Sur les invariants cohomologiques des groupes algébriques linéaires

Alexandre Lourdeaux

N°d'ordre NNT : 2020LYSE1044

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale 512
InfoMaths

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 18/03/2020, par :

Alexandre Lourdeaux

Sur les invariants cohomologiques des groupes algébriques linéaires

---

Devant le jury composé de :

Mme Anna Cadoret (Prof., Sorbonne Université)	Examinatrice
M. Frédéric Déglise (DR CNRS, Université de Bourgogne)	Examinateur
M. Kenji Iohara (Prof., Université Lyon 1)	Examinateur
M. Philippe Gille (DR CNRS, Université Lyon 1)	Directeur de thèse
Mme Anne Quéguiner-Mathieu (M.C., Université Paris 13)	Examinatrice
M. Jean-Pierre Tignol (Prof. ordinaire émérite, Université Catholique de Louvain)	Rapporteur

Rapporteur hors du jury :
M. Stefan Gille (Prof., University of Alberta)

– Résumé –

Notre thèse s'intéresse aux invariants cohomologiques des groupes algébriques linéaires, lisses et connexes sur un corps quelconque. Plus spécifiquement on étudie les invariants de degré 2 à coefficients dans le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$, c'est-à-dire des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer. Pour se faire on utilise la cohomologie étale des faisceaux sur les schéma simpliciaux. On obtient une description de ces invariants pour *tous* les groupes linéaires, lisses et connexes, notamment les groupes non réductifs sur un corps imparfait (par exemple les groupes pseudo-réductifs ou unipotents).

On se sert de la description établie pour étudier le comportement du groupe des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer par des opérations sur les groupes algébriques. On explicite aussi ce groupe d'invariants pour certains groupes algébriques non réductifs sur un corps imparfait.

Mots clés : Cohomologie étale, Cohomologie galoisienne, Corps imparfaits, Groupes algébriques linéaires, Groupes de Brauer, Invariants cohomologiques, Schémas simpliciaux.

– Abstract –

Our thesis deals with the cohomological invariants of smooth and connected linear algebraic groups over an arbitrary field. More precisely, we study degree 2 invariants with coefficients $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$, that is invariants taking values in the Brauer group. Our main tool is the étale cohomology of sheaves on simplicial schemes. We get a description of these invariants for *every* smooth and connected linear groups, in particular for non reductive groups over an imperfect field (as pseudo-reductive or unipotent groups for instance).

We use our description to investigate how the groups of invariants with values in the Brauer group behave with respect to operations on algebraic groups. We detail this group of invariants for particular non reductive algebraic groups over an imperfect field.

Keywords : Brauer groups, Cohomological invariants, Étale cohomology, Galois cohomology, Linear algebraic groups, Non perfect fields, Simplicial schemes.

Remerciements

Je tiens à adresser un immense Merci à Philippe Gille, mon directeur de thèse. Je le remercie de m'avoir pris en étudiant, de m'avoir fait découvrir des mathématiques ravissantes et fabuleuses, de m'avoir guidé dans les méandres des groupes algébriques et de la cohomologie. Aussi je le remercie de m'avoir supporté durant ces années avec gentillesse et bienveillance malgré les difficultés personnelles. J'eusse aimé honorer sa direction en produisant une thèse plus riche et plus large.

Je remercie Stefan Gille et Jean-Pierre Tignol d'avoir accepté d'être rapporteurs, d'avoir pris le temps et la peine de lire chaque ligne du manuscrit. Je remercie Anna Cadoret, Frédéric Déglise, Kenji Iohara, Anne Quéguiner-Mathieu et Jean-Pierre Tignol ; je me sens honoré de leur participation dans le jury.

Merci aux membres et au personnel de l'Institut Camille Jordan, qui ont facilité toutes les démarches nécessaires pour partir en convention ou pour toute autre nécessité administrative. Tout se passait parfaitement bien malgré ma constitution qui veut que je fasse toute démarche à la dernière minute, voire en retard.

Je voudrais remercier mes professeurs de mathématiques du lycée : C. Boilley et M. Plantin. Qui m'ont fasciné par leur personne. Je tiens à citer aussi mes camarades du lycée avec qui on a continué de se voir, sporadiquement ou rarement, depuis nos 18 ans. Il me faut exprimer ma profonde affection pour eux. Merci à Gabriel et Paulien, pour la folie, les partages culturels, et qui n'ont toujours pas déserté malgré l'expression continue de mes craintes et plaintes obsessives.

Un grand Merci à ma famille. À mes parents de se donner et de s'être donné tant de peines pour m'aider et me soutenir sans défaut et même au-delà. À ma petite grande sœur, qui ne m'a pas traumatisé quand on était enfants. Puisse cette thèse être dédiée à William, ce petit bonhomme tout joyeux ; puisse-t-il surpasser les additions, soustractions et multiplications du Cours Élémentaire.

Sommaire

Chapitre 0

Introduction

0.1. Paysage

Soit k un corps de caractéristique p. Il fera office de corps de base pour toute la discussion. Il s'agit d'un corps tout à fait quelconque : on ne l'astreint à aucune condition, il peut être fini ou infini, de caractéristique nulle ou première, parfait ou imparfait, etc. On désigne par k_s une clôture séparable de k et par Γ le groupe de Galois absolu de k. Par « k-groupe algébrique » on entend « k-schéma en groupes de type fini ».

On désigne par G un k-groupe algébrique G lisse (et affine).

Les torseurs. Pour tout k-groupe algébrique G lisse on peut définir $\mathrm{H}^1(k, G)$, le premier ensemble de cohomologie de k à coefficient dans G. Cet ensemble peut être appréhendé sous divers aspects. Le premier aspect est celui de la cohomologie galoisienne : $\mathrm{H}^1(k, G)$ est l'ensemble des classes de 1-cocycles $z : \Gamma \to G(k_s)$ cohomologues. Le deuxième aspect est celui des torseurs, car $\mathrm{H}^1(k, G)$ est aussi l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs de base $\mathrm{Spec}(k)$. Enfin, le troisième aspect apparaît lorsque le groupe G s'exprime comme le foncteur des automorphismes d'une certaine *structure algébrique* S, par exemple une k-algèbre simple ou d'un k-schéma : dans ce cas $\mathrm{H}^1(k, G)$ est aussi l'ensemble des classes d'isomorphismes des structures algébriques S' qui deviennent isomorphes à la structure initiale S une fois qu'on a étendu les scalaires à k_s.

Exemple 0.1.1. Le groupe orthogonal linéaire O_n est le foncteur d'automorphismes de la forme quadratique canonique du k-espace vectoriel k^n. L'ensemble $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{O}_n)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes quadratiques sur k^n.

L'ensemble $\mathrm{H}^1(k, G)$ permet ainsi d'encoder une partie de la géométrie du k-groupe G, ou de répertorier une famille d'objets qui se confondent sur k_s. On aimerait donc étudier cet ensemble et pour se faire on peut s'appuyer sur le côté cohomologique de $\mathrm{H}^1(k, G)$. De plus $\mathrm{H}^1(k, G)$ n'a pas de structure naturelle de groupe en général, il paraît donc sage de comparer $\mathrm{H}^1(k, G)$ à de "vrais" groupes de cohomologie galoisienne, des groupes $\mathrm{H}^d(k, M)$ de cohomologie de degré d à coefficients dans le module galoisien M.

Les invariants cohomologiques. Puisque pour avoir des informations pertinentes sur le k-groupe algébrique G il vaut mieux, en géométrie algébrique, considérer comment ce groupe se comporte sur les surcorps de k, on étudie plutôt le foncteur $\mathrm{H}^1(\star, G)$ de la catégorie $\underline{Corps_k}$ des extensions de corps de k vers la catégorie des ensembles $\underline{Ens}$. Le foncteur $\mathrm{H}^1(\star, G)$ attribue à toute extension de corps K/k, l'ensemble $\mathrm{H}^1(K, G) := \mathrm{H}^1(K, G_K)$, où G_K est le K-groupe algébrique obtenu à partir de G par extension des scalaires de k à K. Plus généralement, suivant Serre, on définit :

Définition 0.1.2. Soit un H un foncteur de la catégorie $\underline{Corps_k}$ vers la catégorie des groupes abéliens $\underline{Ab}$. Un *invariant de G à valeurs dans H* est un morphisme de foncteurs de $\mathrm{H}^1(\star, G)$ vers H.

Quand H est le foncteur $\mathrm{H}^d(\star, M)$ donné par les groupes de cohomologie galoisienne de degré d à coefficients dans le module galoisien M, on parle plutôt *d'invariant (cohomologique) de G de degré d à coefficients dans M*.

La définition d'invariant cohomologique englobe les invariants usuels des formes quadratiques. En effet, supposant k de caractéristique $\neq 2$, les classes de Stiefel-Whitney de formes quadratiques ou l'invariant de Hasse-Witt permettent de définir des invariants cohomologiques du groupe orthogonal O_n/k à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (module galoisien pour l'action triviale de Γ).

Pour un foncteur $H : \underline{Corps_k} \to \underline{Ab}$ donné, on note $\mathrm{Inv}(G, H)_0$ le groupe constitué des invariants i de G à valeurs dans H tels que i envoie la classe du torseur trivial G/k sur $0 \in H(k)$. On note aussi ce groupe $\mathrm{Inv}^d(G, M)$ lorsque H correspond aux groupes de cohomologie galoisienne de degré d à coefficients dans le module galoisien M.

Originellement, les invariants étudiés sont ceux provenant de foncteurs H construits à partir des *modules de cycles* (par exemple $H := \mathrm{H}^d(\star, M)$ pour un module galoisien M fini et d'ordre premier à la caractéristique de k). Ils présentent nombre d'avantages techniques (principalement d'invariance par homotopie) mais ignorent les phénomènes liés à la caractéristique du corps de base. Pour une étude plus générale, on utilise les (complexes de) modules galoisiens $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$, $j \in \mathbb{N}$). Cependant la partie p-première est plus complexe à définir et plus subtile à manipuler.

Les principaux résultats connus pour des k-groupes G affines, lisses et connexes, sont les suivants :

1. Dans l'article [EKLV98], les auteurs construisent l'*invariant de Rost* (élément de $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_0$) pour G simple, simplement connexe, et montrent que $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_0$ est fini cyclique, engendré par l'invariant de Rost. On en trouve une présentation et un étude plus approfondies dans [GMS03, Part II].
2. Dans leur article [BM13], Blinstein et Merkurjev présentent le résultat selon lequel $\mathrm{Inv}^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))_0$ est isomorphe au groupe de Picard de G dans le cas où G est réductif si la caractéristique du corps de base est non nulle.
3. Dans le même article, il est également établi que, lorsque G est semi-simple, les invariants *non-ramifiés* de degré $d = 2$ sont triviaux.
4. Toujours dans le même article, les auteurs décrivent $\mathrm{Inv}^3(T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_0$ pour T un tore, en l'enchâssant dans une suite exacte.
5. Récemment, dans [Mer16], Merkurjev est parvenu à généraliser le résultat de Rost en insérrant les groupe $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ dans une suite exacte, pour G semi-simple sur un corps arbitraire. Cette suite est très similaire au cas du tore.
6. Puis dans [LM16], Laackman et Merkurjev (toujours) montrent un résultat analogue à 5 pour tout groupe réductif *déployé* en utilisant de la cohomologie motivique étale.

Ces résultats concernent principalement les groupes semi-simples, voire réductifs. L'impulsion initiale de la présente thèse est de s'intéresser aux invariants de groupes qui ne sont pas réductifs.

0.2. Aperçu de la thèse

Dans la thèse, on donne une description en termes géométriques des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer pour des groupes algébriques affines, lisses et connexes sur un corps quelconque. Pour cela on utilise un modèle simplicial pour les torseurs classifiant et on se sert de la cohomologie des faisceaux sur les schémas simpliciaux.

Notons que l'on ne suppose pas que le corps de base soit parfait, ni que les groupes considérés soit réductifs. Aussi on conserve la partie p-primaire du groupe de Brauer pour p la caractéristique du corps de base - on a donc affaire à de la "mauvaise" torsion.

On se donne un corps k pour toute la présentation et on note p sa caractéristique.

Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe. Blinstein et Merkurjev ont construit un morphisme de groupes σ_G de $\mathrm{Pic}(G)$ vers $\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$ avec l'hypothèse que G soit réductif lorsque p est non nul, et ils montrent que σ_G est un isomorphisme. L'apparition de l'hypothèse de réductivité vient de ce que leur construction de σ_G est basée sur [San81, Prop. 6.10.] qui comporte déjà cette restriction. Pour Sansuc, la réductivité de G permet de s'assurer que si X est une k-variété géométriquement intègre et lisse, alors $\mathrm{Pic}(X \times_k G)$ est canoniquement isomorphe à la somme $\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(G)$. Il s'en sert pour faire les calculs démontrant [San81, Prop. 6.10.]. Grâce à la cohomologie des schémas simpliciaux on a un contrôle précis des calculs et hypothèses de la proposition de Sansuc - un retour aux sources pour ainsi dire. On est ainsi parvenu à retirer les restrictions de réductivité dans [BM13, Th. 2.4.], pour obtenir :

Théorème A (Th. 2.3.2)**.** *Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$$

qui est fonctoriel en G.

Précisons que le groupe d'extensions $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ est le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(G)$ tout entier dans les hypothèses de [BM13, Th. 2.4.] (exemple B.1.5).

Pour montre l'isomorphisme du théorème on part de [BM13, Th. 3.4.] (théorème 2.2.7) pour un G-torseur versel $E \to G$ convenable. On sait par ailleurs que $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)))$ (théorème 1.2.16). Cela provient de la conjecture de Gersten pour le complexe de faisceau $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ sur un schéma de type fini et régulier sur un corps, éventuellement imparfait. On remontre ce fait à partir de l'article de Shiho [Shi07]. La réalisation de la conjecture de Gersten dans cette situation est l'ingrédient essentiel pour capter les phénomènes de torsion p-primaire des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer. On a ainsi un isomorphisme $\mathrm{Br}(X)_{\text{éq}} \simeq \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$. On finit par calculer $\mathrm{Br}(X)_{\text{éq}}$ à l'aide de la cohomologie des schémas simpliciaux.

On peut aussi utiliser la théorie simpliciale des schémas pour construire et étudier des invariants cohomologique. Comme exposé dans [Del74], on peut trouver un modèle simplicial de torseur classifiant, $\mathrm{B}G^\bullet$. Avec le schéma simplicial $\mathrm{B}G^\bullet$ on peut construire des invariants de G à coefficients dans un faisceau sur le gros site étale de $\underline{Sch_k}$. La construction est analogue à celle de [BM13] pour les torseurs versels. On peut la trouver dans [EKLV98], où les auteurs s'en servent pour construire l'invariant de Rost d'un k-groupe algébrique absolument presque simple, simplement connexe. Pour tout entier d, si $\mathcal{F}$ est un faisceau étale sur $\underline{Sch_k}$, la construction avec le torseur classifiant simplicial fournit un morphisme de groupes $\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{Inv}^d(G, \mathcal{F})$. Dans la thèse on discute cette construction et on la compare à celle de Blinstein et Merkurjev. L'avantage de l'utilisation du torseur classifiant simplicial est la canonicité des objets et morphismes. Il semble possible d'utiliser ce point de vue à profit pour étudier les invariants de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$, mais cela n'est pas présent dans la thèse. On montre en symbiose avec le théorème A le résultat suivant :

Théorème B (Th. 2.3.1)**.** *Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe. Alors on a un isomorphisme*
$$\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})$$
qui est fonctoriel en G.

On s'est évertué dans la section 1.1 d'ajouter les détails à [Del74] et de tout définir pour les topologies habituelles en géométrie algébrique. Les détails que l'on a ajoutés concernent principalement les propriétés de fonctorialités des faisceaux et le caractère abélien de la catégorie des faisceaux sur un schéma simplicial et le fait que cette catégorie a suffisamment d'objets injectifs.

Le théorème A reporte l'étude des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer à celle des groupes d'extensions par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, ces groupes étant plus facilement accessibles. Une première conséquence concerne la construction *connectique* : pour toute extension de groupes algébriques

$$(E) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1,$$

on peut considérer la suite exacte longue en cohomologie qui fournit en particulier une application
$$\delta_K^E : \mathrm{H}^1(K, G) \to \mathrm{H}^2(K, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(K)$$
pour toute extension K/k. Après quelques vérifications, la règle $E \mapsto (\delta_K^E)_K$ définit un morphisme de groupes

$$\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Inv}^2(G, \mathrm{Br})_0. \tag{1}$$

On qualifie cette construction ainsi que le morphisme (1) de *connectique*[1] (car ils sont issus de l'application de connexion en cohomologie...). On montre :

Proposition C (Prop. 3.1.4)**.** *La construction connectique d'invariants à valeurs dans le groupe de Brauer induit un isomorphisme* $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$ *pour* tout *k-groupe algébrique affine, lisse et connexe G.*

On en tire :

1. Il s'agit d'un terme propre à la thèse car nous n'avons trouvé aucune dénomination dans la littérature.

Conséquence D (sous-section 3.1.3)**.** *Tous les invariants à valeurs dans le groupe de Brauer sont aussi définis pour les G-torseurs sur des bases quelconques. Cela signifie que tout invariant* $i : \mathrm{H}^1(\star, G) \to \mathrm{Br}(\star)$, *qui est un morphisme de foncteurs de la catégorie des extensions de k vers celle des ensembles, est en fait la restriction d'un morphisme de foncteurs* $\mathrm{H}^1(\star, G) \to \mathrm{H}^2(\star, \mathbb{G}_m)$ *de la catégorie des k-schémas vers celle des ensembles.*

Ensuite, pour disposer de nouveaux invariants par rapport à ceux des groupes réductifs, on s'est penché sur les groupes d'extensions des groupes pseudo-semi-simples. Dans [CP16], Conrad et Prasad montrent que pour tout groupe G affine, lisse, connexe et parfait, il existe une extension *modérée* (théorème 3.2.13)

$$1 \to \mu \to H \to G \to 1$$

avec H affine, parfait et μ *modéré*, qui domine toutes les autres extensions du même type. On montre :

Proposition E (Prop. 3.2.15)**.** *Le morphisme de poussée d'extensions* $\widehat{\mu}(k) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ *est un isomorphisme.*

Pour un k-groupe H, la notation $\widehat{H}(k)$ désigne le groupe des caractères de H (définis sur k).

