle de l'onde stationnaire dans une cavité de même longueur que celle associée au PF-Onera nous permet d'extraire les amplitudes des trois modes acoustiques considérés (2T, 4T et 6T) au niveau du centre de la cavité. Les valeurs ainsi extraites sont indiquées dans le tableau 6.5. À partir des ces amplitudes et de la formulation multi-harmonique (3.54), il est possible d'évaluer la force de radiation acoustique exercée sur une sphère rigide représentant une goutte isolée située à la position d'injection du jet associée au PF-Onera, et de la comparer à la force évaluée à partir des amplitudes de fluctuation de

Solveur *phases séparées* SPS		
Fluide (loi d'état)	Phase gazeuse : air (Gaz parfait ; cf. section 2.2.1)	Phase liquide : eau (Liquide compressible ; cf. section 2.2.1) $\beta_0 = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$
Modèles physiques	• Navier-Stokes avec modèle de turbulence de Smagorinsky dans le gaz ($C_s = 0.18$) et modélisation implicite de la turbulence dans le liquide • Terme source d'accélération gravitationnelle ($g = 9.81\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	
Discrétisation spatiale	• Méthode Muscl multipente avec limiteur hybride • Schéma HLLC bas Mach (HLLC-BM)*	
Intégration temporelle	• Schéma explicite RK3 • Pas de temps fixe $\Delta t = 9.635 \times 10^{-9}$ s ($\mathrm{CFL}_{max} = 0.6$)	
Solveur *phase dispersée* DPS		
Modèles physiques	• Méthode sectionnelle avec reconstruction affine • 3 sections d'intervalles de diamètre $I_s^1 = [0\,;\,50[$, $I_s^2 = [50\,;\,150[$ et $I_s^3 = [150\,;\,300[$ (bornes en µm) • Termes sources de traînée et de radiation acoustique • Atomisation primaire : $D_a = 200\,\mu\mathrm{m}$, $\|\boldsymbol{v}_a\| = 3.5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $\theta_a = 300\,\mathrm{K}$ • Pseudo-coalescence et fragmentation • Terme source d'accélération gravitationnelle ($g = 9.81\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	
Discrétisation spatiale	• Méthode Muscl multipente avec limiteur hybride • Schéma de Godunov	
Intégration temporelle	• Splitting de Lie • Schéma explicite RK2 pour le transport • Schéma Euler explicite pour les termes sources de couplage avec quatre itérations de relaxation • Même pas de temps que le SPS	

Table 6.4 – Modèles et méthodes numériques pour la simulation du PF-Onera.

* Pour des raisons numériques, le schéma de flux HLLC-BM n'est pas compatible avec les conditions de non-réflexion. Il a cependant été démontré aux chapitres 4 et 5 que ce schéma était plus précis que la version HLLC originelle pour nos cas d'application. Une transition entre ces deux schémas est alors imposée aux limites de la cavité de manière à conserver à la fois l'aspect non réfléchissant des conditions aux limites et la précision du schéma bas Mach dans la zone de présence de la phase liquide.

Mode	Fréquence [kHz]	Amplitude de p' [Pa]		Phase [rad]
		PAN latéraux	PAN central	
2T	≈1	5 135	5 131	π
4T	≈2	887	917	2.30
6T	≈3	555	537	1.83

Table 6.5 – Caractéristiques du signal de pression acoustique aux PAN latéraux et au PAN central de la cavité.

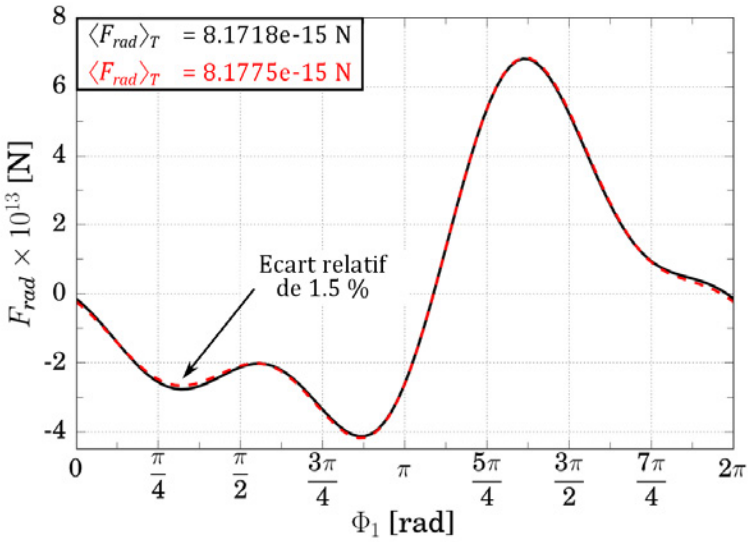


Figure 6.11 – Comparaison de la force de radiation acoustique exercée sur une sphère isolée en un IAN selon les amplitudes de fluctuation de pression considérées. Noir : amplitudes d'excitation aux PAN latéraux. Rouge : amplitudes au PAN central de la cavité.

pression enregistrées aux limites d'excitation du domaine. Le diamètre de la sphère est fixé ici à 100 µm car il s'agit d'une valeur représentative du diamètre des gouttes observées au cours du PF-Onera. On montre ainsi en figure 6.11 que l'influence de la déformation des ondes au cours de leur propagation dans la cavité sur la force de radiation acoustique est négligeable dans le cas du PF-Onera. En effet, un écart de seulement 1.5% de l'amplitude maximale de $Frad$ est observé au cours du temps entre les deux évaluations, et un écart relatif de 0.07% est mesuré entre les moyennes temporelles $\langle Frad\rangle_T$ des signaux. Dans le cas particulier du PF-Onera, les amplitudes de fluctuation de pression en n'importe quel PAN de la cavité peuvent donc être utilisées pour l'évaluation de la force de radiation acoustique exercée sur les gouttes du DPS. Dans un cas associé à des amplitudes de fluctuation de pression plus élevées, la déformation des ondes au cours de leur propagation non-linéaire pourrait cependant être plus importante et conduire à une imprécision significative. Dans la mesure où le modèle de force de radiation acoustique développé au sein du DPS est utilisé, il est ainsi conseillé d'utiliser les amplitudes de fluctuation de pression évaluées au PAN le plus proche de la position d'injection du jet.

Modélisation de l'atomisation primaire du jet liquide

Dans cette étude, la fragmentation des gouttes est modélisée sans possibilité de coalescence entre elles. Aucun mécanisme physique n'est alors susceptible de faire croître la taille des gouttes. Or, les

transferts entre solveurs par atomisation primaire ne se font que vers une seule section du DPS. Par conséquent, la section receveuse lors de l'atomisation primaire est obligatoirement la section contenant les gouttes de taille maximale. En l'état, la méthodologie ne permet de postuler qu'un unique diamètre moyen D_a, une seule norme de vitesse moyenne $\|\boldsymbol{v}_a\|$ et une seule température moyenne θ_a pour l'ensemble des gouttes issues de l'atomisation primaire. Les valeurs de ces paramètres sont définies dans la suite de ce chapitre pour la configuration étudiée.

⋆⋆ *Définition du diamètre moyen D_a* ⋆⋆

Le diamètre moyen des gouttes D_a est estimé sur la base des travaux de Marmottant et Villermaux [106] (cf. section 1.1.3). Ces auteurs ont formulé différentes relations permettant notamment d'estimer la longueur d'onde de l'instabilité transverse $\lambda_\perp$ générée par le cisaillement entre les écoulements liquide et gazeux d'un jet coaxial, ainsi que la taille moyenne $\langle D_0 \rangle$ des ligaments produits à l'atomisation du jet liquide en fonction des propriétés d'injection. Aucune relation n'est en revanche proposée pour estimer *a priori* la valeur du diamètre moyen arithmétique $\langle D \rangle$ des gouttes directement issues de la fragmentation de ces ligaments. Or, c'est cette information qui nous intéresse particulièrement pour le calcul du diamètre moyen D_a à imposer lors du couplage entre les deux solveurs. L'unique information fournie par les auteurs concerne la moyenne arithmétique du rapport entre le diamètre des gouttes issues de la fragmentation d'un ligament particulier et la taille de ce dernier : $\langle D/D_0 \rangle \approx 0.4$ (cf. relation (1.19)). Puisque la taille des ligaments D_0 suit elle-même une distribution donnée $p_L(D_0)$, il n'est en théorie pas possible de formuler $\langle D \rangle$ en fonction de $\langle D_0 \rangle$ sur la seule base de la relation (1.19). Cependant, la distribution $p_L(D_0)$ est en réalité très resserrée autour du diamètre moyen $\langle D_0 \rangle$ (cf. Marmottant et Villermaux [106]). Une hypothèse simplificatrice consiste alors à considérer que tous les ligaments créés par l'atomisation primaire du jet liquide ont une taille unique $D_0 = \langle D_0 \rangle$. La relation (1.19) peut ainsi conduire à l'expression suivante du diamètre moyen arithmétique des gouttes directement issues de la fragmentation des ligaments :

$$\langle D \rangle \approx 0.4 \langle D_0 \rangle. \tag{6.4}$$

Cette hypothèse a déjà était réalisée par le passé de façon implicite par Villermaux [158] dans un rapport non publié et par Le Touze [90] pour estimer le diamètre d'atomisation D_a dans le cas particulier du point de fonctionnement BHP A-10 du banc Mascotte. Dans le cas particulier du point de fonctionnement PF-Onera, on obtient $\langle D \rangle \approx 110\,\mu\text{m}$.

Rappelons que le diamètre $\langle D \rangle$ correspond au diamètre moyen arithmétique D_{10} associé à la distribution de la taille des gouttes issues de la fragmentation des ligaments. Or, le diamètre moyen calculé dans le DPS à partir de la fraction volumique et de la densité en nombre de gouttes (cf. relation (A.2)) correspond formellement au diamètre statistique volumique D_{30}. Ainsi, le diamètre moyen D_a imposé lors du couplage entre les solveurs doit en toute rigueur correspondre au diamètre moyen volumique D_{30} associé à la valeur de $\langle D \rangle$. Pour le calcul de ce D_{30}, il est possible de s'appuyer sur la distribution numérique normalisée $p(D)$ du diamètre des gouttes issues de la fragmentation des ligaments exprimée par Marmottant [105] (cf. équation (1.20)). Par définition, le diamètre moyen volumique s'exprime comme :

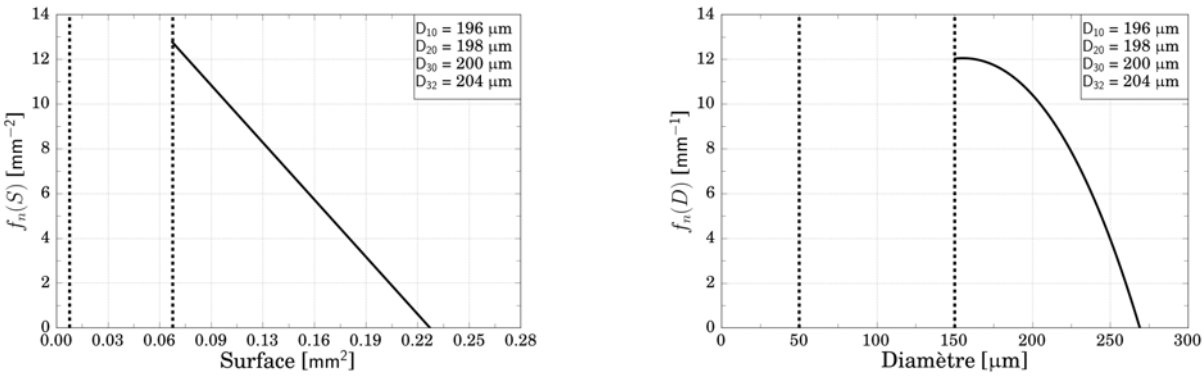
$$D_{30}^3 = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} D^3 p(D) dD}{\underbrace{\displaystyle\int_0^{+\infty} p(D) dD}_{=1}}. \tag{6.5}$$

Une succession d'intégrations par parties de cette équation combinée à l'expression (1.20) de $p(D)$

conduit à :

$$
\begin{aligned}
D_{30}^3 &= \int_0^{+\infty} \frac{D^3}{\langle D \rangle} e^{-D/\langle D \rangle} dD, \\
&= \left[-D^3 e^{-D/\langle D \rangle} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 3D^2 e^{-D/\langle D \rangle} dD, \\
&= \left[-\left(D^3 + 3D^2 \langle D \rangle \right) e^{-D/\langle D \rangle} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 6D \langle D \rangle e^{-D/\langle D \rangle} dD, \\
&= \left[-\left(D^3 + 3D^2 \langle D \rangle + 6D \langle D \rangle^2 \right) e^{-D/\langle D \rangle} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 6 \langle D \rangle^2 e^{-D/\langle D \rangle} dD, \\
&= \left[-\left(D^3 + 3D^2 \langle D \rangle + 6D \langle D \rangle^2 + 6 \langle D \rangle^3 \right) e^{-D/\langle D \rangle} \right]_0^{+\infty}, \\
&= 6 \langle D \rangle^3 .
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

Pour la configuration retenue, un diamètre moyen unique D_a de 200 µm est alors imposé lors de l'atomisation primaire. Comme il l'est démontré en annexe B, le fait d'imposer à la fois le diamètre moyen volumique D_a ainsi que les bornes inférieure S_{N_s-1} et supérieure S_{N_s} de la section atomisante revient à imposer une distribution numérique normalisée unique et constante de la taille des gouttes lors de l'atomisation primaire. Cette distribution respecte l'hypothèse de reconstruction affine opérée par le DPS et est donc incompatible avec la forme de distribution exponentielle proposée par Marmottant [105] (cf. équation (1.20)). Il est alors impossible, avec cette modélisation particulière de l'atomisation primaire, d'imposer à la fois un diamètre moyen arithmétique et un diamètre moyen volumique respectant les corrélations issues des travaux de la littérature. La distribution numérique normalisée imposée par le trio $(D_a, S_{min}^{k_a}, S_{max}^{k_a})$ = (200 µm, 150 µm, 300 µm) est représentée en figure 6.12 selon la surface et le diamètre des gouttes.



(a) **(b)**

Figure 6.12 – Distribution numérique normalisée de la taille des gouttes imposée lors de l'atomisation primaire. (a) Représentation suivant la surface et (b) le diamètre des gouttes.

★★ *Définition de la vitesse moyenne* $\boldsymbol{v}_a$ ★★

Dans notre stratégie numérique, nous faisons l'hypothèse que la direction du vecteur vitesse des gouttes issues de la fragmentation des ligaments est instantanément relaxée vers celle du fluide porteur dans chaque maille. Cette hypothèse, justifiée par les conclusions de Villermaux et Eloi [161], implique localement :

$$
\boldsymbol{v}_a = \|\boldsymbol{v}_a\| \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \tag{6.7}
$$

avec, rappelons-le, $\boldsymbol{u}$ la vitesse locale du fluide porteur. La norme de la vitesse $\|\boldsymbol{v}_a\|$, quant à elle, est unique et estimée *a priori*. Plusieurs façon de calculer cette norme de vitesse sont proposées ci-dessous.

En premier lieu, la description phénoménologique de l'atomisation primaire d'un jet liquide issu d'un injecteur coaxial effectuée en section 1.1 a mis en évidence le lien direct entre l'instabilité longitudinale et la formation des ligaments. De façon simplifiée, il est possible de considérer que ces ligaments se séparent du cœur liquide à la vitesse de propagation de cette instabilité U_c estimée par la moyenne des vitesses d'injection des deux fluides U_l et U_g pondérées par leurs masses volumiques respectives ρ_l et ρ_g (cf. équation (1.11)). En faisant l'hypothèse que les gouttes directement issues de l'atomisation de ces ligaments ont la même vitesse, on obtient alors dans notre cas une norme de vitesse $\|\boldsymbol{v}_a\| = U_c = 3.65\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

En second lieu, la norme de vitesse $\|\boldsymbol{v}_a\|$ peut être estimée en s'appuyant sur la relation de similarité (1.21) issue des travaux de Villermaux [158]. Pour simplifier l'approche, on considère ici cette relation comme une égalité et on assimile les diamètres d_0 et d à leurs moyennes arithmétiques respectives $\langle d_0 \rangle$ et $\langle d \rangle$. La relation (1.21) fait intervenir le coefficient de traînée C_D (cf. équation (1.22)) ainsi que le nombre de Reynolds particulaire Re_p (cf. équation (1.23)). On résout alors le système de manière itérative en remplaçant la vitesse du gaz par la valeur à l'injection U_g et la vitesse de la goutte par la vitesse moyenne recherchée $\|\boldsymbol{v}_a\|$. On obtient finalement une convergence pour une valeur de $3.46\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Puisque les deux méthodes d'estimation de $\|\boldsymbol{v}_a\|$ fournissent des résultats équivalents, une valeur intermédiaire de $3.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ est imposée lors de nos simulations.

⋆⋆ *Définition de la température moyenne θ_a* ⋆⋆

Enfin, la température θ_a des gouttes issues de l'atomisation primaire du jet liquide est elle aussi imposée de façon unique. Puisqu'il s'agit d'un écoulement non réactif dans lequel le liquide et le gaz sont tous deux injectés à température ambiante T_{atm}, aucun échange de chaleur significatif n'intervient entre les deux fluides. La température des gouttes atomisées est donc imposée à $\theta_a = T_{atm} = 300\,\mathrm{K}$.

6.4.4 Élaboration de la stratégie de simulation

Pour finir, une stratégie d'initialisation particulière est élaborée pour cette étude. Les différentes étapes de cette stratégie sont les suivantes :

1. Une colonne d'eau est initialisée dans l'injecteur liquide avec une vitesse uniforme U_l correspondant à la vitesse d'injection nominale, tandis qu'aucun écoulement n'est imposé au sein du co-courant gazeux. Cette méthode d'initialisation permet de réduire les contraintes de cisaillement subies par le liquide à l'entrée de la cavité acoustique, notamment au niveau de la lèvre de l'injecteur où le gradient de fraction volumique peut être localement très important.
2. Lorsque le jet liquide a parcouru une distance équivalente à plusieurs diamètres D_l, et que l'interface diphasique s'est suffisamment diffusée au niveau de la lèvre de l'injecteur, l'injection du co-courant gazeux est alors déclenchée. Afin d'accélérer la déstabilisation du jet liquide par cisaillement, la vitesse d'injection du gaz est imposée à une valeur deux à trois fois supérieure à la vitesse d'injection nominale U_g. Cependant, de manière à éviter la génération d'ondes acoustiques lors de l'injection du gaz, cette vitesse est imposée de façon progressive par l'intermédiaire d'une rampe de vitesse sur un millier d'itérations.
3. Une fois le jet liquide déstabilisé, la vitesse d'injection du gaz est ensuite réduite à sa valeur nominale U_g. Le cisaillement entre les deux fluides est alors nettement réduit, induisant un allongement du cœur liquide.
4. Enfin, le couplage avec le DPS via les termes sources d'atomisation primaire est déclenché. Rappelons que la phase dispersée n'est introduite dans le domaine qu'à partir de ces termes sources. Le transfert de masse entre les deux solveurs participe alors à son tour à l'épluchage du jet liquide. Une période transitoire est nécessaire jusqu'à l'établissement de la longueur du cœur liquide ainsi que des propriétés du spray (diamètres moyens statistiques, fraction volumique, densité en nombre de gouttes) vers des valeurs d'équilibre.

Au cours de cette phase d'initialisation, une astuce numérique consiste à augmenter artificiellement la compressibilité du liquide afin de réduire le temps de restitution. En effet, ce dernier est directement

	Air		Eau	
			Prop. réelles	Prop. modifiées
T	T_0	T	T_0	
γ_g	1.4	ρ_0 [kg · m^{-3}]	≈1 000	
r_g [J · kg^{-1} · K^{-1}]	287.05	α_0 [K^{-1}]	3×10^{-4}	
c_g [m · s^{-1}] (cf. éq. (2.70))	347	β_0 [Pa^{-1}]	5×10^{-10}	1×10^{-8}
		$c_{p,l}$ [J · kg^{-1} · K^{-1}]	4 184	
		c_l [m · s^{-1}] (cf. éq. (2.76))	1 423	316

Table 6.6 – Calcul de la vitesse du son dans les fluides purs.

lié au pas de temps numérique Δt, dont la valeur est limitée par le critère de stabilité associé au schéma d'intégration temporel utilisé. Le nombre de courant CFL dans chaque cellule du maillage est alors limité par une valeur maximale CFL_{max} comme :

$$\mathrm{CFL} = \frac{(\|\boldsymbol{u}\| + \overline{c})\Delta t}{d_c} \leq \mathrm{CFL}_{max}, \tag{6.8}$$

où $\overline{c}$ est la vitesse du son dans le mélange et d_c est le diamètre du cercle inscrit d'un tétraèdre régulier de même rapport volume (V) / surface (A) que la cellule considérée. Celui-ci est alors défini par $d_c = 6V/A$. Le calcul de la vitesse du son au sein des deux fluides purs est réalisé à l'aide des fermetures thermodynamiques présentées en section 2.2.1. Le détail de ces calculs pour le cas présent, où la température des fluides T_{atm} correspond à la température de référence T_0, est fourni dans le tableau 6.6. On y remarque que la vitesse du son est nettement supérieure au sein du liquide. Par conséquent, le pas de temps numérique maximal est limité par les cellules de liquide pur. Une manière d'alléger cette contrainte consiste alors à réduire artificiellement la vitesse du son au sein du liquide. D'après l'équation (2.76), un lien direct existe entre la vitesse du son et le coefficient de compressibilité isotherme β_0 du liquide. Une augmentation de β_0 de sa valeur physique 5×10^{-10} Pa^{-1} à une valeur de 10^{-8} Pa^{-1} permet alors d'obtenir des vitesses du son équivalentes dans les deux fluides et ainsi de diviser le temps de restitution par quatre. La valeur du coefficient β_0 doit évidemment être de nouveau imposée à sa valeur initiale pour atteindre l'établissement final de l'écoulement diphasique. Notons que la faible compressibilité du liquide ainsi que sa faible vitesse d'injection sont les deux paramètres les plus limitants vis-à-vis du temps de restitution des calculs.

Deux simulations numériques sont ensuite réalisées à partir d'un même instant t_0 auquel le champ diphasique est établi. La première, que l'on nomme MC dans la suite de ce mémoire pour *Modulated Case*, est réalisée en imposant l'excitation acoustique définie précédemment dans ce chapitre. Durant le temps physique simulé, la phase liquide dense et le co-courant gazeux parcourent respectivement une distance de 5 D_l et 312 D_l, soit environ 0.5 et 29 fois la hauteur du domaine numérique raffiné (cf. figure 6.8). Le spray, de vitesse verticale comprise entre U_l et U_g, parcourt quant à lui entre 2.5 et 7.5 fois cette distance selon la taille des gouttes considérées. Le temps physique de simulation correspond également à $23T_{ac}$, avec T_{ac} la période acoustique du mode 2T de la cavité. Même si ce temps de simulation n'est pas suffisant pour atteindre la convergence des moyennes associées au cœur liquide, il permet de réaliser une analyse complète du comportement transitoire du jet à partir du début de l'excitation acoustique. La moyenne des résultats est quant à elle calculée au maximum sur les 18 dernières périodes acoustiques simulées afin de s'affranchir de la phase d'établissement du champ acoustique au sein du domaine de calcul. La seconde simulation numérique, nommée ici NMC pour *Non Modulated Case*, est en revanche réalisée sans excitation acoustique et est comparée à la simulation MC pour mettre en évidence l'influence de l'acoustique sur l'écoulement. Le temps physique simulé pour cette simulation est équivalent à $18T_{ac}$, ce qui permet de réaliser une moyenne des résultats sur un temps équivalent

à la simulation MC. Notons que l'on utilise ici une échelle de temps basée sur le nombre de périodes acoustiques malgré l'absence d'excitation lors du NMC de manière à faciliter la comparaison entre les deux simulations. Ces simulations ont nécessité au total plus de 4 MhCPU sur 1 008 processeurs Intel Haswell. Ces calculs ainsi que la phase préalable d'établissement du champ diphasique ont été réalisés sur le supercalculateur Occigen du Cines grâce aux allocations 2 016-c20 162b7 710 et 2 017-A22B7 710 d'un total de 6.2 MhCPU.

Dans le chapitre suivant, une partie des résultats de la simulation NMC est exploitée afin d'illustrer la méthodologie de simulation numérique d'écoulements diphasiques avec le code Cedre en l'absence d'onde acoustique. Cela devrait faciliter la compréhension des résultats du MC présentés au chapitre 8.

Chapitre 7

Illustration de la stratégie de simulation de jets diphasiques atomisés

La configuration expérimentale reproduite pour la simulation numérique d'un jet diphasique atomisé sous excitation acoustique ainsi que les détails de la mise en donnée ont été présentés au chapitre 6. Suite à celui-ci, le chapitre 7 est dédié à la présentation d'une sélection de résultats relatifs à la simulation du jet en l'absence d'excitation acoustique. Il s'agit là d'une façon concrète d'illustrer la stratégie de simulation d'écoulements liquides atomisés avec le code Cedre dans un cadre général sans onde acoustique, qui est celui pour lequel cette stratégie a été initialement formulée. Par ailleurs, des comparaisons aux résultats expérimentaux disponibles du Coria ainsi qu'à des corrélations issues de la littérature sont réalisées à la fin du chapitre afin d'apporter des premiers éléments de validation du code en l'absence d'onde acoustique. Les résultats du cas modulé transversalement en pression seront quant à eux présentés en détail au chapitre 8.

Sommaire

7.1 Modélisation de l'atomisation primaire 148
7.2 Modélisation de la fragmentation des gouttes du spray 149
7.3 Comparaison aux résultats expérimentaux 154

7.1 Modélisation de l'atomisation primaire

Le processus d'atomisation primaire du jet liquide est traité numériquement à la fois par le SPS et par la méthodologie de couplage entre les deux solveurs. Pour commencer, les deux fluides sont injectés au sein du domaine de calcul par l'intermédiaire de l'injecteur coaxial et sont simulés par le SPS. L'écoulement diphasique résultant est représenté en figure 7.1 par les champs instantanés de fractions volumique α_l et massique Y_l de liquide. Puisque le SPS est basé sur une méthode de diffusion de l'interface, ces champs sont continus. À la sortie de l'injecteur, le jet liquide est soumis à un cisaillement important opéré par l'écoulement co-courant gazeux injecté à haute vitesse. Pour cette simulation, le maillage présenté au chapitre 6 est construit de manière à pouvoir discrétiser les instabilités à la surface du jet liquide induites par les contraintes aérodynamiques. Le SPS est par conséquent capable de restituer la propagation de ces instabilités le long de l'interface diphasique jusqu'à ce que celles-ci conduisent à l'atomisation primaire du cœur liquide. Le maillage actuel permet également de décrire les plus grosses structures liquides qui résultent de cette atomisation. Ces structures sont visibles sur le champ de α_l en figure 7.1a en aval du cœur liquide. Pour assurer la description des gouttes les plus petites avec le SPS, la discrétisation spatiale nécessaire est inenvisageable. Lorsque la discrétisation spatiale n'est plus suffisante pour décrire localement l'interface diphasique, on observe alors une diffusion plus importante de celle-ci, comme en aval du cœur liquide sur le champ de Y_l en figure 7.1b. Dans ce cas, on a alors recours au couplage du SPS avec le DPS.

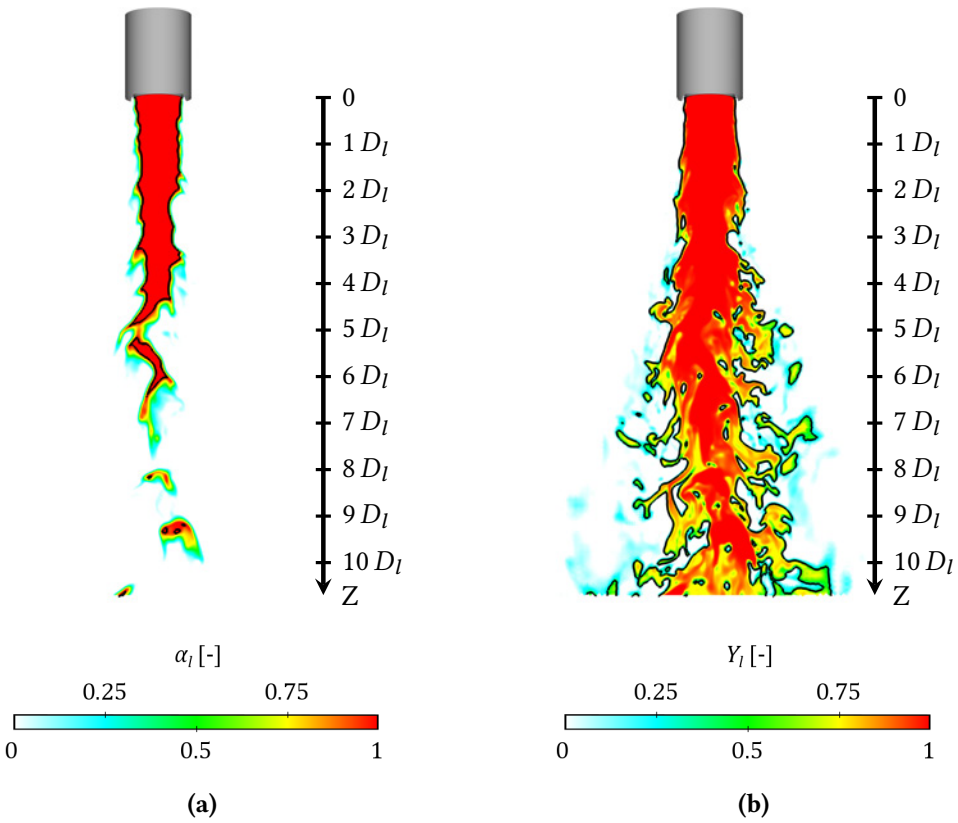


Figure 7.1 – Champs 2D (a) de fraction volumique et (b) de fraction massique de liquide au sein du SPS. ▬ Iso-lignes α_l = 0.99 et Y_l = 0.4.

La méthodologie de couplage du code Cedre est basée sur un transfert local de la masse de liquide du SPS vers le DPS dans les cellules du domaine présentant à la fois du liquide et un cisaillement suffisant. Puisque le SPS ne résout que la vitesse moyenne du mélange diphasique, nous n'avons pas accès au différentiel de vitesse entre les deux fluides. L'estimation du niveau de cisaillement entre ces deux fluides se fait alors à travers l'évaluation de la fréquence turbulente f_t qui est une mesure de

l'intensité du gradient de vitesse local du mélange diphasique (cf. formulation (2.100)). Dans le cas présent, le champ de vitesse du mélange est représenté en figure 7.2a. On y observe un écoulement particulièrement rapide à la sortie du co-courant gazeux qui ralentit au fur et à mesure de sa propagation dans la cavité. Le liquide étant injecté à une vitesse bien plus faible que celle du gaz (quasiment deux ordres de grandeur d'écart), l'écoulement central, au sein duquel la fraction massique de liquide est importante, peut être considéré comme à l'arrêt du point de vue de l'écoulement gazeux. Le calcul de la fréquence turbulente représentée en figure 7.2b révèle ainsi une intensité du gradient de vitesse élevée dans la zone de cisaillement entre l'écoulement gazeux et le jet liquide. Le gradient local de vitesse conduit donc dans cette zone à un transfert de la masse de liquide du SPS vers le DPS. La distribution spatiale du terme source d'atomisation primaire S_a lié à ce transfert est représentée en figure 7.3b. D'après la formulation (2.99) de ce terme source et plus particulièrement de la fonction d'activation λ_a (2.101), le transfert de masse est favorisé pour les valeurs faibles de fraction massique de liquide, *i.e.* du côté *gazeux* de l'interface ($Y_l < 0.4$ sur la figure 7.3b). Par ailleurs, un transfert de masse inverse du DPS vers le SPS est assuré afin de modéliser la coalescence des gouttes du spray avec le cœur liquide ou avec les plus grosses structures détachées. Ce transfert inverse est opéré pour chaque section du spray à l'aide du terme source s_c^k (2.103) représenté en figure 7.3a. Dans le cas présent, la coalescence des gouttes avec le jet dense est bien plus importante pour les plus grosses gouttes et présente localement des niveaux d'intensité aussi élevés que ceux de l'atomisation primaire. Combinés l'un à l'autre, les transferts de masse entre les deux solveurs donnent lieu à un débit d'atomisation net par unité de volume S_{net} défini comme :

$$S_{net} = S_a - \sum_{k=1}^{N_s} s_c^k, \tag{7.1}$$

dont le champ est représenté en figure 7.3c. L'atomisation, représentée en rouge sur cette figure, est évidemment prépondérante une fois intégrée sur tout le domaine de calcul puisque la phase dispersée n'est créée que par le transfert de masse entre solveurs. Rappelons que seule la section du spray contenant les gouttes de plus grande taille est alimentée par ce transfert de masse. Il est alors nécessaire de modéliser leur fragmentation de manière à décrire la polydispersion du spray.

7.2 Modélisation de la fragmentation des gouttes du spray

Le processus de fragmentation modélisé au sein du DPS peut conduire à la création de gouttes de taille inférieure à la borne minimale de la section contenant la goutte mère. Dans ce cas, un transfert de masse de liquide entre sections est nécessaire. Le transfert en question peut être réalisé depuis n'importe quelle section vers toute autre section de taille inférieure. Pour l'évaluation des termes sources, la fréquence de fragmentation ainsi que le nombre et la taille des gouttes créées dépendent essentiellement du nombre de Weber, noté We, caractérisant le rapport entre les forces aérodynamiques et la force de tension de surface exercées sur les gouttes. Dans le cas présent, les champs de We^k associés à chaque section k du spray sont représentés en figure 7.4a. Selon ces résultats, l'inertie ainsi que la taille plus importantes des gouttes contenues dans la dernière section induisent des valeurs de We^k plus élevées que dans les autres sections. En particulier, la valeur seuil $\mathrm{We}^k = 12$ à partir de laquelle la fragmentation des gouttes peut opérer d'après la corrélation (1.24) n'est atteinte qu'au sein de la section des gouttes les plus grosses. C'est pourquoi seule la fréquence de fragmentation ν_{fr}^k des gouttes contenues dans cette section est non nulle et représentée en figure 7.4b. Celle-ci révèle un processus de fragmentation opérant exclusivement dans une zone proche du plan d'injection où le cisaillement entre l'écoulement gazeux et les particules est le plus important. Ce processus de fragmentation résulte alors en la création de gouttes de tailles inférieures et donc potentiellement en un transfert de masse de la section des plus grosses gouttes vers les deux sections restantes. Le transport de ces nouvelles gouttes soumises elles aussi à l'écoulement gazeux donne lieu au final aux champs de fractions volumiques α^k, de densités particulaires n^k et de vitesses de gouttes $\|\boldsymbol{v}^k\|$ représentés en figure 7.5 pour chaque section du spray.

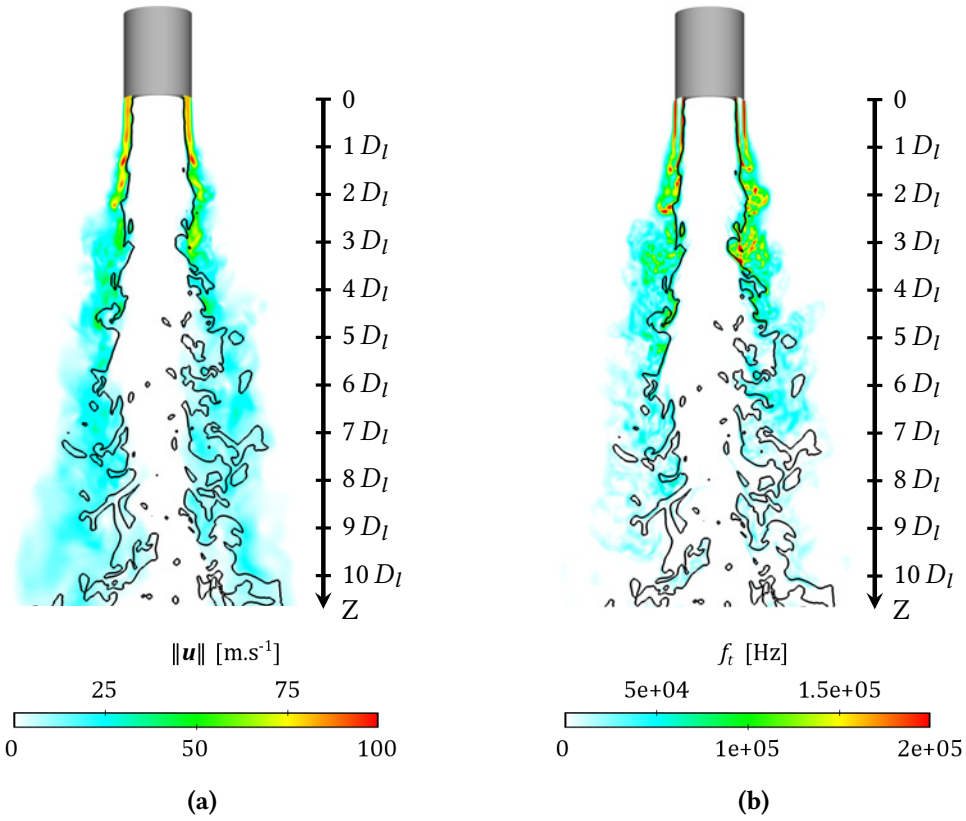


Figure 7.2 – Champs 2D (a) du module de vitesse du mélange diphasique et (b) de la fréquence turbulente au sein du SPS. ▬ Iso-ligne Y_l = 0.4.

Ces champs 2D révèlent une fraction volumique (et donc massique) de gouttes nettement plus importante au sein de la section contenant les plus grosses gouttes, malgré une densité numérique inférieure d'un ordre de grandeur. De plus, l'inertie des plus grosses gouttes induit une vitesse d'entraînement plus faible par l'écoulement gazeux. Cette observation est en accord avec les champs de We^k en figure 7.4 reflétant un différentiel de vitesse plus important entre le gaz et les grosses gouttes.

De manière à illustrer l'évolution de la polydispersion du spray créé par l'atomisation du jet liquide, les distributions numériques instantanées de la taille des gouttes par unité de volume $\phi_n(D)$ sont tracées en figure 7.6 en deux sondes positionnées dans le spray et représentées sur chacun des champs de la figure 7.5 (cf. annexe A pour les détails de calcul de ces distributions). Nous noterons ici X^* la coordonnée sur l'axe $\boldsymbol{X}$ avec le centre de l'injecteur utilisé comme référence. La première sonde, positionnée à une distance $X^* = 0.56\,D_l$ de l'axe d'injection et $Z = 0.82\,D_l$ du plan d'injection, révèle une faible population de gouttes uniquement distribuées dans la section des plus gros objets avec un diamètre statistique D_{30} de 200 µm correspondant à la valeur imposée à l'atomisation du jet liquide. Cette sonde est en réalité positionnée dans une zone de l'interface diffuse du cœur liquide concernée uniquement par le transfert de masse entre solveurs. Plus loin en aval du spray, à une distance $X^* = 1.51\,D_l$ et $Z = 5.46\,D_l$, l'atomisation primaire continue d'alimenter la section contenant les plus gros objets, tandis que la fragmentation des gouttes par l'écoulement gazeux tout au long de leur propagation le long de l'axe d'injection induit un peuplement des sections inférieures et particulièrement de la plus petite d'entre elles, résultant ainsi en une distribution bimodale. Ces observations justifient *a posteriori* l'intérêt de l'approche sectionnelle et de la description continue par morceaux de la distribution numérique de la taille des gouttes qui permettent de restituer l'évolution de la polydispersion du spray dans l'espace et le temps.

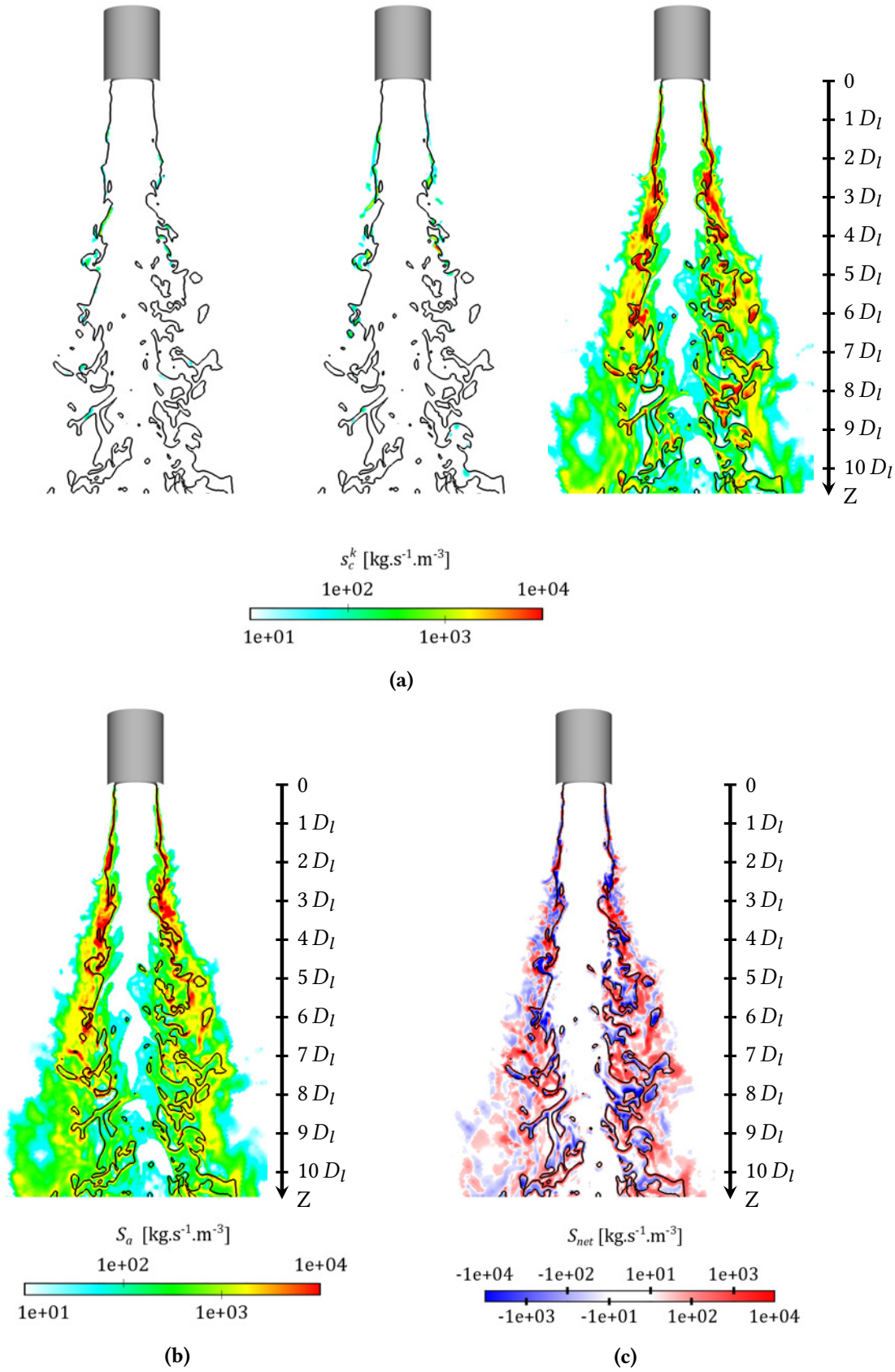


Figure 7.3 – Champs 2D (a) du débit massique de pseudo-coalescence de chaque section du spray (de gauche à droite : petite, moyenne et grande sections), (b) du débit d'atomisation primaire et (c) du débit net d'atomisation. ▬ Iso-ligne Y_l = 0.4.

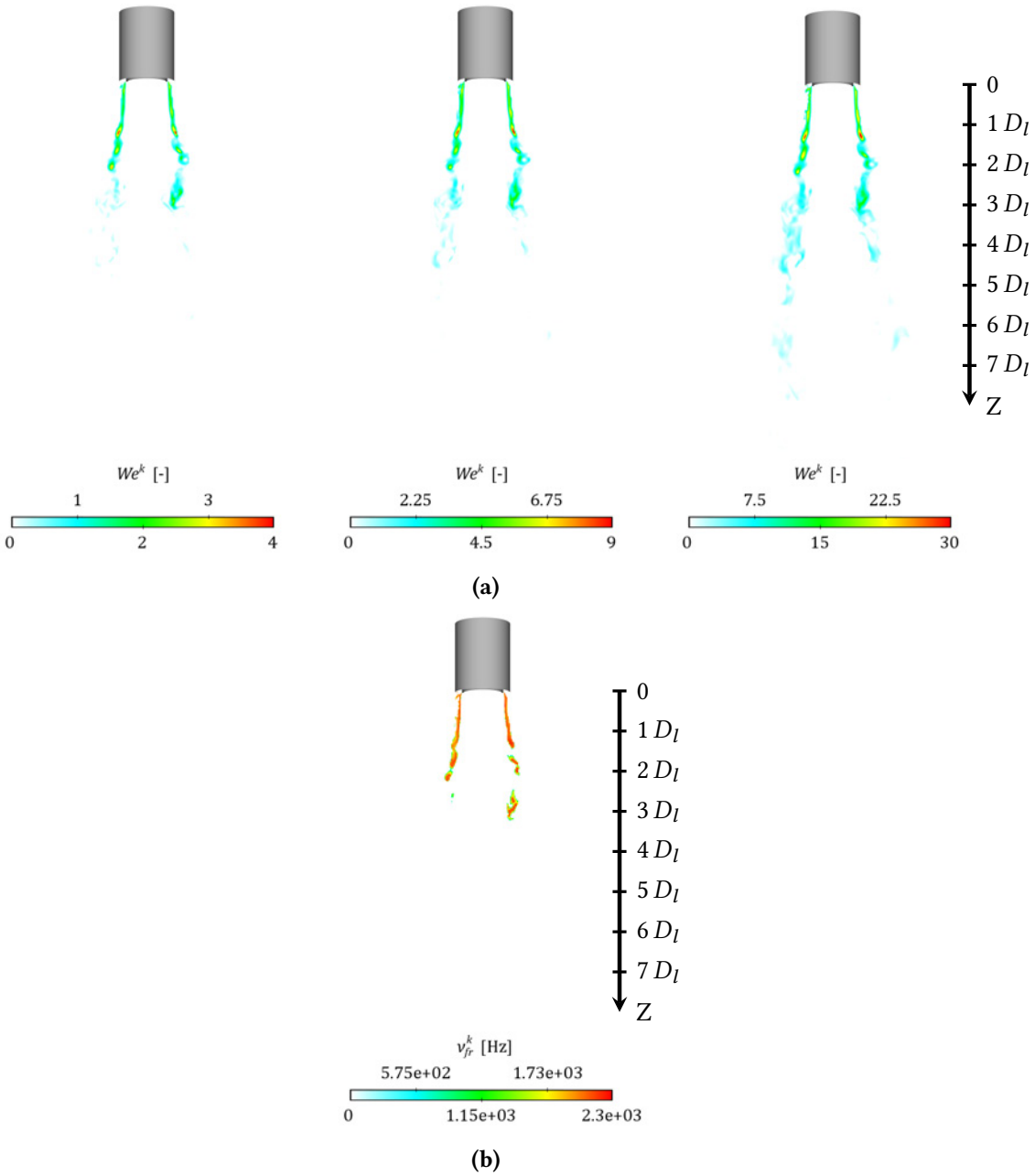


Figure 7.4 – Champs 2D (a) du nombre de Weber des gouttes de chaque section du spray (de gauche à droite : petite, moyenne et grande sections) et (b) de la fréquence de fragmentation des gouttes contenues dans la plus grande section.

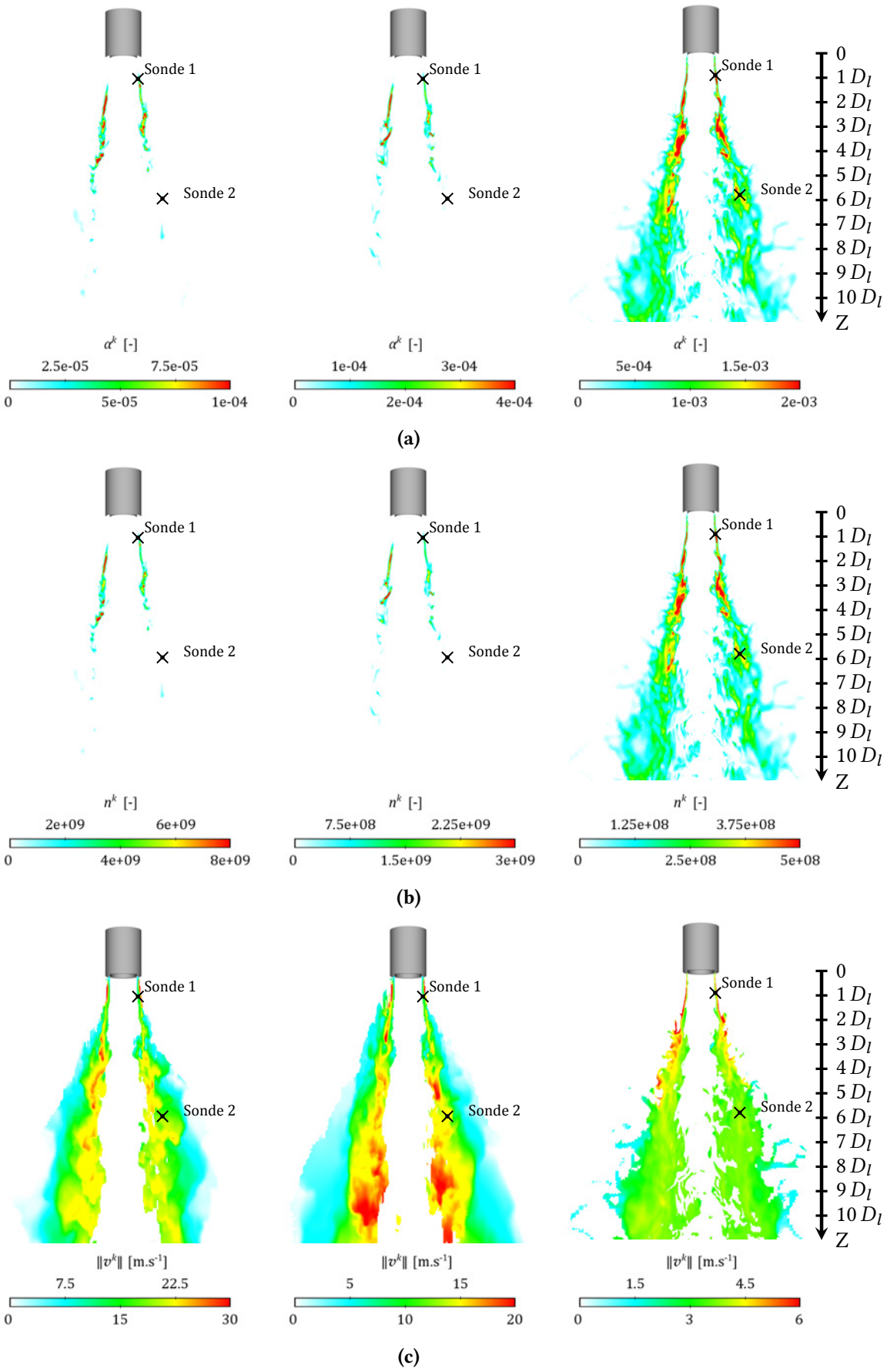
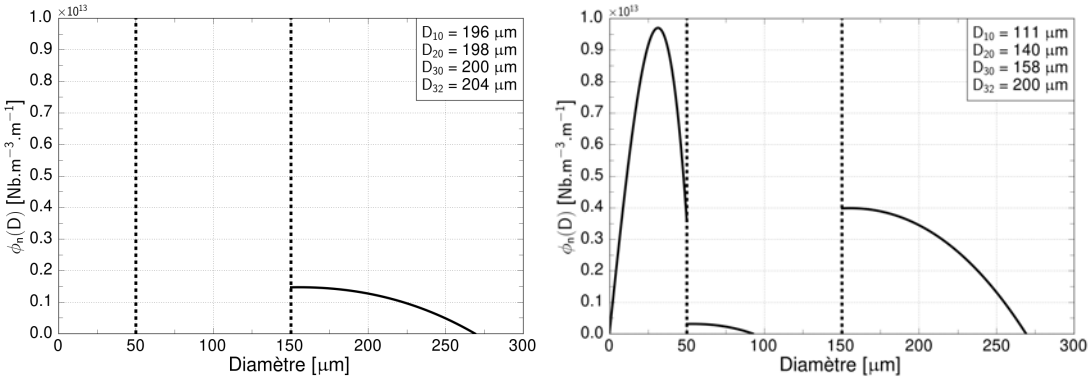


Figure 7.5 – Champs 2D (a) de la fraction volumique, (b) de la densité numérique et (c) du module de vitesse des gouttes contenues dans chaque section du spray (de gauche à droite : petite, moyenne et grande sections).

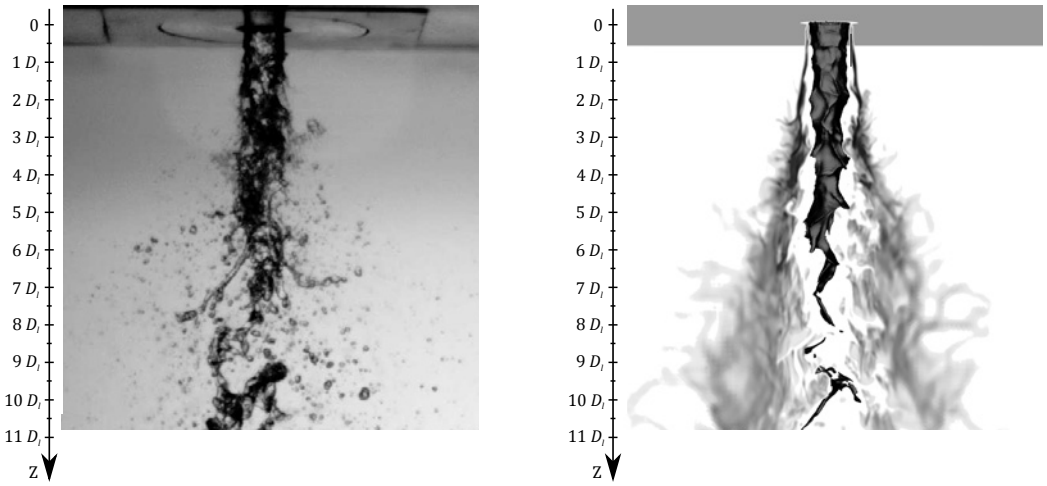


(a) Sonde 1 **(b) Sonde 2**

Figure 7.6 – Distributions numériques du diamètre des gouttes aux deux sondes de mesure.

7.3 Comparaison aux résultats expérimentaux

Une comparaison qualitative des résultats numériques au jet observé expérimentalement par le Coria sans excitation acoustique est effectuée en figure 7.7. L'image expérimentale (cf. figure 7.7a) est acquise par ombroscopie. En ce qui concerne l'image numérique (cf. figure 7.7b), la visualisation de l'interface diphasique résolue par le SPS nécessite de fixer une valeur seuil de fraction volumique de liquide puisque l'interface entre le gaz ($\alpha_l = 0$) et le liquide ($\alpha_l = 1$) est diffusée sur plusieurs cellules du maillage. Les structures liquides résolues par le SPS sont donc représentées sur la figure 7.7b avec une iso-surface 3D noire de $\alpha_l = 0.99$, qui sera notée $\alpha_{l,\,0.99}$ par la suite. En ce qui concerne le spray modélisé par le DPS, la présence de gouttes est représentée par une coupe longitudinale colorée par la fraction volumique de gouttes totale $\alpha^{tot} = \sum_k \alpha^k$ en échelle de gris.



(a) **(b)**

Figure 7.7 – Images instantanées (a) expérimentale et (b) numérique de l'écoulement diphasique.

Sur les deux images, le cœur liquide forme une longue structure foncée qui s'étend depuis la sortie de l'injecteur. Les deux images révèlent des instabilités qui se développent à la surface du jet liquide sous l'action des contraintes de cisaillement dues à l'écoulement gazeux co-courant. Ces instabilités entraînent alors le détachement de grandes structures à l'extrémité du cœur liquide qui sont ensuite convectées le long de l'axe d'injection. La longueur de ce cœur semble équivalente sur les deux images,

bien qu'il soit difficile de distinguer la séparation entre celui-ci et les premières structures liquides détachées en aval sur l'image expérimentale. L'atomisation du jet se traduit également par la création de petites gouttes tout autour du cœur liquide. Ces gouttes sont convectées en aval par le co-courant gazeux et se dispersent radialement pour former un jet conique, observé à la fois sur les images expérimentales et numériques. De ces observations, il apparaît que la stratégie de simulation d'écoulements diphasiques de Cedre est adaptée pour restituer au moins de façon qualitative la topologie macroscopique de l'écoulement liquide. Une évaluation quantitative reste cependant nécessaire. Malheureusement, la densité importante du spray sur l'image obtenue par ombroscopie empêche toute mesure de la longueur du cœur liquide dans les conditions de fonctionnement actuelles. Toutefois, les corrélations expérimentales et théoriques présentées en section 1.1.4 peuvent servir de référence.

Il est possible dans un premier temps de comparer la longueur moyenne de cœur liquide intact à la corrélation (1.30) de Eroglu *et al.* [42]. Dans sa thèse, Le Touze [90] présente une méthode de mesure de la longueur de cœur liquide spécifique aux jets coaxiaux en régime de type fibre simulés par interface diffuse. Cette méthode de mesure consiste à évaluer le volume total de cellules $\mathcal{V}$ en dehors de l'injecteur caractérisées par une fraction volumique de liquide α_l supérieure à une valeur seuil donnée. En considérant que la forme du cœur liquide peut être approchée par un cône, sa longueur est alors estimée par la relation $L = 12\mathcal{V}/(\pi D_l^2)$. Cette méthode de mesure est bien adaptée aux jets fortement atomisés effectivement coniques comme dans le cas du point de fonctionnement BHP A-10, mais beaucoup moins adaptée à des jets tels que celui observé en figure 7.7b avec une forme cylindrique en amont ($Z < 3\,D_l$) et conique en aval ($Z > 3\,D_l$). De plus, une fois soumis au champ acoustique, le cœur liquide tend à emprunter une forme proche d'une nappe liquide, invalidant ainsi l'hypothèse de jet liquide conique. Une nouvelle méthode de mesure est donc définie et présentée ici et pourra être appliquée en présence d'acoustique au chapitre suivant. Comme pour la méthode de Le Touze [90], les cellules du maillage caractérisées par une fraction volumique de liquide supérieure à une valeur seuil donnée sont isolées. Selon la valeur seuil $\alpha_{l,\,x}$ sélectionnée, on obtient alors un ensemble de structures diphasiques plus ou moins résolues représentant le cœur liquide et les ligaments captés par le maillage. La connaissance des connectivités entre les cellules contenues dans ces structures permet ensuite d'isoler le cœur liquide des ligaments en appliquant par exemple la théorie des graphes et plus particulièrement l'algorithme de Tarjan [147]. La longueur du cœur liquide $L_{lc,\,x}$ spécifique à la valeur seuil retenue est enfin estimée par la distance normale au plan d'injection du centre de la cellule la plus éloignée contenue dans l'iso-volume du cœur liquide, celui-ci étant défini comme la seule structure rattachée à l'injecteur. La valeur de $L_{lc,\,x}$ obtenue par la simulation numérique dépend évidemment de la valeur seuil de fraction volumique considérée. Le rapport entre la moyenne temporelle de $L_{lc,\,x}$ obtenue par la simulation et la valeur prédite par la corrélation (1.30) de Eroglu *et al.* [42] est calculé dans le tableau 7.1 pour les trois valeurs seuil $\alpha_{l,\,1.0}$, $\alpha_{l,\,0.99}$ et $\alpha_{l,\,0.9}$. Bien que l'écart puisse sembler important, il est en réalité assez difficile de définir la valeur seuil la plus représentative lorsque l'on utilise une méthode à diffusion d'interface. Les conclusions sur la base de cette comparaison sont donc limitées.

Valeur seuil $\alpha_{l,\,x}$	$\alpha_{l,\,1.0}$	$\alpha_{l,\,0.99}$	$\alpha_{l,\,0.9}$
$\overline{L_{lc,\,x}}/\overline{L_{lc}^{Ero}}$	0.49	0.65	0.74

Table 7.1 – Comparaison des longueurs moyennes de cœur liquide intact obtenues par la simulation numérique à la corrélation (1.30) de Eroglu *et al.* [42].

Cette limitation est en revanche moins importante lorsque l'on s'appuie sur les champs moyens de fraction volumique de liquide, puisque l'opération de moyenne temporelle conduit elle-même à un champ continu de probabilité de présence de liquide, que l'on utilise une méthode à interface diffuse ou non. On s'attache donc dans un second temps à comparer les longueurs de cœur liquide associées à différentes valeurs de probabilité de présence aux corrélations expérimentales (1.31) de Villermaux [159] formulées elles aussi sur la base de champs moyens. Pour cette comparaison, le niveau de dilu-

tion le long de l'axe du jet peut être évalué dans le NMC grâce à la moyenne temporelle de fraction volumique de liquide $\overline{\alpha_l}$ au sein du SPS. Le champ $\overline{\alpha_l}$ dans un plan de visualisation contenant l'axe d'injection est représenté en figure 7.8. La moyenne temporelle est réalisée ici sur l'intégralité du temps physique simulé lors du NMC. De ce champ 2D, il est possible d'évaluer la longueur des iso-lignes $\overline{\alpha_{l,\,1.0}}$ et $\overline{\alpha_{l,\,0.5}}$ [1]. Pour des raisons de confidentialité, les valeurs de ces longueurs ne peuvent être indiquées ici. Malgré cela, les résultats LES $L_{1.0}^{NMC}$ et $L_{0.5}^{NMC}$ sont en bon accord avec les corrélations expérimentales de Villermaux [159] : $L_{1.0}^{NMC} = 1.17\, L_{1.0}^{Vmx}$ et $L_{0.5}^{NMC} = 0.99\, L_{0.5}^{Vmx}$. Cette comparaison quantitative contribue donc à la validation de la stratégie de simulation d'écoulements liquides atomisés avec le code Cedre sans perturbation acoustique. Un accès à des données expérimentales concernant la granulométrie du spray pourrait cependant permettre une validation quantitative plus approfondie.

Suite à ce chapitre, le chapitre 8 est dédié à l'évaluation de la capacité du code à restituer les effets des ondes acoustiques sur le jet. Pour cela, les résultats des deux simulations NMC et MC sont comparés entre eux ainsi qu'aux résultats expérimentaux disponibles du Coria.

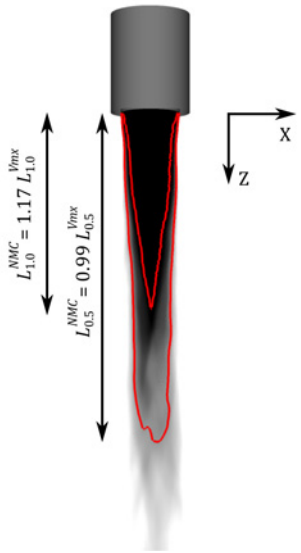


Figure 7.8 – Coupe longitudinale colorée par $\overline{\alpha_l}$ en échelle de gris et mesure de la longueur de cœur liquide potentiel sans excitation acoustique. — Iso-lignes de $\overline{\alpha_{l,\,1.0}}$ et $\overline{\alpha_{l,\,0.5}}$.

1. Rappelons que la longueur de cœur liquide potentiel mesurée ici à partir des champs moyens de fraction volumique n'est pas équivalente à la longueur moyenne de cœur liquide intact.

Chapitre 8

Comportement de l'écoulement diphasique face aux perturbations acoustiques

Dans le chapitre 7, un premier aperçu des capacités du code Cedre pour la simulation d'écoulements liquides atomisés a été présenté sur un cas concret sans aucune excitation acoustique. Cette première mise en application permet de mieux appréhender les particularités de la méthodologie de couplage entre les deux solveurs et ainsi de faciliter les analyses à suivre. Dans ce nouveau chapitre, les deux simulations du jet diphasique avec et sans excitation acoustique sont comparées l'une à l'autre ainsi qu'aux données expérimentales disponibles. Ces comparaisons ont pour objectifs a) d'évaluer la capacité du code à restituer les effets des ondes acoustiques sur le jet et b) de progresser dans la compréhension des mécanismes d'interaction entre l'écoulement et ces ondes. Le chapitre est organisé en trois sections consacrées respectivement à l'analyse 1) du comportement du cœur liquide, 2) de l'effet des ondes acoustiques sur les processus d'atomisation primaire et de fragmentation des ligaments, et 3) de la réponse du spray ainsi créé. La déviation potentielle du jet par la force de radiation acoustique sera quant à elle traitée dans la partie IV destinée à la modélisation simplifiée du phénomène. Puisque tous les mécanismes de réponse du jet aux ondes acoustiques ne sont pas indépendants de sa déviation, celle-ci sera tout de même mentionnée lorsque nécessaire au cours des discussions de ce huitième chapitre.

Sommaire

8.1 Comportement du cœur liquide sous excitation acoustique . . . 158
8.1.1 Aplatissement du cœur liquide . . . 158
8.1.2 Rétrécissement du cœur liquide . . . 161
8.2 Influence de l'excitation acoustique sur l'atomisation primaire . . . 166
8.2.1 Analyse du point de vue du solveur à phases séparées . . . 166
8.2.2 Analyse du point de vue du solveur à phase dispersée . . . 170
8.3 Réponse du spray à l'excitation acoustique . . . 175
8.3.1 Angle d'ouverture du spray . . . 176
8.3.2 Couplage entre le système d'injection et les ondes acoustiques . . . 185
8.3.3 Oscillation transverse des gouttes du spray . . . 202
8.4 Conclusion du chapitre . . . 204

8.1 Comportement du cœur liquide sous excitation acoustique

8.1.1 Aplatissement du cœur liquide

La section 1.2 relative au comportement de jets liquides atomisés sous excitation acoustique a mis en évidence l'existence d'un potentiel aplatissement du cœur liquide par la pression de radiation acoustique lorsque celui-ci est positionné en un ventre d'intensité (IAN) du champ acoustique. L'expérience montre que cet aplatissement peut considérablement impacter le processus d'atomisation primaire et par conséquent les propriétés granulométriques du spray (Baillot *et al.* [7], Ficuciello *et al.* [52]). Par ailleurs, il a été démontré dans des cas réactifs que cet aplatissement pouvait modifier la distribution spatiale de l'oxygène et induire une intensification de la combustion de part et d'autre du jet central, que ce soit en conditions d'injection sub- ou transcritiques (Méry *et al.* [113], Hakim *et al.* [63]). Une telle modification de la zone de réaction peut considérablement impacter le couplage entre la flamme et l'acoustique, qui dépend en partie de l'intensité locale de la combustion (cf. discussion à propos du critère de Rayleigh dans l'introduction de ce mémoire). Il est donc essentiel que la simulation numérique puisse reproduire ce mécanisme d'aplatissement.

Dans un écoulement diphasique, le rôle de la tension superficielle est de minimiser la surface de contact entre l'objet liquide et le milieu ambiant. Or, la surface est minimale pour un jet de section circulaire. Pour qu'il y ait aplatissement, l'énergie acoustique à laquelle est soumis le jet liquide doit donc être suffisamment élevée pour que les contraintes de radiation acoustique puissent surpasser la force due à la tension superficielle. Dans ses travaux, Ficuciello [51] a formulé le profil théorique de pression de radiation acoustique p_{rad} autour d'un jet liquide cylindrique localisé dans un champ acoustique plan stationnaire mono-harmonique. Dans le cas d'un jet liquide dont le rayon R est faible devant la longueur d'onde acoustique λ (*i.e.* $\kappa = 2\pi R/\lambda \ll 1$), la formulation a d'ores et déjà été présentée au chapitre 5 dans le tableau 5.1. Cette formulation est rappelée ici :

$$\begin{aligned} p^*_{rad}(\theta) = \frac{p_{rad}(\theta)}{\overline{P}} &= \frac{\cos^2(k_{ac}h)}{4} \\ &+ \frac{\sin^2(k_{ac}h)}{(1+\eta)^2}\Big(\eta^2\cos^2\theta + (2\eta-1)\sin^2\theta\Big) \\ &- \frac{\kappa\sin(2k_{ac}h)}{2(1+\eta)}\Big(\sin\theta\sin(2\theta)(1-\eta) + \cos\theta\Big), \end{aligned} \tag{8.1}$$

où $k_{ac} = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde acoustique, h est la distance entre l'axe d'injection et un PAN du champ acoustique, $\eta = \rho_g/\rho_l$ est le rapport des masses volumiques des deux fluides et θ est la coordonnée angulaire autour du jet liquide (cf. figure D.1 en annexe D). Dans cette expression, $p^*_{rad}(\theta)$ est le profil de pression de radiation acoustique normalisé par le facteur $\overline{P} = p^2_{ac}/(\rho_g c^2)$ qui peut être vu comme le double de l'énergie acoustique moyenne par unité de volume en champ lointain. Dans le cas présent, où le jet liquide est injecté au niveau d'un IAN (*i.e.* $k_{ac}h = \pi/4$) et où $\kappa \sim 10^{-2}$, le profil de p^*_{rad} autour du jet est tracé en figure 8.1. Puisque $\overline{P}$ dépend de p^2_{ac}, il est raisonnable de négliger l'effet des harmoniques de faible amplitude pour simplifier l'analyse. Le profil de p^*_{rad} n'est alors calculé que pour le mode 2T de la cavité acoustique. On peut voir sur la figure 8.1 que la pression de radiation acoustique présente des valeurs maximales positives le long de l'axe acoustique ($\theta \equiv 0 \mod \pi$) entraînant une compression du jet, et des valeurs minimales négatives dans la direction perpendiculaire ($\theta \equiv \pi/2 \mod \pi$) entraînant une succion du liquide. Pour le cas présent, où $\overline{P} \approx 185$ Pa, la variation de pression de radiation acoustique définie comme $\Delta p_{rad} = |p_{rad,\,max} - p_{rad,\,min}| \approx 90$ Pa dépasse la pression de Laplace due à la tension superficielle, *i.e.* $\Delta p_{Lap} = \sigma/R \approx 24$ Pa. Par conséquent, les contraintes de radiation acoustique appliquées au cœur liquide surpassent en théorie la force de tension superficielle. Notons cependant que, puisque l'injection des fluides est réalisée ici au niveau d'un IAN du champ acoustique, une part de l'énergie acoustique est employée à dévier le jet liquide. La chute de pression de radiation acoustique autour du jet liquide est donc en réalité plus faible que ce qu'annonce la théorie. Néanmoins,

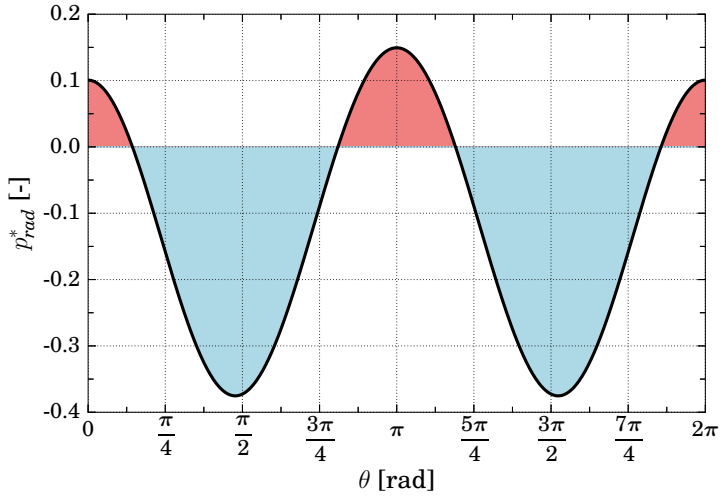


Figure 8.1 – Profil théorique de p^*_{rad} autour d'un cylindre liquide positionné dans l'IAN d'un champ acoustique stationnaire. : compression ; : succion.

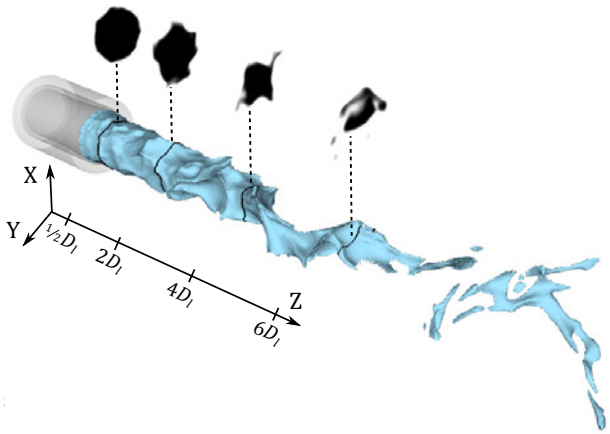
la déviation du jet est suffisamment faible dans le cas présent [1] pour que l'on puisse négliger son impact sur l'aplatissement. On s'attend donc ici à ce que le jet liquide soit aplati.

