



**HAL**  
open science

# Propriétés de bruit et dynamique de lasers à semiconducteurs en régime d'émission bifréquence pour l'optique micro-ondes et la métrologie

Grégory Gredat

► **To cite this version:**

Grégory Gredat. Propriétés de bruit et dynamique de lasers à semiconducteurs en régime d'émission bifréquence pour l'optique micro-ondes et la métrologie. Optique [physics.optics]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASS109 . tel-02901722

**HAL Id: tel-02901722**

**<https://theses.hal.science/tel-02901722>**

Submitted on 17 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Propriétés de bruit et dynamique de lasers à semiconducteurs en régime d'émission bifréquence pour l'optique micro-ondes et la métrologie

**Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay**

École doctorale n° 572, Ondes et Matière (EDOM)  
Spécialité de doctorat: Physique  
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, CNRS, ENS Paris-Saclay,  
CentraleSupélec, LuMIn, 91405 Orsay, France  
Réfèrent: Faculté des sciences d'Orsay

**Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 30 juin 2020, par**

**Grégory GREDAT**

## Composition du jury:

<b>Nicolas TREPS</b> Professeur, Sorbonne Université Laboratoire Kastler Brossel	Président
<b>Éric LACOT</b> Professeur, Université Grenoble Alpes Laboratoire Interdisciplinaire de Physique (LiPhy Grenoble)	Rapporteur & examinateur
<b>Massimo GIUDICI</b> Professeur, Université Côte d'Azur Institut de Physique de Nice (InPhyNi)	Rapporteur & examinateur
<b>Mélanie LEBENTAL</b> Maîtresse de conférence, École Normale Supérieure Paris-Saclay Laboratoire Lumière, Matière et Interfaces (LuMIn)	Examinatrice
<b>Giorgio SANTARELLI</b> Ingénieur de recherche, IOGS - CNRS - Université de Bordeaux Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences (LP2N)	Examineur
<b>Ludovic BELLON</b> Chargé de recherche, CNRS - École Normale Supérieure de Lyon Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon	Examineur
<b>Fabien BRETENAKER</b> Directeur de recherche, CNRS - Université Paris-Saclay Laboratoire Lumière, Matière et Interfaces (LuMIn)	Directeur
<b>François GUTTY</b> Ingénieur de recherche, Thales Thales Recherche & Technologie	Invité



# Remerciements

Ces premières lignes du manuscrit complètent les dernières étapes du travail de longue haleine que représente une thèse de doctorat. Elles sont des plus importantes car toute production scientifique est avant tout une construction collective. Trois années d'exploration de la physique des lasers me l'ont confirmé et des remerciements s'imposent.

Merci tout d'abord à Fabien Bretenaker de s'être démené contre les affres d'un refus de disponibilité, avec Philippe Adam en renforts. Merci d'avoir permis de concrétiser ce projet de doctorat. Merci Fabien pour ton sens de l'humour, tes grandes qualités scientifiques, tes discussions éclairantes et ton sens physique fulgurant.

Je tiens à remercier tout particulièrement les membres de mon jury de thèse pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de mon manuscrit, certes un peu volumineux. Je les remercie aussi chaleureusement, ainsi que l'école doctorale Ondes et Matière et les services de l'école CentraleSupélec, pour avoir rendu possible la soutenance de mes travaux de thèse malgré le contexte actuel compliqué de la crise sanitaire. Merci beaucoup aux rapporteurs Éric Lacot et Massimo Giudici pour le travail exhaustif qu'ils ont fourni. L'ensemble de mon jury d'exception a été présidé par Nicolas Treps, que je souhaite remercier vivement, notamment pour la qualité de nos échanges dans le cadre du projet LASAGNE. Merci à Giorgio Santarelli pour la pertinence mais aussi la bienveillance de ses questions d'ingénieur expert en métrologie. Ce doctorat vient mettre un point final à mon parcours académique. Le magistère de physique d'Orsay y a joué un rôle particulier et a probablement déterminé mon choix de rester dans un environnement universitaire que je connais, que j'apprécie, qui évolue à toute vitesse aujourd'hui et vers lequel mon projet professionnel se dirige. Le Master de l'ENS Lyon a également eu un rôle important dans ma formation à la recherche et je remercie énormément Ludovic Bellon, d'une part de m'avoir écrit une lettre de recommandation pour le financement de mon projet doctoral et d'autre part d'avoir accepté le rôle d'examineur dans mon jury. Merci d'avoir été constamment enthousiaste bien qu'ayant un domaine d'expertise assez différent. L'étape certainement la plus déterminante de mon parcours académique s'est jouée à l'ENS Cachan, lors de ma préparation à l'agrégation. Je remercie Mélanie Lebental d'avoir pris part à l'examen de ma thèse. Cela m'a rappelé, en quelque sorte, les corrections des leçons de physique menées avec la même rigueur et le même souci du détail.

L'aspect le plus enrichissant de cette longue expérience de recherche découle des interactions que j'ai eues avec les équipes de Thales dans le cadre du projet CHoCoLA. Je tiens à dédier mes remerciements les plus vifs à François Gutty, qui a eu, de plus, la gentillesse de participer à mon jury. J'ai beaucoup appris de nos échanges, toujours précis et chaleureux. Dans une même mesure, merci à Ghaya Baili qui joue un rôle de transmission précieux et qui montre une motivation constante à approfondir nos connaissances sur les VECSELS. Merci Ghaya d'avoir toujours eu des mots encourageants ! Cela participe notablement aux

bons souvenirs que j'emporte des conférences auxquelles j'ai pu assister. Merci à vous de m'avoir inclus dans ce projet passionnant que vous portez et de l'avoir fait avec autant de bienveillance. Je souhaite tout le meilleur à Jérémie, qui a rejoint l'aventure avec toute sa détermination et sa bonhomie. Dans la trajectoire de ma thèse, d'autres personnes de Thales ont croisé mon chemin, toujours à mon grand plaisir : François, Maxime, Maxime, Vincent, Vincent, et d'autres.

Mon projet professionnel concerne l'enseignement et je connais la chance qui est la mienne d'avoir pu intervenir au département de physique de l'IUT d'Orsay. Merci énormément à Loïc Rondin, Mojtaba Jarrahi, Jay Amrit et Fabienne Goldfarb pour les discussions et la bonne humeur. C'est un honneur pour moi de devenir l'un de vos collègues. Je remercie aussi Pascal qui a impulsé un échange de nos enseignements. Ceci nous a permis à tous les deux de découvrir un nouvel aspect de l'enseignement aux enjeux bien différents et d'adapter nos pédagogies (super idée !). Merci beaucoup à Emmanuelle Deleporte et Jean-Sébastien Lauret de m'avoir fait confiance pour leurs TDs de Physique du Solide en M1 à l'ENS Cachan et merci à Jean-Baptiste Desmoulins d'avoir appuyé cet échange.

Now, I want to thank the Laser & Optics research group (GLOP) for the fundings (6 conferences in total !) and its actual and former members : Fabienne, Fabien, Yifan, Yousra, Debanuj, Pascal, Chitram, Paul, Hui, et alumni. Thank you Yifan for your constant good mood. Thank you Yousra for your kindness. Thank you Debanuj for the valuable discussions we had, most often during lunch time. Thank you Chitram for the valuable discussions we had, most often about meals. Thank you Paul for all the wasted time we spent looking for puns. Thank you Hui for the great contribution you had on the present work. I wish nothing but the best for all of you.

Merci aux autres personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir d'interagir au laboratoire Aimé Cotton ou ailleurs : Thibault, Raphaël, Clément, Ferial, François, Florian, Erwan, Matthieu, Adrien, Caroline, Loïc, Mélissa, Lucile, Benjamin, Lucas, Ky-Luc, Anne, Christophe, Jean-Paul.

De plus, j'ai adoré participer à la formation des étudiants par la recherche et je remercie d'abord Mathieu et Élio qui sont restés très motivés au cours de leur stage et n'ont pas oublié d'être sympathiques. Je remercie aussi Raphaël et Joseph qui ont apporté beaucoup de jovialité et de dynamisme dans le groupe. Merci Raphaël pour tes points de vue politiques et philosophiques ou encore ta curiosité en physique. Ces moments d'échanges et de transmission font indéniablement partie du meilleur de l'expérience d'une thèse de doctorat.

Merci à Pierre-Élie pour les quelques discussions autour des Bogoliubons dans les fibres optiques mais surtout pour sa participation à ma propre formation à la recherche.

Merci à mes anciens collègues et amis professeurs du secondaire, merci Chloé et Romain et merci aux anciens élèves qui continuent à m'envoyer des nouvelles et ont conforté à chaque fois ma vocation à rejoindre à terme les rangs de l'éducation nationale.

Merci à Timothée, Éloïse, Pascal, Marion, Adrien, Anne-Céline, Christophe, Victor, Mathilde, Valentin, Sylviane, Clémentine, Hugo, Amélie, Jean-Noël, Colette, Mickaël, Julie, Florian, Adèle, Benoît, Camille et Juliette qui ont été, pour Delphine et moi, des amis dévoués et nous ont beaucoup apporté de joie et d'épanouissement pendant ces trois années de thèse. Timothée, je ne te remercie pas seulement pour tes talents au badminton mais aussi et surtout pour ton oreille toujours attentive, tes encouragements et les bons moments partagés (notamment autour de ton barbecue). Pascal, je me suis souvent dit que si je devais garder en mémoire une seule découverte de mes trois années de thèse, elle ne serait pas de nature scientifique mais de nature humaine et il s'agirait de la nouvelle amitié que nous avons pu lier ensemble. Nos partages ont constitué pour moi une vraie soupape de décompression au laboratoire Aimé Cotton. Tu es un musicien et un physicien hors-pair et nos interactions m'ont beaucoup profité ! Je garde un souvenir fort de nos randonnées et du ski à Aussois, de nos tentatives fébriles d'élaborer des bouchons en cire de bougie, de nos concerts à Paris, de nos sessions batterie-guitare, de nos repas avec Marion et Delphine, de nos convictions écologiques communes...

Enfin viennent les personnes pour lesquelles je suis le plus fier de rajouter des lignes à mon manuscrit puisqu'elles me soutiennent depuis toujours : Damien, Alicia, mes parents, mes grands-parents, mes proches. Merci de porter mes ambitions. Merci beaucoup à Véronique, Francis et Amélie qui ont été tout au long de ce travail de thèse d'un soutien formidable. Les derniers remerciements sont naturellement pour Delphine, qui partage ma vie pour mon plus grand bonheur. Merci infiniment de m'avoir permis de surmonter toutes les frustrations que j'ai rencontrées lors de ces trois années, merci de m'avoir appuyé à chaque instant et redonné confiance tout en gardant patience, merci pour tous ces beaux projets que l'on construit ensemble. Merci, en fait, de me rendre heureux.



<b>TABLE DES MATIÈRES</b>
---------------------------

	Remerciements	iii
	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
	<b>I Les VECSELS bifréquences pour les applications : propriétés, fondements théoriques et contextes</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Des lasers pompés optiquement aux bonnes propriétés dynamiques</b>	<b>7</b>
1	Introduction aux lasers à semiconducteurs à cavité étendue . . . . .	10
1.1	Le milieu à gain du VECSEL . . . . .	10
	Les puits quantiques . . . . .	11
	Influence de l'émission spontanée . . . . .	14
	Recombinaisons non-radiatives et effets Auger . . . . .	14
	Rendement quantique interne . . . . .	15
	Dichroïsme de gain . . . . .	15
1.2	Oscillation laser du résonateur . . . . .	15
	Cavité laser . . . . .	16
	Le <i>roll-over</i> thermique . . . . .	17
2	Tour d'horizon de la dynamique et des sources de bruit . . . . .	17
2.1	Le VECSEL comme laser de classe-A . . . . .	17
2.2	Bruit intrinsèque d'émission spontanée . . . . .	20
2.3	Bruit de grenaille à la détection . . . . .	23
2.4	Autres sources de bruit . . . . .	24
3	VECSELS bifréquences et transfert de bruit de la pompe . . . . .	24
3.1	Fonctionnement bifréquence et équations d'évolution couplées . . . . .	25
	Description du laser . . . . .	25
	Modélisation de la dynamique . . . . .	29

3.2	Fluctuations d'intensité transférées de la pompe . . . . .	31
	Bruit de pompe et corrélations . . . . .	32
	Fonction de transfert de bruit d'intensité . . . . .	35
3.3	Bruit de phase du battement . . . . .	37
	Couplage amplitude / phase . . . . .	37
	Fluctuations thermiques de pompage . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Un fonctionnement bifréquence propice aux applications</b>	<b>41</b>
1	À la longueur d'onde télécom dans le contexte de l'optique micro-ondes . . . . .	42
1.1	Signaux analogiques à haute fréquence . . . . .	42
	Enjeux avec l'exemple du radar . . . . .	42
	Implantation d'une liaison opto-hyperfréquence dans un radar . . . . .	42
1.2	La liaison opto-hyperfréquence . . . . .	44
	Déport de signaux hyperfréquences par voie optique . . . . .	44
	Systèmes sans dispersion . . . . .	44
	Des nouvelles fonctionnalités . . . . .	45
1.3	Oscillateurs locaux hyperfréquences . . . . .	45
	Distribution optique d'oscillateurs locaux RF . . . . .	45
	Atouts des lasers bifréquences . . . . .	46
2	À 852 nm pour une horloge atomique compacte et performante . . . . .	47
2.1	Introduction aux horloges atomiques . . . . .	48
2.2	Stabilité vs compacité ? . . . . .	50
2.3	Piégeage cohérent de population . . . . .	51
	Système en lambda et état noir . . . . .	51
	Franges de Ramsey . . . . .	53
	Séquence d'horloge . . . . .	54
2.4	État de l'art des horloges CPT à base de Cesium . . . . .	55
	Performances démontrées . . . . .	56
	Vers un prototype basé sur des VECSELS bifréquences . . . . .	57

## **II Optimisation de la dynamique pour des VECSELS bifréquences ultra-bas bruit** **61**

<b>3</b>	<b>Caractérisation du bruit du VECSEL à 852 nm et stratégies de réduction</b>	<b>63</b>
1	Caractéristiques de bruit du VECSEL bifréquence à 852 nm . . . . .	64
1.1	Laser à 852 nm et dispositif de mesures . . . . .	64
1.2	Mesures des fluctuations des intensités et de la phase du battement . . . . .	67
1.3	Analyse des corrélations croisées . . . . .	69
2	Stratégies de réduction du bruit . . . . .	72
2.1	Minimisation du transfert de bruit d'intensité . . . . .	72
2.2	Réduction du bruit de phase du battement . . . . .	74
2.3	Des critères <i>a priori</i> irréconciliables . . . . .	76

<b>4</b>	<b>Réduction expérimentale du transfert de bruit par pompages bien corrélés</b>	<b>77</b>
1	Génération optique d'un signal RF ultra-bas bruit à la longueur d'onde télécom . . . . .	77
1.1	Pompage optique sans speckle . . . . .	78
1.2	Réduction drastique de bruit du signal RF . . . . .	80
1.3	Limitation due à la largeur Schawlow-Townes . . . . .	83
2	Réduction du bruit par pompage multimode bien corrélé en phase . . . . .	84
2.1	Architecture de pompage bien corrélé en phase . . . . .	84
2.2	Analyse du bruit d'intensité . . . . .	87
2.3	Réduction du bruit de phase . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Impact de la dynamique du laser sur sa stabilisation pour l'horloge CPT</b>	<b>91</b>
1	Contrôle des corrélations de bruit par pompage . . . . .	93
2	Stabilisation de l'intensité . . . . .	96
2.1	Modélisation de la boucle et impact des corrélations de bruit . . . . .	96
	Rétroaction à partir d'un seul mode laser . . . . .	97
	Rétroaction à partir des deux composantes . . . . .	102
2.2	Étude expérimentale de l'asservissement en intensité . . . . .	104
2.3	Améliorations du filtre de boucle . . . . .	106
3	Boucle à verrouillage de la phase optique . . . . .	109
3.1	Description et modélisation de la boucle . . . . .	109
3.2	Performances et limites de la régulation de la phase du battement . . . . .	112
4	Contribution à la stabilité de l'horloge à court terme . . . . .	114
4.1	Effet Dick, fonction de sensibilité et bruit de phase . . . . .	114
4.2	Prise en compte du bruit d'intensité . . . . .	117
4.3	Prédictions à partir des résultats de réduction de bruit . . . . .	120

### **III Autres propriétés de bruit, effets thermo-optiques, covariance spectrale et bruits non-stationnaires** **125**

<b>6</b>	<b>Fluctuations thermiques de la phase d'un VECSEL pompé optiquement</b>	<b>127</b>
1	Description des effets thermo-optiques . . . . .	128
1.1	Bilan de puissance et dissipation thermique . . . . .	128
1.2	Décalage vers le rouge . . . . .	131
1.3	Équation de la chaleur . . . . .	137
2	Réponse thermique de la structure au pompage optique . . . . .	142
2.1	Champ de température induit dans le semiconducteur . . . . .	142
	Étude du régime stationnaire . . . . .	143
	Étude du régime transitoire . . . . .	145
2.2	Effet de lentille thermique . . . . .	146
3	Bruit de fréquence induit thermiquement . . . . .	150
3.1	Contribution des fluctuations de pompe . . . . .	150

3.2	Contribution des fluctuations thermodynamiques . . . . .	153
4	Bruit de phase du battement induit thermiquement dans un VECSEL bifré- quence . . . . .	157
4.1	Confrontation modèle–expérience . . . . .	157
4.2	Vers un nouveau modèle simplifié . . . . .	159
5	Généralisation au cas d’une pompe super-gaussienne . . . . .	161
<b>7</b>	<b>Décomposition en modes des bruits du laser et bruits non stationnaires</b>	<b>169</b>
1	Analyse spectrale des corrélations en intensité . . . . .	170
1.1	Théorie unifiée de la cohérence et de la polarisation . . . . .	170
	Degré de cohérence mutuelle . . . . .	170
	Degré de polarisation . . . . .	171
	Théorie d’Emil Wolf et matrice de densité spectrale croisée . . . . .	172
1.2	Analyse expérimentale de la matrice de densité spectrale croisée . . . . .	174
	Application au VECSEL bifréquence . . . . .	175
	Application du théorème spectral . . . . .	177
2	Matrice de covariance spectrale électrique croisée . . . . .	180
2.1	Définition de la covariance spectrale électrique . . . . .	181
2.2	Application aux VECSELS . . . . .	181
2.3	Bilan des corrélations possibles . . . . .	184
3	Décomposition des modes de bruit dans un VECSEL non-stationnaire . . . . .	185
3.1	Modulation en intensité de la pompe . . . . .	185
	Matrice de covariance spectrale . . . . .	186
	Analyse en composantes principales . . . . .	188
3.2	Bruits non stationnaires aux basses fréquences . . . . .	192
	Matrice de covariance spectrale . . . . .	192
	Analyse en composantes principales . . . . .	193
	Analyse en composantes indépendantes . . . . .	195
3.3	Tests de non-stationnarité(s) . . . . .	197
	Non-stationnarité déterministe vs non-stationnarité stochastique . . . . .	197
	Tests statistiques . . . . .	198
	Application aux VECSELS . . . . .	198
	<b>Conclusion</b>	<b>203</b>
	<b>IV Annexes</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Quelques outils mathématiques</b>	<b>209</b>
1	Outils statistiques de description du bruit . . . . .	209
1.1	Fonction d’auto-corrélation, stationnarité et hypothèse ergodique . . . . .	210
1.2	Densité spectrale de puissance d’un signal . . . . .	211
1.3	Théorème de Wiener–Khintchine–Kolmogorov . . . . .	211

1.4	Exemple avec le signal des télégraphistes . . . . .	213
	Cas simplifié . . . . .	213
	Généralisation . . . . .	213
	Invariance d'échelle . . . . .	214
	Application au bruit de résistance . . . . .	214
1.5	Bruits d'amplitude et bruit de phase . . . . .	214
2	Du bruit de phase à la variance d'Allan d'un oscillateur . . . . .	216
3	Les transformées de Hankel . . . . .	216
3.1	Définitions . . . . .	218
	La transformée et son inverse . . . . .	218
	Orthogonalité des fonctions de Bessel . . . . .	218
3.2	Transformations utiles dans ce travail . . . . .	218
3.3	Théorème de Parseval et Plancherel dans le domaine de Hankel . . . . .	219
3.4	La fonction exponentielle intégrale . . . . .	219
<b>B</b>	<b>Transmission des corrélations de bruit du laser par les atomes de césium</b>	<b>221</b>
1	De la résonance CPT dans le césium aux équations de Bloch optiques . . . . .	222
1.1	Double lambda dans la $D_2$ et système à trois niveaux équivalent . . . . .	222
1.2	La cellule de césium . . . . .	223
1.3	Équation de Liouville Von-Neumann . . . . .	224
1.4	Équations de Bloch optiques . . . . .	225
2	Transmission du bruit et des corrélations du VECSEL bifréquence . . . . .	226
2.1	Propagation dans la cellule de césium . . . . .	226
2.2	Approche perturbative . . . . .	227
	Saturation à résonance . . . . .	228
	Transmission de l'intensité moyenne . . . . .	229
	Transmission des fluctuations d'intensité . . . . .	230
2.3	Transmission des bruits d'intensités relatifs et leurs corrélations . . . . .	233
	<b>Bibliographie</b>	<b>237</b>



*Expérimenter, c'est imaginer* – FRIEDRICH NIETZSCHE



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Il paraît tout indiqué de commencer un manuscrit portant sur l'étude d'un laser par l'histoire de son développement théorique : A. Einstein et l'émission stimulée en 1917 ; A. Kastler, J. Brossel et le pompage optique en 1949 ; C. Townes, A. Schawlow et la première proposition d'un maser optique en 1958. Sans oublier ensuite T. Maiman qui gagne la course du développement d'une telle technologie en 1960 dans son laboratoire situé à Malibu grâce à un laser pulsé à rubis. Il est cependant probablement plus pertinent dans le cadre de cette thèse de citer un essor plus récent, celui des *hétérostructures semiconductrices utilisables en électronique rapide et en optoélectronique* récompensé par un prix Nobel attribué à J. Alferov et H. Kroemer en 2000. En effet, un type de laser à semiconducteurs particulier est au centre de ce travail : le laser à émission de surface à cavité externe verticale (VECSEL pour *Vertical External-Cavity Surface-Emitting Laser*). Les lasers à semiconducteurs sont aujourd'hui les sources optiques les plus répandues pour les applications. L'une des applications maîtresses des lasers que nous étudions concerne une horloge atomique. En outre, la méthode d'interrogation des atomes de l'horloge que nous allons utiliser a été initiée par N. Ramsey, récompensé lui aussi d'un prix Nobel en 1989.

La dynamique du VECSEL constitue la pierre angulaire du travail présenté dans ce manuscrit. Trois parties seront successivement abordées.

### **Les VECSELS bifréquences pour les applications : propriétés, fondements théoriques et contextes**

Cette première partie fournit un cadre théorique et applicatif à l'ensemble du manuscrit.

Tout d'abord, le laser et sa dynamique. L'objectif du chapitre 1 est de mettre en place le modèle théorique pour la description des propriétés de bruit du VECSEL bifréquence, permettant l'émission de deux modes lasers orthogonaux au sein d'une même cavité. Ce chapitre débute par la présentation des différents éléments constitutifs d'un VECSEL : un

milieu à gain comportant des puits quantiques, une cavité étendue de grande finesse et un pompage optique. L'avantage de sa cavité étendue s'illustre lors de l'étude de sa dynamique. Les équations d'évolution du laser sont introduites et un fonctionnement typique de classe A est décrit. Différentes sources de bruit dégradent toutefois la pureté du laser et sont alors passées en revue, du bruit transféré par la diode laser de pompe, au bruit de l'émission spontanée. Le fonctionnement bifréquence des VECSELS est ensuite décrit. Cette utilisation bifréquence permet, par battement, la génération d'un signal RF de grande pureté spectrale transporté optiquement. Cette pureté est essentielle pour les applications. Dès lors, la caractérisation du signal RF repose sur l'évaluation des bruits d'intensité relatifs des modes lasers et le bruit de phase du battement. Le modèle du transfert de bruit de la diode laser de pompe au VECSEL, en très bon accord avec les propriétés de bruit mesurées dans un VECSEL bifréquence à la longueur d'onde télécom, va nous fournir un outil précieux pour se diriger vers une diminution de son impact. Le fondement de ce modèle repose, d'une part, sur l'introduction phénoménologique d'un couplage dû à la saturation croisée des modes dans les équations d'évolution du laser et, d'autre part, sur la considération des corrélations des bruits d'intensité dans le pompage des deux modes.

Ensuite, les applications. Le chapitre 2 soulève les enjeux liés à la pureté spectrale dans la perspective applicative des VECSELS bifréquences. Le développement du VECSEL bifréquence à la longueur d'onde télécom s'inscrit dans le contexte large de l'optique opto-hyperfréquence, avec une utilité pour les radars par exemple. En revanche, le développement autour des VECSELS bifréquences à 852 nm qui suit dans la prochaine partie, répond plus spécifiquement à un besoin métrologique : celui d'une horloge atomique à base de césium. Ce chapitre jette alors les bases du fonctionnement des horloges utilisant le piégeage cohérent de population (CPT pour *coherent population trapping*). La description quantitative de la stabilité d'une horloge est détaillée. Un état de l'art suit. L'objectif souligné est l'élaboration par nos partenaires d'une horloge CPT présentant un compromis compacité / performances inédit.

### **Optimisation de la dynamique pour des VECSELS bifréquences ultra-bas bruit**

Une réduction de bruit du signal RF produit par les VECSELS bifréquences est primordiale pour les applications. Cette partie présente les fruits de nos efforts de minimisation du bruit.

La caractérisation expérimentale des propriétés de bruit du VECSEL à 852 nm est l'objet de la première partie du chapitre 3. La modélisation permet ensuite d'élaborer des stratégies de réduction de bruit en jouant sur les paramètres du lasers. Le rôle singulier des corrélations des bruits de pompe pour la minimisation du bruit transféré par le laser de pompe est notamment mis en exergue. L'optimisation de ce paramètre semble malheureusement être en contradiction avec la minimisation de la saturation croisée.

Le chapitre 4 est entièrement dédié à l'augmentation des corrélations des bruits de pompe pour la minimisation expérimentale du bruit, d'après les prédictions théoriques du chapitre 4. En réalité, l'existence de bruits de pompe non parfaitement corrélés est associée à

la distribution spatiale aléatoire de l'intensité de la tache de pompe. Nous verrons qu'une réponse technologique est possible à la longueur d'onde télécom mais qu'il est nécessaire d'adopter une nouvelle architecture de pompage pour le laser destiné aux horloges. Cette architecture est pensée pour réconcilier la minimisation de la saturation croisée et l'augmentation des corrélations des bruits de pompe.

Une réduction encore plus drastique du bruit des VECSELS bifréquences suppose une stabilisation active grâce à un asservissement. Cela dit, sans prendre en compte la dynamique du laser, un asservissement mené sur la diode laser de pompe du VECSEL peut aboutir à une addition plutôt qu'à une réduction du bruit sur l'un des deux modes. Le chapitre 5 consacre une première partie théorique au rôle des corrélations en sortie du VECSEL sur la correction de l'intensité. L'optimisation de la dynamique du laser pour sa correction en intensité est alors expérimentalement vérifiée. Puis, une boucle de verrouillage de la phase optique est mise en œuvre. Les caractéristiques de bruit du VECSEL à 852 nm ont une répercussion directe sur la stabilité à court terme de l'horloge CPT à cause de l'interrogation entièrement optique des atomes de césium. Les performances de l'horloge CPT en termes de bruit de fréquence relative sont ambitieuses et se situent au cœur des enjeux du projet. Nous évaluons donc les conséquences sur la performance de l'horloge de l'optimisation de la dynamique du VECSEL implémentée pour sa stabilisation.

### **Autres propriétés de bruit, effets thermo-optiques, covariance spectrale et bruits non-stationnaires**

La modélisation du bruit du VECSEL bifréquence, utilisée avec succès jusqu'alors, n'est pas adaptée aux basses fréquences du spectre électrique (typiquement sous les 10 kHz). Cette partie se focalise sur les bruits dominant cette plage de fréquences et fournit des outils innovants pour leur description.

Le chapitre 6 est dédié aux bruits d'origine thermique. Un modèle analytique des fluctuations thermiques de la phase du battement RF produit par les VECSELS bifréquences est établi. À la base de ce modèle, l'équation de la diffusion thermique à travers les couches de la puce à semiconducteurs est résolue et le déphasage induit par les effets thermo-optiques est évalué. Deux sources de fluctuations thermiques sont considérées : les fluctuations des transferts thermiques induits par la pompe optique et celles causées par l'agitation thermique à la température ambiante. Dans un premier temps, nous examinons la réponse thermique de la structure, sa dynamique et l'effet de lentille thermique induit par la pompe. Dans un second temps, la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence thermiquement induit est calculée. Une anisotropie spatiale de la diffusion thermique est envisagée. Enfin, la théorie développée est confrontée à l'expérience en analysant le bruit de phase du battement du VECSEL bifréquence à 852 nm. Cela permet de discuter la validité d'un modèle simplifié de bruit thermique supposant un transfert des fluctuations de puissance de pompe en fluctuations de température de type filtre passe-bas du premier ordre.

Le chapitre 7 commence par donner plus d'épaisseur à l'analyse des corrélations d'intensité en définissant la matrice de covariance spectrale électrique croisée d'après les travaux de E. Wolf. Les modes propres de fluctuations du VECSEL émettant deux polarisations orthogonales sont examinés dans le domaine de Fourier et comparés aux modes symétriques et anti-symétriques. Le degré spectral de polarisation des fluctuations est introduit. Un bilan des corrélations possibles dans le domaine spectral électrique permet de comprendre comment les bruits de nature non-stationnaire sont associés aux termes non-diagonaux de la matrice de covariance. Une expérience de modulation de l'intensité du laser est menée dans le but de le mettre en évidence. Un tri des modes de bruit est initié grâce à la décomposition du signal en ses composantes principales. Puis, l'analyse est réitérée avec une acquisition aux basses fréquences. Enfin, le tri effectué est combiné avec des algorithmes de tests statistiques afin d'identifier les composantes non-stationnaires de nos acquisitions aux temps longs. La méthode élaborée cherchera à distinguer le type de non-stationnarité présenté par une composante et de statuer sur sa nature stochastique, déterministe ou ni l'un, ni l'autre.

Les travaux décrits dans ce manuscrit ont fait l'objet des publications suivantes :

[1] G. GREDAT, H. LIU, J. COTXET, F. TRICOT, G. BAILL, F. GUTTY, F. GOLDFARB, I. SAGNES et F. BRETENAKER, «Optimization of laser dynamics for active stabilization of DF-VECSELS dedicated to cesium CPT clocks», *Journal of the Optical Society of America B*, **37** (2020)

[2] G. GREDAT, H. LIU, et F. BRETENAKER, «Thermal phase fluctuations in optically pumped dual-frequency vertical external-cavity surface-emitting lasers for cesium clocks based on coherent population trapping», *Journal of Applied Physics*, **126** (2019)

[3] G. GREDAT, D. CHATTERJEE, G. BAILL, F. GUTTY, I. SAGNES, F. GOLDFARB, F. BRETENAKER et H. LIU, «Fully-correlated multi-mode pumping for low-noise dual-frequency VECSELS», *Optics Express*, **26** (2018)

[4] H. LIU, G. GREDAT, G. BAILL, F. GUTTY, F. GOLDFARB, I. SAGNES et F. BRETENAKER, «Noise Investigation of a Dual-Frequency VECSEL for Application to Cesium Clocks», *Journal of lightwave technology*, **36(18)** (2018)

[5] H. LIU, G. GREDAT, S. DE, I. FSAIFES, A. LY, R. VATRÉ, G. BAILL, S. BOUCHOULE, F. GOLDFARB et F. BRETENAKER, «Ultra-low noise dual-frequency VECSEL at telecom wavelength using fully correlated pumping», *Optics Letters*, **43(8)** (2018)

Par ailleurs, une autre publication est en cours de préparation au moment de l'écriture de ce manuscrit de thèse :

G. GREDAT, M. ANSQUER, A. LY, S. DE, N. TREPS et F. BRETENAKER, «Decomposition of the intensity noise modes in the non-stationary dynamics of vertical external-cavity surface-emitting lasers», *en préparation* (2020)

PARTIE

I

LES VECSELS BIFRÉQUENCES POUR  
LES APPLICATIONS : PROPRIÉTÉS,  
FONDEMENTS THÉORIQUES ET  
CONTEXTES



## CHAPITRE 1

# DES LASERS POMPÉS OPTIQUEMENT AUX BONNES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES

Sans peut-être que nous nous en rendions compte, les lasers à émission de surface à cavité verticale VCSEL (acronyme anglophone de *Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser*) ont déjà envahi notre quotidien. Ces lasers à puits quantiques constituent des alternatives aux diodes lasers plus traditionnelles grâce à leurs performances et leur faible coût lié à la facilité de leur production à partir de larges plaques de semiconducteurs. Ils occupent désormais une place importante dans de nombreuses applications comme les imprimantes lasers, les télécoms ou encore dans les smartphones. Un essor considérable de cette technologie continue de voir le jour avec cette dernière application. En effet, certains smartphones embarquent désormais non pas un mais trois VCSELS pour la reconnaissance faciale et la reconnaissance 3D. Un premier VCSEL sert à produire un flash lumineux infrarouge, un deuxième un réseau de points lumineux pour la 3D et le troisième sert de capteur de proximité.

L'ajout d'une cavité externe de l'ordre de quelques cm lors de la conception de ce laser à semiconducteurs est d'un grand intérêt. En effet, G. Baili a démontré la possibilité d'obtenir alors un laser de très faible bruit d'intensité [6]. Ce sont ces lasers à émission de surface à cavité externe verticale, notés VECSELS<sup>1</sup> (acronyme anglophone de *Vertical External-Cavity Surface-Emitting Laser*) que nous étudions, en présence d'un pompage optique. Plus particulièrement, nous nous intéressons à leur dynamique et leurs propriétés de bruit. La bonne qualité de leur faisceau, les puissances élevées atteintes en sortie et leur grande pureté spectrale font de ces lasers les sources lasers les plus polyvalentes d'après l'article de revue [7]. C'est pourquoi leur développement concerne de nombreuses applications.

---

1. On trouve parfois l'appellation anglophone *semiconductor disk lasers* pour ces lasers, le plus souvent pour des applications de fortes puissances.

Par exemple, en jouant sur la cohérence du laser en fonctionnement multimode grâce à un diaphragme inséré dans la cavité étendue, les auteurs de l'article [8] tirent profit des propriétés optiques du VECSEL pour l'imagerie biomédicale et la prise vidéo d'écoulements microscopiques (flux sanguin du myocarde d'un têtard). Aussi, des VECSELS émettant dans le jaune (à 577 nm) ont été spécialement développés pour application à la dermatologie [9]. Basés sur des structures émettant autour de  $1.2\ \mu\text{m}$ , ces VECSELS contiennent à l'intérieur de leur cavité étendue un cristal non-linéaire de triborate de lithium pour le doublage de fréquence. Parmi les autres domaines d'applications des VECSELS, citons la physique atomique et moléculaire [10], comme la spectroscopie à  $2.3\ \mu\text{m}$  [11]. De récents travaux, menés notamment dans l'équipe d'U. Keller à l'ETH de Zürich, ont abouti au développement de VECSELS à blocage de modes passif à l'aide d'absorbeurs saturables [12]. Ces lasers sont couramment désignés sous le nom de MIXSEL, pour *Modelocked Integrated eXternal-cavity Surface Emitting Laser* en anglais. Ils permettent l'émission de peignes de fréquences avec un taux de répétition qui peut atteindre 10 GHz pour une puissance de sortie record de 2.4 W et des impulsions de 17 ps de durée [13]. Ces peignes de fréquences permettent d'étendre l'application des VECSELS à la spectroscopie de précision, à la métrologie temps-fréquence et aux communications optiques à ultra-haute vitesse.

Nous nous intéressons plus particulièrement au fonctionnement bifréquence des VECSELS qui offre la possibilité singulière de produire, par battement, un signal optique de grande pureté dans le domaine micro-onde, c'est-à-dire à des fréquences  $f_{\text{RF}}$  allant des centaines de MHz aux centaines de GHz. Nous verrons dans la suite à quel point ce fonctionnement est pertinent d'un point de vue technologique et applicatif. Revenons au commencement des lasers bifréquences. F. Bretenaker et A. Le Floch ont posé au début des années 1990 les jalons de la production de deux modes lasers à partir d'une même cavité en exploitant les effets de biréfringence d'un cristal disposé au sein de cette cavité [14, 15]. En 1998, la référence [16] montre, à l'aide d'un interféromètre de Michelson, que le battement produit par deux longueurs d'onde différentes, provenant d'un même laser en présence d'un cristal de calcite intra-cavité, peut être accordé jusqu'au THz. L'utilisation d'un cristal biréfringent intra-cavité est responsable de l'oscillation de deux modes polarisés orthogonalement, de pulsations dénotées  $\omega_x$  et  $\omega_y$  en désignant  $z$  la direction de propagation (voir Fig. 1.1). La génération du signal optique RF à partir d'un tel laser bifréquence ne nécessite rien d'autre que l'utilisation d'un polariseur à  $45^\circ$  des axes  $x$  et  $y$ , comme illustré à la Fig. 1.1.

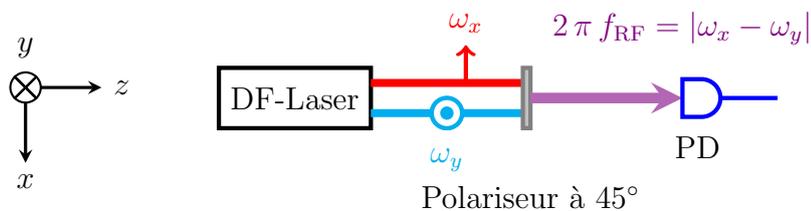


FIGURE 1.1 – Laser bifréquence (DF pour *dual-frequency*) pour la génération d'un signal radiofréquence à la fréquence  $f_{\text{RF}}$  par battement. PD : photodétecteur.

Grâce à leur cavité étendue, les VECSELS sont capables d'inclure un élément biréfringent permettant un tel fonctionnement bifréquence [17]. Notre travail s'inscrit dans la continuité de l'étude de la dynamique bifréquence initiée dès lors et repose sur l'expertise de sa modélisation acquise au fil des années au sein de notre groupe de recherche [18–22]. Les investigations de notre groupe n'ont pu être réalisées que grâce à l'étroite collaboration avec nos partenaires de Thales et du laboratoire de photonique et de nanostructures (LPN) devenu le centre pour la nanoscience et les nanotechnologies (C2N) (I. Sagnes et S. Bouchoule). Dans la littérature, les travaux sur les VECSELS émettant à deux longueurs d'onde fleurissent et d'ailleurs les techniques employées ne reposent pas forcément sur l'utilisation d'un cristal biréfringent. L'observation de la stabilité du fonctionnement bifréquence a fait l'objet de l'article [23] et celui d'un fonctionnement plus largement multimode dans la référence [24]. Une dynamique en opposition de phase résultant de la compétition des modes en fonctionnement bifréquence a été reportée dans [25], ce qui fait tout à fait écho aux résultats mis en avant par S. De dans notre laboratoire [18, 20] et que nous aurons l'occasion de détailler. Il a aussi été proposé d'utiliser à l'intérieur d'une seule cavité laser deux puces semiconductrices pour fournir le gain à deux modes polarisés orthogonalement dans l'infrarouge [26, 27]. Notons enfin que suite au développement évoqué plus haut des MIX-SELS, l'insertion dans la cavité d'un cristal biréfringent en plus de l'absorbeur saturable intégré a permis l'obtention et la caractérisation de peignes de fréquences bichromatiques [28, 29], c'est-à-dire possédant deux fréquences centrales bien distinctes.

Dans ce chapitre nous commençons par décrire l'architecture et le fonctionnement des VECSELS, de la structure à semiconducteurs jusqu'à l'oscillation laser. À l'occasion d'une deuxième partie, nous dressons le cadre pour décrire les bonnes propriétés dynamiques du VECSEL avec les outils statistiques nécessaires pour caractériser les fluctuations du champ laser. La troisième partie est dédiée au fonctionnement bifréquence spécifiquement. Le VECSEL bifréquence à la longueur d'onde télécom que nous mettons en œuvre est basé sur la même structure que celui qui a été utilisé par S. De au cours de sa thèse et décrit dans les références [19, 20]. Le cadre théorique pour la modélisation de la dynamique de ce laser est ensuite détaillé. Puis, nous résumons l'expertise acquise sur la modélisation des bruits impactant le battement RF généré à partir des deux modes lasers du VECSEL. Nous mettons ainsi en lumière le rôle primordial joué par le pompage optique et ses fluctuations dans la pureté spectrale du signal optique RF. L'ensemble des éléments mis en place précédemment pour décrire le transfert de bruit de la pompe au VECSEL bifréquence complète enfin le cadre théorique hérité des travaux précédents. Ce cadre donnera un réel appui et élan aux investigations à venir dans les chapitres suivants.

# 1 Introduction aux lasers à semiconducteurs à cavité étendue

Dans cette section, quelques notions concernant le fonctionnement d'un laser à semiconducteurs sont rappelées. Ces rappels se basent sur les références bibliographiques [30] et [31] (ou encore [32] pour un résumé) qu'il est nécessaire de consulter pour un exposé plus exhaustif.

La préhistoire du laser à semiconducteurs commence en 1962, avec un effet laser obtenu à partir d'une jonction PN en arséniure de gallium (GaAs) [33, 34] qui ne fonctionne malheureusement qu'en régime impulsionnel et à température cryogénique. Le développement de ces diodes lasers s'inscrit dans les avancées fondamentales menées à l'époque autour de l'électronique quantique, pour lesquelles N. Basov obtient un prix Nobel en 1964 [35] avec A. Prokhorov et C. Townes. C'est d'ailleurs N. Basov qui rapporte le premier la possibilité du pompage optique de ces lasers à semiconducteurs [36]. Les progrès de l'épitaxie, avec un contrôle de l'ordre de la mono-couche atomique, et les associations successives de différents matériaux d'indices et de gaps variés aboutissent à une amélioration significative et rapide des performances des diodes lasers. La compréhension et la maîtrise du confinement des porteurs de charge dans les hétéro-structures atteint un paroxysme avec l'inclusion de puits quantiques dans la croissance des milieux actifs de ces lasers en 1979 [37]. Ces puits quantiques bidimensionnels (avec typiquement  $L_{QW} = 10$  nm d'épaisseur) abaissent le seuil laser grâce à l'obtention d'une inversion de population avec une densité de porteurs bien plus faible. Notre description des VECSELS commence par celle de leur milieu actif et donc de ces puits quantiques.

## 1.1 Le milieu à gain du VECSEL

Les milieux actifs des VECSELS sont principalement constitués d'alliages binaires ou ternaires de composés issus des colonnes III et V de la classification périodique de Mendeleïev. La réalisation de ces hétéro-structures, dans lesquelles tout le gain est fourni par des puits quantiques, repose sur la nature des différents semiconducteurs utilisés et l'épaisseur des couches successives. La puce à semiconducteurs constituant le milieu actif typique des VECSELS est schématisée à la Fig. 1.2. Elle comporte un miroir de Bragg et est pompée optiquement. Cette structure est nommée ci-après un « 1/2-VCSEL ». Ce nom se réfère au fait que cette structure peut être assimilée à un VCSEL dont on aurait ôté l'un des deux miroirs de Bragg.

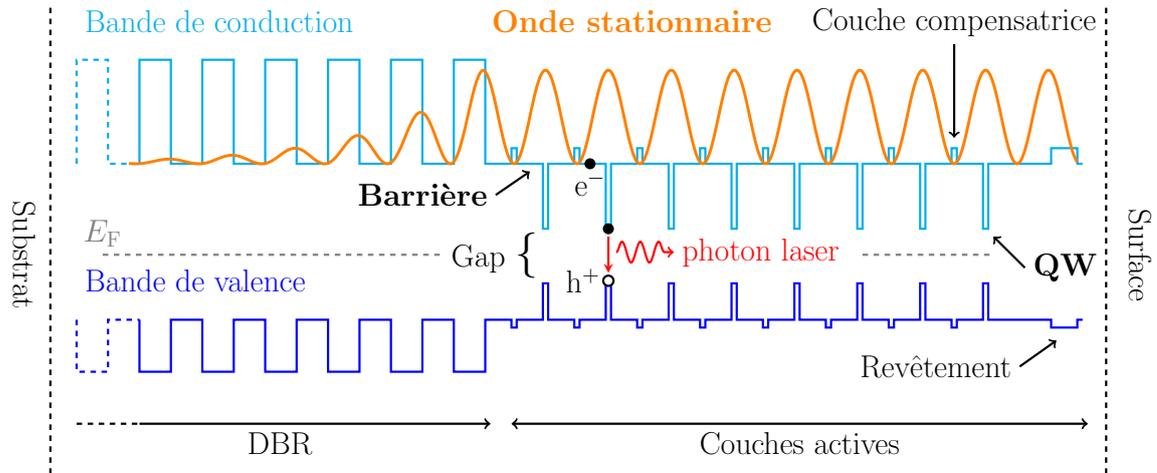


FIGURE 1.2 – Schéma de principe d'un 1/2-VCSEL sous pompage optique. Les électrons ( $e^-$ ) sont excités de la bande de valence à la bande de conduction sous l'effet des photons de pompe. Des barrières, ils sont rapidement captés dans les puits quantiques (QW) où leur recombinaison avec un trou ( $h^+$ ) de la bande de valence aboutit à l'émission d'un photon. La durée de vie des porteurs dans la barrière est bien plus longue que celle du temps de capture, qui est de l'ordre de la dizaine de ps. L'onde stationnaire (en orange) du champ laser intra-cavité décroît exponentiellement dans le réflecteur de Bragg distribué (DBR).  $E_F$  : énergie de Fermi.

## Les puits quantiques

Afin de maximiser le gain, les puits quantiques (couches compensatrices) sont situé(e)s aux ventres (nœuds) de l'onde stationnaire du champ laser qui s'étend à l'intérieur de la microcavité constituée par l'ensemble des couches actives. Notons qu'en pratique, contrairement à ce qui est représenté à la Fig. 1.2, il n'y a pas autant de puits que de ventres et certaines positions sont seulement occupées par des barrières plus épaisses. Plusieurs puits quantiques sont même parfois présents pour un seul et même ventre. Le rôle des puits quantiques est de confiner les porteurs de charges, qu'ils capturent depuis les barrières après la promotion des porteurs de la bande de valence (sous bande des trous lourds) à la bande de conduction grâce à l'énergie de pompe. En se recombinant à l'intérieur des puits quantiques, les porteurs de charges sont responsables de l'émission stimulée nécessaire pour l'amplification cohérente du champ laser, une fois l'inversion de population réalisée. Mais comment cette dernière se produit-elle ?

Les mécanismes d'absorption et d'émission stimulée entre la bande de valence et la bande de conduction induits par les photons lasers de pulsation  $\omega_l$  sont représentés dans le diagramme énergie - vecteur d'onde  $k$  (en norme) de la Fig. 1.3(a) dans une approximation de dispersion parabolique. La transition de l'état du bas à celui du haut respecte la conservation de l'énergie  $E_b - E_a = \hbar \omega_l$ , avec  $\hbar$  la constante de Planck réduite. Notons, toutefois,

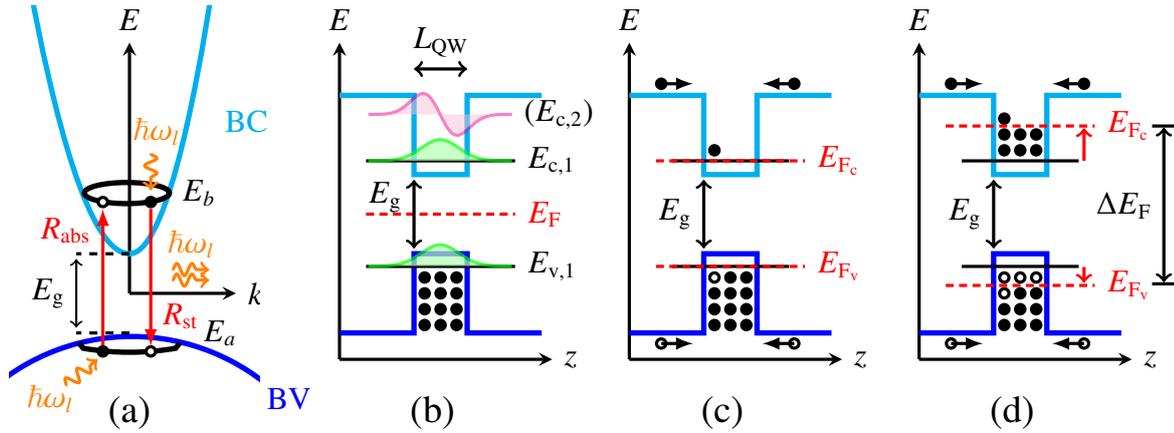


FIGURE 1.3 – Diagrammes de bandes pour les puits quantiques. (a) Illustration des processus d'absorption (de taux  $R_{\text{abs}}$ ) et d'émission stimulée (de taux  $R_{\text{st}}$ ) par interaction avec un photon d'énergie  $\hbar\omega_l$ . BV : bande de valence. BC : bande de conduction.  $E_g$  : énergie du gap. (b) Illustration du diagramme d'énergie d'un puits quantique à l'équilibre thermodynamique, avec  $z$  la profondeur.  $E_{v,1}$ ,  $E_{c,1}$  : niveaux discrets d'énergie du puits de même nombre quantique  $n = 1$ . (c) Le seuil d'amplification est atteint. (d) Inversion de population. Hors équilibre, le quasi-niveau de Fermi des électrons  $E_{F_c}$  (trous  $E_{F_v}$ ) se décale vers le haut (bas) de la BC (BV).

qu'à cause de processus de relaxation intra-bande extrêmement rapides, l'émission stimulée se produit davantage depuis le bas de la bande de valence, aux faibles valeurs de  $k$ . Les taux d'absorption  $R_{\text{abs}}$  et d'émission stimulée  $R_{\text{st}}$  sont liés aux probabilités d'occupation par les électrons des niveaux d'énergie de la transition. La transition  $a \rightarrow b$  peut se faire par l'absorption d'un photon par un électron si, à l'énergie  $E_a$ , la bande de valence est en effet occupée par un électron et qu'en revanche aucun électron n'occupe la bande de conduction à l'énergie  $E_b$ . Pour l'émission stimulée, c'est l'inverse. Il faut un électron sur la bande de conduction et un trou au niveau de la bande de valence. Les taux  $R_{\text{abs}}$  et  $R_{\text{st}}$  s'expriment donc de la façon suivante :

$$R_{\text{abs}} = B \cdot f_v \cdot (1 - f_c) \quad \text{et} \quad R_{\text{st}} = B \cdot f_c \cdot (1 - f_v), \quad (1.1)$$

où les probabilités liées aux statistiques de Fermi-Dirac vérifient :

$$f_{c,v} = \frac{1}{1 + \exp[\beta \cdot (E_{b,a} - E_{F_c,F_v})]}, \quad (1.2)$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$  en notant  $k_B$  la constante de Boltzmann. Le coefficient  $B$  représente le taux de recombinaisons radiatives. Les niveaux d'énergie  $E_{F_v}$  et  $E_{F_c}$  sont appelés quasi-niveaux de Fermi de valence et de conduction. À température non-nulle,  $E_{F_c}(T, N)$  et  $E_{F_v}(T, N)$  dépendent fortement du niveau d'injection de porteurs  $N$  dans les puits quantiques et diffèrent l'un de l'autre dans la situation hors-équilibre thermodynamique réalisée

grâce au pompage. On passe de la situation décrite par la Fig. 1.3(b) à l'équilibre thermodynamique où les niveaux de Fermi des deux bandes se confondent (les photons avec  $\hbar\omega_l \geq E_g$  sont absorbés), à un décalage progressif de  $E_{F_v}$  et  $E_{F_c}$  avec l'énergie de pompe. En d'autres termes, l'écart entre les niveaux de Fermi des deux bandes  $\Delta E_F = E_{F_c} - E_{F_v}$  s'accroît quand  $N$  augmente. La pompe optique doit au passage fournir des photons d'énergie suffisante pour exciter les électrons jusqu'aux barrières et donc devra nécessairement se situer à une longueur d'onde plus faible que celle du laser.

À l'intérieur des puits quantiques, les niveaux d'énergie discrets des électrons dans chaque bande sont quantifiés par le nombre entier  $n$  et l'écart entre les différents niveaux successifs est proportionnel à  $1/L_{QW}^2$ . C'est pourquoi, plus le puits est étroit, plus les électrons sont confinés. Dans ces conditions, la transition entre le niveau d'énergie  $E_{v,1}$  et le niveau d'énergie  $E_{c,1}$  est la plus probable. En outre, les règles de sélection permettent d'affirmer que la transition entre le niveau d'énergie  $E_{v,1}$  et le niveau  $E_{c,2}$  est interdite puisqu'ils possèdent des nombres quantiques différents (voir Fig. 1.3(b)).

Sous l'effet de l'injection de porteurs, une inversion de population se manifeste 1.3(d) et doit être reliée à l'obtention d'un seuil d'amplification. Rechercher la condition d'amplification revient à imposer un taux d'émission stimulée plus important que le taux d'absorption. En partant des équations (1.1) et (1.2), il vient :

$$\frac{R_{st}}{R_{abs}} = \frac{f_c \cdot (1 - f_v)}{f_v \cdot (1 - f_c)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exp[\beta \cdot (\Delta E_F - \hbar\omega_l)] \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \hbar\omega_l \leq \Delta E_F. \quad (1.3)$$

Le gain peut se définir comme un taux net d'émission :

$$g \propto R_{st} - R_{abs} = g_{max} \cdot (f_c - f_v), \quad (1.4)$$

avec  $g_{max}$  ne dépendant que des propriétés du matériau. Le gain devient positif à la condition d'amplification donnée par l'assertion (1.3), qui suppose d'avoir amené le système suffisamment hors d'équilibre grâce à l'injection de porteurs. En rajoutant le fait que les puits sont transparents aux photons incapables d'amener un porteur à une énergie plus élevée que la bande interdite, on a obtenu la condition d'amplification de Bernard-Duraffourg :

$$E_g \leq \hbar\omega_l \leq \Delta E_F. \quad (1.5)$$

Dans la situation de la Fig. 1.3(d), le puits quantique est transparent pour les photons d'énergie inférieure au gap et très absorbant pour les photons d'énergie supérieure à la séparation des quasi-niveaux de Fermi. Lorsqu'en revanche, la condition (1.5) est respectée, le puits se comporte bien comme un milieu à gain. À cet égard, la relation  $\Delta E_F = E_g$  obtenue avec l'injection de porteurs dans le puits, constitue un seuil d'amplification (Fig. 1.3(c)), que l'on appelle également transparence car  $g = 0$  à ce moment précis.

### Influence de l'émission spontanée

L'émission spontanée est responsable du premier photon qui va tomber dans le mode laser et amorcer l'amplification par l'émission stimulée. On définit alors le facteur d'inversion de population  $n_{sp}$  comme le rapport du taux d'émission spontanée (un électron de la bande de conduction se combine radiativement avec un trou de la bande de valence) sur le taux net d'émission pour un seul photon dans le mode laser :

$$n_{sp} \equiv \frac{f_c \cdot (1 - f_v)}{f_c - f_v} = \frac{1}{1 - \exp[-\beta \cdot (\Delta E_F - \hbar\omega_l)]}. \quad (1.6)$$

Ce facteur d'inversion de population ne devient positif et ne prend son sens qu'après le seuil d'amplification atteint. Alors, pour une injection de porteurs faible menant à  $\Delta E_F$  proche de  $\hbar\omega_l$  ce facteur d'inversion de population est très grand et l'émission spontanée est très impactante. Mais, dans les conditions usuelles de pompage, pour un VECSEL près du seuil laser  $n_{sp}$  est déjà proche de 1, sa valeur de saturation. Il est intéressant de noter que ce facteur dépend de la température.

### Recombinaisons non-radiatives et effets Auger

La durée de vie des porteurs qui réalisent l'inversion de population dans le milieu à gain est notée  $\tau$ . Elle dépend du niveau d'injection du niveau excité  $N$  et se décompose en fonction d'une durée de vie radiative  $\tau_r$  et une durée de vie non-radiative  $\tau_{nr}$  :

$$\frac{1}{\tau(N)} = \frac{1}{\tau_r(N)} + \frac{1}{\tau_{nr}(N)}. \quad (1.7)$$

La valeur de  $\tau$  en conditions opératoires est de l'ordre de la ns. Les processus non-radiatifs sont variés. Les recombinaisons non-radiatives électron-trou peuvent être assistées par les défauts cristallins ou bien les impuretés du matériau ou encore faire intervenir une troisième particule. Les processus à trois particules ou quasi-particules (pour les phonons) sont regroupés sous le terme d'effets Auger. Un premier exemple d'effet Auger : la collision de deux électrons de la bande de conduction, lorsqu'elle se retrouve surpeuplée, conduit à la recombinaison d'un électron avec un trou de la bande de valence et la promotion de l'autre électron à une énergie plus élevée dans la bande de conduction. Cet électron thermalise et redescend en bas de la bande de conduction en cédant son énergie sous forme de chaleur au réseau cristallin. Que ce soit sur cet exemple ou sur celui d'une recombinaison assistée par un phonon du réseau cristallin, il apparaît que les effets non-radiatifs Auger augmentent avec l'injection de porteurs  $N$  et la température  $T$ . La proximité des autres bandes de valences dans les semiconducteurs, comme la sous-bande des trous légers, conduit aussi à des processus Auger, d'autant plus probables que l'énergie du gap est faible. Les effets Auger sont donc plus prononcés dans les structures émettant aux grandes longueurs d'onde.

### Rendement quantique interne

Le bon rendement quantique interne des couches actives est assuré par un fort taux de recombinaisons radiatives par rapport aux recombinaisons non-radiatives que l'on vient de mentionner mais aussi peu de désexcitation dans les barrières. On note  $\tau_b$  la durée de vie des porteurs dans les barrières. Cette durée de vie doit être grande devant le temps de capture typique  $\tau_{\text{capt}}$  des électrons par les puits quantiques, qui est de l'ordre de plusieurs dizaines de ps. Enfin, il faut que le temps de confinement des porteurs dans les puits  $\tau_{\text{conf}}$  soit long devant le temps de la recombinaison radiative pour un bon rendement. L'ensemble de ces considérations se retrouve résumé dans l'expression du rendement quantique interne suivant :

$$\eta_i = \frac{1/\tau_r}{1/\tau + \tau_{\text{capt}}/\tau_b \cdot (1/\tau + 1/\tau_{\text{conf}})} \quad (1.8)$$

On comprend dès lors que la température  $T$  et également l'inversion de population  $N$ , permise par l'excitation de pompe, ont une influence sur ce rendement quantique interne.

### Dichroïsme de gain

La structure cristalline de type blende de certains semiconducteurs les rend anisotropes. Il s'ensuit que, suivant l'axe cristallographique considéré, le gain du 1/2-VCSEL n'est pas identique. On parle de dichroïsme de gain car différentes directions de polarisation du champ électrique du laser verront des gains différents. Ce dichroïsme entre les deux axes orthogonaux dans le plan des couches peut s'élever à plus de 10%. Afin de s'affranchir du dichroïsme, les polarisations des deux modes lasers obtenus en régime d'émission bifréquence seront alignés à 45° de ces deux axes, comme nous le verrons à la section 3.

Nous avons discuté de l'amplification potentielle de la lumière par le milieu actif, cependant un ingrédient clé manque encore à la description : la cavité optique.

## 1.2 Oscillation laser du résonateur

Le 1/2-VCSEL de la Fig. 1.2 est disposé, par capillarité grâce à une graisse assurant un bon contact thermique, sur un module à effet Peltier pour réguler sa température et un radiateur permet une bonne évacuation de la chaleur. Grâce à un coupleur de sortie, on forme alors une cavité linéaire plan-concave de longueur optique  $L_{\text{opt}}$  de l'ordre de quelques cm (Fig. 1.4(a)). La structure est pompée à l'aide d'un faisceau laser de puissance  $P_{\text{opt}}$ . Un étalon inséré dans la cavité permet la sélection d'un mode longitudinal pour une émission monomode. Le mode spatial typiquement obtenu dans la direction transverse est TEM<sub>00</sub>.

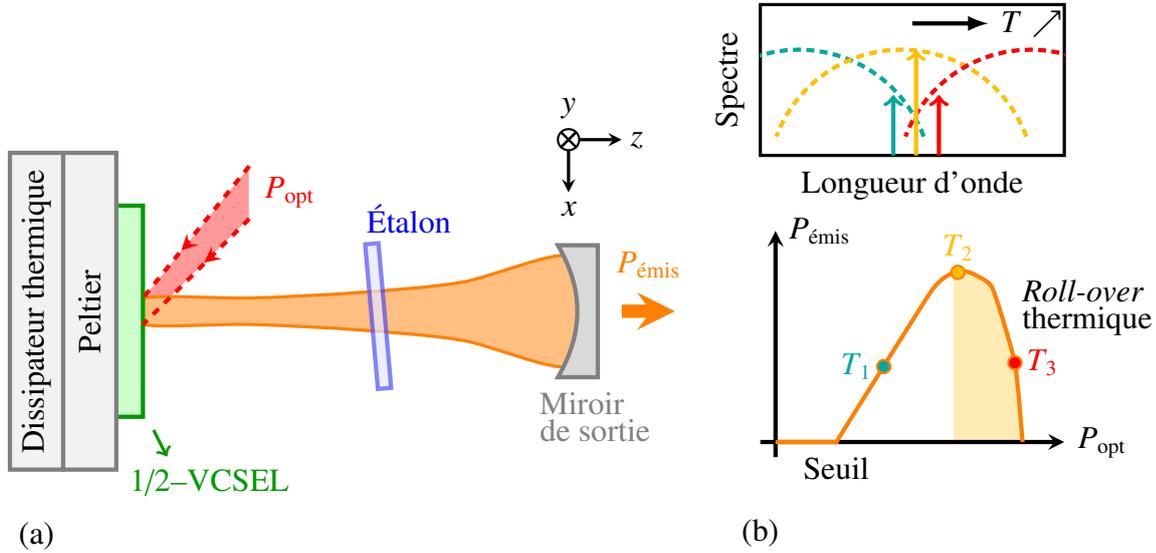


FIGURE 1.4 – (a) Schéma de principe de la cavité plan concave du VECSEL. (b) Schéma de la puissance de sortie du laser en fonction de la puissance optique de la pompe. La zone colorée délimite le *roll-over* thermique et le spectre au-dessus montre le décalage thermique de la courbe de gain qui en est responsable ( $T_1 \leq T_2 \leq T_3$ ).

### Cavité laser

La réflectivité du miroir de Bragg inclus dans le 1/2-VCSEL est généralement très élevée. On la note  $R_1$ . Le coupleur de sortie a une transmission  $T = 1 - R_2$  de l'ordre de 0.5 à 1%. En notant  $c_0$  la célérité de la lumière et  $\varepsilon$  l'ensemble des pertes dans la cavité, la durée de vie des photons est liée à la durée d'un tour de cavité et aux pertes par tour [38] :

$$\tau_{cav} = \frac{2 L_{opt}/c_0}{-\ln [R_1 R_2 (1 - \varepsilon)]} \simeq \frac{2 L_{opt}/c_0}{(1 - R_1) + (1 - R_2) + \varepsilon} = \frac{\text{Durée par tour}}{\text{Pertes par tour}}. \quad (1.9)$$

La condition de résonance pour le champ électrique intra-cavité revient à imposer des interférences constructives à chaque aller-retour dans la cavité, c'est-à-dire une addition en phase. Il en résulte des modes longitudinaux quantifiés, avec entre deux modes, un intervalle spectrale libre (ISL) en fréquence valant l'inverse de la durée d'un tour pour un photon. La cavité optique peut être considérée comme un résonateur de type Fabry-Perot, que l'on peut caractériser par son facteur de qualité  $Q_{cav}$  ou encore sa finesse  $\mathcal{F}$ . Ces dernières quantités sont reliées au temps de vie des photons dans la cavité :

$$Q_{cav} = \omega_0 \cdot \frac{\text{Énergie emmagasinée}}{\text{Puissance dissipée}} = \omega_0 \cdot \tau_{cav} = \omega_0 \cdot \frac{\mathcal{F}}{2\pi \text{ ISL}}, \quad (1.10)$$

avec  $\omega_0$  la fréquence de résonance de la cavité.

### Le roll-over thermique

La Fig. 1.4(b) montre l'allure de la caractéristique en puissance du laser obtenu. Lorsque le gain compense les pertes, un seuil laser s'initie. On observe ensuite une croissance assez linéaire avec l'excitation venant de la pompe. Malgré tout, lorsque la puissance de pompe augmente, la température de la structure augmente. Les processus non-radiatifs augmentent. Le milieu à gain se dilate. L'indice optique change fortement. La réflectivité du miroir de Bragg diminue. On peut résumer tous les mécanismes qui accompagnent l'élévation de la température en deux effets : un décalage lent vers le rouge de l'émission laser (quelques  $0.01 \text{ nm.K}^{-1}$ ) et un décalage rapide vers le rouge de la courbe de gain (quelques  $0.1 \text{ nm.K}^{-1}$ ). Le schéma du spectre en haut sur la Fig. 1.4(b) explique alors comment ce décalage plus rapide de la courbe de gain avec la température induit, fatalement, une chute de la puissance de sortie. Cette chute de puissance est communément appelée roll-over thermique, par anglicisme. La gestion de la thermique est, de fait, très importante dans ces lasers à semiconducteurs.

La grande majorité des pertes intra-cavité se produit dans la structure du semiconducteur et non pas dans l'espace libre entre la puce et le coupleur de sortie. Les pertes  $\varepsilon$  sont donc sensiblement similaires à celles d'un VCSEL. Cependant, grâce à la cavité étendue de quelques cm, le VECSEL permet un allongement significatif du temps de vie des photons dans la cavité d'après la relation (1.9). Cela a une incidence primordiale sur la dynamique du laser, que nous proposons maintenant de discuter.

## 2 Tour d'horizon de la dynamique et des sources de bruit

Cette partie réalise un état des lieux succinct de la modélisation de la dynamique des VECSELs ainsi que de la description de différentes sources de bruit. Cet état des lieux se base sur le travail de thèse de G. Baili [39], soutenue en 2008. Quelques outils statistiques et définitions utiles sont rassemblés à l'Annexe A.

### 2.1 Le VECSEL comme laser de classe-A

La description des propriétés dynamiques du VECSEL commence par l'écriture du champ électrique oscillant à la pulsation  $\omega_l$  à l'intérieur de la cavité étendue comme une onde plane scalaire (car la direction de polarisation est fixée) se propageant à  $z$  croissant :

$$E(z, t) = \mathcal{A}(z, t) \cdot E_0 \cdot e^{-i(\omega_l t - kz)} + \text{c.c.}, \quad (1.11)$$

avec c.c. désignant le complexe conjugué. L'amplitude complexe  $\mathcal{A}(z, t)$  est l'enveloppe lentement variable, adimensionnée grâce à l'introduction du facteur  $E_0$ . Les équations

d'évolution impliquent généralement ce champ électrique intra-cavité, l'inversion de population que l'on note  $N$  et la polarisation dipolaire  $\mathcal{P}$  du milieu actif [38]. Cependant, la dynamique du champ de polarisation  $\mathcal{P}$  est très rapide dans les lasers à semiconducteurs et peut donc, en excellente approximation, être éliminée adiabatiquement des équations d'évolution. Un autre ingrédient va venir s'immiscer dans l'expression des équations couplant la dynamique de l'amplitude complexe  $\mathcal{A}(z, t)$  et celle de l'inversion de population due aux porteurs dans les puits quantiques.

**Facteur de Henry** Les lasers à semiconducteurs ont la particularité de présenter un couplage non négligeable entre leur gain et l'indice de réfraction à travers la densité de porteurs de l'inversion de population. Il s'agit du couplage de Henry [40], décrit par le facteur :

$$\alpha = \frac{\partial \text{Re}[\chi(N)] / \partial N}{\partial \text{Im}[\chi(N)] / \partial N} = -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial n_{\text{SC}} / \partial N}{\partial g / \partial N}, \quad (1.12)$$

où  $\chi$  représente la susceptibilité du milieu. Autrement dit, la variation de la partie réelle de l'indice optique du semiconducteur avec l'inversion de population  $\partial n_{\text{SC}} / \partial N$  est proportionnelle au gain différentiel  $\partial g / \partial N$  et  $\alpha$  est lié au coefficient de proportionnalité associé. Dans un laser à semiconducteurs standard,  $\alpha$  est significatif puisqu'il atteint typiquement quelques unités. Il sera d'autant plus grand que le confinement des porteurs dans les puits quantiques sera faible. En effet, les porteurs non confinés vont peupler le continuum des barrières et réduire le gain différentiel donc augmenter  $\alpha$ . Le facteur de Henry  $\alpha$  a une incidence directe sur la dynamique du laser et se traduit par l'élargissement en  $(1 + \alpha^2)$  de la raie Shawlow-Townes du laser. La section 2.2 en fera la démonstration. Ce facteur  $\alpha$  implique en fait un couplage entre la phase et l'amplitude du champ laser  $\mathcal{A}(z, t)$ .

**Équations d'évolution effectives** Dans la limite des faibles pertes dans la cavité, il devient pertinent de négliger la dépendance en  $z$  de l'enveloppe lentement variable. En notant  $\tau_{\text{cav}}$  le temps de vie des photons dans la cavité,  $\tau$  le temps de vie des porteurs dans les puits quantiques et  $\kappa$  la constante du couplage de l'émission stimulée, les équations d'évolution conjointe de l'amplitude lentement variable du champ intra-cavité  $\mathcal{A}(t)$  et de l'inversion de population  $N(t)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = -\mathcal{A}(t) / (2\tau_{\text{cav}}) + \frac{\kappa}{2} (1 + i\alpha) \mathcal{A}(t) N(t), \\ \frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t) - N_0(t)}{2\tau} - \kappa N(t) |\mathcal{A}(t)|^2. \end{cases} \quad (1.13)$$

Le terme  $N_0(t)$  représente l'inversion de population non saturée et donc  $N_0(t) / \tau$  est le terme résultant du pompage optique. Comme l'amplitude du champ est complexe, il est commode de séparer son module et sa phase en suivant la définition :

$$\mathcal{A}(t) = \sqrt{F(t)} \exp(i\phi(t)), \quad (1.14)$$

où  $i$  représente l'unité imaginaire,  $F(t)$  le nombre de photons à l'intérieur de la cavité et  $\phi$  la phase instantanée du champ. En insérant cette définition à l'intérieur des équations d'évolution (1.13) et en identifiant les parties réelles et imaginaires, nous aboutissons au système couplé de trois équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = -\frac{F(t)}{\tau_{\text{cav}}} + \kappa N(t) F(t) , \\ \frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau} (N_0(t) - N(t)) - \kappa N(t) F(t) , \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{2} \kappa N(t) . \end{cases} \quad (1.15)$$

L'inversion de population modifie la phase du champ à travers le facteur de Henry. Elle dépend à son tour de l'intensité du laser (proportionnelle au nombre de photons) par le terme de saturation du gain. En fait, lorsque la cavité externe est suffisamment étendue (longue de quelques cm) et d'assez haute finesse (de plusieurs centaines), la réponse du laser est simplifiée, comme mis en évidence dans la référence [41].

**Vers une dynamique de classe A** Lorsque la durée de vie des porteurs dans la bande de conduction devient considérablement plus faible que celle des photons dans la cavité alors le comportement du laser n'est plus dicté que par un seul degré de liberté. La dynamique est dite de classe A. Cela signifie que le milieu à gain suit sans délai les variations du champ. Après élimination adiabatique, valide quand  $\tau \ll \tau_{\text{cav}}$ , de l'équation portant sur l'inversion de population du système (1.15), la dynamique est résumée à l'équation différentielle non linéaire suivante sur le nombre de photons :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F}{\tau_{\text{cav}}} \left( -1 + \frac{r}{1 + F/F_{\text{sat}}} \right), \quad (1.16)$$

en introduisant le nombre de photons à saturation  $F_{\text{sat}} = 1/(\kappa \tau)$  et le taux de pompage  $r = N_0 \cdot (\tau_{\text{cav}} \kappa)$ . On démontre alors que le comportement transitoire pour l'établissement de l'intensité dans la cavité suit un régime aperiodique, exempt d'oscillation de relaxation. Cette différence avec les lasers à l'état solide usuels est essentielle. Elle confère aux VECSELS un bruit d'intensité relatif (abrégé dans la suite par l'acronyme RIN<sup>2</sup>) avantageux car ne présentant aucun pic de relaxation. Considérons des fluctuations du nombre de photons  $\delta F$  induites par une modulation  $\delta r$  du taux de pompage via l'équation (1.16). Dans le domaine de Fourier, tel que défini à l'annexe A, ces fluctuations sont notées  $\widetilde{\delta F}$ . La valeur moyenne du nombre de photons est notée  $F_0$ . Alors, le RIN est plus précisément défini comme le rapport entre la densité spectrale de puissance des fluctuations sur la puissance

2. Pour *relative intensity noise* en anglais.

moyenne au carré :

$$\text{RIN}(f) = \frac{\langle |\widetilde{\delta F}(f)|^2 \rangle}{F_0^2}, \quad (1.17)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne statistique d'ensemble. La référence [41] a démontré un comportement type filtre passe-bas pour la fonction de transfert entre le RIN de la pompe et le RIN du VECSEL. La partie suivante nous permettra de généraliser ce résultat au fonctionnement bifréquence. Ce transfert étant donné par une fonction monotone et décroissante, on peut aisément trouver son maximum en travaillant à fréquence nulle. Travailler à fréquence nulle revient à examiner l'équation (1.16) en régime stationnaire, c'est-à-dire avec un membre de gauche nul. Le nombre moyen de photons intra-cavité dans ce régime s'écrit  $F_0 = F_{\text{sat}} \cdot (r - 1)$ . Ainsi une fluctuation  $\delta r$  du taux de pompage donne une fluctuation proportionnelle  $F_{\text{sat}} \cdot \delta r$  du nombre de photons. On en déduit alors :

$$\text{RIN}(f = 0) = \frac{\langle |\widetilde{\delta F}(f = 0)|^2 \rangle}{F_0^2} \equiv \frac{1}{F_{\text{sat}}^2 \cdot (r - 1)^2} \cdot \langle |\widetilde{\delta r}(f = 0)|^2 \rangle \cdot \left( \frac{\delta F_0}{\delta r} \right)^2. \quad (1.18)$$

En multipliant haut et bas cette dernière expression par  $r^2$ , nous faisons apparaître le RIN de la pompe, noté  $\text{RIN}_p$ . Ainsi, nous pouvons ré-écrire :

$$\text{RIN}(f = 0) = \frac{r^2}{F_{\text{sat}}^2 \cdot (r - 1)^2} \cdot \frac{\langle |\widetilde{\delta r}(f = 0)|^2 \rangle}{r^2} \cdot F_{\text{sat}}^2 = \left( \frac{r}{r - 1} \right)^2 \cdot \text{RIN}_p(f = 0). \quad (1.19)$$

En définitive, nous retrouvons directement le résultat de la référence [41] d'un transfert de bruit de pompe majoré par un facteur  $r^2 / (r - 1)^2$  qui dépend uniquement du taux de pompage  $r$ . Cette amplification du bruit est d'autant plus élevée que le point de fonctionnement du laser se situe près du seuil et tend vers 1 à fort taux de pompage.

Une étude plus détaillée sera menée en fonctionnement bifréquence du laser mais intéressons-nous auparavant à d'autres sources de bruit que les fluctuations de pompe.

## 2.2 Bruit intrinsèque d'émission spontanée

L'émission spontanée a lieu aléatoirement dans le milieu à gain et dans toutes les directions de l'espace. Il arrive donc qu'un photon de l'émission spontanée tombe dans le mode laser. Le formalisme des forces de Langevin permet d'introduire la fluctuation stochastique du champ complexe induite par l'émission spontanée. Cette fluctuation va se traduire par l'élargissement prédit par Schawlow et Townes du mode, comme illustré à la Fig. 1.5. Des quantités stochastiques  $\zeta_F(t)$ ,  $\zeta_N(t)$  et  $\zeta_\phi(t)$  sont donc ajoutées aux membres de droite des équations du système (1.15). Le terme rajouté  $\zeta_N(t)$  tient compte de la relaxation des porteurs. Les forces de Langevin sont centrées, c'est-à-dire de moyenne nulle. Elles décrivent des bruits blancs, c'est-à-dire indépendant de la fréquence d'analyse. Ces forces de

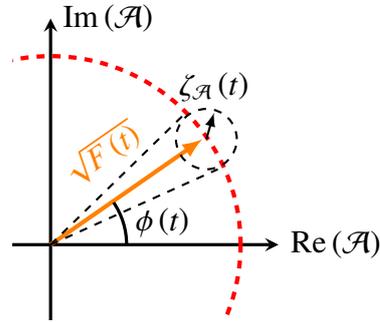


FIGURE 1.5 – Illustration de l'élargissement Schawlow-Townes par la diffusion aléatoire du champ causée par l'émission spontanée.

Langevin vérifient donc :

$$\langle \zeta_i(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \zeta_i(t) \zeta_j(t + \tau) \rangle = 2 D_{ij} \delta(\tau) . \quad (1.20)$$

avec  $D_{ij}$  des coefficients appelés coefficients de diffusion (en  $u^2 \cdot s^{-1}$  où  $u$  représente l'unité de la grandeur pour laquelle est introduite la force de Langevin). Remarquons que c'est par emploi du théorème de Wiener-Khinchine-Kolmogorov (voir annexe A) qu'un bruit blanc en fréquence se traduit par une fonction d'auto-corrélation en pic delta de dirac temporellement.

Nous engageons une résolution perturbative au premier ordre, afin de séparer la partie stationnaire des petites fluctuations engendrées :

$$\begin{cases} F(t) = F_0 + \delta F(t) , \\ N(t) = N_{\text{th}} + \delta N(t) , \\ \phi(t) = \phi_0 + \delta \phi(t) . \end{cases} \quad (1.21)$$

À l'ordre 0, apparaît immédiatement l'expression du nombre de photons dans la cavité  $F_0$  en fonction du taux de pompage  $r$  défini à partir de l'inversion de population non saturée  $N_0$  et de l'inversion de population au seuil du laser  $N_{\text{th}}$  :

$$\begin{cases} F_0 = (r - 1) / (\tau \kappa) , \\ r = N_0 / N_{\text{th}} , \\ N_{\text{th}} = 1 / (\tau_{\text{cav}} \kappa) . \end{cases} \quad (1.22)$$

À l'ordre 1 et dans le domaine de Fourier pour une pulsation d'analyse  $\Omega$ , les équations d'évolution du laser donnent le système suivant :

$$\begin{pmatrix} i\Omega & (r - 1) / \tau \\ 1 / \tau_{\text{cav}} & r / \tau - i\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\delta F} \\ \widetilde{\delta N} \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \widetilde{\delta F} \\ \widetilde{\delta N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widetilde{\zeta}_F \\ \widetilde{\zeta}_N \end{pmatrix} , \quad (1.23)$$

avec

$$\det \mathbb{M} = \Omega^2 + i\Omega r/\tau - (r-1)/(\tau\tau_{\text{cav}}). \quad (1.24)$$

L'inversion du système (1.23), pour isoler les fluctuations du nombre de photons et de l'inversion de population, s'obtient grâce à la transposée de la comatrice de  $\mathbb{M}$ , notée  ${}^{\text{T}}\text{com } \mathbb{M}$  selon :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\delta F} \\ \widetilde{\delta N} \end{pmatrix} = \frac{{}^{\text{T}}\text{com } \mathbb{M}}{\det \mathbb{M}} \begin{pmatrix} -\widetilde{\zeta}_F \\ \widetilde{\zeta}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbb{M}} \begin{pmatrix} i\Omega - r/\tau & -(r-1)/\tau \\ 1/\tau_{\text{cav}} & i\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\zeta}_F \\ \widetilde{\zeta}_N \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Le calcul de la variance donne accès aux quantités physiques associées aux fluctuations : leur densité spectrale de puissance (DSP). D'une part, la DSP de bruit du nombre de photons vérifie :

$$\begin{aligned} \langle |\widetilde{\delta F}(\Omega)|^2 \rangle &= \frac{1}{|\det \mathbb{M}|^2} \left( (\Omega^2 + r^2/\tau^2) \langle |\widetilde{\zeta}_F|^2 \rangle + |(r-1)/\tau|^2 \langle |\widetilde{\zeta}_N|^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{Re} \left[ (i\Omega - r/\tau)(r-1)/\tau \langle \widetilde{\zeta}_F \widetilde{\zeta}_N^* \rangle \right] \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

D'autre part, la DSP de bruit de l'inversion de population s'exprime comme :

$$\langle |\widetilde{\delta N}(\Omega)|^2 \rangle = \frac{1}{|\det \mathbb{M}|^2} \left( \langle |\widetilde{\zeta}_F|^2 \rangle / \tau_{\text{cav}}^2 + \Omega^2 \langle |\widetilde{\zeta}_N|^2 \rangle + 2 \text{Re} \left[ i\Omega \langle \widetilde{\zeta}_N^* \widetilde{\zeta}_F \rangle / \tau_{\text{cav}} \right] \right). \quad (1.27)$$

L'équation sur la phase donne pour la DSP de bruit de phase :

$$\langle |\widetilde{\delta \phi}(\Omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \left( \langle |\widetilde{\zeta}_\phi|^2 \rangle + \frac{\alpha^2 \kappa^2}{4} \langle |\widetilde{\delta N}|^2 \rangle + \alpha \kappa \text{Re} \left[ \langle \widetilde{\zeta}_\phi^* \widetilde{\delta N} \rangle \right] \right). \quad (1.28)$$

Enfin, l'optique quantique nous apprend que le taux d'émission spontanée dans un mode est égal au taux d'émission stimulée en présence d'un photon dans le mode laser. Nous avons vu dans le paragraphe 1.1 que cette considération demeure raisonnable pour un laser à semiconducteurs. Il est alors possible de trouver l'expression des coefficients de diffusion  $D_{ij}$  pour l'émission spontanée [31], que l'on résume dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} D_{FF} & D_{FN} & D_{F\phi} \\ D_{NF} & D_{NN} & D_{N\phi} \\ D_{\phi F} & D_{\phi N} & D_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0/\tau_{\text{cav}} & -F_0/\tau_{\text{cav}} & 0 \\ -F_0/\tau_{\text{cav}} & F_0/\tau_{\text{cav}} + N_{\text{th}}/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1/(4F_0\tau_{\text{cav}}) \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

L'équation (1.26) combinée avec l'expression des coefficients de diffusion (1.29) donne au final une expression pour le RIN en fréquences positives associé au mécanisme de bruit

d'émission spontanée :

$$\begin{aligned} \text{RIN}(f) &= 4\pi \left\langle |\widetilde{\delta F}(2\pi f)|^2 \right\rangle / F_0^2 \\ &= \frac{8\pi^2 f^2 + 2r/\tau^2}{\tau_{\text{cav}} F_0 \left[ (4\pi^2 f^2 - (r-1)/(\tau_{\text{cav}} \tau))^2 + 4\pi^2 f^2 r^2 / \tau^2 \right]}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Notons d'une part que l'on a écrit  $\text{DSP}(f) = 2\pi \cdot \text{DSP}(2\pi f)$  et que, d'autre part, un facteur 2 global est employé ici pour désigner la DSP s'étalant sur les fréquences positives du spectre (celle que l'on mesure). L'ordre de grandeur de cette contribution au RIN se situe vers  $-170$  dB/Hz, ce qui est bien faible en comparaison de ce que l'on peut mesurer. L'évaluation du bruit de grenaille dans le prochain paragraphe justifiera ce propos.

La DSP de bruit de phase (sur toute l'étendue du spectre) due à l'élargissement Schawlow-Townes à partir des équations (1.27), (1.28) et des coefficients (1.29) s'écrit :

$$\mathcal{S}_\phi^{\text{ST}}(f) = \frac{1}{8\pi^2 f^2 F_0 \tau_{\text{cav}}} \left[ 1 + \alpha^2 \frac{(r-1)(r-1 + 4\pi^2 f^2 r \tau_{\text{cav}}^2)}{(r-1 - 4\pi^2 f^2 \tau \tau_{\text{cav}})^2 + 4\pi^2 f^2 r^2 \tau_{\text{cav}}^2} \right]. \quad (1.31)$$

### 2.3 Bruit de grenaille à la détection

Lorsque l'on détecte le rayonnement d'un laser à l'aide d'une photodiode, la limite de détection, c'est-à-dire le plancher obtenu pour la mesure, est donné par le bruit de grenaille<sup>3</sup>. Le courant électrique délivré par une photodiode peut être considéré comme une superposition de courants impulsionnels indépendants les uns des autres et aléatoires dans le temps. La distribution statistique du bruit de courant de photodétection généré par ce mécanisme suit une loi de Poisson. La densité spectrale de puissance, pour des fréquences positives, du bruit de grenaille de photocourant est proportionnelle à sa valeur moyenne  $\langle I_{\text{ph}} \rangle$  :

$$\mathcal{S}_{\text{Shot}}(f) = 2e \langle I_{\text{ph}} \rangle, \quad (1.32)$$

où  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C représente la charge élémentaire de l'électron. Nous remarquons que ce bruit est un bruit blanc, indépendant de la fréquence de Fourier d'analyse. Il varie selon l'intensité lumineuse en incidence de la photodiode. Typiquement, pour un photodétecteur ayant une réponse de  $0.7$  A/W à la longueur d'onde de travail, le bruit d'intensité relatif engendré par le bruit de grenaille sous une puissance lumineuse de  $15$  mW vaut  $-150$  dB/Hz.

3. *Shot noise* en anglais.

## 2.4 Autres sources de bruit

Parmi les sources de bruit que nous n'avons pas encore citées, il y a les bruits techniques pouvant provenir des vibrations mécaniques du banc optique ou encore de l'électronique. Généralement, ces composantes spectrales se situent aux basses fréquences (sous le kHz) et se traduisent par des pics (pic de bruit à 50 Hz par exemple). Un bruit de tension électronique en  $1/f$  est fréquemment observé. Ce bruit est appelé bruit de scintillation. Notons que des bruits d'origine thermique contribuent généralement aux fluctuations observées aux basses fréquences et nous reviendrons amplement sur les mécanismes sous-jacents (chapitre 6).

En fait, l'agitation thermique a également une incidence sur la photodétection. En effet, la résistance de charge  $R_{ph}$  de la photodiode se voit traversée d'un courant fluctuant au gré de l'agitation thermique de façon proportionnelle à la température  $T$  et indépendamment de la valeur de ce photocourant. La DSP de bruit de courant de ce bruit appelé bruit Johnson-Nyquist vaut  $4 k_B T / R_{ph}$ . À la température ambiante, cette DSP atteint typiquement  $300 \text{ pA}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$  pour  $R_{ph} = 50 \Omega$ . Pour un photocourant de 10 mA (valeur typique pour un éclairage de 15 mW), cela représente un bruit relatif de -175 dB/Hz. Pour 1 mA de photocourant, le bruit relatif Johnson-Nyquist est de -155 dB/Hz. On peut estimer que c'est seulement pour un faible photocourant de 0.2 mA, soit environ 0.3 mW optique, que le bruit relatif Johnson-Nyquist devient comparable à un RIN d'ordre de grandeur -140 dB/Hz. Dans la pratique, l'éclairage de la photodiode est toujours au moins de 1 mW, ce qui rend la contribution Johnson-Nyquist négligeable.

La dynamique de classe A du VECSEL lui donne des propriétés de bruit avantageuses. Un aspect supplémentaire, indispensable aux applications que l'on envisage, doit faire l'objet d'un examen détaillé : l'émission laser bifréquence et l'extension du modèle de la dynamique associée.

## 3 VECSELS bifréquences et transfert de bruit de la pompe

Cette partie dresse le cadre expérimental et théorique d'obtention et de caractérisation d'un rayonnement laser bifréquence à l'aide d'un VECSEL. Nous faisons l'état des lieux concernant la compréhension et la modélisation de la dynamique de ces lasers bifréquences. Nous résumons ensuite la description du transfert du bruit d'intensité de la pompe aux fluctuations d'intensité et de la phase du battement entre les deux modes lasers produits.

### 3.1 Fonctionnement bifréquence et équations d'évolution couplées

#### Description du laser

Le schéma du VECSEL bifréquence émettant à la longueur d'onde télécoms  $\lambda \simeq 1.5 \mu\text{m}$  est affiché à la Fig. 1.6. Ce laser est constitué d'un 1/2-VCSEL inséré à l'intérieur d'une cavité linéaire de grande finesse. Comme évoqué plus haut, le 1/2-VCSEL forme une moitié de la cavité laser car il repose sur un miroir de Bragg constitué, comme on peut le voir dans le cadre vert qui en présente la structure, de 17 alternances de couches quart d'onde en GaAs et de couches du composé ternaire  $\text{Al}_{97\%}\text{Ga}_{3\%}\text{As}$ .

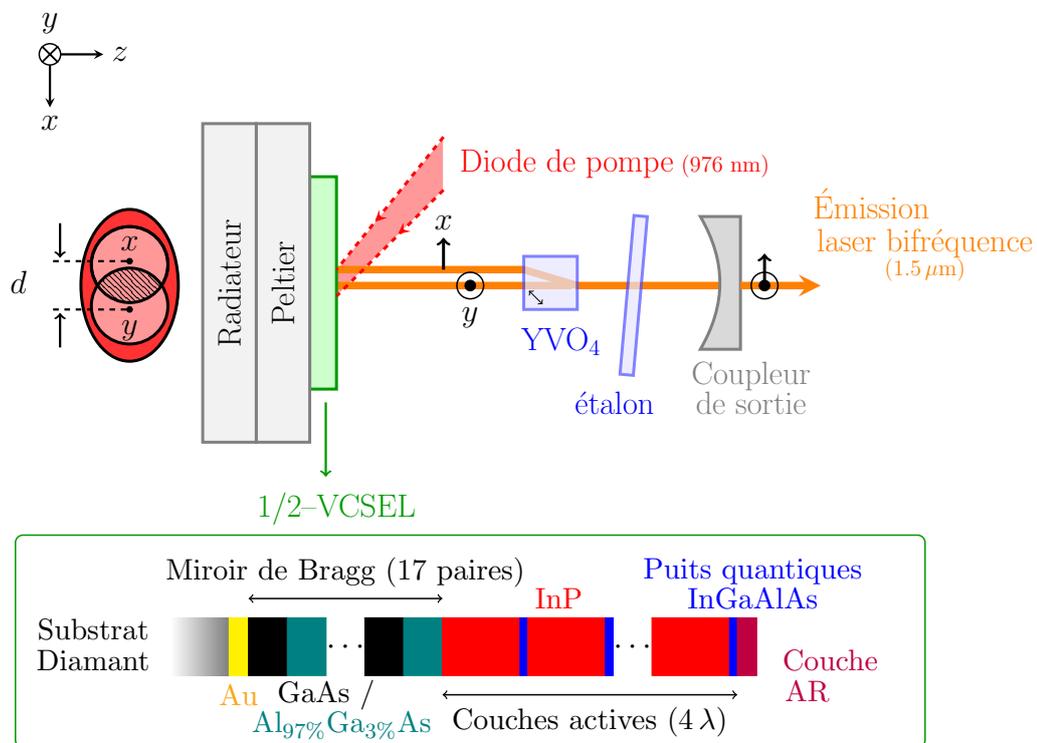


FIGURE 1.6 – Schéma de l'architecture du VECSEL et de sa structure semi-conductrice permettant l'émission bifréquence vers 1.5 μm. YVO<sub>4</sub> : cristal biréfringent. Ellipse rouge : tache de pompe. Cercles rouge claire : régions de pompe de chaque mode. Couche AR : couche anti-réflexion.

Cette structure mince, élaborée par l'équipe de S. Bouchoule au LPN d'abord puis au C2N, est celle qui a été utilisée par S. De lors de ses travaux de thèse (2012-2015) au laboratoire Aimé Cotton [42]. Pour éviter les effets dus au dichroïsme de gain discuté au paragraphe 1.1, les axes principaux de la structure sont orientés à 45° des axes ( $x$ ,  $y$ ) de la figure. Cette hétéro-structure se compose d'une part d'un milieu actif de  $4 \lambda$  d'épaisseur basée sur des barrières en phosphore d'indium (InP) accompagnées de 8 puits quantiques en InGaAlAs. Ces puits quantiques sont disposés au niveau de trois ventres distincts de l'onde stationnaire formée par la lumière dans la structure : 4 puits à la première position

puis 2 paires aux deux autres. D'autre part, le miroir de Bragg est intégré aux couches actives par reprise de croissance métamorphique puis complété par une couche mince d'or permettant d'atteindre une réflectivité supérieure à 99.9 % à 1.55  $\mu\text{m}$ . La croissance des couches du miroir de Bragg est réalisée par épitaxie par jets moléculaires<sup>4</sup>. Le tout repose sur un substrat épais en diamant poly-cristallin obtenu par dépôt chimique en phase vapeur<sup>5</sup>. Enfin, une couche anti-réflexion quart d'onde déposée à la surface du 1/2-VCSEL referme la structure. À la longueur d'onde la pompe (autour de 1  $\mu\text{m}$ ), cette couche produit environ 25 % de réflexion.

Le 1/2-VCSEL est disposé sur un module à effet Peltier dont on règle la température à la température de la pièce, soit environ 20°C. Une simple graisse thermique fait le lien par capillarité entre la structure mince et la surface du Peltier. Un métal bon conducteur thermique (ou idéalement une ailette de refroidissement) permet l'évacuation de la chaleur sous le Peltier. La position de cette structure peut être finement réglée grâce à une platine de translation à 3 degrés de liberté. C'est un miroir concave de rayon de courbure 5 cm qui joue le rôle de coupleur de sortie pour notre cavité linéaire ainsi formée. Ce miroir possède une réflectivité de 99.4% à 1.55  $\mu\text{m}$ . La longueur optique totale  $L_{\text{opt}}$  parcourue lors d'un aller du champ laser dans la cavité se compose de la longueur optique  $n_{\text{SC}} L_{\text{SC}}$  dans la micro-cavité du 1/2-VCSEL ainsi que de la longueur parcourue  $L_{\text{CAV}}$  dans la cavité étendue. Alors que  $L_{\text{SC}}$  est de l'ordre de 5  $\mu\text{m}$ , la longueur de la cavité étendue vaut typiquement 49 mm. Une platine de translation permet d'ajuster la position du miroir de sortie placé sur une monture à butées micrométriques pour un alignement fin. L'intervalle spectral libre  $\text{ISL} = c_0/(2 L_{\text{opt}})$  de la cavité linéaire vaut typiquement 3 GHz. En estimant à 2%<sup>6</sup> les pertes dans la cavité, l'expression (1.9) nous donne alors un temps de vie des photons dans la cavité de l'ordre de  $\tau_{\text{cav}} \simeq 12$  ns.

Une diode laser à 976 nm réalise le pompage optique du 1/2-VCSEL sous une incidence d'environ 40°. Cet angle est choisi de façon à obtenir un gain maximum. La sortie de la diode laser est fibrée avec une fibre optique multimode de diamètre de cœur 105  $\mu\text{m}$  et d'ouverture numérique 0.22. Un dispositif optique en espace libre, constitué d'une lentille de collimation disposée en sortie de fibre puis d'une lentille de focalisation, permet d'imaginer la pompe sur la structure. Le diamètre de la tache lumineuse à la surface de la structure est de l'ordre de grandeur de la centaine de  $\mu\text{m}$ .

À l'intérieur de la cavité laser, nous disposons un cristal biréfringent de vanadate d'yttrium  $\text{YVO}_4$  uniaxe positif, coupé à 45° de son axe optique et muni d'un traitement anti-réflexion. Ce cristal induit une séparation transverse par double réfraction entre l'onde ordinaire, qui voit un indice  $n_o$  et l'onde extra-ordinaire, qui voit un indice  $n_e$ , permettant l'oscillation laser de deux polarisations orthogonales au sein de la même cavité. Notons que la différence de chemin optique parcouru dans la cavité pour les deux modes s'accompagne d'une différence de marche. Les régions de pompe pour les deux modes lasers, polarisés suivant

4. Noté MBE en anglais pour *molecular beam epitaxy*.

5. Noté CVD en anglais pour *chemical vapor deposition*.

6. Cette valeur correspond au gain typique par tour de cavité mesuré dans la référence [17].

(Ox) et (Oy), sont séparées spatialement sous l'effet de la double réfraction du cristal. On note  $d$  la distance centre à centre de ces régions qui se superposent partiellement comme indiqué par la zone hachurée sur la figure. La distance  $d$  est directement liée à l'épaisseur du cristal biréfringent  $e_{\text{YVO}_4}$  :

$$d = e_{\text{YVO}_4} \times \tan \left[ \pi/4 - \arctan \left( n_o^2/n_e^2 \right) \right]. \quad (1.33)$$

Avec un cristal de 1 mm d'épaisseur, nous atteignons une distance entre les modes de 100  $\mu\text{m}$  (en prenant  $n_e = 2.181$  et  $n_o = 1.970$ ). C'est, par contre, la géométrie de la cavité qui impose la taille des modes sur la structure. Les rayons des modes sur la zone active varient typiquement de 25  $\mu\text{m}$  à 100  $\mu\text{m}$ . En pratique, la taille de la tache de pompe est ajustée de façon à alimenter convenablement les deux régions de pompe des deux modes.

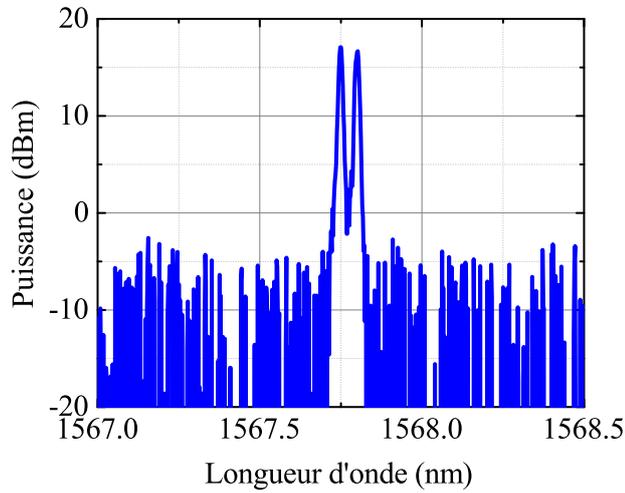


FIGURE 1.7 – Émission bifréquence à la longueur d'onde télécom observée à l'analyseur de spectre optique. La résolution est de 0.01 nm.