Le proposition est une généralisation du cas des groupes semi-simples, car le groupe d'extension d'un tel groupe est isomorphe au groupe de caractères du noyau du revêtement par un groupe semi-simple, simplement connexe. Elle permet de déterminer les groupes d'extensions et d'invariants à valeurs dans le groupe de Brauer de certains groupes pseudo-semi-simples.

Proposition F (Prop. 3.2.15 et Prop. 3.2.16)**.** *Soit k'/k une extension finie de corps, purement inséparable, de hauteur h. Soit G' un k'-groupe semi-simple, simplement connexe et soit μ un sous-groupe central de G'. Alors en posant* $G := \mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$, *on a des isomorphismes*

$$p^h\widehat{\mu}(k') \simeq \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m),$$
$$\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0 \simeq p^h\widehat{\mu}(k').$$

Si μ est d'ordre p-primaire (par exemple μ est le groupe de racines p^s-ième pour un entier s), alors pour h assez grand, le groupe G de la proposition n'a pas d'invariant non constant à valeurs dans le groupe de Brauer. À l'inverse les groupes unipotents lisses et connexes peuvent avoir une infinité d'invariants non constants (voir la discussion de la sous-section 3.2.1).

<u>Note</u>. Pour les définitions de base sur les groupes pseudo-réductifs (en particuliers pseudo-semi-simples), on invite le lecteur à consulter les paragraphes §1.1, 1.3 et 3.1 de l'excellent exposé [Rem11].

Indépendemment de tout ce qui précède, comme résultat d'une première investigation des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer, on est est parvenu à montrer que certains groupes pseudo-semi-simples sont rétractilement rationnels. Il serait intéressant d'approfondir les questions de rationalité des groupes pseudo-semi-simples.

Proposition G (Prop. B.2.9). *Soit k'/k une extension finie et purement inséparable de corps. Soit G' un k'-groupe semi-simple simplement connexe,* déployé *; et soit μ un sous-k'-groupe du centre de G'. Alors $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ est rétractilement rationnel sur k.*

La notion de rationnalité rétractile [2] a été introduite par Saltman dans [Sal84] pour des corps. La rationalité rétractile d'une variété est une propriété plus faible que la rationalité ou rationalité stable, et plus forte que l'unirationalité. En pratique, elle est plus proche de la rationalité que de l'unirationalité, en ce sens que dans certains résultats, on peut sans grande difficulté remplacer les hypothèses de rationalité par des hypothèses de rationalité rétractile (App. B.1). Par contre, il existe un critère pratique très commode pour prouver qu'une variété est rétractilement rationnelle (prop. B.2.2 issue de [Mer17]). Il est donc intéressant de commencer les études de rationalité par la rationalité rétractile.

Plan

Notre thèse se déroule de la façon qui suit.

Le chapitre 1, intitulé *Outillages*, est consacré à la revue des ingrédients importants pour l'étude des invariants cohomologiques que l'on réalise au chapitre 2. La section 1.1 expose les définitions de base de la théorie des schémas simpliciaux et surtout de la cohomologie des (complexes de) faisceaux sur ces objets pour les topologies de Grothendieck usuelles (de Zariski, étale, *etc*). Dans la section suivante, 1.2, on redéfinit les complexes de faisceaux étales $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$, $j \in \mathbb{N}$ sur un schéma de caractéristique constante. La section est là pour, premièrement, montrer clairement que si X est un schéma régulier de type fini sur un corps k, alors on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(X)$, et deuxièmement, justifier que les complexes $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ vérifient la conjecture de Gersten pour un schéma lisse sur un corps. Il s'agit de résultats connus des spécialistes, mais la littérature fait défaut sur leur établissement dans le cas d'un corps de base *imparfait*, ce qui est le cas qui nous intéresse le plus dans la thèse (nos résultats sont triviaux ou déjà établis pour un corps parfait).

Le chapitre 2 constitue le chapitre centrale de la thèse. On commence dans la section 2.1 par introduire les deux modèles de torseurs classifiant d'un groupe algébrique affine et lisse G sur un corps k : le modèle schématique et le modèle simplicial. Dans la section 2.2 on introduit les invariants cohomologiques dans leur généralité, puis on montre comment les torseurs classifiant de la section précédante permettent de construire des invariants cohomologiques à partir de la cohomologie de ces torseurs. La section 2.3 est dévouée à la démonstration du théorème 2.3.1 dont on tire le théorème 2.3.2

Le chapitre 3 exploite les théorèmes A et B. On y étudie les groupes d'extensions de certaines familles de groupes algébriques affines, lisses et connexe. En plus de résultats d'invariance du groupe d'extensions par certaines extensions de scalaires et des résultats de C à F discutés précédemment, la sous-section 3.2.1 présente des résultats récents d'autres auteurs sur les groupes d'extensions et de Picard des groupes unipotents lisses et connexes sur un corps imparfait. Lesdits résultats éclairent les invariants de Brauer des groupes unipotents et l'auteur de la thèse tient à les exposer pour améliorer leur diffusion qu'il juge importante.

2. *retract rationality* en anglais

Enfin, en annexe, on a regroupé diverses choses. L'annexe A discute des caractères d'un groupe construit comme la restriction de Weil d'un groupe de type multiplicatif de type fini à travers une extension finie, purement inséparable. L'annexe B relate une discussion sur l'additivité du groupe de picard de variétés ainsi qu'un résultat de rationalité rétractile pour des groupes pseudo-semi-simples. Il s'agit de remarques et réflexions initiales sur le projet de la thèse.

0.3. Notations générales

On recense les notations utilisées dans le texte. Beaucoup sont standard et seront réintroduites en lieu et place, mais mieux vaut dissiper toutes incertitudes de notations.

Si K est un corps, par « K-variété » on entendra « K-schéma de type fini séparé » et par « K-groupe algébrique » on entendra « K-schéma en groupes de type fini ».

k **:** Corps sans restriction (fini, infini, imparfait, *etc*). Il est utilisé comme corps de base des objets considérés. Même s'il est quelconque, sa finalité est d'être imparfait.

p **:** La caractéristique de k ou son exposant caractéristique.

$\bar{k}$ **:** Une clôture algébrique de k.

k_s **:** La clôture séparable de k *dans* $\bar{k}$.

K, L **:** Des corps généraux, souvent des extensions de k.

k' **:** Un corps, extension de k. Il s'agira surtout d'une extension finie, purement inséparable.

$\underline{Alg_k}$ **:** La catégorie des k-algèbres.

$\underline{Sch_k}$ **:** La catégorie des k-schémas.

$\underline{Sch_S}$ **:** La catégorie des S-schémas pour un schéma quelconque S.

$\underline{Ab}$ **:** La catégorie des groupes abéliens.

G, H **:** Des k-groupes algébriques.

$\widehat{G}(K)$ **:** Le groupe des K-caractères du k-groupe algébrique G pour K/k extension de corps.

μ_n **:** Le k-groupe algébrique des racines n-ième de l'unité.

X_K **:** Le K-schéma obtenu à partir du k-schéma X pour K/k extension de corps.

$\mathrm{Res}_{K/k}(X)$ **:** Le k-schéma obtenu par restriction de Weil du K-schéma X, K/k extension de corps.

$\mathrm{H}^d(X, \mathcal{F})$ **:** Le groupe de cohomologie étale de degré d du schéma X à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}$.

$\mathrm{H}^d(K, M)$ **:** Le groupe de cohomologie galoisienne de degré d du corps K à coefficients dans le module galoisien M.

Chapitre 1

Outillage

Le chapitre est consacré à la revue des ingrédients importants pour l'étude des invariants cohomologiques que l'on donne au chapitre 2. La section 1.1 expose les définitions de base de la théorie des schémas simpliciaux et surtout de la cohomologie des (complexes de) faisceaux sur ces objets pour les topologies de Grothendieck usuelles (de Zariski, étale, *etc*). On se base sur la présentation de Deligne dans [Del74]. Dans son article, Deligne est avant tout intéressé par des espaces topologiques ; on a essayé dans la section 1.1 de combler les détails et de tout définir pour les topologies habituelles en géométrie algébrique. Cependant dans le chapitre 2, quand on utilise de la cohomologie d'un faisceau sur un schéma simplicial, il s'agira seulement de la cohomologie du faisceau $\mathbb{G}_m$ sur le petit site étale du schéma simplicial en question (pour les invariants cohomologiques de degré trois il y aurait lieu de considérer aussi la topologie de Zariski, mais cet aspect n'est pas présent dans la Thèse). Dans la section suivante, 1.2, on redéfinit les complexes de faisceaux étales $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$, $j \in \mathbb{N}$ sur un schéma de caractéristique constante. Ils constituent les coefficients de prédilection pour définir les invariants cohomologiques actuels mais leur définition est très technique. Ils sont définis à partir des pro-complexes de de Rham-Witt présentés et étudiés dans [Ill79], dont on reprend l'exposition. Mais la section 1.2 est surtout là pour, premièrement, montrer clairement que si X est un schéma régulier de type fini sur un corps k, alors on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(X)$, et deuxièmement, justifier que les complexes $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ vérifient la conjecture de Gersten pour un schéma lisse sur un corps. Il s'agit de résultats connus des spécialistes, mais la littérature fait défaut sur leur établissement dans le cas d'un corps de base *imparfait*, ce qui est le cas qui nous intéresse le plus dans la Thèse (nos résultats sont triviaux ou déjà établis pour un corps parfait).

1.1. Cohomologie de faisceaux sur les schémas simpliciaux

On revoit ici les fondations de la théorie des schémas simpliciaux ainsi que de la théorie des faisceaux sur ces objets. On reprend essentiellement l'exposition faite par Deligne dans [Del74] (et aussi dans [Del96]) qu'on a tâché d'étoffer par des détails. Dans cette section on désigne par S un schéma quelconque, que l'on fixe comme base. La catégorie des S-schémas est notée $\underline{Sch_S}$ et celle des groupes abéliens $\underline{Ab}$.

1.1.1. Schémas simpliciaux

Considérons la catégorie $\underline{\Delta}$ dont la classe d'objets est constituée des ensembles finis $[n] = \{0, \cdots, n\}$ et dont les ensembles de morphismes sont les fonctions croissantes. Notons $\underline{\Delta}^\circ$ sa catégorie opposée.

Définition 1.1.1 ([Del74, (5.1.6)]). Un S-*schéma simplicial* est un foncteur $X^\bullet$ de $\underline{\Delta}^\circ$ dans $\underline{Sch_S}$, c'est-à-dire un foncteur *contravariant* de $\underline{\Delta}$ dans $\underline{Sch_S}$.

Se donner un S-schéma simplicial $X^\bullet$ est équivalent à se donner une famille $\{X^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$ de S-schémas et des S-morphismes $\delta_i^n : X^{(n)} \to X^{(n-1)}$ et $s_i^n : X^{(n)} \to X^{(n+1)}$ ($n \geqslant 0$, et $i = 0, \cdots, n$) vérifiant les identités suivantes :

$$\begin{array}{lrcll}
 & \delta_i^n \circ \delta_j^{n+1} & = & \delta_{j-1}^n \circ \delta_i^{n+1}, & \forall n > 0,\ \forall 0 \leqslant i < j \leqslant n+1, \\
 & \delta_i^{n+1} \circ s_j^n & = & s_{j-1}^{n-1} \circ \delta_i^n, & \forall n > 0,\ \forall 0 \leqslant i < j \leqslant n, \\
(1.1) & \delta_i^{n+1} \circ s_j^n & = & \mathrm{id}_{X_n}, & \forall n \geqslant 0,\ \forall 0 \leqslant i \leqslant n+1,\ j \in \{i-1, \max(i,n)\}, \\
 & \delta_i^{n+1} \circ s_j^n & = & s_j^{n-1} \circ \delta_{i-1}^n, & \forall n > 0,\ \forall 0 \leqslant i,\ j \leqslant n+1 \text{ avec } j+1 < i, \\
 & s_i^{n+1} \circ s_j^n & = & s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, & \forall n \geqslant 0,\ \forall 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.
\end{array}$$

En effet : Considérons les applications croissantes (utilisées pour les complexes simpliciaux en topologie)

$$\tilde{\delta}_i^n : \left\{ \begin{array}{ccc} [n-1] & \to & [n] \\ j & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} j \text{ si } j \leqslant i \\ j+1 \text{ si } j > i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\tilde{s}_i^n : \left\{ \begin{array}{ccc} [n+1] & \to & [n] \\ j & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} j \text{ si } j \leqslant i \\ j-1 \text{ si } j > i \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

L'équivalence des notions se fait comme suit.

— si l'on dispose d'un S-schéma simplicial $X^\bullet$, on pose $X^{(n)} := X^\bullet([n])$, et on prend s_i^n l'image par $X^\bullet$ de $\tilde{s}_i^n$ et δ_i^n l'image de $\tilde{\delta}_i^n$.

— si l'on a une famille $\{X^{(n)}\}$ et des morphismes δ_i^n, s_i^n vérifiant les identités (1.1) énoncées, on construit un S-schéma simplicial $X^\bullet$ en posant $X^\bullet([n]) = X^{(n)}$, et si $f : [m] \to [n]$ est croissante, f s'exprime comme une certaine composition de $\tilde{s}_i^p$ et de $\tilde{\delta}_j^q$, et on pose $X^\bullet(f)$ la composition correspondante en remplaçant $\tilde{s}_i^p$ par s_i^p et $\tilde{\delta}_j^q$ par δ_j^q.

Étant donné un S-schéma simplicial $X^\bullet$, on notera simplement δ_i les morphismes δ_i^n et s_i les morphismes s_i^n, quand l'indice n est clair. Les δ_i sont les *morphismes de faces* du S-schéma simplicial, et les s_i les *morphismes de dégénérescences* (suivant l'usage en topologie).

Exemple 1.1.2. À tout S-schéma X, on peut associer facilement un S-schéma simplicial. Le schéma simplicial « constant » $\mathrm{C}_S X^\bullet$ dont les schémas constitutifs sont $\mathrm{C}_S X^{(n)} := X$ et toutes les faces et dégénérescences sont le morphisme identité de X.

Si G est un S-schéma en groupes, on peut lui associer le S-schéma simplicial $\mathrm{E}_S G^\bullet$ défini par $\mathrm{E}_S G^{(n)} := \underbrace{G \times_S \cdots \times_S G}_{n+1 \text{ fois}}$, les faces étant données par les projections $\delta_i : \mathrm{E}_S G^{(n)} \to$

$\mathrm{E}_S G^{(n-1)}$ où l'on oublie le facteur $i+1$ (le $+1$ en raison du décalage d'indices...) et les dégénérescences par $s_i : \mathrm{E}_S G^{(n)} \to \mathrm{E}_S G^{(n+1)}$, $(g_0, \cdots, g_n) \mapsto (g_0, \cdots, g_{i-1}, 1, g_i, \cdots, g_n)$.

▷ **Fonctorialité.** La classe des S-schémas simpliciaux se fait catégorie en définissant l'ensemble des morphismes de $X^\bullet$ dans $Y^\bullet$ comme les morphismes de foncteurs $f_\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, qui peut se comprendre comme l'ensemble des familles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes de S-schémas $f_n : X^{(n)} \to Y^{(n)}$ tels que $f_n \circ \delta_{i,X} = \delta_{i,Y} \circ f_n$ et $f_n \circ s_{i,X} = s_{i,Y} \circ f_n$, avec bien sûr $\delta_{i,X}$ les morphismes de faces de X, $s_{i,X}$ ses morphismes de dégénérescences, et de même pour $\delta_{i,Y}$ et $s_{i,Y}$ avec Y .

1.1.2. Faisceaux

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathcal{S}$ une des phrases suivantes : « petit site de Zariski de », « grand site de Zariski de », « petit site étale », « grand site étale », « (grand) site *fppf* » et « (grand) site *fpqc* ». Ainsi, pour tout S-schéma X, $\underline{\mathcal{S}(X)}$ désigne le site associé au schéma X correspondant à $\mathcal{S}$. Par exemple si $\mathcal{S}$ est la phrase « petit site de Zariski », $\underline{\mathcal{S}(X)}$ est le petit site de Zariski du schéma X. On peut se référer par exemple à [Mil13, §I.5] pour les définitions précises de ces sites.

Définition 1.1.3 ([Del74, (5.1.6)])**.** Un $\mathcal{S}$-*faisceau* (en groupes abéliens) $\mathcal{F}_\bullet$ sur un S-schéma simplicial $X^\bullet$ correspond à la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}_n$ (en groupes abéliens) sur le site $\mathcal{S}(X^{(n)})$ pour tout entier positif n, et de morphismes $\varphi_f : \mathcal{F}_m \to X^\bullet(f)_*\mathcal{F}_n$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\Delta}}([m],[n])$ de sorte que φ soit compatible avec la composition dans $\underline{\Delta}$, c'est-à-dire que pour toutes applications croissantes $f : [m] \to [n]$ et $g : [n] \to [p]$, le morphisme $\varphi_{g\circ f} = \mathcal{F}_m \to X^\bullet(g\circ f)_*\mathcal{F}_p$ est identique à la composition

$$\mathcal{F}_m \xrightarrow{\varphi_f} X^\bullet(f)_*\mathcal{F}_n \xrightarrow{X^\bullet(f)_*\varphi_g} X^\bullet(g)_*X^\bullet(f)_*\mathcal{F}_p.$$

Rappelons que dans la définition, $X^\bullet(f)_*(\mathcal{F}_n)$ est le faisceau sur $X^{(m)}$ obtenu en « poussant en avant » le faisceau $\mathcal{F}_n$ (sur $X^{(n)}$) par le morphisme $X^\bullet(f)$.

Remarque 1.1.4. Soit X S-schéma. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X pour le site $\mathcal{S}$, on peut définir un $\mathcal{S}$-faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ sur le schéma simplicial constant $C_S X^\bullet$ par $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}$, avec les fonctions de transition φ_f toutes égales à l'identité $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Inversement, tout $\mathcal{S}$-faisceau sur $C_S X^\bullet$ est isomorphe à un faisceau de cette forme (voir plus bas pour la définition de morphisme entre faisceaux).