Des mesures de l'épaisseur du jet liquide à partir d'images ombroscopiques sont présentées dans les travaux de Ficuciello *et al.* [52] dans le cas de jets dont le régime d'atomisation est de type Rayleigh axisymétrique. Pour le régime d'atomisation de type fibre, la présence de multiples structures liquides issues de l'atomisation du cœur liquide peut compliquer la visualisation de ce dernier et ainsi empêcher la mesure de son aplatissement. C'est notamment le cas du point de fonctionnement traité dans ce chapitre. En revanche, cette limitation ne s'applique pas aux simulations numériques puisque l'accès direct à la fraction volumique de liquide résolue par le SPS permet d'isoler le cœur liquide du reste de l'écoulement diphasique. Pour cela, comme il l'a été mentionné au chapitre 7, un seuil de fraction volumique doit être défini car la position exacte de l'interface entre les deux fluides n'est pas connue dans le cas des méthodes à interface diffuse. Dans la suite de ce chapitre, la valeur seuil $\alpha_{l,\,0.99}$ est fixée car celle-ci semble conduire à une longueur de cœur liquide intact comparable aux images expérimentales (cf. figure 7.7). L'iso-surface $\alpha_{l,\,0.99}$ représentée en bleu sur la figure 8.2 illustre donc le cœur liquide résolu par le SPS sans et avec excitation acoustique. Des coupes de α_l transverses à l'axe d'injection sont ajoutées sur cette figure de manière à mettre en évidence l'évolution de la forme de la section du cœur liquide le long de l'axe d'injection. L'interface liquide est progressivement aplatie par les ondes acoustiques à partir d'une certaine distance du plan d'injection. Par ailleurs, la longueur du jet liquide est réduite sous l'effet de l'acoustique, mais ce mécanisme sera analysé plus tard dans ce chapitre (cf. section 8.1.2). De manière à confirmer l'aplatissement du cœur liquide observé pour l'instant à un instant donné du calcul, et afin de le quantifier, le profil transverse de l'iso-surface $\alpha_{l,\,0.99}$ est extrait à différentes positions Z sur l'axe d'injection. Un critère d'aplatissement f est alors défini par :

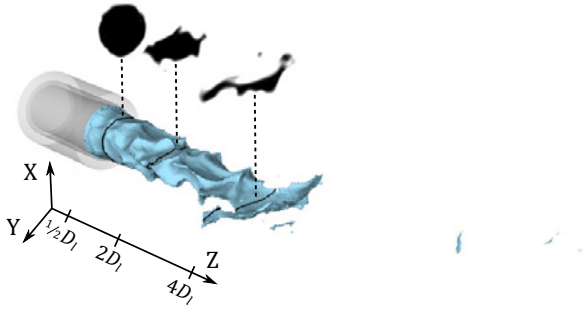
$$f = \begin{cases} \dfrac{a}{b} - 1 & \text{si } a < b \\ 1 - \dfrac{b}{a} & \text{sinon,} \end{cases} \tag{8.2}$$

avec a et b les dimensions des projections de chaque profil sur les axes Y et X, comme illustré sur la figure 8.3. D'après cette définition, f est borné entre -1 et 1. De plus, un aplatissement le long de l'axe acoustique est caractérisé par $f > 0$ tandis qu'un aplatissement dans la direction orthogonale est caractérisé par $f < 0$. L'évolution temporelle de f est tracée sur la figure 8.4 en quatre positions le long de l'axe d'injection ($D_l/2$, $2\,D_l$, $3\,D_l$ et $4\,D_l$) à la fois pour le NMC et le MC. D'après cette figure,

1. Cette déviation sera traitée plus en détail dans la partie IV.



(a)



(b)

Figure 8.2 – Représentation du cœur liquide par l'iso-surface bleue de $\alpha_{l,0.99}$ et des coupes transverses de α_l en échelle de gris (noir : $\alpha_l = 1$; blanc : $\alpha_l = 0$). (a) NMC et (b) MC à $t = 18\,T_{ac}$.

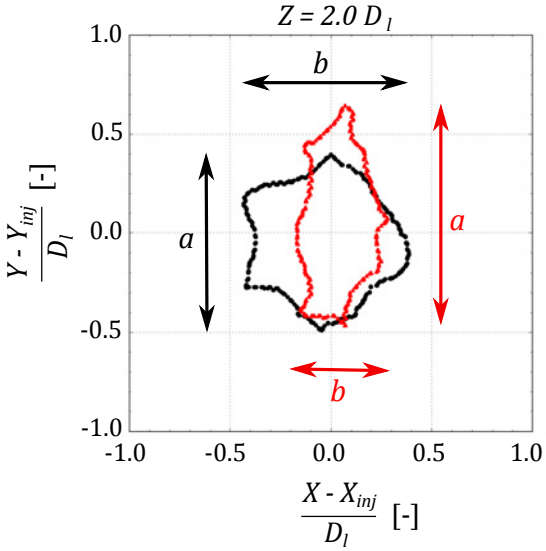


Figure 8.3 – Profil transverse instantané de l'interface liquide définie par l'iso-surface de $\alpha_{l,0.99}$. (X_{inj}, Y_{inj}) : coordonnées du centre d'injection. ●● NMC ; ●● MC.

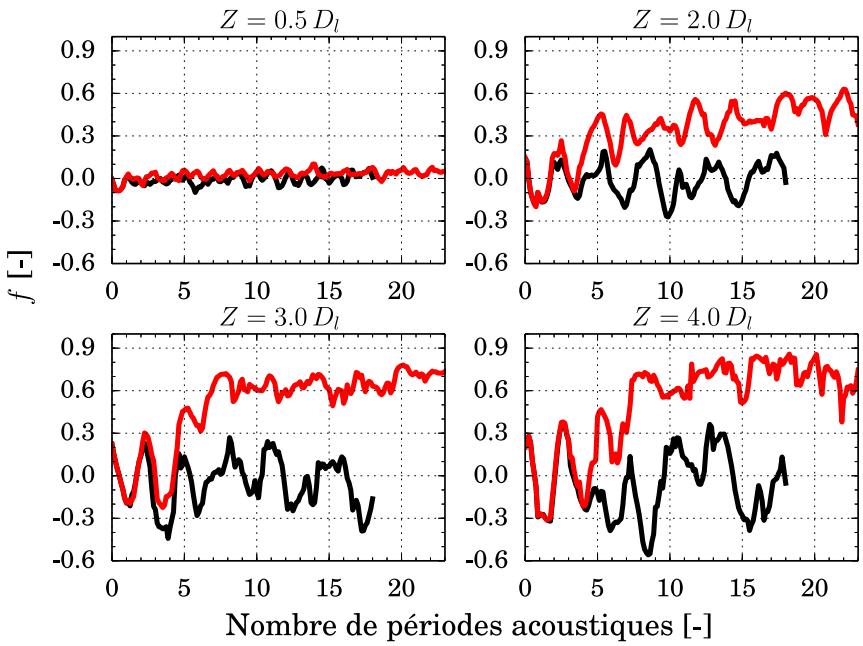


Figure 8.4 – Évolution temporelle du critère d'aplatissement f du cœur liquide à différentes distances Z du plan d'injection. — NMC ; — MC.

l'évolution de f au cours du NMC semble centrée sur une valeur nulle avec toutefois une amplitude de fluctuation croissante avec la distance Z. Cette évolution reflète une déformation progressive du jet liquide sous l'effet des contraintes aérodynamiques induites par le co-courant gazeux, notamment via la propagation et la croissance des instabilités de surface. Cependant, puisque l'écoulement diphasique possède une symétrie axiale en l'absence d'excitation acoustique, la déformation du jet liquide n'est statistiquement privilégiée dans aucune direction. En ce qui concerne le MC, le jet liquide conserve une forme cylindrique en sortie d'injecteur ($Z = D_l/2$) avec un aplatissement quasi nul. En revanche, une fois suffisamment éloignée du plan d'injection, f croît progressivement au cours du temps jusqu'à s'établir autour d'une valeur strictement positive reflétant un aplatissement du jet liquide dans la direction de propagation des ondes comme il l'a été observé sur la figure 8.2b. Par ailleurs, la valeur vers laquelle s'établit f augmente avec la distance au plan d'injection, traduisant ainsi un aplatissement du cœur liquide plus intense vers l'aval. L'aplatissement du jet le long de l'axe d'injection est en réalité proportionnel au temps de présence de chaque particule liquide au sein du champ acoustique. Ces résultats démontrent la capacité de la méthode à interface diffuse à reproduire la dynamique d'aplatissement du jet liquide observée dans la littérature, notamment grâce à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par le SPS. Les conséquences de cet aplatissement sur la longueur du cœur liquide sont traitées par la suite.

8.1.2 Rétrécissement du cœur liquide

En plus de l'aplatissement du cœur liquide, la figure 8.2 semble mettre en évidence une réduction de sa longueur. Le rétrécissement du jet liquide a d'ores et déjà été observé par Baillot *et al.* [7], majoritairement pour des jets liquides de faibles We_g et donc faiblement atomisés. Lorsque l'atomisation du jet est importante, comme c'est le cas pour le régime de type fibre, la mesure de la longueur du cœur liquide par ombroscopie est compliquée par la présence de multiples structures liquides de tailles plus ou moins importantes sur la trajectoire optique. C'est pourquoi aucune mesure expérimentale de longueur n'est présentée dans ce chapitre. En revanche, de la même manière que précédemment, l'accès direct à la fraction volumique de liquide résolue par le SPS permet d'isoler le cœur liquide du reste de l'écoulement et ainsi d'en mesurer la taille. Pour quantifier le rétrécissement du jet liquide

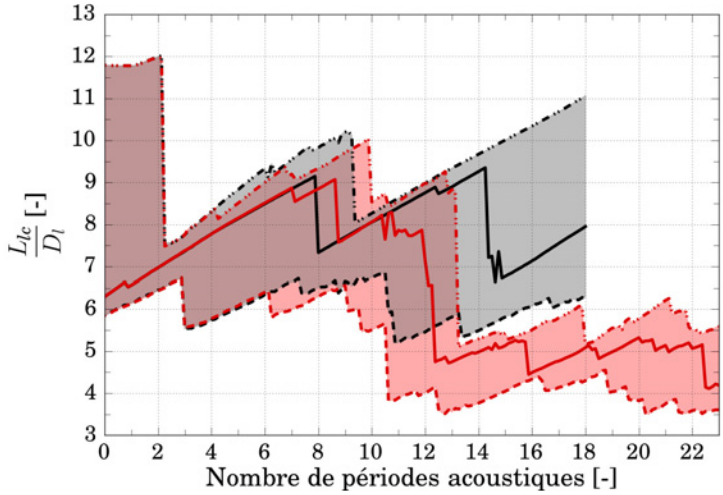


Figure 8.5 – Évolution temporelle de la longueur de cœur liquide intact. $\alpha_{l,\,0.9}$, $\alpha_{l,\,0.99}$ $\alpha_{l,\,1.0}$ (noir : NMC ; rouge : MC).

sous l'effet des ondes acoustiques, la méthode de mesure de la longueur instantanée L_{lc} présentée au chapitre précédent est appliquée pour les valeurs seuil $\alpha_{l,\,1.0}$, $\alpha_{l,\,0.99}$ et $\alpha_{l,\,0.9}$. Les longueurs obtenues sont tracées au cours du temps sur la figure 8.5 à la fois pour le NMC et le MC.

Si l'on s'intéresse d'abord au NMC, plusieurs phases de croissance séparées par une chute brutale de L_{lc} se succèdent à basse fréquence quelle que soit la valeur du critère seuil. Il s'agit là d'un phénomène déjà observé par Hardi *et al.* [65] dans des conditions d'injection transcritiques. De façon identique à ces travaux, le mécanisme de croissance par intermittence résulte ici directement de la déstabilisation du jet dense par le co-courant gazeux. En effet, que ce soit dans des conditions d'injection sub- ou transcritiques, chaque chute de L_{lc} correspond à l'arrachement d'un ligament à l'extrémité du cœur dense. En figure 8.6, l'agrandissement d'une image ombroscopique obtenue par le Coria sur la zone en aval du cœur liquide illustre bien ce mécanisme d'atomisation. Cette rupture à basse fréquence n'a pas été observée par Le Touze [90] avec l'estimation de la longueur du cône équivalent, ce qui met en évidence l'intérêt de la nouvelle méthode de mesure. Il est important de préciser que la longueur L_{lc} tracée en figure 8.5 dépend en réalité grandement de la valeur seuil $\alpha_{l,\,x}$ imposée, ce que l'on peut observer par l'écart entre les différentes courbes. En effet, puisque le SPS est basé sur une méthode à interface diffuse, un fragment liquide venant tout juste d'être arraché au cœur liquide peut encore être considéré comme connecté à ce dernier pour une valeur seuil de $\alpha_{l,\,x}$ plus faible. Cela est bien illustré par la figure 8.7 représentant le jet liquide avec les deux iso-surfaces $\alpha_{l\,0.9}$ et $\alpha_{l\,0.99}$ pour lesquelles chaque structure indépendante est colorée différemment. C'est pourquoi il est difficile de définir une longueur de jet absolue dans le cas des méthodes à interface diffuse.

En ce qui concerne le MC, la courbe d'évolution de L_{lc} peut être divisée en deux parties : une première phase transitoire et une seconde phase établie. La phase transitoire débute dès le début du calcul, lorsque l'excitation acoustique est initiée, et s'achève après 9 à 13 périodes acoustiques, selon la valeur seuil imposée. Au cours de cette période, la longueur du cœur liquide suit quasiment la même évolution que lors du NMC malgré la présence des ondes acoustiques. Après ce premier intervalle de temps, la longueur du cœur liquide chute soudainement quelle que soit la valeur de $\alpha_{l,\,x}$ retenue. Une seconde phase débute alors, durant laquelle le jet liquide semble conserver une longueur réduite tout en manifestant les mêmes chutes à basse fréquence de L_{lc} que durant le NMC. Si l'on s'intéresse particulièrement à l'iso-surface obtenue avec un seuil $\alpha_{l,\,0.99}$, la chute de L_{lc} survient après 12 périodes acoustiques et atteint environ 40% de la longueur initiale. Le rétrécissement du cœur dense sous l'effet des perturbations acoustiques est un mécanisme physique connu et déjà observé par Hardi *et al.* [65] et Baillot *et al.* [7] respectivement dans des conditions d'injection trans- et subcritiques. Dans le cas du régime d'injection transcritique, Hardi *et al.* [65] associent ce rétrécissement à l'arrachement latéral de

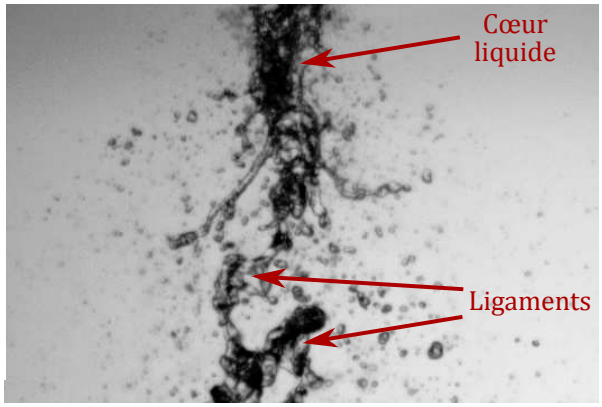


Figure 8.6 – Agrandissement de la zone en aval du cœur liquide sur une image ombroscopique obtenue par le Coria.

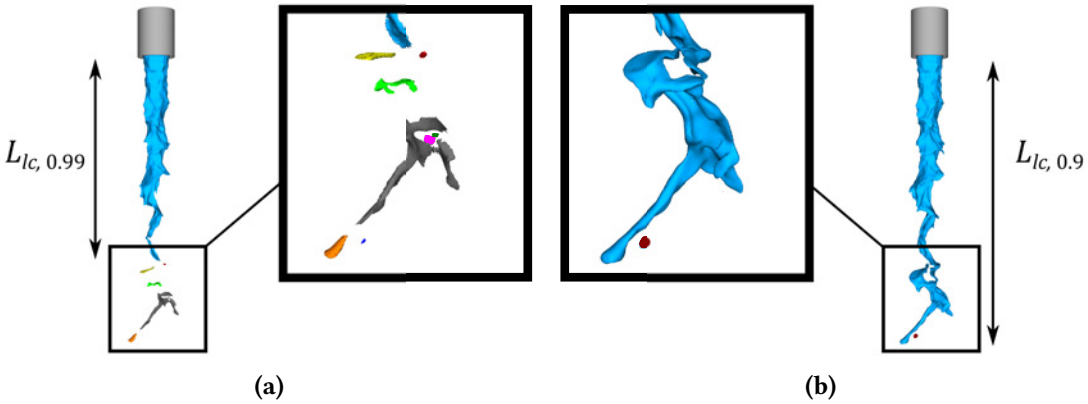


Figure 8.7 – Illustration de la méthode numérique de mesure de la longueur de cœur liquide intact pour les iso-surfaces (a) $\alpha_{l,\,0.99}$ et (b) $\alpha_{l,\,0.9}$. NMC à $t = 18\,T_{ac}$.

larges poches d'oxygène sous l'effet du mouvement transverse du gaz autour du jet dense au passage de l'onde acoustique. Ce mécanisme se répète de façon périodique et favorise grandement le mélange entre les deux fluides, empêchant ainsi le jet de se développer en aval. En conditions d'injection subcritiques, cet arrachement transverse n'est pas observé, que ce soit dans le cadre des campagnes expérimentales du Coria ou des simulations numériques présentées dans ce chapitre. Dans leurs travaux, Hardi *et al.* [65] proposent deux critères pouvant jouer un rôle important dans ce mécanisme d'arrachement transverse. Le premier est le rapport entre la vitesse acoustique et la vitesse d'injection du co-courant : u'/U_g. Ce critère représente la compétition entre les perturbations acoustiques et l'influence du co-courant gazeux protégeant le cœur dense des mouvements transverses du gaz. Plus le co-courant est rapide et plus il agit comme une barrière protectrice vis-à-vis du jet dense. Le second critère influençant l'impact de la vitesse acoustique sur le jet dense est présenté sous la forme d'un nombre de Weber acoustique représentant l'opposition de la tension de surface [2] aux forces aérodynamiques issues du mouvement transverse du gaz : $\mathrm{We}_{\mathrm{ac}} = \rho_g u'^2 D_l/\sigma$. Plus le $\mathrm{We}_{\mathrm{ac}}$ est élevé et plus l'impact de l'acoustique sur le jet dense est important. Ces deux critères sont évalués dans le tableau 8.1 pour les conditions de fonctionnement étudiées par Hardi *et al.* [65] et le PF-Onera. Dans le cas transcritique, la vitesse acoustique est bien plus importante, la densité du gaz est plus élevée à cause de la pression de chambre de 60 bar et la tension de surface est très faible. Cela conduit alors à des valeurs supérieures pour les deux critères considérés comparé au PF-Onera, notamment pour $\mathrm{We}_{\mathrm{ac}}$. Le point de fonctionnement transcritique

2. Bien que les travaux de Hardi *et al.* [65] concernent les conditions d'injection transcritiques, les auteurs considèrent une tension de surface non nulle dont la valeur a été calculée par Vieille *et al.* [157] pour un jet de LOX dans de l'hélium à pression supercritique.

	u'/U_g	$\mathrm{We}_{\mathrm{ac}}$
Hardi *et al.* [65]*	≈ 0.3	$\approx 100\,000$
PF-Onera	≈ 0.1	≈ 10

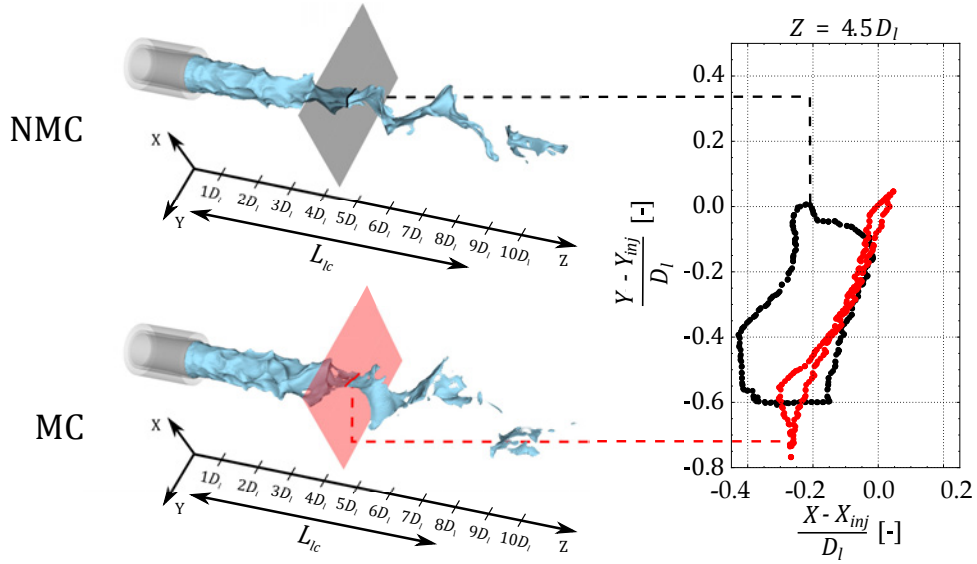
Table 8.1 – Comparaison des conditions de fonctionnement de Hardi *et al.* [65] et du PF-Onera.

* Le point de fonctionnement sélectionné correspond à une injection sous 60 bar d'un couple LOX/LH_2.

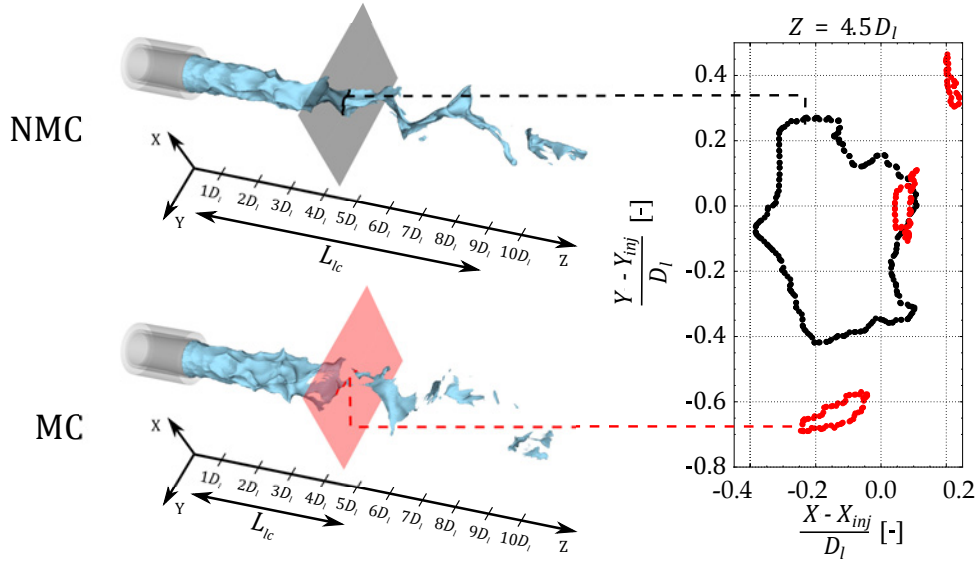
est donc plus propice à la perturbation du jet central par les fluctuations de vitesse transverse du gaz que le PF-Onera, ce qui tend à expliquer pourquoi aucun arrachement transverse n'est observé dans le cas subcritique. La cause du rétrécissement du cœur liquide est donc différente dans le cas présent.

Pour comprendre d'où est issue la rupture prématurée du cœur liquide une fois soumis aux ondes acoustiques, le jet liquide est représenté sur la figure 8.8 avec une valeur seuil $\alpha_{l,\,0.99}$ pour les deux cas NMC et MC à deux instants différents, le premier précédant la forte chute de L_{lc} (figure 8.8a) et le second lui succédant (figure 8.8b). Pour compléter l'analyse, les profils transverses de l'interface diphasique sont tracés à une distance $Z = 4.5\,D_l$ correspondant à la position où intervient la rupture du jet liquide après environ 12 périodes acoustiques. Il apparaît clairement que le mécanisme d'aplatissement du jet est en cause dans la rupture du cœur liquide : comme le montrait la figure 8.4, le jet liquide est aplati progressivement durant les dix premières périodes acoustiques jusqu'à atteindre une épaisseur quasi nulle à l'instant $t = 11.5\,T_{ac}$ (cf. figure 8.8a) à une distance de $4.5\,D_l$ du plan d'injection. Cela conduit à un détachement prématuré de multiples structures liquides en bout de jet et par conséquent à une réduction de sa longueur. Une fois coupé, le cœur liquide conserve sa longueur réduite aussi longtemps que l'excitation acoustique est maintenue. Si l'on considère le champ moyen de fraction volumique de liquide $\overline{\alpha_l}$ représenté en figure 8.9a dans le plan de coupe contenant l'axe acoustique, on observe également une réduction de la longueur de cœur liquide potentiel de l'ordre de 20% par rapport au NMC. L'intervalle de temps considéré pour réaliser la moyenne temporelle en présence d'acoustique correspond aux 10 dernières périodes d'excitation, soit l'intervalle au cours duquel la longueur moyenne de cœur liquide intact est établie d'après la figure 8.5. L'analyse du champ moyen dans le plan orthogonal à l'axe acoustique en figure 8.9b confirme quant à elle l'aplatissement du jet par la pression de radiation acoustique, et mène à des estimations de longueurs de cœur liquide similaires à celles réalisées dans l'autre plan.

Il a été démontré au chapitre 5 que le profil de pression de radiation acoustique autour d'un obstacle positionné dans un champ acoustique stationnaire était correctement reproduit par la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles. En complément, la présente section démontre que l'influence de p_{rad} sur le cœur liquide est restituée par la méthode à interface diffuse. En particulier, le phénomène d'aplatissement et la coupure prématurée du jet liquide observés expérimentalement dans la littérature sont retrouvés. De plus, grâce aux simulations numériques instationnaires, l'analyse du comportement transitoire du jet sous excitation acoustique révèle un lien direct entre l'aplatissement du jet et sa coupure et permet ainsi de progresser dans la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Ce type d'analyse est primordial dans le contexte d'étude des instabilités de combustion de haute fréquence puisque, dans un cas réactif, la déformation et la coupure du jet liquide par les perturbations acoustiques peuvent fortement impacter la longueur de flamme et la distribution du taux de dégagement de chaleur et ainsi participer au couplage thermoacoustique. Dans la suite de ce chapitre, l'influence des perturbations acoustiques sur l'atomisation primaire du jet liquide et la formation du spray est analysée.



(a) $t = 11.5\,T_{ac}$



(b) $t = 12.5\,T_{ac}$

Figure 8.8 – Iso-surfaces de $\alpha_{l,0.99}$ accompagnées des profils transverses de l'interface diphasique à une distance $Z = 4.5\,D_l$ (●● NMC ; ●● MC).

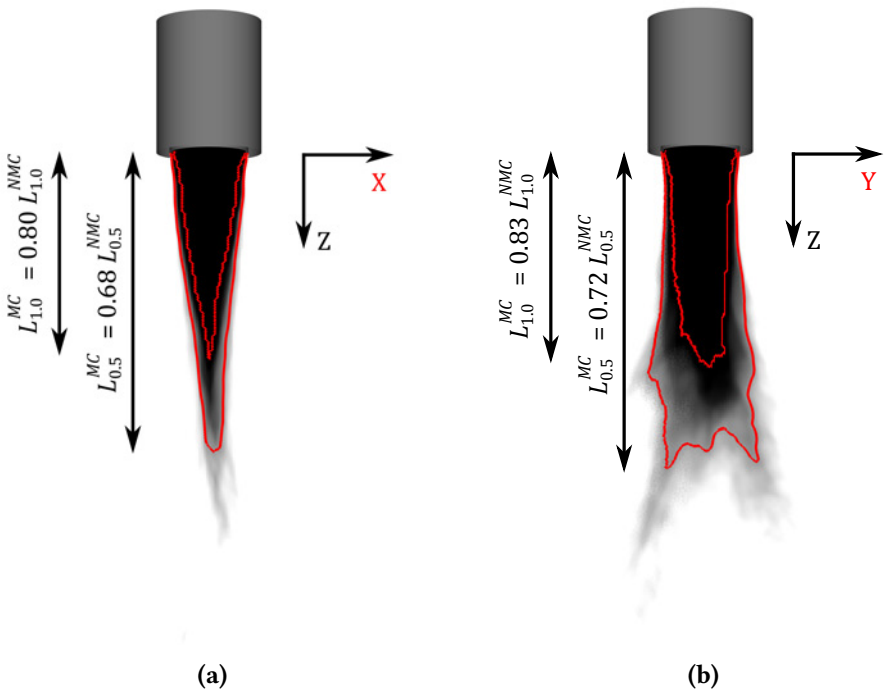


Figure 8.9 – Coupes 2D colorées en échelle de gris par $\overline{\alpha_l}$ (a) dans le plan contenant l'a.a. (vue A) et (b) dans le plan orthogonal (vue B) (MC). — Iso-lignes de $\overline{\alpha_{l,1.0}}$ and $\overline{\alpha_{l,0.5}}$.

8.2 Influence de l'excitation acoustique sur l'atomisation primaire

8.2.1 Analyse du point de vue du solveur à phases séparées

L'objectif principal des injecteurs coaxiaux utilisés dans la propulsion liquide est d'assister l'atomisation du jet central de manière à maximiser la quantité d'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse pour une masse de liquide donnée (Dumouchel [38]). En effet, plus la surface totale de gouttes est grande et plus le processus d'évaporation de la phase liquide est intense. Le mélange des deux ergols est ainsi favorisé et conduit à un dégagement de chaleur important dans un volume le plus faible possible permettant de maximiser les performances du système propulsif en limitant sa masse. Puisque les instabilités de combustion de haute fréquence sont causées par le couplage entre les variations du taux de dégagement de chaleur et les fluctuations de pression, il est essentiel d'analyser l'influence des ondes acoustiques sur l'atomisation du jet liquide. Pour mesurer la quantité d'interface entre deux fluides, on utilise principalement la notion de densité d'aire interfaciale Σ définie comme la surface de liquide par unité de volume. Dans le cas des méthodes à interface diffuse, la densité d'aire interfaciale résolue est définie dans chaque cellule V_c de volume $|V_c|$ comme la norme du gradient de la fraction volumique de liquide (Sun et Beckermann [143]) : $\Sigma_{SPS} = \|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|$. Selon cette définition, la densité d'aire interfaciale résolue dans un domaine d'étude Ω de volume $|\Omega|$ s'exprime $\Sigma_{SPS,\,\Omega} = \left[\sum_{V_c\in\Omega}\left(\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\||V_c|\right)\right]/|\Omega|$.

L'évolution temporelle de $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ est tracée sur la figure 8.10 à la fois pour le NMC et le MC. Ici, le domaine d'étude Ω correspond à la zone de raffinement cylindrique de diamètre 10.7 D_l présentée en figure 6.8b ajoutée au volume de l'injecteur. Puisque les deux cas simulés sont initialisés à partir d'un écoulement établi, la valeur de $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ en début de calcul est non nulle. De manière à compléter l'analyse de la figure 8.10, les champs 2D de $\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|$ dans le plan contenant l'axe acoustique et le plan orthogonal sont respectivement représentés en figure 8.11 et 8.12. Dans le cas du NMC, la densité d'aire interfaciale résolue ne fluctue que très peu autour de sa valeur moyenne (variations inférieures à 3% de la valeur moyenne). Ces faibles fluctuations sont en fait issues de la déstabilisation du jet liquide et de sa rupture donnant naissance à des structures liquides plus ou moins larges visibles en aval du jet sur les figures 8.11a et 8.12a. À l'inverse, dans le cas du MC, $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ croît progressivement après une période d'exci-

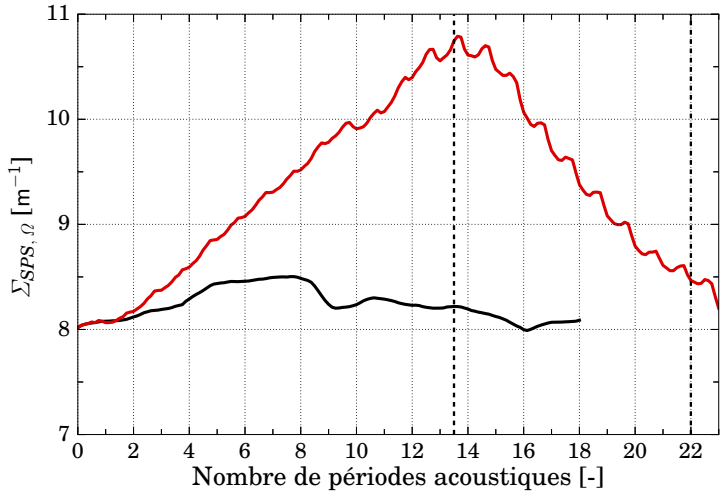


Figure 8.10 – Evolution temporelle de la densité d'aire interfaciale résolue par le SPS. — NMC ; — MC.

tation acoustique, soit directement après l'établissement du champ acoustique stationnaire au sein du domaine de calcul. La densité d'aire interfaciale résolue atteint une valeur maximale après approximativement 13.5 périodes acoustiques puis décroît progressivement jusqu'à la fin du calcul. La période de croissance de $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ s'explique par l'action de la pression de radiation acoustique sur la phase liquide. En effet, comme cela peut être observé sur les figures 8.11b et 8.12b, l'aplatissement du cœur liquide s'accompagne d'une expansion du jet dans la direction orthogonale à l'axe acoustique et donc en une augmentation de sa surface. De plus, la rupture du cœur liquide provoquée par cet aplatissement après environ 12 périodes acoustiques résulte en la création de multiples structures liquides en aval du jet et participe ainsi elle-même à l'accroissement de la surface totale de liquide dans le domaine. Par ailleurs, les structures liquides ainsi formées subissent elles-mêmes les contraintes acoustiques favorisant leur propre rupture. Par conséquent, la densité d'aire interfaciale est censée augmenter continuellement jusqu'à s'établir autour d'une valeur donnée lorsque les plus petites structures liquides atteignent une taille permettant l'équilibre entre la pression de radiation acoustique et la tension de surface.

Il est en réalité difficile d'estimer *a priori* la taille des fragments à l'équilibre car leur forme, et donc la distribution de pression de radiation acoustique à l'interface, est inconnue. Pour les conditions de fonctionnement considérées ici, les diamètres d'équilibre pour des structures cylindriques ou sphériques ont été calculés au chapitre 5 et donnent respectivement $D_{eq,\,cyl} = 0.27D_l$ et $D_{eq,\,sph} = 0.93D_l$. Puisque dans le cas présent la taille caractéristique maximale des structures liquides correspond au diamètre d'injection D_l, la pression de radiation acoustique pourrait donc conduire à une rupture significative des structures cylindriques mais pas sphériques. Sachant que les ligaments issus de la rupture initiale du cœur liquide ont en réalité une forme intermédiaire, on estime qu'il est possible que ces ligaments soient aplatis et fragmentés par les contraintes acoustiques. Dans ce cas, l'augmentation de $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ sur la figure 8.10 devrait en théorie être suivie par un plateau, caractéristique de l'équilibre atteint entre la pression de radiation acoustique et la tension de surface, et non par une phase de décroissance. Cependant, lorsque l'amplitude des perturbations acoustiques est suffisante, la taille des structures résultant de la fragmentation par les contraintes acoustiques peut s'avérer trop faible pour permettre une discrétisation correcte du liquide par le maillage. Dans ce cas, la fraction volumique de liquide est diffusée et son gradient local $\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|$ décroît. C'est justement ce que l'on observe sur les figures 8.11c et 8.12c en aval du jet central, où le gradient de fraction volumique s'est homogénéisé au cours du temps. La chute de $\Sigma_{SPS,\,\Omega}$ sur la figure 8.10 marque ainsi la perte de densité d'aire interfaciale résolue par le maillage en aval du cœur liquide.

On remarque également en figures 8.12b et 8.12c une large expansion de la phase liquide dans le

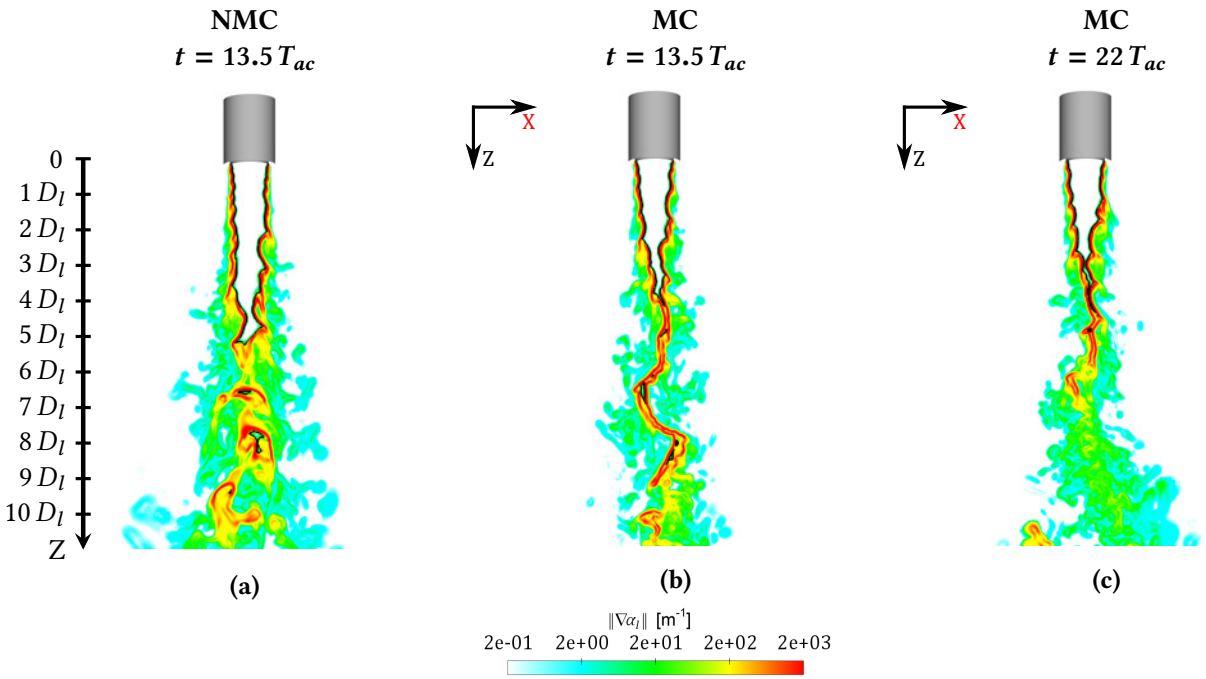


Figure 8.11 – Champs 2D colorés par $\|\nabla\alpha_l\|$ dans le plan contenant l'axe acoustique (Vue A). — Iso-lignes de $\alpha_{l,0.99}$.

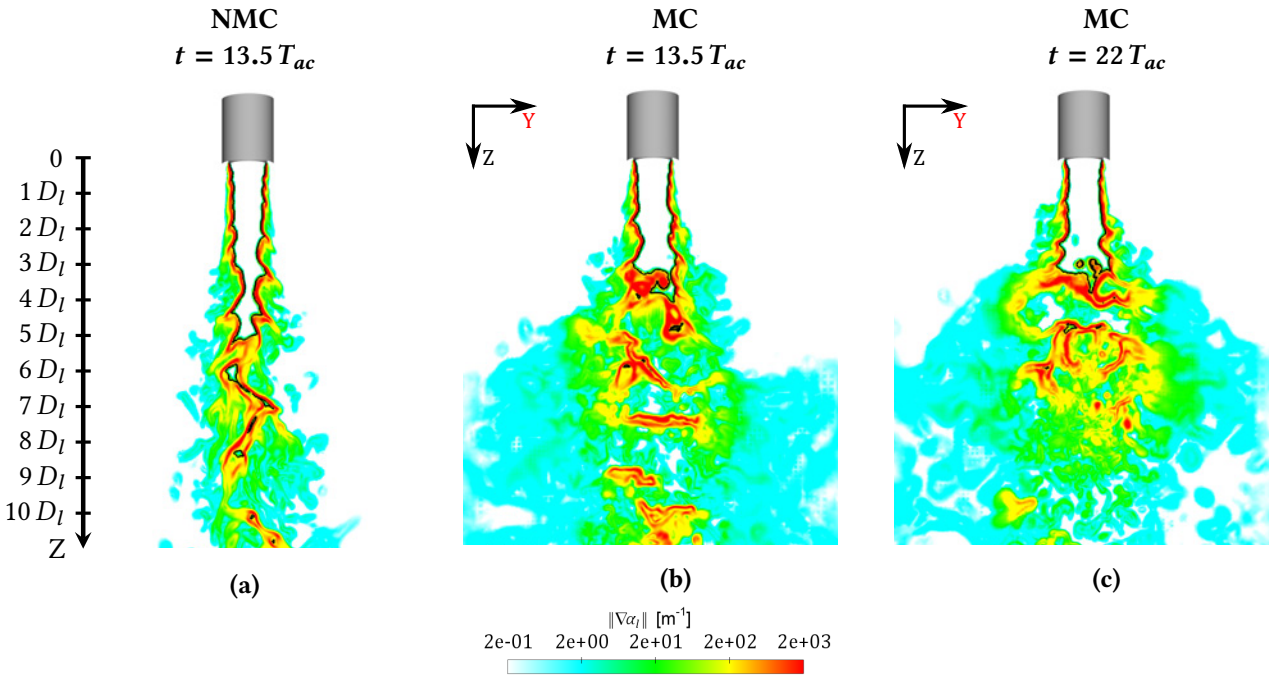


Figure 8.12 – Champs 2D colorés par $\|\nabla\alpha_l\|$ dans le plan orthogonal à l'axe acoustique (Vue B). — Iso-lignes de $\alpha_{l,0.99}$.

plan orthogonal à l'axe acoustique comparé au NMC représenté en figure 8.12a. Ce phénomène est lui aussi associé à l'aplatissement du cœur liquide par les contraintes acoustiques. En effet, lorsque le jet liquide est aplati, Ficuciello *et al.* [52] ont observé expérimentalement une éjection transverse de petits fragments liquides dans la direction orthogonale à l'axe acoustique, mais ne proposent pas d'explication quant à la cause de ce mécanisme [3]. Pour expliquer ce comportement, il est proposé ici de se référer à la description des mécanismes à l'origine de l'atomisation de jets liquides en régime de type fibre effectuée au début de ce mémoire. En particulier, nous nous intéressons à l'analyse de Villermaux [159] relative à l'angle du spray (cf. section 1.1.4). Dans ses travaux, l'auteur formule de façon théorique l'angle entre la surface du cœur liquide et la direction d'éjection des structures liquides issues de l'atomisation primaire du jet. Selon lui, cet angle θ_i peut être exprimé en fonction du rapport entre les vitesses de croissance radiale U_ξ et de convection U_c des instabilités de surface représentées en figure 1.9. Puisque ces vitesses dépendent des conditions d'injection des deux fluides et de leurs masses volumiques (cf. équations (1.35) et (1.11) respectivement), on en déduit que l'angle lui-même peut être estimé à partir de ces paramètres. Étant donné que les conditions d'injection sont les mêmes pour le NMC et le MC, il apparaît que θ_i est inchangé même sous l'influence des ondes acoustiques. En revanche, l'aplatissement du cœur liquide par la pression de radiation acoustique au cours du MC conduit à une diminution de l'angle θ_l représenté en figure 1.9 entre la surface du jet liquide et l'axe d'injection. Il en résulte ainsi une augmentation de l'angle θ emprunté initialement par les fragments liquides par rapport à l'axe d'injection. Il est difficile de quantifier la diminution de l'angle θ_l entre la surface du jet liquide et l'axe d'injection sous l'effet des contraintes acoustiques car l'approche à interface diffuse ne permet pas de connaître précisément la position de l'interface diphasique. Cependant, les champs moyens de α_l (cf. figures 7.8 et 8.9b) permettent de proposer une estimation en considérant l'isosurface particulière $\overline{\alpha_l}_{1.0}$. Cette estimation conduit à un angle θ_l d'environ 8° pour le NMC et proche de 0° pour le MC. Si l'analyse effectuée dans ce paragraphe est correcte, l'aplatissement du cœur liquide par les ondes acoustiques devrait ainsi, dans le cas présent, induire une augmentation de l'ordre de 10° de l'angle θ initialement emprunté par les ligaments. La présence de fragments liquides dans une zone plus large autour du jet central modifie évidemment l'écoulement co-courant gazeux, qui va lui-même influencer la trajectoire des ligaments sous l'effet de la force de traînée. L'ensemble de ces mécanismes pourrait au final expliquer l'élargissement du champ de $\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\|$ observé en figure 8.12.

L'analyse de la densité d'aire interfaciale au sein du SPS révèle ainsi une modification importante du processus d'atomisation primaire du jet liquide par les contraintes acoustiques. Il s'agit là de mécanismes d'interaction qui ont d'ores et déjà été observés expérimentalement par le Coria sur d'autres points de fonctionnement. Cependant, la diffusion importante du gradient de fraction volumique de liquide en présence d'ondes acoustiques est caractéristique d'un raffinement de maillage insuffisant pour discrétiser les fragments liquides ainsi créés. Dans ces zones de forte diffusion, le manque d'information concernant la forme et la position exacte de l'interface diphasique ainsi que la prise en compte d'une vitesse unique pour le mélange sont susceptibles de dégrader l'évaluation des interactions entre les deux fluides par le SPS, telles que les contraintes de traînée et de radiation acoustique. Il s'agit là d'une limitation connue des méthodes à interface diffuse. Pour quantifier la quantité de liquide concernée, nous définissons empiriquement les zones fortement diffuses par la condition double suivante : $\|\boldsymbol{\nabla}\alpha_l\| < 100$ et $\alpha_l < 0.99$. Sur la base de cette définition, environ 15% de la masse liquide contenue dans le domaine Ω est concernée dans le MC, contre seulement 3% dans le NMC. Un moyen d'accroître la précision de calcul dans ces zones diffuses sans raffiner le maillage serait de résoudre des équations de transport de la densité d'aire interfaciale ainsi que des variables géométriques définissant la courbure locale des structures liquides en sous-maille avec une modélisation adaptée des termes sources liés à la fragmentation induite par le cisaillement visqueux et les contraintes acoustiques. Par ailleurs, l'utilisation conjointe d'une modélisation à interface diffuse à 7 équations (cf. section) donnant accès à la vitesse locale de chaque fluide permettrait également d'améliorer l'évaluation de la force de traînée

3. Il est important de noter que ce phénomène est différent de l'arrachement de poches denses mentionné précédemment et observé par Hardi *et al.* [65] en conditions d'injection transcritiques, puisque celui-ci était dû aux fluctuations transverses de vitesse du gaz et intervenait dans la direction de propagation acoustique.

et des flux convectifs.

8.2.2 Analyse du point de vue du solveur à phase dispersée

La section précédente a démontré la capacité de la méthode à interface diffuse à restituer l'influence des contraintes acoustiques sur l'atomisation primaire du jet central tant que le maillage est suffisamment raffiné pour décrire la topologie des structures liquides et le champ de pression qui les entoure. Cela étant, l'atomisation primaire n'est pas modélisée uniquement par le SPS dans le code Cedre. Lorsque les contraintes de cisaillement entre les deux fluides sont suffisantes, un transfert de masse de liquide est opéré du SPS vers le DPS, ce dernier étant adapté au transport de gouttes à l'échelle de sous-maille tout en conservant un raffinement de maillage raisonnable. La méthode de couplage entre les deux solveurs a cependant été initialement formulée pour simuler des jets en l'absence de perturbation acoustique. Ainsi, à l'instar de la section précédente, on s'interroge ici sur la capacité de cette stratégie de couplage à restituer l'influence des contraintes acoustiques sur l'atomisation primaire du jet liquide.

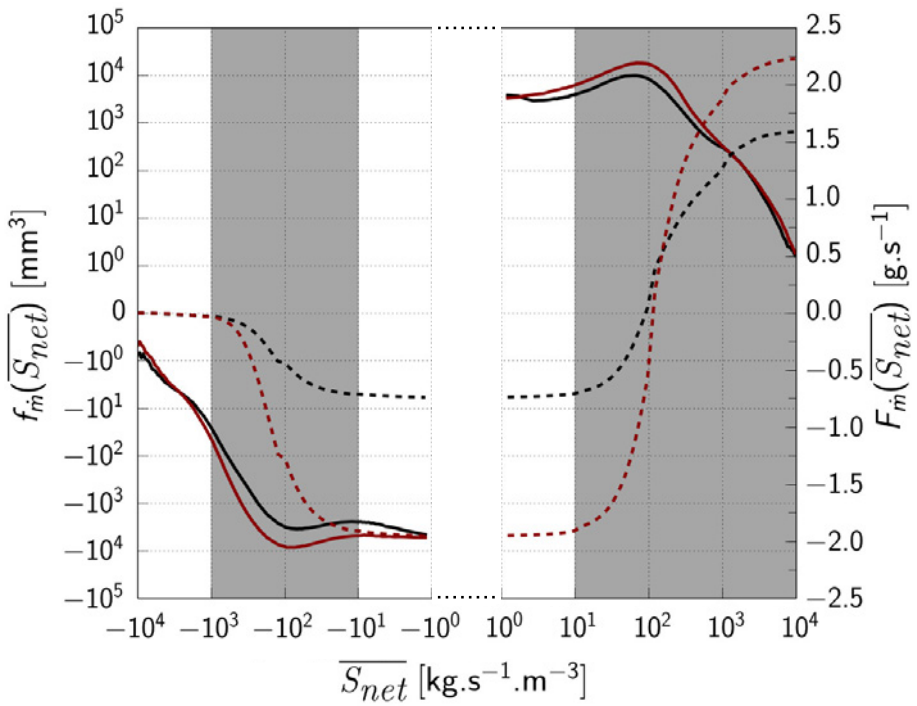


Figure 8.13 – ▬ Distribution $f_{\dot{m}}$ et ▬ fonction cumulative $F_{\dot{m}}$ massiques de $\overline{S_{net}}$ dans le domaine d'étude Ω. Noir : NMC ; rouge : MC.

On définit dans un premier temps le débit massique net d'échange entre les deux solveurs intégré sur le domaine d'étude Ω comme :

$$\dot{m}_{net,\,\Omega} = |\Omega|\langle S_{net}\rangle_\Omega = \sum_{V_c\in\Omega} S_{net}|V_c|, \tag{8.3}$$

où $\langle S_{net}\rangle_\Omega$ est la moyenne spatiale de S_{net} sur tout le domaine Ω. En considérant les 13 dernières périodes acoustiques des deux simulations, les valeurs du débit moyen $\dot{m}_{net,\,\Omega}$ avec et sans excitation acoustique sont respectivement de $2.24\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $1.6\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Dans le cas présent, les perturbations acoustiques induisent ainsi une augmentation significative de l'atomisation primaire d'environ 40% susceptible, dans un cas réactif, d'amplifier le taux de dégagement de chaleur et de favoriser (ou de défavoriser, selon le déphasage avec les fluctuations de pression) le déclenchement et la croissance d'instabilités de combustion HF. D'après la formulation (2.99) du terme source S_a, une telle intensification du débit massique

net d'atomisation sur l'ensemble du domaine d'étude Ω ne peut être dû qu'à 1) une augmentation locale du transfert de masse entre les deux solveurs, et donc du cisaillement entre les deux fluides, ou 2) une augmentation du volume d'atomisation. De manière à déterminer lequel de ces deux mécanismes intervient ici, on trace en figure 8.13 la distribution massique du terme source net moyen par unité de volume $\overline{S_{net}}$ avec et sans excitation acoustique définie par [4] :

$$f_{\dot{m}}(\overline{S_{net}}) = \frac{\mathrm{d}\overline{\dot{m}_{net}}(\overline{S_{net}} < x < \overline{S_{net}} + \mathrm{d}\overline{S_{net}})}{\mathrm{d}\overline{S_{net}}}. \tag{8.4}$$

D'après la définition (8.3) de $\dot{m}_{net}$, cette distribution représente en réalité le volume total de cellules dont le débit massique net d'atomisation par unité de volume est compris dans l'intervalle $\left[\overline{S_{net}}, \overline{S_{net}} + \mathrm{d}\overline{S_{net}}\right]$. Ainsi, si les perturbations acoustiques induisent une augmentation locale du transfert de masse entre les deux solveurs sans pour autant modifier l'étendue de la zone d'atomisation primaire, alors la courbe pleine rouge de la figure 8.13 devrait correspondre à une translation de la courbe pleine noire suivant l'axe des abscisses. En revanche, si ces perturbations acoustiques induisent une augmentation du volume total concerné par le transfert entre solveurs sans impacter le niveau de cisaillement local entre les deux fluides, alors les deux courbes devraient être liées l'une à l'autre par une translation suivant l'axe des ordonnées. Afin de compléter l'analyse, on définit la fonction cumulative de $f_{\dot{m}}(\overline{S_{net}})$ comme :

$$F_{\dot{m}}(\overline{S_{net}}) = \int_{-\infty}^{\overline{S_{net}}} f_{\dot{m}}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.5}$$

Cette fonction est tracée en pointillés sur la figure 8.13. Elle indique en réalité la contribution de chaque valeur de $\overline{S_{net}}$ au débit massique net total $\dot{m}_{net,\,\Omega}$. En effet, d'après la définition de la fonction cumulative $F_{\dot{m}}(\overline{S_{net}})$, plus la dérivée et donc la pente sont importantes et plus la contribution du terme source $\overline{S_{net}}$ l'est également. Par conséquent, les intervalles de valeurs de $\overline{S_{net}}$ contribuant de façon significative au débit moyen total échangé entre les solveurs sont représentés en gris sur la figure 8.13. On remarque que dans ces intervalles, la distribution $f_{\dot{m}}(\overline{S_{net}})$ du MC est une translation verticale de la distribution sans excitation acoustique. Cette figure démontre donc que l'augmentation du débit d'échange moyen $\overline{\dot{m}_{net}}$ entre le SPS et le DPS sous excitation acoustique est principalement dû à une augmentation du volume total concerné par cet échange tandis que le niveau de cisaillement moyen entre les deux fluides est inchangé.

Pour situer ces nouvelles zones d'atomisation issues des contraintes acoustiques, les champs 2D de $\overline{S_{net}}$ sont représentés en figures 8.14 et 8.15 respectivement dans deux directions de visualisation différentes. Par ailleurs, d'après les formulations (2.99) et (2.103) des termes sources d'atomisation primaire et de pseudo-coalescence, le débit net d'atomisation par unité de volume dépend à la fois de la fraction massique de liquide Y_l et du niveau de cisaillement local, représenté ici par l'intensité du gradient de vitesse du mélange diphasique. Les figures 8.14 et 8.15 sont ainsi complétées par les champs 2D de $\overline{Y_l}$ et $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$ afin d'appuyer l'analyse des champs de $\overline{S_{net}}$. [5] L'ensemble des champs moyens représentés sur ces deux figures est calculé à partir des 13 dernières périodes acoustiques de chaque simulation. Sur ces figures, le domaine d'étude Ω contenant le jet liquide est décomposé en trois sous-domaines de révolution non recouvrants notés ①, ② et ③, de diamètres extérieurs respectifs D_l, 6.4 D_l et 10.7 D_l. Les figures 8.14 et 8.15 révèlent d'abord une modification du champ de $\overline{S_{net}}$ dans le sous-domaine ①. En effet, contrairement au NMC, le débit massique net d'atomisation est non nul en aval du cœur liquide en présence d'acoustique. Dans la section précédente, la figure 8.11 avait mis en évidence dans cette zone la

4. Il est possible d'associer cette distribution à la distribution numérique de la taille de gouttes classiquement utilisée et définie par $f_N(D) = \mathrm{d}N(D < x < D + \mathrm{d}D)/\mathrm{d}D$, pour laquelle le nombre N et le diamètre D des gouttes seraient respectivement remplacés par le débit massique net moyen $\overline{\dot{m}_{net}}$ et le débit massique net moyen par unité de volume $\overline{S_{net}}$. Une des particularités de cette distribution réside dans la présence de valeurs négatives caractérisant le mécanisme de pseudo-coalescence.

5. La formulation de S_{net} n'étant pas linéaire, sa moyenne temporelle n'est évidemment pas fonction des variables moyennes $\overline{Y_l}$ et $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$. Celles-ci ne sont représentées ici que dans un but illustratif.

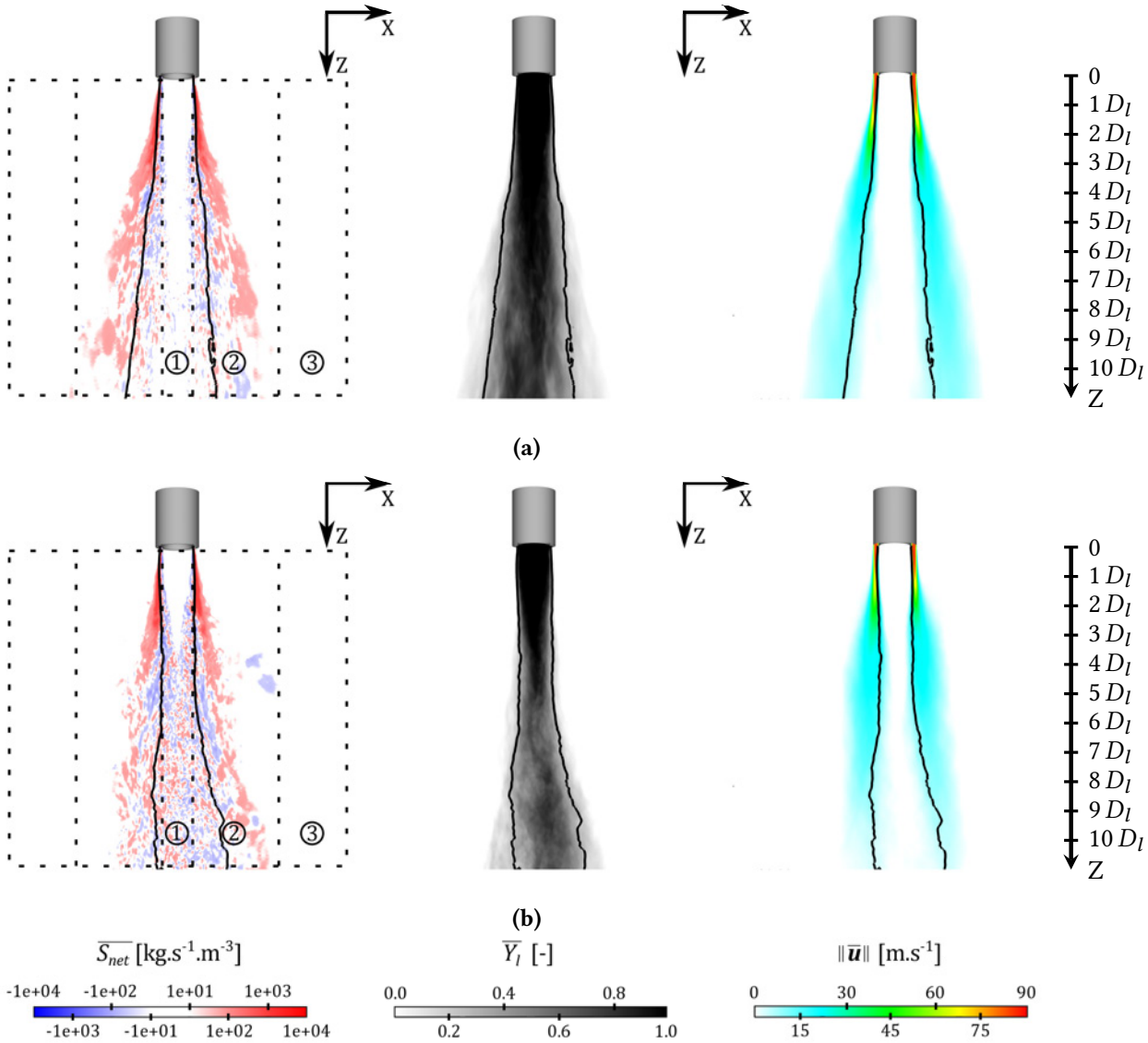


Figure 8.14 – Coupes contenant l'*a.a.* (vue A) colorées par $\overline{S_{net}}$, $\overline{Y_l}$ et $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$ de gauche à droite. (a) NMC, (b) MC. ▬ Iso-lignes $\overline{Y_l}$ = 0.4.

présence de structures liquides sous résolues par le SPS issues de la rupture du cœur liquide par la pression de radiation acoustique. Expérimentalement, la présence de ces structures induirait une surface de liquide plus grande et favoriserait donc localement l'atomisation du liquide. Numériquement, l'interface entre les deux fluides n'est plus correctement représentée dans cette zone. Cependant, le passage intermittent des structures liquides ainsi créées résulte en une diminution de $\overline{Y_l}$ en aval du jet (figure 8.14). Or, d'après la formulation (2.99), le transfert de masse entre solveurs est favorisé dans les zones de faible fraction massique de liquide, et ce quel que soit le niveau de résolution des structures liquides. À cisaillement équivalent, l'atomisation primaire en aval du jet liquide est ainsi plus intense pour le MC. Cependant, de façon similaire, le transfert inverse du DPS vers le SPS représentant la coalescence des gouttes avec les plus grosses structures liquides est également plus intense dans cette région. De plus, la vitesse du mélange et par conséquent l'intensité de son gradient sont limités par la présence du jet liquide en amont qui fait obstacle au gaz. Ainsi, comme le révèle le tableau 8.2, le débit massique net $\overline{\dot{m}^{\mathrm{MC}}_{net,\,1}}$ moyenné en temps et intégré sur toute la région ① s'avère en réalité quasi nul et ne participe donc pas à l'augmentation globale du débit d'atomisation dans l'ensemble du domaine Ω en présence d'ondes acoustiques. Malgré cela, dans un cas réactif, si le débit d'évaporation des gouttes formées par

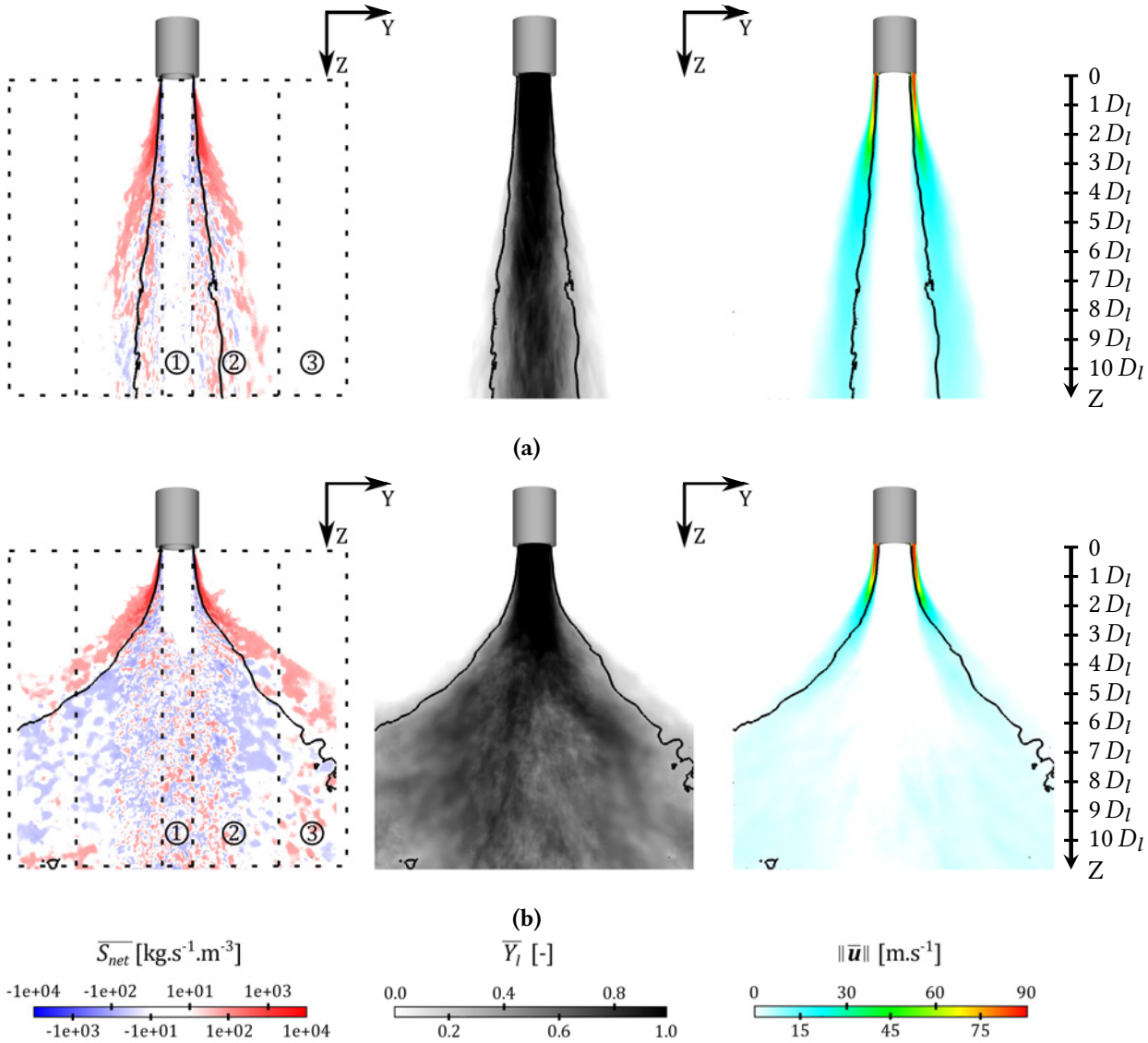


Figure 8.15 – Coupes orthogonales à l'*a.a.* (vue B) colorées par $\overline{S_{net}}$, $\overline{Y_l}$ et $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$ de gauche à droite. (a) NMC, (b) MC. ▬ Iso-lignes $\overline{Y_l}$ = 0.4.

l'atomisation de ces structures liquides est important face au transfert par pseudo-coalescence, la distribution du taux de dégagement de chaleur pourrait être modifiée dans cette région et ainsi influencer la réponse des flammes aux perturbations acoustiques.

En dehors du sous-domaine ①, on observe une modification du champ de $\overline{S_{net}}$ différente selon le plan de visualisation considéré. Dans le plan contenant l'axe acoustique, la figure 8.14 met en évidence une légère contraction du débit moyen d'atomisation vers l'axe d'injection dans le cas où le jet est soumis à l'excitation acoustique. Ce phénomène est associé à la rupture du cœur liquide par la pression de radiation acoustique. En effet, celle-ci conduit à une augmentation de l'angle θ_l entre la surface du jet et l'axe d'injection et donc à la réduction de l'angle initialement emprunté par les ligaments arrachés transversalement dans ce plan. Le domaine de présence moyenne de la phase liquide est alors réduit. Puisque le transfert de masse entre solveurs opère aux faibles valeurs de fraction massique de liquide ($\overline{Y_l} < 0.4$ sur la figure 8.14), le champ de $\overline{S_{net}}$ est ainsi contracté vers l'axe central du jet. En revanche, l'effet inverse est observé dans le plan orthogonal à l'axe acoustique. On observe ainsi sur la figure 8.15b un élargissement transverse important du champ de $\overline{S_{net}}$. Dans la section précédente, la figure

x	①	+	②	+	③	=	Ω
$\overline{\dot{m}^{\mathrm{NMC}}_{net,\,x}}$ $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	-2.44×10^{-2}		1.57		5.62×10^{-2}		1.6
$\overline{\dot{m}^{\mathrm{MC}}_{net,\,x}}$ $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$	-2.73×10^{-2}		1.51		7.54×10^{-1}		2.24
$(\overline{\dot{m}^{\mathrm{MC}}_{net,\,x}}-\overline{\dot{m}^{\mathrm{NMC}}_{net,\,x}})/\overline{\dot{m}^{\mathrm{NMC}}_{net,\,\Omega}}$	−0.2%		−3.8%		43.6%		39.6%

Table 8.2 – Débit massique net d'atomisation moyen selon le domaine d'intégration.

8.12 avait mis en évidence dans cette zone l'éjection transverse de structures liquides sous-résolues par le SPS provoquée par l'aplatissement du jet liquide par la pression de radiation acoustique. Le passage répété de ces fragments liquides induit ainsi l'élargissement du champ de $\overline{Y_l}$ autour du jet dans une zone où la vitesse du co-courant gazeux est importante (cf. champs de $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$ en figure 8.15). On peut noter par ailleurs que le champ de vitesse du fluide est lui-même élargi par la présence de ces fragments liquides qui modifient considérablement la masse volumique du mélange et font par conséquent obstacle à l'écoulement co-courant gazeux. Ainsi, puisque le transfert de masse entre solveurs opère aux faibles valeurs de fraction massique de liquide ($\overline{Y_l} < 0.4$ sur la figure 8.15), le champ de S_{net} s'élargit. En aval de cette zone ($\overline{Y_l} > 0.4$), la fraction massique de liquide est plus importante et la vitesse du mélange est par conséquent réduite. L'atomisation primaire est donc plus faible tandis que la fréquence de collision entre les gouttes et les structures liquides de taille plus importante augmente, d'où les valeurs négatives de $\overline{S_{net}}$ rencontrées. Au global, l'intégration de $\overline{S_{net}}$ sur l'ensemble du sous-domaine ② révèle un débit d'atomisation net moyen équivalent pour les deux cas simulés (écart relatif de seulement 4% d'après le tableau 8.2). L'augmentation globale du débit moyen d'atomisation dans l'ensemble du domaine Ω en présence d'ondes acoustiques est ainsi essentiellement due à l'éjection de structures liquides dans le sous-domaine d'étude ③ par les contraintes de radiation acoustique (+44% d'augmentation du débit moyen d'atomisation dans cette zone). Cela démontre donc que la méthodologie de couplage entre les deux solveurs est capable, elle aussi, de restituer l'impact des contraintes acoustiques sur le processus d'atomisation primaire.

À l'instar de la section précédente, il est possible de définir la densité d'aire interfaciale du spray simulé par le DPS et contenu dans le domaine Ω par : $\Sigma_{DPS,\,\Omega} = \mathcal{S}_\Omega/|\Omega|$, avec $\mathcal{S}_\Omega$ la surface totale de gouttes dans le domaine d'étude. En introduisant le volume total de gouttes $\mathcal{V}_\Omega$, $\Sigma_{DPS,\,\Omega}$ devient $\Sigma_{DPS,\,\Omega} = \langle\alpha^{tot}\rangle_\Omega\,\mathcal{S}_\Omega/\mathcal{V}_\Omega$, avec $\langle\alpha^{tot}\rangle_\Omega$ la fraction volumique de gouttes moyennée sur l'intégralité du domaine Ω, toutes sections k considérées. De plus, l'introduction du diamètre moyen de Sauter $[D_{32}]_\Omega$, défini comme le diamètre d'une goutte isolée ayant le même rapport $\mathcal{S}/\mathcal{V}$ que le spray dans sa globalité, conduit à [6] :

$$\Sigma_{DPS,\,\Omega} = 6\frac{\langle\alpha^{tot}\rangle_\Omega}{[D_{32}]_\Omega}. \tag{8.6}$$

Sur la base de cette définition, l'évolution temporelle de $\Sigma_{DPS,\,\Omega}$ est tracée sur la figure 8.16a pour les deux cas simulés. Dans les deux cas, une chute initiale de $\Sigma_{DPS,\,\Omega}$ est observée. Cette chute est en réalité due au rétablissement du coefficient de compressibilité réel du liquide justifié au chapitre 6 et réalisé à la fin du calcul destiné à l'établissement du jet diphasique sans excitation acoustique. Cette modification des propriétés du liquide a cependant une influence mineure sur les résultats des simulations, puisque l'évolution de $\Sigma_{DPS,\,\Omega}$ se stabilise rapidement aux alentours de $3\,\mathrm{m}^{-1}$ pour le NMC. Si l'on s'intéresse au MC, on remarque une augmentation progressive de la densité d'aire interfaciale tout au long du calcul. D'après les figures 8.16b et 8.16c, cette augmentation est induite par une augmentation de la fraction volumique de gouttes dans le volume d'étude due à l'intensification de l'atomisation primaire par les contraintes acoustiques, tandis que le diamètre moyen de Sauter du spray n'évolue que très faiblement.

6. Pour plus d'informations sur le calcul de $\langle\alpha^{tot}\rangle_\Omega$ et $[D_{32}]_\Omega$ à partir des données fournies par le DPS, le lecteur est invité à lire l'annexe A.