Afin de sélectionner seulement un seul mode longitudinal robuste pour chaque polarisation, un étalon (lame de verre ou de YAG d'environ 100 – 150  $\mu\text{m}$  d'épaisseur) est inséré dans la cavité. La mesure du spectre optique typiquement obtenu en sortie du VECSEL est donné à la Fig. 1.7. Cette figure atteste de l'émission bichromatique du VECSEL vers  $\lambda = 1568$  nm. On observe bien deux composantes spectrales séparées d'environ  $\Delta\lambda = 0.05$  nm. En notant  $c_0$  la célérité de la lumière, le battement correspondant entre les deux modes est alors à la fréquence  $f_{\text{RF}} = c_0 \cdot \Delta\lambda/\lambda^2 \simeq 6$  GHz. En généralisant les notations adoptées pour le VECSEL monomode de la section 2, les champs électriques associés aux ondes ordinaires et extra-ordinaires polarisées suivant  $x$  et  $y$ , respectivement, s'expriment comme :

$$\begin{cases} E_x(z, t) = \sqrt{F_x} e^{i\phi_x} \cdot E_0 \exp[-i(\omega_x t - k_x z)] + \text{c.c.}, \\ E_y(z, t) = \sqrt{F_y} e^{i\phi_y} \cdot E_0 \exp[-i(\omega_y t - k_y z)] + \text{c.c.} \end{cases} \quad (1.34)$$

En plaçant en sortie du VECSEL bifréquence un polariseur à 45° des axes  $x$  et  $y$ , comme illustré à la Fig. 1.1, puis une photodiode rapide, la composante AC de la mesure obtenue

vérifie :

$$I_{\text{RF}}(t) = A(t) \cos(2\pi f_{\text{RF}} t + \phi_{\text{RF}}), \quad (1.35)$$

où  $A(t)$  correspond à l'amplitude du signal RF et  $f_{\text{RF}} = |\omega_x - \omega_y|/2\pi$  à la fréquence du battement. En effet, le terme en  $(\omega_x + \omega_y)/2\pi$  obtenu également dans l'intensité en sommant les composantes oscille trop rapidement à l'échelle du temps de réponse de la photodiode pour être mesuré. Ce signal RF est, d'une part, observé à l'aide d'un analyseur de spectre électrique (Fig. 1.8(a)) et, d'autre part, un interféromètre de Fabry Perot nous assure continûment de la coexistence des deux modes (Fig. 1.8(b)) tout en nous informant des éventuels sauts de mode. Dans ces mesures, le battement RF est situé autour de 2 GHz. Ce signal RF transporté optiquement présente un excellent rapport signal sur bruit. Les bandes latérales caractérisant ses fluctuations passent sous le plancher de mesures (en cyan) lorsqu'on s'éloigne de 5 à 10 MHz de la porteuse.

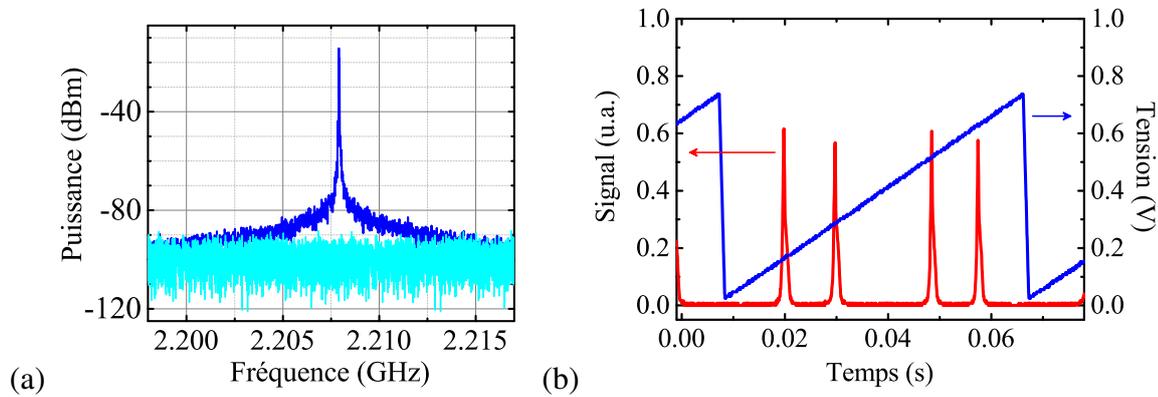


FIGURE 1.8 – (Adapté de S. De [42]) – Fonctionnement bifréquence du laser à la longueur d'onde télécoms avec la mesure (en bleu) du battement RF à l'analyseur de spectre (a) et le balayage Fabry Perot (b) assurant l'existence de deux modes (en rouge). (a) La bande passante de résolution est de 3 kHz, la bande passante vidéo de 3 kHz également et la courbe en cyan représente le plancher de mesures. (b) Le balayage du Fabry Perot (rampe en bleu) correspond à un intervalle spectral libre de 10 GHz.

Nous nous intéressons tout particulièrement aux propriétés de bruit de ce signal RF qui sont cruciales pour les applications (voir chapitre 2). Les bandes latérales de bruit sont associées soit à des fluctuations de l'amplitude du signal RF, soit à des fluctuations de sa phase que l'on sait faibles devant leur valeur moyenne :

$$\begin{cases} A(t) = A_0 + \delta A(t), \\ \phi_{\text{RF}} = \overline{\phi_{\text{RF}}} + \delta\phi_{\text{RF}}(t). \end{cases} \quad (1.36)$$

En prenant l'origine des temps de façon à ce que  $\overline{\phi_{\text{RF}}} = 0$ , l'intensité (1.35) fournie par la photodiode rapide se réécrit :

$$I_{\text{RF}}(t) \simeq A_0 \left[ \cos(2\pi f_{\text{RF}} t) + \frac{\delta A(t)}{A_0} \cos(2\pi f_{\text{RF}} t) - \delta\phi_{\text{RF}}(t) \sin(2\pi f_{\text{RF}} t) \right]. \quad (1.37)$$

En définitive, les bruits d'intensité relatifs des composantes  $x$  et  $y$  et le bruit de phase du battement RF engendrent des fluctuations sur les deux quadratures du signal RF optique. Cependant, la compréhension de la dynamique de fonctionnement du VECSEL bifréquence constitue un point de départ préalable à l'étude détaillée des fluctuations.

### Modélisation de la dynamique

Les équations d'évolution (équations (1.15)) décrivent l'interaction entre l'inversion de population et le nombre de photons du laser. La généralisation de ces équations, qui régissent la dynamique du laser, aux deux polarisations croisées émises par le VECSEL bifréquence nécessite la prise en compte de leur couplage. Ce couplage provient de la compétition pour le gain des deux modes dans le milieu actif. En se basant sur la référence [38], nous introduisons phénoménologiquement un terme qui décrit la saturation du réservoir de porteurs de charge de l'inversion de population associée à un mode laser par les photons de l'autre mode laser. Cet effet s'ajoute à la saturation propre de chaque mode. Afin d'en tenir compte, nous introduisons les fractions (positives) entre coefficient de saturation croisée et coefficient d'auto-saturation  $\xi_{xy}$  et  $\xi_{yx}$  permettant l'écriture du système d'équations couplées entre les nombres de photons des deux modes  $F_x$  et  $F_y$  du laser ainsi que les inversions de population de chaque mode  $N_x$  et  $N_y$  :

$$\begin{cases} \frac{dF_i}{dt} = -\frac{F_i(t)}{\tau_i} + \kappa N_i(t) F_i(t), \\ \frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{\tau} (N_{0i} - N_i(t)) - \kappa N_i(t) (F_i(t) + \xi_{ij} F_j(t)), \\ \frac{d\phi_i}{dt} = \frac{\alpha}{2} \kappa N_i(t), \end{cases} \quad (1.38)$$

avec  $i \in \{x, y\}$  et  $i \neq j$ . Dans ces équations d'évolution couplées,  $\phi_x$  et  $\phi_y$  représentent les phases des deux composantes du champ laser,  $N_{0x}/\tau$  et  $N_{0y}/\tau$  les termes de pompage dans chaque région de pompe et enfin  $\tau_x$  et  $\tau_y$  les durées de vie des photons de chaque mode au sein de la cavité laser.

On note maintenant, avec  $i \in \{x, y\}$ ,  $r_i = \overline{N_{0i}}/N_{i,\text{th}}$  le taux de pompage du mode  $i$  avec  $N_{i,\text{th}} = 1/(\kappa \tau_i)$  l'inversion de population au seuil. Étant donné que la durée de vie des porteurs dans la bande de conduction ( $\tau \simeq 1$  ns) est assez faible devant la durée de vie des photons dans la cavité ( $\tau_{x,y}$  de l'ordre de plusieurs dizaines de ns), une élimination adiabatique de la deuxième ligne du système d'équations (1.38) peut être réalisée. La dynamique des photons

du laser bifréquence se résume alors aux équations de classe A suivantes, avec  $i \in \{x, y\}$  et  $i \neq j$  :

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{F_i}{\tau_i} \left( -1 + \frac{r_i}{1 + (F_i + \xi_{ij} F_j) / F_{\text{sat}}} \right), \quad (1.39)$$

avec le nombre de photons à saturation  $F_{\text{sat}} = 1 / (\tau \kappa)$ . Rappelons que, comme mentionné à la partie 2.1 de la section 2, une dynamique de classe A suppose une réponse immédiate du milieu actif, ce qui est synonyme de bonnes propriétés de bruits et d'absence d'oscillations de relaxation.

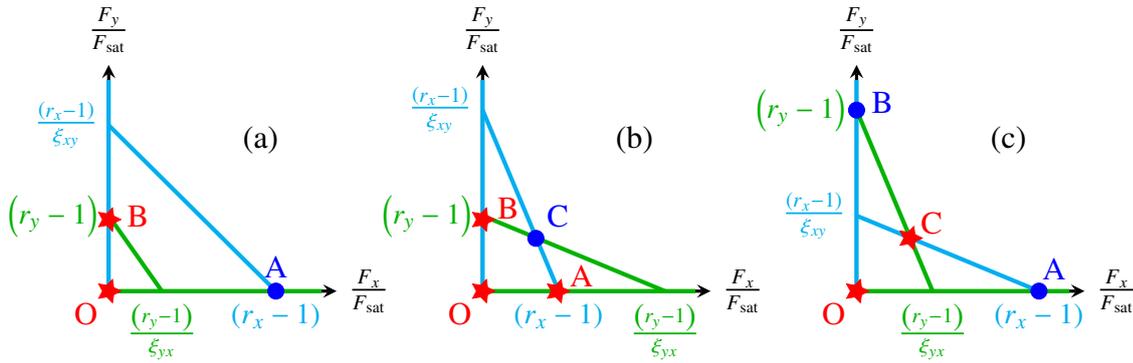


FIGURE 1.9 – Analyse graphique de la stabilité de l'oscillation laser à deux modes. Les points O, A, B et C correspondent à des solutions stationnaires communes à  $F_x$  (en cyan) et  $F_y$  (en vert) en présence d'une dynamique de classe-A (1.39) couplant les modes  $x$  et  $y$ . Les points de fonctionnement stables sont indiqués par des points bleus et instables par des étoiles rouges. (a) Le mode  $x$  domine et empêche l'oscillation du mode  $y$  par sa saturation croisée. (b) Oscillation bifréquence. (c) Comportement bistable.

L'analyse de la stabilité des solutions est illustrée à la Fig. 1.9. Les solutions stationnaires des équations de classe-A (1.39), concernant les deux modes couplés par la saturation croisée, sont tracées dans un diagramme  $(F_x/F_{\text{sat}}, F_y/F_{\text{sat}})$ . Lorsqu'un mode voit un gain élevé par rapport au second et sature fortement son gain, alors il l'empêche d'atteindre son seuil. Ainsi, dans la situation (a), seul le mode le plus fort survit. Dans la situation (b), avec des gains à peu près équilibrés pour les deux modes, un couplage faible entre ces derniers est requis pour leur oscillation simultanée. L'analyse de la stabilité montre en effet que l'auto-saturation d'un mode doit l'emporter sur la saturation croisée pour obtenir un fonctionnement bifréquence. Ce fonctionnement induit une condition nécessaire sur ce que l'on nommera la constante de couplage non-linéaire  $C$  :

$$C = \xi_{xy} \cdot \xi_{yx} < 1. \quad (1.40)$$

Lorsque, au contraire, la constante de couplage non linéaire  $C$  excède 1, le coefficient de saturation croisée est plus important que l'auto-saturation et alors le système est bistable.

C'est la situation de la Fig. 1.9(c) qui permet bien l'oscillation de deux modes mais pas simultanément.

Le recouvrement partiel des deux modes dans le 1/2-VCSEL est responsable de la compétition des modes pour le gain et donc de leur saturation croisée. La référence [43] a montré qu'il est alors possible d'exprimer cette constante de couplage non linéaire  $C$  en fonction de la distance  $d$  entre les centres des régions de pompe des deux modes sur la structure :

$$C = C_0 \frac{\int_{\mathbb{R}^2} dx dy F_x(x, y) F_y(x - d, y)}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} dx dy F_x^2(x, y) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy F_y^2(x - d, y)}} = C_0 \exp(-d^2/w_0^2), \quad (1.41)$$

avec  $C_0 \simeq 0.8$  la saturation pour un recouvrement total et  $w_0$  le rayon des modes laser sur la structure. Notons que les modes soutenus dans cette cavité plan concave donnent en bonne approximation des profils  $F_i(x, y)$  ( $i \in \{x, y\}$ ) gaussiens. L'équation (1.41) permet d'affirmer que lorsque la séparation  $d$  dépasse  $w_0$ , la constante de couplage  $C$  décroît très rapidement.

### 3.2 Fluctuations d'intensité transférées de la pompe

Les fluctuations d'intensité et de phase du battement du VECSEL bifréquence proviennent en grande partie des fluctuations de puissance de la diode laser de pompe, qui se traduisent par une fluctuation du nombre de porteurs associés aux inversions de population non saturées du milieu actif de sorte que, dans une approche perturbative :

$$\begin{cases} N_{0x}(t) = \overline{N_{0x}} + \delta N_{0x}(t), \\ N_{0y}(t) = \overline{N_{0y}} + \delta N_{0y}(t). \end{cases} \quad (1.42)$$

Tout d'abord, les équations d'évolution couplées du laser bifréquence (1.38) (ou encore les équations (1.39) de la dynamique de classe A) donnent, au premier ordre, le nombre moyen de photons et les inversions de population non saturées en régime stationnaire :

$$F_{0i} = F_{\text{sat}} \frac{(r_i - 1) - \xi_{ij}(r_j - 1)}{1 - C}, \quad (1.43)$$

$$\overline{N}_{0i} = \frac{r_i}{\kappa\tau_i}, \quad (1.44)$$

pour  $i, j \in \{x, y\}$ ,  $i \neq j$ .

Avant de s'intéresser à la propagation au premier ordre des fluctuations de la pompe au laser, nous revenons sur les caractéristiques de ce bruit de pompe.

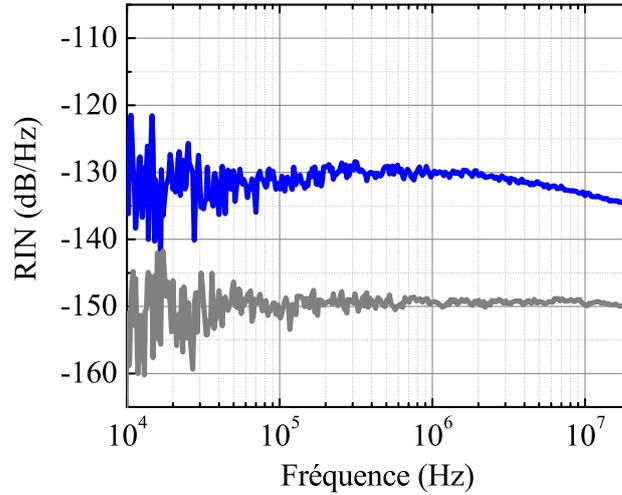


FIGURE 1.10 – Spectre typique de bruit d'intensité relatif d'une diode laser à 673 nm. Ce laser servira de pompe pour le VECSEL à 852 nm. Courbe bleue : mesures. Courbe grise : plancher de mesures.

### Bruit de pompe et corrélations

La description du bruit de pompe commence par la mesure de son spectre de bruit d'intensité relatif  $RIN_p(f)$ . Pour les deux modes lasers, les fluctuations relatives de pompage peuvent être reliées à celles de l'inversion de population non saturée :

$$RIN_p(f) = \left\langle |\delta\bar{N}_{0x}(f)|^2 \right\rangle / \bar{N}_{0x}^2 = \left\langle |\delta\bar{N}_{0y}(f)|^2 \right\rangle / \bar{N}_{0y}^2. \quad (1.45)$$

Cette façon de relier les fluctuations de la pompe aux inversions de population non saturées pour chaque mode n'est valide que pour des échelles de temps inférieures au temps de relaxation des électrons, ce qui signifie en dessous de la centaine de MHz. Les fréquences maximales des spectres expérimentaux présentés par la suite s'arrêteront donc typiquement à 20 MHz, où l'hypothèse demeure valide.

Le spectre de RIN affiché à la Fig. 1.10 atteste de l'allure globalement plate sur la bande passante 10 kHz-20 MHz et de faible niveau que l'on obtient avec nos diodes lasers de pompe fibrées multimodes. La diode laser précisément utilisée pour cette mesure a une longueur d'onde centrale de 673 nm et elle servira au chapitre 3 pour l'inversion de population du VECSEL à 852 nm. À 976 nm, pour le VECSEL à la longueur d'onde télécom, le spectre de bruit d'intensité est tout à fait similaire bien que d'un niveau global encore plus bas [42]. En conséquence de l'allure constatée du bruit de pompe, nous le modélisons comme un bruit blanc  $RIN_p = Cte$ . En moyennant sur tout le spectre de la Fig. 1.10, nous obtenons  $RIN_p = -133 \text{ dB.Hz}^{-1}$ . Pour notre diode laser fibrée multimode à 976 nm, le niveau de RIN moyen est seulement de  $-145 \text{ dB.Hz}^{-1}$ .

La tache du laser de pompe sur la structure présente de fortes tavelures caractéristiques d'une distribution de l'intensité aléatoire spatialement sur le plan transverse de la surface.

Nous désignerons ces tavelures sous le nom anglophone de grains de *speckle*. Ces grains de speckle proviennent du caractère multimode de la pompe dont la fibre d'ouverture numérique  $NA = 0.22$  et de diamètre  $D = 105 \mu\text{m}$  laisse propager un nombre conséquent de modes spatiaux. En effet, ce nombre de modes spatiaux à  $\lambda_p = 976 \text{ nm}$  se propageant dans la fibre à saut d'indice vaut typiquement  $N_{\text{max}} = V^2/2 \simeq 2700$  où  $V = NA \cdot \pi D/\lambda_p$ . À la longueur d'onde de  $673 \text{ nm}$ , le nombre de modes spatiaux se propageant dans la fibre augmente significativement (environ 5800) puisque  $N_{\text{max}}$  est inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde. Or les régions de pompe alimentant les modes  $x$  et  $y$  du laser bifréquence interceptent des grains de speckle différents, excepté dans la zone de recouvrement partiel. Il s'ensuit que les corrélations des bruits d'intensité de pompe entre les deux modes n'est pas de 100%. On définit donc le spectre des corrélations des bruits d'intensité de pompe de la manière suivante :

$$\langle \delta \overline{N}_{0x}(f) \delta \overline{N}_{0y}^*(f) \rangle = \eta(f) \text{RIN}_p(f) \overline{N}_{0x} \overline{N}_{0y} e^{i\Psi(f)}, \quad (1.46)$$

où  $\eta(f)$  représente l'amplitude du spectre des corrélations de pompe et  $\Psi(f)$  sa phase.

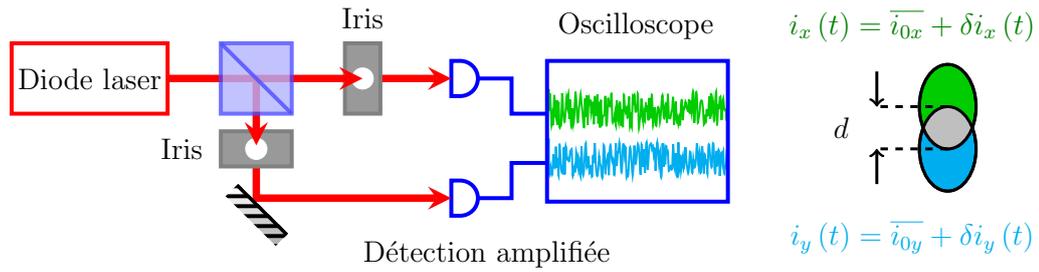


FIGURE 1.11 – Schéma de principe du dispositif utilisé pour la mesure du bruit d'intensité relatif des pompes et des corrélations entre les bruits d'intensité de pompe. Les iris employés jouent le rôle des régions de pompe des modes sur la structure du VECSEL. Ils sont montés sur une platine de translation linéaire qui permet de contrôler la distance  $d$  séparant les centres des régions de pompe.

Le dispositif de la Fig. 1.11 permet la mesure du spectre des corrélations entre les bruits d'intensité de pompe. Après une division d'amplitude du faisceau de pompe, un iris permet d'imiter la zone délimitée par la région de pompe des modes sur la structure du 1/2-VCSEL. Le diamètre des deux iris utilisés est de  $100 \mu\text{m}$ . L'ajustement de la distance  $d$  de séparation centre à centre des iris joue alors le rôle de la séparation spatiale due à la double réfraction du cristal de  $\text{YVO}_4$  de notre laser bifréquence. L'acquisition temporelle de l'intensité de pompe  $\overline{i}_{0j}$  ( $j = \{x, y\}$ ) et de ses fluctuations  $\delta i_j(t)$  permet d'établir le spectre des corrélations après le calcul numérique des transformées de Fourier.

Les spectres de l'amplitude ainsi que de la phase des corrélations des bruits d'intensité de pompe sont présentés sur la Fig. 1.12 pour différentes valeurs de la séparation  $d$  centre à centre des régions de pompe simulées par notre dispositif. Il s'avère que les spectres des

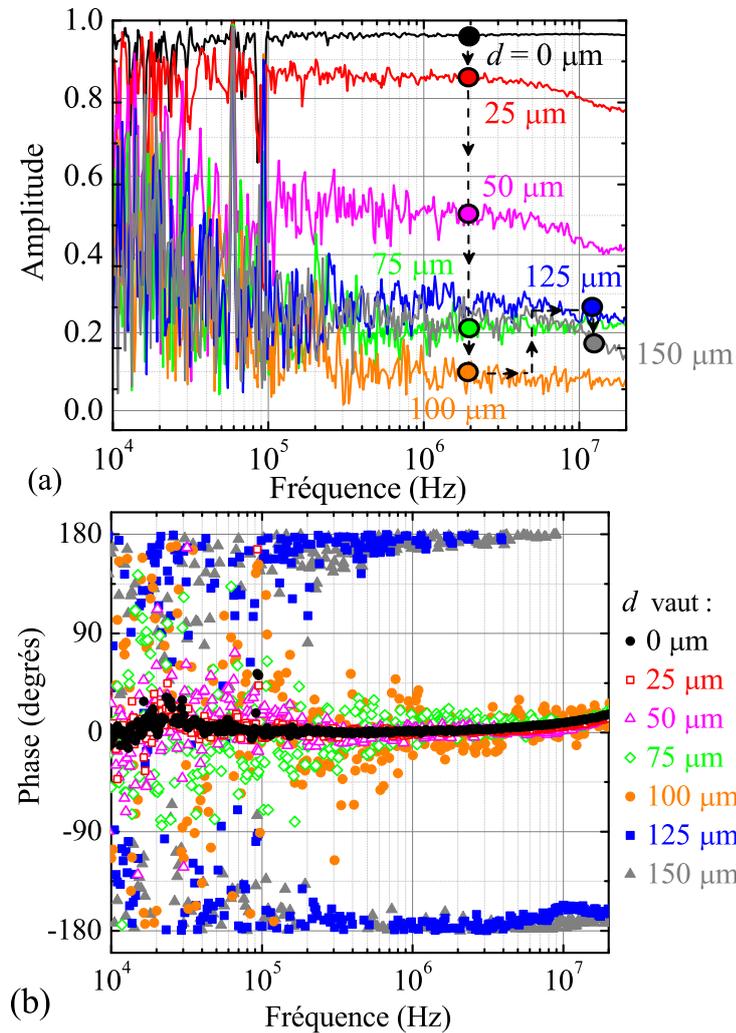


FIGURE 1.12 – Spectres des corrélations des bruits d'intensité de pompe pour différentes valeurs de la séparation  $d$  avec des iris de  $100 \mu\text{m}$  de diamètre (Fig. 1.11). (a) Amplitude  $\eta(f)$  et (b) phase  $\Psi(f)$  des corrélations de pompe définis à l'équation (1.46). La diode laser utilisée fonctionne à  $673 \text{ nm}$ .

amplitudes (en (a)) et phases (en (b)) des corrélations mesurées entre les bruits d'intensité sont indépendants de la fréquence sur la plage  $10 \text{ kHz}$ - $20 \text{ MHz}$ . On en déduit qu'en bonne approximation, on peut adopter pour la modélisation  $\eta(f) = \text{Cte}$  et  $\Psi(f) = \text{Cte}$ . La Fig. 1.12(a) montre que l'amplitude des corrélations de pompe est de  $100\%$  lorsque les régions de pompe imitées se superposent totalement ( $d = 0$ ). En effet, les grains de speckle à l'intérieur des deux régions sont alors rigoureusement les mêmes. En revanche, lorsque la séparation  $d$  entre les régions de pompe augmente, l'amplitude  $\eta$  des corrélations de pompe commence par diminuer : les grains de speckle interceptés conjointement par les deux régions sont de moins en moins nombreux et de nouveaux grains de speckle indépendants entrent dans chacune des régions de pompe. La diminution aboutit à une valeur minimum de  $\eta$  proche de 0 pour une séparation  $d = 100 \mu\text{m}$  de l'ordre de grandeur du

diamètre de l'iris. Nous observons à la Fig. 1.12(b) que les spectres des corrélations de pompe sont en phase ( $\Psi = 0$ ) jusqu'à cette séparation de  $d = 100 \mu\text{m}$ . Le nombre de grains de speckle conjointement présents dans les deux régions de pompe a alors très fortement diminué. Cette première partie où la séparation spatiale entre les régions reste inférieure à leur diamètre typique est celle qui est rencontrée expérimentalement. Au-delà de la valeur  $d = 100 \mu\text{m}$ , nous observons à la Fig. 1.12(a) d'abord une faible augmentation de  $\eta$  puis, à nouveau, une diminution lorsque l'on continue d'augmenter la séparation. Cependant, cette fois les corrélations sont en opposition de phase avec  $\Psi = \pm\pi$ , comme en atteste la Fig. 1.12(b). Le reste de la figure d'interférences du speckle encore présent dans la zone commune aux deux régions ne présente plus qu'une répartition irrégulière de peu de taches brillantes et de taches sombres rapidement fluctuantes. Lorsqu'on éloigne encore les régions l'une de l'autre en augmentant  $d$ , une tache brillante supplémentaire va finir par se retrouver dans une seule des régions et une sombre dans l'autre. C'est cette situation qui induit l'élévation des corrélations d'intensité de pompe en opposition de phase.

Maintenant que nous avons caractérisé les fluctuations de la pompe et des corrélations entre les deux régions du fonctionnement bifréquence, voyons comment elles influent sur les propriétés de bruit du laser.

### Fonction de transfert de bruit d'intensité

La suite de la linéarisation des équations d'évolution couplées du laser bifréquence (1.38) conduit à propager au premier ordre les fluctuations de la pompe à une fluctuation du nombre de photons  $\delta F_x$  et  $\delta F_y$ . Ceci conduit à l'établissement du système d'équations suivant dans le domaine de Fourier :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\delta F_x}(f) \\ \widetilde{\delta F_y}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx}(f) & M_{xy}(f) \\ M_{yx}(f) & M_{yy}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\delta N_{0x}}(f) \\ \widetilde{\delta N_{0y}}(f) \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

avec

$$M_{xx}(f) = \frac{1}{\Delta(f) \tau} \left[ \frac{1}{\tau_y} - 2i\pi f \frac{r_y/\tau - 2i\pi f}{\kappa F_{y0}} \right], \quad (1.48)$$

$$M_{xy}(f) = -\frac{\xi_{xy}}{\tau \tau_x \Delta(f)}, \quad (1.49)$$

et des expressions analogues pour  $M_{yy}$  et  $M_{yx}$ . Le facteur  $\Delta$  que l'on retrouve au dénominateur est défini comme :

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \left[ \frac{1}{\tau_x} - 2i\pi f \frac{r_x/\tau - 2i\pi f}{\kappa F_{x0}} \right] \\ &\times \left[ \frac{1}{\tau_y} - 2i\pi f \frac{r_y/\tau - 2i\pi f}{\kappa F_{y0}} \right] - \frac{C}{\tau_x \tau_y}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

À partir des éléments de la matrice de transfert du bruit de la pompe de l'expression (1.47) et de la définition (1.46) des corrélations de bruit de pompe, nous aboutissons à l'expression du bruit d'intensité du mode dans la polarisation  $i = \{x, y\}$  créé par le bruit de pompe :

$$\begin{aligned} \text{RIN}_i(f) &= \left\langle |\overline{\delta F_i}(f)|^2 \right\rangle / F_{0i}^2 \\ &= \left[ \frac{|M_{ii}|^2 r_i^2}{\tau_i^2} + \frac{|M_{ij}|^2 r_j^2}{\tau_j^2} + \eta \frac{r_i r_j}{\tau_i \tau_j} (M_{ii} M_{ij}^* + M_{ii}^* M_{ij}) \right] \frac{\text{RIN}_p(f)}{\kappa^2 F_{0i}^2}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

avec  $j \neq i$ . On peut déduire d'autre part l'expression de la densité spectrale de puissance des fluctuations de l'inversion de population :

$$\left\langle |\overline{\delta N_i}(f)|^2 \right\rangle = 4 \pi^2 f^2 \text{RIN}_i(f) / \kappa^2, \quad (1.52)$$

par linéarisation de la première équation du système (1.38).

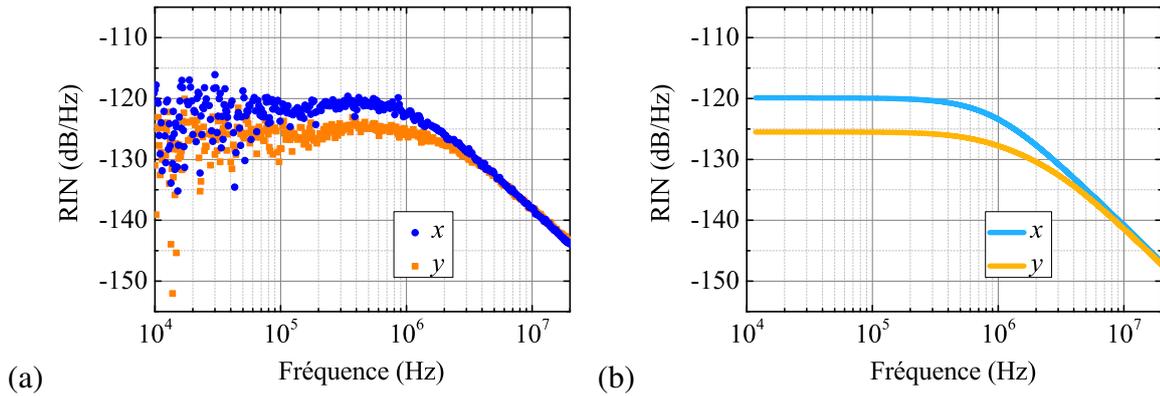


FIGURE 1.13 – (Adapté de S. De [42]) – Spectres expérimentaux (a) et théoriques (b) de bruit d'intensité relatif du VECSEL bifréquence. La longueur d'onde centrale du laser est de  $1.57 \mu\text{m}$ . Les paramètres de modélisation sont  $\tau = 1 \text{ ns}$ ,  $\Psi = 0$ ,  $\tau_x = 9.9 \text{ ns}$ ,  $\tau_y = 10.4 \text{ ns}$ ,  $r_x = 1.15$ ,  $r_y = 1.2$ ,  $C = 0.12$ ,  $\text{RIN}_p = -145 \text{ dB/Hz}$  et  $\eta = 0.2$ .

Au cours de ses travaux de thèse S. De a réalisé la mesure et la modélisation du bruit d'intensité d'un VECSEL bifréquence émettant à la longueur d'onde télécom pour plusieurs niveaux de compétition entre les modes. La figure 1.13 reproduit les spectres expérimentaux (en (a)) et modélisés à partir de l'expression (1.51) (en (b)) du bruit d'intensité relatif en sortie de ce VECSEL sur la polarisation  $x$  (en bleu) et la polarisation  $y$  (en orange). Le cas présenté correspond à une situation où la saturation croisée est faible, il y a peu de recouvrement des régions de pompe et, par conséquent, la constante de couplage non linéaire  $C$  est faible ( $C = 0.12$ ). Le faible recouvrement est aussi synonyme de peu de grains de speckle en commun et donc d'une faible amplitude des corrélations de bruits d'intensité de pompe ( $\eta = 0.2$ ). Nous observons un excellent accord entre les spectres modélisés et les spectres mesurés. Bien que partageant la même cavité laser, les deux modes

ne subissent ni les mêmes pertes ni le même gain et ont un parcours différent du fait de la double réfraction. Il en résulte que les durées de vie des photons dans la cavité  $\tau_x$  et  $\tau_y$  sont différentes. Leur ordre de grandeur est de 10 ns, ce qui est très proche des 12 ns calculées avec 2% de pertes que l'on a estimées à la partie 3.1. De même, les taux de pompage des deux modes sont légèrement déséquilibrés  $r_x \neq r_y$ . Les spectres de bruit d'intensité ont l'allure de filtres passe-bas avec une fréquence de coupure inversement proportionnelle à la durée de vie des photons dans la cavité. On observe bien des fréquences de coupure un peu différentes sur les deux spectres. Le transfert du bruit d'intensité de la pompe ajoute 20 dB au mode qui possède le meilleur taux de pompage et 25 dB au plus faible. Après le filtrage du bruit réalisé par la cavité sur une bande passante typique de l'ordre du MHz, on note une décroissance en -20 dB/décade.

Nous avons désormais les outils de description du transfert de bruit de la pompe au bruit d'intensité du VECSEL bifréquence. Le spectre de bruit d'intensité que l'on obtient est caractéristique d'un laser dont la dynamique est de classe A. Contrairement à un laser de classe B, aucune oscillation de relaxation ne vient dégrader le faible niveau de bruit d'intensité mesuré. Comment le bruit de pompe va-t-il affecter le bruit de phase du battement et potentiellement dégrader la pureté spectrale du laser ?

### 3.3 Bruit de phase du battement

Le bruit d'intensité du laser de pompe se propage de deux façons possibles à la phase du battement RF. Nous allons successivement détailler les conséquences sur le bruit de phase du couplage amplitude / phase puis des processus thermo-optiques causées par la pompe.

#### Couplage amplitude / phase

Comme nous l'avons développé dans la section 2.1, un facteur de Henry  $\alpha$  élevé décrit un important couplage entre l'amplitude et la phase des champs électriques des lasers à semiconducteurs. Nous venons de voir que le bruit de pompe était transféré au VECSEL et aboutissait au bruit d'intensité de l'équation 1.51. Le couplage amplitude / phase va induire, à son tour, un bruit de phase à partir de ce bruit d'intensité sur chacune des polarisations du VECSEL bifréquence. Les fluctuations de phase  $\delta\phi_H$  tributaires de ce facteur de Henry participent au bruit de la phase  $\phi_{RF}$  du battement RF entre les modes  $x$  et  $y$  selon l'expression :

$$\frac{d}{dt}\delta\phi_H(t) = \frac{\alpha\kappa}{2}(\delta N_x(t) - \delta N_y(t)). \quad (1.53)$$

Dans le domaine de Fourier, la linéarisation précédente permet de ré-écrire la contribution du facteur de Henry au bruit de la phase RF en fonction des fluctuations relatives de l'intensité :

$$\widetilde{\delta\phi_H}(f) = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\widetilde{\delta F_x}(f)}{F_{0x}} - \frac{\widetilde{\delta F_y}(f)}{F_{0y}} \right). \quad (1.54)$$

### Fluctuations thermiques de pompage

Le deuxième mécanisme responsable des fluctuations de la phase du battement sous l'effet des fluctuations de la puissance de pompe est de nature thermique. En effet, au cours de sa propagation dans le 1/2-VCSEL, la pompe optique crée un échauffement significatif dont les variations s'associent à des variations de l'indice de réfraction  $n_{SC}$ . Ces variations thermiques de l'indice optique engendrent des variations de la longueur optique  $n_{SC} \cdot L_{SC}$  de la micro-cavité de la structure. Le modèle que nous allons exploiter est issu des travaux des références [44, 45]. On note  $\omega_l$  la pulsation du champ laser associée aux composantes de longueur d'onde centrale  $\lambda = 1568$  nm de notre VECSEL bifréquence. Puisque l'ISL et donc  $\omega_l$  sont inversement proportionnels à la longueur optique de la cavité laser, une variation  $\delta L_{opt}$  donne la variation suivante :

$$\delta\omega_T(t) = -\omega_l \frac{\delta L_{opt}(t)}{L_{opt}}. \quad (1.55)$$

L'origine de cette variation est une variation de température  $\overline{\delta T}$  sur l'ensemble du volume du mode laser dans la cavité, ce qui conduit à réécrire :

$$\delta\omega_T(t) = -\omega_l \Gamma_T \overline{\delta T}(t) \quad \text{avec} \quad \Gamma_T = \frac{L_{SC}}{L_{opt}} \frac{dn_{SC}}{dT}. \quad (1.56)$$

Les fluctuations de puissance  $P_{p,i} \cdot \delta N_{0i}/N_{0i}$  sur chaque polarisation, avec  $P_{p,i}$  la puissance de la pompe alimentant le mode  $i = \{x, y\}$ , sont la source des fluctuations thermiques dans la structure. En notant  $R_T$  la résistance thermique moyenne de la structure (en  $K \cdot W^{-1}$ ), le transfert des fluctuations de puissance de pompe en fluctuations de température au sein du 1/2-VCSEL est modélisé dans les références [44, 45] par une fonction de type filtre passe-bas du premier ordre :

$$H(f) = \frac{R_T}{1 + 2i\pi f \tau_T}, \quad (1.57)$$

avec  $\tau_T$  un temps caractéristique de diffusion thermique. En première approximation, on peut considérer pour  $\tau_T$  le temps de diffusion thermique sur le rayon de la pompe que l'on note  $w_p$ . On utilisera donc  $\tau_T \simeq w_p^2 / (4 D_T)$ , avec  $D_T$  le coefficient de diffusion thermique moyen des matériaux semiconducteurs de la structure.

En remarquant que dans le domaine de Fourier un facteur  $2i\pi f$  relie une variation de phase à une variation de la fréquence angulaire et en rassemblant les considérations précédentes, il vient que la contribution thermique du bruit de pompe au bruit de phase  $\delta\phi_T$  du battement RF vérifie :

$$\overline{\delta\phi_T}(f) = -\frac{\omega_l}{2i\pi f} \frac{\Gamma_T R_T}{(1 + 2i\pi f \tau_T)} \left( P_{p,x} \frac{\overline{\delta N_{0x}}(f)}{N_{0x}} - P_{p,y} \frac{\overline{\delta N_{0y}}(f)}{N_{0y}} \right). \quad (1.58)$$

Par ailleurs, les deux contributions au bruit de la phase du battement RF que nous venons

de dépendre, c'est-à-dire les fluctuations par couplage au bruit d'intensité et les fluctuations induites thermiquement, proviennent d'une seule et même source : le bruit d'intensité de diode laser de pompe. La modélisation totale des fluctuations de la phase RF  $\delta\phi_{H+T}$  s'obtient par conséquent en effectuant la somme cohérente des contributions des deux mécanismes :

$$\widetilde{\delta\phi}_{H+T}(f) = \widetilde{\delta\phi}_H(f) + \widetilde{\delta\phi}_T(f) . \quad (1.59)$$

En définitive, le calcul de la densité spectrale de puissance du bruit de phase à partir des équations (1.54) et (1.58) permet d'aboutir à l'expression :

$$|\widetilde{\delta\phi}_{H+T}(f)|^2 = \left( |Q_x(f)|^2 + |Q_y(f)|^2 + 2\eta(f) \operatorname{Re} [Q_x(f) Q_y^*(f) e^{i\psi(f)}] \right) \cdot \operatorname{RIN}_p(f) , \quad (1.60)$$

où

$$\begin{cases} Q_x(f) = \frac{\alpha r_x}{2\kappa\tau_x} \left( \frac{M_{xx}}{F_{0x}} - \frac{M_{yx}}{F_{0y}} \right) - \frac{\omega_l}{2i\pi f} \frac{\Gamma_T R_T}{(1 + 2i\pi f \tau_T)} P_{p,x} , \\ Q_y(f) = \frac{\alpha r_y}{2\kappa\tau_y} \left( \frac{M_{yy}}{F_{0y}} - \frac{M_{xy}}{F_{0x}} \right) + \frac{\omega_l}{2i\pi f} \frac{\Gamma_T R_T}{(1 + 2i\pi f \tau_T)} P_{p,y} . \end{cases} \quad (1.61)$$

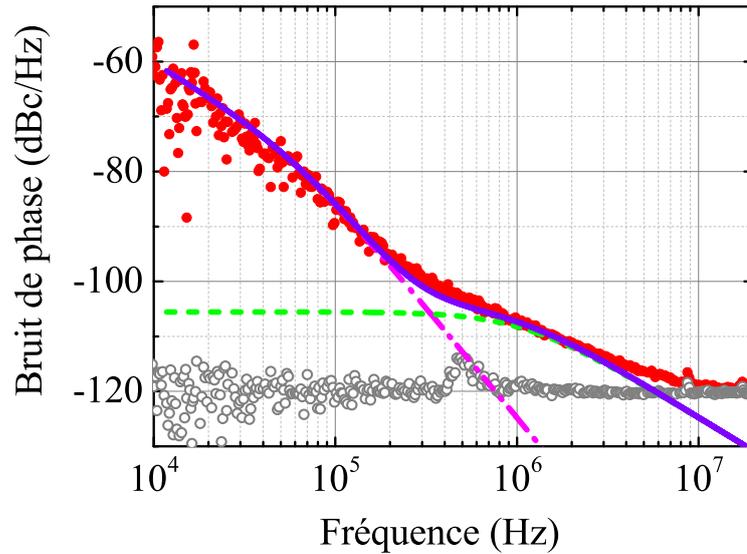


FIGURE 1.14 – (Adapté de S. De [42]) – Spectres du bruit de phase du battement RF généré par un VECSEL bifréquence à 2.2 GHz. La longueur d'onde centrale du laser est de  $1.57 \mu\text{m}$ . Les symboles rouges correspondent aux mesures, les gris au plancher, les traits aux modèles avec la contribution du bruit thermique (pointillés magentas) et du couplage phase-amplitude (tirets verts). Les paramètres retenus sont  $R_T = 12 \text{ K.W}^{-1}$  et  $\tau_T = 10.7 \mu\text{s}$ ,  $\Gamma_T = 2.1 \times 10^{-8} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_{p,x} = 1.7 \text{ W}$ ,  $P_{p,y} = 1.7 \text{ W}$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.13.

La figure 1.14 reproduit le spectre de bruit de phase RF expérimentalement mesuré par S. De (symboles rouges) et son modèle (courbe violette) issu des expressions (1.60) et (1.61). Nous observons un très bon accord entre les mesures et le modèle sur une plage

de fréquence s'étalant de 10 kHz à 6 MHz, fréquence à partir de laquelle le bruit de phase passe en dessous du plancher de mesures (cercles gris). Les contributions du facteur de Henry (1.54) et des fluctuations thermiques (1.58) ont été mises en évidence par des tirets verts et des traits-pointillés magentas, respectivement. Ces contributions expliquent la rupture de pente que l'on peut observer dans le spectre du bruit total après 30 kHz. En effet, comme nous pouvons le voir sur la figure, les effets thermiques dominent à basse fréquence (sous les 30 kHz) alors que le couplage phase-amplitude est responsable du bruit de phase du battement aux fréquences plus élevées.

Notons qu'avec un bruit de phase de -60 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse optique RF située à 2.2 GHz environ, la pureté spectrale obtenue peut être qualifiée d'assez bonne. Cependant, les applications visées par cette génération optique de signaux RF sont multiples et variées. Nous développerons dans les prochains chapitres, notamment, une application métrologique aux horloges atomiques. Des puretés spectrales bien plus ambitieuses vont alors être souhaitées. Notre compréhension des phénomènes de bruit dans les VECSELS bifréquences et la modélisation présentée dans ce chapitre introductif constitueront un précieux atout pour l'optimisation de la dynamique du laser pour la réduction de son bruit. Mais passons d'abord en revue quelques applications emblématiques liées au développement de ces lasers bifréquences bas bruit.

## CHAPITRE 2

# UN FONCTIONNEMENT BIFRÉQUENCE PROPICE AUX APPLICATIONS

Les VECSELS bifréquences pompés optiquement que nous avons présentés possèdent une dynamique de classe A très intéressante, une taille relativement réduite et sont capables d'émettre des faisceaux de grande qualité optique dans deux polarisations linéaires orthogonales qui ont partagé la même cavité. Ainsi, un signal optique RF de grande pureté et accordable est obtenu grâce au battement entre les modes. Contrairement à la génération habituelle de signaux RF sur porteuse optique ayant recours à un modulateur de Mach-Zehnder, un laser bifréquence offre naturellement une profondeur de modulation maximale [16]. Le bon équilibre des deux modes permet alors une gestion optimale de la puissance lumineuse pour la génération du signal optique RF. De nombreuses applications sont susceptibles de tirer les bénéfices de tels lasers. Les longueurs d'onde d'émission des VECSELS avec lesquels le présent travail de thèse a pu être mené sont de  $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ , dans la fenêtre télécom, et  $\lambda = 852 \text{ nm}$ , correspondant à la transition  $D_2$  du césium. Ce chapitre présente le cadre applicatif et l'état de l'art associé en lien avec ces deux lasers.

Le contexte de l'optique hyperfréquence fait l'objet de la première partie. Nous donnerons un aperçu des différents défis technologiques [46] concernant les systèmes électroniques haute fréquence, les télécommunications optiques et la métrologie temps-fréquence.

Une seconde partie est dédiée à la présentation de l'application des VECSELS bifréquences aux horloges atomiques à base de césium [47]. Nous exposons le fonctionnement simplifié des horloges basées sur le piégeage cohérent de population, les outils de caractérisation propres à la métrologie, le cahier des charges établi pour proposer un compromis inédit entre stabilité et embarquabilité et enfin les développements récents et l'état de l'art de telles horloges.

# 1 À la longueur d'onde télécom dans le contexte de l'optique micro-ondes

Le VECSEL bifréquence à  $1.5 \mu\text{m}$  est une source optique privilégiée pour la propagation de signaux RF à travers des fibres optiques. En effet, cette longueur d'onde se situe dans la fenêtre de transparence de la silice. Mais à quels besoins cette technologie répond-elle ? Comme le titre de l'article de revue [48] le suggère, la photonique micro-onde unifie deux mondes distincts et combine leurs avantages.

## 1.1 Signaux analogiques à haute fréquence

### Enjeux avec l'exemple du radar

Afin de cibler les enjeux de l'optique micro-onde, citons un exemple tiré de l'article [46]. On désire faire fonctionner un radar à 10 GHz avec un rapport signal-sur-bruit de 160 dB. Un tel rapport signal-sur-bruit est nécessaire pour détecter le faible signal Doppler rétro-diffusé par une cible en mouvement à distance. Pour avoir la précision nécessaire avec une liaison optique télécom traditionnelle, il faut numériser  $10^{16} \simeq 2^{54}$  valeurs, ce qui requiert au moins 54 bits. Par conséquent, un débit de  $2 \times 54 \times 10^{10} = 1080 \text{ Gbit.s}^{-1}$  serait nécessaire pour un seul dipôle rayonnant de l'antenne. Pour transporter chacun des signaux de tous les dipôles rayonnants de l'antenne dans une liaison télécom optique, on peut estimer alors à  $1080 \text{ Tbit.s}^{-1}$  le débit nécessaire. À titre de comparaison, le débit numérique domestique par fibre optique est bridé par les opérateurs à  $1 \text{ Gbit.s}^{-1}$ . Entre les années 1970 et les années 2000, un essor considérable des télécoms et des techniques de multiplexage a permis de passer d'un débit de  $100 \text{ Mbit.s}^{-1}$  à plus de  $1 \text{ Tbit.s}^{-1}$  dans une fibre monomode [49] (un facteur 10 000 en l'espace de 30 ans). Le débit des meilleures fibres monomodes est aujourd'hui limité à  $100 \text{ Tbit.s}^{-1}$  [50]. Pour le radar, on comprend alors toute la pertinence d'employer des signaux analogiques haute fréquence et une liaison opto-hyperfréquence plutôt qu'une simple liaison télécom optique traditionnelle.

Le travail de thèse de G. Baili est dédié à l'étude des VECSELs pour application aux radars [39]. L'article [51] pose ensuite les bases à l'application spécifique des VECSELs très bas bruit pour une liaison opto-hyperfréquence performante. Continuons donc l'illustration de l'utilité d'une telle liaison opto-hyperfréquence avec un radar avant de la décrire plus en détails.

### Implantation d'une liaison opto-hyperfréquence dans un radar

La figure 2.1 présente dans les grandes lignes le fonctionnement d'un radar mettant en œuvre la distribution d'un oscillateur local RF par voie optique. Grâce à un module de

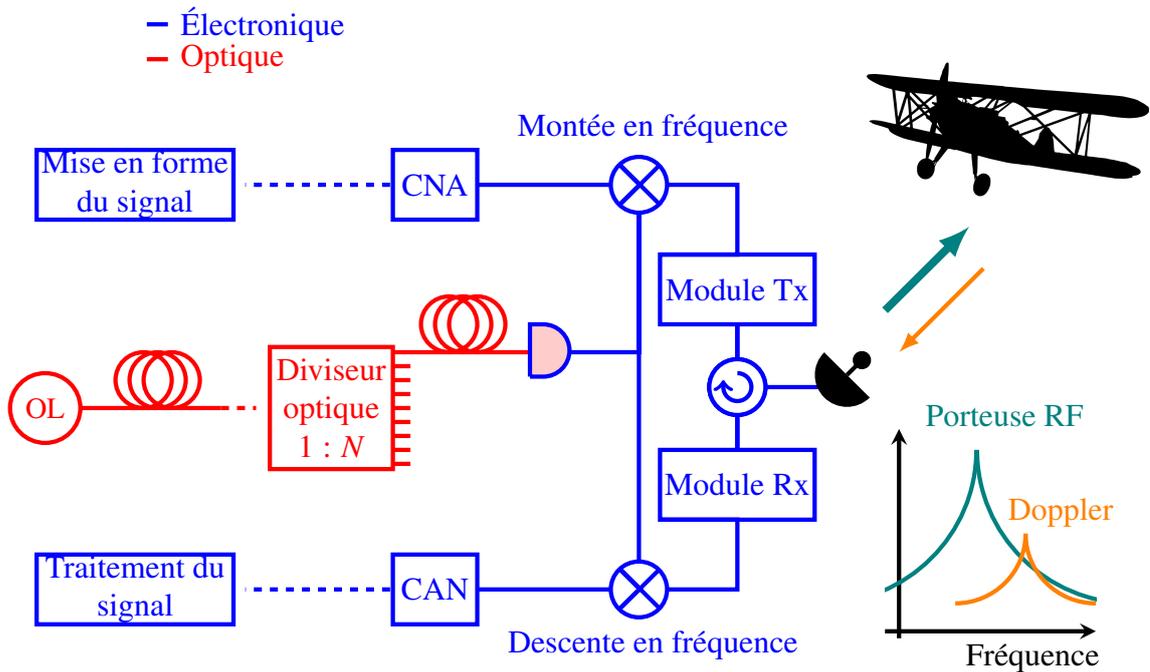


FIGURE 2.1 – Schéma de principe de distribution d'un oscillateur local (OL) RF optique dans une architecture RADAR aux différents éléments d'antenne. Tx : transmission, Rx : réception. CAN : convertisseur analogique - numérique. CNA : convertisseur numérique - analogique.

transmission, un signal RF de l'ordre de la dizaine de GHz est envoyé en direction d'une cible en mouvement par les différents dipôles de l'antenne (courbe verte). Le signal rétro-diffusé, capté également par l'antenne, a une amplitude bien moindre et a subi un décalage Doppler, valant typiquement quelques MHz, susceptible de nous renseigner sur la vitesse, la distance et l'orientation de la cible (courbe orange). Un oscillateur local hyperfréquence ultra pur est nécessaire pour, à la fois, la montée en fréquence du signal transmis et la descente en fréquence du signal reçu par démodulation. Ce signal doit être acheminé à l'antenne par voie analogique comme nous venons de le voir et sa pureté est essentielle. L'utilisation de fibre optique assure une minimisation des pertes linéiques. Un diviseur permet ensuite de distribuer l'oscillateur local aux  $N$  dipôles de l'antenne. Une fois démodulé, le signal reçu entre dans une gamme de fréquences basses tout à fait compatible avec l'utilisation d'une liaison optique télécom traditionnelle et peut, par conséquent, être converti numériquement avant d'être redescendu du radar et traité.

La liaison opto-hyperfréquence se trouve au cœur de l'optique micro-ondes [52] et la prochaine section décrit ses caractéristiques.

## 1.2 La liaison opto-hyperfréquence

### Déport de signaux hyperfréquences par voie optique

Un câble électronique RF affiche des pertes linéiques de l'ordre de 1 dB/m et ne possède qu'un seul canal de transmission. Par contre, dans les fibres optiques, les pertes linéiques ne sont que de 0.3 dB/km. De plus, les fibres optiques supportent un multiplexage en longueur d'onde. La voie optique est donc une voie privilégiée pour l'acheminement de signaux, en particulier sur de longues distances. La liaison schématisée à la Fig. 2.2 constitue une brique élémentaire pour le déport de signaux hyperfréquences par voie optique. Grâce à

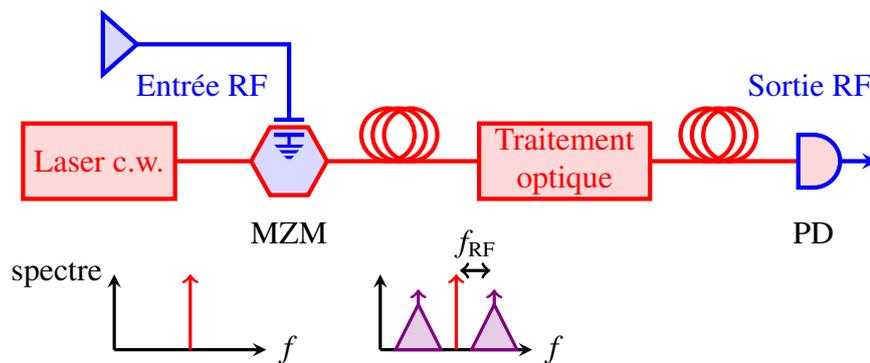


FIGURE 2.2 – Schéma de principe d'une liaison opto-hyperfréquence. laser c.w. : laser à émission continue. MZM : modulateur de Mach-Zehnder. PD : photodétecteur.

un modulateur de Mach-Zehnder, un signal RF d'intérêt (provenant par exemple d'une antenne) de plusieurs MHz à 100 GHz est reporté sur les bandes latérales d'un laser émettant en continu à environ 200 THz (fréquence optique télécoms). Une photodétection rapide permet d'extraire le signal RF de la modulation, en bout de liaison. En plus des faibles pertes, le déport de signaux RF par voie optique permet une faible dispersion des longueurs d'onde, qui plus est contrôlable, et des traitements dans le domaine optique particulièrement intéressants.

### Systèmes sans dispersion

Dans les guides d'onde hyperfréquences, la dispersion, c'est-à-dire l'influence de la fréquence d'une composante spectrale sur la phase de cette dernière, se fait ressentir sur plusieurs centaines de MHz. Cette dispersion limite l'étendue spectrale des signaux RF si on souhaite les propager sans encombre. Dans le domaine optique en revanche, la dispersion ne se fait ressentir que pour des composantes distantes de quelques nm et donc plusieurs THz. Peu importe la fréquence de modulation, le signal hyperfréquence optiquement déporté verra alors quasiment le même retard. La lumière offre un autre avantage car elle

permet une propagation en espace libre. On peut également, dans le domaine optique, annuler par compensation la dispersion grâce à l'introduction de retards. L'introduction de retards pour le signal RF sur porteuse optique offre de nombreuses autres fonctionnalités.

### Des nouvelles fonctionnalités

Pour un radar par exemple, il est d'usage d'introduire entre les différents dipôles de l'antenne des déphasages électroniques permettant de contrôler la directivité du rayonnement sans bouger le dispositif. L'inconvénient de la dispersion se fait alors ressentir pour le contrôle de la directivité pour deux composantes spectrales différentes. Effectué dans le domaine optique, ce contrôle de la directivité par l'introduction de retards vrais peut devenir achromatique. De façon générale, l'optique micro-onde enrichit considérablement le traitement des signaux RF grâce (i) au développement de filtres programmables, (ii) la potentielle conversion analogique numérique par transcription longueur d'onde  $\leftrightarrow$  variable de temps ou encore (iii) grâce à la génération de signaux arbitraire [48]. Contrairement à l'électronique RF, l'optique micro-ondes permet de fabriquer des filtres RF accordables en fréquence et reconfigurables. Par exemple, des filtres RF avec des bandes passantes du MHz à 20 GHz, des facteurs de qualité supérieurs à 1000 et reconfigurables dans un délai inférieur à 1 ms ont pu voir le jour. Ils trouvent leur application pour la sélection ou le rejet de canaux pour la radio transportée par fibre. Ces filtres permettent également de rejeter des signaux parasites et autres phénomènes d'interférences en radio-astronomie ou encore dans les systèmes de communication numérique des satellites, directement dans le domaine optique. Enfin, de tels filtres programmables trouvent aussi application dans les architectures radar en permettant de rejeter des parasites et du bruit directement dans le domaine optique.

## 1.3 Oscillateurs locaux hyperfréquences

### Distribution optique d'oscillateurs locaux RF

Grâce à leurs faibles pertes et autres avantages cités plus haut, les liaisons optiques hyperfréquences permettent la distribution d'un même oscillateur local RF ultra-stable à plusieurs antennes distantes pour démoduler le signal qu'elles captent. On fabrique ainsi des réseaux d'antennes mais aussi des réseaux locaux sans fil comme le WIFI (WLAN<sup>1</sup>) ou encore des réseaux mobiles.

Bien que cela ne vienne pas immédiatement à l'esprit, la récente observation du trou noir supermassif M87\* dans la constellation du zodiaque de La Vierge par la collaboration de l'*Event Horizon Telescope* (EHT) [53, 54] est liée au développement de cette distribution optique d'oscillateurs locaux RF. Les impressionnantes images réalisées par l'EHT sont le

---

1. Acronyme anglophone de *wireless local area networks*.

fruit d'une mise en réseau de 8 radiotélescopes situées à 6 emplacements géographiques distincts du globe. De cette mise en réseau et grâce à un traitement informatique considérable, la collaboration EHT a à disposition, en quelque sorte, un dispositif d'interférométrie à très longue base à l'échelle de la Terre. Cette technique permet de démultiplier la résolution spatiale. Les emplacements géographiques étant très distants, il n'est pas possible pour les télescopes de partager le même oscillateur local hyperfréquence pour descendre en fréquence le rayonnement haute fréquence en provenance du ciel. Leur synchronisation repose sur la réception d'un signal GPS. Il est donc primordial pour la reconstruction de l'image de conserver la phase du rayonnement détecté. Chaque radiotélescope fonctionne donc avec sa propre référence de temps, qui se doit d'être ultra-stable. Sans entrer dans les détails, un oscillateur local RF basé sur un maser à hydrogène ultra-stable est distribué aux différentes antennes mises en réseau au sein de ces grandes installations que sont les radiotélescopes. Parmi les plus connues et les plus précises de ces installations, citons le grand réseau d'antennes millimétrique/submillimétrique de l'Atacama (l'ALMA pour l'acronyme anglais) situé à 5000 m d'altitude dans le désert chilien. La liaison opto-hyperfréquence s'impose pour le transport de la référence RF ultra-stable du maser lorsqu'on réalise que les 66 antennes peuvent être séparées d'une distance allant jusqu'à 16 km.

Et les VECSELS bifréquences dans tout ça ?

### Atouts des lasers bifréquences

Tout d'abord, les VESCELS sont des lasers de puissance optique significative et de bruit d'intensité relatif quasiment limité au bruit de grenaille sur une plage spectrale de plusieurs GHz [51]. Ils sont de fait compatibles, en terme de rapport signal-sur-bruit, avec les liaisons opto-hyfréquences comportant un modulateur de Mach-Zehnder telles que l'on vient de les décrire. En réalité, il existe une autre façon de fabriquer une modulation hyperfréquence sur porteuse optique : en faisant battre deux fréquences optiques (voir schéma 1.1). Ce fonctionnement bifréquences a prouvé sa capacité à générer un signal RF au chapitre précédent. On peut assimiler ce battement RF généré optiquement à un signal RF obtenu avec une profondeur de modulation possible de 100% [16]. D'une part, ce signal possède une grande pureté spectrale à laquelle nous allons accorder beaucoup d'importance par la suite. D'autre part, ce signal est largement accordable en fréquence puisqu'il ne dépend que de la biréfringence  $\Delta\Phi$  introduite par le cristal à l'intérieur de la cavité :

$$f_{\text{RF}} = |\omega_x - \omega_y| / 2\pi = \frac{c_0}{2L_{\text{cav}}} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\pi}, \quad (2.1)$$

avec  $c_0$  la célérité de la lumière. En jouant sur la biréfringence (ou bien la longueur de cavité  $L_{\text{cav}}$ ) par des effets thermo-optiques, ou électro-optiques, ou par simple rotation du cristal inséré dans la cavité, on exerce un contrôle sur cette fréquence. Est alors offerte la possibilité de verrouiller en phase ce battement sur un oscillateur local RF afin de le distribuer optiquement.

Cette distribution d'un oscillateur local hyperfréquence ultra-stable via une liaison opto-hyperfréquence est particulièrement intéressante dans un contexte de métrologie temps-fréquence. La prochaine partie, à une longueur d'onde optique toutefois bien différente, s'inscrit dans cette perspective.

## 2 À 852 nm pour une horloge atomique compacte et performante

La définition de l'unité SI de temps, la seconde, repose depuis 1967 sur la transition entre deux niveaux hyperfins du césium 133 à l'état fondamental. En effet, la fréquence de cette transition est fixée à exactement 9 192 631 770 Hz. Grâce à cette définition, des références de fréquence, basées sur des atomes de césium, de plus en plus stables et de plus en plus précises ont vu le jour [55]. Aujourd'hui, les horloges atomiques à fontaine d'atomes de césium sont les étalons primaires de temps-fréquence. Une vision vulgarisée de la remarquable stabilité de ces horloges atomiques consiste à estimer le nombre d'années nécessaire pour observer une dérive d'une seconde complète, qui se situe vers la centaine de millions d'années<sup>2</sup>. En fait, les records de stabilité sont détenus par des étalons secondaires dont le fonctionnement repose sur le piégeage d'ions ytterbium et strontium dans des réseaux optiques [56]. La stabilité de ces horloges basées sur des réseaux optiques est tellement bonne qu'elle a rendu possible la mesure d'effets gravitationnels de dilatation du temps prédits par la théorie de la relativité générale [57, 58]. Imaginons une première référence de temps placée au pied du *Tokyo Skytree* (ou, pourquoi pas, du mont Fuji) et une seconde placée au sommet, les deux étant initialement synchronisées. Le champ gravitationnel terrestre ressenti par la première horloge est plus intense que celui ressenti par l'horloge en hauteur, en conséquence de quoi la théorie de la relativité d'Einstein prédit son retard par rapport à la seconde horloge. Plus précisément, pour chaque centimètre d'élévation de la seconde horloge, l'horloge restée au sol retarde d'un ordre de grandeur de  $10^{-18}$  s quand en hauteur il s'écoule 1 s. Ce chiffre (un milliardième de milliardième) permet de réaliser le défi technologique conséquent relevé en termes de performances de stabilité pour mener de telles mesures (sur une durée totale d'à peine une demi-année).

Une autre problématique concerne le maintien de telles performances lors du transfert des références temps-fréquence ultra-stables sur des longues distances à travers de longues fibres optiques [59].

En outre, de plus en plus d'applications requièrent des références temps-fréquence performantes, que ce soit les systèmes de navigation par satellite (GNSS<sup>3</sup>) comme le GPS américain, le GLONASS russe, le GALILEO européen ou encore le BEIDOU chinois,

---

2. Seulement deux minutes de dérive sur l'âge de l'univers !

3. Pour *global navigation satellite systems* en anglais.

les réseaux de communications comme la 5G, les réseaux électriques intelligents, les radars météo, les réseaux d'instruments synchronisés comme les sismomètres, les réseaux de transactions financières, les lidars des véhicules autonomes, etc.

Nous allons étudier des VECSELS bifréquences à 852 nm, longueur d'onde de la transition  $D_2$  du césium. Leur développement s'inscrit dans l'élaboration d'une horloge atomique compacte et stable, qui répond à des besoins que nous développons plus loin dans cette section. Les prochains chapitres mettront en lumière les propriétés de ces lasers destinés à une distribution par voie optique d'une référence RF ultra-stable. Avant de préciser davantage les performances et les applications visées, nous passons en revue le fonctionnement sommaire d'une horloge atomique. Nous exposerons ensuite la particularité de l'interrogation tout optique adoptée dans le projet de construction de cette horloge.

Ce Projet ANR est mené en collaboration avec des partenaires de Thales Recherche et Technologie, l'observatoire de Paris / Système Référence Temps-Espace (SyRTE), le Centre de Nanosciences et de Nanotechnologies (C2N), le laboratoire Charles Fabry et la direction générale de l'armement (DGA).

## 2.1 Introduction aux horloges atomiques

On peut résumer le fonctionnement d'une horloge atomique aux quelques éléments de la Fig. 2.3. Un oscillateur local macroscopique délivre un signal périodique à la fréquence  $\nu(t)$ , naturellement mal définie et instable dans le temps. Ses dérives sont alors corrigées grâce à un asservissement sur une référence atomique. En effet, la quantification  $E_2 - E_1 = h\nu_0$  entre deux niveaux d'énergie d'un atome, avec  $h$  la constante de Planck, fournit un caractère immuable à la fréquence d'une transition atomique  $\nu_0$ . La réponse atomique à l'interrogation de l'oscillateur local permet de produire un signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  proportionnel à la différence  $\nu(t) - \nu_0$ . La correction obtenue en annulant ce désaccord à l'aide d'un système d'asservissement électronique maintient la fréquence de l'oscillateur local à la fréquence ultra-stable de la transition atomique et permet alors de définir une base de temps précise, c'est-à-dire une horloge.

Comme l'illustre la Fig. 2.3(b), après l'asservissement sur la transition atomique, la fréquence de l'oscillateur local diffère toujours légèrement de la fréquence de transition  $\nu_0$  et s'écrit :

$$\nu(t) = \nu_0 [1 + \epsilon + y(t)] , \quad (2.2)$$

avec l'écart relatif  $\epsilon$  par rapport à  $\nu_0$  et  $y(t)$  le bruit relatif de fréquence par rapport à la fréquence moyenne. En d'autres termes, la fréquence d'horloge est caractérisée par son inexactitude ( $\epsilon$ ) et son instabilité ( $y(t)$ ). L'inexactitude provient du fait qu'un atome n'est jamais strictement isolé thermiquement, magnétiquement ou électriquement de son environnement. La correction des inexactitudes de l'horloge consiste d'abord à estimer les

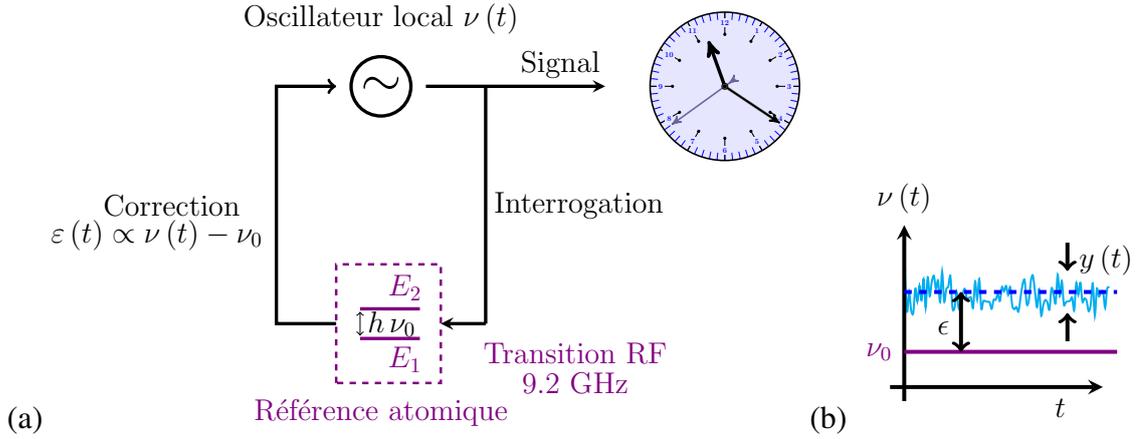


FIGURE 2.3 – (a) Schéma de principe d'une horloge se basant sur une référence de césium. (b) Inexactitude et instabilité de la fréquence d'horloge.

effets systématiques et corriger le biais induit. Dans notre collaboration, le résonateur atomique est développé au SyRTE qui possède l'expertise pour atteindre des incertitudes relatives de l'ordre de  $10^{-16}$  à quelques  $10^{-17}$ . Pour cette raison, nous ne mentionnerons plus par la suite la problématique de l'inexactitude de l'horloge. Par contre, son instabilité de fréquence  $y(t)$  va jouer un rôle central dans notre étude. Les performances de stabilité en fréquence d'une horloge sont usuellement évaluées à partir de l'écart type d'Allan, noté  $\sigma_y$ . Contrairement à un écart type classique qui évalue l'écart à la moyenne de l'ensemble d'une mesure, l'écart type d'Allan évalue l'écart entre deux échantillons successifs, adjacents, moyennés chacun sur un temps  $\tau$ . Plus précisément, l'écart type d'Allan s'exprime comme :

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle} / 2, \quad (2.3)$$

avec  $\bar{y}_k$  la valeur moyenne d'un échantillon du bruit  $y(t)$  sur l'intervalle de temps  $\tau = t_{k+1} - t_k$ .

En particulier, l'écart type d'Allan d'un signal d'horloge dont le bruit de fréquence relatif est un bruit blanc (indépendant de la fréquence d'analyse) suit une loi d'échelle en  $1/\sqrt{\tau}$ . Ce comportement en  $1/\sqrt{\tau}$  est très répandu à court terme pour les horloges atomiques. Par stabilité à court terme, nous désignons l'écart type d'Allan pour  $\tau$  allant de 1 s à 100 s d'interrogation des atomes. L'annexe A (section 2) présente les résultats calculés dans les différents cas caractéristiques de bruits de fréquence relatif, pas nécessairement blancs.

Une horloge atomique à base de césium fait partie de la famille des horloges micro-ondes (avec le rubidium et l'hydrogène) car la différence entre les deux niveaux hyperfins de son état fondamental correspond à une transition RF à environ 9.2 GHz. Ces horloges sont extrêmement communes et variées. Il nous reste à évoquer maintenant l'originalité du projet d'horloge qui nous concerne.

## 2.2 Stabilité vs compacité ?

En réalité, toutes les technologies dites embarquées sont privées des sources ultra-stables comme l'horloge à fontaine de césium précédemment citée du fait de leur fort encombrement spatial. De profonds efforts de réduction de la taille et de la consommation électrique des références temps-fréquence doivent être menés pour répondre à la demande grandissante. C'est ce qui a conduit l'entreprise américaine Microsemi à la commercialisation d'horloges atomiques miniatures (CSAC<sup>4</sup>) à base de rubidium ou de césium dont la stabilité relative en fréquence est de l'ordre de  $\sigma_y = 3 \times 10^{-10}$  au bout d'une seconde d'interrogation pour un volume réduit à seulement 17 cm<sup>3</sup>. Cela répond à un besoin de références embarquables assez stables pour la communication militaire en terrains d'opération. L'interrogation entièrement optique des atomes est un ingrédient clé de cette miniaturisation. En effet, elle permet de s'affranchir des encombrantes cavités RF dont on ne peut réduire la taille. Cette interrogation repose sur le piégeage cohérent de population (CPT<sup>5</sup>).

Cependant, les CSACs n'offrent pas une stabilité suffisante pour certaines applications. En effet, un besoin spécifique de référence temps-fréquence compacte et très stable a été identifié dans un autre cadre militaire, par exemple pour pallier les coupures de GNSS, pour application aux radars multi-statiques ou encore dans le cadre de la guerre électronique. Un état des lieux des horloges atomiques commercialisées fait apparaître une lacune entre les horloges à jet de césium (citons la 5071A de Microsemi) et les horloges compactes à base de rubidium (comme la XPRO, proposée encore par Microsemi). En effet, l'horloge à jet de césium 5071A possède une assez bonne stabilité relative en fréquence avec  $\sigma_y(1\text{ s}) < 5 \times 10^{-12}$  mais cette performance se fait au prix d'un volume trop important atteignant 10<sup>4</sup> cm<sup>3</sup> (avec 50 W de consommation électrique). L'horloge compacte XPRO tient au contraire dans un faible volume de 450 cm<sup>3</sup> (pour à peine 1 W consommé) mais au prix d'une stabilité médiocre  $\sigma_y(1\text{ s}) \approx 10^{-11}$ . Pour combler cette lacune et répondre au besoin applicatif d'un compromis entre stabilité et embarquabilité, nous souhaitons développer une horloge atomique avec une performance  $\sigma_y(1\text{ s}) = 5 \times 10^{-13}$  pour un volume de l'ordre de 5 × 10<sup>3</sup> cm<sup>3</sup> (pour une consommation de l'ordre de quelques dizaines de W). Un objectif de stabilité à plus long terme est fixé à  $\sigma_y(\tau = 1\text{ h}) = 2 \times 10^{-14}$ .

Nous proposons de mettre en place une interrogation tout optique des atomes de césium à l'aide d'un VECSEL bifréquences à 852 nm portant un signal RF à 9.2 GHz dans son battement. Avec un volume entre 0.2 L et 0.4 L une fois intégrés et leurs bonnes propriétés de bruit, ces lasers semblent tout indiqués comme sources permettant le respect de notre cahier des charges. L'interrogation entièrement optique du césium repose sur un mécanisme CPT que nous allons maintenant décrire.

4. Pour *chip scale atomic clocks* en anglais.

5. Pour *coherent population trapping* en anglais.

### 2.3 Piégeage cohérent de population

Le mécanisme de piégeage cohérent de population est expérimentalement découvert en 1976 et décrit dans les références [60] et [61]. Il s'agit d'un effet de résonance sub-naturelle capable d'inhiber l'absorption de transitions optiques, rendant le milieu transparent même pour des excitations résonantes. On attribue ceci à un pompage optique dans un *état noir* dont nous allons donner la définition et les propriétés.

Dès 1982, l'intérêt métrologique d'une interrogation CPT s'est illustré dans les travaux de la référence [62] sur jet atomique de sodium. Le CPT a également permis le développement des nouveaux étalons de fréquence micro-onde [63] avant d'être exploité sur une cellule de vapeur [64] et de connaître son essor actuel pour la miniaturisation d'horloges (comme évoqué plus haut). L'intérêt métrologique du mécanisme de CPT est intimement lié aux propriétés du fameux *état noir*.

#### Système en lambda et état noir

Dans son état fondamental, l'état électronique du césium est décrit par les nombres quantiques suivant : un nombre quantique principal  $n = 6$ , un moment cinétique orbital électronique  $L = 0$ , un spin  $S = 1/2$  et un moment cinétique nucléaire total  $I = 7/2$ . Pour décrire le couplage spin-orbite, on utilise le moment cinétique total de l'électron  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  avec, par composition,  $|L - S| \leq J \leq L + S$ . Pour la description du couplage hyperfin, on définit le moment cinétique total de l'atome  $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$  avec, par composition,  $|I - J| \leq F \leq I + J$ . La notation spectroscopique pour l'état fondamental est  $6^2S_{1/2}$ <sup>6</sup>. Le couplage hyperfin avec  $J = 1/2$  et  $I = 7/2$  induit les deux états hyperfins avec  $F = 3$  et  $F = 4$ . C'est le léger écart entre ces deux niveaux qui correspond à la transition RF à 9.2 GHz, à la base de la définition de la seconde.

Le premier état excité possède un moment cinétique orbital  $L = 1$ , ce qui conduit aux valeurs  $J = 1/2$  et  $J = 3/2$ . On appelle alors  $D_1$  la transition à 895 nm qui conduit à l'état excité  $6^2P_{1/2}$  et  $D_2$  la transition à 852 nm qui conduit à l'état excité  $6^2P_{3/2}$ . L'état  $6^2P_{3/2}$  pour la transition  $D_2$  qui nous concerne donne quatre sous-niveaux hyperfins avec  $F$  pouvant valoir 2, 3, 4 ou 5 (voir le diagramme détaillé à l'annexe B). Nous allons ignorer la proximité des sous-niveaux hyperfins  $F \neq 3$  de l'état excité et décrire le diagramme du césium à l'aide des deux niveaux d'énergie dans l'état fondamental  $|L = 0, J = 1/2, F = 3\rangle \equiv |1\rangle$ ,  $|L = 0, J = 1/2, F = 4\rangle \equiv |2\rangle$  et l'état excité  $|L = 1, J = 3/2, F = 3\rangle \equiv |3\rangle$ . Ces trois niveaux d'énergie forment le système en  $\Lambda$  de la Fig. 2.4(a), à partir duquel un piégeage cohérent de population va être mis en œuvre. La durée de vie du niveau excité  $1/\Gamma^*$  est bien plus faible que la durée de vie de la cohérence hyperfine  $1/\gamma_c$ .

6. Dans cette notation spectroscopique, le premier chiffre correspond au nombre quantique principal de l'électron de valence, l'exposant à la valeur de  $2S + 1$ , la lettre à la valeur de  $L$  (S pour 0, P pour 1, D pour 2, etc) et l'indice à la valeur de  $J$ .

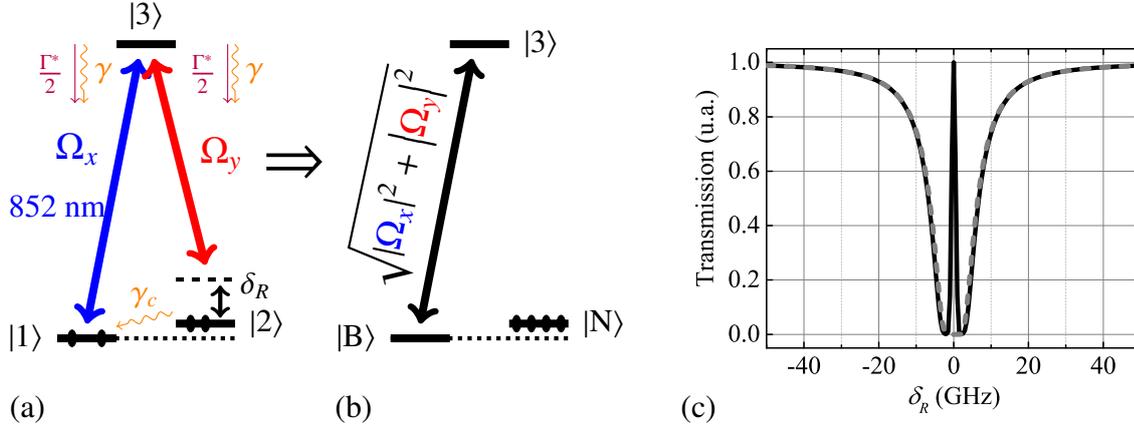


FIGURE 2.4 – (a) Système en  $\Lambda$  à partir du diagramme d'énergie du césium.  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$  : pulsations de Rabi des deux polarisations linéaires orthogonales,  $\delta_R$  : désaccord Raman,  $\gamma_c$  : taux de relaxation de la cohérence hyperfine,  $\Gamma^*$  : taux de relaxation du niveau excité,  $\gamma$  : taux de relaxation de la cohérence du niveau excité. (b) Lors de la résonance à deux photons, le système est optiquement pompé dans l'état noir, superposition des niveaux fondamentaux. (c) Pic spectral de la transparence typiquement induite par le CPT (courbe noire) par inhibition de l'absorption (tirets gris) due au pompage optique dans l'état noir.

Envisageons l'envoi des deux polarisations orthogonales de pulsations  $\omega_x$  et  $\omega_y$  du VECSEL bifréquence sur une cellule contenant une vapeur de césium. L'opérateur Hamiltonien décrivant l'interaction dipolaire des champs lasers avec les trois niveaux d'énergie  $\hbar\omega_1$ ,  $\hbar\omega_2$  et  $\hbar\omega_3$  des atomes de césium dans la base  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  s'écrit  $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_I$  avec :

$$\widehat{H}_0 = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle\langle 3|, \quad (2.4)$$

$$\widehat{H}_I = -\hbar\Omega_x \cos(\omega_x t + \phi_x) |1\rangle\langle 3| - \hbar\Omega_y \cos(\omega_y t + \phi_y) |2\rangle\langle 3| + \text{h.c.} \quad (2.5)$$

où l'on a noté  $\Omega_i = d_i \cdot E_{0i} / \hbar$ , avec  $i \in \{x, y\}$ , les pulsations de Rabi associées au champ à deux composantes (1.34),  $d_i$  étant le moment dipolaire électrique des transitions. L'opérateur hermitique conjugué est désigné par h.c. dans l'équation (2.5).

On montre alors que l'état :

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_x|^2 + |\Omega_y|^2}} \times (\Omega_y |1\rangle - \Omega_x |2\rangle) \quad (2.6)$$

est un état propre du Hamiltonien à condition qu'il y ait une résonance à deux photons ( $\delta_R = 0$ ) entre les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . Cet état se retrouve dès lors immunisé du couplage dipolaire (ce qui lui vaut le qualificatif d'état noir) :

$$\langle 3| \widehat{H}_I |N\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \omega_x - \omega_y = \omega_2 - \omega_1. \quad (2.7)$$

Par contre, les deux autres états stationnaires du Hamiltonien s'expriment comme des superpositions d'états faisant intervenir l'état excité  $|3\rangle$ , dont la durée de vie est très faible (de l'ordre de la ns). Quelques cycles d'absorption puis émission suffisent alors pour pomper optiquement la population dans l'état noir  $|N\rangle$ , comme l'illustre la Fig. 2.4(b). L'état brillant  $|B\rangle$  est, à l'inverse, défini comme la superposition cohérente des états fondamentaux orthogonale à l'état noir :

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_x|^2 + |\Omega_y|^2}} \times (\Omega_x |1\rangle + \Omega_y |2\rangle). \quad (2.8)$$

La résonance à deux photons provoque ainsi un pic de transparence (Fig. 2.4(c)) dont la largeur est limitée par le temps de vie de la cohérence hyperfine, qui est très long (quelques ms). C'est cette grande finesse potentielle, comparée aux larges transitions optiques, qui motive son utilisation à des fins métrologiques. L'interrogation entièrement optique permet additionnellement de s'affranchir de la phase de préparation atomique et de la cavité résonante que l'on utilise généralement pour l'interrogation micro-onde.

En fait, le choix de la configuration avec deux polarisations linéaires et orthogonales pour interroger les atomes est le fruit de travaux réalisés au SyRTE. En effet, grâce à un schéma utilisant deux ondes circulaires droites  $\sigma^+$  et deux ondes circulaires gauches  $\sigma^-$ , la référence [65] a mis en évidence la production de franges de Ramsey de fort contraste, ce qui est avantageux pour le signal d'horloge. Ce schéma en double  $\Lambda$  revient à celui que nous avons décrit et permet une accumulation optimale des atomes dans l'état noir en évitant un piégeage dans les sous-niveaux Zeeman extrêmes grâce aux règles de sélections. Ces sous-niveaux Zeeman proviennent du champ magnétique résiduel dans le résonateur atomique.

Les franges de Ramsey que nous venons de mentionner accompagnent l'interrogation impulsionnelle choisie pour les atomes. Nous en proposons maintenant la description.

### Franges de Ramsey

L'idée de l'interrogation de Ramsey provient d'une limitation imposée par les cavités micro-onde résonnantes [66]. La longueur d'onde de la transition RF (9.2 GHz) entre les 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium est de 3 cm. Pour une cavité de taille caractéristique  $l = 3$  cm et un jet d'atomes de césium dont la vitesse est de l'ordre de  $v = 300$  m/s, le temps d'interaction est uniquement de  $\tau = 100$   $\mu$ s. Ceci produit le spectre de la courbe orange à la Fig. 2.5 pour la probabilité de transition des atomes. La largeur typique de cette courbe est  $1/\tau$ . La largeur de la résonance est d'autant plus faible que le temps d'interaction est élevé. Or il est très difficile de faire des cavités résonnantes à ces longueurs d'onde beaucoup plus longues que 3 cm. L'idée de N. Ramsey consiste à ne pas utiliser une seule cavité micro-onde mais deux séparées d'une distance  $L \gg l$ . Le temps d'évolution libre entre les deux passages est appelé le temps de Ramsey  $T_R \gg \tau$ . Des

franges d'interférence de période  $2\pi/T_R$  apparaissent à l'intérieur du profil de largeur  $\tau$ <sup>7</sup>. L'intérêt des franges de Ramsey est de marquer une résonance bien plus fine conditionnée uniquement par le temps d'évolution libre.

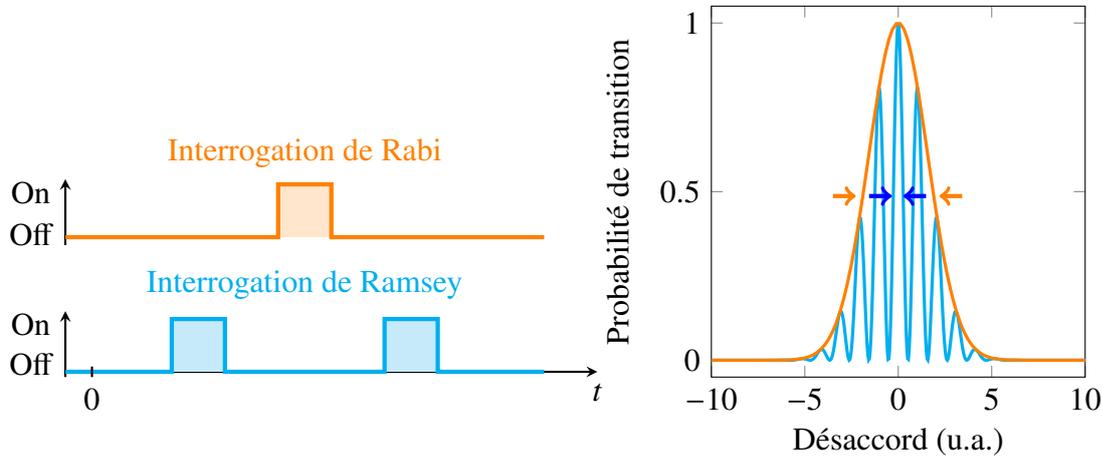


FIGURE 2.5 – Illustration de la différence entre l'interrogation de Rabi à une impulsion et l'interrogation de Ramsey des atomes en utilisant deux impulsions. La largeur à mi-hauteur de la frange centrale de Ramsey  $2\pi/T_R$  (double flèche bleue) est bien plus étroite que la largeur de l'enveloppe  $1/\tau$  (double flèche orange).

Notons cependant que plus  $L$  est grand et moins le dispositif est compact. Voyons alors comment une séquence impulsionnelle d'interrogation entièrement optique permet au final de tirer profit des franges de Ramsey tout en améliorant la compacité de l'horloge.

### Séquence d'horloge

La référence [65] a démontré expérimentalement la possibilité d'utiliser une séquence optique d'interrogation impulsionnelle pour obtenir un signal d'horloge CPT contrasté et bien fin spectralement. Les valeurs des paramètres déterminées dans cette référence sont issues d'une optimisation du discriminateur de fréquence utilisé pour le verrouillage de l'asservissement de l'horloge. La séquence d'horloge, reproduite à la Fig. 2.6, se résume à deux impulsions lumineuses de durée  $T_i = 2$  ms qui sont séparées l'une de l'autre d'un temps d'évolution libre  $T_R = 4$  ms, le temps de Ramsey. La première impulsion sert au pompage optique des atomes dans l'état noir et imprime la phase  $\phi_{RF}$  du battement RF sur la cohérence hyperfine. Pendant l'évolution libre de durée  $T_R$ , la phase de la chaîne micro-onde<sup>8</sup> est changée de façon à ce que les lasers impriment lors de la deuxième impulsion une nouvelle phase en quadrature avec la première. Entre le début de l'impulsion et la détection

7. La situation est analogue à une expérience de fentes d'Young dans laquelle on observe des franges d'interférence, dues à la séparation entre les deux fentes, à l'intérieur de la figure de diffraction d'une fente.

8. La chaîne micro-onde fournissant l'oscillateur local à 9.2 GHz est décrite dans la référence [67].

qui moyenne le signal atomique durant un temps  $\tau_m = 25 \mu\text{s}$ , il s'écoule un laps de temps  $\tau_d = 10 \mu\text{s}$ . La deuxième impulsion crée un nouvel état noir qui interfère avec le précédent. Ces interférences sont détectées avant le remplacement total de l'état noir précédent par le nouveau. Cette interrogation est cyclique et répétée tous les  $T_c = 6 \text{ ms}$ .

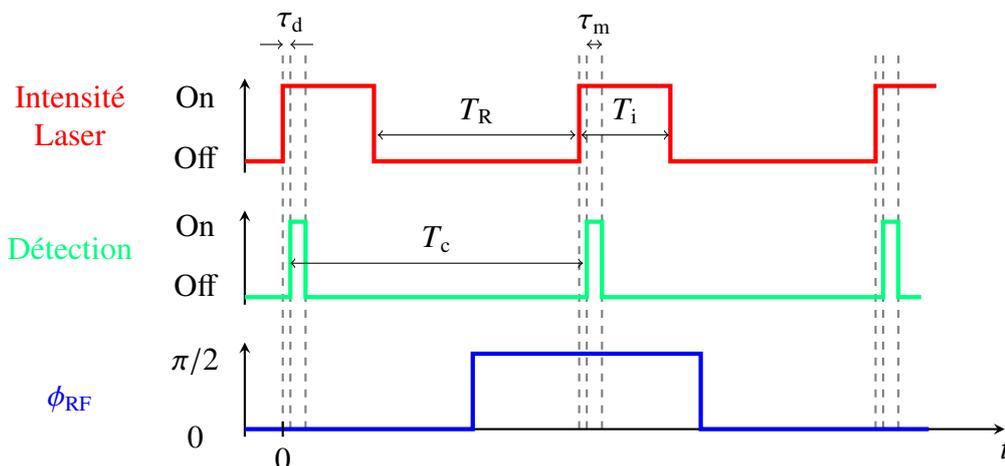


FIGURE 2.6 – Séquence d'horloge. Le temps de cycle vaut  $T_c$ . Le laser illumine les atomes par une séquence impulsionnelle en créneaux (courbe rouge) de durée  $T_i$ , séparés d'un temps  $T_R$ . Le signal est détecté pendant  $\tau_m$  (courbe verte) après un temps  $\tau_d$  après l'impulsion. Une phase  $\phi_{RF}$  alternée de  $\pi/2$  est imprimée sur les atomes (courbe bleue). Pour une meilleure visibilité de la séquence, les durées  $\tau_d$  et  $\tau_m$  sont exagérées.

Avant de donner un aperçu global de l'architecture de l'horloge, nous dressons un état des lieux détaillé de la recherche autour des horloges présentant une stabilité compatible avec nos objectifs. L'interrogation entièrement optique des atomes étant identifiée comme avantageuse pour la miniaturisation de l'horloge, une attention particulière sera portée à l'état de l'art des horloges CPT.

## 2.4 État de l'art des horloges CPT à base de Cesium

Tout d'abord, citons les travaux précurseurs pour la miniaturisation des horloges de l'équipe de J. Kitching [68] (NIST au Colorado) mettant au point une micro-fabrication exploitant l'interrogation CPT à 852 nm dans le césium. Il est bon d'insister sur le fait que les fameuses horloges CSAC, aujourd'hui massivement commercialisées par Microsemi, constituent à la base une véritable prouesse technologique. Comme nous l'avons évoqué, leur stabilité relative en fréquence est insuffisante pour les applications que nous visons. L'état de l'art de la recherche sur les horloges atomiques atteignant un écart type d'Allan  $\sigma_y$  (1 s) de l'ordre de  $10^{-13}$  va permettre de resituer notre choix d'interrogation CPT avec les deux faisceaux de polarisations linéaires orthogonales (configuration Lin $\perp$ Lin) issus du VECSEL bifréquence.

## Performances démontrées

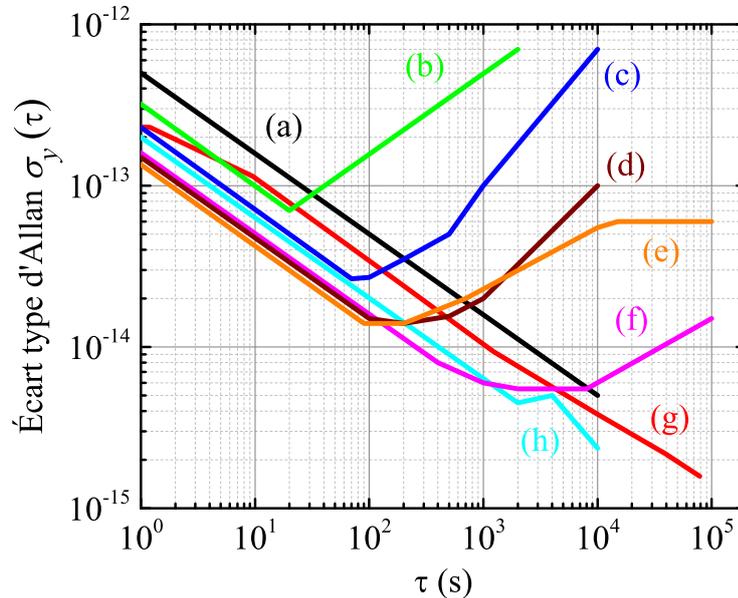


FIGURE 2.7 – État de l’art de la recherche sur les horloges atomiques présentant un écart type d’Allan  $\sigma_y$  (1 s) de l’ordre de  $10^{-13}$ . (a) Maser à hydrogène passif (FEMTO-ST en Franche-Comté). (b) CPT dans le césium avec double modulation de la polarisation (SyRTE) [69]. (c) CPT dans le césium en configuration Lin $\perp$ Lin (SyRTE) [70]. (d) Pompage optique en *push-pull* (FEMTO-ST) [71]. (e) Double résonance dans le rubidium (UNINE à Neuchâtel) [72]. (f) Pompage optique impulsionnel dans le rubidium (INRIM en Italie) [73]. (g) Atomes froids ( $\mu$ quans) [74]. (h) Pompage optique en *push-pull* avec une nouvelle séquence d’horloge (FEMTO-ST) [75].

La Fig. 2.7 reproduit les performances en terme de stabilité relative en fréquence de plusieurs horloges en développement dans les laboratoires européens en fonction de la durée d’interrogation des atomes. Évidemment, une réduction en taille est absolument nécessaire pour toutes les horloges présentées si l’on impose dans le cahier des charges un volume de 5 à 10 L pour la partie physique de l’horloge. Ce volume doit être compatible avec l’objectif, une fois l’électronique incorporée, de tenir dans un rack de 19 pouces. Certaines technologies paraissent plus difficiles à miniaturiser, comme celle qui repose sur des atomes froids (g). D’autres, comme les masers à hydrogène passif, présentent un réel potentiel. L’interrogation optique en *push-pull* développée à l’institut Franche-Comté Électronique Mécanique Thermique et Optique – Sciences et Technologies (FEMTO-ST) repose sur l’introduction d’une modulation RF d’un laser à l’aide d’un dispositif de Michelson (d et h). Cependant, les horloges CPT (b et c) se détachent dans notre cas car leurs limitations sont bien connues. À court terme, ces limitations relèvent des fluctuations des sources lasers utilisées pour l’interrogation optique. En effet, notre partenaire pour l’élaboration de l’horloge compacte et performante, le SyRTE, se situe à l’état de l’art pour les horloges CPT qu’ils ont développées et nous pouvons tirer partie de leur expertise dans le domaine [67, 76, 77].

D'intéressantes performances sont obtenues pour l'interrogation CPT en configuration de double modulation [69, 78]. Cette configuration consiste à moduler à la fois la polarisation du laser d'interrogation et la phase de l'oscillateur local pour la séquence d'horloge. C'est toutefois la configuration  $\text{Lin} \perp \text{Lin}$  avec la séquence d'interrogation montrée plus haut qui est, au moment de l'écriture de cette thèse, à l'état de l'art pour les horloges CPT. L'équipe de S. Guérandel a effectivement démontré une stabilité relative de  $\sigma_y(1 \text{ s}) = 2.3 \times 10^{-13}$  [70]. Le banc optique utilisé pour la production des deux polarisations linéaires orthogonales consiste en deux lasers verrouillés en phase : un laser maître et un laser esclave. On estime à approximativement 100 L le volume physique de l'horloge. Par conséquent, des efforts doivent être menés pour remplacer cette source laser encombrante, c'est pourquoi un VECSEL bifréquence a été proposé.

### Vers un prototype basé sur des VECSELS bifréquences

Les VECSELS bifréquences produisent directement deux polarisations linéaires orthogonales avec des bonnes propriétés de bruit. Notons de plus que Thales possède l'expertise concernant l'intégration industrielle de ces lasers. Grâce au projet ANR 2POLEVF, un volume nécessaire de  $9 \times 9 \times 5 \text{ cm}^3$  a été identifié pour notre source laser, bien plus compacte que l'ensemble laser maître et esclave de la référence [70]. On espère donc tirer parti au mieux des performances de stabilité de l'horloge CPT en configuration  $\text{Lin} \perp \text{Lin}$  et de la compacité offerte par les VECSELS.

La Fig. 2.8 reproduit le schéma global de l'horloge. On reconnaît les différentes étapes affichées à la Fig. 2.3(a). Il y a l'interrogation du résonateur optique contenant la cellule de vapeurs de césium dans son blindage magnétique en  $\mu$ -métal. Un discriminateur de fréquence est réglé à la mi-hauteur de la frange centrale du signal CPT et permet une rétroaction, via un traitement informatique, sur l'oscillateur local micro-onde. L'oscillateur local RF de haute performance de la chaîne micro-onde est décrit dans les références [67, 79]. Une partie de l'oscillateur local est envoyée à un compteur qui délivre le signal d'horloge. L'autre partie est reportée optiquement sur le battement entre les modes du VECSEL bifréquence, qui à nouveau vient interroger le résonateur optique. En amont du résonateur optique, un modulateur acousto-optique commun sert à réaliser la séquence d'horloge pilotée par l'ordinateur. Trois asservissements de la source laser sont nécessaires. Comme indiqué sur la Fig. 2.8, il faut mettre en place : (i) une rétroaction sur l'intensité via, par exemple, le courant de la diode laser de pompe ; (ii) un asservissement de la longueur d'onde du laser à 852 nm par absorption saturée sur la transition  $D_2$  du césium via une rétroaction, par exemple, sur la longueur de cavité en plaçant une cale piézoélectrique sur le coupleur de sortie ; (iii) une rétroaction sur la fréquence du battement RF à 9.2 GHz via un cristal électro-optique à l'intérieur de la cavité permettant de corriger la biréfringence. Le chapitre 5 est spécifiquement dédié à la stabilisation du VECSEL bifréquence dans cette perspective. Plus de détails y seront fournis.