Remarque 1.1.5. Dans la définition 1.1.3, par adjonction, on peut se donner des morphismes $\psi_f : X^\bullet(f)^*\mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$ (compatibles avec la composition dans $\underline{\Delta}$) à la place des φ_f. Ici $(X^\bullet)^*\mathcal{F}_m$ est le faisceau sur $X^{(n)}$ obtenu par « tiré en arrière » du faisceau $\mathcal{F}_m$.

Si $\mathcal{S}$ signifie « petit site de Zariski », on dira d'un $\mathcal{S}$-faisceau sur le S-schéma simplicial $X^\bullet$ que c'est un faisceau sur le petit site de Zariski de $X^\bullet$. On suit la même logique pour les autres possibilités pour $\mathcal{S}$.

Remarque 1.1.6. Pour déterminer un $\mathcal{S}$-faisceau sur $X^\bullet$, il suffit de se donner les φ_f pour f les morphismes de faces et de dégérescences de $X^\bullet$.

Si $\mathcal{S}$ correspond aux grands sites pour l'une des topologies de Zariski, étale, *fppf* ou *fpqc*, un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(S)$ (de catégorie sous-jacente $\underline{Sch_S}$) induit naturellement un faisceau sur tout S-schéma simplicial $X^\bullet$: on définit $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{|X^{(n)}}$ et les morphismes $X^\bullet(f)_* (\mathcal{F}_n) \to \mathcal{F}_m$ sont ceux qui proviennent naturellement de $\mathcal{F}$. Le faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ ainsi construit sera simplement noté $\mathcal{F}$. Dans la Thèse, on s'intéresse en réalité seulement au faisceau des fonctions inversibles $\mathbb{G}_m$ sur le grand site étale du corps de base.

▷ **Fonctorialité.** Bien entendu, on dispose des fonctorialités suivantes ci-dessous.

- On bénéficie d'une fonctorialité entre faisceaux sur une même base, et partant on peut considérer des complexes de faisceaux $(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$:

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathcal{F}^i_\bullet \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{i+1}_\bullet \xrightarrow{d} \cdots , \\ d \circ d = 0$$

sur une même base. Un morphisme $\mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{G}_\bullet$ entre faisceaux sur $X^\bullet$ est la donnée $\phi_\bullet = (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes $\phi_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{G}_n$ sur $X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ telle que pour tous entier $m, n \geqslant 0$ et toute fonction croissante $f : [m] \to [n]$, on ait un carré commutatif de faisceaux sur $X^{(m)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_m \arrow[r, "\phi_m"] \arrow[d] & \mathcal{G}_m \arrow[d] \\ X^\bullet(f)_*\mathcal{F}_n \arrow[r, "X^\bullet(f)_*\phi_n"'] & X^\bullet(f)_*\mathcal{G}_n \end{tikzcd} ,$$

les flèches verticales étant celles de la définition de faisceaux pour $\mathcal{F}_\bullet$ et $\mathcal{G}_\bullet$.

- Si $f_\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ est un morphisme entre S-schémas simpliciaux, on a naturellement des transformations $(f_\bullet)_*$ et $(f_\bullet)^*$ qui respectivement pousse en avant les faisceaux sur $X^\bullet$ et tire en arrière les faisceaux sur $Y^\bullet$ ([Del74, (5.1.10)]) :

1. pour tout faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ sur $X^\bullet$, le faisceau $(f_\bullet)_*\mathcal{F}_\bullet$ est le faisceau obtenu à partir des faisceaux $(f_n)_*\mathcal{F}_n$ sur $Y^{(n)}$;
2. pour tout faisceau $\mathcal{G}_\bullet$ sur $Y^\bullet$, le faisceau $(f_\bullet)^*\mathcal{G}_\bullet$ est le faisceau obtenu à partir des faisceaux $(f_n)^*\mathcal{G}_n$ sur $X^{(n)}$.

1.1.3. Cohomologie

Pour pouvoir définir les groupes de cohomologie de schémas simpliciaux à coefficients dans un faisceau, on a besoin du résultat suivant.

Proposition 1.1.7. *La catégorie des $\mathcal{S}$-faisceaux sur le S-schéma X est une catégorie abélienne qui possède assez d'objets injectifs.*

Soit $X^\bullet$ un S-schéma simplicial.

La structure de catégorie abélienne de la catégorie des $\mathcal{S}$-faisceaux $X^\bullet$ est la première à laquelle on peut penser : les noyaux, conoyaux, somme directe, etc, se construisent composante par composante. Traitons le cas des noyaux par exemple. Soit $\phi = (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{G}_\bullet$ un morphisme de faisceaux sur $X^\bullet$. Chaque ϕ_n admet un noyau $\mathcal{E}_n \to \mathcal{F}_n$ sur $X^{(n)}$. Pour toute $f : [m] \to [n]$ croissante, on a un diagramme dont le carré est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet(f)^*\mathcal{E}_m \arrow[r] & X^\bullet(f)^*\mathcal{F}_m \arrow[r, "X^\bullet(f)^*\phi_m"] \arrow[d] & X^\bullet(f)^*\mathcal{G}_m \arrow[d] . \\
\mathcal{E}_n \arrow[r] & \mathcal{F}_n \arrow[r, "\phi_m"'] & \mathcal{G}_n
\end{tikzcd}$$

Étant donné que $\mathcal{E}_m$ est le noyau de ϕ_m, et $\mathcal{E}_n$ celui de ϕ_n, la commutativité du carré implique que $X^\bullet(f)^*\mathcal{E}_m \to X^\bullet(f)^*\mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$ factorise *uniquement* par $\mathcal{E}_n$. L'ensemble de ces factorisations définissent des morphismes $\psi_f : X^\bullet(f)^*\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ pour $f : [m] \to [n]$ croissante. L'unicité des factorisations par le noyau entraîne que la collection des ψ_f fait de la collection des $\mathcal{E}_n$ un faisceau $\mathcal{E}_\bullet$ sur $X^\bullet$. On vérifie sans difficulté que $\mathcal{E}_\bullet$ est un noyau de ϕ : pour tout morphisme de faisceaux $\phi' : \mathcal{F}'_\bullet \to \mathcal{F}_\bullet$ dont la composition avec ϕ est nulle, on trouve en travaillant composante par composante que ϕ' factorise uniquement par $\mathcal{E}_\bullet$.

Intéressons-nous aux faisceaux injectifs. Tout faisceau injectif sur $X^\bullet$ est composé de faisceaux injectifs sur les $X^{(n)}$. En effet, soit $\mathcal{F}_\bullet$ est un tel faisceau, soit $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme de faisceaux sur $X^{(n_0)}$ pour un certain entier naturel n_0, et soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{F}_{n_0}$ un autre morphisme. En complétant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par les faisceaux nuls sur les $X^{(n)}$, $n \neq n_0$, on obtient respectivement des faisceaux simpliciaux $\tilde{\mathcal{A}}_\bullet$ et $\tilde{\mathcal{B}}_\bullet$; les morphismes i et F se complètent aussi par les morphismes nuls pour donner $\tilde{i} : \tilde{\mathcal{A}}_\bullet \to \tilde{\mathcal{B}}_\bullet$ et $\tilde{F}_\bullet : \tilde{\mathcal{A}}_\bullet \to \mathcal{F}_\bullet$ respectivement. Comme $\mathcal{F}_\bullet$ est injectif et que $\tilde{i}_\bullet$ reste injectif, $\tilde{F}_\bullet$ s'étend à $\tilde{\mathcal{B}}_\bullet$ par un morphisme $j_\bullet$. La composante j_{n_0} étend F par rapport à i. Cela montre bien que $\mathcal{F}_{n_0}$ est un faisceau injectif sur $X^{(n_0)}$.

Pour savoir que la catégorie des $\mathcal{S}$-faisceaux sur $X^\bullet$ possède suffisamment d'objets injectifs, il suffit de voir qu'elle peut être décrite comme la catégorie des faisceaux abéliens sur un site au sens de Grothendieck ([Mil13] ou [Tam94]), car [Tam94, Cor. I.3.2.2.] nous dit en toute généralité que les catégories de faisceaux abéliens sur un site quelconque ont assez d'objets injectifs. Donnons la description du $\mathcal{S}$-site de $X^\bullet$, noté $\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}$. On définit :

1. $\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}$ est la catégorie dont
   — les objets sont les couples $(U, n) = (U \to X^{(n)}, n)$ avec n entier positif et $U \to X^{(n)}$ un objet de $\underline{\mathcal{S}(X^{(n)})}$;
   — et dont les morphismes de (U, n) vers (V, m) sont les $f : [m] \to [n]$ croissantes telles que $U \to X^{(n)} \xrightarrow{X^\bullet(f)} X^{(m)}$ factorise par $V \to X^{(m)}$;
2. les ouverts d'un objet (U, n) de $\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}$ sont les objets (V, n) munis du morphisme $\mathrm{Id}_{[n]} : [n] \to [n] (\in \mathrm{Hom}((V, n), (U, n))$, pour V décrivant les ouverts $V \to U$ dans le site $\underline{\mathcal{S}(U)}$.

On a bien affaire à la notion de site et de faisceaux de groupes abéliens au sens de Grothendieck ([Mil13] ou [Tam94]). Le site $\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}$ est comme un « recollement » ou une « interconnexion » des sites $\underline{\mathcal{S}(X^{(n)})}$. On remarque que $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}}\big((X^{(n)}, n), (X^{(m)}, m)\big)$ est l'ensemble des fonctions croissantes de $[m]$ dans $[n]$ est non l'ensemble des $X^\bullet(f)$ pour $f : [m] \to [n]$ croissante. La catégorie des $\mathcal{S}$-faisceaux sur $X^\bullet$ s'identifie alors à la catégorie des faisceaux sur $\underline{\mathcal{S}(X^\bullet)}$. À un $\mathcal{S}$-faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ on fait correspondre le faisceau

$(U,n) \mapsto \mathcal{F}_n(U)$; inversement, à un faisceau $(U,n) \mapsto F_{U,n}$, on fait correspondre le faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ défini par $\mathcal{F}_n(U) := F_{U,n}$ pour U au-dessus de $X^{(n)}$.

Finalement, comme on a suffisamment d'injectifs, la définition suivante est possible.

Définition 1.1.8. Soit un S-schéma simplicial $X^\bullet$ et soit $\mathcal{F}_\bullet$ un $\mathcal{S}$-faisceau sur $X^\bullet$. Les deux seules applications (croissantes) $[0] \to [1]$ induisent les morphismes de dégénérescence δ_0, $\delta_1 : X^{(1)} \to X^{(0)}$ et les morphismes $\phi_0 : \delta_0^*\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$ et $\phi_1 : \delta_1^*\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$. En prenant les sections globales on obtient deux morphismes de groupes ϖ_0 (induit par ϕ_0) et ϖ_1 (induit par ϕ_1) de $\Gamma(X^{(0)}, \mathcal{F}_0)$ vers $\Gamma(X^{(1)}, \mathcal{F}_1)$, où $\Gamma(X^{(i)}, \mathcal{F}_i)$ désigne le groupe des sections globales du faisceau $\mathcal{F}_i$ sur $X^{(i)}$ $(i = 1, 2)$.

On définit les *($\mathcal{S}$-)groupes de cohomologie de $X^\bullet$ à coefficients dans $\mathcal{F}_\bullet$* comme les foncteurs dérivés à droite du foncteur exact à gauche

$$\tilde{\Gamma} : \mathcal{F}_\bullet \mapsto \ker\left(\Gamma(X^{(0)}, \mathcal{F}_0) \xrightarrow{\varpi_0 - \varpi_1} \Gamma(X^{(1)}, \mathcal{F}_1)\right),$$

qui est un foncteur de la catégorie des faisceaux sur $X^\bullet$ dans celle des groupes abéliens :

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{S}}(X^\bullet, \mathcal{F}_\bullet) := \mathrm{R}^i\tilde{\Gamma}(\mathcal{F}_\bullet), \ i \geqslant 0.$$

Remarque 1.1.9. Si $\mathcal{F}_\bullet$ est un $\mathcal{S}$-faisceau sur un schéma simplicial constant $C_S X^\bullet$ (X est un S-schéma "classique"), $\mathcal{F}_\bullet$ provient d'un faisceau "classique" $\mathcal{F}$ sur X et les morphismes ϖ_0, ϖ_1 sont l'identité. Ce faisant, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i_{\mathcal{S}}(X^\bullet, \mathcal{F}_\bullet)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$ habituels.

La cohomologie d'un faisceau $\mathcal{F}_\bullet$ sur un schéma simplicial $X^\bullet$ est en fait calculable à partir de la cohomologie usuelle des éléments de $X^\bullet$ et $\mathcal{F}_\bullet$, c'est-à-dire de la cohomologie des faisceaux $\mathcal{F}_p$ sur $X^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$. Ce lien est précisé par une suite spectrale dans la proposition :

Proposition 1.1.10. *Soit $X^\bullet$ un S-schéma simplicial de morphismes de dégénérescence δ_i, et soit $\mathcal{F}_\bullet$ un $\mathcal{S}$-faisceau sur $X^\bullet$. Alors on a une suite spectrale convergente*

$$E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q_{\mathcal{S}}(X^{(p)}, \mathcal{F}_p) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\mathcal{S}}(X^\bullet, \mathcal{F}_\bullet),$$

la différentielle entre $E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ étant $d^{p,q} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\delta_i^*$.

Au chapitre 2, on s'intéressera principalement à la cohomologie <u>étale</u> et on omettra la référence à la topologie dans la notation des groupes de cohomologie quand il s'agit de la cohomologie étale.

▷ **Changements de faisceaux, de bases.** Les fonctorialités discutées en 1.1.2 induisent des fonctorialités similaires entre groupes de cohomologie :

— un morphisme de $\mathcal{S}$-faisceaux $\mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{F}'_\bullet$ sur un même schéma simplicial $X^\bullet$ induit $\mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(X^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(X^\bullet, \mathcal{F}'_\bullet)$;

— si $f_\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de S-schémas simpliciaux, alors pour tout $\mathcal{S}$-faisceau $\mathcal{G}_\bullet$ sur $Y^\bullet$, on a un morphisme $(f_\bullet)_* : \mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(Y^\bullet, \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^d(X^\bullet, (f_\bullet)_*\mathcal{G})$.

▷ **Hypercohomologie.** Soient d un entier positif ou nul, et $X^\bullet$ un S-faisceau simplicial. Pour tout complexe de $\mathcal{S}$-faisceaux $(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$, le *$d$-ième groupe d'hypercohomologie de $X^\bullet$ à coefficients dans* $(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$ est $\mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(X^\bullet,(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}})$, le d-ième groupe de cohomologie du complexe de groupes abéliens $\left(\prod_{p+q=i}\tilde{\Gamma}(\mathcal{K}^{p,q}_\bullet)\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ pour $(\mathcal{K}^{p,q}_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$ un résolution de Cartan-Eilenberg du complexe $(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}}$ ([Wei94, §5.7, 5.7.9.]). Pour tout complexe de faisceaux, le groupe obtenu est bien défini à unique isomorphisme près ([Wei94, §5.7, 5.7.9.] de même). Si $\mathcal{F}_\bullet$ est un faisceau « simple » sur $X^\bullet$, on vérifie sans difficulté que l'on a une identification canonique entre le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(X^\bullet,\mathcal{F}_\bullet)$ et le groupe d'hypercohomologie $\mathrm{H}^d_{\mathcal{S}}(X^\bullet,(\mathcal{F}^i_\bullet)_{i\in\mathbb{Z}})$ pour $\mathcal{F}^i_\bullet = \begin{cases}\mathcal{F}_\bullet \text{ si } i=0\\ 0 \text{ si } i\neq 0\end{cases}$.

1.2. Les "faisceaux" étales $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$

On revoit explicitement la construction ainsi que certaines propriétés des complexes de faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ sur certains schémas. Plus précisément on considère les k-variétés lisses et leurs anneaux locaux.

On note p la caractéristique du corps de base k et on la suppose non nulle. Pour un corps K, une *K-variété* est un K-schéma séparé de type fini sur K.

1.2.1. Complexes de de Rham-Witt logarithmiques

Pro-complexe de De Rham-Witt. Dans [Ill79], Illusie construit le *pro-complexe de de Rham-Witt* pour tout topos annelé en $\mathbb{F}_p$-algèbres. Les topos qui nous intéressent seront les petits et grands sites étales de k-schémas X munis des faisceaux $O_X=\mathbb{G}_{a,X}$. On note $X_{\text{Ét}}$ le grand site étale du schéma X et $X_{\text{ét}}$ son petit site étale.

Pour synthétiser, un *V-pro-complexe de De Rham-Witt* $M^\bullet_\bullet$ sur un site C correspond à la donnée

- d'une famille d'algèbres différentielles graduées (strictement anticommutatives) $M^\bullet_n$ sur C pour $n\in\mathbb{Z}$, avec
  - $M^\bullet_n=0$ pour tout $n\leqslant 0$,
  - M^0_1 une $\mathbb{F}_p$-algèbre,
  - et $\forall n\geqslant 1$, $M^0_n=\mathrm{W}_n(M^0_1)$ (l'anneau des n-vecteurs de Witt de M^0_1) ;
- de morphismes d'algèbres différentielles graduées $\mathrm{R}=\mathrm{R}^\bullet_n : M^\bullet_{n+1}\to M^\bullet_n$;
- d'applications additives $\mathrm{V}=\mathrm{V}^i_n : M^i_n\to M^i_{n+1}$;

ces données vérifiant certains axiomes (voir [Ill79, Déf. I.1.1 p. 543]).

Il est possible d'étendre naturellement toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur un site C en un V-prop-complexe de De Rham-Witt :

Théorème 1.2.1 ([Ill79, Th. I.1.3, page 544])**.** *Soit C un site. Le foncteur de la catégorie des V-pro-complexes de De Rham-Witt sur C dans la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres sur C, qui à $M^\bullet_\bullet$ associe M^0_1, admet un adjoint à gauche $A\mapsto \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$.*

De plus, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur C, on a un isomorphisme canonique

$$\Omega^\bullet_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_1\Omega^\bullet_{(C,A)},$$

l'algèbre des différentielles de A relativement au faisceau constant $\mathbb{F}_p$.