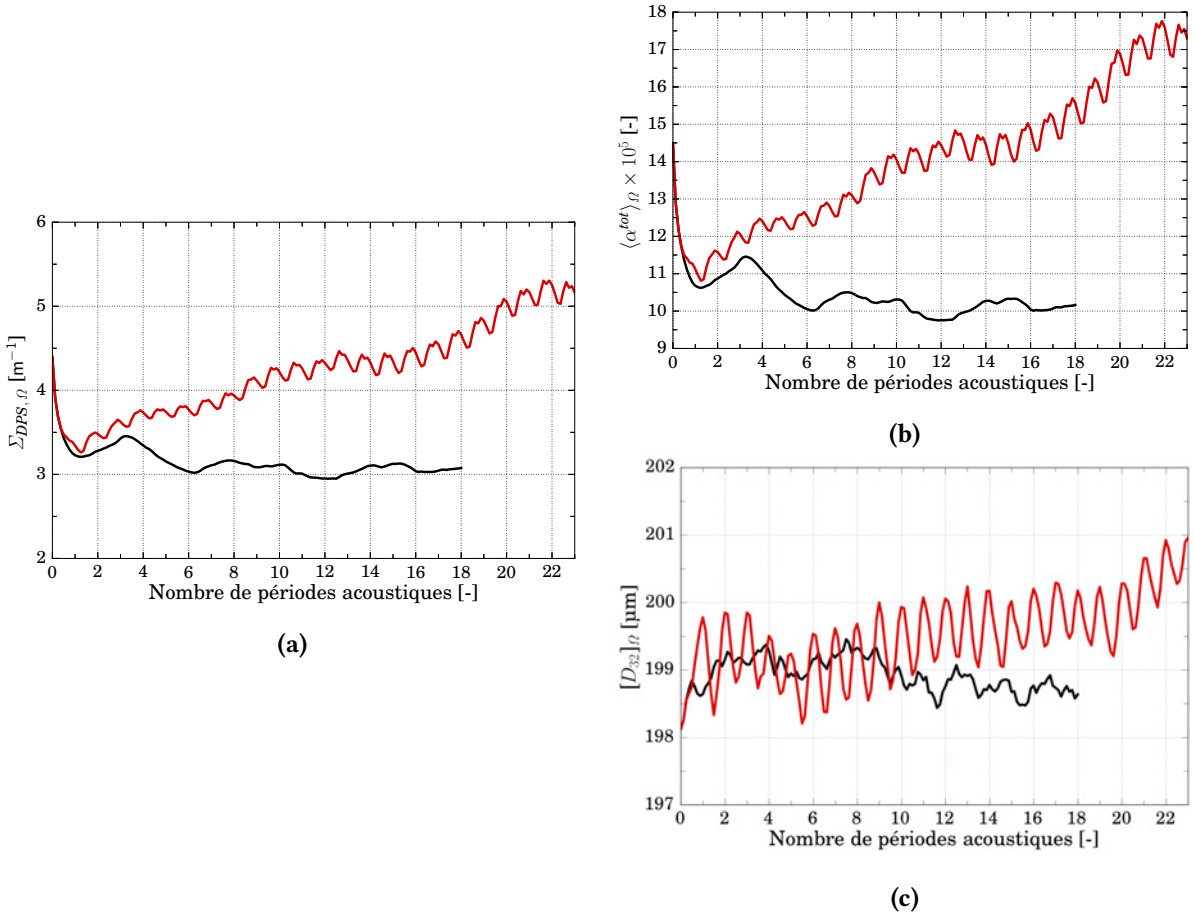


Figure 8.16 – Évolution temporelle (a) de la densité d'aire interfaciale dans le DPS, (b) de la fraction volumique totale de gouttes moyenne et (c) du diamètre moyen de Sauter du spray. — NMC ; — MC.

En conclusion de cette section, il apparaît que la méthodologie de simulation d'écoulements diphasiques utilisée lors de ces travaux semble adaptée pour restituer l'influence des contraintes acoustiques sur le processus d'atomisation primaire du jet liquide, que ce soit par le biais de la description fournie par le SPS ou du couplage entre les deux solveurs Eulériens. Pour autant, une comparaison quantitative aux campagnes expérimentales du Coria associées au même point de fonctionnement permettra, dans un futur proche, de valider plus précisément ces conclusions. Dans la suite de ce chapitre, nous nous attachons à vérifier la capacité du DPS à restituer le comportement des gouttes une fois soumises aux ondes acoustiques.

8.3 Réponse du spray à l'excitation acoustique

La réponse du spray face aux ondes acoustiques est analysée à travers trois sections distinctes. Nous nous attachons d'abord à évaluer l'influence des ondes sur l'angle d'ouverture du spray. Par la suite, le couplage acoustique entre le système d'injection et la cavité ainsi que son influence sur les gouttes sera étudiée. Enfin, nous analyserons l'oscillation transverse des gouttes sous l'effet des fluctuations de vitesse du gaz au passage des ondes acoustiques.

8.3.1 Angle d'ouverture du spray

Mesures expérimentales

Dans le cas d'un jet liquide en régime d'atomisation de type fibre, les travaux du Coria ont révélé qu'une onde acoustique d'amplitude élevée était capable de modifier de façon significative la forme globale du spray. Pour des vitesses d'injection plus faibles que celles présentées dans ce chapitre, Ficuciello *et al.* [52] observent un élargissement du spray à la fois dans le plan contenant l'axe acoustique et le plan orthogonal. Dans le plan contenant l'axe acoustique (cf. figure 8.17a), l'augmentation de l'angle d'ouverture du spray pourrait être associée à la formation d'instabilités de Faraday à la surface du liquide. En effet, lorsque le jet liquide initialement cylindrique est aplati par les contraintes acoustiques, Baillot *et al.* [7] observent la formation d'un réseau d'instabilités à la surface du jet semblable à ce qui est observé pour des films liquides en contact avec une surface solide vibrante (Faraday [44]). Ces instabilités conduisent alors à l'éjection de gouttes dans la direction de propagation des ondes acoustiques. Les niveaux d'excitation acoustique imposés par Baillot *et al.* [7] ne sont pas suffisant pour observer ce type d'instabilité dans le cas de régimes d'atomisation de type fibre. Cependant, puisque les niveaux d'excitation acoustique imposés par Ficuciello *et al.* [52] sont plus importants, ces instabilités pourraient être à l'origine de l'augmentation de l'angle du spray observée en figure 8.17a dans le plan contenant l'axe acoustique. Dans le plan orthogonal (cf. figure 8.17b), l'angle du spray est également fortement influencé par les ondes acoustiques. D'après l'analyse physique présentée en section 8.2.1 et basée sur les travaux de Villermaux [159], il semblerait que ce soit l'aplatissement du cœur liquide par la pression de radiation acoustique qui conduirait à une éjection de fragments liquides dans une zone élargie autour du jet, d'où l'augmentation de l'angle de spray observée.

Les mesures de l'angle du spray θ sont réalisées par le Coria à partir d'une série d'images du jet liquide acquises à haute cadence par ombroscopie. Une image unique est construite en colorant chaque pixel par le niveau de gris minimal pris par le pixel sur l'ensemble des images acquises en régime établi. L'enveloppe du spray est alors obtenue par une transformation binaire de cette image, chaque pixel noir indiquant le passage d'une goutte à un instant donné. Ce principe de mesure est illustré en figure 8.18. Lors de cette transformation binaire, une valeur seuil maximale doit être imposée sur les niveaux de gris de manière à ne considérer que les positions traversées par un nombre suffisant de gouttes. Les mesures d'angles associées au PF-Onera sont présentées en figure 8.19. En l'absence d'onde acoustique, l'écoulement est théoriquement symétrique autour de l'axe d'injection. L'écart de 3.4° observé sur la figure 8.19a entre les valeurs absolues des angles θ_+ et θ_- des deux côtés du spray reflète alors une incertitude de mesure relative significative de 10% associée à la méthode de mesure expérimentale. Pour le MC, seules les mesures de l'angle dans le plan contenant l'axe acoustique (vue A) sont disponibles lors de la rédaction de ce mémoire. Celles-ci sont présentées en figure 8.19b. D'après cette figure, l'angle de dispersion des gouttes θ_- du côté $X < X_{inj}$ est réduit d'environ 22% sous l'effet des perturbations acoustiques tandis que l'angle θ_+ du côté $X > X_{inj}$ n'est réduit que de 3%. Ainsi, contrairement aux observations effectuées par Ficuciello *et al.* [52] en figure 8.17a pour des vitesses d'injection plus faibles, l'angle de spray dans cette direction n'augmente pas sous les contraintes acoustiques, mais semble au contraire diminuer. Cela laisse donc penser qu'aucune structure liquide n'est éjectée par des instabilités de Faraday. Dans le cas présent, le cisaillement entre les deux fluides est plus important et joue probablement le rôle de barrière, empêchant ainsi la formation de telles instabilités à la surface du cœur liquide. Par ailleurs, la figure 8.19b semble indiquer une légère dissymétrie en présence des perturbations acoustiques, avec une réduction de l'angle significativement plus importante pour $X < X_{inj}$. Cette dissymétrie peut s'expliquer par deux phénomènes : 1) la contraction du champ de vitesse moyenne $\|\overline{\boldsymbol{u}}\|$ du fluide homogène et du champ de débit net moyen d'atomisation $\overline{S_{net}}$ vers l'axe d'injection sous l'effet de l'aplatissement du cœur liquide (cf. figure 8.14), conduisant à la présence de gouttes plus proches de l'axe d'injection, et 2) une légère déviation du spray par la force de radiation acoustique vers le VAN le plus proche situé à la droite du jet ($X_{inj} < X_{VAN}$). Du côté $X < X_{inj}$, les deux phénomènes agissent dans le même sens, tandis qu'ils s'opposent l'un à l'autre du côté $X > X_{inj}$. Cela contribue ainsi à une réduction plus importante de l'angle de spray pour $X < X_{inj}$ que pour $X > X_{inj}$. L'écart relatif entre

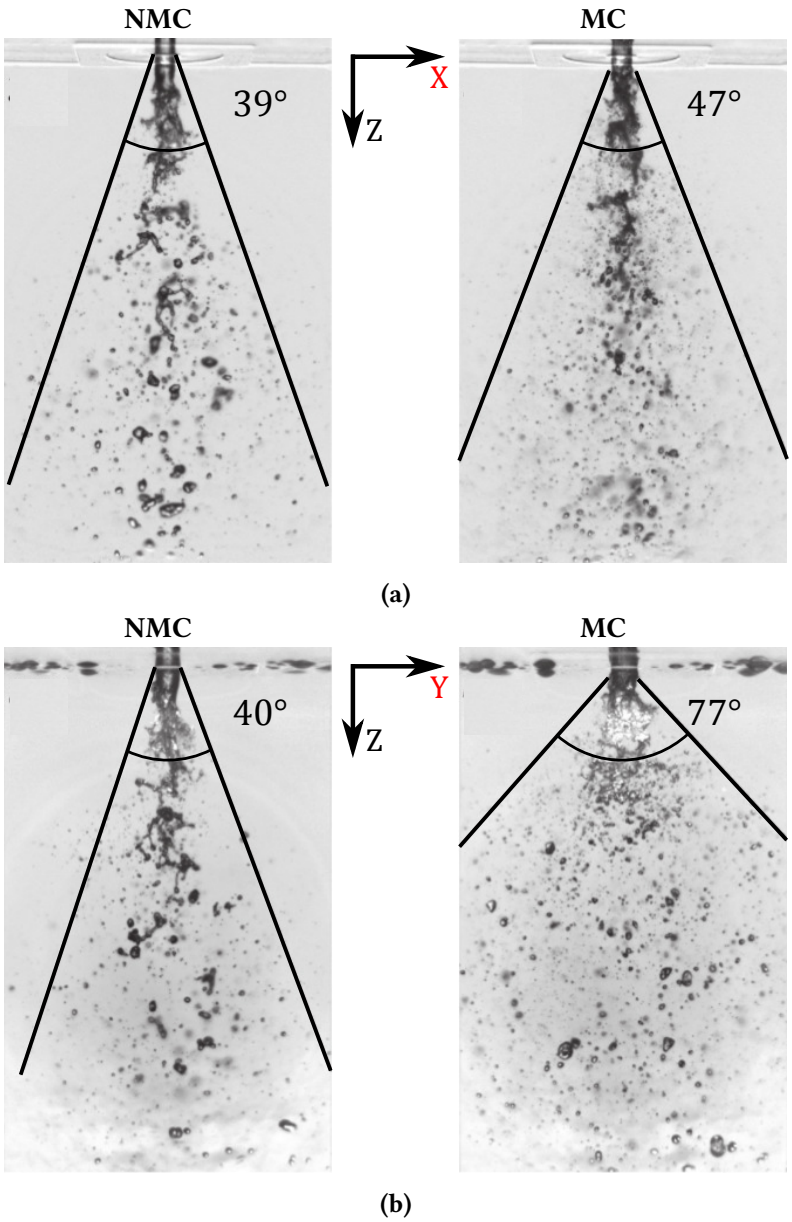


Figure 8.17 – Mesures expérimentales de la dispersion spatiale d'un spray en régime d'atomisation de type fibre et positionné en un VAN (Ficuciello *et al.* [52]) (We_g = 224 ; Re_l = 3200 ; f_{ac} = 1015 Hz ; p_{ac} = 12 kPa). (a) Plan contenant l'axe acoustique (vue A) et (b) plan orthogonal (vue B).

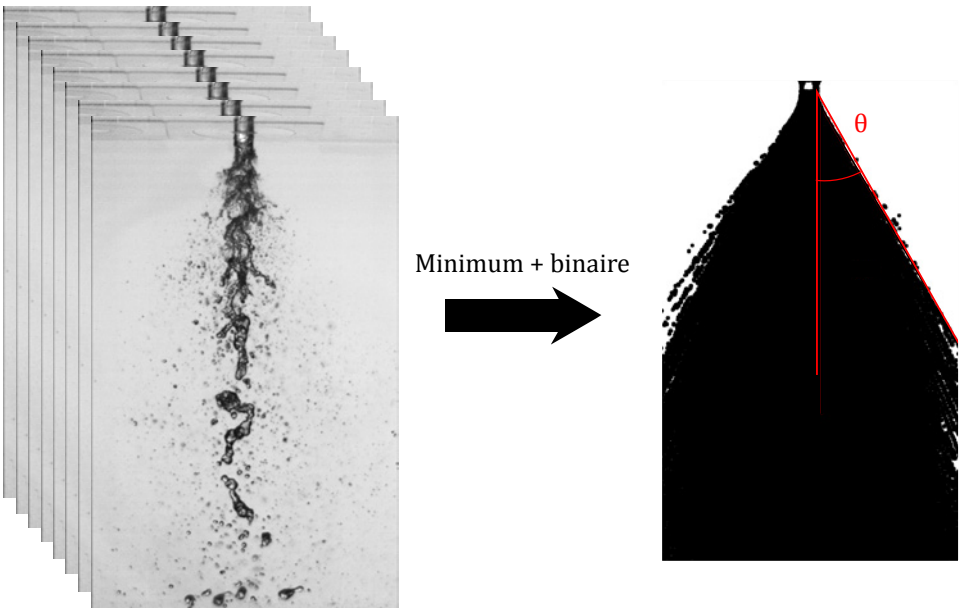
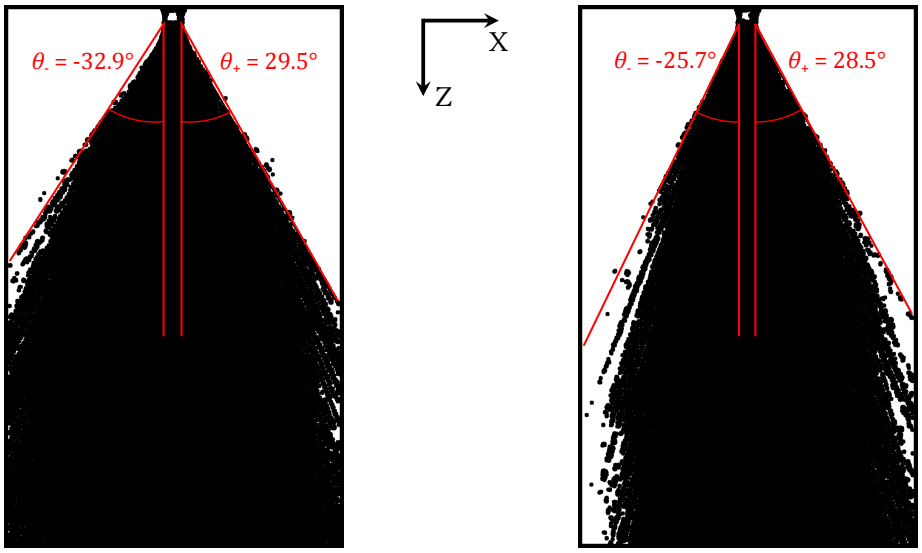


Figure 8.18 – Principe de mesure expérimentale de la dispersion spatiale d'un spray (Ficuciello *et al.* [52]).



(a) NMC **(b) MC**

Figure 8.19 – Mesures expérimentales par le Coria de l'angle de dispersion spatiale du spray dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) pour les conditions PF-Onera.

les deux angles θ_+ et θ_- est cependant de l'ordre de l'incertitude de mesure expérimentale et ne permet donc pas de confirmer cette théorie.

Mesures par la simulation numérique

Une méthode de mesure similaire de l'angle de spray est définie pour les simulations numériques (cf. figure 8.20). Pour ces mesures, les images ombroscopiques sont remplacées par des champs 2D de densité numérique de gouttes $n^{tot} = \sum_{k=1}^{N_s} n^k$. La transformation binaire de chacune de ces images permet alors d'obtenir l'enveloppe du spray à chaque instant, sous couvert d'avoir défini au préalable la densité de gouttes minimale à prendre en compte. L'angle de dispersion des gouttes est alors mesuré au cours du temps dans les deux directions autour du spray. L'angle mesuré par Ficuciello *et al.* [52] pour le PF-Onera peut donc être comparé à la valeur maximale de l'angle numérique au cours du temps. Il est choisi ici de calibrer la valeur seuil de densité numérique de gouttes de manière à retrouver un angle de spray sans perturbation acoustique équivalent à la valeur de 26.8° prédite par la corrélation (1.38) de Leroux *et al.* [96], puis de conserver cette valeur seuil pour la mesure des angles du MC. Dans le cas présent, la valeur seuil retenue est $n^{tot} = 3 \times 10^8$ m^{-1}. L'angle de 26.8° est un peu éloigné des 32.9° et 29.5° mesurés expérimentalement en figure 8.19a, mais rappelons que la méthode de mesure expérimentale est associée à une incertitude de mesure relative de 10%.

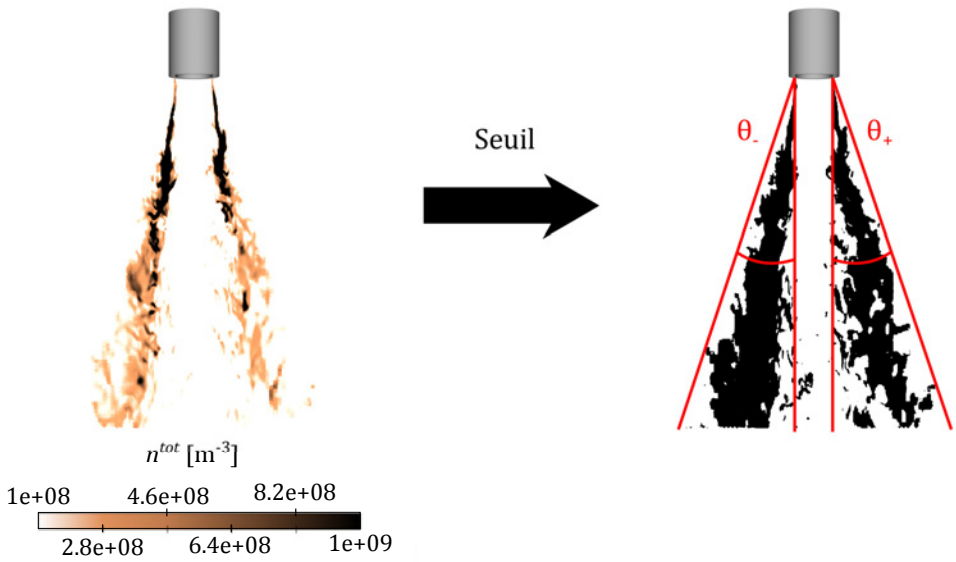
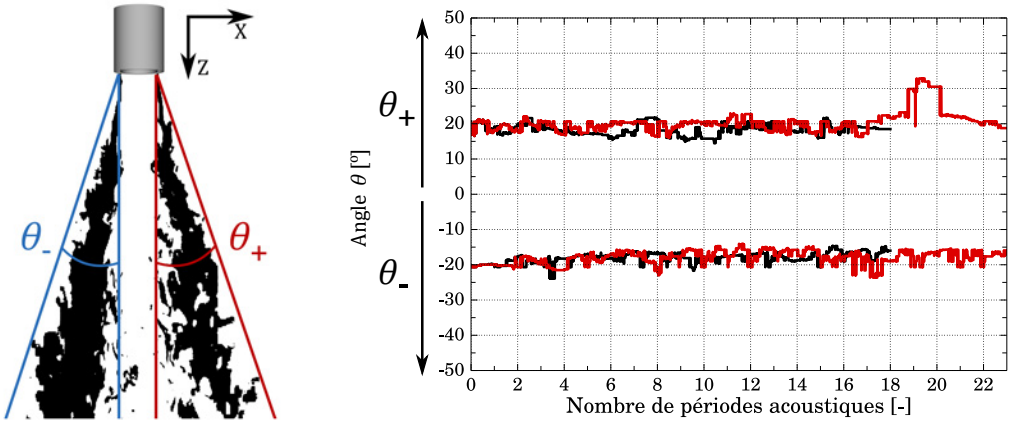


Figure 8.20 – Principe de mesure numérique de l'angle de dispersion spatiale d'un spray.

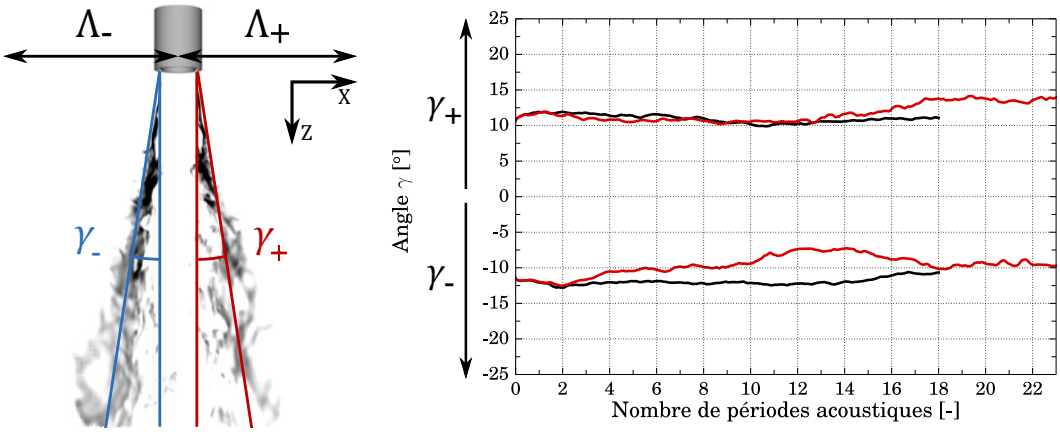
L'évolution temporelle des angles de dispersion du spray dans le plan de visualisation contenant l'axe acoustique (vue A) est représentée en figure 8.21 pour le NMC et le MC. Sur cette figure, aucune modification de l'angle par les ondes acoustiques n'est observée excepté entre les 19ème et 20ème périodes acoustiques. Cet écart entre les deux simulations n'est en réalité dû qu'au passage anecdotique en périphérie du spray d'un paquet de gouttes dont la densité numérique est très proche de la valeur seuil retenue. La méthode de mesure numérique ne permet donc pas de restituer la réduction de l'angle observée expérimentalement. Cependant, bien que l'écoulement soit normalement symétrique en l'absence d'ondes acoustiques, l'écart entre les valeurs absolues des angles extrêmes θ_+^{max} et θ_-^{min} mesurés numériquement lors du NMC est de 2.5 degrés, soit un écart relatif de 10%. L'incertitude associée à la méthode de mesure numérique semble donc aussi significative que celle associée aux mesures expérimentales et ne permet donc pas de conclure à propos de l'influence des ondes acoustiques sur l'angle d'ouverture du spray dans le plan de visualisation contenant l'axe acoustique.

Une seconde méthode de mesure numérique de l'angle de spray est définie de manière à s'affranchir du choix d'une valeur seuil arbitraire sur la densité numérique de gouttes et à réduire l'incertitude de



(a) (b)

Figure 8.21 – (a) Définition et (b) évolution temporelle des angles de dispersion spatiale du spray dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A). — NMC ; — MC.



(a) (b)

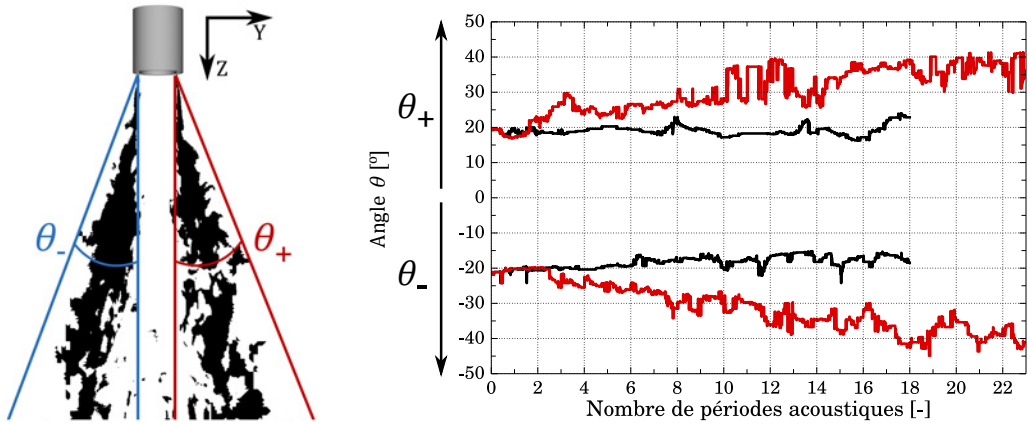
Figure 8.22 – (a) Définition et (b) évolution temporelle des angles de spray pondérés par α^{tot} dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A). — NMC ; — MC.

mesure associée. Cette seconde méthode de mesure est définie par :

$$\gamma_+ = \frac{\sum\limits_{V_c \in \Lambda_+} \gamma\, \alpha^{tot}\, |V_c|}{\sum\limits_{V_c \in \Lambda_+} \alpha^{tot}\, |V_c|}, \qquad \gamma_- = \frac{\sum\limits_{V_c \in \Lambda_-} \gamma\, \alpha^{tot}\, |V_c|}{\sum\limits_{V_c \in \Lambda_-} \alpha^{tot}\, |V_c|}, \tag{8.7}$$

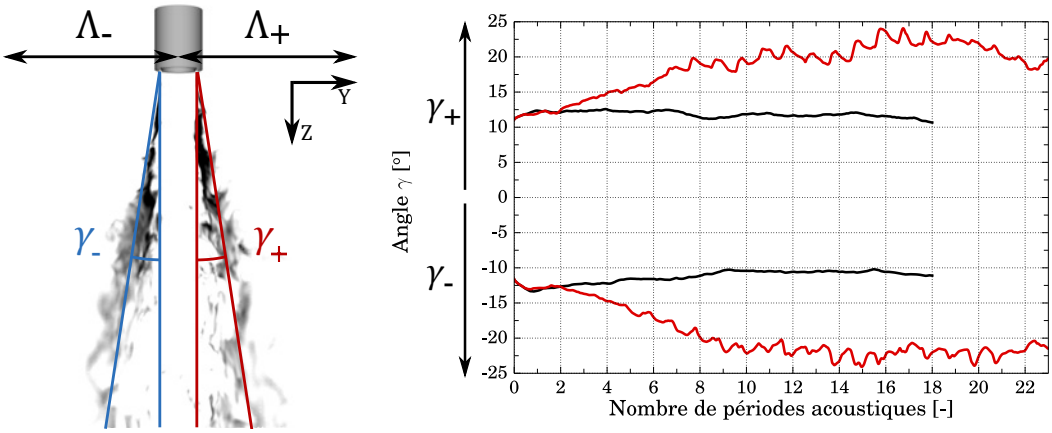
où γ correspond à l'angle entre l'axe d'injection et le segment reliant la lèvre de l'injecteur au centre de chaque cellule du maillage de volume $|V_c|$, tandis que α^{tot} est la fraction volumique locale de gouttes, toutes sections k considérées. Λ_+ and Λ_- sont quant à eux les domaines respectivement associés aux coordonnées X positives et négatives, avec l'axe d'injection utilisé comme référence. Les angles de spray γ_- et γ_+ sont ainsi pondérés par le volume local de gouttes et donc de façon équivalente par leur masse. L'évolution temporelle des angles de spray γ_- et γ_+ ainsi mesurés est représentée en figure 8.22 dans le plan contenant l'axe acoustique. Sur cette figure, on remarque dans un premier temps que les fluctuations de l'angle lors du NMC sont moins importantes qu'avec la méthode de mesure précédente, et permettent ainsi une analyse plus précise de l'effet des ondes acoustiques sur le spray. En présence d'ondes acoustiques, ces courbes semblent révéler une légère déviation du spray vers les coordonnées positives, *i.e.* vers le VAN le plus proche, tout comme semblaient le montrer les mesures du Coria en figure 8.19.

En ce qui concerne le plan de visualisation orthogonal à l'axe acoustique (vue B), l'évolution temporelle des angles de dispersion spatiale du spray mesurés numériquement est représentée en figure 8.23. On observe sur cette figure une augmentation progressive de l'angle jusqu'à environ 40°, soit le double de l'angle mesuré en l'absence d'onde acoustique. Par ailleurs, contrairement au plan de visualisation précédent, l'influence de ces ondes sur l'angle du spray est symétrique. Malgré l'absence de mesures expérimentales dans ce plan de visualisation pour les conditions PF-Onera, cette évolution correspond aux observations effectuées par Ficuciello *et al.* [52] en figure 8.17b pour des vitesses d'injection plus faibles. Par ailleurs, les mesures de l'angle pondéré par la masse de gouttes représentées en figure 8.24 corroborent ces observations. L'évolution de l'angle de spray dans ce plan de visualisation est associée à l'aplatissement du cœur liquide et à l'éjection de fragments liquides qui en résulte. En effet, comme il l'a été observé précédemment en figure 8.15, la zone d'atomisation primaire modélisée par le transfert entre solveurs s'élargit sous l'effet du cisaillement entre le co-courant gazeux et ces nouvelles structures liquides. La convection des gouttes créées dans cette région par le co-courant gazeux lui-même dévié participe alors à l'augmentation progressive de l'angle de dispersion du spray observée sur la figure 8.23. Une comparaison aux mesures expérimentales sur le plan de visualisation orthogonal à l'axe acoustique sera toutefois nécessaire à l'avenir pour valider de façon quantitative la reproduction de ce mécanisme par la simulation numérique.



(a) (b)

Figure 8.23 – (a) Définition et (b) évolution temporelle des angles de dispersion spatiale du spray dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B). — NMC ; — MC.



(a) (b)

Figure 8.24 – (a) Définition et (b) évolution temporelle des angles de spray pondérés par α^{tot} dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B). — NMC ; — MC.

Influence sur la distribution spatiale des gouttes

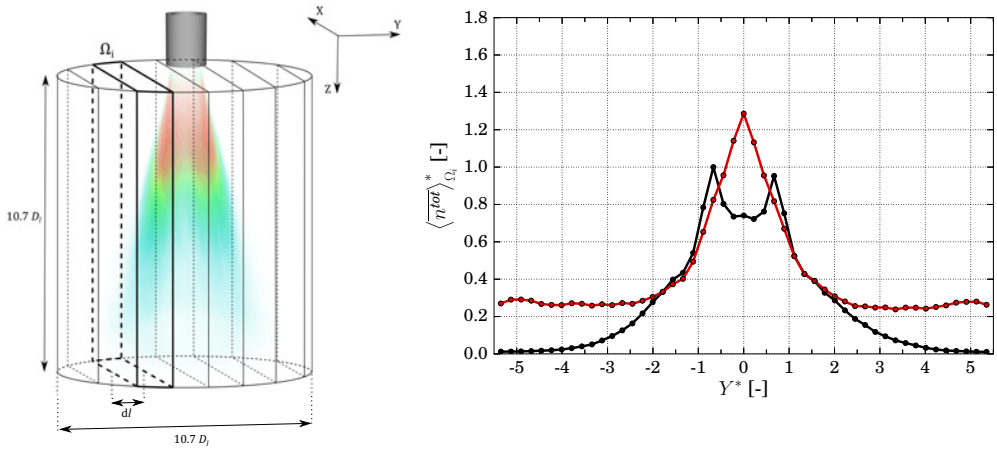
L'ouverture de l'angle du spray dans le plan orthogonal à l'axe acoustique a une certaine influence sur la distribution spatiale des gouttes. Pour l'évaluer, le champ 3D de la densité numérique de gouttes moyennée en temps $\overline{n^{tot}}$, toutes sections k considérées, est calculé sur l'intervalle de temps associé aux 18 dernières périodes acoustiques de chaque simulation. Le domaine d'étude Ω est ensuite décomposé en plusieurs sous-domaines Ω_i de même épaisseur dl et de profondeur limitée par le domaine principal Ω. Une illustration du découpage spatial dans le plan orthogonal à l'axe acoustique est proposée en figure 8.25a. Pour chaque sous-domaine Ω_i, la densité numérique de gouttes moyenne $\left\langle \overline{n^{tot}} \right\rangle_{\Omega_i}$ est calculée comme [7] :

$$\left\langle \overline{n^{tot}} \right\rangle_{\Omega_i} = \frac{\sum\limits_{V_c \in \Omega_i} \overline{n^{tot}} \, |V_c|}{\sum\limits_{V_c \in \Omega_i} |V_c|}. \tag{8.8}$$

La distribution spatiale de cette variable normalisée par la valeur maximale atteinte sans perturbation acoustique, notée $\left\langle \overline{n^{tot}} \right\rangle^*_{\Omega_i}$, est tracée en figure 8.25b dans le plan orthogonal à l'axe acoustique (vue B). Sur cette figure, l'axe des abscisses correspond à la distance à l'axe d'injection normalisée par le diamètre d'injection D_l. La distribution moyenne mesurée lors du NMC est symétrique et présente deux maximums aux coordonnées d'injection du co-courant gazeux, soit $Y^* = \pm\, 0.63\, D_l$. La diminution de la densité numérique de gouttes entre ces deux pics est due à la présence du cœur liquide au centre du domaine d'étude à l'intérieur duquel aucune goutte ne peut exister. Lors du MC, la forme de la distribution est radicalement différente, avec un pic central et des extrémités non nulles. Afin d'expliquer ces différences, le champ 2D de $\overline{n^{tot}}$ est représenté en figure 8.26 dans le plan orthogonal à l'axe acoustique pour les deux cas simulés. On peut voir que l'augmentation de la densité moyenne de gouttes aux coordonnées $|Y^*| > 2D_l$ observée en figure 8.25b en présence d'ondes acoustiques est due à l'élargissement du spray par l'éjection de fragments liquides lors de l'aplatissement du cœur liquide. Quant au pic de densité moyenne de gouttes au centre du domaine observé sur la figure 8.25b, celui-ci ne semble pas visible sur le champ 2D de la figure 8.26.

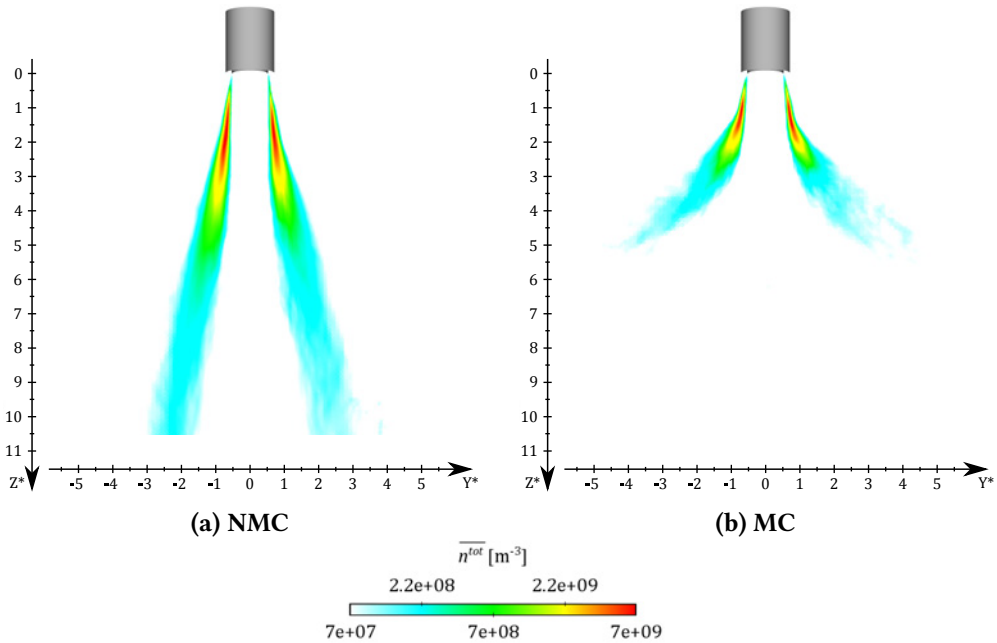
Pour expliquer la présence de ce pic sous l'influence des ondes acoustiques, il est nécessaire d'analyser les distributions spatiales de densité numérique moyenne de gouttes dans le plan contenant l'axe acoustique (vue A), ainsi que le champ correspondant de $\overline{n^{tot}}$ (cf. figures 8.27b et 8.28). Dans ce plan, la distribution spatiale des gouttes en l'absence d'onde acoustique est évidemment identique au plan précédent, du fait de l'axisymétrie de l'écoulement. En revanche, pour le MC, la densité numérique moyenne des gouttes est plus importante comparée au NMC aux abords des coordonnées d'injection du co-courant gazeux ($0.5 < |X^*| < 2.5$). C'est justement cette densité numérique élevée qui permet d'expliquer la présence du pic central sur la figure 8.25b. Par ailleurs, si l'on s'intéresse au domaine $|X^*| > 1.5$ du MC, on remarque que la distribution numérique moyenne des gouttes est plus importante du côté des $X^* > 0$ en présence d'ondes acoustiques. Cela semble refléter une légère déviation du spray vers le VAN le plus proche par la force de radiation acoustique, comme il l'a été observé expérimentalement sur ce point de fonctionnement en particulier. Si l'on isole au contraire la distribution sur l'intervalle $|X^*| < 1.5$, on remarque une nette asymétrie avec cette fois-ci une densité moyenne plus importante pour $X^* < 0$. Ce comportement asymétrique est également visible sur le champ 2D de la figure 8.28b où la densité numérique moyenne de gouttes est plus élevée du côté gauche de l'injecteur. L'augmentation de la densité particulaire dans cette cette zone en présence d'ondes acoustiques ainsi que le comportement asymétrique associé sont en réalité dus au couplage entre l'injecteur et les ondes acoustiques dans la cavité. Ce mécanisme est analysé en détail dans la section suivante.

7. Pour plus d'informations sur le calcul de $\overline{n^{tot}}$ et $\left\langle \overline{n^{tot}} \right\rangle_{\Omega_i}$ à partir des données fournies par le DPS, le lecteur est invité à lire l'annexe A.



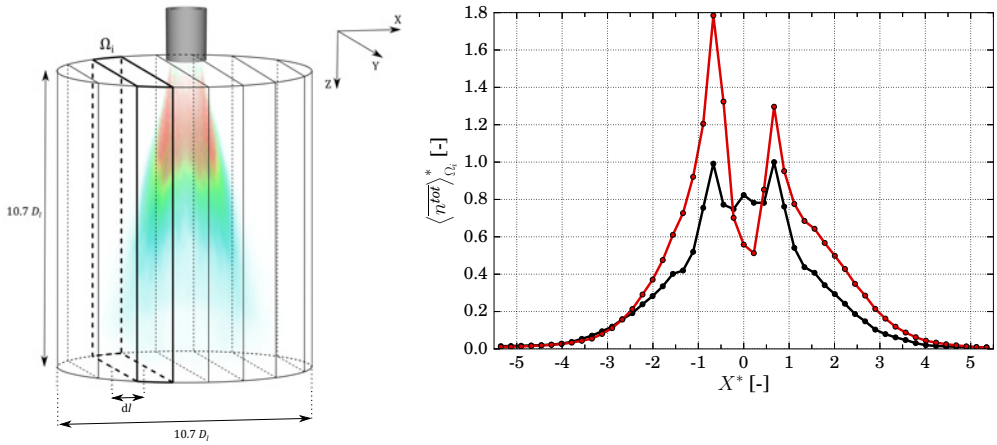
(a) (b)

Figure 8.25 – Distribution spatiale de la densité numérique moyenne de gouttes normalisée, toutes sections k considérées. (a) Principe de mesure et (b) résultats dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B). NMC ; MC.



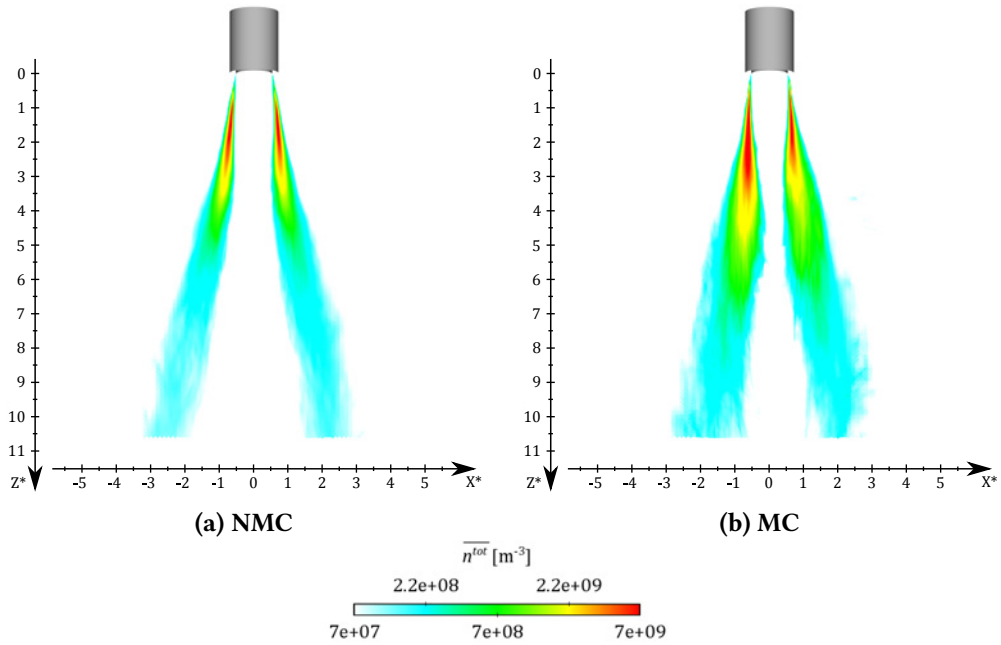
(a) NMC (b) MC

Figure 8.26 – Coupes orthogonales à l'*a.a.* (vue B) colorées par $\overline{n^{tot}}$.



(a) (b)

Figure 8.27 – Distribution spatiale de la densité numérique moyenne de gouttes normalisée, toutes sections k considérées. (a) Principe de mesure et (b) résultats dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A). NMC ; MC.



(a) NMC (b) MC

Figure 8.28 – Coupes contenant l'*a.a.* (vue A) colorées par $\overline{n^{tot}}$.

En conclusion, les nombreuses analyses effectuées de cette section révèlent un changement important dans la topologie du spray en présence d'ondes acoustiques. De façon similaire à ce qui a pu être observé expérimentalement par le passé sur d'autres points de fonctionnement, le spray s'élargit dans la direction orthogonale à l'axe acoustique sous l'influence de l'aplatissement du cœur liquide, et semble être dévié vers le VAN le plus proche. Par ailleurs, la masse de liquide atomisé et le nombre de gouttes ainsi créées sont augmentés. Notons également que l'influence des contraintes acoustiques conduit à une rupture de la symétrie axiale du spray.

8.3.2 Couplage entre le système d'injection et les ondes acoustiques

De façon équivalente aux travaux de Baillot *et al.* [7] mentionnés en section 1.2, les simulations numériques réalisées lors de cette thèse ont mis en évidence un couplage important entre le système d'injection et les ondes acoustiques se propageant dans la cavité. Dans la suite de ce chapitre, ce phénomène de couplage et son influence sur l'écoulement diphasique sont étudiés.

Analyse fréquentielle de la réponse de l'injecteur aux ondes acoustiques

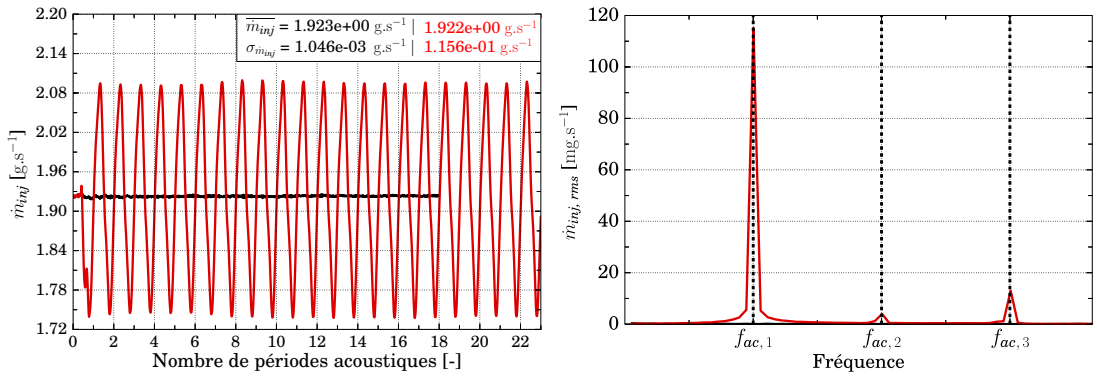
Le couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique est mis en évidence grâce aux figures 8.29 et 8.30 présentant 1) les évolutions temporelles des débits massiques $\dot{m}_{inj}$ des deux fluides aux conditions aux limites d'entrée et 2) les DFT associées calculées sur les 18 dernières périodes acoustiques de chaque cas (résolution fréquentielle d'environ 55 Hz). Sur ces figures, on observe lors du MC une fluctuation des débits massiques d'injection des deux fluides aux trois fréquences d'excitation $f_{ac,\,1}$, $f_{ac,\,2}$ et $f_{ac,\,3}$. Dans la configuration actuelle, les fluctuations de pression p' à la sortie de l'injecteur sont non nulles puisque l'injecteur est positionné en un IAN du mode acoustique 2T. Ces fluctuations de pression se propagent alors dans l'injecteur jusqu'à atteindre les conditions aux limites d'entrée situées en amont, pour lesquelles un coefficient de réflexion $|R| \leq 10^{-3}$ est imposé pour toute onde acoustique de fréquence $f \geq f_{ac,\,1}$ (cf. section 6.4.2). D'un point de vue acoustique, ces conditions aux limites peuvent être considérées quasiment totalement non réfléchissantes, ce qui revient en réalité à représenter le système d'injection comme un canal de longueur infinie. Au cours de sa propagation dans l'injecteur, l'onde acoustique est amortie par frottement aux parois [8] et conduit alors à des fluctuations de pression réduites au niveau des conditions aux limites par rapport aux fluctuations mesurées au niveau du plan d'injection. La réponse des conditions aux limites à ces fluctuations dépend de leur impédance. L'impédance acoustique $Z_{ac}(\omega)$ caractérise la résistance d'un système au passage d'une onde acoustique de fréquence donnée $f = \omega/(2\pi)$. À l'interface entre deux milieux, que cette interface soit réelle (*e.g.* paroi) ou fictive (*e.g.* condition à la limite d'entrée/sortie), l'impédance est formulée comme $Z_{ac}(\omega) = p'(\omega)/(\rho c u'_n(\omega))$, où $p'(\omega)$ et $u'_n(\omega)$ sont les fluctuations de pression et de vitesse normale à l'interface au passage de l'onde acoustique, tandis que ρ et c sont respectivement la masse volumique et la vitesse du son associées au milieu. Lorsque la condition à la limite est non réfléchissante, l'impédance acoustique est approchée par $Z_{ac} \approx 1$. Imposer une non-réflexion quasi totale aux conditions aux limites revient ainsi à autoriser les fluctuations de la vitesse et donc du débit massique à l'injection des deux fluides (Selle *et al.* [136]) que l'on observe sur les figures 8.29a et 8.30a.

Par ailleurs, si l'on considère que les impédances des conditions aux limites d'entrée du gaz et du liquide sont égales et que les fluctuations de pression p' sont les mêmes dans les deux fluides, la définition de l'impédance acoustique conduit à :

$$u'_{inj,\,g}\,\rho_g c_g \quad = \quad u'_{inj,\,l}\,\rho_l c_l, \tag{8.9}$$

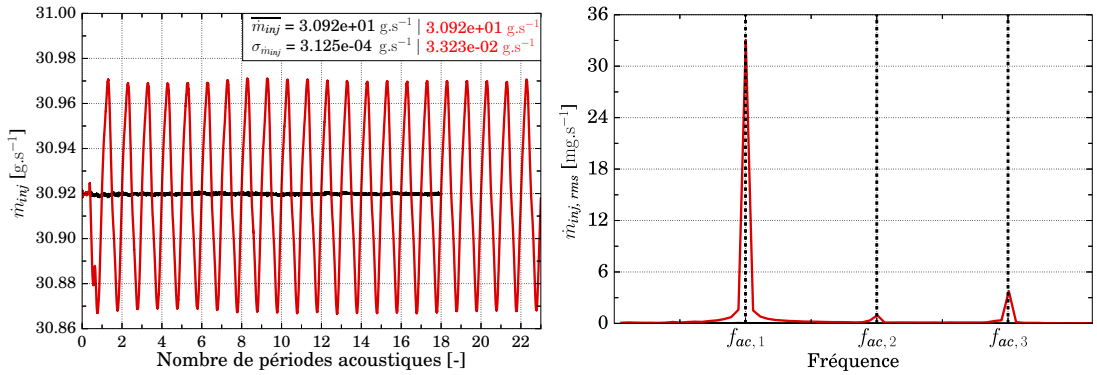
avec u'_{inj} le terme fluctuant de la vitesse d'injection, les indices g et l étant respectivement associés au gaz et au liquide. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (8.9) par le produit des valeurs

8. Pour en savoir plus sur la propagation et l'amortissement d'une onde acoustique dans un tube cylindrique, il est possible de se référer par exemple à Tijdeman [149].



(a) (b)

Figure 8.29 – (a) Évolution temporelle du débit massique d'injection du gaz et (b) DFT associée. — NMC ; — MC.



(a) (b)

Figure 8.30 – (a) Évolution temporelle du débit massique d'injection du liquide et (b) DFT associée. — NMC ; — MC.

moyennes des débits d'injection des deux fluides $\overline{\dot{m}_{inj,\,g}}$ $\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}$, on obtient :

$$\overline{\dot{m}_{inj,\,g}}\;\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}\,u'_{inj,\,g}\,\rho_g c_g \quad = \quad \overline{\dot{m}_{inj,\,g}}\;\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}\,u'_{inj,\,l}\,\rho_l c_l. \tag{8.10}$$

En introduisant ensuite les valeurs moyennes des vitesses d'injection des deux fluides $\overline{u_{inj,\,g}}$ et $\overline{u_{inj,\,l}}$, ainsi que les parties fluctuantes des débits d'injection $\dot{m}'_{inj,\,g}$ et $\dot{m}'_{inj,\,l}$, on peut alors utiliser la relation $\overline{\dot{m}_{inj}}\,u'_{inj} = \dot{m}'_{inj}\,\overline{u_{inj}}$. L'équation (8.10) peut ainsi se réécrire :

$$\frac{\dot{m}'_{inj,\,g}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,g}}} \quad = \quad \frac{\rho_l c_l\,\overline{u_{inj,\,l}}}{\rho_g c_g\,\overline{u_{inj,\,g}}}\,\frac{\dot{m}'_{inj,\,l}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}}. \tag{8.11}$$

Finalement, l'introduction de l'écart type défini comme $\sigma_x = \sqrt{\overline{x'^2}}$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\dot{m}_{inj,\,g}}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,g}}} \quad &= \quad \frac{\rho_l c_l\,\overline{u_{inj,\,l}}}{\rho_g c_g\,\overline{u_{inj,\,g}}}\,\frac{\sigma_{\dot{m}_{inj,\,l}}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}}, \\ \rightarrow \frac{\sigma_{\dot{m}_{inj,\,g}}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,g}}} \quad &\approx \quad 63\,\frac{\sigma_{\dot{m}_{inj,\,l}}}{\overline{\dot{m}_{inj,\,l}}}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Les différences de masse volumique, de vitesse du son et de vitesse moyenne d'injection entre les deux fluides conduisent donc en théorie à une amplitude relative de réponse de l'écoulement gazeux environ 63 fois supérieure à celle du liquide. D'après les figures 8.29 et 8.30, le rapport $\sigma_{\dot{m}_{inj}}/\overline{\dot{m}_{inj}}$ est de

6% pour le co-courant gazeux contre seulement 0.11% pour le liquide. Cela correspond donc en réalité à un rapport d'amplitude de 55. La différence entre l'estimation théorique et la simulation est probablement issue de l'hypothèse de fluctuations de pression égales dans les deux fluides aux conditions aux limites d'injection. En effet, cette hypothèse ne prend ni en compte la modification de l'amplitude des fluctuations de pression au passage de l'interface diphasique (l'interface étant associée elle aussi à une impédance acoustique donnée), ni l'amortissement plus important au sein du canal d'injection du liquide dans lequel la viscosité est plus élevée.

Étant donné l'écart de réponse entre les deux fluides, seule l'influence des fluctuations du débit massique d'injection du gaz sur l'écoulement diphasique est analysée par la suite. Pour cela, quatre sondes sont positionnées à une distance $Z = e$ du plan d'injection dans l'écoulement gazeux. Pour rappel, e est l'épaisseur du canal d'injection du co-courant gazeux. Le positionnement de ces sondes est représenté en figure 8.31. Les évolutions temporelles des fluctuations de pression ainsi que les DFT associées réalisées sur les 18 dernières périodes acoustiques du NMC et du MC (résolution fréquentielle d'environ 55 Hz) sont représentées pour chaque sonde sur la figure 8.32. Lors du MC, on observe pour les quatre sondes des fluctuations de pression similaires aux fréquences d'excitation acoustique $f_{ac,\,1}$, $f_{ac,\,2}$ et $f_{ac,\,3}$ induites par le passage des ondes. L'amplitude de fluctuation dépend naturellement de la position de la sonde le long de l'axe acoustique ainsi que du mode acoustique considéré. Vis-à-vis du mode acoustique 2T, l'injecteur est positionné en un IAN. Le champ de fluctuation de pression à la fréquence $f_{ac,\,1}$ n'est donc pas symétrique par rapport au plan orthogonal à l'axe acoustique passant par l'axe d'injection, car l'amplitude de p' est plus élevée du côté du PAN que du côté du VAN. Si l'on note X_i la coordonnée de la sonde i sur l'axe de propagation acoustique, le PAN du mode 2T le plus proche de l'injecteur est situé en $X_{PAN,\,2T} < X_3$. La sonde 3 est donc la plus proche d'un PAN. Ceci explique pourquoi l'amplitude de p' à la fréquence du mode principal $f_{ac,\,1}$ est maximale pour cette sonde et minimale pour la sonde 1. De même, les sondes 2 et 4 étant positionnées sur un même plan acoustique, les amplitudes de p' enregistrées à cette fréquence sont égales. Concernant le mode acoustique 4T, l'injecteur est au contraire positionné en un VAN. Le champ de fluctuation de pression à la fréquence f_2 est donc symétrique par rapport au plan orthogonal à l'axe acoustique passant par l'axe d'injection, conduisant ainsi à des amplitudes de fluctuation égales au niveau des sondes 1 et 3. En revanche, les fluctuations de pression enregistrées aux capteurs 2 et 4 ne sont pas nulles malgré leur positionnement en un VAN, ce qui reflète un signal de pression parasite en cette position. Enfin, l'injecteur est positionné en un IAN vis-à-vis du mode acoustique 6T. Cependant, contrairement au mode acoustique principal, le PAN le plus proche est localisé en $X_{PAN,\,6T} > X_1$. L'amplitude de fluctuation de pression à la fréquence f_3 est donc maximale au niveau de la sonde 1 et minimale à la sonde 3.

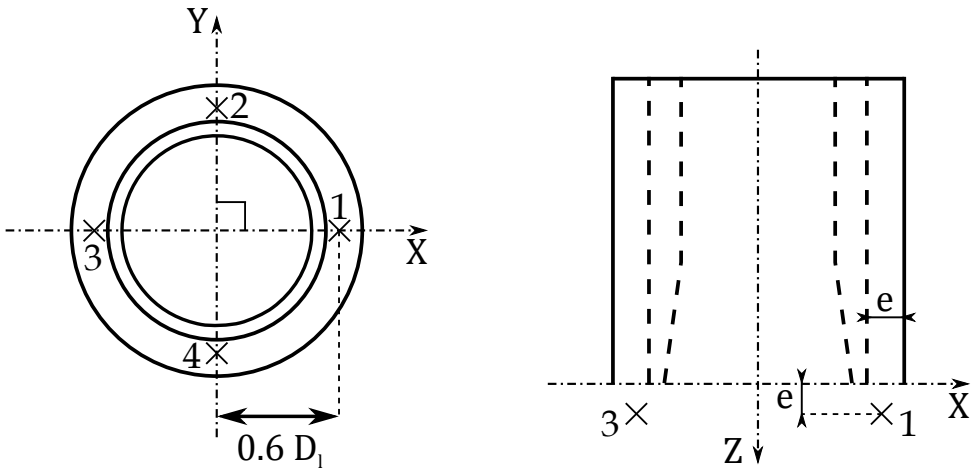


Figure 8.31 – Positionnement des sondes pour la mesure de p' et u'_Z en sortie du co-courant gazeux.

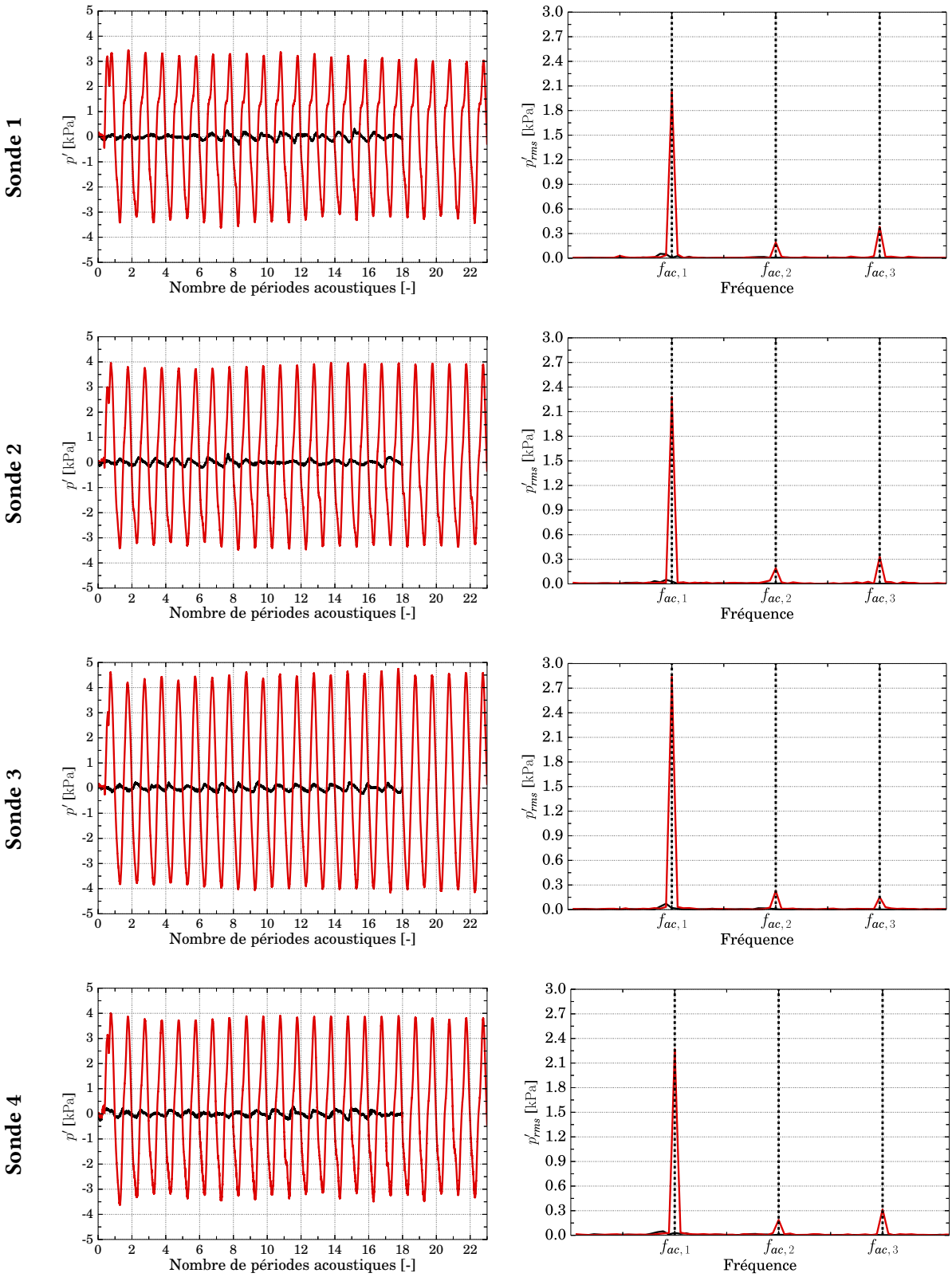


Figure 8.32 – Évolutions temporelles des fluctuations de pression aux sondes 1 à 4 (gauche) et DFT associées (droite). — NMC ; — MC.

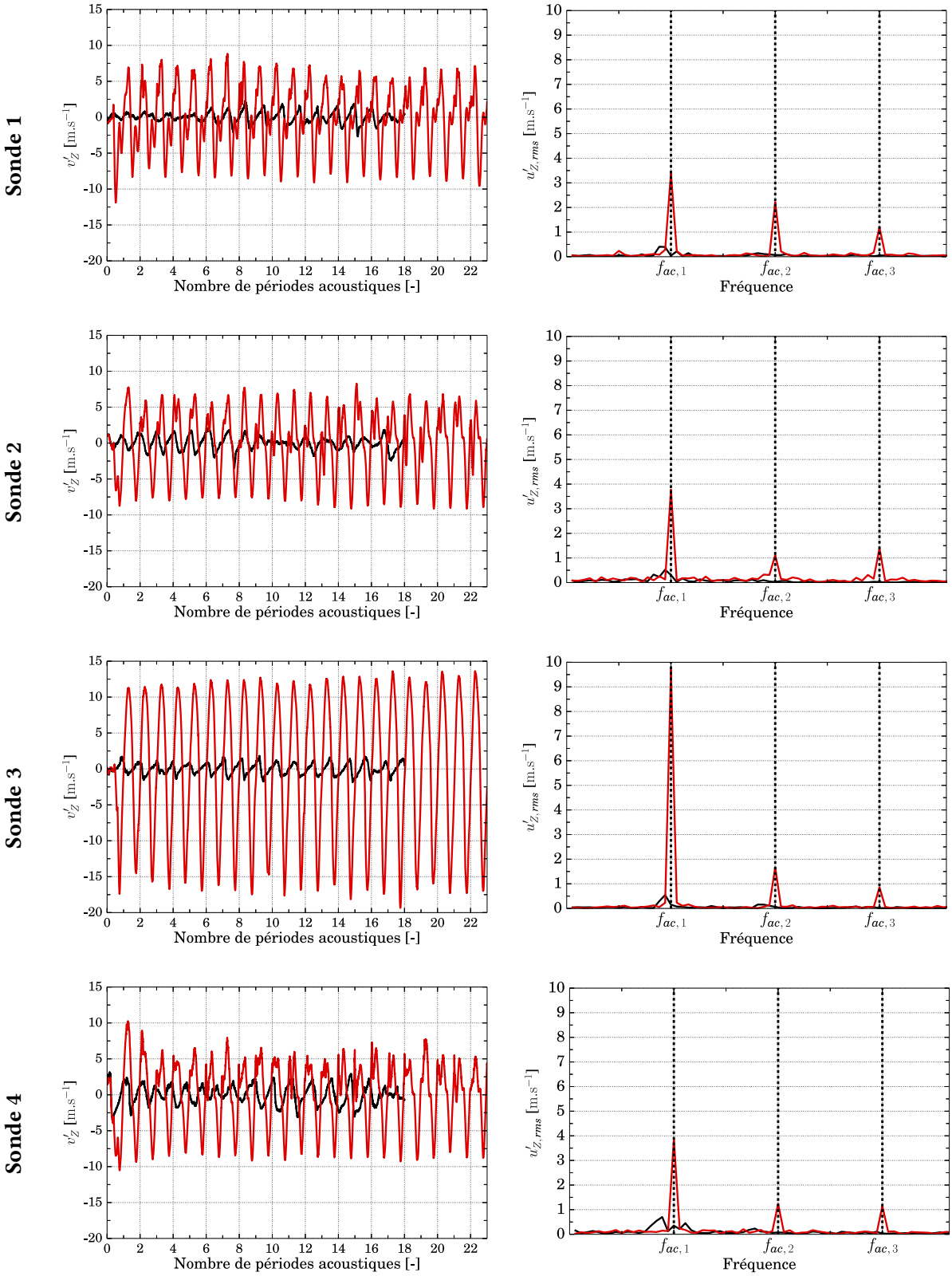


Figure 8.33 – Évolutions temporelles des fluctuations de la composante verticale de vitesse aux sondes 1 à 4 (gauche) et DFT associées (droite). — NMC ; — MC.

Les fluctuations de vitesse u'_Z selon l'axe d'injection ainsi que les DFT associées (résolution fréquentielle d'environ 55 Hz) sont quant à elles tracées en figure 8.33 pour chacune des sondes de mesure. En l'absence d'excitation acoustique, une fréquence caractéristique d'oscillation de u'_Z est observée autour de 900 Hz en chacun des capteurs. Cette fréquence particulière est proche de la fréquence théorique $f_{/\!/} \approx 1\,100$ Hz des instabilités longitudinales de cisaillement à la surface du jet liquide exprimée par Marmottant [105] (cf. équation (1.12)). L'oscillation de vitesse u'_Z en l'absence d'excitation acoustique pourrait donc être due à une déstabilisation de l'écoulement gazeux à proximité du jet liquide par la propagation des instabilités de cisaillement à sa surface (Villermaux [159]). La même observation a été réalisée par Ficuciello [51] pour des vitesses d'injection des deux fluides plus faibles. En ce qui concerne le MC, le passage de l'onde et les fluctuations de pression associées conduisent à une fluctuation de la vitesse verticale du gaz à la sortie de l'injecteur. Ces fluctuations de vitesse sont ainsi retrouvées en chacune des sondes de mesure. De façon équivalente aux signaux de pression, les DFT des signaux de vitesse révèlent une amplitude d'oscillation dépendant à la fois de la fréquence et de la position de mesure le long de l'axe acoustique, avec une amplitude maximale de l'ordre de 20% de la vitesse débitante. Un comportement similaire a été observé par Ficuciello [51] pour un injecteur placé en un IAN du mode principal, avec des fluctuations de vitesse du gaz asymétriques par rapport au plan orthogonal à l'axe acoustique passant par le centre de l'injecteur, et d'amplitude maximale de l'ordre de 40% de la vitesse débitante en sortie d'injecteur.

De manière à faciliter la comparaison des signaux de pression et de vitesse verticale aux quatre sondes de mesure, la moyenne de phase de ces signaux est évaluée. Cette moyenne est basée sur la décomposition triple initialement proposée par Hussain et Reynolds [74] stipulant qu'un signal temporel $f(t)$ peut être décomposé en une composante moyenne globale $\overline{f}$, une composante moyenne périodique $\widetilde{f}(t)$ et une composante stochastique $\widehat{f}(t)$ [9]. Cette décomposition s'écrit :

$$\begin{cases} f(t) &= \overline{f} + \widetilde{f}(t) + \widehat{f}(t), \\ \overline{f} &= \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \\ \widetilde{f}(t) &= \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(t+n\tau) - \overline{f}. \end{cases} \tag{8.13}$$

La moyenne de phase est illustrée en figure 8.34 : elle correspond à la moyenne des valeurs de $f(t) - \overline{f}$ à une phase particulière Φ d'un signal de référence de période τ. Pour une onde acoustique se propageant dans un écoulement turbulent, ce type de moyenne permet de filtrer le signal et de supprimer la partie liée à la turbulence. Dans le cas présent, le signal de référence utilisé est une sinusoïde de période $\tau = 1/f_{ac,\,1}$ et la phase associée est notée Φ_1. Les moyennes de phase des signaux de pression et de vitesse verticale aux quatre sondes de mesure sont réalisées sur un intervalle de temps correspondant aux 18 dernières périodes acoustiques du MC et sont tracées en figures 8.35. Sur la figure 8.35a, les moyennes de phase de la pression $\widetilde{p}$ en chaque sonde sont en phase et ont chacune une forme différente liée à leur composition fréquentielle propre décrite précédemment. Pour les moyennes de phase de la vitesse $\widetilde{u_Z}$, les DFT précédentes ont révélé une répartition fréquentielle de l'énergie bien différente d'un capteur à l'autre. Cette répartition conduit à une déformation importante des signaux de $\widetilde{u_Z}$ d'une sonde à l'autre sur la figure 8.35b et à un décalage temporel de leurs extremums, principalement entre les signaux des sondes 1 et 3 tandis que les sondes 2 et 4 enregistrent un comportement similaire du gaz. Comme mentionné plus tôt en section 1.2, l'atomisation de la phase liquide est directement liée à la vitesse de l'écoulement gazeux en sortie d'injecteur (*e.g.* Achury et Polifke [2]). On anticipe donc un impact important des fluctuations de vitesse et du décalage temporel enregistrés sur la formation du spray.

9. La composante stochastique est plus généralement notée $f'(t)$. Cependant, la notation $\widehat{f}(t)$ est utilisée ici pour ne pas confondre avec la décomposition linéaire classique $f(t) = \overline{f} + f'(t)$. Par ailleurs, il est important de distinguer la notation $\widetilde{f}$ de la notation utilisée en section 2.2.1 pour la moyenne de Favre.

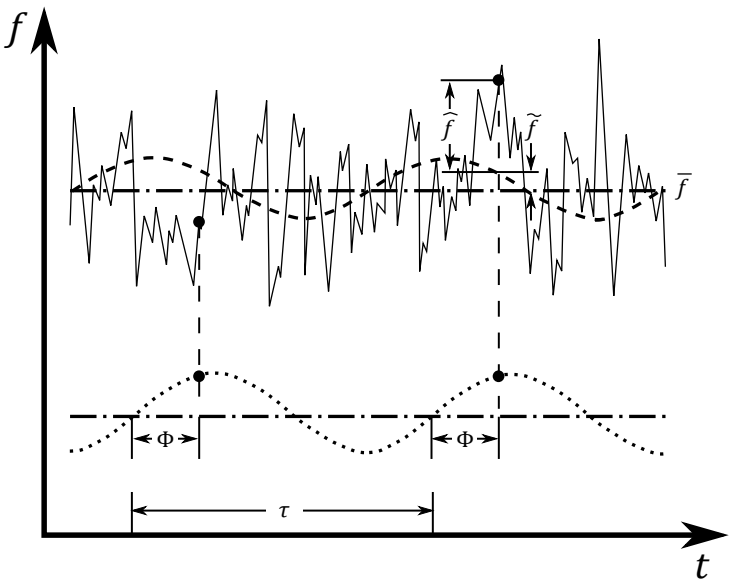


Figure 8.34 – Moyenne de phase d'un signal temporel (Hussain et Reynolds [74]). Courbe supérieure ▬ : signal à moyenner. Courbe inférieure ● ● ● : signal périodique de référence.

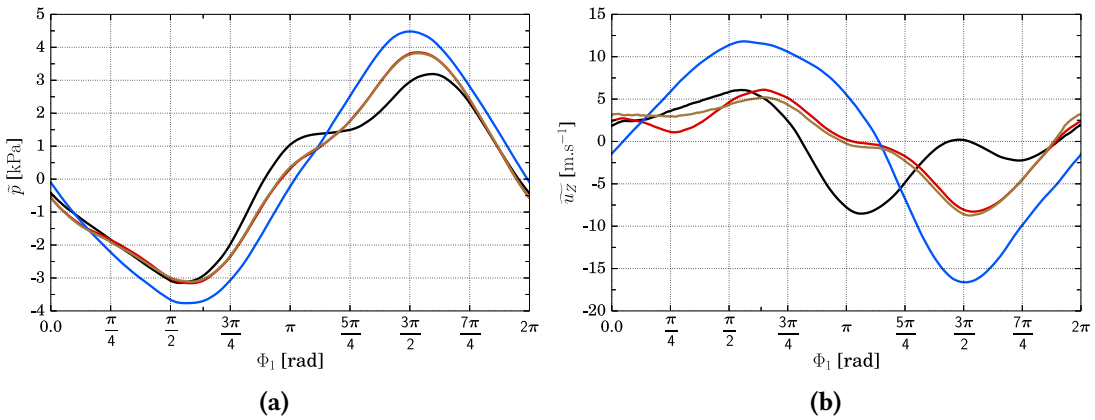


Figure 8.35 – Moyenne de phase des fluctuations (a) de pression et (b) de la composante verticale de vitesse du co-courant gazeux pour le MC. ▬ Sonde 1 ; ▬ Sonde 2 ; ▬ Sonde 3 ; ▬ Sonde 4.