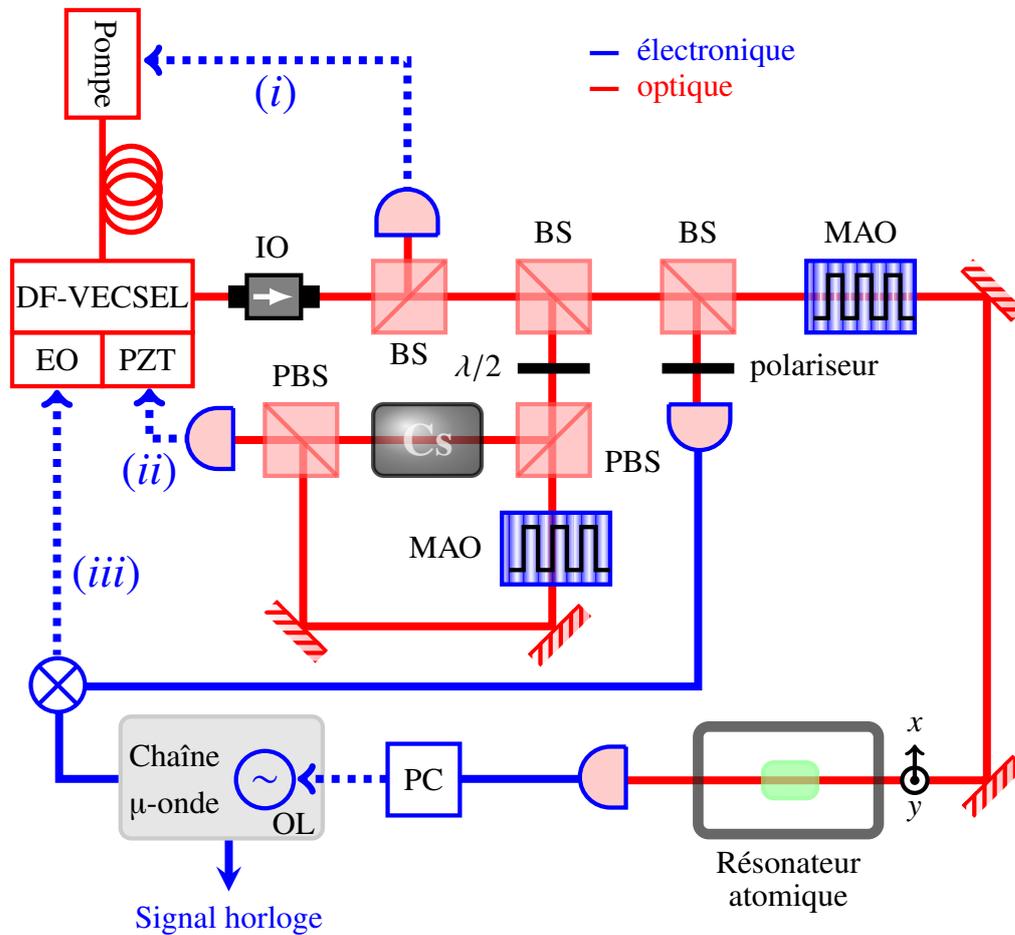


FIGURE 2.8 – Schéma du principe de fonctionnement de l’horloge atomique CPT pompée par le VECSEL bifréquence. (i), (ii), (iii) boucles d’asservissement (flèches bleues) de, respectivement, l’intensité, la longueur d’onde absolue  $\lambda = 852$  nm, la différence de longueurs d’onde correspondant à la transition hyperfine à  $f_{RF} = 9.2$  GHz. IO : isolateur optique, BS : cube séparateur (pour *beam splitter*), PBS : cube à séparation de la polarisation (pour *polarization beam splitter*),  $\lambda/2$  : lame demi-onde, EO : cristal électro-optique, PZT : cale piézoélectrique (pour *piezo-electric transducer*), OL : oscillateur local, MAO : modulateur acousto-optique.

Une étude préliminaire de ces asservissements a été réalisée au laboratoire Charles Fabry [47]. Le verrouillage de la longueur d’onde sur la transition  $D_2$  s’est révélé performant et une contribution à la stabilité relative en fréquence de seulement  $\sigma_y(1\text{ s}) = 7.7 \times 10^{-14}$  a été prédite. Cependant, dans cette référence, les fluctuations d’intensité ne permettaient pas de respecter la stabilité d’horloge de  $\sigma_y(1\text{ s}) = 5 \times 10^{-13}$  du cahier des charges. Notre approche consiste à acquérir une connaissance précise de la dynamique du laser afin d’optimiser sa stabilisation.

En dernier lieu, et puisque nous n’y reviendrons pas, passons en revue les options possibles pour l’alignement de la longueur d’onde du laser sur celle de la transition  $D_2$  du césium. À

l'aide d'un étalon biréfringent [80], on peut réaliser un premier ajustement de la courbe de gain autour de 852 nm. En utilisant un étalon biseauté de  $\text{YVO}_4$  de 100  $\mu\text{m}$  d'épaisseur et avec un angle de 30 secondes d'arc, nos partenaires à Thales R&T ont mesuré un décalage de 1.23 nm pour chaque millimètre de lame introduite. Ensuite, deux solutions ont été identifiées pour la rétroaction. Soit l'utilisation d'un actionneur piézoélectrique sur l'un des deux miroirs de la cavité laser pour un contrôle fin de l'ISL. C'est l'option adoptée dans [47] et citée plus haut. Soit l'utilisation de deux cristaux électro-optiques têtes bêtes à l'intérieur de la cavité en alignant l'axe de polarisation électrique de l'un suivant  $x$  et l'autre suivant  $y$ . On accède ainsi au contrôle de deux degrés de liberté que l'on peut décomposer comme un contrôle séparé de la longueur d'onde absolue et de la différence de longueurs d'onde (battement RF).

Avant de lancer la construction du prototype d'horloge CPT pompée par un VECSEL bifréquence, les propriétés de bruit de ces lasers à 852 nm doivent être explorées. Nous verrons comment considérer leur impact sur la stabilité d'horloge au chapitre 5.



PARTIE

II

OPTIMISATION DE LA DYNAMIQUE  
POUR DES VECSELS BIFRÉQUENCES  
ULTRA-BAS BRUIT



## CHAPITRE 3

# CARACTÉRISATION DU BRUIT D'UN VECSEL DÉDIÉ AUX HORLOGES CPT ET STRATÉGIES DE RÉDUCTION

La transition  $D_2$  à 852 nm du césium peut être excitée à l'aide des deux composantes polarisées orthogonalement d'un VECSEL bifréquence. Comme introduit dans la référence [47] résultant des travaux préliminaires menés au laboratoire Charles Fabry (dans l'équipe de G. Lucas-Leclin) et comme nous l'avons détaillé au chapitre 2, cette proposition offre la perspective de l'élaboration d'une horloge CPT compacte et stable. Les propriétés de bruit du laser et du battement RF sont de toute première importance pour la stabilité à court terme de l'horloge. Le chapitre 1 a résumé l'expertise acquise au fil des années sur l'analyse de bruit des VECSELS en fonctionnement bifréquence [17–20, 22, 42, 43, 51, 81]. Les longueurs d'onde des VECSELS étudiés dans ces références sont d'abord de 1  $\mu\text{m}$  puis de 1.55  $\mu\text{m}$  pour les applications aux liaisons opto-hyperfréquences.

Dans ce chapitre, nous réalisons l'alignement d'un VECSEL émettant deux polarisations croisées à la longueur d'onde de 852 nm, nous caractérisons son fonctionnement bifréquence puis nous analysons en détails ses propriétés de bruit. Les fluctuations d'intensité et le bruit de phase du battement sont successivement scrutés, à la fois sur le plan expérimental et à la lumière de la théorie développée au chapitre 1. Une seconde partie est dédiée à la détermination de l'influence de différents paramètres du laser et du pompage sur le bruit des VECSELS bifréquences. Plusieurs longueurs de cavité sont utilisées lors des observations de bruit à 852 nm de la première partie. L'étude de l'influence des paramètres sur le bruit donne plus de profondeur aux interprétations qui en découlent. Mais également, l'étude du transfert du bruit de la pompe au VECSEL permet de dégager une stratégie de réduction de bruit. L'essentiel du bruit du VECSEL provient du bruit de puissance de la pompe qui lui est transféré. Ce travail ouvre ainsi la voie vers la minimisation de bruit nécessaire pour les applications de distribution par voie optique de références de fréquences micro-ondes ultra-stables, qu'elles concernent la métrologie ou bien les architectures radar.

## 1 Caractéristiques de bruit du VECSEL bifréquence à 852 nm

Dans cette partie, nous présentons la structure puis le fonctionnement bifréquence du VECSEL dédié à l'horloge CPT à base de césium. Nous passons ensuite à l'analyse du bruit d'intensité et du bruit de phase du battement RF. La caractérisation des propriétés de bruit repose ensuite sur l'évaluation des corrélations croisées entre les bruits d'intensité des deux modes du laser.

### 1.1 Laser à 852 nm et dispositif de mesures

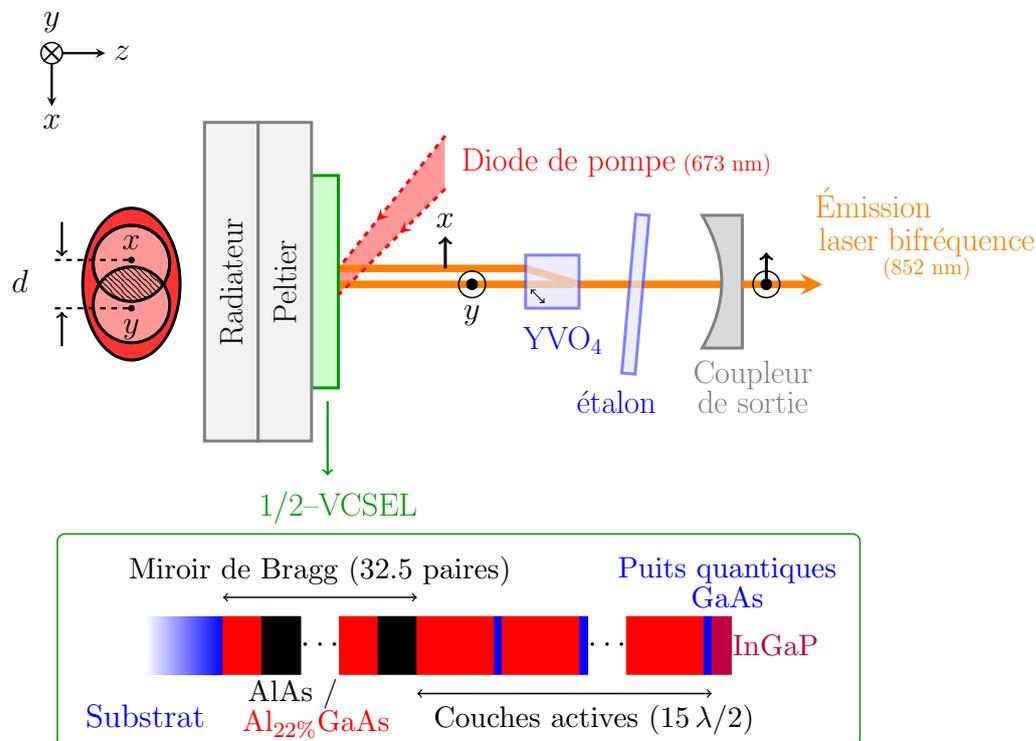


FIGURE 3.1 – Schéma de l'architecture du VECSEL et de sa structure semi-conductrice permettant l'émission bifréquence vers 852 nm.

Le VECSEL bifréquence permettant l'émission de deux modes polarisés orthogonalement aux alentours de 852 nm est schématisé sur la Fig. 3.1. Le détail de la structure à semi-conducteurs formant le 1/2-VCSEL, collé sur le module Peltier et thermalisé à 20°C, est indiqué dans le cadre vert. Les couches minces de cette puce ont été obtenues au C2N (dans l'équipe de I. Sagnes) par une méthode d'épitaxie en phase vapeur aux organométalliques (MOCVD)<sup>1</sup>. L'épitaxie a été reportée sur un substrat de GaAs de 350 μm d'épaisseur. Ces couches minces contiennent des couches actives et un réseau de Bragg composé de 32,5 paires de couches quart d'onde AlAs/Al<sub>0,22</sub>Ga<sub>0,78</sub>As. La réflectivité du réseau est supérieure

1. Acronyme de *metal-organic chemical-vapor deposition* en anglais.

à 99.94% autour de 850 nm. Les couches actives sont également composées du matériau ternaire  $\text{Al}_{0.22}\text{Ga}_{0.78}\text{As}$  faisant office de barrière pour sept puits quantiques en GaAs de 8 nm d'épaisseur chacun. Environ 75% de la puissance de pompe est absorbée dans ces couches actives lors d'un passage. La position des puits quantiques correspond judicieusement aux ventres de l'onde stationnaire du champ laser intra-cavité, comme indiqué à la Fig. 1.2. Un revêtement en InGaP de 50 nm d'épaisseur referme la structure et empêche son oxydation (surtout celle de l'aluminium). En réalité, deux couches minces supplémentaires et non représentées sur le schéma sont situées de part et d'autre de la zone active (une au-dessus du miroir de Bragg et l'autre sous la couche de revêtement). Il s'agit d'une barrière de potentiel en  $\text{Al}_{0.39}\text{Ga}_{0.61}\text{As}$  utilisée pour bien confiner les porteurs de charge dans la zone active. Aussi, en ne déposant aucune couche anti-réflexion sur la puce à semi-conducteurs, on améliore le gain du mode résonant à l'intérieur de la micro-cavité créée dans la structure.

Une diode laser à 673 nm pompe optiquement la structure avec un angle d'incidence proche de  $40^\circ$ . La tache lumineuse elliptique obtenue est représentée en rouge à gauche de la Fig. 3.1. Une fibre optique multimode de diamètre de cœur  $102\ \mu\text{m}$  et d'ouverture numérique 0.22 délivre à la structure l'éclairage de la pompe. Un système en espace libre, constitué d'une lentille de collimation disposée en sortie de fibre puis d'une lentille de focalisation, complète le dispositif de pompage.

Afin d'obtenir une cavité laser linéaire, un coupleur de sortie de rayon de courbure 5 cm est utilisé. C'est un miroir concave de transmission 0.5%. On insère dans la cavité créée un cristal biréfringent de  $\text{YVO}_4$  uniaxe positif et coupé à  $45^\circ$  de son axe optique. Ce cristal revêt un traitement anti-réflexion. Il induit une séparation transverse par double réfraction entre l'onde ordinaire et l'onde extra-ordinaire permettant l'oscillation laser de deux polarisations orthogonales au sein de la même cavité. À la différence de chemin optique parcouru dans la cavité est associée une différence de marche. Les régions de pompe pour les deux modes lasers, polarisés suivant  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , sont spatialement séparées sous l'effet de la double réfraction du cristal. On note  $d$  la distance centre à centre de ces régions qui se superposent partiellement comme indiqué par la zone hachurée sur la figure. Ce recouvrement est responsable de la saturation croisée d'un mode par l'autre et donc de la compétition des modes. L'épaisseur du cristal biréfringent est de 0.5 mm et il crée une distance entre les modes valant  $d = 50\ \mu\text{m}$ .

Nous utiliserons dans les caractérisations de bruit qui suivent deux valeurs de longueur de cavité distinctes : 48.0 mm et 49.5 mm. Varier la longueur de cavité permet de changer le rayon du mode laser intra-cavité, en particulier au niveau de la structure, que l'on évalue respectivement à  $w_0 = 65\ \mu\text{m}$  et  $w_0 = 40\ \mu\text{m}$ . La séparation  $d$  induite par le cristal restant la même, l'alignement de la cavité laser avec des longueurs différentes aboutit à des niveaux de compétition entre modes différents, des bruits de pompe différents ainsi que des amplitudes de corrélation du pompage  $\eta$  différents. L'équation (1.41) nous permet d'évaluer à  $C = 0.44$  et  $C = 0.15$  les constantes de couplage associées aux deux situations. En rapprochant la longueur de cavité des 50 mm du rayon de courbure du coupleur de sortie, le rayon

des modes lasers diminue sur la structure pour chaque polarisation alors que la distance centre à centre est maintenue. Cela implique donc bien une diminution de la surface de recouvrement des régions de pompe, ce qui affaiblit ainsi la saturation croisée.

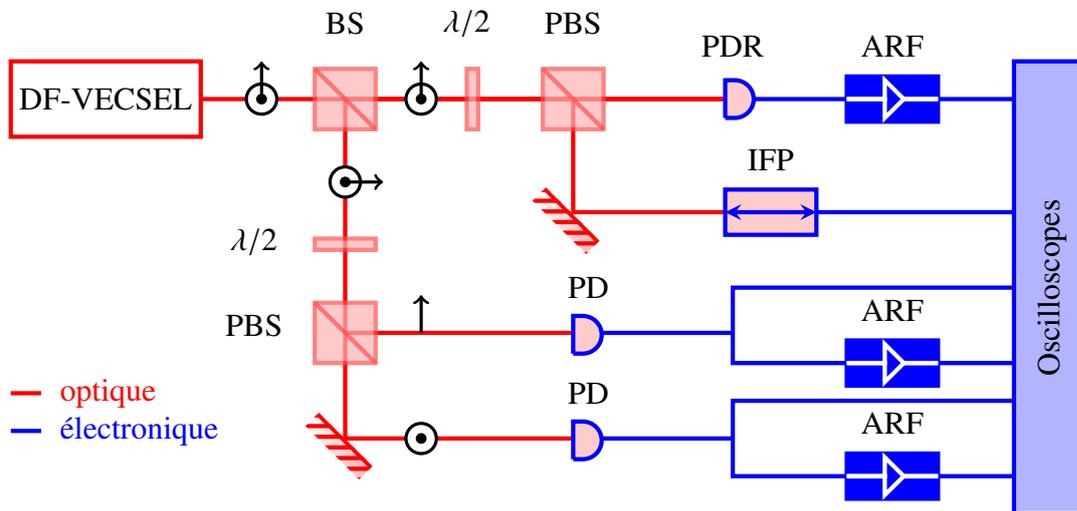


FIGURE 3.2 – Dispositif de mesure des bruits d'intensité du VECSEL bifréquence (DF-VECSEL) et du bruit de phase du battement. BS : cube séparateur (*beam splitter*),  $\lambda/2$  : lame demi-onde, PBS : cube à séparation de polarisations (*polarization beam splitter*), PD : photodiode, PDR : photodiode rapide, ARF : amplificateur RF, IFP : dispositif interférométrique de Fabry Perot.

Le dispositif expérimental permettant la caractérisation du bruit de ce VECSEL bifréquence est schématisé à la Fig. 3.2. Le signal bifréquence du VECSEL est séparé en deux voies. La première (en haut) permet de projeter sur la même direction les polarisations des modes croisés notés  $x$  et  $y$ . D'une part, ceci permet de détecter le battement entre ces deux modes à l'aide d'une photodiode rapide de bande passante environ 12 GHz. Une image du battement RF obtenu à la photodiode peut être directement réalisée à l'analyseur de spectre électrique comme l'illustre la Fig. 3.3(a). Nous utilisons plutôt un oscilloscope à large profondeur mémoire pour l'analyse simultanée des données, permettant en particulier la reconstruction du bruit de phase du battement RF. D'autre part, une partie du faisceau est utilisée pour contrôler continuellement la bonne cohabitation des deux modes grâce à un dispositif Fabry Perot, comme le montre la Fig. 3.3(b).

La seconde voie permet de mesurer séparément l'intensité de chaque polarisation à l'aide de photodiodes de bande passante typique 25 MHz. Le signal direct fourni par ces photodiodes donne l'image de l'intensité moyenne alors que les fluctuations d'intensité sont obtenues après amplification sur une bande allant de 10 kHz à 500 MHz.

Passons maintenant aux résultats expérimentaux de ces mesures de bruit. Pour tenir compte des bandes passantes de l'instrumentation, les spectres de bruit seront présentés de 10 kHz à 20 MHz (proche porteuse pour le battement).

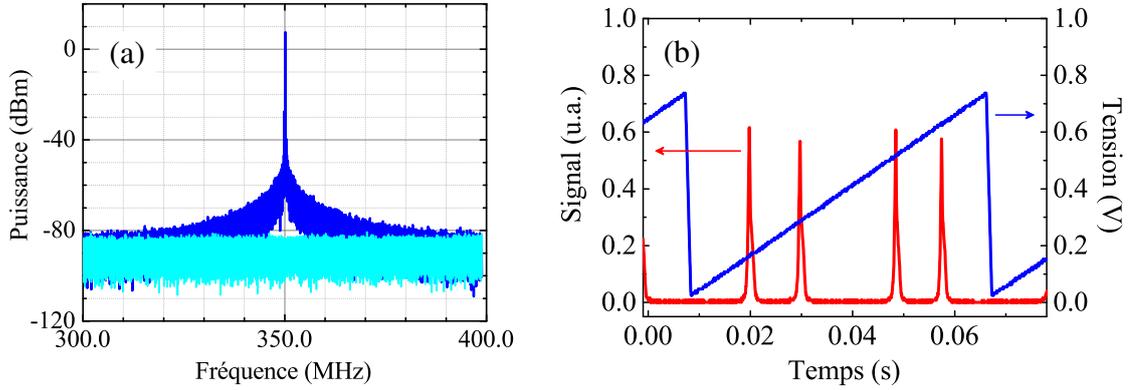


FIGURE 3.3 – Fonctionnement bifréquence du laser avec la mesure (en bleu) du battement RF à l’analyseur de spectre (a) et le balayage Fabry Perot (b) montrant l’existence de deux modes (en rouge). (a) La bande passante de résolution est de 3 kHz, la bande passante vidéo de 910 Hz et la courbe en cyan représente le plancher de mesures. (b) Le balayage du Fabry Perot (rampe en bleu) correspond à un intervalle spectral libre de 10 GHz.

## 1.2 Mesures des fluctuations des intensités et de la phase du battement

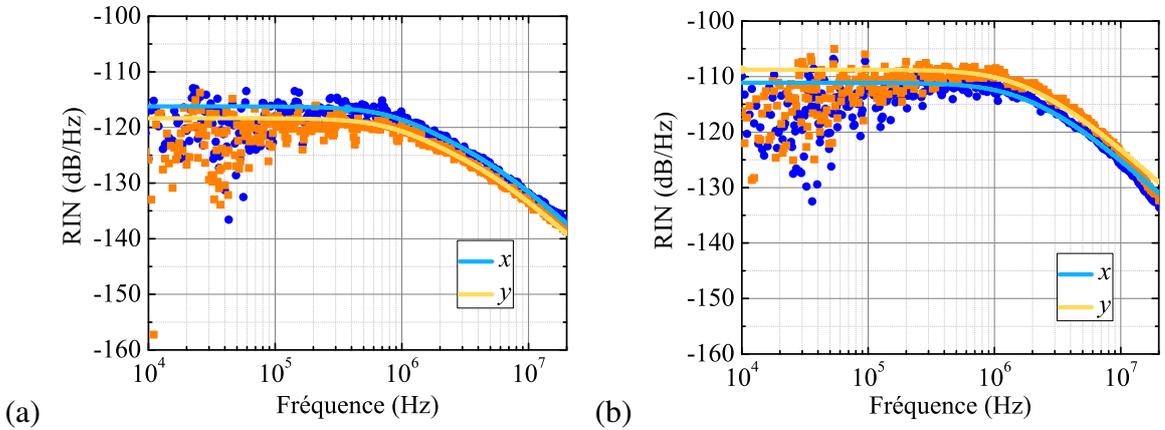


FIGURE 3.4 – Spectres de bruit d’intensité relatif du VECSEL bifréquence à 852 nm pour des longueurs de cavité de 48.0 mm (a) et 49.5 mm (b). Les symboles correspondent aux mesures alors que les spectres issus des modèles apparaissent en traits pleins. Les paramètres retenus sont  $\tau = 1$  ns,  $\Psi = 0$  et (a)  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $r_x = 1.59$ ,  $r_y = 1.63$ ,  $C = 0.44$ ,  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\eta = 0.45$ ; (b)  $\tau_x = 10$  ns,  $\tau_y = 8$  ns,  $r_x = 1.25$ ,  $r_y = 1.22$ ,  $C = 0.15$ ,  $RIN_p = -129$  dB/Hz,  $\eta = 0.1$ .

La Fig. 3.4 montre les spectres de bruit d’intensité relatif provenant à la fois des mesures et des modélisations basées sur la théorie développée dans la section 3 du chapitre 1. La Fig. 3.4(a) présente les résultats pour une cavité de longueur 48.0 mm contre 49.5 mm pour la Fig. 3.4(b). L’allure de ces spectres est celle d’un filtre passe-bas où la fréquence de

coupure est reliée aux temps de vie des photons de chaque polarisation dans la cavité, conformément à ce que l'on pouvait attendre en présence d'une dynamique de laser de classe A. En comparant attentivement les courbes, on observe que la transition entre le régime asymptotique basse fréquence et le régime asymptotique haute fréquence est bien plus douce en (a) qu'en (b). Cela provient du fait que la saturation croisée étant plus importante en (a) qu'en (b), le comportement du RIN s'éloigne davantage du filtre passe-bas de premier ordre attendu. On observe dans les deux cas une très légère différence entre les bruits d'intensité relatifs des modes  $x$  et  $y$  qui est tributaire du fait que ces modes ne ressentent ni les mêmes pertes, ni le même gain. La modélisation reproduit très fidèlement les comportements mesurés.

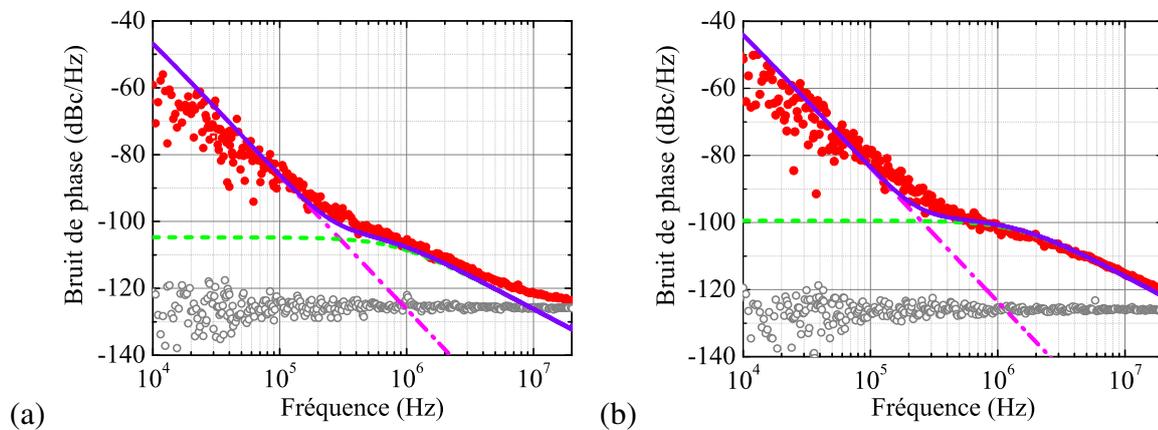


FIGURE 3.5 – Spectres du bruit de phase du battement RF généré par un VECSEL bifréquence à 852 nm pour des longueurs de cavité de 48.0 mm (a) et 49.5 mm (b). Les symboles rouges correspondent aux mesures, les gris au plancher, les traits pleins aux modèles avec la contribution du bruit thermique (pointillés magenta) et du couplage phase-amplitude (tirets verts). Les paramètres retenus sont  $R_T = 40 \text{ K.W}^{-1}$  et (a)  $\tau_T = 45 \mu\text{s}$ ,  $\Gamma_T = 1.34 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_{p,x} = 0.42 \text{ W}$ ,  $P_{p,y} = 0.35 \text{ W}$ ; (b)  $\tau_T = 45 \mu\text{s}$ ,  $\Gamma_T = 1.32 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_{p,x} = 0.27 \text{ W}$ ,  $P_{p,y} = 0.33 \text{ W}$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 3.4.

La Fig. 3.5 reproduit les spectres de bruit de phase du battement RF issus à la fois des mesures et des modélisations. Cette fois encore, la longueur de cavité est plus petite en (a) qu'en (b), ce qui induit des tailles des modes plus importantes en (a) qu'en (b) et donc plus de saturation croisée en (a). Une rupture de pente peut être identifiée sur chaque spectre aux alentours de 300 kHz. Grâce à la modélisation, il devient évident que la partie basses fréquences est induite par les effets thermiques alors qu'aux plus hautes fréquences c'est la contribution liée au couplage phase / amplitude qui domine. La contribution du bruit d'intensité s'effectue à travers le couplage phase-amplitude généré par un facteur de Henry  $\alpha$ , élevé pour ce type de structures à semiconducteurs. La transition entre ces deux mécanismes de bruit est située aux alentours des 300 kHz et explique la rupture de pente évoquée plus haut.

On pourrait s'attendre, naïvement, à ce que le bruit de phase en (a) soit plus important qu'en (b) à cause des effets de la saturation croisée. Le constat est différent et résulte en fait d'une combinaison de plusieurs facteurs. L'augmentation de la longueur de cavité certes diminue  $C$  mais aussi accroît le bruit de pompe ressenti par chaque mode laser et diminue l'amplitude des corrélations de bruit de la pompe  $\eta$ . En effet, la diminution du recouvrement des régions de pompe s'accompagne d'une réduction de la zone de speckle de la pompe partagée par les deux modes, ce qui dégrade  $\eta$ . Comprendre l'influence plus précise de tous ces facteurs sera l'objet des investigations menées dans la section 2. Avant d'entamer cette discussion, nous explorons les propriétés des corrélations des bruits d'intensité des deux modes lasers.

### 1.3 Analyse des corrélations croisées

Les corrélations entre les bruits d'intensité des deux modes vont nous permettre une compréhension plus fine de la dynamique du laser. Ce travail a été initié par S. De et rapporté dans les références [21, 82]. Nous en donnerons un nouvel éclairage au chapitre 7. Le spectre des corrélations des bruits d'intensité est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  définie par la relation :

$$\Theta_{xy}(f) = \frac{\langle \overline{\delta F_x}(f) \cdot \overline{\delta F_y}^*(f) \rangle}{\sqrt{\langle |\overline{\delta F_x}(f)|^2 \rangle \langle |\overline{\delta F_y}(f)|^2 \rangle}}. \quad (3.1)$$

Le dénominateur de cette expression est un facteur de normalisation. Pour deux modes aux fluctuations tout à fait identiques  $\Theta_{xy}(f)$  vaut 1. Pour deux modes indépendants, décorrélés,  $\Theta_{xy}(f)$  est nul. La Fig. 3.6 reproduit les spectres des corrélations entre les bruits d'intensité des deux modes polarisés orthogonalement du VECSEL bifréquence à 852 nm. L'amplitude des corrélations présente un plateau aux basses fréquences à une valeur relativement élevée avant de s'effondrer entre 1 et 10 MHz puis revenir à une valeur non-nulle sur un nouveau plateau. En examinant la phase associée, on s'aperçoit que cette transition au delà du MHz correspond à un changement de signe des corrélations. On passe en effet d'une valeur de  $\pm 180^\circ$  pour la phase des corrélations à 0. On a ainsi une transition entre un régime de fluctuations de l'intensité des modes en opposition de phase à un régime en phase. Il est possible de ré-interpréter ce système à deux composantes corrélées comme deux oscillateurs couplés, ou tout autre système à deux niveaux couplés. Les modes propres du système sont des combinaisons linéaires des bruits d'intensité sur chaque polarisation :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1x} & c_{1y} \\ c_{2x} & c_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\delta F_x} \\ \overline{\delta F_y} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où les coefficients de la matrice sont des nombres complexes.

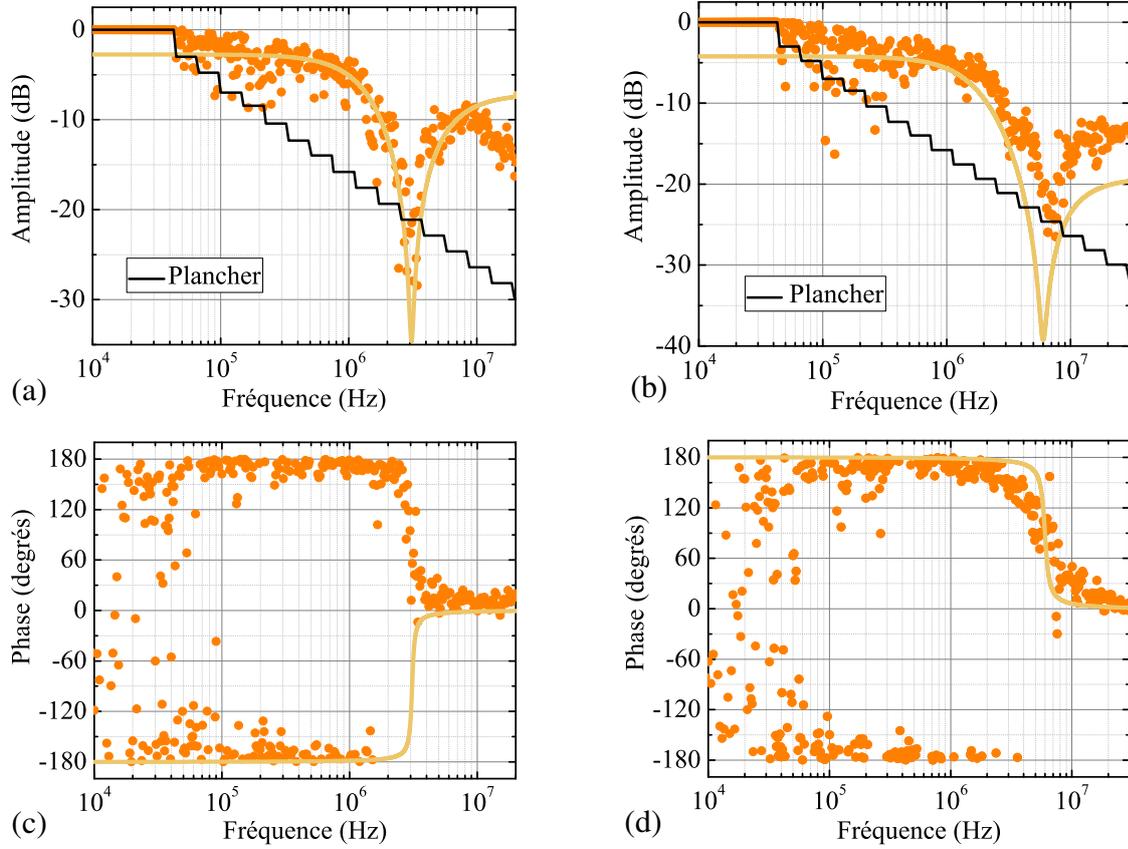


FIGURE 3.6 – Spectres des amplitudes (a,b) et phases (c,d) des corrélations du bruit d'intensité entre les modes  $x$  et  $y$  du VECSEL bifréquence. La longueur de cavité est de 48.0 mm pour (a,c) et 49.5 mm pour (b,d). Les symboles sont issus des mesures alors que les traits pleins proviennent des modélisations obtenues avec les paramètres de la Fig. 3.4.

En supposant maintenant une situation où les modes lasers des polarisations  $x$  et  $y$  possèdent des gains et des pertes tout à fait semblables, il est possible de préciser l'écriture précédente. De façon similaire mais dans un autre registre, la molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$  possède deux conformations tétraédriques équivalentes suivant la position de l'atome d'azote par rapport au plan formé par les atomes d'hydrogène. Ses états propres, de plus basse énergie, sont les superpositions symétriques et anti-symétriques des deux conformations. Dans le cas présent, les modes propres de bruit seront aussi le mode symétrique du bruit d'intensité (dénotté  $+$ ) et le mode anti-symétrique (dénotté  $-$ ) définis comme :

$$\begin{cases} \overline{\delta F_+}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\overline{\delta F_x}(f) + \overline{\delta F_y}(f)] , \\ \overline{\delta F_-}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\overline{\delta F_x}(f) - \overline{\delta F_y}(f)] . \end{cases} \quad (3.3)$$

Si les gains et les pertes ne sont pas identiques pour les deux composantes  $x$  et  $y$  du laser, il

reste toujours possible de décomposer les modes de bruit dans la nouvelle base des modes symétriques et anti-symétrique que l'on vient de construire et qui représente mieux les états physiques du système. Des mesures précédentes des fluctuations d'intensité, on déduit les densités spectrales de puissance des modes  $\delta\overline{F}_+$  et  $\delta\overline{F}_-$ . On voit à la Fig. 3.7 que le mode anti-symétrique domine sur quelques MHz de bande passante et que la transition précédemment évoquée se manifeste lorsque le mode symétrique des fluctuations domine. La correspondance du changement de signe des corrélations et du renversement du rapport

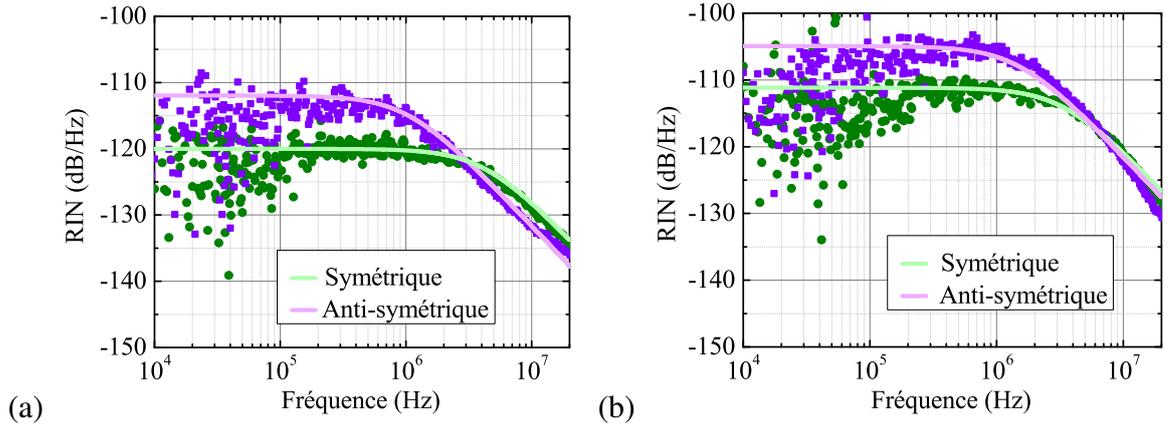


FIGURE 3.7 – Spectres des bruits d'intensité des modes symétriques et anti-symétriques définis à l'Eq.(3.3). La longueur de cavité vaut 48.0 mm en (a) et 49.5 mm en (b). Les symboles sont issus des mesures alors que les traits pleins proviennent des modélisations obtenues avec les paramètres de la Fig. 3.4.

entre mode symétrique et mode anti-symétrique se comprend en analysant l'expression (3.3). Lorsque les fluctuations sur  $x$  et  $y$  s'ajoutent en opposition de phase,  $\delta\overline{F}_+$  est petit alors que  $\delta\overline{F}_-$  est grand. L'addition en phase des fluctuations rend au contraire  $\delta\overline{F}_+$  grand et  $\delta\overline{F}_-$  petit. L'inversion entre modes symétrique et anti-symétrique coïncide donc avec le changement de signe de  $\text{Re}[\Theta_{xy}(f)]$ . De plus ce changement de signe est continu et s'accompagne naturellement d'un passage par zéro de l'amplitude des corrélations  $\Theta_{xy}(f)$ , d'où le creux observé aux Fig. 3.6(a) et (b).

Une autre lecture de ce résultat est possible en ré-exprimant le numérateur du spectre des corrélations dans la base des modes symétrique / anti-symétrique :

$$\Theta_{xy}(f) = \frac{\frac{1}{2} \left[ \langle |\delta\overline{F}_+|^2 \rangle - \langle |\delta\overline{F}_-|^2 \rangle \right] + i \text{Im} \left[ \langle \delta\overline{F}_+^* \cdot \delta\overline{F}_- \rangle \right]}{\sqrt{\langle |\delta\overline{F}_x(f)|^2 \rangle \langle |\delta\overline{F}_y(f)|^2 \rangle}}. \quad (3.4)$$

Pour la partie imaginaire de ce spectre, on s'aperçoit donc que l'on a au numérateur de cette équation  $\text{Im} \left[ \langle \delta\overline{F}_x \cdot \delta\overline{F}_y^* \rangle \right] = \text{Im} \left[ \langle \delta\overline{F}_+^* \cdot \delta\overline{F}_- \rangle \right]$ . Comme les mesures de la phase des corrélations l'indiquent sur les Fig. 3.6(c) et (d), cette partie imaginaire est nulle sur quasiment tout le spectre en dehors de la transition très raide entre les fluctuations en phase

et les fluctuations en opposition de phase. L'essentiel est donc contenu dans le premier terme réel de la somme apparaissant au numérateur de l'équation (3.4). Il s'ensuit que la domination aux basses fréquences du mécanisme de bruit anti-symétrique induit des corrélations entre  $x$  et  $y$  négatives et donc des fluctuations en opposition de phase. Cependant le spectre de bruit d'intensité du mode symétrique présente une bande passante plus large que celui du mode anti-symétrique, comme le montre la Fig. 3.7. Il existe donc une fréquence à partir de laquelle le poids des mécanismes de bruit symétrique et anti-symétrique s'égalise, ce qui a pour effet d'annuler les corrélations entre  $x$  et  $y$ . Ceci explique le creux d'amplitude constaté aux Figs. 3.6(a) et (b). La phase des fluctuations sature à 0 dès lors que le mécanisme de bruit symétrique l'emporte.

Enfin, en comparant les bruits d'intensités aux Figs. 3.7(a) et (b), on s'aperçoit que les bruits des modes symétrique et anti-symétrique sont d'autant plus équilibrés que la cavité est longue et donc la constante de couplage  $C$  décroît. On en déduit donc que le mode de bruit anti-symétrique est d'autant plus prédominant que la saturation croisée est élevée.

## 2 Stratégies de réduction du bruit

La modélisation reproduit avec une grande fidélité les mesures de bruit du VECSEL bifréquence à 852 nm. Ce VECSEL bifréquence est développé dans la perspective de son application à l'horloge CPT à base de césium. On souhaite cependant obtenir des niveaux de bruit les plus bas possibles, que ce soit pour cette application ou bien pour toutes les autres discutées au chapitre 2. De plus, les mesures précédentes ont montré que les bruits d'intensité et le bruit de phase du battement ne dépendent pas que du niveau de bruit de la diode laser de pompe mais également de bien d'autres paramètres du laser. Nous proposons donc de tirer parti du bon accord avec le modèle pour comprendre plus en détail l'influence des différents paramètres sur la dynamique du VECSEL bifréquence. Nous souhaitons par la même occasion dégager des critères pour la réduction de bruit.

### 2.1 Minimisation du transfert de bruit d'intensité

Le bruit d'intensité relatif associé à chaque polarisation est bien modélisé par le produit du RIN de la pompe et d'une fonction de type filtre passe-bas. La mesure du RIN de la pompe au chapitre 1 a mis en évidence un spectre plat de bruit blanc. Le contenu fréquentiel est donc contenu dans le second terme du produit qui représente la fonction de transfert du RIN de pompe au VECSEL. Le filtrage des photons par la cavité laser induit une fréquence de coupure de l'ordre du MHz. Bien en-deçà de cette fréquence de coupure, la fonction de transfert du RIN de la pompe au VECSEL se résume alors à un simple gain. Le gain de bruit d'intensité lors du transfert au laser est évalué à partir de l'expression (1.51) à la fréquence de 50 kHz. La Fig. 3.8 montre l'influence des divers paramètres sur ce gain de bruit d'intensité. La Fig. 3.8(a) considère le cas où les taux de pompage des polarisations

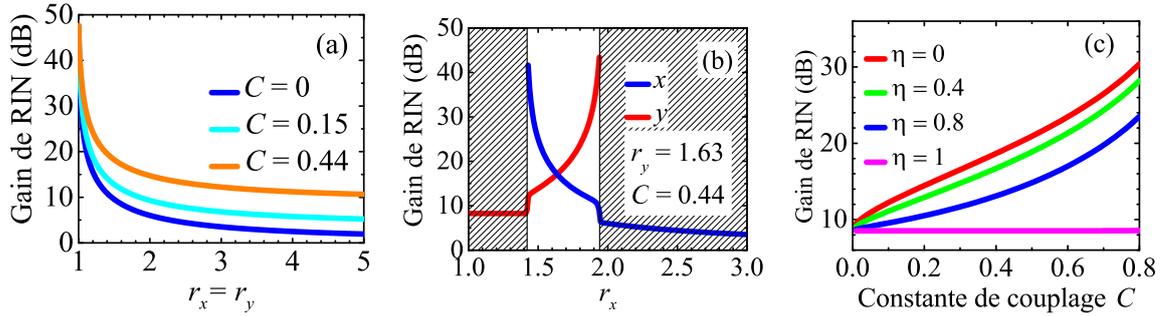


FIGURE 3.8 – Impact des paramètres du VECSEL bifréquence sur le gain du transfert de bruit provenant de la pompe évalué aux basses fréquences ( $f = 50$  kHz). (a) Évolution du gain de bruit transféré en fonction du taux de pompage pour des excitations équilibrées sur les deux modes  $x$  et  $y$  et plusieurs valeurs de la constante de couplage  $C$ . (b) Évolution du gain de bruit transféré en fonction du taux de pompage  $r_x$  sur le mode  $x$  avec une valeur  $r_y$  fixée à 1.63. Les zones hachurées délimitent un fonctionnement uniquement monomode du laser de la fenêtre de fonctionnement bifréquence. (c) Évolution du gain de bruit transféré en fonction de la constante de couplage pour  $r_x = r_y = 1.6$  et différentes valeurs d’amplitude  $\eta$  des corrélations des bruits de pompe. Les paramètres utilisés sont  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $\tau = 1$  ns,  $\Psi = 0$  et  $\eta = 0.45$  quand il n’est pas varié.

$x$  et  $y$  sont équilibrés ( $r_x = r_y$ ). Plus les modes sont pompés loin de leur seuil laser, moins on constate de transfert du bruit de la pompe. Ce comportement est similaire à celui d’un laser monomode de classe A, comme reporté dans la référence [17]. En particulier, lorsque  $C = 0$  il n’y a plus de couplage entre les modes du VECSEL bifréquence et on retrouve exactement le comportement du transfert de RIN du VECSEL monomode. Lorsque le laser est amené très loin de son seuil, le RIN du laser tend vers le RIN de la pompe. On note cependant que la saturation croisée crée un écart à ce comportement asymptotique. En effet, le gain du RIN sature à 5 dB de gain de bruit pour  $C = 0.15$  et même à 10 dB pour  $C = 0.44$  sous l’effet de la compétition des modes. Il semble donc préférable de pomper le plus loin du possible du seuil et avec le moins couplage possible, comme on s’y attendait physiquement.

Par ailleurs, la compétition des modes explique qu’on n’aboutisse à un fonctionnement bifréquence, avec une oscillation simultanée de deux modes, qu’en cas de taux de pompage relativement équilibrés pour ces derniers. La Fig. 3.8(b) montre comment le transfert de RIN évolue en fonction du taux de pompage  $r_x$  lorsque  $r_y$  est fixé. La zone non-hachurée correspond aux valeurs de  $r_x$  permettant une oscillation stable à deux modes. En dehors de l’intervalle délimité, le déséquilibre entre les taux de pompages des deux modes est trop important et la compétition conduit le mode le plus fort à s’accaparer une part du gain trop grande pour que l’autre puisse exister [38]. Les zones hachurées correspondent ainsi à un fonctionnement monomode du VECSEL. En régime bifréquence, on note que le gain de bruit d’intensité n’est pas le même sur les deux modes dès que  $r_x \neq r_y$ . Plus

précisément, le bruit d'intensité du mode le plus faible augmente drastiquement sous l'effet du déséquilibre des taux de pompage. Enfin, l'évolution du gain de bruit en fonction de la constante de couplage est tracée à la Fig. 3.8(c) pour plusieurs valeurs de l'amplitude  $\eta$  des corrélations de bruits de pompe dans une situation où les taux de pompages sont équilibrés ( $r_x = r_y$ ). Il en ressort que le bruit d'intensité décroît quand on diminue la saturation croisée (comme l'avait indiqué la Fig. 3.8(a)) sauf dans le cas particulier où les bruits de pompe sont totalement corrélés ( $\eta = 1$ ). Notons par ailleurs que plus on s'approche de bruits de pompes totalement corrélés et plus le gain de bruit est faible. Revenir sur les mécanismes de bruit symétrique et anti-symétrique est alors instructif. La domination du spectre de bruit aux basses fréquences par le mode anti-symétrique, constatée à la Fig. 3.7, permet de prédire d'une part l'augmentation du bruit d'intensité avec la constante de couplage  $C$  qui favorise ce mécanisme, d'autre part la diminution du bruit d'intensité quand on augmente la corrélation des bruits de pompe puisque cette dernière est toujours en phase  $\Psi = 0$ . En effet, avec des corrélations en phase pour le bruit de pompe, le mode de bruit anti-symétrique n'est pas excité par le bruit de pompe. En particulier, quand  $\eta = 1$  ce mode de bruit n'est plus du tout excité ce qui induit une diminution draconienne du RIN aux basses fréquences.

En conclusion, le bruit d'intensité relatif du VECSEL bifréquence peut être réduit (i) en diminuant la constante de couplage non-linéaire  $C$ , (ii) en équilibrant autant que possible les taux de pompage des deux modes et (iii) en visant des corrélations totales et en phase entre les bruits de pompe vus par les deux modes.

## 2.2 Réduction du bruit de phase du battement

Les performances des applications du chapitre 2 reposent en grande partie sur le bruit de phase du battement RF. Bien sûr des méthodes de stabilisation actives peuvent être implémentées et c'est d'ailleurs en partie l'objet du chapitre 5. Cependant, la bande passante de bruit s'étend bien au-delà de la centaine de kHz et même du MHz, comme on le constate sur les Fig. 3.5. Le spectre de bruit de phase s'étend donc bien au-delà de la bande passante d'une boucle à verrouillage de la phase optique, comme celle qui est utilisée dans la référence [83] pour un laser bifréquence à l'état solide. Il est donc important de comprendre l'influence des paramètres du laser sur le transfert de bruit provenant de la pompe et de dégager des stratégies sa réduction.

La Fig. 3.9 montre comment le bruit de phase du battement RF est réduit lorsqu'on diminue la constante de couplage  $C$  ou lorsqu'on augmente l'amplitude  $\eta$  des corrélations des bruits de pompe. On remarque sur la Fig. 3.9(a) que le bruit de phase subit une réduction particulièrement drastique lorsque  $\eta$  s'approche de 1. Les Fig. 3.9(b,c) démontrent que la réduction du bruit de phase obtenue en réduisant la compétition de modes n'est effective qu'au voisinage de la transition entre la contribution d'origine thermique et celle couplage de Henry. Il est clair que la façon la plus efficace de réduire le bruit de phase consiste à réaliser un pompage avec  $\eta = 1$ .

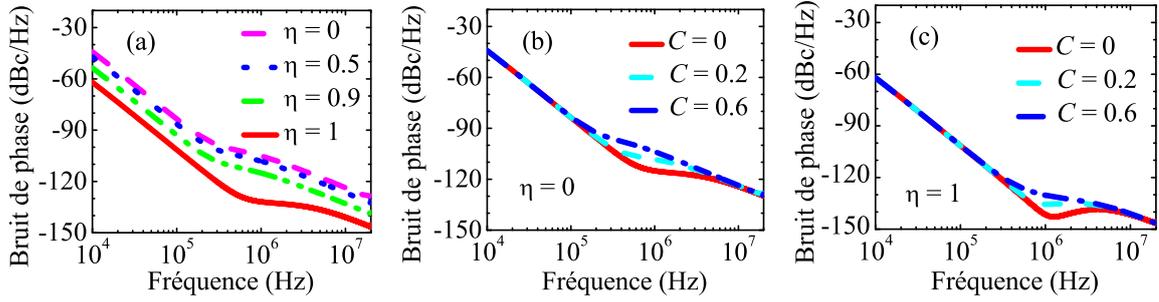


FIGURE 3.9 – Influence de l’amplitude  $\eta$  des corrélations de bruit de pompe et de la constante de couplage  $C$  sur le spectre de bruit de phase du battement RF. (a) Évolution du spectre de bruit de phase avec  $\eta$  pour la valeur de  $C = 0.44$ . (b,c) Évolution du spectre de bruit de phase avec  $C$  pour (b)  $\eta = 0$  et (c)  $\eta = 1$ . Les autres paramètres valent  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $\tau = 1$  ns,  $\Psi = 0$ ,  $r_x = 1.59$ ,  $r_y = 1.63$ ,  $\alpha = 5.2$ ,  $R_T = 40$  K.W<sup>-1</sup>,  $\tau_T = 45$  μs,  $\Gamma_T = 1.34 \times 10^{-7}$  K<sup>-1</sup>,  $P_{p,x} = 0.42$  W,  $P_{p,y} = 0.35$  W et  $RIN_p = -133$  dB/Hz.

Dans le cas où les corrélations des bruits de pompes sont significatives, la Fig. 3.10 montre comment le déséquilibre entre les taux de pompage dégrade le bruit de phase du battement RF. On voit sur la Fig.3.10(a) que, quand  $\eta = 1$ , l’équilibre entre les modes constitue

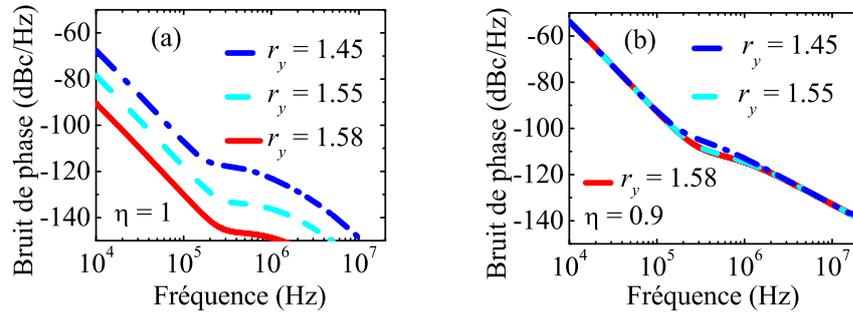


FIGURE 3.10 – Influence du déséquilibre entre les taux de pompage des deux modes sur le spectre de bruit de phase du battement RF. Le taux de pompage de la polarisation  $x$  est maintenu à  $r_x = 1.59$ . Évolution avec  $r_y$  pour (a)  $\eta = 1$  et (b)  $\eta = 0.9$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 3.9.

bien l’ultime limitation pour réduire le bruit de phase issu des fluctuations de pompe. Au contraire, quand on s’éloigne juste un peu de cette valeur de corrélations de pompe avec  $\eta = 0.9$ , le déséquilibre entre les taux de pompage des deux modes ne joue plus qu’un rôle marginal.

En définitive, la minimisation du bruit de phase du battement nécessite (i) de réduire la saturation croisée avec  $C$  et (ii) de rendre les bruits de pompe totalement corrélés en phase ( $\eta \rightarrow 1$ ). L’équilibre des taux de pompage n’est finalement pertinent que dans le cas où  $\eta$  est vraiment proche de 1.

### 2.3 Des critères *a priori* irréconciliables

Lorsque l'on rassemble les examens des critères de réduction des bruits d'intensité et bruit de phase du battement, on doit d'abord s'avouer heureux de constater une évolution avec les paramètres du laser  $C$ ,  $\eta$  et  $|r_x - r_y|$  allant dans le même sens. En y regardant de plus près, les fluctuations d'intensité donnant lieu à une contribution au bruit de phase par couplage à travers le facteur de Henry, il n'est pas étonnant que la stabilisation de l'un en agissant sur un paramètre stabilise également l'autre, au moins aux hautes fréquences ( $>100$  kHz).

Une façon immédiate de diminuer conjointement bruit d'intensité et bruit de phase consiste à trouver la source laser de pompe présentant le  $RIN_p$  le plus petit possible. Cette solution nous rend tributaire du développement commercial de telles sources à la longueur d'onde utile au pompage optique de la structure du VECSEL, qui diffère suivant l'application.

Comme on ne dispose pas forcément de lasers de pompe plus stables, la minimisation du transfert de bruit apporte une réelle solution. Mais comment s'y prendre expérimentalement pour réduire la saturation croisée, obtenir des taux de pompages des modes équilibrés et des corrélations des bruits de pompe totales et en phase ?

Équilibrer les taux de pompages, bien que présentant un intérêt marginal pour le bruit de phase, peut s'obtenir simplement par un alignement minutieux de la cavité laser en jouant sur l'inclinaison de l'étalon mais aussi sur le recouvrement entre la tache du faisceau de pompe et les régions de pompe correspondant à chaque mode. Diminuer la compétition de modes, c'est diminuer le recouvrement des régions de pompes des modes laser  $x$  et  $y$  (zone hachurée de la Fig. 3.1). On parvient à diminuer  $C$ , exponentiellement d'après la relation (1.41), en augmentant  $d$  la distance centre à centre pour un rayon du mode laser  $w_0$  fixé (c'est à dire une longueur de cavité fixée). Expérimentalement, ceci revient à introduire une séparation spatiale plus grande via le cristal biréfringent inséré dans la cavité. Prendre un cristal plus épais fait l'affaire mais ceci introduit plus de pertes dans la cavité, entraînant par la même occasion une dégradation du bruit d'intensité relatif. On peut aussi allonger la cavité pour diminuer  $w_0$  et diminuer ainsi  $C$  comme dans le présent chapitre. Attention toutefois à ne pas approcher trop la limite imposée par le rayon de courbure du coupleur externe qui rend instable le mode transverse de cavité  $TEM_{00}$  de notre laser. Enfin, les corrélations des bruits de pompe du laser viennent du fait que les régions de pompes des modes  $x$  et  $y$  n'interceptent pas de la même manière les grains de speckle contenus dans la tache de pompe sur le 1/2-VCSEL. Obtenir de très fortes corrélations, c'est donc permettre aux modes  $x$  et  $y$  d'intercepter les mêmes fluctuations et donc la même région de pompe. On doit superposer le plus possible les régions de pompe en diminuant  $d$  ou bien en augmentant  $w_0$ . Avoir des fluctuations de pompes totalement corrélées sur  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire s'approcher de  $\eta = 1$ , nécessite une complète superposition des régions de pompe. Procéder de la sorte est absolument incompatible avec la minimisation de  $C$ .

Les critères de minimisation de bruit par la diminution de  $C$  et l'augmentation de  $\eta$  paraissent irréconciliables avec un tel dispositif de pompage. Nous explorons au prochain chapitre des solutions pour dépasser cette situation paradoxale.

## CHAPITRE 4

# RÉDUCTION EXPÉRIMENTALE DU TRANSFERT DE BRUIT PAR POMPAGES BIEN CORRÉLÉS

Le chapitre précédent a mis en évidence des critères de réduction de bruit des VECSELS bifréquences se basant sur (i) des corrélations de bruit de pompe totales et en phase ( $\eta \rightarrow 1$ ,  $\Psi = 0$ ), (ii) la minimisation de la saturation croisée avec la constante de couplage  $C$ , (iii) l'équilibre des taux de pompage des deux modes. La réalisation simultanée des deux premiers points peut paraître paradoxale. En effet, cela suppose que les régions de pompage des modes interceptent les mêmes fluctuations provenant de la pompe mais en même temps que le recouvrement entre ces régions soit le plus petit possible.

Nous allons voir que des stratégies expérimentales différentes doivent être adoptées pour le VECSEL à la longueur d'onde télécom et le VECSEL pour les horloges CPT à base de césium. Les propriétés du laser de pompe ou bien l'architecture de pompage seront des points clés de notre investigation.

## 1 Génération optique d'un signal RF ultra-bas bruit à la longueur d'onde télécom

Dans cette partie, nous dirigeons nos efforts vers la minimisation expérimentale du transfert du bruit provenant de la pompe au VECSEL bifréquence à  $1.5 \mu\text{m}$ . Nous allons aborder la solution retenue pour obtenir des propriétés de pompage allant dans ce sens puis l'analyse des niveaux de bruit obtenus.

## 1.1 Pompage optique sans speckle

Comme mis en lumière initialement dans la référence [20] et appuyé dans les développements théoriques précédents, le bruit du VECSEL bifréquence ne dépend pas uniquement du niveau de bruit d'intensité du laser de pompe mais également des corrélations en phase des fluctuations de pompe interceptées par les deux régions de pompe sur la structure semi-conductrice, spatialement séparées à cause du cristal biréfringent. L'utilisation d'une diode de pompe fibrée multimode est responsable de la présence d'une figure de speckle sur le 1/2-VCSEL. En effet, la fibre propage de nombreux modes spatiaux transverses qui, une fois imagés sur la structure, donnent la distribution aléatoire de lumière constatée. C'est bien à cause de cette figure de speckle que les régions de pompe des modes lasers voient des fluctuations de pompe différentes, il est donc naturel de se diriger vers la propagation d'un seul mode spatial dans la fibre. Un mode spatial unique possèdera un maximum de cohérence dans le plan transverse qui s'étend sur la structure.

L'utilisation d'un laser de pompe fibré monomode est retenue mais présente un inconvénient majeur. La faible ouverture numérique des fibres monomodes ne permet pas à une diode laser fibrée monomode de délivrer autant de puissance qu'une diode laser fibrée multimode. L'inversion de population de notre structure à émission à  $1.5 \mu\text{m}$  par la surface se fait par pompage aux longueurs d'onde voisines de  $1 \mu\text{m}$ . Or la technologie des lasers à semiconducteurs à  $980 \text{ nm}$  est mature grâce à ses applications télécoms civiles ou militaires. Ceci va nous offrir des solutions. Des diodes lasers à  $976 \text{ nm}$  fibrées avec des fibres monomodes à maintien de polarisation (FMP) permettant jusqu'à  $950 \text{ mW}$  d'émission sont ainsi commercialement disponibles. Ces lasers à semiconducteurs sont usuellement utilisés pour pomper les amplificateurs à fibre dopée en erbium (EDFA). Les EDFA sont constitués d'une vingtaine de mètres de fibre monomode, dont le cœur est dopé à l'erbium. Dans les liaisons télécoms de longueur conséquente, telles que les liaisons sous-marines, ces EDFA sont disposés tous les  $150$  à  $200 \text{ km}$  pour compenser les pertes de propagation.

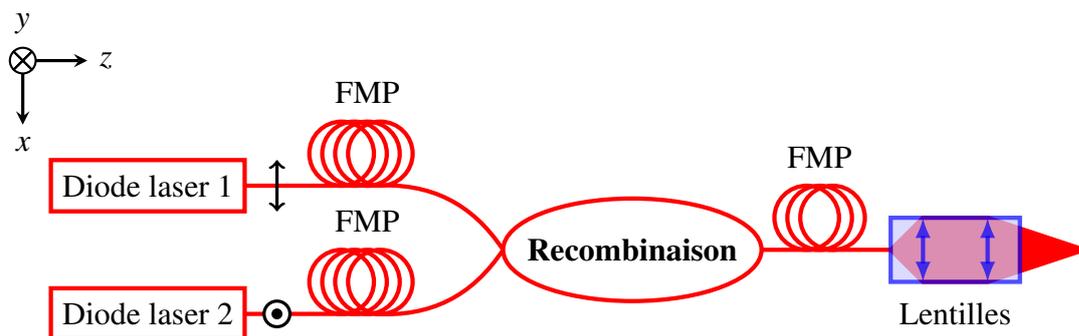


FIGURE 4.1 – Dispositif de recombinaison en polarisation des faisceaux de diodes lasers fibrées avec des fibres à maintien de polarisation (FMP).

Bien que délivrant près d'un Watt de puissance optique, les diodes lasers fibrées FMP permettent à peine d'atteindre le seuil laser en régime bifréquence. Les pertes induites à l'insertion du cristal biréfringent sont importantes à l'échelle du faible gain obtenu avec

les structures 1/2-VCSEL à 1.5  $\mu\text{m}$ . D'une part, il est extrêmement compliqué de réaliser l'alignement en travaillant si proche du seuil laser, d'autre part les propriétés de bruit du laser sont exacerbées au voisinage du seuil, ce qui va à l'encontre de nos motivations. Une stratégie ultime consiste alors à recombinaison les puissances de deux diodes lasers à 980 nm fibrées FMP dans une troisième fibre monomode, encore à maintien de polarisation. En fait, l'utilité de la fibre à maintien de polarisation s'illustre à ce moment précis. La recombinaison de faisceaux issus de fibres monomodes induit plus de 3 dB de pertes, ce qui ici n'a plus aucune utilité. Pour que les puissances des deux faisceaux puissent se sommer sans interférer aléatoirement après propagation dans la troisième fibre, il faut qu'elles soient issues de polarisations orthogonales et que ces polarisations soient maintenues. On utilise donc le dispositif présenté à la Fig. 4.1. Après collimation et focalisation en espace libre, 1.8 W de puissance de pompe peuvent être fournis au 1/2-VCSEL. La structure du 1/2-VCSEL émettant autour de 1.5  $\mu\text{m}$  que nous utilisons a été décrite en détails au chapitre 1. La cavité laser plan-concave fait 49.0 mm, le miroir de sortie a une transmission de 0.6% et le rayon du mode laser sur la structure vaut 59  $\mu\text{m}$ . Le cristal biréfringent en YVO<sub>4</sub> est de 0.5 mm d'épaisseur et crée une séparation spatiale entre les régions de pompe des modes  $x$  et  $y$  valant  $d = 50 \mu\text{m}$ .

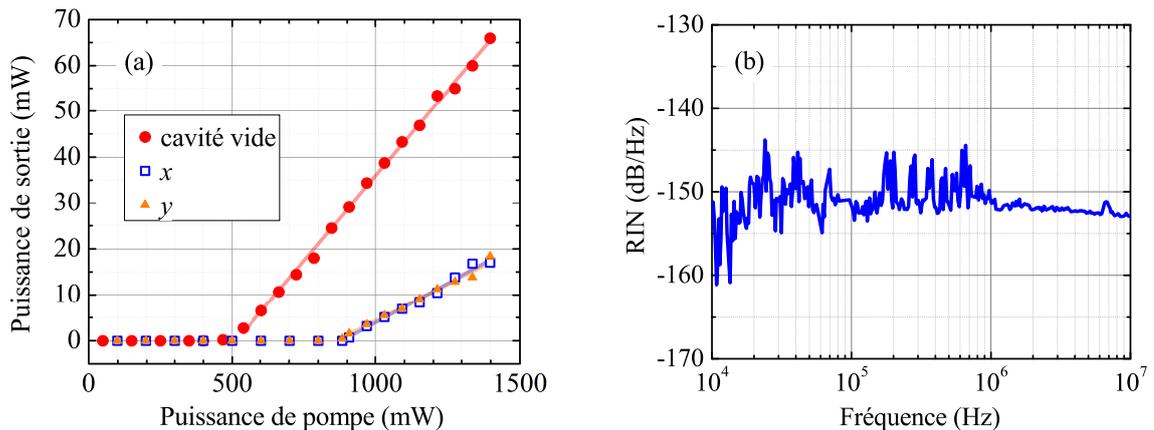


FIGURE 4.2 – Caractéristiques de pompage du VECSEL à 1.5  $\mu\text{m}$ . (a) Puissance de sortie du VECSEL en fonction de la puissance lumineuse de pompe incidente. Les symboles proviennent de mesures en cavité vide (points rouges) ou en fonctionnement bifréquence (carrés bleus et triangles oranges). Les traits pleins modélisent le comportement affine en régime laser. (b) Spectre de bruit d'intensité relatif du dispositif de pompage présenté à la Fig. 4.1.

Les caractéristiques du VECSEL en cavité vide ainsi qu'en fonctionnement bifréquence sont données à la Fig. 4.2(a). Avec un étalon YAG de 100  $\mu\text{m}$  d'épaisseur pour sélectionner les modes longitudinaux, nous arrivons à un fonctionnement bifréquence avec jusqu'à 17 mW sur chaque polarisation pour 1.4 W de puissance de pompe optique lorsqu'en cavité vide 65 mW sont obtenus. Notons que, bien que cela soit suffisant pour certaines applications, il serait possible d'obtenir une puissance de sortie plus élevée en réduisant le

coefficient de réflexion de la puce à la longueur d'onde de la pompe ou en utilisant une architecture permettant une meilleure gestion des effets thermiques, comme par exemple l'architecture de la puce introduite dans la référence [84] et incorporant des couches dissipatrices. Les pentes des régressions linéaires de la Fig. 4.2(a) correspondent aux rapports du rendement quantique externe du VECSEL à 1.5  $\mu\text{m}$  sur le rendement de conversion des photons de pompe à 980 nm en porteurs de charge. Elles sont respectivement de 7.4% pour la cavité vide (courbe rouge) contre 3.4% et 3.2% pour les modes  $x$  et  $y$  (courbes bleu et orange). La somme des 3.4% et 3.2% en fonctionnement bifréquence est inférieure aux 7.4%. Cela s'explique par une perte de rendement optique à l'introduction de pertes dans la cavité. Comme le coefficient de réflexion du coupleur de sortie est très élevé, le rapport entre les pertes en cavité vide et les pertes avec l'étalon et le cristal biréfringent est de  $7.4/6.6=1.12$ . Les pertes ont donc augmenté de 12%, ce qui justifie la nécessité d'une puissance de pompe conséquente.

La Fig. 4.2(b) reproduit le spectre du RIN de la pompe réalisée par combinaison des deux diodes lasers. On constate que ce spectre est celui d'un bruit blanc et peut être modélisé comme une constante  $\text{RIN}_p(f) = -152 \text{ dB/Hz}$  sur toute la bande passante d'étude. Ce niveau de bruit est de plus extrêmement bas<sup>1</sup>, ce qui est avantageux pour les niveaux de bruit du VECSEL, que nous allons désormais évaluer.

## 1.2 Réduction drastique de bruit du signal RF

Les mesures des bruits d'intensité et bruit de phase du battement sont réalisées à l'aide du dispositif de la Fig. 3.2 présenté au chapitre précédent. Nous supposons que les processus de bruit sont stationnaires sur la bande passante adaptée à nos mesures, c'est-à-dire de 10 kHz à 10 MHz. Les spectres de bruit d'intensité des deux polarisations sont affichés à la Fig. 4.3. Les niveaux de RIN se situent, pour les deux modes, sous les -140 dB/Hz, ce qui atteste d'une réduction significative du bruit d'intensité par rapport au VECSEL bifréquence pompé avec une diode laser fibrée multimode. En effet, les RINs correspondant, adaptés de la référence [19] et montrés à la Fig. 1.13, se trouvent plutôt entre -120 et -130 dB/Hz.

On constate de plus un bon accord de la modélisation (traits pleins) et de ces mesures (symboles). Ces spectres théoriques sont obtenus avec des temps de vie des photons dans la cavité légèrement différents pour les deux modes  $\tau_x = 15 \text{ ns}$  et  $\tau_y = 20 \text{ ns}$ . Ceci vient du fait que les deux modes ne subissent pas les mêmes pertes à cause de l'étalon incliné et du cristal biréfringent dans la cavité. En revanche, il est possible expérimentalement d'aboutir à des puissances de sortie équilibrées en  $x$  et en  $y$ , ce que l'on traduit par un même nombre de photons dans la cavité en régime permanent  $F_{0x} = F_{0y} = 5.2 \times 10^9$ . La tache de pompe a donc été alignée de façon à ce que la différence de pompage compense la différence de pertes entre les deux modes. Un même taux de pompage  $r_x = r_y = 1.57$  est alors adopté.

1. Comparé aux -133 dB/Hz de la diode laser à 673 nm du VECSEL émettant à 852 nm.

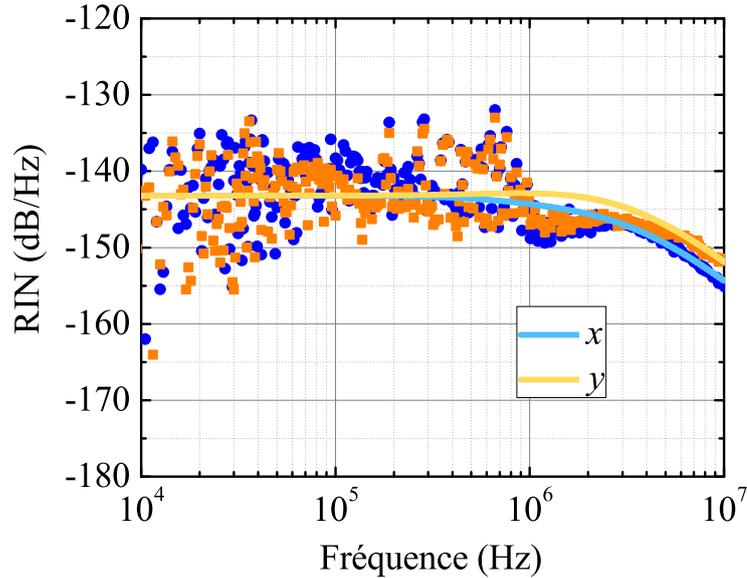


FIGURE 4.3 – Spectre de bruit d'intensité relatif des deux modes émis par le VECSEL à  $1.5 \mu\text{m}$ . Les symboles viennent des mesures et les traits pleins de la modélisation. Les paramètres utilisés sont  $r_x = r_y = 1.57$ ,  $\tau_x = 20 \text{ ns}$ ,  $\tau_y = 15 \text{ ns}$ ,  $\text{RIN}_p = -152 \text{ dB/Hz}$ ,  $C = 0.39$ ,  $\eta = 1$  et  $\Psi = 0$ .

Cela permet d'évaluer la constante de couplage non-linéaire  $C$  due au recouvrement partiel des régions de pompe des deux modes à 0.39. Cette valeur intermédiaire de  $C$  ne va pas dans le sens des critères retenus pour la minimisation du transfert de bruit. Cependant, le changement radical induit par l'utilisation de fibres monomodes (voir Fig.4.1) provient de l'absence de figure de speckle dans la tache pompant la structure. Cette absence de speckle signifie que les fluctuations de pompe ne sont plus aléatoirement distribuées sur la structure et par conséquent les corrélations entre les bruits vus par les deux modes laser sont totales et en phase ( $\eta = 1$ ,  $\Psi = 0$ ). L'accord avec les mesures corrobore cette valeur de  $\eta = 1$  désignée comme très avantageuse pour la minimisation du bruit au chapitre précédent et qui augure également de bonnes propriétés en terme de bruit de phase.

La Fig. 4.4(a) reproduit le spectre du battement RF obtenu à l'analyseur de spectre électrique avec cette pompe fibrée monomode (courbe rouge). Par rapport au pompage utilisant une diode fibrée multimode (courbe bleue), on observe une réduction spectaculaire des bandes latérales de bruit. Cette réduction est mesurée grâce aux spectres de bruit de phase du battement présentés à la Fig. 4.4(b). Il s'agit de plus de 20 dB de réduction du bruit de phase de 10 kHz jusqu'à plusieurs MHz. La diode laser de la pompe fibrée multimode avait un niveau de RIN plutôt bas et comparable à celui de la présente pompe (-145 dB/Hz). La réduction drastique du bruit de phase est en fait imputée à l'augmentation des corrélations de pompe. On passe en effet de corrélations médiocres  $\eta = 0.6$  dans la situation des mesures en bleu avec la diode fibrée multimode à des corrélations totales  $\eta = 1$  dans la situation des nouvelles mesures en rouge. On remarque de plus que la bande passante de bruit de phase du battement encore mesurable, avec un plancher à -130 dB/Hz, est passée

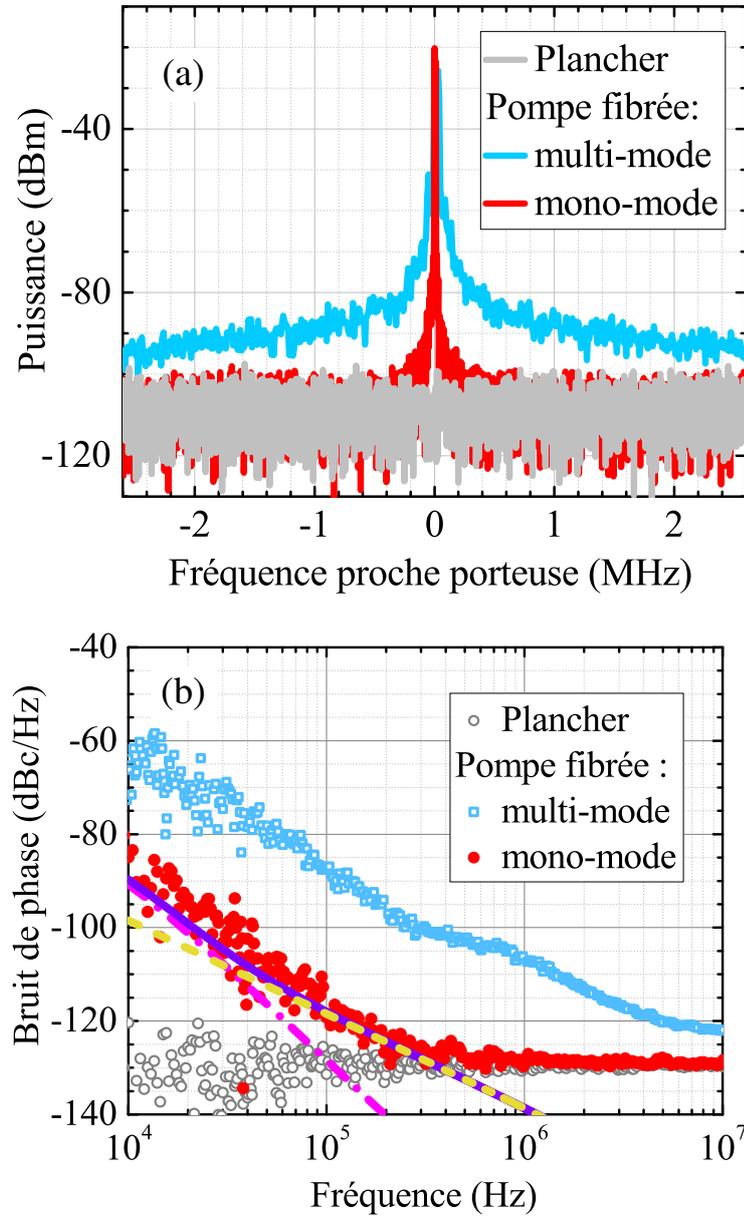


FIGURE 4.4 – Minimisation du bruit du battement RF à l’aide du dispositif de pompage fibré monomode. (a) Spectres du battement obtenus à l’analyseur de spectre électrique. Les spectres sont décalés de manière à ce que le 0 corresponde à leur porteuse RF. La bande passante de résolution est de 3 kHz et la bande passante vidéo est de 3 kHz. (b) Spectre du bruit de phase du battement. Les symboles proviennent des mesures et les traits pleins des modélisations. La contribution du bruit thermique est en pointillés magentas, celle de la largeur Schawlow-Townes en tirets jaunes et la somme des deux en courbe continue violette. Les paramètres utilisés, en plus de ceux de la Fig. 4.3, sont  $F_{0,x} = F_{0,y} = 5.2 \times 10^9$ ,  $R_T = 24 \text{ K/W}$ ,  $\Gamma_T = 2.0 \times 10^{-8} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_{P,x} = 0.5 \text{ W}$ ,  $P_{P,y} = 0.67 \text{ W}$ ,  $\tau_T = 23 \mu\text{s}$  et  $\alpha = 7$ .

de 10 MHz à moins de 200 kHz. Ce résultat est particulièrement pertinent puisque le résidu de bruit est maintenant contenu dans la bande passante d'une boucle à verrouillage de la phase optique, qui permettrait de parachever sa réduction. Ce type d'asservissement est l'objet du travail effectué dans la référence [83] pour un laser bifréquence à état solide et sera également l'objet de nos investigations au chapitre 5.

### 1.3 Limitation due à la largeur Schawlow-Townes

La comparaison du bruit de phase mesuré et des prédictions théoriques permet d'affirmer que la contribution du bruit d'intensité via le couplage phase/amplitude n'est pas mesuré, ce qui n'est pas étonnant étant donné le faible niveau de RIN reporté à la Fig. 4.3. En effet, le bruit de phase passe sous le plancher de mesures après 200 kHz qui correspond également à la fréquence de transition à partir de laquelle le mécanisme de bruit associé au couplage phase/amplitude domine. On peut par exemple constater cette transition par la rupture de pente du bruit de phase correspondant au VECSEL pompé avec une diode fibrée multimode. Avec des corrélations parfaites pour les bruits d'intensité de pompage des modes lasers, il est alors possible de simplifier l'écriture de la densité spectrale de bruit de phase donnée par l'expression (1.60) du modèle développé au chapitre 1 :

$$\left| \widetilde{\delta\phi}_{H+T}(f) \right|^2 = \left| Q_x(f) + Q_y(f) \right|^2 \cdot \text{RIN}_p(f) \simeq \left( \frac{\omega_l \Gamma_T R_T}{2\pi f} \right)^2 \frac{(P_{p,x} - P_{p,y})^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_T^2} \cdot \text{RIN}_p(f). \quad (4.1)$$

On évalue le temps de réponse thermique  $\tau_T$  à 23  $\mu\text{s}$  à partir du rayon de la tache de pompe sur la structure  $w_p = 75 \mu\text{m}$  et du coefficient de diffusion thermique  $D_T = 3.7 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . L'équation (4.1) met ainsi en évidence que le bruit de phase qui reste présent dans le mécanisme de bruit thermique est attribué au déséquilibre entre les puissances de pompe vues par les deux modes du laser. Les pointillés magentas sur le spectre 4.4(b) proviennent du modèle et s'accordent en partie avec les mesures du bruit de phase sous 50 kHz. On pourrait tenter de diminuer davantage cette contribution en équilibrant les puissances de pompe via l'alignement méticuleux de la pompe. Cependant, comme on peut le voir sur les tirets jaunes, le niveau de bruit est désormais proche de celui imposé par la largeur Schawlow-Townes de l'émission spontanée dans les deux modes lasers. Son évaluation repose sur l'expression (1.31) du chapitre 1. On considère en fait que les émissions spontanées des deux modes lasers s'ajoutent en traitant la situation comme étant celle de deux lasers indépendants, en première approximation. On a alors une densité spectrale de puissance de bruit Schawlow-Townes  $\mathcal{S}_\phi^{\text{ST}}(f) = \mathcal{S}_{\phi,x}^{\text{ST}}(f) + \mathcal{S}_{\phi,y}^{\text{ST}}(f)$  (en  $\text{rad}^2/\text{Hz}$ ) où chaque polarisation  $i = (x, y)$  contribue selon l'expression :

$$\mathcal{S}_{\phi,i}^{\text{ST}}(f) = \frac{1}{8\pi^2 f^2 F_{0i} \tau_i} \left[ 1 + \alpha^2 \frac{(r_i - 1)(r_i - 1 + 4\pi^2 f^2 r_i \tau_i^2)}{(r_i - 1 - 4\pi^2 f^2 \tau_i)^2 + 4\pi^2 f^2 r_i^2 \tau_i^2} \right]. \quad (4.2)$$

Enfin, l'addition des densités spectrales de puissance du bruit thermique et du bruit d'émission spontanée (courbe violette) montre un bon accord avec les mesures. Cet accord justifie de façon heuristique le traitement du bruit d'émission spontanée des deux modes comme provenant de deux lasers indépendants.

## **2 Réduction du bruit par pompage multimode bien corrélé en phase**

Grâce à un pompage monomode, nous avons mis en évidence une réduction conséquente du bruit d'un VECSEL bifréquence à 1.5  $\mu\text{m}$ . Cette réduction est en accord avec les stratégies du chapitre 3 puisqu'elle se fonde sur des corrélations totales des fluctuations de pompe ( $\eta = 1$ ). Une nouvelle limite à dépasser s'est manifestée puisque nous avons montré que le niveau de bruit de phase obtenu était proche du bruit d'émission spontanée. Cependant, il faut se rappeler qu'un pompage monomode dont la puissance excède bien le seuil laser n'a été rendu possible qu'après combinaison en polarisation de deux diodes fibrées avec des fibres à maintien de la polarisation. À notre connaissance, il n'existe commercialement aucun laser fibré monomode aux longueurs d'onde situées aux alentours de 670 nm qui puisse pomper le VECSEL bifréquence à 852 nm au-delà de son seuil. Il n'y a pas plus de solution pour recombinaison dans une fibre monomode de tels lasers de pompe et obtenir suffisamment de puissance comme dans l'application précédente.

Pour le VECSEL bifréquence à 852 nm, il faut donc jouer une autre partition en se reposant sur une diode laser fibrée multimode. Nous allons proposer une nouvelle architecture de pompage permettant au mieux de satisfaire aux critères de réduction avant d'analyser le niveau de bruit obtenu en pratique.

### **2.1 Architecture de pompage bien corrélé en phase**

L'architecture de pompage du VECSEL bifréquence à 852 nm étudié au chapitre 3 doit être modifiée afin d'avoir simultanément peu de saturation croisée et de bonnes corrélations des bruits de pompe des deux modes lasers. L'idée retenue est un pompage à deux faisceaux. Ce pompage consiste à alimenter chaque mode avec son propre faisceau de pompe de taille ajustée à la taille du mode. Une séparation spatiale  $d$  supérieure aux diamètres des modes sur la structure permet alors de minimiser le recouvrement de ces derniers et donc de minimiser la constante de couplage non-linéaire  $C$ . Prendre les deux faisceaux de pompes différentes conduirait alors à des fluctuations de pompage des modes complètement décorréliées ( $\eta = 0$ ). Or, le critère de réduction retenu va tout à fait à l'opposé car il nécessite de bonnes corrélations de pompe. Toute l'astuce consiste alors à utiliser deux copies de la même pompe, contenant par conséquent les mêmes fluctuations.

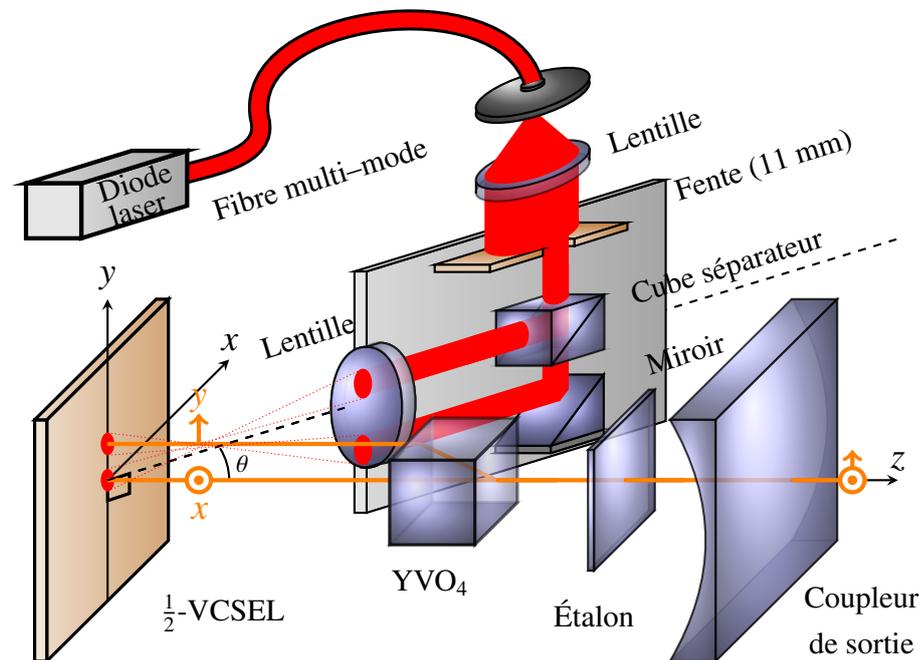


FIGURE 4.5 – Architecture de pompage bien corrélé en phase. Les deux modes lasers sont pompés séparément sur la structure à l'aide d'un dispositif de division d'amplitude générant deux copies identiques du même faisceau de pompe. Ce faisceau est issu d'une diode laser fibrée multimode.

Notre proposition d'architecture de la pompe à 670 nm permettant de concilier l'ensemble des critères de réduction de bruit consiste alors à imaginer deux copies du même laser sur les régions de pompe des modes lasers spatialement bien séparés, comme schématisé à la Fig. 4.5. La source lumineuse de pompe est la même diode laser fibrée multi-mode que précédemment. La fibre possède un diamètre de cœur de  $102\ \mu\text{m}$  et une ouverture numérique de 0.22. Après collimation de son faisceau de sortie à l'aide d'une lentille, une division d'amplitude est réalisée par un cube séparateur. Les deux exemplaires de la même pompe ainsi produits sont imagés sur la structure grâce à une lentille de focalisation. Un miroir inclinable permet alors d'ajuster avec précision la distance entre les deux taches de pompe afin de les faire coïncider avec les régions de pompe des modes lasers. Enfin, une fente est utilisée pour agir sur le diamètre du faisceau de pompe. Ce réglage grossier aboutit à une perte d'intensité lumineuse et il est évident qu'il serait préférable de remplacer la lentille de collimation par une lentille de plus faible focale. La puissance délivrée par la diode fibrée multimode étant largement suffisante, nous garderons le dispositif tel quel.

Une séparation  $d = 100\ \mu\text{m}$  centre à centre entre les deux modes est obtenue avec un cristal biréfringent en  $\text{YVO}_4$  de 1 mm d'épaisseur. Nous ajustons alors la taille de la cavité à 46.8 mm pour obtenir des modes lasers qui ne se recouvrent pas du tout. En envoyant avec une incidence  $\theta = 40^\circ$  les faisceaux de pompe sur la structure, deux taches lumineuses elliptiques de dimension  $100\ \mu\text{m} \times 70\ \mu\text{m}$  approximativement viennent pomper les

modes pour aboutir à une oscillation bifréquence. Dans la direction de séparation spatiale des deux modes (notée  $y$  sur la Fig. 4.5), les  $70\ \mu\text{m}$  de diamètre des régions de pompe sont plus faibles que la séparation de  $100\ \mu\text{m}$  entre les modes, ce qui assure une bonne minimisation du recouvrement et donc de la saturation croisée. On trouve en effet une valeur de la constante de couplage non-linéaire très faible :  $C = 0.05$ . L'ajustement fin à l'aide du miroir inclinable dans l'architecture de pompage à deux faisceaux est un précieux atout pour l'alignement du laser. On peut voir directement la transition d'un fonctionnement monomode du VECSEL à un fonctionnement bifréquence en partant d'une situation où les deux taches pompent le même mode pour aboutir à une séparation entre les taches ajustée au mieux à la distance  $d$ .

Les caractéristiques de bruit du double faisceau de pompe de cette architecture sont reproduites sur la Fig. 4.6. D'une part, on observe sur la Fig. 4.6(a) que le bruit d'intensité relatif de la pompe peut, une fois de plus, être considéré en première approximation comme constant sur notre bande passante de détection allant de  $10\ \text{kHz}$  à  $20\ \text{MHz}$ . D'autre part, la prise de données simultanée des fluctuations des deux faisceaux (celui destiné au pompage du mode  $x$  et celui destiné au mode  $y$ ) met en évidence des spectres quasi-identiques (courbes noire et cyan). La Fig. 4.6(b) précise la nature des corrélations de bruit d'intensité des deux faisceaux de pompe. On mesure en effet des spectres de corrélations très élevées et en phase  $\Psi = 0$  des bruits de pompe. On note une valeur de corrélations très proche de  $100\%$  sur une bande passante de  $500\ \text{kHz}$ , puis un plateau aux alentours de  $95\%$  au-delà du MHz. On opte pour une valeur constante  $\eta(f) = 0.98$  pour la modélisation.

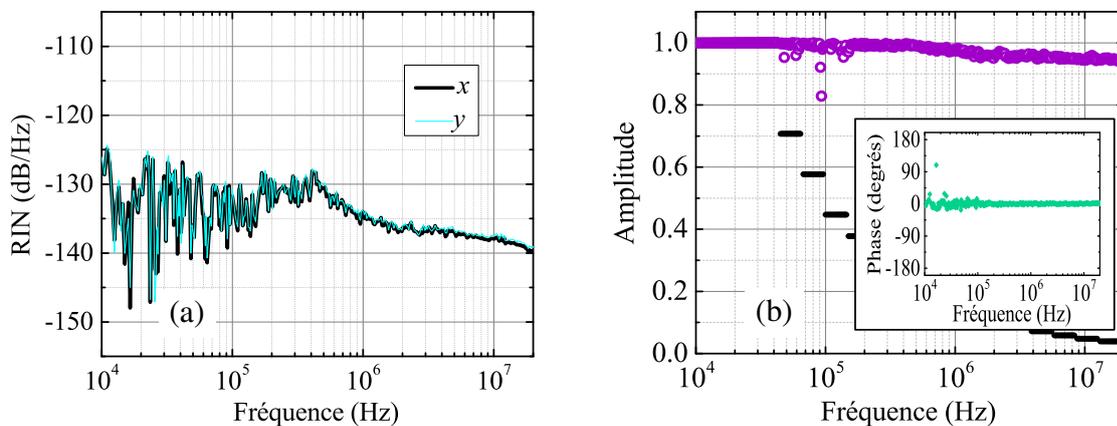


FIGURE 4.6 – Mesures du bruit de la pompe. (a) Spectre du bruit d'intensité de la pompe pour faisceau alimentant le mode laser  $x$  (courbe noire) et le faisceau alimentant le mode  $y$  (courbe cyan). (b) Spectre des corrélations des bruits de pompe des deux modes. L'amplitude des corrélations est montrée en cercles violets alors que le spectre de la phase se situe dans la capsule en losanges verts.

En définitive, nous avons établi qu'une architecture de pompage à deux faisceaux issus d'une division d'amplitude permettait d'obtenir à la fois une très faible saturation croisée et

de très fortes corrélations en phase des bruits de pompe. Le couple de paramètres du VECSEL bifréquence à 852 nm que nous obtenons dans cette configuration ( $C = 0.05$ ,  $\eta = 0.98$ ) est radicalement différent des couples ( $C = 0.44$ ,  $\eta = 0.45$ ) et ( $C = 0.15$ ,  $\eta = 0.10$ ) obtenus au chapitre 3, dans la configuration exploitant un seul faisceau de pompe. Contrairement au pompage monomode, l'amplitude des corrélations de bruit de pompe n'est cependant pas strictement  $\eta = 1$  à toutes les fréquences de Fourier. Nous ne sommes pas dans la situation particulièrement avantageuse identifiée à la partie 2 du chapitre 3 et étudiée en première partie du présent chapitre. Comme la saturation croisée est également très faible, on s'attend tout de même à de bonnes propriétés de bruit du VECSEL bifréquence.

## 2.2 Analyse du bruit d'intensité

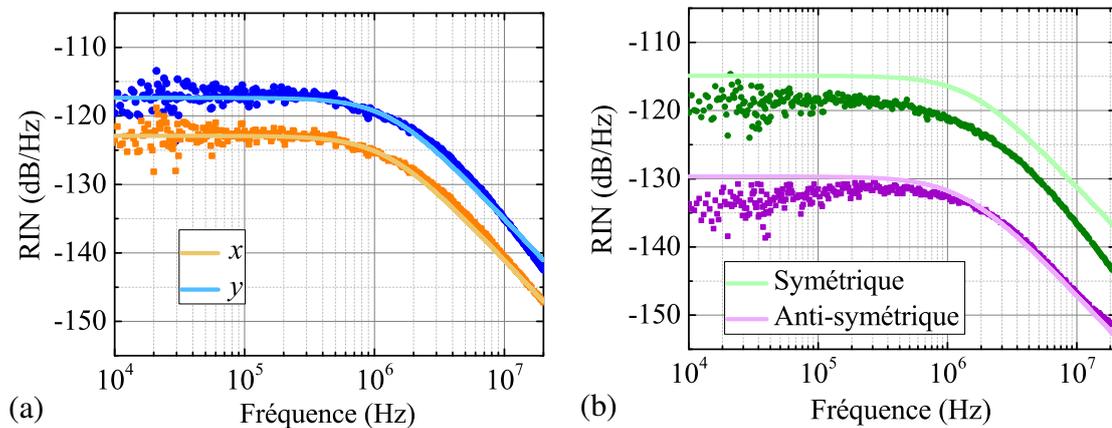


FIGURE 4.7 – Spectres de bruit d'intensité relatif du VECSEL bifréquence à 852 nm avec un pompage à deux faisceaux. (a) Bruits des modes  $x$  et  $y$  (en orange et bleu, respectivement). (b) Bruits des modes symétrique et anti-symétrique (en vert et violet, respectivement). Les symboles correspondent aux mesures et les traits pleins aux modélisations. Les paramètres utilisés sont  $\tau = 1$  ns,  $\Psi = 0$ ,  $\eta = 0.98$ ,  $r_x = 1.38$ ,  $r_y = 1.23$ ,  $C = 0.05$ ,  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\tau_x = 30$  ns et  $\tau_y = 17$  ns.

En suivant le dispositif de mesures de la Fig. 3.2, nous envoyons le faisceau du VECSEL bifréquence sur un système formé d'une lame demi-onde et d'un cube à séparation de polarisations qui nous permet d'isoler les modes  $x$  et  $y$ . Les bruits d'intensité relatifs des deux modes sont présentés à la Fig. 4.7(a). Les niveaux de bruit se situent aux basses fréquences entre -117 dB/Hz et -123 dB/Hz, ce qui est légèrement meilleur que ce que l'on a mesuré précédemment et rapporté aux Figs. 3.4(a) et (b) du chapitre 3. Si l'amélioration du bruit d'intensité n'est pas si importante, c'est en fait que, dans le cas présent, on note à la fois un déséquilibre significatif entre les taux de pompage des deux modes et des valeurs des taux de pompage assez faibles. L'analyse des modes de bruit symétrique et anti-symétrique permet bien plus de mettre en lumière l'impact de la nouvelle architecture de pompage bien corrélé. En effet, comme illustré à la Fig. 4.7(b), le niveau de bruit du mode anti-symétrique

est désormais très faible (sous les  $-130$  dB/Hz) et l'ensemble du spectre est dominé par le mode de bruit symétrique. Ceci corrobore l'absence d'une saturation croisée significative puisque cette dernière, comme on l'a vu au chapitre 3, exacerbe le mécanisme de bruit anti-symétrique. L'analyse des corrélations entre les bruits des modes  $x$  et  $y$  est réalisée à la Fig. 4.8. L'examen des corrélations montre une amplitude très élevée (Fig. 4.8(a)) supé-

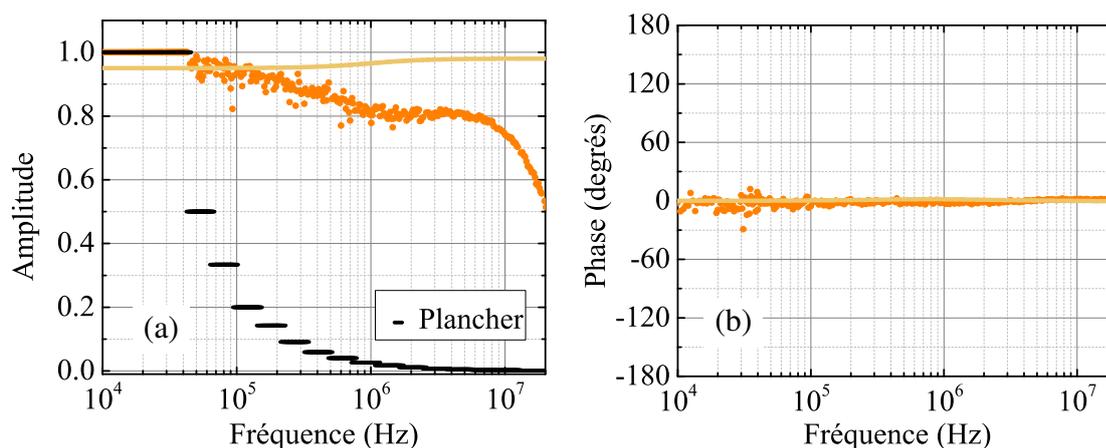


FIGURE 4.8 – Spectres de l'amplitude (a) et de la phase (b) des corrélations du bruit d'intensité entre les modes  $x$  et  $y$ . Les symboles correspondent aux mesures et les traits pleins aux modélisations. Les paramètres utilisés sont identiques à ceux de la Fig. 4.7.

rieure à 80% sur plusieurs MHz et une phase toujours nulle (Fig. 4.8(b)). La décroissance de l'amplitude des corrélations après 8 MHz doit plutôt être attribuée à une limite de détection car, à ces fréquences, le spectre de RIN est très proche de la valeur du bruit de grenaille. On a donc des fluctuations sur les modes du VECSEL bifréquences qui sont très corrélées et en phase. Ceci est à mettre en parallèle avec la domination du mécanisme de bruit symétrique.