Définition 1.2.2. — Pour A une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur le site C, on appelle *pro-complexe de De Rham-Witt de A (sur C)* le V-pro-complexe de De Rham Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$.

— Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma. Le *pro-complexe de De Rham-Witt de $\mathcal{F}$ (sur X)* d'un faisceau de $\mathbb{F}_p$-algèbres $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{Ét}}$ (resp. sur $X_{\text{ét}}$) est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},\mathcal{F})}$ (resp. $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},\mathcal{F})}$).

Le *grand pro-complexe de De Rham-Witt de X* est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},\mathcal{O}_X)}$, noté $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{X_{\text{Ét}}}$. Le *(petit) pro-complexe de De Rham-Witt de X* est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},\mathcal{O}_X)}$, noté $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{X_{\text{ét}}}$.

Sur un site C, un morphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $u : A \to B$ induit un morphisme de pro-complexes de De Rham-Witt

$$\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_u : \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,B)}.$$

Et si $f : D \to C$ est un morphisme de sites [1] et si A est un faisceau sur C et B un faisceau sur D, alors $f_*\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,B)}$ et $f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$ sont des V-pro-complexes de De Rham-Witt (sur C et D respectivement) et on a des morphismes canoniques

$$\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,f_*B)} \to f_*\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,B)},$$
$$f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,f^{-1}A)}.$$

Remarque 1.2.3. Soit C un site et soit c_0 un objet de C. On considère le site C' de catégorie sous-jacente C/c_0 des objets au-dessus de c_0 et dont la topologie est issue de C. On a un foncteur continu

$$\begin{cases} C' & \to C \\ (c \to c_0) & \mapsto c \end{cases}$$

Alors pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur C, en appelant A' sa restriction $A \circ u$, on a une identification $\left(\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}\right)_{|C'} = \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C',A')}$.

En particulier, si X est un $\mathbb{F}_p$-schémas, la restriction de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},\mathcal{O}_X)}$ au petit site étale $X_{\text{ét}}$ de X est $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},\mathcal{O}_X)}$. Et si $X \to Y$ est un morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas, on a $\left(\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(Y_{\text{Ét}},\mathcal{O}_Y)}\right)_{|X_{\text{Ét}}} = \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},\mathcal{O}_X)}$.

Proposition 1.2.4. *1. ([Ill79, §I.1.10]) Soit C un site et A une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur C définie comme limite* inductive filtrante *de $\mathbb{F}_p$-algèbres A_i. Alors $\varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{A_i}$ existe dans la catégorie des V-pro-complexes de De Rham-Witt et le morphisme canonique*

$$\varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{A_i} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_A$$

(induit par les $A_i \to \varinjlim A_i = A$) est un isomorphisme.

2. ([Ill79, §I.1.12]) Si $f : D \to C$ est un morphisme de sites, et si A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur C, alors le morphisme canonique

$$f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,f^{-1}A)}$$

1. pour rappel, f est donné par un foncteur $C \to D$

est un isomorphisme.

Remarque 1.2.5. Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma qui est une limite projective de $\mathbb{F}_p$-schéma X_λ pour λ décrivant un ensemble préordonné filtrant Λ. Appelons $f_\lambda : X \to X_\lambda$ les morphismes de $\mathbb{F}_p$-schémas correspondant à la limite projective. Désignons par τ le grand site étale Ét ou le petit site étale ét, et soit $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système inductif de faisceaux en $\mathbb{F}_p$-algèbres avec $\mathcal{F}_\lambda$ défini sur $X_{\lambda,\tau}$ pour chaque indice λ. On note $\mathcal{F}$ la limite des $f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda$; c'est une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur X_τ.

Le point 2 de la proposition implique qu'on a des isomorphismes

$$f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda)}$$

de V-pro-complexes sur X_τ. On en déduit un isomorphisme

$$\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda)}.$$

Le point 1 assure alors qu'on a un isomorphisme

$$\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,\mathcal{F})}$$

car $\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ comme faisceaux sur X_τ.

Cela s'applique au cas particulier où $(A_\lambda)_\lambda$ une famille directe filtrante de $\mathbb{F}_p$-algèbres avec

$$\begin{aligned} X_\lambda &= \mathrm{Spec}(A_\lambda), \\ X &= \varprojlim \mathrm{Spec}(A_\lambda) = \mathrm{Spec}(\varinjlim A_\lambda), \\ \mathcal{F}_\lambda &= O_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \text{ et } \mathcal{F} = O_X. \end{aligned}$$

▷ **Pro-complexe de De Rham-Witt logarithmique.**

Définition locale. Soit X un schéma sur $\mathbb{F}_p$. Par définition des V-pro-complexes de De Rham-Witt, $\mathrm{W}_n\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ est une algèbre différentielle graduée sur $X_{\text{ét}}$ pour tout entier n, et $\mathrm{W}_n\Omega^0_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ est le faisceau des n-vecteurs de Witt de O_X pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi,

— tout $x \in O_X$ a son *représentant multiplicatif* $\underline{x} \in W_n(O_X)$,

— tout $y \in W_n(O_X)$ a une image $\mathrm{d}y \in \mathrm{W}_n\Omega^1_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ par la différentielle d,

— et pour toute famille $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ avec $\alpha_i \in \mathrm{W}_n\Omega^{j_i}_{(X_{\text{ét}},O_X)}$, on peut regarder le produit $\alpha_1\cdots\alpha_r \in \mathrm{W}_n\Omega^{j_1+\cdots+j_r}_{(X_{\text{ét}},O_X)}$.

On considère alors les morphismes de faisceaux en groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$, pour $j \geqslant 1$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (O_X^\times)^{\otimes j} & \to & \mathrm{W}_n\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)} \\ x_1\otimes\cdots\otimes x_j & \mapsto & \mathrm{d}\underline{x_1}/\underline{x_1}\cdots\mathrm{d}\underline{x_j}/\underline{x_j} \end{array} \right. ,$$

et on note $\nu_n^j(X)$ le faisceau image. En particulier on dispose du morphisme

$$\mathrm{d}\log : O_X^\times \to \mathrm{W}_n\Omega^1_{X_{\text{ét}}}$$

En voyant $\nu_n^j(X)$ comme le complexe $\cdots \to 0 \to \nu_n^j(X) \to 0 \to \cdots$ concentré en degré 0, on définit les complexes

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(j)_X := \nu_n^j(X)[-j] \text{ et } \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_X := \varinjlim_n \nu_n^j(X)[-j]$$

la limite étant définie via les restrictions des morphismes $V_n^j : \mathrm{W}_n\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)} \to \mathrm{W}_{n+1}\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ qui font partie de la définition de V-pro-complexe de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$.

Proposition 1.2.6. *Si X est un schéma régulier sur $\mathbb{F}_p$ avec p premier, alors pour tout $n \geqslant 1$ on a une suite exacte*

$$0 \to O_X^\times \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \nu_n^1(X) \to 0. \tag{1.2}$$

de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, le petit *site étale de X.*

Démonstration. $\diamond$ La surjectivité de $O_X^\times \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \nu_n^1(X)$ vient de la définition de ν_n^1.

$\diamond$ L'injectivité de $O_X^\times \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times$ provient du fait que X est réduit. En effet, pour tout morphisme étale $Y \to Z$, Y est réduit si, et seulement si, Z est réduit ([BLR90, §2.3, Prop. 9]). Ainsi, tout X-schéma étale Y est réduit, donc $O_Y(Y)^\times \overset{(\cdot)^p}{\to} O_Y(Y)^\times$ est un morphisme de groupes injectif ($O_Y(Y)$ étant une $\mathbb{F}_p$-algèbre).

Si X est *lisse* sur $\mathbb{F}_p$, l'exactitude de

$$O_X^\times \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \mathrm{W}_n\Omega^1_{X_{\text{ét}}}$$

est exactement [Ill79, Prop I.3.23.2, p. 580]. Sinon, on se ramène au cas lisse grâce au théorème de Popescu [Pop86, Th. 2.5] comme suit. Déjà, on peut supposer X affine noethérien[2], $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour une $\mathbb{F}_p$-algèbre régulière A qui est aussi un anneau noethérien. Alors $\mathbb{F}_p \to A$ est un morphisme régulier d'anneaux noethériens, donc d'après le théorème de Popescu, A est une limite inductive filtrante de $\mathbb{F}_p$-algèbres lisses de type fini A_λ. Selon l'exactitude dans le cas lisse sur $\mathbb{F}_p$, les suites de faisceaux

$$O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}}$$

sont exactes. En notant f_λ les morphismes $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ tels que $\mathrm{Spec}(A) \to \varprojlim_\lambda \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ est un isomorphisme, il vient que les suites de faisceaux (sur $\mathrm{Spec}(A)$)

$$f_\lambda^{-1}O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} f_\lambda^{-1}O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\mathrm{d}\log}{\to} f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}}$$

sont exactes. Or $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}O_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\sim}{\to} O_{spec(A)}$, donc $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}O^*_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\sim}{\to} O^*_{spec(A)}$ et d'après la remarque 1.2.5, on a $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}} = \mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}}}$. □

2. Par définition d'un $\mathbb{F}_p$-schéma régulier, les fibres du morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont localement noethériennes.

Définition globale. Pour $j \geqslant 1$, on peut également définir de la même façon le faisceau ν_n^j et les complexes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)$, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)$ sur le grand site étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ à partir de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)_{\text{Ét}}}$. On a alors, pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma X,

$$\begin{aligned}\left(\nu_n^j\right)_{|X_{\text{ét}}} &= \nu_n^j(X),\\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)_{|X_{\text{ét}}} &= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)_X,\\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_{|X_{\text{ét}}} &= \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_X\end{aligned}$$

les restrictions étant induites par rapport au foncteur

$$\left\{\begin{array}{ccc} X_{\text{ét}} & \to & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)_{\text{Ét}} \\ (U \to X) & \mapsto & U \end{array}\right. .$$

▷ **Faisceaux à la Kato.** On définit pour $j \geqslant 1$ les faisceaux sur le *grand* site étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$:

$$\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j) := \varinjlim_n \mu_{q^n}^{\otimes j} \text{ pour } q \text{ premier } \neq p$$

où μ_{q^n} est le groupe des racines q^n-ièmes de l'unité ; et on définit le complexe de faisceaux

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j) := \left(\bigoplus_{q \neq p \text{ premier}} \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j)\right) \oplus \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j).$$

Pour le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on définit de même $\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j) := \varinjlim_n \mu_{q^n}^{\otimes j}$ pour tout nombre premier q et on pose

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j) := \bigoplus_{q \text{ premier}} \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j).$$

On définit enfin $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(0)$ comme le faisceau constant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur le grand site étale de $\mathbb{F}_p$ ou de $\mathbb{Q}$.

Introduisons la notation utile suivante qu'on rencontrera par la suite. Si d et j sont des entiers positifs, pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma X (ou tout schéma X sur un corps de caractéristique p) on note $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ le faisceau sur le petit site de Zariski de X associé au préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^d(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Lemme 1.2.7. *Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma qui est une limite projective de $\mathbb{F}_p$-schémas X_λ pour λ décrivant un ensemble préordonné filtrant Λ. On suppose que les morphismes de transitions entre les X_λ sont affines et on note $f_\lambda : X \to X_\lambda$ les morphismes canoniques. Alors pour tout $n \geqslant 0$ et $j \geqslant 1$, on a canoniquement des isomorphismes*

$$\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}(\nu_n^j(X_\lambda)) \xrightarrow{\sim} \nu_n^j(X)$$

et

$$\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)_{X_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)_X.$$

<u>Démonstration</u>. L'isomorphisme du lemme pour ν_n^j vaut en raison de la remarque 1.2.5.

Pour $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ on distingue les parties de torsions q-primaires pour les différents nombres premiers q. Le cas de la torsion p-primaire se ramène au cas de ν_n^j. La q-torsion pour q premier $\neq p$ résulte du fait que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\varinjlim f_\lambda^{-1}(\mu_{q^n}^{\otimes j})_{|(X_\lambda)_{\text{ét}}} \xrightarrow{\sim} (\mu_{q^n}^{\otimes j})_{|X_{\text{ét}}}$. □

1.2.2. Conjecture de Gersten

On fixe un entier positif d.

Notation 1.2.8. 1. Pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur un k-schéma U et tout fermé Z de U, $\mathrm{H}_Z^d(U,\mathcal{F})$ désigne le groupe de cohomologie de U à coefficients dans $\mathcal{F}$ et à support dans Z.

2. Pour $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur un k-schéma X, on note, pour tout $x \in X$ (point ensembliste), $\mathrm{H}_x^d(X,\mathcal{F})$ la limite inductive $\varinjlim \mathrm{H}^d_{U\cap\overline{\{x\}}}(U,\mathcal{F}_{|U})$ portant sur les ouverts U de X (pour la topologie de Zariski) contenant x.
3. Enfin, pour un point x d'un schéma X, on note i_x le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ et $(i_x)_*$ est le morphisme qui transporte les faisceaux sur $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ vers X.

Comme expliqué dans [CHK97, §1.1], pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur le petit site étale d'un schéma X équidimensionnel[3] et noethérien, on a la suite spectrale convergente de coniveau

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \mathrm{H}_x^{p+q}(X,\mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X,\mathcal{F}), \tag{1.3}$$

dont on tire le complexe de Cousin de faisceaux zariskiens sur X :

$$0 \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^d(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^{d+1}(X,\mathcal{F}) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d+r)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^{d+r}(X,\mathcal{F}) \to \cdots . \tag{1.4}$$

On dit que l*a conjecture de Gersten vaut (en degré d) pour X et $\mathcal{F}$* lorsque le complexe (1.4) est une résolution (flasque) du faisceau $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})$ sur X pour la topologie de Zariski obtenu en faisceautisant le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^d(U,\mathcal{F})$. Cela signifie que la suite exacte de faisceaux zariskiens suivante est exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^d(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^{d+1}(X,\mathcal{F}) \to \cdots \\ \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d+r)}} (i_x)_*\mathrm{H}_x^{d+r}(X,\mathcal{F}) \to \cdots . \end{aligned} \tag{1.5}$$

On note ce complexe $G^d(X,\mathcal{F})$ qu'il soit exact ou non.

Remarquons que lorsque X est de plus intègre, le faisceau $\bigoplus_{x\in X^{(0)}}(i_x)_*\mathrm{H}_x^d(X,\mathcal{F})$ est plus simplement le faisceau $(i_\eta)_*\mathrm{H}^d(K(X),\mathcal{F})$ où η désigne le point générique de X et $K(X)$ son corps de fonctions.

Remarque 1.2.9. Au vu de la construction de [CHK97, §1.1], la suite spectrale (1.3) ci-dessus (et donc aussi les complexes (1.4) et (1.5)) est fonctorielle contravariante pour

3. implicitement de dimension de Krull finie

les morphismes plats ; tout morphisme plat $f : Y \to X$ induit un morphisme de complexes $f^{-1}G(X,\mathcal{F}) \to G(Y, f^{-1}\mathcal{F})$ naturel en le faisceau $\mathcal{F}$ sur X. Dans la suite on s'intéresse aux immersions ouvertes $U \hookrightarrow X$ et aux anneaux locaux $\operatorname{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$ pour $x_0 \in X$.

Lemme 1.2.10. *Soit X un schéma équidimensionnel noethérien et soit $x_0 \in X$ (on note $Y = \operatorname{Spec}(O_{X,x_0})$ et i le morphisme $\operatorname{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X. On a un morphisme de complexes $\phi : G^d(X,\mathcal{F}) \to G^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ (rem. 1.2.9). Alors ϕ induit un isomorphisme*

$$G^d(X,\mathcal{F})_{x_0} \xrightarrow{\sim} G^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})(Y).$$

C'est-à-dire que la fibre de $G(X,\mathcal{F})$ en x_0 s'identifie aux sections globales de $G(Y, i^{-1}\mathcal{F})$.

<u>*Démonstration*</u>. Notons tout d'abord que pour tout $x \in X$ et tout ouvert U de X contenant x, le morphisme canonique $\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d_x(U,\mathcal{F}_{|U})$ est un isomorphisme, et que pour tout $x \in Y$, le morphisme canonique $\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d_x(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ est aussi un isomorphisme.

Pour tout ouvert U de X contenant x_0, on a un morphisme de complexes $G(U,\mathcal{F}) \to G(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ dont on tire, en prenant les sections globales, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(U)}(\mathcal{F})(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(Y)}(i^{-1}\mathcal{F})(Y) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(Y,i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(Y,i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui se récrit, compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, et en constatant que $\mathcal{H}^d_{(Y)}(i^{-1}\mathcal{F})(Y) = \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ (car Y est le spectre d'un anneau local) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(Y,i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales $\bigoplus_{x\in U^{(r)}} \mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in Y^{(r)}} \mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F})$ sont les projections induites par les inclusions $\{x \in Y^{(r)}\} \subseteq \{x \in U^{(r)}\}$.

En passant à la limite pour $U \ni x_0$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\substack{x\in X^{(0)} \\ x_0\in\overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\substack{x\in X^{(1)} \\ x_0\in\overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots . \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(Y,i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Or $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \to \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ est un isomorphisme (d'après le lemme 1.2.7 ci-dessous), et les autres flèches verticales aussi car l'inclusion d'espaces topologiques $Y \subseteq X$ est exactement l'ensemble des $x \in X$ tels que $x_0 \in \overline{\{x\}}$. $\square$

Lemme 1.2.11. *Soit X un schéma et soit $x_0 \in X$ (point ensembliste). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X. Notons $Y = \operatorname{Spec}(O_{X,x_0})$ et i le morphisme $\operatorname{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$$

où le membre de gauche est la fibre de $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})$ en x_0.