Influence de la réponse de l'injecteur sur le jet diphasique

Pour étudier l'influence du couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique sur le processus d'atomisation primaire du jet liquide, l'évolution temporelle du transfert de masse entre les deux solveurs $\dot{m}_{net,\,\Omega}$ au sein du domaine d'étude Ω est tracée sur la figure 8.36 [10]. Celle-ci révèle une oscillation importante du débit massique d'échange jusqu'à plus de 350% de sa valeur moyenne. Cela s'explique par l'évolution périodique du niveau de cisaillement entre les deux fluides sous l'effet des fluctuations du débit d'injection du co-courant gazeux. Il s'agit là d'une réponse équivalente à celle observée lors des travaux de Achury et Polifke [2] dédiés à l'étude de l'influence d'ondes acoustiques longitudinales sur les sprays aéronautiques (cf. figure 1.15). Dans un cas réactif, la création fluctuante

10. La croissance de $\dot{m}_{net,\,\Omega}$ lors de la première période acoustique est due au rétablissement du coefficient de compressibilité réel du liquide justifié au chapitre 6 et réalisé à la fin du calcul destiné à l'établissement du jet diphasique sans excitation acoustique. Tout comme pour la densité d'aire interfaciale $\Sigma_{DPS,\,\Omega}$, l'influence de cet artefact numérique n'a que peu d'influence sur l'analyse de la figure puisque l'évolution de $\dot{m}_{net,\,\Omega}$ se stabilise rapidement lors du NMC qui est le cas de référence.

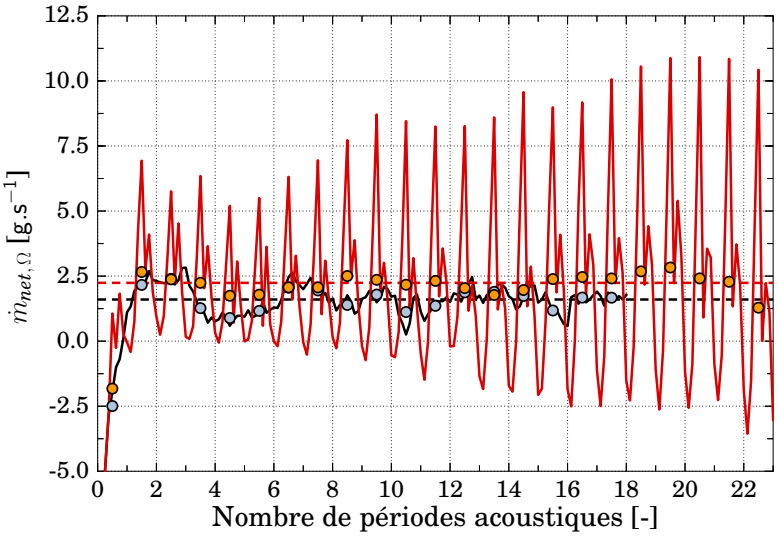
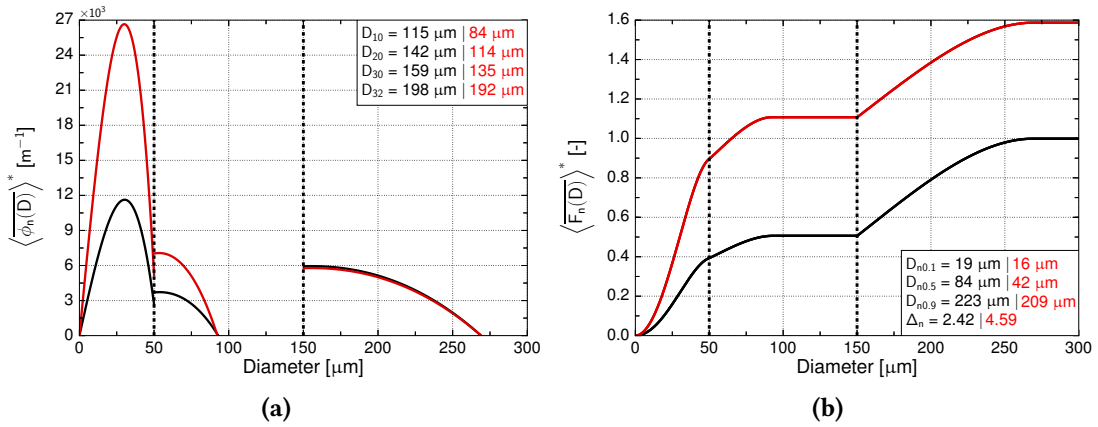


Figure 8.36 – Évolution temporelle de $\dot{m}_{net,\Omega}$ (NMC ; MC). Moyenne temporelle du signal complet (NMC ; MC). Moyenne temporelle du signal sur chaque période acoustique (NMC ; MC).

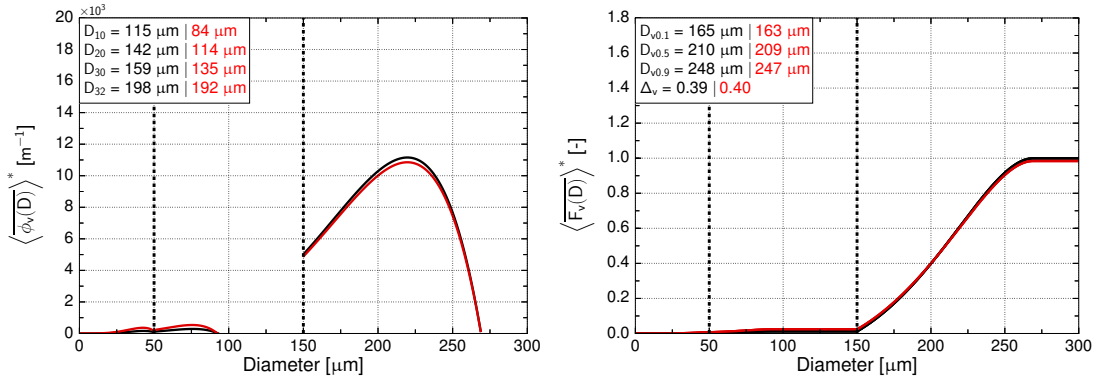
de gouttes induira un apport instationnaire de comburant dans la zone de combustion et pourra ainsi considérablement modifier le comportement de la flamme et influencer le développement d'instabilités thermoacoustiques. Pour compléter l'analyse, la moyenne temporelle des signaux de $\dot{m}_{net,\Omega}$ est calculée sur chaque période acoustique isolée et représentée par des points colorés sur la figure 8.36. Pour le NMC, on remarque que la moyenne périodique du signal oscille légèrement autour de la moyenne temporelle globale calculée en section 8.2.2 sur les 13 dernières périodes acoustiques (cf. tableau 8.2). Aucune dérive de la moyenne périodique n'est cependant observée, ce qui démontre que le mécanisme d'atomisation du jet a atteint le régime établi. Pour le MC, il n'y a également aucune dérive d'observée entre la moyenne périodique et la moyenne globale, malgré le couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique. De cette observation, il est possible de tirer les conclusions suivantes : l'aplatissement du cœur liquide conduit à l'augmentation du débit moyen d'échange entre solveurs en présence d'excitation acoustique (cf.démonstration en section 8.2.2), tandis que le couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique influence fortement la dynamique du débit d'échange autour de cette valeur moyenne.

À l'instar du processus d'atomisation primaire, la fragmentation des gouttes est elle aussi impactée par les fluctuations de la vitesse d'injection du co-courant gazeux. Pour s'en rendre compte, les figures 8.37 et 8.38 représentent respectivement les distributions numériques et volumiques normalisées de la taille des gouttes $\left\langle \overline{\phi_n(D)} \right\rangle^*$ et $\left\langle \overline{\phi_v(D)} \right\rangle^*$ moyennées en temps et en espace dans le plan contenant l'axe acoustique (vue A), ainsi que les fonctions cumulatives associées, avec et sans excitation acoustique. Pour chacune de ces distributions, le calcul est réalisé sur l'ensemble des cellules du maillage à la fois contenu dans le domaine Ω et intersectant le plan d'étude (cf. annexe A pour une description de la méthode de calcul). L'indice * signifie que les courbes sont respectivement normalisées par la densité numérique et la fraction volumique totales de gouttes contenues dans le plan en l'absence d'excitation acoustique. L'intervalle de temps considéré ici pour la moyenne temporelle correspond aux 13 dernières périodes acoustiques de chacun des cas simulés. On remarque sur les figures 8.37a et 8.38a que les densités numériques et volumiques de la petite et de la moyenne section du spray sont plus élevées en présence d'ondes acoustiques. Cette augmentation du nombre et du volume de gouttes dans les deux plus petites sections du spray peut refléter deux phénomènes : 1) une augmentation de la quantité de liquide extraite du jet central par l'atomisation primaire, qui conduit donc, après fragmentation, à un



(a) (b)

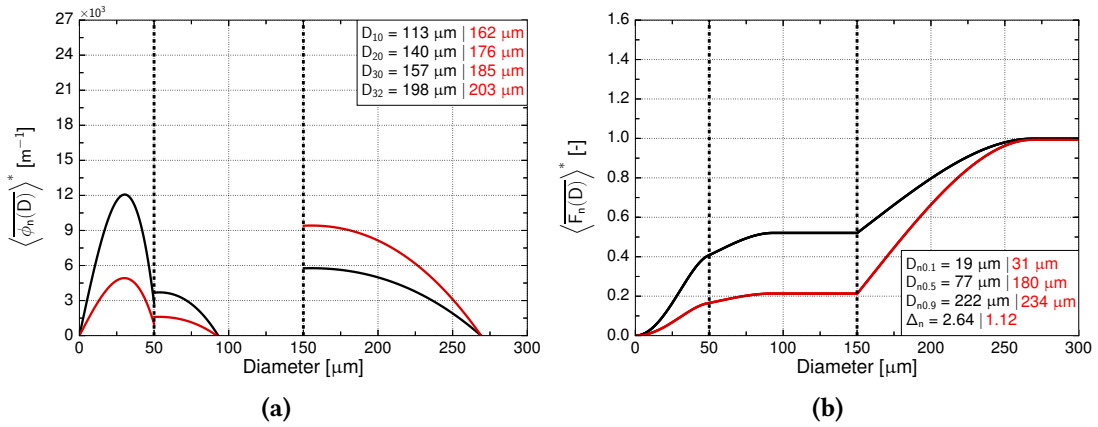
Figure 8.37 – (a) Distribution numérique moyenne normalisée de la taille des gouttes dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) et (b) fonction cumulative normalisée associée. — NMC ; — MC.



(a) (b)

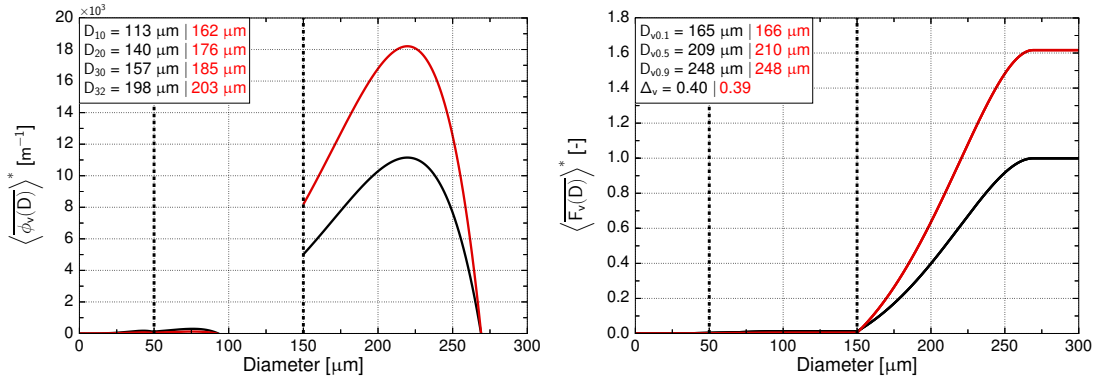
Figure 8.38 – (a) Distribution volumique moyenne normalisée de la taille des gouttes dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) et (b) fonction cumulative normalisée associée. — NMC ; — MC.

nombre de petites et moyennes gouttes plus élevé, ou bien 2) une fragmentation plus forte pour une quantité initiale de grosses gouttes identique au NMC. Pour déterminer quelle situation est mise en évidence ici, nous comparons le débit moyen d'échange de masse de liquide entre solveurs dans le plan d'étude pour le NMC et le MC. Les résultats ne sont pas montrés ici pour alléger l'analyse, mais les valeurs sont équivalentes à celles obtenues lors d'une analyse similaire effectuée en section 8.2.2 sur les sous-domaines de révolution (cf. figure 8.14 et tableau 8.2). Dans le plan contenant l'axe acoustique, le débit massique d'échange entre solveurs est équivalent avec ou sans excitation acoustique. Puisque la méthodologie numérique de couplage entre le SPS et le DPS repose sur la création de gouttes de diamètre D_{30} constant et homogène au sein de la plus grande section du spray, l'analyse réalisée en annexe B (cf. équations (B.1), (B.2) et (B.3)) indique que le nombre de gouttes créées initialement dans ce plan par l'atomisation primaire est le même avec ou sans excitation acoustique. L'augmentation du nombre et du volume de gouttes dans les plus petites sections du spray reflète ainsi une fragmentation plus importante des gouttes dans ce plan sous l'effet du différentiel de vitesse plus élevé entre le gaz et les gouttes à cause de la pulsation du co-courant gazeux. En conséquence de cette fragmentation plus forte pour le MC, les densités numériques et volumiques des grosses gouttes sont quant à elles légèrement réduites au profit des sections plus petites (cf. figures 8.37 et 8.38). Au global, l'influence de la réponse de l'injecteur à l'excitation acoustique sur les processus d'atomisation primaire et de fragmentation conduit à une augmentation du nombre de gouttes de 60% comparé au NMC (cf. figure



(a) (b)

Figure 8.39 – (a) Distribution numérique moyenne normalisée de la taille des gouttes dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B) et (b) fonction cumulative normalisée associée. — NMC ; — MC.



(a) (b)

Figure 8.40 – (a) Distribution volumique moyenne normalisée de la taille des gouttes dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B) et (b) fonction cumulative normalisée associée. — NMC ; — MC.

8.37b) et à un volume total de gouttes inchangé (cf. figure 8.38b) dans le plan contenant l'axe acoustique. Dans un cas réactif, cela aurait tendance à réduire le temps caractéristique d'évaporation du liquide et modifierait ainsi la dynamique de couplage entre la flamme et les ondes acoustiques.

Les mêmes distributions sont tracées en figures 8.39 et 8.40 dans le plan orthogonal à l'axe acoustique (vue B). Dans ce plan, on remarque sur les figures 8.39a et 8.40a une augmentation du nombre et du volume moyens des gouttes de plus grande dimension due à l'élargissement de la zone d'atomisation primaire observé sur la figure 8.15. Cependant, malgré le nombre plus important de grosses gouttes et l'oscillation du débit d'injection du co-courant gazeux, le nombre et le volume des gouttes contenues dans les plus petites sections sont réduits dans le MC. Cela reflète un affaiblissement du processus de fragmentation, probablement dû à l'aplatissement du cœur liquide qui résulte en un évasement et un ralentissement de l'écoulement co-courant gazeux dans la cavité. Au global, les fonctions cumulatives des figures 8.39b et 8.40b révèlent une quantité moyenne de gouttes équivalente dans ce plan avec et sans excitation acoustique, mais un volume total de gouttes 60% plus élevé pour le MC. Dans un cas réactif, l'apport de comburant à la zone de combustion serait ainsi augmenté et pourrait fortement accroître la quantité d'énergie dégagée par les flammes et potentiellement nuire à la stabilité du système, selon le déphasage entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et de la pression.

L'influence moyenne du couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique sur le pro-

cessus de fragmentation vient d'être illustrée. Il est également important d'analyser l'influence de ce couplage sur la dynamique de fragmentation des gouttes. Comme il l'a été présenté en section 2.2.3, le processus de fragmentation des gouttes est modélisé dans le DPS par l'intermédiaire de termes sources d'échange entre les sections du spray. Les propriétés d'échange telles que la fréquence de fragmentation, le nombre de gouttes produites ainsi que leurs dimensions dépendent toutes du nombre de Weber local caractérisant le rapport entre les forces aérodynamiques et de tension de surface exercées sur les gouttes au sein de l'écoulement gazeux. On s'attend ainsi à ce que les fluctuations de vitesse débitante du co-courant gazeux influencent de façon importante la dynamique de production de gouttes par fragmentation à proximité du plan d'injection. Pour le vérifier, les champs 2D des moyennes de phase des fluctuations de vitesse du fluide porteur $\widetilde{u_Z}$, de Weber $\widetilde{\mathrm{We}^k}$ ainsi que de densité numérique de gouttes $\widetilde{n^k}$ sont présentés pour chaque section du spray en figures 8.41, 8.42 et 8.43 dans le plan contenant l'axe acoustique, et en figures 8.44, 8.45 et 8.46 dans le second plan de visualisation. Les moyennes de phase sont réalisées sur un intervalle de temps correspondant aux 13 dernières périodes acoustiques de chaque cas simulé. Cet intervalle de temps n'est pas suffisant pour filtrer l'intégralité des contributions turbulentes mais permet cependant d'observer nettement la réponse périodique du processus de fragmentation des gouttes aux fluctuations de vitesse d'injection du gaz. Pour faciliter la lecture du document et la compréhension des analyses effectuées ici, le lecteur est invité à se référer dans un premier temps aux figures 8.41 et 8.44 illustrant le comportement des plus petites gouttes du spray.

Dans le plan contenant l'axe acoustique, on observe une pulsation de la vitesse du fluide porteur au cours du temps due au couplage de l'injecteur avec la cavité acoustique (cf. images de la ligne supérieure de la figure 8.41). Cette pulsation est par ailleurs déphasée de chaque côté de l'axe central, résultat direct du décalage temporel des extremums de $\widetilde{u_Z}$ observés aux sondes 1 et 3 positionnées près de la sortie de l'injecteur en figure 8.35b. Le différentiel de vitesse entre le gaz et les gouttes est par conséquent modifié, ce qui résulte en une pulsation similaire du We^k (cf. images de la ligne centrale de la figure 8.41). Puisque la modélisation de la fragmentation par le DPS est basée sur le nombre de Weber local, la pulsation du co-courant gazeux conduit dans ce cas à une production de gouttes intermittente et dissymétrique par rapport à l'axe d'injection (cf. images de la ligne inférieure de la figure 8.41). Le même mécanisme peut être observé pour les deux autres sections du spray en figures 8.42 et 8.43. Si l'on compare les niveaux de fluctuation pour chaque section, on remarque que c'est la densité numérique de gouttes n^k de la section des plus petites gouttes qui est le plus impactée, avec des fluctuations maximales environ 50 fois plus élevées que pour la section des plus grosses gouttes. En effet, la section des plus petites gouttes est alimentée par la fragmentation des gouttes contenues dans l'ensemble des sections du spray.

Dans le plan orthogonal à l'axe acoustique, la figure 8.44 illustrant le comportement des plus petites gouttes met également en évidence une pulsation de la vitesse du fluide porteur au cours du temps due au couplage de l'injecteur avec la cavité acoustique. Les fluctuations ont cependant une amplitude plus faible que dans le plan présenté précédemment et ne présentent pas de dissymétrie par rapport à l'axe d'injection puisque les oscillations de pression sont homogènes dans l'ensemble du plan. La pulsation du co-courant gazeux conduit ici aussi à une pulsation du nombre de Weber local et par conséquent de la densité numérique de gouttes (cf. images des lignes centrale et inférieure de la figure 8.44). Dans ce plan de visualisation, les fluctuations sont symétriques. Le même mécanisme peut être observé pour les deux autres sections du spray en figures 8.45 et 8.46, avec cependant une amplitude de fluctuation de $\widetilde{n^k}$ encore une fois plus élevée dans la section des plus petites gouttes.

En conclusion de cette section, le couplage entre le système d'injection et les ondes acoustiques conduit donc à une modification radicale des processus d'atomisation primaire et de fragmentation des gouttes. Les propriétés granulométriques du spray sont par conséquent impactées, avec une production intermittente et hétérogène de gouttes de faible diamètre. Dans un cas réactif, la dynamique de fragmentation des gouttes pourrait significativement modifier la dynamique d'évaporation de la phase liquide et ainsi participer au développement d'instabilités thermoacoustiques. C'est pour cette raison qu'il est en général recherché dans les moteurs-fusées de minimiser le couplage entre le système d'injection et les modes acoustiques de la chambre de combustion.

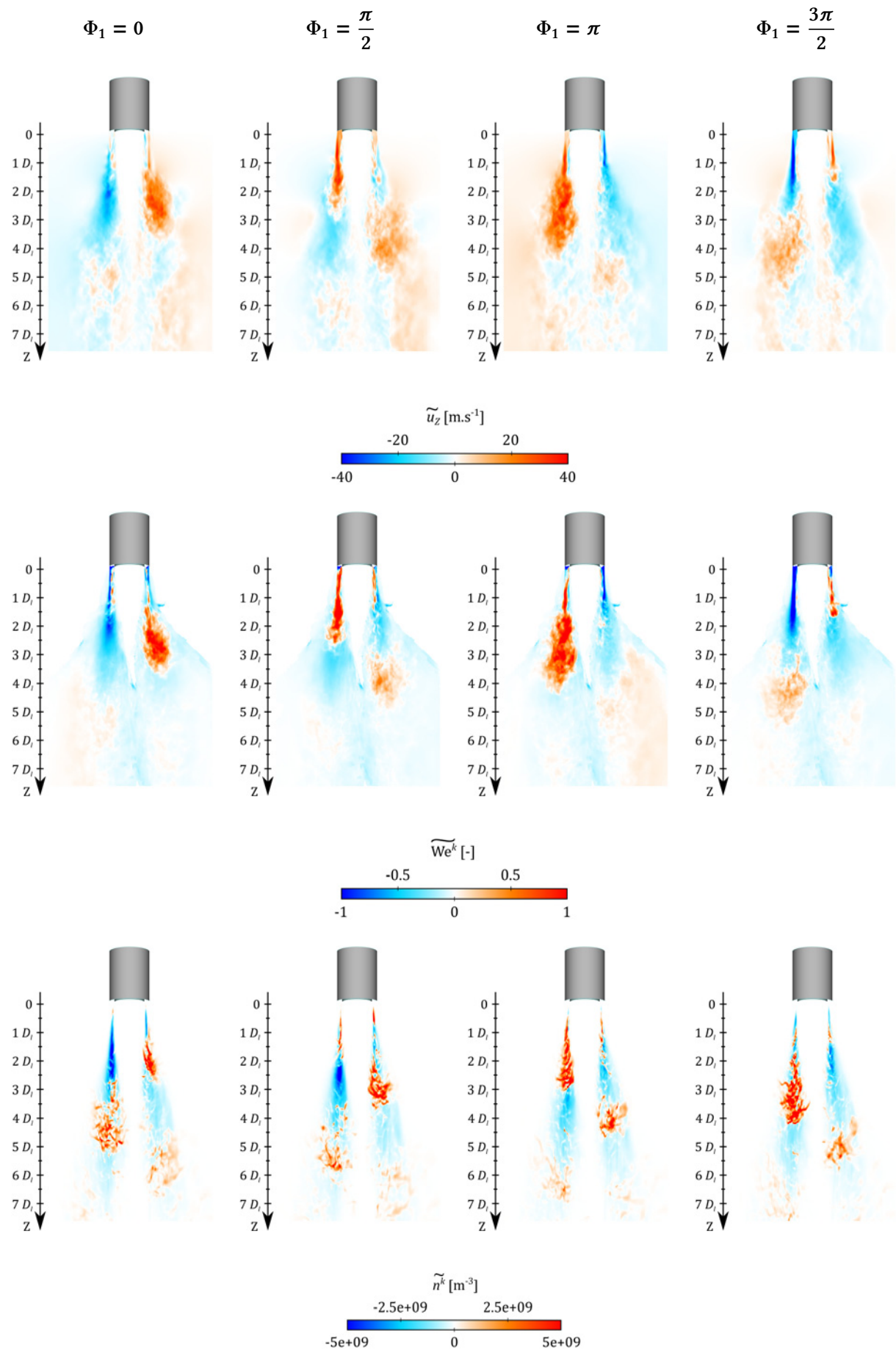


Figure 8.41 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) pour la section des petites gouttes.

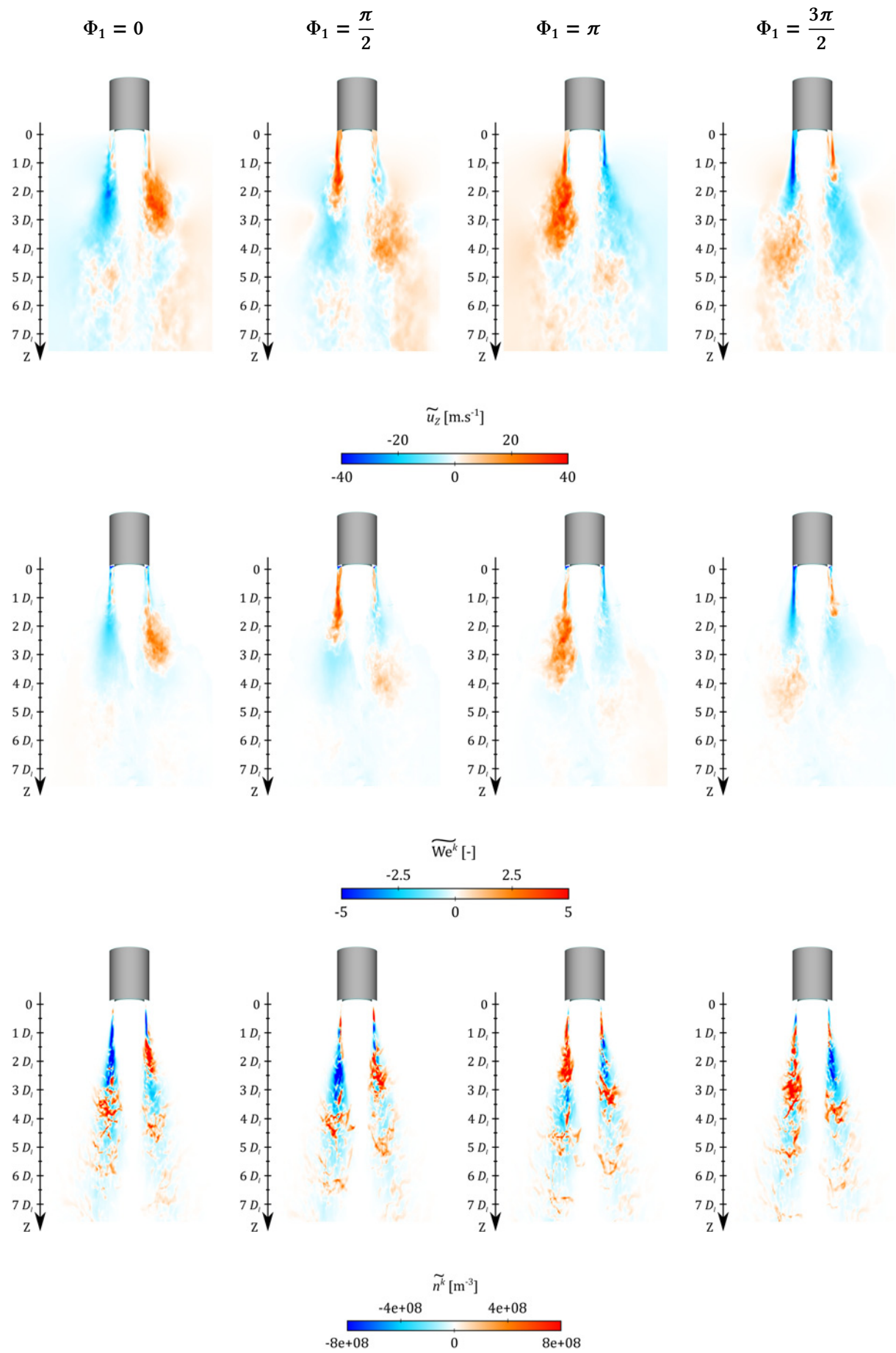


Figure 8.42 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) pour la section des moyennes gouttes.

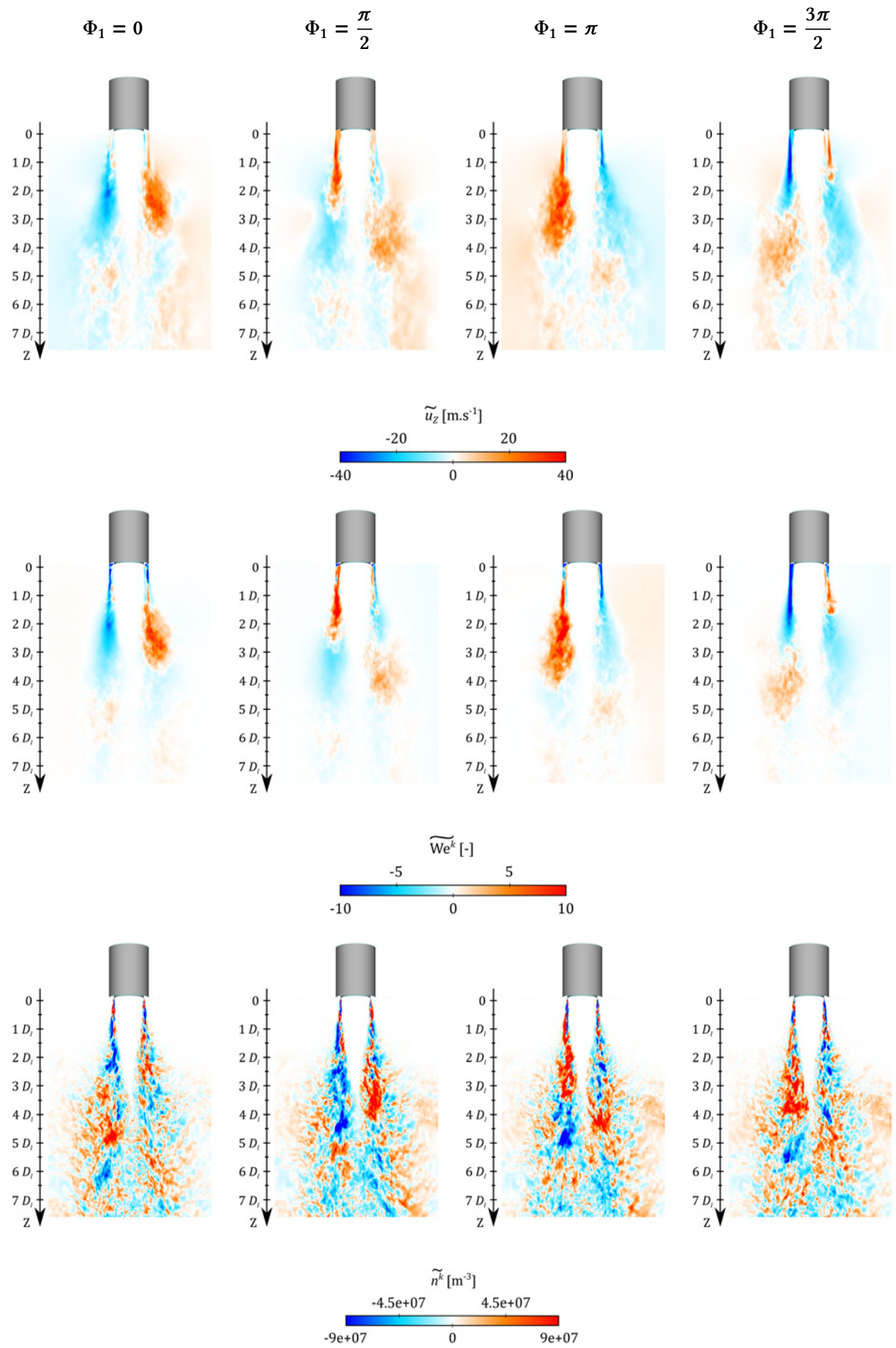


Figure 8.43 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan contenant l'*a.a.* (vue A) pour la section des grosses gouttes.

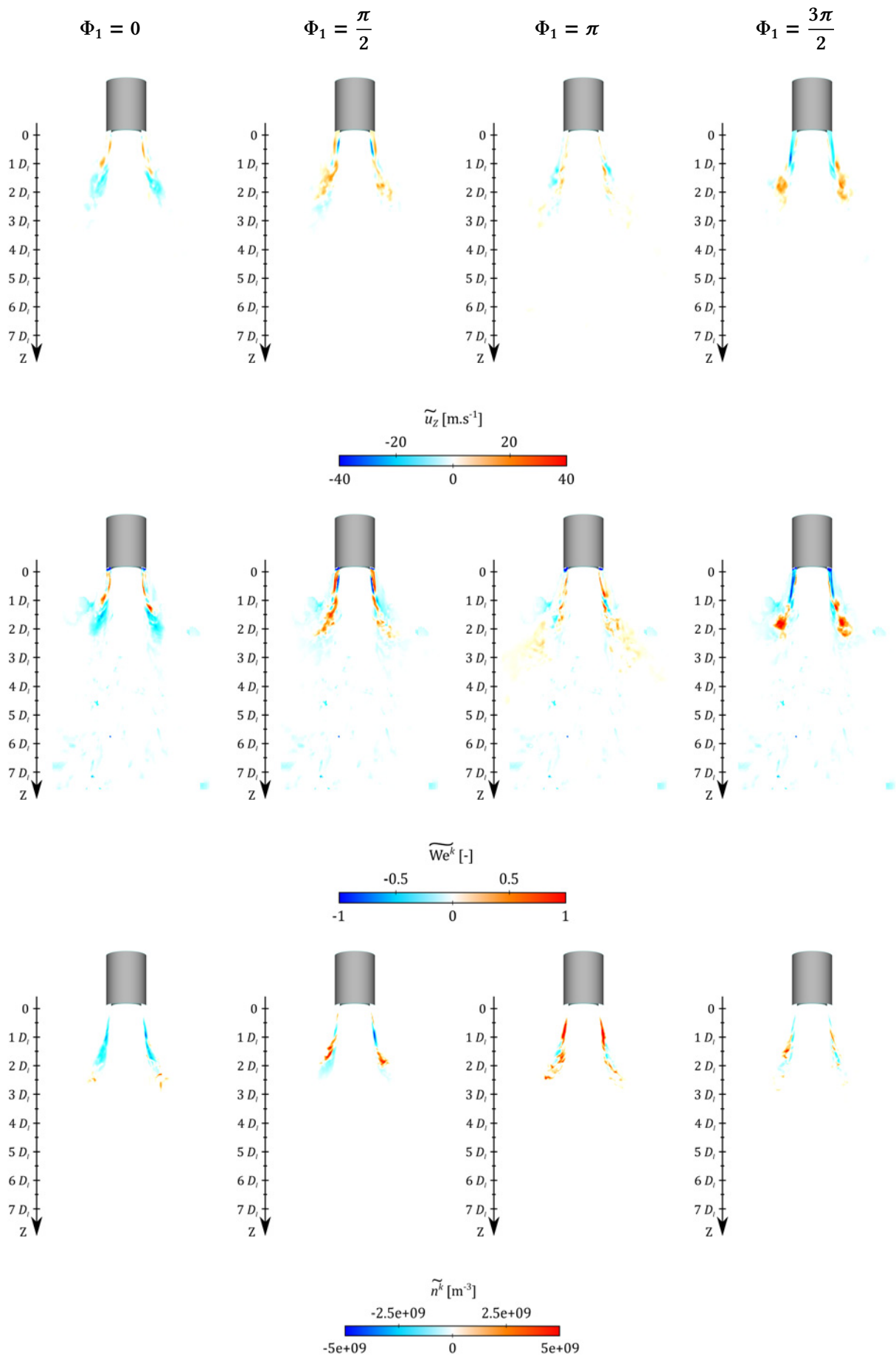


Figure 8.44 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B) pour la section des petites gouttes.

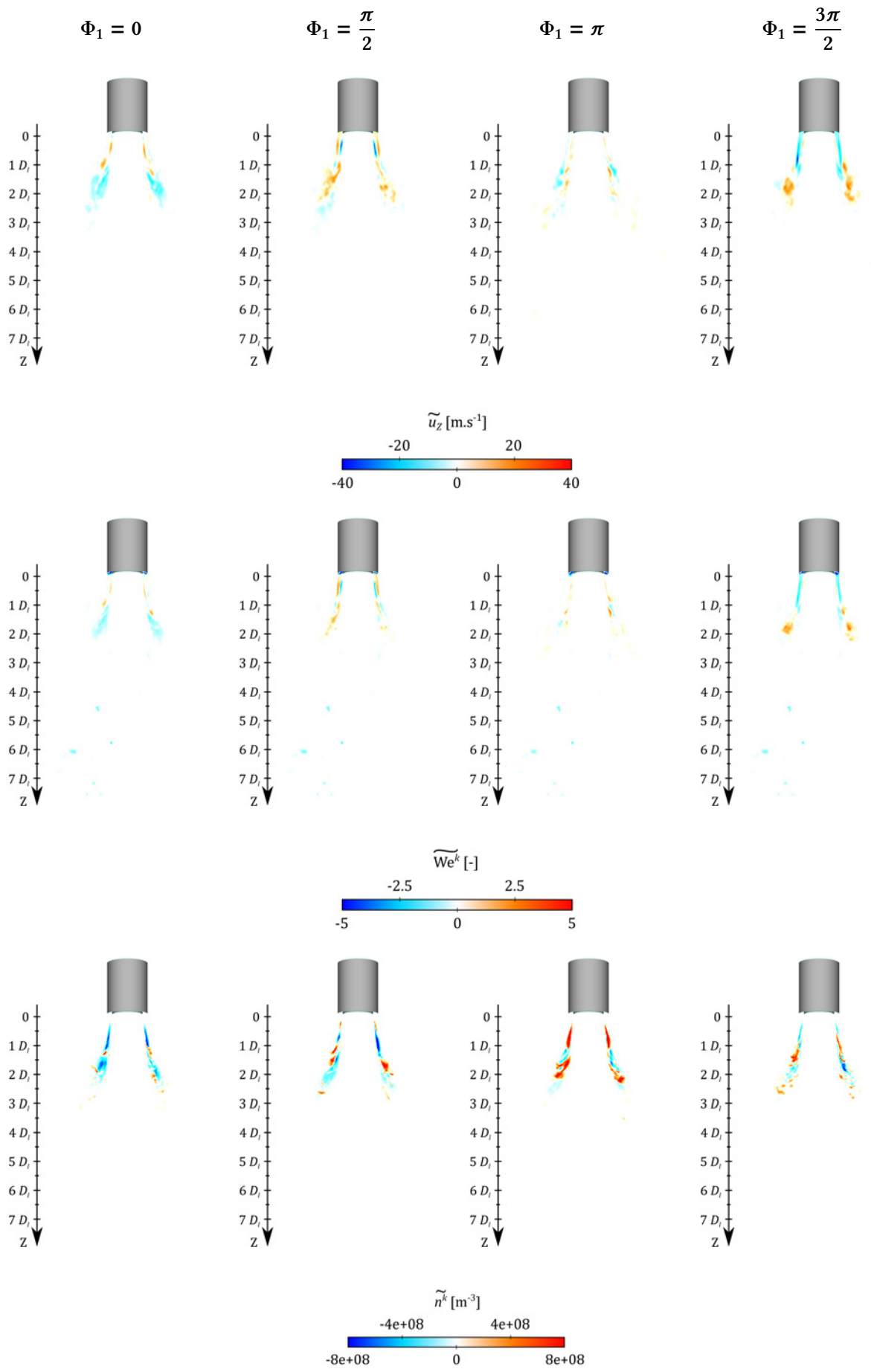


Figure 8.45 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B) pour la section des moyennes gouttes.

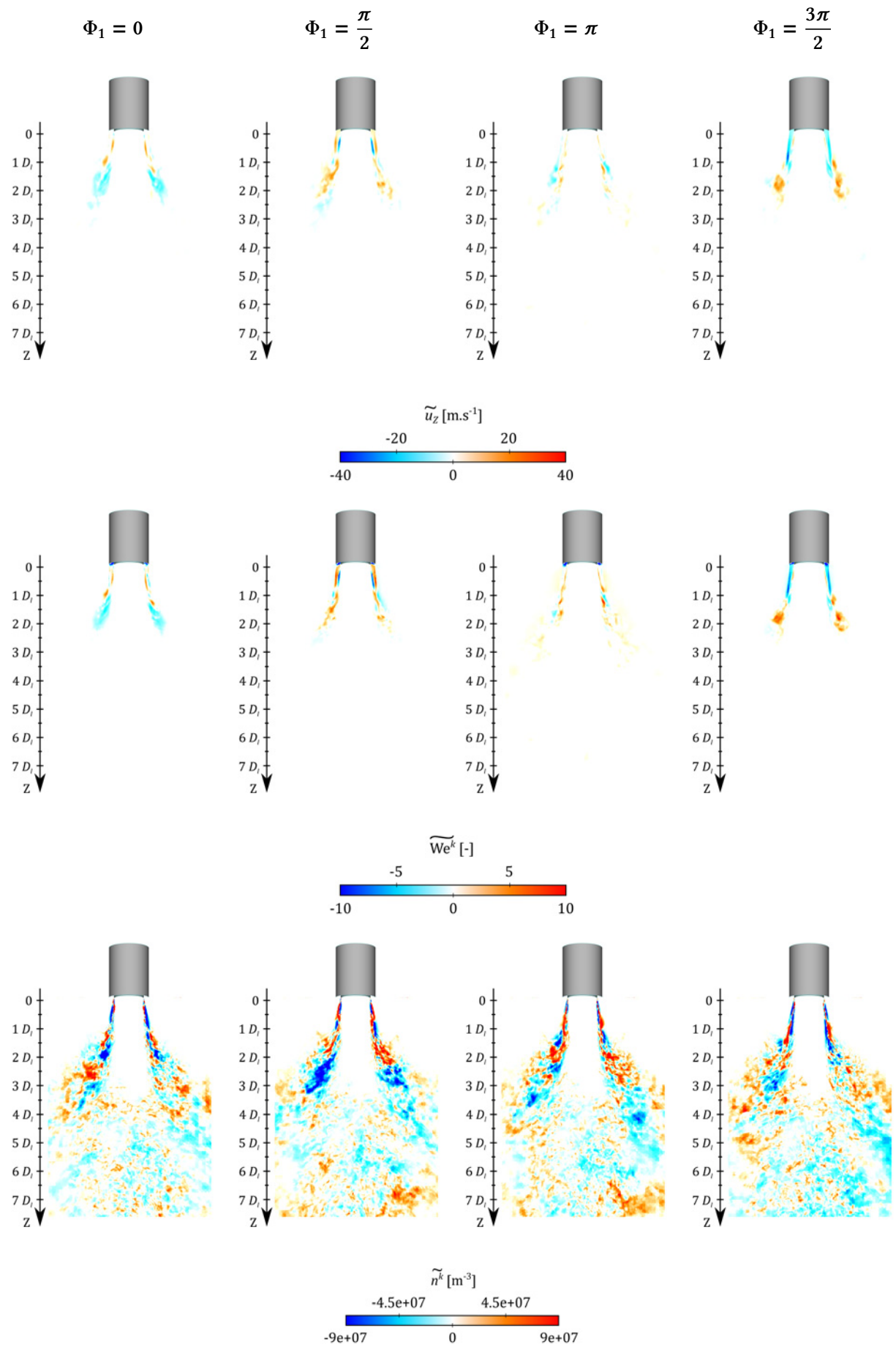


Figure 8.46 – Moyenne de phase des champs 2D de u_Z, de We^k et de n^k dans le plan orthogonal à l'*a.a.* (vue B) pour la section des grosses gouttes.

8.3.3 Oscillation transverse des gouttes du spray

Le dernier point abordé dans ce chapitre concerne la réponse du spray à la vitesse acoustique transverse. En raison des mécanismes de compression et de décompression inhérents à la propagation des ondes acoustiques, le milieu gazeux subit à la fois des fluctuations de pression et de vitesse transverse. Dans le cas des simulations présentées dans ce chapitre, la vitesse acoustique atteint une amplitude d'environ $8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ au point d'injection, *i.e.* à un IAN du mode acoustique principal. Ces fluctuations de vitesse conduisent à l'oscillation périodique des gouttelettes autour de l'axe d'injection et peuvent, dans un cas réactif, contribuer au couplage entre les flammes et les ondes acoustiques (Méry *et al.* [113]). Il est donc primordial que les simulations numériques soient capables de restituer le mouvement transverse du spray. Pour mesurer la réponse du spray à la vitesse acoustique, le domaine d'étude Ω est découpé en sous-domaines notés Ξ, chacun composé d'un ensemble de cellules intersectant un plan de coupe de position donnée le long de l'axe d'injection. Pour chacun de ces sous-domaines, la moyenne spatiale de la vitesse des gouttes dans la direction de propagation acoustique $\boldsymbol{X}$ est calculée comme :

$$\langle v_X^k \rangle_\Xi^\alpha = \frac{\sum\limits_{V_c \in \Xi} v_X^k \, \alpha^k \, |V_c|}{\sum\limits_{V_c \in \Xi} \alpha^k \, |V_c|}, \tag{8.14}$$

où $\langle\,\rangle_\Xi^\alpha$ désigne la moyenne spatiale sur le domaine Ξ pondérée par la fraction volumique locale α^k des gouttes contenues dans la section k (cf. annexe A), tandis que v_X^k est la vitesse des gouttes suivant l'axe acoustique $\boldsymbol{X}$ dans chaque cellule de volume $|V_c|$.

Les signaux de vitesse ainsi que les DFT associées à chaque section du spray sont représentés sur les figures 8.47 et 8.48 pour deux plans de coupe de positions respectives $Z = 0.2\,D_l$ et $Z = 2.7\,D_l$. Une dérive moyenne de la vitesse transverse des gouttes de grand diamètre est observée à partir de 18 périodes acoustiques sur les figures 8.47 et 8.48. Cette dérive n'est pas traitée ici mais sera analysée en détail dans la partie IV consacrée à la modélisation simplifiée de la déviation du jet liquide par la force de radiation acoustique. De ce fait, les DFT ne sont calculées que sur un intervalle de temps correspondant aux 18 premières périodes acoustiques de chacune des simulations (résolution fréquentielle d'environ 55 Hz). À une distance de $0.2\,D_l$ du plan d'injection, les gouttes subissent des oscillations transverses aux trois fréquences de modulation acoustique, quelle que soit la section du spray considérée. L'amplitude d'oscillation des gouttes pour chacun des modes dépend de leur inertie : plus l'inertie des gouttes est grande, plus l'amplitude du mouvement transverse est faible. Ce mécanisme de réponse est restitué grâce à la stratégie de couplage entre le gaz et le DPS à travers le terme source de traînée $\boldsymbol{F}_{drag}^k$ (cf. section 2.2.3). En ce qui concerne la tranche positionnée à $Z = 2.7\,D_l$, il semble que les gouttes ne répondent pas de manière significative aux modes acoustiques 4T et 6T. Par ailleurs, l'amplitude d'oscillation à la fréquence principale $f_{ac,\,1}$ est supérieure à celle observée en amont, quelle que soit la taille des gouttes (+300% pour les petites gouttes ; +100% pour les moyennes et grandes gouttes). Cette différence dans l'amplitude de réponse est principalement due au fait que, à cause de leur inertie, les gouttes n'atteignent leur amplitude maximale d'oscillation qu'après avoir parcouru une certaine distance le long de l'axe d'injection. Les gouttes situées vers l'amont du spray ont donc une amplitude d'oscillation plus faible que vers l'aval. En complément, le tableau 8.3 présente le déphasage $\Delta\psi_1$ de chacun des signaux temporels à la fréquence du mode acoustique fondamental par rapport aux fluctuations de vitesse transverse du gaz au point d'injection. À l'instar de l'amplitude d'oscillation, le déphasage semble dépendre à la fois du diamètre des gouttes considérées et de leur position le long de l'axe d'injection, avec un déphasage plus important en amont du spray qu'en aval. Puisque la réponse des flammes dans les moteurs-fusées dépend directement de la dynamique des gouttes du spray (Méry *et al.* [113]) et que le couplage thermoacoustique dépend en partie du déphasage entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur local et les fluctuations de pression, ces résultats démontrent l'intérêt majeur de la description de la polydispersion de la taille des gouttes par le DPS dans le cadre de la reproduction et de l'analyse CFD des instabilités de combustion.

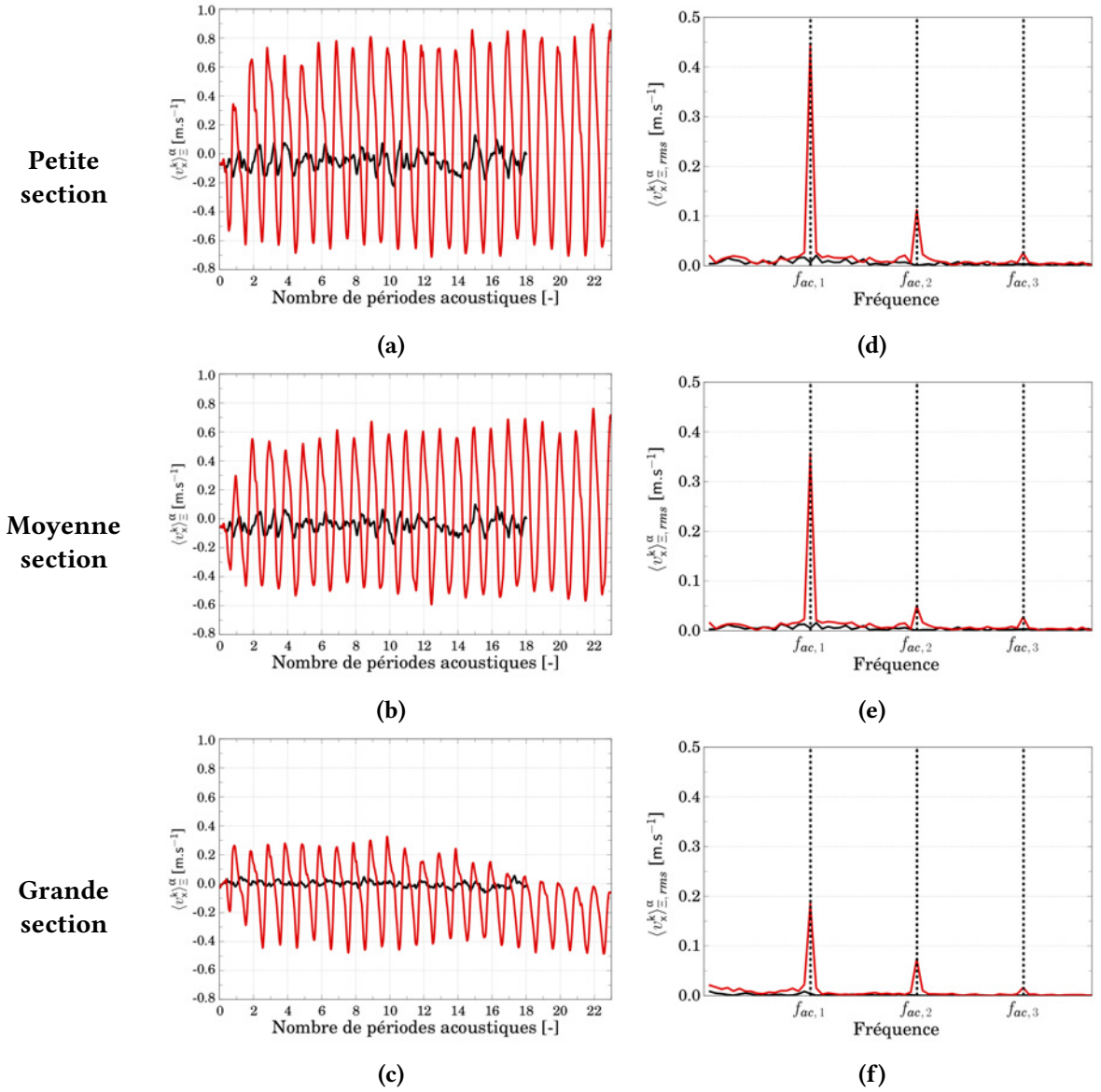


Figure 8.47 – Signaux bruts et DFT de $\langle v_X^k \rangle_\Xi^\alpha$ pour chaque section du spray à une distance $Z = 0.2\,D_l$ du plan d'injection. — NMC ; — MC.

	Petite section	Moyenne section	Grande section
$Z = 0.2\,D_l$	$0.93\,\pi$	$0.87\,\pi$	$0.84\,\pi$
$Z = 2.7\,D_l$	$0.48\,\pi$	$0.32\,\pi$	$0.45\,\pi$

Table 8.3 – Déphasage $\Delta\psi_1$ des signaux de $\langle v_X^k \rangle_\Xi^\alpha$ à la fréquence $f_{ac,\,1}$ par rapport aux fluctuations de vitesse transverse du gaz au point d'injection.

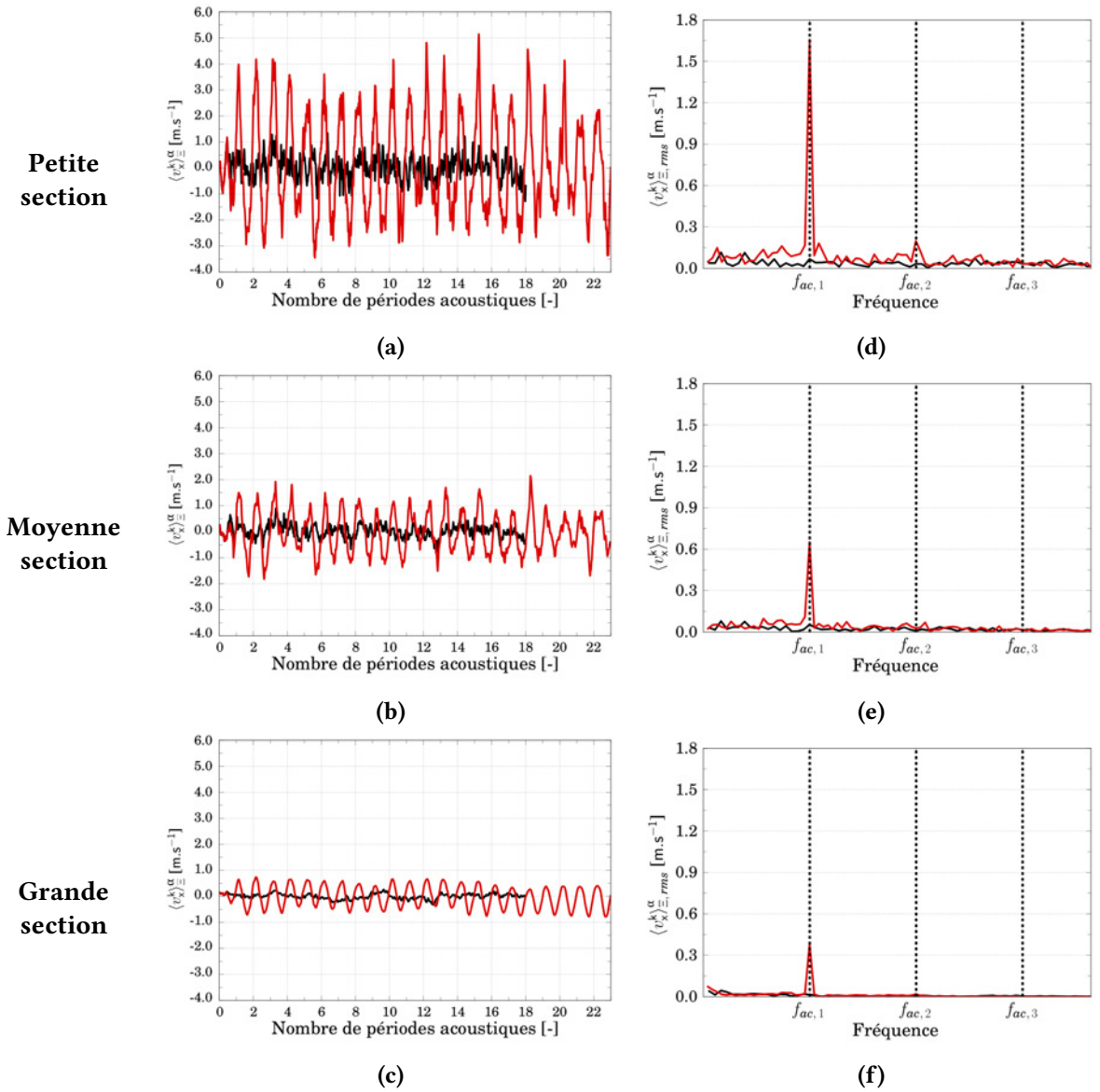


Figure 8.48 – Signaux bruts et DFT de $\langle v_X^k \rangle_\Xi^\alpha$ pour chaque section du spray à une distance Z = 2.7 D_l du plan d'injection. — NMC ; — MC.

8.4 Conclusion du chapitre

Le comportement d'un jet liquide atomisé par un écoulement co-courant d'air face à une excitation acoustique de haute fréquence et de haute amplitude a été étudié dans ce chapitre à l'aide de simulations numériques aux grandes échelles. La stratégie de simulation de l'écoulement diphasique retenue est intégrée au code Cedre et se base sur le couplage d'une méthode à interface diffuse de type fluide homogène et d'un modèle cinétique Eulérien reposant sur une approche sectionnelle de la distribution en taille de gouttes. Cette stratégie de simulation n'avait, jusqu'à présent, jamais été appliquée en présence d'ondes acoustiques. Or, la réponse du jet liquide à ces ondes peut avoir une influence significative sur le couplage thermoacoustique à l'origine d'instabilités de combustion de haute fréquence. Il est alors indispensable de s'assurer que la simulation numérique est capable de restituer l'intégralité des mécanismes de réponse du jet, et c'est justement l'objectif de ce chapitre. Pour ce faire, l'approche retenue dans ce chapitre a consisté à reproduire la configuration expérimentale du Coria associée aux travaux de Ficuciello *et al.* [52] et destinée à l'étude de jets liquides sous excitation acoustique transverse. Deux simulations numériques ont alors été réalisées, l'une sans excitation acoustique et la seconde avec, et

les résultats ont été comparés entre eux ainsi qu'aux données expérimentales.

L'étude s'est concentrée dans un premier temps sur l'analyse du comportement du cœur liquide simulé par la méthode à interface diffuse. Dans les conditions de fonctionnement étudiées, la présence d'un grand nombre de gouttes sur les images obtenues expérimentalement par ombroscopie ne permet malheureusement pas de visualiser le jet central. La littérature montre cependant que les contraintes acoustiques peuvent, sous certaines conditions, conduire à son aplatissement. Dans le cas présent, la comparaison des deux simulations avec et sans excitation acoustique a démontré la capacité de la méthode à interface diffuse à restituer cet aplatissement. Par ailleurs, une réduction importante de la longueur du cœur liquide a été observée numériquement. Il s'agit là d'un phénomène connu, que ce soit dans des conditions de fonctionnement sub- ou transcritiques. Il a cependant été démontré dans ce chapitre que la cause de ce rétrécissement diffère selon les conditions. Dans le cas transcritique, la littérature montre que le raccourcissement du cœur central est issu de l'arrachement transverse de poches denses sous l'effet des oscillations transverses du gaz. À l'opposé, la simulation numérique du cas subcritique montre qu'aucune poche liquide n'est arrachée au cœur liquide, car la masse volumique de celui-ci est trop importante comparée à celle du gaz. Grâce à l'extraction de profils transverses de l'interface diphasique le long de l'axe d'injection, il a été démontré que le rétrécissement du jet est en réalité dû à son aplatissement par la pression de radiation acoustique le conduisant à se rompre prématurément.

L'influence des ondes acoustiques sur les mécanismes d'atomisation du jet a été analysée dans un second temps. Pour les conditions de fonctionnement étudiées, il a été estimé dans ce chapitre que la déformation par la pression de radiation acoustique pouvait impacter les structures liquides de taille supérieure à environ un tiers du diamètre d'injection du jet liquide et conduire à leur atomisation jusqu'à atteindre un équilibre entre les contraintes acoustiques et la force de tension de surface à l'interface diphasique. La simulation numérique a alors démontré que ce mécanisme est correctement restitué par la méthode à interface diffuse à condition que la discrétisation spatiale soit suffisante. Dans le cas contraire, on observe une diffusion du gradient de fraction volumique caractéristique d'une perte d'information relative à la densité d'aire interfaciale locale. Les mêmes observations ont d'ailleurs été effectuées autour du cœur liquide dans le plan orthogonal à l'axe acoustique. Par le passé, Ficuciello *et al.* [52] ont mis en évidence une possible éjection de fragments liquides dans ce plan, que l'on explique dans ce chapitre comme étant liée à l'aplatissement du cœur liquide. La discrétisation spatiale, trop faible dans cette zone pour décrire l'interface des petites structures ainsi produites, conduit ainsi également à une diffusion du gradient de fraction volumique. Il est connu que, dans ces zones de forte diffusion, le manque d'information concernant la forme et la position exacte de l'interface diphasique ainsi que la résolution d'une vitesse unique dans chaque maille pour le mélange liquide-gaz sont susceptibles de dégrader l'évaluation des interactions entre les deux fluides. Malgré cela, il a été démontré dans ce chapitre que la formulation du terme source de transfert de masse vers le solveur destiné à la modélisation du spray permettait tout de même de restituer l'augmentation de la masse de liquide atomisée en présence d'ondes acoustiques. Aussi bien par le biais de la méthode à interface diffuse que par le couplage entre les deux solveurs, la stratégie de simulation d'écoulements diphasiques intégrée au code Cedre semble alors adaptée pour restituer les effets d'ondes acoustiques transverses sur l'atomisation de jets liquides. Pour autant, une façon d'améliorer cette stratégie de simulation et d'accroître la précision de la modélisation des mécanismes d'atomisation pourrait être 1) de résoudre des équations de transport de la densité d'aire interfaciale ainsi que des variables géométriques définissant la courbure locale des structures liquides en sous-maille et 2) d'utiliser un modèle à interface diffuse à 7 équations donnant accès à la vitesse locale de chaque fluide dans chaque maille.

Dans un dernier temps, l'influence des ondes acoustiques sur la dynamique du spray a été analysée. Il a tout d'abord été démontré que la stratégie de couplage entre solveurs permettait de restituer l'augmentation progressive de l'angle du spray dans le plan orthogonal à l'axe acoustique d'ores et déjà observée dans la littérature pour d'autres points de fonctionnement, ainsi que son effet sur la distribution spatiale des gouttes. Cette étude a par ailleurs été l'occasion de proposer une explication quant à ce phénomène et de le lier à l'aplatissement du cœur liquide par les contraintes acoustiques. À l'avenir,

une comparaison quantitative aux mesures expérimentales dans le plan orthogonal à l'axe acoustique permettra de compléter l'étude. Un couplage important entre le système d'injection et les ondes acoustiques dans la cavité a également été mis en évidence, celui-ci ayant déjà été observé expérimentalement. Il a été démontré dans ce chapitre que son influence sur l'atomisation du jet et la fragmentation des gouttes est significative. En effet, le cisaillement périodique entre le co-courant gazeux et la phase liquide conduit à une création intermittente et dissymétrique de gouttes. Enfin, il a été démontré que la stratégie de simulation de la phase dispersée par l'approche sectionnelle de la distribution en taille de gouttes permettait de restituer la dynamique de réponse des gouttes aux oscillations transverses du gaz selon leur taille. Reproduire cette dynamique est essentielle dans le cadre de l'étude des instabilités de combustion de haute fréquence puisque le couplage thermoacoustique est directement influencé par le délai de réponse des gouttes aux oscillations de vitesse du gaz.

La comparaison entre les résultats issus des simulations numériques et les données expérimentales disponibles dans la littérature a ainsi permis de valider la capacité de la stratégie de simulation d'écoulements diphasique mise en œuvre à restituer qualitativement l'intégralité des mécanismes de réponse de jets liquides sous excitation acoustique transverse. Cette étude numérique a de plus été l'occasion de progresser dans la compréhension de certains de ces mécanismes difficiles à observer ou à mesurer lors de campagnes expérimentales. Il restera à l'avenir à assurer la validation quantitative de la simulation numérique, qu'il s'agisse de l'amplitude des phénomènes de réponse aux ondes acoustiques ou de leur dépendance aux conditions de fonctionnement. Ces travaux ouvrent néanmoins la voie à de futures études numériques des instabilités de combustion de haute fréquence en conditions d'injection subcritiques, pour lesquelles il est essentiel de pouvoir restituer l'influence des ondes acoustiques sur l'écoulement diphasique et les flammes. Tout au long de ce chapitre, il a été choisi de ne pas traiter le mécanisme particulier de la déviation du liquide par la force de radiation acoustique. Cette déviation a pourtant bien été observée par le Coria pour le point de fonctionnement défini dans le cadre de cette thèse et pourrait, dans un cas réactif, influencer de façon significative le comportement des flammes et leur couplage avec les ondes acoustiques. Pour compléter cette étude, la partie IV y est donc entièrement consacrée.

Quatrième partie

Modélisation simplifiée de la déviation de jets liquides atomisés par les contraintes acoustiques

Chapitre 9

Mesure et modélisation de la déviation de la phase dispersée

Dans la partie III de ce mémoire, la simulation numérique aux grandes échelles d'un jet diphasique atomisé sous excitation acoustique transverse a été réalisée. Cette simulation a permis d'une part de valider la capacité du code Cedre à reproduire le comportement du jet face aux ondes acoustiques et d'autre part de progresser dans la compréhension de certains de ces mécanismes de réponse. Le choix a cependant été fait de ne pas traiter le phénomène particulier de la déviation de la phase liquide par la force de radiation acoustique et d'y consacrer cette quatrième partie. Dans un premier temps, la déviation des gouttes du spray par les contraintes acoustiques est étudiée au chapitre 9. La déviation enregistrée lors de la simulation numérique est comparée aux mesures expérimentales du Coria, puis une analyse théorique du mécanisme est réalisée par la suite. La déviation du cœur liquide sera quant à elle étudiée au chapitre 10. Une approche simplifiée y sera proposée de manière à modéliser rapidement et à moindre coût la déviation du cœur dense par la force de radiation acoustique.

Sommaire

9.1 Principe de mesure expérimentale de la déviation du spray 210
9.2 Comparaison des mesures numériques aux mesures expérimentales 211
9.3 Modélisation simplifiée de la trajectoire des gouttes 216

9.1 Principe de mesure expérimentale de la déviation du spray

Dans la section 1.2 relative au comportement de jets liquides atomisés sous excitation acoustique, il est fait mention d'une déviation transverse de la phase dense vers le ventre de vitesse acoustique (VAN) le plus proche en présence d'ondes acoustiques d'amplitude élevée. Comme il l'a été démontré par Ficuciello [51], cette déviation par la force de radiation acoustique peut intervenir dès lors qu'il existe un différentiel de masse volumique entre les deux fluides et ne nécessite pas l'existence de tension superficielle à l'interface les séparant. Une telle déviation peut ainsi opérer aussi bien dans des conditions d'injection sub- que transcritiques. Dans le cas particulier des conditions subcritiques, la force de radiation acoustique agit à la fois sur le cœur liquide, sur les ligaments et sur le spray. À travers ce chapitre, nous nous consacrerons à la déviation du spray.

Dans les travaux de Ficuciello [51], la mesure de la déviation du spray est réalisée à partir d'images ombroscopiques telles que celle présentée en figure 9.1a. Les images de largeur totale w_{im} sont décomposées en m tranches axiales d'épaisseur constante et uniforme Δw. La distribution spatiale normalisée du nombre de gouttes par épaisseur de tranche est alors calculée pour un ensemble de 200 images acquises lorsque l'amplitude d'excitation acoustique est maximum. Cette distribution est définie comme :

$$f(i) = \frac{N_d(i)}{\sum_{j=1}^{m} N_d(j)\Delta w / w_{im}} = \frac{N_d(i)\, m}{\sum_{j=1}^{m} N_d(j)}, \tag{9.1}$$

avec $N_d(i)$ le nombre de gouttes parcourant la tranche indicée i au cours de la mesure. Un exemple de distribution obtenue en régime d'atomisation de type fibre par Ficuciello [51] est présenté en figure 9.1b. Dans un cas comme celui-ci, la distribution peut être approchée par une fonction Gaussienne dont il est possible de calculer l'espérance mathématique μ quantifiant le décentrement du spray sous l'effet de la force de radiation acoustique. Ce décentrement peut être mesuré sur l'intégralité de la fenêtre de visualisation ou bien pour différentes positions le long de l'axe d'injection. Dans ce dernier cas, la première décomposition axiale des images illustrée en figure 9.1a est combinée à une seconde décomposition transverse. La grille de mesure ainsi générée permet de mesurer le décentrement du spray μ à différentes distances Z du plan d'injection.

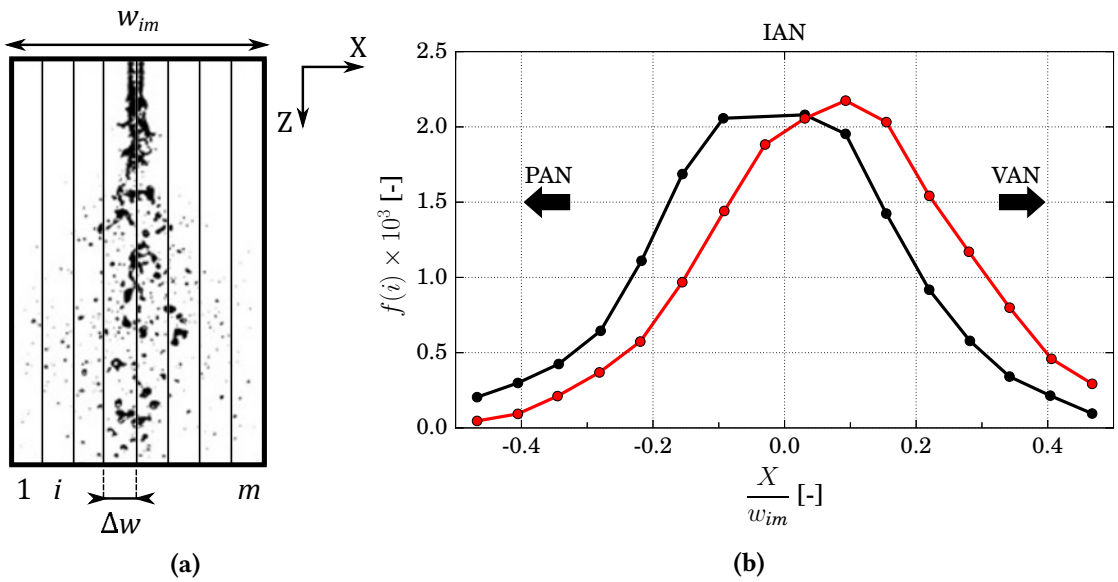


Figure 9.1 – (a) Exemple de découpage et (b) de mesure de la distribution spatiale du nombre de gouttes à partir d'images ombroscopiques ⟶ avec et ⟶ sans excitation acoustique (We_g = 224 et Re_l = 3000, cf. Ficuciello [51]).

Les mesures réalisées par Ficuciello [51] en régime d'atomisation de type fibre ont permis notamment de révéler une dépendance importante de la déviation des gouttes à la position d'injection le long de l'axe acoustique. De plus, l'auteur démontre que le décentrement μ du spray complet évolue selon une croissance exponentielle en fonction de l'amplitude d'excitation acoustique lorsque celle-ci est supérieure à 3 kPa (valeur crête-à-crête).

Dans le cas des conditions de fonctionnement PF-Onera, le décentrement adimensionné du spray μ/D_l mesuré expérimentalement est tracé en figure 9.2 selon la position le long de l'axe d'injection. Sur cette figure, différents intervalles de diamètres de gouttes sont étudiés, leurs bornes variant entre 20 µm et 2 mm. De ces mesures, il ressort que la déviation des gouttes ne dépend pas de leur taille pour ces conditions particulières de fonctionnement. Par ailleurs, le décentrement semble croître de façon quasi linéaire le long de l'axe d'injection jusqu'à une distance d'environ $Z = 16\,D_l$ à partir de laquelle celui-ci reste constant. Il s'agit là d'une particularité importante du point de fonctionnement, qui sera discutée plus tard dans ce chapitre et le suivant.