### 2.3 Réduction du bruit de phase

Le battement RF généré à partir des deux composantes du VECSEL bifréquence à 852 nm sert à exciter la transition entre les deux niveaux hyperfins du césium dans l'application à l'horloge CPT. Ses propriétés de bruit sont donc très importantes. Nous comparons à la Fig. 4.9(a) les mesures de battement à l'analyseur de spectre électrique obtenues avec l'architecture de pompage à deux faisceaux et celles réalisées précédemment à la Fig. 3.3(a). Nous constatons que le pompage à deux faisceaux bien corrélés induit un battement avec des bandes latérales de bruit bien moindre. Les densités spectrales de bruit de phase de la Fig. 4.9(b) attestent en effet d'une réduction drastique du niveau de bruit grâce à la nouvelle architecture de pompe. Entre 10 dB et 20 dB de réduction du bruit de phase découle de ce pompage qui permet une faible compétition de mode ( $C = 0.05$ ) et de fortes corrélations

des bruits de pompe ( $\eta = 0.98$ ). Le spectre du bruit de phase obtenu passe sous le seuil de détection à partir de 2 MHz. Le modèle permet de plus de se rendre compte que la contribution du couplage phase/amplitude (tirets verts) est quasiment passée intégralement sous le seuil de détection. Il s'ensuit que le bruit de phase restant est à attribuer aux fluctuations thermiques (pointillés magentas) et autres bruits techniques.

À partir du modèle, nous réalisons que le déséquilibre de pompage ( $P_{P,x} \neq P_{P,y}$ ) influe moins sur le niveau de bruit de phase que le fait de ne pas avoir des corrélations des bruits de pompe tout à fait totales ( $\eta \neq 1$ ). Cette architecture de pompe est donc certes très avantageuse dans le cas présent et permet une réduction significative du niveau de bruit, mais le pompage à l'aide d'un laser fibré monomode, tel que celui réalisé à la section 1, conserve toute sa pertinence. Notons néanmoins que l'utilisation d'un faisceau de pompe pour chaque mode permet une meilleure gestion de la puissance de pompe. En effet, davantage de photons de la pompe sont impliqués dans l'inversion de population avec cette architecture par rapport à l'utilisation d'une seule tache de pompe qui fatalement dilue sa puissance sur une surface plus large. Ceci suppose que la mise en œuvre de la division d'amplitude n'introduise pas trop de pertes.

En dernier lieu, l'écart entre la modélisation et les mesures atteint quasiment 10 dB à 10 kHz. Le modèle de bruit de phase thermique affiche en fait une pente trop importante sur la décade allant de 10 kHz à 100 kHz. En effet, le modèle évolue en  $f^{-4}$  sur cette plage de fréquences alors que les mesures semblent plutôt évoluer en  $f^{-3}$ . L'approche simple utilisée pour bâtir le modèle du bruit thermique, ainsi que nous l'avons décrit au chapitre 1, est peut-être limitée par son caractère macroscopique. Les détails microscopiques de la structure semi-conductrice sont omis et il serait intéressant d'adopter par exemple une méthode de calcul semi-analytique comme dans la référence [85], pour comprendre leur influence et les prendre en compte dans la modélisation. Le désaccord entre le modèle thermique et l'expérience est le point de départ des investigations autour des effets thermo-optiques qui seront rapportées au chapitre 6.

Pour résumer, nous avons maintenant prouvé que de très bonnes corrélations en phase des bruits de pompe permettent de réduire très efficacement le bruit d'un VECSEL bifréquence. Cela a nécessité de revoir l'architecture de pompe en optant pour un laser de pompe fibré monomode ou encore pour une architecture utilisant deux copies de la même pompe fibrée multimode. Dans cette seconde solution, qui est la seule disponible pour le VECSEL à 852 nm, la saturation croisée peut aussi être minimisée. Désormais, l'essentiel du bruit de phase mesuré se retrouve compris dans la bande passante d'une boucle à verrouillage de la phase optique. La mise en place d'un tel asservissement ainsi que d'une stabilisation de l'intensité s'inscrit alors dans la continuité des résultats de minimisation de bruit que nous avons obtenus.

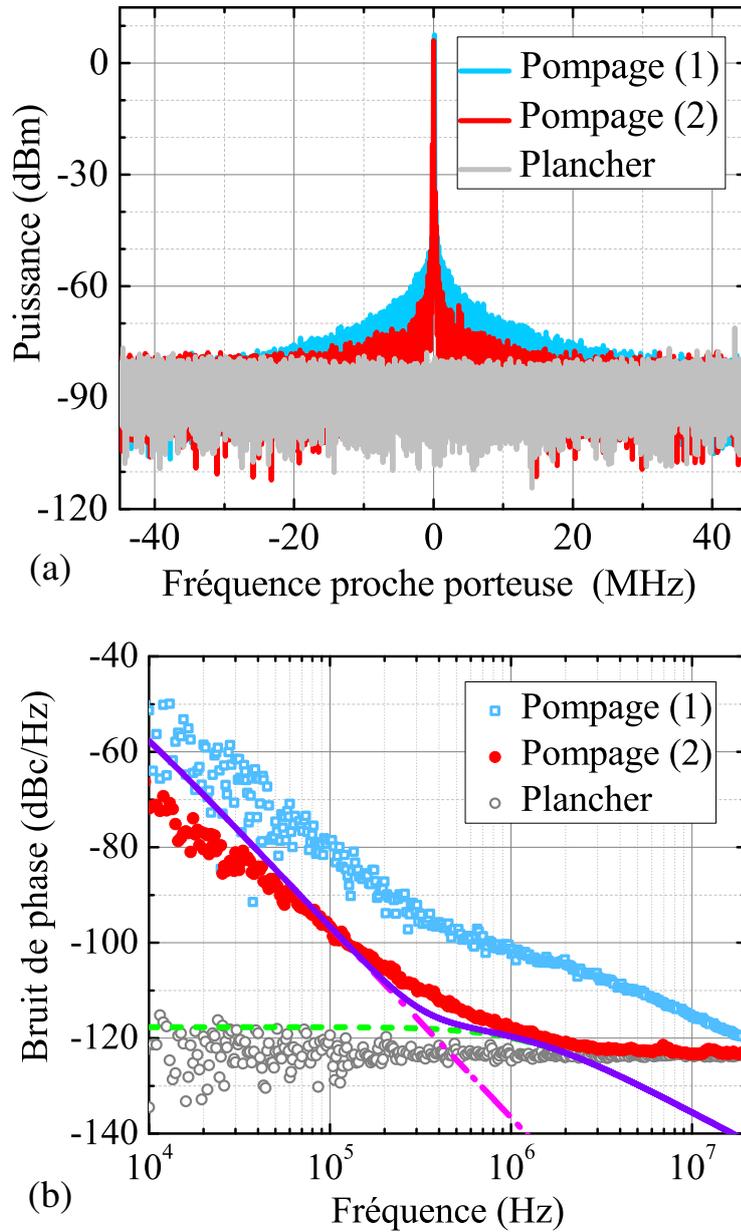


FIGURE 4.9 – Minimisation du bruit du battement RF à l’aide de l’architecture de pompage multimode bien corrélé en phase. Le pompage (1) (en bleu) désigne le pompage à un faisceau et le pompage (2) (en rouge) celui de l’architecture produisant deux faisceaux. (a) Spectres du battement obtenus à l’analyseur de spectre électrique. Les spectres sont décalés de manière à ce que le 0 corresponde à leur porteuse RF. La bande passante de résolution est de 3 kHz et la bande passante vidéo est de 910 Hz. (b) Spectre du bruit de phase du battement. Les symboles proviennent des mesures et les traits pleins des modélisations. La contribution du bruit thermique est en pointillés magenta, celle du couplage phase/amplitude en tirets verts et la somme cohérente des deux mécanismes en courbe continue violette. Les paramètres utilisés, en plus de ceux de la Fig. 4.7, sont  $R_T = 40 \text{ K/W}$ ,  $\Gamma_T = 1.39 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ ,  $P_{P,x} = 0.48 \text{ W}$ ,  $P_{P,y} = 0.45 \text{ W}$ ,  $\tau_T = 30 \mu\text{s}$  et  $\alpha = 5.2$ .

## CHAPITRE 5

# IMPACT DE LA DYNAMIQUE DU LASER SUR SA STABILISATION POUR L'HORLOGE CPT

L'utilisation de VECSELS bifréquences à 852 nm répond à la volonté de construire une horloge atomique à base de césium présentant un bon compromis entre son embarquabilité et ses performances (chapitre 2, section 2). Plus précisément, le projet ANR mené a pour objectif la fabrication d'une horloge CPT possédant une stabilité relative inférieure à  $5 \times 10^{-13}$  à 1 s dans un volume restreint de 5 à 10 L. Atteindre une telle performance en terme de stabilité va de pair avec le développement d'une source laser ultra-bas bruit et l'élaboration d'un résonateur atomique bien pensé. L'interrogation atomique par deux faisceaux lumineux linéairement polarisés dans des directions orthogonales a été identifiée dans la référence [65] comme une configuration optimale pour obtenir des franges de Ramsey bien contrastées et donc un bon signal CPT. Nous pouvons donc tirer parti à la fois de l'émission de deux polarisations linéaires orthogonales par le VECSEL bifréquence à 852 nm et de ses bonnes propriétés de bruit, que nous avons explorées aux chapitres précédents. Ces sources lasers, certes plus encombrantes que les VCSELS pompés électriquement utilisés dans les horloges atomiques miniatures, restent tout à fait compatibles en taille avec le volume d'horloge visé (environ 0.2 L d'occupation sur le total des 5 à 10 L du cahier des charges).

Mais en réalité, les niveaux de bruit atteints jusqu'à présent ne suffisent pas. En effet, la référence [47], qui initie l'étude de l'impact du bruit du VECSEL bifréquence sur l'horloge CPT, prévoit une limitation de l'écart type d'Allan à  $\sigma_y(1 \text{ s}) = 1.6 \times 10^{-12}$  à cause du niveau de bruit d'intensité. En fait, nous avons travaillé jusqu'ici à la diminution du transfert de bruit de la diode laser de pompe au VECSEL bifréquence. On se rend compte que même en se limitant strictement au transfert unitaire des niveaux de bruit des pompes commerciales utilisées, l'instabilité induite de l'horloge demeurerait rédhibitoire.

Trois rétroactions sur le VECSEL bifréquence sont alors nécessaires pour l'horloge, en plus des rétroactions pour assurer la stabilité thermique de la source laser. Il s'agit des asservissements de : (i) l'intensité lumineuse, (ii) la phase du battement RF et (iii) la longueur d'onde absolue à 852 nm. Il a été montré dans la référence [47] qu'il était possible de faire conjointement fonctionner les asservissements de la différence de longueur d'onde (battement RF) et de la longueur d'onde absolue pendant une durée significative. Cette dernière boucle atteint tout à fait ses objectifs en induisant une contribution à l'instabilité relative en fréquence de  $\sigma_y = 7.7 \times 10^{-14}$  à 1 s. Nous dirigerons par conséquent nos efforts vers l'étude des deux premières boucles, qui, quant à elles, limitent à  $\sigma_y = 1.6 \times 10^{-12}$  à 1 s la stabilité relative de l'horloge (toujours d'après la référence [47]).

Nous avons vu précédemment que la réduction du bruit d'intensité du VECSEL bifréquence par minimisation du transfert du bruit de la pompe reposait sur : (i) la minimisation de la saturation croisée, (ii) l'optimisation des corrélations des bruits de pompe et (iii) l'équilibre des taux de pompage. L'architecture de pompage à deux faisceaux bien corrélés a prouvé son efficacité au chapitre précédent pour réunir mutuellement toutes ces conditions. On se demande désormais si une telle architecture est bien compatible avec la réduction du bruit d'intensité du laser par un asservissement du courant de la pompe et, en particulier, comment produire le signal d'erreur pour la rétroaction sur l'intensité du laser. La détection d'un seul mode suffit-elle ? Doit-on plutôt détecter la somme ? Quelle architecture de pompe est alors la plus avantageuse ? La dynamique du laser est au cœur du problème et nous aidera à choisir la stratégie d'asservissement de l'intensité du laser bifréquence.

La correction du bruit de phase optique provenant du battement d'un laser bifréquence a déjà fait l'objet d'investigations pour des types de laser bien différents. Récemment, la correction du bruit de phase de signaux RF optiques créés par des lasers bifréquences a été étudiée pour des lasers fibrés à rétroaction répartie (DFB<sup>1</sup>) soit par exploitation du retour optique [86], soit par une boucle à verrouillage de la phase (PLL<sup>2</sup>) optique [87]. En fait, dès 2001, la référence [88] propose de transformer un laser bifréquence à solide en oscillateur commandé en tension (VCO<sup>3</sup>) grâce à l'insertion à l'intérieur de la cavité d'un cristal électro-optique permettant de changer la différence de marche entre l'onde ordinaire et l'onde extra-ordinaire à travers la biréfringence du cristal. Ce laser à solide est un laser à la longueur d'onde télécom basé sur un verre de phosphates dopé  $\text{Yb}^{3+} - \text{Er}^{3+}$ . En mettant ensuite en place un asservissement de l'alimentation du cristal électro-optique sur une référence de tension, on construit ainsi une PLL optique. Nous allons utiliser une telle PLL optique pour réduire le bruit de phase sur la bande passante de quelques centaines de kHz où il demeure significatif pour notre VECSEL bifréquence à 852 nm en pompage à deux faisceaux bien corrélés.

1. Pour *distributed feedback lasers* en anglais.
2. Pour *Phase-locked loop* en anglais.
3. Pour *Voltage Controlled Oscillator* en anglais.

Étant données les fortes performances de stabilité souhaitées pour l'horloge, nous nous demanderons ensuite si les stratégies d'optimisation mises en œuvre permettront à l'asservissement de l'intensité et la PLL optique du VECSEL bifréquence d'être suffisants.

## 1 Contrôle des corrélations de bruit par pompage

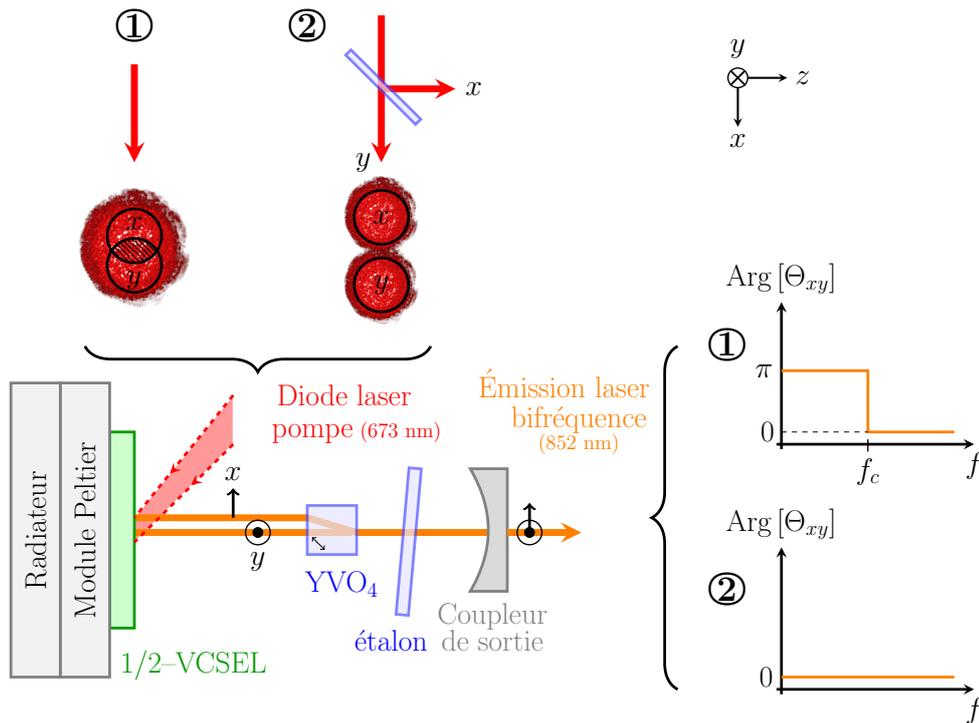


FIGURE 5.1 – Schéma du VECSEL bifréquence émettant à la longueur d'onde de 852 nm pompé à l'aide des architectures à un faisceau ① ou à deux faisceaux bien corrélés ②. La configuration ① (resp. ②) conduit à une valeur importante (resp. faible) de la constante de couplage non-linéaire  $C$  et à une faible amplitude (resp. élevée) des corrélations des bruits de pompe  $\eta$ .

Afin de déterminer la stratégie de rétroaction sur l'intensité du VECSEL bifréquence, revenons sur les propriétés dynamiques de ce laser. Pour cela, considérons à nouveau la cavité laser de la Fig. 5.1 permettant l'émission des modes polarisés linéairement dans des directions orthogonales et dénotés  $x$  et  $y$ . Pour résumer ce que l'on a établi aux chapitres précédents, deux architectures de pompage bien différentes permettent d'aboutir à des dynamiques bien différentes, qui se traduisent par des allures divergentes des spectres de corrélation  $\Theta_{xy}(f)$ . Nous y revenons au prochain paragraphe. Comme indiqué à la Fig. 5.1, ces deux architectures correspondent au pompage à un seul faisceau issu d'une diode laser fibrée multimode, noté ①, et au pompage utilisant deux faisceaux bien corrélés, noté ②, issus de la division d'amplitude d'une même diode laser fibrée multimode. Pour l'architecture ①, les valeurs de la constante de couplage non-linéaire  $C$  et de l'amplitude des corrélations

de bruit d'intensité de pompe  $\eta$  varient conjointement puisqu'ils dépendent tous deux du recouvrement des régions de pompe. Comme décrit au chapitre 3, on aboutit à des couples de paramètres équilibrés et modérés comme  $(C = 0.15, \eta = 0.10)$  et  $(C = 0.44, \eta = 0.45)$  dépendant à la fois de la longueur de la cavité et de l'épaisseur du cristal biréfringent. Obtenir des corrélations de bruit de pompe élevées en l'absence de saturation croisée requiert l'architecture de pompe ②. Le chapitre 4 a abouti au couple de paramètres  $(C = 0.05, \eta = 0.98)$ . Dans les grandes lignes, nous allons dans la suite comparer le mérite de chaque architecture pour la réduction du bruit d'intensité par un asservissement du courant de la diode laser de pompe. Alors que l'architecture ① permet d'explorer une dynamique de laser où à la fois les corrélations de pompe et la saturation croisée sont modérées, l'architecture ② permet d'explorer une dynamique de laser où  $C$  prend une valeur faible lorsque  $\eta \simeq 1$ .

Supposons que l'asservissement de l'intensité se fasse après détection d'un seul des modes lasers, disons  $x$ . Nous nous attendons alors à ce que l'effet d'un tel signal d'erreur sur la correction de l'intensité du mode  $y$  dépende des corrélations entre les fluctuations d'intensité des modes  $x$  et  $y$ . En particulier, le signe des corrélations  $\text{Re} [\Theta_{xy}(f)]$  entre les modes  $x$  et  $y$  semble être décisif dans le fait d'ajouter ou bien d'enlever du bruit à la polarisation croisée. Comme schématisé à la Fig. 5.1, l'architecture ①, s'accompagnant d'une saturation croisée significative, conduit à des fluctuations des deux modes laser évoluant en opposition de phase sur une bande passante  $f_c$  allant de quelques centaines de kHz à quelques MHz. Au-delà de  $f_c$ , les fluctuations d'intensité des deux modes se retrouvent en phase. L'architecture ②, permettant une faible valeur de la constante de couplage non-linéaire ( $C \simeq 0$ ) et de fortes corrélations en phase des bruits de pompe ( $\eta \simeq 1$ ), conduit à des fluctuations des deux modes laser évoluant en phase sur tout le spectre.

En fixant l'ensemble des paramètres décrivant la dynamique du laser et en considérant une fréquence de Fourier donnée  $f$ , on définit l'amplitude d'inversion  $\eta_{\text{inv}}$  des corrélations de pompe comme la valeur pour laquelle le signe des corrélations  $x$ - $y$  des bruits d'intensité du laser  $\text{Re} [\Theta_{xy}(f)]$  s'inverse. L'exploitation du modèle de transfert de bruit d'intensité de la pompe développé à la section 3 du chapitre 1 donne une expression analytique de  $\eta_{\text{inv}}$  en fonction rationnelle de la fréquence de Fourier  $f$  faisant intervenir les paramètres  $r_x, r_y, \xi_{xy}, \xi_{yx}, \tau_x, \tau_y$  et  $\tau$ . Dans l'hypothèse simplificatrice où les deux modes sont tout à fait équilibrés ( $r_x = r_y = r, \tau_x = \tau_y = \tau_{\text{cav}}$  et  $\xi_{xy} = \xi_{yx} = \xi$ ), cette fonction rationnelle devient :

$$\eta_{\text{inv}}(f) = \frac{2\xi [1 - (1 + \xi)(f/f_c)^2]}{\xi^2 + [1 - (1 + \xi)(f/f_c)^2]^2}, \quad (5.1)$$

avec

$$2\pi f_c = \sqrt{(r-1)/(\tau_{\text{cav}}\tau)}. \quad (5.2)$$

Avec les valeurs typiques de ces paramètres précédemment utilisées, la fréquence caractéristique  $f_c$  est de l'ordre de 10 MHz. Cette valeur va au-delà de la fréquence typique  $(r-1)/(2\pi r\tau_{\text{cav}})$  de coupure du filtre passe-bas de transfert de bruit d'intensité du VECSEL, imposé par la dynamique de classe A de ce laser. Nous considérons dans la suite des

fréquences en dessous de 100 kHz et donc bien faibles devant  $f_c$ . Dans ce cas, l'expression de  $\eta_{\text{inv}}$ , lorsque les gains et pertes des modes diffèrent, donne avec  $r_x \neq r_y$  :

$$\eta_{\text{inv}} \simeq \frac{r_x^2 + r_y^2}{r_x r_y} \cdot \frac{\sqrt{C}}{1 + C}. \quad (5.3)$$

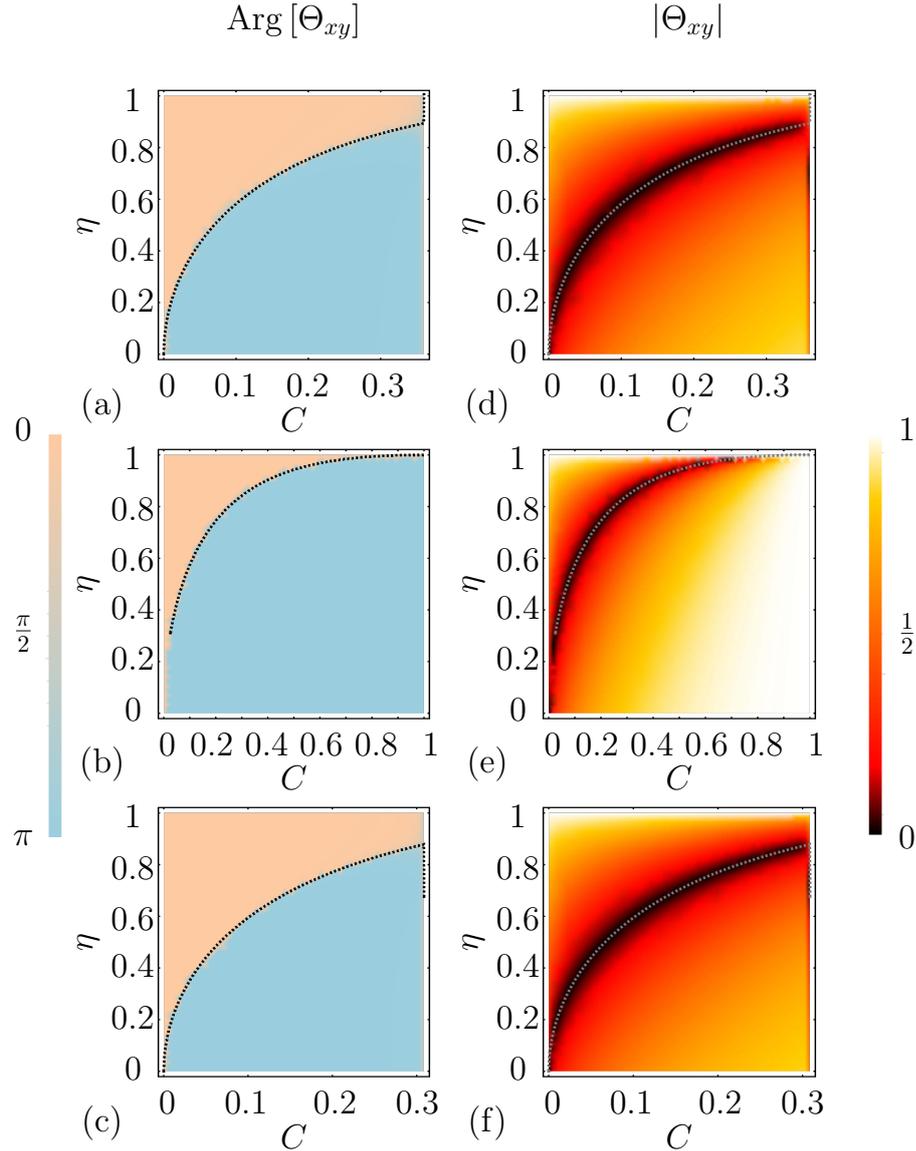


FIGURE 5.2 – Cartes en niveaux de couleurs dans le plan  $(C, \eta)$  de la phase (a-c) et l'amplitude (d-f) des corrélations  $\Theta_{xy}$  entre les fluctuations d'intensité des deux modes lasers émis. Les trois rangées de figures sont, de haut en bas, pour des rapports  $r_y/r_x = 0.85$ ,  $r_y/r_x = 1.0$  et  $r_y/r_x = 1.3$ . Les valeurs des autres paramètres sont  $f = 10$  kHz,  $\text{RIN}_p = -133$  dB/Hz,  $\tau = 1$  ns,  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns et  $r_x = 1.6$ .

La figure 5.2 présente les cartes en niveaux de couleurs dans le plan  $(C, \eta)$  de la phase et du module des corrélations  $\Theta_{xy}$  entre bruits d'intensité des modes  $x$  et  $y$ , évaluées à la fréquence  $f = 10$  kHz. Les trois paires de figures correspondent à trois rapports  $r_x/r_y$  différents entre les taux de pompage des deux modes. Les abscisses de toutes ces sous-figures sont limitées aux valeurs de  $C$  pour lesquelles l'émission bifréquence est stable. Lors de l'analyse linéaire réalisée au chapitre 1, nous avons vu que la condition de stabilité bifréquence sur la constante de couplage non-linéaire imposait  $C < 1$ . En fait, pour les rapports entre les coefficients de saturation croisée et d'auto-saturation  $\xi_{xy}$  et  $\xi_{yx}$ , la stabilité de l'émission des deux modes se traduit par :

$$\xi_{ij} < \frac{r_i - 1}{r_j - 1} \quad \text{avec} \quad i \neq j \in \{x, y\} . \quad (5.4)$$

Cette condition coïncide avec la positivité du nombre moyen de photons  $F_{0i}$  dans la cavité donné pour chaque polarisation par l'expression de l'équation (1.43). Les valeurs stables des  $\xi_{ij}$  changent donc suivant les rapports  $r_x/r_y$ . Les tirets présents sur chaque sous-figure proviennent de l'équation (5.3) et délimitent par conséquent le changement de signe des corrélations entre les modes  $x$  et  $y$ .

Grâce à ce travail préalable, nous sommes en mesure de prédire la nature des corrélations entre les modes émis du VECSEL bifréquence quelque soit le pompage réalisé. Nous allons maintenant nous plonger sur le véritable rôle des corrélations sur l'asservissement de l'intensité.

## 2 Stabilisation de l'intensité

Dans cette partie, l'asservissement de l'intensité du VECSEL bifréquence est étudié à la fois sur le plan théorique et sur le plan expérimental. Le schéma de principe d'un tel asservissement est représenté à la Fig. 5.3. Le signal d'erreur servant à la rétroaction s'obtient par soustraction du signal détecté à une référence de tension. Après l'amplification et les filtres de boucle, la rétroaction est exercée sur l'entrée de modulation de l'alimentation de la diode laser de pompe. Dès lors, la correction du courant de pompe se propage au VECSEL bifréquence par l'intermédiaire de l'architecture de pompage. C'est pourquoi l'asservissement de l'intensité et la réduction de bruit vont bien dépendre des propriétés de pompage à travers la fonction de transfert des fluctuations de la pompe au VECSEL.

### 2.1 Modélisation de la boucle et impact des corrélations de bruit

La correction apportée au signal d'erreur provient d'un régulateur proportionnel intégral. La fonction de transfert de cette correction pour un gain unitaire est notée  $H_{PI}(f)$  et sa fréquence de coupure  $f_{PI}$ . L'entrée de modulation de l'alimentation de la diode laser de

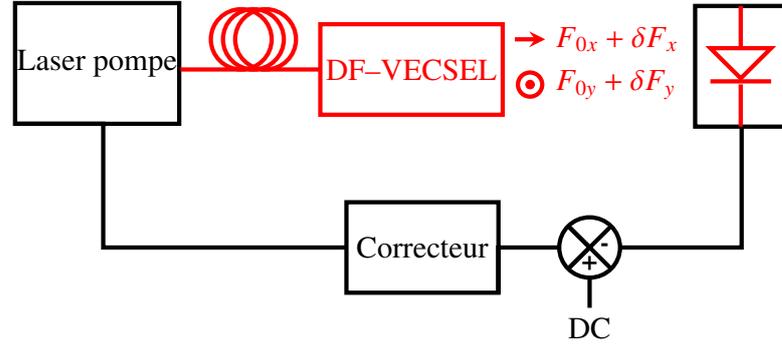


FIGURE 5.3 – Schéma de principe de l'asservissement de l'intensité du VECSEL pour la réduction du RIN. Le signal d'erreur peut être généré par détection d'une seule polarisation ou bien des deux polarisations.

pompe sert à la rétroaction sur le courant de pompe. La fonction de transfert mesurée entre l'entrée de courant et l'éclairement de la diode pour notre alimentation commerciale dans les conditions de l'expérience se comporte comme un filtre passe-bas du second ordre. Cette fonction de transfert est notée  $H_{LP}(f)$  et on lui associe sa fréquence de coupure  $f_{LP}$  ainsi que son facteur de qualité  $Q$ . Au total, après la photodétection, la fonction de transfert  $H$  de la correction exercée sur l'intensité lumineuse de pompe s'écrit :

$$H(f) = G \cdot H_{LP}(f) \cdot H_{PI}(f) , \quad (5.5)$$

où  $G$  est le gain global de la boucle.

Deux cas sont maintenant discutés suivant l'utilisation d'un seul mode pour fabriquer le signal d'erreur ou bien l'utilisation de la puissance lumineuse issue de la somme des deux modes.

### Rétroaction à partir d'un seul mode laser

Nous ne détectons qu'un seul mode pour la rétroaction, disons  $x$ . La correction qui est appliquée à l'éclairement de pompe ne fait pas la distinction entre les deux régions de pompe et alimente donc conjointement les deux polarisations. Cette correction induit ensuite une variation de l'intensité, selon la dynamique du transfert de la pompe au VECSEL. En notant  $RIN_x^{\text{lock}}(f)$  le bruit d'intensité relatif du mode  $x$  en boucle fermée et  $RIN_x(f)$  sa valeur en boucle ouverte, on établit la relation suivante :

$$RIN_x^{\text{lock}}(f) = \left| \frac{1}{1 + H(f) \cdot (M_{xx}(f) + M_{xy}(f))} \right|^2 RIN_x(f) , \quad (5.6)$$

avec les éléments de matrice  $M_{xx}$  et  $M_{xy}$  donnés aux équations (1.48) et (1.49), respectivement.

La façon dont l'asservissement du mode  $x$  affecte le bruit d'intensité du mode  $y$  dépend bien des corrélations  $\Theta_{xy}(f)$ . On obtient en effet l'expression suivante du spectre de RIN sur la polarisation  $y$  en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \text{RIN}_y^{\text{lock}}(f) = & \text{RIN}_y(f) + |G_{xy}(f)|^2 \cdot \left(\frac{F_{0x}}{F_{0y}}\right)^2 \cdot \text{RIN}_x(f) \\ & - 2 \operatorname{Re} \left[ G_{xy}(f) \Theta_{xy}(f) \right] \cdot \left(\frac{F_{0x}}{F_{0y}}\right) \cdot \sqrt{\text{RIN}_x(f) \text{RIN}_y(f)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec

$$G_{xy}(f) = \frac{H(f) \cdot (M_{yy}(f) + M_{yx}(f))}{1 + H(f) \cdot (M_{xx}(f) + M_{xy}(f))}. \quad (5.8)$$

Les spectres de RIN typiquement obtenus en boucle fermée à partir des expressions analytiques (5.7) et (5.8) sont affichés sur la Fig. 5.4 pour différentes amplitudes des corrélations de pompe  $\eta$ . Comme on peut le voir sur les Fig. 5.4(a) et 5.4(c), pour  $\eta = 0.4$  et  $\eta = 0.98$ , le RIN sur le mode  $x$  est extrêmement réduit par l'asservissement sur une bande passante de 300 kHz. Cette réduction est indépendante de  $\eta$  lorsque seul le mode  $x$  est utilisé pour la régulation<sup>4</sup>. On obtient, pour les deux valeurs de  $\eta$ , 24 dB de réduction à la fréquence de Fourier de 10 kHz (comme indiqué par les doubles flèches) après asservissement. Le pic prononcé aux alentours de 800 kHz provient de la fréquence à partir de laquelle la fonction de transfert  $H(f) \cdot (M_{xx}(f) + M_{xy}(f))$  atteint  $\pi$ . À cette fréquence, la boucle amplifie le bruit au lieu de l'atténuer. Nous nous attacherons à supprimer cette quasi-oscillation à la section 2.3.

La simulation du bruit d'intensité sur le mode  $y$  en mettant en place la régulation sur le mode  $x$  donne les Figs. 5.4(b) et 5.4(d). Les résultats reproduits sur cette figure sont simulés avec peu de saturation croisée  $C = 0.05$  et des valeurs d'amplitude de corrélations de pompe valant  $\eta = 0.4$  pour la Fig. 5.4(b) et  $\eta = 0.98$  pour la Fig. 5.4(d). Selon la valeur de  $\eta$ , le RIN du mode  $y$  à 10 kHz peut, soit subir une augmentation, soit subir une diminution. Dans le cas présent, de fortes corrélations entre les bruits de pompe semblent nécessaires pour la réduction mutuelle du bruit d'intensité sur les deux modes. L'architecture ② paraît donc prédisposée à une régulation avantageuse de l'intensité en permettant cette réduction conjointe.

Ces prédictions prennent du relief en examinant attentivement les membres de droite de l'équation (5.8). Le premier terme est simplement le RIN du mode  $y$  en fonctionnement libre. Le deuxième s'associe à une augmentation de bruit selon une fraction du RIN sur le mode  $x$ . Enfin, le dernier terme contient l'indication finale sur l'addition ou la soustraction de bruit au mode  $y$  une fois la boucle fermée. Cela dépend en particulier du signe du terme  $\operatorname{Re} [G_{xy}(f) \Theta_{xy}(f)]$ . Une diminution du bruit d'intensité sur la polarisation  $y$  n'est possible que si cette quantité est positive.

4. Attention, le RIN du mode  $x$  dépend de  $\eta$ . C'est bien la fonction de transfert en boucle fermée qui n'en dépend pas.

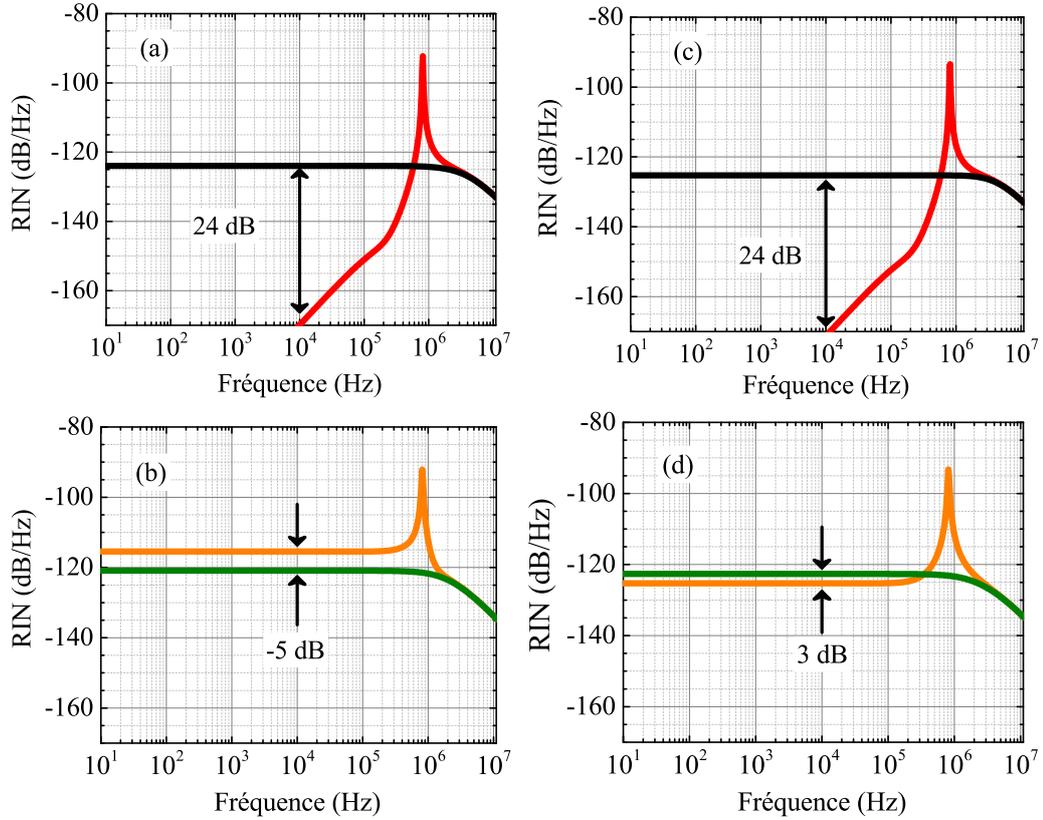


FIGURE 5.4 – Spectres de RIN théoriques pour le mode  $x$  (a,c) ou le mode  $y$  (b,d) en fonctionnement libre et en présence d'une rétroaction basée sur la détection du mode  $x$ . La double flèche noire indique l'écart à 10 kHz entre le RIN en fonctionnement libre (courbe noire pour le mode  $x$ , verte pour le mode  $y$ ) et en présence de l'asservissement (courbe rouge pour le mode  $x$ , orange pour  $y$ ). (a,b)  $\eta = 0.4$ ; (c,d)  $\eta = 0.98$ . Paramètres de l'asservissement :  $G = 0.8$ ,  $f_{PI} = 200$  kHz,  $f_{LP} = 250$  kHz,  $Q = 1$ . Paramètres du laser :  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $\tau = 1$  ns,  $r_x = 1.6$ ,  $r_y = 1.45$  et  $C = 0.05$ .

On considère, pour simplifier, que tous les paramètres caractérisant les modes  $x$  et  $y$  sont plutôt proches (mêmes taux de pompage, mêmes temps de vie des photons dans la cavité, mêmes RINs et mêmes rapports entre saturation croisée et auto-saturation). Alors  $G_{xy} \sim 1$  aux basses fréquences pour un gain de boucle élevé. Pour des modes lasers indépendants, décorrelés ( $\Theta_{xy} \approx 0$ ), l'équation (5.8) montre que l'asservissement sur l'intensité du mode  $x$  ne peut aboutir qu'à une détérioration atteignant 3 dB du bruit d'intensité sur le mode  $y$ . Avec de fortes corrélations entre les modes lasers ( $|\Theta_{xy}|$  proche de 1), c'est le signe des corrélations dans le dernier terme de l'équation (5.8) qui est décisif. Des corrélations élevées et en phase entre les bruits d'intensité des deux modes sont synonymes d'une forte réduction du bruit d'intensité sur  $y$  grâce à la rétroaction. En revanche, des corrélations élevées et en opposition de phase entre les bruits d'intensité des modes lasers mènent à 6 dB d'augmentation du bruit sur le mode  $y$  en boucle fermée.

Dans la bande passante typique de l'asservissement, aux fréquences sous la centaine de kHz, les éléments de la matrice de transfert de bruit sont, en bonne approximation, des réels et on a  $M_{ii} > 0$  et  $M_{ij} < 0$  avec  $i \neq j \in \{x, y\}$ . Les signes des corrélations entre les bruits d'intensité des deux modes dépendent des paramètres de pompe, comme nous l'avons vu précédemment et illustré à la Fig. 5.2. Le terme  $\text{Re} [G_{xy}(f) \Theta_{xy}(f)]$  est alors positif sur la partie basse fréquence du spectre si (i) les RINs sont corrélés en phase et  $\xi_{yx} < \tau_y/\tau_x$ , ou bien si (ii) les RINs sont corrélés en opposition de phase et  $\xi_{yx} > \tau_y/\tau_x$ . Dans ce dernier cas, le terme de saturation croisée  $|M_{yx}|$  prédomine devant  $M_{yy}$ . Supposons que le mode  $x$  soit celui dont le temps de vie des photons est le plus court ( $\tau_x \leq \tau_y$ ). On associe alors une valeur limite  $C_{\text{lim}}$  de la constante de couplage non-linéaire au moment où la saturation croisée devient le mécanisme dominant dans le bruit d'intensité de la polarisation  $y$ . Cette valeur vérifie :

$$C_{\text{lim}} = \left( \tau_x / \tau_y \right)^2 . \quad (5.9)$$

La suppression du bruit d'intensité du mode  $x$  par la boucle de régulation induit une diminution de la modulation du bruit sur le mode  $y$  causée par les effets de saturation croisée. Il en résulte que, à condition que la valeur de  $C$  soit supérieure à  $C_{\text{lim}}$ , la réduction du bruit sur le mode  $x$  est susceptible d'engendrer une diminution du bruit sur le mode  $y$  bien que les intensités de ces deux modes fluctuent en opposition de phase.

La figure 5.5 reproduit les cartes en niveaux de couleurs de l'écart du RIN du mode  $y$  à la fermeture de la boucle sur le mode  $x$ , évalué à la fréquence  $f = 10$  kHz. Cet écart est tracé dans le plan  $(C, \eta)$  pour trois rapports différents  $r_x/r_y$  entre les taux de pompage des deux modes. Les valeurs positives (couleurs jaune et rouge) marquent une réduction du RIN de la polarisation  $y$  alors que les valeurs négatives (couleur bleue) marquent une augmentation et donc une dégradation du bruit. Dans cette figure  $\tau_y > \tau_x$ .

Comparons pour commencer les figs. 5.5(a) et 5.5(c), pour lesquelles  $r_x \neq r_y$ . Cette fois également, l'abscisse se limite aux valeurs de  $C$  autorisant un fonctionnement bifréquence stable. Pour des valeurs trop élevées de  $C$ , le mode laser gagnant la compétition pour le gain conduit à l'extinction de l'autre mode. Comme nous l'avons pressenti, la réduction du RIN du mode  $y$ , grâce à la régulation du mode  $x$ , s'obtient pour des valeurs plutôt élevées de  $\eta$  et faibles de  $C$ . Il faut donc des paramètres de laser permettant de bien se situer au-dessus des tirets issus de l'expression  $\eta_{\text{inv}}(C)$  de l'équation (5.3). Les bruits d'intensité des modes  $x$  et  $y$  au-dessus des tirets sont corrélés en phase, comme on peut le vérifier à la Fig. 5.2. Une explication physique simple prédit cette réduction efficace du bruit sur le mode  $y$  dans le coin en haut à gauche des plans  $(C, \eta)$ . La diminution du bruit sur le mode  $x$  induit par l'asservissement implique une réduction du bruit de pompe alimentant le mode  $x$ . Avec des fortes corrélations en phase des bruits de pompe et peu de saturation croisée, cette diminution aboutit également à une réduction du bruit de pompe alimentant le mode  $y$ . En bout de chaîne, l'intensité du mode  $y$  est bien stabilisée. De plus, en comparant les Figs. 5.5(a) et 5.5(c), la réduction du RIN du mode  $y$  est plus importante pour  $r_y > r_x$  que pour  $r_y < r_x$ . L'asservissement de l'intensité est par conséquent plus efficace lorsqu'il repose sur la détection du mode le plus faible.

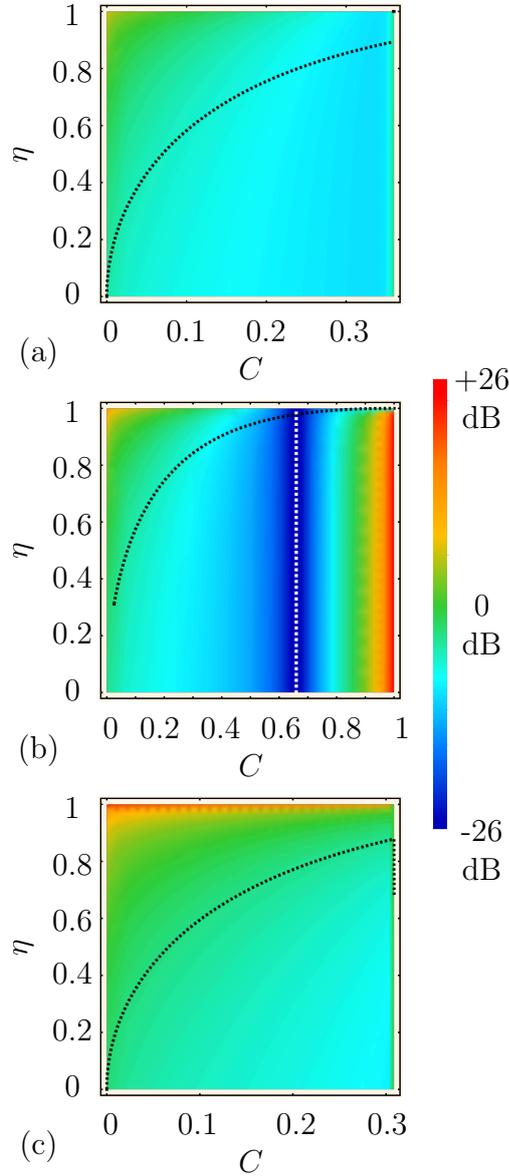


FIGURE 5.5 – Carte en niveaux de couleurs dans le plan  $(C, \eta)$  de la chute de RIN à 10 kHz sur le mode  $y$  mode après asservissement sur le mode  $x$ . (a)  $r_y/r_x = 0.85$ , (b)  $r_y/r_x = 1.0$ , (c)  $r_y/r_x = 1.3$ . Paramètres de l'asservissement :  $G = 0.08$ ,  $f_{PI} = 200$  kHz,  $f_{LP} = 250$  kHz,  $Q = 1$ . Paramètres du laser :  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $\tau = 1$  ns et  $r_x = 1.6$ . Sur le mode  $x$ , le RIN à 10 kHz est réduit de 24 dB. Tirets noirs :  $\eta_{inv}$  provenant de l'équation (5.3). Tirets blancs :  $C_{lim}$  défini en (5.9).

Un phénomène supplémentaire se manifeste à la Fig. 5.5(b) pour laquelle les taux de pompage des deux modes sont équilibrés :  $r_x = r_y$ . Notons que dans ce cas les deux modes lasers peuvent osciller conjointement dans la cavité pour des valeurs de  $C$  allant jusqu'à 1.

Les tirets blancs verticaux sur cette figure correspondent à la valeur de  $C_{\text{lim}}$  de l'équation (5.9) dont on note la correspondance avec la pire dégradation du bruit d'intensité du mode  $y$ . Comme précédemment discuté, la situation s'améliore pour  $C > C_{\text{lim}}$  lorsque le mécanisme de saturation croisée prédomine et que l'on a réduit le bruit sur le mode  $x$ . Enfin, pour une valeur de  $C$  proche de 1, la bande colorée rouge le long de l'axe verticale à droite met en lumière la possibilité d'une forte réduction du bruit d'intensité du mode  $y$  en boucle fermée. Dans de telles conditions, la saturation croisée du gain par le mode  $x$  est si présente que l'asservissement de l'intensité sur  $x$  induit une très forte réduction du bruit sur le mode  $y$ . Cependant, cette situation est, d'une part, peu réaliste expérimentalement et, d'autre part, très peu avantageuse en termes de transfert de bruit de la pompe au VECSEL (chapitre 3).

### Rétroaction à partir des deux composantes

Nous considérons maintenant pour l'asservissement un signal d'erreur généré à partir de la détection d'une partie de la puissance totale du laser proportionnelle au nombre total de photons  $F_x + F_y$ . Une telle boucle permet de réduire le bruit relatif d'intensité associé à la puissance totale de sortie du laser selon l'expression :

$$\text{RIN}_{x+y}^{\text{lock}}(f) = \left| \frac{1}{1 + H(f) \cdot \sum_{ij} M_{ij}(f)} \right|^2 \text{RIN}_{x+y}(f), \quad (5.10)$$

avec  $\text{RIN}_{x+y}$  et  $\text{RIN}_{x+y}^{\text{lock}}$  les RINs associés à la somme des modes en boucle ouverte et en boucle fermée, respectivement. On montre alors que le RIN du mode  $i$  (au choix  $x$  ou  $y$ ) après asservissement sur la somme, vérifie, pour  $i \neq j \in \{x, y\}$  :

$$\begin{aligned} \text{RIN}_i^{\text{lock}}(f) = & |1 - K_{ij}|^2 \text{RIN}_i + |K_{ij}|^2 \cdot \left(\frac{F_{0j}}{F_{0i}}\right)^2 \cdot \text{RIN}_j \\ & - 2 \text{Re} \left[ (1 - K_{ij}) \cdot K_{ij}^* \cdot \Theta_{ij} \right] \cdot \left(\frac{F_{0j}}{F_{0i}}\right) \cdot \sqrt{\text{RIN}_i \cdot \text{RIN}_j}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec

$$K_{ij}(f) = \frac{H(f) \cdot (M_{ii}(f) + M_{ij}(f))}{1 + H(f) \cdot \sum_{ij} M_{ij}(f)}. \quad (5.12)$$

Considérons, pour simplifier, que tous les paramètres caractérisant les modes  $x$  et  $y$  sont similaires (mêmes taux de pompage, mêmes temps de vie des photons dans la cavité, mêmes RINs et mêmes rapports entre saturation croisée et auto-saturation). Alors, avec un fort gain de boucle et aux basses fréquences, on a  $K_{ij} \sim 1/2$ . Avec des modes  $x$  et  $y$  indépendants ( $\Theta_{xy} = 0$ ), l'équation (5.11) prédit alors une réduction du RIN sur chaque polarisation de 3 dB avec un asservissement sur la somme des modes. En fait, dans ce cas précis, nous avons retiré la composante symétrique (mode somme) des fluctuations et, comme nous considérons des modes décorrélés, la composante anti-symétrique (mode différence) qui

demeure représente encore la moitié des fluctuations. Lorsque les corrélations des modes  $x$  et  $y$  sont fortes et en phase, l'équation (5.11) prédit une diminution drastique des bruits d'intensité des deux modes. Quand, en revanche, les fluctuations des modes  $x$  et  $y$  sont en opposition de phase, il ne se passe rien à la fermeture de la boucle. En effet, il n'y a alors aucune composante symétrique de bruit à réduire.

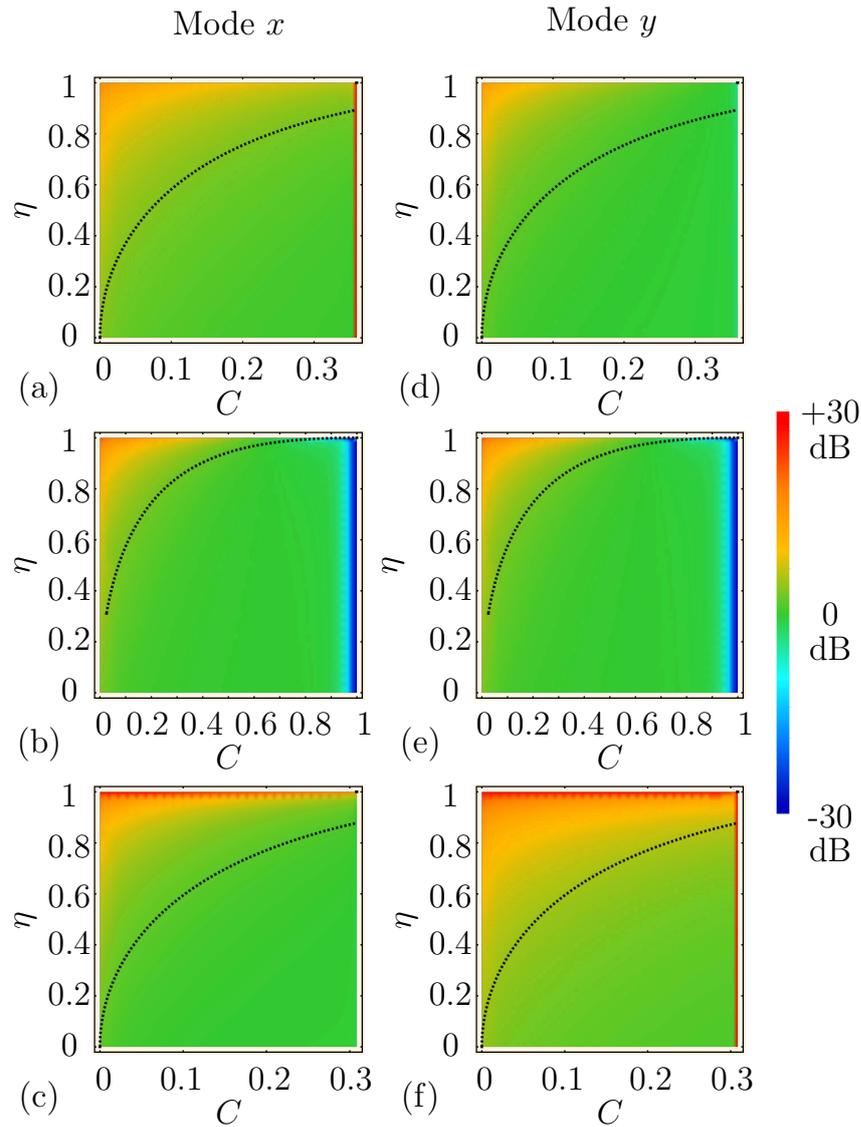


FIGURE 5.6 – Carte en niveaux de couleurs dans le plan  $(C, \eta)$  de la diminution, après asservissement sur la somme des deux modes, du RIN à 10 kHz pour le mode  $x$  (a,b,c) et le mode  $y$  (d,e,f). (a,d) :  $r_y/r_x = 0.85$ ; (b,e) :  $r_y/r_x = 1.0$ ; (c,f) :  $r_y/r_x = 1.3$ . Paramètres de l'asservissement :  $G = 0.08$ ,  $f_{PI} = 200$  kHz,  $f_{LP} = 250$  kHz,  $Q = 1$ . Paramètres du laser :  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\tau_x = 13$  ns,  $\tau_y = 16$  ns,  $\tau = 1$  ns et  $r_x = 1.6$ . Tirets noirs : amplitude des corrélations de pompe  $\eta_{inv}$  à l'inversion de signe des corrélations des modes.

La figure 5.6 reproduit les cartes en niveaux de couleurs de l'écart des RINs des modes  $x$  (à gauche) et  $y$  (à droite) engendré à la fermeture de la boucle sur le signal total et évalué à la fréquence  $f = 10$  kHz. Cet écart est tracé dans le plan  $(C, \eta)$  pour trois rapports différents  $r_x/r_y$  entre les taux de pompage des deux modes. Les valeurs de  $C$  sont encore une fois limitées aux valeurs auxquelles l'oscillation bifréquence est stable. En comparant les résultats obtenus à ceux de la Fig. 5.6 avec la rétroaction basée sur un seul mode, une proportion bien plus grande du plan  $(C, \eta)$  conduit maintenant à une réduction conjointe des bruits d'intensité. Les régions de réduction du RIN (en jaune et rouge) coïncident assez bien avec la zone au-dessus des tirets noirs c'est-à-dire au dessus de l'amplitude d'inversion  $\eta_{inv}$  où les fluctuations sur  $x$  et  $y$  sont en phase (voir Fig. 5.2). De plus, nous notons que le mode laser le plus fort est celui dont le bruit est le plus réduit par l'asservissement. En outre, dans la région du plan  $(C, \eta)$  où les intensités des modes fluctuent en opposition de phase, c'est-à-dire sous les tirets noirs, le bruit d'intensité du mode le plus faible n'est pas affecté par la boucle, alors que le bruit du mode le plus fort subit une légère diminution pour des valeurs modérées de la constante de couplage non-linéaire  $C$ .

Par ailleurs, lorsque  $C$  est vraiment proche de 1, ce qui est envisageable pour  $r_x = r_y$  (Figs. 5.6(b,e)), les bruits des modes  $x$  et  $y$  sont totalement corrélés et en opposition de phase, comme vu précédemment à la Fig. 5.2. Ce mécanisme d'opposition de phase est tributaire de la forte saturation croisée. Alors, la bande bleue observée près de  $C = 1$  à droite des Figs. 5.6(b,e) atteste d'une forte dégradation du bruit par la boucle. La régulation mise en place crée en effet un déséquilibre entre les deux modes qui s'amplifie du fait de la très forte compétition. Ce cas n'est pas réaliste expérimentalement et induit, de toutes façons, un transfert de bruit de pompe très désavantageux.

Pour résumer les résultats de cette partie théorique, l'élaboration du signal d'erreur pour l'asservissement de l'intensité à partir de la somme des deux modes apparaît bien plus avantageuse pour la stabilisation des deux modes que celle basée sur la détection d'un seul mode pour l'ensemble des situations expérimentales pouvant être explorées. Dans tous les cas, l'architecture de pompage ②, permettant une faible saturation croisée pour des corrélations des bruits de pompe optimales, semble la plus appropriée pour la réduction du bruit d'intensité.

## 2.2 Étude expérimentale de l'asservissement en intensité

L'asservissement de l'intensité a été réalisé avec les deux architectures de pompe ① et ②, précédemment passées en revue. Nous commencerons par l'investigation du cas où le signal d'erreur est généré par détection d'un seul mode. Appelons le  $x$ . Les figures 5.7(a,c) comparent les mérites respectifs des architectures ① et ② en affichant les mesures de RIN sur  $x$  et  $y$  à la fois en boucle ouverte (courbes noire et verte) et en boucle fermée (courbes rouge et orange). Les figures 5.7(b,d) montrent les prédictions théoriques correspondantes reposant sur les équations (5.7) et (5.8) du modèle ci-dessus. Les courbes issues du modèle s'accordent très bien avec celles de l'expérience. Le pic observé peu après 400 kHz est

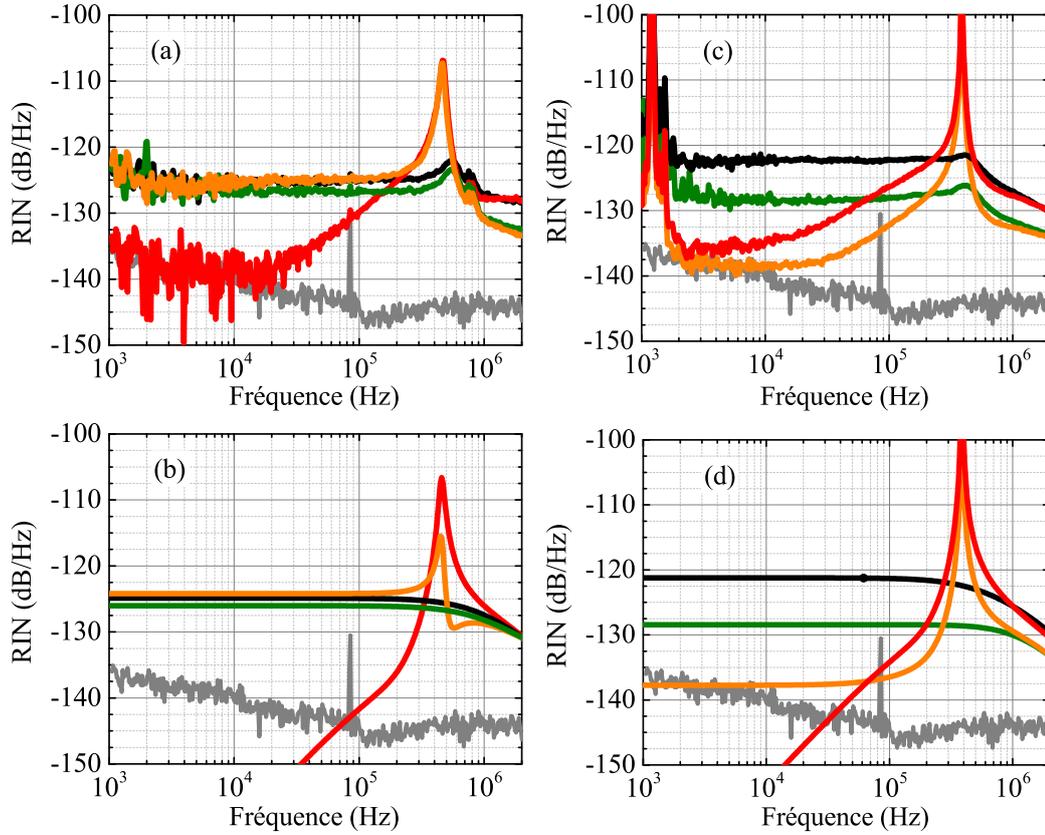


FIGURE 5.7 – Résultats de l’asservissement de l’intensité avec un signal d’erreur issu de la détection du mode  $x$ . Spectres de RIN expérimentaux (a,c) et théoriques (b,d). (a,b) : configuration de la pompe à un faisceau ① (Fig. 5.1). (c,d) : configuration de la pompe à deux faisceaux ②. Courbe noire (resp. verte) : RIN du mode  $x$  (resp.  $y$ ) en fonctionnement libre ; Courbe rouge (resp. orange) : RIN du mode  $x$  (resp.  $y$ ) après asservissement. Courbe grise : plancher de mesures. Paramètres de l’asservissement :  $f_{PI} = 200$  kHz,  $f_{LP} = 250$  kHz,  $Q = 0.8$  avec  $G = 0.2$  pour (b) et  $G = 0.075$  pour (d). Paramètres du laser :  $RIN_p = -140$  dB/Hz,  $r_x = 1.92$ ,  $r_y = 1.95$ ,  $\tau_x = 18$  ns,  $\tau_y = 14$  ns,  $C = 0.4$ ,  $\eta = 0.4$  pour (b) et  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $r_x = 2.1$ ,  $r_y = 1.55$ ,  $\tau_x = 65$  ns,  $\tau_y = 45$  ns,  $C = 0.05$ ,  $\eta = 0.98$  pour (d). Le niveau du bruit de grenaille est de -150 dB/Hz.

lié à la bande passante de notre régulation. La figure 5.7(a) correspond à l’architecture de pompe mono-faisceau ① pour laquelle on estime les valeurs suivantes pour les paramètres :  $C = 0.4$  et  $\eta = 0.4$ . La rétroaction réduit très efficacement le RIN de la polarisation  $x$  au plancher de mesures mais dégrade le RIN du mode  $y$  d’environ 3 dB. Le modèle de la fig. 5.7(b) reproduit bien ce comportement attendu étant données les corrélations en opposition de phase des modes lasers avec de tels paramètres. En effet, l’amplitude des corrélations de pompe  $\eta = 0.4$  se situe bien en dessous de la valeur  $\eta_{inv} = 0.9$  que l’on calcule à partir de l’équation (5.3). En somme, la régulation de l’intensité d’un mode dans cette situation s’accompagne d’une détérioration du bruit de l’autre.

La figure 5.7(c) repose sur l'architecture de pompe antagoniste à deux faisceaux ②, qui donne les paramètres  $C = 0.05$  et  $\eta = 0.98$ . Les bruits d'intensité des deux modes sont simultanément éliminés en bonne partie par l'asservissement. Le modèle de la Fig.5.7(d) reproduit bien les mesures. Avec de tels paramètres de pompe, les fluctuations des modes  $x$  et  $y$  sont corrélées en phase et l'étude précédente prédit bien une réduction mutuelle ( $\eta$  bien plus grand que  $\eta_{inv} = 0.45$ ).

Quelque soit l'architecture de pompe, on observe une petite bosse aux alentours de 500 kHz sur les spectres de RIN mesurés en boucle ouverte. Cette bosse n'est pas présente dans les courbes issues du modèle (Figs. 5.7(b) et 5.7(d)) puisqu'elle est en fait causée par un écart à un comportement de bruit blanc du bruit d'intensité de la diode laser de pompe. Cet écart apparaît aux courants de pompe importants.

L'architecture de pompe ② étant la plus avantageuse à la fois pour la réduction du transfert de bruit de la pompe au VECSEL et pour la régulation de l'intensité, nous l'adoptons définitivement pour la suite du travail.

Nous passons désormais à la situation où le signal d'erreur provient de la détection de la somme des modes du VECSEL bifréquence. La meilleure réduction du bruit d'intensité sur le signal total est obtenue dans l'architecture ② et reportée à la Fig. 5.8. Le spectre de RIN de la puissance totale du VECSEL bifréquence est reproduit en noir pour la boucle ouverte et en vert après asservissement. Après fermeture de la boucle, le niveau du RIN descend sous le seuil des -140 dB/Hz à 10 kHz. Les pics de bruit très présents sous le kHz sont des bruits techniques, d'origine électronique, mécanique (via les vibrations du banc) ou encore thermique. Leur élimination serait possible et nécessiterait une isolation appropriée du système. L'asservissement induit certes une forte réduction du bruit d'intensité mais également un pic entre 300 kHz et 400 kHz. Ce pic domine le spectre de bruit d'intensité et est causé par la bande passante limitée de la rétroaction. Nous nous attachons maintenant à restreindre ses effets en travaillant sur le filtre de boucle.

### 2.3 Améliorations du filtre de boucle

Le correcteur proportionnel intégral que nous utilisons possède sa propre référence de tension interne. Les fluctuations de cette dernière référence ont été mesurées et sont affichées en gris sur la Fig. 5.8. Nous observons à la Fig. 5.8(a) que son bruit de tension relatif limite aux alentours de -150 dB/Hz le RIN du VECSEL bifréquence asservi. En notant  $S_{DC}$  la densité spectrale de puissance du bruit de la tension DC de référence du correcteur, l'équation (5.10) du RIN en boucle fermé s'enrichit de cette contribution comme suit :

$$\begin{aligned} \text{RIN}_{x+y}^{\text{lock.}}(f) = & \left| \frac{1}{1 + H(f) \cdot \sum_{ij} M_{ij}(f)} \right|^2 \text{RIN}_{x+y}(f) \\ & + \left| \frac{H(f) \cdot \sum_{ij} M_{ij}(f)}{1 + H(f) \cdot \sum_{ij} M_{ij}(f)} \right|^2 \cdot \frac{S_{DC}(f)}{DC^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

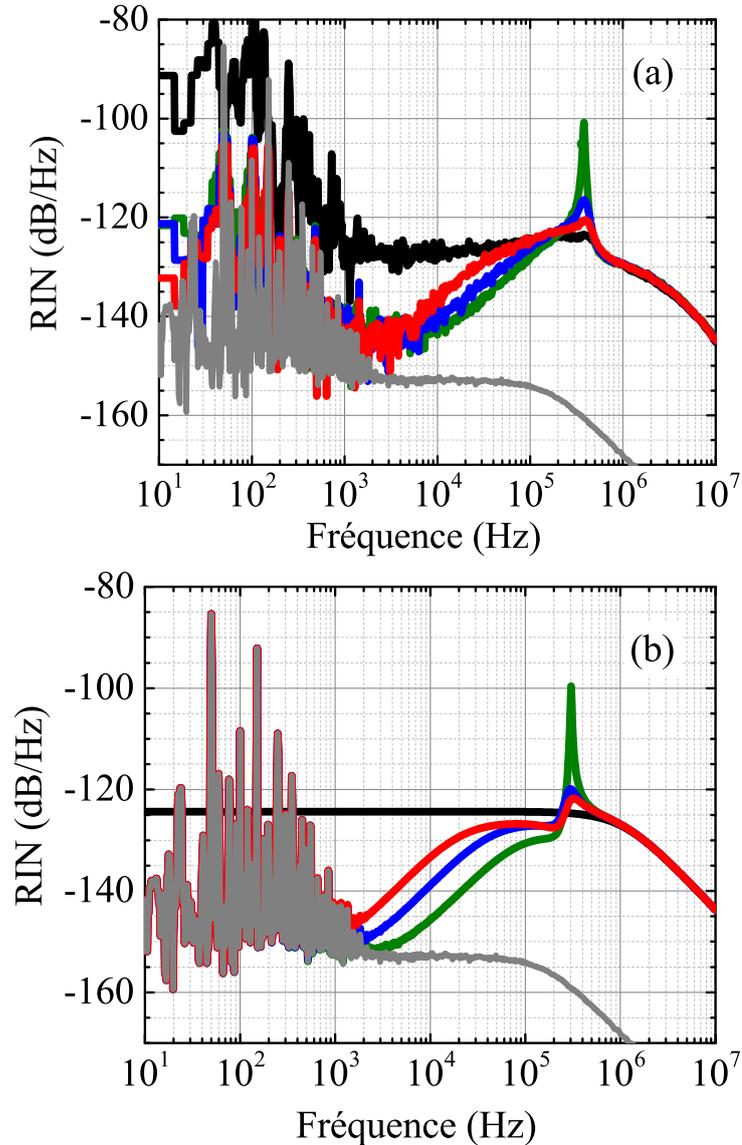


FIGURE 5.8 – Résultats de l’asservissement de l’intensité avec un signal d’erreur issu de la détection de la puissance totale émise avec l’architecture de pompe à deux faisceaux ②. Spectres de RIN expérimentaux (a) et théoriques (b). Courbe noire : RIN du laser en fonctionnement libre. Courbe verte : RIN du laser asservi. Courbes bleue et rouge : spectres de RIN du laser asservi corrigés à l’aide d’un filtre à avance de phase dans deux configurations différentes. Courbe grise : bruit électronique de la référence en tension pour la rétroaction, exploité dans la modélisation (b). Paramètres de l’asservissement :  $f_{LP} = 250$  kHz,  $f_{PI} = 200$  kHz,  $G = 0.08$  et  $Q = 1$ . Paramètres du filtre à avance de phase : (1)  $T = 1.3$   $\mu$ s et  $a = 0.28$  (en rouge); (2)  $T = 0.45$   $\mu$ s et  $a = 0.56$  (en bleu). Paramètres du laser :  $\tau = 1$  ns,  $r_x = 1.38$ ,  $r_y = 1.23$ ,  $C = 0.05$ ,  $\eta = 0.98$ ,  $RIN_p = -133$  dB/Hz,  $\tau_x = 30$  ns,  $\tau_y = 17$  ns. Le bruit de grenaille se situe à -153 dB/Hz.

La figure 5.8(b) montre que le modèle issu de l'équation (5.13) est très fidèle aux mesures (courbes noires et vertes). Cet accord permet d'optimiser numériquement les paramètres du filtre de boucle et, en particulier, de concevoir l'électronique adaptée à la modulation du pic entre 300 kHz et 400 kHz. Un simple filtre à avance de phase est mis en œuvre pour compenser la dérive de phase qui se produit lorsque la bande passante de l'asservissement est dépassée. Les détails du circuit analogique envisagé sont donnés à la Fig. 5.9. Le circuit comporte seulement deux résistances ( $R_1$ ,  $R_2$ ) et une capacité ( $C_1$ ).

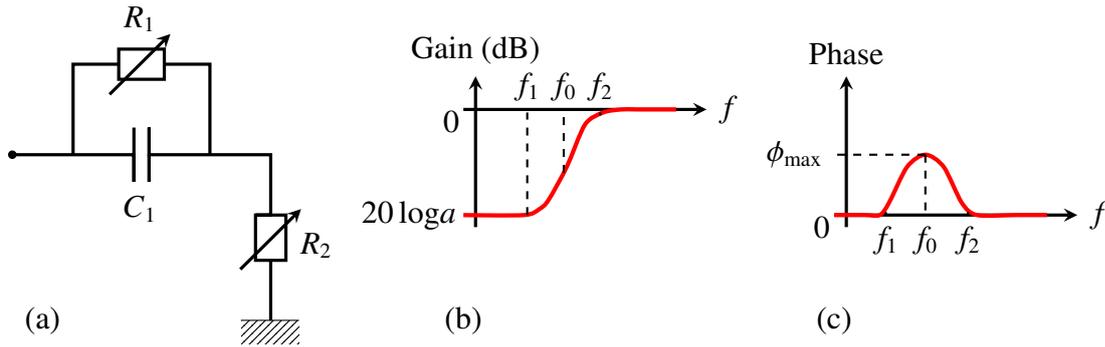


FIGURE 5.9 – Caractéristiques du filtre à avance de phase. Circuit analogique (a) et diagrammes de Bode en gain (b) et phase (c) de sa fonction de transfert.

En remarquant sur la Fig. 5.9(a) le diviseur de tension chargé, il vient immédiatement que la fonction de transfert  $F(f)$  de ce filtre passif vérifie :

$$F(f) = a \frac{1 + if/f_1}{1 + if/f_2} = a \frac{1 + 2i\pi fT}{1 + 2i\pi faT} \quad \text{avec} \quad T = R_1 C_1 \quad \text{et} \quad a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.14)$$

Deux paramètres seulement permettent de décrire cette fonction de transfert : le facteur d'atténuation  $a < 1$  et le temps caractéristique  $T$ . Le diagramme de Bode associé à  $F$  est schématisé aux Figs. 5.9(b,c). Les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  (voir ci-après) séparent différents comportements asymptotiques du gain coïncidant avant le début et la fin de l'avance de phase. L'avance de phase maximale a lieu à  $f_0$  et on note  $\phi_{\max}$  la quantité associée. Cependant, ce filtre nous fait payer le prix d'une atténuation aux basses fréquences du gain  $a < 1$ . La fréquence centrale  $f_0$  est également la fréquence d'inflexion de la courbe de gain. Les quatre paramètres caractéristiques  $f_1$ ,  $f_0$ ,  $f_2$  et  $\phi_{\max}$  peuvent tous être reliés aux deux paramètres physiques  $a$  et  $T$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_1 = 1/(2\pi T), \\ f_0 = 1/(2\pi \sqrt{a} T), \\ f_2 = 1/(2\pi a T), \\ \phi_{\max} = \arcsin [(1 - a) / (1 + a)] > 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Le dimensionnement du filtre à l'expérience nécessite de placer  $f_0$  à la fréquence de 380 kHz correspondant au pic tout en évitant d'induire une atténuation trop forte. La variation dynamique numériquement possible des résistances  $R_1$  et  $R_2$  avec une capacité de l'ordre

de 10 nF permet d'identifier des plages de valeurs intéressantes (de 10  $\Omega$  au k $\Omega$ ). Nous fabriquons le filtre analogique correspondant, muni de résistances variables, qui s'avère très efficace pour l'optimisation du RIN asservi. En effet, les courbes rouges et bleues de la Fig. 5.8 correspondent à différents paramètres de filtres (filtre (1) et filtre (2), respectivement) et attestent d'une très bonne réduction de bruit aboutissant à l'élimination de la quasi-oscillation à 380 kHz. Les caractéristiques précises de ces filtres sont données au tableau 5.1. Nous réalisons que le filtre (1) (courbes rouges) permet une meilleure avance de phase  $\phi_{\max}$  que le filtre (2) (courbes bleues), associée à une meilleure correction du pic<sup>5</sup>, au prix cependant d'une plus grande atténuation qui dégrade le bruit aux basses fréquences.

Configuration	$f_1$ (en kHz)	$f_0$ (en kHz)	$f_2$ (en kHz)	$a$ (en dB)	$\phi_{\max}$ (en °)
Filtre (1)	120	230	440	-11	34
Filtre (2)	350	470	630	-5	16

TABLEAU 5.1 – Paramètres associés aux filtres à avance de phase dans les configurations expérimentales de l'asservissement présenté à la Fig. 5.8 pour le filtre (1)  $T = 1.3 \mu\text{s}$  et  $a = 0.28$  (spectre rouge) ; le filtre (2)  $T = 0.45 \mu\text{s}$  et  $a = 0.56$  (spectre bleu).

En définitive, grâce au nouveau filtre, l'ensemble du spectre de RIN du VECSEL bifréquence se situe sous -120 dB/Hz et une réduction draconienne de bruit s'opère aux basses fréquences sous l'effet de l'asservissement. Avant de déterminer l'impact de nos efforts de régulation de l'intensité sur la stabilité de l'horloge, un asservissement de la phase du battement RF est nécessaire.

### 3 Boucle à verrouillage de la phase optique

Nous avons vu au chapitre 2 que l'excitation de la transition hyperfine du césium 133 dans son état fondamental repose sur le signal RF à 9.2 GHz généré ici par battement entre les modes lasers des polarisations  $x$  et  $y$ . Cependant, le bruit de phase RF du VECSEL bifréquence à 852 nm, comme précédemment étudié au chapitre 3, présente une bande passante de l'ordre du MHz. L'architecture ② de pompe avec deux faisceaux corrélés s'est avérée très efficace pour limiter le transfert du bruit de pompe au VECSEL bifréquence (chapitre 4). C'est ainsi que l'on a montré que la bande passante de bruit n'était plus que de quelques centaines de kHz et donc compatible avec un asservissement.

#### 3.1 Description et modélisation de la boucle

Grâce à l'insertion d'un cristal électro-optique (EO) à l'intérieur de la cavité étendue du VECSEL, nous transformons notre laser bifréquence en VCO RF. En mettant en place

5. En fait,  $f_0$  n'est pas tout à fait centrée à la fréquence du pic mais nos propos tiennent pour l'avance de phase évaluée à la fréquence du pic.

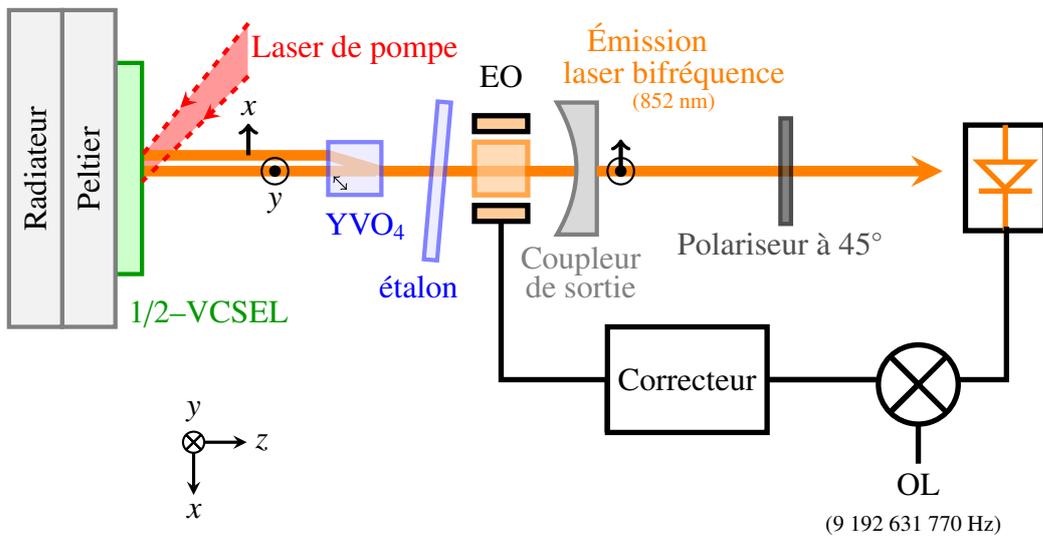


FIGURE 5.10 – Schéma de la rétroaction sur la phase du battement RF par la PLL. EO : cristal électro-optique en MgO :SLT. OL : oscillateur local électronique sur lequel on asservit le battement du VECSEL bifréquence.

une régulation de ce contrôle de la biréfringence, une PLL optique est réalisée telle que schématisée à la Fig. 5.10. Nous utilisons un cristal en tantalate de lithium  $\text{LiTaO}_3$  stœchiométrique (SLT). Ce choix de matériau est motivé par ses coefficients électro-optiques élevés  $r_{33}$  et  $r_{13}$  le long des axes  $x$  et  $z$ , en considérant que le champ électrique s'applique sur l'axe  $x$  et que le champ laser se propage selon  $z$  (Fig. 5.10). Ce cristal est dopé en oxyde de magnésium MgO afin de réduire les effets photoréfractifs. Le cristal de MgO :SLT que nous utilisons est un parallélépipède de volume  $2 \times 2 \times 1 \text{ mm}^3$ . Une lame  $\lambda/2$  et un PBS jouent le rôle d'un polariseur à  $45^\circ$  des axes  $x$  et  $y$  avant mesure avec une photodiode rapide. Après une détection de phase par rapport à un oscillateur local RF, le signal contenant le bruit de phase passe par un filtrage et une amplification pour constituer un signal d'erreur. Enfin, la régulation permet d'appliquer une rétroaction à la phase du battement via la tension appliquée au cristal EO.

La figure 5.11 montre l'effet d'une telle PLL optique sur le spectre du battement pris à l'analyseur de spectre électrique. Le battement RF obtenu en boucle ouverte (courbe bleue) présente des bandes latérales de bruit qui sont fortement réduites une fois la PLL mise en place (courbe orange). Avant de passer à la modélisation de la boucle en prenant en compte ses détails, notons que la bande passante de l'asservissement réalisé dépasse bien les 100 kHz.

Le schéma bloc de la Fig. 5.12 présente les détails de la PLL optique. Nous notons la densité spectrale de bruit de phase de l'oscillateur local de référence  $\mathcal{S}_{\phi_{\text{OL}}}(f)$ . L'amplification et le filtrage passe bas (PB(1) sur la Fig. 5.12) permettent de générer le signal d'erreur traité par le contrôleur proportionnel-intégral-dérivé (PID). La fonction de transfert du régulateur PID est notée  $H_{\text{PID}}$  et caractérisée par les fréquences de coupure  $f_{\text{PI}}$ ,  $f_{\text{D}}$  et le gain différentiel  $G_{\text{D}}$ . Deux voies de rétroaction sont ensuite sommées pour la régulation en tension du

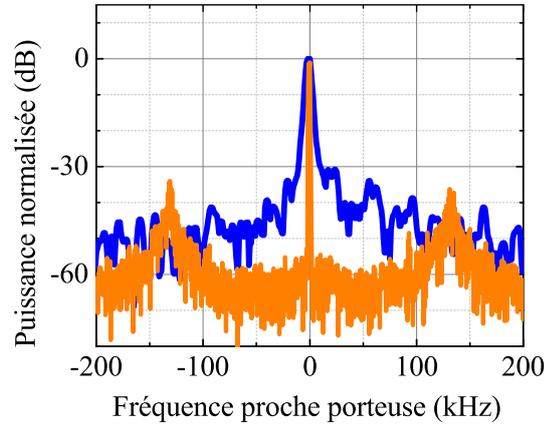


FIGURE 5.11 – Battement RF du VECSEL bifréquence en fonctionnement libre (courbe bleue) et en présence de la boucle à verrouillage de la phase optique (courbe orange). Les bandes passantes de résolution sont, respectivement, 7.2 kHz et 820 Hz.

crystal EO : une voie rapide (jusqu'à 8 MHz) qui est directe, et une voie lente (jusqu'à 100 kHz) à travers un amplificateur haute tension. Le cristal EO s'assimile à une capacité de valeur  $\varepsilon l_y l_z / l_x \approx 0.4$  pF avec sa permittivité diélectrique  $\varepsilon$  et ses dimensions  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$ . Les deux voies de rétroaction, similaires à des circuits RC, sont modélisées par des filtres passe-bas, notés PB(2) et PB(3) à la Fig. 5.12.

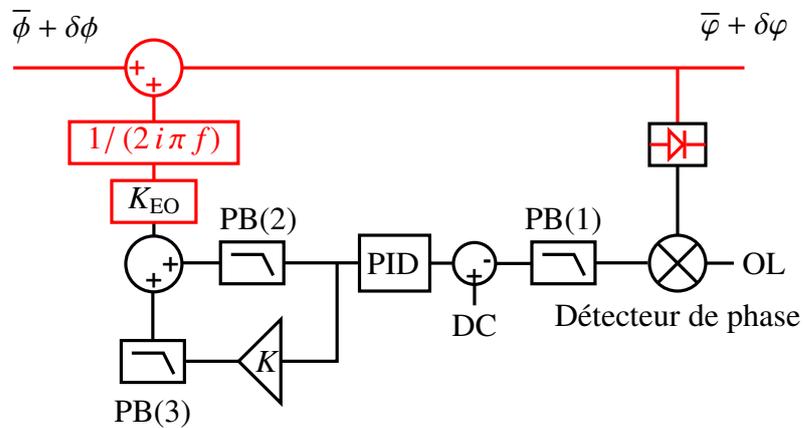


FIGURE 5.12 – Schéma bloc de la PLL optique.  $\phi$  (resp.  $\varphi$ ) : phase du battement en boucle ouverte (resp. fermée). PB(1), PB(2), PB(3) : filtres passe-bas. OL : oscillateur local RF.

La fonction de transfert totale  $H$  de la boucle de rétroaction s'écrit de la façon suivante :

$$H(f) = G \cdot H_{\text{PID}}(f) [H_{\text{PB}(2)}(f) + K \cdot H_{\text{PB}(3)}(f)] H_{\text{EO}}(f), \quad (5.16)$$

avec  $K$  représentant le gain de l'amplificateur haute tension et  $G$  un facteur de gain global. Dans l'expression (5.16),  $H_{\text{EO}}$  est la fonction de transfert du cristal EO entre la tension

qui lui est appliquée et la correction de phase du battement induite par variation de la biréfringence. En fait, sous l'influence du champ électrique imposé par la différence de potentiel entre les électrodes du cristal EO séparées d'une longueur  $l_x$ , le cristal joue le rôle d'une lame à retard contrôlé (effet Pockels). La tension appliquée change ainsi le déphasage intra-cavité entre l'onde ordinaire qui voit un indice de réfraction  $n_o$  et l'onde extra-ordinaire qui voit un indice  $n_e$ . À l'intérieur de la cavité laser résonnante de longueur optique  $\simeq 2L_{\text{cav}}$  pour l'aller-retour, le déphasage ainsi produit modifie alors la différence de fréquence entre les modes  $x$  et  $y$ . La fonction de transfert entre la tension appliquée et la différence de fréquence induite est notée  $K_{\text{EO}}$  dans le schéma bloc 5.12. Une fois cette différence de fréquence traduite en terme de phase du battement, on obtient la fonction de transfert [47] :

$$H_{\text{EO}}(f) = \frac{1}{2i\pi f} \cdot \frac{c}{2L_{\text{cav}}} \cdot \frac{2\pi l_z}{\lambda} \cdot \frac{1}{l_x} \left[ \frac{n_e^3 \cdot r_{33}}{2} - \frac{n_o^3 \cdot r_{13}}{2} \right]. \quad (5.17)$$

En définitive, la densité spectrale de bruit de phase du battement en présence de l'asservissement est liée à sa valeur en boucle ouverte  $\mathcal{S}_\phi(f)$  selon l'expression :

$$\mathcal{S}_\phi^{\text{lock}}(f) = \frac{\mathcal{S}_\phi(f) + |H(f)|^2 \cdot \mathcal{S}_{\phi_{\text{OL}}}(f)}{|1 + H(f)|^2}. \quad (5.18)$$

### 3.2 Performances et limites de la régulation de la phase du battement

La courbe noire sur la Fig. 5.13 présente le spectre de bruit de phase en boucle ouverte mesuré avec l'architecture de pompe ② à deux faisceaux. Au-delà de 100 kHz, le niveau du bruit de phase se situe sous -95 dBc/Hz. Les autres spectres de bruit de phase (vert, bleu et rouge) montrés à la Fig. 5.13(a) témoignent d'une réduction drastique suite à l'utilisation de la PLL optique. Nous obtenons un niveau de bruit de phase qui se situe sous -103 dBc/Hz à 100 Hz de la porteuse RF. Ce niveau est très clairement limité dans notre expérience par le niveau de bruit de phase de l'oscillateur local (courbe grise). La correction PI permet d'abord d'aboutir au spectre de bruit affiché en vert à la Fig. 5.13(a). La modélisation associée à la Fig. 5.13(b) reproduit fidèlement l'allure de ce spectre expérimental. Une correction différentielle est ensuite mise en œuvre afin d'obtenir une meilleure réduction sur la plage de fréquence de 20 kHz à 100 kHz, ce qui est effectivement payant comme constaté sur le spectre bleu des Figs. 5.13(a,b). Enfin, en poussant le gain de la boucle à son plus haut niveau, nous obtenons nos meilleurs performances de régulation de la phase du battement qui s'affichent en rouge sur les Figs. 5.13(a,b).

Ayant maintenant réduit efficacement à la fois le bruit d'intensité (Fig. 5.8) et le bruit de phase du battement (Fig. 5.13) ainsi qu'optimisé les asservissements associés, se pose la question de l'impact du niveau de bruit démontré sur la stabilité de l'horloge CPT à court terme.

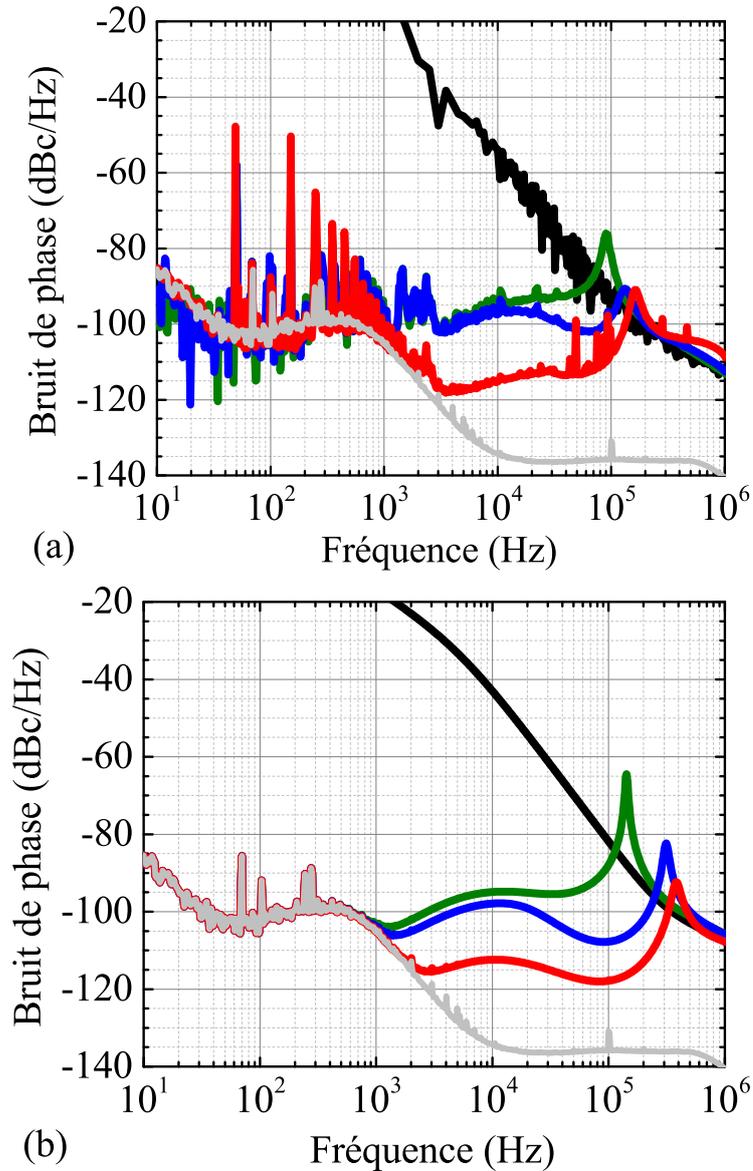


FIGURE 5.13 – Spectres du bruit de phase du battement RF mesurés (a) et modélisés (b) en fonctionnement libre et en présence de la PLL optique. Courbe noire : laser en boucle ouverte. Courbes vertes, bleues et rouges : spectres de bruit de phase obtenus après asservissement en utilisant, respectivement, un régulateur PI, un régulateur PID et un régulateur PID avec un maximum de gain. Courbe grise : bruit de phase de l'oscillateur local. Paramètres de l'asservissement :  $f_{PI} = 20$  kHz,  $f_D = 50$  kHz,  $G_D = 15$ ,  $K = 30$ . Paramètres du laser :  $L_{cav} = 5$  cm,  $\alpha = 5.2$ ,  $P_{p,x} = 0.48$  W,  $P_{p,y} = 0.45$  W,  $R_T = 40$  K.W<sup>-1</sup>,  $\tau_T = 30$   $\mu$ s,  $\Gamma_T = 1.39 \times 10^{-7}$  K<sup>-1</sup>. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 5.9. Paramètres du cristal EO :  $n_e = 2.1418$ ,  $n_o = 2.1441$ ,  $r_{33} = 6.96$  pm.V<sup>-1</sup>,  $r_{13} = 29.6$  pm.V<sup>-1</sup> [47, 89, 90].

## 4 Contribution à la stabilité de l'horloge à court terme

L'interrogation impulsionnelle<sup>6</sup> des atomes de césium, menant à l'obtention des franges de Ramsey, conduit à un échantillonnage intrinsèque de la correction appliquée à l'oscillateur local RF qui est transporté optiquement par le VECSEL bifréquence. La correction ne contient par conséquent que l'information mesurée pendant l'interrogation des atomes. G.J. Dick a démontré dans la référence [91] que, par effet de repliement de spectre, cette correction incomplète ajoute à l'horloge une source d'instabilité par conversion de bruit. Nous allons d'abord donner les outils pour la description de cette conversion du bruit de phase de l'oscillateur local transporté par le VECSEL en bruit de fréquence de l'horloge. Nous distinguerons par la suite les contributions du bruit de phase du battement et du bruit d'intensité avant de procéder à l'évaluation de l'instabilité d'horloge induite par l'effet Dick.

### 4.1 Effet Dick, fonction de sensibilité et bruit de phase

L'ensemble des résultats théoriques, outils et considérations relatifs à l'horloge que nous exposons dans ces sections est le fruit des travaux du SyRTE à l'observatoire de Paris [67, 76, 77, 92]. Le manuscrit de thèse de F. Tricot [67] en fournit un résumé que nous allons exploiter.

Rappelons que la séquence d'horloge considérée est composée de deux impulsions de durée  $T_i = 2$  ms séparées de  $T_R = 4$  ms, le temps de Ramsey d'évolution libre. Ainsi, la durée totale de cycle de l'horloge est  $T_c = 6$  ms. L'interrogation de fréquence caractéristique  $1/T_c \approx 167$  Hz induit alors par effet Dick une contribution du bruit d'oscillateur local à l'instabilité d'horloge. La variance d'Allan relative  $\sigma_{y\text{Dick}}^2(\tau)$  au temps  $\tau$  due à la densité spectrale du bruit de fréquence relative  $\mathcal{S}_y(f)$  de l'oscillateur local vérifie :

$$\sigma_{y\text{Dick}}^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m^2}{g_0^2} \mathcal{S}_y\left(\frac{m}{T_c}\right). \quad (5.19)$$

On remarque que la contribution du bruit de l'oscillateur local intervient aux harmoniques de la fréquence d'interrogation  $1/T_c$ . Les coefficients  $g_m$  et  $g_0$  proviennent de la fonction de sensibilité  $g(t)$  qui dépend de la réponse atomique. Cette fonction peut, plus précisément, être définie comme la réponse des atomes à une variation infinitésimale  $\Delta\phi$  de la phase de l'oscillateur local :

$$g(t) = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\delta S(t, \Delta\phi)}{\Delta\phi}, \quad (5.20)$$

où  $\delta S$  représente la fluctuation du signal d'horloge à un instant  $t$ . À partir de cette fonction, nous définissons  $g_0$  et  $g_m^2 = g_{m,s}^2 + g_{m,c}^2$  comme les coefficients de Fourier satisfaisant aux

6. Voir la séquence d'horloge du chapitre 2, reproduite plus loin à la Fig. 5.14.

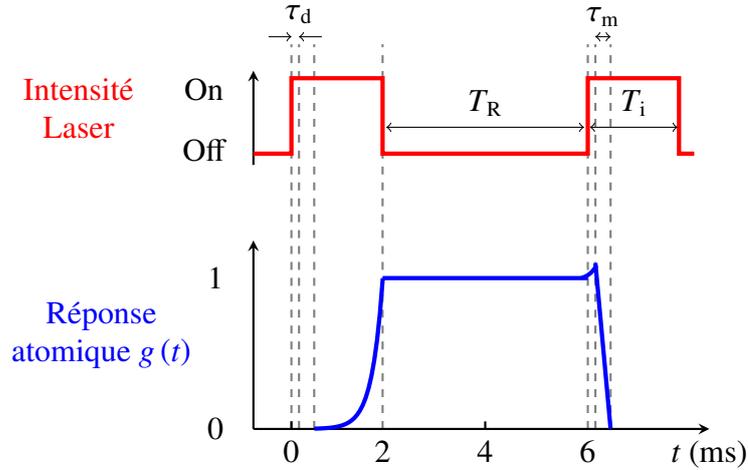


FIGURE 5.14 – Représentation de la séquence d'horloge (en rouge) et de la fonction de sensibilité (en bleu) en fonction du temps. La durée de détection est exagérée pour plus de visibilité.