<u>*Démonstration*</u>. Il suffit de constater que les morphismes

$$\varphi_U : \mathrm{H}^d(U, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$$

pour U ouvert de X contenant x_0 induisent un isomorphisme

$$\varinjlim_{x \in U \subseteq X} \mathrm{H}^d(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F}).$$

Se restreignant aux ouverts U qui sont affines, le schéma $Y = \mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$ s'interprète comme la limite projective des U, les morphismes de transitions étant des morphismes affines. De plus on a une identification $i^{-1}\mathcal{F} = f_U^{-1}\mathcal{F}_{|U}$. Dans cette situation, [AGV77, Exp. VII, Th. 5.7.] nous assure que les φ_U induisent l'isomorphisme voulu. □

Intéressons-nous maintenant plus spécifiquement aux complexes de faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$. Soit $0 \leqslant j \leqslant d$ un entier. On a

Théorème 1.2.12 (Globalisation de [Shi07, Th. 4.1.])**.** *Soit X une k-variété lisse équidimensionnelle ou le spectre d'un anneau local en un point d'une k-variété lisse équidimensionnelle. Alors la conjecture de Gersten vaut pour X et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte de faisceaux zariskiens sur X :*

(1.6)

$$0 \to \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} (i_x)_* \mathrm{H}^d_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_* \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \cdots.$$

<u>*Démonstration*</u>. Pour $j \geqslant 1$, on décompose $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ en somme directe de la limite inductive des $\mu_{q^n}^{\otimes j}$ pour $q \neq p$ premier, et de la limite inductive des $\nu_n^j[-j]$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x_0 \in X$, on note Y_{x_0} le k-schéma $\mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$.

$\diamond$ Pour tout $x_0 \in X$, le fait que le complexe des sections globales de $G^d(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j})$ soit exact est justifié par [CHK97, Prop. 2.1.2. & Th. 2.2.1.] : on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^d(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \cdots.$$

Dès lors, grâce au lemme 1.2.10, on conclut que $G^d(X, \mu_{q^n}^{\otimes j})$ est une suite exacte de faisceaux.

$\diamond$ On procède de même pour le cas avec les ν_n^j. Pour tout $x_0 \in X$, le théorème [Shi07, Th. 4.1.] établit que la suite de groupes suivante est exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^{d-j}(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(0)}} \mathrm{H}^{d-j}_x(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(1)}} \mathrm{H}^{d-j+1}_x(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \cdots.$$

D'après le lemme 1.2.10, cela signifie que les fibres en tout $x_0 \in X$ du complexe $G^{d-j}(X, \nu_n^j)$ sont exactes. On en déduit que le complexe global est exact lui-aussi. □

Remarque 1.2.13. Kahn montre que la conjecture de Gersten vaut pour les schémas réguliers de type fini sur un corps ([Kah12, Prop. A.4.]). On pourrait donc justifier le théorème 1.2.12 pour les anneaux locaux à partir du cas global.

Conséquence 1.2.14. *Soit X une k-variété lisse et irréductible ou le spectre d'un anneau local d'une k-variété lisse et irréductible. On a une suite exacte de groupes*

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) \to \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

avec $K(X)$ le corps de fonctions de X et une suite exacte pour tout $x_0 \in X$,

$$0 \to \mathrm{H}^d(O_{X,x_0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x_0 \in \overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

La première suite s'obtient en prenant les sections globales dans le théorème 1.2.12, et la deuxième suite est [Shi07, Th. 4.1.].

Dans les hypothèses de 1.2.14, on a un diagramme commutatif à lignes exactes, naturel en (X, x_0), avec $x_0 \in X$:

(1.7)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[d, "\text{projection}"] , \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(O_{X,x_0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] & \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] & \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x_0 \in \overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))
\end{tikzcd}$$

duquel on déduit :

Corollaire 1.2.15. *Dans le groupe $\mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, on a l'égalité entre sous-groupes*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^d(O_{X,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

1.2.3. Groupe de Brauer (cohomologique)

Ici on veut établir clairement un isomorphisme naturel $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$ pour certains schémas X. La notation $\mathrm{Br}'(X)$ désigne le groupe de Brauer cohomologique de X, c'est-à-dire le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$, qui est $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$ tout entier lorsque X est irréductible et régulier noethérien ([Gro68, Cor. 1.8.]).

Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma régulier avec p un nombre premier. Les suites exactes (1.2) fournissent des suites exactes en cohomologie étale

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p^n} \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, \nu_n^1) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p^n} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$$

pour tout entier $n \geqslant 1$, d'où des suites exactes

$$0 \to \mathrm{Pic}(X)/p^n\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)) \to {}_{p^n}\mathrm{Br}'(X) \to 0$$

où ${}_{p^n}\mathrm{Br}'(X)$ désigne les élements de $\mathrm{Br}(X)$ qui s'annulent à la puissance p^n. Ces suites fournissent des morphismes naturels

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)) \to {}_{p^n}\mathrm{Br}'(X)$$

qui sont des isomorphismes quand X est le spectre d'un anneau local, ou encore un morphisme naturel

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathrm{Br}'(X)\{p\} \tag{1.8}$$

qui est un isomorphisme quand X est le spectre d'un anneau local. Précisons que $\mathrm{Br}'(X)\{p\}$ est le sous-groupe de $\mathrm{Br}'(X)$ constitué des éléments d'ordre une puissance de p. On complète 1.8 avec les parties de torsion première à p :

(1.9)

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_{q\neq p \text{ premier}} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(1))\right) \oplus \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \left(\bigoplus_{q\neq p \text{ premier}} \mathrm{Br}'(X)\{q\}\right) \oplus \mathrm{Br}'(X)\{p\} \arrow[d, "="] \\
\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, dashed] & \mathrm{Br}'(X)
\end{tikzcd}$$

pour obtenir un morphisme *naturel*, qui est un isomorphisme sur la partie de torsion première à p, et qui est un isomorphisme pour le spectre d'un anneau local.

Théorème 1.2.16. *On a un isomorphisme naturel en tout $\mathbb{F}_p$-schéma irréductible X qui est une variété lisse sur un corps de caractéristique p ou le spectre d'un anneau local d'une telle variété :*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(X).$$

On montre d'abord le lemme suivant avant de prouver le théorème 1.2.16.

Lemme 1.2.17. *Soit X un schéma noethérien, irréductible et régulier. Alors le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Br}'(U)(= \mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m))$ sur X pour la topologie de Zariski est un faisceau.*

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de X et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U. On veut montrer l'exactitude de la suite

$$0 \to \mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \prod_{i\in I} \mathrm{H}^2(U_i, \mathbb{G}_m) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathrm{H}^2(U_i \cap U_j, \mathbb{G}_m). \tag{1.10}$$

L'ouvert U étant non vide, I est non vide et il existe $i_0 \in I$. D'après [Gro68, 1.6.], les morphismes $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(k(U), \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{H}^2(U_{i_0}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(k(U), \mathbb{G}_m)$ sont injectifs. Il faut donc que $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_{i_0}, \mathbb{G}_m)$ soit injectif, montrant par là qu'on a bien l'injectivité dans la suite (1.10). Ensuite, soit $(\alpha_i)_i \in \prod_{i\in I} \mathrm{H}^2(U_i, \mathbb{G}_m)$ tel que

$$\forall i,\, j \in I,\ (\alpha_i)_{|U_i\cap U_j} = (\alpha_j)_{|U_i\cap U_j} \in \mathrm{H}^2(U_i \cap U_j, \mathbb{G}_m).$$

On considère un sous-ensemble fini $I' \subseteq I$ pour lequel $(U_i)_{i\in I'}$ reste un recouvrement de U. Cela est possible puisque X, donc U, est noethérien. On veut montrer que les α_i, $i \in I'$, proviennent d'une même classe de $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m)$. Exprimons $I' = \{1, \cdots, r\}$ pour un entier $r \geqslant 1$. Pour $U_{1,2} := U_1 \cup U_2$, on a la suite exacte de Mayers-Vietoris ([Mil13, Th. 10.8.]) :

$$\mathrm{H}^2(U_{1,2}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_1, \mathbb{G}_m) \oplus \mathrm{H}^2(U_2, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_1 \cap U_2, \mathbb{G}_m).$$

Par hypothèse sur les α_i, $i \in I$, les éléments α_1 et α_2 ont même image dans $\mathrm{H}^2(U_1 \cap U_2, \mathbb{G}_m)$, donc proviennent d'une classe $\alpha_{1,2} \in \mathrm{H}^2(U_{1,2}, \mathbb{G}_m)$. En procédant de même avec $\alpha_{1,2}$ et α_3 à la place de α_1 et α_2, et ainsi de suite, on trouve qu'effectivement $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ proviennent d'un même élément de $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m)$. $\square$

Démonstration du théorème 1.2.16. Appelons φ_Y le morphisme 1.9 pour un schéma $Y/\mathbb{F}_p$ régulier irréductible.

Soit X comme dans le théorème. Du fait que le groupe de Brauer est un faisceau sur X pour la topologie de Zariski (lemme 1.2.17), les φ_U, pour U ouverts de X, induisent un morphisme de faisceaux zariskiens $\phi : \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \mathrm{Br}'$.

Pour tout $x \in X$, on a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\right) \arrow[r, "\phi(X)"] \arrow[d] & \mathrm{Br}'(X) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^2(O_{X,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\varphi_{O_{X,x}}", "\simeq"'] \arrow[d] & \mathrm{Br}'(O_{X,x}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^2(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\varphi_{K(X)}", "\simeq"'] & \mathrm{Br}'(K(X))
\end{tikzcd} \quad . \tag{1.11}
$$

De ce diagramme, grâce au corollaire 1.2.15 et du fait que

$$\mathrm{Br}'(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Br}'(O_{X,x}) \subset \mathrm{Br}'(K(X))$$

(d'après [Č18, Th. 1.2]), on tire que $\phi(X)$ est un isomorphisme, qui est naturel en X. $\square$

Chapitre 2

Invariants cohomologiques à valeurs dans le groupe de Brauer

Ce chapitre constitue le chapitre central de la Thèse. On commence dans la section 2.1 par introduire deux modèles de torseurs classifiants d'un groupe algébrique affine et lisse G sur un corps k. La première est un modèle schématique. Elle est déjà exposée dans [GMS03] puis reprise de nombreuses fois dans les articles de Merkurjev. Ce modèle consiste en un G-torseur $\pi : E \to X$ entre variétés lisses sur k et dont les fibres donnent tous les G-torseurs de base une extension de k. Le torseur π n'a rien de canonique et la façon de retrouver un torseur donné non plus. Cependant les groupes de cohomologie de X qui interviennent dans l'étude des invariants cohomologiques de G ne dépendent essentiellement pas de X et son étude a permis notamment de dire beaucoup sur les invariants des groupes semi-simples puis réductifs. Mais X est une variété dont on connaît peu la géométrie (par exemple le problème de savoir si elle est rétractilement rationnelle est loin d'être évident). La deuxième, celle du modèle simplicial, nous vient de [Del74] qui est utilisée dans [EKLV98]. La catégorie des schémas est trop « petite » pour abriter un G-torseur universel ; on peut le trouver dans la catégorie des schémas simpliciaux. On a un G-torseur $\mathrm{E}G^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$ construit simplement à partir des produits fibrés G^n de G et pour tout G-torseur $Y \to Z$ entre k-schémas, on peut associer de manière systématique un schéma simplicial $[Y|G]^\bullet$ avec un morphisme bien déterminé $[Y|G]^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$ qui est un morphisme par lequel on tire $\mathrm{E}G^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$ en arrière pour retrouver $Y \to Z$.

Dans la section 2.2 on introduit les invariants cohomologiques dans leur généralité, puis on montre comment les torseurs classifiants de la section précédente permettent de construire des invariants cohomologiques à partir de la cohomologie de ces torseurs. La construction des invariants via un torseur versel est celle que Blinstein et Merkurjev introduisent dans [BM13] et leur théorème, qui nous est important pour la Thèse, est que cette construction permet de retrouver tous les invariants pour les faisceaux de coefficients les plus intéressants. Quant à la construction via le modèle simplicial de torseur classifiant, elle est utilisée dans [EKLV98] pour définir l'invariant de Rost et nous est inspirée par le fait, présenté dans [Del74], que pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur le grand site étale d'un corps k et pour un G-torseur $Y \to Z$ avec G un k-groupe algébrique affine et lisse, on a une identification entre les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^d([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^d(Z, \mathcal{F})$ de degré $d \in \mathbb{N}$.

La section 2.3 est dévouée à la démonstration du théorème 2.3.1 dont on tire le théorème 2.3.2 qui généralise [BM13, Thm. 2.4.] à tout groupe affine, lisse et connexe sur un corps, qu'il soit réductif, unipotent ou autre. Ces résultats sont en fait des conséquences de la proposition 2.3.4 qui découle du calcul des suites spectrales exprimant la cohomologie des schémas simpliciaux $\mathrm{B}G^\bullet$ et $[E|G]^\bullet$ comme la limite des groupes de cohomologie de leurs cellules de différentes dimensions, avec $E \to X$ un G-torseur versel satisfaisant quelques propriétés facilement réalisables.

2.1. Torseurs classifiants

On discute de la notion de *torseur classifiant* qui est particulièrement importante dans l'étude des invariants cohomologiques. On reprend l'aspect « torseur versel » de [GMS03] puis on présente le point de vue « torseur classifiant simplicial » que l'on peut trouver dans sa forme topologique dans [Del74]. On utilise l'appellation « torseur classifiant » pour *l'idée* d'un torseur qui permet de retrouver tous les autres. Rigoureusement on a d'une part les torseurs versels qui encodent les torseurs seulement sur les *corps* ; il s'agit d'une approximation dans la catégorie des schémas de l'idée de torseur classifiant, car l'espace total d'un torseur versel ne peut pas avoir le cohomologie d'un point en toute circonstance. D'autre part on a un modèle simplicial d'un torseur classifiant, qu'on appelle dans la Thèse torseur classifiant simplicial ; pour avoir un torseur qui encode tous les torseurs sur toutes les bases, on sort de la catégorie des schémas ; par contre celui-ci a bien la cohomologie du point.

Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe.

2.1.1. Torseurs versels

Un *torseur versel* de G est un G-torseur $\pi : E \to X$, avec X une k-variété lisse, tel que pour toute extension K/k avec K infini et tout G-torseur $I \to K$, il existe un K-point $x \in X(K)$ pour lequel $I \simeq \pi^{-1}(x)$ comme G-torseurs sur K.

Il existe bel et bien des torseurs versels de G. Comme indiqué dans [BM13, §2b.] il suffit de plonger G dans un groupe général linéaire, $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ (ce qui est possible avec les groupes algébriques linéaires définis sur un corps [Wat79, Th. 3.4]), et de considérer $\pi : E = \mathrm{GL}_n \to X = \mathrm{GL}_n/G$. Grâce à cette construction, on se retrouve avec un torseur versel $\pi : E \to X$ avec E une variété G-rationnelle qui est aussi un k-groupe algébrique linéaire connexe, et $E(k) \neq \emptyset$ (et donc $X(k) \neq \emptyset$). Rappelons qu'une k-variété E munie d'une action de G est dite *G-rationnelle* s'il existe un ouvert non vide $U \subseteq E$ stable par G, ainsi qu'une immersion ouverte $U \hookrightarrow \mathbb{A}^r_k$ qui est G-équivariante pour une action linéaire de G sur $\mathbb{A}^r_k$. Ici, G agit linéairement sur $\mathbb{A}^{n^2}_k$ (l'espace des matrices de taille $n \times n$) via l'immersion $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ et $E = \mathrm{GL}_n \subseteq \mathbb{A}^{n^2}_k$ est une immersion ouverte G-équivariante.

Pour un G-torseur versel $\pi : E \to X$ et un G-torseur $p : Y \to \mathrm{Spec}(K)$ donnés, il peut exister plusieurs K-points $x \in X(K)$ tels que $p = x^{-1}(\pi)$. La proposition suivante donne la relation entre deux points $x, x' \in X(K)$ tels que les G-torseurs $x^{-1}(\pi)$ et $(x')^{-1}(\pi)$ sont isomorphes.

Proposition 2.1.1 ([BM13, Lem 3.2])**.** *Soit $\pi : E \to X$ un G-torseur versel. En faisant agir G à droite sur $E^2 = E \times_k E$, on peut définir un G-torseur $E^2 \to E^2/G$ et des* *morphismes p_1, $p_2 : E^2 \to X$ provenant des projections $p_i : E^2 \to E$ sur le facteur i. Soit K/k une extension de corps et soient x_1, $x_2 \in X(K)$.*

Alors, en supposant G connexe si k est fini, les G-torseurs $\pi^{-1}(x_1)$ et $\pi^{-1}(x_2)$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe $y \in (E^2/G)(K)$ tel que $p_1(y) = x_1$ et $p_2(y) = x_2$.

▷ **Fonctorialité.** La construction d'un torseur versel via une représentation linéaire fidèle présente une certaine fonctorialité. Soit $\sigma : G \to H$ un morphisme de k-groupes algébriques entre G et H des k-groupes algébriques affines, lisses. Si l'on dispose d'un diagramme commutatif dont les flèches sont des morphismes de groupes

(2.1)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathrm{GL}_m \arrow[d, "\tilde{\sigma}"] \\ H \arrow[r, hook] & \mathrm{GL}_n \end{tikzcd},$$

alors on a un morphisme $\bar{\sigma} : \mathrm{GL}_m/G \to \mathrm{GL}_n/H$ compatible aux actions de G et H et qui s'inscrit dans un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n \arrow[r] \arrow[d, "\text{projection}"'] & \mathrm{GL}_n \arrow[d, "\text{projection}"] \\ \mathrm{GL}_m/G \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] & \mathrm{GL}_n/H \end{tikzcd}.$$

La construction reste valable si l'on ne dispose pas *a priori* du morphisme $\tilde{\sigma}$. En effet, si l'on s'est donné des morphismes de groupes $\sigma : G \to H$, $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_m$ et $H \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$, alors il existe un $\tilde{\sigma}$ faisant commuter le diagramme (2.1) : d'après [Wat79, Th. 3.5.], la représentation $G \to H \to \mathrm{GL}_n$ peut être construite à partir de la représentation fidèle $G \to \mathrm{GL}_m$ que l'on s'est donnée. On peut donc construire $\bar{\sigma}$ comme précédemment. Remarquons toutefois que l'extension $\tilde{\sigma}$ n'est pas unique en général ; il s'agit là d'une fonctorialité *non canonique*.