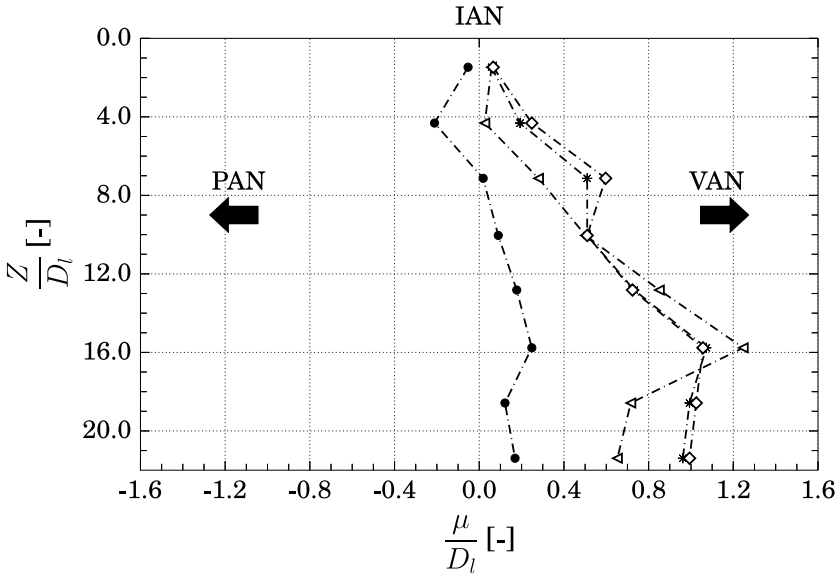


Figure 9.2 – Mesure expérimentale du décentrement du spray selon la taille des gouttes (We_g = 490 et J = 4, cf. Ficuciello [51]). ·-●-· NMC $D \in$ [20µm, 2mm] ; ·-◁-· MC $D \in$ [20µm, 200µm] ; ·-◇-· MC $D \in$ [200µm, 2mm] ; ·-✳-· MC $D \in$ [20µm, 2mm].

Dans un cas réactif, la déviation moyenne du liquide peut avoir un impact direct sur l'orientation de la flamme et son positionnement dans le champ acoustique (cf. Méry [112]) et ainsi influencer le couplage thermoacoustique. Il est alors important de s'assurer que la simulation numérique puisse la restituer. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle un modèle de force de radiation acoustique appliquée aux gouttes a été préalablement formulé et développé au sein du DPS (cf. chapitre 3). Dans la suite de ce chapitre, la déviation du spray enregistrée lors des simulations numériques présentées en partie III de ce mémoire est comparée aux mesures expérimentales du Coria.

9.2 Comparaison des mesures numériques aux mesures expérimentales

Rappelons que les mesures expérimentales du décentrement du spray présentées précédemment ont été effectuées par le Coria à partir d'images ombroscopiques acquises après établissement de l'écoulement. En revanche, le régime établi n'est pas atteint dans le cas des simulations numériques réalisées au cours de cette thèse. Pour la mesure du décentrement du spray à partir des résultats CFD, il est donc

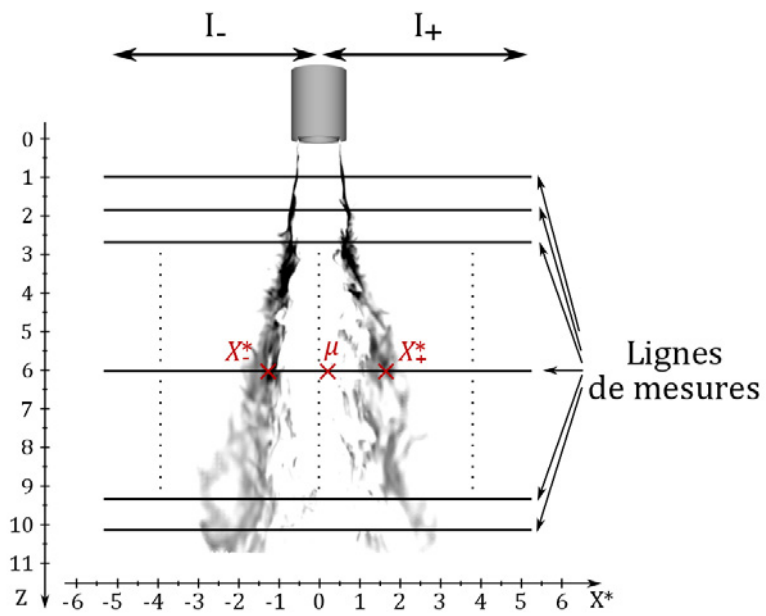
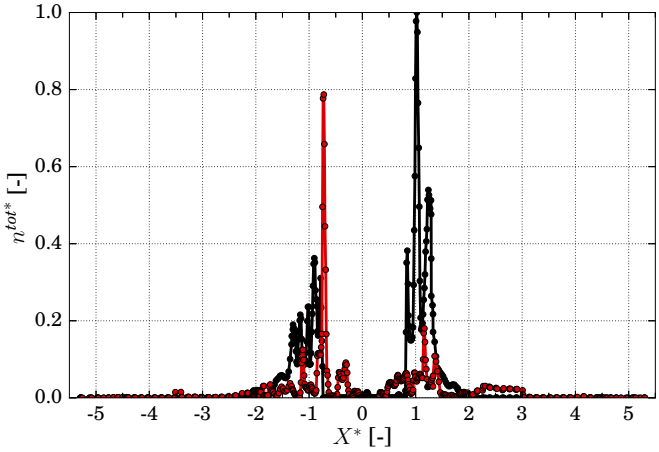
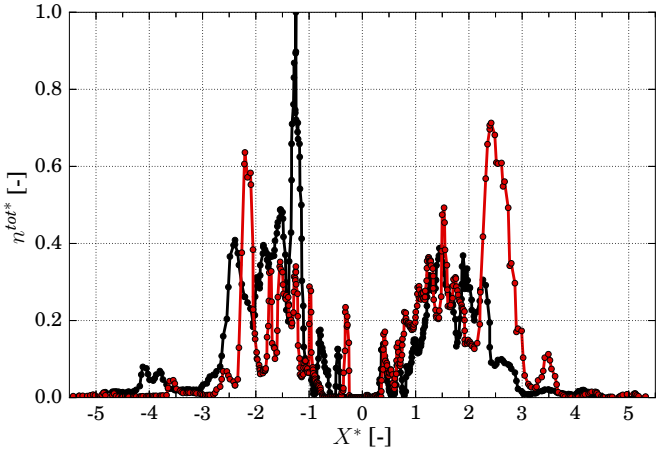


Figure 9.3 – Illustration de la méthode de mesure du décentrement du spray à partir de champs instantanés de la densité numérique totale de gouttes n^{tot}.

choisi de se baser sur les distributions spatiales instantanées de la densité numérique totale de gouttes n^{tot}, ce qui permet d'analyser la phase transitoire de la déviation. Contrairement aux mesures expérimentales, il n'est pas nécessaire de procéder au découpage du champ d'étude. Comme le représente la figure 9.3, les distributions sont directement calculées à partir des cellules du maillage intersectant une ligne de mesure de position donnée le long de l'axe d'injection. Deux exemples de distributions spatiales instantanées sont présentés en figures 9.4a et 9.4b respectivement à une distance $Z = 4\,D_l$ et $Z = 8\,D_l$ du plan d'injection. Ces distributions sont ici normalisées par le maximum de densité n^{tot} mesuré sur chaque ligne de mesure en l'absence d'excitation acoustique. Il ressort de ces figures que la présence du mélange homogène simulé par le SPS sur l'axe du jet conduit à une absence de gouttes au centre des distributions, et ne permet pas ainsi de les approcher par une fonction Gaussienne dont il serait possible de calculer l'espérance mathématique. Par ailleurs, on remarque une importante dissymétrie des distributions instantanées de part et d'autre de la position d'injection due non seulement à l'aspect instationnaire de l'écoulement mais également, pour le MC, au mécanisme de couplage entre les ondes acoustiques et l'injecteur et à son influence sur l'atomisation du jet. En effet, la section 8.3.2 avait mis en évidence une production périodique de gouttes de part et d'autre du cœur liquide. Dans ce cas, le calcul du barycentre du spray pondéré par la densité numérique de gouttes à chaque instant sur une ligne de mesure parcourant toute la largeur du spray sera immanquablement influencé par ce mécanisme de couplage. Or, dans le cas des mesures expérimentales de référence, la moyenne temporelle des distributions spatiales en régime établi tend à annuler l'effet du couplage injecteur/acoustique sur la symétrie des distributions et donc sur la mesure du décentrement du spray. Pour pouvoir effectuer une comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats CFD, il apparaît alors indispensable de définir une méthode de mesure numérique capable de ne pas tenir compte de l'effet de ce couplage sur la mesure du décentrement du spray. Pour cela, on dissocie à chaque instant les deux côtés de chaque distribution de manière à ne pas privilégier les zones où la production de gouttes est favorisée par le phénomène de couplage. La mesure du décentrement de chaque distribution est ainsi effectuée selon une approche similaire à celle employée en section 8.3.1 pour la mesure de l'angle de spray pondéré par la fraction volumique de gouttes. Chacune des lignes de mesure est d'abord décomposée en deux sous-ensembles I_+ et I_- correspondant respectivement aux coordonnées $X^* = (X - X_{inj})/D_l > 0$ et $X^* < 0$. On calcule ensuite le barycentre du spray pondéré par la densité numérique n^{tot} le long de ces



(a)



(b)

Figure 9.4 – Distributions spatiales normalisées de n^{tot} à (a) $Z = 4\,D_l$ et (b) $Z = 8\,D_l$. NMC ; MC à $t = 23\,T_{ac}$.

sous-ensembles comme :

$$X_+^* = \frac{\sum_{V_c \in \mathrm{I}_+} X^*\, n^{tot}\, |V_c|}{\sum_{V_c \in \mathrm{I}_+} n^{tot}\, |V_c|}, \qquad X_-^* = \frac{\sum_{V_c \in \mathrm{I}_-} X^*\, n^{tot}\, |V_c|}{\sum_{V_c \in \mathrm{I}_-} n^{tot}\, |V_c|}. \tag{9.2}$$

On calcule enfin le décentrement moyen du spray sur chaque ligne de mesure comme :

$$\mu = \frac{X_+^* + X_-^*}{2}. \tag{9.3}$$

À titre d'exemple, le décentrement adimensionné du spray μ/D_l est représenté en figure 9.5 en fonction de la position le long de l'axe d'injection après 23 périodes acoustiques. On y remarque une variation du décentrement instantané le long de cet axe du fait de l'aspect instationnaire de l'écoulement, avec des valeurs pouvant même être négatives selon l'instant considéré. Pour simplifier la comparaison aux mesures expérimentales, seule la régression linéaire des points de mesure sera alors exploitée par la suite.

Le décentrement du spray à différents instants est comparé aux mesures expérimentales en figure 9.6. Sur cette figure, seuls les points de mesure distants au maximum de 11 D_l du plan d'injection

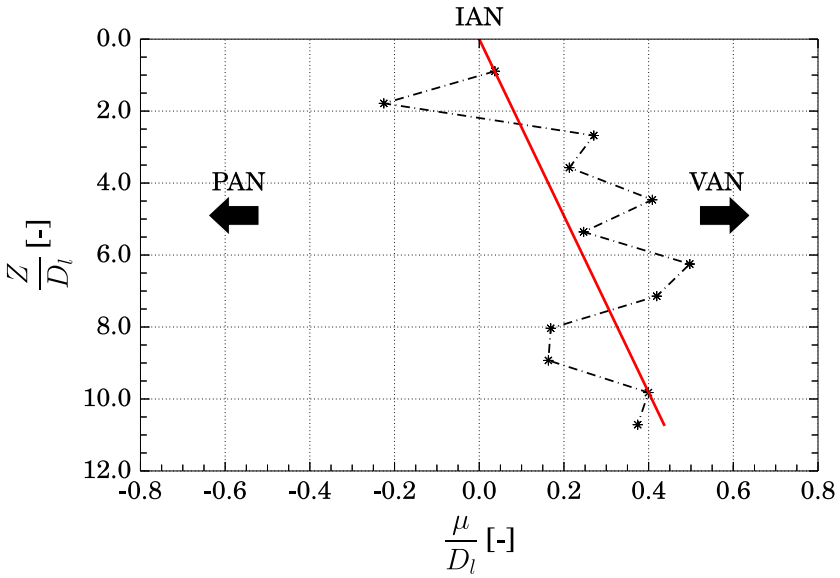


Figure 9.5 – Déviation instantanée du spray ($t = 23\,T_{ac}$) en fonction de la distance au plan d'injection, toutes tailles de gouttes considérées. ·✳· Points de mesure, — régression linéaire.

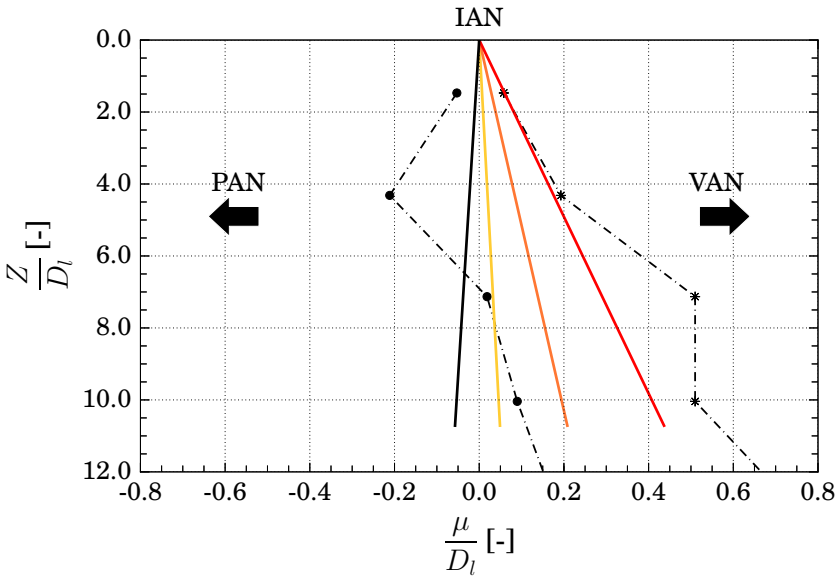


Figure 9.6 – Déviation instantanée du spray au cours du PF-Onera. Mesures expérimentales : ·●· NMC $D \in [20\mu m, 2mm]$, ·✳· MC $D \in [20\mu m, 2mm]$. Régressions linéaires CFD : — MC $t = 0$, — MC $t = 8\ T_{ac}$, — MC $t = 16\ T_{ac}$, — MC $t = 23\ T_{ac}$.

	NMC pour $t \in [0{,}18\,T_{ac}]$	MC à $t = 23\,T_{ac}$		
	Toutes sections	Petite section	Moyenne section	Grande section
γ_{sp} [°]	Moyenne : −0.53 Écart type : 0.44	1.6	1.4	1.9

Table 9.1 – Angle de déviation des gouttes selon leur taille.

sont représentés pour correspondre au domaine d'étude Ω des simulations CFD (cf. figure 6.8b). On y observe nettement un décentrement progressif du spray au cours du temps vers le VAN du mode acoustique principal le plus proche. Ce comportement est similaire à ce qui est mesuré expérimentalement. Néanmoins, l'angle de déviation continue d'évoluer entre 16 et 23 périodes acoustiques, ce qui démontre que la position du spray n'est pas encore établie. Il n'est ainsi pas possible d'effectuer une comparaison quantitative entre l'angle de déviation calculé après 23 périodes acoustiques et les mesures expérimentales. Quoi qu'il en soit, la déviation progressive du spray en présence d'ondes acoustiques permet d'expliquer l'évolution asymétrique de l'angle du spray observée en section 8.3.1 dans le plan de visualisation contenant l'axe acoustique. On observait en effet sur la figure 8.22 une ouverture de l'angle du côté du VAN et une fermeture du côté opposé à partir d'environ 10 périodes acoustiques. De même, la déviation progressive du spray permet d'expliquer l'aspect dissymétrique de la distribution spatiale de la densité numérique moyenne de gouttes observée en section 8.3.1 sur la figure 8.27, avec une densité moyenne plus importante vers le VAN le plus proche ($X^* > 1.5$).

À l'instar des mesures expérimentales, on souhaite également analyser l'influence du diamètre des gouttes sur leur déviation. Pour cela, la mesure du décentrement du spray est réalisée cette fois-ci en remplaçant la densité numérique totale de gouttes n^{tot} par la densité numérique de gouttes n^k associée à chaque section du DPS dans la formulation (9.2). Les angles de déviation γ_{sp} mesurés entre l'axe d'injection et les régressions linéaires des points de mesure de décentrement sont présentés dans le tableau 9.1 pour les trois sections du spray en présence d'ondes acoustiques. Pour le NMC, l'information par section ne présente pas d'intérêt puisque toutes les gouttes sont censées ne pas être déviées. La moyenne et l'écart type de l'angle mesuré lors du NMC sur l'intégralité du temps simulé en considérant la densité numérique totale de gouttes n^{tot} sont alors présentés dans le tableau 9.1. On remarque que la valeur moyenne n'est pas nulle malgré l'absence d'excitation acoustique, ce qui reflète un manque de convergence. En ce qui concerne l'écart type représentatif de la dispersion de l'évolution temporelle de la déviation du spray, nous faisons l'hypothèse que sa valeur en présence d'onde acoustique est supérieure ou égale à celle enregistrée au cours du NMC. Cette hypothèse se justifie au regard de la dynamique oscillatoire imposée au spray par les ondes acoustiques lors du MC (cf. section 8.3.3). On peut alors utiliser la valeur de l'écart type associée au NMC comme amplitude minimale de fluctuation de la déviation du spray au cours du temps autour de sa valeur moyenne lors du MC. Puisque le temps de simulation associé au MC n'est pas suffisamment grand pour atteindre l'établissement de l'angle de déviation des gouttes, la valeur moyenne ne peut pas être calculée. Seule la valeur à l'instant final du calcul $t = 23\,T_{ac}$ est ainsi présentée pour les trois sections du spray dans le tableau 9.1. On remarque que l'écart de déviation entre les trois sections modélisées est de l'ordre de l'écart type enregistré sans excitation acoustique. Il n'est donc pas possible, avec les seules données numériques présentées ici, de déceler une quelconque influence de la taille des gouttes sur leur déviation transverse par la force de radiation acoustique. Notons cependant que toutes les gouttes dévient vers le VAN le plus proche. Ces observations semblent être en accord avec les conclusions expérimentales du Coria, mais sont en revanche en désaccord avec les figures 8.47 et 8.48 de la section 8.3.3 qui montrait une dérive négative de la vitesse transverse moyenne des plus grosses gouttes. Cette dérive est caractéristique d'une accélération moyenne vers le ventre de pression acoustique (PAN) le plus proche, contraire à la déviation mesurée vers le VAN. Pour expliquer ce phénomène et compléter le manque de données obtenues par la simulation numérique, la suite de ce chapitre est consacrée à la modélisation simplifiée de la trajectoire

de gouttes soumises à une excitation acoustique transverse.

9.3 Modélisation simplifiée de la trajectoire des gouttes

Lorsqu'une goutte liquide est positionnée dans un champ acoustique stationnaire, celle-ci est soumise à trois forces : la force de radiation acoustique $\boldsymbol{F}_{rad}$ due à la réflexion des ondes sur la goutte, la force de traînée $\boldsymbol{F}_{drag}$ due aux contraintes de viscosité et la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_g$. Lorsque la direction de propagation des ondes acoustiques (ici $\boldsymbol{X}$) est orthogonale à la direction de la force gravitationnelle (ici $\boldsymbol{Z}$), le principe fondamental de la dynamique appliqué à la goutte donne :

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} &= \underbrace{\boldsymbol{F}_{rad}\cdot\boldsymbol{X}}_{F_{rad}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_{drag}\cdot\boldsymbol{X}}_{F_{drag,\,X}}, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} &= \underbrace{\boldsymbol{F}_{g}\cdot\boldsymbol{Z}}_{F_{g}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_{drag}\cdot\boldsymbol{Z}}_{F_{drag,\,Z}}, \end{cases} \tag{9.4}$$

où $m = \rho_l \pi D^3/6$ est la masse de la goutte de diamètre D, tandis que $F_{drag,\,X}$ et $F_{drag,\,Z}$ sont les composantes de la force de traînée $\boldsymbol{F}_{drag}$ suivant les axes $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Z}$. À partir de ce système d'équations, il est possible d'isoler chaque force une à une et d'analyser sa contribution à la dynamique des gouttes.

Si l'on isole d'abord la force de radiation acoustique, l'accélération et donc la trajectoire de la goutte dépendent uniquement du rapport F_{rad}/m. Rappelons que la viscosité de la phase porteuse peut, selon la taille de la goutte, influencer elle-même la force de radiation acoustique (Doinikov [31]). Pour les conditions de fonctionnement définies dans le cadre de cette thèse, il a cependant été démontré au chapitre 3 que l'épaisseur de viscosité était suffisamment faible devant le rayon des gouttes pour considérer la force de radiation acoustique indépendante de cette viscosité. Dans ce cas, la force de radiation peut être formulée par le système (3.54). Puisque les gouttes ont ici un diamètre très faible devant la longueur d'onde acoustique, la force de radiation acoustique est alors en moyenne proportionnelle à D^3 (cf. équation (3.71)), tout comme leur masse m. En l'absence de traînée, les contraintes acoustiques conduisent donc à une déviation des gouttes indépendante de leur taille vers le VAN le plus proche.

Au contraire, si l'on isole maintenant la composante de la force de traînée le long de l'axe acoustique, la dynamique des gouttes varie de façon importante selon leur taille et leur inertie. Pour analyser la contribution isolée de la traînée selon l'axe de propagation acoustique pour l'intervalle de diamètre [1 µm, 10 mm] caractéristique des structures liquides effectivement rencontrées dans les simulations CFD, l'équation $\mathrm{d}^2X/\mathrm{d}t^2 = F_{drag,\,X}/m$ est résolue par la méthode des différences finies. À l'instar du modèle de traînée utilisé dans le code Cedre, on considère la force de traînée comme :

$$\boldsymbol{F}_{drag} = \frac{1}{8}\pi D^2 \rho_g C_D \,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|\,(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}). \tag{9.5}$$

où ρ_g et $\boldsymbol{u}$ sont la masse volumique et la vitesse de la phase porteuse, tandis que $\boldsymbol{v}$ est la vitesse de la goutte. Pour modéliser le coefficient de traînée C_D, la corrélation de Schiller et Naumann [134] est utilisée :

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p} & \text{si} \quad \mathrm{Re}_p < 1, \\ \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p}\left(1 + 0.15\,\mathrm{Re}_p^{0.687}\right) & \text{si} \quad 1 \le \mathrm{Re}_p \le 1000, \\ 0.445 & \text{sinon}, \end{cases} \tag{9.6}$$

avec le nombre de Reynolds particulaire défini comme :

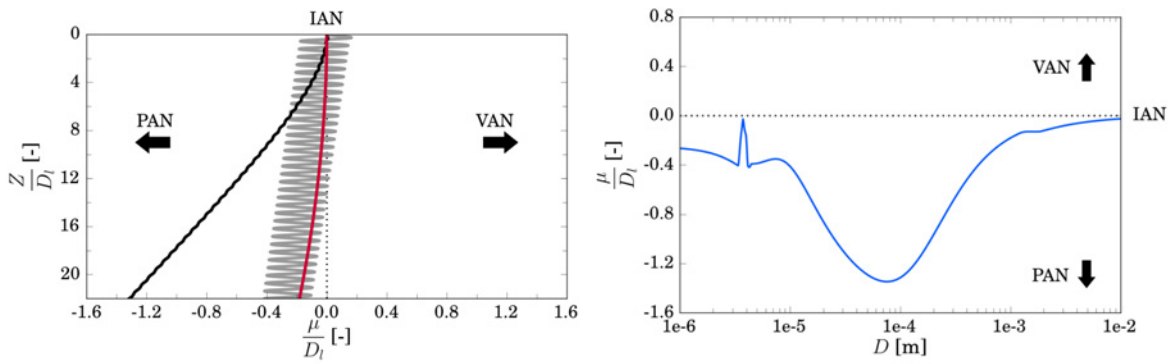
$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_g D\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|}{\mu_g}, \tag{9.7}$$

où μ_g est la viscosité dynamique de la phase porteuse. Les trajectoires de trois gouttes d'eau de diamètres 10 µm, 100 µm et 1 mm injectées dans de l'air à une vitesse [1] de $3.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et soumises à une excitation acoustique multi-harmonique identique au cas CFD sont représentées en figure 9.7a. On remarque dans un premier temps une déviation des gouttes vers le PAN le plus proche quelle que soit leur taille. Pour expliquer ce phénomène, considérons le déplacement d'une goutte durant la première moitié d'un cycle acoustique. Si la vitesse acoustique est positive, la goutte se déplace alors vers le VAN le plus proche sous l'effet de la force de traînée, soit une zone du champ acoustique où l'amplitude d'oscillation de la vitesse du gaz est plus élevée. Lors de la seconde moitié du cycle acoustique, la vitesse acoustique est négative. La goutte parcourt alors une distance plus grande qu'à l'aller cette fois-ci vers le PAN le plus proche puisque l'amplitude d'oscillation à laquelle cette goutte est soumise est plus élevée qu'au départ de la première moitié du cycle acoustique. Le déplacement net à la fin du cycle est ainsi négatif et conduit à un rapprochement de la goutte du PAN le plus proche. Dans le cas inverse où la vitesse du gaz est négative lors du premier cycle acoustique, la goutte est initialement déplacée vers une zone où l'amplitude d'oscillation de la vitesse du gaz est réduite. Lors de la seconde moitié du cycle, son déplacement dans le sens opposé est ainsi plus faible qu'à l'aller, conduisant également à un déplacement net vers le PAN le plus proche. Ce mécanisme se répétant à chaque cycle acoustique est à l'origine de la déviation observée sur la figure 9.7a. On remarque cependant sur cette figure que la dynamique des gouttes diffère selon leur taille. En effet, puisque la plus petite goutte a une inertie plus faible, celle-ci oscille à la fréquence d'excitation acoustique avec une amplitude plus élevée que la goutte de diamètre 100 µm. Les oscillations de la goutte de diamètre 1 mm tendent même à disparaître tant son inertie est importante. Enfin, on remarque également sur la figure 9.7a que le déplacement moyen des gouttes dépend lui aussi de leur taille. Pour une meilleure analyse de ce phénomène, le déplacement final des gouttes à une distance de 22 D_l du point d'injection est tracé en figure 9.7b pour toute la plage de taille [1 µm, 10 mm]. On voit que le déplacement des gouttes vers le PAN le plus proche augmente progressivement avec leur taille jusqu'à un diamètre de goutte d'environ 80 µm, puis diminue pour tendre vers une valeur nulle. En réalité, l'inertie des gouttes conduit à un temps de réponse aux fluctuations de vitesse du gaz dépendant du diamètre. Selon ce temps de réponse, un déphasage plus ou moins important s'installe entre la dynamique des gouttes et les oscillations de la vitesse du gaz. Associé au mécanisme d'aller-retour plus ou moins ample des gouttes, ce déphasage tend à favoriser le déplacement moyen des gouttes d'un diamètre d'environ 80 µm, tandis que les plus grosses gouttes ont une inertie trop élevée pour répondre aux fluctuations de vitesse du gaz.

Il est important de préciser que la figure 9.7 correspond à une solution particulière pour laquelle les gouttes sont injectées à la phase $\Phi_{inj} = 0$ au cours d'un cycle acoustique. Lorsque la phase d'injection est modifiée, l'historique de vitesse acoustique expérimentée par la goutte et donc sa trajectoire sont différents. Cependant, quelle que soit la phase d'injection considérée, les conclusions sont identiques et la déviation des gouttes opère vers le PAN le plus proche. Un deuxième exemple de solution est donnée pour une phase d'injection $\Phi_{inj} = 3\pi/2$ en figure 9.8a. Dans ce cas, les gouttes expérimentent initialement une vitesse acoustique positive les envoyant vers le VAN le plus proche, puis sont progressivement déviées vers le PAN. À la fin du calcul, le déplacement net des plus petites gouttes (cf. figure 9.8b) est cette fois-ci positif mais continuerait de décroître si le temps simulé était plus élevé. Notons que cette déviation vers un PAN est en accord avec les observations de Achury et Polifke [2]. Lors de leurs simulations numériques de gouttes initialement à l'arrêt soumises à un champ acoustique stationnaire, ceux-ci ont noté une agglomération des structures liquides aux PAN du champ acoustique, le phénomène dépendant également du diamètre des gouttes. Dans leurs simulations, seules la traînée et la gravité étaient considérées.

On comprend donc par cette analyse que, dans le cas présent, si l'on tient compte de l'intégralité des forces exprimées par le système (9.4), la force de traînée va s'opposer à l'action de la force de radiation acoustique avec une contribution dépendant grandement de la taille des gouttes. Par ailleurs,

1. Il s'agit de la vitesse des gouttes imposée au cours des simulations CFD lors du transfert de masse effectué vers le DPS (cf. section 6.4.3).

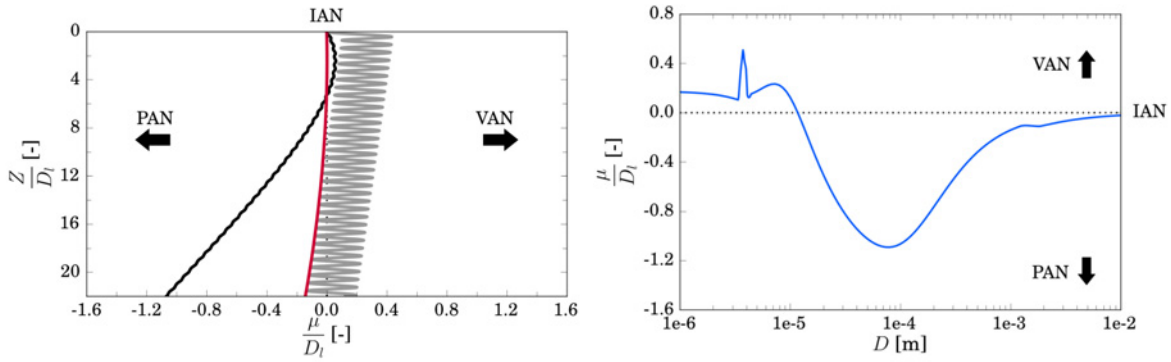


(a) (b)

Figure 9.7 – (a) Trajectoires de gouttes soumises uniquement à la force de traînée le long de l'axe acoustique (Φ_{inj} = 0) : — D = 10 µm, — D = 100 µm, — D = 1 mm. (b) Déplacement des gouttes selon leur taille à une distance Z = 22 D_l du plan d'injection.

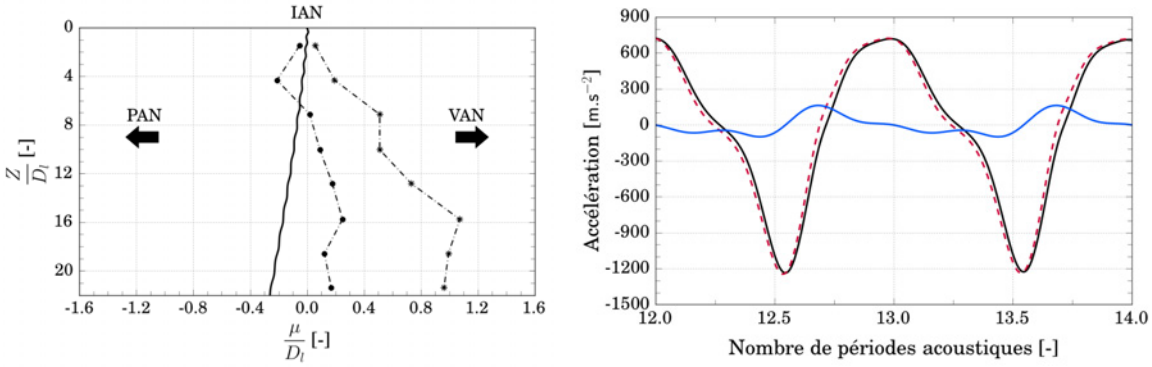
l'accélération des gouttes par la force gravitationnelle ainsi que l'action du co-courant gazeux à travers la composante $F_{drag,\,Z}$ de la force de traînée vont contribuer à réduire l'angle de déviation des gouttes. Évidemment, la déviation résultante dépend de plusieurs paramètres tels que la taille des gouttes, l'amplitude des ondes acoustiques ou encore la position et la vitesse d'injection du liquide et du co-courant gazeux. Par exemple, Baillot *et al.* [7] se sont intéressés à la dynamique de gouttes de diamètre de l'ordre du millimètre injectées avec une vitesse initiale faible sans co-courant gazeux dans un champ acoustique transverse. Dans ce cas, les contributions des termes $F_{drag,\,X}$ et $F_{drag,\,Z}$ étaient extrêmement réduites, conduisant ainsi à une déviation importante des gouttes vers le VAN le plus proche. En revanche, dans le cas des conditions de fonctionnement PF-Onera, puisque la vitesse du co-courant gazeux est élevée et la taille des gouttes de l'ordre de 10 à 100 µm, on peut s'attendre à ce que les termes $F_{drag,\,X}$ et $F_{drag,\,Z}$ aient une contribution plus importante.

Pour s'en assurer, on résout cette fois-ci le système complet (9.4) par la méthode des différences finies pour des conditions de fonctionnement caractéristiques du PF-Onera. La figure 9.9a représente



(a) (b)

Figure 9.8 – (a) Trajectoires de gouttes soumises uniquement à la force de traînée le long de l'axe acoustique (Φ_{inj} = $3\pi/2$) : — D = 10 µm, — D = 100 µm, — D = 1 mm. (b) Déplacement des gouttes selon leur taille à une distance Z = 22 D_l du plan d'injection.



(a) (b)

Figure 9.9 – (a) Modélisation de la trajectoire d'une goutte ($\Phi_{inj} = 0$) de diamètre $D = 110$ µm (—) et comparaison aux mesures expérimentales de décentrement du spray (Ficuciello [51]) : ● NMC $D \in [20\mu m, 2mm]$, ✳ MC $D \in [20\mu m, 2mm]$. (b) Évolution temporelle des composantes de l'accélération de la goutte le long de l'axe acoustique : — $F_{drag,\,X}/m$, — F_{rad}/m, - - $\left(F_{drag,\,X} + F_{rad}\right)/m$.

ainsi la trajectoire d'une goutte d'eau de diamètre[2] 110 µm injectée dans de l'air à une vitesse de $3.5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et soumise à un co-courant gazeux d'une vitesse[3] de $15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ainsi qu'à une excitation acoustique multi-harmonique identique au cas CFD. On remarque sur cette figure que la déviation résultante de la goutte sous l'effet des contraintes acoustiques est assez faible du fait de l'accélération des gouttes par le co-courant gazeux. La déviation est par ailleurs orientée dans la direction opposée aux mesures expérimentales. En effet, comme le montre la figure 9.9b pour les deux dernières périodes acoustiques du calcul, l'accélération $F_{drag,\,X}/m$ issue de la composante de traînée le long de l'axe acoustique est nettement plus importante que l'accélération F_{rad}/m issue de la force de radiation acoustique. Pour cette taille de goutte en particulier, la contribution de la force de radiation est alors négligeable, conduisant à une déviation vers le PAN le plus proche. Cette observation est en accord avec la dérive négative de la vitesse transverse moyenne des gouttes observée en figures 8.47 et 8.48 de la section 8.3.3 mais n'explique pas le décentrement du spray vers le VAN enregistré à la fois expérimentalement et par les simulations CFD.

Une explication possible pourrait être que ce sont en réalité le cœur liquide et les plus gros ligaments qui sont déviés vers le VAN. En effet, on a vu plus tôt que les plus grosses structures ne répondaient que très peu aux fluctuations de vitesse du gaz (cf. figure 9.7b). Dans ce cas, la force de trainée ne s'oppose plus à la force de radiation acoustique, ce qui va entrainer le liquide vers le VAN le plus proche. Les gouttes étant issues de l'atomisation de ces plus grosses structures liquides, le centre du spray s'en retrouverait ainsi dévié également. Cela pourrait également expliquer pourquoi le décentrement mesuré par le Coria ne dépend pas de la taille des gouttes considérées et cesse de croître au-delà d'une distance de 16 D_l du plan d'injection. À cette distance, les plus grosses structures se sont probablement suffisamment atomisées pour répondre de façon significative à la traînée et être déviées cette fois-ci vers le PAN. De manière à valider cette théorie, le chapitre suivant est consacré à l'analyse de la déviation du cœur liquide et des plus gros ligaments par les contraintes acoustiques.

2. Il s'agit du diamètre d'atomisation moyen de type D_{10} issu de la corrélation 6.4 de Marmottant et Villermaux [106] appliquée au PF-Onera.

3. Il s'agit de la vitesse moyenne du gaz autour des gouttes mesurée dans le cas CFD.

Chapitre 10

Mesure et modélisation de la déviation du cœur liquide

Il a été démontré au chapitre 9 que la déviation transverse du spray observée par l'expérimentation et la CFD ne résultait pas, dans le cas présent, de l'action directe de la force de radiation acoustique sur les gouttes. Cette déviation pourrait être issue de la réponse du cœur liquide aux contraintes acoustiques. Pour le démontrer, une approche théorique est proposée dans ce chapitre 10 de manière à estimer la déviation du cœur liquide à moindre coût et ainsi palier au manque de mesures expérimentales relatives au comportement du cœur dense dans le régime d'atomisation de type fibre. Cette approche est par la suite utilisée pour valider la reproduction par la CFD du mécanisme de déviation du cœur liquide et des plus gros ligaments et pour démontrer son impact sur le comportement du spray.

Sommaire

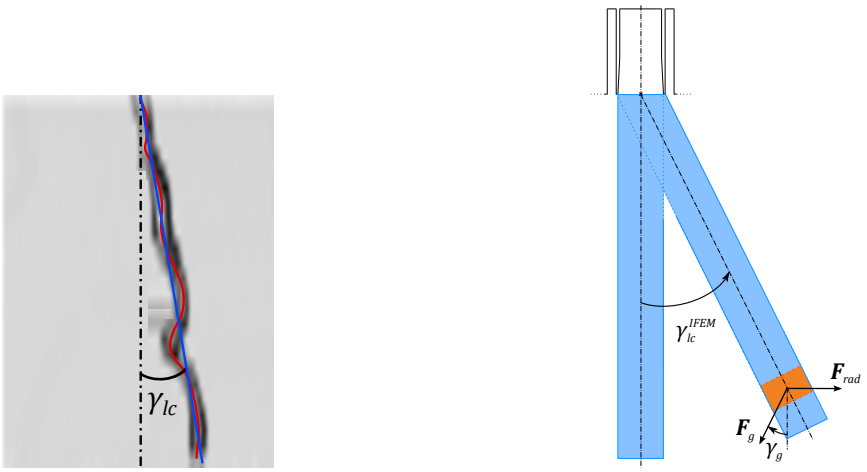
10.1 Première approche : modèle à l'équilibre 222
10.2 Seconde approche : calcul de trajectoire de paquets liquides 224
10.3 Application au PF-Onera 230

10.1 Première approche : modèle à l'équilibre

Dans ses travaux, Ficuciello [51] s'est attaché à évaluer expérimentalement puis à modéliser la déviation du cœur liquide sous l'effet de la force de radiation acoustique. Il introduit pour cela l'angle de déviation γ_{lc} entre l'axe d'injection et la régression linéaire de la ligne centrale du cœur dense (cf. figure 10.1a). Pour modéliser le phénomène, l'auteur considère le cœur liquide comme un cylindre solide indéformable de diamètre D_l en rotation libre autour du point d'injection. Chaque portion de longueur unitaire du cylindre est soumise à trois forces extérieures : deux forces surfaciques, l'une de radiation acoustique $\boldsymbol{F}_{rad}$ et l'autre de traînée $\boldsymbol{F}_{drag}$, toutes deux orthogonales à l'axe d'injection, et une force volumique gravitationnelle $\boldsymbol{F}_g = \rho_l \pi {D_l}^2/4\,\boldsymbol{g}$. De façon générale, les deux forces surfaciques varient périodiquement au cours du temps et dépendent de la position du liquide le long de l'axe acoustique. Ficuciello [51] simplifie cependant le problème à modéliser en supposant l'inertie du cœur liquide suffisamment élevée et sa déviation suffisamment lente pour négliger les effets de la force de traînée et des variations temporelles de la force de radiation acoustique. Seule la partie moyenne de cette dernière est ainsi considérée. Par ailleurs, l'auteur estime la déviation du jet suffisamment faible pour négliger également la variation de cette force due au déplacement progressif du liquide le long de l'axe acoustique. La force de radiation acoustique peut ainsi être considérée homogène tout le long du cœur liquide et être évaluée aux coordonnées d'injection, par exemple par la formulation moyenne (D.54) pour des jets liquides positionnés dans un champ acoustique mono-harmonique. L'angle de déviation du jet est finalement défini comme l'angle atteint lorsque les forces de radiation acoustique et gravitationnelle s'équilibrent dans la direction normale à l'axe du cœur liquide. Nous nommerons ici cette approche *Infinitely Fast Equilibrium Model* (IFEM) et l'angle calculé γ_{lc}^{IFEM}. Bien que l'auteur restreigne son approche au cas particulier pour lequel la gravité agit dans la direction d'injection du liquide, il est en réalité possible de la généraliser en considérant un angle γ_g quelconque entre la direction d'injection et la direction de la force gravitationnelle (cf. figure 10.1b). On a dans ce cas :

$$\cos(|\gamma_{lc}^{IFEM}|)\,\|\boldsymbol{F}_{rad}\| = \sin(|\gamma_{lc}^{IFEM} - \gamma_g|)\,\left\|\boldsymbol{F}_g\right\|. \tag{10.1}$$

On comprend ainsi que cette approche n'est pas adaptée au cas où l'injection se fait horizontalement (*e.g.* banc Mascotte) car dans ce cas l'équilibre n'est possible que si $\|\boldsymbol{F}_{rad}\| = \left\|\boldsymbol{F}_g\right\|$, et donc que le jet n'est pas dévié, ou si $|\gamma_{lc}^{IFEM}| = \pi/2$, solution évidemment non physique. Il en va de même lorsque la gravité devient négligeable (*e.g.* phase de mission loin du champ gravitationnel terrestre). Dans le cas



(a) (b)

Figure 10.1 – (a) Définition de l'angle de déviation du cœur liquide par la force de radiation acoustique (Ficuciello [51]). — Ligne centrale du cœur liquide et — régression linéaire. (b) Généralisation de l'approche IFEM de Ficuciello [51] pour estimer cet angle.

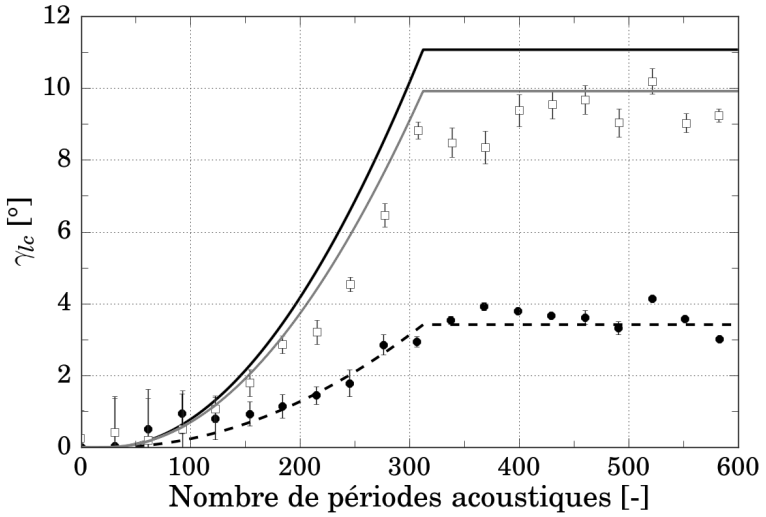


Figure 10.2 – Comparaison entre les mesures expérimentales et le modèle IFEM pour l'estimation de la déviation du cœur liquide en un PAN-IAN (We_g = 9 et Re_l = 2000, cf. Ficuciello [51]). $p_{ac,\,cc}$ = 6 000 Pa : ● mesures expérimentales, ▬ ▬ IFEM. $p_{ac,\,cc}$ = 11 500 Pa : □ mesures expérimentales, ▬ IFEM mono-harmonique, ▬ IFEM multi-harmonique.

particulier où γ_g est nul, on obtient le modèle initialement proposé par Ficuciello [51] :

$$|\gamma_{lc}^{IFEM}| = \arctan\left(\frac{\|\boldsymbol{F}_{rad}\|}{\|\boldsymbol{F}_g\|}\right). \tag{10.2}$$

Pour valider cette approche, Ficuciello [51] compare l'angle de déviation estimé par le modèle à des mesures expérimentales effectuées par ombroscopie dans le cas d'un jet liquide en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique (We_g = 9 et Re_l = 2 000) sous une excitation acoustique de fréquence principale de 1 kHz et d'amplitude crête-à-crête de fluctuation de pression $p_{ac,\,cc}$ de 6 000 Pa puis 11 500 Pa. Les résultats de cette comparaison sont présentés en figure 10.2. Concernant l'amplitude d'excitation acoustique de 6 000 Pa, celle-ci est suffisamment faible pour pouvoir considérer uniquement le mode acoustique principal dans le calcul de la force de radiation acoustique. Dans ce cas, on remarque un très bon accord entre le modèle et les mesures expérimentales, que ce soit lors des 300 premières périodes acoustiques correspondant à la phase transitoire de modulation acoustique et donc de déviation, ou durant les 300 dernières périodes associées au maximum d'amplitude d'excitation acoustique. Lorsque la déviation atteint une valeur établie, on enregistre un écart relatif de seulement 4% entre le modèle et la moyenne calculée sur les 10 derniers points expérimentaux. En ce qui concerne l'excitation acoustique d'amplitude 11 500 Pa, celle-ci correspond à l'excitation imposée lors du PF-Onera. Dans ses travaux, Ficuciello [51] ne tient compte que du mode principal pour le calcul de la force de radiation acoustique. Il a pourtant été démontré au chapitre 6 que l'énergie acoustique contenue dans les modes 4T et 6T n'est dans ce cas pas négligeable devant celle contenue dans le mode principal 2T et doit être prise en compte dans le calcul de la force de radiation acoustique. L'angle de déviation théorique obtenu en appliquant la formulation multi-harmonique (D.46) de cette force est ainsi comparé en figure 10.2 à son équivalent mono-harmonique pour lequel seul le mode principal est considéré. On observe un bon accord entre la formulation mono-harmonique et les mesures expérimentales une fois l'amplitude d'excitation acoustique maximale atteinte. On enregistre en effet un écart relatif de seulement 8% avec la moyenne calculée sur les 10 derniers points expérimentaux. L'écart s'accentue en revanche lors de la phase transitoire. Le même comportement est observé dans le cas de la formulation multi-harmonique,

avec cependant un écart plus important d'environ 20% en phase établie. Il ressort alors de cette comparaison 1) que le calcul mono-harmonique donne des résultats plus proches des mesures expérimentales malgré une formulation multi-harmonique plus fidèle aux modulations acoustiques réellement expérimentées par le jet liquide et 2) que la précision de l'approche IFEM semble décroître avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation acoustique.

De manière à proposer une explication quant aux écarts observés avec les mesures expérimentales, les principales limitations de l'approche sont énumérées ci-dessous. Dans cette approche :

1. il est fait l'hypothèse que l'équilibre entre la force de radiation acoustique et le poids du cœur liquide est atteint instantanément. Cette hypothèse reste valide du moment que l'excitation acoustique est imposée progressivement, comme c'est le cas pour les campagnes expérimentales de Ficuciello [51]. Cependant, plus l'amplitude finale d'excitation est atteinte rapidement et plus l'hypothèse d'équilibre instantané est mis en défaut. Cela explique probablement l'écart plus important entre les estimations du modèle et les mesures expérimentales dans la phase transitoire pour l'amplitude d'excitation acoustique la plus élevée. Lorsque l'excitation acoustique est imposée sans période transitoire, comme c'est le cas dans les simulations numériques de la partie III, l'hypothèse d'équilibre infiniment rapide n'est plus valide et ne permet donc pas de décrire la phase transitoire de la déviation du cœur liquide.
2. le cœur liquide est considéré comme un cylindre solide en rotation, ce qui ne permet pas de prendre en compte la vitesse d'injection du liquide. Or, la prise en compte de cette vitesse d'injection conduirait théoriquement à une réduction de la déviation du liquide, que ce soit avec l'approche mono- ou multi-harmonique. Dans le cas présent, cela permettrait donc aux résultats multi-harmoniques d'être plus proches de la courbe expérimentale.

D'après ces conclusions, il semble que l'approche à l'équilibre ne soit pas adaptée à l'estimation de la déviation du cœur liquide pour le point de fonctionnement simulé en partie III puisque la vitesse d'injection du liquide est environ quatre fois supérieure à celle associée à la figure 10.2 et l'amplitude d'excitation acoustique est établie sans phase transitoire.

Une extension de l'approche à l'équilibre a d'abord été formulée lors de cette thèse dans le but de permettre la description de la phase transitoire de déviation du jet en toutes circonstances. Dans cette extension, le cœur liquide est toujours considéré comme un cylindre solide en rotation autour de son point d'injection. Le calcul de l'angle à l'équilibre est en revanche remplacé par la résolution de la dynamique de rotation du solide, comparable ici à un pendule dont la masse de la corde n'est pas négligeable. Cette approche n'est cependant pas présentée dans ce mémoire puisque qu'elle ne permet pas non plus de prendre en considération la vitesse d'injection du liquide. Pour décrire à la fois la phase transitoire de déviation du jet et l'impact sur celle-ci de la vitesse d'injection du liquide, une approche supplémentaire est définie dans la suite.

10.2 Seconde approche : calcul de trajectoire de paquets liquides

La seconde approche envisagée dans ce chapitre pour estimer la déviation du cœur liquide par la force de radiation acoustique a initialement été proposée par Carpentier *et al.* [18]. Dans cette approche, il est considéré que la déviation du cœur liquide et des plus gros ligaments peut être estimée par le calcul de la trajectoire de disques indéformables de diamètre D_l et d'épaisseur donnée e_l indépendants les uns des autres et injectés dans le domaine de calcul à une vitesse U_l correspondant à la vitesse débitante du liquide à la sortie de l'injecteur. Cette approche, que nous nommerons ici *Independent Disk Model* (IDM), est semblable à l'approche utilisée au chapitre 9 pour estimer la déviation transverse des gouttes. Les différences résident dans la forme imposée aux paquets liquides et dans les forces effectivement considérées. En effet, de façon identique à l'approche IFEM, les effets de la force de traînée et des variations temporelles de la force de radiation acoustique sur la déviation du jet sont négligés ici. Cette hypothèse n'était pas applicable dans le cas des gouttes car leur inertie beaucoup plus faible les rend sensibles à ces effets. Dans l'approche IDM, la trajectoire des paquets liquides est alors calculée en

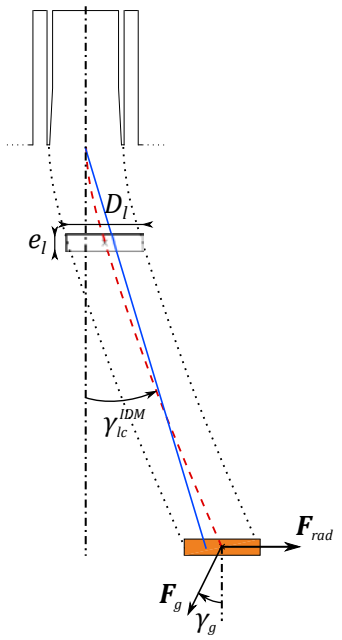


Figure 10.3 – Illustration de l'approche IDM pour l'estimation de la déviation du cœur liquide par la force de radiation acoustique. – – Ligne centrale reliant chaque disque liquide et — régression linéaire.

appliquant le principe fondamental de la dynamique en considérant uniquement la force gravitationnelle et la force de radiation acoustique moyenne. Après projection sur l'axe d'excitation acoustique $\boldsymbol{X}$ et l'axe d'injection Z orthogonaux l'un à l'autre, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} &= \dfrac{4}{\rho_l \pi {D_l}^2} \underbrace{\boldsymbol{F}_{rad} \cdot \boldsymbol{X}}_{F_{rad}} + g \sin\left(\gamma_g\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} &= g \cos\left(\gamma_g\right), \end{cases} \tag{10.3}$$

où $\boldsymbol{F}_{rad}$ et γ_g représentent toujours respectivement la force de radiation acoustique moyenne par unité de longueur de cœur liquide et l'angle entre la direction d'injection et la direction suivie par la force gravitationnelle. L'angle de déviation du cœur liquide γ_{lc}^{IDM} est alors défini comme l'angle entre l'axe d'injection et la régression linéaire de la trajectoire des disques (cf. figure 10.3).

La résolution du système 10.3 est évidemment triviale dès lors que l'on néglige la variation de $\boldsymbol{F}_{rad}$ due au déplacement progressif du liquide le long de l'axe acoustique et que l'on connaît *a priori* l'évolution temporelle de l'amplitude des fluctuations de pression aux coordonnées d'injection. C'est par exemple le cas dans les travaux de Carpentier *et al.* [18] ou de Ficuciello [51] pour lesquels l'unique source acoustique consiste en une excitation forcée (pas de flamme) dont l'amplitude évolue d'abord linéairement puis se stabilise à une valeur cible. Dans le cas d'une chambre de combustion, l'évolution temporelle de l'amplitude des fluctuations de pression et donc de la force de radiation acoustique est en revanche *a priori* inconnue, notamment en présence d'instabilités thermoacoustiques. C'est pourquoi, contrairement à l'approche proposée par Carpentier *et al.* [18] basée sur la résolution exacte du système 10.3, il est choisi ici d'évaluer la trajectoire des paquets liquides par différence finie, où seule la valeur de l'amplitude locale de fluctuation de pression à l'instant courant est requise. Cela permet par ailleurs de prendre en considération l'évolution de la force de radiation selon la position de chaque disque liquide le long de l'axe acoustique. Contrairement à l'approche à l'équilibre IFEM présentée précédemment, l'approche IDM a l'avantage 1) d'être applicable quel que soit l'angle entre la force gravitationnelle et l'axe d'injection, 2) de considérer l'influence de la vitesse d'injection du liquide (condition initiale) sur la trajectoire des disques et donc sur la déviation estimée du jet et 3) de

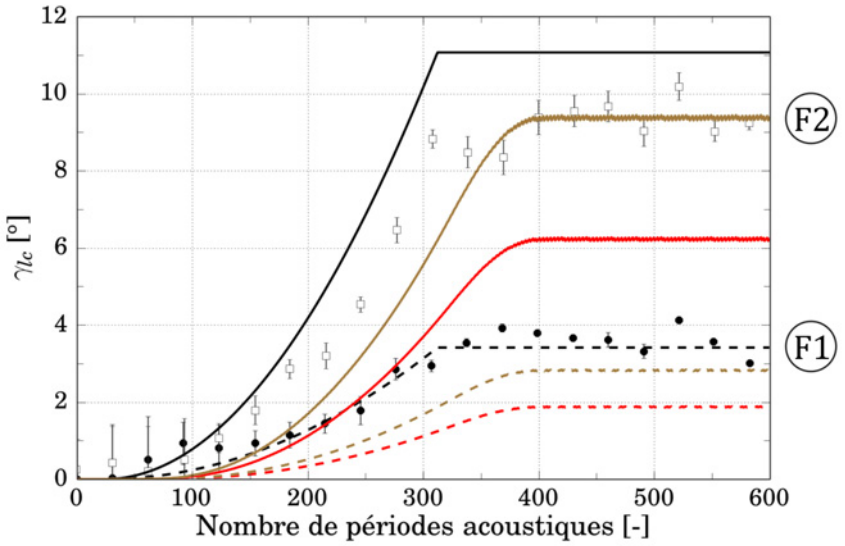


Figure 10.4 – Comparaison entre les mesures expérimentales et les différents modèles d'estimation de la déviation du cœur liquide en un PAN-IAN (We_g = 9 et Re_l = 2000, cf. Ficuciello [51]). $p_{ac,\,cc}$ = 6 000 Pa : ● mesures expérimentales, ▬ IFEM, ▬ IDM, ▬ IDM_{corr}. $p_{ac,\,cc}$ = 11 500 Pa (multi-harmonique) : □ mesures expérimentales, ▬ IFEM, ▬ IDM, ▬ IDM_{corr}.

permettre la description de la phase transitoire du mécanisme. Notons par ailleurs que cette approche est également applicable au cas particulier des jets transcritiques puisque la formulation de la force de radiation acoustique ne dépend aucunement de la tension de surface mais uniquement du gradient de masse volumique à l'interface diphasique (Ficuciello [51]).

De la même manière que pour l'approche précédente, l'estimation de l'angle de déviation issue du modèle IDM est comparée aux mesures expérimentales de Ficuciello [51] relatives à un jet liquide en régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique (We_g = 9 et Re_l = 2 000) sous une excitation acoustique de fréquence principale de 1 kHz et d'amplitude crête-à-crête de fluctuation de pression $p_{ac,\,cc}$ de 6 000 Pa et 11 500 Pa. Le point de fonctionnement associé à l'amplitude d'excitation acoustique la plus faible est noté (F1), tandis que le second associé à l'amplitude la plus élevée est noté (F2). Pour cette phase de validation, la formulation multi-harmonique (D.46) de la force de radiation acoustique moyenne est utilisée car elle permet de représenter au mieux les contraintes acoustiques subies par le jet. Dans le cas mono-harmonique associé à l'amplitude de pression acoustique de 6 000 Pa, cette formulation est évidemment équivalente à la formulation (D.54) proposée par Ficuciello [51]. Les résultats de la comparaison sont présentés en figure 10.4. Concernant le cas de plus faible amplitude d'excitation acoustique, on observe un écart relatif très important en phase établie d'environ 47% entre l'estimation IDM et la moyenne calculée sur les 10 derniers points expérimentaux. La même conclusion s'applique au cas de plus haute amplitude d'excitation avec un écart relatif plus faible mais toujours élevé d'environ 32%. Sans correction, ce modèle s'avère donc nettement moins précis que l'approche IFEM de Ficuciello [51] pour les deux points de fonctionnement considérés ici.

Cette sous-évaluation de la déviation des disques liquides a également été mise en évidence par Carpentier *et al.* [18] pour d'autres conditions de fonctionnement, notées ici (C1), (C2) et (C3). Ces conditions sont elles aussi associées à un régime d'atomisation de type Rayleigh axisymétrique et sont détaillées dans la tableau 10.1. À partir de la figure 10.5 représentant l'angle estimé γ_{lc}^{IDM} en fonction de l'angle expérimental γ_{lc}^{exp}, les auteurs démontrent qu'il existe, dans la plage de fonctionnement étudiée, un coefficient de proportionnalité que l'on notera a tel que $\gamma_{lc}^{IDM} = a\,\gamma_{lc}^{exp}$ qui dépendrait à la fois du diamètre et de la vitesse d'injection du liquide D_l et U_l mais pas des paramètres acoustiques tels que

	Carpentier *et al.* [18]			Ficuciello [51]	
	C1	C2	C3	F1	F2
D_l [mm]	2	2	6	≈ 6	≈ 6
U_l [$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$]	0.35	0.71	0.37	≈ 0.3	≈ 0.3
Fréquence acoustique [Hz]	[1 300, 1 400]	[1 200, 1 350]	1 250	$\approx$ 1 000	$\approx$ 1 000
Amplitude acoustique [Pa]	[339, 4 525]	[339, 4 525]	[339, 4 525]	6 000	11 500

Table 10.1 – Conditions de fonctionnement associées aux cas de validation de Carpentier *et al.* [18] et Ficuciello [51].

l'amplitude et la fréquence d'excitation. La formulation analytique de ce coefficient n'est pas déterminée par Carpentier *et al.* [18] mais pourrait permettre de corriger le modèle IDM et d'améliorer ainsi sa précision. Pour cela, l'approche retenue dans ce chapitre consiste à supposer que la dépendance du coefficient a en D_l et U_l est linéaire dans la plage de fonctionnement étudiée par Carpentier *et al.* [18]. Il est alors possible d'écrire :

$$a(U_l, D_l) = \frac{\partial a}{\partial U_l} U_l + \frac{\partial a}{\partial D_l} D_l + a_0. \tag{10.4}$$

À partir des données du tableau 10.1 et de la figure 10.5 associées aux trois points de fonctionnement C1, C2 et C3 de Carpentier *et al.* [18], on obtient :

$$\begin{array}{c} \text{Système à résoudre} \\ \begin{array}{c} \\ \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_l & D_l & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.35 & 2 & 1 \\ 0.71 & 2 & 1 \\ 0.37 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial U_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial D_l} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} a(U_l, D_l) \\ \begin{array}{c} \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \end{array} \begin{pmatrix} 0.583 \\ 0.433 \\ 0.883 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \text{Solution} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial U_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial D_l} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.417 \\ 0.077 \\ 0.575 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{10.5}$$

En appliquant cette solution aux points de fonctionnement F1 et F2 de Ficuciello [51] (cf. tableau 10.1), la formulation (10.4) du coefficient de proportionnalité donne $a \approx 0.9$. Cette valeur ne correspond cependant pas à la valeur de $a \approx 0.6$ que l'on retrouve en figure 10.4 entre le modèle IDM brut et les mesures expérimentales associées. Les valeurs de D_l et U_l considérées par Ficuciello [51] sont pourtant très proches de la plage de fonctionnement étudiée par Carpentier *et al.* [18]. Si l'on conserve l'hypothèse de linéarité vis-à-vis de ces variables, on en conclut qu'il existe au moins une troisième variable dont dépend le coefficient a et dont la valeur diffère entre les travaux de Carpentier *et al.* [18] et Ficuciello [51].

Il est difficile, avec le peu de données disponibles, de déterminer quelle peut être cette variable. L'approche pragmatique retenue ici consiste à considérer qu'il s'agit de la position du jet dans le champ acoustique. Dans le cas de Carpentier *et al.* [18], où l'injecteur est immobile dans le référentiel lié à la cavité d'étude, la modification de la fréquence acoustique entre les points C1, C2 et C3 induit une variation de la position relative d'injection du liquide dans le champ acoustique. Dans la plage de fonctionnement étudiée par ces auteurs, cette position reste cependant proche d'un ventre d'intensité acoustique (IAN), ce qui peut expliquer que le coefficient de proportionnalité a ne semble pas dépendre de la fréquence d'excitation sur la figure 10.5. Dans le cas des deux points de fonctionnement F1 et F2 considérés par Ficuciello [51], l'injection du liquide est quant à elle réalisée à équidistance d'un PAN et d'un IAN. Si le coefficient de correction a dépend réellement de la position du jet dans le champ

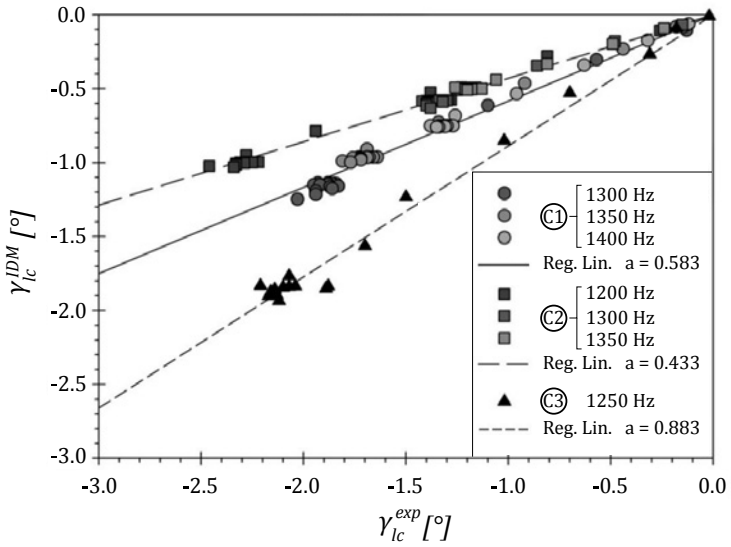


Figure 10.5 – Comparaison entre les mesures expérimentales et le modèle IDM pour l'estimation de la déviation du cœur liquide autour d'un IAN (Carpentier *et al.* [18]).

acoustique, cela pourrait donc bien expliquer pourquoi la solution (10.5) ne convient pas aux points de fonctionnement (F1) et (F2). Dans notre approche, on construit alors une grandeur χ dépendant de la position d'injection X_{inj} le long de l'axe acoustique. Pour simplifier l'approche, on considère cette variable comme linéaire par morceaux avec, de façon identique à l'intensité acoustique elle-même, une valeur maximale en chaque IAN du mode acoustique principal et nulle au niveau des PAN et des VAN. L'évolution de la variable χ selon la position d'injection le long de l'axe acoustique est illustrée en figure 10.6 et se traduit mathématiquement par :

$$\chi = \begin{cases} 2\dfrac{X_{inj} \bmod \dfrac{\lambda_1}{4}}{\dfrac{\lambda_1}{4}} & \text{si} \quad X_{inj} \bmod \dfrac{\lambda_1}{4} \leq \dfrac{\lambda_1}{8}, \\ 1 - 2\left(\dfrac{X_{inj} \bmod \dfrac{\lambda_1}{4}}{\dfrac{\lambda_1}{4}} - 0.5\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.6}$$

Sa valeur est calculée dans le tableau 10.2 pour les points de fonctionnement considérés par Carpentier *et al.* [18] et Ficuciello [51]. En considérant cette nouvelle grandeur dans la formulation (10.4) du coefficient a, on peut écrire :

$$a(U_l, D_l, \chi) = \frac{\partial a}{\partial U_l} U_l + \frac{\partial a}{\partial D_l} D_l + \frac{\partial a}{\partial \chi} \chi + a_0. \tag{10.7}$$

Pour résoudre ce nouveau système linéaire, un des deux points de fonctionnement (F1) et (F2) doit être utilisé comme quatrième point de référence. On peut cependant remarquer sur la figure 10.4 que la valeur de a n'est pas totalement équivalente entre ces deux points ($a = 0.542$ pour (F1) et $a = 0.667$ pour (F2)). Puisque seul le niveau acoustique diffère, cela reflète une dépendance supplémentaire de a en fonction de l'amplitude de fluctuation de pression. De plus, cette dépendance est non linéaire puisque aucune influence n'a été notée par Carpentier *et al.* [18] pour des amplitudes plus faibles. En toute rigueur, cette dépendance devrait être ajoutée à la formulation (10.7). Pour simplifier le système, il est cependant supposé ici que l'influence de l'amplitude d'excitation peut être négligée dans la plage de

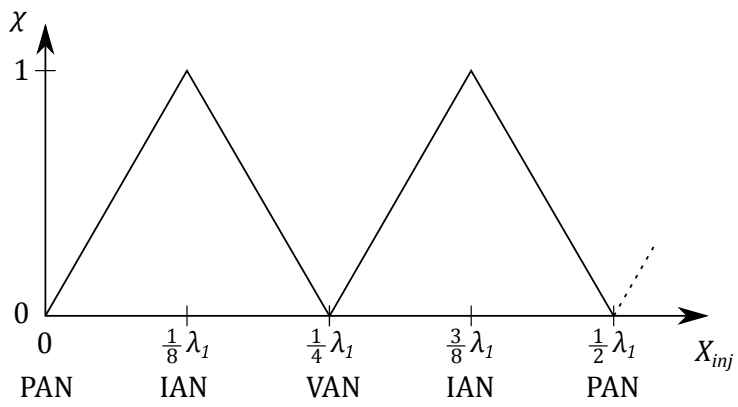


Figure 10.6 – Illustration de la fonction χ dépendant de la position d'injection X_{inj} sur l'axe acoustique.

	Carpentier *et al.* [18]			Ficuciello [51]	
	C1 - 1 350 Hz	C2 - 1 300 Hz	C3	F1	F2
Position relative d'injection	≈ IAN	≈ IAN	≈ IAN	PAN-IAN	PAN-IAN
Fonction position χ [-]	0.879*	0.994*	0.89*	0.5	0.5

Table 10.2 – Valeurs de la fonction position χ associées aux cas de validation de Carpentier *et al.* [18] et Ficuciello [51].

* L'injecteur étant immobile, c'est la variation de la fréquence d'excitation acoustique qui fait varier la position relative du jet dans le champ acoustique.

fonctionnement considérée. On fait alors le choix d'utiliser le point de fonctionnement F2 comme quatrième point de référence puisque celui-ci est associé à une amplitude d'excitation acoustique identique aux simulations présentées en partie III de ce mémoire. Malgré l'hypothèse simplificatrice réalisée sur la dépendance du coefficient a en fonction de l'amplitude des fluctuations de pression, il nous sera ainsi possible de comparer l'angle de déviation obtenu lors des simulations LES à l'estimation issue de l'approche IDM corrigée (IDM_{corr}). On obtient alors le système suivant à résoudre :

$$\begin{array}{c} \text{Système à résoudre} \\ \begin{array}{c} \\ \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \\ \text{F2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} U_l & D_l & \chi & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.35 & 2 & 0.879 & 1 \\ 0.71 & 2 & 0.994 & 1 \\ 0.37 & 6 & 0.89 & 1 \\ \approx 0.3 & \approx 6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial U_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial D_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial \chi} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \\ \text{F2} \end{array} \begin{array}{c} a(U_l, D_l, \chi) \\ \begin{pmatrix} 0.583 \\ 0.433 \\ 0.883 \\ 0.667 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} \text{Solution} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial U_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial D_l} \\ \dfrac{\partial a}{\partial \chi} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.593 \\ 0.076 \\ 0.551 \\ 0.153 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{10.8}$$

La solution conduit à une estimation corrigée de l'angle de déviation représentée en jaune en figure 10.4 pour les deux points de fonctionnement F1 et F2. Pour le point F2, puisque celui-ci a été utilisé pour la calibration du modèle, l'approche employée permet évidemment de minimiser l'écart entre l'estimation et les mesures expérimentales en phase établie. En ce qui concerne le point F1, le fait de négliger l'influence de l'amplitude d'excitation sur le coefficient correctif a conduit à un écart relatif de 20 % en phase établie. Cet écart n'est pas négligeable mais reste bien plus faible que sans correction. Notons de plus que le temps nécessaire à l'établissement de la déviation semble quant à lui correctement restitué par le modèle pour les deux points de fonctionnement.

L'approche suivie dans ce chapitre pour corriger le modèle IDM reste imparfaite. La formulation et la calibration du coefficient de correction conduisent notamment à remettre en question la validité de l'approche en dehors de la plage de fonctionnement délimitée par les points de fonctionnement de Carpentier *et al.* [18] et Ficuciello [51]. C'est par exemple le cas pour le point de fonctionnement PF2 du boîtier d'étude expérimental Vham (Méry [112]) pour lequel la vitesse d'injection du liquide est environ 8 fois supérieure à celle du point F2. Dans ce cas précis, le coefficient de correction du modèle est négatif lorsque le jet est injecté en un IAN, changeant ainsi le sens de la déviation estimée par le modèle. Bien que fortement limitée, cette approche représente cependant le meilleur compromis qui puisse être proposé à l'heure actuelle avec le peu de données expérimentales à notre disposition si l'on souhaite pouvoir à la fois décrire la dynamique d'établissement de la déviation et l'influence sur celle-ci de la vitesse d'injection du liquide. Ainsi, il est décidé dans la suite de ce chapitre, avec toute la réserve nécessaire, d'appliquer le modèle IDM_{corr} au PF-Onera. L'estimation de l'angle de déviation du cœur liquide pourra ainsi être comparée à la déviation réellement observée lors de la simulation LES et à l'angle de déviation du spray calculé à partir des mesures expérimentales du Coria (cf. chapitre 9).

10.3 Application au PF-Onera

Le diamètre d'injection du liquide ainsi que l'amplitude d'excitation acoustique associés au PF-Onera sont identiques au point F2 utilisé pour la calibration du modèle IDM_{corr}. La vitesse d'injection du liquide est en revanche environ 4 fois plus élevée et la position d'injection correspond non plus à un PAN-IAN mais à un IAN du mode acoustique principal. En appliquant le modèle IDM_{corr} à ce point de fonctionnement, on suppose alors que l'hypothèse de linéarité du coefficient de correction en fonction de la vitesse d'injection U_l reste valide.

Rappelons que dans l'approche IDM, les disques liquides ne représentent pas directement le cœur liquide mais plutôt des paquets liquides indépendants. Dans le cas d'un jet liquide en régime d'atomisation de type fibre, la trajectoire de ces disques est donc considérée représentative à la fois de la déviation du cœur mais également des plus gros ligaments formés en aval de celui-ci. Pour mesurer la déviation moyenne de ces structures liquides au cours du temps à partir des résultats des simulations LES, la méthodologie suivante est appliquée. De la même manière que pour la mesure de la vitesse moyenne d'oscillation transverse des gouttes en section 8.3.3, le domaine d'étude Ω est découpé en sous-domaines notés Ξ, chacun composé d'un ensemble de cellules intersectant un plan de coupe de position donnée le long de l'axe d'injection. Pour chacun de ces sous-domaines, la position sur l'axe acoustique du centre de masse de la phase liquide résolue par le SPS est calculée comme :

$$X_G = \frac{\sum_{V_c \in \Xi} X\, \alpha_l\, \rho_l\, |V_c|}{\sum_{V_c \in \Xi} \alpha_l\, \rho_l\, |V_c|}, \tag{10.9}$$

avec α_l et ρ_l la fraction volumique et la masse volumique du liquide dans la cellule V_c de coordonnée X sur l'axe acoustique. La jonction des centres de masse de chaque sous-domaine Ξ forme ainsi la projection de la ligne centrale de la phase liquide dans le plan contenant l'axe acoustique. L'angle de déviation du liquide γ_{lc}^{CFD} est alors mesuré au cours du temps entre la régression linéaire de cette ligne centrale et l'axe d'injection (cf. figure 10.7a). L'évolution de cet angle au cours du temps est représentée en figure 10.7b pour le point PF-Onera. On remarque sur cette figure une oscillation de l'angle γ_{lc}^{CFD} à la fréquence d'excitation acoustique $f_{ac,\,1}$, représentative d'un mouvement transverse périodique du jet liquide. Dans leurs travaux, Gonzalez-Flesca *et al.* [57] ont mis en évidence par la simulation numérique de jets ronds sous excitation acoustique que si la fréquence d'excitation était proche de la fréquence naturelle du jet, soit un nombre de Strouhal [1] proche de 0.36, la phase dense présentait une

1. Rappelons que le nombre de Strouhal est défini par $St = f\, D_l / U_l$, avec f la fréquence, D_l le diamètre d'injection du jet central et U_l sa vitesse débitante.