égalités :

$$g_0 = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(t) dt, \quad (5.21)$$

d'une part et

$$\begin{pmatrix} g_{m,s} \\ g_{m,c} \end{pmatrix} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \begin{pmatrix} \sin(2\pi m t/T_c) \\ \cos(2\pi m t/T_c) \end{pmatrix} g(t) dt, \quad (5.22)$$

d'autre part. La fonction de sensibilité  $g(t)$  a été numériquement évaluée et analytiquement approximée pour le mécanisme CPT dans le césium grâce aux travaux de la référence [77]. Notons que cette évaluation basée sur les équations de Bloch optiques (voir annexe B) est en bon accord avec les résultats expérimentaux bien qu'elle ne tienne guère compte de la totalité des niveaux Zeeman voisins.

L'allure obtenue pour cette fonction de sensibilité est décrite (en bleu) à la Fig. 5.14, en parallèle de la séquence d'horloge (en rouge). Lors du pompage des atomes dans l'état noir, la fonction de sensibilité est exponentiellement croissante. La sensibilité des atomes présente ensuite un plateau durant le temps de Ramsey  $T_R$  d'évolution libre. Pendant une durée  $\tau_d$  correspondant au temps de réponse de la photodétection, un début d'accroissement exponentiel accompagne l'arrivée de la seconde impulsion. Une décroissance très rapide ramène enfin la fonction de sensibilité à 0 lors de la phase de détection d'une durée  $\tau_m$ . En réalité, la détection, pendant laquelle le signal CPT est moyenné, a une durée  $\tau_m = 25 \mu\text{s}$ , ce qui est faible à l'échelle du cycle  $\tau_m \ll T_R$ . En outre, contrairement à ce qu'affiche la Fig. 5.14 pour plus de visibilité, le temps de réponse du capteur (environ  $10 \mu\text{s}$ ) est, en pratique, lui-même faible devant le temps de détection :  $\tau_d < \tau_m$ . Par conséquent, la partie haute de la fonction de sensibilité peut tout à fait être considérée comme plate et débarrassée de l'excroissance précédant sa remise à 0.

En calant l'origine des temps  $t = 0$  à la première impulsion, le travail effectué dans référence [77] mène à l'écriture approchée<sup>7</sup> suivante pour la fonction de sensibilité :

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left[(t - T_i)(\gamma_c + 1/\tau_p)\right] & \text{pour } \tau_d + \tau_m \leq t \leq T_i, \\ 1 & \text{pour } T_i \leq t \leq T_c + \tau_d, \\ 1 - \frac{t - (T_c + \tau_d)}{\tau_m} & \text{pour } T_c + \tau_d \leq t \leq T_c + \tau_d + \tau_m. \end{cases} \quad (5.23)$$

Le paramètre  $\gamma_c$  dans cette expression correspond au taux de relaxation de la cohérence hyperfine et  $\tau_p = \Gamma^*/\Omega^2$  au taux de pompage défini comme le rapport du taux de relaxation  $\Gamma^*$  du niveau excité sur la somme quadratique  $\Omega^2$  des pulsations de Rabi des transitions (voir Annexe B). Nous utiliserons pour l'évaluation qui suit les mêmes paramètres que la référence [77], à savoir  $\gamma_c = 30 \text{ s}^{-1}$  (négligeable),  $\Gamma^*/2 = 1.5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$  et  $\Omega_{31} = \Omega_{32} = 2.9 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Comme la pulsation de Rabi résulte de l'interaction lumière-dipôle, le terme  $\Omega^2$  dépend en fait de l'éclairement qui est ici évalué à  $5 \mu\text{W.mm}^{-2}$  par polarisation linéaire dont le faisceau fait 1.7 cm de diamètre à la traversée de la cellule (soit environ 1.1 mW). Nous pourrions éventuellement ajuster cette valeur, mais nous nous y tiendrons pour une meilleure comparaison à cette référence.

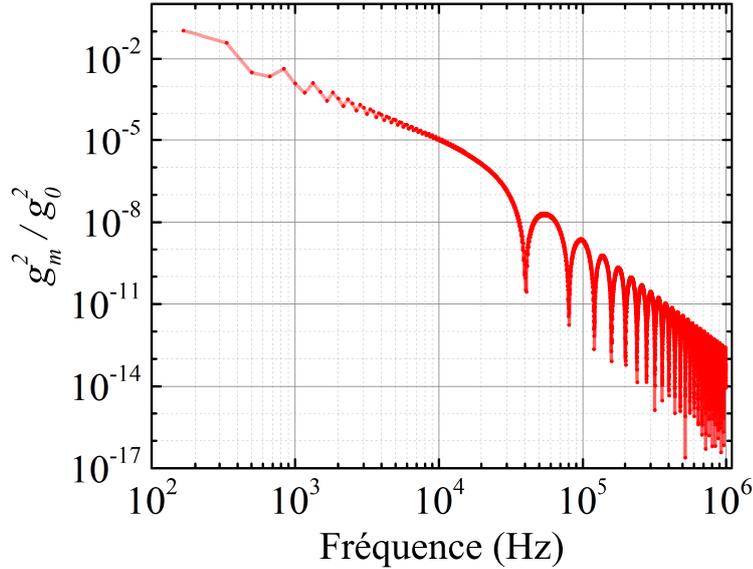


FIGURE 5.15 – Amplitude des coefficients de Fourier  $(g_m/g_0)^2$  de la fonction de sensibilité correspondant à la séquence d'horloge CPT.

La figure 5.15 présente l'évolution des coefficients de Fourier  $(g_m/g_0)^2$  aux différentes harmoniques de la fréquence d'interrogation  $1/T_c$ . Ce sont bien les rapports  $(g_m/g_0)^2$  qui interviennent dans l'expression de la variance d'Allan (5.19). On remarque que la décroissance des coefficients s'effectue en -20 dB/décade jusqu'à 10 kHz puis en -40 dB/décade,

7. Le calcul de la variance d'Allan induite par effet Dick à l'aide de cette expression approchée donne moins de 1% de différence par rapport à celle que l'on peut évaluer numériquement à partir des équations de Bloch optiques.

asymptotiquement, au-delà. En plus de ce comportement de l'enveloppe, nous notons un effondrement des coefficients à la fréquence de 40 kHz et à ses harmoniques. Cette fréquence correspond à la fréquence de Fourier associée au temps de détection  $\tau_m = 25 \mu\text{s}$ , pendant lequel le signal est moyenné et la sensibilité décroît. Non seulement à cause de la décroissance en -40 dB/décade mais aussi à cause de ces effondrements, il pourrait être tentant d'affirmer que le bruit au-delà de grosso-modo 30 kHz ne contribue pas à l'instabilité de l'horloge par rapport au bruit basse fréquences. Cependant, comme nous l'avons précédemment mesuré à la Fig. 5.13, le spectre de bruit de phase du battement RF, après asservissement, n'est pas plat et présente même un pic aux alentours des 100 kHz. En définitive, nous prendrons en considération tout l'étendue des spectres mesurés et affichés aux figures précédentes.

Enfin, le lien entre le bruit de phase de notre signal RF à  $\nu_0 = 9.2 \text{ GHz}$  optiquement transporté et la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence s'écrit :

$$\mathcal{S}_y(f) = \frac{f^2}{\nu_0^2} \mathcal{S}_\phi(f) . \quad (5.24)$$

On peut ainsi insérer via l'équation (5.24), nos spectres de bruit de phase mesurés dans l'équation (5.19) pour évaluer la variance d'Allan induite en utilisant les coefficients de Fourier de la Fig. 5.15. En fait, une étape supplémentaire s'impose du fait de l'échantillonnage de nos mesures. Il nous faut interpoler numériquement sur les spectres mesurés les points aux différentes harmoniques  $m/T_c$ .

Avant de réaliser ces prédictions quant à l'instabilité de fréquence relative de l'horloge induite par le bruit de phase du battement RF du VECSEL bifréquence, voyons comment son bruit d'intensité peut également contribuer.

## 4.2 Prise en compte du bruit d'intensité

Afin de comprendre l'influence du RIN sur l'instabilité de fréquence relative de l'horloge, replongeons nous dans le travail effectué au SyRTE. Cette influence repose sur la variation induite sur le signal CPT par une variation d'intensité du VECSEL. Ce signal CPT est sommairement schématisé à la Fig. 5.16. Les paramètres d'horloge suivant y sont définis : le signal à mi-hauteur  $S$ , le signal de fond hors résonance  $V_f$  et l'amplitude  $A$  de la frange d'horloge. Il a été trouvé que tous ces paramètres évoluent linéairement avec la puissance totale envoyée sur les atomes de césium de la cellule. Ceci indique une conservation du RIN à la traversée de la cellule, ce qui a été vérifié expérimentalement, à 7% près. On suppose alors qu'en bonne approximation les fluctuations d'intensité seront converties en fluctuations de la fréquence relative de l'horloge. La mesure du signal d'horloge représente une fenêtre temporelle de durée  $\tau_m$ . Le bruit d'intensité joue ainsi un rôle pendant une durée  $\tau_m$  à chaque cycle d'horloge, de durée  $T_c$ . Le choix du signal  $S$  à mi-hauteur de la frange centrale influe sur le signal d'erreur qui sert à l'asservissement de l'horloge. Il est montré

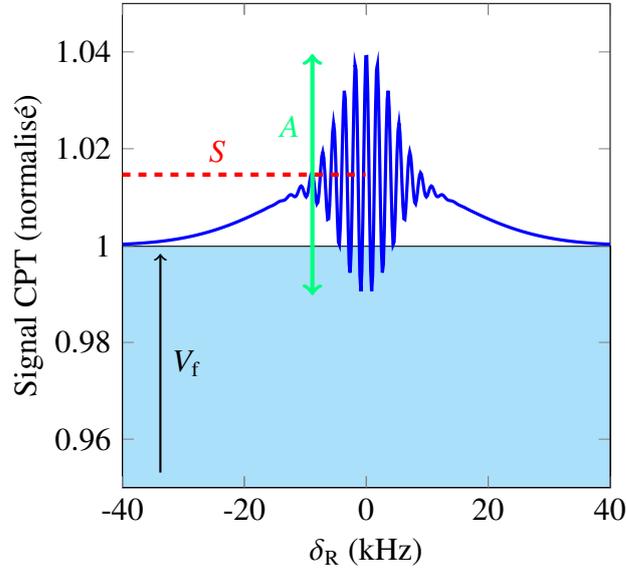


FIGURE 5.16 – Franges de Ramsey en fonction du désaccord Raman  $\delta_R$ . Le signal est normalisé par rapport au fond hors résonance  $V_f$ . L'amplitude de la frange centrale  $A$  est représentée par la double flèche verte tandis que le signal  $S$  à mi-hauteur de la frange centrale est représenté par les pointillés rouges.

alors que la variance du signal d'erreur causée par le RIN vérifie :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{RIN}}^2 &= 2 \int_0^{\infty} \text{sinc}^2(\pi \tau_m f) \cdot [1 - \cos(2\pi f T_c)] \times \text{RIN}(f) df \\ &= 2 \int_0^{\infty} H_{\text{RIN}}^2(T_c, \tau_m, f) \times \text{RIN}(f) df.\end{aligned}\quad (5.25)$$

On reconnaît dans cette expression la fonction sinus cardinal provenant de la transformée de Fourier de la fonction rectangle associée à la fenêtre de mesure de durée  $\tau_m$ . Cette variance dépend aussi du temps de cycle  $T_c$ . On a noté  $H_{\text{RIN}}^2$  la fonction de transfert pondérant le spectre de bruit d'intensité. L'évolution de cette fonction de transfert en fonction de la fréquence de Fourier est affichée à la Fig. 5.17. Nous observons une enveloppe ayant l'allure d'un filtre passe-bande entre 100 Hz et 10 kHz, avec une amplitude moyenne de 1. La montée en 20 dB/décade aux basses fréquences provient du cosinus et la descente en -20 dB/décade de la fonction  $\text{sinc}^2$ . Les fréquences de coupure de ce filtre passe-bande sont  $1/T_c$  et  $1/\tau_m$ . Les dérivées lentes devant  $1/T_c$  et les dérivées rapides comparé à  $1/\tau_m$  sont rejetées. Il serait possible de minimiser la conversion du bruit d'intensité en rapprochant l'une de l'autre les deux fréquences, c'est-à-dire en diminuant le temps de cycle et en augmentant le temps de moyennage, mais cela se ferait probablement au détriment des performances globales. Des effondrements s'associent aux harmoniques de ces fréquences de coupure.

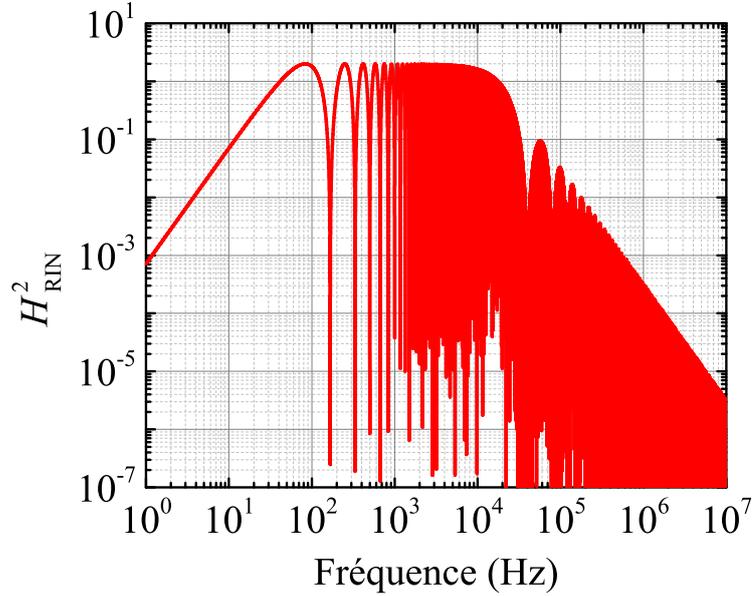


FIGURE 5.17 – Spectre de la fonction de transfert du bruit d'intensité relatif  $H_{\text{RIN}}^2$  avec  $T_c = 6$  ms et  $\tau_m = 25$   $\mu$ s.

Encore une fois, même si le transfert de bruit n'est efficace que sur une plage limitée, tout le spectre de bruit d'intensité de 10 Hz à 10 MHz sera considéré.

Enfin, il a été montré dans la référence [67] que la contribution de ce bruit du signal d'erreur de l'horloge à l'instabilité en fréquence relative de l'horloge CPT pouvait s'assimiler à la contribution d'un bruit blanc. Dans ce cas, en notant  $\Delta\nu = 1/(2T_R)$  la largeur à mi-hauteur en fréquence de la frange centrale, l'écart type d'Allan induite par les fluctuations d'intensité du VECSEL s'écrivent :

$$\sigma_y^{\text{Dick}}(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \frac{\sigma_{\text{RIN}}}{A/S} \sqrt{\frac{T_c}{\tau}}. \quad (5.26)$$

Le facteur  $A/S$  constitue le contraste du signal CPT qui vaut typiquement 10% en pratique. L'évaluation de  $\sigma_y^{\text{Dick}}(1\text{ s})$  induit par nos spectres de RIN sera réalisée en injectant le résultat de la variance obtenue par l'équation (5.25) dans l'équation (5.26). En pratique, l'intégrale de l'équation (5.25) est bornée supérieurement à  $f_{\text{max}}$ , la fréquence de Fourier la plus haute du spectre de RIN.

Les niveaux du bruit d'intensité du VECSEL bifréquence et du bruit de phase de son battement RF expérimentalement observés aux sections 2 et 3 vont désormais pouvoir conduire à une prédiction de la stabilité d'horloge à court terme.

### 4.3 Prédications à partir des résultats de réduction de bruit

Grâce aux sections précédentes, la stabilité à court terme peut être évaluée par l'écart type d'Allan à 1 s d'interrogation des atomes aussi bien pour les spectres de bruit obtenus expérimentalement que pour les spectres issus de la modélisation. L'ensemble des résultats est résumé au tableau 5.2 pour le VECSEL bifréquence en boucle ouverte ainsi que pour le laser en présence d'un asservissement de l'intensité ou d'une PLL optique.

Grâce au modèle du bruit en boucle ouverte, nous réalisons que la réduction du bruit de phase induite grâce aux fortes corrélations de pompe s'accompagne d'une réduction de l'écart type d'Allan d'un facteur 26. Le tableau 5.2 montre également que l'écart type d'Allan induit par l'effet Dick et calculé à l'aide du modèle est plus de trois fois plus faible que celui calculé à partir des mesures du RIN en boucle ouverte. Cet écart provient de l'existence des pics de bruit aux basses fréquences dans le spectre de RIN expérimental. Ces bruits techniques, principalement d'origine électronique, ne sont pas reproduits par le modèle. Il en résulte que la prédiction de la stabilité d'horloge est sous-estimée lorsqu'on utilise le modèle, nous utiliserons donc les spectres expérimentaux. L'utilisation du modèle permet néanmoins de comprendre une tendance comme la diminution avec  $\eta$  que l'on vient de mentionner et dont l'effet est plus ténu pour le bruit d'intensité.

	Bruit d'intensité	Bruit de phase
Situation	$\sigma_y \times 10^{13}$ à 1 s induit par effet Dick	
À partir du modèle en boucle ouverte		
$\eta = 0$	22	$8.3 \times 10^4$
$\eta = 0.5$	20	$5.9 \times 10^4$
$\eta = 1$	17	3200
À partir des mesures		
Boucle ouverte	69	×
RIN asservi	5.8	×
RIN asservi + filtre (1)	4.2	×
RIN asservi + filtre (2)	4.1	×
OPLL PI	×	14
OPLL PID	×	9.1
OPLL PID (gain max)	×	2.3
OL	×	1.7

TABLEAU 5.2 – Contribution à la stabilité à court terme du bruit d'intensité du VECSEL et du bruit de phase de son battement RF. Les écarts types d'Allan sont calculés numériquement à partir des équations allant de (5.19) à (5.26) et des spectres affichés aux Figs. 5.8(a) et 5.13(a). La partie exploitant le modèle utilise les mêmes valeurs des paramètres qu'auparavant et ces valeurs restent fixées alors que l'on fait varier  $\eta$ .

Les meilleures performances de stabilité pour le VECSEL asservi sont produites, d'une part, avec la régulation PID de gain maximum pour le bruit de phase du battement (courbe

rouge sur la Fig. 5.13(a)) et, d'autre part, avec le filtre (2) pour le RIN (courbe bleue sur la Fig. 5.8(a)). L'écart type d'Allan total induit pour l'horloge par le VECSEL bifréquence via l'effet Dick vaut alors :

$$\sigma_y^{\text{Dick}}(1\text{ s}) = \sqrt{(4.1)^2 + (2.3)^2} \times 10^{-13} < 5 \times 10^{-13}. \quad (5.27)$$

On s'attend donc à un écart type d'Allan de  $4.7 \times 10^{-13}$  à 1 s, ce qui est bien compatible avec les performances de stabilité exigeantes que l'on vise pour cette horloge CPT.

En outre, comme nous le voyons dans le tableau 5.2, le niveau de bruit de phase de l'oscillateur local (courbe grise de la Fig. 5.13) est responsable d'une majeure partie du  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  calculé pour la contribution du bruit de phase. Ceci offre une perspective d'amélioration directe grâce à l'utilisation d'un oscillateur local RF de haute volée, comme celui décrit dans la référence [79].

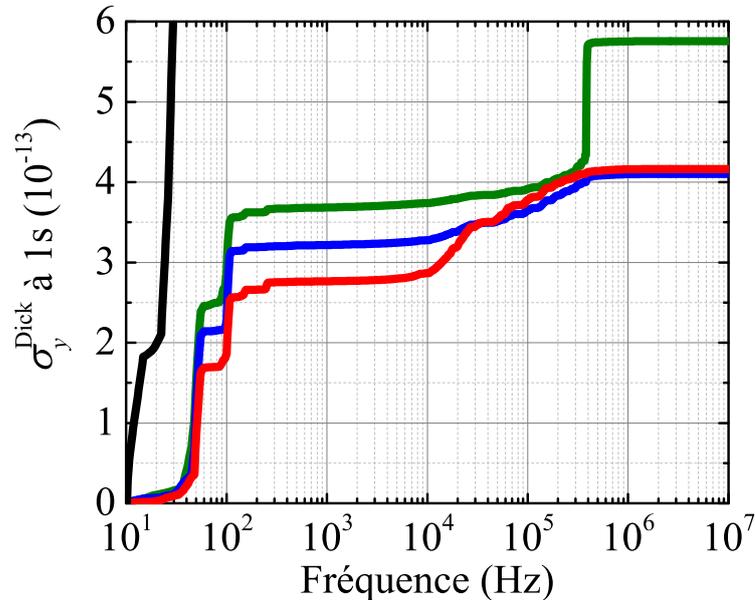


FIGURE 5.18 – Évolution de la contribution du RIN à l'instabilité de la fréquence relative d'horloge à 1 s en fonction de la fréquence de Fourier maximale  $f_{\text{max}}$  du spectre. Les spectres de RIN utilisés sont ceux de la Fig. 5.8(a). On a donc en noir l'impact du RIN du laser en boucle ouverte sur  $\sigma_y^{\text{Dick}}(1\text{ s})$ , en vert (resp. rouge et bleu) ceux du RIN en boucle fermée sans optimisation (resp. avec le filtre (1) et le filtre (2)).

Quant au RIN, une analyse de l'évolution de l'écart type d'Allan à 1 s en fonction de la fréquence maximale du spectre permet d'en comprendre la contribution. En effet, la figure 5.18 montre comment se construit  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  en balayant le spectre pour l'ensemble des réalisations expérimentales de la Fig. 5.8(a). Nous observons qu'en fait le bruit électronique à 50 Hz et 100 Hz a une contribution majeure à l'instabilité prédite. Ces pics de bruits techniques dans les spectres se traduisent par des sauts importants pour l'ensemble des

courbes qui disqualifient d'emblée le RIN en boucle ouverte (courbe noire) pour la stabilité d'horloge visée. Nous observons ensuite sur la plage de 100 Hz à 10 kHz, qui constitue pourtant la fenêtre de transfert du filtre passe-bande  $H_{\text{RIN}}^2$ , que la régulation de l'intensité est très efficace puisque les courbes vertes, rouges et bleues présentent toutes un plateau. Lorsque le RIN excède les -140 dB/Hz sur les deux décades suivantes, de 10 kHz à 1 MHz, et que l'on sort progressivement de la bande passante de l'asservissement, une élévation de  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  se produit. À ce moment là, la courbe rouge passe au dessus de la courbe bleue du fait de l'atténuation plus importante induite par le filtre (1) par rapport au filtre (2) (voir tableau 5.1). À la fréquence de 380 kHz, lorsque la phase de la fonction de transfert de la boucle de rétroaction passe par  $\pi$ , un saut de  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  bien marqué survient pour la régulation PI simple (courbe verte). La contribution supplémentaire d'environ  $2 \times 10^{-13}$  dans la plage de fréquences au-dessus de 100 kHz est rédhibitoire pour les performances d'horloges visées. Les deux filtres (courbes rouge et bleu) s'avèrent très efficaces pour éviter ce saut ultime de l'écart type d'Allan. Un plateau de  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  est atteint après 1 MHz, indiquant la convergence de l'intégrale de l'équation (5.25). Au-delà, la décroissance à la fois du RIN et de  $H_{\text{RIN}}^2$  est très rapide, leurs niveaux sont très faibles et donc la valeur de  $\sigma_y^{\text{Dick}}$  demeure inchangée.

En définitive, en plus du filtre à avance de phase qui a porté ses fruits, une nouvelle voie d'amélioration significative ressort de cette étude et concerne les bruits se situant sous 100 Hz. En effet, il serait judicieux d'assurer simplement une meilleure isolation du bruit du secteur électrique et une meilleure distribution de la masse dans le système électronique.

## Conclusions et perspectives

Au cours des chapitres 3, 4 et 5, nous avons caractérisé et optimisé la dynamique de VECSELS bifréquences. Nous avons identifié des stratégies de réduction du bruit du laser, en particulier du transfert de bruit provenant de la pompe, puis nous les avons mises en œuvre grâce à une nouvelle architecture de pompe ainsi qu'avec un asservissement de l'intensité et une PLL optique sur le battement RF.

La stratégie de réduction du bruit transféré de la pompe a mis en avant la nécessité d'utiliser une pompe très stable et dont la puissance permet des taux de pompage élevés pour les deux modes puis de réduire la saturation croisée tout en maintenant de fortes corrélations des bruits de pompe. Des taux de pompage équilibrés favorisent aussi cette réduction. Le pompage de la structure émettant à la longueur d'onde télécom à l'aide d'une diode laser fibrée monomode a permis de minimiser le transfert de bruit d'une pompe déjà très stable grâce à des corrélations de pompe totales. Nous avons montré que le bruit de phase du battement était alors au niveau du bruit d'émission spontanée entre 50 kHz et 300 kHz. Il n'est malheureusement pas possible de transposer cette solution au VECSEL émettant à 852 nm, la longueur d'onde de la transition  $D_2$  du césium, dans la perspective d'élaboration d'une horloge CPT. Nous avons alors adopté une nouvelle architecture de pompage utilisant deux

copies du même faisceau issu d'une pompe fibrée multimode et imagées séparément sur la structure pour alimenter les deux modes. Ce dispositif a prouvé son efficacité dans la réduction du transfert de bruit de la pompe.

Dans le cas du laser à 852 nm, nous aurions pu, plutôt, persévérer dans une stratégie visant à se débarrasser de la figure de speckle créée par la pompe fibrée multimode à la surface de la structure afin d'augmenter l'amplitude des corrélations<sup>8</sup>. Par exemple, nous pouvons utiliser un épurateur de faisceau pour la pompe en espace libre avant sa focalisation sur la structure. Dans l'épurateur, le faisceau de pompe collimaté est envoyé sur une lentille de très courte focale, au point focal duquel est placé un diaphragme de faible ouverture. Ce diaphragme permet de réaliser un filtrage dans le plan de Fourier des basses fréquences spatiales. Les grains de speckle constituent typiquement des petits détails et donc des hautes fréquences spatiales qui pourraient être ainsi filtrés. Dans le cadre du temps limité de ce travail de thèse, un tel dispositif n'a pas été mis en œuvre. La référence [93] a introduit une technique de projection plus élaborée, avec un diffuseur mobile, permettant de passer le contraste du speckle de 70% à seulement 8%. Dans tous les cas, les techniques citées sont synonymes de perte de puissance pour le pompage optique. Par ailleurs, d'autres solutions sont utilisées en optique adaptative pour corriger un front d'onde grâce, par exemple, à un miroir déformable. Le domaine de l'astronomie a été précurseur pour l'utilisation de ces corrections en temps réel dans l'imagerie. Il est bon de noter qu'aujourd'hui la microscopie bénéficie allègrement des techniques d'optique adaptative [94]. Ce genre de correction active du front d'onde pourrait aussi être envisagée pour enlever le speckle du faisceau utilisé pour pomper la structure. La fibre multimode couplant la diode laser de pompe conduit à une figure de speckle complètement différente au moindre mouvement. En effet, cela induit une redistribution des modes se propageant dans la fibre et donc que la figure de speckle change notamment entre chaque utilisation. C'est pourquoi une correction reconfigurable et active est nécessaire. De cette façon, les corrélations de pompe des deux modes seraient totales et le transfert de bruit minimisé.

En attendant de telles solutions, l'architecture de pompage à deux faisceaux a été identifiée comme la meilleure dans le cadre d'un asservissement de l'intensité du VECSEL bifréquence à 852 nm. Les paramètres de pompage ( $C$ ,  $\eta$ ) accessibles dans cette configuration sont compatibles avec des corrélations avantageuses des bruit d'intensité des deux modes lasers (fortes et en phase). De plus, il a été établi dans le présent chapitre que la rétroaction la plus bénéfique est celle qui se base sur la détection de la somme des deux modes lasers. L'optimisation de la rétroaction à l'aide d'un filtre à avance de phase offre une stabilité en fréquence relative de l'horloge inférieure au seuil de  $5 \times 10^{-13}$  à 1 s d'interrogation. Remarquons toutefois qu'en estimant la variance du signal d'erreur de l'horloge, nous avons considéré le RIN associé à la somme des deux modes. On pourrait envisager à la place un signal d'erreur d'horloge sensible à la somme des RINs sur chaque polarisation. Dans ce

---

8. Notons que ce n'est pas la rugosité de la surface qui est à l'origine du speckle car, dans le cas contraire, le dispositif de pompe à deux faisceaux n'aurait pas donné satisfaction.

contexte, une étude de la transmission des corrélations des modes lasers à travers la cellule atomique semble pertinente. Nous rapportons nos investigations à ce sujet dans l'annexe B.

La bande passante de bruit de phase du battement RF a été fortement limitée grâce aux architectures de pompage permettant des corrélations importantes entre les bruits d'intensité de pompe. L'insertion d'un cristal EO de MgO :SLT dans la cavité du VECSEL à 852 nm a abouti à la construction d'une PLL optique. La régulation de la biréfringence a ainsi mené à un niveau de bruit principalement limité par le niveau de bruit de phase de l'oscillateur local, ce qui est aisé à améliorer (voir référence [79]). L'impact, via l'effet Dick, du bruit de phase après la rétroaction sur l'écart type d'Allan (caractérisant la stabilité d'horloge) a été estimé à  $2.3 \times 10^{-13}$  à 1 s donc bien moindre que celui du RIN.

La référence [83], utilisant un laser à solide, propose également une PLL optique pour diminuer le bruit de phase du battement optique RF. Ce laser est un laser de classe B présentant donc une dynamique moins intéressante que celle de nos VECSELS. Cependant, grâce à une ligne à retard, cette référence propose en plus de s'affranchir de l'oscillateur local en transformant le laser en oscillateur opto-électronique auto-stabilisé. Une telle ligne à retard est particulièrement intéressante dans la perspective de développer un banc laser encore plus compact. On pourrait donc envisager une réduction du volume supplémentaire pour le développement de l'horloge CPT compacte. Néanmoins, les pertes des fibres optiques à 852 nm sont significatives et donc l'implémentation des lignes à retard à cette longueur d'onde semble assez délicate. Si cela fonctionnait, il faudrait d'autre part rester vigilant quant au niveau de bruit de phase atteint et s'assurer que la stabilisation soit à la hauteur des performances de stabilité visées pour l'horloge.

Enfin, il serait très intéressant de transposer notre travail concernant la boucle à verrouillage de la phase optique du battement RF au VECSEL émettant à 1.55  $\mu\text{m}$ . En effet, les champs d'applications opto-hyperfréquences de ces lasers à la longueur d'onde télécom sont vastes, comme nous l'avons vu au chapitre 2. Pour rendre la fréquence du battement pilotable en tension, un cristal EO doit être disposé dans la cavité, ce qui est synonyme de pertes optiques. Malencontreusement, il n'a pas été possible, dans le cadre de mon travail de thèse, d'obtenir une oscillation laser en introduisant autant de pertes. En effet, les structures des VECSELS émettant à cette longueur d'onde, qui sont à notre disposition, ont des gains assez limités. Cette limitation pourrait disparaître grâce au développement à venir de VECSELS à 1.55  $\mu\text{m}$  de gains plus importants au C2N.

PARTIE

— III —

AUTRES PROPRIÉTÉS DE BRUIT,  
EFFETS THERMO-OPTIQUES,  
COVARIANCE SPECTRALE ET  
BRUITS NON-STATIONNAIRES



## CHAPITRE 6

# FLUCTUATIONS THERMIQUES DE LA PHASE D'UN VECSEL POMPÉ OPTIQUEMENT

### Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, la stabilité des références de fréquences micro-ondes générées grâce aux VECSELS bifréquences dépend des propriétés du bruit de phase du battement RF. Ces références sont destinées à être distribuées optiquement, pour les horloges CPT à base de césium ou encore pour les architectures radar. Le niveau de bruit de phase est ainsi un enjeu pour les performances des applications. Or, une portion particulièrement significative du spectre de ce bruit de phase, correspondant typiquement aux fréquences inférieures à 100 kHz, est d'origine thermique ou encore provient de bruits techniques (comme des vibrations du banc optique ou de l'électronique de détection). Bien que, ultimement, une boucle à verrouillage de la phase optique permette de stabiliser efficacement le signal optique RF (chapitre 5), une bonne connaissance du bruit thermique, qui dégrade naturellement la pureté spectrale, est nécessaire.

Or la composante de bruit thermique du modèle prédictif utilisé avec succès jusqu'à présent dans l'étude de la réduction de bruit, n'a pas permis de reproduire avec fidélité les mesures de bruit de phase du battement du VECSEL à 852 nm au chapitre 4, section 2. Ce désaccord a d'ailleurs été souligné dans la publication associée à ce travail [3]. Ce que nous avons exposé du bruit thermique au chapitre 1 est basé sur un modèle de type passe-bas initié par A. Laurain [44]. Il consiste en fait à décrire comme un filtre passe-bas la fonction de transfert du bruit de puissance de la pompe au bruit de fréquence du laser à travers les fluctuations thermiques dans la structure. L'annexe A illustre la généralité d'une telle modélisation en loi de puissance traduisant l'absence d'échelle caractéristique passée une fréquence typique du système. Mais l'observation du bruit en  $1/f$  – type bruit de

scintillation ou bruit flicker – pour le bruit de fréquence du battement RF est simplement incompatible avec la pente en  $f^{-2}$  du modèle passe-bas.

Ajoutons que ce modèle est macroscopique et ne tient pas compte des détails de la structure. Bien que donnant une première tendance et qu'il soit facile à manipuler, il présente un autre défaut essentiel. En effet, définir un temps caractéristique de diffusion sur le volume du mode dans la structure semiconductrice semble ambigu. La diffusion thermique est-elle vraiment mono-directionnelle à l'échelle du mode laser ?

Nous proposons donc de nous pencher un peu plus sur la modélisation microscopique des effets thermiques dans les VECSELs pour bâtir un nouveau modèle de bruit de phase thermique.

## 1 Description des effets thermo-optiques

Avant d'appréhender les différents mécanismes responsables de la transmission de fluctuations thermiques à la phase du battement RF, mettons en évidence la part de dissipation thermique dans le bilan de puissance du laser.

### 1.1 Bilan de puissance et dissipation thermique

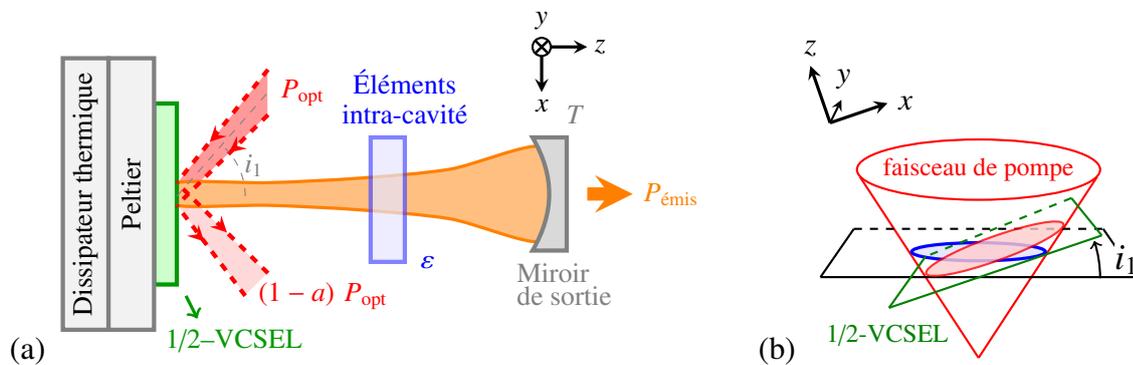


FIGURE 6.1 – Schémas du VECSEL pompé optiquement. (a) Seule une fraction  $a$  est absorbée par la structure. Les pertes dues à l'insertion d'éléments optiques intra-cavité sont notées  $\epsilon$ . Le miroir de sortie referme la cavité et possède un coefficient de transmission  $T$ . (b) Étalement elliptique du faisceau de pompe irradiant la structure avec un angle d'incidence  $i_1$ .

La structure du 1/2-VCSEL est pompée optiquement avec un angle d'incidence  $i_1$  de l'ordre de  $40^\circ$ , comme schématisé à la Fig. 6.1. Une fraction  $(1-a)$  de la puissance optique de pompe est réfléchi sur la structure, nous y reviendrons. Les pertes par tour dans la cavité sont estimées à  $\epsilon = 6\%$  en présence du cristal biréfringent  $\text{YVO}_4$  et de l'étalon,

tandis que la transmission du coupleur de sortie vaut  $T = 0.5\%$ . La Fig. 6.1(b) montre l'étalement du faisceau de pompe le long de l'axe  $x$  résultant du pompage avec un angle  $i_1$  et le caractère elliptique de la tache obtenue sur la structure. Dans la direction perpendiculaire, le long de l'axe  $y$ , la taille de la tache est inchangée et, de cette façon, alimente toujours efficacement les modes laser. En fait, au voisinage de la structure, sur une taille bien supérieure au diamètre de la tache, le faisceau de pompe peut être considéré comme cylindrique et donc de rayon constant (ceci sera justifié au paragraphe 1.3). Un simple calcul permet de démontrer dans ces hypothèses que l'ellipse obtenue acquiert alors une excentricité  $\sin i_1$ , c'est-à-dire minimale pour les petits angles et maximale lorsqu'on s'approche de l'incidence rasante. Par rapport à la tache circulaire obtenue en incidence normale, la surface est augmentée d'un facteur  $1/\cos i_1$ .

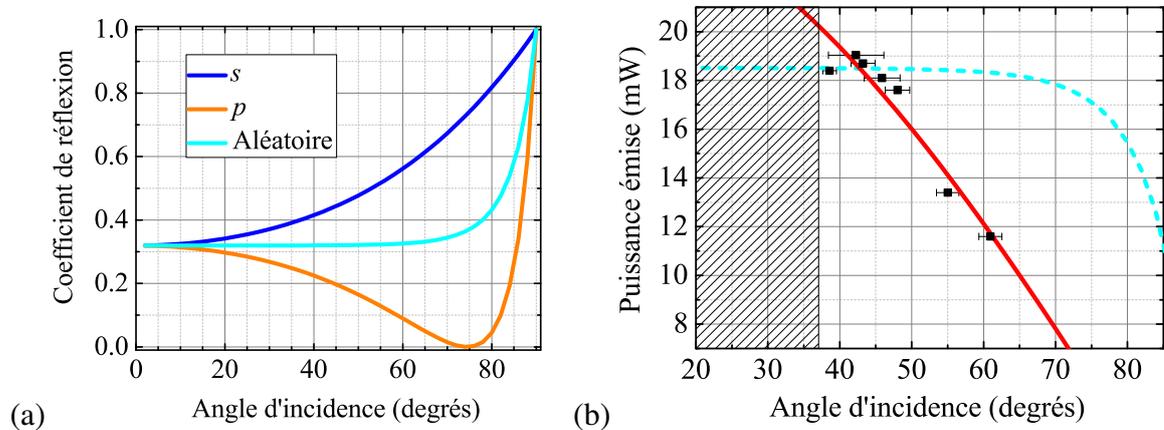


FIGURE 6.2 – (a) Coefficient de Fresnel pour la réflexion en puissance en fonction de l'angle d'incidence à l'interface air/InGaP d'une onde polarisée  $s$  (en bleu),  $p$  (en orange) ou aléatoirement (en cyan). (b) Puissance totale émise par le VECSEL (cavité vide) en fonction de l'angle d'incidence du laser de pompe. Les carrés pleins sont issus de mesures. Les courbes continues sont issues d'ajustements. Les tirets cyaes sont obtenus à partir du profil angulaire de transmission à la structure provenant de (a). La courbe rouge est un ajustement en une fonction affine du cosinus de l'angle d'incidence et traduit l'étalement elliptique du faisceau de pompe. La partie hachurée correspond à des situations mécaniquement impossibles à explorer à cause de l'encombrement.

L'évaluation de la partie du faisceau de pompe réfléchi sur la structure nécessite, quant à elle, l'évaluation du coefficient de Fresnel pour la réflexion du vecteur de Poynting à une interface entre deux diélectriques. L'indice de réfraction  $n_2$  du matériau ternaire InGaP composant la couche de revêtement du 1/2-VCSEL émettant à 852 nm vaut typiquement 3.6. La diode laser étant fibrée multimode, c'est un faisceau lumineux de polarisation aléatoire qui irradie le 1/2-VCSEL. On peut assimiler cette polarisation à une superposition aléatoire de polarisations  $s$  et  $p$ . La Fig. 6.2(a) montre qu'à 40°, 32 % de la puissance optique est réfléchi sur la structure, qui absorbe en conséquence une fraction  $a = 68\%$  du flux incident. L'étude de la puissance maximale, à puissance de pompe fixée, émise par le

VECSEL en fonction de l'angle d'incidence est présentée à la Fig. 6.2(b). Pour optimiser la puissance émise par le laser, il faut aller vers les angles d'incidence les plus faibles avec néanmoins la limitation physique due à l'encombrement mécanique. Dans le cas présent, la puissance optique transmise au 1/2-VECSEL ne varie en réalité que très peu entre  $0^\circ$  et  $60^\circ$  d'incidence. Or, une diminution rapide avec l'angle d'incidence du maximum de la puissance émise par le VECSEL est mesurée (Fig. 6.2(b)). Ceci souligne le rôle de la dilution de la puissance optique de pompe sur une surface qui augmente comme  $1/\cos i_1$  lors de l'étalement elliptique de la tache de pompe. Le bon accord avec l'ajustement affine en  $\cos i_1$  (courbe rouge) le corrobore.

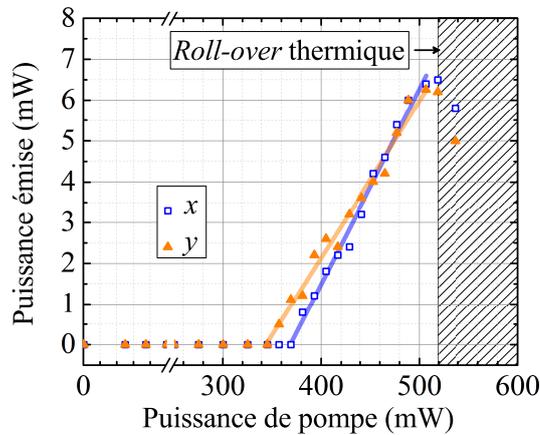


FIGURE 6.3 – Puissance émise par le VECSEL bifréquence en fonction de la puissance optique de pompe. On observe des seuils laser légèrement différents pour les deux modes puis le *roll-over* thermique à partir de 520 mW.

Par ailleurs, la puissance totale émise par le VECSEL bifréquence à 852 nm atteint, avec son étalon,  $P_{\text{émis}} = 13 \text{ mW}$  pour une puissance de pompe de 500 mW (Fig. 6.3). Un bilan pour la cavité de la Fig. 6.1(a) permet ensuite d'écrire que la puissance laser dissipée par la cavité vaut :

$$P_{\text{diss}} = \frac{P_{\text{émis}}}{T} \cdot (T + \varepsilon) .$$

On a alors  $P_{\text{diss}} \simeq 0.17 \text{ W}$  pour une puissance de pompe  $P_{\text{opt}} = 0.5 \text{ W}$ . Avec une telle puissance de pompe, la structure absorbe  $a \cdot P_{\text{opt}} = 0.34 \text{ W}$ . On remarque donc que la puissance absorbée dans la structure est supérieure à celle qui est dissipée par la cavité laser. Bien qu'une grande partie de la puissance optique de pompe soit en effet utile à l'inversion de population dans le milieu à gain, une fraction  $\eta_{\text{th}}$  non négligeable s'est perdue. Le bilan de puissance sur ce point de fonctionnement du laser donne :

$$\eta_{\text{th}} = a - P_{\text{diss}}/P_{\text{opt}} \simeq 34 \% .$$

Cette partie de la puissance optique est en fait dissipée sous forme de transferts thermiques dans la structure. Plus précisément, une partie de l'énergie lumineuse de la pompe permet à

certains électrons, à l'intérieur du semiconducteur, d'être promus à la bande de conduction où ils se recombinent avec des trous pour participer au champ laser alors que le reste de l'énergie est dissipé en mouvements des porteurs de charges et autres vibrations de la structure cristalline.

Dans le travail qui suit, un autre point de fonctionnement du laser à 852 nm est utilisé. De plus, nous voulons *in fine* appliquer notre modèle aux mesures correspondant à l'architecture de pompage à deux faisceaux introduite dans le chapitre 4. Ainsi, la part de puissance de pompe dissipée thermiquement sera un peu inférieure à notre première évaluation, bien que du même ordre de grandeur :  $\eta_{\text{th}} = 20\%$ .

Le profil spatial du faisceau de pompe joue un rôle important dans l'efficacité de conversion de la puissance optique [95]. Ainsi, un profil super-gaussien<sup>1</sup> comme un profil *top-hat* va permettre un meilleur rendement alors qu'un simple profil gaussien mènera à plus de dissipation thermique. Ce point sera développé avec plus de détails à la section 5.

## 1.2 Décalage vers le rouge

Dans un premier temps, nous considérons un VECSEL mono-fréquence et nous cherchons à décrire l'influence des fluctuations de température sur sa phase. Le lien avec le fonctionnement bifréquence du VECSEL destiné aux horloges atomiques décrit dans les chapitres précédents sera fait à partir de la section 4. Le champ électrique du VECSEL mono-fréquence émettant à la pulsation  $\omega_l$  s'écrit :

$$E(\mathbf{r}, t) \triangleq \mathcal{E}(t) e^{-i[\omega_l t + \psi(t)]} e(\mathbf{r}) + \text{c.c.}, \quad (6.1)$$

où l'on a noté  $\mathcal{E}(t)$  et  $\psi(t)$  l'amplitude complexe et la phase du champ. Le profil spatial du mode laser est noté  $e(\mathbf{r})$ . Le profil spatial de la densité d'énergie de l'onde stationnaire intra-cavité est alors donné par  $|e(\mathbf{r})|^2$ .

À partir d'une fluctuation de température dans la structure semiconductrice, des fluctuations  $\delta\psi(t)$  de la phase du laser sont engendrées via la variation de la longueur optique. Quelles sont les origines de ces fluctuations thermiques et comment rendre compte quantitativement du lien avec les fluctuations de phase ?

L'échauffement dans la structure résulte de son pompage, qui est schématisé à la Fig. 6.4. Alors que le faisceau de pompe crée un point chaud à la surface, le transfert thermique causé par la pompe est évacué de la structure grâce au contrôle de température du module Peltier sur lequel est monté le 1/2-VCSEL. Notons les ordres de grandeurs des tailles des différentes zones du 1/2-VCSEL d'épaisseur totale  $L_{\text{SC}}$  faisant quelques centaines de  $\mu\text{m}$ . La zone active s'étend sur une épaisseur  $e_{\text{QW}} = L_{\text{SC}} - L_{\text{DBR}}$  faisant quelques  $\mu\text{m}$  et les

1. Un profil radial d'intensité de faisceau super-gaussien s'écrira typiquement :  $\exp[-2(r/w_p)^n]$ , où  $w_p$  correspond au rayon du faisceau et  $n > 2$ .

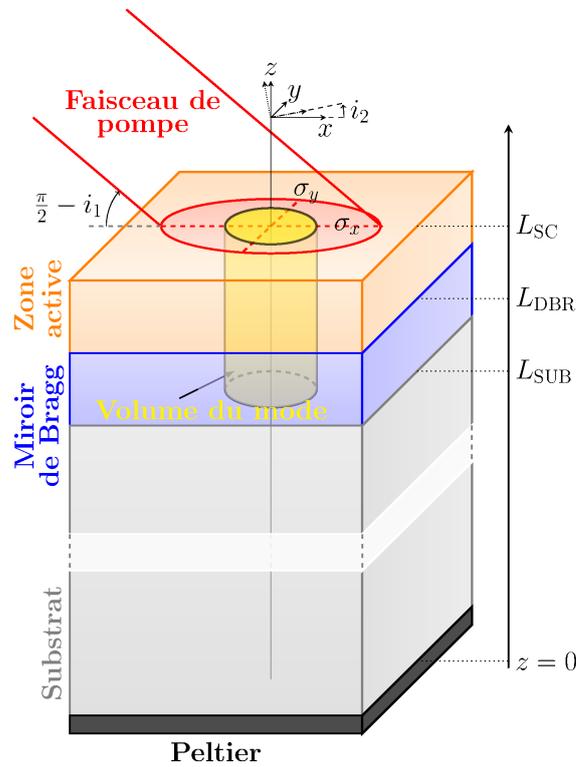


FIGURE 6.4 – Coupe transversale d'un 1/2-VECSEL soumis au faisceau de pompe de largeurs caractéristiques  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . L'axe optique commence au Peltier et est dirigé vers le haut de la structure. Les trois zones : le substrat (en gris), les miroirs de Bragg (en bleu) et la zone active (en orange) ne sont pas représentées à l'échelle. Le cylindre jaune représente le volume du mode laser.

miroirs de Bragg sur une épaisseur  $e_{\text{DBR}}$  qui vaut typiquement le double de l'épaisseur de la zone active. L'essentiel de l'épaisseur de la puce correspond donc au substrat, ce qui est important à réaliser pour la description thermique du système. Cependant, c'est au niveau des deux premières couches qu'une variation de l'indice optique par exemple va changer la phase du mode laser.

### Effets thermo-optiques

La fréquence angulaire du laser vérifie, pour notre cavité linéaire de longueur optique  $L_{\text{opt}}$  :

$$\omega(t) \triangleq \omega_l + \dot{\psi}(t) = p \cdot \text{ISL}(t) = p \cdot \frac{\pi c_0}{L_{\text{opt}}(t)} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^* .$$

Autorisons maintenant une petite fluctuation globale  $\delta T$  de la température. Cette fluctuation induit alors la variation :

$$\frac{\delta\omega(t)}{\delta T} = p \pi c_0 \cdot \frac{-\delta L_{\text{opt}}(t)/\delta T}{L_{\text{opt}}^2(t)} = -\omega(t) \cdot \frac{\delta L_{\text{opt}}(t)/\delta T}{L_{\text{opt}}(t)}. \quad (6.2)$$

Or la longueur optique correspond à la longueur parcourue lors d'un aller dans la cavité étendue puis dans le semiconducteur :  $L_{\text{opt}} = L_{\text{CAV}} + n_{\text{SC}} \cdot L_{\text{SC}}$ , de l'ordre de grandeur de  $L_{\text{CAV}}$ . Les fluctuations thermiques dans la structure, pompée optiquement et possédant un fort indice de réfraction  $n_{\text{SC}}$ , sont significatives. Elles induisent une variation de la longueur optique soit par variation de l'indice optique, soit par dilatation thermique :

$$\frac{\partial L_{\text{opt}}}{\partial T} = L_{\text{SC}} \cdot \frac{\partial n_{\text{SC}}}{\partial T} + n_{\text{SC}} \cdot \frac{\partial L_{\text{SC}}}{\partial T}. \quad (6.3)$$

Autrement dit, nous regrouperons sous le terme générique d'effets *thermo-optiques*, les effets *thermo-réfractif* et *thermo-élastique*. L'effet thermo-élastique de dilatation peut se ré-écrire :

$$\frac{\partial L_{\text{SC}}}{\partial T} = L_{\text{SC}} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \equiv L_{\text{SC}} \cdot \zeta,$$

où  $\epsilon$  correspond à la contrainte locale du matériau considéré comme isotrope en première approximation. Le coefficient de dilatation thermique linéaire  $\zeta$  donne une très bonne estimation de  $\partial \epsilon / \partial T$  de l'ordre de grandeur de  $10^{-5} - 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  d'après les valeurs des paramètres rassemblées dans le tableau 6.1. Cet effet demeure marginal devant l'effet thermo-réfractif dans les matériaux semiconducteurs utilisés dans les VECSELS. En effet, l'ordre de grandeur de  $\partial n_{\text{SC}} / \partial T$  est de  $10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

Avant de décrire plus en détails les variations de fréquence les plus significatives induites par la modulation de l'indice de réfraction avec la température, passons en revue les effets associés à la dilatation thermique des matériaux. Le signe de la variation 6.2 justifie que les effets thermo-élastiques sont a priori synonymes de décalage vers le rouge pour une dilatation thermique. En fait, au moins trois contributions se traduisant par un décalage de la fréquence angulaire peuvent être distinguées : (i) la longueur optique du 1/2-VECSEL augmente au gré de la dilatation thermique, (ii) la dilatation de l'épais substrat induit une réduction de la longueur de cavité étendue si l'on suppose que le radiateur thermique du VECSEL et son coupleur de sortie sont absolument fixes mécaniquement, (iii) la longueur d'onde centrale dans la zone DBR<sup>2</sup> est modifiée par la dilatation thermique, ce qui génère un déphasage du champ laser réfléchi. Pour la première contribution, nous pouvons évaluer à partir de l'équation (6.2), le décalage en pulsation induit par une variation de température donnée :

$$\delta\omega_{\text{QW}} = -\omega_l \cdot \frac{\delta L_{\text{opt}}}{L_{\text{opt}}} \equiv -\omega_l (n_{\text{SC}} - 1) \cdot \frac{e_{\text{QW}} \cdot \zeta}{L_{\text{opt}}} \delta T. \quad (6.4)$$

2. Acronyme de l'anglais Distributed Bragg Reflectors, désignant le réseau de Bragg.

Paramètre	Notation	Valeur		Unité
		Al <sub>22%</sub> GaAs	GaAs	
Capacité thermique volumique	$C_v$	1.77 [96]	1.76 [96]	J.K <sup>-1</sup> .cm <sup>-3</sup>
Coef. de diffusion thermique	$D$	0.11 [97]	0.31 [97]	cm <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
Coef. de dilatation thermique	$\varsigma$	5.61 [98]	5.73 [98]	×10 <sup>-6</sup> · K <sup>-1</sup>
Coef. d'absorption à 673 nm	$\alpha$	2 [99]		×10 <sup>4</sup> · cm <sup>-1</sup>
Indice de réfraction à 852 nm	$n_{SC}$	3.4 [100]		
Indice de réfraction à 673 nm	$n_{673}$	3.6 [100]		
Variation thermique de l'indice	$\partial n/\partial T$		4 [96]	×10 <sup>-4</sup> · K <sup>-1</sup>
Longueur d'onde centrale	$\lambda$		852	nm
Épaisseur du substrat renormalisée	$L_{SUB}$		260	µm
Épaisseur des DBR	$e_{DBR}$		4.1	µm
Saut d'indice du DBR	$\Delta n$		0.54	
Épaisseur total de la structure	$L_{SC}$		266	µm
Longueur de cavité	$L_{CAV}$		5.07	cm
Puissance optique de pompe	$P_{opt}$		0.95	W
Angle d'incidence de la pompe	$i_1$		40°	
Rayon de la pompe	$w_p$		24	µm
Rayon de courbure du coupleur	$R_1$		5	cm
Fraction de puissance convertie	$\eta_{th}$		20 %	
RIN de la pompe	$RIN_p$		-130	dB.Hz <sup>-1</sup>
Coef. de diffusion longitudinale	$D_{//}$		0.23 [101]	cm <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
Coef. de diffusion radiale	$D_{\perp}$		0.14 [101]	cm <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
Température ambiante	$T$		300	K
Puissance de pompe du mode $x$	$P_{p,x}$		0.70	W
Puissance de pompe du mode $y$	$P_{p,y}$		0.25	W
Amplitude des corr. de pompe	$\eta$		0.98 [3]	

TABLEAU 6.1 – Paramètres utilisés pour la modélisation du bruit thermique dans le VECSEL à 852 nm. Aux valeurs expérimentales s'ajoutent les valeurs tabulées issues de sources différentes, que l'on retrouvera compilées dans le site en ligne [102].

La dilatation du mode laser donne donc, pour une élévation d'un Kelvin, un décalage en fréquence de 180 kHz. La deuxième contribution va cette fois dans le sens du décalage vers le bleu car il s'agit d'un raccourcissement de la longueur de la cavité étendue par dilatation thermique du substrat. Le décalage en pulsation associé s'écrit :

$$\delta\omega_{SUB} = -\omega_l \cdot \frac{\delta L_{opt}}{L_{opt}} \equiv +\omega_l \cdot \frac{L_{SUB} \cdot \varsigma}{L_{opt}} \delta T. \quad (6.5)$$

Pour une élévation d'un Kelvin, le décalage en fréquence lié à la dilatation de ce substrat épais est de 10 MHz, ce qui peut paraître important. Cependant, notons que l'amplitude

des fluctuations de température provenant du pompage optique est bien moins grande en profondeur qu'en surface du 1/2-VCSEL. Ainsi, la stabilité en température dans cette zone accolée au module Peltier va atténuer grandement l'impact de ce décalage en fréquence. Enfin, la troisième contribution nécessite de connaître le déphasage du faisceau laser induit à la réflexion lorsque la longueur d'onde centrale du miroir de Bragg varie. La référence [103] montre qu'en considérant un empilement infini pour le réseau de Bragg, la phase  $\psi$  du champ optique varie avec la longueur d'onde centrale  $\lambda_0$  de la façon suivante :

$$\frac{d\psi}{d\lambda_0} \simeq \frac{\pi \cdot n_{SC}}{\lambda_0 \cdot \Delta n},$$

où  $\Delta n$  est le saut d'indice des miroirs de Bragg. Ceci conduit, en termes de fréquence angulaire, au décalage vers le rouge suivant :

$$\delta\omega_{\text{DBR}} \equiv -\frac{\text{ISL}}{2\pi} \cdot \frac{\pi \cdot n_{SC}}{\Delta n} \cdot \zeta \cdot \delta T. \quad (6.6)$$

L'application numérique donne un décalage en fréquence de 56 kHz pour une élévation d'un Kelvin. L'effet thermo-réfractif va dominer de loin cette contribution, comme nous allons maintenant le voir.

### Facteur thermo-réfractif

La répartition spatiale de l'échauffement dans la structure doit être prise en compte. Pour cela considérons la fluctuation locale de température  $\delta T(\mathbf{r}, t)$  dans le semiconducteur à un instant  $t$ . Alors, à travers la variation de la longueur optique induite par modulation de l'indice optique, la fréquence du laser va fluctuer d'une quantité  $\delta\psi(t)$ . En toute généralité, ces fluctuations engendrées par la température vont pouvoir s'écrire comme une intégrale sur le volume de la structure concerné par les effets thermo-optiques :

$$\delta\psi(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta T(\mathbf{r}, t) \cdot q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (6.7)$$

avec  $q(\mathbf{r})$ , un facteur de forme que l'on va chercher à exprimer. L'essentiel de l'effet optique que nous souhaitons décrire se passe au niveau du mode laser qui est schématisé par le cylindre de la Fig. 6.4. Le profil normalisé de l'enveloppe de l'onde stationnaire dans la cavité laser peut être modélisé par :

$$|e(\mathbf{r})|^2 = \mathcal{V}_{\text{mode}}^{-1} e^{-2\left(\frac{r}{w_0}\right)^2} \times \begin{cases} 1 & \text{pour } L_{\text{DBR}} \leq z \leq L_{\text{SC}} \\ \exp\left(-\frac{L_{\text{DBR}} - z}{L_e}\right) & \text{pour } 0 \leq z \leq L_{\text{DBR}} \end{cases}, \quad (6.8)$$

où  $\mathcal{V}_{\text{mode}}$  représente le volume du mode utilisé pour normaliser l'intégrale de  $|e(\mathbf{r})|^2$  à l'unité,  $r$  est le rayon des coordonnées cylindriques  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $w_0$  est le rayon du profil

radial supposé gaussien et  $L_e$  est la longueur de pénétration de l'énergie lumineuse dans les miroirs de Bragg. Le profil longitudinal, tracé dans la Fig. 6.5, est exponentiel dans la zone DBR et décroît selon la loi dérivée dans la référence [104]. Il y est démontré que  $L_e = \tanh(2\kappa e_{\text{DBR}}) / (2\kappa)$  où  $\kappa$  est un coefficient de couplage relié au saut d'indice  $\Delta n$  des miroirs de Bragg par la relation  $\kappa = 2\Delta n/\lambda$ . L'évaluation montre que la longueur  $L_e$  est sub-micrométrique et bien faible devant l'épaisseur  $e_{\text{DBR}}$ .

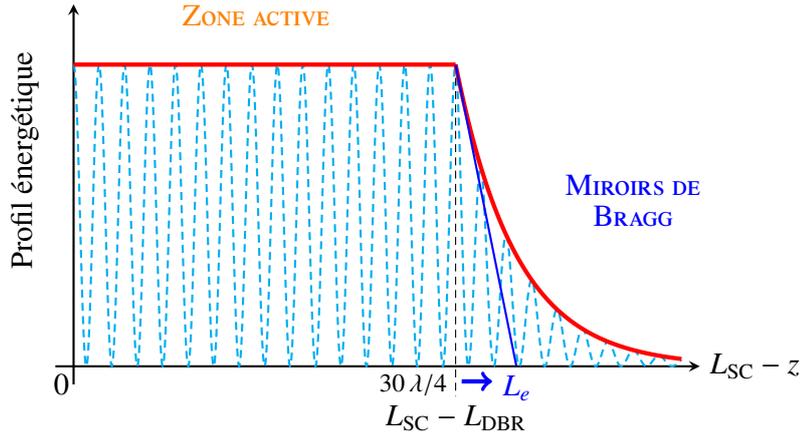


FIGURE 6.5 – Profil longitudinale  $|e(z)|^2$  de l'onde stationnaire dans la cavité laser tracé de la surface du 1/2-VCSEL vers les couches inférieures de la zone DBR. L'enveloppe en trait épais rouge correspond au profil énergétique alors que l'onde stationnaire oscillant à  $\omega_l$  est représentée en pointillés cyan.

Le facteur de forme doit tenir compte de l'aspect local de l'effet thermo-réfractif qui ne se produit que sur le volume du mode laser, qui possède la distribution  $|e(\mathbf{r})|^2$  donnée par l'égalité (6.8). En repartant des équations (6.3) et (6.2), l'écriture (6.7) des fluctuations de fréquence induites dans le VECSEL se précise :

$$\delta\dot{\psi}(t) = -q \int_{\mathbb{R}^3} \delta T(\mathbf{r}, t) |e(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (6.9)$$

avec le facteur thermo-réfractif défini comme :

$$q = \omega_l \cdot \frac{L_{\text{mode}}}{L_{\text{CAV}}} \cdot \frac{\partial n_{\text{SC}}}{\partial T}.$$

La quantité  $L_{\text{mode}} = \mathcal{V}_{\text{mode}} / (\pi w_0^2/2)$  correspond à la longueur selon l'axe optique du mode laser dans la structure. Le signe des variations de fréquence  $\delta\dot{\psi}(t)$  permet d'affirmer qu'une élévation de température dans la structure s'accompagne d'un décalage de la fréquence du laser vers le rouge. L'ordre de grandeur du facteur thermo-optique dans les VECSELS est de 10 à 100 MHz.K<sup>-1</sup>. Plus précisément, nous trouvons  $q/(2\pi) = 17.8$  MHz.K<sup>-1</sup> avec les valeurs retenues pour l'application au VECSEL à 852 nm du tableau 6.1. Remarquons que la cavité étendue des VECSELS permet de diminuer efficacement l'influence des effets

thermo-optiques car le facteur  $q$  est proportionnel à l'inverse de  $L_{\text{CAV}}$ . Pour les VCSELS ne possédant pas une telle cavité,  $q$  est plutôt de l'ordre de quelques  $\text{GHz}\cdot\text{K}^{-1}$ , ce qui les rend particulièrement sensibles aux variations thermiques [105].

L'expression (6.9) atteste qu'une connaissance précise du champ de température en tout point et à tout instant dans la structure est nécessaire pour évaluer la densité spectrale des fluctuations de fréquence engendrées. On propose pour cela une approche basée sur la résolution de l'équation de la chaleur dans le 1/2-VCSEL.

### 1.3 Équation de la chaleur

Le point de départ de résolution de l'équation de la chaleur pour le calcul de la densité spectrale de puissance d'un bruit optique existe dans de nombreux travaux similaires et visant des applications variées qui seront cités au fur et à mesure. Pour n'en citer qu'un avant d'approfondir, la référence [106] présente un développement singulier du calcul des effets thermo-optiques décrivant le bruit engendré par les fluctuations thermiques dans les couches anti-réflexion des miroirs de l'interféromètre utilisé dans LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) pour détecter les ondes gravitationnelles. L'originalité supplémentaire de l'approche de ce papier consiste à évaluer la densité spectrale de puissance de bruit à l'aide du théorème de fluctuation-dissipation [107] grâce au calcul de la puissance dissipée résultant des processus de relaxation thermique.

L'équation de la chaleur que nous avons à considérer ici pour la diffusion thermique au sein de la structure du 1/2-VCSEL s'écrit :

$$\left(\partial_t - D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 - D_{//} \partial_z^2\right) T(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad (6.10)$$

avec  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, L_{\text{SC}}]$ . La géométrie ainsi considérée est celle d'une couche infinie d'épaisseur  $L_{\text{SC}}$ . En effet, la structure possède des largeurs latérales typiques  $L_x$  et  $L_y$  de l'ordre du cm alors que la profondeur  $L_{\text{SC}}$  est de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{m}$ , ce qui est bien plus petit. Les coefficients  $D_{\perp}$  et  $D_{//}$  sont les coefficients de diffusion thermique transverse et longitudinale, respectivement. Ils sont accompagnés des opérateurs laplaciens scalaires pour les dimensions d'espace. Quant à  $Q(\mathbf{r})$ , il s'agit d'un terme source qui rend compte du transfert thermique exprimé en  $\text{K/s}$  et « branché » à l'instant  $t = 0^+$ . En notant  $C_v$  la capacité thermique calorifique par unité de volume, il est possible de donner à  $C_v \cdot Q(\mathbf{r})$  une signification plus physique : il s'agit d'une puissance volumique en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$  créée par les transferts thermiques. Nous allons considérer plusieurs sources de transfert thermique, la plus évidente étant celle causée par le pompage optique. À cette source, il faut néanmoins adjoindre les fluctuations engendrées par les fluctuations de puissance de la diode laser de pompe. Ceci constituera une première source de bruit à travers l'effet thermo-optique décrit à l'équation (6.9). Une autre source, purement stochastique et provenant de l'agitation thermique à température ambiante, permettra d'isoler une seconde

contribution. Mais avant, justifions un peu plus l'anisotropie de la diffusion que nous avons envisagée.

### Diffusion anisotrope

La distinction que nous avons faite entre les dimensions d'espace vient du fait que les hétérostructures telles que le milieu à gain ou encore les miroirs de Bragg brisent l'isotropie du matériau et impliquent que  $D_{\perp} \neq D_{\parallel}$ . La référence [108] a établi que dans les matériaux semiconducteurs composites AlGaAs, les coefficients de diffusion dans les deux directions transverse et longitudinale résultants sont inférieurs d'un facteur 5 à 7 à ceux que l'on obtiendrait en prenant la somme pondérée des coefficients dans les matériaux massifs pris séparément. Il est même à noter que dans la direction longitudinale (qui est perpendiculaire aux plans des couches) la réduction du coefficient de diffusion est encore plus importante. Dans les miroirs de Bragg, cette réduction due à l'empilement périodique de couches minces de semiconducteurs, formant ce qu'on appelle un *super-réseau*, a été expliquée et quantifiée [101]. Suivant la direction perpendiculaire aux plans des couches, la conductivité thermique dépend fortement du rapport  $l_{\text{mfp}}/d_{\text{SL}}$  entre le libre parcours moyen des phonons  $l_{\text{mfp}}$  et la période  $d_{\text{SL}}$  du super-réseau. Lorsque  $l_{\text{mfp}} \simeq d_{\text{SL}}$ , la diffusion des phonons aux interfaces devient significative et il faut alors tenir compte de la résistance thermique de Kapitza qui diminue  $D_{\parallel}$ . La barrière thermique de Kapitza est induite par un phénomène de diffusion résonnante de la chaleur à l'arrivée à l'interface [109] et ceci dépend en fait de la hauteur des rugosités aux interfaces par rapport à la longueur d'onde des phonons. Cependant, l'effet d'anisotropie thermique que nous décrivons a lieu dans les hétérostructures et non dans le substrat, qui est un matériau massif. Pour garder une résolution analytique, il est préférable de ne pas considérer une seconde équation de la chaleur. Une façon de maintenir la validité de l'équation (6.10) consiste à renormaliser l'épaisseur du substrat par la quantité  $D_{\parallel}/D$ , où  $D$  est le coefficient de diffusion du matériau massif. La renormalisation dans la direction transverse n'est pas nécessaire étant donné que le plan transverse est supposé infini. Bien que cela puisse paraître cavalier, l'approximation due à cette renormalisation de la taille du substrat ne devrait pas trop affecter les résultats puisque le mode laser sur lequel s'exerce l'effet thermo-optique que nous cherchons à décrire pénètre à peine dans les miroirs de Bragg.

### Transferts thermiques provenant de la pompe et ses fluctuations

L'échauffement causé par la pompe est assez important, puisque nous avons vu qu'environ  $\eta_{\text{th}} = 20\%$  de la puissance optique était convertie en chaleur. Le terme source de ce transfert thermique possède la géométrie du faisceau de pompe. Comme on peut le voir sur la Fig. 6.4, la pompe fait un angle d'incidence  $i_1$  avec la surface du 1/2-VCSEL avant d'entrer dans les premières couches de semiconducteurs avec un angle de réfraction  $i_2$ . Typiquement, on utilise une incidence  $i_1 \simeq 40^\circ$ , ce qui induit un angle  $i_2$  de l'ordre de  $10^\circ$

seulement. Après propagation à travers le milieu actif, la déviation causée par la réfraction est seulement de l'ordre du  $\mu\text{m}$  donc assez faible comparée au diamètre du faisceau de pompe (quelques dizaines de  $\mu\text{m}$ ). Tout se passe donc presque comme si cette excitation par la pompe était centrée sur l'axe optique. De plus, les largeurs du faisceau de pompe (initialement gaussien)  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  représentées sur la Fig. 6.4, sont très voisines et peuvent être considérées comme égales. Pour ces raisons, la géométrie du problème thermo-optique dans le VECSEL est en bonne approximation à symétrie cylindrique autour de l'axe optique. Avec une cavité laser à symétrie cylindrique, on s'attend bien à un mode émis par le VECSEL qui respecte l'invariance autour de l'axe ( $0z$ ) tel que le mode  $\text{TEM}_{00}$  typiquement observé. Dans la suite de notre étude, les seules variables d'espace pertinentes pour décrire la position  $\mathbf{r}$  seront donc le rayon cylindrique  $r$  et la position sur l'axe  $z$ , comme cela était le cas pour le profil spatial de l'onde stationnaire intra-cavité (6.8). Le faisceau de pompe est considéré comme gaussien, avec un rayon  $w_p = 2\sigma_{x,y}$  typiquement entre 10 et 100  $\mu\text{m}$ . La longueur de Rayleigh  $z_R = \pi w_p^2/\lambda$  pour la pompe à 673 nm vaut entre 0.5 mm et plusieurs mm. Étant donné les quelques  $\mu\text{m}$  de la zone active, nous travaillons avec  $z \ll z_R$  et donc une largeur de faisceau de pompe  $w_p$  constante le long de l'axe optique dans la structure. À cela, nous devons ajouter l'absorption optique par unité de longueur de la pompe dans les semiconducteurs notée  $\alpha$ . En se souvenant que  $z$  est croissant dans le sens de l'axe optique du VECSEL (la pompe est donc contra-propagante), le terme source du transfert thermique de pompe s'écrit :

$$Q(\mathbf{r}) = Q_0 \cdot e^{-2\left(\frac{r}{w_p}\right)^2} \cdot e^{-\frac{(L_{\text{SC}} - z) \alpha}{\cos i_2}}, \quad (6.11)$$

avec  $C_v \cdot Q_0$  la puissance volumique de transfert thermique induit par la pompe sur l'axe au niveau de la surface du 1/2-VCSEL. Pour l'évaluation de cette quantité, il suffit de considérer l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times [0, L_{\text{SC}}]} C_v \cdot Q(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \eta_{\text{th}} P_{\text{opt}} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \frac{\eta_{\text{th}} P_{\text{opt}}}{C_v \pi w_p^2/2} \cdot \frac{\alpha}{(1 - e^{-\alpha L_{\text{SC}}/\cos i_2})}. \quad (6.12)$$

On obtient ainsi une valeur de  $Q_0$  de l'ordre de quelques centaines de  $\text{K}/\mu\text{s}$  pour 1 W de puissance optique incidente de pompe.

À la puissance du pompage optique s'additionnent des fluctuations  $P_{\text{opt}} \rightarrow P_{\text{opt}} + \delta P_{\text{opt}}(t)$  qui engendrent des fluctuations du transfert thermique :  $Q_0 \rightarrow Q_0 + \delta Q(t)$ . Les fluctuations de puissance du laser sont caractérisées par le spectre du bruit d'intensité relatif  $\text{RIN}_p(\Omega)$  à la fréquence de Fourier  $\Omega/2\pi$ . De la relation de proportionnalité (6.12), il s'ensuit que la densité spectrale de puissance de bruit pour la chaleur de pompe vaut  $Q_0^2 \cdot \text{RIN}_p(\Omega)$ .

### Transferts thermiques des fluctuations thermodynamiques

L'état d'un corps homogène constitué d'un ensemble de  $N$  particules contenues dans un volume  $V$  fixé à l'équilibre thermique avec un thermostat à la température constante  $T$  peut être décrit dans l'ensemble canonique [110]. La probabilité qu'à l'équilibre, le système soit dans un certain micro-état ( $l$ ) d'énergie  $E_l$  est donnée par la distribution de probabilité canonique :

$$p_l \triangleq \frac{1}{Z} \cdot e^{-\beta E_l},$$

où  $\beta = 1/(k_B T)$ , avec  $k_B$  la constante de Boltzmann. La fonction de partition associée, notée  $Z$ , permet de définir l'énergie interne et son moment d'ordre deux :

$$Z \triangleq \sum_{\mu\text{-états } (l)} e^{-\beta E_l} \Rightarrow \begin{cases} \langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \end{cases}.$$

À nombre de particules  $N$  et volume  $V$  fixés, on a une capacité thermique par unité de volume qui vérifie les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} C_v \triangleq \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} &= \frac{1}{V} \cdot \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \cdot \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \\ &= -\frac{1}{V \cdot k_B T^2} \times \left[ \frac{1}{Z^2} \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \right] \\ &= \frac{1}{V \cdot k_B T^2} \left( \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Le membre de droite de la dernière égalité (6.13) relie  $C_v$  à la variance  $\Delta_E^2 \triangleq \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ . Cette variance relative à l'énergie interne peut s'interpréter en terme de variance de température grâce à l'expression  $\langle \vartheta^2 \rangle \triangleq \Delta_E^2 / (C_v V)^2$ , où la variable stochastique  $\vartheta$  est centrée et représente l'écart à la température d'équilibre  $T$ . En insérant cette définition dans (6.13), les écarts aléatoires de température autour de l'équilibre à la température  $T$  sont reliées à la capacité thermique  $C_v \cdot V$  par la formule :

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{C_v V}. \quad (6.14)$$

Plus la capacité thermique totale  $C_v \cdot V$  d'un système est faible (ou plus son volume est réduit, à  $C_v$  fixé) et plus ces fluctuations thermodynamiques de température ont une importance relative car l'équation (6.14) montre que leur variance augmente. Les VCSELs étant des systèmes de volume réduit, et en particulier leur zone active où l'effet thermo-optique

induit des fluctuations de fréquence du laser, il semble pertinent d'envisager ces fluctuations aléatoires de température. En réalité, le 1/2-VCSEL n'est pas un milieu homogène mais on peut définir une déviation locale à l'équilibre thermique imposé par la température ambiante  $T_{\text{ambiant}} \equiv T \equiv T_{\text{Peltier}}$  à l'instant  $t$  grâce au champ  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ . Les références [111–114] élargissent les considérations précédentes au cas de ces fluctuations aléatoires autour de la température  $T$  dans un échantillon inhomogène. Dans ce cas, il faut prendre en compte les processus de diffusion thermique à travers l'équation de la chaleur stochastique suivante :

$$\left(\partial_t - D \nabla^2\right) \vartheta(\mathbf{r}, t) = \zeta(\mathbf{r}, t), \quad t > 0, \quad (6.15)$$

où  $D$  est un coefficient de diffusion isotrope et  $\zeta$  est un terme source de Langevin que l'on caractérise par sa fonction d'auto-corrélation :

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = \frac{2 D k_B T^2}{C_v} \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6.16)$$

L'équivalent de la relation (6.14) est alors calculé par l'auto-corrélation  $\langle \vartheta(\mathbf{r}, t) \cdot \vartheta(\mathbf{r}', t') \rangle$  qui dépend de la géométrie et des conditions aux limites. On s'aperçoit des similarités de (6.16) et (6.14) (en prenant le régime permanent dans l'équation (6.15) par exemple) à travers le coefficient  $k_B T^2 / C_v$  en commun. Dans notre cas, il faut, pour tenir compte de l'anisotropie de diffusion dans le 1/2-VCSEL, remplacer l'opérateur  $D \nabla^2$  par  $D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 + D_{\parallel} \partial_z^2$ .

### Conditions aux limites

Le module thermo-électrique Peltier permet une évacuation efficace du flux thermique en imposant sa température à la tranche à  $z = 0$  du substrat. On considère que la température de consigne du Peltier est identique à celle de la pièce. Ainsi, aux équations de la chaleur (6.10) et (6.15), il faut adjoindre la condition aux limites :

$$T(x, y, z = 0, t) = T_{\text{Peltier}} = \lim_{x \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}, t) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}, t). \quad (6.17)$$

De plus, la conductivité thermique des matériaux constituant la puce VCSEL est de trois ordres de grandeur plus élevée que celle de l'air ambiant. Des parois isolantes entourent notre cavité laser afin de limiter la convection thermique forcée. Dans ces conditions, nous supposons que l'isolation thermique de la face d'entrée de la structure est assez efficace pour empêcher l'existence d'un flux thermique de la structure vers l'air ambiant. Ceci se traduit par la condition suivante :

$$\partial_z T(x, y, z = L_{\text{SC}}, t) = 0. \quad (6.18)$$

Maintenant que tout est en place pour une description quantitative des effets thermo-optiques, une première étape de résolution de l'équation de la chaleur s'impose. En particulier, nous devons comprendre la dynamique de la réponse du 1/2-VCSEL à l'excitation thermique imposée par la pompe et en étudier le régime transitoire et le régime permanent.

## 2 Réponse thermique de la structure au pompage optique

### 2.1 Champ de température induit dans le semiconducteur

Le laser de pompe induit un échauffement important dans la structure avec un terme source dont on a donné l'expression à l'équation (6.11). En géométrie cylindrique, il est possible de rendre algébrique l'opérateur  $\nabla_{\perp}^2$  grâce à une transformation de Hankel d'ordre 0, notée  $\text{HT}_0$ , et qui est définie à la section 3 de l'annexe A. La variable réciproque du rayon cylindrique  $r$  sera notée  $k_{\perp}$ . On note  $\Delta T(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{r}, t) - T_{\text{Peltier}}$  l'élévation de température dans la structure. Dans le domaine de Hankel, l'équation de la chaleur (6.10) devient alors une équation aux dérivées partielles des variables  $z$  et  $t$ , algébrique en  $k_{\perp}$  :

$$\left(\partial_t + D_{\perp} \cdot k_{\perp}^2 - D_{//} \partial_z^2\right) \text{HT}_0[\Delta T](k_{\perp}, z, t) = \text{HT}_0[Q](k_{\perp}, z) . \quad (6.19)$$

Les solutions s'obtiennent à l'aide d'une série de Fourier longitudinale en utilisant une méthode de séparation des variables :

$$\text{HT}_0[\Delta T](k_{\perp}, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \cdot v_n(k_{\perp}, t) .$$

Étant données les conditions aux limites (6.17) et (6.18) sur le segment  $[0, L_{\text{SC}}]$  de l'axe optique, on obtient les fonctions  $u_n(z) = \sqrt{2/L_{\text{SC}}} \sin(\kappa_n \cdot z)$ , avec un vecteur d'onde longitudinal :

$$\kappa_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L_{\text{SC}}} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} . \quad (6.20)$$

L'ensemble des fonctions  $u_n$  est construit de sorte à former une base orthonormée :

$$\int_0^{L_{\text{SC}}} dz u_n(z) u_m^*(z) = \delta_{n,m} . \quad (6.21)$$

Ainsi, la ré-injection de l'expression  $\text{HT}_0[\Delta T](k_{\perp}, z, t)$  dans l'équation (6.19) et la multiplication des membres de gauche et de droite par  $u_n^*(z)$  donne après intégration sur  $z$  l'équation différentielle vérifiée par les  $v_n$  :

$$\dot{v}_n(k_{\perp}, t) + \left(D_{\perp} k_{\perp}^2 + D_{//} \kappa_n^2\right) v_n(k_{\perp}, t) = \int_0^{L_{\text{SC}}} dz u_n(z) \cdot \text{HT}_0[Q](k_{\perp}, z) ,$$

ce qui donne :

$$v_n(k_{\perp}, t) = \frac{1 - e^{-(D_{\perp} k_{\perp}^2 + D_{//} \kappa_n^2)t}}{D_{\perp} k_{\perp}^2 + D_{//} \kappa_n^2} \cdot \int_0^{L_{SC}} dz u_n(z) \cdot \text{HT}_0[Q](k_{\perp}, z) .$$

Comme la transformée de Hankel d'ordre 0 d'une fonction gaussienne d'écart type  $\sigma$  demeure une fonction gaussienne d'écart type  $1/\sigma$ , la transformation de  $Q(\mathbf{r})$  est directe. En définitive, l'élévation de température induite par le pompage optique a pour expression :

$$\Delta T(\mathbf{r}, t) = \frac{Q_0}{2w_p^2} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \sin(\kappa_n z) \cdot \text{HT}_0^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-(k_{\perp}^2 D_{\perp} + \kappa_n^2 D_{//})t}}{k_{\perp}^2 D_{\perp} + \kappa_n^2 D_{//}} e^{-w_p^2 k_{\perp}^2 / 8} \right](r) , \quad (6.22)$$

avec les coefficients de la série de Fourier pour l'excitation de pompe le long de l'axe  $z$  donnés par :

$$I_n = \frac{1}{L_{SC}} \int_0^{L_{SC}} e^{-(L_{SC}-z')\alpha} \sin(\kappa_n z') dz' . \quad (6.23)$$

### Étude du régime stationnaire

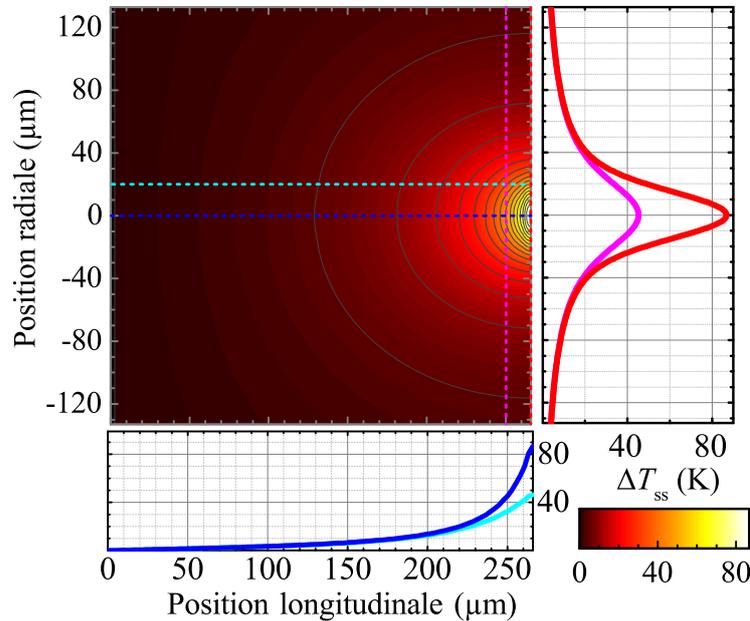


FIGURE 6.6 – Carte du champ de température induit par l'échauffement de la pompe optique dans le 1/2-VCSEL. Les profils longitudinaux (resp. transverses) en dessous de la carte (resp. à droite) sont tracés le long des pointillés bleu et cyan (resp. rouge et magenta). Les courbes grises sur la carte sont les isothermes.

La transformée de Hankel inverse d'ordre 0 dans l'expression du champ de température (6.22) n'a malheureusement pas d'expression analytique. En régime stationnaire, le terme  $e^{-(k_{\perp}^2 D_{\perp} + \kappa_n^2 D_{\parallel})t}$  s'annule. La transformée de Hankel n'admet toujours pas d'expression analytique excepté sur l'axe optique, en  $r = 0$  :

$$\Delta T_{ss}(r = 0, z) = \frac{Q_0 w_p^2}{4D_{\perp}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\kappa_n^2 w_p^2 D_{\parallel}}{8 D_{\perp}}} \times I_n \cdot \sin(\kappa_n z) \cdot E_1\left(\frac{\kappa_n^2 w_p^2 D_{\parallel}}{8 D_{\perp}}\right), \quad (6.24)$$

où la fonction exponentielle intégrale  $E_1$  est la fonction spéciale définie comme suit<sup>3</sup> :

$$E_1(x) \triangleq \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-s)}{s} ds.$$

Afin de tracer la carte de température  $\Delta T_{ss}(r, z)$  en régime stationnaire de la Fig. 6.6 à partir de l'équation (6.22), un algorithme de transformation de Hankel discret basé sur le produit de matrices est utilisé [115]. Les valeurs numériques utilisées pour les paramètres sont rassemblées dans le tableau 6.1.

La figure 6.6 montre le point chaud à la surface du 1/2-VCSEL. On note une élévation de température maximum de 86 K. La largeur à mi-hauteur de la distribution de température à la surface (profil rouge à droite) vaut 30  $\mu\text{m}$ , ce qui est proche de la largeur à mi-hauteur  $w_p \sqrt{2 \ln(2)}$  du faisceau de pompe Gaussien. La comparaison minutieuse des largeurs longitudinales et transverses des isothermes rend bien compte de l'anisotropie des coefficients de diffusion. Le profil longitudinal de température en dessous de la carte résulte à la fois des processus de diffusion et d'absorption optique de la pompe dans les couches du 1/2-VCSEL. On peut également noter que les conditions aux limites (6.17) et (6.18) sont bien respectées par les profils longitudinaux et transverses. À cela, ajoutons que l'évolution du profil transverse de température en traversant les couches du 1/2-VCSEL (la courbe magenta par rapport à la courbe rouge) met bien en évidence l'évacuation radiale de la chaleur. En effet, la largeur à mi-hauteur augmente avec la profondeur.

La dissipation de la chaleur dans les structures des VECSELs est un sujet particulièrement important dans la communauté des lasers de puissance, émettant plusieurs Watts. En effet, étant donnée la présence du *roll-over* thermique développée à la sous-section 1.2 du chapitre 1, la gestion de la thermique est un enjeu capital pour ces applications. L'expression (6.22) pourrait donc revêtir un intérêt bien particulier dans la modélisation thermique et la stratégie d'évacuation de la chaleur. Une façon élégante d'évacuer avec grande efficacité la chaleur du 1/2-VCSEL a été récemment démontrée [116], mais elle nécessite de changer le design de la structure. En effet, il s'agit de se débarrasser de tout ce qui entrave l'évacuation thermique et de ne garder que l'essentiel : le milieu à gain. À la place du substrat et des miroirs de Bragg, des couches en diamant sont disposés de part et d'autre de la zone active. Ce matériau est extrêmement performant pour conduire la chaleur. Un miroir externe vient jouer le rôle des miroirs de Bragg pour former une cavité linéaire. Grâce à cela, les auteurs

3. Voir la section 3 de l'annexe A pour son étude.

de la référence [116] notent la disparition du *roll-over* dans la gamme des puissances de pompe qu'ils peuvent atteindre.

Ce qui importe pour les fluctuations de la phase induites thermiquement, c'est la dynamique de la réponse thermique de la structure à une excitation. Revenons donc à la dépendance temporelle de l'équation (6.22).

### Étude du régime transitoire

Dans la littérature, il est possible de trouver des travaux concernant la dynamique de la réponse thermique de VCSELs pompés électriquement [117]. La nature et la géométrie différente de l'excitation rendent difficile l'extrapolation des résultats déjà établis au cas de figure du VECSEL pompé optiquement. Commençons donc par constater qu'il s'agit d'un problème *a priori* compliqué puisque de nombreuses échelles de temps sont impliquées. Rappelons que pour le modèle passe-bas cherchant à décrire macroscopiquement l'effet thermo-optique, il fallait déterminer un seul temps caractéristique de réponse thermique de la structure.

Or, nous pouvons envisager plusieurs temps typiques de diffusion dans la direction radiale :

- (i) sur la largeur du mode laser  $w_0^2/D_\perp \simeq 10 - 100 \mu\text{s}$ ,
- (ii) sur la largeur du spot de pompe  $w_p^2/D_\perp \simeq 10 - 100 \mu\text{s}$ ,
- (iii) sur la taille typique de l'échantillon  $L_{x,y}^2/D_\perp \simeq 1 \text{ s}$  ;

ou encore dans la direction longitudinale :

- (iv) sur l'épaisseur de la couche active  $(L_{\text{SC}} - L_{\text{DBR}})^2/D_{//} \simeq 1 \mu\text{s}$ ,
- (v) ou bien sur l'épaisseur totale de la puce à semiconducteurs  $L_{\text{SC}}^2/D_{//} \simeq 10 \text{ ms}$ .

Ainsi, lors du choix du temps caractéristique de la réponse thermique de la structure nous faisons face à la hiérarchie suivante d'échelles de temps :

$$\frac{(L_{\text{SC}} - L_{\text{DBR}})^2}{D_{//}} \ll \frac{w_0^2}{D_\perp} \simeq \frac{w_p^2}{D_\perp} \ll \frac{L_{\text{SC}}^2}{D_{//}} \lll \frac{L_{x,y}^2}{D_\perp}. \quad (6.25)$$

Faire un choix revient à restreindre la bande passante de bruit qui nous intéresse. Grâce à l'expression (6.22), nous pouvons décrire la réponse de la structure à des excitations aux temps inférieurs à  $L_{x,y}^2/D_\perp$ , que nous avons considéré comme infini (donc à des fréquences de Fourier grandes devant le Hz). Le long de l'axe optique, la transformée de Hankel dans (6.22) a le bon goût d'être analytique ce qui permet d'analyser le champ de température longitudinal :

$$\Delta T(r=0, z, t) = \frac{Q_0 w_p^2}{4D_\perp} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\kappa_n^2 w_p^2 D_{//}}{8 D_\perp}} I_n \sin(\kappa_n z) \times \left\{ E_1 \left( \frac{\kappa_n^2 w_p^2 D_{//}}{8 D_\perp} \right) - E_1 \left[ \frac{\kappa_n^2 D_{//}}{2 D_\perp} \left( \frac{w_p^2}{4} + 2 D_\perp t \right) \right] \right\}. \quad (6.26)$$

L'évolution temporelle de ce champ de température longitudinal est tracée sur la Fig. 6.7(a) pour plusieurs valeurs de  $z$  allant du haut de la structure du 1/2-VCSEL jusqu'au Peltier se situant sous le substrat. Le régime stationnaire peut être considéré comme atteint sur l'axe après quelques ms, ce qui correspond à la durée de diffusion longitudinale sur l'épaisseur totale de l'échantillon  $L_{SC}^2/D_{//}$  valant ici 3 ms. On confirme que l'élévation maximum de la température se situe à la surface et atteint les 86 K précédemment relevés. De plus, le temps typique pour que la température à une valeur de  $z$  donnée atteigne la moitié de sa valeur stationnaire croît lorsque l'on s'éloigne de la surface. Ceci est dû au délai de propagation longitudinal du transfert thermique, qui se comporte comme  $(L_{SC} - z)^2/D_{//}$ . Ce temps typique pour atteindre la moitié de la valeur stationnaire sature à la valeur  $w_p^2/2D_{\perp}$ , en conséquence de la diffusion transverse de chaleur. L'argument de la fonction exponentielle intégrale dans (6.26) met en lumière ce mélange de diffusion longitudinale et transverse. En effet, pour chaque terme de la série de Fourier longitudinale, l'argument fait apparaître un rapport entre un temps de diffusion transverse et un temps de diffusion longitudinale. Le profil longitudinal de température est tracé à la Fig. 6.7 à plusieurs instants  $t$  après le début de l'irradiation de la structure par la pompe à partir des équations (6.24) et (6.26). Les résultats corroborent l'estimation précédente de quelques ms pour la durée du régime transitoire. De même, le régime stationnaire est atteint plus tôt au voisinage de la surface que dans les couches plus profondes de la structure à cause du délai de propagation sus-mentionné.

Avant de regarder plus en détail la façon dont la dynamique de cette réponse thermique affecte le bruit de fréquence thermiquement induit, revenons sur un effet collatéral de la distribution spatiale de température de la Fig. 6.6.

## 2.2 Effet de lentille thermique

En régime stationnaire, la carte de température de la Fig. 6.6 affiche un fort gradient transverse avec un point chaud central engendré par le pompage optique. Or cette distribution de température (6.22) s'accompagne d'une distribution spatiale de l'indice de réfraction et crée donc un déphasage par effet thermo-optique. Après un aller-retour dans la cavité, le déphasage accumulé par le champ électrique du laser à la position radiale  $r$  se calcule grâce à l'expression issue de [118] :

$$\Delta\psi(r) = -\frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{L_{SC}} \Delta T_{ss}(r, z) \cdot \frac{dn_{SC}}{dT} |e(z)|^2 dz, \quad (6.27)$$

qui est à mettre en parallèle avec la relation (6.9). Typiquement, l'indice optique augmente avec la température en conséquence de quoi la carte de température de la Fig. 6.6 peut être vue comme l'équivalent de la lentille plan-convexe schématisée à gauche de la figure 6.8 : on parle d'effet de lentille thermique. Le déphasage induit à la traversée d'une lentille de

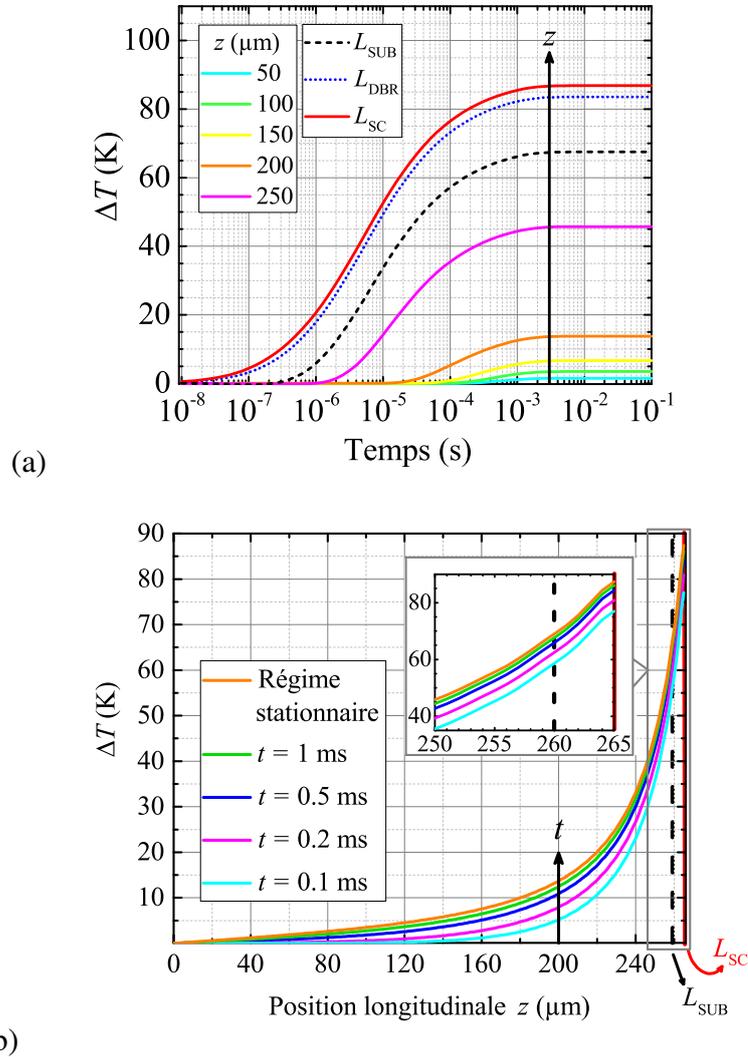


FIGURE 6.7 – Évolution de l'élévation de température induite par le pompage optique le long de l'axe optique ( $r = 0$ ). La pompe est « branchée » à l'instant  $t = 0$ . (a) Évolution temporelle de  $\Delta T$  à différentes profondeurs  $z$  dans la structure. (b) Établissement du profil longitudinal stationnaire de température  $\Delta T$  au cours du temps  $t$ . La courbe orange est calculée à partir de l'expression (6.24) de l'élévation de température en régime stationnaire. L'insert représente un zoom sur la zone correspondant à la zone active de la structure. Les pointillés noirs correspondent à la l'interface entre le substrat et les miroirs de Bragg alors que la courbe continue rouge correspond à la surface du 1/2-VCSEL.

distance focale  $f$  vérifie la relation [119] :

$$\Delta\psi_f(r) = \frac{\pi r^2}{\lambda f}. \quad (6.28)$$

Un développement limité à l'ordre 2 en  $r$  de l'expression (6.22) évaluée à  $t \rightarrow \infty$  permet d'identifier l'équivalent de la distance focale  $f$  induite thermiquement une fois injecté dans l'expression de (6.27). Cela nécessite de faire un développement limité de la fonction de Bessel  $J_0(k_{\perp}r) \sim 1 - (k_{\perp}r/2)^2$  qui intervient dans la transformée de Hankel inverse. L'intégration sur la variable  $k_{\perp}$  est analytique et permet alors de montrer que la distance focale de l'effet de lentille thermique vérifie :

$$f^{-1} = \frac{\partial n_{SC}}{\partial T} \frac{Q_0}{D_{\perp}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{L_{SC}} |e(z)|^2 \sin(\kappa_n z) dz \times I_n \cdot \left[ 1 - \frac{w_p^2 \kappa_n^2 D_{//}}{8 D_{\perp}} e^{\frac{w_p^2 \kappa_n^2 D_{//}}{8 D_{\perp}}} E_1 \left( \frac{w_p^2 \kappa_n^2 D_{//}}{8 D_{\perp}} \right) \right]. \quad (6.29)$$

Cette expression analytique fait intervenir la fonction exponentielle intégrale et les rapports des temps de diffusion longitudinale et transverse. On s'aperçoit également que plus le transfert thermique  $Q_0$  provenant de la pompe est important et plus la distance focale est petite et donc l'effet de lentille significatif. L'étude sur  $\mathbb{R}^+$  de la fonction  $x \mapsto x \cdot e^x \cdot E_1(x)$  montre qu'elle est positive, croissante et majorée par 1. On en déduit que la distance focale associée est positive et donc la lentille convergente, comme on s'y attendait physiquement avec la distribution spatiale de l'indice de réfraction. À l'aide des valeurs rassemblées dans le tableau 6.1, la distance focale associée à l'effet de lentille thermique dans le VECSEL à 852 nm s'évalue à quelques mm. Cet effet est donc considérable. Ceci a pour conséquence de changer les paramètres de la cavité laser.