2.1.2. Torseur classifiant simplicial

On reprend ici l'exposition de Deligne [Del74, §6].

Considérons le k-schéma simplicial $\mathrm{E}G^\bullet$ donné par $\mathrm{E}G^{(n)} = G^{n+1} = \underbrace{G \times_k \cdots \times_k G}_{n+1 \text{ fois}}$, de dégénérescences

$$s_i : (g_0, \cdots, g_n) \to (g_0, \cdots, g_{i-1}, 1, g_i, \cdots, g_n)$$

et de faces

$$\delta_i : (g_0, \cdots, g_n) \to (g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_n).$$

Si l'on fait agir G à droite sur les $\mathrm{E}G^{(n)}$ (par multiplication à droite sur chaque facteur), les faces et dégénérescences sont G-équivariantes. Par passage au quotient relativement à G, on obtient un k-schéma simplicial $\mathrm{B}G^\bullet$ avec $\mathrm{B}G^{(n)} = G^{n+1}/G$ et les faces et dégénérescences induites par celles de $\mathrm{E}G^\bullet$. On a ainsi un G-torseur (simplicial) $\mathrm{E}G^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$: c'est-à-dire que chaque $\mathrm{E}G_n$ est un G-torseur sur $\mathrm{B}G^{(n)}$, les morphismes de faces et de dégénerescence étant des morphismes de G-torseurs. Le k-schéma simplicial $\mathrm{B}G^\bullet$ est le modèle simplicial de *l'espace classifiant* de G. On l'appellera simplement « espace classifiant » de G.

De manière similaire, si $Y \to Z$ est un G-torseur, considérons le k-schéma simplicial $[Y]^\bullet$ donné par les k-schémas $[Y]^{(n)} = G^{n+1} \times_k Y = \underbrace{G \times_k \cdots \times_k G}_{n+1} \times_k Y$, les dégénérescences

$$s_i : (g_0, \cdots, g_n, y) \to (g_0, \cdots, g_{i-1}, 1, g_i, \cdots, g_n, y)$$

et les faces

$$\delta_i : (g_0, \cdots, g_n, y) \to (g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_n, y).$$

En faisant agir G par la droite sur $[Y]^{(n)}$ (action à droite sur chaque facteur), les morphismes s_i et δ_i sont G-équivariants, donc en quotientant par l'action de G, on obtient un k-schéma simplicial $[Y|G]^\bullet$ avec $[Y|G]^{(n)} = (G \times_k \cdots \times_k G \times_k Y)/G$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur le grand site de Spec(k) et soit $Y \to Z$ un G-torseur. De la définition d'un torseur, on tire que $[Y|G]^{(n)}$ est isomorphe à $\underbrace{Y \times_Z \cdots \times_Z Y}_{n+1 \text{ fois}}$. En voyant Z comme le k-schéma simplicial constant $C_k Z^\bullet$, on obtient, grâce aux projections sur Z, un morphisme de k-schémas simpliciaux $[Y|G]^\bullet \to C_k Z^\bullet$. On a ainsi un morphisme canonique entre groupes de cohomologie :

$$\mathrm{H}^d(Z, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^d(C_k Z^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}), \ \forall d \geqslant 0. \tag{2.2}$$

On a :

Proposition 2.1.2 ([EKLV98, Prop. A.3. & Rem. A.4.]). *Le morphisme naturel* (2.2) *est un isomorphisme.*

Remarque 2.1.3. Le torseur $Y \to Z$ n'a en général pas de section locale pour la topologie de Zariski, mais en a pour la topologie étale (G est lisse), et pour la proposition 2.1.2 il est important d'utiliser la cohomologie étale et non de Zariski. La proposition est valable pour la cohomologie de Zariski si $Y \to Z$ a des sections localement pour la topologie de Zariski.

Le schéma simplicial B$G^\bullet$ est appelé espace classifiant car, comme pour le torseur classifiant, tout torseur peut se définir par un "point" de B$G^\bullet$: pour tout G-torseur $Y \to Z$, on a un morphisme naturel $[Y]^\bullet \to \mathrm{E}G^\bullet$ donné par $[Y]^{(n)} \to \mathrm{E}G^{(n)}$, $(g_0, \cdots, g_n, y) \mapsto (g_0, \cdots, g_n)$, qui est compatible à l'action de G, donc il induit un morphisme

$$[Y|G]^\bullet \to \mathrm{B}E^\bullet. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.4. Si on se donne un faisceau $\mathcal{F}$ sur le grand site de Spec(k) pour la topologie étale, alors le morphisme $[Y|G]^\bullet \to \mathrm{B}E^\bullet$ induit en cohomologie, pour tout $d \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}) \underset{\text{prop } 2.1.2}{\simeq} \mathrm{H}^d(Z, \mathcal{F})$$

naturel en G, en $Y \to Z$ et en $\mathcal{F}$.

▷ **Fonctorialité.** Soit $\sigma : G \to H$ un morphisme entre k-groupes algébriques affines, lisses et connexes. Le morphisme σ induit un morphisme de k-schémas simpliciaux E$G^\bullet \to$

$\mathrm{E}H^\bullet$: le morphisme entre les composantes $\mathrm{E}G^{(n)} = G^{n+1}$ et $\mathrm{E}H^{(n)} = H^{n+1}$ est simplement $\sigma^{n+1} = \sigma \times_k \cdots \times_k \sigma$. Ce morphisme est compatible avec les actions de G et H, d'où un morphisme $\mathrm{B}G^\bullet \to \mathrm{B}H^\bullet$. On définit ainsi un foncteur $\mathrm{B}\star^\bullet : G \to \mathrm{B}G^\bullet$ de la catégorie des groupes algébriques affines, lisses et connexes vers celle des schémas simpliciaux. Ce sera de cette façon que l'on considèrera la fonctorialité de $\mathrm{B}G^\bullet$ en fonction de G dans les sections suivantes.

Si l'on poursuit avec le morphisme de groupes $\sigma : G \to H$, on peut aussi définir un morphisme du schéma simplicial $[Y|G]^\bullet$ vers $[Y_H|H]^\bullet$ pour tout G-torseur $Y \to Z$, où Y_H désigne le H-torseur obtenu par poussée en avant de Y par σ. En effet, si $Y \to Z$ est un G-torseur, le quotient Y_H de $Y \times_k H$ par G pour l'action $(y,h)\cdot g := (y\cdot g, \sigma(g)^{-1}h)$ $(y \in Y, h \in H, g \in G)$ est un H-torseur au-dessus de Z pour l'action $((y,h) \bmod G)\cdot h' := ((y, hh')$ $(y \in Y,\ h,\ h' \in H)$. On a un morphisme f de Z-schémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y_H \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$$

défini par $y \to (y,1) \bmod G$. Ce morphisme présente la propriété

$$\forall y \in H, \forall g \in G,\ f(y\cdot g) = f(y)\cdot\sigma(g),$$

laquelle propriété permet de s'assurer que les morphismes de k-schémas

$$\sigma^{n+1} \times f : G^{n+1} \times_k Y \to H^{n+1} \times_k Y_H$$

sont compatibles aux actions de G et H. En somme, on peut définir un morphisme de schémas simpliciaux entre torseurs sur Z, $[Y|G]^\bullet \to [Y_H|H]^\bullet$. Pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur $\underline{Sch_k}$, le morphisme ainsi défini induit un isomorphisme en tout degré d

$$\mathrm{H}^d([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d([Y_H|H]^\bullet, \mathcal{F})$$

compatible avec les isomorphismes des deux groupes en question avec $\mathrm{H}^d(Z, \mathcal{F})$ (2.1.2).

2.2. Invariants cohomologiques

Dans cette section, on présente les invariants cohomologiques des groupes algébriques. On commence par une définition et des remarques très générales (2.2.1) avant de donner deux façons de construire des invariants à partir d'un torseur classifiant pour G et de faire le lien entre elles (2.2.2). Pour 2.2.2, on s'intéresse surtout aux invariants à coefficients dans les faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ vus en 1.2. La présentation de 2.2.1 provient de [GMS03]. La construction d'invariants à l'aide d'un torseur versel (de 2.1.1) est celle de [BM13] ; tandis que la construction à l'aide du torseur classifiant simplicial (de 2.1.2) a été inspirée par la lecture de [Del74] et de [KMRT98].

2.2.1. Généralités

Soit G un k-groupe algébrique lisse que l'on garde pour toute cette sous-section. On dispose des ensembles de cohomologie galoisienne non-abélienne $\mathrm{H}^1(K,G) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(K,G)$ ($= \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(K,G)$ car G est lisse) pour toute extension de corps K/k ([KMRT98, §29.]). Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-torseurs sur K ([Ser94, I.§5, Prop. 33.]) ; on y distingue la classe du torseur trivial, qui correspond au cocycle trivial, ou encore à la classe d'isomorphisme du torseur $G \to \mathrm{Spec}(k)$, G agissant par multiplication à droite. Si Y/K est un torseur sur le corps K/k pour le k-groupe algébrique lisse G, on note $[Y/K]$ (ou juste $[Y]$ lorsqu'il n'y a nulle ambiguïté sur le corps de base de Y) sa classe d'isomorphie dans $\mathrm{H}^1(K,G)$.

Définition 2.2.1. Soit H un foncteur de $\underline{Corps/k}$ dans $\underline{Ab}$. Un H-*invariant* du k-groupe algébrique lisse G, ou un *invariant de G à valeurs dans H* est un morphisme (ou transformation naturelle) λ du foncteur $\mathrm{H}^1(\star,G)$ vers le foncteur H.
Lorsque H est donné par le groupe de cohomologie galoisienne de degré d d'un module galoisien M (*i.e.* $\mathrm{H} = \mathrm{H}^d(\star,M)$), on dit aussi que λ est un *invariant cohomologique de degré d à coefficients dans M*.

On note $\mathrm{Inv}(G,H)$ l'ensemble des invariants de G à valeurs dans H ; il s'agit d'un groupe. Lorsque $H = \mathrm{H}^d(\star,M)$, on note ce groupe plutôt $\mathrm{Inv}^d(G,M)$.
En considérant la valeur en le torseur trivial d'un invariant de G à valeurs dans le foncteur H, il apparaît que l'on peut décomposer $\mathrm{Inv}(G,H)$ comme la somme directe de $H(k)$ et du sous-groupe des invariants envoyant le torseur trivial sur l'élément neutre de $H(k)$, que l'on note $\mathrm{Inv}(G,H)_0$ (ou $\mathrm{Inv}^d(G,M)_0$ si $H = \mathrm{H}^d(\star,M)$ pour un module galoisien M) :

$$\mathrm{Inv}(G,H) = H(k) \oplus \mathrm{Inv}(G,H)_0.$$

Le groupe $\mathrm{H}(k)$ est le sous-groupe des invariants *constants* et $\mathrm{Inv}(G,H)_0$ le sous-groupe des invariants *normalisés*. Grâce à cette décomposition, on s'aperçoit que l'étude de $\mathrm{Inv}(G,H)$ revient essentiellement à celle de $\mathrm{Inv}(G,H)_0$, $H(k)$ ne donnant pas d'information sur la géométrie ou la structure de groupe de G.

Remarque 2.2.2. D'après le théorème 1.2.16, un invariant d'un k-groupe algébrique affine à valeurs dans le groupe de Brauer est la même chose qu'un invariant cohomologique de G de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$.

▷ **Fonctorialité.** On désigne par H un foncteur de $\underline{Corps/k}$ dans $\underline{Ab}$. On dispose de fonctorialité naturelle entre groupes d'invariants dans les cas qui suivent.

- Soit f un morphisme de groupes entre deux k-groupes algébriques lisses $f : G_1 \to G_2$. On a une application induite $\mathrm{H}^1(K,G_1) \to \mathrm{H}^1(K,G_2)$ pour toute extension K/k, qui peut être définie en terme de cocycles ou en « poussant » un G_1-torseur en un G_2-torseur par f. Ce faisant, tout H-invariant $\mathrm{H}^1(\star,G_2) \to H$ de G_2 fournit par composition un H-invariant de G_1, soit un morphisme de groupes

$$f^* : \mathrm{Inv}(G_2,H) \to \mathrm{Inv}(G_1,H)$$

qui respecte les décompositions en invariants constants et normalisés.

• Soient G un k-groupe algébrique lisse, et L/k une extension de corps. Tout H-invariant i de G est un foncteur qui peut être restreint en un foncteur de $\underline{Corps/L}$ vers $\underline{Ab}$, et ce procédé définit un morphisme de groupe

$$\mathrm{Inv}(G,H) \to \mathrm{Inv}(G_L,H_L)$$

qui respecte les décompositions en invariants constants et normalisés. On dit que ce morphisme est obtenu par *extension des scalaires de k à L.*

▷ **Évaluation en un torseur versel.** Même si un invariant cohomologique de G demande *a priori* de prendre en compte *toutes* les extensions K de k, et *toutes* les classes de G-torseurs sur K, le résultat suivant montre qu'en réalité, dans les cas qui nous importent en pratique, toute la collection d'applications constituant l'invariant est déterminée par la seule valeur de l'invariant en un torseur classifiant « générique ».

Proposition 2.2.3 ([GMS03, Part 2, Th. 3.3.]). *Soit $E \to X$ un G-torseur classifiant et $E_{gen} \to k(X)$ sa fibre générique et soit H un foncteur $\underline{Corps/k} \to \underline{Ab}$ tel que pour toute extension K/k, le morphisme $H(K) \to H(K((t)))$ soit* injectif. *Alors le morphisme d'évaluation*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(G,H) & \to & H(k(X)) \\ \lambda & \mapsto & \lambda(E_{gen}) \end{array}$$

est injectif.

Les foncteurs $\mathrm{H}^d(\star,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ satisfont l'hypothèse de 2.2.3 ([GMS03, Part 2, Prop. A.9.]). La proposition permet alors de voir $\mathrm{Inv}^d(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ comme un sous-groupe de $\mathrm{H}^d(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$. Cependant il n'est pas clair quels éléments de $\mathrm{H}^d(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ donnent un invariant. Le théorème de Blinstein-Merkurjev que l'on va donner ci-dessous (Th. 2.2.7) élucide la question.

▷ **Invariants de petits degrés.** Soit M un module galoisien de torsion pour le corps k et soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe. Alors on a $\mathrm{Inv}^1(G,M)_0 = 0$. En effet, commençons par supposer que M est fini et notons $\underline{M}$ le k-groupe diagonalisable lisse dont l'ensemble des k-points est M muni de son action galoisienne. L'application $\mathrm{H}^1(K,M) \to \mathrm{H}^1(K((t)),M)$ est injective pour tout surcorps K de k, donc pour un torseur versel $\pi : E \to X$ de G, le morphisme d'évaluation $\mathrm{Inv}^1(G,M)_0 \to \mathrm{H}^1(k(X),M)$ est injectif (proposition 2.2.3). Or tout élément $\alpha \in \mathrm{H}^1(k(X),M)$ provenant d'un invariant de $\mathrm{Inv}^1(G,M)_0$ devient nul lorsqu'il est poussé dans $\mathrm{H}^1(E_{\mathrm{gen}},M)$ car le torseur générique E_{gen} de π devient trivial sur E_{gen}. Un tel α peut être représenté par un $\underline{M}$-torseur $Y \to \mathrm{Spec}(k(X))$ qui devient trivial sur E_{gen}, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f : E_{\mathrm{gen}} \to Y$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(k(X))$. Comme E_{gen} est connexe (G et $\mathrm{Spec}(k(X))$ le sont) et Y est un espace topologique discret (car $\underline{M}$ est fini sur k), f factorise par une composante discrète $\mathrm{Spec}(L)$ de Y pour un corps L. Le corps L ne peut être que $k(X)$ lui-même étant donné que $E_{\mathrm{gen}}/k(X)$ est géométriquement intègre (donc $k(E_{\mathrm{gen}})/k(X)$ est algébriquement clos) et Y est fini sur $k(X)$ (et donc $L/k(X)$ est fini). Par conséquent Y admet un $k(X)$-point et $Y \to \mathrm{Spec}(k(X))$ est un $\underline{M}$-torseur trivial, d'où $\alpha = 0 \in \mathrm{H}^1(k(X),M)$. Cela montre que $\mathrm{Inv}^1(G,M)_0$ est le groupe à un seul élément.

Dans le cas où M n'est pas nécessairement fini, on écrit M comme une limite inductive $\varinjlim M_i$ de sous-modules fini M_i de M. Les applications $\mathrm{H}^1(K, M_i) \to \mathrm{H}^1(K((t)), M_i)$ étant injectives pour toute extension K/k, il en est de même pour l'application limite $\mathrm{H}^1(K, M) \to \mathrm{H}^1(K((t)), M)$. Le morphisme d'évaluation $\mathrm{Inv}^1(G, M)_0 \to \mathrm{H}^1(k(X), M)$ est ainsi injectif pour $E \to X$ un G-torseur versel. Ainsi il apparaît que tout invariant normalisé $i \in \mathrm{Inv}^1(G, M)_0$ est défini pour un sous-module fini $M' \subseteq M$ et le point précédent nous assure que i est nul. Finalement $\mathrm{Inv}^1(G, M)_0$ est fini pour M fini ou non.

2.2.2. Constructions d'invariants

On fixe G un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe.

▷ **Construction via les torseurs classifiants.** On se donne un torseur versel $\pi : E \to X$ de G, ainsi qu'un foncteur *contravariant* $H : \underline{Sch_k} \to \underline{Ab}$.

En faisant agir G à droite sur $E^2 = E \times_k E$, on peut définir le G-torseur $E^2 \to E^2/G$ par descente, et les projections $E^2 \to E$ passent au quotient par G pour donner p_1, p_2 : $E^2/G \to X$, qui induisent p_1^*, $p_2^* : H(X) \to H(E^2/G)$. On définit les éléments *équilibrés* (*balanced* en anglais) de $H(X)$ comme étant les $h \in H(X)$ pour lesquels $p_1^*(h) = p_2^*(h)$. Ces éléments forment un sous-groupe de $H(X)$, noté $H(X)_{\text{éq}}$.