Déviation expérimentale des gouttes			IFEM	IDM	IDM_{corr}
[20µm, 200µm]	[200µm, 2mm]	[20µm, 2mm]			
3.7°	3.53°	3.5°	13.4°	1.44°	3.76°

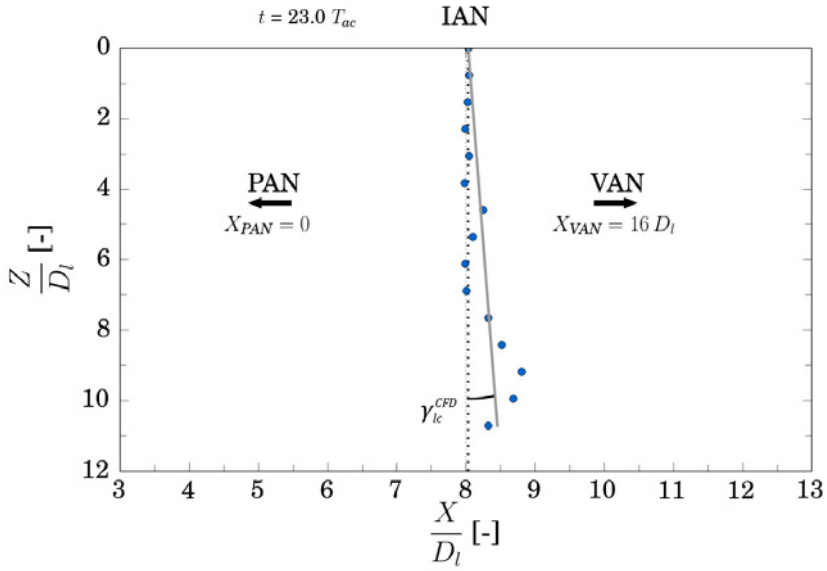
Table 10.3 – Comparaison de l'angle de déviation de la phase liquide mesuré expérimentalement aux estimations issues de différents modèles en régime établi.

forme sinusoïdale proche du battement d'un drapeau. Au contraire, pour une fréquence d'excitation supérieure, le jet est droit et présente un mouvement d'oscillation transverse global. Dans le cas du PF-Onera, le nombre de Strouhal du jet liquide calculé à partir de la fréquence d'excitation acoustique $f_{ac,\,1}$ est de l'ordre de 10. Il est donc normal de retrouver par la LES un comportement oscillant du jet liquide dans son ensemble. Cependant, les modèles IFEM et IDM sont tous les deux basés sur une formulation moyenne de la force de radiation acoustique et ne prennent pas en compte l'effet de la traînée sur le jet. Ces modèles ne peuvent donc en aucun cas restituer le mouvement oscillant du jet. Pour permettre une comparaison du comportement du coeur liquide observé par la LES aux estimations issues des modèles IFEM et IDM, on souhaite alors s'affranchir des oscillations périodiques du signal. Pour cela, on calcule la moyenne temporelle de l'angle γ_{lc}^{CFD} pour chaque période acoustique, comme représenté par les points sur la figure 10.7b. On remarque ainsi une augmentation progressive de l'angle représentative d'une déviation de la phase liquide vers le VAN le plus proche. Cette déviation a bien été observée en figure 8.14b sur le champ moyen de fraction massique de liquide résolu par le SPS, bien que la moyenne ne soit pas convergée.

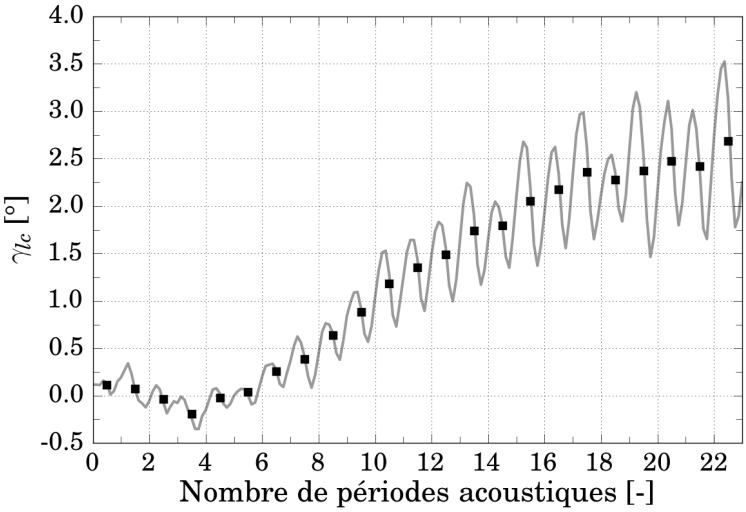
Nous comparons dans un premier temps, dans le tableau 10.3, les angles de déviation issus des modèles IFEM, IDM et IDM_{corr} en régime établi aux angles de déviation du spray calculés pour différents intervalles de diamètres de gouttes à partir des mesures expérimentales du Coria. Pour le calcul de ces angles, les deux points de mesure situés le plus en aval du point d'injection (cf. figure 9.2) sont exclus des régressions linéaires. En effet, ces points situés en dehors du domaine numérique d'étude Ω (cf. figure 6.8b) reflètent une évolution du décentrement du spray bien différente des points plus en amont et fausseraient ainsi la comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats numériques. Plusieurs conclusions peuvent être tirées du tableau 10.3 :

- on observe un écart important entre les estimations issues des approches IDM et IDM_{corr}. En effet, dans le cas présent, la résolution du système (10.8) donne un coefficient de correction $a = 0.38$. En supposant que la correction du modèle soit bien valide pour le PF-Onera, on en conclut que celle-ci est indispensable pour l'estimation de la déviation des plus grosses structures liquides.
- l'écart relatif entre l'estimation issue du modèle à l'équilibre IFEM de Ficuciello [51] et celle issue du modèle IDM_{corr} atteint plus de 250 %. Cela démontre l'importance de prendre en compte l'influence de la vitesse d'injection du liquide sur sa déviation dans des conditions de fonctionnement proches des moteurs-fusées.
- l'angle de déviation issu du modèle IDM_{corr} est extrêmement proche des mesures de déviation du spray issues des données expérimentales du Coria. Il est évidemment impossible de considérer ces mesures expérimentales comme une référence absolue puisqu'il s'agit d'une mesure de la déviation du spray et non du cœur liquide. La correspondance des résultats tend cependant à démontrer la validité du modèle IDM_{corr} pour ce point de fonctionnement et à corroborer l'hypothèse selon laquelle la déviation du spray mesurée par le Coria serait en réalité une conséquence de la déviation du cœur liquide et des plus gros ligaments. L'inertie de ces derniers est telle que l'influence de la force de traînée sur leur accélération selon les axes d'injection et d'excitation acoustique est nettement réduite comparée aux plus petites gouttes, induisant une déviation bien plus significative vers le VAN le plus proche.

Dans un second temps, nous nous intéressons à la comparaison des résultats issus des différentes approches en régime transitoire. L'angle de déviation mesuré à partir des résultats LES ainsi que les



(a)



(b)

Figure 10.7 – (a) Mesure CFD de la déviation de la phase liquide résolue par le SPS au cours du PF-Onera : ● centres de masse, — régression linéaire. (b) Évolution temporelle de l'angle de déviation : — mesure instantanée, ■ moyenne par période acoustique.

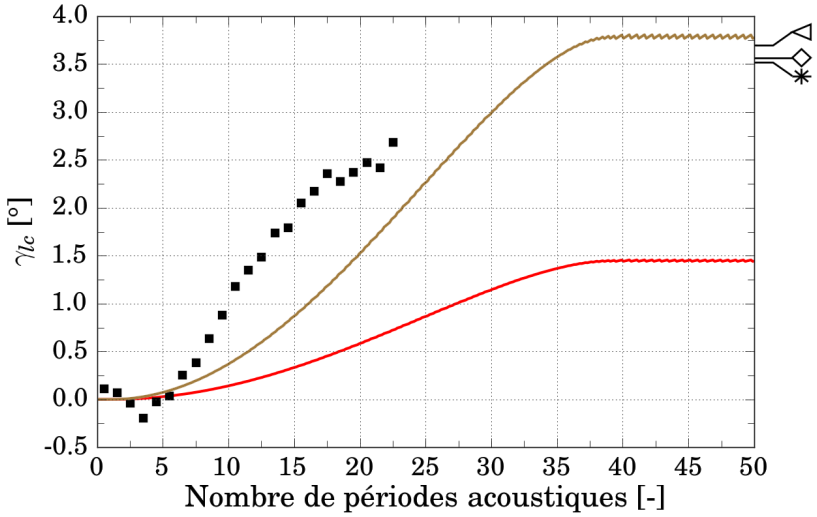


Figure 10.8 – Déviation des structures liquides lors du PF-Onera : ■ résultats CFD, — IDM, — IDM$_{corr}$. Angle expérimental de déviation du spray après établissement (Ficuciello [51]) : ◁ $D \in$ [20µm, 200µm] ; ◇ $D \in$ [200µm, 2mm] ; ✳ $D \in$ [20µm, 2mm].

estimations issues des modèles IFEM, IDM et IDM$_{corr}$ sont représentés en figure 10.8, avec en marge l'angle de déviation expérimental du spray pour différents intervalles de diamètres de gouttes. Les conclusions tirées de cette figure sont listées ci-dessous :

- tout comme en phase établie, l'écart entre les estimations issues des approches IDM et IDM$_{corr}$ est important. L'intérêt de la correction du modèle en est renforcé.
- la déviation du liquide obtenue par la simulation LES suit une évolution temporelle bien plus proche de celle estimée par le modèle IDM$_{corr}$ que celle issue du modèle IDM. L'écart qui subsiste malgré la correction du modèle s'explique d'une part par la sous-estimation du modèle IDM$_{corr}$ d'ores et déjà observée en période transitoire en figure 10.4, mais également par une définition peu précise du domaine de validité du modèle corrigé. Néanmoins, la correspondance entre les résultats LES, le modèle IDM$_{corr}$ et les mesures expérimentales semble démontrer la capacité du code Cedre à restituer la déviation du jet liquide par la force de radiation acoustique.
- on remarque pour finir un temps de transitoire élevé d'environ 40 périodes acoustiques d'après l'approche IDM$_{corr}$. Cette période transitoire correspond en réalité au temps nécessaire pour qu'une particule liquide parcoure la totalité du domaine d'étude Ω. Seul un peu plus de la moitié de cet intervalle de temps a pu être simulé par la CFD, ce qui explique pourquoi l'angle de déviation du spray finalement enregistré en section 9.2 est inférieur à l'angle mesuré par le Coria en régime établi. Étant donné le coût de calcul important associé à ces simulations LES, l'intérêt d'une approche bas-ordre pour l'estimation du comportement de l'écoulement diphasique face aux ondes acoustiques est souligné.

D'après le modèle IDM$_{corr}$, l'angle de déviation du liquide en phase établie atteint une valeur d'environ 3.8° dans les conditions de fonctionnement PF-Onera. Pour mieux se représenter cette déviation, la trajectoire des disques liquides modélisée par l'approche IDM$_{corr}$ est représentée en figure 10.9. Comme on peut le voir sur cette figure, l'action de la force de radiation acoustique induit un déplacement des plus grosses structures d'environ 1 D_l en bout de domaine d'étude. Dans les moteurs-fusées à ergols liquides, les plaques d'injection sont composées de plus de 500 injecteurs répartis sur une faible surface, ce qui conduit à des flammes très rapprochées les unes des autres. À titre d'exemple, le banc expérimental BKD présente une distance d'entraxe minimale d'environ 2 D_l entre ses 42 injecteurs (Urbano *et al.* [155]). Dans ce cas, un déplacement de l'ordre de 1 D_l des structures liquides tel que celui estimé par le modèle IDM$_{corr}$ pourrait donc conduire à des interactions non linéaires entre flammes et

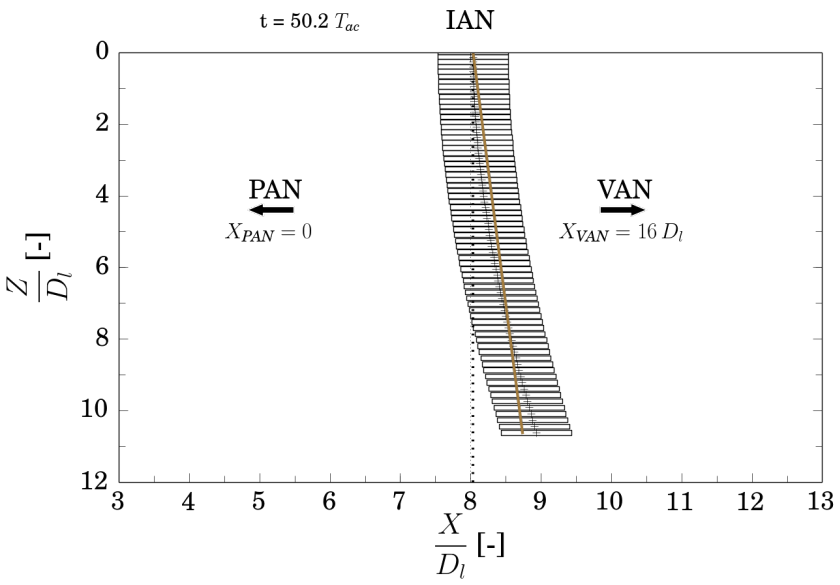


Figure 10.9 – Trajectoire des disques liquides modélisée par l'approche IDM$_{\text{corr}}$ (a = 0.38) pour le PF-Onera : ⊞ représentation des disques liquides, — régression linéaire de la ligne centrale.

influencer le couplage thermoacoustique dans la chambre de combustion. Il semble alors important que les approches de modélisation bas-ordre puissent prédire ce mécanisme de déviation de jets et son influence sur la stabilité du système. Pour cela, l'approche IDM$_{\text{corr}}$ semble la plus prometteuse, malgré ses limitations actuelles, puisqu'elle permet de décrire la dynamique complète du mécanisme et de prendre en compte l'influence non négligeable de la vitesse d'injection du liquide. Notons que la correction du modèle pour une plage de fonctionnement plus large n'est pas envisagée dans ce mémoire mais reste indispensable à l'avenir. Pour cela, il serait nécessaire de réaliser la même étude que Carpentier *et al.* [18] (cf. figure 10.5) sur une plage de fonctionnement étendue afin d'évaluer la dépendance réelle du coefficient de correction du modèle en fonction des variables D_l et U_l ainsi que de la position d'injection et de l'amplitude d'excitation acoustique. Ces travaux pourraient aussi bien faire l'objet d'une étude expérimentale que CFD puisque la capacité du code Cedre à restituer les mécanismes d'interaction entre les ondes acoustiques et la phase liquide a été démontrée tout au long de ce mémoire.

Conclusion générale

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la recherche sur les instabilités de combustion de haute fréquence au sein des moteurs-fusées à ergols liquides en conditions d'injection subcritiques. En particulier, les travaux présentés dans ce mémoire visaient à progresser dans la compréhension de l'ensemble des mécanismes d'interaction entre les perturbations acoustiques et l'écoulement diphasique influençant la réponse des flammes et la stabilité du système propulsif. Pour cela, nous avons choisi de nous appuyer sur l'exploitation de simulations numériques LES. La fiabilité des outils numériques a d'abord été vérifiée, avant de procéder à une analyse avancée des résultats de simulations pour en apprendre davantage sur les mécanismes mis en jeu. Dans une logique de complexité croissante, ces travaux de thèse ont été consacrés à l'étude de l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude et de haute fréquence sur des jets liquides atomisés inertes. L'absence de combustion a ainsi permis de faciliter l'interprétation des résultats et l'analyse du comportement de l'écoulement diphasique.

Dans la partie I de ce mémoire, nous nous sommes tout d'abord attachés à fournir une description des mécanismes physiques à l'origine de l'atomisation d'un jet liquide sous l'influence d'un écoulement co-courant gazeux. Un ensemble d'éléments bibliographiques a pour cela été présenté au chapitre 1. Ces éléments ont ensuite conduit, dans ce même chapitre, à la présentation synthétique de travaux expérimentaux réalisés par la communauté scientifique dans le but de décrire le comportement de jets liquides sous contrainte acoustique transverse de haute amplitude et haute fréquence. Dans le chapitre 2, ce sont les méthodes numériques existantes pour la simulation d'écoulements diphasiques qui ont été présentées. En particulier, la stratégie de simulation retenue par l'Onera et utilisée tout au long de cette thèse a été décrite en détail. Celle-ci fait appel à un couplage entre deux solveurs : un solveur Navier-Stokes à interface diffuse à 4 équations pour la simulation de l'écoulement gazeux et des plus grosses structures liquides, et un solveur Eulérien basé sur une approche semi-cinétique pour la description du spray constitué de plus petites inclusions liquides sphériques.

Les trois parties suivantes ont consisté à présenter l'ensemble de la démarche scientifique suivie pour répondre aux objectifs de cette thèse. Les travaux présentés dans la partie II visaient à réaliser une première évaluation des capacités des méthodes numériques retenues pour restituer des mécanismes physiques particuliers jouant un rôle essentiel dans le comportement de jets liquides sous contrainte acoustique. Cette première étape a notamment permis de démontrer la capacité du code à décrire la propagation non linéaire d'ondes acoustiques conduisant à la présence d'harmoniques multiples. L'influence non négligeable de ces harmoniques acoustiques sur les contraintes exercées sur la phase liquide a de plus été démontrée pour des amplitudes relatives de fluctuation de pression représentatives de celles mises en jeu dans les moteurs-fusées en présence d'instabilités thermoacoustiques. Cette constatation nous a alors conduit à formuler de façon analytique la force de radiation acoustique exercée sur le cœur liquide et les gouttes du spray dans un contexte multi-harmonique et à développer un modèle spécifique au sein du solveur dédié au spray pour restituer l'effet de cette force sur les gouttes lors de simulations LES.

La partie III de ce mémoire a ensuite consisté à évaluer plus précisément la capacité des méthodes numériques utilisées à restituer l'ensemble des mécanismes de réponse d'un jet liquide atomisé par

un écoulement co-courant gazeux une fois soumis à une excitation acoustique transverse de haute amplitude et de haute fréquence. Pour répondre à cet objectif, une configuration expérimentale de la littérature a été sélectionnée au chapitre 6 et a été reproduite par la simulation numérique. Un point de fonctionnement a spécifiquement été défini pour ces travaux, conjointement avec le Coria, de manière à étudier un écoulement associé à un régime d'atomisation du liquide représentatif des moteurs-fusées, tout en limitant le temps de restitution des simulations numériques et en respectant les contraintes imposées par le dispositif expérimental. La comparaison des résultats numériques aux données expérimentales relatives à ce point de fonctionnement ainsi qu'à des points de fonctionnement similaires a permis de démontrer, au chapitre 8, la capacité du code à restituer l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur des jets liquides atomisés. Les simulations LES ont également permis d'apporter de nouveaux éléments de compréhension concernant les mécanismes mis en jeu. Les principales conclusions issues de ces simulations sont listées ci-dessous, chaque point correspondant à un mécanisme d'interaction particulier :

1. Nous avons démontré la capacité de la méthode à interface diffuse à restituer l'aplatissement du cœur liquide par la pression de radiation acoustique. L'accès simplifié à ce cœur liquide par rapport aux méthodes expérimentales de mesure a permis de démontrer que la déformation du jet conduisait à sa rupture prématurée et à la formation de multiples ligaments à son extrémité aval. La réduction de la longueur du cœur liquide qui en résulte avait été observée par la communauté dans des conditions de fonctionnement transcritiques. Les analyses effectuées dans ce mémoire ont cependant démontré que les mécanismes en jeu sont différents en présence d'une phase liquide.
2. Les simulations LES ont également permis de démontrer la capacité de la méthode de couplage entre les deux solveurs à restituer l'influence des contraintes acoustiques sur les processus d'atomisation primaire du jet liquide et de fragmentation des ligaments. En effet, la méthode à interface diffuse restitue bien la fragmentation des ligaments observée expérimentalement sous l'action de la pression de radiation acoustique. Lorsque les structures liquides ainsi formées atteignent une taille trop faible pour pouvoir être discrétisée par le maillage, on observe une diffusion de la fraction massique de liquide. En présence d'un cisaillement suffisant avec l'écoulement co-courant gazeux, le transfert de la masse de liquide vers le solveur dédié au spray opère alors en périphérie des structures liquides diffuses, et permet ainsi de modéliser l'augmentation du nombre de gouttes créées observée expérimentalement sur des points de fonctionnement similaires. Il s'agit là d'un mécanisme qu'il est essentiel de pouvoir reproduire dans le contexte des instabilités thermoacoustiques puisque l'augmentation de la masse de liquide atomisée influence directement la réponse des flammes dans un cas réactif.
3. Sous l'effet des contraintes acoustiques, un élargissement important de la zone de présence du liquide a également été observé dans le plan orthogonal à l'axe acoustique, que ce soit pour la phase liquide transportée par le solveur Navier-Stokes ou pour les gouttes du spray. Il s'agit là d'un mécanisme d'ores et déjà observé expérimentalement sur des points de fonctionnement similaires. Le reproduire constitue donc un élément de validation supplémentaire des méthodes et modèles numériques utilisés. Par ailleurs, une analyse physique du processus d'atomisation du cœur liquide nous a permis de relier ces observations à l'influence de l'aplatissement du cœur liquide sur l'angle d'éjection des fragments liquides créés par le cisaillement entre l'écoulement co-courant gazeux et le jet liquide. Dans un cas réactif, l'élargissement de la zone de présence de la phase liquide peut influencer la forme des flammes et donc modifier leur réponse aux fluctuations acoustiques. Reproduire ce comportement est donc essentiel.
4. Dans un quatrième temps, un couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique a été mis en évidence par la simulation numérique. Les fluctuations de pression en entrée d'injecteur conduisent à la propagation des ondes dans le conduit d'injection et provoquent ainsi une modulation du débit d'injection du co-courant gazeux similaire à ce qui a pu être mesuré expérimentalement. Le cisaillement intermittent entre les structures liquides et le gaz conduit alors à la production périodique de gouttes à la fréquence d'excitation acoustique. Par ailleurs, l'injection

en un ventre d'intensité acoustique mène à une production de gouttes dissymétrique de part et d'autre de l'axe d'injection. Ce processus de couplage est spécifique à l'impédance du système d'injection et pourrait donc s'avérer différent pour d'autres configurations.

5. Enfin, une analyse de la dynamique du spray a permis de démontrer la capacité de l'approche cinétique Eulérienne à restituer la dynamique de réponse des gouttes aux oscillations transverses du gaz. En particulier, la méthode sectionnelle de discrétisation de l'espace des tailles de gouttes présente l'avantage de permettre une restitution des différentes amplitudes et phases d'oscillations des gouttes selon leur taille, à condition de considérer un nombre suffisant de sections.

La partie IV fut quant à elle entièrement consacrée à l'analyse du mécanisme particulier de la déviation de la phase liquide par la force de radiation acoustique. Une analyse spécifique de la dynamique des gouttes réalisée au chapitre 9 a démontré, dans un premier temps, que l'axe central du spray subissait un décentrement progressif vers le ventre de vitesse acoustique le plus proche. Ce phénomène a également été observé expérimentalement sur de multiples points de fonctionnement. Par ailleurs, l'effet de ce décentrement sur la réponse des flammes dans un cas réactif a également été démontré par le passé sur le banc Mascotte de l'Onera. Une modélisation simplifiée du phénomène a cependant démontré que la contribution de la force de traînée sur la dynamique des gouttes était, dans ce cas précis, opposée à l'action de la force de radiation acoustique, empêchant ainsi théoriquement les contraintes acoustiques de dévier le spray. Pour fournir une explication quant à ces observations contradictoires, le chapitre 10 a été consacré à une analyse similaire réalisée cette fois-ci sur la phase liquide transportée par le solveur Navier-Stokes. L'accès simplifié à la phase liquide lors de l'exploitation des résultats LES a ainsi permis de démontrer que les structures liquides déviées par la force de radiation acoustique étaient en réalité le cœur et les plus gros ligaments, pour lesquels la force de traînée joue un rôle négligeable. C'est ainsi la déviation de ces plus grosses structures liquides qui conduit dans ce cas précis au décentrement de l'axe du spray vers le ventre de vitesse acoustique le plus proche.

Dans la suite de ce chapitre, nous avons également cherché à modéliser la déviation du cœur liquide de façon simplifiée pour pouvoir, à l'avenir, en restituer l'influence sur la réponse des flammes dans le contexte de la modélisation bas-ordre des instabilités de combustion de haute fréquence. Un modèle spécifique a été formulé sur la base de travaux de la littérature dans le but 1) de restituer l'effet de la vitesse d'injection du liquide sur la déviation du cœur et 2) de pouvoir modéliser l'aspect transitoire de cette déviation. Une comparaison de ce modèle aux données expérimentales a cependant révélé une précision insuffisante en l'état. La quantité limitée de données expérimentales de référence nous a alors conduit à proposer une calibration du modèle basée sur des choix pragmatiques. Le modèle ainsi corrigé de façon empirique a été appliqué à l'estimation de la déviation du cœur liquide pour le point de fonctionnement spécifiquement défini dans ce mémoire. Cette modélisation nous a en particulier permis d'analyser le comportement transitoire du mécanisme tout en prenant en compte l'influence de la vitesse d'injection du liquide. Tout comme la simulation LES, le modèle corrobore finalement le fait que la déviation du spray provienne à l'origine de la déviation des plus grosses structures liquides par la force de radiation acoustique.

Les mécanismes de réponse du jet liquide étudiés dans ces travaux par la simulation numérique correspondent à des mécanismes d'ores et déjà observés expérimentalement par la communauté. Leur restitution par la simulation LES constitue donc un élément de validation qualitatif des méthodes numériques utilisées. L'exploitation avancée des simulations a également permis d'analyser certains phénomènes difficiles à observer expérimentalement. Les conclusions apportées permettent ainsi de progresser dans la compréhension et la maîtrise des mécanismes d'interaction entre les perturbations acoustiques et l'écoulement diphasique influençant la réponse des flammes et la stabilité des systèmes propulsifs. Malgré l'aspect inerte des écoulements étudiés ici, la similarité du point de fonctionnement reproduit avec les conditions d'injection rencontrées dans les moteurs-fusées permet d'étendre les analyses et interprétations réalisées à des cas réactifs.

Perspectives

Les résultats obtenus au cours de cette étude permettent d'envisager un certain nombre de perspectives, notamment dans le cadre de la simulation LES des instabilités de combustion en conditions d'injection subcritiques.

1. L'une des raisons pour lesquelles un point de fonctionnement expérimental a spécifiquement été défini pour ces travaux de thèse consistait à permettre une comparaison précise des résultats de simulation aux données expérimentales du Coria. Une première perspective à ces travaux consiste à acquérir un plus grand nombre d'informations expérimentales quant au comportement du jet liquide afin de compléter la comparaison quantitative. On pourra notamment comparer l'angle de spray dans la direction orthogonale à l'axe acoustique, effectuer des mesures granulométriques sur l'ensemble du spray et/ou en des points spécifiques de l'écoulement, ou encore définir une méthode de mesure expérimentale de la longueur du cœur liquide adaptée au régime d'atomisation de type fibre. Une étape de validation complémentaire du code de calcul sur la base d'essais élémentaires en conditions réactives est également à prévoir.
2. Une fois les méthodes numériques validées de façon quantitative, une perspective à ces travaux de thèse consiste à réaliser des simulations LES d'écoulements diphasiques réactifs sous excitation acoustique afin d'analyser les effets des mécanismes d'interaction entre l'acoustique et la phase liquide sur le comportement des flammes. Ces travaux permettraient ainsi de progresser davantage dans la compréhension des mécanismes de couplage thermoacoustique mis en cause lors d'instabilités de combustion de haute fréquence.
3. Les simulations numériques ont mis en évidence une atomisation accrue du jet liquide en présence d'excitation acoustique, conduisant à l'arrachement de fragments liquides de taille trop faible pour être captés par le maillage. Avec la stratégie de simulation utilisée dans ces travaux, cela induit une diffusion non négligeable de la fraction massique autour du cœur liquide. Puisqu'une seule vitesse caractérise le mélange homogène liquide-gaz dans chaque maille selon l'approche à interface diffuse à 4 équations, la diffusion de la fraction massique est associée à une perte d'information quant au différentiel de vitesse entre les phases. Il en va de même concernant la forme des structures liquides sous-résolues. Il s'agit là d'un phénomène numérique déjà observé en l'absence d'excitation acoustique dans la zone de création des ligaments en aval du cœur liquide. Son influence sur l'écoulement est cependant bien supérieure en présence d'excitation acoustique, la masse de liquide concernée étant plus élevée. La forme des structures liquides et le différentiel de vitesse avec le gaz sont deux informations utiles à la modélisation des processus d'atomisation et de fragmentation ainsi qu'à la modélisation des contraintes s'exerçant sur le liquide. Une perspective de développement de la stratégie de simulation actuelle consiste donc à formuler un modèle à 7 équations donnant accès à la vitesse locale de chacune des phases du mélange, tout en résolvant des équations de transport pour la densité d'aire interfaciale ainsi que pour des variables géométriques définissant la courbure locale des structures liquides en sous-maille.
4. L'expérimentation a montré par le passé que les gouttes pouvaient être déformées par la pression

de radiation acoustique, de la même façon que le cœur liquide. Lorsque l'amplitude des ondes acoustiques est suffisante, cette déformation peut même conduire à la fragmentation des gouttes. Il peut alors être envisagé de développer un modèle de fragmentation des gouttes par la pression de radiation acoustique. Une piste de recherche a été proposée en section 5.2.1 sur la base des travaux de Yarin *et al.* [167], et nécessiterait au préalable de formuler de façon analytique les fluctuations de pression autour d'une goutte de géométrie quelconque positionnée dans un champ acoustique plan stationnaire multi-harmonique.

5. Un modèle restituant l'effet de la force de radiation acoustique sur les gouttes du spray en présence d'ondes acoustiques constituées d'harmoniques multiples a été formulé et développé au cours de ces travaux de thèse au sein du solveur dédié à la description de la phase dispersée. Cette formulation a été effectuée sans tenir compte de la viscosité du milieu ambiant. Or, il a été démontré au chapitre 3 que l'influence de cette viscosité sur la force de radiation pouvait être non négligeable dans certains cas. Une perspective d'évolution consiste donc à généraliser la formulation multi-harmonique de la force de radiation en tenant compte de l'effet de la viscosité du milieu ambiant.
6. Les simulations numériques effectuées lors de ces travaux ont également mis en évidence un couplage entre le système d'injection et la cavité acoustique. L'influence de ce couplage sur l'écoulement dépend cependant de l'impédance du système d'injection. Dans le cas de simulations numériques, l'impédance de l'injecteur est directement pilotée par la nature des conditions aux limites imposées en entrée du domaine de calcul, et peut s'avérer difficile à maîtriser. Afin de s'affranchir de ces contraintes numériques, il peut être envisagé de simuler l'intégralité du système d'injection jusqu'aux réservoirs de stockage des fluides. Cela dit, le coût de calcul associé serait bien trop important avec la stratégie de simulation utilisée dans ce mémoire. Une perspective possible est de faire appel à un code de calcul dédié à la propagation acoustique d'ordre élevé pour simuler les fluctuations de l'écoulement au sein du système d'injection, et de coupler cette approche à la stratégie de simulation actuelle pour la simulation de l'écoulement diphasique au sein de la chambre. Un couplage similaire entre ces deux approches de simulation a déjà été effectué par Langenais *et al.* [85] dans le cadre de la simulation de jets libres supersoniques.

Une autre perspective à ces travaux de thèse s'inscrit dans le contexte de la modélisation bas-ordre des instabilités de combustion de haute fréquence. La modélisation bas-ordre est un outil utilisé dans l'industrie lors de la conception des moteurs pour prédire la stabilité des systèmes propulsifs à bas coût. Le principe de ce type de modélisation et de décrire de façon simple la relation entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et les perturbations de pression dues aux ondes acoustiques. L'une des approches possibles est de relier ces deux paramètres à l'aide de modèles pragmatiques issus de constatations physiques effectuées à partir d'expérimentations ou de simulations numériques LES. C'est notamment l'approche suivie par Gonzalez-Flesca *et al.* [58] à travers le développement de l'outil Stahf, conçu comme l'assemblage de différents modèles bas-ordres dédiés à la modélisation de phénomènes de couplage spécifiques entre l'écoulement réactif et les ondes acoustiques. Dans ce contexte, Gonzalez-Flesca *et al.* [57, 58] ont notamment développé un modèle particulier pour estimer la dynamique d'oscillation du jet central de LOX sous l'effet des fluctuations de vitesse transverse du gaz, et son influence sur la dynamique des flammes. Pour compléter cette approche, une perspective aux travaux présentés dans ce mémoire consiste à intégrer à l'outil Stahf le modèle de déviation du cœur liquide par la force de radiation acoustique formulé au chapitre 10, afin de pouvoir restituer l'influence de cette déviation sur la position et l'orientation des flammes dans le champ acoustique. L'avantage de ce modèle est qu'il tient compte de l'effet de la vitesse d'injection de la phase liquide sur l'amplitude de déviation tout en permettant de décrire la phase transitoire du mécanisme. Pour pouvoir appliquer ce modèle dans le cadre de la modélisation bas-ordre, il serait néanmoins nécessaire de procéder au préalable à sa généralisation, car il n'est actuellement valide que sur une plage de fonctionnement restreinte. La calibration du modèle a en effet mis en évidence une dépendance de la déviation à différents paramètres tels que les caractéristiques géométriques de l'injecteur, la vitesse d'injection du liquide, la position d'injection dans le champ acoustique ou encore l'amplitude des fluctuations de

pression au passage des ondes acoustiques transverses. Pour étendre le domaine de validité associé à la calibration du modèle, il semble indispensable d'avoir accès à des données expérimentales supplémentaires acquises sur des points de fonctionnement variés. Une fois généralisé, le modèle pourrait être appliqué à la fois à des régimes de fonctionnement sub- et transcritiques, car la déviation du jet dense par la force de radiation acoustique ne dépend que de la différence de masse volumique entre le fluide et le milieu ambiant, et aucunement de la tension de surface.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Caractérisation d'un spray modélisé par l'approche sectionnelle affine

Cette annexe a pour objectif d'introduire diverses notations et méthodes de calcul particulières pour la caractérisation d'un spray modélisé par l'approche sectionnelle affine. En effet, puisqu'un spray est dans la réalité constitué d'un ensemble d'inclusions discrètes, la description Eulérienne des gouttes conduit à prendre certaines précautions lors de l'interprétation des résultats de simulations. Certaines notations et formulations définies au préalable en section 2.2.2 sont à nouveau définies ici de manière à faciliter la lecture de cette annexe.

A.1 Traitement de données instantanées et locales

A.1.1 Distributions en taille de gouttes

La résolution du système d'équations de conservation (2.91) donne accès, à chaque instant et dans chaque cellule V_c du maillage, aux quantités conservées suivantes :

$$\boldsymbol{q}^k = \begin{pmatrix} \rho^k \\ \rho^k \boldsymbol{v}^k \\ n^k \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

où, rappelons-le, ρ^k et n^k sont respectivement la masse volumique et la densité numérique de gouttes dans la section k, tandis que $\boldsymbol{v}^k$ représente leur vitesse. De ce jeu de variables, il est possible de calculer la fraction volumique de gouttes α^k ainsi que le diamètre moyen D^k des inclusions dans la section k comme :

$$\alpha^k = \frac{\rho^k}{\rho_0}, \qquad D^k = \left(\frac{6\alpha^k}{\pi n^k}\right)^{1/3}, \tag{A.2}$$

avec ρ_0 la masse volumique du liquide à la température de référence T_0, qui s'avère correspondre dans ce mémoire à la température d'injection du liquide. Notons que le diamètre moyen D^k peut être assimilé à un diamètre statistique de type D_{30} représentant le diamètre d'une goutte dont le volume est égal au volume moyen des inclusions contenues dans la section k.

Excepté pour la densité numérique de gouttes n^k, les quantités conservées contenues dans le vecteur $\boldsymbol{q}^k$ ainsi que la fraction volumique α^k sont des quantités difficiles, voire pour certaines impossibles, à mesurer expérimentalement. En général, la caractérisation d'un spray passe plutôt par la mesure de distributions en taille de gouttes. Dans le cas de simulations numériques basées sur l'approche sectionnelle affine (Sibra [139]), rappelons que la variable *taille* selon laquelle la distribution numérique par

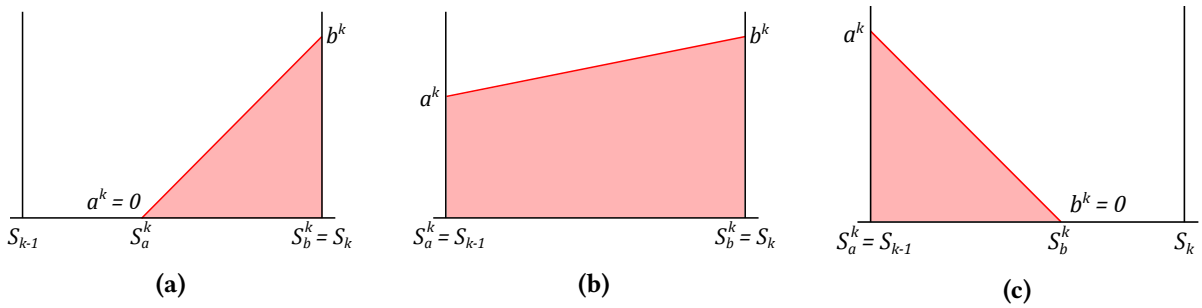


Figure A.1 – Illustration des situations possibles pour la reconstruction affine de la distribution numérique en taille de gouttes par section (Sibra [139]).

unité de volume ϕ_n est considérée affine par morceaux n'est autre que la surface des gouttes S. Avec un nombre N_s de sections considérées pour discrétiser ϕ_n, il est possible d'écrire à chaque instant et dans chaque cellule du maillage :

$$\phi_n(S) = \sum_{k=1}^{N_s} \phi_n^k(S), \tag{A.3}$$

où ϕ_n^k représente la distribution numérique en taille des gouttes contenues dans la section k. La façon dont sont définies ces distributions est illustrée en figure A.1. Sur cette figure, S_{k-1} et S_k représentent respectivement les bornes figées minimale et maximale de surface de gouttes de chaque section k, tandis que les notations (S_a^k, a^k) et (S_b^k, b^k) sont les coordonnées des deux extremums de ϕ_n^k. Selon cette représentation, les abscisses S_a^k et S_b^k ne sont pas obligatoirement égales aux bornes fixes de la section S_{k-1} et S_k. Par conséquent, trois situations peuvent être rencontrées (cf. figure A.1) :

$$\begin{array}{llllllll} \text{(a)} & a^k & = & 0 & \text{et} & S_b^k & = & S_k, \\ \text{(b)} & S_a^k & = & S_{k-1} & \text{et} & S_b^k & = & S_k, \\ \text{(c)} & b^k & = & 0 & \text{et} & S_a^k & = & S_{k-1}. \end{array} \tag{A.4}$$

De façon générale, il est ainsi possible d'exprimer les distributions numériques par section ϕ_n^k comme :

$$\phi_n^k(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \in [S_{k-1}, S_a^k[\quad \text{ou} \quad S \in]S_b^k, S_k[, \\ a^k + \left(b^k - a^k\right) \dfrac{S - S_a^k}{S_b^k - S_a^k} & \text{si} \quad S \in [S_a^k, S_b^k]. \end{cases} \tag{A.5}$$

Pour déterminer les paramètres déterminants S_a^k, S_b^k, a^k et b^k à partir des quantités n^k et ρ^k, Sibra [139] définit une procédure d'inversion particulière. Dans le cadre de cette procédure, introduisons tout

d'abord les paramètres suivants :

$$\begin{cases} \Delta S_k &= S_k - S_{k-1}, \\ S_{5/2}^k &= \dfrac{2}{5}\left(S_k^{5/2} - S_{k-1}^{5/2}\right), \\ S_{7/2}^k &= \dfrac{2}{7}\left(S_k^{7/2} - S_{k-1}^{7/2}\right), \\ A^k &= S_k S_{5/2}^k - S_{7/2}^k, \\ B^k &= S_{7/2}^k - S_{k-1} S_{5/2}^k, \\ C^k &= \dfrac{B^k - A^k}{2}. \end{cases} \tag{A.6}$$

Pour chaque section, nous sommes également amenés à considérer les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_{S_a}^k\left(X, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) &= 2X^5 + 4\sqrt{S_k}X^4 + 6S_kX^3 + \left(8S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)X^2 \\ & \quad + \left(10S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{2n^k}\right)\sqrt{S_k}X + \left(5S_k^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)S_k, \\ f_{S_b}^k\left(X, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) &= 2X^5 + 4\sqrt{S_{k-1}}X^4 + 6S_{k-1}X^3 + \left(8S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)X^2 \\ & \quad + \left(10S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{2n^k}\right)\sqrt{S_{k-1}}X + \left(5S_{k-1}^{3/2} - \dfrac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\dfrac{35\rho^k}{4n^k}\right)S_{k-1}. \end{cases} \tag{A.7}$$

La procédure d'inversion de Sibra [139] consiste alors, selon la situation rencontrée parmi les trois illustrées en figure A.1, à résoudre le système suivant :

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} f_{S_a}^k\left(\sqrt{S_a^k}, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_b^k = S_k \\ a^k = 0 \\ b^k = \dfrac{2n^k}{S_k - S_a^k} \end{cases} \qquad \text{si} \quad \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\rho^k > \frac{2n^kB^k}{\Delta S_k{}^2},$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} S_a^k = S_{k-1} \quad \text{et} \quad S_b^k = S_k \\ a^k = \dfrac{n^kB^k/\Delta S_k - 3\sqrt{\pi}\rho^k\Delta S_k/\rho_0}{C^k} \\ b^k = -\dfrac{n^kA^k/\Delta S_k - 3\sqrt{\pi}\rho^k\Delta S_k/\rho_0}{C^k} \end{cases} \qquad \text{si} \quad \frac{2n^kA^k}{\Delta S_k{}^2} \leq \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\rho^k \leq \frac{2n^kB^k}{\Delta S_k{}^2}, \tag{A.8}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} f_{S_b}^k\left(\sqrt{S_b^k}, \dfrac{\rho^k}{n^k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_a^k = S_{k-1} \\ a^k = \dfrac{2n^k}{S_b^k - S_{k-1}} \\ b^k = 0 \end{cases} \qquad \text{sinon.}$$

Grâce à cette procédure d'inversion, il est donc possible de reconstruire, à chaque instant et dans chaque volume de contrôle, la distribution numérique en taille de gouttes par unité de volume $\phi_n(S)$ en fonction de leur surface S. Cependant, on préférera la plupart du temps tracer cette distribution en fonction du diamètre des gouttes D. De façon générale, il est possible d'écrire :

$$\phi_n^k(D)\mathrm{d}D = \phi_n^k(S)\mathrm{d}S, \quad \text{avec} \quad S = \pi D^2. \tag{A.9}$$

En appliquant cette égalité à la formulation (A.5), on obtient :

$$\phi_n^k(D) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad D \in [D_{k-1}, D_a^k[\quad \text{ou} \quad D \in]D_b^k, D_k[, \\ 2\pi D \left[a^k + \left(b^k - a^k\right) \dfrac{\pi D^2 - S_a^k}{S_b^k - S_a^k} \right] & \text{si} \quad D \in [D_a^k, D_b^k], \end{cases} \tag{A.10}$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{k-1} &= \left(\frac{S_{k-1}}{\pi}\right)^{1/2}, & D_k &= \left(\frac{S_k}{\pi}\right)^{1/2}, \\ D_a^k &= \left(\frac{S_a^k}{\pi}\right)^{1/2}, & D_b^k &= \left(\frac{S_b^k}{\pi}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Il est également intéressant de pouvoir tracer la répartition du volume de gouttes en fonction de leur taille. Pour cela, il est possible de définir la distribution volumique en taille de gouttes par unité de volume ϕ_v^k pour la section k en fonction de ϕ_n^k comme :

$$\phi_v^k(D) = \frac{\pi D^3}{6} \phi_n^k(D). \tag{A.12}$$

Dans le cadre de l'approche sectionnelle affine, on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \phi_v(D) &= \sum_{k=1}^{N_s} \phi_v^k(D), \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \frac{\pi D^3}{6} \phi_n^k(D), \\ &= \frac{\pi D^3}{6} \phi_n(D). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Par ailleurs, l'intégrale de ϕ_n sur l'espace des tailles vaut $\int \phi_n(D)\mathrm{d}D = n^{tot} = \sum_k n^k$, tandis que l'intégrale de ϕ_v vaut $\int \phi_v(D)\mathrm{d}D = \alpha^{tot} = \sum_k \alpha^k$. De plus, les distributions numérique et volumique peuvent également être tracées sous forme adimensionnée :

$$f_n(D) = \frac{\phi_n(D)}{\displaystyle\int_0^\infty \phi_n(D)\mathrm{d}D} = \frac{\phi_n(D)}{n^{tot}}, \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} f_v(D) = \frac{\phi_v(D)}{\displaystyle\int_0^\infty \phi_v(D)\mathrm{d}D} &= \frac{D^3 \phi_n(D)}{\displaystyle\int_0^\infty D^3 \phi_n(D)\mathrm{d}D}, \\ &= \frac{D^3 f_n(D)}{\displaystyle\int_0^\infty D^3 f_n(D)\mathrm{d}D}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Dans ce cas, f_n représente la fonction de densité de probabilité numérique. De façon équivalente et par abus de langage, il est également fait mention de f_v comme de la fonction de densité de probabilité

volumique. Par définition, les intégrales de ces fonctions valent chacune 1. Enfin, il est souvent fait mention des fonctions cumulatives F_n et F_v définies comme :

$$F_n(D) = \int_0^D f_n(D)\mathrm{d}D = \frac{\int_0^D \phi_n(D)\mathrm{d}D}{n^{tot}}, \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} F_v(D) = \int_0^D f_v(D)\mathrm{d}D &= \frac{\int_0^D D^3\phi_n(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^3\phi_n(D)\mathrm{d}D}, \\ &= \frac{\int_0^D D^3 f_n(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^3 f_n(D)\mathrm{d}D}. \end{aligned} \tag{A.17}$$

A.1.2 Grandeurs moyennes sur l'espace des tailles

À partir des distributions instantanées et locales définies précédemment, il est possible de calculer la valeur prise en moyenne par certaines grandeurs, notées ici $\varphi(D)$, sur l'espace des tailles. On parlera de *grandeurs sectionnelles*, d'exposant k, pour les grandeurs moyennées sur chaque section du spray, et de *grandeurs globales*, d'exposant *tot*, pour les grandeurs moyennées sur l'ensemble de l'espace des tailles.

Distinguons tout d'abord deux types de variables pouvant décrire l'état d'un spray représenté par une approche Eulérienne :

- les variables dites *intensives* qui ne dépendent pas de la quantité de gouttes présentes localement. Ces variables sont par exemple la température, la vitesse, le nombre de Weber, le nombre de gouttes filles créées par goutte mère lors du processus de fragmentation, etc.
- les variables dites *extensives* proportionnelles au nombre ou au volume de gouttes présentes localement. Il s'agira par exemple de la fraction volumique, de la masse volumique ou de la densité numérique de gouttes, mais également des débits d'atomisation ou de pseudo-coalescence, etc.

Pour une grandeur extensive, sa valeur globale φ^{tot} sur l'ensemble de l'espace des tailles n'est autre que la somme de ses valeurs pour chaque section k du spray :

$$\varphi^{tot} = \sum_{k=1}^{N_s} \varphi^k. \tag{A.18}$$

En revanche, pour une grandeur intensive, la valeur globale φ^{tot} correspond à la moyenne statistique de cette grandeur sur l'ensemble de l'espace des tailles. Pour effectuer cette moyenne, deux pondérations différentes peuvent être utilisées :

- une pondération par la distribution numérique en taille de gouttes par unité de volume $\phi_n(D)$. Cette pondération, que l'on distinguera par l'indice $|n$, permet de calculer la valeur de la grandeur prise en moyenne par l'ensemble des gouttes du spray, localement et à un instant donné.

– une pondération par la distribution volumique en taille de gouttes par unité de volume $\phi_v(D)$. Cette pondération, que l'on distinguera par l'indice $|\alpha$, permet de calculer la valeur de la grandeur prise en moyenne par le volume de liquide contenu dans le spray, localement et à un instant donné.

Selon ces deux pondérations, les moyennes statistiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\varphi^{tot}_{|n} &= \frac{\int_0^\infty \varphi(D)\phi_n(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty \phi_n(D)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_n^k(D)\mathrm{d}D}{\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_n^k(D)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|n}n^k}{\sum_{k=1}^{N_s}n^k}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|n}n^k}{n^{tot}}, \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi^{tot}_{|\alpha} &= \frac{\int_0^\infty \varphi(D)\phi_v(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty \phi_v(D)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_v^k(D)\mathrm{d}D}{\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_v^k(D)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|\alpha}\alpha^k}{\sum_{k=1}^{N_s}\alpha^k}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|\alpha}\alpha^k}{\alpha^{tot}}, \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

où l'on a défini de la même manière les grandeurs intensives sectionnelles $\varphi^k_{|n}$ et $\varphi^k_{|\alpha}$ par :

$$\varphi^k_{|n} = \frac{\int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_n^k(D)\mathrm{d}D}{\int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_n^k(D)\mathrm{d}D}, \qquad \text{(A.21)}$$

et

$$\varphi^k_{|\alpha} = \frac{\int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_v^k(D)\mathrm{d}D}{\int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_v^k(D)\mathrm{d}D}, \qquad \text{(A.22)}$$

avec, rappelons-le :

$$\int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_n^k(D)\mathrm{d}D = n^k \qquad \text{et} \qquad \int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_v^k(D)\mathrm{d}D = \alpha^k. \qquad \text{(A.23)}$$

Il est important de souligner que la méthode de pondération ($|n$ ou $|\alpha$) utilisée pour évaluer une grandeur globale intensive $\varphi^{tot}_{|x}$ doit être la même que celle utilisée pour la grandeur sectionnelle associée $\varphi^k_{|x}$. Notons que, en général, les grandeurs archivées par le solveur à phase dispersée correspondent aux moyennes statistiques pondérées par la distribution numérique en taille de gouttes pour chaque section, *i.e.* $\varphi^k_{|n}$. Cependant, dans le cas de la vitesse ou de la température, dont on considère une valeur unique par section de spray ($\varphi^k(D) = cste^k$), les deux définitions $\varphi^k_{|n}$ et $\varphi^k_{|\alpha}$ sont équivalentes et correspondent aux composantes de la vitesse archivée $\boldsymbol{v}^k$ et à la température θ^k. Pour illustrer ces propos, prenons

justement l'exemple de la vitesse du spray. Localement et à un instant donné, le vecteur vitesse global d'un spray pondéré par la densité numérique ou la fraction volumique de gouttes de chaque section s'écrit (cf. équations (A.19) et (A.20)) :

$$\boldsymbol{v}^{tot}_{|n} = \begin{pmatrix} v^{tot}_{X\ |n} \\ v^{tot}_{Y\ |n} \\ v^{tot}_{Z\ |n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{X\,|n} n^k}{n^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{Y\,|n} n^k}{n^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{Z\,|n} n^k}{n^{tot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_X n^k}{n^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_Y n^k}{n^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_Z n^k}{n^{tot}} \end{pmatrix}, \tag{A.24}$$

$$\boldsymbol{v}^{tot}_{|\alpha} = \begin{pmatrix} v^{tot}_{X\ |\alpha} \\ v^{tot}_{Y\ |\alpha} \\ v^{tot}_{Z\ |\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{X\,|\alpha} \alpha^k}{\alpha^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{Y\,|\alpha} \alpha^k}{\alpha^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_{Z\,|\alpha} \alpha^k}{\alpha^{tot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_X \alpha^k}{\alpha^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_Y \alpha^k}{\alpha^{tot}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} v^k_Z \alpha^k}{\alpha^{tot}} \end{pmatrix}, \tag{A.25}$$

avec v^k_X, v^k_Y et v^k_Z les composantes de la vitesse instantanée et locale archivée par le solveur à phase dispersée pour chaque section du spray.

A.1.3 Diamètres statistiques

À partir des distributions instantanées et locales, il est également possible de calculer un certain nombre de diamètres moyens, que l'on qualifiera plutôt ici de *diamètres statistiques* pour ne pas confondre avec les notions de moyennes temporelle et spatiale traitées dans la suite de cette annexe. Sur la base des distributions numérique et volumique en taille de gouttes par unité de volume ϕ_n et ϕ_v, on définit les diamètres statistiques D_{pq} comme :

$$D^{p-q}_{pq} = \frac{\int_0^\infty D^p \phi_n(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^q \phi_n(D)\mathrm{d}D} = \frac{\int_0^\infty D^{p-3} \phi_v(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^{q-3} \phi_v(D)\mathrm{d}D}, \tag{A.26}$$

ou bien, de manière équivalente, en fonction des densités de probabilité f_n et f_v :

$$D_{pq}^{p-q} = \frac{\int_0^\infty D^p f_n(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^q f_n(D)\mathrm{d}D} = \frac{\int_0^\infty D^{p-3} f_v(D)\mathrm{d}D}{\int_0^\infty D^{q-3} f_v(D)\mathrm{d}D}. \tag{A.27}$$

Dans le cadre de l'approche sectionnelle affine, puisque les distributions sont continues par morceaux, les diamètres D_{pq} s'expriment comme :

$$\begin{aligned} D_{pq}^{p-q} &= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} D^p \phi_n^k(D)\mathrm{d}D}{\sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} D^q \phi_n^k(D)\mathrm{d}D}, \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} I_p^k}{\sum_{k=1}^{N_s} I_q^k}, \end{aligned} \tag{A.28}$$

où nous avons défini la variable I_p^k comme :

$$I_p^k = \int_{D_{k-1}}^{D_k} D^p \phi_n^k(D)\mathrm{d}D, \tag{A.29}$$

et donc :

$$\begin{aligned} I_p^k &= \int_{D_a^k}^{D_b^k} 2\pi D^{p+1} \left[a^k + \left(b^k - a^k\right) \frac{\pi D^2 - S_a^k}{S_b^k - S_a^k} \right] \mathrm{d}D, \\ &= \int_{D_a^k}^{D_b^k} 2\pi D^{p+1} a^k \mathrm{d}D + \int_{D_a^k}^{D_b^k} 2\pi^2 D^{p+3} \frac{b^k - a^k}{S_b^k - S_a^k}\mathrm{d}D - \int_{D_a^k}^{D_b^k} 2\pi D^{p+1} \frac{b^k - a^k}{S_b^k - S_a^k} S_a^k \mathrm{d}D. \end{aligned} \tag{A.30}$$

En posant $X^k = (b^k - a^k)/(S_b^k - S_a^k)$, on peut alors écrire :

$$I_p^k = \frac{2\pi}{p+2}\left(a^k - X^k S_a^k\right)\left(D_b^{k\,p+2} - D_a^{k\,p+2}\right) + \frac{2\pi^2}{p+4} X^k \left(D_b^{k\,p+4} - D_a^{k\,p+4}\right). \tag{A.31}$$

De manière équivalente, I_q^k est formulé par :

$$I_q^k = \frac{2\pi}{q+2}\left(a^k - X^k S_a^k\right)\left(D_b^{k\,q+2} - D_a^{k\,q+2}\right) + \frac{2\pi^2}{q+4} X^k \left(D_b^{k\,q+4} - D_a^{k\,q+4}\right). \tag{A.32}$$

Une seconde catégorie de diamètres statistiques notés D_{nx} et D_{vx} peut être considérée. Ces diamètres sont calculés à partir des fonctions cumulatives F_n et F_v comme :

$$F_n(D_{nx}) = x \quad \text{et} \quad F_v(D_{vx}) = x. \tag{A.33}$$

Cela signifie qu'une fraction x du nombre total de gouttes (ou respectivement du volume total de liquide contenu dans ces gouttes) est composé de gouttes ayant un diamètre inférieur à D_{nx} (ou D_{vx} respectivement). À partir de ces diamètres, il est par ailleurs possible de définir les largeurs relatives (*span factors* en anglais) Δ_n et Δ_v des distributions numérique et volumique comme :

$$\Delta_n = \frac{D_{n0.9} - D_{n0.1}}{D_{n0.5}} \quad \text{et} \quad \Delta_v = \frac{D_{v0.9} - D_{v0.1}}{D_{v0.5}}. \tag{A.34}$$

A.2 Traitement de données moyennes en temps et/ou en espace

Dans la suite de cette annexe, nous souhaitons formuler les moyennes temporelle et spatiale de différentes grandeurs associées à un spray. Pour cela, nous dissocierons le traitement des grandeurs extensives du traitement des grandeurs intensives et des diamètres statistiques.

A.2.1 Moyennes de grandeurs extensives

Pour le traitement de grandeurs extensives moyennes, de nouvelles notations sont définies :

φ : grandeur définie dans la cellule V_c de volume $|V_c|$ à l'itération i de pas de temps Δt_i,

$\overline{\varphi}$: moyenne temporelle arithmétique de φ dans la cellule V_c,

$\langle\varphi\rangle_\Omega$: moyenne spatiale arithmétique de φ sur le domaine Ω à l'itération i,

$\langle\overline{\varphi}\rangle_\Omega$: moyenne spatiale arithmétique de $\overline{\varphi}$ sur le domaine Ω,

$\overline{\langle\varphi\rangle_\Omega}$: moyenne temporelle arithmétique de $\langle\varphi\rangle_\Omega$.

Concrètement, les moyennes temporelle et spatiale arithmétiques sont définies par :

$$\overline{\varphi} = \frac{\sum_i \varphi\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \tag{A.35}$$

et

$$\langle\varphi\rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c\in\Omega} \varphi\,|V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} |V_c|}. \tag{A.36}$$

Il est important de souligner que ces moyennes arithmétiques ne peuvent être appliquées qu'à des grandeurs extensives, avec φ pouvant cependant être une grandeur sectionnelle (φ^k) ou globale (φ^{tot}). Pour les grandeurs intensives, une pondération particulière devra être utilisée (cf. section A.2.2).

Distributions en taille de gouttes

Comme leurs noms l'indiquent, les distributions numérique et volumique en taille de gouttes par unité de volume, notées respectivement $\phi_n(D)$ et $\phi_v(D)$, décrivent la répartition du nombre et du volume de gouttes sur l'espace des tailles dans chacun des volumes de contrôle. Puisque le nombre et le volume de gouttes sont deux grandeurs extensives, les moyennes temporelle et spatiale arithmétiques peuvent être appliquées :

$$\overline{\phi_n(D)} = \frac{\sum_i \phi_n(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \tag{A.37}$$

$$\overline{\phi_v(D)} = \frac{\sum_i \phi_v(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \tag{A.38}$$

$$\langle \phi_n(D) \rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_n(D)\,|V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_n(D)\,|V_c|}{|\Omega|}, \quad \text{(A.39)}$$

$$\langle \phi_v(D) \rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_v(D)\,|V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_v(D)\,|V_c|}{|\Omega|}, \quad \text{(A.40)}$$

avec $|\Omega|$ le volume du domaine Ω. Cela revient donc à calculer, pour chaque diamètre D, le nombre ou respectivement le volume moyen de gouttes de ce diamètre rencontrées au cours du temps ou dans un volume donné. Dans le cas d'une approche sectionnelle, puisque les bornes de chaque section D_{k-1} et D_k sont figées, l'expression (A.3) appliquée aux moyennes arithmétiques définies précédemment conduit également à :

$$\overline{\phi_n(D)} = \sum_{k=1}^{N_s} \overline{\phi_n^k(D)}, \quad \text{(A.41)}$$

$$\overline{\phi_v(D)} = \sum_{k=1}^{N_s} \overline{\phi_v^k(D)}, \quad \text{(A.42)}$$

$$\langle \phi_n(D) \rangle_\Omega = \sum_{k=1}^{N_s} \langle \phi_n^k(D) \rangle_\Omega, \quad \text{(A.43)}$$

$$\langle \phi_v(D) \rangle_\Omega = \sum_{k=1}^{N_s} \langle \phi_v^k(D) \rangle_\Omega. \quad \text{(A.44)}$$

avec pour chaque section :

$$\overline{\phi_n^k(D)} = \frac{\sum_i \phi_n^k(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \quad \text{(A.45)}$$

$$\overline{\phi_v^k(D)} = \frac{\sum_i \phi_v^k(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \quad \text{(A.46)}$$

$$\langle \phi_n^k(D) \rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_n^k(D)\,|V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_n^k(D)\,|V_c|}{|\Omega|}, \quad \text{(A.47)}$$

$$\langle \phi_v^k(D) \rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_v^k(D)\,|V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_v^k(D)\,|V_c|}{|\Omega|}, \quad \text{(A.48)}$$

Il peut également facilement être démontré qu'une fois conjuguées, les moyennes temporelle et spatiale peuvent être interverties :

$$\left\langle \overline{\phi_n(D)} \right\rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \left(\frac{\sum_i \phi_n(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i} \right) |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|},$$

$$\left\langle \overline{\phi_v(D)} \right\rangle_\Omega = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \left(\frac{\sum_i \phi_v(D)\,\Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i} \right) |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|},$$

$$= \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \left(\sum_i \phi_n(D)\, \Delta t_i \right) |V_c|}{\sum_i \Delta t_i \sum_{V_c \in \Omega} |V_c|}, \qquad = \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \left(\sum_i \phi_v(D)\, \Delta t_i \right) |V_c|}{\sum_i \Delta t_i \sum_{V_c \in \Omega} |V_c|},$$

$$= \frac{\sum_i \left(\frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_n(D)\, |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} \right) \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \qquad = \frac{\sum_i \left(\frac{\sum_{V_c \in \Omega} \phi_v(D)\, |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} \right) \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i},$$

$$= \overline{\langle \phi_n(D) \rangle_\Omega}, \tag{A.49} \qquad = \overline{\langle \phi_v(D) \rangle_\Omega}. \tag{A.50}$$

Pour finir, il est important de préciser que, pour chaque section, **la distribution moyenne** (en temps et/ou en espace) **peut ne pas être affine**. En effet, puisque les bornes (S_a^k, S_b^k) peuvent être différentes des bornes figées (S_{k-1}, S_k) et évoluer au cours du temps ou dans l'espace, la moyenne arithmétique des distributions d'une section k donnée sera en réalité une fonction affine par morceaux constituée d'autant de segments que de couples (S_a^k, S_b^k) différents dans l'ensemble d'échantillons considéré.

Grandeurs sectionnelles

Pour rappel, une grandeur sectionnelle est une grandeur évaluée pour chaque section k du spray (*e.g.* la densité numérique de gouttes n^k). En section A.1, les grandeurs sectionnelles extensives ont été formulées à partir des distributions numérique et volumique instantanées et locales. Nous souhaitons maintenant définir la façon d'évaluer ces grandeurs à partir, cette fois-ci, de distributions numérique et volumique moyennes en temps et/ou en espace.

Malgré le fait que, avec l'approche sectionnelle affine, une distribution moyenne (en temps et/ou en espace) ne puisse *a priori* pas être considérée elle-même affine, il est possible de démontrer que si une grandeur sectionnelle extensive peut être formulée comme l'intégrale sur l'espace des tailles d'une **fonction linéaire** f des distributions en taille de gouttes $\phi_n(D)$ et $\phi_v(D)$, c'est-à-dire :

$$\varphi^k = \int_{D_{k-1}}^{D_k} f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) \mathrm{d}D, \tag{A.51}$$

alors la moyenne arithmétique (temporelle et/ou spatiale) de cette grandeur est égale à la valeur de cette grandeur évaluée à partir des distributions moyennes. Pour le démontrer, définissons de nouvelles notations :

φ^k	:	grandeur sectionnelle extensive évaluée à partir d'une distribution instantanée et locale (rappel),
$\widetilde{\varphi^k}$	:	grandeur sectionnelle extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en temps dans la cellule V_c,
$\left[\varphi^k\right]_\Omega$	:	grandeur sectionnelle extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en espace à l'itération i,
$\left[\widetilde{\varphi^k}\right]_\Omega = \widetilde{\left[\varphi^k\right]_\Omega}$	:	grandeur sectionnelle extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en temps et en espace (égalité issue de (A.49) et (A.50)).

La définition des opérateurs $\widetilde{\cdot}$ et $[\cdot]_\Omega$ et le caractère linéaire des moyennes arithmétiques $\overline{\cdot}$ et $\langle\cdot\rangle_\Omega$ conduisent alors à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi^k} &= \int_{D_{k-1}}^{D_k} f\left(\overline{\phi_n^k(D)}, \overline{\phi_v^k(D)}\right) \mathrm{d}D, \\
&= \int_{D_{k-1}}^{D_k} \overline{f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right)} \mathrm{d}D, \\
&= \int_{D_{k-1}}^{D_k} \frac{\sum_i f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i} \mathrm{d}D, \\
&= \frac{\sum_i \int_{D_{k-1}}^{D_k} f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) \mathrm{d}D\, \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \\
&= \frac{\sum_i \varphi^k\, \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i}, \\
&= \overline{\varphi^k}, \qquad \text{(A.52)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\varphi^k\right]_\Omega &= \int_{D_{k-1}}^{D_k} f\left(\langle\phi_n^k(D)\rangle_\Omega, \langle\phi_v^k(D)\rangle_\Omega\right) \mathrm{d}D, \\
&= \int_{D_{k-1}}^{D_k} \langle f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right)\rangle_\Omega \mathrm{d}D, \\
&= \int_{D_{k-1}}^{D_k} \frac{\sum_{V_c\in\Omega} f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) |V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} |V_c|} \mathrm{d}D, \\
&= \frac{\sum_{V_c\in\Omega} \int_{D_{k-1}}^{D_k} f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) \mathrm{d}D\, |V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} |V_c|}, \\
&= \frac{\sum_{V_c\in\Omega} \varphi^k\, |V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} |V_c|}, \\
&= \langle\varphi^k\rangle_\Omega, \qquad \text{(A.53)}
\end{aligned}$$

Cette propriété s'applique notamment à l'ensemble des intégrales I_p^k définies par la formulation (A.29), avec en particulier :

$$f\left(\phi_n^k(D), \phi_v^k(D)\right) = D^p \phi_n^k(D). \qquad \text{(A.54)}$$

En effet, la fonction f est bien linéaire car le diamètre D est ici la variable d'intégration et ne dépend ni du temps ni de l'espace sur lesquels sont effectuées les moyennes. On a alors :

$$\widetilde{I_p^k} = \overline{I_p^k}, \qquad \text{(A.55)} \qquad \text{et} \qquad \left[I_p^k\right]_\Omega = \langle I_p^k\rangle_\Omega, \qquad \text{(A.56)}$$

Cela signifie donc que les grandeurs intégrales associées aux distributions moyennes ($\widetilde{I_p^k}$ et $\left[I_p^k\right]_\Omega$) peuvent être évaluées par les moyennes arithmétiques des intégrales des distributions instantanées et locales ($\overline{I_p^k}$ et $\langle I_p^k\rangle_\Omega$).

Dans le cas de la densité numérique n^k et de la fraction volumique de gouttes α^k définies par les formulations (A.23), on a ainsi :

$$\widetilde{n^k} = \overline{n^k}, \qquad \text{(A.57)} \qquad \left[n^k\right]_\Omega = \langle n^k\rangle_\Omega, \qquad \text{(A.58)}$$

et

$$\widetilde{\alpha^k} = \overline{\alpha^k}, \qquad \text{(A.59)} \qquad \left[\alpha^k\right]_\Omega = \langle \alpha^k\rangle_\Omega. \qquad \text{(A.60)}$$

Les valeurs moyennes de la densité numérique et de la fraction volumique de gouttes peuvent donc être calculées soit comme les intégrales des distributions numérique et volumique moyennes, soit di-

rectement comme les moyennes arithmétiques de la densité numérique et de la fraction volumique. Attention, cela ne signifie néanmoins pas qu'il est possible d'utiliser les moyennes de densité numérique et de fraction volumique de gouttes par section en entrée de la procédure d'inversion (A.8) pour calculer les distributions moyennes associées. En effet, cette procédure d'inversion est basée sur l'hypothèse même que les distributions sont affines pour chaque section. Or, comme expliqué précédemment, les distributions moyennes de chaque section peuvent ne pas être affines. **La procédure d'inversion** (A.8) **ne doit donc être utilisée que pour des distributions instantanées et locales.**

Enfin, de manière équivalente aux distributions (cf. équations (A.49) et (A.50)), il est également possible de démontrer assez facilement qu'une fois conjuguées, les moyennes temporelle et spatiale de grandeurs sectionnelles extensives respectant la relation linéaire (A.51) peuvent être interverties :

$$\left\langle \overline{\varphi^k} \right\rangle_\Omega = \overline{\langle \varphi^k \rangle_\Omega}. \tag{A.61}$$

Dans le cas des grandeurs intégrales I_p^k, on a alors :

$$\left\langle \overline{I_p^k} \right\rangle_\Omega = \overline{\langle I_p^k \rangle_\Omega}. \tag{A.62}$$

Associé à la démarche utilisée pour obtenir les équations (A.52) et (A.53), cela nous permet facilement de démontrer que :

$$\left[\widetilde{I_p^k}\right]_\Omega = \widetilde{\left[I_p^k\right]_\Omega} = \left\langle \overline{I_p^k} \right\rangle_\Omega = \overline{\langle I_p^k \rangle_\Omega}. \tag{A.63}$$

Ainsi, les grandeurs intégrales I_p^k associées aux distributions moyennes conjuguées peuvent être évaluées par les moyennes arithmétiques conjuguées des intégrales des distributions instantanées et locales.

Grandeurs globales

De façon identique aux grandeurs sectionnelles extensives, il est possible de définir de nouvelles notations pour les grandeurs globales :

φ^{tot}	:	grandeur globale extensive évaluée à partir d'une distribution instantanée et locale (rappel),
$\widetilde{\varphi^{tot}}$	:	grandeur globale extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en temps dans la cellule V_c,
$\left[\varphi^{tot}\right]_\Omega$	:	grandeur globale extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en espace à l'itération i,
$\left[\widetilde{\varphi^{tot}}\right]_\Omega = \widetilde{\left[\varphi^{tot}\right]_\Omega}$	:	grandeur globale extensive évaluée à partir d'une distribution moyennée en temps et en espace (égalité issue de (A.49) et (A.50)).

La définition des opérateurs $\widetilde{\cdot}$ et $[\cdot]_\Omega$ et le caractère linéaire des moyennes arithmétiques $\overline{\cdot}$ et $\langle\cdot\rangle_\Omega$ associés aux relations (A.18) et (A.51) conduisent à :

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi^{tot}} &= \sum_{k=1}^{N_s} \widetilde{\varphi^k}, \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \overline{\varphi^k}, \\ &= \overline{\varphi^{tot}}, \end{aligned} \tag{A.64}$$

$$\begin{aligned} \left[\varphi^{tot}\right]_\Omega &= \sum_{k=1}^{N_s} \left[\varphi^k\right]_\Omega, \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \langle \varphi^k \rangle_\Omega, \\ &= \langle \varphi^{tot} \rangle_\Omega. \end{aligned} \tag{A.65}$$

Cela signifie donc que, à l'instar des grandeurs sectionnelles, si une grandeur globale extensive respecte les relations (A.18) et (A.51), alors sa valeur moyenne (en temps ou en espace) peut être évaluée soit à partir des intégrales des distributions numérique et volumique moyennes, soit directement comme la moyenne arithmétique de la grandeur globale instantanée et locale.

Enfin, de manière équivalente aux distributions (cf. équations (A.49) et (A.50)), il est également possible de démontrer assez facilement qu'une fois conjuguées, les moyennes temporelle et spatiale de grandeurs globales extensives respectant les relations linéaires (A.18) et (A.51) peuvent être interverties, et que finalement :

$$\left[\widetilde{\varphi^{tot}}\right]_\Omega = \widetilde{[\varphi^{tot}]_\Omega} = \left\langle\overline{\varphi^{tot}}\right\rangle_\Omega = \overline{\langle\varphi^{tot}\rangle_\Omega}. \tag{A.66}$$

A.2.2 Moyennes de grandeurs intensives

Comme expliqué en section A.2.1, des pondérations particulières doivent être utilisées pour effectuer les moyennes temporelle et spatiale de grandeurs intensives. Dans la suite de cette annexe, nous utiliserons les notations suivantes :

$\varphi_{|x}$: grandeur définie dans la cellule V_c de volume $|V_c|$ à l'itération i de pas de temps Δt_i et pondérée par x sur l'espace des tailles (rappel),

$\overline{\varphi}_{|x}$: moyenne temporelle de $\varphi_{|x}$ pondérée par x dans la cellule V_c,

$\langle\varphi\rangle_{\Omega\,|x}$: moyenne spatiale de $\varphi_{|x}$ pondérée par x sur le domaine Ω à l'itération i,

$\langle\overline{\varphi}\rangle_{\Omega\,|x}$: moyenne spatiale de $\overline{\varphi}_{|x}$ pondérée par x sur le domaine Ω,

$\overline{\langle\varphi\rangle_{\Omega\,|x}}$: moyenne temporelle de $\langle\varphi\rangle_{\Omega\,|x}$ pondérée par x,

avec $\varphi_{|x}$ pouvant être une grandeur sectionnelle ($\varphi^k_{|n}$ ou $\varphi^k_{|\alpha}$; cf. équations (A.21) et (A.22)) ou globale ($\varphi^{tot}_{|n}$ ou $\varphi^{tot}_{|\alpha}$; cf. équations (A.19) et (A.20)). Selon le type de la variable considérée, la pondération x pourra être soit la densité numérique n ou la fraction volumique α de gouttes. Notons que pour une comparaison à des mesures expérimentales basées sur une acquisition d'images par ombroscopie, la pondération par la densité numérique est la plus adaptée.