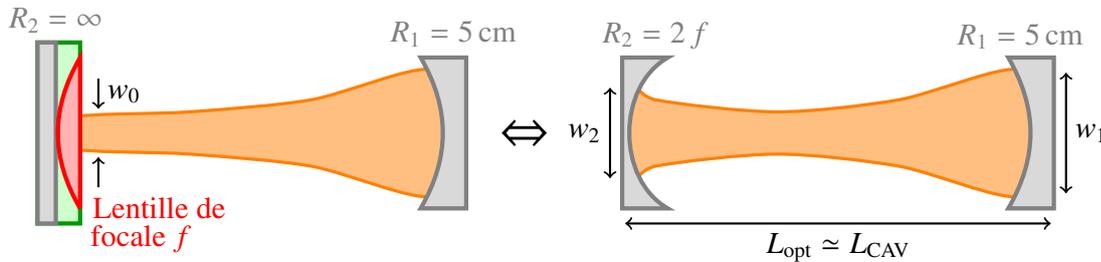


FIGURE 6.8 – Schéma de la cavité soumise à l'effet de lentille thermique et de la cavité à deux miroirs concaves équivalente. Le semiconducteur (en vert) subissant l'échauffement représenté par la zone en rouge et sa zone DBR forment un système lentille convergente de focale  $f$  et d'un miroir plan. Dans le système équivalent, le miroir 2 acquiert une courbure  $R_2$  reliée à  $f$  et on note  $w_2$  la nouvelle largeur du faisceau incident.

Comme montré à la Fig. 6.8, l'ensemble du système lentille convergente de focale  $f$  et du miroir plan formé par la zone DBR est équivalent à un miroir concave de rayon de courbure positif  $R_2 = 2f$ . La démonstration s'appuie sur la Fig. 6.9, présentant la géométrie du problème. Le centre de courbure du miroir de courbure  $-R > 0^4$  est noté C et son sommet

4. Par convention, la courbure est positive pour un centre de courbure situé à droite de la surface.

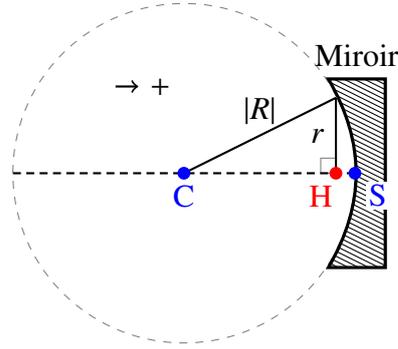


FIGURE 6.9 – Schéma pour le calcul du déphasage accumulé à un rayon  $r$  de l'axe à l'aller retour sur un miroir concave.

S. Estimons le déphasage accumulé à un rayon  $r$  de l'axe optique (CS) après un aller-retour causé par le miroir sphérique. Le segment  $\overline{CS} = -R$  et le théorème de Pythagore donnent dans l'approximation paraxiale :

$$\overline{CH} = \sqrt{R^2 - r^2} \underset{-r/R \ll 1}{\sim} -R \left( 1 - \frac{r^2}{2R^2} \right).$$

Sur un aller-retour, le déphasage accumulé à une distance  $r$  du centre vaut donc :

$$\Delta\psi_R(r) = 2 \times \frac{2\pi \cdot \overline{SH}}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot (\overline{SC} + \overline{CH}) \underset{-r/R \ll 1}{\sim} \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{R/2}.$$

Or, pour un miroir concave, la position du point focal F (image et objet confondus) est directement liée à la distance du centre C au sommet S par la relation :  $\overline{SF} = \overline{SC}/2$ . On a donc  $f = R/2$ . Ceci permet de conclure que  $\Delta\psi_R(r)$  admet exactement la même expression que  $\Delta\psi_f(r)$  le déphasage (6.28) dû à la lentille de focale  $f$  et légitime la cavité équivalente proposée.<sup>5</sup> Comme illustré à la Fig. 6.8, la cavité chaude peut être caractérisée par un nouveau couple de rayons du faisceau laser intra-cavité sur les miroirs :  $w_1$  et  $w_2$ . En introduisant les « paramètres  $g$  » suivants :

$$g_1 = 1 - \frac{L_{CAV}}{R_1} \quad \text{et} \quad g_2 = 1 - \frac{L_{CAV}}{R_2}, \quad (6.30)$$

la référence [120] montre qu'un tel résonateur optique admet un faisceau gaussien stable seulement si  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ . Dans ce cas, les rayons du faisceau gaussien sur les deux

5. Dans le cas du miroir concave équivalent de gauche du VECSEL à la Fig. 6.8, la convention de signe donne bien  $R_2$  du signe opposé à celui de la démonstration donc positif.

miroirs vérifient :

$$w_1^2 = \frac{\lambda L_{\text{CAV}}}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}}, \quad (6.31)$$

$$w_2^2 = \frac{\lambda L_{\text{CAV}}}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}}. \quad (6.32)$$

On obtient une valeur du paramètre  $g_2$  résultant de la cavité équivalente créée par l'effet de lentille thermique en utilisant  $R_2 = 2f$  dans (6.30). Ré-injecter cette valeur dans (6.32) donne une nouvelle valeur pour la taille du rayon sur la structure  $w_2 = 24 \mu\text{m}$ . Cette valeur remplace le rayon  $w_0$  du profil radial gaussien du mode laser considéré précédemment. Lorsque la cavité est froide, c'est une cavité plan-concave avec  $R_2 \rightarrow \infty$  qui se retrouve instable lorsque  $L_{\text{CAV}} > R_1$ . Cependant, l'échauffement dû au pompage optique peut engendrer des « paramètres  $g$  » qui rendent cette même cavité (avec  $L_{\text{CAV}} > R_1$ ) stable en conséquence de l'important effet de lentille thermique.

L'exploration des fluctuations de fréquence du laser causées par les effets thermo-optiques peut désormais prendre place à la lumière des nouveaux paramètres de cavité engendrés par l'effet de lentille thermique dû au pompage optique ainsi que de la dynamique de la réponse thermique de la structure décrite à la sous-section 2.1.

### 3 Bruit de fréquence induit thermiquement

#### 3.1 Contribution des fluctuations de pompe

Considérons les fluctuations thermiques  $\delta Q(t)$  issues des fluctuations de puissance de la pompe  $\delta P_{\text{opt}}(t)$ . En utilisant le formalisme de la fonction de Green, les fluctuations de température engendrées au sein de la structure mèneront, à travers l'effet thermo-optique (6.9) au calcul des fluctuations de fréquence du laser.

##### Calcul de la fonction de Green

La fonction de Green  $G_T(\mathbf{r}, t)$  associée aux fluctuations thermiques issues du pompage, est solution de l'équation de la chaleur pour laquelle la dépendance temporelle de l'excitation est une impulsion de Dirac :

$$(\partial_t - D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 - D_{//} \partial_z^2) G_T(\mathbf{r}, t) = \delta(t) \frac{Q(\mathbf{r})}{Q_0}. \quad (6.33)$$

Le profil spatial  $Q(\mathbf{r})/Q_0$  de la source de chaleur est celui de l'équation (6.11). Les étapes de résolution sont ensuite similaires à la résolution de (6.22), dans le domaine spectral où la

pulsation associée à la transformée de Fourier temporelle  $\widetilde{\cdot}$  est notée  $\Omega$ . Ainsi, on obtient :

$$\widetilde{G}_T(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{w_p^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \sin(\kappa_n z) \cdot \text{HT}_0^{-1} \left[ \frac{e^{-w_p^2 k_{\perp}^2 / 8}}{i\Omega + (k_{\perp}^2 D_{\perp} + \kappa_n^2 D_{//})} \right] (r). \quad (6.34)$$

La fluctuation de la fréquence instantanée du laser  $\delta\dot{\psi}(t)$  s'écrit sous la forme du produit de convolution :

$$\delta\dot{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} d\tau G_{\dot{\psi}}(t - \tau) \cdot \delta Q(\tau), \quad (6.35)$$

comme réponse linéaire du système à la fluctuation de transfert thermique  $\delta Q(t)$ . La susceptibilité thermique  $G_{\dot{\psi}}$  associée à la fonction de Green thermique  $G_T$  de l'équation (6.34) est définie à partir des effets thermo-optiques de l'équation (6.9) par :

$$\widetilde{G}_{\dot{\psi}}(\Omega) = -q \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{G}_T(\mathbf{r}, \Omega) \cdot |e(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \quad (6.36)$$

Grâce au théorème de Parseval–Plancherel dans le domaine de Hankel énoncé à l'annexe A3, il est possible de remplacer l'intégration sur la variable radiale  $r$  de l'équation (6.36) par celle sur la variable réciproque  $k_{\perp}$  :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \widetilde{G}_T(r, z, \Omega) \cdot e^{-2\left(\frac{r}{w_2}\right)^2} r dr = \int_{\mathbb{R}^+} \text{HT}_0[\widetilde{G}_T](k_{\perp}, z, \Omega) \cdot \frac{w_2^2}{4} \cdot e^{-\frac{k_{\perp}^2 w_2^2}{8}} k_{\perp} dk_{\perp}. \quad (6.37)$$

L'intérêt de cette opération consiste à faire apparaître une intégrale analytique dans le membre de droite, qui permet d'aboutir à l'expression :

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{\dot{\psi}}(\Omega) &= -q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{L_{\text{sc}}} |e_{//}(z)|^2 \sin(\kappa_n z) dz \\ &\quad \times \frac{I_n w_p^2 \pi w_2^2}{8 D_{\perp} \mathcal{V}_{\text{mode}}} \cdot \exp\left(\frac{a_n + i\Omega \tau_c}{2}\right) \cdot E_1\left(\frac{a_n + i\Omega \tau_c}{2}\right), \end{aligned} \quad (6.38)$$

avec les rapports  $a_n$  entre diffusion longitudinale et diffusion transverse ainsi que le temps caractéristique  $\tau_c$  de diffusion transverse sur la taille typique du mode laser additionné à celui du faisceau de pompe :

$$\begin{cases} a_n = \frac{\kappa_n^2 D_{//}}{4 D_{\perp}} (w_2^2 + w_p^2), \\ \tau_c = \frac{w_2^2 + w_p^2}{4 D_{\perp}}. \end{cases} \quad (6.39)$$

### Bruit de fréquence induit par la pompe

De l'équation (6.35), on obtient directement une relation de proportionnalité de la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence du laser  $\mathcal{S}_{\dot{\psi}}$  et du bruit d'intensité relatif de la

pompe :

$$S_{\psi}(\Omega) = Q_0^2 \cdot \text{RIN}_p(\Omega) \times |\widetilde{G}_{\psi}(\Omega)|^2. \quad (6.40)$$

Ainsi la DSP de bruit de fréquence thermiquement induit par les fluctuations de pompe s'écrit :

$$S_{\psi}(\Omega) = \text{RIN}_p(\Omega) \cdot \left( \frac{q Q_0 \pi w_2^2 w_p^2 L_{SC}}{8 D_{\perp} \mathcal{V}_{\text{mode}}} \right)^2 \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n \mathcal{A}_n(\Omega) \right|^2, \quad (6.41)$$

où les  $\mathcal{A}_n$  sont les termes de la série de Fourier longitudinale décrivant le contenu spectral et les  $\mathcal{N}_n$  leurs poids respectifs définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_n(\Omega) = \exp\left(\frac{a_n + i\Omega\tau_c}{2}\right) \cdot E_1\left(\frac{a_n + i\Omega\tau_c}{2}\right), \\ \mathcal{N}_n = \frac{I_n}{L_{SC}} \int_0^{L_{SC}} |e_{//}(z)|^2 \sin(\kappa_n z) dz. \end{cases} \quad (6.42)$$

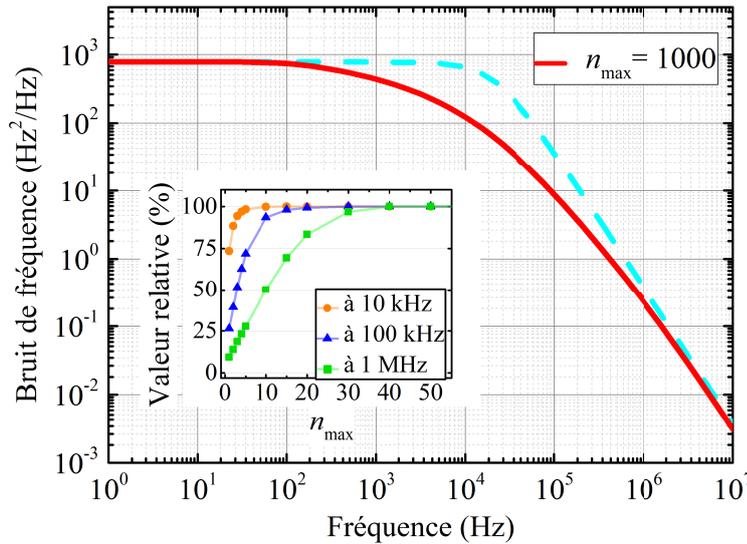


FIGURE 6.10 – Spectre de la DSP de bruit de fréquence optique induit par le bruit d'intensité de la pompe. L'insert montre la convergence de la série de Fourier longitudinale intervenant dans l'équation (6.41) à différentes fréquences d'analyse en fonction de l'incrément maximum  $n_{\text{max}}$  de la somme. Seulement quelques dizaines de termes sont suffisants. La courbe rouge est le spectre (6.41) obtenu avec 1000 termes. Les tirets cyan sont issus d'un ajustement de type filtre passe-bas.

Le spectre du bruit de fréquence (6.41) est représenté à la Fig. 6.10 à l'aide des paramètres du tableau 6.1. Le bruit d'intensité de la pompe est un bruit blanc ( $\text{RIN}_p = \text{Cte}$ ) sur une bande passante de 10 MHz. Le graphique inséré dans le spectre de la Fig. 6.10 illustre la convergence de la série de Fourier longitudinale. Bien qu'avec la fréquence d'analyse le nombre de termes de la série nécessaire pour une convergence satisfaisante augmente, seuls les 50 premiers termes suffisent pour une bande passante de 1 MHz.

Le comportement asymptotique du spectre du bruit de fréquence est en  $f^0$  aux basses fréquences et  $f^{-2}$  aux hautes fréquences. La transition entre ces deux régimes asymptotiques est cependant très douce et compatible avec un bruit de fréquence en  $1/f$  entre 1 kHz et 100 kHz. Au fur et à mesure que la somme de la série de Fourier longitudinale est incremented, on note que cette transition est de plus en plus adoucie. Le phénomène de diffusion longitudinale, intimement lié à cette série de Fourier, joue donc un rôle dans le comportement en  $1/f$  du spectre entre 1 kHz et 100 kHz.

### Comparaison au modèle de Laurain

Le modèle de type filtre passe-bas pour le bruit de fréquence d'origine thermique et issu des fluctuations de pompe n'envisage qu'une seule fréquence de coupure  $1/\tau_T$  où  $\tau_T = w_0^2 / (4 D_\perp)$ . Ainsi, seule la diffusion transverse sur le rayon du mode laser de la cavité est considérée. La diffusion thermique transverse sur la taille du spot de pompe ne l'est pas, comme si ce dernier était ponctuel. La diffusion longitudinale est occultée. Ce modèle, initié dans les travaux de A. Laurain [44, 45, 121], reproduit tout de même des comportements asymptotiques analogues à ceux du modèle que nous venons d'établir : en  $f^0$  aux basses fréquences et  $f^{-2}$  aux hautes fréquences. Cette loi de puissance comporte un aspect plus large évoqué à l'annexe A. Comme on peut le voir en cyan sur la Fig. 6.10, un ajustement du type  $S_0 / (1 + (f/f_0)^2)$  est employé pour imiter le modèle passe-bas. On note que la transition entre les deux régimes asymptotiques est bien plus anguleuse et qu'entre 100 Hz et 1 MHz ceci a tendance à sur-estimer le bruit de fréquence tel que le modèle développé dans ce chapitre le prédit.

## 3.2 Contribution des fluctuations thermodynamiques

Les fluctuations thermodynamiques de température dans le 1/2-VCSEL sont elles aussi responsables de fluctuations de la fréquence optique du laser via les effets thermo-optiques. Nous allons donner une expression analytique de leur contribution au bruit de fréquence du laser à partir de l'équation stochastique de la chaleur (6.15) et des corrélations du champ de Langevin (6.43).

Des études similaires ont été menées pour des lasers à fibre [122, 123], pour des micro-résonateurs faits de nitrure de silicium s'inscrivant dans le cadre de l'essor récent de la photonique intégrée [124] ou encore pour des VCSELs à base d'arséniure de gallium ou de phosphore d'indium [105]. Ce dernier exemple est particulièrement proche de notre étude. Dans une approximation de géométrie de tranche infinie, un résultat analytique de fonction d'auto-corrélation des fluctuations de phase est dérivé. Cependant, l'étape supplémentaire d'expression analytique pour la densité spectrale de puissance de bruit de phase n'est pas franchie : l'estimation du bruit de phase dans ce papier est menée numériquement, ce qui limite la profondeur de compréhension du phénomène physique. Par ailleurs, une différence notable entre les VCSELs de la référence [105] et nos travaux sur les VESCELs provient

du profil d'énergie du mode laser dans les couches de semiconducteurs. Cette différence est causée par les miroirs de la cavité intégrée. À cela, ajoutons que les travaux de [105] n'envisagent pas l'anisotropie de diffusion qui est pourtant bien présente dans l'empilement de semiconducteurs constituant les VCSELs. Nous souhaitons donc aller plus loin en proposant un modèle de bruit de fréquence d'origine thermique issu des fluctuations thermodynamiques qui est compatible avec l'anisotropie de diffusion.

### Auto-corrélations des fluctuations de température

Reprenons la fonction d'auto-corrélation (6.16) et effectuons ses transformées de Hankel sur les variables radiales  $r$  et  $r'$ . Cette étape de transformation du terme source est nécessaire dans la résolution de l'équation de la chaleur (6.15), comme on l'a vu apparaître dans le membre de droite de l'équation (6.19). Le calcul fait alors apparaître l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r dr J_0(k_{\perp} r) \int_{\mathbb{R}^+} r' dr' J_0(k'_{\perp} r') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Remarquons d'une part que :

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

et d'autre part, qu'avec la géométrie cylindrique que nous avons :

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')}{2\pi r} \cdot \delta(z - z').$$

Après deux intégrations par parties pour déplacer l'opérateur laplacien, les deux termes de cette intégrale issus de l'écriture  $\Delta = \Delta_{\perp} + \partial_z^2$  sont à étudier plus en détail. Sans détailler l'intégration triviale du pic  $\delta(r - r')$ , le premier fait apparaître une intégrale que l'on va évaluer en trois étapes : (i) une double intégration par parties, (ii) l'algébrisation de l'opérateur  $\Delta_{\perp}$  par la transformée de Hankel, et (iii) l'utilisation de l'orthogonalité des fonctions de Bessel <sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} dr \Delta_{\perp} \{r J_0(k_{\perp} r)\} \cdot J_0(k'_{\perp} r) & \stackrel{(i)}{=} \text{HT}_0 [\Delta_{\perp} \{J_0(k'_{\perp} r)\}] (k_{\perp}) \\ & \stackrel{(ii)}{=} -k_{\perp}^2 \cdot \text{HT}_0 [J_0(k'_{\perp} r)] (k_{\perp}) \\ & \stackrel{(iii)}{=} -k_{\perp}^2 \cdot \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}) / k_{\perp}. \end{aligned}$$

Le second terme, venant du  $\partial_z^2$ , n'affiche qu'une intégration d'un pic  $\delta(r - r')$  après lequel il suffit d'appliquer l'orthogonalité des fonctions de Bessel.

6. voir annexe A3.

En reprenant l'expression totale de l'auto-corrélation des fonctions de Langevin dans le domaine de Hankel, on fait correspondre le coefficient de diffusion  $D_{\perp}$  à la variable  $k_{\perp}$  et le coefficient de diffusion  $D_{//}$  à  $z$  pour introduire l'anisotropie.

En définitive, en prenant la transformée de Fourier temporelle de la fonction d'auto-corrélation du champ de Langevin dans le domaine de Hankel nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \text{HT}_0 [\tilde{\zeta}] (k_{\perp}, z, \Omega) \text{HT}_0 [\tilde{\zeta}^*] (k'_{\perp}, z', \Omega') \rangle &= \frac{2 k_B T^2}{C_v} (D_{\perp} k_{\perp}^2 - D_{//} \partial_z^2) \cdot \delta(z - z') \\ &\times \frac{\delta(k_{\perp} - k'_{\perp})}{k_{\perp}} \cdot \delta(\Omega - \Omega'). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ce résultat est une étape clé dans la dérivation de la fonction d'auto-corrélation du champ de fluctuations de température aléatoires  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  solution de l'équation stochastique (6.15) et vérifiant les conditions aux limites (6.17) et (6.18). En effet, en utilisant les étapes de résolution similaires à celles détaillées pour l'obtention de (6.22), on est confronté à l'intégrale double suivante dans les séries de Fourier longitudinales indexées  $n$  et  $m$  :

$$\int_0^{L_{sc}} \int_0^{L_{sc}} dz dz' u_n(z) u_m(z') \langle \text{HT}_0 [\tilde{\zeta}] (k_{\perp}, z, \Omega) \text{HT}_0 [\tilde{\zeta}^*] (k'_{\perp}, z', \Omega') \rangle.$$

Grâce à deux intégrations par parties et en profitant de la relation (6.21) d'orthogonalité des fonctions  $u_n$ , on se ramène alors à une série de Fourier longitudinale unique. Si bien que la relation qui remplace (6.14) dans notre 1/2-VCSEL s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \text{HT}_0 [\tilde{\vartheta}] (k_{\perp}, z, \Omega) \text{HT}_0 [\tilde{\vartheta}^*] (k'_{\perp}, z', \Omega') \rangle &= \frac{4 k_B T^2 \delta(\Omega - \Omega')}{C_v L_{sc}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\kappa_n z) \sin(\kappa_n z')}{(D_{\perp} k_{\perp}^2 + D_{//} \kappa_n^2 - i \Omega)} \\ &\times \frac{(D_{\perp} k_{\perp}^2 + D_{//} \kappa_n^2) \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}) / k_{\perp}}{(D_{\perp} k'_{\perp}{}^2 + D_{//} \kappa_n^2 + i \Omega')}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Comment cela se traduit-il en terme de bruit de fréquence optique thermiquement induit ?

### Bruit de fréquence induit par les fluctuations thermodynamiques

À partir des effets thermo-optiques (6.9), la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence vérifie :

$$S_{\psi}^{\text{Thermo}}(\Omega) = q^2 \int_{\mathbb{R}^6} \langle \tilde{\vartheta}(\mathbf{r}, \Omega) \cdot \tilde{\vartheta}^*(\mathbf{r}', \Omega) \rangle |e(\mathbf{r})|^2 \cdot |e(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (6.45)$$

En s'inspirant de l'étape de dérivation de la fonction de Green (6.37), nous pouvons utiliser le théorème de Parseval-Plancherel de l'annexe A3 suivant les deux variables radiales  $r$  et  $r'$ . Cela permet d'exploiter totalement l'expression (6.44) en la réinjectant dans (6.45). Des intégrations dans le domaine de Hankel s'ensuit une expression analytique pour le bruit de

fréquence induit par les fluctuations thermodynamiques :

$$\begin{aligned} S_{\psi}^{\text{Thermo}}(\Omega) = & \frac{q^2 \pi^2 w_2^4 k_B T^2}{C_v \mathcal{V}_{\text{mode}}^2 L_{\text{SC}} D_{\perp}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{L_{\text{SC}}} dz \sin(\kappa_n z) |e_{//}(z)|^2 \right)^2 \\ & \times \text{Re} [\exp(b_n + i\Omega\tau) \cdot E_1(b_n + i\Omega\tau)] , \end{aligned} \quad (6.46)$$

avec les rapports  $b_n$  entre diffusion longitudinale et diffusion transverse ainsi que le temps caractéristique  $\tau$  de diffusion transverse sur la taille typique du mode laser :

$$\begin{cases} b_n = \frac{\kappa_n^2 w_2^2 D_{//}}{4 D_{\perp}} , \\ \tau = w_2^2 / (4 D_{\perp}) . \end{cases} \quad (6.47)$$

Cette expression est très similaire à l'expression analytique obtenue dans les références [122, 123] dans le cadre des lasers à fibres qui cependant ne considéraient guère d'anisotropie dans la diffusion thermique.

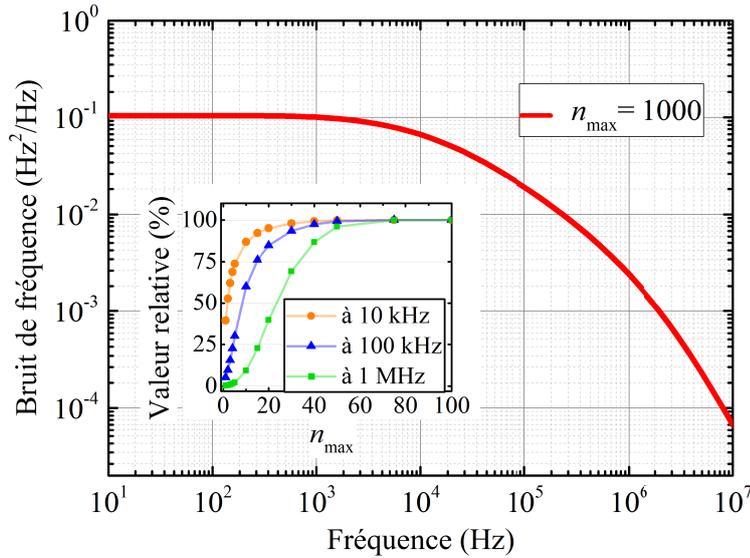


FIGURE 6.11 – Spectre de la DSP de bruit de fréquence optique induit par les fluctuations thermodynamique à température ambiante. L'insert montre la convergence de la série de Fourier longitudinale intervenant dans l'équation (6.46) à différentes fréquences d'analyse en fonction de l'incrément maximum  $n_{\text{max}}$  de la somme. Seulement quelques dizaines de termes sont suffisants. La courbe rouge est le spectre (6.46) obtenu avec 1000 termes.

La Fig. 6.11 montre la DSP de bruit de fréquence correspondant aux valeurs rassemblées dans le tableau 6.1. La convergence de la série longitudinale dans (6.46) est obtenue pour environ  $n_{\text{max}} = 60$  termes dans une bande passante de 1 MHz, comme le montre le graphique inséré en petit dans la Fig. 6.11. De façon analogue au bruit de fréquence thermiquement induit par la pompe et montré à la Fig. 6.10, le spectre de bruit de fréquence

obtenu est blanc aux basses fréquences, en  $f^{-2}$  au-delà de quelques MHz et présente une transition douce entre 1 kHz et quelques 100 kHz. La valeur de la DSP aux basses fréquences (typiquement  $10^{-1} \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ ) est cependant bien négligeable devant celle induite thermiquement par les fluctuations de la pompe (typiquement  $10^3 \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ ).

Les spectres des deux contributions au bruit de la fréquence optique thermiquement induit dans le VECSEL par, respectivement, les fluctuations de la pompe et les fluctuations thermodynamiques intrinsèques ont été modélisés analytiquement. Nous avons vu d'une part que le spectre donné par la première contribution prédit une correction à la transition anguleuse entre les deux régimes asymptotiques du modèle type passe-bas. La seconde contribution, quoique 4 ordres de grandeurs inférieure à la première aux basses fréquences, n'en est pas moins intéressante. En effet, elle permet une extension théorique aux modèles existants qui se révèlent incomplets dans notre cadre applicatif pour décrire un bruit intrinsèque. Il reste à confronter la théorie aux observations.

## 4 Bruit de phase du battement induit thermiquement dans un VECSEL bifréquence

Plusieurs méthodes existent pour mesurer le spectre de bruit de phase d'un laser. Si l'on dispose d'un autre laser que l'on sait plus stable en fréquence, on peut estimer le bruit de phase du laser d'étude en réalisant le spectre du battement des deux lasers. Ou bien, on peut, à l'aide d'un modulateur acousto-optique et d'un interféromètre déséquilibré, obtenir le spectre de bruit de phase par détection auto-hétérodyne. Ou encore, pour le mesurer, on peut convertir ce bruit de phase en bruit d'intensité grâce à un résonateur tel qu'un Fabry-Perot. Mais, en réalité, le point de départ de notre travail avec un VECSEL bifréquence nous offre un cadre privilégié puisque le spectre RF généré par battement est intimement lié au bruit de phase du VECSEL lui-même.

### 4.1 Confrontation modèle-expérience

Comme nous l'avons vu à la section 3 du chapitre 1, les corrélations des fluctuations de puissance entre les deux modes émis par le VECSEL bifréquence jouent un rôle important dans le lien entre le bruit de phase du battement RF et son bruit de fréquence. Rappelons que chaque mode intercepte une puissance de pompe différente que l'on note  $P_{p,x}$  et  $P_{p,y}$ . Le spectre du bruit de phase du battement que l'on cherche à décrire a été obtenu dans le cadre d'un pompage bien corrélé en phase où les mesures ont donné une l'amplitude des corrélations valant  $\eta = 0.98$  et une phase  $\psi = 0$ . Dans ces conditions, la DSP  $S_{\phi_T}$  du bruit de phase induit thermiquement par les fluctuations de la pompe se calcule grâce à la DSP

$S_{\dot{\psi}}$  du bruit de fréquence prédit à la relation (6.41) par la formule suivante :

$$S_{\phi_T}(f) = \frac{S_{\dot{\psi}}(f)}{(2\pi f)^2} \cdot \frac{P_{p,x}^2 + P_{p,y}^2 - 2\eta \cdot \cos \psi \cdot P_{p,x} \cdot P_{p,y}}{P_{\text{opt}}^2}. \quad (6.48)$$

Pour ce qui est de la seconde contribution au bruit de fréquence, il n'y a aucune raison évidente pour laquelle les fluctuations thermodynamiques entrant dans les deux modes du laser bifréquence, spatialement bien séparés, soient corrélées entre elles à tout instant. En effet, on ne peut pas, contrairement au cas précédent, isoler par la pensée une source commune pour ces fluctuations venant de variations aléatoires de l'énergie interne définies localement. On supposera donc qu'elles sont indépendantes. Du coup, le lien entre la DSP de bruit de phase et la DSP de bruit de fréquence (6.46) est immédiat :

$$S_{\phi_T}^{\text{Thermo}}(f) = 2 S_{\dot{\psi}}^{\text{Thermo}}(f) / (2\pi f)^2. \quad (6.49)$$

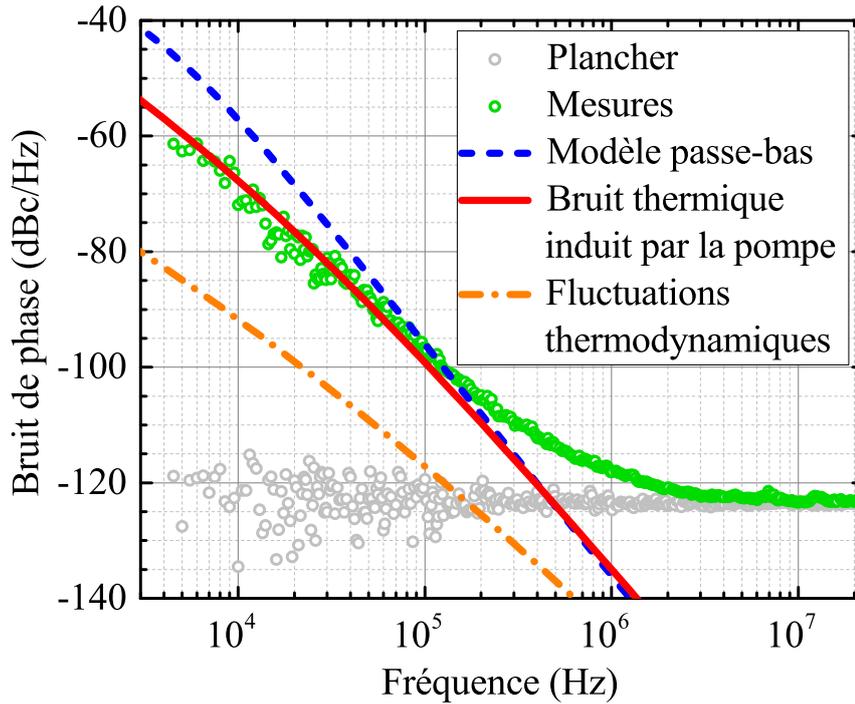


FIGURE 6.12 – Spectres de la DSP de bruit de la phase du battement RF induit par les fluctuations thermodynamique à température ambiante. Les cercles verts correspondent aux mesures reportées à la section 2 du chapitre 4, les gris au plancher de mesure et les pointillés bleus au modèle simplifié type passe-bas (LPF). Le bruit de phase thermiquement induit issu la théorie développée dans ce chapitre est tracé en rouge pour la contribution venant de la pompe et en orange pour celle des fluctuations thermodynamiques.

Le spectre de bruit de phase mesuré précédemment dans le VECSEL bifréquence à 852 nm en pompage bien corrélé en phase et les résultats théoriques issus des formules (6.48) (en rouge) et (6.49) (en orange) sont superposés sur la Fig. 6.12. On montre donc, en rouge et en orange respectivement, les spectres de bruit de phase induit thermiquement par les fluctuations de la pompe et par les fluctuations thermodynamiques obtenus avec les paramètres du tableau 6.1. En pointillés bleus est représenté le bruit de phase issu du modèle passe-bas. On remarque bien que ce sont les bruits d'origine thermique qui dominent le bruit de phase du laser sous le MHz. En particulier, ce sont les bruits thermiques issus de la pompe qui, calculés grâce au couple d'équations (6.48) et (6.41) du nouveau modèle, reproduisent remarquablement bien le bruit de phase RF mesuré. Le contraste avec l'ancien modèle passe-bas est important. Le bruit de phase issu des fluctuations thermodynamiques est 20 à 30 dB inférieur dans la bande passante comprise entre 1 kHz et 100 kHz et il faut attendre les MHz pour que sa contribution rattrape celle issue du bruit de pompe. Malheureusement, le niveau du plancher de bruit (en cercles gris) ne permet pas de sonder cet effet.

On comprend que le modèle passe-bas, incompatible avec le comportement en  $f^{-3}$  du bruit de phase sur la bande 1 kHz – 100 kHz, échoue à reproduire les mesures car il repose sur un seul temps caractéristique de diffusion. Or dans l'approche microscopique que nous avons proposée au cours de ce chapitre, non seulement la diffusion radiale sur la largeur du mode laser et de la pompe mais aussi la diffusion longitudinale sur l'épaisseur de la couche active ont été pris en compte. Comme nous l'avons vu, c'est grâce à la série de Fourier longitudinale que la transition sur la bande 1 kHz – 100 kHz est adoucie. C'est donc ce qui permet au nouveau modèle de mieux décrire les résultats expérimentaux.

## 4.2 Vers un nouveau modèle simplifié

Bien qu'imprécis, le modèle passe-bas décrit les mêmes comportements asymptotiques que le modèle microscopique de bruit thermique que nous avons élaboré. Un modèle simplifié présente par ailleurs l'avantage d'être plus maniable. Nous allons donc partir de développements asymptotiques du modèle établi dans ce chapitre pour essayer d'aboutir à une formulation simplifiée qui tienne compte à la fois de la diffusion transverse et longitudinale.

### Développement aux basses fréquences

Aux basses fréquences, lorsque  $\Omega \ll \Omega_1$  avec  $\Omega_1 = \min\left[1/\tau_c, \frac{\pi^2 D_{//}}{4L_{sc}^2}\right]$ , il est possible d'approximer le bruit de fréquence thermiquement induit par les fluctuations de pompe

donné par l'équation (6.41) comme suit :

$$\mathcal{S}_{\dot{\psi}}(\Omega \ll \Omega_1) = \text{RIN}_p(\Omega) \cdot f_0^2 \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n e^{a_n/2} E_1\left(\frac{a_n}{2}\right) \right|^2, \quad (6.50)$$

où  $f_0$  correspond au décalage de fréquence thermiquement induit par la pompe défini comme

$$f_0 \triangleq \frac{q Q_0 \pi w_2^2 w_p^2 L_{\text{SC}}}{8 D_{\perp} \mathcal{V}_{\text{mode}}}.$$

Les valeurs pour le VECSEL à 852 nm montrent que  $\Omega_1/2\pi$  est typiquement relié au temps de diffusion longitudinale et son ordre de grandeur s'élève à quelques 100 Hz. Avec un bruit d'intensité de la pompe blanc en fréquence, la valeur de la DSP de bruit de fréquence donnée par (6.50) correspond à la constante observée sur le spectre de la Fig. 6.10 en dessous de 100 Hz.

Aux basses fréquences telles que  $\Omega \ll \Omega_2$  avec  $\Omega_2 = \min\left[1/\tau, \frac{\pi^2 D_{\parallel}}{4 L_{\text{SC}}^2}\right]$ , la contribution des fluctuations thermodynamiques (6.46) vérifie :

$$\mathcal{S}_{\dot{\psi}}^{\text{Thermo}}(\Omega \ll \Omega_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \cdot \exp(b_n) \cdot E_1(b_n), \quad (6.51)$$

avec les coefficients  $\mathcal{M}_n$  définis comme

$$\mathcal{M}_n = \frac{q^2 \pi^2 w_2^4 k_B T^2}{C_v \mathcal{V}_{\text{mode}}^2 L_{\text{SC}} D_{\perp}} \left( \int_0^{L_{\text{SC}}} dz \sin(\kappa_n z) |e_{\parallel}(z)|^2 \right)^2.$$

Dans le cas du laser à 852 nm,  $\Omega_2 = \Omega_1$ . Alors, la valeur constante (6.51) est celle que l'on observe aux basses fréquences du spectre de bruit de fréquence sur la Fig. 6.11.

### Développement aux hautes fréquences

Aux hautes fréquences, le développement asymptotique de la fonction exponentielle intégrale  $E_1$  permet d'exprimer les fluctuations de fréquence induites thermiquement par la pompe comme :

$$\mathcal{S}_{\dot{\psi}}(\Omega \gg \Omega_1) = \text{RIN}_p(\Omega) \cdot f_0^2 \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \mathcal{N}_n}{a_n + i \Omega \tau_c} \right|^2. \quad (6.52)$$

De façon analogue, on obtient la contribution des fluctuations thermodynamiques :

$$\mathcal{S}_{\dot{\psi}}^{\text{Thermo}}(\Omega \gg \Omega_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \cdot \frac{b_n}{b_n^2 + (\Omega \tau)^2}. \quad (6.53)$$

Ces deux expressions attestent à la fois d'un comportement en  $f^{-2}$  du spectre aux hautes fréquences mais également de la prise en compte des diffusions thermiques dans les directions transverse et longitudinale via la série de Fourier.

### Interpolation

À la lumière de ces développements asymptotiques, les deux contributions au bruit de fréquence thermiquement induit peuvent être approchées à l'aide de ces séries de fonctions rationnelles :

$$S_{\dot{\psi}}(\Omega) \sim \text{RIN}_p(\Omega) \cdot f_0^2 \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_n}{(e^{a_n/2} E_1(a_n/2))^{-1} + i\Omega\tau_c/2} \right|^2, \quad (6.54)$$

et

$$S_{\dot{\psi}}^{\text{Thermo}}(\Omega) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \cdot \frac{(e^{b_n} E_1(b_n))^{-1}}{(e^{b_n} E_1(b_n))^{-2} + (\Omega\tau)^2}. \quad (6.55)$$

Ces expressions simplifiées ont un intérêt pratique pour l'estimation et l'optimisation du bruit de fréquence optique du VECSEL d'origine thermique. Finalement, nous retrouvons comme dans l'annexe A un comportement en loi de puissance. Cependant l'absence d'échelle caractéristique une fois passée la fréquence caractéristique de diffusion radiale sur la largeur du mode doit s'étendre à l'ensemble des modes longitudinaux de diffusion. Ainsi, on tient bien en compte des deux directions de diffusion dans la structure ainsi que de l'éventuelle anisotropie.

## 5 Généralisation au cas d'une pompe super-gaussienne

Comme nous l'avons évoqué à la section 1.1, le profil spatial de la pompe peut avoir une incidence significative sur la proportion de puissance de pompe dissipée sous forme thermique dans la structure. La référence [95] amène une preuve expérimentale d'augmentation de la puissance émise par un VECSEL en passant d'une pompe gaussienne à une pompe super-gaussienne. Les auteurs reportent une augmentation de cette puissance pouvant aller jusqu'à un facteur 5. On s'attend bien avec un profil de pompe plus plat au centre à recouvrir la zone de gain de façon plus homogène pour une même puissance donnée.

Mais comment cela se traduit-il dans la dynamique ? En particulier, comment est modifié le transfert des fluctuations de pompe à celles de la fréquence optique instantanée du laser à travers les effets thermo-optiques dans le cas d'un profil de pompe super-gaussien ?

Dans certains lasers à gain élevé, la saturation du gain du milieu actif va produire un champ intra-cavité dont le profil transverse est bien aplati au centre. On s'éloigne alors du profil gaussien décrit précédemment et le profil radial du faisceau émis par le laser est appelé

profil « super-gaussien », par abus de langage. En fait, les diodes lasers de pompe que nous utilisons présentent aussi un profil spatial aplati au centre <sup>7</sup>. La propagation de nombreux modes spatiaux dans la fibre optique y joue certainement un rôle. Ce genre de profils est donc commun. De la nécessité de décrire la propagation de tels faisceaux lasers ont été élaborés des modèles successifs, l'idée étant de garder un peu du potentiel analytique qu'offre le modèle du faisceau gaussien. Par exemple, on peut souhaiter obtenir l'expression analytique d'un champ diffracté en champ lointain grâce à l'intégrale de Fresnel exprimée dans l'approximation de Fraunhofer. Le point de départ pour modéliser le profil d'un faisceau que l'on veut aplatir au centre, c'est bien sûr le profil dit super-gaussien défini grâce à son exposant  $m$  et sa largeur  $w_p$  par la relation :

$$\text{SG}(r) = \exp\left[-2\left(\frac{r}{w_p}\right)^m\right], \quad m \geq 2. \quad (6.56)$$

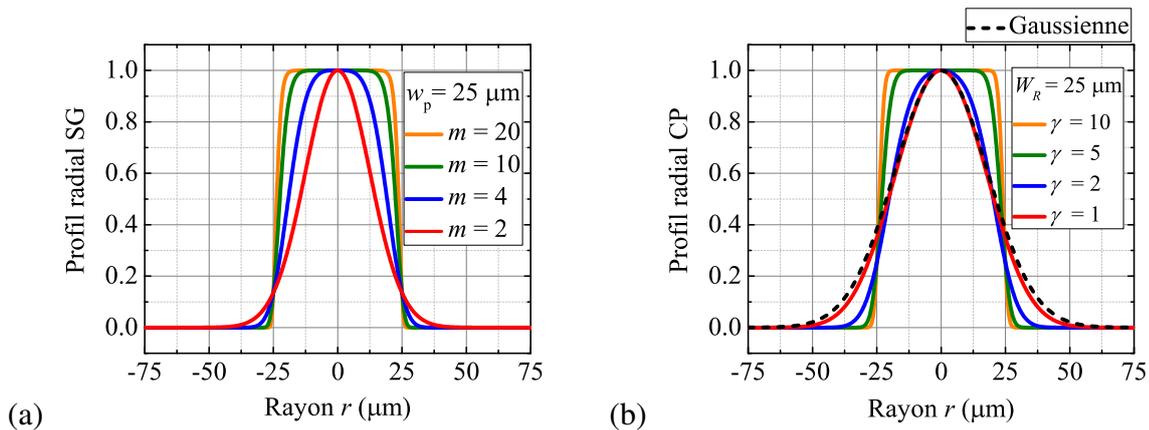


FIGURE 6.13 – Simulation d'un profil radial de pompe aplati. (a) affiche un profil super-gaussien (6.56) de largeur  $w_p = 25 \mu\text{m}$  pour différentes valeurs de l'exposant  $m$ . (b) affiche le profil (6.57) utilisé pour s'approcher de (6.56) par convolution d'une fonction rectangulaire de largeur fixe  $W_R = 25 \mu\text{m}$  et d'une gaussienne de largeurs  $W_g = W_R/\gamma$  différentes. En pointillés noirs, une gaussienne de largeur  $2 W_R$  est tracée.

Comme on le voit à la figure 6.13(a), plus l'exposant  $m$  est important, plus le profil radial super-gaussien paraît aplati : on se rapproche d'un profil rectangulaire de largeur  $w_p$ . La propagation de faisceaux super-gaussiens est obtenue numériquement dans les travaux [125]. Il faut cependant attendre l'étude de la référence [126] pour avoir une approche analytique de la propagation de faisceaux aplatis. Cependant, pour rendre analytique ce travail, le paradigme des faisceaux super-gaussiens est laissé de côté pour une description de faisceaux aplatis comme une superposition de fonctions de Laguerre-Gauss. En fait, nous allons utiliser un troisième paradigme de faisceaux au profil aplati, plus analytique et

7. Parfois qualifié de *top-hat*, par anglicisme.

plus simple dans notre cas de figure : celui des références [127] et [128]. Il est basé sur un produit de convolution entre une gaussienne  $G_{W_g}$  de largeur  $W_g$  et une fonction rectangle  $R_{W_R}$  de largeur  $W_R$  (voir Fig. 6.14). Le profil de convolution est normalisé à 1 au centre et s'écrit donc :

$$\text{CP}(r) = \frac{G_{W_g} * R_{W_R}(r)}{\text{CP}(0)} = C_0 \int_{-W_R}^{W_R} dr' \exp \left[ - \left( \frac{r-r'}{W_g} \right)^2 \right] \text{ où } C_0^{-1} = \sqrt{\pi} \cdot W_g \cdot \text{erf}(\gamma), \quad (6.57)$$

avec le rapport  $\gamma = W_R/W_g$  et la fonction spéciale d'erreur de Gauss notée erf.

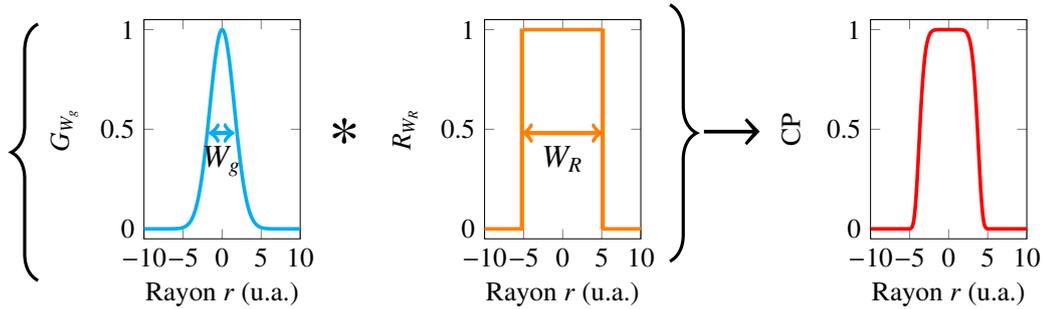


FIGURE 6.14 – Illustration graphique de la définition du profil CP à partir du produit de convolution (6.57) entre une gaussienne de largeur  $W_g$  et d'une fonction rectangle de largeur  $W_R$ .

On a ainsi remplacé les deux paramètres  $m$  et  $w_p$  de la description super-gaussienne par les deux largeurs  $W_g$  et  $W_R$ . La Fig. 6.13(b) présente le module carré du profil radial CP( $r$ ) de l'équation (6.57), tracé pour plusieurs valeurs de  $\gamma$  à  $W_R$  fixé. On s'aperçoit que pour  $\gamma = 1$ , la description n'est pas tout à fait celle d'une gaussienne, quoique relativement proche. L'écart à la gaussienne se constate sur les ailes et provient simplement de la troncature imposée par une valeur finie de la convolution rectangulaire  $W_R$ . L'obtention d'une gaussienne pure nécessite  $W_R \rightarrow \infty$ . On note que le profil CP se rapproche bien de celui de la super-gaussienne pour des valeurs de  $\gamma \gg 1$ , avec le même aplatissement constaté et une largeur similaire  $W_R \approx w_p$ . La référence [128] propose alors l'approximation des profils super-gaussiens à l'aide du module carré du profil de convolution  $|\text{CP}|^2$  en reliant la largeur  $w_p$  à la somme  $W_g + W_R$  et en utilisant pour l'exposant  $m \approx 2\gamma$ . Cette dernière correspondance s'illustre à la comparaison des courbes verte et orange des Fig. 6.13(a,b).

L'avantage de cette description sous forme de produit de convolution s'exprime quand il s'agit d'en prendre la transformée de Hankel. En effet, le produit de convolution se transforme alors en simple produit (ce que l'on prouve en faisant le lien avec la transformée de Fourier). Or les transformées de Hankel impliquées sont bien connues<sup>8</sup> et en notant  $J_1$  la

8. Voir Annexe A3

fonction de Bessel de première espèce d'indice 1, on obtient :

$$\text{HT}_0[\text{CP}](k_\perp) = C_0 \cdot \text{HT}_0[G_{W_g}](k_\perp) \times \text{HT}_0[R_{W_R}](k_\perp) \quad (6.58)$$

$$= C_0 \cdot \frac{W_g^2}{2} \exp(-k_\perp^2 W_g^2/4) \times \frac{W_R \cdot J_1(k_\perp W_R)}{k_\perp}. \quad (6.59)$$

Ceci s'adapte bien au traitement analytique de l'équation de la chaleur (6.33) par le formalisme de la fonction de Green pour le nouveau profil de pompe. Ainsi, pour trouver la fonction de susceptibilité thermique définissant les fluctuations de fréquence engendrées par les effets thermo-optiques de l'équation (6.35), l'étape exploitant l'égalité de Parseval-Plancherel (6.37) se ré-écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r dr e^{-2\left(\frac{r}{w_2}\right)^2} \cdot \text{HT}_0^{-1} \left[ \frac{\text{HT}_0[\text{CP}](k_\perp)}{i\Omega + k_\perp^2 D_\perp + \kappa_n^2 D_\parallel} \right] (r) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{C_0 W_R W_g^2 w_2^2}{8 k_\perp} \cdot \frac{\exp[-k_\perp^2 (w_2^2 + 2 W_g^2)/8]}{i\Omega + k_\perp^2 D_\perp + \kappa_n^2 D_\parallel} \cdot J_1(k_\perp W_R) k_\perp dk_\perp. \quad (6.60)$$

En reconnaissant dans le membre de droite l'expression d'une transformée de Hankel inverse d'ordre 1 évaluée en  $W_R$ , l'expression suivante est immédiate :

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_\psi(\Omega) &= -q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{L_{\text{sc}}} |e_{\parallel}(z)|^2 \sin(\kappa_n z) dz \\ &\times \frac{I_n C_0 W_R W_g^2 \pi w_2^2}{4 \mathcal{V}_{\text{mode}}} \cdot \text{HT}_1^{-1} \left[ \frac{\exp[-k_\perp^2 (w_2^2 + 2 W_g^2)/8]}{k_\perp \cdot (i\Omega + k_\perp^2 D_\perp + \kappa_n^2 D_\parallel)} \right] (W_R). \end{aligned} \quad (6.61)$$

La densité spectrale de puissance de bruit de fréquence  $\mathcal{S}_\psi(\Omega)$  qui résulte des fluctuations thermiques créées par cette pompe de profil radial CP, aplati au centre, est simplement proportionnelle à  $|\widetilde{G}_\psi(\Omega)|^2$  d'après la relation (6.40).

Il est alors intéressant d'étudier le comportement du spectre  $|\widetilde{G}_\psi(\Omega)|^2$  pour différents rapports  $\gamma = W_R/W_g$  afin de comprendre l'influence de l'aplatissement du faisceau de pompe sur le transfert du bruit de la pompe au bruit de fréquence du laser via l'effet thermo-optique. Plus précisément, nous étudions le comportement du produit  $C_0^2 \cdot |\widetilde{G}_\psi(\Omega)|^2$ , qui sera désigné comme « susceptibilité thermique », en fonction de  $\gamma$  (à  $W_R$  fixé). En effet, le facteur de normalisation  $C_0$  du profil CP fait intervenir la largeur caractéristique  $W_g$  ainsi que  $\gamma$  et il va naturellement intervenir quadratiquement dans la DSP du bruit associé à la chaleur de pompe<sup>9</sup>. Lorsque  $\gamma$  est suffisamment grand, on peut extrapoler nos propos à une pompe super-gaussienne au sens de l'équation (5) évaluée pour plusieurs valeurs de  $m \simeq 2\gamma$ . La Fig. 6.15 montre les spectres des susceptibilités thermiques obtenues pour plusieurs valeurs de  $\gamma$  à  $W_R$  fixé. La ressemblance est frappante entre l'allure du spectre tracé

9. Revoir par exemple la définition (6.12) de  $Q_0$  pour la pompe de profil gaussien.

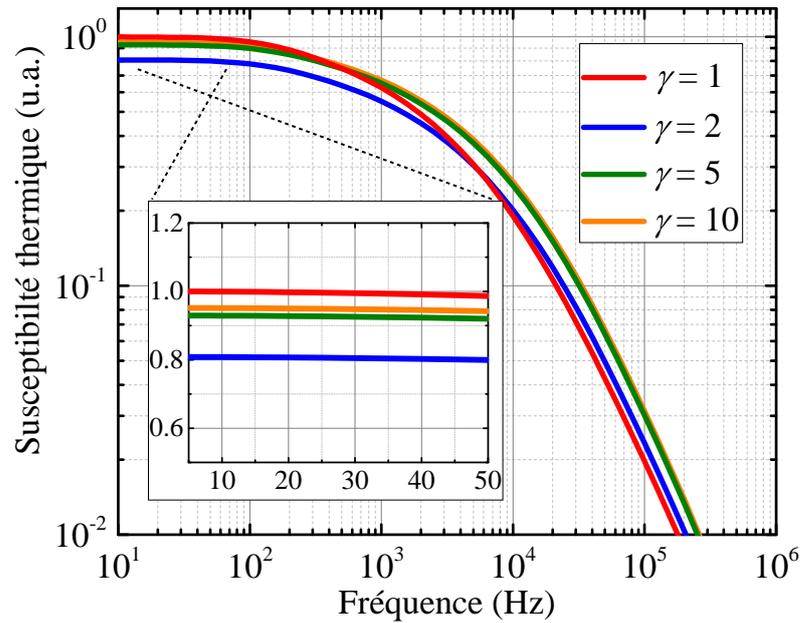


FIGURE 6.15 – Spectres de la susceptibilité thermique  $C_0^2 \cdot |\widetilde{G}_\psi|^2$  du bruit de fréquence du laser simulés pour différentes valeurs de  $\gamma = W_R/W_g$ , caractérisant l'aplatissement de la distribution radiale de pompe (6.57) pour une même valeur de  $W_R$  maintenue à  $25 \mu\text{m}$ . Ces spectres sont obtenus à partir de l'équation (6.61) grâce à l'algorithme matriciel de transformées de Hankel de la référence [115]. Le graphique inséré est un zoom des spectres obtenus sur les basses fréquences (ses échelles sont linéaires).

pour  $\gamma = 1$  (courbe rouge) et celle de la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence thermiquement induite par la pompe gaussienne précédemment tracée sur la Fig. 6.10. Ce n'est pas étonnant car la Fig. 6.13 attestait bien d'une forte correspondance entre le profil gaussien et ce profil CP. On note que, lorsque  $\gamma$  augmente et que le profil de pompe s'aplatit au centre (voir Fig. 6.13), la susceptibilité thermique du bruit de fréquence du laser peut diminuer légèrement aux basses fréquences mais augmente aux hautes fréquences. En résulte un lissage global du spectre. Cette augmentation aux hautes fréquences est physiquement attendue. En effet, la taille de la tache de pompe est adaptée à la taille du mode. Donc pour des durées inférieures au temps de diffusion thermique sur le rayon du mode laser, les fluctuations engendrées par effets thermo-réfractifs seront d'autant plus importantes que la pompe « remplira » le mode. Plus le profil est rectangulaire, plus c'est le cas. Le zoom aux basses fréquences montre que le profil le plus avantageux pour la réduction du bruit doit proposer un compromis entre l'étendue de ses ailes et l'aplatissement de son centre (voir Fig. 6.13(b)). En d'autres termes, il existe à ces fréquences un optimum pour  $\gamma$  (compris entre 1 et 5) qui permet, après diffusion thermique de répartir le moins possible de fluctuations de pompe dans le volume du mode laser.

## Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, une modélisation analytique du bruit thermique de la phase du battement RF généré par un VECSEL bifréquence a été conçue. Cette modélisation commence par la résolution de l'équation de la chaleur à l'intérieur de la structure à semiconducteurs. Un ingrédient supplémentaire à ce que l'on trouve dans la littérature a été incorporé : la possible anisotropie de diffusion thermique dans cette hétérostructure.

D'une part, la réponse thermique du VECSEL à l'échauffement causé par la pompe a été explorée. Une carte de température a été dressée, montrant qu'un important effet de lentille thermique est induit dans la structure. Les propriétés optiques de la cavité sont alors modifiées. Le régime transitoire a montré que de nombreuses échelles de temps sont pertinentes, pour à la fois la diffusion thermique radiale et la diffusion longitudinale.

D'autre part, deux sources de fluctuations thermiques de la fréquence du laser ont été décrites en détails : le bruit de puissance de la pompe et les écarts à la température d'équilibre, de nature thermodynamiques. Les mécanismes responsables des fluctuations thermiques de la fréquence sont regroupés sous le noms d'effets thermo-optiques. L'évaluation de leur impact a permis de comprendre que les effets thermo-réfractifs (variation de l'indice) dominent les effets thermo-élastiques (dilatation thermique des matériaux). En tenant compte de la géométrie du mode optique, on a alors pu calculer la DSP de bruits de fréquence du laser engendrés par les différentes sources. La contribution des fluctuations de pompe est bien supérieure à celle des fluctuations thermodynamiques. L'application au bruit de phase du VECSEL à 852 nm dédié aux horloges atomiques CPT à base de Césium a montré un accord très satisfaisant de notre modèle, permettant de corriger la modélisation type passe-bas précédemment utilisée. Le nouveau modèle reste toutefois tout à fait compatible avec le précédent mais permet de mettre en évidence le rôle joué par la diffusion longitudinale, complètement occultée auparavant.

Bien que deux ordres de grandeur plus faibles que le bruit thermique venant de la pompe, les fluctuations thermodynamiques de la phase du battement RF sont au-dessus du plancher de mesure sur une bande passante de 100 kHz. Une perspective consiste à réduire la contribution de la pompe à un point tel qu'il serait possible de mesurer ces fluctuations thermodynamiques et confronter à l'expérience le modèle du bruit de phase prédit. Pour réduire la contribution de la pompe, il faut soit attendre la commercialisation éventuelle d'une source laser vers 650 nm avec un RIN inférieur à -155 dB/Hz, soit implémenter un asservissement de l'intensité de la diode de pompe. Cette dernière option semble réaliste mais doit laisser suffisamment de puissance pour atteindre le seuil du VECSEL bifréquence.

La référence [95] a mis en évidence en fait qu'un profil aplati au centre pour la pompe, type super-gaussien, pouvait permettre de diminuer la part de puissance optique dissipée sous forme de transferts thermiques dans le VECSEL. D'après notre étude, un tel profil aplati permettrait aussi de diminuer, par rapport à un profil de pompe gaussien, la susceptibilité thermique du bruit de fréquence du laser aux basses fréquences. Il peut donc être

avantageux à la fois dans la gestion de la thermique et du bruit d'avoir un profil transverse de pompe optique rectangulaire et adapté à la taille du mode laser dans le 1/2-VCSEL. L'utilisation d'un modulateur spatial de lumière<sup>10</sup> pourrait permettre d'explorer des profils transverses contrôlés pour se figurer expérimentalement cette possibilité de minimiser le transfert basses fréquences des fluctuations de pompe aux fluctuations thermiques de la phase du VECSEL.

---

10. Aussi dénommé SLM comme acronyme de Spatial Light Modulator.



## CHAPITRE 7

# LDÉCOMPOSITION EN MODES DES BRUITS DU LASER ET BRUITS NON STATIONNAIRES

Révolutionnant dans les années 1950 l'interférométrie stellaire [129], l'étude des corrélations des fluctuations lumineuses a continué à porter ses fruits plus récemment avec l'avènement de l'optique quantique. On peut citer à ce sujet les travaux de E. Wolf, L. Mandel [130] et R.J. Glauber [131]. S'intéresser aux corrélations d'intensité d'une onde lumineuse, c'est s'intéresser aux propriétés statistiques des fluctuations de sa source. En outre, les mesures de corrélations en optique quantique permettent d'isoler des comportements statistiques interdits par la physique classique, comme une statistique sub-Poissonienne du nombre de photons dans le champ et les mesures du dégroupement de photons<sup>1</sup> induit.

Bien que ce développement de l'optique quantique ait le vent en poupe, l'étude des corrélations de lumière dans le régime classique (au sens de non-quantique) n'en demeure pas moins d'actualité. En guise de premier exemple, il a fallu attendre 2017 pour que le théorème de cohérence et polarisation [132] soit établi. Par ailleurs, l'étude des corrélations spectrales de bruit a récemment permis de décrire de façon complète la dynamique de peignes de fréquences femto-secondes [133–135]. Ce second exemple constitue, en fait, le point de départ des investigations qui vont suivre. Grâce à un dispositif dispersif, une matrice de corrélations d'intensité est dressée entre les différentes composantes spectrales du peigne. S'ensuit une compréhension fine de la dynamique du laser grâce à l'analyse des modes principaux de bruit que les auteurs parviennent à associer à un nombre restreint de paramètres physiques tels que la puissance optique, la fréquence de décalage entre l'onde porteuse et l'enveloppe<sup>2</sup>, le taux de répétition du peigne, etc. Nous nous focaliserons sur l'établissement de la matrice de corrélations d'intensité dans le domaine spectral électrique dans le cas de nos VECSELS bifréquences puis nous nous demanderons quel sens donner

1. *Anti-bunching* en anglais.

2. Fréquence CEO, pour *Carrier-Envelope Offset*.

à une décomposition en modes principaux de bruit dans le domaine spectrale électrique plutôt que dans le domaine spectral optique.

## 1 Analyse spectrale des corrélations en intensité

Avant l'application aux VECSELS bifréquences, il est instructif de se donner les outils théoriques établis par Emil Wolf [136] pour l'étude des corrélations de champs lumineux stochastiques.

### 1.1 Théorie unifiée de la cohérence et de la polarisation

#### Degré de cohérence mutuelle

L'expérience de Hanbury-Brown et Twiss de 1956 [129] offre un cadre historique au travail autour des corrélations en intensité des sources lumineuses. Hanbury-Brown et Twiss réalisent une division en amplitude d'une source d'intérêt et envoient les faisceaux obtenus sur deux photorécepteurs, situés respectivement en  $\mathbf{r}_1$  et en  $\mathbf{r}_2$ . Puis, ils s'intéressent aux corrélations obtenues entre les signaux images des fluctuations  $\delta I$  de l'intensité lumineuse  $I$  de la source, en mesurant pour différents délais  $\tau$  le degré de cohérence mutuelle :

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2 = \frac{\langle \delta I(\mathbf{r}_1, t) \delta I(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle}. \quad (7.1)$$

La notation  $\langle \cdot \rangle$  dénote la moyenne temporelle, qui s'assimile à la moyenne d'ensemble dans l'hypothèse ergodique<sup>3</sup>. Le théorème de Van Cittert–Zernike [137] permet alors de relier la quantité mesurée à la distribution d'intensité de la source, via une transformée de Fourier [119]. Cette expérience est proche d'une expérience d'interférométrie car le degré de cohérence mutuelle s'assimile tout à fait à la visibilité de franges d'interférences obtenues par exemple dans une expérience de type fentes d'Young. Ce sont les propriétés de cohérence spatiale de la source lumineuse qui interviennent ici.

Après leur démonstration de principe, Hanbury-Brown et Twiss parviennent en 1957 à mesurer la taille angulaire de l'étoile Sirius en installant leur dispositif de détection sur un télescope australien. Cette forme d'interférométrie étant beaucoup moins sensible aux turbulences atmosphériques, elle a permis d'améliorer la résolution par rapport à l'interférométrie stellaire de Michelson.

Nous retiendrons que le degré de cohérence mutuelle est donné par les corrélations d'intensité d'une source lumineuse en deux points de l'espace.

---

3. Se référer à l'annexe A.

### Degré de polarisation

Mettons de côté le problème de la cohérence de la source lumineuse pour nous focaliser sur la polarisation. Pour cela, considérons un champ électrique stochastique de composantes  $E_x(t)$  et  $E_y(t)$  décrivant une radiation quasi-monochromatique se propageant suivant (Oz) dans l'approximation paraxiale (un faisceau gaussien par exemple). Pour décrire les fluctuations d'amplitude et de phase de chaque composante (deux degrés de liberté), on leur associe leur champ complexe conjugué. L'espace vectoriel issu du produit tensoriel entre les espaces décrivant les deux directions de polarisation est alors de dimension  $2 \times 2$ . Dans la littérature [136], on désigne par matrice de polarisation la matrice de corrélation du champ à un instant  $t$  construite dans cet espace produit comme suit :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \langle E_x^*(t) E_x(t) \rangle & \langle E_x^*(t) E_y(t) \rangle \\ \langle E_y^*(t) E_x(t) \rangle & \langle E_y^*(t) E_y(t) \rangle \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Par abus de langage, cette matrice est parfois appelée matrice de cohérence, du fait des corrélations entre polarisations croisées que l'on retrouve hors diagonale. Les termes diagonaux sont les intensités moyennes de chaque composante. Les paramètres de Stokes  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  s'obtiennent par combinaisons linéaires des éléments  $J_{xx}$ ,  $J_{xy}$ ,  $J_{yx}$  et  $J_{yy}$  de cette matrice de polarisation.

Comme  $J_{xy} = J_{yx}^*$ , la matrice  $\mathcal{J}$  est hermitienne. Elle est, de plus, définie positive<sup>4</sup>. Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au terme hors diagonal donne :

$$0 \leq \frac{|J_{xy}|}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}} \leq 1. \quad (7.3)$$

Décrivons la physique des situations associées aux limites de l'inégalité (7.3). Lorsque  $J_{xy} = 0$  (avec deux polarisations non nulles) la matrice  $\mathcal{J}$  est diagonale. Il n'y a pas de corrélation entre les fluctuations sur une polarisation et la polarisation croisée. Cette situation décrit un champ lumineux non polarisé, similaire à de la lumière naturelle par exemple. Lorsque, en revanche, on sature le côté droit de l'inégalité, on obtient :

$$\det \mathcal{J} = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0, \quad (7.4)$$

ce qui décrit une situation pour laquelle les champs sur les deux polarisations sont parfaitement corrélées. L'onde est parfaitement polarisée, en général elliptiquement. L'invariance par rotation du déterminant permet d'assurer que les fluctuations sur les polarisations croisées sont entièrement corrélées peu importe la base utilisée (que l'on pourrait obtenir par rotation des axes (Ox) et (Oy)).

4. Ceci se démontre en notant que  $\langle |c_1 E_x + c_2 E_y|^2 \rangle \geq 0, \quad \forall (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ .

De ces constatations, on peut déduire une écriture unique de la matrice de polarisation d'un champ lumineux stochastique qui peut toujours être décomposé en une partie totalement polarisée et une partie non polarisée :  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{(p)} + \mathcal{J}^{(u)}$ . On a alors l'assertion suivante :

$$\exists! (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \text{ tels que } \mathcal{J}^{(p)} = \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{J}^{(u)} = A \times \mathbb{1}_2, \quad (7.5)$$

avec la notation  $\mathbb{1}_2$  pour la matrice identité de rang 2. La matrice  $\mathcal{J}^{(p)}$  correspondant à une polarisation totale, son déterminant est nul. En substituant les expressions de  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction des éléments de  $\mathcal{J}$  et de  $A$ , ce déterminant se réécrit :

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0. \quad (7.6)$$

On montre alors que la seule racine respectant la positivité des coefficients  $B$  et  $C$  pour cette équation du second degré sur  $A$  est la suivante :

$$2A = \text{tr}\mathcal{J} + \sqrt{(\text{tr}\mathcal{J})^2 - 4 \det \mathcal{J}}. \quad (7.7)$$

En substituant par son expression la quantité  $\text{tr}\mathcal{J}$  en dehors de la racine, on aboutit à :

$$\text{tr}\mathcal{J}^{(p)} = \sqrt{(\text{tr}\mathcal{J})^2 - 4 \det \mathcal{J}}. \quad (7.8)$$

En définitive, on peut caractériser le rapport entre l'intensité lumineuse de la portion polarisée et l'intensité totale par le degré de polarisation  $\mathcal{P}$  admettant l'expression suivante :

$$\mathcal{P} = \frac{\text{tr}\mathcal{J}^{(p)}}{\text{tr}\mathcal{J}} = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathcal{J}}{(\text{tr}\mathcal{J})^2}}. \quad (7.9)$$

On remarque que  $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$  et que ce degré de polarisation est bien invariant par rotation de la base décrivant les composantes sur  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

### **Théorie d'Emil Wolf et matrice de densité spectrale croisée**

La théorie d'Emil Wolf consiste à voir les deux points précédents, c'est à dire le degré de cohérence mutuelle et le degré de polarisation, comme les deux faces d'une même pièce. La cohérence provient des corrélations entre les fluctuations du champ à deux instants ou à deux points distincts de l'espace (ou plus). La polarisation est la manifestation des corrélations entre les fluctuations des composantes du champ électrique au même point de l'espace. Pour un faisceau lumineux stochastique se propageant suivant  $z$ , statistiquement stationnaire, les références [138–140] proposent la construction de la matrice de cohérence

mutuelle du champ électrique :

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \begin{pmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t) E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t) E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \\ \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t) E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t) E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Cette définition diffère de celle de la matrice  $\mathcal{J}$  du (7.2) en faisant intervenir plusieurs points de l'espace et plusieurs instants, à l'instar de la relation (7.1). Mais contrairement à la relation (7.1), elle rend compte du caractère non scalaire de la lumière. Ceci permet de concrétiser l'approche unifiée de E. Wolf mais déterminera également la possibilité pour le degré de polarisation d'évoluer au cours de la propagation du faisceau lumineux. La transformée de Fourier temporelle de  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  permet alors de définir la matrice de densité spectrale croisée du champ électrique :

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\Omega\tau} d\tau. \quad (7.11)$$

La matrice de densité spectrale croisée peut en fait être représentée directement comme une matrice de corrélations dans le domaine spectral électrique :

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) = \begin{pmatrix} \langle \widetilde{E}_x^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_x(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle & \langle \widetilde{E}_x^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_y(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle \\ \langle \widetilde{E}_y^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_x(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle & \langle \widetilde{E}_y^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_y(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Le théorème de Wiener-Khintchine-Kolmogorov semble induire par lui-même le passage de la transformée de Fourier (7.11) des éléments de matrice (7.10), qui sont en fait des produits de corrélation, aux densités spectrales des éléments de matrice (7.12). Il faut cependant rester vigilant quant à l'existence même des transformées de Fourier  $\widetilde{E}_x(\mathbf{r}, \Omega)$  et  $\widetilde{E}_y(\mathbf{r}, \Omega)$  des grandeurs stochastiques considérées. La référence [141] apporte une démonstration rigoureuse de cette écriture qui dépasse le cadre du travail de ce manuscrit. Nos signaux physiques sont, de toutes façons, limités dans le temps et l'annexe A montre que les définitions de densités spectrales prennent du sens en imposant une fenêtre temporelle. Dans une expérience type interférométrie, cette matrice de densité spectrale croisée donne alors accès au degré spectral de cohérence :

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) = \frac{\text{tr } \mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega)}{\sqrt{\text{tr } \mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \Omega)} \sqrt{\text{tr } \mathcal{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \Omega)}}, \quad (7.13)$$

avec

$$\text{tr } \mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) = \langle \widetilde{E}_x^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_x(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle + \langle \widetilde{E}_y^*(\mathbf{r}_1, \Omega) \widetilde{E}_y(\mathbf{r}_2, \Omega) \rangle = [\text{tr } \mathcal{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \Omega)]^*.$$

On remarque, d'une part, que l'équation (7.13) ne fait intervenir aucun terme croisé entre les polarisations, conformément à la formule des interférences. D'autre part, le dénominateur de ce degré de cohérence correspond à une normalisation par le produit entre l'intensité moyenne totale au premier point et l'intensité moyenne totale au second point.

Cette matrice de densité spectrale croisée  $\mathcal{W}$ , prise en  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  est hermitienne et définie positive. On peut donc lui appliquer une analyse analogue à celle menée sur la matrice de polarisation  $\mathcal{J}$ . La matrice  $\mathcal{W}$  donne ainsi accès au degré de polarisation spectral :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \Omega) = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)}{[\text{tr} \mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)]^2}}, \quad (7.14)$$

avec

$$\begin{cases} \text{tr} \mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) &= \mathcal{W}_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) + \mathcal{W}_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) \\ \det \mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) &= \mathcal{W}_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) \mathcal{W}_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) - \mathcal{W}_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) \mathcal{W}_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) \end{cases} .$$

Ce degré de polarisation fait bien intervenir dans le déterminant des termes croisés entre les polarisations. Notons qu'il dépend de la position  $\mathbf{r}$  et de la pulsation  $\Omega$ . Son spectre dépend en fait de celui des fluctuations des composantes du champ et de leur corrélation.

## 1.2 Analyse expérimentale de la matrice de densité spectrale croisée

Le champ de lumière stochastique est désormais celui qui servira à décrire les fluctuations d'intensité d'un laser autour de sa valeur moyenne. Nous traitons le champ électrique complexe du VECSEL bifréquence comme une onde plane à deux composantes quasi-monochromatiques se propageant selon  $z$  :

$$\begin{cases} E_x(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{A}_x(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_x t - k_x z)} \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{A}_y(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_y t - k_y z)} \end{cases} , \quad (7.15)$$

où  $\mathcal{A}_{j=(x,y)}$  est l'amplitude de l'enveloppe lentement variable d'une composante du champ. Dans notre situation, nous nous intéressons aux fluctuations d'intensité sur chaque composante qui vont s'écrire comme :

$$\delta I_j(\mathbf{r}, t) = 2 \varepsilon_0 n_0 c_0 \left[ \mathcal{A}_j^* \cdot \delta \mathcal{A}_j(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \right], \quad (7.16)$$

avec  $c_0$  la célérité de la lumière,  $n_0$  l'indice de réfraction du milieu et  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide. De plus, ces petites fluctuations d'intensité autour de la valeur moyenne vérifient :

$$I_j(\mathbf{r}, t) = I_{0j}(\mathbf{r}) + \delta I_j(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec} \quad \langle \delta I_j(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad |\delta I_j| \ll I_{0j}. \quad (7.17)$$

Le contenu statistique des fluctuations d'intensité provient des fluctuations de l'amplitude lentement variable des composantes du champ via la relation (7.16). En ne s'intéressant qu'à la partie stochastique, on peut alors construire la matrice de densité spectrale croisée  $\mathcal{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega)$  à partir des fluctuations d'intensité dans le domaine spectral. En réalité, la motivation initiale de ce travail n'est pas une expérience d'interférométrie. Le cadre fourni par la théorie de E. Wolf dépasse celui de notre description puisque notre faisceau laser

est tout à fait cohérent spatialement. Nous mettons donc de côté les corrélations entre les fluctuations à deux points distincts de l'espace.

### Application au VECSEL bifréquence

Nous travaillons avec un VECSEL bifréquence émettant à la longueur d'onde télécom pour lequel le faisceau de pompe est issu d'une diode laser fibrée multimode. L'évolution temporelle des fluctuations d'intensité du VECSEL bifréquence est mesurée simultanément sur chaque polarisation à l'aide d'une photo-détection amplifiée. La détection réalise une intégration du signal sur les profils transverses des faisceaux lasers correspondants. Un algorithme de transformée de Fourier permet alors d'obtenir numériquement l'image des fluctuations dans le domaine spectral. On pourrait réitérer  $N$  fois, de façons indépendantes, les mesures des fluctuations  $\delta I_j(t)$ . Mais on préfère exploiter les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité des rayonnements étudiés pour réaliser des moyennes temporelles à la place des moyennes d'ensemble. On tronçonne donc les mesures d'intensité lumineuse réalisées (de suffisamment longues durées) en  $N$  portions qui seront considérées comme  $N$  réalisations. La matrice de densité spectrale croisée adaptée à la description des fluctuations d'intensité est la suivante :

$$\mathcal{W}^{(2)}(\Omega) = \begin{pmatrix} \langle \widetilde{\delta I}_x^*(\Omega) \cdot \widetilde{\delta I}_x(\Omega) \rangle & \langle \widetilde{\delta I}_x^*(\Omega) \cdot \widetilde{\delta I}_y(\Omega) \rangle \\ \langle \widetilde{\delta I}_y^*(\Omega) \cdot \widetilde{\delta I}_x(\Omega) \rangle & \langle \widetilde{\delta I}_y^*(\Omega) \cdot \widetilde{\delta I}_y(\Omega) \rangle \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

À un facteur près, cette matrice correspondrait à  $\mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)$  si les intensités lumineuses des deux composantes étaient parfaitement équilibrées. On s'assure expérimentalement que cette condition tient raisonnablement en équilibrant le pompage et en jouant sur l'orientation de l'étalon dans la cavité. Si cette condition ne tient pas, on doit simplement mesurer les intensités moyennes et normaliser les fluctuations  $\delta I_j$  par  $\sqrt{I_{0j}}$ . Sur la diagonale de la matrice  $\mathcal{W}^{(2)}$ , les termes  $\langle |\widetilde{\delta I}_j(\Omega)|^2 \rangle$  sont simplement proportionnels aux densités spectrales de puissance de chaque polarisation. Les termes hors-diagonaux correspondent quant à eux aux corrélations entre polarisations croisées. La Fig. 7.1 montre les spectres expérimentaux de ces éléments de matrice. En (a), les densités spectrales de puissances présentent le comportement habituel de type filtre passe-bas avec fréquence de coupure reliée au temps de vie des photons dans la cavité. On note un pic de bruit indésirable à 100 kHz qui provient de l'électronique d'alimentation des amplificateurs RF associés aux photo-diodes. En (b), on retrouve le module du spectre des corrélations croisées  $\Theta_{xy}$  dont on rappelle la définition :

$$\Theta_{xy}(\Omega) = \frac{\langle \widetilde{\delta I}_x(\Omega) \widetilde{\delta I}_y^*(\Omega) \rangle}{\sqrt{\langle |\widetilde{\delta I}_x(\Omega)|^2 \rangle \langle |\widetilde{\delta I}_y(\Omega)|^2 \rangle}}.$$

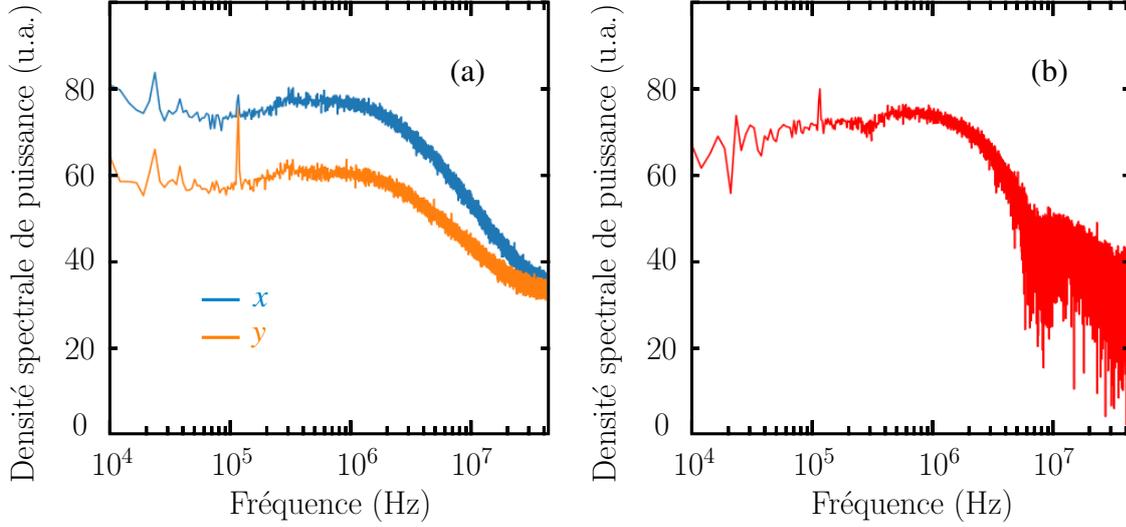


FIGURE 7.1 – Spectres des éléments de la matrice de densité spectrale croisée définie en (7.18). (a) Densités spectrales de puissance pour chaque polarisation correspondant aux éléments diagonaux. Ces spectres ont été laissés en unités arbitraires et on en a pris le logarithme. (b) Module du spectre des corrélations entre les fluctuations des polarisations croisées (en unités arbitraires). Ceci correspond aux termes non-diagonaux de (7.18).

Ce spectre présente un creux vers 300 kHz, où les corrélations s'affaiblissent avant d'augmenter à nouveau puis une nette diminution des corrélations est amorcée au delà du MHz. Vers 7 MHz, nous pouvons distinguer à nouveau un minimum local dans les corrélations dont l'origine est probablement identique aux transitions entre les mécanismes anti-symétrique et symétrique que nous avons notés sur les Figs. 3.6(a) et (b) du chapitre 3. Au delà de 10 MHz, la bande passante de l'électronique de détection est dépassée et ce que l'on observe n'est plus significatif.

La densité spectrale de puissance totale du rayonnement est liée à la trace de cette matrice  $\mathcal{W}^{(2)}$  alors que son déterminant s'écrit :

$$\det \mathcal{W}^{(2)}(\Omega) = \langle |\delta\tilde{I}_x(\Omega)|^2 \rangle \langle |\delta\tilde{I}_y(\Omega)|^2 \rangle \times \left( 1 - |\Theta_{xy}(\Omega)|^2 \right). \quad (7.19)$$

Pour un fonctionnement bifréquence avec des modes présentant des intensités lumineuses moyennes équilibrées, on peut utiliser la relation (7.19) pour exprimer le degré de polarisation (7.14) des fluctuations comme :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sqrt{1 - \frac{4 \times \left( 1 - |\Theta_{xy}(\Omega)|^2 \right)}{2 + \frac{\text{RIN}_x(\Omega)}{\text{RIN}_y(\Omega)} + \frac{\text{RIN}_y(\Omega)}{\text{RIN}_x(\Omega)}}}. \quad (7.20)$$

Ainsi, des modes lasers avec des bruits d'intensité sensiblement identiques possèdent un degré spectral de polarisation des fluctuations égal au module du spectre des corrélations croisées. En effet, l'expression (7.20) se réécrit dans ce cas de figure  $\mathcal{P}(\Omega) = |\Theta_{xy}(\Omega)|$ . Si les fluctuations sur les deux voies sont totalement indépendantes et de même ampleur alors les fluctuations du laser sont non polarisées. Si les bruits d'intensité des modes  $x$  et  $y$  sont complètement corrélés mais pas forcément équilibrés alors on trouve un degré de polarisation des fluctuations égal à 1. Dans ce cas, les fluctuations du laser sont parfaitement polarisées.

À travers les spectres de RIN et de corrélations croisées  $\Theta_{xy}$ , nous avons déjà amplement parcouru la physique reproduite par la matrice de densité spectrale croisée. Toutefois, avoir construit un degré de polarisation invariant par rotation constitue un avantage supplémentaire à l'utiliser plutôt que  $\Theta_{xy}$ , qui dépend lui *a priori* du choix des axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ).

### Application du théorème spectral

La matrice  $\mathcal{W}^{(2)}$  étant hermitienne et définie positive, le théorème spectral nous assure qu'il est possible de la diagonaliser et que ses valeurs propres sont positives. Par conséquent, nous avons l'assertion suivante :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{+2} \text{ et } U \text{ tels que } \mathcal{W}^{(2)}(\Omega) = U^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1(\Omega) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\Omega) \end{pmatrix} U, \quad (7.21)$$

avec  $U^\dagger U = \mathbb{1}_2$ . La diagonalisation des matrices de densité spectrale croisée à chaque fréquence de Fourier  $\Omega/(2\pi)$  permet d'accéder aux modes propres  $\lambda_1(\Omega)$  et  $\lambda_2(\Omega)$  des fluctuations du laser bifréquence. Les spectres des modes propres ainsi calculés correspondent aux densités spectrales de puissance tracées sur la Fig. 7.2(a).

La Fig. 7.2(b) offre une comparaison de ces modes propres avec les modes symétrique et anti-symétrique issus de la somme  $(\widetilde{\delta I}_x(\Omega) + \widetilde{\delta I}_y(\Omega))/\sqrt{2}$  et la différence  $(\widetilde{\delta I}_x(\Omega) - \widetilde{\delta I}_y(\Omega))/\sqrt{2}$ . Nous notons un bon accord qualitatif des spectres deux à deux (la courbe orange avec la courbe violette et la courbe bleue avec la courbe verte). La principale différence provient des niveaux respectifs de bruit pour chaque mode, ce qui est une conséquence du fait que la décomposition symétrique / anti-symétrique suppose des gains et pertes équilibrés sur les deux modes lasers. Nous notons bien à 7 MHz que la DSP de bruit anti-symétrique passe en-dessous de la DSP de bruit symétrique, ce qui corrobore l'origine soupçonnée du minimum local observé dans le spectre de corrélation de la Fig. 7.1(b).

Écrivons  $\mathbf{u}_1 = (u_x^1, u_y^1)$  et  $\mathbf{u}_2 = (u_x^2, u_y^2)$ , les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans la base  $(x, y)$  à chaque pulsation  $\Omega$ . Sur toute la plage d'analyse, les composantes de ces vecteurs propres sont réelles, excepté à 100 kHz où le pic constaté dans les spectres s'accompagne d'une partie imaginaire non nulle. Nous reproduisons à la Fig. 7.2(c) les parties réelles des spectres de toutes ces composantes (en nuances d'orange

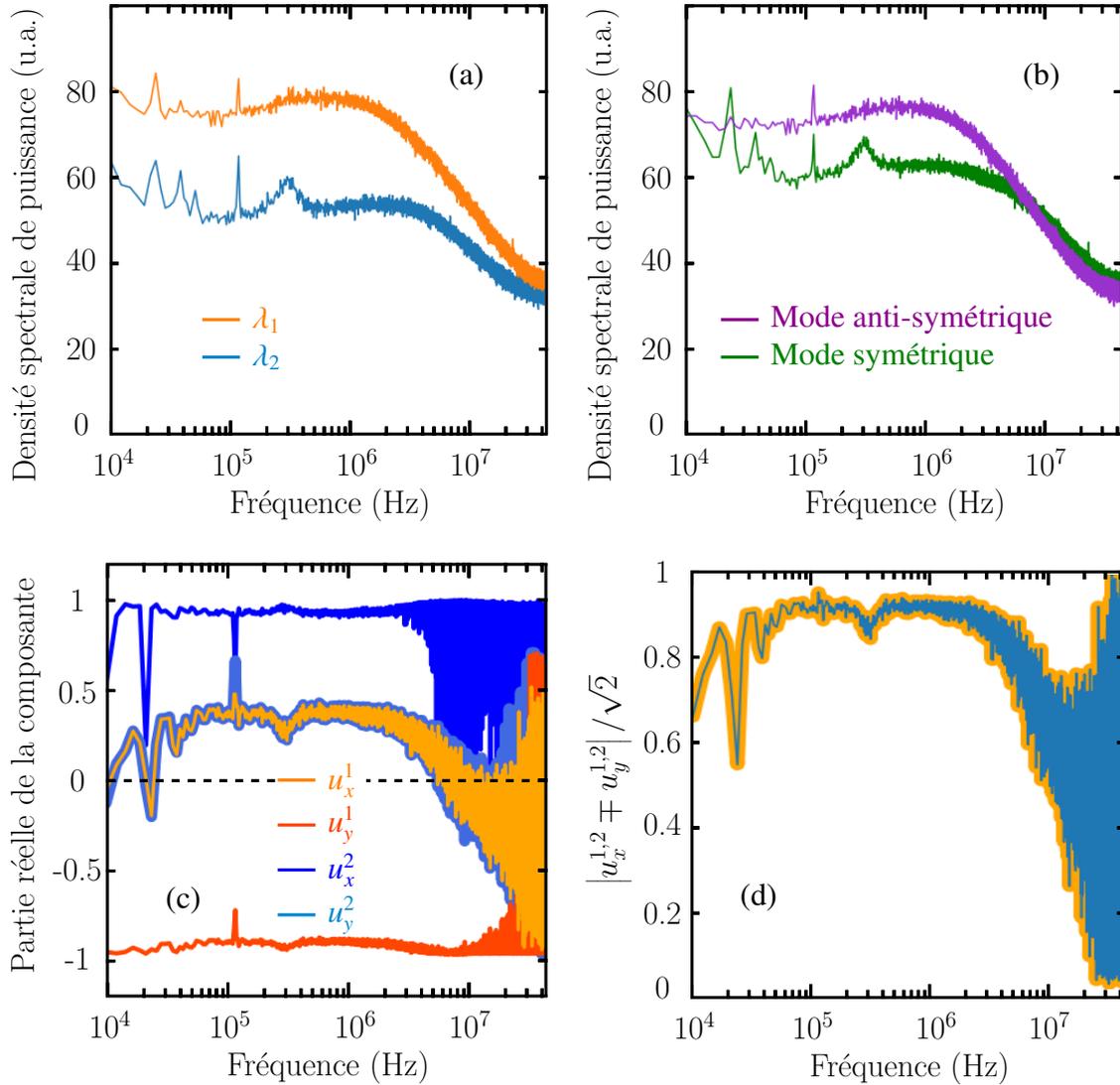


FIGURE 7.2 – Spectres des densités spectrales de puissances des modes propres des fluctuations bifrécquences (a) et des modes symétrique et anti-symétrique (b). Ces spectres ont été laissés en unités arbitraires et on en a pris le logarithme. (c) Parties réelles des spectres de chaque composante des vecteurs propres orthogonaux  $\mathbf{u}_1$  (en orange) et  $\mathbf{u}_2$  (en bleu) associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . (d) Spectres du module des projections du vecteur  $\mathbf{u}_1$  sur le mode anti-symétrique et de  $\mathbf{u}_2$  sur le mode symétrique.

pour  $\mathbf{u}_1$  et bleu pour  $\mathbf{u}_2$ ). Pour citer des valeurs représentatives à une fréquence de Fourier fixée, nous obtenons par exemple  $\mathbf{u}_1 = (0.35, -0.94)$  et  $\mathbf{u}_2 = (0.94, 0.35)$  vers 500 kHz.

Nous souhaitons comparer le vecteur orthonormé  $\mathbf{u}_1$  (resp.  $\mathbf{u}_2$ ) au vecteur anti-symétrique  $(1, -1) / \sqrt{2}$  (resp. symétrique  $(1, 1) / \sqrt{2}$ ). La figure 7.2(d) montre alors que la projection du mode associé à  $\lambda_1$  sur le mode anti-symétrique excède 0.9 sur une bonne partie du spectre alors que le mode associé à  $\lambda_2$  s'aligne, quant à lui, en bonne approximation avec

le mode symétrique. Ce résultat vient asseoir, *a posteriori*, la légitimité à considérer les modes symétrique et anti-symétrique comme les modes physiques associés aux fluctuations d'intensité du VECSEL bifréquence.

La réponse du VECSEL bifréquence à une perturbation peut donc en bonne approximation être décrite comme celle de deux oscillateurs couplés amortis ou bien d'un système à deux niveaux couplés. Par ailleurs, on constate que le creux de corrélation entre les deux polarisations croisées à 300 kHz, mentionné précédemment à propos de la Fig. 7.1(b), correspond à un pic de bruit du mode symétrique. Nous ignorons l'origine de ce bruit.

La diagonalisation effectuée permet d'autre part d'écrire :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \mathcal{W}^{(2)}(\Omega) = \lambda_1(\Omega) + \lambda_2(\Omega) \\ \det \mathcal{W}^{(2)}(\Omega) = \lambda_1(\Omega) \times \lambda_2(\Omega) . \end{cases} \quad (7.22)$$

Ceci permet d'exprimer le degré spectral de polarisation des fluctuations directement à partir de sa définition (7.14) de la façon suivante :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \frac{|\lambda_1(\Omega) - \lambda_2(\Omega)|}{\lambda_1(\Omega) + \lambda_2(\Omega)} . \quad (7.23)$$

Si l'un des modes propres des fluctuations d'intensité l'emporte, comme c'est souvent le cas pour le mode anti-symétrique sur une large bande passante avec le pompage à un faisceau, alors le degré de polarisation du bruit est très élevé. Un équilibre entre les DSPs des modes propres de bruit mène en revanche à des fluctuations non polarisées. Le spectre du degré de polarisation des fluctuations obtenu à partir des valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est tracé sur la Fig. 7.3 en utilisant la relation (7.23). On pourrait obtenir le même spectre avec l'expression (7.20). On observe que le degré de polarisation des fluctuations atteint un niveau assez important (au dessus de 60 %) sur une large bande passante allant de 10 kHz à 5 MHz. De plus, l'augmentation inexplicée du bruit sur le mode propre symétrique vers 300 kHz rééquilibre l'écart entre les densités spectrales de puissance des deux modes de bruit et se traduit par une diminution du degré de polarisation des fluctuations, comme le prédit l'équation (7.23).

En résumé, l'analyse de la matrice de densité spectrale nous a permis de prouver que les modes propres associés aux fluctuations du VECSEL bifréquence correspondaient plutôt bien aux modes physiques symétrique et anti-symétrique. Ceci tient tant que les deux modes lasers ont des gains et des pertes similaires. Il faut s'en remettre aux vrais modes propres du traitement proposé dans cette partie si ce n'est pas le cas. Nous avons également prouvé que cette décomposition des modes de bruit permet de plus d'accéder au degré de polarisation du bruit en évaluant l'écart relatif entre les deux densités spectrales de puissance correspondantes. La transition entre le mode anti-symétrique de bruit et le mode symétrique de bruit qui a été reportée dans le chapitre 3 pour le VECSEL bifréquence à 852 nm peut être relue désormais comme un changement dans l'état de polarisation des fluctuations. Ce changement s'associe au basculement du signe des corrélations entre les

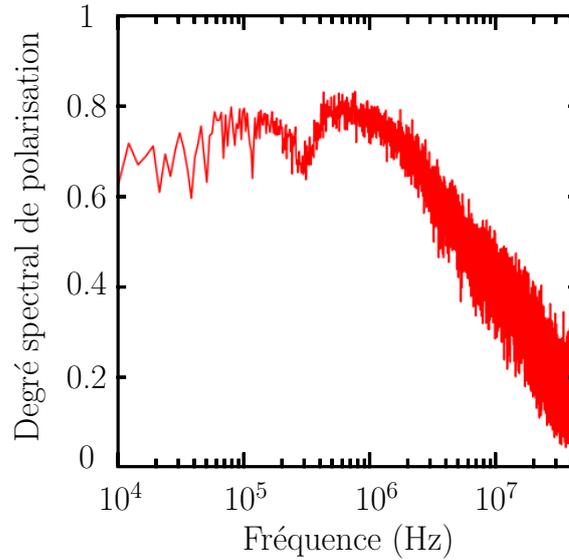


FIGURE 7.3 – Spectre du degré de polarisation des fluctuations du VEC-SEL bifréquence calculé à partir de l'expression (7.23) faisant intervenir ses modes propres.

modes polarisés suivant  $x$  et  $y$  du laser. On avait également noté qu'avec la saturation croisée d'un mode par l'autre le mécanisme de bruit anti-symétrique était renforcé par rapport à l'autre. Cela s'accompagne donc d'un degré de polarisation plus important des fluctuations.

Nous nous sommes intéressés dans cette section aux corrélations croisées entre les deux modes lasers et aux propriétés de bruit associées. Peut-on désormais isoler des corrélations entre deux composantes du spectre électrique des fluctuations telles que les références [133–135] le font dans le domaine optique ?

## 2 Matrice de covariance spectrale électrique croisée

La covariance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de variances finies quantifie leur écart conjoint à leurs valeurs moyennes. Pour  $N$  réalisations indépendantes, l'estimateur de cette covariance se calculera de la façon suivante :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i^* - \langle X^* \rangle_N) (Y_i - \langle Y \rangle_N) = \langle X^* Y \rangle_N - \langle X^* \rangle_N \langle Y \rangle_N. \quad (7.24)$$

La covariance et la corrélation  $\langle X^* Y \rangle_N$  entre deux grandeurs stochastiques sont donc des quantités identiques lorsque ces grandeurs sont centrées, c'est-à-dire de moyennes nulles.

## 2.1 Définition de la covariance spectrale électrique

Nous désignerons par covariance spectrale électrique, la covariance entre deux éléments du spectre électrique des fluctuations d'intensité  $\widetilde{\delta I}$  pris à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . L'acquisition temporelle des fluctuations d'intensité requiert un oscilloscope avec une profondeur mémoire conséquente, ici  $N_{\text{tot}} = 4 \times 10^6$  points. Le signal est réparti en  $N$  tronçons avec un échantillonnage de Shannon pour chaque tronçon comportant  $N_{\text{éch}} = N_{\text{tot}}/2N$  points. La transformée de Fourier est évaluée numériquement à partir d'un signal physique réel donc les fréquences négatives n'emportent pas d'information supplémentaire. On restreint de ce fait l'étude de la covariance aux  $N_{\text{éch}}/2$  points des fréquences positives. Ainsi, la matrice de covariance spectrale électrique est définie de la manière suivante :

$$\underline{\Sigma} = \left[ \Sigma_{ij} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N_{\text{éch}}/2 \\ 1 \leq j \leq N_{\text{éch}}/2}} = \left[ \text{Cov} \left( \widetilde{\delta I}(\Omega_i), \widetilde{\delta I}(\Omega_j) \right) \right]_{(i,j)}. \quad (7.25)$$

La matrice de covariance est hermitienne définie positive. Elle est donc diagonalisable avec des valeurs propres positives par application du théorème spectral. De plus, les éléments diagonaux représentent des variances reliées aux différentes valeurs du spectre de la densité de puissance. En notant  $\widetilde{\delta \mathcal{I}} = \widetilde{\delta I} - \langle \widetilde{\delta I} \rangle_N$  les fluctuations d'intensité centrées, on a<sup>5</sup> :

$$\text{tr} \underline{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N_{\text{éch}}/2} \left\langle \left| \widetilde{\delta \mathcal{I}}(\Omega_i) \right|^2 \right\rangle_N \equiv \int_{\mathbb{R}^+} d\Omega \left\langle \left| \widetilde{\delta \mathcal{I}}(\Omega) \right|^2 \right\rangle_N = \int_{\mathbb{R}^+} d\Omega \left\{ \left\langle \left| \widetilde{\delta I}(\Omega) \right|^2 \right\rangle_N - \left| \langle \widetilde{\delta I}(\Omega) \rangle_N \right|^2 \right\}. \quad (7.26)$$

La trace de la matrice de covariance spectrale électrique est donc reliée à la (demi-)puissance du bruit d'intensité (sur les fréquences positives).