Par fonctorialité de H, tout K-point de X (pour une extension K/k) $x : \mathrm{Spec}(K) \to X$ détermine un morphisme $x^* : H(X) \to H(\mathrm{Spec}(K))$. Ainsi, pour tout G-torseur I/K, en choisissant $x \in X(K)$ de sorte que $I \simeq \pi^{-1}(x)$, on a un morphisme $H(X) \to H(\mathrm{Spec}(K))$.

Lemme 2.2.4 ([BM13, lem 3.3]). *Pour tout $h \in H(X)_{éq}$ l'élément $x^*(h) \in H(\mathrm{Spec}(K))$ ne dépend pas du choix de x.*

Grâce au lemme 2.2.4, on construit un morphisme $H(X)_{\text{éq}} \to \mathrm{Inv}(G, H)$, $h \mapsto \lambda_h$, que l'on notera Λ^H, comme suit : pour $h \in H(X)_{\text{éq}}$ et pour $[I/K]$ la classe d'isomorphisme d'un G-torseur I/K sur une extension K/k, on choisit $x \in X(K)$ tel que $I \simeq \pi^{-1}(x)$ (π est un torseur classifiant) et on pose $\lambda_h([I/K]) := x^*(h)$. On obtient le morphisme de groupes

$$\Lambda^H : H(X)_{\text{éq}} \to \mathrm{Inv}(G, H). \tag{2.4}$$

Remarque 2.2.5. Pour toute transformation naturelle de foncteurs $\phi : H \to H'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H(X)_{\text{éq}} \arrow[r, "\Lambda^H"] \arrow[d, "\phi_X"'] & \mathrm{Inv}(G, H) . \\ H'(X)_{\text{éq}} \arrow[ur, "\Lambda^{H'}"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.6. Soient $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ et $\rho' : G' \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n'}$ deux morphismes de groupes injectifs pour deux groupes affines, lisses et connexes G et G'. Si l'on se donne un morphisme de groupes $\tilde{\sigma} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_{n'}$ envoyant $\rho(G)$ dans $\rho'(G')$ (ce qui correspond à un morphisme $\sigma : G \to H$ qui s'étend aux représentations ρ et ρ'), $\tilde{\sigma}$ induit un morphisme de k-schémas $\bar{\sigma} : X \to X'$ entre les torseurs versels GL_n/G et $\mathrm{GL}_{n'}/G'$ pour G et G' respectivement (voir la fonctorialité de 2.1.1). Alors pour tout foncteur contravariant

$H : \underline{Sch_k} \to \underline{Ab}$, en notant λ^H le morphisme (2.4) obtenu pour G et $(\lambda')^H$ celui obtenu pour G', on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H(X')_{\text{éq}} \arrow[r, "\lambda^H"] \arrow[d, "\bar\rho^*"'] & \mathrm{Inv}(G', H) \arrow[d, "\sigma^*"] \\ H(X)_{\text{éq}} \arrow[r, "(\lambda')^H"'] & \mathrm{Inv}(G, H). \end{tikzcd}$$

On peut ainsi définir une certaine fonctorialité de la construction d'invariants via les torseurs versels. Par contre la fonctorialité ne dépend pas que du morphisme $G \to G'$.

Revenant à la discussion, un cas particulier important en raison du théorème 2.2.7 ci-dessous, est la construction pour H le foncteur $U \mapsto \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(U, \mathcal{H}^d_{(U)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)$, où $\mathcal{H}^d_{(U)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ désigne le faisceau sur U pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau $V \subset U \mapsto \mathrm{H}^d_{\text{ét}}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$. Notons que $\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(K, \mathcal{H}^d_{(K)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) \simeq \mathrm{H}^d(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour tout extension de corps K/k. On obtient un morphisme de groupes

$$\tilde\Lambda^{d,j} : \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(\star, \mathcal{H}^d_{(\star)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}} \to \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)). \tag{2.5}$$

Ce morphisme envoie l'image de $\mathrm{H}^d(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ dans $\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(\star, \mathcal{H}^d_{(\star)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}}$, exactement sur le sous-groupe des invariants constants ; de ce fait, le morphisme (2.5) induit un autre morphisme

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(\star, \mathcal{H}^d_{(\star)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}} / \mathrm{H}^d(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))_0.$$

Comme on a une flèche naturelle $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(Y, \mathcal{H}^d_{(Y)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)$ fonctorielle en Y/k, on a une flèche semblable avec les sous-groupes équilibrés, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))_{\text{éq}} \arrow[r, "\Lambda^{d,j}"] \arrow[d] & \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \\ \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}} \arrow[ur, "\tilde\Lambda^{d,j}"'] & \end{tikzcd} , \tag{2.6}$$

$\Lambda^{d,i}$ étant le morphisme $\Lambda^{\mathrm{H}^d(\star, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$.

Ce qu'il se produit pour certains torseurs versels est que l'on construit de cette façon tous les invariants de degré d de G à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$:

Théorème 2.2.7 ([BM13, Th 3.4])**.** *Si l'on choisit le torseur versel $E \to X$ avec E une variété G-rationnelle et $E(k) \neq \emptyset$, alors le morphisme $\tilde\Lambda^{d,i}$ est un isomorphisme pour tous entiers naturels $d \geqslant j$.*

Rappelons qu'il existe des torseurs qui vérifient les hypothèses du théorème, comme il a été vu en 2.1. De plus $\tilde\lambda^{d,i}$ est fonctorielle en les représentations fidèles $G \to \mathrm{GL}_n$ pour $X = \mathrm{GL}_n/G$ d'après la remarque 2.2.6.

Remarque 2.2.8. Dans [BM13], la démonstration du théorème 2.2.7 utilise le fait que les faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ sur une k-variété lisse, irréductible satisfont la conjecture de Gersten. Pour la torsion première à la caractéristique de k [1].

Remarque 2.2.9. En raison de la conjecture de Gersten pour les faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ en degré $\geqslant j$ (th. 1.2.12) et étant donné la proposition 2.2.3, on a une suite de deux morphismes injectifs (avec le X du théorème 2.2.7)

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}} \hookrightarrow \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \hookrightarrow \mathrm{H}^d(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

dont la composition est la flèche induite par le point générique $\mathrm{Spec}(k(X)) \to X$ de X. Ainsi les éléments de $\mathrm{H}^d(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ qui sont des invariants de G, sont exactement les individus équilibrés qui sont *non ramifiés* en les points de codimension 1 de X.

Remarque 2.2.10. Soient d et j des entiers positifs, ainsi qu'un foncteur H de $\underline{Sch_k}$ vers $\underline{Ab}$. Supposons que l'on est dans la situation suivante :

1. on a un morphisme de foncteurs $\mathrm{F} : H \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(\star, \mathcal{H}^d_{(\star)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)$;
2. pour tout $\alpha \in H(X)$, pour toute extension K/k, pour tous K-points x, $x' \in X(K)$ tels que $x^{-1}(p) \underset{G\text{-torseurs}}{\simeq} (x')^{-1}(p)$, les éléments $x^*(\alpha)$ et $(x')^*(\alpha)$ ont la même image dans $\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(K, \mathcal{H}^d_{(\mathrm{Spec}(K))}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) = \mathrm{H}^d(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Les hypothèses signifient que l'on peut correctement définir un morphisme $\Lambda : H(X) \to \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (on ne considère plus seulement les éléments équilibrés de $H(X)$). Alors l'image de l'application $F_X : H(X) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)$ est incluse dans le sous-groupe des éléments équilibrés du second groupe.

▷ **Construction via le torseur classifiant simplicial.** On propose une construction d'invariants cohomologiques similaires à celle ci-dessus, qui fonctionne avec le torseur classifiant simplicial et la cohomologie des schémas simpliciaux. Pour cela on s'est inpiré de l'article [EKLV98].

Soient d un entier naturel et $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\underline{Sch_k}$ pour la topologie étale (il s'agit donc d'un faisceau sur le *gros* site). On construit un morphisme naturel (en G) $\xi^{\mathcal{F}}$: $\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{H}^d(\star, \mathcal{F}))$ selon la recette suivante : si Y/K est un G-torseur sur une extension K/k, on dispose du morphisme

$$f_{Y/K} : \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}) \underset{\text{prop. 2.1.2}}{\simeq} \mathrm{H}^d(K, \mathcal{F}). \tag{2.7}$$

Pour tout $\alpha \in \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F})$, on peut donc regarder $\xi_\alpha(Y/K) := f_{Y/K}(\alpha)$. Si $\sigma : Y/K \xrightarrow{\sim} Y'/K$ est un isomorphisme entre deux G-torseurs sur K, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f_{Y'/K} : & \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathrm{H}^d([Y'|G]^\bullet, \mathcal{F}) \arrow[d, "\simeq"', "\sigma^*"] & \mathrm{H}^d(K, \mathcal{F}) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] , \\
f_{Y/K} : & \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^*([Y|G]^\bullet, \mathcal{F}) & \mathrm{H}^d(K, \mathcal{F}) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

1. L'article [BM13] oublie de mentionner une référence lorsque k est imparfait

donc $\xi_\alpha(Y/K)$ ne dépend pas de la classe d'isomorphismes du G-torseur Y/K et on définit simplement $\xi_\alpha([Y/K]) := \xi_\alpha(Y/K)$. On a alors le morphisme

$$\xi^{\mathcal{F}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) & \to & \mathrm{Inv}(G, \mathrm{H}^d(\star, \mathcal{F})) \\ \alpha & \mapsto & \xi_\alpha \end{array} \right. . \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.11. Le morphisme $\xi^{\mathcal{F}}$ est fonctoriel en G : si $\sigma : G \to G'$ est un morphisme de groupes entre k-groupes algébriques affines, lisses et connexes, alors en notant ξ le morphisme $\xi^{\mathcal{F}}$ obtenu pour G et ξ' pour G', on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^d(\mathrm{B}(G')^\bullet, \mathcal{F}) \arrow[r, "\xi'"] \arrow[d] & \mathrm{Inv}(G', \mathrm{H}^d(\star, \mathcal{F})) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F}) \arrow[r, "\xi"'] & \mathrm{Inv}(G, \mathrm{H}^d(\star, \mathcal{F})) \end{tikzcd} .$$

La flèche verticale de gauche est celle induite par le morphisme $\mathrm{B}G^\bullet \to \mathrm{B}(G')^\bullet$ induit par σ (voir la fonctorilité en 2.1.2) et celle de droite est σ^* (de 2.2.1).

Cas particulier des coefficients $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$. On s'intéresse aux invariants de G de degré d à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ ($d \geqslant j \in \mathbb{N}$). Notons $\xi^{d,j}$ le morphisme $\xi^{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)}$ de (2.8). On souhaite préciser comment $\xi^{d,j}$ se factorise canoniquement par $\tilde{\Lambda}^{d,j}$.

Soit $\pi : E \to X$ un torseur classifiant de G qui est une variété G-rationnelle avec $E(k) \neq \emptyset$ (voir 2.1.1). Le morphisme de k-schémas simpliciaux $[X|G]^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$ (de 2.1.2) induit en cohomologie

$$\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^d([X|G]^\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)), \tag{2.9}$$

que l'on peut composer avec $\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)$ issu de la faisceautisation du préfaisceau zariskien sur X, $U \underset{\text{ouvert}}{\subseteq} X \mapsto \mathrm{H}^d(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$: on se retrouve avec un morphisme

$$\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right). \tag{2.10}$$

Grâce à la remarque 2.2.10, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[dl, "(2.10)"'] \arrow[dr, "\xi^{d,j}"] & \\ \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right)_{\text{éq}} \arrow[rr, "\simeq", "\tilde{\Lambda}^{d,j}"'] & & \mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)). \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

▷ **Commentaires.** Soient $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur $\underline{Sch_k}$ et d un entier $\geqslant 0$. La construction simpliciale décrite ne permet pas nécessairement d'obtenir *tous* les invariants de G de degré d à coefficients dans $\mathcal{F}$: le morphisme de groupes $\xi^{\mathcal{F}}$ peut ne pas être surjectif.

La construction de $f_{Y/K}$ (2.7) peut se réaliser plus généralement pour n'importe quel G-torseur Y sur une base Y_0 qui est un k-schéma - notons f_{Y/Y_0} le morphisme obtenu dans ce cas, qui va de $\mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F})$ vers $\mathrm{H}^d(Y_0, \mathcal{F})$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F})$, son image

$f_{Y/Y_0}(\alpha)$ ne dépend pas de la classe d'isomorphisme de Y/Y_0. Ceci permet de définir des invariants cohomologiques *globaux* Ξ_α ($\alpha \in \mathrm{H}^d(\mathrm{B}G^\bullet, \mathcal{F})$), c'est- à-dire un morphisme de foncteurs de $\mathrm{H}^1(\star, \mathcal{F})$ vers $\mathrm{H}^d(\star, \mathcal{F})$ qui ici sont vus comme foncteurs de la catégorie $\underline{Sch_k}$ en direction de la catégorie $\underline{Ab}$. On utilise l'appellation d'invariants globaux pour signifier que les invariants en question sont définis pour les G-torseurs sur une base quelconque et pas seulement ceux sur un corps. Tout invariant ξ_α est la restriction d'un invariant global. Cependant tout invariant $i \in \mathrm{Inv}^d(G, \mathcal{F})$ n'est pas nécessairement restriction d'un invariant global : prendre par exemple $d = 3$ et $\mathcal{F} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$. À l'aide de la section 2.3 on pourra dire que tout invariant de $\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br}) = \mathrm{Inv}^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ est la restriction d'un invariant global (voir 3.1.3).

2.3. Invariants de degré 2

Le théorème 2.3.2 généralise le théorème [BM13, Th. 2.4.] à tout groupe algébrique affine, lisse, connexe. Le principe de la démonstration est de voir que si G est affine, lisse, connexe, et si $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ est une représentation fidèle, alors on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m)/\mathrm{H}^2(k, \mathbb{G}_m) \tag{2.12}$$

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{GL}_n/G, \mathbb{G}_m) \tag{2.13}$$

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{GL}_n/G, \mathbb{G}_m)/\mathrm{H}^2(k, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Br}(\mathrm{GL}_n/G)_{\text{éq}}/\mathrm{Br}(k) \tag{2.14}$$

(2.15)
$$\mathrm{Br}(\mathrm{GL}_n/G)_{\text{éq}}/\mathrm{Br}(k) \simeq \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(\mathrm{GL}_n/G, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\right)/\mathrm{H}^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \simeq \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0.$$

L'isomorphisme (2.14) provient de la section 1.1 et les isomorphismes (2.15) découlent des sections 1.2 et 2.2.2. Le travail consiste donc principalement à obtenir les isomorphismes (2.12) et (2.13). Pour ce faire on exploite la suite spectrale reliant la cohomologie de chaque morceau d'un schéma simplicial à sa cohomologie globale.

2.3.1. Énoncé

Théorème 2.3.1. *On a deux isomorphismes naturels en le k-groupe algébrique, affine, lisse et connexe G,*

$$\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m)/\mathrm{H}^2(k, \mathbb{G}_m), \tag{2.16}$$

$$\xi^{2,1} : \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br}). \tag{2.17}$$

Le morphisme $\xi^{2,1}$ est le morphisme du paragraphe "Construction via le torseur classifiant simplicial" de 2.2.2 obtenu pour le foncteur $\mathrm{H}^2(\star, \mathbb{G}_m)$.

En composant les morphismes (2.16) et $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m)/\mathrm{H}^2(k, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$ induit par (2.17), la description des invariants à coefficients dans le groupe de Brauer est donné par :

Théorème 2.3.2. *On a un isomorphisme de groupes naturel en le k-groupe algébrique, affine, lisse et connexe G,*

$$\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0. \tag{2.18}$$

Remarque 2.3.3. La naturalité de l'isomorphisme (2.18) énoncée dans le corollaire 2.3.2 signifie que pour tout morphisme de k-groupes algébriques affines, lisses et connexes $f : G \to H$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(H,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "(2.18)"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Inv}(H,\mathrm{Br})_0 \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Ext}(G,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "(2.18)"'] & \mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0 \end{tikzcd} .$$

La démonstration repose sur la proposition 2.3.4, qui elle-même repose sur l'exploitation de la suite spectrale de la proposition 1.1.10 pour les schémas simpliciaux $\mathrm{B}G^\bullet$ et $[X|G]^\bullet$, avec X la base d'un torseur versel $\mathrm{GL}_n \to X$ de G.

2.3.2. Démonstration

Fixons un groupe algébrique affine, lisse et connexe G, ainsi qu'un torseur versel $\pi : E \to X$ provenant d'une représentation linéaire $G \hookrightarrow E = \mathrm{GL}_n$ comme dans 2.1.

Le théorème découle du diagramme de la proposition qu'on énonce ici.

Proposition 2.3.4. *On a un diagramme commutatif, à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Br}(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Br}(E) & \end{tikzcd} , \tag{2.19}$$

la flèche $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Br}(k)$ étant induite par le morphisme unité ϵ de G :

$$\epsilon^* : \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(C_k\mathrm{Spec}(k)^\bullet,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Br}(k);$$

et τ est le morphisme (2.9) induit par le morphisme $[E|G]^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$:

$$\tau : \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2([E|G]^\bullet,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Br}(X).$$

De plus la première ligne du diagramme est naturelle en G.

Étant donnée la proposition 2.3.4, montrons le théorème 2.3.1.

Les morphismes structuraux $G \to \mathrm{Spec}(k)$ et $X \to \mathrm{Spec}(k)$ induisent $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet,\mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ respectivement. Le groupe G possède le k-point rationnel ϵ et X le k-point ϵ_0 obtenu par l'image de l'unité de G à travers $G \to \mathrm{GL}_n \to X$. Ces points identifient $\mathrm{Br}(k)$ à des facteurs directs de $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet,\mathbb{G}_m)$ et de $\mathrm{Br}(X)$. On a

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet,\mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(k) \oplus \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet,\mathbb{G}_m)_0 , \qquad \mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(k) \oplus \mathrm{Br}(X)_0$$

avec
$$\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m)_0 := \ker(\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Br}(k))$$
et de même
$$\mathrm{Br}(X)_0 := \ker(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\epsilon_0^*} \mathrm{Br}(k)).$$
De plus dans les deux décompositions, les facteurs $\mathrm{Br}(k)$ se correspondent par τ : τ induit l'identité sur les facteurs $\mathrm{Br}(k)$. Ils correspondent aussi au sous-groupe de $\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})$ formé par les invariants constants, via le morphisme $\xi^{2,1}$ (2.8) pour le cas de $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m)$, et via le morphisme $\Lambda^{\mathrm{Br}} : \mathrm{Br}(X)_{\text{éq}} \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})$ (2.4) pour le cas de $\mathrm{Br}(X)$ (on veut dire qu'à travers $\xi^{2,1}$ et Λ^{Br}, le facteur $\mathrm{Br}(k)$ est envoyé sur les invariants constants par $\mathrm{Id}_{\mathrm{Br}(k)}$).