Il est également important de souligner que la méthode de pondération ($|n$ ou $|\alpha$) utilisée pour évaluer les grandeurs intensives instantanées et locales $\varphi^k_{|x}$ ou $\varphi^{tot}_{|x}$ doit être la même que celle utilisée pour les moyennes spatiale et temporelle, sans quoi la consistance des résultats ne peut être assurée. Il en va de même pour les moyennes conjuguées, qui doivent nécessairement faire appel à la même méthode de pondération pour le moyenne temporelle et la moyenne spatiale.

Grandeurs sectionnelles

On a vu en section A.1.2 que pour une grandeur intensive quelconque $\varphi(D)$ (*e.g.* la vitesse des gouttes), la grandeur sectionnelle instantanée et locale associée $\varphi^k_{|x}$ correspondait à une moyenne statistique de $\varphi(D)$ sur l'espace des tailles pondérée par la distribution numérique ou volumique en taille de gouttes (cf. formulations (A.21) et (A.22)). De manière équivalente, évaluer la valeur moyenne (en temps ou en espace) de cette grandeur sectionnelle intensive revient en réalité à calculer la moyenne statistique de $\varphi(D)$ en considérant plusieurs échantillons de gouttes associés chacun à un instant donné (dans le cas d'une moyenne temporelle) ou à un volume de contrôle donné (dans le cas d'une moyenne spatiale). On peut alors définir les moyennes temporelle et spatiale d'une grandeur sectionnelle intensive comme :

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi^k}_{|x} &= \frac{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_i \varphi^k(D)\phi_x^k(D)\Delta t_i \right) \mathrm{d}D}{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_i \phi_x^k(D)\Delta t_i \right) \mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \varphi_{|x}^k\, x^k\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i x^k\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\overline{\varphi_{|x}^k\, x^k}}{\overline{x^k}}, \qquad \text{(A.67)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi^k \rangle_{\Omega|x} &= \frac{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_{V_c\in\Omega} \varphi^k(D)\phi_x^k(D)|V_c| \right) \mathrm{d}D}{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_{V_c\in\Omega} \phi_x^k(D)|V_c| \right) \mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} \varphi_{|x}^k\, x^k\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} x^k\,|V_c|}, \\
&= \frac{\langle \varphi_{|x}^k\, x^k \rangle_\Omega}{\langle x^k \rangle_\Omega}, \qquad \text{(A.68)}
\end{aligned}
$$

avec $x^k = n^k$ et $\phi_x^k = \phi_n^k$ dans le cas d'une pondération par le nombre de gouttes, et $x^k = \alpha^k$ et $\phi_x^k = \phi_v^k$ dans le cas d'une pondération par le volume des gouttes. Par exemple, les vitesses moyennes en temps pondérées par la densité numérique ou la fraction volumique de gouttes s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{v}^k}_{|n} &= \begin{pmatrix} \overline{v_{X|n}^k} \\ \overline{v_{Y|n}^k} \\ \overline{v_{Z|n}^k} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v_{X|n}^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \\ \dfrac{\overline{v_{Y|n}^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \\ \dfrac{\overline{v_{Z|n}^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v_X^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \\ \dfrac{\overline{v_Y^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \\ \dfrac{\overline{v_Z^k\, n^k}}{\overline{n^k}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.69)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{v}^k}_{|\alpha} &= \begin{pmatrix} \overline{v_{X|\alpha}^k} \\ \overline{v_{Y|\alpha}^k} \\ \overline{v_{Z|\alpha}^k} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v_{X|\alpha}^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \\ \dfrac{\overline{v_{Y|\alpha}^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \\ \dfrac{\overline{v_{Z|\alpha}^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v_X^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \\ \dfrac{\overline{v_Y^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \\ \dfrac{\overline{v_Z^k\, \alpha^k}}{\overline{\alpha^k}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.70)}
\end{aligned}
$$

avec, pour rappel, v_X^k, v_Y^k et v_Z^k les composantes de la vitesse instantanée et locale archivée par le solveur à phase dispersée pour chaque section du spray.

Il est également possible de réaliser des moyennes conjuguées, *i.e.* à la fois spatiales et temporelles. Cela revient à calculer la moyenne statistique de $\varphi(D)$ de la même façon que pour les formulations (A.67) et (A.68) en considérant plusieurs échantillons pondérés cette fois-ci par le pas de temps Δt_i **et** le volume de contrôle $|V_c|$. On peut alors définir la moyenne conjuguée d'une grandeur sectionnelle intensive comme :

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}} = \left\langle \overline{\varphi^k} \right\rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} \varphi^k(D) \phi_x^k(D)\, |V_c|\, \Delta t_i \right) \mathrm{d}D}{\displaystyle\int_{D_{k-1}}^{D_k} \left(\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} \phi_x^k(D)\, |V_c|\, \Delta t_i \right) \mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D) \phi_x^k(D)\, \mathrm{d}D\, |V_c|\, \Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_x^k(D)\, \mathrm{d}D\, |V_c|\, \Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} \varphi_{|x}^k\, x^k\, |V_c|\, \Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} x^k\, |V_c|\, \Delta t_i},
\end{aligned} \tag{A.71}$$

où l'on peut noter que l'ordre entre la moyenne spatiale et la moyenne temporelle peut être inversé. Définissons maintenant les coefficients de pondération $\beta^k = \sum_i x^k\, \Delta t_i$ et $\eta^k = \sum_{V_c \in \Omega} x^k\, |V_c|$. Les moyennes conjuguées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}} &= \frac{\displaystyle\sum_i \left(\frac{\displaystyle\sum_{V_c \in \Omega} \varphi_{|x}^k\, x^k\, |V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c \in \Omega} x^k\, |V_c|} \sum_{V_c \in \Omega} x^k\, |V_c| \right) \Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \eta^k\, \Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}\, \eta^k\, \Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \eta^k\, \Delta t_i}, \\
&= \frac{\overline{\langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}\, \langle x^k \rangle_\Omega}}{\overline{\langle x^k \rangle_\Omega}},
\end{aligned} \tag{A.72}$$

et

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{\varphi^k} \right\rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\left(\frac{\displaystyle\sum_i \varphi^k_{|x}\, x^k\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i x^k\,\Delta t_i}\sum_i x^k\,\Delta t_i\right)|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\beta^k\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\overline{\varphi^k}_{|x}\,\beta^k\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\beta^k\,|V_c|}, \\
&= \frac{\left\langle \overline{\varphi^k}_{|x}\,\overline{x^k}\right\rangle_\Omega}{\left\langle \overline{x^k}\right\rangle_\Omega}. \qquad \text{(A.73)}
\end{aligned}
$$

Grandeurs globales

Lorsque l'on souhaite évaluer la moyenne temporelle ou spatiale d'une grandeur globale intensive $\varphi^{tot}_{|x}$, il suffit de considérer les moyennes statistiques (A.67) et (A.68) sur l'intégralité de l'espace des tailles. On a alors :

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi^{tot}}_{|x} &= \frac{\displaystyle\int_0^\infty\left(\sum_i \varphi(D)\phi_x(D)\Delta t_i\right)\mathrm{d}D}{\displaystyle\int_0^\infty\left(\sum_i \phi_x(D)\Delta t_i\right)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k}\varphi^k(D)\phi^k_x(D)\,\mathrm{d}D\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k}\phi^k_x(D)\,\mathrm{d}D\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i\left(\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|x}\,x^k\right)\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i\sum_{k=1}^{N_s}x^k\,\Delta t_i} \quad \text{(étape 1)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \varphi^{tot}_{|x}\,x^{tot}\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i x^{tot}\,\Delta t_i} \quad \text{d'après (A.19) et (A.20)}, \\
&= \frac{\overline{\varphi^{tot}_{|x}\,x^{tot}}}{\overline{x^{tot}}}, \qquad \text{(A.74)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\displaystyle\int_0^\infty\left(\sum_{V_c\in\Omega}\varphi(D)\phi_x(D)|V_c|\right)\mathrm{d}D}{\displaystyle\int_0^\infty\left(\sum_{V_c\in\Omega}\phi_x(D)|V_c|\right)\mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k}\varphi^k(D)\phi^k_x(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k}\phi^k_x(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\left(\sum_{k=1}^{N_s}\varphi^k_{|x}\,x^k\right)|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_{k=1}^{N_s}x^k\,|V_c|} \quad \text{(étape 1)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\varphi^{tot}_{|x}\,x^{tot}\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}x^{tot}\,|V_c|} \quad \text{d'après (A.19) et (A.20)}, \\
&= \frac{\langle\varphi^{tot}_{|x}\,x^{tot}\rangle_\Omega}{\langle x^{tot}\rangle_\Omega}, \qquad \text{(A.75)}
\end{aligned}
$$

avec $x^k = n^k$, $x^{tot} = n^{tot}$ et $\phi^k_x = \phi^k_n$ dans le cas d'une pondération par le nombre de gouttes, tandis que $x^k = \alpha^k$, $x^{tot} = \alpha^{tot}$ et $\phi^k_x = \phi^k_v$ dans le cas d'une pondération par le volume des gouttes. Mais il est

également possible d'exprimer la moyenne d'une grandeur globale intensive en fonction de la moyenne de la grandeur sectionnelle associée. En effet, si l'on repart de l'étape 1 des formulations (A.74) et (A.75), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi^{tot}}_{|x} &= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{\varphi^k_{|x}\, x^k}}{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{x^k}}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{\varphi^k}_{|x}\, \overline{x^k}}{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{x^k}} \quad \text{d'après (A.67)}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{\varphi^k}_{|x}\, \overline{x^k}}{\overline{x^{tot}}}, \qquad \text{(A.76)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^{tot} \rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \langle \varphi^k_{|x}\, x^k \rangle_\Omega}{\sum_{k=1}^{N_s} \langle x^k \rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}\, \langle x^k \rangle_\Omega}{\sum_{k=1}^{N_s} \langle x^k \rangle_\Omega} \quad \text{d'après (A.68)}, \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \langle \varphi^k \rangle_{\Omega\,|x}\, \langle x^k \rangle_\Omega}{\langle x^{tot} \rangle_\Omega}, \qquad \text{(A.77)}
\end{aligned}$$

Si l'on prend l'exemple de la vitesse des gouttes, on a pour la moyenne temporelle :

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{v}^{tot}}_{|n} &= \begin{pmatrix} \overline{v^{tot}_{X\,|n}} \\ \overline{v^{tot}_{Y\,|n}} \\ \overline{v^{tot}_{Z\,|n}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v^{tot}_{X\,|n}\, n^{tot}}}{\overline{n^{tot}}} \\ \dfrac{\overline{v^{tot}_{Y\,|n}\, n^{tot}}}{\overline{n^{tot}}} \\ \dfrac{\overline{v^{tot}_{Z\,|n}\, n^{tot}}}{\overline{n^{tot}}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{X\,|n}}\, \overline{n^k}}{\overline{n^{tot}}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{Y\,|n}}\, \overline{n^k}}{\overline{n^{tot}}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{Z\,|n}}\, \overline{n^k}}{\overline{n^{tot}}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.78)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{v}^{tot}}_{|\alpha} &= \begin{pmatrix} \overline{v^{tot}_{X\,|\alpha}} \\ \overline{v^{tot}_{Y\,|\alpha}} \\ \overline{v^{tot}_{Z\,|\alpha}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{v^{tot}_{X\,|\alpha}\, \alpha^{tot}}}{\overline{\alpha^{tot}}} \\ \dfrac{\overline{v^{tot}_{Y\,|\alpha}\, \alpha^{tot}}}{\overline{\alpha^{tot}}} \\ \dfrac{\overline{v^{tot}_{Z\,|\alpha}\, \alpha^{tot}}}{\overline{\alpha^{tot}}} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{X\,|\alpha}}\, \overline{\alpha^k}}{\overline{\alpha^{tot}}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{Y\,|\alpha}}\, \overline{\alpha^k}}{\overline{\alpha^{tot}}} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{N_s} \overline{v^k_{Z\,|\alpha}}\, \overline{\alpha^k}}{\overline{\alpha^{tot}}} \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.79)}
\end{aligned}$$

Il est également possible de réaliser des moyennes conjuguées, *i.e.* à la fois spatiales et temporelles. Cela revient à calculer la moyenne statistique de $\varphi(D)$ de la même façon que pour les formulations (A.74) et (A.75) en considérant plusieurs échantillons pondérés cette fois-ci par le pas de temps Δt_i **et** le volume de contrôle $|V_c|$. On peut alors définir la moyenne conjuguée d'une grandeur globale intensive comme :

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega}}_{|x} = \left\langle\overline{\varphi^{tot}}\right\rangle_{\Omega|x} &= \frac{\displaystyle\int_0^\infty \left(\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \varphi(D)\phi_x(D)\,|V_c|\,\Delta t_i\right) \mathrm{d}D}{\displaystyle\int_0^\infty \left(\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \phi_x(D)\,|V_c|\,\Delta t_i\right) \mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \varphi^k(D)\phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \phi_x^k(D)\,\mathrm{d}D\,|V_c|\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_s} \varphi_{|x}^k\, x^k\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_s} x^k\,|V_c|\,\Delta t_i} \quad \text{(étape 1)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} \varphi_{|x}^{tot}\, x^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} x^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i} \quad \text{d'après (A.19) et (A.20)},
\end{aligned}
\tag{A.80}
$$

où l'on peut noter que l'ordre entre la moyenne spatiale et la moyenne temporelle peut être inversé. Définissons maintenant les coefficients de pondération $\beta^{tot} = \sum_k \beta^k = \sum_i x^{tot}\,\Delta t_i$ et $\eta^{tot} = \sum_k \eta^k = \sum_{V_c\in\Omega} x^{tot}\,|V_c|$. Les moyennes conjuguées s'écrivent alors :

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega}}_{|x} &= \frac{\displaystyle\sum_i \left(\frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} \varphi_{|x}^{tot}\, x^{tot}\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} x^{tot}\,|V_c|} \sum_{V_c\in\Omega} x^{tot}\,|V_c|\right)\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \eta^{tot}\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega|x}\,\eta^{tot}\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i \eta^{tot}\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\overline{\langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega|x}\,\langle x^{tot}\rangle_{\Omega}}}{\overline{\langle x^{tot}\rangle_{\Omega}}},
\end{aligned}
\tag{A.81}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{\varphi^{tot}} \right\rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\left(\frac{\displaystyle\sum_i \varphi^{tot}_{|x}\, x^{tot}\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i x^{tot}\,\Delta t_i}\sum_i x^{tot}\,\Delta t_i\right)|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\beta^{tot}\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\overline{\varphi^{tot}}_{|x}\,\beta^{tot}\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\beta^{tot}\,|V_c|}, \\
&= \frac{\left\langle \overline{\varphi^{tot}}_{|x}\,\overline{x^{tot}} \right\rangle_{\Omega}}{\left\langle \overline{x^{tot}} \right\rangle_{\Omega}}. \qquad \text{(A.82)}
\end{aligned}
$$

Mais il est également possible d'exprimer la moyenne conjuguée d'une grandeur globale intensive en fonction de la moyenne conjuguée de la grandeur sectionnelle associée. En effet, si l'on repart de l'étape 1 de la formulation (A.80), on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle\varphi^{tot}\rangle_{\Omega\,|x}} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\sum_i\sum_{V_c\in\Omega}\varphi^k_{|x}\,x^k\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\sum_i\sum_{V_c\in\Omega}x^k\,|V_c|\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle\varphi^k_{|x}\,x^k\rangle_{\Omega}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle x^k\rangle_{\Omega}}}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle\varphi^k\rangle_{\Omega\,|x}\,\langle x^k\rangle_{\Omega}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle x^k\rangle_{\Omega}}} \quad \text{d'après (A.68)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle\varphi^k\rangle_{\Omega}}_{|x}\,\overline{\langle x^k\rangle_{\Omega}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle x^k\rangle_{\Omega}}} \quad \text{d'après (A.72)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\langle\varphi^k\rangle_{\Omega}}_{|x}\,\overline{\langle x^k\rangle_{\Omega}}}{\overline{\langle x^{tot}\rangle_{\Omega}}}, \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{\varphi^{tot}} \right\rangle_{\Omega\,|x} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\sum_{V_c\in\Omega}\sum_i\varphi^k_{|x}\,x^k\,\Delta t_i\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\sum_{V_c\in\Omega}\sum_i x^k\,\Delta t_i\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{\varphi^k_{|x}\,x^k}\right\rangle_{\Omega}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{\varphi^k}_{|x}\,\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}} \quad \text{d'après (A.67)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{\varphi^k}\right\rangle_{\Omega\,|x}\left\langle\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}} \quad \text{d'après (A.73)}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{\varphi^k}\right\rangle_{\Omega\,|x}\left\langle\overline{x^k}\right\rangle_{\Omega}}{\left\langle\overline{x^{tot}}\right\rangle_{\Omega}}. \qquad \text{(A.84)}
\end{aligned}
$$

A.2.3 Diamètres statistiques moyens

Les diamètres statistiques (cf. section A.1.3) sont des grandeurs particulières qu'il est impossible de moyenner comme les grandeurs extensives ou intensives présentées précédemment. En effet, par définition, les diamètres statistiques ne peuvent être calculés qu'à partir des distributions numérique et volumique. Ainsi, les diamètres statistiques moyens (en temps ou en espace) ne peuvent être déterminés qu'à partir des distributions moyennes $\langle \phi_n(D) \rangle_\Omega$, $\langle \phi_v(D) \rangle_\Omega$, $\overline{\phi_n(D)}$ et $\overline{\phi_v(D)}$. Puisque les distributions considérées correspondent à des distributions par unité de volume, la définition (A.28) des diamètres statistiques D_{pq} conduit à :

$$
\begin{aligned}
\left[D_{pq}\right]_\Omega^{p-q} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} D^p \, \langle \phi_n^k(D) \rangle_\Omega \, \mathrm{d}D}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \int_{D_{k-1}}^{D_k} D^q \, \langle \phi_n^k(D) \rangle_\Omega \, \mathrm{d}D}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \left[I_p^k\right]_\Omega}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \left[I_q^k\right]_\Omega}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \langle I_p^k \rangle_\Omega}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \langle I_q^k \rangle_\Omega} \quad \text{d'après (A.56)}, \\
&= \frac{\langle I_p^{tot} \rangle_\Omega}{\langle I_q^{tot} \rangle_\Omega} \quad \text{avec} \quad I_p^{tot} = \sum_{k=1}^{N_s} I_p^k = \int_0^\infty D^p \, \phi_n(D) \, \mathrm{d}D, \\
&\neq \left(\frac{\displaystyle\sum_{V_c \in \Omega} |V_c| D_{pq}}{\displaystyle\sum_{V_c \in \Omega} |V_c|} \right)^{p-q} = \langle D_{pq} \rangle_\Omega^{p-q}.
\end{aligned}
\tag{A.85}
$$

De la même manière, il est possible de démontrer que :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D_{pq}}^{p-q} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \overline{I_p^k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s} \overline{I_q^k}}, \\
&= \frac{\overline{I_p^{tot}}}{\overline{I_q^{tot}}}, \\
&\neq \left(\frac{\displaystyle\sum_i \Delta t_i \, D_{pq}}{\displaystyle\sum_i \Delta t_i} \right)^{p-q} = \overline{D_{pq}}^{p-q}.
\end{aligned}
\tag{A.86}
$$

On démontre ainsi que les diamètres statistiques moyens, évalués à partir de distributions moyennes et identifiés par les notations $\widetilde{\cdot}$ et $[\cdot]_\Omega$, ne correspondent pas à de simples moyennes arithmétiques,

identifiées quant à elle par les notations $\overline{\cdot}$ et $\langle\cdot\rangle_\Omega$.

Il est également possible de démontrer grâce à l'égalité (A.49) que, en cas de moyenne conjuguée, les moyennes temporelle et spatiale peuvent être inversées :

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{D_{pq}}\right]_\Omega^{p-q} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} D^p\left[\widetilde{\phi_n^k(D)}\right]_\Omega \mathrm{d}D}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} D^q\left[\widetilde{\phi_n^k(D)}\right]_\Omega \mathrm{d}D} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{I_p^k}\right\rangle_\Omega}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\left\langle\overline{I_q^k}\right\rangle_\Omega} = \frac{\left\langle\overline{I_p^{tot}}\right\rangle_\Omega}{\left\langle\overline{I_q^{tot}}\right\rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} D^p\left[\widetilde{\phi_n^k(D)}\right]_\Omega \mathrm{d}D}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\int_{D_{k-1}}^{D_k} D^q\left[\widetilde{\phi_n^k(D)}\right]_\Omega \mathrm{d}D} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\left\langle I_p^k\right\rangle_\Omega}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_s}\overline{\left\langle I_q^k\right\rangle_\Omega}} = \frac{\overline{\left\langle I_p^{tot}\right\rangle_\Omega}}{\overline{\left\langle I_q^{tot}\right\rangle_\Omega}} = \widetilde{\left[D_{pq}\right]_\Omega}^{p-q}. \qquad \text{(A.87)}
\end{aligned}$$

Les expressions précédentes des diamètres statistiques moyens nous permettent finalement de traiter les cas particuliers des moyennes spatiale et temporelle des diamètres statistiques D_{p0}. En effet, puisque $I_0^k = n^k$ (cf. équation (A.23)) et donc que $I_0^{tot} = n^{tot}$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{D_{p0}}^p &= \frac{\overline{I_p^{tot}}}{\overline{I_0^{tot}}}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i I_p^{tot}\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i n^{tot}\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i D_{p0}^p\, n^{tot}\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i n^{tot}\,\Delta t_i} \quad \text{d'après (A.28)}, \\
&= \overline{D_{p0\,|n}^p}, \qquad \text{(A.88)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[D_{p0}\right]_\Omega^p &= \frac{\langle I_p^{tot}\rangle_\Omega}{\langle I_0^{tot}\rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} I_p^{tot}\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} n^{tot}\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} D_{p0}^p\, n^{tot}\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega} n^{tot}\,|V_c|} \quad \text{d'après (A.28)}, \\
&= \left\langle D_{p0}^p\right\rangle_{\Omega\,|n}. \qquad \text{(A.89)}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\left[D_{p0}\right]_\Omega}^p &= \frac{\overline{\langle I_p^{tot}\rangle_\Omega}}{\overline{\langle I_0^{tot}\rangle_\Omega}}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i\sum_{V_c\in\Omega} D_{p0}^p\, n^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i\sum_{V_c\in\Omega} n^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_i \left\langle D_{p0}^p\right\rangle_{\Omega\,|n}\sum_{V_c\in\Omega} n^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i}{\displaystyle\sum_i\sum_{V_c\in\Omega} n^{tot}\,|V_c|\,\Delta t_i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{D_{p0}}\right]_\Omega^p &= \frac{\left\langle\overline{I_p^{tot}}\right\rangle_\Omega}{\left\langle\overline{I_0^{tot}}\right\rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_i D_{p0}^p\, n^{tot}\,\Delta t_i\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_i n^{tot}\,\Delta t_i\,|V_c|}, \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\overline{D_{p0\,|n}^p}\sum_i n^{tot}\,\Delta t_i\,|V_c|}{\displaystyle\sum_{V_c\in\Omega}\sum_i n^{tot}\,\Delta t_i\,|V_c|},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_i \left\langle D^p_{p0} \right\rangle_{\Omega\,|n} \eta^{tot}\,\Delta t_i}{\sum_i \eta^{tot}\,\Delta t_i}, \\
&= \frac{\overline{\left\langle D^p_{p0} \right\rangle_{\Omega\,|n} \langle n^{tot}\rangle_\Omega}}{\overline{\langle n^{tot}\rangle_\Omega}} \quad \text{d'après (A.81)}, \\
&= \overline{\left\langle D^p_{p0} \right\rangle_{\Omega\,|n}}, \\
&= \overline{\left[D_{p0}\right]^p_{\Omega\,|n}}, \qquad \text{(A.90)}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{V_c\in\Omega} \overline{D^p_{p0}}_{|n}\,\beta^{tot}\,|V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} \beta^{tot}\,|V_c|}, \\
&= \frac{\left\langle \overline{D^p_{p0}}_{|n}\,\overline{n^{tot}} \right\rangle_\Omega}{\left\langle \overline{n^{tot}} \right\rangle_\Omega} \quad \text{d'après (A.82)}, \\
&= \left\langle \overline{D^p_{p0}} \right\rangle_{\Omega\,|n}, \\
&= \left\langle \widetilde{D_{p0}}^p \right\rangle_{\Omega\,|n}. \qquad \text{(A.91)}
\end{aligned}
$$

Il en va de même pour le diamètre moyen de chaque section D^k. En effet, celui-ci étant analogue à un diamètre statistique de type D_{30} calculé pour chaque section, les expressions (A.85), (A.86) et (A.87) s'appliquent. En ne considérant donc qu'une seule section k, on obtient :

$$
\widetilde{D^k}^3 = \frac{\overline{I^k_3}}{\overline{I^k_0}}, \qquad \text{(A.92)} \qquad\qquad \left[D^k\right]^3_\Omega = \frac{\langle I^k_3\rangle_\Omega}{\langle I^k_0\rangle_\Omega}, \qquad \text{(A.93)}
$$

$$
\text{et} \quad \widetilde{\left[D^k\right]_\Omega}^3 = \frac{\overline{\langle I^k_3\rangle_\Omega}}{\overline{\langle I^k_0\rangle_\Omega}} = \frac{\left\langle \overline{I^k_3} \right\rangle_\Omega}{\left\langle \overline{I^k_0} \right\rangle_\Omega} = \left[\widetilde{D^k}\right]_\Omega^3. \qquad \text{(A.94)}
$$

Sachant que $I^k_0 = n^k$ (cf. équation (A.23)), la définition des diamètres statistiques (A.28) et de I^k_p (A.29) nous permet d'écrire $I^k_3 = {D^k}^3\,n^k$. On obtient finalement que le cube du diamètre D^k moyen est égal à la moyenne de ${D^k}^3$ pondérée par la densité numérique de gouttes :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D^k}^3 &= \frac{\overline{I^k_3}}{\overline{I^k_0}}, \\
&= \frac{\sum_i {D^k}^3\,n^k\,\Delta t_i}{\sum_i n^k\,\Delta t_i}, \\
&= \overline{{D^k}^3}_{|n}, \qquad \text{(A.95)}
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
\left[D^k\right]^3_\Omega &= \frac{\langle I^k_3\rangle_\Omega}{\langle I^k_0\rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\sum_{V_c\in\Omega} {D^k}^3\,n^k\,|V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} n^k\,|V_c|}, \\
&= \left\langle {D^k}^3 \right\rangle_{\Omega\,|n}. \qquad \text{(A.96)}
\end{aligned}
$$

De même :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\left[D^k\right]_\Omega}^3 &= \frac{\overline{\langle I^k_3\rangle_\Omega}}{\overline{\langle I^k_0\rangle_\Omega}}, \\
&= \frac{\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} {D^k}^3\,n^k\,|V_c|\,\Delta t_i}{\sum_i \sum_{V_c\in\Omega} n^k\,|V_c|\,\Delta t_i},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\left[\widetilde{D^k}\right]^3_\Omega &= \frac{\left\langle \overline{I^k_3} \right\rangle_\Omega}{\left\langle \overline{I^k_0} \right\rangle_\Omega}, \\
&= \frac{\sum_{V_c\in\Omega} \sum_i {D^k}^3\,n^k\,\Delta t_i\,|V_c|}{\sum_{V_c\in\Omega} \sum_i n^k\,\Delta t_i\,|V_c|},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_i \left\langle D^{k^3} \right\rangle_{\Omega|n} \sum_{V_c \in \Omega} n^k \, |V_c| \, \Delta t_i}{\sum_i \sum_{V_c \in \Omega} n^k \, |V_c| \, \Delta t_i}, \\
&= \frac{\sum_i \left\langle D^{k^3} \right\rangle_{\Omega|n} \eta^k \, \Delta t_i}{\sum_i \eta^k \, \Delta t_i}, \\
&= \frac{\overline{\left\langle D^{k^3} \right\rangle_{\Omega|n} \left\langle n^k \right\rangle_\Omega}}{\overline{\left\langle n^k \right\rangle_\Omega}}, \\
&= \overline{\left\langle D^{k^3} \right\rangle_{\Omega|n}} \quad \text{d'après (A.72)}, \\
&= \overline{\left[D^k \right]^3_{\Omega|n}}, \qquad \text{(A.97)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \overline{D^{k^3}}_{|n} \sum_i n^k \, \Delta t_i \, |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} \sum_i n^k \, \Delta t_i \, |V_c|}, \\
&= \frac{\sum_{V_c \in \Omega} \overline{D^{k^3}}_{|n} \, \beta^k \, |V_c|}{\sum_{V_c \in \Omega} \beta^k \, |V_c|}, \\
&= \frac{\left\langle \overline{D^{k^3}}_{|n} \, \overline{n^k} \right\rangle_\Omega}{\left\langle \overline{n^k} \right\rangle_\Omega}, \\
&= \left\langle \overline{D^{k^3}} \right\rangle_{\Omega|n} \quad \text{d'après (A.73)}, \\
&= \left\langle \widetilde{D^k}^3 \right\rangle_{\Omega|n}. \qquad \text{(A.98)}
\end{aligned}
$$

Pour finir, on peut également noter que l'on a $I_3^k = 6\alpha^k/\pi$ (cf. équations (A.23), (A.29) et (A.13)). On peut donc également évaluer les diamètres D^k moyens comme :

$$
\widetilde{D^k}^3 = \frac{6\,\overline{\alpha^k}}{\pi\,\overline{n^k}}, \qquad \text{(A.99)}
$$

$$
\left[D^k \right]^3_\Omega = \frac{6\,\left\langle \alpha^k \right\rangle_\Omega}{\pi\,\left\langle n^k \right\rangle_\Omega}, \qquad \text{(A.100)}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et} \quad \widetilde{\left[D^k \right]_\Omega}^3 &= \frac{6\,\overline{\left\langle \alpha^k \right\rangle_\Omega}}{\pi\,\overline{\left\langle n^k \right\rangle_\Omega}}, \\
&= \frac{6\,\left\langle \overline{\alpha^k} \right\rangle_\Omega}{\pi\,\left\langle \overline{n^k} \right\rangle_\Omega} = \left[\widetilde{D^k} \right]^3_\Omega. \qquad \text{(A.101)}
\end{aligned}
$$

Annexe B

Particularité de la modélisation de l'atomisation de la phase liquide au sein du DPS

Nous avons vu dans la section 2.2.3, que l'on imposait un diamètre moyen d'atomisation D_a constant et homogène lors du transfert entre la phase liquide du SPS et la phase dispersée. On impose par ailleurs que ce transfert opère toujours vers la même section du DPS, *i.e.* la section N_s composée des plus grosses gouttes. Dans cette annexe, nous souhaitons démontrer qu'imposer un diamètre moyen unique tout en figeant la section receveuse conduit en réalité à imposer une fonction densité de probabilité numérique constante et homogène dans l'ensemble des cellules concernées par le transfert entre solveurs.

D'après la formulation (2.99) du transfert de masse entre les deux solveurs, la masse de liquide effectivement transférée en un pas de temps Δt dans une cellule du maillage V_c de volume $|V_c|$ est :

$$m_a = S_a \, \Delta t \, |V_c|. \tag{B.1}$$

Puisque le transfert par atomisation n'opère que vers la section N_s du DPS contenant les plus grosses gouttes, on en déduit que la masse volumique de liquide transférée vers cette section au cours du même pas de temps dans la cellule V_c s'exprime :

$$\rho^{N_s} = \frac{m_a}{|V_c|}. \tag{B.2}$$

Par ailleurs, rappelons que le diamètre moyen D_a imposé lors du processus d'atomisation peut être assimilé à un diamètre statistique de type D_{30} représentant le diamètre d'une goutte dont le volume est égal au volume moyen des inclusions constituant le spray. À partir du couple (D_a, ρ^{N_s}) associé au volume de contrôle V_c, il est ainsi possible de calculer la densité numérique n^{N_s} de gouttes créées lors du transfert vers la section receveuse comme :

$$n^{N_s} = \frac{6\rho^{N_s}}{\pi {D_a}^3 \rho_0}, \tag{B.3}$$

où ρ_0 représente la masse volumique du liquide pur. Si l'on réécrit cette expression autrement, on obtient :

$$\frac{\rho^{N_s}}{n^{N_s}} = \frac{\pi {D_a}^3 \rho_0}{6}. \tag{B.4}$$

Puisque le diamètre moyen D_a est constant et homogène, cela signifie que le rapport ρ^{N_s}/n^{N_s} l'est également.

Intéressons-nous maintenant à ce que cela entraîne vis-à-vis de la fonction densité de probabilité numérique f_n. Si l'on reformule cette fonction à partir de sa définition et de l'expression (A.5) de la distribution numérique ϕ_n, on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(S) &= \frac{\phi_n(S)}{\displaystyle\int_0^\infty \phi_n(S)\,\mathrm{d}S}, \\ &= \frac{\phi_n^{N_s}(S)}{n^{N_s}} \quad \text{puisque seule la section } N_s \text{ est remplie,} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \in [S_{N_s-1}, S_a^{N_s}[\quad \text{ou} \quad S \in]S_b^{N_s}, S_{N_s}[, \\ \dfrac{a^{N_s}}{n^{N_s}} + \dfrac{b^{N_s} - a^{N_s}}{n^{N_s}} \dfrac{S - S_a^{N_s}}{S_b^{N_s} - S_a^{N_s}} & \text{si} \quad S \in [S_a^{N_s}, S_b^{N_s}]. \end{cases} \end{aligned} \tag{B.5}$$

Pour déterminer le jeu de paramètres ($S_a^{N_s}$, $S_b^{N_s}$, a^{N_s}/n^{N_s}, b^{N_s}/n^{N_s}) dont dépend la fonction $f_n(S)$, il est possible de reformuler la procédure d'inversion de Sibra [139] définie initialement par le système (2.98) en mettant en évidence le rapport ρ^{N_s}/n^{N_s}. Selon la situation rencontrée parmi les trois illustrées en figure 2.6, le système à résoudre s'écrit :

$$\text{a)} \quad \begin{cases} f_{S_a}^{N_s}\left(\sqrt{S_a^{N_s}}, \dfrac{\rho^{N_s}}{n^{N_s}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_b^{N_s} = S_{N_s} \\ a^{N_s} = 0 \\ \dfrac{b^{N_s}}{n^{N_s}} = \dfrac{2}{S_{N_s} - S_a^{N_s}} \end{cases} \qquad \text{si} \quad \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\frac{\rho^{N_s}}{n^{N_s}} > \frac{2B^{N_s}}{\Delta S_{N_s}{}^2},$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} S_a^{N_s} = S_{N_s-1} \quad \text{et} \quad S_b^{N_s} = S_{N_s} \\ \dfrac{a^{N_s}}{n^{N_s}} = \dfrac{B^{N_s}/\Delta S_{N_s} - 3\sqrt{\pi}\rho^{N_s}/n^{N_s}\Delta S_{N_s}/\rho_0}{C^{N_s}} \\ \dfrac{b^{N_s}}{n^{N_s}} = -\dfrac{A^{N_s}/\Delta S_{N_s} - 3\sqrt{\pi}\rho^{N_s}/n^{N_s}\Delta S_{N_s}/\rho_0}{C^{N_s}} \end{cases} \qquad \text{si} \quad \frac{2A^{N_s}}{\Delta S_{N_s}{}^2} \leq \frac{6\sqrt{\pi}}{\rho_0}\frac{\rho^{N_s}}{n^{N_s}} \leq \frac{2B^{N_s}}{\Delta S_{N_s}{}^2}, \tag{B.6}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} f_{S_b}^{N_s}\left(\sqrt{S_b^{N_s}}, \dfrac{\rho^{N_s}}{n^{N_s}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_a^{N_s} = S_{N_s-1} \\ \dfrac{a^{N_s}}{n^{N_s}} = \dfrac{2}{S_b^{N_s} - S_{N_s-1}} \\ b^{N_s} = 0 \end{cases} \qquad \text{sinon,}$$

avec les fonctions $f_{S_a}^k$ et $f_{S_b}^k$ définies par le système (A.7), tandis que des paramètres supplémentaires sont également définis par le système (A.6). Il résulte donc que le jeu de données ($S_a^{N_s}$, $S_b^{N_s}$, a^{N_s}/n^{N_s}, b^{N_s}/n^{N_s}) dont dépend la fonction densité de probabilité numérique f_n ne dépend que du rapport ρ^{N_s}/n^{N_s} et des bornes S_{N_s-1} et S_{N_s}, qui sont trois paramètres constants et homogènes dans notre approche de modélisation. On démontre ainsi que le fait d'imposer un diamètre moyen unique tout en figeant la section receveuse conduit en réalité à imposer une fonction densité de probabilité numérique constante et homogène dans l'ensemble des cellules concernées par le transfert entre solveurs.

Annexe C

Schéma de flux HLLC et sa version bas-Mach

C.1 Schéma de flux HLLC

Le schéma de flux HLLC proposé par Toro [151] est particulièrement adapté aux simulations numériques associées à de forts gradients de masse volumique et de vitesse du son.

On souhaite évaluer les flux convectifs aux faces du maillage. Pour simplifier, nous nous intéressons dans cette annexe au système d'équations d'Euler sous forme vectorielle pour une seule espèce. Celui-ci s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})}{\partial \xi} = 0, \tag{C.1}$$

avec $\boldsymbol{Q}$ le vecteur des quantités conservées, $\boldsymbol{F}$ le vecteur flux et ξ la coordonnée dans la direction du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ normal à la face considérée. Ces deux vecteurs sont dans ce cas définis par :

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{u} \\ \rho e_t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n \boldsymbol{u} + p\boldsymbol{n} \\ (\rho e_t + p)\, u_n \end{pmatrix}, \tag{C.2}$$

avec ρ la masse volumique du fluide, $\boldsymbol{u}$ son vecteur vitesse, e_t son énergie totale massique et p sa pression. De plus, $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$. Le système des équations d'Euler est strictement hyperbolique. La matrice jacobienne $\partial \boldsymbol{F} / \partial \boldsymbol{Q}$ est donc diagonalisable et possède trois valeurs propres réelles distinctes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_n - c, \\ \lambda_2 &= u_n, \\ \lambda_3 &= u_n + c, \end{aligned} \tag{C.3}$$

où c désigne la vitesse du son. Le schéma de flux HLLC est basé sur la résolution approchée du problème de Riemann, à chaque pas de temps et sur chaque face du maillage. La solution exacte du problème de Riemann est constituée de deux ondes non linéaires, chacune pouvant être soit une onde de détente soit un choc et encadrant une discontinuité de contact. Le problème de Riemann est formulé par :

$$\boldsymbol{Q}(\xi, t = 0) = \boldsymbol{Q}_0(\xi) = \begin{cases} \boldsymbol{Q}_L & \text{si} \quad \xi < 0, \\ \boldsymbol{Q}_R & \text{si} \quad \xi > 0. \end{cases} \tag{C.4}$$

Comme le représente la figure C.1, la solution approchée du schéma de flux HLLC est quant à elle constituée de trois ondes discontinues de vitesses S_L, S^* et S_R séparant quatre états constants notés

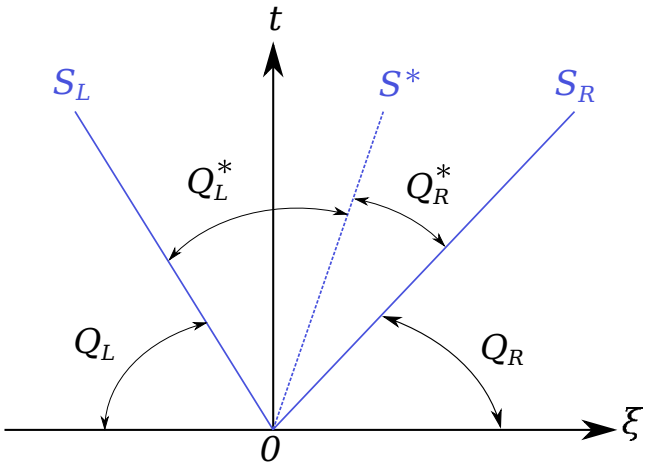


Figure C.1 – Solution approchée du problème de Riemann par le schéma de flux HLLC.

$\boldsymbol{Q}_L$, $\boldsymbol{Q}_L^*$, $\boldsymbol{Q}_R^*$ et $\boldsymbol{Q}_R$, l'onde intermédiaire étant supposée être une discontinuité de contact. Notons par ailleurs que les vitesses des ondes suivent la relation $S_L \leq S^* \leq S_R$. Le schéma de flux numérique associé s'écrit alors :

$$\phi_C^{HLLC} = \begin{cases} \boldsymbol{F}_L & \text{si} \quad 0 < S_L, \\ \boldsymbol{F}_L^* & \text{si} \quad S_L < 0 < S^*, \\ \boldsymbol{F}_R^* & \text{si} \quad S^* < 0 < S_R, \\ \boldsymbol{F}_R & \text{si} \quad 0 > S_R. \end{cases} \tag{C.5}$$

Les relations de saut de Rankine-Hugoniot appliquées à chacune des ondes de vitesses S_L, S^* et S_R conduisent à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_L^* &= \boldsymbol{F}_L + S_L \left(\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L\right), \\ \boldsymbol{F}_R^* &= \boldsymbol{F}_R + S_R \left(\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R\right). \end{cases} \tag{C.6}$$

Par ailleurs, il est possible d'évaluer les vitesses des deux ondes latérales S_L et S_R par :

$$\begin{cases} S_L &= \min\left(u_{n,L} - c_L, u_{n,R} - c_R, \hat{u}_n - \hat{c}\right), \\ S_R &= \max\left(u_{n,L} + c_L, u_{n,R} + c_R, \hat{u}_n + \hat{c}\right), \end{cases} \tag{C.7}$$

où $\hat{u}_n$ et $\hat{c}$ désignent les moyennes de Roe de la vitesse et de la vitesse du son, définies comme :

$$\hat{u}_n = \frac{\sqrt{\rho_L} u_{n,L} + \sqrt{\rho_R} u_{n,R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{C.8}$$

et

$$\hat{c}^2 = (\gamma - 1)\left(\hat{h} - \frac{1}{2}\hat{u}_n^2\right). \tag{C.9}$$

L'enthalpie totale massique h est quant à elle estimée par la valeur moyenne :

$$\hat{h} = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \tag{C.10}$$

Pour calculer les flux $\boldsymbol{F}_L^*$ et $\boldsymbol{F}_R^*$, il ne reste donc qu'à déterminer les états intermédiaires $\boldsymbol{Q}_L^*$ et $\boldsymbol{Q}_R^*$. Puisque l'onde intermédiaire est une discontinuité de contact, la pression p et la vitesse normale à

l'onde u_n sont continues au passage de l'onde. On a alors :

$$\begin{cases} p_L^* & = & p_R^* & = & p^*, \\ u_{n,L}^* & = & u_{n,R}^* & = & u_n^*. \end{cases} \tag{C.11}$$

La continuité de la pression permet également d'écrire :

$$S^* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_{n,L}\left(S_L - u_{n,L}\right) - \rho_R u_{n,R}\left(S_R - u_{n,R}\right)}{\rho_L\left(S_L - u_{n,L}\right) - \rho_R\left(S_R - u_{n,R}\right)}. \tag{C.12}$$

Quelques calculs élémentaires permettent enfin de formuler les états intermédiaires comme :

$$\boldsymbol{Q}_L^* = \rho_L \frac{S_L - u_{n,L}}{S_L - S^*} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_L + \left(S^* - u_{n,L}\right)\boldsymbol{n} \\ e_{t,L} + \dfrac{p_L}{\rho_L}\dfrac{S^* - u_{n,L}}{S_L - u_{n,L}} + \left(S^* - u_{n,L}\right)S^* \end{pmatrix}, \tag{C.13}$$

et

$$\boldsymbol{Q}_R^* = \rho_R \frac{S_R - u_{n,R}}{S_R - S^*} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_R + \left(S^* - u_{n,R}\right)\boldsymbol{n} \\ e_{t,R} + \dfrac{p_R}{\rho_R}\dfrac{S^* - u_{n,R}}{S_R - u_{n,R}} + \left(S^* - u_{n,R}\right)S^* \end{pmatrix}. \tag{C.14}$$

Associées aux relations de saut (C.6), ces expressions des états intermédiaires permettent finalement d'écrire la fonction de flux numérique ϕ_C^{HLLC} sous forme compacte :

$$\phi_C^{HLLC} = \frac{F_L + F_R}{2} + \frac{\sigma_L + \sigma_R}{2}\frac{F_L - F_R}{2} + \frac{\sigma_R - \sigma_L}{2}\left(S_L\frac{\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L}{2} + S_R\frac{\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R}{2} + \sigma^* S^*\frac{\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_R^*}{2}\right), \tag{C.15}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_L = \sigma^* = \sigma_R = 1 & \text{si} \quad 0 < S_L, \\ -\sigma_L = \sigma^* = \sigma_R = 1 & \text{si} \quad S_L < 0 < S^*, \\ -\sigma_L = -\sigma^* = \sigma_R = 1 & \text{si} \quad S^* < 0 < S_R, \\ \sigma_L = \sigma^* = \sigma_R = -1 & \text{si} \quad 0 > S_R. \end{cases} \tag{C.16}$$

C.2 Correction bas-Mach du schéma de flux HLLC

Malgré tous ses avantages (robustesse et précision en présence de forts gradients de masse volumique), le schéma HLLC se révèle excessivement dissipatif en présence d'écoulements à faible nombre de Mach, comme par exemple pour des jets liquides à faible vitesse d'injection. Pour limiter cette dissipation numérique, une version dite *bas-Mach* de ce schéma (HLLC-BM) a ainsi été proposée par Zuzio *et al.* [173] sur la base des travaux de Li et Gu [98].

À faible nombre de Mach, on a :

$$|S^*| \ll c, \quad S_L \approx -c, \quad S_R \approx c, \quad \sigma_L = -1 \quad \text{et} \quad \sigma_R = 1. \tag{C.17}$$

Le schéma de flux s'écrit donc :

$$\phi_C^{HLLC} = \frac{F_L + F_R}{2} + S_L\frac{\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L}{2} + S_R\frac{\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R}{2} + \sigma^* S^*\frac{\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_R^*}{2}. \tag{C.18}$$

Dans cette expression, il s'avère que ce sont les termes $S_L\left(\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L\right)/2$ et $S_R\left(\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R\right)/2$ qui sont à l'origine de la dissipation excessive à faible nombre de Mach. En effet, on peut écrire à partir des expressions des états intermédiaires $\boldsymbol{Q}_L^*$ (C.13) et $\boldsymbol{Q}_R^*$ (C.14) :

$$S_L\left(\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L\right) \approx \rho_L\left(S^* - u_{n,L}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_L - c\boldsymbol{n} \\ e_{t,L} + \dfrac{p_L}{\rho_L} - cS^* \end{pmatrix}, \tag{C.19}$$

et

$$S_R\left(\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R\right) \approx \rho_R\left(S^* - u_{n,R}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_R + c\boldsymbol{n} \\ e_{t,R} + \dfrac{p_R}{\rho_R} + cS^* \end{pmatrix}. \tag{C.20}$$

D'après Zuzio *et al.* [173], la dissipation excessive à faible Mach viendrait des termes d'ordre $c\boldsymbol{n}$ dans la partie associée à la quantité de mouvement de ces deux dernières équations. Pour réduire cette dissipation, le principe consiste à agir sur les flux de quantité de mouvement en réduisant l'écart entre la vitesse du son et la vitesse convective. D'un point de vue pratique, les auteurs proposent de remplacer $\boldsymbol{Q}_L^*$ et $\boldsymbol{Q}_R^*$ dans les termes $S_L\left(\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_L\right)/2$ et $S_R\left(\boldsymbol{Q}_R^* - \boldsymbol{Q}_R\right)/2$ par :

$$\boldsymbol{Q}_{L,\,corr}^* = \rho_L \frac{S_L - u_{n,L}}{S_L - S^*}\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_L + f_{corr}\,.\,\left(S^* - u_{n,L}\right)\boldsymbol{n} \\ e_{t,L} + \dfrac{p_L}{\rho_L}\dfrac{S^* - u_{n,L}}{S_L - u_{n,L}} + \left(S^* - u_{n,L}\right)S^* \end{pmatrix}, \tag{C.21}$$

et

$$\boldsymbol{Q}_{R,\,corr}^* = \rho_R \frac{S_R - u_{n,R}}{S_R - S^*}\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{u}_R + f_{corr}\,.\,\left(S^* - u_{n,R}\right)\boldsymbol{n} \\ e_{t,R} + \dfrac{p_R}{\rho_R}\dfrac{S^* - u_{n,R}}{S_R - u_{n,R}} + \left(S^* - u_{n,R}\right)S^* \end{pmatrix}. \tag{C.22}$$

La fonction correctrice $f_{corr} \in [0,1]$ s'écrit :

$$f_{corr} = \min\left(1, \max\left(M_l^\alpha, M_R^\alpha, \left(\frac{S^*}{\hat{c}}\right)^\beta\right)\right), \tag{C.23}$$

avec α et β deux coefficients à déterminer et M le nombre de Mach. Cette fonction croît avec le nombre de Mach et tend rapidement vers 1, de manière à ce que le flux numérique HLLC bas-Mach dégénère vers le flux HLLC classique hors de la limite incompressible. Rappelons que les états intermédiaires corrigés ne doivent pas être utilisés dans le terme $\sigma^* S^*\left(\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_R^*\right)/2$ de l'équation (C.18). Le schéma de flux bas-Mach s'écrit alors finalement :

$$\phi_C^{HLLC_BM} = \frac{F_L + F_R}{2} + \frac{\sigma_L + \sigma_R}{2}\frac{F_L - F_R}{2} + \frac{\sigma_R - \sigma_L}{2}\left(S_L\frac{\boldsymbol{Q}_{L,\,corr}^* - \boldsymbol{Q}_L}{2} + S_R\frac{\boldsymbol{Q}_{R,\,corr}^* - \boldsymbol{Q}_R}{2} + \sigma^* S^*\frac{\boldsymbol{Q}_L^* - \boldsymbol{Q}_R^*}{2}\right). \tag{C.24}$$

Annexe D

Formulation analytique de la force de radiation acoustique exercée sur un cylindre rigide soumis à une onde acoustique multi-harmonique plane et stationnaire

D.1 Formulation de la force de radiation acoustique instantanée

La formulation suivante est réalisée à partir des travaux de Zhuk [170], Wu *et al.* [166] et Ficuciello [51], qui ont étudié la force de radiation acoustique exercée sur un cylindre dans le cas d'une onde acoustique mono-harmonique progressive ou stationnaire respectivement.

Considérons ici un objet cylindrique de rayon R quelconque, positionné dans un champ acoustique plan stationnaire. La figure D.1 définit les référentiels cartésien (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$) et cylindrique (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_Z$) centrés sur l'objet. Dans le cas d'une onde acoustique se propageant le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$, la distribution spatiale des fluctuations de pression à la surface du cylindre présente deux symétries planaires : une première par rapport à tout plan de vecteur normal $\boldsymbol{e}_Z$ et une seconde par rapport au plan XOZ.

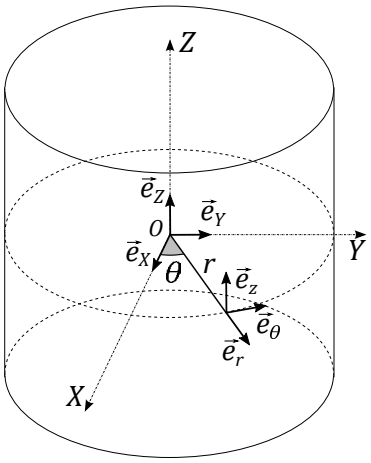


Figure D.1 – Définition des référentiels cartésien (O, e_X, e_Y, e_Z) et cylindrique (O, e_r, e_θ, e_Z) considérés.

Le vecteur $\boldsymbol{F}_{rad}$ est donc porté par l'axe $\boldsymbol{e}_X$ et l'équation (3.13) donne :

$$\begin{aligned} F_{rad} &= -\oiint_S p'\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_X \,\mathrm{d}S, \\ &= -R\int_0^{2\pi} p'\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{D.1}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'objet orienté vers l'extérieur et S sa surface. La force de radiation acoustique induit alors un déplacement du cylindre le long de l'axe acoustique, soit $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_X$. Dans le référentiel cylindrique (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_Z$), la condition à la limite (3.15) devient ainsi :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}_{|r=R} = U\cos\theta, \tag{D.2}$$

avec U la vitesse de déplacement du cylindre. En combinant les équations (3.10) et (D.1), il est possible d'exprimer la force de radiation acoustique comme :

$$F_{rad} = -R\rho_0\int_0^{2\pi}(\dot{\phi} + \frac{1}{2c_0^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}q^2)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{D.3}$$

Pour évaluer cette force, il apparaît alors nécessaire d'exprimer le potentiel de vitesse. Dans le cas d'une onde plane se propageant le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$, le potentiel de vitesse de l'onde incidente ϕ_{in} peut s'exprimer dans le référentiel (O, $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_Y$, $\boldsymbol{e}_Z$) comme :

$$\begin{aligned} \phi_{in} = \sum_{i=1}^{N_h}\phi_{in,\,i} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_h}A_i\left(e^{-\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}(X+h)} + e^{\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}(X+h)}\right)e^{\mathbf{i}(\omega_i t+\psi_i)}, \\ &= A_i\cos\left(k_{ac,\,i}(X+h)\right)e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}, \end{aligned} \tag{D.4}$$

avec ρ_0 et c_0 la masse volumique du milieu et la vitesse du son à l'état de référence, $A_i = p_{ac,\,i}/(\rho_0\,c_0\,k_{ac,\,i})$, $p_{ac,\,i}$ l'amplitude des fluctuations de pression du mode acoustique i, $\omega_i = 2\pi f_i$ sa pulsation, f_i sa fréquence, ψ_i sa phase et $k_{ac,\,i} = \omega_i/c_0$ son nombre d'onde. On notera également $\Phi_i = \omega_i t + \psi_i$. De plus, X correspond à la coordonnée le long de l'axe $\boldsymbol{e}_X$, h représente la distance entre l'axe de symétrie du cylindre et un PAN de référence commun à tous les harmoniques [1] et t est le temps. Comme au chapitre 3, la fréquence de chaque harmonique i s'exprime $f_{ac,\,i} = i f_{ac,\,1}$, avec $f_{ac,\,1}$ la fréquence principale. D'après Abramowitz et Stegun [1] (p. 361), il est possible de convertir une onde plane en une onde cylindrique grâce à :

$$e^{\mathbf{i}\,a\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{\mathbf{i}\,\frac{1}{2}n\pi}C_nJ_n(a)\cos(n\theta)\right], \tag{D.5}$$

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0, \\ 2 & \text{sinon}, \end{cases} \tag{D.6}$$

avec $J_n(a)$ la fonction de Bessel d'ordre 1 et de degré n. Ainsi, il est possible de formuler $\phi_{in,\,i}$ dans le référentiel (O, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_Z$) comme :

$$\begin{aligned} \phi_{in,\,i} &= A_i\,\mathbb{R}\left\{e^{\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}(X+h)}\right\}e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}, \\ &= A_i\,\mathbb{R}\left\{e^{\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}r\cos\theta}e^{\mathbf{i}\,k_{ac,\,i}h)}\right\}e^{\mathbf{i}\,\Phi_i} \quad \text{car} \quad X = r\cos\theta, \\ &= A_i\,\mathbb{R}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}n\pi+k_{ac,\,i}h\right)}C_nJ_n(k_{ac,\,i}r)\cos(n\theta)\right]\right\}e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}, \\ &= A_i\sum_{n=0}^{\infty}\left[K_{n,\,i}C_nJ_n(k_{ac,\,i}r)\cos(n\theta)\right]e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}, \end{aligned} \tag{D.7}$$

1. De la même manière qu'au chapitre 3, il est supposé ici que le déplacement de l'objet au cours d'une période d'oscillation est très petit devant la longueur d'onde acoustique. Il est ainsi possible de considérer h constant dans l'équation (D.4).

où $K_{n,\,i} = \cos\left(k_{ac,\,i}h + \frac{1}{2}n\pi\right)$. Dans ces conditions, il est possible d'après Wu *et al.* [166] et Ficuciello [51] d'exprimer le potentiel de l'onde réfléchie $\phi_{réf,\,i}$ comme :

$$\phi_{réf,\,i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[Q_{n,\,i}H_n(k_{ac,\,i}r)\cos(n\theta)\right] e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}, \tag{D.8}$$

où $H_n(k_{ac,\,i}r) = J_n(k_{ac,\,i}r) + \mathbf{i}\,Y_n(k_{ac,\,i}r)$ et $Y_n(k_{ac,\,i}r)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de troisième et second ordres de degré n tandis que $Q_{n,\,i}$ est une constante déterminée à partir de la condition à la limite (D.2). Dans cette dernière, il est nécessaire de pouvoir formuler la vitesse de translation $\boldsymbol{U}$ portée par l'axe $\boldsymbol{e}_X$. Pour cela, on applique le principe fondamental de la dynamique à une section du cylindre de longueur unitaire :

$$m_c \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = F_{rad}, \tag{D.9}$$

où $m_c = \pi R^2 \rho_1$ est la masse du cylindre par unité de longueur. [2] De la même façon que pour un objet sphérique, la vitesse de translation U peut être déterminée en ne considérant que le terme d'ordre 1 de l'équation (3.10) :

$$U = -\frac{\eta}{\pi R}\int_0^{2\pi} \phi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{D.10}$$

avec $\eta = \rho_0/\rho_1$ le rapport entre les masses volumiques du milieu et de l'objet. Pour tous entiers positifs n et m, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((n-m)\theta) + \cos((n+m)\theta)}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \\
&= \begin{cases} \pi & \text{si} \quad n = 0\,;\, m = 1, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m = n+1\,;\, n \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Ainsi, combinée aux formulations (D.7) et (D.8), l'équation (D.10) devient :

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\eta}{\pi R}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(A_iK_{n,\,i}C_nJ_n(k_{ac,\,i}R) + Q_{n,\,i}H_n(k_{ac,\,i}R)\right)\cos(n\theta)\right]e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \\
&= -\frac{\eta}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(2A_iK_{1,\,i}J_1(k_{ac,\,i}R) + Q_{1,\,i}H_1(k_{ac,\,i}R)\right)e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right].
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Si l'on revient à la condition à la limite (D.2) et que l'on pose $\alpha_i = k_{ac,\,i}R$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(2A_iK_{1,\,i}J_1(\alpha_i) + Q_{1,\,i}H_1(\alpha_i)\right)e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right]\cos\theta &= \sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_iK_{n,\,i}C_nJ_n'(\alpha_i)\cos(n\theta)\right]k_{ac,\,i}e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[Q_{n,\,i}H_n'(\alpha_i)\cos(n\theta)\right]k_{ac,\,i}e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right],
\end{aligned} \tag{D.13}$$

2. De façon identique au chapitre 3, la masse ajoutée due au mouvement de l'objet est négligée car $\rho_0 \ll \rho_1$ dans le cas d'un jet liquide dans un milieu gazeux.

où $J_n'(\alpha_i) = \partial J_n/\partial r_{|r=R}$ et $H_n'(\alpha_i) = \partial H_n/\partial r_{|r=R}$. La résolution de cette équation révèle :

$$\left\{\begin{array}{lcll} Q_{n,\,i} & = & -\dfrac{C_n A_i K_{n,\,i} J_n'(\alpha_i)}{H_n'(\alpha_i)} & \text{si} \quad n \neq 1, \\ Q_{1,\,i} & = & -\dfrac{2A_i K_{1,\,i}\left(J_1'(\alpha_i) - \dfrac{\eta}{\alpha_i} J_1(\alpha_i)\right)}{H_1'(\alpha_i) - \dfrac{\eta}{\alpha_i} H_1(\alpha_i)}. & \end{array}\right. \tag{D.14}$$

Sachant qu'une des propriétés des fonctions de Bessel de premier et second ordre est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} J_n'(\alpha_i) & = & \dfrac{nJ_n(\alpha_i)}{\alpha_i} - J_{n+1}(\alpha_i), \\ Y_n'(\alpha_i) & = & \dfrac{nY_n(\alpha_i)}{\alpha_i} - Y_{n+1}(\alpha_i), \end{array}\right. \tag{D.15}$$

on obtient finalement :

$$Q_{n,\,i} = -\frac{C_n A_i \mathcal{F}_n(\alpha_i)}{\mathcal{F}_n(\alpha_i) + \mathbf{i}\,\mathcal{G}_n(\alpha_i)} K_{n,\,i}, \tag{D.16}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{F}_n(\alpha_i) & = & \alpha_i^2 J_{n+1}(\alpha_i) - n\alpha_i J_n(\alpha_i) & \text{si} \quad n \neq 1, \\ \mathcal{F}_1(\alpha_i) & = & \alpha_i^2 J_2(\alpha_i) - (1-\eta)\,\alpha_i J_1(\alpha_i), & \end{array}\right. \tag{D.17}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{G}_n(\alpha_i) & = & \alpha_i^2 Y_{n+1}(\alpha_i) - n\alpha_i Y_n(\alpha_i) & \text{si} \quad n \neq 1, \\ \mathcal{G}_1(\alpha_i) & = & \alpha_i^2 Y_2(\alpha_i) - (1-\eta)\,\alpha_i Y_1(\alpha_i). & \end{array}\right. \tag{D.18}$$

Pour formuler la force de radiation acoustique exercée sur l'objet cylindrique, seules les parties réelles de U et ϕ nous intéressent. D'après l'expression (D.12) et la définition de $Q_{n,\,i}$ (D.16), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\{U\} &= \mathbb{R}\left\{-\frac{\eta}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(2A_i K_{1,\,i} J_1(\alpha_i) - \frac{2A_i \mathcal{F}_1(\alpha_i)}{\mathcal{F}_1(\alpha_i) + \mathbf{i}\,\mathcal{G}_1(\alpha_i)} K_{1,\,i} H_1(\alpha_i)\right) e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right]\right\}, \\ &= \mathbb{R}\left\{-\frac{\eta}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[2A_i K_{1,\,i}\alpha_i^2\,\mathbf{i}\,\frac{Y_2(\alpha_i)J_1(\alpha_i) - J_2(\alpha_i)Y_1(\alpha_i)}{\mathcal{F}_1(\alpha_i) + \mathbf{i}\,\mathcal{G}_1(\alpha_i)} e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right]\right\}, \\ &= \mathbb{R}\left\{\frac{\eta}{\pi R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\frac{4A_i K_{1,\,i}\alpha_i\,\mathbf{i}}{\mathcal{F}_1(\alpha_i) + \mathbf{i}\,\mathcal{G}_1(\alpha_i)} e^{\mathbf{i}\,\Phi_i}\right]\right\}, \\ &= \frac{\eta}{\pi R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[4A_i K_{1,\,i}\alpha_i \frac{\mathcal{G}_1(\alpha_i)\cos\Phi_i - \mathcal{F}_1(\alpha_i)\sin\Phi_i}{\Omega_1^2(\alpha_i)}\right], \\ &= -\frac{\eta}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\mathcal{R}_{1,\,i}\sin\Phi_i + \mathcal{S}_{1,\,i}\cos\Phi_i\right], \end{aligned} \tag{D.19}$$ [3]

avec $\Omega_n^2(\alpha_i) = \mathcal{F}_n^2(\alpha_i) + \mathcal{G}_n^2(\alpha_i)$ et :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{R}_{n,\,i} & = & \dfrac{2A_i\alpha_i C_n \mathcal{F}_n(\alpha_i)}{\pi\Omega_n^2(\alpha_i)}\cos\left(k_{ac,\,i}h + \frac{1}{2}n\pi\right), \\ \mathcal{S}_{n,\,i} & = - & \dfrac{2A_i\alpha_i C_n \mathcal{G}_n(\alpha_i)}{\pi\Omega_n^2(\alpha_i)}\cos\left(k_{ac,\,i}h + \frac{1}{2}n\pi\right). \end{array}\right. \tag{D.20}$$

3. On utilise ici la propriété rappelée par Abramowitz et Stegun [1] (p. 360) : $J_{n+1}(\alpha_i)Y_n(\alpha_i) - Y_{n+1}(\alpha_i)J_n(\alpha_i) = 2/(\pi\alpha_i)$.

De la même façon, on peut écrire :

$$\mathbb{R}\{\phi\} = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\mathcal{R}_{n,\,i} \sin \Phi_i + \mathcal{S}_{n,\,i} \cos \Phi_i \right) \cos (n\theta) \right]. \tag{D.21}$$

Pour simplifier l'écriture, l'opérateur $\mathbb{R}\{\cdot\}$ sera omis par la suite.

Il est important de préciser ici que pour aboutir à l'expression (D.21), la variation de la position de l'objet h au cours du temps a été négligée. Pour aboutir à une formulation finale de $\boldsymbol{F}_{rad}$ prenant en compte cette influence dans l'hypothèse d'un faible déplacement de l'objet, l'équation (3.14) est reformulée comme :

$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - U \cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + U \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \tag{D.22}$$

et intégrée dans l'expression (D.3) de la force de radiation acoustique qui devient alors :

$$\begin{aligned} F_{rad} \;=\; & \underbrace{-R\rho_0 \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}_{|r=R} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta}_{F_l} \underbrace{-R\rho_0 \int_0^{2\pi} \left(-U \cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial r}_{|r=R} + U \frac{\sin\theta}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}_{|r=R} \right) \cos\theta \,\mathrm{d}\theta}_{F_U} \\ & \underbrace{-\frac{R\rho_0}{2c_0^2} \int_0^{2\pi} \dot{\phi}^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta}_{F_\phi} + \underbrace{\frac{R\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} q^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta}_{F_q}. \end{aligned} \tag{D.23}$$

Ainsi, on voit apparaître dans l'expression (D.23) le terme F_U représentant une part de l'influence du déplacement de l'objet de vitesse U sur F_{rad}. Notons que cette expression est valable que l'on considère le terme h constant ou non dans l'expression du potentiel de vitesse ϕ. Les conséquences de considérer la variation temporelle de h comme négligeable sont détaillées dans la suite de ce chapitre lors du développement des termes F_l, F_U, F_ϕ et F_q.

De la même manière que pour le chapitre 3, outre l'aspect multi-harmonique, l'originalité des développements qui suivent réside dans la considération du caractère instantané des équations.

Formulation analytique de F_l

Comme pour le cas sphérique, le terme F_l de l'équation (D.23) est évalué en négligeant l'influence du déplacement de l'objet. Le terme $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ est alors approché à l'ordre 1 par la dérivée partielle en temps du potentiel de vitesse ϕ en considérant toujours la position de l'objet h constante. Le développement du potentiel de vitesse selon l'équation (D.21) induit :

$$F_l = -R\rho_0 \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\omega_i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i} \cos \Phi_i - \mathcal{S}_{n,\,i} \sin \Phi_i \right) \cos (n\theta) \right] \cos\theta \,\mathrm{d}\theta. \tag{D.24}$$

Combinée à la propriété (D.11), cette équation devient :

$$\boxed{F_l = \pi R \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\omega_i \left(\mathcal{S}_{1,\,i} \sin \Phi_i - \mathcal{R}_{1,\,i} \cos \Phi_i \right) \right].} \tag{D.25}$$

F_l est donc la somme des contributions d'ordre 1 de chaque harmonique à la force de radiation.

Formulation analytique de F_U

Le terme F_U d'ordre 2 permet de tenir compte du déplacement de l'objet lors de l'évaluation de F_{rad}. D'après la condition à la limite (D.2), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} F_U &= -R\rho_0 U \int_0^{2\pi} \left(U\cos^2\theta + \frac{\sin\theta}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}_{|r=R} \right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \\ &= \rho_0 U \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i}\sin\Phi_i + \mathcal{S}_{n,\,i}\cos\Phi_i \right) n\sin(n\theta) \right] \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.26}$$

Or, pour tous entiers strictement positifs n et m, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(m\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((n-m)\theta) - \cos((n+m)\theta)}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \\ &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m = n+1\,;\, n \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{D.27}$$

En conséquence, le terme F_U s'écrit :

$$F_U = \pi\rho_0 U \sum_{i=1}^{N_h} \left[\mathcal{R}_{2,\,i}\sin\Phi_i + \mathcal{S}_{2,\,i}\cos\Phi_i \right]. \tag{D.28}$$

En y intégrant la formulation de U (D.19), on obtient au final :

$$\boxed{F_U = -\frac{\pi\rho_0\eta}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\mathcal{R}_{1,\,i}\sin\Phi_i + \mathcal{S}_{1,\,i}\cos\Phi_i \right] \sum_{i=1}^{N_h} \left[\mathcal{R}_{2,\,i}\sin\Phi_i + \mathcal{S}_{2,\,i}\cos\Phi_i \right].} \tag{D.29}$$

Contrairement à F_I, la composante F_U contient des termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation analytique de F_ϕ

Le terme F_ϕ de l'équation (D.23) est un terme d'ordre 2 issu des fluctuations de la densité d'énergie potentielle acoustique. En décomposant le potentiel de vitesse selon les contributions des différents modes acoustiques, on a :

$$F_\phi = -\frac{R\rho_0}{2c_0^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{N_h} \dot{\phi}_i^{\,2} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \dot{\phi}_i\dot{\phi}_j \right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{D.30}$$

D'après l'équation (D.22), il est possible de considérer avec une précision d'ordre 2 :

$$\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j \approx \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}t}, \tag{D.31}$$

ce qui donne lieu à :

$$F_\phi = \underbrace{-\frac{R\rho_0}{2c_0^2} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N_h} \left(\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}_{|r=R} \right)^2 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{F_{\phi 1}} \underbrace{-\frac{R\rho_0}{c_0^2} \int_0^{2\pi} \sum_{1\leq i<j\leq N_h} \left(\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}_{|r=R} \frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}t}_{|r=R} \right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{F_{\phi 2}}. \tag{D.32}$$

Si l'on considère, tout comme pour le terme F_l, que l'influence du déplacement de l'objet sur F_ϕ est négligeable, le développement de ϕ selon l'équation (D.21) conduit à :

$$\begin{aligned} F_{\phi 1} \;=\; & -\frac{R\rho_0}{2c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\cos^2\Phi_i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\cos(n\theta)\right)^2\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ & -\frac{R\rho_0}{2c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\sin^2\Phi_i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\cos(n\theta)\right)^2\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ & +\frac{R\rho_0}{c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\omega_i^2\cos\Phi_i\sin\Phi_i\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\cos(n\theta)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,i}\cos(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.33}$$

La propriété (D.11) donne alors :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\phi 1} \;=\; & -\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\cos^2\Phi_i\left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,i}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i}\right)\right] \\ & -\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\sin^2\Phi_i\left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,i}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}\right)\right] \\ & +\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\cos\Phi_i\sin\Phi_i\left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,i}+\mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,i}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,i}\right)\right)\right]. \end{aligned}} \tag{D.34}$$

$F_{\phi 1}$ est donc la somme des contributions d'ordre 2 de chaque harmonique liées aux fluctuations de la densité d'énergie potentielle acoustique.