Afin d'étendre la définition précédente aux fluctuations à deux composantes, nous utilisons la matrice de covariance spectrale croisée :

$$\underline{\underline{\mathcal{W}}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{xx} & \underline{\Sigma}_{xy} \\ \underline{\Sigma}_{yx} & \underline{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \left\langle \widetilde{\delta \mathcal{I}}_x^*(\Omega_i) \cdot \widetilde{\delta \mathcal{I}}_x(\Omega_j) \right\rangle_N \right]_{(i,j)} & \left[ \left\langle \widetilde{\delta \mathcal{I}}_x^*(\Omega_i) \cdot \widetilde{\delta \mathcal{I}}_y(\Omega_j) \right\rangle_N \right]_{(i,j)} \\ \left[ \left\langle \widetilde{\delta \mathcal{I}}_y^*(\Omega_i) \cdot \widetilde{\delta \mathcal{I}}_x(\Omega_j) \right\rangle_N \right]_{(i,j)} & \left[ \left\langle \widetilde{\delta \mathcal{I}}_y^*(\Omega_i) \cdot \widetilde{\delta \mathcal{I}}_y(\Omega_j) \right\rangle_N \right]_{(i,j)} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Les propriétés de cette matrice dans l'espace produit des deux composantes sont celles de la matrice de densité spectrale croisée (7.18) étudiée en détails dans la section précédente.

## 2.2 Application aux VECSELS

Examinons tout d'abord le cas d'un VECSEL en fonctionnement monomode. Prenons pour cela le VECSEL à 852 nm dans des conditions nominales de pompage bien au-dessus du

5. Dans les équations (7.24) et (7.26), nous centrons les variables pour nous conformer à la définition de la matrice de covariance. Nous verrons néanmoins plus tard que, pour nos résultats expérimentaux, le carré de la valeur moyenne est petit par rapport aux carrés des valeurs moyennes et que par conséquent les variables sont quasiment automatiquement centrées.

seuil avec une cavité d'environ 5 cm de long dans laquelle le seul élément inséré est un étalon en YAG d'environ 100  $\mu\text{m}$  d'épaisseur pour la sélection d'un seul mode laser robuste. Bien que les fluctuations d'intensité soient bien des grandeurs stochastiques centrées dans le domaine temporel, il n'y a aucune raison pour que ce soit toujours le cas dans le domaine des fréquences de Fourier. Chaque composante de Fourier du spectre des fluctuations d'intensité possède donc, *a priori*, une valeur moyenne non nulle sur  $N$  réalisations. Avant de s'intéresser à la covariance entre deux variables aléatoires, on peut s'intéresser séparément à leurs distributions statistiques. La figure 7.4 nous renseigne sur le comportement aux différentes fréquences des fluctuations d'intensité. En (a), on observe des distributions

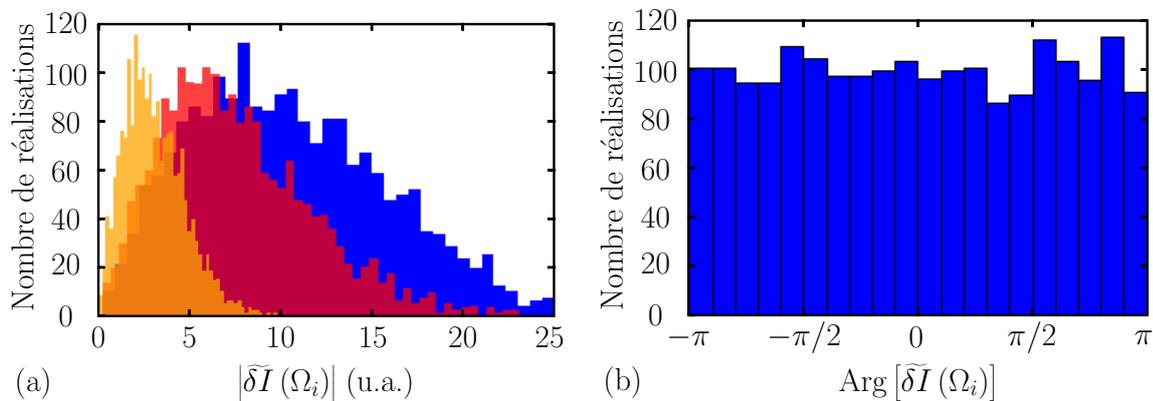


FIGURE 7.4 – Histogrammes des composantes de Fourier des fluctuations d'intensité. (a) montre la distribution des modules des composantes aux fréquences de 200 kHz (en bleu), 2 MHz (en rouge) et 8 MHz (en jaune). (b) montre la distribution de la phase de la composante à 200 kHz.

d'amplitude de fluctuations spectrales d'intensité en forme de cloche pour plusieurs fréquences. La distribution à 8 MHz (en jaune) est plus piquée autour d'une valeur moyenne plus faible que la distribution à 2 MHz (en rouge), elle même plus piquée autour d'une valeur moyenne plus faible que la distribution à 200 kHz (en bleu). La valeur moyenne du module des fluctuations d'intensité décroît donc avec la fréquence. Nous apprenons qu'en plus les composantes basses fréquences ont une plus grande variance que les hautes fréquences. Cela signifie que  $\langle |\delta\tilde{I}(\Omega)|^2 \rangle_N - \langle |\delta\tilde{I}(\Omega)| \rangle_N^2$  est une fonction décroissante de la fréquence. Le second terme de cette différence, c'est-à-dire le carré de la valeur moyenne du module des fluctuations d'intensité, décroît avec la fréquence d'analyse. On s'assure ainsi que la densité de puissance, premier terme de la différence, est bien une fonction décroissante de la fréquence (comme on peut le voir par exemple à la Fig. 7.1(a)). Pour la phase des fluctuations spectrales d'intensité, toutes les valeurs semblent équiprobables d'après la Fig. 7.4(b). On obtient exactement le même type de distribution de la phase à 2 MHz et 8 MHz mais les histogrammes résultants ne sont pas affichés pour plus de clarté.

La suite de l'analyse nous permet d'affirmer que le module carré de la moyenne des fluctuations d'intensité est très faible devant la moyenne des modules des fluctuations au carré quelque soit la fréquence considérée. Les éléments diagonaux de la matrice de covariance

$\Sigma$  s'assimilent alors en bonne approximation à la densité spectrale de puissance et l'équation (7.26) montre que sa trace représente la moitié de la puissance du bruit d'intensité. Le module de la matrice de covariance spectrale électrique  $\Sigma$  est tracé à la figure 7.5 sur une bande passante de 10 MHz. La phase de la matrice de covariance est complètement aléatoire dans tout le plan  $(\Omega_1, \Omega_2)$  et ne fournit ainsi aucune information. Nous choisissons de ne pas l'afficher. On observe, pour le module, que la matrice obtenue est tout à fait dia-

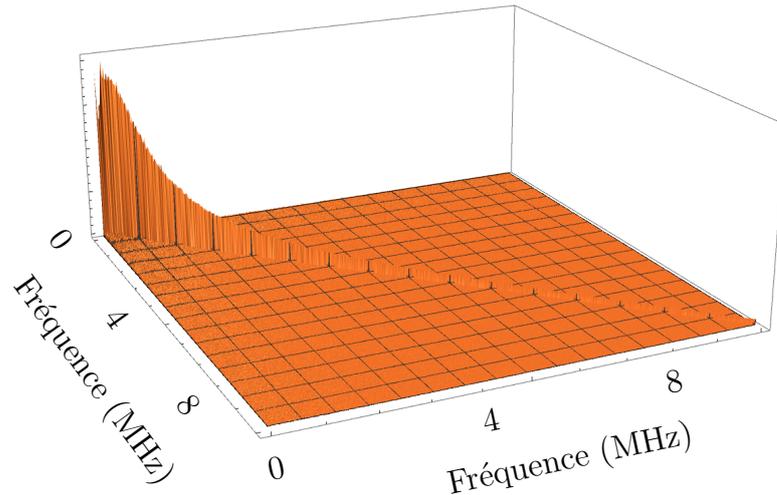


FIGURE 7.5 – Module de la matrice de covariance spectrale électrique du bruit d'intensité d'un VECSEL mono-fréquence, définie par la relation (7.25). L'amplitude de la covariance est en unités arbitraires.

gonale. Sur cette diagonale où  $\Omega_1 = \Omega_2$ , la variance des fluctuations spectrales d'intensité a l'allure d'une courbe Lorentzienne. Les échelles étant linéaires, c'est bien un spectre de densité de puissance que l'on observe. En effet, ce spectre correspond en échelle logarithmique au comportement de type filtre passe-bas que l'on a déjà mentionné. Aucun terme non-diagonal n'étant observé, on en déduit que les fluctuations d'intensité à deux composantes de Fourier distinctes  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  sont totalement indépendantes. Ce comportement va à l'inverse de ce que les références [133–135] rapportent dans le domaine optique. Les auteurs mettent en évidence dans ces articles des corrélations non nulles entre les fluctuations d'intensité à différentes composantes du spectre optique. Avant d'entamer l'explication de ce résultat, traçons l'extension à deux polarisations de cette matrice de covariance.

Le VECSEL à 852 nm est maintenant utilisé en régime d'émission bifréquence grâce à l'insertion dans sa cavité étendue un cristal biréfringent. Les fluctuations d'intensité sur chacune des polarisations sont conjointement mesurées sur deux voies séparées. La figure 7.6 montre le module de la matrice  $\overline{\mathcal{W}^{(2)}}$ , pour laquelle on observe clairement les quatre régions correspondant à  $\Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{xy}$ ,  $\Sigma_{yx}$  et  $\Sigma_{yy}$ . Les matrices de covariances spectrales  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{yy}$  provenant de chaque polarisation sont diagonales. Ceci n'est pas surprenant à la lumière des résultats obtenus pour le VECSEL mono-fréquence. Quant aux matrices issues des termes croisés, qui quantifient les variations conjointes entre une composante électrique des

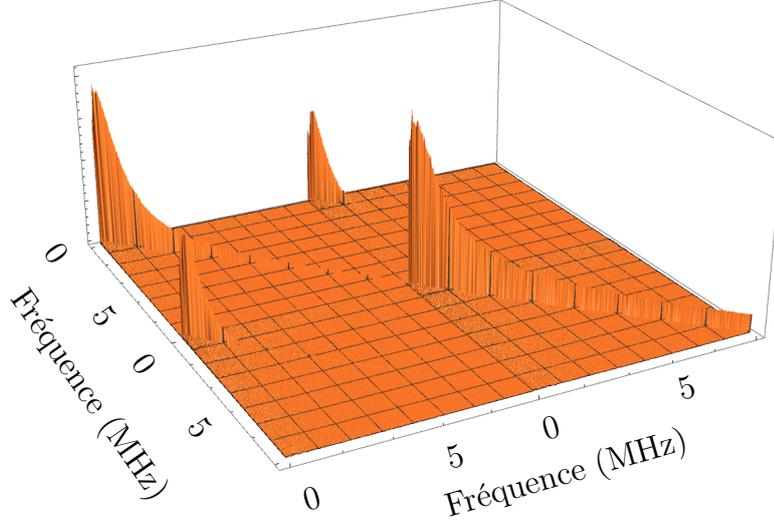


FIGURE 7.6 – Module de la matrice de covariance spectrale électrique croisée du bruit d'intensité d'un VECSEL bichromatique, définie par la relation (7.27). L'amplitude de la covariance est en unités arbitraires.

fluctuations d'intensité sur la polarisation  $x$  et une composante électrique des fluctuations d'intensité sur la polarisation  $y$ , elles sont tout autant diagonales. Sur cette diagonale, on retrouve le spectre des corrélations entre les fluctuations des polarisations croisées de la Fig. 7.1(b).

### 2.3 Bilan des corrélations possibles

Dans le but d'interpréter l'observation de matrices diagonales pour la covariance spectrale électrique, repartons de l'expression des transformées de Fourier associées :

$$\langle \tilde{\delta I}^*(\Omega_1) \cdot \tilde{\delta I}(\Omega_2) \rangle_N = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dt_1 dt_2 e^{i(\Omega_2 t_2 - \Omega_1 t_1)} \langle \delta I^*(t_1) \cdot \delta I(t_2) \rangle_N. \quad (7.28)$$

Or, d'après l'hypothèse de stationnarité du processus aléatoire utilisé pour décrire les fluctuations du rayonnement, l'expérience ne dépend pas de l'instant où elle débute et on peut donc ré-écrire  $\langle \delta I^*(t_1) \cdot \delta I(t_2) \rangle_N = g(t_1 - t_2)$ . En effectuant le changement de variable  $u = t_1 - t_2$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta I}^*(\Omega_1) \cdot \tilde{\delta I}(\Omega_2) \rangle_N &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} du \left( \int_{\mathbb{R}} dt_2 e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)t_2} \right) \cdot e^{-i\Omega_1 u} g(u) \\ &= \frac{\delta(\Omega_2 - \Omega_1)}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} du e^{-i\Omega_1 u} g(u). \end{aligned} \quad (7.29)$$

On en déduit donc que l'invariance par translation dans le temps se traduit d'une part par l'existence de pics de corrélations pour les fluctuations d'intensité aux mêmes fréquences mais aussi, d'autre part, par l'indépendance de deux composantes spectrales à des fréquences distinctes. Ce simple argument corrobore les observations précédentes. Notons toutefois que les signaux physiques enregistrés sont limités dans le temps et que le pic à considérer est davantage un sinus cardinal qu'une distribution de Dirac. La conclusion demeure la même.

Deux hypothèses fortes sont utilisées pour décrire les caractéristiques statistiques associées à notre rayonnement et ses fluctuations : l'ergodicité et la stationnarité. La différence de nature entre les corrélations dans le domaine spectral optique et le domaine spectral électrique semble provenir du rôle privilégié de la fréquence de Fourier par rapport à la variable temporelle. Dans la continuité de ces constatations, on se propose d'explorer les effets créés par l'introduction de non-stationnarités sur les corrélations spectrales électriques des fluctuations d'intensité.

### **3 Décomposition des modes de bruit dans un VECSEL non-stationnaire**

Nous allons nous focaliser sur les effets non-stationnaires dans le bruit du VECSEL en utilisation monomode. L'idée sous-jacente est de mettre en évidence des corrélations entre des composantes spectrales différentes du bruit d'intensité pour pouvoir en décomposer les modes principaux. Cette technique puissante et novatrice permet aux références [133–135] une description complète de la dynamique d'un peigne de fréquences par un nombre restreint de paramètres.

Deux situations de non-stationnarité sont successivement inspectées. La première repose sur la modulation en intensité du courant de la pompe autour du seuil laser du VECSEL. La seconde situation repose sur l'acquisition du bruit d'intensité aux temps longs afin d'exploiter les éventuelles dérives lentes.

#### **3.1 Modulation en intensité de la pompe**

Les fluctuations d'intensité étant exacerbées au voisinage du seuil laser, on sonde la réponse du VECSEL à 852 nm à une modulation dans la configuration de la Fig. 7.7(b). Ajoutons que la modulation se faisant de part et d'autre du seuil, une réponse non-linéaire est attendue. Ceci permettra une identification claire des composantes du bruit non-stationnaire artificiellement introduit.

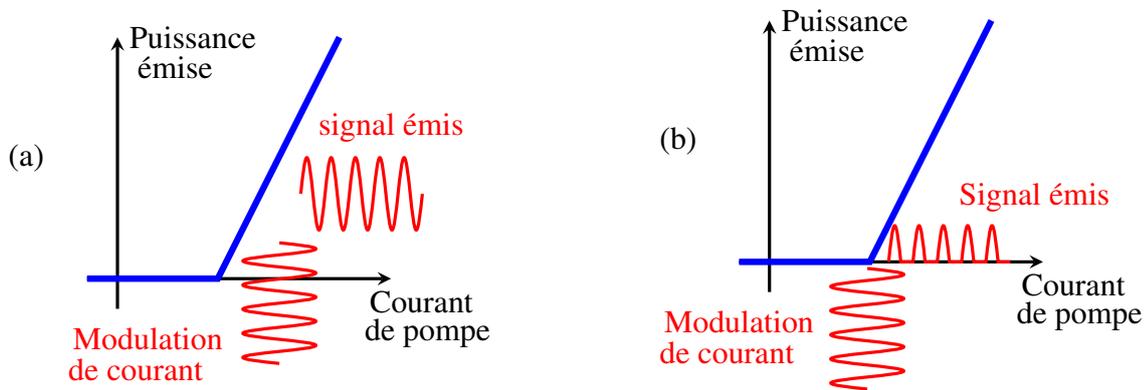


FIGURE 7.7 – Schéma de la modulation de l'intensité de pompe du VECSEL bien au-dessus du seuil (a) et aux alentours du seuil (b). La configuration (b) est retenue pour les investigations expérimentales.

On utilise l'entrée de modulation de l'alimentation de la diode laser de pompe, qui possède une bande passante de 250 kHz d'après le constructeur, pour imposer une variation sinusoïdale du courant à 50 kHz dans un premier temps et à 100 kHz dans un second temps. Pour sa part, la diode laser de pompe fonctionne très loin au dessus de son seuil. Intéressons-nous à la matrice de covariance spectrale des fluctuations d'intensité alors observées.

### Matrice de covariance spectrale

La Fig. 7.8 montre en fausses couleurs le module de la matrice de covariance  $\Sigma$  de la définition (7.25) dans le plan  $(\Omega_1/2\pi, \Omega_2/2\pi)$ . La Fig. 7.8(a) permet de visualiser en 2D avec une échelle de couleurs normalisée la matrice que l'on a déjà affichée sur la Fig. 7.5. On voit apparaître une diagonale en teintes de jaune sur un fond bleu foncé. Il s'agit de l'observation précédente d'une densité spectrale de puissance sur la diagonale et l'absence de corrélations entre deux composantes spectrales à des fréquences distinctes. La Fig. 7.8(b) montre le module de  $\Sigma$  lorsqu'on effectue la modulation au voisinage du seuil sus-mentionnée. Seul un point jaune emportant le maximum de variance apparaît à la fréquence de modulation  $f_m = 50$  kHz. Il n'est pas étonnant que le reste de la densité spectrale de puissance sur la diagonale soit totalement caché étant donné le très faible niveau relatif des fluctuations par rapport au signal de modulation. Nous affichons à la Fig. 7.9(a) le spectre correspondant à la diagonale de la matrice de covariance spectrale avec une échelle verticale en dB. Il en ressort qu'en plus de ce signal de modulation à 50 kHz, se détachent des pics de bruit tous les 50 kHz jusqu'à 450 kHz. Il s'agit des harmoniques de la fréquence de modulation aux fréquences  $n \times f_m$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . L'amplitude de ces harmoniques est modulée avec  $n$  : leur décroissance n'est pas monotone. On observe que l'harmonique à  $n = 2$  a une plus faible amplitude qu'à  $n = 3$  et que ceci s'inverse entre  $n = 4$  et  $n = 5$  dont l'harmonique possède elle-même une plus faible amplitude que l'harmonique à  $n = 6$ . La distorsion harmonique, importante ici, est induite artificiellement par la modulation autour du seuil. En-dessous

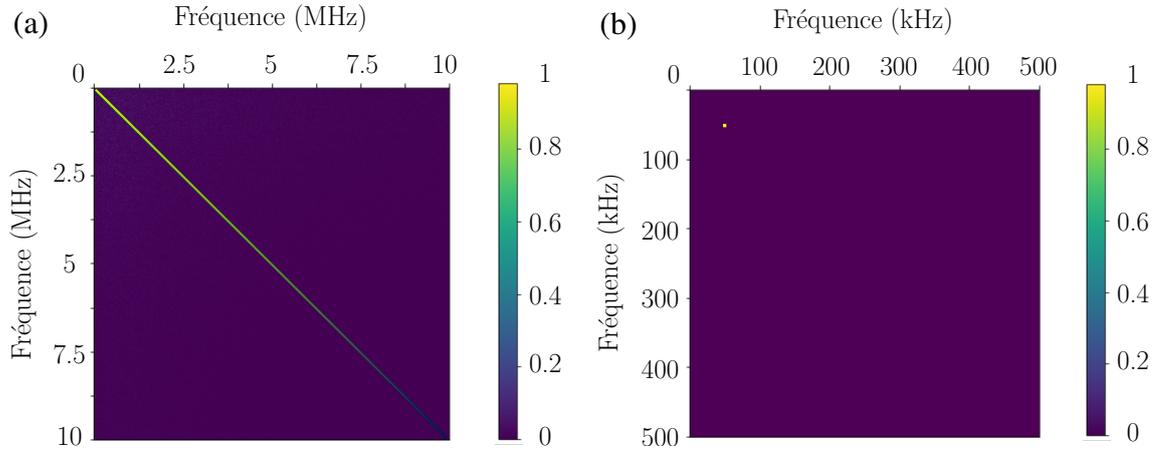


FIGURE 7.8 – Module de la matrice de covariance spectrale électrique des fluctuations d'intensité d'un VECSEL monomode en utilisation libre (a) et soumis à la modulation au voisinage du seuil (b) de la Fig. 7.7(b). L'échelle de couleur est normalisée par rapport au maximum de la variance.

des harmoniques, on observe distinctement (tirets cyans) la fonction de transfert de type filtre passe-bas correspondant au bruit d'intensité relatif induit par le bruit de puissance de la pompe. Intéressons nous aux corrélations entre les composantes spectrales de bruit. Le

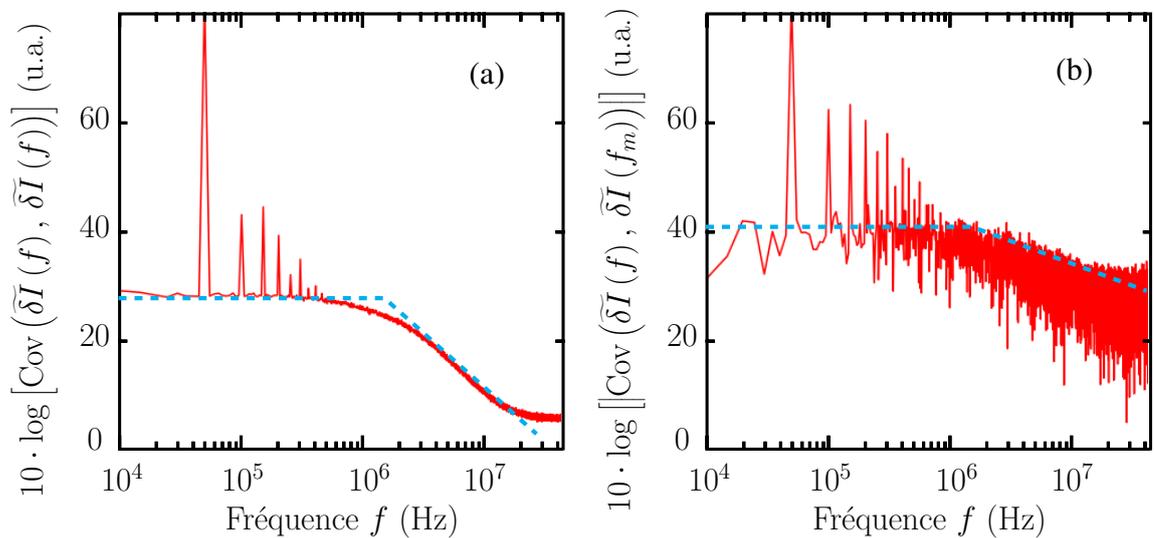


FIGURE 7.9 – Spectres issus de la covariance spectrale électrique de la Fig. 7.8(b) d'un VECSEL soumis à une modulation d'intensité près du seuil. La diagonale de la matrice de covariance en (a) donne une image de la densité spectrale de puissance. Le profil de la matrice le long de la fréquence de 50 kHz donne en (b) le spectre de la covariance avec la composante à la fréquence de modulation. Les tirets cyans soulignent le bruit de fond transféré du RIN de la pompe. L'unité en ordonnées est arbitraire.

spectre du module des covariances entre les composantes de bruit à la fréquence  $f$  et la composante de bruit à la fréquence de modulation  $f_m$  est tracé à la Fig. 7.9(b). On observe des corrélations non nulles avec des fréquences différentes de  $f_m$ . La matrice de covariance du spectre électrique est donc non diagonale en présence de la modulation. De plus nombreuses harmoniques de  $f_m$  que sur la diagonale peuvent en effet être comptées (au delà de 500 kHz). L'allure observée suggère également que le fond de bruit en forme de fonction de transfert de filtre passe-bas se corrèle avec la composante à  $f_m$  (tirets cyans).

La modulation a bien permis de créer des corrélations entre composantes de Fourier à des fréquences différentes en introduisant de la non-stationnarité dans le système. Ayant rajouté des composantes de bruit de façon maîtrisée, on peut maintenant tester l'implémentation d'algorithmes pour la décomposition en modes principaux de bruit.

### Analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales (ACP) est une méthode d'analyse de données dite factorielle. Elle suppose qu'il n'y ait pas de variable dépendante ou indépendante identifiée au préalable et permet de compresser l'information contenue dans  $N_{\text{éch}}$  variables aléatoires mesurées en  $N_{\text{ACP}} \leq N_{\text{éch}}$  composantes principales, que l'on souhaite hiérarchiser. Cette première considération revient pour nous à posséder un signal de bruit dont on ignore toutes les sources (on a subitement oublié que l'intensité de pompe du VECSEL était modulée) et à en chercher les facteurs principaux. Faire le choix des composantes principales, c'est faire le choix qui emporte le maximum de variance. Une façon géométrique de considérer ce problème a été initiée par J.-P. Benzecri [142]. Une régression linéaire constitue en fait une première image très simple de la méthode. Imaginons qu'après  $N$  observations, on s'aperçoive d'une tendance linéaire d'une variable par rapport à une autre. Trouver la droite de meilleur ajustement linéaire, c'est trouver un axe principal le long duquel la majorité des réalisations se répartit. On peut alors affirmer qu'une seule variable contient l'essentiel de l'information en se donnant cet axe principal, qui emporte le plus de variance. L'axe perpendiculaire à cet axe principal emporte quant à lui très peu de variance et la variable associée peut être omise sans trop de perte d'information. On part de  $N_{\text{éch}} = 2$  variables et la procédure utilisée nous ramène à  $N_{\text{ACP}} = 1$  variable dans cet exemple. Il faut maintenant extrapoler ce travail à un très grand nombre de variables.

L'ACP est une méthode numérique qui peut être utilisée dans différents buts. (i) Elle permet de décrire, visualiser et hiérarchiser des données dans les domaines de la biologie ou encore les sciences économiques et sociales. (ii) Elle a ouvert la voie vers des méthodes de reconnaissance numérique d'image, dont l'enjeu est tout à fait actuel avec la mise en place des systèmes de reconnaissance faciale. (iii) Elle permet de débruiter un signal en se débarrassant d'un axe considéré comme indésirable. (iv) Elle permet de trouver une base restreinte de composantes décorréelées, ce qui constitue en quelque sorte notre motivation initiale. L'algorithme derrière l'ACP est en fait lié à la matrice de covariance  $\Sigma$  que l'on a précédemment définie. Il consiste à diagonaliser cette matrice (7.25) et à classer

ses valeurs propres réelles positives dans l'ordre décroissant. Dans la nouvelle base, les vecteurs propres associés aux premières valeurs propres de la liste (emportant le plus de variance), sont les composantes principales recherchées. Après cette simple hiérarchisation, on peut choisir un critère pour compresser les données en ne gardant qu'un nombre restreint des composantes expliquant la majorité de la variance. Parmi les critères existants, nous pouvons nommer le critère du « coude », la règle de Kaiser-Guttman, la règle de Karlis-Saporta-Spinaki... Mais il est également possible de se donner pour règle de restituer les données avec une variance expliquée supérieure à 95 % (par exemple). En notant  $\Lambda_k$  la valeur propre associée à la  $k$ -ième composante, la variance expliquée par  $N_{\text{ACP}}$  composantes s'exprime comme la valeur relative  $(\sum_{k=1}^{N_{\text{ACP}}} \Lambda_k) / (\sum_{k=1}^{N_{\text{éch}}} \Lambda_k)$ .

Nous avons vu précédemment que la matrice de covariance spectrale électrique des fluctuations d'intensité du VECSEL monomode était diagonale (Fig.7.5 ou encore Fig.7.8(a)). De plus, la densité spectrale de puissance est une fonction naturellement décroissante de la fréquence de Fourier pour un laser dont la dynamique est de classe-A comme le nôtre. Par conséquent, la base canonique des fréquences de Fourier de notre échantillonnage  $\{(f_1, 0, \dots, 0), (0, f_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, f_{N_{\text{éch}}})\}$  se confond avec la base propre des composantes principales de bruit recherchée. L'ACP ne nous apprend donc rien, si ce n'est que dans ce cas la variance expliquée par  $N_{\text{ACP}}$  composantes représente bien le rapport entre la densité de puissance intégrée jusqu'à la fréquence  $f_{N_{\text{ACP}}}$  et la puissance totale des fluctuations.

En présence de la modulation, il en va autrement. L'implémentation de l'ACP permet d'isoler les modes principaux de bruit. On montre le module normalisé des trois premiers vecteurs propres à la Fig. 7.10(a). La composante principale qui domine (en rouge) est clairement issue de la modulation à 50 kHz. La deuxième (en bleu) fait apparaître toutes les harmoniques mentionnées plus haut. La troisième composante (en magenta) comporte un petit peu de ces mêmes harmoniques mais est surtout dominée par ses basses fréquences. Les composantes suivantes s'inscrivent dans la lignée de la composante #3 emportant principalement des fréquences se décalant progressivement vers les valeurs plus hautes. Il peut sembler curieux que l'ACP décompose les modes de bruit emportant la modulation et ses harmoniques en composantes différentes (#1 et #2). En effet ces composantes de bruit sont construites de façon à être non-corrélées. Or nous savons que les harmoniques vont de pair avec la modulation. On remarque cependant que sans les effets non-linéaires, c'est-à-dire si la modulation n'était pas effectuée au voisinage du seuil, ces harmoniques ne seraient pas mesurées. Il faut dissocier corrélations et causalité. De plus, il est rassurant de constater que toutes les harmoniques sont conjointement représentées dans cette composante #2, qui est quasiment nulle à 50 kHz.

En s'inspirant de l'optique quantique, la référence [135] utilise le nombre de Schmidt comme rang effectif des matrices de covariance pour les deux quadratures du champ. Ceci permet aux auteurs de connaître le nombre de modes qui participent aux processus physiques de bruit. Ici la variance expliquée donne une indication en quelque sorte équivalente, indiquée à la Fig. 7.10(b). En utilisant le critère des 95%, la matrice de covariance

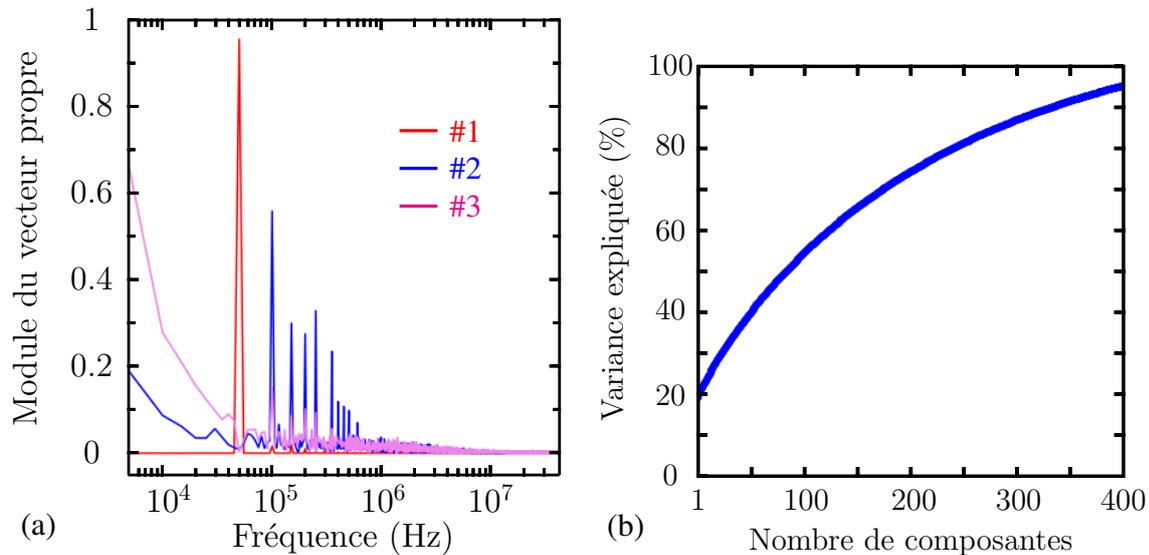


FIGURE 7.10 – Décomposition en composantes principales du bruit d’intensité du VECSEL modulé au voisinage de son seuil. (a) Module des trois premières composantes principales en fonction de la fréquence de Fourier. Les vecteurs correspondant sont normalisés. (b) Variance expliquée après l’ACP en fonction du nombre de composantes retenues.

reconstruite écope d’un rang égal à 350 éléments environ. En fait, le comportement notable de la variance expliquée se situe au niveau de la discontinuité observée. En effet, la première composante emporte environ 20% de la variance totale alors que toutes les autres composantes emportent individuellement moins de 0.5%. Évidemment, plus l’amplitude de modulation est importante et plus la variance expliquée par cette première composante sera élevée. La lente évolution du reste de cette courbe de variance expliquée amène à la conclusion qu’après ces premiers modes de bruit, il y a quasiment autant de composantes spectrales qu’il y a de fréquences dans l’échantillonnage. Le reste de la base de vecteurs propres ressemble ainsi à la base canonique sus-mentionnée.

Par ailleurs, l’exploitation de la décomposition réalisée vise normalement à reconstruire le signal, constitué ici de  $N$  réalisations de spectres de bruit d’intensité. Nous choisissons d’abord de reconstruire le signal à l’aide des trois composantes principales uniquement.

Ceci nous permet d’afficher à la Fig.7.11(a) la matrice de covariance associée aux trois composantes principales uniquement<sup>6</sup>. On voit apparaître des pics correspondant à la modulation à 50 kHz (artificiellement atténuée) ainsi que ses harmoniques. Les 3 composantes principales tiennent ainsi compte de la covariance spectrale des fluctuations d’intensité aux fréquences  $(n \times f_m, m \times f_m)$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ . Avec les  $N_{\text{éch}} - 3$  autres composantes, on reconstruit le signal dont on voit la matrice de covariance à la Fig. 7.11(b). Le résultat est

6. Dans la base canonique bien-entendu. Si c’était dans la base des composantes principales, la matrice de covariance serait simplement diagonale.

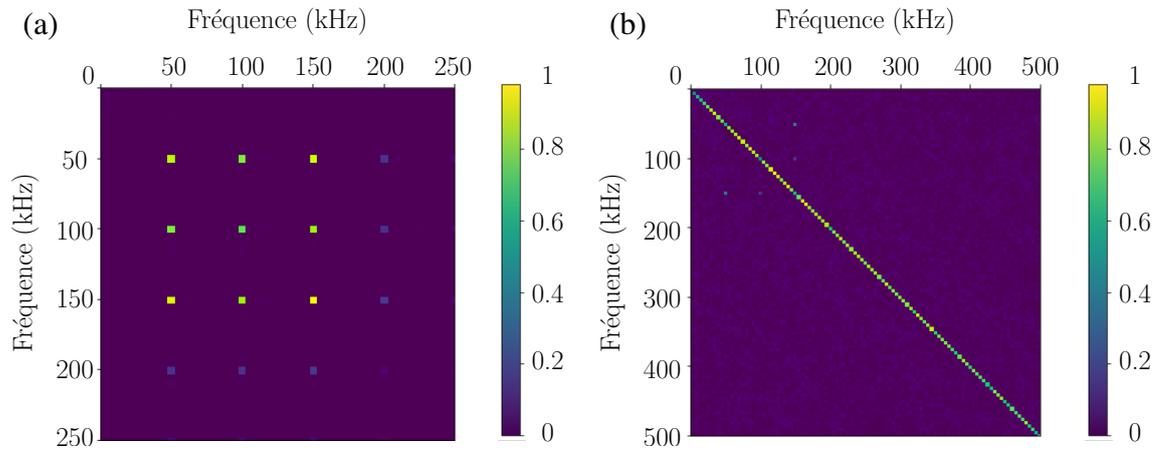


FIGURE 7.11 – Matrice du module de la covariance spectrale électrique reconstruite à partir de l’ACP. (a) Seules les trois premières composantes reconstruisent le signal. La contribution de la première composante est atténuée, ce qui permet d’observer les autres. (b) Toutes les composantes, exceptées les trois premières, sont utilisées pour reconstruire le signal.

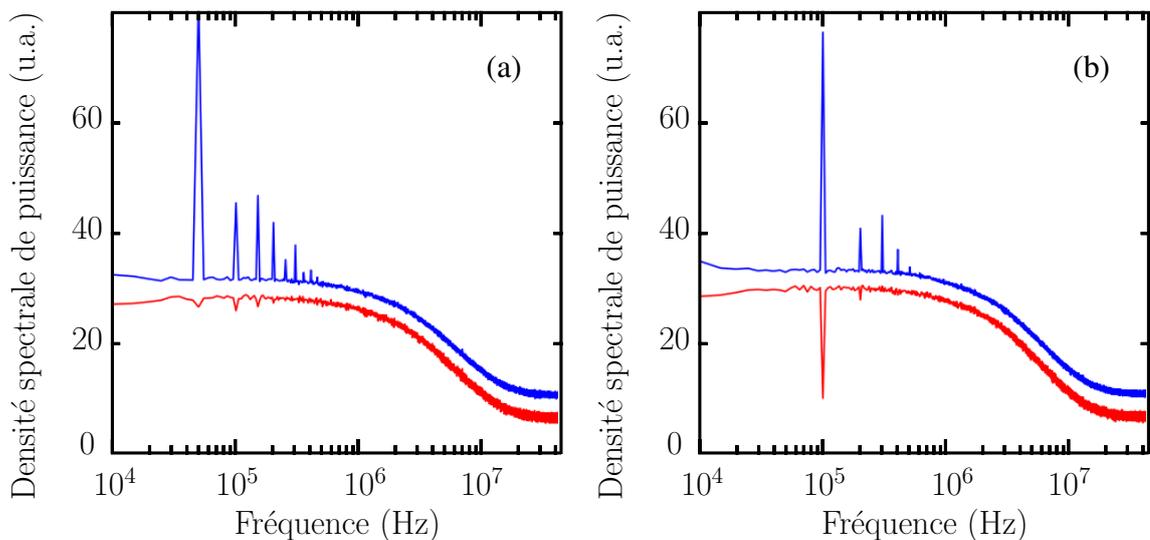


FIGURE 7.12 – Spectres de la densité de puissance de bruit d’intensité d’un VECSEL monomode au pompage modulé à 50 kHz (a) et 100 kHz (b). Le spectre bleu correspond au signal total et le rouge au signal reconstruit à l’aide de l’ACP à partir de toutes les composantes sauf les trois principales.

une matrice de covariance diagonale. La densité spectrale de puissance correspondant au spectre diagonal de cette matrice est tracée à la Fig. 7.12(a). On s’aperçoit que ce spectre (en bleu) correspond en très bonne approximation au spectre (en rouge) issu du transfert de bruit de pompe au VECSEL en l’absence de la modulation et de ses harmoniques. On a donc extrait le signal du bruit. Cette technique donne également un résultat satisfaisant

à la Fig.7.12(b) où on parvient à retrouver le bruit de fond du VECSEL soumis à une modulation à 100 kHz. On s'intéresse ici aux (nombreuses) composantes qui emportent individuellement peu de variance et si l'on considère que la modulation joue le rôle d'un pic de bruit alors on peut voir l'ACP comme une technique de filtrage des composantes non-stationnaires indésirables. On peut tout autant récupérer la modulation à l'aide de ces premières composantes et considérer que l'on a « débruité » l'acquisition via l'ACP.

En conclusion, l'ACP nous a permis de discriminer les modes de bruit dans le VECSEL soumis à une modulation de pompe. L'algorithme nous permet de construire une base de bruits non-corrélés et les hiérarchiser par ordre décroissant de variance emportée. Un exemple d'application au filtrage de la composante non-stationnaire du VECSEL modulé a été développé. Mais cette technique est-elle toujours efficace quand les non-stationnarités ne sont pas artificiellement rajoutées ?

### **3.2 Bruits non stationnaires aux basses fréquences**

La mesure du bruit d'intensité aux basses fréquences est délicate à cause des nombreux pics indésirables que l'on attribue aux vibrations mécaniques, aux bruits électroniques, aux lentes dérives thermiques et autres bruits parfois qualifiés de bruits techniques. Ces bruits techniques, les bruits électroniques mis à part, sont probablement attribuables à des processus non-stationnaires. On souhaite caractériser de tels bruits à l'aide des outils développés précédemment : la matrice de covariance et l'ACP.

#### **Matrice de covariance spectrale**

Nous réalisons de longues acquisitions des fluctuations d'intensités aux basses fréquences du VECSEL monomode à la longueur d'onde télécom. Le spectre du bruit d'intensité relatif obtenu est tracé sur la Fig. 7.13(a). Le bruit d'intensité issu des fluctuations de la pompe est plutôt plat sur une bande passante d'environ 1 MHz. Or, on observe un écart par rapport à ce comportement aux fréquences inférieures à 10 kHz, d'autant plus important que la fréquence de Fourier est basse. Cette partie du spectre présente de plus des pics de bruit à environ 150 Hz et 400 Hz. L'examen de la matrice de covariance spectrale électrique de la Fig. 7.13(b) atteste certes d'éléments diagonaux formant la densité spectrale de puissance mais également de l'existence de covariances non nulles entre les composantes à différentes fréquences de Fourier et les composantes à 150 Hz et 400 Hz. En effet, des lignes jaunes ressortent du fond vert à la fois aux abscisses et aux ordonnées correspondant à ces deux fréquences (plus clairement à 400 Hz). Ces lignes paraissent continues, ce qui traduit des corrélations entre toutes les composantes et ces pics de bruit. La vibration du banc optique pourrait par exemple donner conjointement lieu à un pic de bruit dans le VECSEL par déplacement d'un miroir et accroître le bruit d'intensité de la pompe. Ce scénario expliquerait les observations mais il en existe évidemment une multitude d'autres.

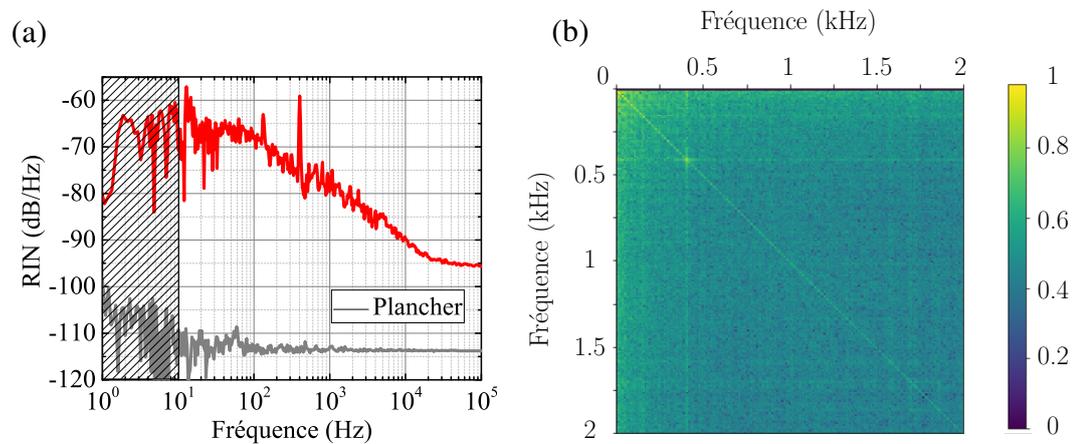


FIGURE 7.13 – Spectres de bruit d'intensité du VECSEL monomode aux basses fréquences. (a) Spectre de RIN (en rouge) et plancher de mesures (en gris). La zone hachurée sous 10 Hz dénote la fréquence de coupure du couplage AC de l'oscilloscope utilisé pour l'acquisition. (b) Module de la matrice de covariance. L'échelle de couleurs est en unités arbitraires.

À la lumière des considérations précédentes, l'étude de la matrice de covariance spectrale nous permet d'affirmer le caractère non-stationnaire de certains pics de bruit aux basses fréquences.

### Analyse en composantes principales

L'ACP permet de discriminer parmi les modes de bruits ceux qui emportent le plus de variance. En fait, ici ce sont les fluctuations aux fréquences sous 100 Hz qui, globalement, sont les plus marquées (voir Fig. 7.13(a)), avec la présence notable de pics de bruits comme celui à 400 Hz.

Pour des raisons de limitation de la capacité numérique lors de la diagonalisation de la matrice de covariance, l'implémentation de l'algorithme à la Fig. 7.14 ne sera pas basée sur le même nombre de réalisations  $N$  des fluctuations basses fréquences de l'intensité du VECSEL que la représentation à la Fig. 7.13<sup>7</sup>. La densité spectrale de puissance associée à la valeur de  $N$  adoptée est illustrée en noir à la Fig. 7.14(b). On identifie bien le pic à 400 Hz mais d'autres sont également présents à 100 Hz, 200 Hz et 300 Hz. L'ACP permet de tracer à la Fig. 7.14(a) quelques unes des composantes principales. C'est l'association du pic à 400 Hz et de celui à 100 Hz qui emporte le plus de variance (première composante en rouge). En seconde place, c'est un mélange composé des harmoniques 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz et 400 Hz (en bleu). Les autres composantes font ensuite ressortir le bruit sous les 100 Hz. La variance expliquée varie en fait assez lentement avec le nombre de composantes retenues, comme le montre l'insert. En effet, les trois premières composantes expliquent

7. C'est seulement le nombre de tronçons qui change, pas l'acquisition.

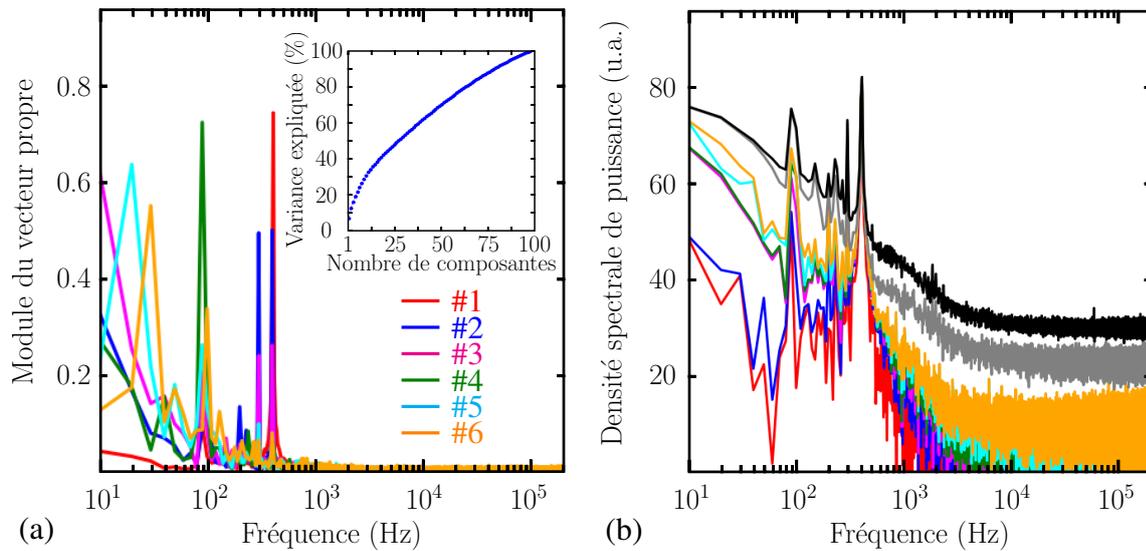


FIGURE 7.14 – Décomposition en composantes principales du bruit d'intensité du VECSEL aux basses fréquences. (a) Module de six composantes principales en fonction de la fréquence de Fourier. Les vecteurs correspondant sont normalisés. L'insert représente la variance expliquée après l'ACP en fonction du nombre de composantes retenues. (b) Reconstruction de la densité spectrale de puissance suivant le nombre de composantes retenues : de 1 (en rouge), à 6 (en orange), puis 30 (en gris) et enfin toutes (en noir).

respectivement 7% de la variance, puis 5%, puis 3%. Vers la quinzième composante, la variance expliquée, aux alentours de 30%, croît encore plus lentement. La Fig. 7.14(b) reconstruit la densité spectrale de puissance en accumulant les contributions des composantes principales. L'allure de la densité spectrale de puissance reproduit parfaitement le spectre de bruit d'intensité au bout d'un nombre de composantes de l'ordre de 100. Comme attendu, la reconstruction du signal se fait par les basses fréquences. Il est à retenir que la décomposition nous a permis d'isoler en premier les pics de bruit attribués à des processus *a priori* non-stationnaires. Peut-être que toutes ces harmoniques de 50 Hz proviennent en réalité d'un couplage avec le bruit électronique du secteur. L'algorithme implémenté ne nous donne pas davantage de renseignement sur la physique des processus responsables des pics bruits, déjà repérés dans la matrice de covariance. Il nous a néanmoins permis de les trier.

On pourrait s'étonner de constater que le pic à 400 Hz est à la fois présent dans la composante #1, la #2 et aussi la #3 en pensant que son origine provient d'un seul processus physique. Les bruits issus de processus physiques différents sont certes non-corrélés mais les bruits non-corrélés ne proviennent pas nécessairement de processus différents. Peut-on faire un meilleur tri ?

### Analyse en composantes indépendantes

L'analyse en composantes indépendantes (ACI) est une autre technique pour séparer les composantes d'un signal, non plus en les hiérarchisant selon la variance qu'elles emportent, mais en les définissant de façon statistiquement indépendantes les unes des autres. La référence [143] décrit bien l'intérêt de l'ACI en se basant sur un exemple très concret et simple à appréhender. La force de cet exemple est qu'il permet aussi de comprendre les éventuelles limites de l'ACP par rapport à l'ACI. Imaginons que nous avons enregistré dans une pièce confinée des conversations simultanées avec plusieurs microphones. Le contenu de tous les enregistrements est un mélange de plusieurs voix avec des intensités, des tonalités et timbres différents. L'implémentation de l'ACI a pour but de séparer les voix et les restituer au mieux. Il faut avoir au moins autant d'enregistrements qu'il y a de voix différentes à distinguer. La méthode repose sur l'hypothèse physique que deux signaux statistiquement indépendants vont provenir de deux personnes différentes. Cette hypothèse d'indépendance statistique est plus forte que celle de non-corrélation de deux variables : en lançant simultanément deux oscillateurs identiques complètement indépendants avec les mêmes conditions initiales, leurs positions au cours du temps sont totalement corrélées bien qu'elles soient indépendantes. Ainsi, la décomposition via l'algorithme de l'ACI permet en pratique de très bien isoler les voix qui composent le mélange une à une alors que l'ACP aboutit à des signaux non-corrélés les uns aux autres mais pourtant composés d'un mélange de toutes les voix dans la pièce. On montre toutefois qu'en présence de statistiques gaussiennes, deux variables non-corrélées sont indépendantes. Mais, dans l'exemple, la distribution pour l'amplitude d'un signal de voix enregistré n'est pas gaussienne. Elle est bien symétrique, centrée sur 0, mais la quantité de silence que nous incorporons naturellement à nos paroles déforme au centre la distribution pour la rendre leptokurtique (plus piquée qu'une Gaussienne).

On applique l'algorithme de l'ACI dans le cas présent des mesures du bruit du VECSEL dans l'idée de constater un écart éventuel par rapport à la décomposition précédente. En fait, la Fig. 7.15 montre que la décomposition en 3 composantes par les deux méthodes conduit à trois modes de bruits absolument identiques. En effet, la comparaison des densités spectrales de bruit reconstruites avec chaque mode par l'ACI Fig. 7.15(a,b,c) et l'ACP Fig. 7.15(d,e,f) est rapide. Nous n'apprenons donc rien de supplémentaire avec cette méthode et l'aspect gaussien des distributions n'est pas à remettre en question. On peut affirmer que deux composantes non corrélées sont statistiquement indépendantes.

Afin de visualiser les étapes de reconstruction du signal par l'ACP ou l'ACI, on peut comparer les densités spectrales de puissance sur la Fig. 7.16(a) obtenues avec trois ou quinze composantes (en bleu et en orange, respectivement) et la densité spectrale de puissance du bruit d'intensité mesurée aux basses fréquences. Comme évoqué plus haut, les trois premières composantes expliquent les pics de bruit tels que celui à 400 Hz et les quinze premières composantes s'associent à une croissance significative de la variance expliquée. Les spectres présentant l'écart relatif entre les reconstructions et le signal sont affichés à la Fig. 7.16(b). Nous y observons que ce sont en effet les pics de bruit qui sont d'abord

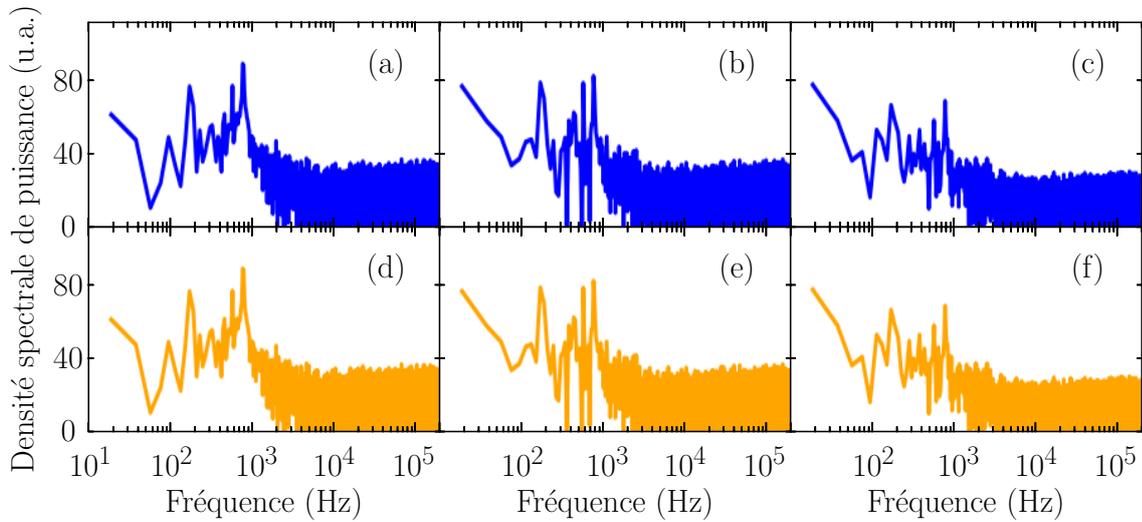


FIGURE 7.15 – Densité spectrale de puissance des trois premiers modes de bruits donnés par l’ACI en bleu (a,b,c) et l’ACP en orange (d,e,f). L’ordre des composantes de l’ACI a été revu pour coller à celui de l’ACP.

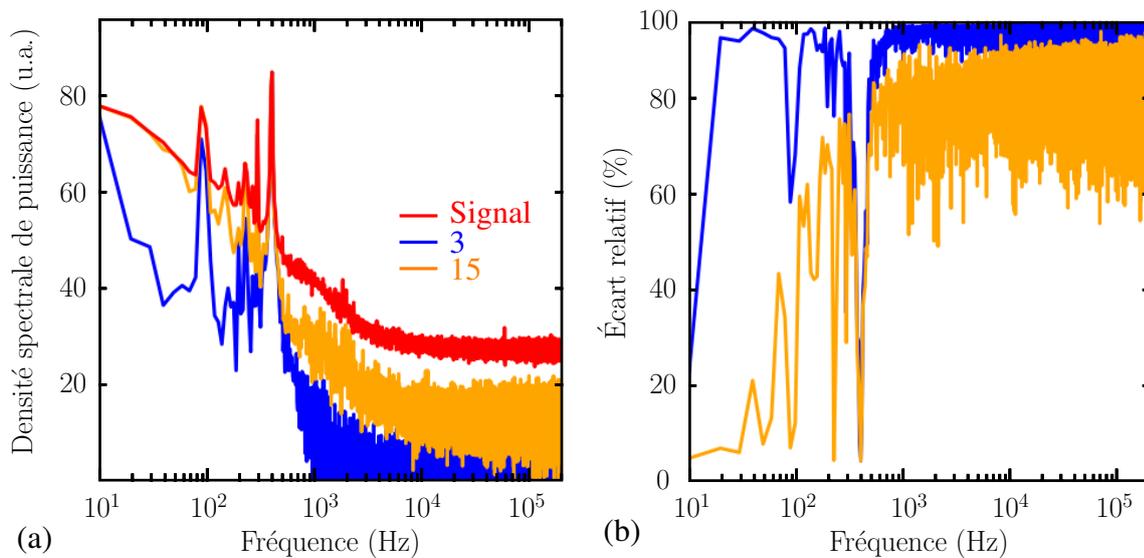


FIGURE 7.16 – (a) Reconstruction de la densité spectrale de puissance du bruit d’intensité (en rouge) avec les trois premières composantes de l’ACP (en bleu), puis les quinze première (en orange). (b) Écart relatif entre le signal et sa reconstruction par trois composantes (en bleu) ou quinze composantes (en orange).

reconstruits avec les trois premières composantes (en bleu) puis l’ensemble de la partie basses fréquences sous 1 kHz avec les suivantes (en orange).

Bien que la construction de la matrice de covariance spectrale donne une indication sur la nature stationnaire ou non des fluctuations d’intensité suivant son allure diagonale ou

non, de robustes tests algorithmiques existent pour prouver la stationnarité d'une série temporelle. Ces tests statistiques ont été développés avec l'essor de l'analyse de données d'abord dans le domaine de l'économie, puis dans le domaine plus large des *Big data*. Ils font désormais partie d'une boîte à outils potentiellement intéressante pour le physicien.

### 3.3 Tests de non-stationnarité(s)

Comme nous venons de le voir, l'ACP et l'ACI sont de très bons outils pour trier les composantes de bruit du VECSEL. En revanche, utilisés seuls, ils ne permettent pas de conclure sur la nature stationnaire ou non des composantes de bruits isolées. Par ailleurs, des tests statistiques sont entièrement dédiés à la vérification de la stationnarité de séries temporelles de données. Il paraît donc complémentaire d'utiliser ce type de test après la décomposition des bruits.

#### Non-stationnarité déterministe vs non-stationnarité stochastique

Qu'entend-on précisément par stationnaire ? On distingue la stationnarité au sens fort de la stationnarité au sens faible [144]. Si un processus stochastique est stationnaire au sens fort alors sa loi de probabilité est invariante par translation dans le temps. Les propriétés d'une série temporelle mettant en jeu ce processus ne sont pas affectées par la date de début de prise de données. La stationnarité au sens faible est régie par une définition moins stricte et se résume par trois conditions : (i) l'espérance de la série temporelle est constante au cours du temps, (ii) sa variance est également constante et finie, (iii) sa fonction d'auto-corrélation  $\Gamma(t, \tau)$  telle que définie à l'équation (A.5) de l'annexe A, ne dépend que du délai  $\tau$  et pas de l'instant  $t$ . Si cette définition en trois points de la stationnarité est moins stricte, c'est parce qu'elle n'implique que les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 de la distribution statistique. Un processus qui déroge à l'une de ces conditions est alors non-stationnaire. Parmi les types de non-stationnarités, deux retiendront notre attention.

La non-stationnarité déterministe caractérise un processus qui peut être rendu stationnaire par soustraction d'une tendance déterministe de la forme  $f(t)$ <sup>8</sup>. La partie tendancielle est souvent de nature exogène et non corrélée au reste des fluctuations. Un choc imprévu comme une vibration du banc optique n'aura pas d'effet persistant sur ce processus car il ne changera pas sa tendance déterministe.

La non-stationnarité stochastique caractérise un processus qui peut être rendu stationnaire après un certain nombre de différenciations<sup>9</sup>. Un choc imprévu à une date donnée a un effet permanent sur le niveau du processus. On peut par exemple penser aux sauts de mode de la cavité laser ou aux effets d'hystérésis dynamique. La marche aléatoire est l'archétype d'un

8. On parle de processus *Trend stationary* en anglais

9. On parle de processus *Difference stationary* en anglais.

processus stationnaire en différence. Deux pas successifs d'une marche aléatoire différent l'un de l'autre d'une quantité issue d'un bruit blanc, qui est stationnaire par définition.

### Tests statistiques

En réalité, de nombreux tests de stationnarité d'une série temporelle existent. Bien que simples d'utilisation, leur interprétation peut être délicate et nécessite d'introduire quelques définitions. Un test statistique vise à valider ou rejeter une hypothèse en se basant sur l'étude d'échantillons de données. Cette hypothèse est appelée l'hypothèse nulle. On utilise la valeur- $p$  pour mesurer la significativité statistique d'un résultat dans le cadre d'une hypothèse nulle. L'idée sous-jacente est de prouver que l'hypothèse nulle n'est pas vérifiée car dans le cas où elle le serait le résultat observé serait fortement improbable. Il faut considérer le test statistique comme une preuve par l'absurde. Le tableau 7.1 présente la classification historique de R. Fisher pour juger du caractère improbable de l'hypothèse nulle (adoptée par convention).

Valeur- $p$	Interprétation
$p \leq 0.01$	très forte présomption
$0.01 < p \leq 0.05$	forte présomption
$0.05 < p \leq 0.10$	faible présomption
$p > 0.1$	pas de présomption

TABLEAU 7.1 – Interprétation de R. Fisher pour la valeur de probabilité d'un test statistique. Cette approche est classique mais arbitraire. Elle juge la présomption du caractère improbable de l'hypothèse nulle.

Deux tests statistiques différents seront utilisés pour tester la stationnarité de nos séries temporelles de fluctuations d'intensité du VECSEL aux temps longs. Ces tests reposent sur des hypothèses nulles différentes. Le premier test utilise l'algorithme Dickey-Fuller Augmenté (ADF) issu de travaux publiés en 1979 dans le domaine de l'économie [145]. Le test ADF repose sur l'hypothèse nulle que la série temporelle possède une racine unitaire, ce qui s'identifie à la présence d'une non-stationnarité stochastique comme celle d'une marche aléatoire pure. Cette hypothèse nulle implique que la variance de la série temporelle dépend du temps et donc qu'elle est non-stationnaire. Le second test utilise l'algorithme de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) [146]. Le test KPSS repose sur l'hypothèse nulle que la série temporelle est stationnaire en tendance, c'est-à-dire stationnaire à une non-stationnarité déterministe près.

### Application aux VECSELS

Les tests ADF et KPSS sont réalisés sur les séries temporelles correspondant aux mesures des fluctuations d'intensité du VECSEL dans les 5 cas différents qui sont résumés dans le

	VECSEL à	Spécificité
Mesures 1	852 nm	Laser monomode en utilisation libre
Mesures 2	852 nm	Laser modulé en intensité à 50 kHz
Mesures 3	1.5 $\mu\text{m}$	Acquisition aux temps longs
Mesures 4	1.5 $\mu\text{m}$	Signal reconstruit avec 3 composantes de l'ACP
Mesures 5	1.5 $\mu\text{m}$	Signal reconstruit avec 15 composantes de l'ACP

TABLEAU 7.2 – Séries temporelles issues des mesures d'intensité du VECSEL.

tableau 7.2. Le premier cas correspond au VECSEL monomode en utilisation libre de la Fig.7.8(a), le deuxième au VECSEL dont la pompe est modulée rencontré au paragraphe 3.1, le troisième au VECSEL dont on regarde le bruit d'intensité aux temps longs et que l'on a rencontré au paragraphe 3.2. Les quatrième et cinquième cas correspondent toujours aux fluctuations du VECSEL aux temps longs mais après reconstruction avec respectivement trois et quinze composantes de l'ACP (voir Fig. 7.16). Les résultats sont rassemblés dans le tableau 7.3.

	Mesures 1	Mesures 2	Mesures 3	Mesures 4	Mesures 5
Algorithme Dickey-Fuller Augmenté					
Valeur critique à 1%	-3.50			-3.43	
Valeur critique à 5%	-2.89			-2.86	
Valeur critique à 10%	-2.58			-2.56	
Test statistique	-9.08	-2.19	-8.99	-6.26	-6.26
Valeur- $p$	< 0.01	0.21	< 0.01	< 0.01	< 0.01
Hypothèse nulle	rejetée	non rejetée	rejetée	rejetée	rejetée
Algorithme Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin					
Valeur critique à 1%	0.74				
Valeur critique à 5%	0.46				
Valeur critique à 10%	0.35				
Test statistique	0.058	0.054	0.28	1.97	1.97
Valeur- $p$	> 0.1	> 0.1	> 0.1	< 0.01	< 0.01
Hypothèse nulle	non rejetée	non rejetée	non rejetée	rejetée	rejetée

TABLEAU 7.3 – Test de stationnarité ADF et KPSS avec les mesures décrites précédemment (voir tableau 7.2).

Pour l'algorithme ADF, une valeur de test supérieure à la valeur critique ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle, ce qui par conséquent montre que la série temporelle est non-stationnaire. Le pourcentage associé à une valeur critique correspond à un niveau de confiance. Le tableau 7.3 montre ainsi qu'en dehors des mesures 2, le test ADF ne permet pas de déclarer les séries temporelles non-stationnaires au sens où les séries temporelles n'ont pas un comportement de type marche aléatoire. Par contre, pour le VECSEL modulé le risque de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie est de 21%, comme l'indique

la valeur- $p$ . Cela signifie en fait qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle et donc que le bruit d'intensité du VECSEL modulé est non-stationnaire.

Pour l'algorithme KPSS, une valeur de test supérieure à la valeur critique permet de rejeter l'hypothèse nulle et donc d'affirmer que la série temporelle n'est ni stationnaire, ni stationnaire à une non-stationnarité déterministe près. Le tableau 7.3 montre ainsi que les mesures 4 et 5, reconstruction du bruit du VECSEL aux temps longs avec les premières composantes de l'ACP, sont non-stationnaires. En revanche, les mesures 1, 2 et 3 pourraient bien être stationnaires, au moins en tendance. On note que la valeur du test se rapproche davantage des valeurs critiques pour le VECSEL dont on mesure le bruit sur des temps longs.

	$H_0$ ADF rejetée	$H_0$ ADF non rejetée
$H_0$ KPSS rejetée	Non-stationnarité	Non-stationnarité stochastique
$H_0$ KPSS non rejetée	Stationnarité	Non-stationnarité déterministe

TABLEAU 7.4 – Combinaisons de résultats sur l'hypothèse nulle ( $H_0$ ) des tests de stationnarité.

L'intérêt de ces deux tests est de combiner leurs résultats. Ceci est illustré au tableau 7.4. En recoupant les deux tests, il résulte que les bruits d'intensité du VECSEL des mesures 1 et 3 sont plutôt stationnaires. Le bruit blanc transféré par la pompe au VECSEL et filtré par la cavité est bien un bruit stationnaire. Par contre, en présence de la modulation, on détecte par ses tests une non-stationnarité déterministe. Retirer la modulation, c'est donc bien retirer une tendance déterministe pour retrouver le bruit stationnaire d'un VECSEL comme nous l'avons vu à la Fig. 7.12. Cela nous permet de vérifier que cette approche par des tests statistiques dépeint bien la réalité expérimentale. La reconstruction des modes de bruit basses fréquences du VECSEL par trois ou bien quinze composantes de l'ACP donne un résultat différent des précédents. Cela permet en effet de mettre en évidence la non-stationnarité du bruit basses fréquences mais cette non-stationnarité n'est ni purement d'origine stochastique, ni purement d'origine déterministe. Aucune différence n'est à noter entre trois ou bien quinze composantes. Il n'en reste pas moins que l'on peut affirmer par cette méthode avoir isolé des composantes principales de bruit non-stationnaire.

## Conclusions et perspectives

La matrice de covariance spectrale électrique d'un VECSEL mono-fréquence, dont le bruit est principalement issu du transfert du bruit blanc de la pompe, est une matrice diagonale. Cette diagonale s'assimile à la densité spectrale de puissance du bruit d'intensité. Nous avons prouvé que l'apparition de termes non-diagonaux, issus de corrélations entre composantes spectrales à des fréquences différentes, nécessite l'introduction de processus stochastiques non-stationnaires. L'analyse de la covariance dans le domaine spectral

électrique s'est révélée bien différente de celle de la covariance dans le domaine spectral optique des références [133–135].

En fonctionnement bifréquence, en diagonalisant la matrice de densité spectrale croisée définie par E. Wolf [136], nous avons prouvé que les modes propres d'oscillations s'assimilaient en bonne approximation aux modes physiques symétrique et antisymétrique. De plus, nous avons défini un degré spectral de polarisation des fluctuations qui peut être compris comme l'écart relatif entre la densité spectrale de puissance du mode symétrique et celle du mode anti-symétrique. Ce degré spectral de polarisation des fluctuations est indépendant des axes des polarisations et reflète l'allure des corrélations spectrales entre les fluctuations sur les polarisations croisées.

Dans un troisième temps, nous nous sommes focalisés sur la caractérisation de bruits non-stationnaires en scrutant l'apparition de termes non-diagonaux dans la matrice de covariance spectrale pour deux situations expérimentales distinctes. La première situation est une modulation au voisinage de son seuil d'un VECSEL mono-fréquence. La seconde situation est une acquisition du bruit d'un VECSEL soumis à ses lentes dérives. Les deux situations ont révélé des corrélations entre composantes du spectre électrique des fluctuations d'intensité à des fréquences de Fourier différentes. L'implémentation d'une analyse en composantes principales a permis de procéder à un tri des composantes qui emportaient un maximum de variance. La reconstruction du signal après une telle décomposition a démontré la possibilité d'enlever par exemple un pic de bruit indésirable pour l'analyse. De façon encore plus intéressante, nous avons utilisé des tests statistiques de stationnarité pour démontrer la non-stationnarité du bruit d'intensité ou bien des composantes isolées. Dans la première situation, nous savons donc isoler et caractériser la modulation introduisant une non-stationnarité déterministe. Dans la seconde situation, ce sont des pics de bruit aux basses fréquences dont il est possible de faire le tri et de prouver la non-stationnarité. Nous avons donc construit une méthode complémentaire pour analyser séparément les bruits stationnaires et les bruits non-stationnaires de notre laser. Parmi les nombreux processus de bruits non-stationnaires, la méthode distingue ceux qui sont stochastiques, ceux qui sont déterministes et ceux qui ne sont ni l'un ni l'autre.

Nous pourrions maintenant passer à la caractérisation des fluctuations dont la distribution s'écarte de la gaussienne. Notre étude statistique s'est restreinte en fait aux moments d'ordre deux. L'étude du moment d'ordre trois (plus spécifiquement du bispectre) ou encore du moment d'ordre quatre (plus spécifiquement de l'excès de kurtosis) donnerait un éclairage supplémentaire au travail réalisé dans ce chapitre. Notons que l'existence des processus non-stationnaires au sens faible que nous avons mis en évidence complique prodigieusement l'analyse et les conclusions physiques d'un tel travail.

Par ailleurs, il serait tout à fait intéressant de donner plus d'épaisseur à l'analyse en composantes principales. En effet, la puissance de cette technique consiste à prendre en compte des données de nature hétérogène. Ainsi dans une application au VECSEL bifréquence où il s'agirait de comprendre les composantes du spectre de bruit de la phase du battement RF, il pourrait être bon par exemple de mesurer simultanément de multiples variables comme la

température au niveau de la surface du VECSEL, l'intensité de sortie du laser avec ses fluctuations, la température du cristal biréfringent, l'intensité de la pompe et ses fluctuations, le bruit électronique, les vibrations du banc optique, le bruit de fond optique ambiant, les fluctuations de position du miroir de sortie, etc. Ceci permettrait de trouver les axes principaux pour chaque partie du spectre et d'appréhender aux mieux les effets conjoints entre ces différents paramètres physiques.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours de cette thèse, nous nous sommes donnés les objectifs suivants : (i) étudier les propriétés de bruit d'un VECSEL bifréquence développé pour son application aux horloges CPT à base de césium, (ii) profiter du modèle établi concernant la dynamique des VECSELs bifréquences pour minimiser leur bruit et (iii) étendre la compréhension des mécanismes de bruit aux basses fréquences avec la modélisation des effets thermiques et la caractérisation des composantes non-stationnaires.

Les chapitres 3 et 4 ont permis d'identifier des stratégies de réduction du bruit du laser. D'abord théoriquement, puis technologiquement. En particulier, le transfert de bruit provenant de la pompe peut être minimisé avec des corrélations des bruits de pompe totales et en phase ainsi qu'une faible saturation croisée. Cela revient à vouloir à la fois superposer les figures de speckle des régions de pompes des deux modes lasers et séparer autant que possible les réservoirs de porteurs de charge pour l'inversion de population des deux modes. Avec le dispositif de pompage couramment utilisé, ces critères sont clairement contradictoires. L'utilisation d'une diode laser de pompe fibrée monomode permet néanmoins de s'affranchir de la figure de speckle du pompage et d'obtenir des corrélations parfaites. Pour le VECSEL à la longueur d'onde des télécoms, le niveau de bruit de phase du battement RF alors généré est drastiquement réduit et atteint entre 50 kHz et 200 kHz sa limite Schawlow-Townes. Pour le VECSEL à 852 nm, un nouveau dispositif de pompage est mis en place afin d'avoir à la fois des corrélations des bruits de pompe importantes et peu de saturation croisée. Cette architecture de pompage produit deux copies issues du même faisceau qui alimentent deux modes lasers dont les régions actives sont spatialement bien séparées. Il en résulte une très forte réduction du bruit de phase. Grâce à cette nouvelle architecture de pompe, la bande passante de bruit a été rendu compatible avec celle d'une boucle à verrouillage de la phase optique.

Caractérisé au chapitre 3, le laser à 852 nm doit être asservi pour trouver son application à une horloge CPT au césium performante. Le chapitre 5 établit le fait que des corrélations en phase et totales des deux modes lasers sont nécessaires pour une bonne réduction mutuelle

des bruits d'intensités des deux modes. Le choix d'architecture de pompage penche alors définitivement vers celle à deux faisceaux bien corrélés. Après une correction incluant un PID et un filtre à avance de phase, le spectre du bruit d'intensité du laser se situe sous les -120 dB/Hz et, plus particulièrement, sous le seuil des -140 dB/Hz dans une bande passante de 10 kHz. Une boucle à verrouillage de la phase du battement a abouti à un spectre de bruit de phase du battement RF sous -95 dBc/Hz sur une bande passante de 100 kHz. Grâce à ces asservissements, les performances prédites pour la stabilité en fréquence relative de l'horloge CPT entrent dans le cahier des charges avec un écart type d'Allan prédit inférieur à  $5 \times 10^{-13}$  à une seconde d'interrogation.

Les chapitres 6 et 7 ont présenté nos efforts dirigés vers une meilleure compréhension des mécanismes de bruit aux basses fréquences.

Le chapitre 6 a dressé un modèle analytique de la contribution des bruits thermiques au bruit de la phase du battement du VECSEL bifréquence. Ce modèle tient compte de l'anisotropie de la diffusion thermique dans les couches de l'hétérostructure. Il est en très bon accord avec les mesures pour un VECSEL bifréquence à 852 nm. En modélisant la réponse de la structure au transfert thermique de l'excitation de pompe, une carte de température de la structure a été calculée et nous avons montré qu'un important effet de lentille thermique lui était associé. Le bruit de fréquence du laser à semiconducteurs est principalement dû aux effets thermo-réfractifs provenant des fluctuations de puissance de la pompe. Le spectre de bruit causé par l'agitation thermique à température ambiante est également dérivé mais se situe environ 20 dB en dessous. Les effets thermo-élastiques sont évalués mais n'apportent que des contributions négligeables devant les effets thermo-réfractifs. Le poids non-négligeable de la diffusion longitudinale par rapport à la diffusion transverse sur la taille du mode laser induit une différence notable avec le modèle simple de fonction de transfert des bruits thermiques de type filtre passe-bas d'ordre un.

De nouveaux outils de caractérisation des bruits non-stationnaires d'un laser ont été développés au chapitre 7. Préalablement à cette étude, la matrice de densité spectrale croisée a permis, grâce à sa diagonalisation, de trouver les vrais modes propres des fluctuations d'intensité d'un VECSEL bifréquence et de les assimiler en bonne approximation aux modes symétriques et anti-symétriques. Nous avons également défini une quantité qui mesure les corrélations entre les fluctuations sur les deux modes lasers de façon indépendante de la base : le degré spectral de polarisation des fluctuations d'intensité. Il est alors apparu que ce degré spectral est directement lié à l'écart relatif entre les modes propres des fluctuations. Ensuite, nous avons compris que l'apparition de termes non-diagonaux dans la matrice spectrale électrique de covariance des fluctuations d'intensité était une signature de processus statistiques non-gaussiens ou non-stationnaires. Cela a permis de resserrer l'étude sur les processus non-stationnaires. Une analyse en composantes principales a alors permis de trier les bruits en fonction de la variance qu'ils emportent. Nous avons montré que cette méthode permet de reconstruire le signal en filtrant les bruits parasites, à la condition de pouvoir les identifier après le tri. En combinant des algorithmes de tests statistiques

Dickey-Fuller Augmenté et Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin utiles en science des données, nous accédons au caractère non-stationnaire ou non des composantes issues du tri précédent. Mieux, nous pouvons même préciser si la non-stationnarité éventuellement relevée des composantes est de nature déterministe, stochastique ou bien autre.

Finalement, ce travail trouve des prolongements et des perspectives prometteuses qui sont détaillés à la fin des chapitres 5, 6 et 7.



PARTIE

— IV —

ANNEXES



## ANNEXE A

<b>QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES</b>
--------------------------------------

Cette annexe décrit en trois temps quelques outils mathématiques utiles tout au long de ce manuscrit. Tout d'abord, les outils statistiques indispensables au traitement et à la caractérisation du bruit. Sont détaillés l'hypothèse ergodique, le théorème de Wiener-Khintchine-Kolmogorov, la notion de densité spectrale de puissance de bruit et les unités utilisées, notamment pour le bruit de phase. Ensuite, nous illustrons les liens entre plusieurs expressions mathématiques de bruit de phase, de bruit de fréquence et de variance d'Allan d'un oscillateur. Dans un dernier temps, nous définissons la transformée de Hankel, ses propriétés et ses formes usuelles ainsi que la fonction intégrale exponentielle.

## 1 Outils statistiques de description du bruit

Pour caractériser un signal présentant du bruit issu de processus stationnaires et ergodiques, on peut commencer par mettre de côté sa valeur moyenne temporelle et les petites fluctuations qui se produisent autour de cette moyenne :

$$x(t) = \langle x \rangle_T + \delta x(t) , \quad (\text{A.1})$$

où la notation  $\langle \cdot \rangle_T$  correspond à la valeur moyenne temporelle définie telle que :

$$\langle x \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt . \quad (\text{A.2})$$

Les outils privilégiés pour comprendre la dynamique d'un signal se placent de le domaine de Fourier. Pour cette raison, nous définissons la transformée de Fourier pour une fréquence

d'analyse  $f$  et sa réciproque comme :

$$\tilde{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{2i\pi ft} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{x}(f) e^{-2i\pi ft} df. \quad (\text{A.3})$$

On utilise de même la transformée de Fourier et sa réciproque pour une pulsation  $\Omega$  :

$$\tilde{x}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{i\Omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{x}(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad (\text{A.4})$$

Ces définitions sont valables pour toute fonction  $x$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire intégrable et définie sur  $\mathbb{R}$ . Les grandeurs stochastiques  $\delta x$  que nous décrivons n'admettent généralement pas de représentation de Fourier car, définies sur  $\mathbb{R}$ , elles n'ont pas le bon goût de tendre vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . Nous nous autoriserons toutefois l'écriture purement formelle de ces transformées de Fourier. L'ensemble  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions dites de carré sommable offre un cadre plus naturel à nos descriptions physiques puisqu'en revanche la variance des processus stochastiques est bien définie.

## 1.1 Fonction d'auto-corrélation, stationnarité et hypothèse ergodique

Au lieu de réaliser un grand nombre d'expériences identiques et indépendantes, l'expérimentateur averti préférera prendre plusieurs mesures successives avec le même dispositif. L'auto-corrélation entre deux mesures  $x$ , faites aux temps  $t$  et  $t + \tau$  se quantifie à l'aide de la fonction :

$$\Gamma_{\delta x}(t, \tau) \triangleq \langle \delta x(t + \tau) \cdot \delta x(t) \rangle \quad \text{avec} \quad \delta x = x - \langle x \rangle, \quad (\text{A.5})$$

où  $\langle \cdot \rangle$  représente l'espérance mathématique de la grandeur, c'est-à-dire sa moyenne statistique. La fonction d'auto-corrélation à temps égaux s'identifie à la variance :

$$\Gamma_{\delta x}(t, 0) = \langle \delta x^2(t) \rangle. \quad (\text{A.6})$$

La situation devient gênante pour l'expérimentateur si  $\Gamma$  dépend bien du temps  $t$  et donc l'expérience de la date à laquelle elle a été réalisée. On considère qu'il y a invariance par translation dans le temps et que le processus est stationnaire. Plusieurs définitions de la stationnarité sont données au chapitre 7. On y distingue principalement la stationnarité au sens fort et la stationnarité au sens faible. La relation (A.6) montre que la stationnarité impose, entre autres, une variance indépendante du temps.

L'hypothèse ergodique consiste à admettre que l'évolution du signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Dans cette hypothèse les moyennes temporelle  $\langle \cdot \rangle_T$  et statistique  $\langle \cdot \rangle$  se confondent.

## 1.2 Densité spectrale de puissance d'un signal

Considérons un signal de bruit  $x(t)$ , de moyenne nulle et observé sur une durée finie  $T$ . On définit alors la fonction fenêtrée  $x_T(t)$  associée de la façon suivante :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [-T/2; T/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

La densité spectrale de puissance (DSP)  $W_x$  du signal à la fréquence d'analyse  $f$  se définit de la façon suivante :

$$W_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |\tilde{x}_T(f)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{2i\pi f t} dt \right|^2 \right\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Nous allons voir que le théorème de Wiener–Khintchine–Kolmogorov permet de donner une vraie signification à l'expression (A.8) en le reliant à l'« énergie » du signal, c'est-à-dire sa variance, de la façon suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} W_x(f) df = \langle x^2(t) \rangle. \quad (\text{A.9})$$

En pratique, les signaux enregistrés sont réels et donc les fréquences négatives n'emportent aucune information supplémentaire. Nous définissons donc les DSPs en fréquences positives  $\mathcal{S}$ , qui permettent de quantifier le bruit replié dans une seule bande latérale du signal (SSB en anglais pour *single-side band*). La parité de la fonction  $W$  permet de faire le lien avec la DSP  $\mathcal{S}$  de bruit s'étalant sur les fréquences positives :

$$\mathcal{S}_x(f) = 2 W_x(f). \quad (\text{A.10})$$

Dans la pratique toujours, à l'analyseur de spectre électrique, c'est à travers un filtre électrique passe bande de largeur  $\Delta f$  que la variance de bruit est analysée autour d'une fréquence  $f$ . La puissance de bruit sur une bande étroite  $\Delta f$  à la fréquence d'analyse  $f$  est donnée par l'expression :

$$\langle x^2(t) \rangle_{\Delta f} = \mathcal{S}_x(f) \times \Delta f. \quad (\text{A.11})$$

## 1.3 Théorème de Wiener–Khintchine–Kolmogorov

Reprenons notre signal fenêtré  $x_T$  défini en (A.7). Le théorème de Parseval–Plancherel permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} [x_T(t + \tau)]^* x_T(t) dt = \int_{\mathbb{R}} [\tilde{x}_T(f)]^* \tilde{x}_T(f) e^{-2i\pi f \tau} df. \quad (\text{A.12})$$

Diviser gauche et droite l'équation (A.12) par  $T$  et en prendre la moyenne statistique donne :

$$\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \langle [x_T(t + \tau)]^* x_T(t) \rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{T} \langle |\tilde{x}_T(f)|^2 \rangle e^{-2i\pi f\tau} df. \quad (\text{A.13})$$

Le membre de droite de cette équation, lorsque  $T \rightarrow \infty$ , constitue la transformée de Fourier inverse de la DSP défini précédemment en (A.8) prise à la date  $\tau$ . Le membre de gauche de l'équation (A.13) est relié à la fonction d'auto-corrélation de la fonction fenêtrée. En effet, en considérant un processus stationnaire, alors le terme moyenné statistiquement ne dépend pas du temps  $t$  et sort de l'intégrale : c'est  $\Gamma_{x_T}(\tau)$ .

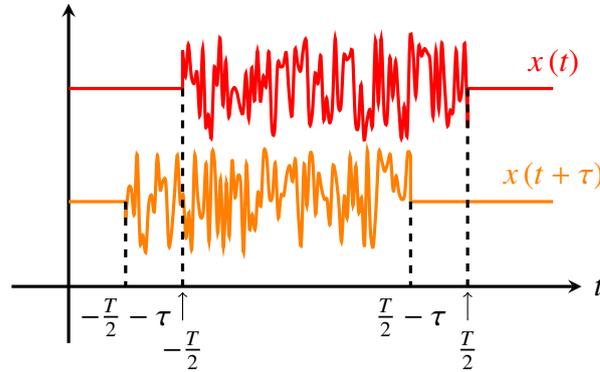


FIGURE A.1 – Schéma pour l'auto-corrélation du signal.

Comme montré à la figure A.1, les bornes nous font aboutir à l'expression :

$$\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \langle [x_T(t + \tau)]^* x_T(t) \rangle dt = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \Gamma_{x_T}(\tau). \quad (\text{A.14})$$

Nous pouvons alors, en passant à la limite  $T \rightarrow \infty$  dans les équations (A.13) et (A.14), en conclure le lien suivant entre la puissance spectrale d'un signal et son auto-corrélation :

$$\Gamma_x(\tau) = \widetilde{W}_x(\tau) \quad \leftrightarrow \quad \widetilde{\Gamma}_x(f) = W_x(f). \quad (\text{A.15})$$

Ce lien par une transformée de Fourier correspond au théorème de Wiener–Khintchine–Kolmogorov. L'intégration de la DSP sur l'ensemble du spectre redonne bien, par corollaire, la variance du signal :

$$\langle x^2(t) \rangle = \Gamma_x(0) = \int_{\mathbb{R}} W_x(f) df. \quad (\text{A.16})$$

## 1.4 Exemple avec le signal des télégraphistes

### Cas simplifié

Le signal télégraphiste considéré est un signal commutant de signe aléatoirement avec une probabilité constante  $1/(2\tau_0)$  par unité de temps. Entre  $t$  et  $t + dt$ , le signal a alors la probabilité  $dt/(2\tau_0)$  de passer de  $x(t)$  à  $-x(t)$  et la probabilité  $1 - dt/(2\tau_0)$  de rester à  $x(t)$ . Ceci se traduit par la ligne :

$$\langle x(t + \tau + d\tau) \cdot x(t) \rangle = -\frac{d\tau}{2\tau_0} \langle x(t + \tau) \cdot x(t) \rangle + \left(1 - \frac{d\tau}{2\tau_0}\right) \langle x(t + \tau) \cdot x(t) \rangle. \quad (\text{A.17})$$

À partir de là, on trouve pour l'auto-corrélation :

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = -\frac{1}{\tau_0} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\tau) = \langle x^2 \rangle \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right). \quad (\text{A.18})$$

### Généralisation

Les probabilités de changement de signe peuvent aussi être considérées inégales dans un sens et dans l'autre. Soient  $x_+$  et  $x_-$  les deux valeurs de  $x$  avec  $dt/\tau_+$  (resp.  $dt/\tau_-$ ) la probabilité que  $x(t + dt)$  soit de signe contraire à  $x(t)$  quand  $x(t) = x_+$  (resp. quand  $x(t) = x_-$ ). Alors, les probabilités  $p_+$  d'avoir  $x(t) = x_+$  et  $p_-$  d'avoir  $x(t) = x_-$  sont respectivement proportionnelles à  $\tau_+$  et  $\tau_-$  et

$$\tau_+ x_+ + \tau_- x_- = 0.$$

Soit  $\langle \cdot \rangle_+$  (resp.  $\langle \cdot \rangle_-$ ) la moyenne effectuées sur tous les cas où  $x(t + \tau) = x_+$  (resp.  $x_-$ ). On peut écrire :

$$\langle x(t + \tau + d\tau) \cdot x(t) \rangle_+ = \frac{d\tau}{\tau_+} \langle x_- \cdot x(t) \rangle_+ + \left(1 - \frac{d\tau}{\tau_+}\right) \langle x_+ \cdot x(t) \rangle_+ \quad (\text{A.19})$$

$$= \left[1 - d\tau \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}\right)\right] \langle x(t + \tau) x(t) \rangle_+. \quad (\text{A.20})$$

De la même façon, on a :

$$\langle x(t + \tau + d\tau) \cdot x(t) \rangle_- = \left[1 - d\tau \left(\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}\right)\right] \langle x(t + \tau) x(t) \rangle_-. \quad (\text{A.21})$$

On se retrouve en fait dans un cas analogue au cas simplifié précédent avec :

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_-}.$$

### Invariance d'échelle

Le calcul de la DSP dans cet exemple donne une loi de puissance :

$$S(\Omega > 0) = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau = \frac{2\tau_0}{\pi(1 + \Omega^2\tau_0^2)}. \quad (\text{A.22})$$

On obtient donc aux basses fréquences angulaires telles que  $\Omega \ll 1/\tau_0$ , un bruit blanc, c'est-à-dire constant. Aux hautes fréquences angulaires, lorsque  $\Omega \gg 1/\tau_0$ , la DSP se comporte suivant une loi d'échelle en  $\Omega^{-2}$ .

Dans les deux cas asymptotiques, le comportement en loi de puissance traduit l'absence d'échelle caractéristique. En dehors de la coupure à  $1/\tau_0$ , on parle d'invariance d'échelle.

### Application au bruit de résistance

Le signal télégraphiste peut paraître irréaliste mais ce n'est pas le cas. Dans un semiconducteur par exemple, l'existence de pièges ou de barrières pour les électrons induit un tel bruit de conductance. Quand un électron est piégé, il ne conduit pas, ce qui augmente la résistance. En régime permanent, la probabilité est la même par unité de temps, de piéger un électron ou d'en libérer un. Cette probabilité suit en général une loi d'activation d'Arrhénius :

$$\tau_0 = \tau_\infty \exp\left(\frac{W}{k_B T}\right), \quad (\text{A.23})$$

avec  $W$  l'énergie d'activation correspondante.

## 1.5 Bruits d'amplitude et bruit de phase

Soit  $S(t)$  un signal sinusoïdal de fréquence centrale  $f_0$ , d'amplitude  $A(t)$  et de phase  $\phi(t)$  :

$$S(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]. \quad (\text{A.24})$$

Nous nous intéressons aux fluctuations d'amplitude et de phase de ce signal, définies telles que :

$$\begin{cases} A(t) = A_0 + \delta A(t), \\ \phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(t). \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Les valeurs moyennes de l'amplitude et de la phase sont indicées avec un 0 tandis que leurs fluctuations sont notées  $\delta A(t)$  et  $\delta\phi(t)$ . On peut toujours redéfinir l'origine du temps de façon à avoir  $\phi_0 = 0$ . Dans le cadre de faibles fluctuations vérifiant  $\delta\phi(t) \ll 2\pi$  et  $\delta a = \delta A(t)/A_0 \ll 1$ , la linéarisation de l'expression (A.24) donne :

$$S(t) \simeq A_0 [\cos(2\pi f_0 t) + \delta a(t) \cos(2\pi f_0 t) - \delta\phi(t) \sin(2\pi f_0 t)]. \quad (\text{A.26})$$

Les bruits relatifs d'amplitude ou les bruits de phase sont caractérisés en pratique par des DSPs. La DSP pour le bruit d'amplitude relatif représente la variance du bruit dans une bande passante  $\Delta f$  :

$$\mathcal{S}_a(f) = \langle \delta a^2(t) \rangle_{\Delta f} \times \frac{1}{\Delta f}, \quad (\text{A.27})$$

et elle s'exprime en 1/Hz. Cependant, l'échelle logarithmique est plus adaptée et nous utilisons plutôt

$$[\mathcal{S}_a]_{\text{dB}} = 10 \log(\mathcal{S}_a), \quad (\text{A.28})$$

en exprimant la DSP en dB/Hz. De même pour le bruit de phase dont la DSP représente la variance dans une bande passante de 1 Hz :

$$\mathcal{S}_\phi(f) = \langle \delta \phi^2(t) \rangle_{\Delta f} \times \frac{1}{\Delta f}, \quad (\text{A.29})$$

exprimée ici en  $\text{rad}^2/\text{Hz}$ . Encore une fois, l'échelle logarithmique étant plus adaptée nous utilisons en réalité :

$$[\mathcal{S}_\phi]_{\text{dB}} = 10 \log(\mathcal{S}_\phi), \quad (\text{A.30})$$

exprimée alors en  $\text{dBrad}^2/\text{Hz}$ . Pour qualifier le bruit de phase d'un oscillateur, une terminologie standard a été introduite dans la référence [147] et la densité spectrale de bruit de phase notée  $\mathcal{L}(f)$  est couramment utilisée. Elle s'exprime en  $\text{dBc}/\text{Hz}$  et c'est l'unité que nous adoptons.  $\mathcal{L}(f)$  représente le rapport entre la puissance due à la modulation à une fréquence  $f$  de la phase par le bruit contenue dans une bande latérale de 1 Hz par rapport à la puissance totale du signal (la porteuse et ses bandes latérales).

Introduisons dans le signal  $S(t)$  de l'équation (A.24) la modulation de phase suivante :

$$\delta \phi(t) = m \sin(2\pi f_m t), \quad (\text{A.31})$$

avec  $m$  la profondeur de modulation et  $f_m$  sa fréquence. Il vient alors les ré-écritures suivantes :

$$\begin{aligned} S(t) &= A_0 \cos[2\pi f_0 t + m \sin(2\pi f_m t)] \\ &= A_0 \operatorname{Re} \left[ e^{i2\pi f_0 t} \exp(i m \sin(2\pi f_m t)) \right] \\ &= A_0 \operatorname{Re} \left[ e^{i2\pi f_0 t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(m) \cdot \exp(i 2\pi l f_m t) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

où les fonctions  $J_l$  sont des fonctions de Bessel du premier type d'ordre  $l$ . Alors, en supposant que la profondeur de modulation est faible  $m \ll 1$ , il est possible d'approximer les fonctions de Bessel successives par les simples expressions suivantes :

$$J_l(m) \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ \pm m/2 & \text{si } l = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |l| > 1 \end{cases}. \quad (\text{A.33})$$

En prenant en compte la symétrie des fonctions de Bessel  $J_{-1}(m) = -J_1(m)$ , nous aboutissons à :

$$S(t) \simeq A_0 \operatorname{Re} \left[ e^{i2\pi f_0 t} \left\{ 1 + \frac{m}{2} \left( e^{2i\pi f_m t} - e^{-2i\pi f_m t} \right) \right\} \right]. \quad (\text{A.34})$$

Le rapport entre le bruit dans une bande latérale et la puissance de la porteuse permet d'écrire :

$$\mathcal{L}(f_m) \simeq \frac{m^2}{4}. \quad (\text{A.35})$$

D'autre part, en insérant l'expression de la modulation (A.31) dans la définition (A.29) on a simplement :

$$\mathcal{S}_\phi(f) \simeq \frac{m^2}{2}. \quad (\text{A.36})$$

Il vient alors le lien suivant :

$$\mathcal{L}(f_m) \triangleq \frac{\mathcal{S}_\phi(f)}{2}. \quad (\text{A.37})$$

Bien que cette démonstration ne soit valide que pour des fluctuations de faible amplitude, la relation (A.37) a été généralisée et constitue une définition. Il en résulte qu'une DSP de bruit de phase exprimée en dBc/Hz correspond à une DSP de bruit de phase en fréquences positives en dBrad<sup>2</sup>/Hz à laquelle on soustrait 3 dB. Cela demeure valide même pour des fluctuations de phase plus importantes ou encore quand il existe des corrélations entre différentes bandes latérales de bruit (par exemple en présence de bruits non-stationnaires).

## 2 Du bruit de phase à la variance d'Allan d'un oscillateur

Bruit de phase, bruit de fréquence et variance d'Allan d'un oscillateur sont reliés. Ces liens importants dans le cadre métrologique de caractérisation d'une horloge ont été vus au chapitre 5. Le schéma de la Fig. A.2 illustre les différentes lois d'échelle rencontrées pour le bruit et les décrit mathématiquement.

## 3 Les transformées de Hankel

Le chapitre 6 exploite une transformation qui permet de rendre algébrique l'opérateur Laplacien transverse  $\Delta_\perp$ . Cette section est dédiée aux définitions et relations utiles à ce travail.

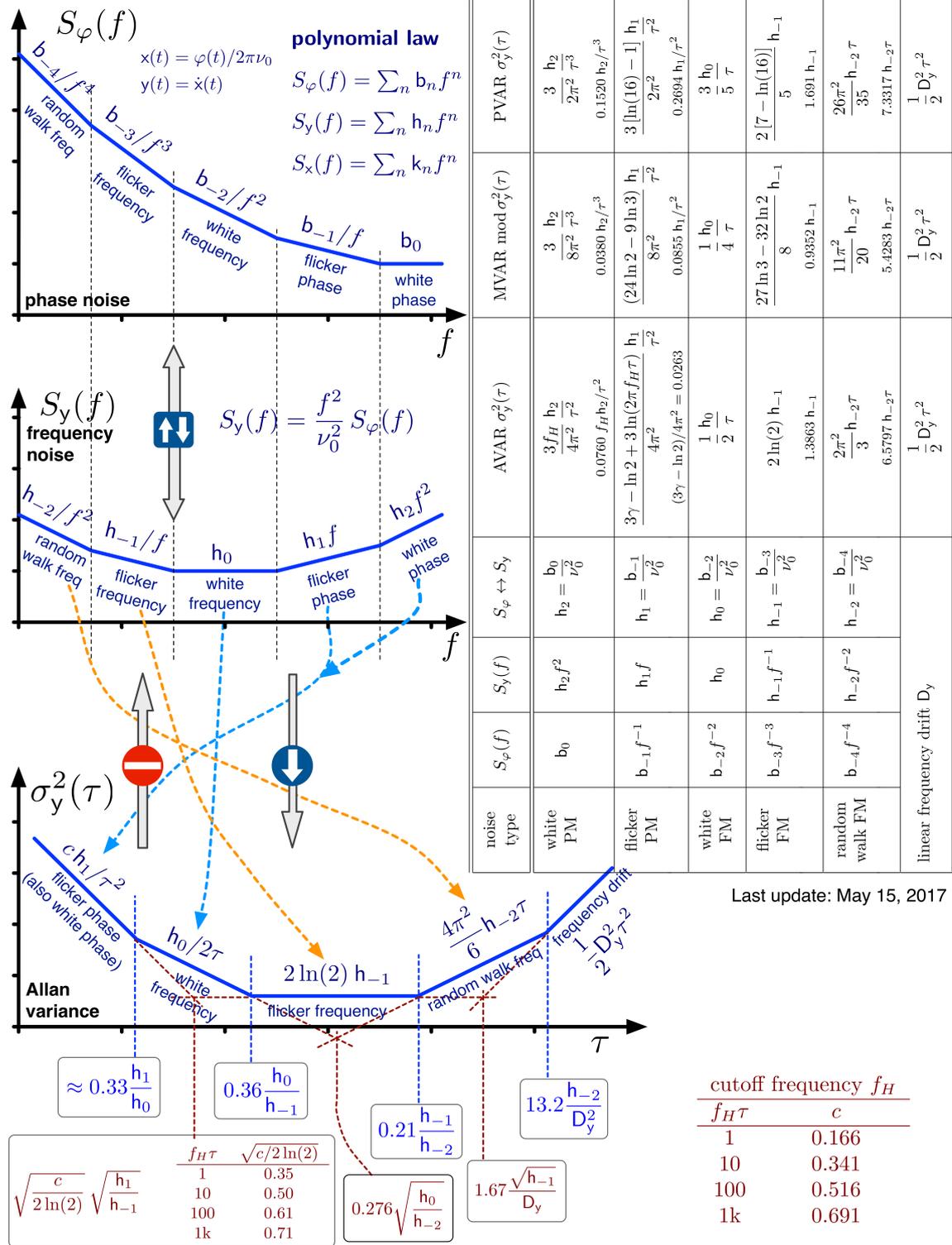


FIGURE A.2 – Bruit de phase et variance d’Allan d’un oscillateur. Schéma réalisé par E. Rubiola et publié sur son site internet <http://rubiola.org>.

### 3.1 Définitions

#### La transformée et son inverse

La transformée de Hankel d'ordre  $\nu$  s'identifie à une transformée de Fourier qui serait utilisée à deux dimensions avec une symétrie cylindrique. Elle est définie pour toute fonction continue par morceaux, dérivable et intégrable sur l'intervalle  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ . Nous considérons typiquement des fonctions de carrés sommables sur cet intervalle. En prenant par exemple  $g$  et  $h$  des fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , on définit alors sur  $\mathbb{R}^+$  la transformée de Hankel d'ordre  $\nu$  de  $g$  comme :

$$\text{HT}_\nu [g](k_\perp) \triangleq \int_{\mathbb{R}^+} g(r) J_\nu(k_\perp r) r dr \quad (\text{A.38})$$

et la transformée de Hankel inverse d'ordre  $\nu$  de  $h$  comme :

$$\text{HT}_\nu^{-1} [h](r) \triangleq \int_{\mathbb{R}^+} h(k_\perp) J_\nu(k_\perp r) k_\perp dk_\perp, \quad (\text{A.39})$$

avec  $J_\nu$  la fonction de Bessel du premier type d'ordre  $\nu$  pour  $\nu \geq -1/2$ .

#### Orthogonalité des fonctions de Bessel

Les définitions réciproques précédentes sont rendues possibles grâce à la base orthogonale formée par les fonctions de Bessel pour le produit scalaire suivant :

$$\int_{\mathbb{R}^+} J_\nu(k_\perp r) J_\nu(k'_\perp r) r dr = \frac{\delta(k_\perp - k'_\perp)}{k_\perp}, \quad \text{avec } k_\perp, k'_\perp > 0. \quad (\text{A.40})$$

### 3.2 Transformations utiles dans ce travail

$f(r)$	$\text{HT}_0 [f](k_\perp)$
$1/r$	$1/k_\perp$
$\Delta_\perp g(r)$	$-k_\perp^2 \cdot \text{HT}_0 [g](k_\perp)$
$e^{-a^2 r^2}$	$e^{-k_\perp^2 / 4 a^2} / 2 a^2$
$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < r < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a}{k_\perp} J_1(a k_\perp)$

TABLEAU A.1 – Transformées de Hankel d'ordre 0 utilisées au chapitre 5.

Les transformations utilisées au chapitre 6 sont rassemblées dans le tableau A.1.

### 3.3 Théorème de Parseval et Plancherel dans le domaine de Hankel

Nous avons évoqué d'une part le lien des transformées de Hankel avec les transformées de Fourier à deux dimensions en géométrie cylindrique et d'autre part l'orthogonalité des fonctions de Bessel. Le très utile théorème de Plancherel se généralise alors aux transformées de Hankel et, en supposant que ces dernières existent bien pour des fonctions  $f$  et  $g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , il s'énonce ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r \, dr \, f(r) \cdot g(r) = \int_{\mathbb{R}^+} k_{\perp} \, dk_{\perp} \, \text{HT}_v[f](k_{\perp}) \cdot \text{HT}_v[g](k_{\perp}) . \quad (\text{A.41})$$

Son corollaire, le théorème de Parseval, permet d'écrire également :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r \, dr \, |f(r)|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} k_{\perp} \, dk_{\perp} \, |\text{HT}_v[f](k_{\perp})|^2 . \quad (\text{A.42})$$

Ceci nous permet de jongler entre intégration dans le domaine de Hankel et intégration pour la variable spatiale radiale  $r$ .

### 3.4 La fonction exponentielle intégrale

On définit la fonction  $E_1$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  avec  $\text{Re}(z) > 0$  par l'intégrale suivante :

$$E_1(z) \triangleq \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt . \quad (\text{A.43})$$

Cette fonction n'est pas définie sur  $\mathbb{R}^-$  mais elle y admet toutefois un prolongement analytique. Nous appelons cette fonction, la fonction exponentielle intégrale par abus de langage. Elle est en fait reliée à la vraie fonction exponentielle intégrale des manuels de maths notée usuellement  $Ei$  par la relation  $E_1(x) = -Ei(-x)$ . La représentation de la fonction  $E_1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  est affichée à la Fig. A.3(a). On y observe les limites suivantes :

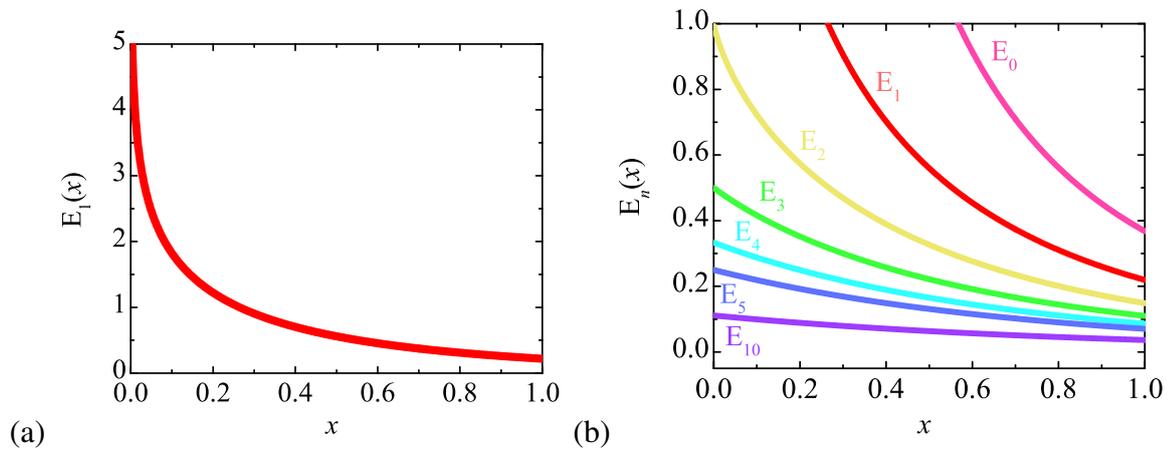
$$\lim_{x \rightarrow 0} E_1(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} E_1(x) = 0 . \quad (\text{A.44})$$

La fonction exponentielle intégrale  $E_1$  fait partie des fonctions plus générales  $E_n$  définies par l'intégrale :

$$E_n(z) \triangleq \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} \, dt \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \text{Re}(z) > 0 . \quad (\text{A.45})$$

Les fonctions  $E_n$  sont reliées les unes aux autres par la relation de récurrence :

$$\frac{dE_n(z)}{dz} = -E_{n-1}(z) \quad \text{avec} \quad n \geq 1 , \quad (\text{A.46})$$

FIGURE A.3 – Représentation des fonctions  $E_1$  (a) et  $E_{n \geq 0}$  (b).

et on note que pour  $n = 0$ , l'intégration mène à l'expression :

$$E_0(z) = e^{-z}/z. \quad (\text{A.47})$$

La figure A.3(b) montre l'allure de ces fonctions sur  $\mathbb{R}^+$  pour  $n = 0$  à 5 ainsi que pour  $n = 10$ . On note le comportement suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} E_{n>1}(x) = \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} E_n(x) = 0. \quad (\text{A.48})$$

## ANNEXE B

### TRANSMISSION DES CORRÉLATIONS DE BRUIT DU LASER PAR LES ATOMES DE CÉSIIUM

Dans le cadre de l'élaboration d'une horloge CPT compacte et performante, nous avons affirmé au chapitre 5 que le bruit d'intensité relatif du laser en incidence de la cellule de césium était entièrement transmis après sa traversée (à 7% près d'après les résultats du SyRTE [67]). Cette transmission des fluctuations relatives a conduit à définir la variance du signal d'erreur d'horloge comme l'intégrale (5.25) sur le RIN de la somme cohérente des deux modes. Nous avons en fait supposé que le RIN en jeu était celui de la somme cohérente des modes mais ce choix n'a pas été justifié. En réalité, la différence essentielle qui puisse advenir entre le calcul utilisant la moyenne de la somme cohérente  $|\widetilde{\delta I}_x + \widetilde{\delta I}_y|^2$  et celui utilisant la moyenne de la simple somme  $|\widetilde{\delta I}_x|^2 + |\widetilde{\delta I}_y|^2$  provient des corrélations entre les modes lasers. Se pose donc la question de la transmission des corrélations entre les fluctuations sur les deux polarisations orthogonales du VECSEL bifréquence à travers la cellule.

Dans cette annexe nous allons d'abord définir le système en double  $\Lambda$  utilisé dans le césium et les détails physiques de la cellule employée par nos partenaires. Les équations de Bloch optiques permettent alors de décrire l'évolution de la matrice densité du système en  $\Lambda$  équivalent. Ensuite, la propagation du champ de lumière dans la cellule est examinée en utilisant un traitement perturbatif. Enfin, la transmission des fluctuations et de leurs corrélations est calculée.

# 1 Du piégeage cohérent de population dans le césium aux équations de Bloch optiques

Le diagramme d'énergie de la Fig. B.1 montre la transition D<sub>2</sub> du césium qui nous intéresse pour l'élaboration de l'horloge CPT utilisant un VECSEL bifréquence à 852 nm.

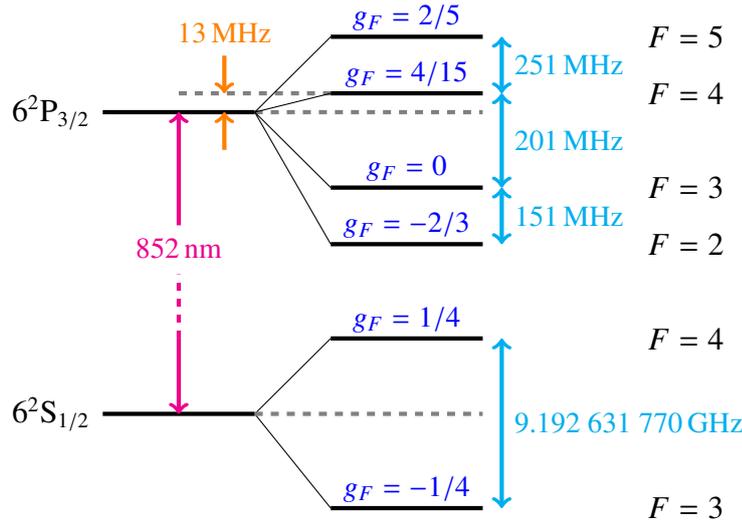


FIGURE B.1 – Diagramme énergétique pour la transition D<sub>2</sub> dans le césium d'après [148]. Pour être visibles, les échelles de séparations ne sont pas respectées. L'écart des niveaux hyperfins au fondamental est une valeur exacte.  $g_F$  : facteur de Landé associé au moment cinétique total de l'atome  $F$ .

## 1.1 Double lambda dans la D<sub>2</sub> et système à trois niveaux équivalent

La référence [65] a montré la possibilité d'obtenir des franges de Ramsey bien contrastées grâce au système en double  $\Lambda$  de la Fig. B.2 (à gauche). Ce schéma d'excitation exploite, comme on peut le voir sur la figure, deux ondes polarisées  $\sigma^+$  et deux ondes polarisées  $\sigma^-$  entre les sous-niveaux Zeeman de l'état excité possédant des nombres quantiques magnétiques  $m_F = \pm 1$ . Grâce aux règles de sélection, cette configuration symétrique permet d'éviter les fuites d'atomes dans les sous-niveaux Zeeman extrêmes  $|F = 4, m_F\rangle$  qui échapperaient alors à l'état noir et diminueraient ainsi le contraste. Les superpositions lumineuses  $(\sigma^+ + \sigma^-) / \sqrt{2}$  et  $(\sigma^+ - \sigma^-) / \sqrt{2}$  sont en fait équivalentes à deux ondes polarisées linéairement de façon orthogonale. Ce sont les modes polarisés dans les directions  $x$  et  $y$  du VECSEL bifréquence. La partie droite de la Fig. B.2 illustre cette équivalence et fait apparaître les pulsations de Rabi  $\Omega_x = \Omega_{31}$  et  $\Omega_y = \Omega_{32}$ . Ces pulsations de Rabi  $\Omega_x = d \cdot \mathcal{E}_x / \hbar$  et  $\Omega_y = d \cdot \mathcal{E}_y / \hbar$  sont associées au couplage dipolaire des transitions par les champs lumineux d'amplitudes complexes  $\mathcal{E}_x$  et  $\mathcal{E}_y$ , aux fréquences angulaires  $\omega_x$  et  $\omega_y$ . Le moment dipolaire des transitions concernées vaut  $d = 3,797 \times 10^{-29}$  C.m d'après la référence [148]. La

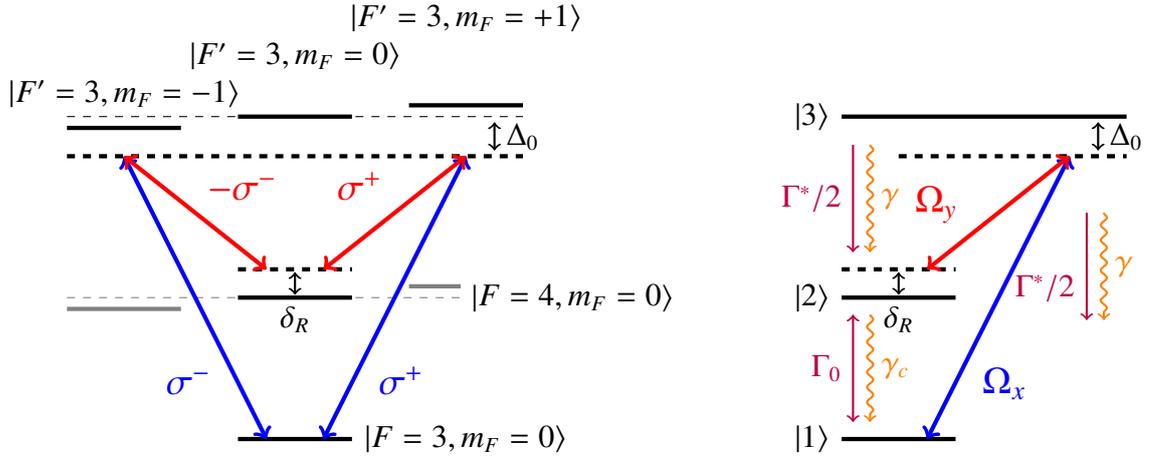


FIGURE B.2 – Diagramme d'énergie du césium 133 à partir de son état fondamental  $|F = 3, m_F = 0\rangle$ . À gauche : système en double lambda pour deux faisceaux polarisés circulairement à gauche ( $\sigma^-$ ) et deux faisceaux polarisés circulairement à droite ( $\sigma^+$ ). À droite : système en lambda équivalent pour deux polarisations linéaires orthogonales de pulsations de Rabi  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$ .  $\Delta_0$  : désaccord à un photon,  $\delta_R$  : désaccord Raman,  $\gamma_c$  : taux de relaxation de la cohérence hyperfine,  $\Gamma_0$  : inverse de la durée de vie de la différence de population entre les niveaux  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ ,  $\Gamma^*$  : taux de relaxation du niveau excité,  $\gamma$  : taux de relaxation de la cohérence du niveau excité.

figure définit aussi les paramètres physiques  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\delta_R$  et  $\Delta_0$ . Nous pouvons estimer qu'après relaxation du niveau excité, la moitié des atomes se retrouve dans le niveau fondamental  $|1\rangle$  et l'autre dans le niveau  $|2\rangle$  de longue durée de vie (de l'ordre de la ms). Les taux de relaxation en direction de ces deux niveaux sont équivalents et valent donc  $\Gamma^*/2$ .

## 1.2 La cellule de césium

La cellule de césium utilisée et élaborée au SyRTE est en Pyrex. Elle est cylindrique et possède un diamètre de 2 cm pour une longueur de 1 à 5 cm. Un ou plusieurs gaz tampons permettent de confiner les atomes de césium et accroître leur temps de diffusion vers les parois. Le mélange de gaz tampons est judicieusement choisi de façon à rendre aussi faible que possible la dépendance en température du décalage en fréquence de la transition RF [76]. Cette cellule est placée à l'intérieur d'un solénoïde qui crée un champ magnétique directeur en son sein. De plus, une régulation en température et un blindage magnétique assurent la stabilité de l'environnement des atomes de césium. Dans les conditions de travail, les taux de relaxations et les pulsations de Rabi vérifient la hiérarchie suivante :

$$\gamma_c \ll \|\Omega_{x,y}\| \ll \Gamma^* . \quad (\text{B.1})$$

En effet, nous avons  $\gamma_c/2\pi = 30$  Hz pour les cohérences hyperfines et  $\Gamma^*/2\pi = 3$  GHz pour la relaxation du niveau excité. La valeur de la fréquence de Rabi se calcule de la façon suivante :

$$\frac{\Omega_{x,y}}{2\pi} = \frac{d}{\hbar} \sqrt{\frac{I_{x,y}}{2\varepsilon_0 c_0}}, \quad (\text{B.2})$$

avec  $\hbar$  la constante de Planck et  $I_{x,y}$  l'intensité lumineuse des modes lasers  $x$  ou  $y$ . On trouve bien pour un éclairage typique de  $0.5 \text{ mW.cm}^{-2}$  une fréquence de Rabi de l'ordre de 2 MHz, c'est-à-dire grande devant  $\gamma_c$  et faible devant  $\Gamma^*$ .

La vapeur de césium contenue dans la cellule est en équilibre avec sa phase liquide. Il s'agit donc d'une vapeur saturée utilisée à la température ambiante. La référence [148] donne la valeur de la pression de vapeur saturante du césium :  $P_{\text{sat}}(300 \text{ K}) = 2 \times 10^{-6}$  torr. On peut supposer que la vapeur saturante de césium se comporte approximativement comme un gaz parfait et estimer sa densité  $n_{\text{Cs}}$  à :

$$n_{\text{Cs}} = \frac{P_{\text{sat}}}{k_{\text{B}} T} \simeq 6 \times 10^{16} \text{ at/m}^3. \quad (\text{B.3})$$

### 1.3 Équation de Liouville Von-Neumann

Les équations vont être écrites dans le référentiel de l'onde tournante et dans l'approximation séculaire, c'est-à-dire que nous allons négliger les termes oscillant rapidement. Nous considérons les éléments de la matrice densité  $\rho_{ij}$  avec  $(i, j) = 1, 2, 3$  pour les trois états décrits précédemment. En notant  $\overline{\rho_{ij}}$  ces quantités dans le référentiel tournant à la fréquence du champ lumineux à deux composantes, il vient :

$$\rho_{ii} = \overline{\rho_{ii}}, \quad (\text{B.4})$$

$$\rho_{21} = \overline{\rho_{21}} \cdot e^{-i((\omega_x - \omega_y)t + \phi_x - \phi_y)}, \quad (\text{B.5})$$

$$\rho_{31} = \overline{\rho_{31}} \cdot e^{-i(\omega_x t + \phi_x)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\rho_{32} = \overline{\rho_{32}} \cdot e^{-i(\omega_y t + \phi_y)}. \quad (\text{B.7})$$

Rappelons que  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les phases des champs lumineux polarisés linéairement dans des directions orthogonales. L'expression du Hamiltonien atomique vu à la section 2.3 du chapitre 2 donne dans le référentiel de l'onde tournante :

$$\widehat{H}_0 = \hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_R & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

en définissant l'échelle d'énergie par rapport au niveau  $|1\rangle$ . Quant au Hamiltonien de l'interaction dipolaire électrique, il devient :

$$\widehat{H}_I = -\hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_x^* \\ 0 & 0 & \Omega_y^* \\ \Omega_x & \Omega_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Les contributions dissipatives pour les atomes de césium sont résumées dans l'opérateur suivant :

$$\mathcal{D}(\bar{\rho}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^*}{2} \rho_{33} - \Gamma_0 (\rho_{11} - \rho_{22}) & -\gamma_c \bar{\rho}_{12} & -\gamma \bar{\rho}_{13} \\ -\gamma_c \bar{\rho}_{21} & \frac{\Gamma^*}{2} \rho_{33} - \Gamma_0 (\rho_{22} - \rho_{11}) & -\gamma \bar{\rho}_{23} \\ -\gamma \bar{\rho}_{31} & -\gamma \bar{\rho}_{32} & -\Gamma^* \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Tous les termes précédents permettent de décrire la dynamique des atomes une fois rassemblés dans l'équation de Liouville – Von-Neumann, exprimée dans le référentiel de l'onde tournante :

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\widehat{H}_0 + \widehat{H}_I, \bar{\rho}] + \mathcal{D}(\bar{\rho}). \quad (\text{B.11})$$

## 1.4 Équations de Bloch optiques

Les équations de Bloch optiques se déduisent de l'expression (B.11) et vérifient :

$$\dot{\rho}_{11} = 2\Omega_x \cdot \text{Im}(\bar{\rho}_{31}) + \frac{\Gamma^*}{2} \rho_{33} - \Gamma_0 (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{\rho}_{22} = 2\Omega_y \cdot \text{Im}(\bar{\rho}_{32}) + \frac{\Gamma^*}{2} \rho_{33} - \Gamma_0 (\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{\rho}_{33} = 2\Omega_x \cdot \text{Im}(\bar{\rho}_{13}) + 2\Omega_y \cdot \text{Im}(\bar{\rho}_{23}) - \Gamma^* \rho_{33} \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{\bar{\rho}}_{31} = i\Omega_x (\rho_{33} - \rho_{11}) - i\Omega_y \bar{\rho}_{21} - (\gamma + i\Delta_0) \bar{\rho}_{31} \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{\bar{\rho}}_{32} = i\Omega_y (\rho_{33} - \rho_{22}) - i\Omega_x \bar{\rho}_{12} - (\gamma + i(\Delta_0 + \delta_R)) \bar{\rho}_{32} \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{\bar{\rho}}_{21} = -i\Omega_y \bar{\rho}_{31} + i\Omega_x \bar{\rho}_{23} - (\gamma_c + i\delta_R) \bar{\rho}_{21}. \quad (\text{B.17})$$

Une résolution purement numérique de ces équations différentielles couplées non-linéairement permettrait de simuler la dynamique de population des états du césium induite par le champ lumineux dans la cellule. Cependant, nous allons voir qu'une approche perturbative de l'équation de Liouville – Von-Neumann (B.11) offre une dérivation analytique particulièrement intéressante.

## 2 Transmission du bruit et des corrélations du VECSEL bifréquence

La propagation du champ lumineux à travers la cellule de césium dépend de l'état du milieu à un instant donné, qui change au gré de leur interaction mutuelle. Nous allons voir comment en tenir compte.

### 2.1 Propagation dans la cellule de césium

Un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  dans un milieu de polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  se propage selon l'équation de Maxwell :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}, \quad (\text{B.18})$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Pour un champ se propageant dans la direction  $+z$ , il est d'usage d'introduire les amplitudes complexes du champ électrique  $\mathcal{E}$  et de la polarisation  $\mathcal{P}$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=x,y} \mathcal{E}_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_i(t-z/c_0)} \mathbf{u}_i + \text{c.c.}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=x,y} \mathcal{P}_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_i(t-z/c_0)} \mathbf{u}_i + \text{c.c.}, \quad (\text{B.20})$$

avec  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  des vecteurs unitaires. Les échelles de temps variant à la pulsation optique  $\omega_i$ , proche de la pulsation centrale  $\omega_l$ , sont alors dissociées des échelles bien plus lentes de variation de l'amplitude complexe. Les échelles de longueur de l'ordre de la longueur d'onde sont bien plus courtes que les distances typiques de variations de l'amplitude complexe, ce qui se traduit par l'approximation suivante :

$$\partial_z \ll \omega_l/c_0 \quad \text{et} \quad \partial_t \ll \omega_l. \quad (\text{B.21})$$

En considérant ces hypothèses d'enveloppe lentement variable, on peut alors ré-exprimer l'équation de Maxwell précédente de la façon suivante :

$$(\partial_t + c_0 \partial_z) \mathcal{E}_{x,y} = i \frac{\omega_i}{2 \varepsilon_0} \mathcal{P}_{x,y}, \quad (\text{B.22})$$

où le  $\varepsilon_0$  se réfère à la permittivité diélectrique du vide. Notons que l'approximation paraxiale nous permet de supposer que les amplitudes complexes ne dépendent que de la variable spatiale  $z$  (et du temps  $t$  bien entendu).

On se place désormais dans le domaine de Fourier, avec la notation  $\tilde{\cdot}$  pour la transformée de Fourier et  $\omega$  la variable conjuguée au temps  $t$ . La polarisation du milieu homogène et isotrope peut s'exprimer comme le produit entre la susceptibilité  $\chi$  du milieu et le champ

électrique dans le domaine de Fourier, de sorte que :

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{x,y}(z, \omega) = \varepsilon_0 \cdot \chi(z, \omega) \cdot \widetilde{\mathcal{E}}_{x,y}(z, \omega) . \quad (\text{B.23})$$

Or la susceptibilité diélectrique d'un milieu est directement reliée à la cohérence atomique des dipôles qui le constituent. On peut finalement écrire, sur chaque composante  $i = (x, y)$  et dans le référentiel de l'onde tournante définie plus haut, l'équation de propagation des pulsations de Rabi comme :

$$(-i\omega + c_0 \partial_z) \widetilde{\Omega}_i(\omega, z) = i c_0 \cdot \eta_i \cdot \widetilde{\rho}_{3i}(\omega, z) \quad \text{avec} \quad \eta_i = \frac{\omega_i d^2 n_{\text{Cs}}}{2 \varepsilon_0 c_0 \hbar} . \quad (\text{B.24})$$

Nous avons sciemment omis la barre dans l'écriture de la transformée de Fourier  $\widetilde{\rho}_{3i}$ <sup>1</sup> prise pourtant dans le référentiel tournant afin d'alléger les notations. Nous ferons de même pour le reste de cette annexe. Également, nous considérons la condition de résonance à un photon  $\Delta_0 = 0$  toujours vérifiée dans la suite. Maintenant que nous avons l'équation (B.24) de propagation des champs, revenons à l'interaction lumière-matière.

## 2.2 Approche perturbative

Considérons les pulsations de Rabi constituées de leur valeur moyenne sur lesquelles de petites fluctuations sont induites par le bruit d'intensité du VECSEL bifréquence en incidence sur la cellule de césium :

$$\Omega_i(t) = \Omega_i^{(0)} + \delta\Omega_i(t) \quad \text{avec} \quad \|\delta\Omega_i\| \ll \|\Omega_i^{(0)}\| . \quad (\text{B.25})$$

Un traitement perturbatif permet alors d'exprimer l'équation de Liouville – Von-Neumann (B.11) à l'ordre le plus bas pour l'interaction entre les atomes et le champ moyen à une profondeur  $z$  fixée dans la cellule :

$$0 = \frac{1}{i\hbar} [\widehat{H}_0 + \widehat{H}_1, \rho^{(0)}] + \mathcal{D}(\rho^{(0)}) \quad \text{avec} \quad \sum_{ij} \rho_{ij}^{(0)} = 1 . \quad (\text{B.26})$$

avec le Hamiltonien d'interaction dipolaire  $\widehat{H}_1$  correspondant au Hamiltonien (B.9) dans lequel on utilise seulement les valeurs moyennes  $\Omega_{x,y}^{(0)}$  des pulsations de Rabi. Une résolution analytique de cette équation, nous donne les éléments  $\rho_{ij}^{(0)}$  de la matrice densité à l'ordre 0.

1. Notons qu'un autre raccourci est pris pour désigner  $\rho_{31}$  et  $\rho_{32}$  avec respectivement  $i = x$  ou  $y$ .

### Saturation à résonance

On se place dans une situation de résonance à deux photons, c'est-à-dire avec un désaccord Raman nul ( $\delta_R = 0$ ). On suppose en outre que les champs de pompes sont équilibrés dans les deux polarisations si bien que  $\Omega_x^{(0)} = \Omega_y^{(0)} = \Omega^{(0)}$ . Dans ces conditions, les populations des niveaux fondamentaux sont sensiblement les mêmes  $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} \simeq 1/2$  alors que le niveau excité est dépeuplé  $\rho_{33}^{(0)} \simeq 0$ . Alors, en définissant le paramètre de saturation :

$$s_i(z) = \frac{2|\Omega_i^{(0)}|^2}{\gamma_c \gamma} \cdot \frac{(\Gamma^* + 3\gamma_c)}{\Gamma^*} \underset{\gamma_c \ll \Gamma^*}{\simeq} \frac{2|\Omega_i^{(0)}|^2}{\gamma_c \gamma}, \quad (\text{B.27})$$

pour la polarisation  $i = (x, y)$ , l'équation de Maxwell (B.24) pour la propagation se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{ds_i}{dz} = -\frac{\eta_i}{\gamma} \cdot \frac{s_i}{1 + s_i}. \quad (\text{B.28})$$

Pour obtenir cette équation différentielle,  $\rho_{13}^{(0)}$  a été remplacée dans l'équation de Maxwell (B.24) grâce à la résolution analytique que l'on a évoquée au paragraphe précédent. Cette équation (B.28) s'écrit aussi après intégration jusqu'à la sortie en  $z = L$  de la cellule :

$$\ln\left(\frac{s_i(L)}{s_i(0)}\right) + (s_i(L) - s_i(0)) = -\eta_i L / \gamma. \quad (\text{B.29})$$

Le premier terme du membre de gauche correspond à l'absorption linéaire du milieu, tandis que le second traduit une non-linéarité causée par la saturation.

La fonction de Lambert  $W$  permet d'exprimer les solutions de l'équation différentielle (B.28) afin de connaître, à une profondeur  $z$  donnée dans la cellule, la valeur du paramètre de saturation (et donc de l'amplitude de l'enveloppe complexe du champ de lumière) :

$$s_i(z) = W\left[s_i(0) \cdot \exp\left(-\frac{\eta_i z}{\gamma} + s_i(0)\right)\right]. \quad (\text{B.30})$$

L'allure du paramètre de saturation en fonction de la profondeur de cellule traversée est donnée à la Fig. B.3 pour différentes valeurs initiales  $s_i(0)$  correspondant à plusieurs valeurs de  $\Omega_i^{(0)}$ . Les faibles flux lumineux incidents s'associent à une absorption linéaire, que l'on remarque davantage à l'aide de l'échelle de la Fig. B.3(b). D'après l'équation (B.29), la pente avec cette échelle lin-log est dans ce cas là  $-\eta_i/\gamma \simeq -3.9 \text{ cm}^{-1}$ , quelque soit le flux lumineux. Un tel régime d'absorption linéaire est également atteint une fois une certaine épaisseur du milieu parcourue à des valeurs du flux lumineux incidents plus élevées, comme nous pouvons le constater avec ce comportement asymptotique (à  $z$  grand) de pente en  $-3.9 \text{ cm}^{-1}$  sur toutes les courbes de la Fig. B.3(b). Avant d'atteindre ce régime d'absorption linéaire, c'est la saturation qui l'emporte et cette saturation est d'autant plus importante

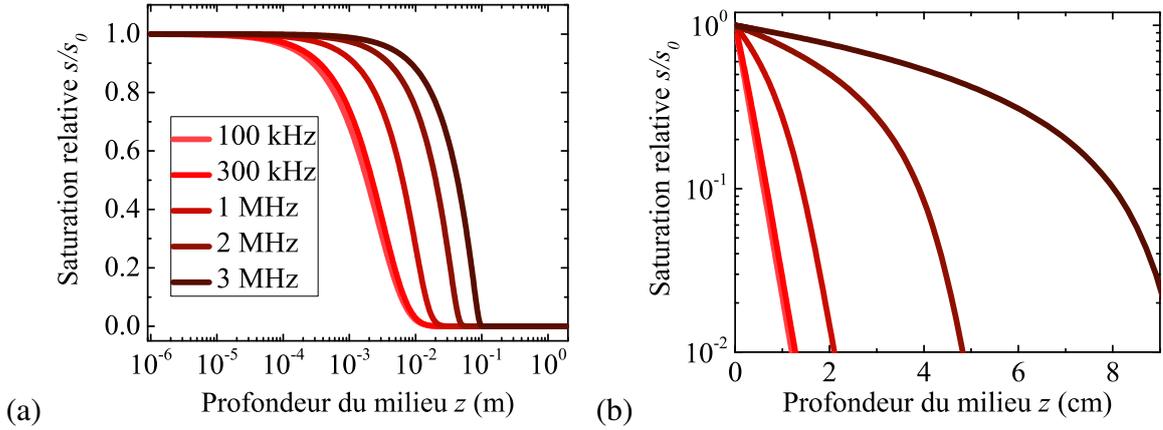


FIGURE B.3 – Paramètre de saturation normalisé par rapport à sa valeur initiale en fonction de l'épaisseur de cellule traversée pour différentes valeurs de la fréquence de Rabi  $\Omega^{(0)}/2\pi$ . (a) est en échelle log-lin et (b) en lin-log.

que le flux incident est élevé. C'est pourquoi la pente en échelle lin-log dépend aux faibles profondeurs de  $\Omega^{(0)}$ .

Nous avons donc compris comment se passait la transmission de l'intensité lumineuse moyenne à résonance. Il nous faut compléter la description par la transmission hors résonance.

### Transmission de l'intensité moyenne

Le paramètre de saturation défini dans l'équation (B.27) devient très petit ( $s_i(0) \ll 1$ ) à la condition que  $\Omega_i^{(0)} \ll \sqrt{\gamma_c \gamma/2}$ , donc aux fréquences de Rabi inférieures à 370 kHz. Dans cette condition ou encore lorsque l'on se situe suffisamment loin des résonances atomiques  $\delta_R \neq 0$ , on peut considérer le milieu comme peu épais et négliger l'influence réciproque des atomes et du champ en ne considérant que l'action du champ sur les atomes. La réponse des atomes à l'excitation est alors linéaire et on peut supposer que la susceptibilité diélectrique  $\chi_i^{(0)}$  ne dépend pas de la position  $z$ , si bien que :

$$\frac{d\Omega_i^{(0)}}{dz} = i\eta_i \cdot \rho_{3i}^{(0)}(z) = i\frac{\pi}{\lambda_i} \chi_i^{(0)} \cdot \Omega_i^{(0)}(z). \quad (\text{B.31})$$

Avec une telle absorption linéaire, il vient immédiatement la loi de Beer-Lambert suivante pour la propagation de l'intensité lumineuse moyenne :

$$I_i^{(0)}(z) = I_i^{(0)}(0) \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda_i} \text{Im}(\chi_i^{(0)}) \cdot z\right). \quad (\text{B.32})$$

La figure B.4(a) permet de visualiser la finesse d'une résonance sub-naturelle induite par CPT. On voit en effet apparaître un pic de transmission lorsque la condition d'accord à

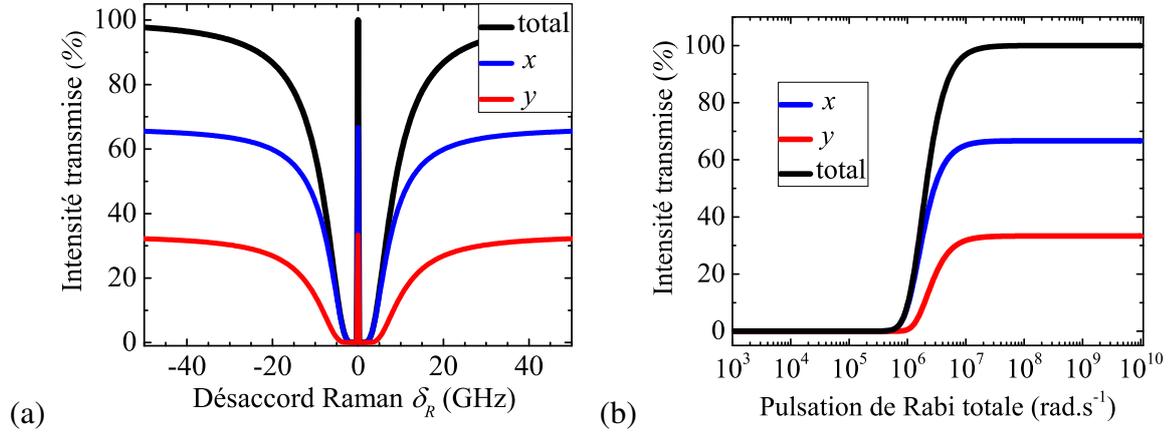


FIGURE B.4 – Transmission de l'intensité moyenne avec un déséquilibre de puissance entre les deux polarisations (2/3 sur  $x$  et 1/3 sur  $y$ ) (a) en fonction du désaccord Raman, (b) en fonction de la pulsation de Rabi incidente (avec dans ce cas  $\delta_R = 0$ ).

deux photons est réalisée ( $\delta_R = 0$ ) à l'intérieur de la large absorption due aux transitions optiques de la  $D_2$ . Pour obtenir cette figure, la réponse des atomes au champs à  $\delta_R \neq 0$  est encore issue de la résolution de l'équation (B.26). En balayant à  $\delta_R = 0$  la puissance en incidence sur la cellule, on voit apparaître à la Fig. B.4(b) une transition s'initier quand la fréquence de Rabi atteint 370 kHz. L'intensité transmise par la cellule de 5 cm d'épaisseur est grosso-modo en forme de marche d'escalier avec une très faible transmission sous les 370 kHz et une transmission totale bien au-dessus. On retrouve alors la forte transparence caractéristique du CPT à résonance.

Passons à l'ordre supérieur dans notre traitement perturbatif.

### Transmission des fluctuations d'intensité

À l'ordre 1, nous définissons une matrice densité  $\rho^{(1)}$  représentant les fluctuations de population et des cohérences en présence d'une fluctuation du champ. Dans un premier temps, nous n'autorisons une fluctuation que sur l'une des polarisations, disons  $x$ . L'équation de Liouville– Von-Neumann B.11 s'écrit à l'ordre 1 :

$$-i\omega\tilde{\rho}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \left( [\widehat{H}_0 + \widehat{H}_1, \tilde{\rho}^{(1)}] + [\widehat{H}_2, \tilde{\rho}^{(0)}] \right) + \mathcal{D}(\tilde{\rho}^{(1)}) \quad \text{avec} \quad \sum_{ij} \tilde{\rho}_{ij}^{(1)} = 0. \quad (\text{B.33})$$

Nous avons introduit ici le Hamiltonien d'interaction dipolaire avec les fluctuations :

$$\widehat{H}_2 = -\hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\widetilde{\Omega}_x^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta\widetilde{\Omega}_x & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

En présence d'intensités moyennes équilibrées sur les deux polarisations et avec une condition de résonance à deux photons vérifiée, les solutions de cette équation sont analytiques. On trouve :

$$\widetilde{\rho}^{(1)} = \frac{-\hbar}{2\Omega^{(0)2} - \omega(i\gamma + \omega)} \cdot \begin{pmatrix} -\Omega^{(0)} \operatorname{Re}(\widetilde{\delta\Omega}_x) & i\Omega^{(0)} \operatorname{Im}(\widetilde{\delta\Omega}_x) & -\omega \widetilde{\delta\Omega}_x^*/2 \\ -i\Omega^{(0)} \operatorname{Im}(\widetilde{\delta\Omega}_x) & \Omega^{(0)} \operatorname{Re}(\widetilde{\delta\Omega}_x) & \omega \widetilde{\delta\Omega}_x^*/2 \\ \omega \widetilde{\delta\Omega}_x/2 & -\omega \widetilde{\delta\Omega}_x/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

Dans ces solutions, nous remarquons que :

$$\widetilde{\rho}_{ij}^{(1)}(\omega) = \widetilde{\rho}_{ij}^{(1)*}(-\omega) \quad \text{et} \quad \widetilde{\rho}_{31}^{(1)} = -\widetilde{\rho}_{32}^{(1)}. \quad (\text{B.36})$$

Les fluctuations des cohérences atomiques étant proportionnelles à  $\widetilde{\delta\Omega}_x$ , nous pouvons facilement les propager à travers la cellule grâce à l'équation (B.24). Cela donne :

$$\widetilde{\delta\Omega}_x(\omega, z) = \widetilde{\delta\Omega}_x(\omega, 0) \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{c}z + i\frac{\pi}{\lambda_x} \int_0^z d\xi \frac{\omega}{4|\Omega^{(0)}|^2(\xi) - 2\omega(i\gamma + \omega)}\right). \quad (\text{B.37})$$

L'intégration dans la fonction exponentielle est effectuée numériquement grâce à l'expression de  $|\Omega^{(0)}|^2(\xi)$  provenant de l'équation (B.30). Il suffit de tirer profit de la deuxième remarque de l'assertion (B.36) pour relier la propagation des fluctuations induites sur la polarisation  $y$  à celle des fluctuations sur la polarisation  $x$  :

$$(-i\omega + c\partial_z)\widetilde{\delta\Omega}_y(\omega, z) = ic \cdot \eta_y \cdot \widetilde{\rho}_{32}^{(1)} = \frac{-\eta_y}{\eta_x} \cdot (-i\omega + c\partial_z)\widetilde{\delta\Omega}_x(\omega, z). \quad (\text{B.38})$$

À partir de là, la condition initiale (dans cette situation)  $\widetilde{\delta\Omega}_y(\omega, 0) = 0$  permet d'aboutir à :

$$\widetilde{\delta\Omega}_y(\omega, z) = \frac{-\eta_y}{\eta_x} \cdot \left[ \widetilde{\delta\Omega}_x(\omega, z) - \widetilde{\delta\Omega}_x(\omega, 0) \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{c}z\right) \right]. \quad (\text{B.39})$$

Si maintenant, à l'inverse, nous n'autorisons des fluctuations que sur la polarisation  $y$  alors :

$$\widehat{H}_2 = -\hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\delta\Omega}_y^* \\ 0 & \widetilde{\delta\Omega}_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

En effectuant exactement le même travail de résolution, il vient :

$$\widetilde{\rho}^{(1)}(\widetilde{\delta\Omega}_y) = \widetilde{\rho}^{(1)}(-\widetilde{\delta\Omega}_x). \quad (\text{B.41})$$

Ceci permet en définitive d'établir la matrice de transfert des fluctuations des pulsations de Rabi à travers la cellule de césium :

$$\begin{pmatrix} \overline{\delta\Omega_x}(\omega, z) \\ \overline{\delta\Omega_y}(\omega, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx}(\omega, z) & T_{xy}(\omega, z) \\ T_{yx}(\omega, z) & T_{yy}(\omega, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\delta\Omega_x}(\omega, 0) \\ \overline{\delta\Omega_y}(\omega, 0) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.42})$$

où

$$T_{ii}(\omega, z) = \exp\left(i\frac{\omega}{c}z\right) \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda_i} \int_0^z d\xi \frac{\omega}{4|\Omega^{(0)}|^2(\xi) - 2\omega(i\gamma + \omega)}\right), \quad (\text{B.43})$$

$$T_{ij}(\omega, z) = -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \exp\left(i\frac{\omega}{c}z\right) \cdot \left[ \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda_j} \int_0^z d\xi \frac{\omega}{4|\Omega^{(0)}|^2(\xi) - 2\omega(i\gamma + \omega)}\right) - 1 \right], \quad (\text{B.44})$$

pour  $i \neq j \in (x, y)$  et avec  $\lambda_{x,y}$  les longueurs d'onde des transitions optiques 1, 2  $\leftrightarrow$  3.

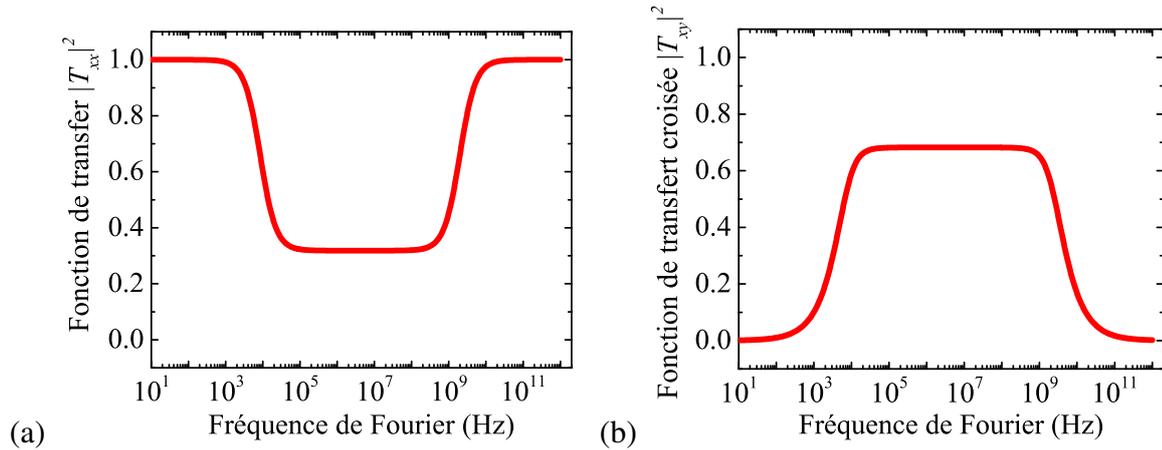


FIGURE B.5 – Fonction de transfert  $|T_{xx}(f, z)|^2$  de la DSP (a) et des covariances croisées  $|T_{xy}(f, z)|^2$  (b) obtenues avec les équations (B.43) et (B.44). Ce transfert par la cellule de césium est estimé à une profondeur  $z = 1$  cm et un éclairement incident total de  $500 \mu\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$ .

Ces fonctions de transfert de bruit de la cellule sont représentées à la Fig. B.5. Nous observons en (a) que le milieu se comporte tel un filtre coupe-bande pour la transmission du bruit sur une polarisation et tel un filtre passe-bande pour la transmission croisée du bruit d'une polarisation sur l'autre polarisation. Dans l'expression analytique des fonctions de transfert, il n'est pas évident de mettre le doigt sur les fréquences de coupure correspondantes car  $\Omega^{(0)}(z)$  possède une dépendance non triviale vis à vis des fréquences typiques  $\gamma_c$ ,  $\Gamma^*$ ,  $\gamma$  et  $\Omega^{(0)}(0)$ . Toutefois une analyse graphique permet d'identifier une première coupure qui évolue dans nos conditions (milieu mince) comme  $|\Omega^{(0)}|^2/\gamma$  et une seconde comme  $\gamma$ . Notons que le taux de relaxation des cohérences  $\gamma$  est limité par le temps de vie des atomes dans l'état excité, si bien que  $\gamma = \Gamma^*/2$ . C'est tout du moins la valeur considérée dans la référence [77] et que nous avons adoptée. Ainsi, la première coupure se produit

à environ 1 kHz alors que la seconde délimite la bande passante des transitions optiques d'environ 1.5 GHz. En fait, la première fréquence de coupure peut être mise en relation avec la largeur typique de la raie CPT dont l'expression figure dans la référence [65] :

$$\Delta\omega = \frac{2\gamma_c}{\sqrt{1+S}} \cdot \sqrt{1+3S + \frac{\Gamma^*}{\gamma_c} S^*} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Gamma^*}{\gamma_c} S^*}, \quad (\text{B.45})$$

avec les paramètres  $S$  et  $S^*$  définis comme :

$$S = \frac{\Omega_x^2 \cdot \Omega_y^2}{(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \cdot \Gamma^{*2}/4} \quad \text{et} \quad S^* = \frac{\Omega_x^2/2 + \Omega_y^2/2}{\Gamma^{*2}}. \quad (\text{B.46})$$

Or dans nos conditions de travail (B.1), nous avons  $S \ll 1$ ,  $\Gamma^*/\gamma_c \gg 1$  et  $\Omega_x \simeq \Omega_y \simeq \Omega^{(0)}$ . Par conséquent, la largeur CPT est réduite à  $\Delta\omega \simeq \Omega^{(0)2}/\Gamma^*$ , soit environ  $6 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ . Nous proposons donc l'interprétation suivante. Dans la bande passante du mécanisme CPT, les fluctuations d'intensité lumineuse d'une polarisation à résonance sont parfaitement transmises par les atomes. L'état noir est immunisé de l'interaction dipolaire. Quand la bande passante CPT est dépassée, c'est la largeur de la transition optique qui prend le relais. Un photon issu d'une fluctuation d'intensité sur une polarisation va être absorbé par un atome qui passera à l'état excité. La polarisation croisée va alors potentiellement interagir avec cet atome dans l'état excité. On a ainsi transmission du bruit à la polarisation croisée. Pour des fréquences de bruit allant au-delà des transitions optiques, les atomes ne voient pas les fluctuations trop rapides et le milieu devient transparent au bruit.

Observons par ailleurs que la largeur CPT  $\Delta\omega$  est proportionnelle à l'intensité lumineuse. Comme il est important de ne pas trop élargir la résonance, les horloges CPT fonctionnent à très basse intensité au détriment de l'amplitude du signal. L'interrogation de type Ramsey présentée au chapitre 2 permet alors de contourner ce problème en imposant une largeur de frange donnée par le temps d'évolution libre uniquement, qui lui est indépendant de l'intensité.

Dans la discussion concernant l'interprétation, nous n'avons pas fait intervenir les corrélations initiales entre les champs lumineux avant propagation. Il nous faut, pour conclure, rajouter cet ingrédient.

### 2.3 Transmission des bruits d'intensités relatifs et leurs corrélations

Nous voulons d'abord relier une fluctuation de la pulsation de Rabi à une fluctuation de l'intensité puisque, au final, il s'agit de la quantité mesurée. Pour cela, notons qu'une fluctuation d'intensité est, en fait, reliée à une fluctuation de l'amplitude de l'enveloppe du champ selon :

$$\delta I_i(t) \equiv \delta |\mathcal{E}_i(t)|^2 \simeq 2 \cdot |\mathcal{E}_i^{(0)}| \cdot \delta \mathcal{E}_i(t). \quad (\text{B.47})$$

Nous obtenons donc la relation :

$$\widetilde{\delta I}_i(\omega, z) = 4 \frac{\varepsilon_0 c_0 \hbar^2}{d^2} \cdot \left| \Omega_i^{(0)}(z) \right| \cdot \delta \widetilde{\Omega}_i(\omega, z). \quad (\text{B.48})$$

Par conséquent, il faut aussi tenir compte de la propagation de la valeur moyenne de la pulsation de Rabi à l'ordre 0 avant de tirer profit de la matrice (B.42) de transfert de bruit par la cellule. Il s'ensuit que la fonction de transfert du bruit d'intensité par la cellule vérifie :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\delta I}_x(\omega, z) \\ \widetilde{\delta I}_y(\omega, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} \cdot \left| \Omega_x^{(0)}(z) / \Omega_x^{(0)}(0) \right| & T_{xy} \cdot \left| \Omega_x^{(0)}(z) / \Omega_y^{(0)}(0) \right| \\ T_{yx} \cdot \left| \Omega_y^{(0)}(z) / \Omega_x^{(0)}(0) \right| & T_{yy} \cdot \left| \Omega_y^{(0)}(z) / \Omega_y^{(0)}(0) \right| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\delta I}_x(\omega, 0) \\ \widetilde{\delta I}_y(\omega, 0) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Rappelons que la fonction de corrélation entre les bruits d'intensité des deux modes lasers  $\Theta_{ij}$  est définie d'après le spectre du produit croisé suivant :

$$\langle \widetilde{\delta I}_i(\omega, z) \cdot \widetilde{\delta I}_j^*(\omega, z) \rangle = \Theta_{ij}(\omega, z) \times \sqrt{\langle |\widetilde{\delta I}_i(\omega, z)|^2 \rangle \cdot \langle |\widetilde{\delta I}_j(\omega, z)|^2 \rangle}. \quad (\text{B.50})$$

On considère en incidence de la cellule de césium deux polarisations d'intensités équilibrées, satisfaisant les conditions de résonance à 1 et 2 photons ( $\Delta_0 = 0$  et  $\delta_R = 0$ ) et RINs égaux. Pour une valeur des corrélations  $\Theta_{ij}(\omega, z = 0)$  donnée en entrée, le bruit relatif d'intensité du mode laser  $i = (x, y)$  est transmis à la profondeur  $z$  de la cellule avec une fonction de transfert :

$$T_{\text{RIN}_i}(\omega, z) \triangleq \frac{\text{RIN}_i(\omega, z)}{\text{RIN}_i(\omega, 0)} = |T_{ii}(\omega, z)|^2 + |T_{ij}(\omega, z)|^2 + 2 \text{Re} \left[ T_{ii}(\omega, z) \cdot T_{ij}^*(\omega, z) \cdot \Theta_{ij}(\omega, 0) \right]. \quad (\text{B.51})$$

La figure B.6 représente les spectres de cette fonction de transfert de bruit prise après une propagation de 1 cm dans la vapeur de césium pour plusieurs valeurs des corrélations en entrée de cellule (a) en phase et (b) en opposition de phase. Pour des bruits d'intensité complètement décorrélés, la situation est telle que l'on a décrit précédemment, avec une diminution dans la plage de fréquences au-delà de la bande passante CPT où l'absorption des transitions optiques redistribue les bruits à la polarisation croisée. Lorsque l'on augmente l'amplitude des corrélations en phase des modes lasers incidents, l'absorption des transitions optiques va redistribuer le bruit à la polarisation croisée mais celui qui provient justement de la polarisation croisée va alors venir s'ajouter en phase, interférer constructivement. Ainsi, lorsque l'on tend vers une situation de bruits totalement corrélés en phase, la transmission du RIN devient totale sur l'ensemble du spectre. Quand, en revanche, les corrélations sont en opposition de phase, les bruits de la polarisation croisée viennent se soustraire, interférer destructivement. Dans la plage entre le kHz et le GHz, on observe alors une nette diminution de la transmission de bruit d'intensité. Dans tous les cas, il faut noter que dans la plage de fréquences du mécanisme CPT, la nature des corrélations n'a pas d'influence sur la transmission de bruit.

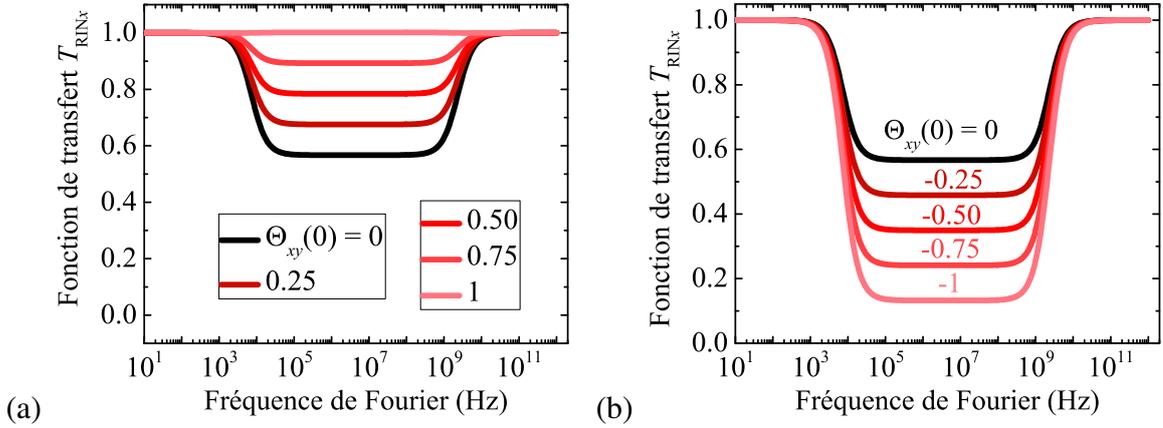


FIGURE B.6 – Spectres de la fonction de transfert du RIN d'un mode laser après une propagation de 1 cm dans la vapeur de césium (équation B.51). (a) Spectres obtenus pour différentes valeurs de corrélations en phase des modes lasers à l'entrée de la cellule  $\Theta_{xy}(\omega, 0)$ . (b) Spectres obtenus pour des corrélations en opposition de phase. Les conditions de résonance sont vérifiées ( $\Delta_0 = 0$  et  $\delta_R = 0$ ) et les intensités et DSP de bruit des deux modes sont équilibrés. L'éclairement total en incidence de la cellule est de  $500 \mu\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$ .

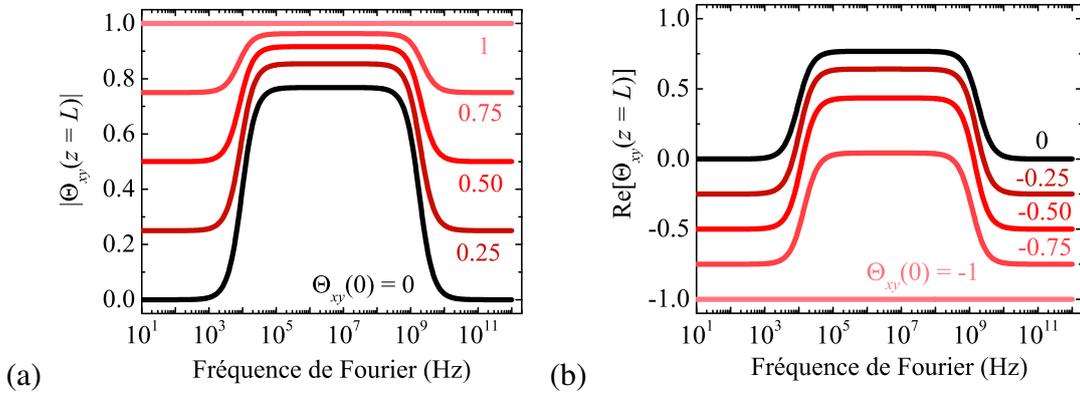


FIGURE B.7 – Spectres de la fonction de transfert des corrélations des modes lasers après une propagation de 1 cm dans la vapeur de césium (équation B.52). (a) Spectres obtenus pour différentes valeurs de corrélations en phase des modes lasers à l'entrée de la cellule. (b) Spectres obtenus pour des corrélations en opposition de phase. Les conditions de résonance sont vérifiées ( $\Delta_0 = 0$  et  $\delta_R = 0$ ) et les intensités et DSP de bruit des deux modes sont équilibrés. L'éclairement total en incidence de la cellule est de  $500 \mu\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$ .

Pour l'évolution au cours de la propagation dans la cellule de césium des corrélations de bruit d'intensité, nous démontrons l'expression suivante :

$$\Theta_{ij}(\omega, z) = \frac{T_{ii} \cdot T_{ji}^* + T_{ij} \cdot T_{jj}^* + T_{ii} \cdot T_{jj}^* \cdot \Theta_{ij}(\omega, 0) + T_{ij} \cdot T_{ji}^* \cdot \Theta_{ij}^*(\omega, 0)}{\sqrt{T_{\text{RIN}_i}(\omega, z) \cdot T_{\text{RIN}_j}(\omega, z)}} \quad (\text{B.52})$$

La figure B.7 affiche les spectres de cette fonction de transfert des corrélations de bruit après propagation dans la vapeur de césium pour plusieurs valeurs des corrélations en entrée de cellule (a) en phase et (b) en opposition de phase. Il apparaît que dans la plage de fréquences hors CPT et dans la fenêtre de l'absorption optique, les corrélations entre les modes augmentent significativement (en dehors des cas particuliers de corrélations totales où les corrélations demeurent identiques après propagation). Même si les bruits ne sont pas corrélés en entrée, ils le deviennent dans cette plage de fréquence. Cela s'explique par la redistribution du bruit déjà évoquée, due aux atomes qui transitent par l'état excité qui est couplé aux deux modes lasers.

---

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] G. GREDAT, H. LIU, J. COTXET, F. TRICOT, G. BAILL, F. GUTTY, F. GOLDFARB, I. SAGNES et F. BRETENAKER, « Optimization of laser dynamics for active stabilization of DF-VECSELS dedicated to cesium CPT clocks », *J. Opt. Soc. Am. B* **37**, 1196–1207 (2020) (cf. p. 4).
- [2] G. GREDAT, H. LIU et F. BRETENAKER, « Thermal phase fluctuations in optically pumped dual-frequency vertical external-cavity surface-emitting lasers for cesium clocks based on coherent population trapping », *Journal of Applied Physics* **126**, 173104 (2019) (cf. p. 4).
- [3] G. GREDAT, D. CHATTERJEE, G. BAILL, F. GUTTY, I. SAGNES, F. GOLDFARB, F. BRETENAKER et H. LIU, « Fully-correlated multi-mode pumping for low-noise dual-frequency VECSELS », *Opt. Express* **26**, 26217–26226 (2018) (cf. p. 4, 127, 134).
- [4] H. LIU, G. GREDAT, G. BAILL, F. GUTTY, F. GOLDFARB, I. SAGNES et F. BRETENAKER, « Noise investigation of a dual-frequency VECSEL for application to cesium clocks », *J. Lightwave Technol.* **36**, 3882–3891 (2018) (cf. p. 4).
- [5] H. LIU, G. GREDAT, S. DE et al., « Ultra-low noise dual-frequency VECSEL at telecom wavelength using fully correlated pumping », *Opt. Lett.* **43**, 1794–1797 (2018) (cf. p. 4).
- [6] G. BAILL, M. ALOUINI, D. DOLFI, F. BRETENAKER, I. SAGNES et A. GARNACHE, « Shot-noise-limited operation of a monomode high-cavity-finesse semiconductor laser for microwave photonics applications », *Opt. Lett.* **32**, 650–652 (2007) (cf. p. 7).
- [7] M. GUINA, A. RANTAMÄKI et A. HÄRKÖNEN, « Optically pumped VECSELS : review of technology and progress », *Journal of Physics D: Applied Physics* **50**, 383001 (2017) (cf. p. 7).

- [8] S. KNITTER, C. LIU, B. REDDING, M. K. KHOKHA, M. A. CHOMA et H. CAO, « Coherence switching of a degenerate VECSEL for multimodality imaging », *Optica* **3**, 403–406 (2016) (cf. p. 8).
- [9] B. BIGGE et S. BIGGE, « Treatment of recalcitrant viral warts using a 577-nm wavelength high-power optically pumped semiconductor laser », *Photonics & Lasers in Medicine* **5**, 219–223 (2016) (cf. p. 8).
- [10] S. BURD, D. LEIBFRIED, A. C. WILSON et D. J. WINELAND, « Optically pumped semiconductor lasers for atomic and molecular physics », in *Vertical external cavity surface emitting lasers (VECSELs) V*, t. 9349 (International Society for Optics & Photonics, 2015), p. 146–153 (cf. p. 8).
- [11] P. ČERMÁK, B. CHOMET, L. FERRIERES et al., « CRDS with a VECSEL for broadband high sensitivity spectroscopy in the 2.3  $\mu\text{m}$  window », *Review of Scientific Instruments* **87**, 083109 (2016) (cf. p. 8).
- [12] U. KELLER et A. C. TROPPER, « Passively modelocked surface-emitting semiconductor lasers », *Physics Reports* **429**, 67–120 (2006) (cf. p. 8).
- [13] V. J. WITWER, M. MANGOLD, M. HOFFMANN, O. D. SIEBER, M. GOLLING, T. SÜDMEYER et U. KELLER, « High-power integrated ultrafast semiconductor disk laser : multi-watt 10 GHz pulse generation », *Electronics Letters* **48**, 1144–1145 (2012) (cf. p. 8).
- [14] F. BRETENAKER et A. LE FLOCH, « The dynamics of spatially-resolved laser eigenstates », *Quantum Electronics Letters* **26**, 1451–1454 (1990) (cf. p. 8).
- [15] F. BRETENAKER et A. L. FLOCH, « Laser eigenstates in the framework of a spatially generalized Jones matrix formalism », *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 230–238 (1991) (cf. p. 8).
- [16] M. ALOUINI, M. BRUNEL, F. BRETENAKER, M. VALLET et A. LE FLOCH, « Dual tunable wavelength Er,Yb :glass laser for terahertz beat frequency generation », *IEEE Photonics Technology Letters* **10**, 1554–1556 (1998) (cf. p. 8, 41, 46).
- [17] G. BAILI, L. MORVAN, M. ALOUINI, D. DOLFI, F. BRETENAKER, I. SAGNES et A. GARNACHE, « Experimental demonstration of a tunable dual-frequency semiconductor laser free of relaxation oscillations », *Opt. Lett.* **34**, 3421–3423 (2009) (cf. p. 9, 26, 63, 73).
- [18] S. DE, A. E. AMILI, I. FSAIFES, G. PILLET, G. BAILI, F. GOLDFARB, M. ALOUINI, I. SAGNES et F. BRETENAKER, « Phase noise of the radio frequency (RF) beatnote generated by a dual-frequency VECSEL », *Journal of Lightwave Technology* **32**, 1307–1316 (2014) (cf. p. 9, 63).
- [19] S. DE, G. BAILI, M. ALOUINI, J.-C. HARMAND, S. BOUCHOULE et F. BRETENAKER, « Class-A dual-frequency VECSEL at telecom wavelength », *Opt. Lett.* **39**, 5586–5589 (2014) (cf. p. 9, 63, 80).

- [20] S. DE, G. BAILL, S. BOUCHOULE, M. ALOUINI et F. BRETENAKER, « Intensity- and phase-noise correlations in a dual-frequency vertical-external-cavity surface-emitting laser operating at telecom wavelength », *Phys. Rev. A* **91**, 053828 (2015) (cf. p. 9, 63, 78).
- [21] S. DE, V. PAL, A. E. AMILI, G. PILLET, G. BAILL, M. ALOUINI, I. SAGNES, R. GHOSH et F. BRETENAKER, « Intensity noise correlations in a two-frequency VECSEL », *Opt. Express* **21**, 2538–2550 (2013) (cf. p. 9, 69).
- [22] S. DE, V. POTAPCHUK et F. BRETENAKER, « Influence of spin-dependent carrier dynamics on the properties of a dual-frequency vertical-external-cavity surface-emitting laser », *Phys. Rev. A* **90**, 013841 (2014) (cf. p. 9, 63).
- [23] A. CHERNIKOV, M. WICHMANN, M. K. SHAKFA, M. SCHELLER, J. V. MOLONEY, S. W. KOCH et M. KOCH, « Time-dynamics of the two-color emission from vertical-external-cavity surface-emitting lasers », *Applied Physics Letters* **100**, 041114 (2012) (cf. p. 9).
- [24] M. WICHMANN, M. K. SHAKFA, F. ZHANG et al., « Evolution of multi-mode operation in vertical-external-cavity surface-emitting lasers », *Opt. Express* **21**, 31940–31950 (2013) (cf. p. 9).
- [25] M. WICHMANN, G. TOWN, J. QUANTE, M. GAAFAR, A. RAHIMI-IMAN, W. STOLZ, S. W. KOCH et M. KOCH, « Antiphase noise dynamics in a dual-wavelength vertical-external-cavity surface-emitting laser », *IEEE Photonics Technology Letters* **27**, 2039–2042 (2015) (cf. p. 9).
- [26] C. HESSENIUS, M. LUKOWSKI et M. FALLAHI, « High-power tunable two-wavelength generation in a two chip co-linear T-cavity vertical external-cavity surface-emitting laser », *Applied Physics Letters* **101**, 121110 (2012) (cf. p. 9).
- [27] M. LUKOWSKI, C. HESSENIUS, R. BEDFORD et M. FALLAHI, « Tunable type II intracavity difference frequency generation at 5.4  $\mu\text{m}$  in a two chip vertical external cavity surface emitting laser », *Opt. Lett.* **40**, 4174–4177 (2015) (cf. p. 9).
- [28] S. M. LINK, A. KLENNER, M. MANGOLD, C. A. ZAUGG, M. GOLLING, B. W. TILMA et U. KELLER, « Dual-comb modelocked laser », *Opt. Express* **23**, 5521–5531 (2015) (cf. p. 9).
- [29] M. SCHELLER, C. W. BAKER, S. W. KOCH et J. V. MOLONEY, « Dual-wavelength passively mode-locked semiconductor disk laser », *IEEE Photonics Technology Letters* **28**, 1325–1327 (2016) (cf. p. 9).
- [30] L. A. COLDREN, S. W. CORZINE et M. L. MASHANOVITCH, *Diode lasers and photonic integrated circuits*, t. 218 (John Wiley & Sons, 2012) (cf. p. 10).
- [31] G. P. AGRAWAL et N. K. DUTTA, *Semiconductor lasers* (Springer Science & Business Media, 2013) (cf. p. 10, 22).

- [32] A. LAURAIN, « Sources laser à semiconducteur à émission verticale de haute cohérence et de forte puissance dans le proche et le moyen infrarouge. », thèse de doct. (Université Montpellier 2, 2010) (cf. p. 10).
- [33] R. N. HALL, G. E. FENNER, J. D. KINGSLEY, T. J. SOLTYS et R. O. CARLSON, « Coherent light emission from GaAs junctions », *Phys. Rev. Lett.* **9**, 366–368 (1962) (cf. p. 10).
- [34] M. I. NATHAN, W. P. DUMKE, G. BURNS, F. H. DILL et G. LASHER, « Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions », *Applied Physics Letters* **1**, 62–64 (1962) (cf. p. 10).
- [35] N. G. BASOV, « Semiconductor lasers », *Science* **149**, 821–827 (1965) (cf. p. 10).
- [36] V. A. K. BASOV, Nicolai G. A. Z. Grasyuk, « Induced radiation in gallium arsenide when optically excited », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **161**, 1306–1307 (1965) (cf. p. 10).
- [37] W. T. TSANG, C. WEISBUCH, R. C. MILLER et R. DINGLE, « Current injection GaAs – Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As multi-quantum-well heterostructure lasers prepared by molecular beam epitaxy », *Applied Physics Letters* **35**, 673–675 (1979) (cf. p. 10).
- [38] F. BRETENAKER, *Laser physics* (Lecture Notes for the 2nd year of Master Laser Optique Matière, 2018) (cf. p. 16, 18, 29, 73).
- [39] G. BAILL, « Contribution à la réduction du bruit d'intensité relatif des lasers à semi-conducteurs pour des applications aux radars », thèse de doct. (Université Paris Sud - Paris XI, 2008) (cf. p. 17, 42).
- [40] C. HENRY, « Theory of the linewidth of semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics* **18**, 259–264 (1982) (cf. p. 18).
- [41] G. BAILL, M. ALOUINI, T. MALHERBE, D. DOLFI, I. SAGNES et F. BRETENAKER, « Direct observation of the class-B to class-A transition in the dynamical behavior of a semiconductor laser », *EPL (Europhysics Letters)* **87**, 44005 (2009) (cf. p. 19, 20).
- [42] S. DE, « Noise in dual-frequency semiconductor and solid-state lasers », thèse de doct. (Université Paris Sud - Paris XI, juin 2015) (cf. p. 25, 28, 32, 36, 39, 63).
- [43] V. PAL, P. TROFIMOFF, B.-X. MIRANDA et al., « Measurement of the coupling constant in a two-frequency VECSEL », *Opt. Express* **18**, 5008–5014 (2010) (cf. p. 31, 63).
- [44] A. LAURAIN, M. MYARA, G. BEAUDOIN, I. SAGNES et A. GARNACHE, « High power single-frequency continuously-tunable compact extended-cavity semiconductor laser », *Opt. Express* **17**, 9503–9508 (2009) (cf. p. 38, 127, 153).

- [45] A. LAURAIN, M. MYARA, G. BEAUDOIN, I. SAGNES et A. GARNACHE, « Multiwatt-power highly-coherent compact single-frequency tunable Vertical-External-Cavity-Surface-Emitting-Semiconductor-Laser », *Opt. Express* **18**, 14627–14636 (2010) (cf. p. 38, 153).
- [46] M. ALOUINI, « L'optique hyperfréquence : un défi perpétuel », *Photoniques* **93**, 24–29 (2018) (cf. p. 41, 42).
- [47] P. DUMONT, F. CAMARGO, J. DANET et al., « Low-noise dual-frequency laser for compact Cs atomic clocks », *Journal of Lightwave Technology* **32**, 3817–3823 (2014) (cf. p. 41, 58, 59, 63, 91, 92, 112, 113).
- [48] J. CAPMANY et D. NOVAK, « Microwave photonics combines two worlds », *Nature photonics* **1**, 319 (2007) (cf. p. 42, 45).
- [49] R. ESSIAMBRE et R. W. TKACH, « Capacity trends and limits of optical communication networks », *Proceedings of the IEEE* **100**, 1035–1055 (2012) (cf. p. 42).
- [50] L. GALDINO, D. SEMRAU et P. BAYVEL, « Breaking the transmission barriers in ultra-broadband high-capacity optical fiber transmission systems », in *Latin america optics and photonics conference* (2018), Tu2E.2 (cf. p. 42).
- [51] G. BAILI, L. MORVAN, G. PILLET et al., « Ultralow noise and high-power VECSEL for high dynamic range and broadband RF/optical links », *Journal of Lightwave Technology* **32**, 3489–3494 (2014) (cf. p. 42, 46, 63).
- [52] J. YAO, « Microwave photonics », *J. Lightwave Technol.* **27**, 314–335 (2009) (cf. p. 43).
- [53] K. AKIYAMA, A. ALBERDI, W. ALEF et al., « First M87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole », *Astrophysical Journal Letters* **875**, L1 (2019) (cf. p. 45).
- [54] K. AKIYAMA, A. ALBERDI, W. ALEF et al., « First M87 event horizon telescope results. ii. array and instrumentation », *The Astrophysical Journal Letters* **875**, L2 (2019) (cf. p. 45).
- [55] S. A. DIDDAMS, J. C. BERGQUIST, S. R. JEFFERTS et C. W. OATES, « Standards of time and frequency at the outset of the 21st century », *Science* **306**, 1318–1324 (2004) (cf. p. 47).
- [56] N. NEMITZ, T. OHKUBO, M. TAKAMOTO, I. USHIJIMA, M. DAS, N. OHMAE et H. KATORI, « Frequency ratio of Yb and Sr clocks with  $5 \times 10^{-17}$  uncertainty at 150 seconds averaging time », *Nature Photonics* **10**, 258 (2016) (cf. p. 47).
- [57] M. TAKAMOTO, I. USHIJIMA, N. OHMAE, T. YAHAGI, K. KOKADO, H. SHINKAI et H. KATORI, « Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks », *Nature Photonics*, 1–5 (2020) (cf. p. 47).

- [58] T. TAKANO, M. TAKAMOTO, I. USHIJIMA et al., « Geopotential measurements with synchronously linked optical lattice clocks », *Nature Photonics* **10**, 662 (2016) (cf. p. 47).
- [59] H. JIANG, F. KÉFÉLIAN, S. CRANE et al., « Long-distance frequency transfer over an urban fiber link using optical phase stabilization », *J. Opt. Soc. Am. B* **25**, 2029–2035 (2008) (cf. p. 47).
- [60] G. ALZETTA, A. GOZZINI, L. MOI et G. ORRIOLS, « An experimental method for the observation of RF transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour », *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* **36**, 5–20 (1976) (cf. p. 51).
- [61] E. ARIMONDO et G. ORRIOLS, « Nonabsorbing atomic coherences by coherent two-photon transitions in a three-level optical pumping », *Nuovo Cimento Lettere* **17**, 333–338 (1976) (cf. p. 51).
- [62] J. E. THOMAS, P. R. HEMMER, S. EZEKIEL, C. C. LEIBY, R. H. PICARD et C. R. WILLIS, « Observation of ramsey fringes using a stimulated, resonance Raman transition in a sodium atomic beam », *Phys. Rev. Lett.* **48**, 867–870 (1982) (cf. p. 51).
- [63] P. HEMMERS, S. EZEKIEL et C. LEIBY, « Stabilization of a microwave oscillator using a resonance Raman transition in a sodium beam », *Progress in Quantum Electronics* **8**, 161–163 (1984) (cf. p. 51).
- [64] N. CYR, M. TETU et M. BRETON, « All-optical microwave frequency standard : a proposal », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **42**, 640–649 (1993) (cf. p. 51).
- [65] T. ZANON, S. GUERANDEL, E. de CLERCQ, D. HOLLEVILLE, N. DIMARCQ et A. CLAIRON, « High contrast ramsey fringes with coherent-population-trapping pulses in a double lambda atomic system », *Phys. Rev. Lett.* **94**, 193002 (2005) (cf. p. 53, 54, 91, 222, 233).
- [66] *Horloges atomiques et atomes ultrafroids*, Cohen-Tannoudgi, C. (Congrès du centenaire de l’UDPPC, Besançon, 2006) (cf. p. 53).
- [67] F. TRICOT, « Analysis and reduction of the frequency instability noise sources in a compact CPT clock », thèse de doct. (Sorbonne Université, mar. 2018) (cf. p. 54, 56, 57, 114, 119, 221).
- [68] S. KNAPPE, V. SHAH, P. D. SCHWINDT, L. HOLLBERG, J. KITCHING, L.-A. LIEW et J. MORELAND, « A microfabricated atomic clock », *Applied Physics Letters* **85**, 1460–1462 (2004) (cf. p. 55).
- [69] P. YUN, F. TRICOT, E. CALOSSO, S. MICALIZIO, F. BRUNO, R. BOUDOT, S. GUÉRANDEL et E. de CLERCQ, « High-performance coherent population trapping clock with polarization modulation », *Phys. Rev. Applied* **7**, 014018 (2017) (cf. p. 56, 57).

- [70] F. TRICOT, P. YUN, E. de CLERCQ et S. GUERANDEL, « Latest achievements on the pulsed CPT clock », in *2017 joint conference of the european frequency and time forum and IEEE international frequency control symposium (EFTF/IFCS)* (IEEE, 2017), p. 172–174 (cf. p. 56, 57).
- [71] M. ABDEL HAFIZ et R. BOUDOT, « A coherent population trapping cs vapor cell atomic clock based on push-pull optical pumping », *Journal of Applied Physics* **118**, 124903 (2015) (cf. p. 56).
- [72] T. BANDI, C. AFFOLDERBACH, C. STEFANUCCI, F. MERLI, A. K. SKRIVERVIK et G. MILETI, « Compact high-performance continuous-wave double-resonance rubidium standard with  $1.4 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  stability », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **61**, 1769–1778 (2014) (cf. p. 56).
- [73] M. GOZZELINO, S. MICALIZIO, F. LEVI, A. GODONE et C. E. CALOSSO, « Reducing cavity-pulling shift in ramsey-operated compact clocks », *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* **65**, 1294–1301 (2018) (cf. p. 56).
- [74] B. PELLE, R. SZMUK, B. DESRUELLE, D. HOLLEVILLE et A. LANDRAGIN, « Cold-atom-based commercial microwave clock at the  $10^{-15}$  level », in *2018 IEEE international frequency control symposium (IFCS)* (IEEE, 2018), p. 1–5 (cf. p. 56).
- [75] M. ABDEL HAFIZ, G. COGET, M. PETERSEN, C. E. CALOSSO, S. GUÉRANDEL, E. de CLERCQ et R. BOUDOT, « Symmetric autobalanced ramsey interrogation for high-performance coherent-population-trapping vapor-cell atomic clock », *Applied Physics Letters* **112**, 244102 (2018) (cf. p. 56).
- [76] O. KOZLOVA, J.-M. DANET, S. GUERANDEL et E. d. CLERCQ, « Caesium cell coherent population trapping clock : main effects affecting the frequency stability », *Revue Francaise de Metrologie* **2012**, 3–14 (2012) (cf. p. 56, 114, 223).
- [77] J. DANET, M. LOURS, S. GUÉRANDEL et E. D. CLERCQ, « Dick effect in a pulsed atomic clock using coherent population trapping », *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* **61**, 567–574 (2014) (cf. p. 56, 114–116, 232).
- [78] P. YUN, J.-M. DANET, D. HOLLEVILLE, E. de CLERCQ et S. GUÉRANDEL, « Constructive polarization modulation for coherent population trapping clock », *Applied Physics Letters* **105**, 231106 (2014) (cf. p. 57).
- [79] B. FRANÇOIS, C. E. CALOSSO, J. M. DANET et R. BOUDOT, « A low phase noise microwave frequency synthesis for a high-performance cesium vapor cell atomic clock », *Review of Scientific Instruments* **85**, 094709 (2014) (cf. p. 57, 121, 124).
- [80] G. PILLET, L. MORVAN, L. MÉNAGER, A. GARCIA, S. BABIEL et A. STÖHR, « Dual-frequency laser phase locked at 100 GHz », *J. Lightwave Technol.* **32**, 3824–3830 (2014) (cf. p. 59).

- [81] A. EL AMILI, G. GREDAT, M. ALOUINI, I. SAGNES et F. BRETENAKER, « Experimental study of the delayed threshold phenomenon in a class-A VECSEL », *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **58**, 10501 (2012) (cf. p. 63).
- [82] S. DE, G. LOAS, A. E. AMILI, M. ALOUINI et F. BRETENAKER, « Theoretical and experimental analysis of intensity noise correlations in an optically pumped, dual-frequency Nd :YAG laser », *J. Opt. Soc. Am. B* **30**, 2830–2839 (2013) (cf. p. 69).
- [83] G. PILLET, L. MORVAN, M. BRUNEL, F. BRETENAKER, D. DOLFI, M. VALLET, J.-P. HUIGNARD et A. L. FLOCH, « Dual-frequency laser at 1.5  $\mu\text{m}$  for optical distribution and generation of high-purity microwave signals », *J. Lightwave Technol.* **26**, 2764–2773 (2008) (cf. p. 74, 83, 124).
- [84] Z. ZHAO, S. BOUCHOULE, L. FERLAZZO et al., « Cost-effective thermally-managed 1.55- $\mu\text{m}$  VECSEL with hybrid mirror on copper substrate », *IEEE Journal of Quantum Electronics* **48**, 643–650 (2012) (cf. p. 80).
- [85] M. REICHLING et H. GRÖNBECK, « Harmonic heat flow in isotropic layered systems and its use for thin film thermal conductivity measurements », *Journal of Applied Physics* **75**, 1914–1922 (1994) (cf. p. 89).
- [86] Y. LIANG, L. JIN, L. CHENG et B.-O. GUAN, « Stabilization of microwave signal generated by a dual-polarization DBR fiber laser via optical feedback », *Opt. Express* **22**, 29356–29362 (2014) (cf. p. 92).
- [87] M. GUIONIE, L. FREIN, A. CARRÉ et al., « Beat note stabilization in dual-polarization DFB fiber lasers by an optical phase-locked loop », *Opt. Express* **26**, 3483–3488 (2018) (cf. p. 92).
- [88] M. ALOUINI, B. BENAZET, M. VALLET, M. BRUNEL, P. DI BIN, F. BRETENAKER, A. LE FLOCH et P. THONY, « Offset phase locking of Er,Yb :glass laser eigenstates for RF photonics applications », *IEEE Photonics Technology Letters* **13**, 367–369 (2001) (cf. p. 92).
- [89] J. L. CASSON, K. T. GAHAGAN, D. A. SCRYMGEOUR, R. K. JAIN, J. M. ROBINSON, V. GOPALAN et R. K. SANDER, « Electro-optic coefficients of lithium tantalate at near-infrared wavelengths », *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 1948–1952 (2004) (cf. p. 113).
- [90] M. SCHOSSIG, V. NORKUS et G. GERLACH, « Dielectric and pyroelectric properties of ultrathin, monocrystalline lithium tantalate », *Infrared Physics & Technology* **63**, 35–41 (2014) (cf. p. 113).
- [91] G. J. DICK, *Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards*, rapp. tech. (California Inst of Tech Pasenda Jet Propulsion Lab, 1987) (cf. p. 114).

- [92] L. DUCHAYNE, « High performance time transfer : the MicroWave Link of the ACES mission », thèse de doct. (Observatoire de Paris, Sorbonne Université, 2008) (cf. p. 114).
- [93] J. I. TRISNADI, « Speckle contrast reduction in laser projection displays », in *Projection displays VIII*, t. 4657 (International Society for Optics et Photonics, 2002), p. 131–137 (cf. p. 123).
- [94] M. J. BOOTH, « Adaptive optics in microscopy », *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **365**, 2829–2843 (2007) (cf. p. 123).
- [95] A. CHERNIKOV, J. HERRMANN, M. SCHELLER et al., « Influence of the spatial pump distribution on the performance of high power vertical-external-cavity surface-emitting lasers », *Applied Physics Letters* **97**, 191110 (2010) (cf. p. 131, 161, 166).
- [96] S. R. GOLDBERG YU.A., M. Levinstein et M. SHUR, *Handbook series on semiconductor parameters*, t. 2 (World Scientific, London, 1999), p. 1–36 (cf. p. 134).
- [97] M. A. AFROMOWITZ, « Thermal conductivity of  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$  alloys », *Journal of Applied Physics* **44**, 1292–1294 (1973) (cf. p. 134).
- [98] S. ADACHI, « GaAs, AlAs, and  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  : material parameters for use in research and device applications », *Journal of Applied Physics* **58**, R1–R29 (1985) (cf. p. 134).
- [99] B. MONEMAR, K. SHIH et G. PETTIT, « Some optical properties of the  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  alloys system », *Journal of applied Physics* **47**, 2604–2613 (1976) (cf. p. 134).
- [100] A. PIKHTIN et A. YAS'KOV, « Dispersion of the refractive index of semiconducting solid solutions with the main reflection maximum sphalerite structure », *Sov. Phys. Semicond.* **14**, 389–392 (1990) (cf. p. 134).
- [101] Y. HUO, C. Y. CHO, K. F. HUANG, Y. F. CHEN et C. C. LEE, « Exploring the DBR superlattice effect on the thermal performance of a VECSEL with the finite element method », *Opt. Lett.* **44**, 327–330 (2019) (cf. p. 134, 138).
- [102] IOFFE-INSTITUTE, *New semiconductor materials*, <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/>, 1999 (cf. p. 134).
- [103] F. ABELÈS et P. BAUMEISTER, « Multilayer reflectors with minimal dispersion of differential phase shift upon reflection », *Optics Communications* **93**, 1–3 (1992) (cf. p. 135).
- [104] D. I. BABIC et S. W. CORZINE, « Analytic expressions for the reflection delay, penetration depth, and absorptance of quarter-wave dielectric mirrors », *IEEE Journal of Quantum Electronics* **28**, 514–524 (1992) (cf. p. 136).

- [105] C. LAUER et M.-C. AMANN, « Calculation of the linewidth broadening in vertical-cavity surface-emitting lasers due to temperature fluctuations », *Applied Physics Letters* **86**, 191108 (2005) (cf. p. 137, 153, 154).
- [106] Y. LEVIN, « Fluctuation–dissipation theorem for thermo–refractive noise », *Physics Letters A* **372**, 1941–1944 (2008) (cf. p. 137).
- [107] H. B. CALLEN et T. A. WELTON, « Irreversibility and generalized noise », *Phys. Rev.* **83**, 34–40 (1951) (cf. p. 137).
- [108] G. CHEN, C. TIEN, X WU et J. SMITH, « Thermal diffusivity measurement of GaAs/AlGaAs thin-film structures », *Journal of Heat Transfer* **116**, 325–331 (1994) (cf. p. 138).
- [109] A. RAMIERE, S. VOLZ et J. AMRIT, « Thermal resistance at a solid/superfluid helium interface », *Nature materials* **15**, 512 (2016) (cf. p. 138).
- [110] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER et B. ROULET, *Physique statistique* (Hermann Paris, 1989) (cf. p. 140).
- [111] L. LANDAU et E. LIFSHITZ, *Course of theoretical physics, VI : fluid mechanics* (MIR editions, 1971) (cf. p. 141).
- [112] K. VAN VLIET, « Markov approach to density fluctuations due to transport and scattering. I. mathematical formalism », *Journal of Mathematical Physics* **12**, 1981–1998 (1971) (cf. p. 141).
- [113] K. VAN VLIET, « Markov approach to density fluctuations due to transport and scattering. II. applications », *Journal of Mathematical Physics* **12**, 1998–2012 (1971) (cf. p. 141).
- [114] K. VAN VLIET et H. MEHTA, « Theory of transport noise in semiconductors », *Physica Status Solidi (B)* **106**, 11–30 (1981) (cf. p. 141).
- [115] M. LEUTENEGGER, *MATLAB file exchange : hankel transform*, <https://fr.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13371-hankel-transform>, 2007 (cf. p. 144, 165).
- [116] A. BRODA, A. KUŹMICZ, G. RYCHLIK, K. CHMIELEWSKI, A. WÓJCIK-JEDLIŃSKA, I. SANKOWSKA, K. GOŁASZEWSKA-MALEC, K. MICHALAK et J. MUSZALSKI, « Highly efficient heat extraction by double diamond heat-spreaders applied to a vertical external cavity surface-emitting laser », *Optical and Quantum Electronics* **49**, 287 (2017) (cf. p. 144, 145).
- [117] Y. G. ZHAO et J. G. MCINERNEY, « Transient temperature response of vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics* **31**, 1668–1673 (1995) (cf. p. 145).

- [118] M. E. INNOCENZI, H. T. YURA, C. L. FINCHER et R. A. FIELDS, « Thermal modeling of continuous-wave end-pumped solid-state lasers », *Applied Physics Letters* **56**, 1831–1833 (1990) (cf. p. 146).
- [119] J.-R. CHAMPEAU, R. CARPENTIER et I. LORGERÉ, *Ondes lumineuses : propagation, optique de fourier, cohérence* (De Boeck Supérieur, 2009) (cf. p. 147, 170).
- [120] W. KOECHNER et M. BASS, *Solid-state lasers : a graduate text* (Springer Science & Business Media, 2006) (cf. p. 149).
- [121] A. LAURAIN, L. CERUTTI, M. MYARA et A. GARNACHE, « 2.7  $\mu\text{m}$  single-frequency TEM00 low-threshold Sb-based diode-pumped external-cavity VCSEL », *IEEE Photonics Technology Letters* **24**, 246–248 (2012) (cf. p. 153).
- [122] S. FOSTER, « Fundamental limits on  $1/f$  frequency noise in rare-earth-metal-doped fiber lasers due to spontaneous emission », *Phys. Rev. A* **78**, 013820 (2008) (cf. p. 153, 156).
- [123] S. FOSTER, A. TIKHOMIROV et M. MILNES, « Fundamental thermal noise in distributed feedback fiber lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics* **43**, 378–384 (2007) (cf. p. 153, 156).
- [124] G. HUANG, E. LUCAS, J. LIU, A. S. RAJA, G. LIHACHEV, M. L. GORODETSKY, N. J. ENGELSEN et T. J. KIPPENBERG, « Thermorefractive noise in silicon-nitride microresonators », *Phys. Rev. A* **99**, 061801 (2019) (cf. p. 153).
- [125] A. PARENT, M. MORIN et P. LAVIGNE, « Propagation of super-gaussian field distributions », *Optical and quantum electronics* **24**, S1071–S1079 (1992) (cf. p. 162).
- [126] F. GORI, « Flattened gaussian beams », *Optics Communications* **107**, 335 (1994) (cf. p. 162).
- [127] S. BOLLANTI, P. D. LAZZARO, D. MURRA et A. TORRE, « Analytical propagation of supergaussian-like beams in the far-field », *Optics Communications* **138**, 35–39 (1997) (cf. p. 163).
- [128] S. BOLLANTI, P. D. LAZZARO, D. MURRA, A. TORRE et C. E. ZHENG, « Propagation of doughnut-shaped super-gaussian beams, convolution theorem and hankel transform », *Journal of Modern Optics* **52**, 551–561 (2005) (cf. p. 163).
- [129] R. H. BROWN et R. Q. TWISS, « A test of a new type of stellar interferometer on Sirius », *Nature* **178**, 1046–1048 (1956) (cf. p. 169, 170).
- [130] L. MANDEL et E. WOLF, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge university press, 1995) (cf. p. 169).
- [131] R. J. GLAUBER, « The quantum theory of optical coherence », *Phys. Rev.* **130**, 2529–2539 (1963) (cf. p. 169).

- [132] J. H. EBERLY, X.-F. QIAN et A. N. VAMIVAKAS, « Polarization coherence theorem », *Optica* **4**, 1113–1114 (2017) (cf. p. 169).
- [133] S. DE, V. THIEL, J. ROSLUND, C. FABRE et N. TREPS, « Modal analysis for noise characterization and propagation in a femtosecond oscillator », *Opt. Lett.* **44**, 3992–3995 (2019) (cf. p. 169, 180, 183, 185, 201).
- [134] R. SCHMEISSNER, J. ROSLUND, C. FABRE et N. TREPS, « Spectral noise correlations of an ultrafast frequency comb », *Phys. Rev. Lett.* **113**, 263906 (2014) (cf. p. 169, 180, 183, 185, 201).
- [135] V. THIEL, J. ROSLUND, S. DE, C. FABRE et N. TREPS, « Recovering the dynamics of optical frequency combs from phase-amplitude noise correlations measurements », *ArXiv* **1806.02198** (2018) (cf. p. 169, 180, 183, 185, 189, 201).
- [136] E. WOLF, *Introduction to the theory of coherence and polarization of light* (Cambridge University Press, 2007) (cf. p. 170, 171, 201).
- [137] F. ZERNIKE, « The concept of degree of coherence and its application to optical problems », *Physica* **5**, 785–795 (1938) (cf. p. 170).
- [138] H. ROYCHOWDHURY et E. WOLF, « Determination of the electric cross-spectral density matrix of a random electromagnetic beam », *Optics Communications* **226**, 57–60 (2003) (cf. p. 172).
- [139] E. WOLF, « Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation », *Optics Letters* **28**, 1078–1080 (2003) (cf. p. 172).
- [140] E. WOLF, « Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams », *Physics letters A* **312**, 263–267 (2003) (cf. p. 172).
- [141] J. TERVO, T. SETÄLÄ et A. T. FRIBERG, « Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space–frequency domain », *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 2205–2215 (2004) (cf. p. 173).
- [142] J. BENZECRI, *Pratique de l'analyse des données* (Paris : Dunod, 1980) (cf. p. 188).
- [143] J. V. STONE, *Independent component analysis : a tutorial introduction* (MIT press, 2004) (cf. p. 195).
- [144] J. W. GOODMAN, *Statistical optics* (John Wiley & Sons, 2015) (cf. p. 197).
- [145] D. A. DICKEY et W. A. FULLER, « Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root », *Journal of the American Statistical Association* **74**, 427–431 (1979) (cf. p. 198).

- 
- [146] D. KWIATKOWSKI, P. C. PHILLIPS, P. SCHMIDT et Y. SHIN, « Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : how sure are we that economic time series have a unit root ? », *Journal of Econometrics* **54**, 159 –178 (1992) (cf. p. 198).
- [147] D. ALLAN, H. HELLWIG, P. KARTASCHOFF, J. VANIER, J. VIG, G. M. WINKLER et N. YANNONI, « Standard terminology for fundamental frequency and time metrology », in *Proceedings of the 42nd annual frequency control symposium, 1988*. (IEEE, 1988), p. 419–425 (cf. p. 215).
- [148] D. A. STECK, *Alkali D line data*, <http://steck.us/alkalidata>, 2012 (cf. p. 222, 224).

**Titre :** Propriétés de bruit et dynamique de lasers à semiconducteurs en régime d'émission bifréquence pour l'optique micro-ondes et la métrologie

**Mots clés :** Dynamique et bruit de laser, lasers à semiconducteurs, horloges atomiques CPT, asservissements opto-électroniques, effets thermo-optiques, optique micro-ondes

**Résumé :** L'émission cohérente de deux fréquences optiques présentant un battement radio-fréquence accordable trouve son application dans les liaisons opto-hyperfréquences, utiles aux radars ou radio-télescopes, mais également dans le domaine de la métrologie avec le déport optique de références temps-fréquence ultra-stables. Grâce à un cristal biréfringent à l'intérieur de leur cavité, les lasers à semiconducteurs de type VECSEL (*vertical-external-cavity surface-emitting lasers*) permettent de générer deux faisceaux corrélés de bonne pureté spectrale, avec une différence de fréquence accordable et polarisés linéairement dans des directions orthogonales. De telles sources lasers ont été développées à la longueur d'onde de la transition  $D_2$  du césium dans le but d'élaborer une horloge atomique exploitant une résonance par CPT (*coherent population trapping*). L'objectif est de proposer un compromis inédit entre performance et compacité. En plus de caractériser les bruits (intensité et phase) de ces sources lasers, nous exploitons la modélisation de leur dynamique grâce à des équations d'évolution couplées pour mi-

nimiser dans un premier temps le transfert de bruit provenant de la pompe et optimiser dans un second temps leur asservissement. Une nouvelle architecture de la pompe optique produisant deux faisceaux corrélés est mise en place pour cette minimisation. La contribution du niveau de bruit mesuré à l'instabilité à court terme de l'horloge CPT est ensuite prédite. Aux basses fréquences, le spectre de bruit de phase du battement généré par le VECSEL bifréquence est dominé par des effets thermo-optiques, principalement causés par le bruit de la pompe. Nous établissons un modèle tenant compte des détails microscopiques du milieu à gain, de l'anisotropie de la diffusion de chaleur, des effets de lentille thermique ou encore des fluctuations thermodynamiques. Nous analysons la matrice de covariance spectrale des bruits d'intensité. Les modes propres des fluctuations sur les polarisations croisées sont alors comparés aux modes symétriques et anti-symétriques. Enfin, une méthode est élaborée pour obtenir une caractérisation et un tri des processus non-stationnaires de bruit particulièrement présents aux basses fréquences.

**Title :** Dynamics and noise properties of dual-frequency semiconductor lasers for microwave photonics and metrology

**Keywords :** Laser noise and dynamics, semiconductor lasers, CPT atomic clocks, opto-electronic servo-loops, thermo-optic effects, dual-frequency lasers

**Abstract :** Coherent emission of two optical tones with a radiofrequency (RF) tunable beatnote can spur many microwave photonics applications. Indeed, it can be useful for radars, remote sensing, or in the metrological context of ultra-stable RF frequency standards. A birefringent crystal can be inserted inside the external cavity of a VECSEL (*vertical-external-cavity surface-emitting lasers*) to produce a tunable very low-noise RF beatnote out of two orthogonal linear polarizations. Such dual-frequency semiconductor lasers operating along the  $D_2$  line of cesium have been developed for CPT (*coherent population trapping*) atomic clocks. The development of these clocks corresponds to a need to find a trade-off between size and performance. First, intensity and RF beatnote phase noise investigations in these dual-frequency VECSELs are reported. A model based on coupled rate equations allows us to find minimization strategies for the noise transfer from the pump to the laser thanks to a new pumping architecture, which produces two

correlated pump spots to feed the laser modes. The laser dynamics is then optimized for efficient noise active suppression. We predict a contribution to the short term relative frequency stability of the CPT clock compatible with an Allan deviation of  $5 \times 10^{-13}$  at 1 s. Pump induced thermo-optic effects are dominating the low-frequency part of the dual-frequency VECSEL beatnote phase noise spectrum and require to be better understood. A new thermal model is thus established. This model takes into account the details of the gain medium, heat diffusion spatial anisotropy, thermal lens effects and also thermodynamic fluctuations. Besides, an analysis of the spectral intensity noise covariance matrix is initiated. We evidence that the eigen modes of the cross-polarized intensity fluctuations are close to in-phase and anti-phase noise mechanisms. Eventually, we elaborate a novel characterization and ranking method for non-stationary noises, which are often related to low-frequency spurious peaks.