En ce qui concerne le terme $F_{\phi 2}$ de l'équation (D.32), le développement de ϕ selon les contributions des différents modes acoustiques donne :

$$\begin{aligned} F_{\phi 2} \;=\; & -\frac{R\rho_0}{c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\omega_i\omega_j\cos\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\cos(n\theta)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{m,\,j}\cos(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ & -\frac{R\rho_0}{c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\omega_i\omega_j\sin\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\cos(n\theta)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,j}\cos(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ & +\frac{R\rho_0}{c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\omega_i\omega_j\cos\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\cos(n\theta)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,j}\cos(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ & +\frac{R\rho_0}{c_0^2}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\omega_i\omega_j\sin\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\cos(n\theta)\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{m,\,j}\cos(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.35}$$

D'après la propriété (D.11), on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\phi 2} = & -\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\alpha_i\alpha_j\cos\Phi_i\cos\Phi_j\left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,j}+\mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{R}_{0,\,j}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & -\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\alpha_i\alpha_j\sin\Phi_i\sin\Phi_j\left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,j}+\mathcal{S}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,j}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & +\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\alpha_i\alpha_j\cos\Phi_i\sin\Phi_j\left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,j}+\mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,j}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & +\frac{\pi\rho_0}{R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\alpha_i\alpha_j\sin\Phi_i\cos\Phi_j\left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,j}+\mathcal{S}_{1,\,i}\mathcal{R}_{0,\,j}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)\right)\right]. \end{aligned}} \tag{D.36}$$

Contrairement à $F_{\phi 1}$, la composante $F_{\phi 2}$ représente les termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation analytique de F_q

Le terme F_q de l'équation (D.23) est un terme d'ordre 2 issu des fluctuations de la densité d'énergie cinétique acoustique. L'expression de q^2 en coordonnées cylindriques est :

$$\begin{aligned} q^2 &= \|-\boldsymbol{\nabla}\phi\|^2, \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{D.37}$$

En utilisant cette formulation et la condition à la limite (D.2), le terme F_q de l'équation (D.23) devient :

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{R\rho_0}{2}\int_0^{2\pi}\left[U^2\cos^2\theta+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}_{|r=R}\right)^2\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \\ &= \frac{\rho_0}{2R}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}_{|r=R}\right)^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.38}$$

En décomposant le potentiel de vitesse selon les contributions de chaque mode acoustique, on a :

$$\begin{aligned} F_q = & \underbrace{\frac{\rho_0}{2R}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}_{|r=R}\right)^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{F_{q1}} \\ & \underbrace{+\frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}_{|r=R}\frac{\partial\phi_j}{\partial\theta}_{|r=R}\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}_{F_{q2}}. \end{aligned} \tag{D.39}$$

Après développement de ϕ_i selon l'équation (D.21), le terme F_{q1} devient :

$$\begin{aligned} F_{q1} \quad = \quad & \frac{\rho_0}{2R}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sin^2\Phi_i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\right)^2\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ + \quad & \frac{\rho_0}{2R}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\cos^2\Phi_i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\right)^2\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ + \quad & \frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sin\Phi_i\cos\Phi_i\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,i}m\sin(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.40}$$

D'après la propriété (D.27), le terme F_{q1} s'écrit finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{q1} \quad = \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sin^2\Phi_i\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i}n(n+1)\right] \\ + \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\cos^2\Phi_i\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}n(n+1)\right] \\ + \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sin\Phi_i\cos\Phi_i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,i}\right)n(n+1)\right]. \end{aligned}} \tag{D.41}$$

F_{q1} est donc la somme des contributions d'ordre 2 de chaque harmonique liées aux fluctuations de la densité d'énergie cinétique acoustique.

En ce qui concerne le terme F_{q2} de l'équation (D.39), le développement de ϕ selon les contributions des différents modes acoustiques donne :

$$\begin{aligned} F_{q2} \quad = \quad & \frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[[\sin\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{m,\,j}m\sin(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ + \quad & \frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[[\cos\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,j}m\sin(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ + \quad & \frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[[\sin\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{S}_{m,\,j}m\sin(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ + \quad & \frac{\rho_0}{R}\int_0^{2\pi}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[[\cos\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}n\sin(n\theta)\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{m,\,j}m\sin(m\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{D.42}$$

D'après la propriété (D.27), on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{q2} \quad = \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\sin\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right] \\ + \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\cos\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right] \\ + \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\sin\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right] \\ + \quad & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\cos\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right]. \end{aligned}} \tag{D.43}$$

Contrairement à F_{q1}, la composante F_{q2} représente les termes de couplage entre les différents harmoniques proportionnels à leurs amplitudes respectives.

Formulation complète de F_{rad}

Puisque l'on a considéré tout au long de ce chapitre le terme h constant dans l'expression du potentiel de vitesse, on obtient au final le système d'équations suivant qui n'est valable que pour des vitesses de déplacement faibles de l'objet considéré :

Système d'équations (D.44)

$$F_{rad} = F_l + F_U + F_{\phi 1} + F_{\phi 2} + F_{q1} + F_{q2},$$

$$F_l = \pi R \rho_0 \sum_{i=1}^{N_h} \left[\omega_i \left(\mathcal{S}_{1,\,i} \sin\Phi_i - \mathcal{R}_{1,\,i} \cos\Phi_i\right)\right],$$

$$F_U = -\frac{\pi \rho_0 \eta}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\mathcal{R}_{1,\,i} \sin\Phi_i + \mathcal{S}_{1,\,i} \cos\Phi_i\right] \sum_{i=1}^{N_h} \left[\mathcal{R}_{2,\,i} \sin\Phi_i + \mathcal{S}_{2,\,i} \cos\Phi_i\right],$$

$$\begin{aligned} F_{\phi 1} = & - \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos^2\Phi_i \left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,i} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i}\right)\right] \\ & - \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \sin^2\Phi_i \left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,i} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}\right)\right] \\ & + \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\alpha_i^2 \cos\Phi_i \sin\Phi_i \left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,i} + \mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,i} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i} + \mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,i}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\phi 2} = & - \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{1 \le i < j \le N_h} \left[\alpha_i \alpha_j \cos\Phi_i \cos\Phi_j \left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,j} + \mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{R}_{0,\,j} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j} + \mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & - \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{1 \le i < j \le N_h} \left[\alpha_i \alpha_j \sin\Phi_i \sin\Phi_j \left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,j} + \mathcal{S}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,j} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j} + \mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & + \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{1 \le i < j \le N_h} \left[\alpha_i \alpha_j \cos\Phi_i \sin\Phi_j \left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,j} + \mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{S}_{0,\,j} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j} + \mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)\right)\right] \\ & + \frac{\pi \rho_0}{R} \sum_{1 \le i < j \le N_h} \left[\alpha_i \alpha_j \sin\Phi_i \cos\Phi_j \left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,j} + \mathcal{S}_{1,\,i}\mathcal{R}_{0,\,j} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j} + \mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{q1} = & \frac{\pi \rho_0}{2R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sin^2\Phi_i \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i} n(n+1)\right] \\ & + \frac{\pi \rho_0}{2R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\cos^2\Phi_i \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i} n(n+1)\right] \\ & + \frac{\pi \rho_0}{2R} \sum_{i=1}^{N_h} \left[\sin\Phi_i \cos\Phi_i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i} + \mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,i}\right) n(n+1)\right], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{q2} \;=\; & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\sin\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right]\\
+\; & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\cos\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right]\\
+\; & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\sin\Phi_i\cos\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,j}+\mathcal{R}_{n+1,\,i}\mathcal{S}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right]\\
+\; & \frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{1\le i<j\le N_h}\left[\cos\Phi_i\sin\Phi_j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,j}+\mathcal{S}_{n+1,\,i}\mathcal{R}_{n,\,j}\right)n(n+1)\right].
\end{aligned}
$$

D.2 Formulation de la force de radiation acoustique moyenne

La moyenne temporelle de la force de radiation acoustique est définie par :

$$\langle F_{rad}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T F_{rad}\,\mathrm{d}t, \tag{D.45}$$

où T est la période acoustique, également définie comme l'inverse de la fréquence d'oscillation. Plusieurs harmoniques de fréquence $f_{ac,\,i} = i f_{ac,\,1}$ sont considérés. Comme au chapitre 3, la période de moyenne T est la période acoustique la plus élevée, *i.e.* $T = T_1$. D'après la formulation analytique réalisée précédemment, la moyenne temporelle de la force de radiation acoustique peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
\langle F_{rad}\rangle_T &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(F_l + F_U + F_\phi + F_q\right)\,\mathrm{d}t,\\
&= \langle F_l\rangle_T + \langle F_U\rangle_T + \langle F_{\phi 1}\rangle_T + \langle F_{\phi 2}\rangle_T + \langle F_{q1}\rangle_T + \langle F_{q2}\rangle_T.
\end{aligned} \tag{D.46}
$$

Par ailleurs, puisque chaque mode acoustique est un harmonique du mode principal de fréquence $f_{ac,\,1}$, on a :

$$\int_0^T \cos\Phi_i\cos\Phi_j\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{T}{2} & \text{si} \quad i = j,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{D.47}$$

$$\int_0^T \sin\Phi_i\sin\Phi_j\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{T}{2} & \text{si} \quad i = j,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{D.48}$$

$$\int_0^T \cos\Phi_i\sin\Phi_j\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \int_0^T \sin\Phi_i\cos\Phi_j\,\mathrm{d}t = 0. \tag{D.49}$$

On obtient alors au final :

$$\boxed{\langle F_l\rangle_T = 0,} \tag{D.50}$$

$$\boxed{\langle F_U\rangle_T = -\frac{\pi\rho_0\eta}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\mathcal{R}_{1,\,i}\mathcal{R}_{2,\,i} + \mathcal{S}_{1,\,i}\mathcal{S}_{2,\,i}\right],} \tag{D.51}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle F_{\phi 1}\rangle_T &= -\frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\left(\mathcal{R}_{0,\,i}\mathcal{R}_{1,\,i}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i}\right)\right]\\ &\quad -\frac{\pi\rho_0}{2R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\alpha_i^2\left(\mathcal{S}_{0,\,i}\mathcal{S}_{1,\,i}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}\right)\right],\end{aligned}} \qquad \boxed{\langle F_{\phi 2}\rangle_T = 0,} \tag{D.52}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle F_{q1}\rangle_T &= \frac{\pi\rho_0}{4R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_{n,\,i}\mathcal{R}_{n+1,\,i}n(n+1)\right]\\ &\quad +\frac{\pi\rho_0}{4R}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{n,\,i}\mathcal{S}_{n+1,\,i}n(n+1)\right],\end{aligned}} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle F_{q2}\rangle_T = 0.} \tag{D.53}$$

Comme dans le cas d'un objet sphérique, la déviation moyenne du cylindre par la force de radiation acoustique provient uniquement des termes d'ordre 2 de l'équation (3.10). De plus, les termes de couplage entre harmoniques s'annulent. En conséquence, la force moyenne subie par l'objet cylindrique est la somme des contributions moyennes de chaque harmonique isolé. Dans le cas mono-harmonique, la formulation analytique complète proposée par Ficuciello [51] pour $n \in [0, \infty]$ est bien retrouvée :

$$\begin{aligned}\langle F_{rad}\rangle_T = -\frac{\pi\rho_0}{4R}\quad &\Big[2\left(\mathcal{R}_0\mathcal{R}_1+\mathcal{S}_0\mathcal{S}_1\right)\alpha^2+\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2+\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\right)\left(\alpha^2-2+2\eta\right)\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\mathcal{R}_n\mathcal{R}_{n+1}+\mathcal{S}_n\mathcal{S}_{n+1}\right)\left(\alpha^2-n(n+1)\right)\Big].\end{aligned} \tag{D.54}$$

Annexe E

Formulation analytique de la pression de radiation acoustique issue d'une onde acoustique plane sans obstacle

E.1 Onde acoustique plane progressive

Dans le cas d'une onde acoustique plane progressive se propageant dans un milieu à l'arrêt libre de tout obstacle, le potentiel de vitesse de l'onde incidente peut s'exprimer comme :

$$\phi = Ae^{\mathbf{i}(\omega t - k_{ac}X)}, \tag{E.1}$$

avec $A = p_{ac}/(\rho_0 c_0 k_{ac})$, p_{ac} l'amplitude des fluctuations de pression, ρ_0 et c_0 la masse volumique du milieu et la vitesse du son à l'état de référence, $k_{ac} = \omega/c_0$, $\omega = 2\pi f_{ac}$ et enfin f_{ac} la fréquence d'oscillation. Dans cette expression, t représente le temps et X la position sur l'axe de propagation acoustique. La partie réelle du potentiel de vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\{\phi\} &= A\cos(\omega t - k_{ac}X), \\ &= A\left[\cos(\omega t)\cos(k_{ac}X) + \sin(\omega t)\sin(k_{ac}X)\right]. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Pour simplifier, l'opérateur $\mathbb{R}\{\cdot\}$ sera omis par la suite. D'après l'équation (3.10) définissant les fluctuations de pression p' et l'équation (3.11), la pression de radiation acoustique s'exprime :

$$\begin{aligned} p_{rad} &= \frac{1}{T}\int_0^T p'\,\mathrm{d}t, \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \rho_0 A\omega\left[\cos(\omega t)\sin(k_{ac}X) - \sin(\omega t)\cos(k_{ac}X)\right]\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\rho_0}{2c_0^2}A^2\omega^2\left[\cos(\omega t)\sin(k_{ac}X) - \sin(\omega t)\cos(k_{ac}X)\right]^2\,\mathrm{d}t \\ &- \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\rho_0}{2}A^2k_{ac}^2\left[\sin(\omega t)\cos(k_{ac}X) - \cos(\omega t)\sin(k_{ac}X)\right]^2\,\mathrm{d}t, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{E.3}$$

avec $T = 1/f_{ac}$ la période acoustique. Dans le cas d'une onde acoustique plane progressive, la pression de radiation acoustique est donc nulle en tout point tant qu'elle ne rencontre aucun objet.

E.2 Onde acoustique plane stationnaire

Lorsque deux ondes planes progressives de même fréquence f_{ac} et de sens de propagation contraires se rencontrent, il en résulte un champ acoustique stationnaire. Lorsque le milieu est à l'arrêt et libre de tout obstacle, le potentiel de vitesse de l'onde stationnaire peut être formulé :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{2}\left(e^{-\mathbf{i}\,k_{ac}X} + e^{\mathbf{i}\,k_{ac}X}\right)e^{\mathbf{i}\,\omega t}, \\ &= A\cos\left(k_{ac}X\right)e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{E.4}$$

avec $A = p_{ac}/(\rho_0 c_0 k_{ac})$, p_{ac} l'amplitude des fluctuations de pression résultantes, ρ_0 et c_0 la masse volumique du milieu et la vitesse du son à l'état de référence, $k_{ac} = \omega/c_0$ et enfin $\omega = 2\pi f_{ac}$. Dans cette expression, t représente le temps et X la position sur l'axe de propagation acoustique. La partie réelle du potentiel de vitesse s'écrit alors :

$$\mathbb{R}\left\{\phi\right\} = A\cos\left(k_{ac}X\right)\cos\left(\omega t\right). \tag{E.5}$$

Pour simplifier, l'opérateur $\mathbb{R}\left\{\cdot\right\}$ sera omis par la suite. D'après l'équation (3.10) définissant les fluctuations de pression p' et l'équation (3.11), la pression de radiation acoustique s'exprime :

$$\begin{aligned} p_{rad} &= \frac{1}{T}\int_0^T p'\,\mathrm{d}t, \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^T \rho_0 A\omega\cos\left(k_{ac}X\right)\sin\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &\quad +\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\rho_0}{2c_0^2}A^2\omega^2\cos^2\left(k_{ac}X\right)\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &\quad -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\rho_0}{2}A^2k_{ac}^2\sin^2\left(k_{ac}X\right)\cos^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t, \\ &= \frac{\rho_0 A^2 k_{ac}^2}{4}\cos\left(2k_{ac}X\right), \end{aligned} \tag{E.6}$$

avec $T = 1/f_{ac}$ la période acoustique. Ainsi, dans le cas d'une onde acoustique plane stationnaire sans obstacle, la pression de radiation acoustique dépend de la position sur l'axe acoustique. De plus, p_{rad} dépend du carré de l'amplitude. Elle peut donc être négligée lorsque l'amplitude d'oscillation de pression est très faible. C'est la raison pour laquelle la pression de radiation acoustique est généralement mentionnée comme étant un mécanisme issu des non-linéarités acoustiques.

Annexe F

Conditions aux limites de non-réflexion dans le code Cedre

La modélisation des écoulements aux frontières d'un domaine de simulation est un sujet délicat dans le domaine de la simulation numérique par l'approche des volumes finis. Pour réduire au maximum le coût de calcul, le domaine simulé est généralement limité et des frontières artificielles sont utilisées afin de reproduire le plus fidèlement possible le comportement du fluide *à l'infini*. Lors de simulations faisant intervenir la propagation d'ondes acoustiques dans le domaine de calcul, il est important de permettre aux perturbations de sortir du domaine sans générer de fluctuation non physique qui viendrait influencer l'écoulement amont. On parle alors de conditions aux limites de non-réflexion. Parmi les méthodes classiquement utilisées, on trouve notamment les décompositions en ondes caractéristiques (cf. Lodato *et al.* [101] pour une application à un problème 3D). Dans le cas du code Cedre, le modèle formulé par Huet et Courbet [73] est différent de ceux proposés dans la littérature et consiste à relaxer directement le jeu de variables considéré aux frontières du domaine de calcul. Sur la base du rapport de Huet et Courbet [73], la présente annexe fournit une description théorique du modèle et une évaluation de son caractère non réfléchissant par la simulation numérique d'un cas simple monodimensionnel.

F.1 Formulation des conditions aux limites

Soit $\boldsymbol{W}$ le vecteur des n_w variables w définissant l'état du fluide en chaque point de la frontière. Dans le cas d'une limite de type *entrée-sortie*, les variables w correspondent aux variables naturelles de pression p, température T, vitesse $\boldsymbol{u}$ et fractions massiques Y_i, avec l'indice i désignant n'importe quelle espèce du fluide. La formulation des conditions aux limites de ce type fait appel à trois fonctions de la position $\boldsymbol{x}_l$ le long de la frontière et du temps t :

1. $\boldsymbol{W}_{imp}$ désigne la valeur du vecteur $\boldsymbol{W}$ que souhaite imposer l'utilisateur,
2. $\boldsymbol{W}_i$ représente l'état du fluide dans les cellules dites *de bord*, c'est-à-dire les cellules internes du domaine de calcul directement en contact avec la frontière,
3. $\widetilde{\boldsymbol{W}}_l$ est la valeur reconstruite à la frontière du champ de $\boldsymbol{W}$ interne au domaine de calcul. Pour une variable donnée w, $\widetilde{w}_l$ pourra par exemple être évaluée par une méthode de reconstruction d'ordre 2 à partir de w_i et de son gradient $\boldsymbol{\nabla} w_i$ dans les cellules de bord comme : $\widetilde{w}_l = w_i + \boldsymbol{\nabla} w_i \cdot \boldsymbol{BM}$ avec $\boldsymbol{B}$ le centre de la cellule de bord considérée et $\boldsymbol{M}$ le centre de la face limite associée,
4. $\boldsymbol{W}_m$ représente l'état du fluide modélisé en chaque point de la limite et à chaque instant. Cette fonction dépend des deux états $\boldsymbol{W}_{imp}$ et $\widetilde{\boldsymbol{W}}_l$ ainsi que de la nature de chaque variable w (pression, température, etc.),
5. $\boldsymbol{W}_l$ représente l'état du fluide résultant finalement de la formulation des conditions aux limites.

Pour les limites de type *entrée-sortie*, on formule l'état $\boldsymbol{W}_m$ comme :

$$\boldsymbol{W}_m = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{W}_{imp} + \left(\boldsymbol{I}_{n_w} - \boldsymbol{\sigma}\right)\widetilde{\boldsymbol{W}}_l, \tag{F.1}$$

avec $\boldsymbol{I}_{n_w}$ la matrice identité d'ordre n_w et σ une matrice diagonale définie comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u \boldsymbol{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_Y \boldsymbol{I}_{n_{esp}} \end{pmatrix}, \tag{F.2}$$

où n_{esp} désigne le nombre d'espèces. Les valeurs des coefficients de cette matrice les plus adaptées au regard de la théorie des caractéristiques sont :

$$\begin{array}{lllllll} \text{entrée subsonique} & : & \sigma_p = 0, & \sigma_T = 1, & \sigma_u = 1, & \sigma_Y = 1, \\ \text{entrée supersonique} & : & \sigma_p = 1, & \sigma_T = 1, & \sigma_u = 1, & \sigma_Y = 1, \\ \text{sortie subsonique} & : & \sigma_p = 1, & \sigma_T = 0, & \sigma_u = 0, & \sigma_Y = 0, \\ \text{sortie supersonique} & : & \sigma_p = 0, & \sigma_T = 0, & \sigma_u = 0, & \sigma_Y = 0. \end{array} \tag{F.3}$$

La méthode de non-réflexion des conditions aux limites développée dans le code Cedre est finalement basée sur une méthode de relaxation de l'état du fluide à la limite $\boldsymbol{W}_l$ vers l'état modélisé $\boldsymbol{W}_m$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}_l}{\partial t} = \boldsymbol{f}_{rel} \cdot \left(\boldsymbol{W}_m - \boldsymbol{W}_l\right). \tag{F.4}$$

À l'instar de σ, la matrice de relaxation $\boldsymbol{f}_{rel}$ est diagonale et définie comme :

$$\boldsymbol{f}_{rel} = \begin{pmatrix} f_{rel,p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{rel,T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{rel,u}\boldsymbol{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{rel,Y}\boldsymbol{I}_{n_{esp}} \end{pmatrix}. \tag{F.5}$$

Selon le type de la condition à la limite considérée (entrée ou sortie sub- ou supersonique), l'état de chaque variable w est ainsi relaxé vers l'état w_{imp} ou l'état $\widetilde{w}_l$ à la fréquence de relaxation $f_{rel,w}$. Les valeurs de $f_{rel,w}$ dépendent elles aussi du type de la condition à la limite considérée, de sorte que :

$$\begin{aligned} f_{rel,w} &= \frac{1}{\Delta t} \quad \text{si} \quad \sigma_w = 1, \\ f_{rel,w} &= \widetilde{f} \quad \text{si} \quad \sigma_w = 0, \end{aligned} \tag{F.6}$$

avec Δt le pas de temps d'intégration temporelle.

De manière à décrire le fonctionnement des conditions de non-réflexion, intéressons-nous particulièrement au cas d'une limite de type *sortie subsonique*, pour laquelle la formulation (F.3) de σ et le modèle (F.1) de $\boldsymbol{W}_m$ stipulent que seule la pression est relaxée vers la valeur imposée par l'utilisateur p_{imp}, tandis que les autres variables d'état sont relaxées vers les états reconstruits aux faces $\widetilde{w}_l$. Dans ce cas, le système relaxé s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(p_{imp} - p_l\right), \\ \frac{\partial T_l}{\partial t} &= \widetilde{f} \cdot \left(\widetilde{T}_l - T_l\right), \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial t} &= \widetilde{f} \cdot \left(\widetilde{\boldsymbol{u}}_l - \boldsymbol{u}_l\right), \\ \frac{\partial \boldsymbol{Y}_l}{\partial t} &= \widetilde{f} \cdot \left(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_l - \boldsymbol{Y}_l\right), \end{aligned} \tag{F.7}$$

avec $\boldsymbol{Y}$ le vecteur composé des fractions massiques de chaque espèce Y_i. Toutes les variables, exceptée la pression, sont ainsi relaxées à une fréquence caractéristique commune $\widetilde{f}$ de manière à assurer la non-réflexion des ondes acoustiques aux conditions aux limites de sortie subsonique. Il est possible de démontrer que ce type de condition à la limite agit, du point de vue des ondes acoustiques, comme un filtre passe-bas (Huet et Courbet [73]). On peut alors écrire le module $|R|$ et la phase φ du coefficient de réflexion R comme :

$$|R|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2\omega}{\widetilde{f}}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{2\omega}{\widetilde{f}}\right), \tag{F.8}$$

avec $\omega = 2\pi f_{ac}$ la pulsation de l'onde incidente de fréquence f_{ac}. Le coefficient de réflexion R représente le rapport entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Les deux expressions précédentes signifient donc que plus une onde aura une fréquence faible, et plus elle sera réfléchie par la condition à la limite. Il est également possible de réécrire ces expressions en faisant apparaître la fréquence de coupure de la condition à la limite définie par $f_c = \widetilde{f}/(4\pi)$. On obtient alors :

$$|R|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{f_{ac}}{f_c}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{f_{ac}}{f_c}\right). \tag{F.9}$$

À la fréquence de coupure, le module du coefficient de réflexion vaut $1/\sqrt{2}$.

En pratique, l'utilisateur contrôle le niveau de réflexion de la condition à la limite à l'aide d'un coefficient de relaxation défini par $\sigma_{rel} = \widetilde{f}\,\Delta t$. On peut finalement écrire la formulation (F.8) comme :

$$|R|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{4\pi f_{ac}\Delta t}{\sigma_{rel}}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{4\pi f_{ac}\Delta t}{\sigma_{rel}}\right). \tag{F.10}$$

Dans le cas d'une condition à la limite de type *entrée subsonique*, le coefficient de réflexion suit plutôt :

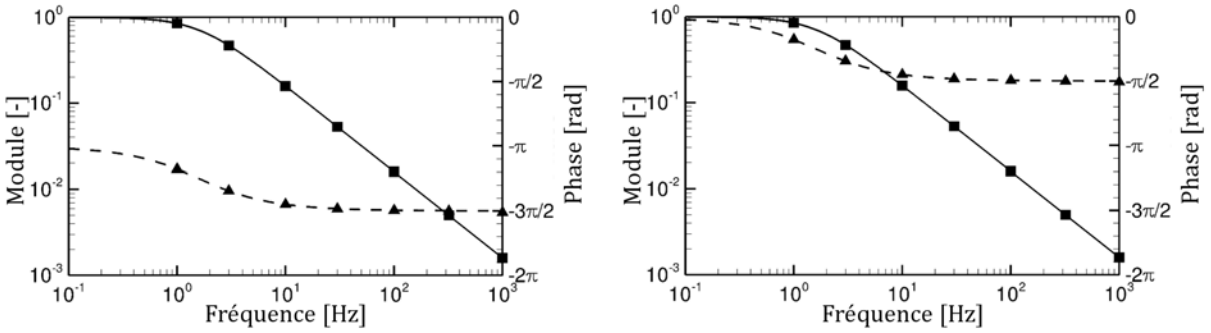
$$|R|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{4\pi f_{ac}\Delta t}{\sigma_{rel}}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{4\pi f_{ac}\Delta t}{\sigma_{rel}}\right). \tag{F.11}$$

F.2 Évaluation du caractère non réfléchissant

L'évaluation du caractère non réfléchissant des conditions aux limites définies précédemment est réalisée par Huet et Courbet [73] sur plusieurs cas tests. Nous présentons ici les résultats particuliers d'une onde acoustique mutli-harmonique se propageant dans un conduit 1D de longueur 1 m. L'onde acoustique est définie par les fluctuations de pression suivantes :

$$p'(t) = \sum_{i=1}^{7} p_{ac,\,i} \sin\left(2\pi f_{ac,\,i} t + \psi_i\right), \tag{F.12}$$

où $p_{ac,\,i}$, $f_{ac,\,i}$ et ψ_i sont respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase de chaque mode i. Les amplitudes de fluctuation de pression sont toutes suffisamment faibles pour pouvoir considérer que l'onde acoustique se propage selon un régime linéaire. L'amplitude de chaque mode acoustique ne peut donc pas augmenter au cours de la propagation de l'onde, car il n'y a aucun transfert d'énergie des



(a) Sortie subsonique **(b) Entrée subsonique**

Figure F.1 – Module et phase du coefficient de réflexion. Lignes : théorie, symboles : simulation numérique.

fréquences les plus faibles aux plus élevées. Les phases sont quant à elles tirées aléatoirement et les valeurs des fréquences acoustiques considérées sont :

$$\begin{array}{llllllll} f_{ac,\,1} & = & 1\,\text{Hz}, & f_{ac,\,2} & = & 3\,\text{Hz}, & f_{ac,\,3} & = & 10\,\text{Hz}, \\ f_{ac,\,4} & = & 30\,\text{Hz}, & f_{ac,\,5} & = & 100\,\text{Hz}, & f_{ac,\,6} & = & 320\,\text{Hz}, \quad f_{ac,\,7} = 1\,000\,\text{Hz}. \end{array} \tag{F.13}$$

À la fréquence la plus élevée, l'onde acoustique est résolue avec environ 70 points par longueur d'onde. Un écoulement moyen est également imposé dans le conduit pour que la vitesse moyenne vaille $50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, que la température moyenne vaille 300 K et que la pression moyenne vaille 1 bar. Le coefficient de relaxation imposé aux conditions aux limites est $\sigma = 10^{-4}$ et le pas de temps vaut $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ s, ce qui correspond à une fréquence de coupure de 1.6 Hz environ. Le module et la phase du coefficient de réflexion R, mesurés à partir des résultats de la simulation numérique aux deux conditions aux limites de sortie et d'entrée subsoniques de part et d'autre de la cavité, sont comparés en figure F.1 à leurs expressions théoriques respectives (F.10) et (F.11). On observe un très bon accord entre la théorie et la simulation numérique, tant pour l'amplitude que pour la phase du coefficient de réflexion, ce qui valide ainsi la capacité de non-réflexion des conditions aux limites.

Références

[1] Abramowitz, M. et Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* Tenth edition. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1972 (cf. pp. 276, 278).

[2] Achury, J. et Polifke, W. Modulation of spray droplet number density and size distribution by an acoustic field. *The Journal of Computational Multiphase Flows* 9:1 (2017), 32–46. doi : 10.1177/1757482X17690751 (cf. pp. 36, 190, 191, 217).

[3] Anderson, W. E. et Yang, V. *Liquid Rocket Engine Combustion Instability.* T. 169. Progress in Astronautics and Aeronautics. Pennsylvania State University, 1995 (cf. p. 7).

[4] Apte, S., Gorokhovski, M. et Moin, P. LES of atomizing spray with stochastic modeling of secondary breakup. *International Journal of Multiphase Flow* 29:9 (2003), 1503–1522. doi : 10.1016/S0301-9322(03)00111-3 (cf. p. 49).

[5] Baer, M. R. et Nunziato, J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *International Journal of Multiphase Flow* 12:6 (1986), 861–889. doi : 10.1016/0301-9322(86)90033-9 (cf. p. 42).

[6] Baillot, F. et Rutard, N. Private discussion on the analytical formulation of the acoustic radiation force (2019) (cf. p. 89).

[7] Baillot, F., Blaisot, J.-B., Boisdron, G. et Dumouchel, C. Behaviour of an air-assisted jet submitted to a transverse high-frequency acoustic field. *Journal of Fluid Mechanics* 640 (2009), 305–342. doi : 10.1017/S002211200999139X (cf. pp. 20, 21, 24, 31–36, 124, 129, 130, 135, 136, 158, 161, 162, 176, 185, 218).

[8] Barrère, M. et Williams, F. Comparison of combustion instabilities found in various types of combustion chambers. *Symposium (International) on Combustion* 12:1 (1969), 169–181. doi : 10.1016/S0082-0784(69)80401-7 (cf. p. 4).

[9] Beau, P.-A. Modélisation de l'atomisation d'un jet liquide. Application aux sprays Diesel. Thèse de doct. Université de Rouen, 2006 (cf. p. 51).

[10] Blackstock, D. T. Connection between the Fay and Fubini Solutions for Plane Sound Waves of Finite Amplitude. *The Journal of the Acoustical Society of America* 39:6 (1966), 1019–1026. doi : 10.1121/1.1909986 (cf. pp. 100, 101, 104, 137).

[11] Blanchard, G. Modélisation et simulation multi-échelles de l'atomisation d'une nappe liquide cisaillée. Thèse de doct. Université de Toulouse, 2014 (cf. p. 51).

[12] Bouchut, F., Jin, S. et Li, X. Numerical Approximations of Pressureless and Isothermal Gas Dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 41:1 (2003), 135–158 (cf. p. 75).

[13] Brackbill, J. U., Kothe, D. B. et Zemach, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics* 100:2 (1992), 335–354. doi : 10.1016/0021-9991(92)90240-Y (cf. pp. 41, 55).

[14] Brear, M. J., Nicoud, F., Talei, M., Giauque, A. et Hawkes, E. R. Disturbance energy transport and sound production in gaseous combustion. *Journal of Fluid Mechanics* 707 (2012), 53–73. doi : 10.1017/jfm.2012.264 (cf. p. 5).

[15] Buffum, F. G. et Williams, F. A. Response of Turbulent Jets to Transverse Acoustic Fields. *Proceedings of the 1967 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute* (1967), 247–276 (cf. pp. 30, 32).

[16] Buresti, G., Talamelli, A. et Petagna, P. Experimental characterization of the velocity field of a coaxial jet configuration. *Experimental Thermal and Fluid Science* 9:2 (1994), 135–146. doi : 10.1016/0894-1777(94)90106-6 (cf. p. 135).

[17] Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations.* Third edition. John Wiley & Sons, Ltd, 2016. doi : 10.1002/9781119121534 (cf. pp. 76, 77).

[18] Carpentier, J.-B., Baillot, F., Blaisot, J.-B. et Dumouchel, C. Behavior of cylindrical liquid jets evolving in a transverse acoustic field. *Physics of Fluids* 21:23601 (2009). doi : 10.1063/1.3075823 (cf. pp. 31, 33, 34, 224–230, 234).

[19] Chehroudi, B. et Talley, D. Initial Results From A Cryogenic Coaxial Injector In An Acoustic Field. *41st AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.* Nevada, 2003. doi : 10.2514/6.2003-1339 (cf. p. 31).

[20] Chehroudi, B. et Talley, D. Interaction of acoustic waves with a cryogenic nitrogen jet at sub- and supercritical pressures. *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.* Nevada, 2002. doi : 10.2514/6.2002-342 (cf. pp. 31, 32).

[21] Chehroudi, B., Davis, D. et Talley, D. The Effects of Pressure and Acoustic Field on a Cryogenic Coaxial Jet. *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.* Nevada, 2004. doi : 10.2514/6.2004-1330 (cf. p. 31).

[22] Chesnel, J., Reveillon, J., Menard, T. et Demoulin, F.-X. Large eddy simulation of liquid jet atomization. *Atomization and Sprays* 21:9 (2011), 711–736. doi : 10.1615/AtomizSpr.2012003740 (cf. p. 41).

[23] Coquel, F., Gallouët, T., Hérard, J. et Seguin, N. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *Comptes Rendus Mathematique* 334:10 (2002), 927–932. doi : 10.1016/S1631-073X(02)02366-X (cf. p. 43).

[24] Cordesse, P., Kokh, S., Di Battista, R., Drui, F. et Massot, M. Derivation of a two-phase flow model with two-scale kinematics, geometric variables and surface tension by mean of variational calculus. *Submitted to NASA Technical Memorandum, Proceedings of the 2018 Summer Program* (2019) (cf. p. 44).

[25] Crocco, L. et Zheng, X. *Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors.* Butterworths Scientific Publications, 1956 (cf. pp. 6, 8, 124).

[26] Culick, F. E. C. Nonlinear behavior of acoustic waves in combustion chambers—I. *Acta Astronautica* 3:9 (1976), 715–734. doi : 10.1016/0094-5765(76)90107-7 (cf. p. 8).

[27] Culick, F. E. C. *Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems.* AGARDograph, NATO/RTO-AG-AVT-039, 2006 (cf. p. 7).

[28] Davis, D. W. et Chehroudi, B. Measurements in an Acoustically Driven Coaxial Jet under Sub-, Near-, and Supercritical Conditions. *Journal of Propulsion and Power* 23:2 (2007), 364–374. doi : 10.2514/1.19340 (cf. pp. 31, 32, 34, 124).

[29] Davis, D. et Chehroudi, B. Shear-Coaxial Jets from a Rocket-Like Injector in a Transverse Acoustic Field at High Pressures. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.* Nevada, 2006. doi : 10.2514/6.2006-758 (cf. p. 31).

[30] Desjardins, O., Moureau, V. et Pitsch, H. An accurate conservative level set/ghost fluid method for simulating turbulent atomization. *Journal of Computational Physics* 227:18 (2008), 8395–8416. doi : 10.1016/j.jcp.2008.05.027 (cf. p. 40).

[31] Doinikov, A. A. Acoustic Radiation Pressure on a Rigid Sphere in a Viscous Fluid. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 447:1931 (1994), 447–466. doi : 10.1098/rspa.1994.0150 (cf. p. 216).

[32] Doinikov, A. A. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 267 (1994). doi : 10.1017/S0022112094001096 (cf. pp. 82, 118).

[33] Doisneau, F., Sibra, A., Dupays, J., Murrone, A., Laurent, F. et Massot, M. Numerical Strategy for Unsteady Two-Way Coupled Polydisperse Sprays : Application to Solid-Rocket Instabilities. *Journal of Propulsion and Power* 30:3 (2014), 727–748. doi : 10.2514/1.B34862 (cf. p. 76).

[34] Dorey, L.-H., Grenard, P., Matuszewski, L. et Selle, L. Experimental and Numerical Study of a Cooled Rocket Combustion Chamber. *Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference*. Japan, 2014. doi : 10.1615/IHTC15.cmb.009238 (cf. p. 9).

[35] Drew, D. A. et Passman, S. L. *Theory of multicomponent fluids*. Springer, 1999 (cf. p. 42).

[36] Dufour, G. Modélisation multi-fluide Eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées. Thèse de doct. Université Paul Sabatier Toulouse III, 2005 (cf. p. 72).

[37] Dufour, G. et Villedieu, P. A second-order multi-fluid model for evaporating sprays. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 39:5 (2005), 931–963. doi : 10.1051/m2an:2005041 (cf. p. 48).

[38] Dumouchel, C. On the experimental investigation on primary atomization of liquid streams. *Experiments in Fluids* 45:3 (2008), 371–422. doi : 10.1007/s00348-008-0526-0 (cf. pp. 19, 166).

[39] Dupif, V. Eulerian modeling and simulation of two-phase flows in solid rocket motors taking into account size polydispersion and droplet trajectory crossing. Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2018 (cf. p. 47).

[40] Emre, O., Kah, D., Jay, S., Tran, Q.-H., Velghe, A., de Chaisemartin, S., Fox, R. O., Laurent, F. et Massot, M. Eulerian moment methods for automotive sprays. *Atomization and Sprays* 25:3 (2015), 189–254. doi : 10.1615/AtomizSpr.2015011204 (cf. p. 46).

[41] Enright, D., Losasso, F. et Fedkiw, R. A fast and accurate semi-Lagrangian particle level set method. *Computers & Structures* 83:6 (2005), 479–490. doi : 10.1016/j.compstruc.2004.04.024 (cf. p. 40).

[42] Eroglu, H., Chigier, N. et Farago, Z. Coaxial atomizer liquid intact lengths. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 3:2 (1991), 303–308. doi : 10.1063/1.858139 (cf. pp. 28, 155).

[43] Essadki, M., Drui, F., Chaisemartin, S., Larat, A., Ménard, T. et Massot, M. Statistical modeling of the gas-liquid interface using geometrical variables : toward a unified description of the disperse and separated phase flows. *In revision for International Journal of Multiphase Flow* (2019) (cf. p. 44).

[44] Faraday, M. On the Forms and States assumed by Fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 121 (1831), 319–340 (cf. pp. 33, 176).

[45] Farago, Z. et Chigier, N. Morphological classification of disintegration of round liquis jets in a coaxial air stream. *Atomization and Sprays* 2:2 (1992), 137–153. doi : 10.1615/AtomizSpr.v2.i2.50 (cf. pp. 20, 21).

[46] Favre, A. Formulation of the Statistical Equations of Turbulent Flows with Variable Density. *Studies in Turbulence*. Springer, 1992, 324–341. doi : 10.1007/978-1-4612-2792-2_23 (cf. p. 58).

[47] Fay, R. D. Plane sound waves of finite amplitude. *The Journal of the Acoustical Society of America* 3:2 (1931), 222–241. doi : 10.1121/1.1915557 (cf. p. 101).

[48] Fdida, N., Hardi, J., Kawashima, H., Knapp, B. et Oschwald, M. Flame response to high-frequency oscillations in a cryogenic oxygen/hydrogen rocket engine combustor. *6th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS)*. Poland, 2015 (cf. p. 9).

[49] Fdida, N., Vingert, L., Ristori, A. et Le Sant, Y. Droplet size and velocity measurements in a cryogenic jet flame of a rocket-type combustor using high-speed imaging. *Atomization and Sprays* 26:5 (2016), 411–438. doi : 10.1615/AtomizSpr.2015011814 (cf. p. 128).

[50] Fedkiw, R. P., Aslam, T., Merriman, B. et Osher, S. A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method). *Journal of Computational Physics* 152:2 (1999), 457–492. doi : 10.1006/jcph.1999.6236 (cf. p. 41).

[51] Ficuciello, A. Analysis of high frequency/high amplitude acoustic field effects on coaxial injection : application to liquid rocket engines. Thèse de doct. Université Rouen Normandie, 2017 (cf. pp. 32, 34, 84, 85, 97, 111–113, 126, 131, 132, 158, 190, 210, 211, 219, 222–231, 233, 275, 277, 286).

[52] Ficuciello, A., Blaisot, J.-B., Richard, C. et Baillot, F. Investigation of air-assisted sprays submitted to high frequency transverse acoustic fields : Droplet clustering. *Physics of Fluids* 29:67103 (2017). doi : 10.1063/1.4985202 (cf. pp. 32–35, 83, 114, 116, 118, 124, 125, 127–130, 158, 159, 169, 176–179, 181, 204, 205).

[53] Fuster, D., Bagué, A., Boeck, T., Le Moyne, L., Leboissetier, A., Popinet, S., Ray, P., Scardovelli, R. et Zaleski, S. Simulation of primary atomization with an octree adaptive mesh refinement and VOF method. *International Journal of Multiphase Flow* 35:6 (2009), 550–565. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2009.02.014 (cf. p. 40).

[54] Gajan, P., Strzelecki, A., Platet, B., Lecourt, R. et Giuliani, F. Investigation of Spray Behavior Downstream of an Aeroengine Injector with Acoustic Excitation. *Journal of Propulsion and Power* 23:2 (2007), 390–397. doi : 10.2514/1.22394 (cf. p. 36).

[55] Gelb, A. et Vander Velde, W. E. *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. McGraw-Hill, 1968 (cf. p. 8).

[56] Giuliani, F. Etude du comportement d'un système d'injection de turbomachine en régime pulsatoire forcé. Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (Toulouse), 2002 (cf. p. 36).

[57] Gonzalez-Flesca, M., Schmitt, T., Ducruix, S. et Candel, S. Large eddy simulations of a transcritical round jet submitted to transverse acoustic modulation. *Physics of Fluids* 28:55106 (2016). doi : 10.1063/1.4948586 (cf. pp. 11, 31, 230, 240).

[58] Gonzalez-Flesca, M., Scouflaire, P., Schmitt, T., Ducruix, S., Candel, S. et Méry, Y. Reduced Order Modeling Approach to Combustion Instabilities of Liquid Rocket Engines. *AIAA Journal* (2018), 1–13. doi : 10.2514/1.J057098 (cf. pp. 10, 240).

[59] Gorokhovski, M. et Herrmann, M. Modeling Primary Atomization. *Annual Review of Fluid Mechanics* 40:1 (2008), 343–366. doi : 10.1146/annurev.fluid.40.111406.102200 (cf. p. 50).

[60] Goursolle, T. Propriétés acoustiques non linéaires classiques et non classiques : Applications au contrôle de santé des matériaux de l'industrie aéronautique. Thèse de doct. Université de Tours, 2007 (cf. p. 100).

[61] Gröning, S., Hardi, J. S., Suslov, D. et Oschwald, M. Injector-Driven Combustion Instabilities in a Hydrogen/Oxygen Rocket Combustor. *Journal of Propulsion and Power* 32:3 (2016), 560–573. doi : 10.2514/1.B35768 (cf. p. 9).

[62] Habiballah, M., Orain, M., Grisch, F., Vingert, L. et Gicquel, P. Experimental studies of high-pressure cryogenic flames on the MASCOTTE facility. *Combustion Science and Technology* 178:1 (2006), 101–128. doi : 10.1080/00102200500294486 (cf. p. 8).

[63] Hakim, L., Schmitt, T., Ducruix, S. et Candel, S. Dynamics of a transcritical coaxial flame under a high-frequency transverse acoustic forcing : Influence of the modulation frequency on the flame response. *Combustion and Flame* 162:10 (2015), 3482–3502. doi : 10.1016/j.combustflame.2015.05.022 (cf. pp. 11, 158).

[64] Hakim, L., Ruiz, A., Schmitt, T., Boileau, M., Staffelbach, G., Ducruix, S., Cuenot, B. et Candel, S. Large eddy simulations of multiple transcritical coaxial flames submitted to a high-frequency transverse acoustic modulation. *Proceedings of the Combustion Institute* 35:2 (2015), 1461–1468. doi : 10.1016/j.proci.2014.05.142 (cf. pp. 10, 12, 31).

[65] Hardi, J. S., Martinez, H. C. G., Oschwald, M. et Dally, B. B. LOx Jet Atomization Under Transverse Acoustic Oscillations. *Journal of Propulsion and Power* 30:2 (2014), 337–349. doi : 10.2514/1.B34979 (cf. pp. 9, 30, 82, 124, 162–164, 169).

[66] Hardi, J. S., Beinke, S. K., Oschwald, M. et Dally, B. B. Coupling of Cryogenic Oxygen – Hydrogen Flames to Longitudinal and Transverse Acoustic Instabilities. *Journal of Propulsion and Power* 30:4 (2014), 991–1004. doi : 10.2514/1.B35003 (cf. p. 9).

[67] Harrje, D. T. et Reardon, F. H. *Liquid propellant rocket combustion instability*. NASA Special Publication 194, 1972 (cf. p. 7).

[68] Herrmann, M. A parallel Eulerian interface tracking/Lagrangian point particle multi-scale coupling procedure. *Journal of Computational Physics* 229:3 (2010), 745–759. doi : 10.1016/j.jcp.2009.10.009 (cf. pp. 50, 51).

[69] Herrmann, M. On simulating primary atomization using the refined level set grid method. *Atomization and Sprays* 21:4 (2011), 283–301. doi : 10.1615/AtomizSpr.2011002760 (cf. pp. 40, 50).

[70] Hijlkema, J. Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes - Application aux propulseurs à poudre. Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (Toulouse), 1999 (cf. p. 45).

[71] Hirt, C. et Nichols, B. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics* 39:1 (1981), 201–225. doi : 10.1016/0021-9991(81)90145-5 (cf. p. 39).

[72] Huang, D. H. et Huzel, D. K. *Design of Liquid Propellant Rocket Engines*. Second edition. NASA Special Publication 125, 1971 (cf. pp. 30, 82, 124).

[73] Huet, M. et Courbet, B. *Évaluation analytique et numérique de la non-réflexion des conditions aux limites dans le code CEDRE*. Rapport technique 1/25494. ONERA, 2016 (cf. pp. 289, 291).

[74] Hussain, A. K.M. F. et Reynolds, W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* 41:2 (1970), 241. doi : 10.1017/S0022112070000605 (cf. pp. 190, 191).

[75] Ishii, M. et Hibiki, T. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Second edition. Springer, 2011 (cf. p. 42).

[76] Kah, D., Laurent, F., Massot, M. et Jay, S. A high order moment method simulating evaporation and advection of a polydisperse liquid spray. *Journal of Computational Physics* 231:2 (2012), 394–422. doi : 10.1016/j.jcp.2011.08.032 (cf. p. 49).

[77] Kim, D. et Moin, P. Numerical simulation of the breakup of a round liquid jet by a coaxial flow of gas with a subgrid Lagrangian breakup model. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*. 2011 (cf. p. 51).

[78] King, L. V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 147:861 (1934), 212–240. doi : 10.1098/rspa.1934.0215 (cf. pp. 32, 34, 82–85, 87–90, 97).

[79] Knapp, B., Farago, Z. et Oschwald, M. Interaction of LOX/GH2 Spray-Combustion with Acoustics. *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Nevada, 2007. doi : 10.2514/6.2007-572 (cf. p. 11).

[80] Kolmogorov, A. N. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 434:1890 (1991), 15–17. doi : 10.1098/rspa.1991.0076 (cf. p. 57).

[81] Kumara Gurubaran, R et Sujith, R. I. An Experimental Investigation of Non-Evaporative Sprays in Axial Acoustic Fields. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Nevada, 2008. doi : 10.2514/6.2008-1046 (cf. p. 36).

[82] Labois, M. Modélisation des déséquilibres mécaniques pour les écoulements diphasiques : approches par relaxation et par modèle réduit. Thèse de doct. Université de Provence (Aix-Marseille), 2008 (cf. pp. 42, 43).

[83] Labowsky, M. Calculation of the Burning Rates of Interacting Fuel Droplets. *Combustion Science and Technology* 22:5 (1980), 217–226. doi : 10.1080/00102208008952385 (cf. p. 118).

[84] Lamb, H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1895 (cf. pp. 86, 90, 109).

[85] Langenais, A., Vuillot, F., Troyes, J. et Bailly, C. Accurate simulation of the noise generated by a hot supersonic jet including turbulence tripping and nonlinear acoustic propagation. *Physics of Fluids* 31:16105 (2019). doi : 10.1063/1.5050905 (cf. pp. 102, 135, 240).

[86] Langenais, A., Vuillot, F., Peyret, C., Chaineray, G. et Bailly, C. Assessment of a Two-Way Coupling Methodology Between a Flow and a High-Order Nonlinear Acoustic Unstructured Solvers. *Flow, Turbulence and Combustion* 101:3 (2018), 681–703. doi : 10.1007/s10494-018-9928-0 (cf. p. 100).

[87] Lasheras, J. C. et Hopfinger, E. J. Liquid Jet Instability and Atomization in a Coaxial Gas Stream. *Annual Review of Fluid Mechanics* 32:1 (2000), 275–308. doi : 10.1146/annurev.fluid.32.1.275 (cf. pp. 19–21, 28, 128, 129).

[88] Laurent, F. et Massot, M. Multi-fluid modelling of laminar polydisperse spray flames : origin, assumptions and comparison of sectional and sampling methods. *Combustion Theory and Modelling* 5:4 (2001), 537–572. doi : 10.1088/1364-7830/5/4/303 (cf. pp. 46–48).

[89] Laurent, F., Sibra, A. et Doisneau, F. Two-Size Moment Multi-Fluid Model : A Robust and High-Fidelity Description of Polydisperse Moderately Dense Evaporating Sprays. *Communications in Computational Physics* 20:4 (2016), 902–943. doi : 10.4208/cicp.300615.050216a (cf. p. 48).

[90] Le Touze, C. Couplage entre modèles diphasiques à « phases séparées » et à « phase dispersée » pour la simulation de l'atomisation primaire en combustion cryotechnique. Thèse de doct. Université de Nice Sophia Antipolis, 2015 (cf. pp. 37, 44, 48, 50–52, 62–64, 68, 142, 155, 162).

[91] Le Touze, C., Murrone, A. et Guillard, H. Multislope MUSCL method for general unstructured meshes. *Journal of Computational Physics* 284 (2015), 389–418. doi : 10.1016/j.jcp.2014.12.032 (cf. p. 74).

[92] Lebas, R. Modélisation Eulérienne de l'Atomisation Haute Pression - Influences sur la Vaporisation et la Combustion Induite. Thèse de doct. Université de Rouen, 2007 (cf. p. 51).

[93] Lee, C. P. et Wang, T. G. Acoustic radiation pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America* 94:2 (1993), 1099–1109. doi : 10.1121/1.406957 (cf. p. 85).

[94] Lee, C. P., Anilkumar, A. V. et Wang, T. G. Static shape of an acoustically levitated drop with wave–drop interaction. *Physics of Fluids* 6:11 (1994), 3554–3566. doi : 10.1063/1.868414 (cf. p. 117).

[95] Lefebvre, A. H. Airblast atomization. *Progress in Energy and Combustion Science* 6:3 (1980), 233–261. doi : 10.1016/0360-1285(80)90017-9 (cf. p. 35).

[96] Leroux, B., Delabroy, O. et Lacas, F. Experimental study of coaxial atomizers scaling. Part I : Dense core zone. *Atomization and Sprays* 17:5 (2007), 381–407. doi : 10.1615/AtomizSpr.v17.i5.10 (cf. pp. 28, 30, 179).

[97] Leung, E., Jacobi, N. et Wang, T. Acoustic radiation force on a rigid sphere in a resonance chamber. *The Journal of the Acoustical Society of America* 70:6 (1981), 1762–1767 (cf. p. 82).

[98] Li, X.-S. et Gu, C.-W. Mechanism of Roe-type schemes for all-speed flows and its application. *Computers & Fluids* 86 (2013), 56–70. doi : 10.1016/j.compfluid.2013.07.004 (cf. pp. 75, 273).

[99] Lierke, E., Grossbach, R., Flogel, K. et Clancy, P. Acoustic Positioning for Space Processing of Materials Science Samples in Mirror Furnaces. *Ultrasonics Symposium*. Georgia, USA, 1983, 1129–1139. doi : 10.1109/ULTSYM.1983.198240 (cf. p. 82).

[100] Lilly, D. K. *The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments*. National Center For Atmospheric Research, 1967 (cf. p. 60).

[101] Lodato, G., Domingo, P. et Vervisch, L. Three-dimensional boundary conditions for direct and large-eddy simulation of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics* 227:10 (2008), 5105–5143. doi : 10.1016/j.jcp.2008.01.038 (cf. p. 289).

[102] Luret, G., Menard, T., Berlemont, A., Reveillon, J., Demoulin, F.-X. et Blokkeel, G. Modeling collision outcome in moderately dense sprays. *Atomization and Sprays* 20:3 (2010), 251–268. doi : 10.1615/AtomizSpr.v20.i3.60 (cf. p. 39).

[103] Malik, M., Fan, E. S.-C. et Bussmann, M. Adaptive VOF with curvature-based refinement. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 55:7 (2007), 693–712. doi : 10.1002/fld.1490 (cf. p. 40).

[104] Marberry, M., Ray, A. et Leung, K. Effect of multiple particle interactions on burning droplets. *Combustion and Flame* 57:3 (1984), 237–245. doi : 10.1016/0010-2180(84)90043-9 (cf. p. 118).

[105] Marmottant, P. Atomisation d'un jet liquide par un courant gazeux. Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001 (cf. pp. 22, 23, 25, 142, 143, 190).

[106] Marmottant, P. et Villermaux, E. On spray formation. *Journal of Fluid Mechanics* 498 (2004), 73–111. doi : 10.1017/S0022112003006529 (cf. pp. 21–25, 51, 83, 135, 142, 219).

[107] Mawardi, O. K. Sur la pression de radiation en acoustique. *Journal de Physique et le Radium* 17:5 (1956), 384–390. doi : 10.1051/jphysrad:01956001705038400 (cf. pp. 82, 118).

[108] McGraw, R. Description of Aerosol Dynamics by the Quadrature Method of Moments. *Aerosol Science and Technology* 27:2 (1997), 255–265. doi : 10.1080/02786829708965471 (cf. p. 46).

[109] Miesse, C. C. The Effect of Ambient Pressure Oscillations on the Disintegration and Dispersion of a Liquid Jet. *Journal of Jet Propulsion* 25:10 (1955), 525–530. doi : 10.2514/8.6813 (cf. pp. 30, 34).

[110] Murrone, A. et Guillard, H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics* 202:2 (2005), 664–698. doi : 10.1016/j.jcp.2004.07.019 (cf. p. 44).

[111] Ménard, T., Tanguy, S. et Berlemont, A. Coupling level set/VOF/ghost fluid methods : Validation and application to 3D simulation of the primary break-up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow* 33:5 (2007), 510–524. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.11.001 (cf. pp. 41, 51).

[112] Méry, Y. Mécanismes d'instabilités de combustion haute-fréquence et application aux moteurs-fusées. Thèse de doct. Ecole Centrale Paris, 2010 (cf. pp. 10, 83, 118, 211, 230).

[113] Méry, Y., Hakim, L., Scouflaire, P., Vingert, L., Ducruix, S. et Candel, S. Experimental investigation of cryogenic flame dynamics under transverse acoustic modulations. *Comptes Rendus Mécanique* 341:1 (2013), 100–109. doi : 10.1016/j.crme.2012.10.013 (cf. pp. 12, 82, 83, 112, 113, 128, 158, 202).

[114] Méry, Y., Ducruix, S., Scouflaire, P. et Candel, S. Injection coupling with high amplitude transverse modes : Experimentation and simulation. *Comptes Rendus Mécanique* 337:6 (2009), 426–437. doi : 10.1016/j.crme.2009.06.009 (cf. p. 10).

[115] Ngo, L. C. et Choi, H. G. A multi-level adaptive mesh refinement method for level set simulations of multiphase flow on unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 110:10 (2017), 947–971. doi : 10.1002/nme.5442 (cf. p. 40).

[116] Noiray, N., Durox, D., Schuller, T. et Candel, S. A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function. *Journal of Fluid Mechanics* 615 (2008), 139. doi : 10.1017/S0022112008003613 (cf. p. 8).

[117] Odier, N. Simulation numérique de jets liquides cisaillés par une phase rapide. Thèse de doct. Université de Grenoble, 2014 (cf. pp. 37, 40, 41).

[118] Oefelein, J. C. et Yang, V. Comprehensive review of liquid-propellant combustion instabilities in F-1 engines. *Journal of Propulsion and Power* 9:5 (1993), 657–677. doi : 10.2514/3.23674 (cf. p. 7).

[119] Olsson, E. et Kreiss, G. A conservative level set method for two phase flow. *Journal of Computational Physics* 210:1 (2005), 225–246. doi : 10.1016/j.jcp.2005.04.007 (cf. p. 40).

[120] Osher, S. et Sethian, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79:1 (1988), 12–49. doi : 10.1016/0021-9991(88)90002-2 (cf. p. 40).

[121] O'Rourke, P. J. Collective Drop Effects on Vaporizing Liquid Sprays. Thèse de doct. Los Alamos National Laboratory, New Mexico, 1981 (cf. p. 45).

[122] Pilch, M. et Erdman, C. Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop. *International Journal of Multiphase Flow* 13:6 (1987), 741–757. doi : 10.1016/0301-9322(87)90063-2 (cf. pp. 26, 27, 72).

[123] Poinsot, T. Prediction and control of combustion instabilities in real engines. *Proceedings of the Combustion Institute* 36:1 (2017), 1–28. doi : 10.1016/j.proci.2016.05.007 (cf. pp. 7, 8).

[124] Poinsot, T. et Veynante, D. *Theoretical and numerical combustion.* Third edition. CNRS, 2011 (cf. pp. 5, 6).

[125] Pope, S. B. *Turbulent flows.* Cambridge University Press, 2000. 771 p. (cf. p. 135).

[126] Popinet, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228:16 (2009), 5838–5866. doi : 10.1016/j.jcp.2009.04.042 (cf. p. 40).

[127] Pourouchottamane, M., Dupoirieux, F., Vingert, L., Habiballah, M. et Burnley, V. Numerical Analysis of the 10 Bar Mascotte Flow Field. *2nd International Workshop on Rocket Combustion Modeling : Atomization, Combustion and Heat Transfer*. Germany, 2001 (cf. p. 50).

[128] Rayleigh, J. W. S. The Explanation of Certain Acoustical Phenomena. *Nature* 18:455 (1878), 319–321. doi : 10.1038/018319a0 (cf. p. 4).

[129] Rayleigh, L. On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 11 (1879), 57–72. doi : 10.1112/plms/s1-11.1.57 (cf. pp. 22, 23).

[130] Rey, C., Ducruix, S. et Candel, S. A method for the transverse modulation of reactive flows with application to combustion instability. *Combustion Theory and Modelling* 9:1 (2005), 5–22. doi : 10.1080/13647830500051950 (cf. p. 103).

[131] Ruger, M., Hohmann, S., Sommerfeld, M. et Kohnen, G. Euler/Lagrange calculations of turbulent sprays : the effect of droplet collisions and coalescence. *Atomization and Sprays* 10:1 (2000), 35. doi : 10.1615/AtomizSpr.v10.i1.30 (cf. p. 45).

[132] Rutard, N., Dorey, L.-H., Le Touze, C. et Ducruix, S. Large-eddy simulation of an air-assisted liquid jet under a high-frequency transverse acoustic forcing. *International Journal of Multiphase Flow* 122 (2020), 103144. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.103144 (cf. pp. 13, 82, 83, 112, 113, 123).

[133] Saurel, R. et Abgrall, R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows. *Journal of Computational Physics* 150:2 (1999), 425–467. doi : 10.1006/jcph.1999.6187 (cf. pp. 42, 43).

[134] Schiller, L. et Naumann, A. A drag coefficient correlation. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* (1935), 318–320 (cf. pp. 26, 71, 216).

[135] Selle, L., Blouquin, R., Théron, M., Dorey, L.-H., Schmid, M. et Anderson, W. Prediction and Analysis of Combustion Instabilities in a Model Rocket Engine. *Journal of Propulsion and Power* 30:4 (2014), 978–990. doi : 10.2514/1.B35146 (cf. p. 10).

[136] Selle, L., Nicoud, F. et Poinsot, T. Actual Impedance of Nonreflecting Boundary Conditions : Implications for Computation of Resonators. *AIAA Journal* 42:5 (2004), 958–964. doi : 10.2514/1.1883 (cf. p. 185).

[137] Shinjo, J. et Umemura, A. Simulation of liquid jet primary breakup : Dynamics of ligament and droplet formation. *International Journal of Multiphase Flow* 36:7 (2010), 513–532. doi : 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2010.03.008 (cf. p. 41).

[138] Sibra, A., Dupays, J., Murrone, A., Laurent, F. et Massot, M. Simulation of reactive polydisperse sprays strongly coupled to unsteady flows in solid rocket motors : Efficient strategy using Eulerian Multi-Fluid methods. *Journal of Computational Physics* 339 (2017), 210–246. doi : 10.1016/j.jcp.2017.02.003 (cf. p. 48).

[139] Sibra, A. Modélisation et étude de l'évaporation et de la combustion de gouttes dans les moteurs à propergol solide par une approche eulérienne Multi-Fluide. Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2015 (cf. pp. 46, 47, 64–67, 245–247, 270).

[140] Silva, G. T. et Bruus, H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid. *Physical Review E* 90:6 (2014). doi : 10.1103/PhysRevE.90.063007 (cf. p. 118).

[141] Sliphorst, M., Knapp, B., Groening, S. et Oschwald, M. Combustion instability-coupling mechanisms between liquid oxygen/methane spray flames and acoustics. *Journal of Propulsion and Power* 28:6 (2012) (cf. p. 12).

[142] Smagorinsky, J. General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment*. *Monthly Weather Review* 91:3 (1963), 99–164. doi : 10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2 (cf. p. 60).

[143] Sun, Y. et Beckermann, C. Diffuse interface modeling of two-phase flows based on averaging : mass and momentum equations. *Physica D* 198:3 (2004), 281–308. doi : 10.1016/j.physd.2004.09.003 (cf. p. 166).

[144] Sussman, M. et Puckett, E. G. A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows. *Journal of Computational Physics* 162:2 (2000), 301–337. doi : 10.1006/jcph.2000.6537 (cf. pp. 41, 51).

[145] Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. et Osher, S. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Computers & Fluids* 27:5 (1998), 663–680. doi : 10.1016/S0045-7930(97)00053-4 (cf. p. 40).

[146] Sutherland, W. The viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine Series 5* 36:223 (1893), 507–531. doi : 10.1080/14786449308620508 (cf. p. 54).

[147] Tarjan, R. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms. *SIAM Journal on Computing* 1:2 (1972), 146–160. doi : 10.1137/0201010 (cf. p. 155).

[148] Taylor, G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 201:1065 (1950), 192–196. doi : 10.1098/rspa.1950.0052 (cf. p. 24).

[149] Tijdeman, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound and Vibration* 39:1 (1975), 1–33. doi : 10.1016/S0022-460X(75)80206-9 (cf. p. 185).

[150] Tomar, G., Fuster, D., Zaleski, S. et Popinet, S. Multiscale simulations of primary atomization. *Computers & Fluids* 39:10 (2010), 1864–1874. doi : 10.1016/j.compfluid.2010.06.018 (cf. p. 50).

[151] Toro, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction.* Third edition. Springer, 2009 (cf. pp. 75, 271).

[152] Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S. et Jan, Y.-J. A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow. *Journal of Computational Physics* 169:2 (2001), 708–759. doi : 10.1006/jcph.2001.6726 (cf. p. 39).

[153] Unverdi, S. O. et Tryggvason, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics* 100:1 (1992), 25–37. doi : 10.1016/0021-9991(92)90307-K (cf. p. 39).

[154] Urbano, A. et Selle, L. Driving and damping mechanisms for transverse combustion instabilities in liquid rocket engines. *Journal of Fluid Mechanics* 820 (2017). doi : 10.1017/jfm.2017.227 (cf. p. 10).

[155] Urbano, A., Selle, L., Staffelbach, G., Cuenot, B., Schmitt, T., Ducruix, S. et Candel, S. Exploration of combustion instability triggering using Large Eddy Simulation of a multiple injector liquid rocket engine. *Combustion and Flame* 169 (2016), 129–140. doi : 10.1016/j.combustflame.2016.03.020 (cf. pp. 10, 233).

[156] Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics* 32:1 (1979), 101–136. doi : 10.1016/0021-9991(79)90145-1 (cf. p. 74).

[157] Vieille, B., Chauveau, C. et Gokalp, I. Studies on the break-up regimes of LOX droplets. *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.* Nevada, 1999. doi : 10.2514/6.1999-208 (cf. p. 163).

[158] Villermaux, E. *Atomization under shear.* Unpublished. IRPHE (cf. pp. 22, 25, 142, 144).

[159] Villermaux, E. Mixing and Spray Formation in Coaxial Jets. *Journal of Propulsion and Power* 14:5 (1998), 807–817. doi : 10.2514/2.5344 (cf. pp. 28, 29, 155, 156, 169, 176, 190).

[160] Villermaux, E., Marmottant, P. et Duplat, J. Ligament-Mediated Spray Formation. *Physical Review Letters* 92:7 (2004). doi : 10.1103/PhysRevLett.92.074501 (cf. p. 25).

[161] Villermaux, E. et Eloi, F. The distribution of raindrops speeds. *Geophysical Research Letters* 38:19 (2011). doi : 10.1029/2011GL048863 (cf. pp. 25, 143).

[162] Vié, A., Doisneau, F. et Massot, M. On the Anisotropic Gaussian Velocity Closure for Inertial-Particle Laden Flows. *Communications in Computational Physics* 17:1 (2015), 1–46. doi : 10.4208/cicp.021213.140514a (cf. p. 47).

[163] Vié, A., Laurent, F. et Massot, M. Size-velocity correlations in hybrid high order moment/multi-fluid methods for polydisperse evaporating sprays : Modeling and numerical issues. *Journal of Computational Physics* 237 (2013), 177–210. doi : 10.1016/j.jcp.2012.11.043 (cf. p. 49).

[164] Wert, K. L. A rationally-based correlation of mean fragment size for drop secondary breakup. *International Journal of Multiphase Flow* 21:6 (1995), 1063–1071. doi : 10.1016/0301-9322(95)00036-W (cf. pp. 27, 72).

[165] Williams, F. A. Spray Combustion and Atomization. *Physics of Fluids* 1:6 (1958), 541. doi : 10.1063/1.1724379 (cf. pp. 44, 72).

[166] Wu, J., Du, G., Work, S. S. et Warshaw, D. M. Acoustic radiation pressure on a rigid cylinder : An analytical theory and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America* 87:2 (1990), 581. doi : 10.1121/1.398927 (cf. pp. 32, 34, 82, 84, 275, 277).

[167] Yarin, A. L., Pfaffenlehner, M. et Tropea, C. On the acoustic levitation of droplets. *Journal of Fluid Mechanics* 356 (1998), 65–91 (cf. pp. 82, 117, 240).

[168] Youngs, D. L. Time-Dependent Multi-material Flow with Large Fluid Distortion. *Numerical Methods in Fluid Dynamics* (1982), 273–285 (cf. p. 40).

[169] Yu, Y., O'Hara, L., Sisco, J. et Anderson, W. Experimental Study of High-Frequency Combustion Instability in a Continuously Variable Resonance Combustor (CVRC). *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition.* Florida, 2009. doi : 10.2514/6.2009-234 (cf. p. 10).

[170] Zhuk, A. P. Radiation force acting on a cylindrical particle in a sound field. *International Applied Mechanics* 22:7 (1986), 689–693. doi : 10.1007/BF00889130 (cf. pp. 32, 82, 84, 275).

[171] Zinn, B. T. et Lores, M. E. Application of the Galerkin Method in the Solution of Non-linear Axial Combustion Instability Problems in Liquid Rockets. *Combustion Science and Technology* 4:1 (1971), 269–278. doi : 10.1080/00102207108952493 (cf. p. 8).

[172] Zuzio, D., Estivalèzes, J.-L. et DiPierro, B. An improved multiscale Eulerian–Lagrangian method for simulation of atomization process. *Computers & Fluids* 176 (2018), 285–301. doi : 10.1016/j.compfluid.2016.12.018 (cf. p. 51).

[173] Zuzio, D., Murrone, A., Villedieu, P., Haider, F., Courbet, B., Scherrer, D. et Vuillot, F. *CEDRE, solveur multi-fluides : travaux 2011-2012.* Rapport technique 2/17679. ONERA, 2013 (cf. pp. 75, 273, 274).

[174] Zuzio, D., Estivalèzes, J.-L., Villedieu, P. et Blanchard, G. Numerical simulation of primary and secondary atomization. *Comptes Rendus Mécanique* 341:1 (2013), 15–25. doi : 10.1016/j.crme.2012.10.003 (cf. p. 51).

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Titre : Simulation numérique et modélisation de l'influence d'ondes acoustiques de haute amplitude sur un jet diphasique : application au domaine de la propulsion fusée à ergols liquides

Mots clés : instabilités de combustion, régime subcritique, LES, injection coaxiale, pression de radiation.

Résumé : L'occurrence d'instabilités de combustion de haute fréquence au sein des moteurs-fusées à ergols liquides peut s'avérer dommageable pour l'intégrité des systèmes propulsifs. Par conséquent, les acteurs du spatial souhaitent renforcer leur compréhension des mécanismes à l'origine de ces instabilités. Pour cela, la simulation numérique s'est révélée au fil du temps de plus en plus attractive. Dans le cas particulier d'un fonctionnement en régime subcritique, le comburant se trouve à l'état liquide dans la chambre de combustion. Pour reproduire fidèlement les écoulements associés à ce régime de fonctionnement, la simulation numérique doit pouvoir restituer les mécanismes d'interaction entre les perturbations acoustiques et le processus d'atomisation de la phase liquide, car ils peuvent influencer la stabilité de la combustion. Dans cette optique, cette étude consiste 1) à mettre en place une méthodologie de simulation numérique de jet diphasique atomisé sous excitation acoustique, 2) à valider la restitution de l'ensemble des mécanismes de réponse du jet aux ondes acoustiques, et 3) à s'appuyer sur les résultats des simulations pour progresser vers une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. La stratégie de simulation utilisée est basée sur le couplage entre une méthode à interface diffuse à 4 équations pour simuler le gaz et les plus grosses structures liquides de l'écoulement, et une approche statistique Eulérienne pour modéliser le spray de gouttes. Dans ces travaux, la simulation numérique d'un jet diphasique atomisé soumis à une excitation acoustique de haute amplitude montre une bonne restitution de l'aplatissement du cœur liquide et de son influence sur le processus d'atomisation du jet. Notamment, le cœur liquide est raccourci et le spray s'élargit dans la direction orthogonale à l'axe de propagation acoustique. Un couplage important d'ores et déjà observé expérimentalement entre le système d'injection et la cavité acoustique ainsi que son influence sur le processus d'atomisation de la phase liquide sont également reproduits. Enfin, une modélisation simplifiée de l'écoulement destinée à compléter les résultats des simulations révèle une déviation progressive du cœur liquide, et donc des gouttes issues de son atomisation, par la force de radiation acoustique. Ces travaux ouvrent ainsi la voie à des simulations réactives capables de reproduire fidèlement le comportement de flammes diphasiques sous perturbation acoustique en vue d'en étudier l'impact sur la stabilité de la combustion.

Title : Numerical simulation and modelling of the influence of high-amplitude acoustic waves on a two-phase jet: application to the field of liquid-propellant rocket propulsion

Keywords : combustion instabilities, subcritical conditions, LES, coaxial injection, radiation pressure.

Abstract The occurrence of high-frequency combustion instabilities in liquid-propellant rocket engines can be detrimental to propulsion systems. Consequently, space actors need to strengthen their understanding of the mechanisms that cause these instabilities. To this end, numerical simulation has become more and more attractive over time. Under subcritical operating conditions, the oxidizer inside the combustion chamber is in a liquid state. In such a case, numerical simulation must be able to reproduce every interaction mechanism between acoustics and the atomization of the liquid phase, because it may influence the combustion stability. In this perspective, this study consists in 1) setting up a methodology for the numerical simulation of an atomized two-phase jet under acoustic modulation, 2) validating the restitution of all the response mechanisms of the jet to acoustics, and 3) using the results of the simulations to progress in the understanding of the involved physical phenomena. The simulation strategy that is used is based on the coupling between a 4-equation diffuse interface method to simulate the gas and the largest liquid structures of the flow, and an Eulerian statistical approach to model the spray. In this work, the numerical simulation of an atomized two-phase jet subjected to a high amplitude acoustic modulation shows a good restitution of the flattening of the liquid core and its influence on the atomization process of the jet. In particular, the liquid core is shortened and the spray widens in one particular direction. The coupling between the injection system and the acoustic cavity and its influence on the atomization process of the liquid are also reproduced. Finally, a simplified modeling of the flow used to complement the simulation results reveals a progressive deviation of the liquid core, and therefore of the drops resulting from its atomization, by the acoustic radiation force. Thus, this work opens the way to reactive simulations capable of faithfully reproducing two-phase flames under acoustic disturbances in order to study their impact on combustion stability.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France