Démonstration du théorème 2.3.1. On suppose ici la proposition 2.3.4 vraie. D'une part, pour l'isomorphisme (2.16) du théorème on choisit celui donné par la première ligne du diagramme (2.19), qui est bien naturel comme indiqué par la proposition. D'autre part, en vertu de ce qui est dit ci-dessus, il suffit de voir que $\xi^{2,1}$ induit un isomorphisme $h^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m)_0 \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$ pour obtenir l'isomorphisme (2.17) du théorème. C'est ce que l'on fait ci-dessous.

La proposition 2.3.4 implique que $\tau : \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m)_0 \to \ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E))$ est un isomorphisme. Comme 2.2.7 nous dit que $\Lambda^{\mathrm{Br}} : (\mathrm{Br}(X)_0)_{\text{éq}} \simeq \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$, il reste à montrer que $\ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E)) \subseteq \mathrm{Br}(X)$ est exactement $(\mathrm{Br}(X)_0)_{\text{éq}}$. Tout élément de $\ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E)) \subseteq \mathrm{Br}(X)$ permet de construire un invariant cohomologique par la construction Λ^{Br}, donc de manière similaire à ce qui a été dit dans la remarque 2.2.10, on déduit l'inclusion
$$\ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E)) \subseteq (\mathrm{Br}(X)_0)_{\text{éq}}.$$
Or l'inclusion inverse est valide. En effet, soit $\alpha \in (\mathrm{Br}(X)_0)_{\text{éq}}$. En appelant $y_0 : \mathrm{Spec}(k(E)) \to E \to X$ le point de X provenant du point générique de E, le morphisme $y_0^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k(E))$ est l'évaluation de l'invariant construit à partir de α en le torseur $E_{\text{gen}} \times_k k(E)$. Mais ce dernier est un G-torseur sur $k(E)$ trivial, donc $y_0^*(\alpha) = 0$, d'où l'on tire $\alpha \in \ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E))$. □

Démonstration de la proposition 2.3.4

On va commencer par construire les deux lignes exactes du diagramme (2.19) séparément. Pour cela, le procédé est identique et seuls les dernières lignes et détails changent

Étape 1 : Une suite exacte. Appelons Y un k-schéma qui est ou $\mathrm{Spec}(k)$, ou $E = \mathrm{GL}_n$.

Considérons la proposition 1.1.10 et appliquons-la au k-schéma simplicial $[Y|G]^\bullet$ (si $Y = \mathrm{Spec}(k)$, il s'agit de $\mathrm{B}G^\bullet$) : on a une suite spectrale convergente

$$E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q([Y|G]^{(p)}, \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}([Y|G]^\bullet, \mathbb{G}_m). \tag{2.20}$$

La première page de cette suite spectrale est

$$
\begin{array}{l}
\uparrow q \\
\mathrm{H}^2(E,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^2((G^2\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^2((G^3\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \\
\mathrm{H}^1(E,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1((G^2\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1((G^3\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \\
\mathrm{H}^0(Y,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^0((G^2\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^0((G^3\times_k Y)/G,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to p
\end{array}
$$

de différentielles (de la colonne n vers la colonne $n+1$) $d = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\delta_i^*$ avec $\delta_i : (G^{n+2}\times_k Y)/G \to (G^{n+1}\times_k Y)/G$ correspondant à la suppression de la i-ième coordonnée de G^{n+2} ($0 \leqslant i \leqslant n+1$ - la première coordonnées porte le numéro 0).

Suivant [Del96, (1.3.1)], on considère les isomorphismes

$$
\begin{array}{ccc}
(G^{n+1}\times_k Y)/G & \overset{\sim}{\to} & G^n\times_k Y \\
(g_0,\cdots,g_n,x) \bmod G & \mapsto & (g_0g_1^{-1},\cdots,g_{n-1}g_n^{-1},x\cdot g_0^{-1})
\end{array}.
$$

Via ces isomorphismes, la famille des $G^n\times_k Y$ forme un k-schéma simplicial dont les dégénérescences δ_i de $[Y|G]^\bullet$ se transforment en

$$
\delta_i' = \delta_i^{n,\prime} : \left\{
\begin{array}{ccccc}
G^n\times_k Y & \to & G^{n-1}\times_k Y & \\
(g_1,\cdots,g_n,x) & \mapsto & (g_2,\cdots,g_n,x\cdot g_1) & \text{si } i=0 \\
 & & (g_1,\cdots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\cdots,g_n,x) & \text{si } 0<i<n \\
 & & (g_1,\cdots,g_{n-1},x) & \text{si } i=n
\end{array}\right. .
$$

Pour la commodité du lecteur, précisons l'expression de δ_i' dans les cas limites $i=1$ et $i=n-1$: si $n=2$, $\delta_1'(g_1,g_2)=g_1g_2$, et si $n\geq 2$,

$$
\begin{aligned}
\delta_1'(g_1,\cdots,g_n,x) &= (g_1g_2,g_3,\cdots,g_n,x)\\
\delta_{n-1}'(g_1,\cdots,g_n,x) &= (g_1,\cdots,g_{n-2},g_{n-1}g_n,x).
\end{aligned}
$$

La première page de la suite spectrale se réécrit

$$
\begin{array}{l}
\uparrow q \\
0 \longrightarrow \mathrm{H}^2(Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(G\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(G^2\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \cdots \\
0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(G\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(G^2\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \cdots \\
0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^0(G\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^0(G^2\times_k Y,\mathbb{G}_m) \to \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to p
\end{array}
$$

de différentielles $d = \sum(-1)^i(\delta_i')^*$.

Lemme 2.3.5. *Le complexe* $(\mathrm{H}^0(G^n\times_k Y,\mathbb{G}_m))_{n\in\mathbb{N}} = (k[G^n\times_k Y]^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de cohomologie nulle en degré* $\geqslant 2$.

Démonstration. Rappelons que $Y=\mathrm{Spec}(k)$ ou $Y=\mathrm{GL}_n$. Le complexe en jeu s'identifie au complexe $(k^\times\oplus\widehat{G^n\times Y}(k))_n = (k^\times\oplus\widehat{G}(k)^n\oplus\widehat{Y}(k))_n$, composé du complexe $C_1 := (k^\times)_n$

de différentielles

$$d_1^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ \mathrm{Id}_{k^\times} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

et du complexe $C_2 := (\widehat{G}(k)^n \oplus \widehat{Y}(k))_n$ de différentielles

$$d_2^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (\delta_i^{n+1,\prime})^\star$$

avec $(\delta_i^{n+1,\prime})^\star : \widehat{G}^n(k) \oplus \widehat{Y}(k) \to \widehat{G}^{n+1}(k) \oplus \widehat{Y}(k)$ le morphisme induit par $\delta_i^{n+1,\prime}$ sur les groupes de caractères. Le complexe C_1 est bien de cohomologie nulle. En ce qui concerne C_2, on retrouve exactement le contexte de la preuve de [San81, Lem. 6.12.]. Les différentielles s'expriment

$$d_2^{2i}(\phi_1, \cdots, \phi_{2i}, \psi) = (\psi_{|G} - \phi_1, 0, \cdots, \underbrace{\phi_{2j} - \phi_{2j+1}}_{\text{position } 2j+1,\, j \geqslant 1}, \underbrace{0}_{\text{position } 2j+2}, \cdots, \phi_{2i}, 0)$$

$$d_2^{2i+1}(\phi_1, \cdots, \phi_{2i+1}, \psi) = (\psi_{|G}, \phi_2, \phi_2, \cdots, \underbrace{\phi_{2j}}_{\text{position } 2j,\, j \geqslant 1}, \underbrace{\phi_{2j}}_{\text{position } 2j+1}, \cdots, \phi_{2i}, \phi_{2i}, \psi)$$

pour tout $i \geqslant 0$ et où les ϕ_j décrivent $\widehat{G}(k)$ et ψ décrit $\widehat{Y}(k)$. Suivant la preuve de [San81, Lem. 6.12.], les applications pour $n \geqslant 2$,

$$s_n : \begin{cases} \widehat{G}(k)^n \oplus \widehat{Y}(k) & \to & \widehat{G}(k)^{n-1} \oplus \widehat{Y}(k) \\ (\phi_1, \cdots, \phi_n, \psi) & \mapsto & (-\phi_1, \phi_3, \cdots, \phi_n, \psi) \end{cases}$$

fournissent une homotopie (en degré $\geqslant 2$) du complexe C_2, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 2$, on a $d_2^{n-1} \circ s_n + s_{n+1} \circ d_2^n = \mathrm{id}_{\widehat{G}(k)^n \oplus \widehat{Y}(k)}$ d'où il vient que la cohomologie de C_2 est nulle en degré $\geqslant 2$. □

Lemme 2.3.6. *Les projections $G^n \times_k E \to G^n$, $((g_i), x) \mapsto (g_i)$, identifient les complexes $(\mathrm{H}^1(G^n, \mathbb{G}_m))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{H}^1(G^n \times_k E, \mathbb{G}_m))_{n \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. On a une identification $\mathrm{H}^1(G^n \times_k Y, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(G^n \times_k Y)$. D'après la proposition B.1.1 ($E = \mathrm{GL}_n$ étant rationnel), les projections $\mu_n : G^n \times_k E \to G^n$ et $\nu_n : G^n \times_k E \to E$ induisent un isomorphisme $\mu_n^* \oplus \nu_n^* : \mathrm{Pic}(G^n) \oplus \mathrm{Pic}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(G^n \times_k E)$, mais puisque $\mathrm{Pic}(\mathrm{GL}_n) = 0$, l'isomorphisme est $\mu_n^* : \mathrm{Pic}(G^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(G^n \times_k E)$ d'inverse le morphisme $(i_n^x)^*$ induit par tout plongement $i_n^x : G^n \hookrightarrow G^n \times_k E$ construit à partir d'un k-point x de E. Alors les applications $(\delta_i')^* : \mathrm{Pic}(G^n \times_k E) \to \mathrm{Pic}(G^{n-1} \times_k E)$ obtenues pour $Y = E$ se transportent en les $(\delta_i')^* : \mathrm{Pic}(G^n) \to \mathrm{Pic}(G^{n-1})$ obtenues pour $Y = \mathrm{Spec}(k)$, ce qui établit le lemme. □

Grâce aux lemmes 2.3.5 et 2.3.6, la deuxième page de la suite spectrale (2.20) est (en écrivant Br pour $\mathrm{H}^2(-, \mathbb{G}_m)$)

(2.21)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[drr] & \ker(\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(G \times_k Y)) \arrow[drr] & E_2^{1,2} & E_2^{2,2} & \\
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \ker(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)) \arrow[drr] & E_2^{2,1} & \\
& \mathrm{H}^0(k[G^\bullet \times_k Y]^\times) & \mathrm{H}^1(k[G^\bullet \times_k Y]^\times) & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

q p

donc

$$E_\infty^{0,2} = E_3^{0,2} = \ker\left(\ker(\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(G \times_k Y)) \to E_2^{2,1}\right),$$
$$E_\infty^{1,1} = E_2^{1,1} = \ker(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2))$$

et $E_\infty^{2,0} = 0$, et du fait de la convergence de (2.20), on trouve une suite exacte naturelle en $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$:

(2.22)
$$0 \to \ker\left(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)\right) \to \mathrm{H}^2([Y|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \ker\left(\ker(\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(G \times_k Y)) \to E_2^{2,1}\right) \to 0.$$

C'est la suite (2.22) qui sera spécialisée dans les étapes 2 et 3 pour $Y = \mathrm{Spec}(k)$ et $Y = E$ respectivement.

Étape 2 : La suite exacte pour $Y = \mathrm{Spec}(k)$. La suite (2.22) pour $Y = E$ est :

(2.23)
$$0 \to \ker\left(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)\right) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \ker\left(\ker(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(G)) \to E_2^{2,1}\right) \to 0.$$

Ici la différentielle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(G)$ est le morphisme nul, car $\delta_0^{1,\prime} = \delta_1^{1,\prime}$, donc le dernier terme est juste $\ker(\mathrm{Br}(k) \to E_2^{2,1})$. La suite (2.23) est naturelle en G (puisqu'elle provient de la suite spectrale convergente (2.20)), donc en comparant (2.23) ci-dessus avec celle pour le groupe trivial 1, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\mathrm{Br}(k) \to E_2^{2,1}(G)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\mathrm{Pic}(1) \to \mathrm{Pic}(1^2)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^2(\mathrm{B}1^\bullet, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \ker(\mathrm{Br}(k) \to E_2^{2,1}(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(k) \arrow[r] & \ker(\mathrm{Br}(k) \to 0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La colonne de droite est l'inclusion $\ker(\mathrm{Br}(k) \to E_2^{2,1}(G)) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k)$ et celle du milieu provient de l'élement neutre de G (ou de $\mathrm{B}G^\bullet$) $\epsilon : \mathrm{Spec}(k) \to G$. La colonne du milieu donne un morphisme surjectif étant donné que $\mathrm{B}G^\bullet$ a une projection sur $\mathrm{Spec}(k)$ ($\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{B}G^\bullet \to \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(k)}$). Il en résulte que $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \ker(\mathrm{Br}(k) \to E_2^{2,1}) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k)$ est surjectif et donnée par l'élément neutre $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{B}G^\bullet$.

Il reste à dire que le terme $\ker(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2))$ est le noyau de

$$(\delta_0')^* - (\delta_1')^* + (\delta_2')^* : \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)$$

qui n'est autre que $p_1^* + p_2^* - m^*$ avec p_i la projection de G^2 sur le facteur $i = 1, 2$, et m la multiplication de G ; d'après la proposition B.1.3, il s'agit du groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$, l'isomorphisme entre les deux groupes étant naturel en G.

Pour résumer, on a une suite exacte naturelle en G affine, lisse, connexe,

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{B}G_\bullet, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Br}(k) \to 0$$

avec $\epsilon : \mathrm{Spec}(k) \to G$ le morphisme unité de G. Cela conclut l'étape 2 de la démonstration de 2.3.4.

Étape 3 : La suite exacte pour $Y = E$. Reprenons la suite (2.22) pour $Y = E$:
(2.24)
$$0 \to \ker\big(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)\big) \to \mathrm{H}^2([E|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \ker\big(\ker(\mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(G \times_k E)) \to E_2^{2,1}\big) \to 0.$$

Or $\mathrm{H}^2([E|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(X)$ (proposition 2.1.2) et on a rappelé dans l'étape 2 que $\ker(\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G^2)) \simeq \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$, donc la suite exacte (2.24) donne la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E). \tag{2.25}$$

Pour établir tout à fait la deuxième ligne du diagramme de la proposition 2.3.4, il reste à justifier que la flèche $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E)$ de (2.25) est bien π^*, avec π la projection $E \to X$. Pour cela il suffit de comparer la suite spectrale convergente (2.20) pour $Y = E$ avec :

$$(E')^{p,q} = \mathrm{H}^q(X, \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(C_k X^\bullet, \mathbb{G}_m) \tag{2.26}$$

correspondante au schéma simplicial constant $C_k X^\bullet$ (celui dont toutes les composantes sont X et les morphismes de transitions l'identité de X). La projection $\Pi_\bullet : [E|G]^\bullet \to C_k X^\bullet$ de composantes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G^n \times_k E & \to & X \\ (g_1, \cdots, g_n, x) & \mapsto & \pi(x) \end{array} \right. ,$$

induit un morphisme de suites spectrales de (2.20) vers (2.26). Ce morphisme induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^2([E|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "=:f"] \arrow[d, "\Pi^*"'] & E_\infty^{0,2} \arrow[d] \\ \mathrm{H}^2(C_k X^\bullet, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "=:f'"'] & (E')_\infty^{0,2} \end{tikzcd} . \tag{2.27}$$

Dans ce diagramme, la première ligne est issue de (2.24), $(E')_\infty^{0,2}$ est simplement $\mathrm{Br}(X)$, et la flèche verticale à droite est $\Pi_0^* = \pi^*$. De plus f' est un isomorphisme dont la composition $f' \circ \Pi^*$ est exactement l'isomorphisme $\mathrm{H}^2([E|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(X)$ utilisé plus haut pour obtenir (2.25). Ainsi la flèche $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(E)$ de (2.25) est $f \circ (f' \circ \Pi^*)^{-1}$ qui est bien le morphisme π^* à cause de la commutativité du carré (2.27).

Étape 4 : Commutativité du diagramme (2.19). La commutativité de (2.19) est assuré par le morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q(\mathrm{B}G^p, \mathbb{G}_m) & \Rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^q([X|G]^p, \mathbb{G}_m) & \Rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}([X|G]^\bullet, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

provenant de la naturalité de la suite spectrale (1.1.10) pour le morphisme $[X|G]^\bullet \to \mathrm{B}G^\bullet$ de 2.1.

Fin de la démonstration de le proposition 2.3.4

Chapitre 3

Discussion - Applications

Le présent chapitre exploite les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 démontrés au chapitre précédent. D'une part le théorème 2.3.1 permet de montrer que les invariants de Brauer d'un groupe algébrique affine, lisse et connexe G sur un corps ne sont pas seulement définis pour les G-torseurs de bases les extensions de corps de k, mais aussi pour ceux de bases des k-schémas. Plus précisément, les invariants de Brauer sont tous donnés par la construction *connectique*. D'autre part le théorème 2.3.2 montre que l'étude des invariants de Brauer revient exactement à celle des groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ des groupes algébriques affines, lisses, connexes G. On montre différents résultats sur les groupes $\mathrm{Ext}^1(\star, \mathbb{G}_m)$, sur la façon dont ils se comportent par extension des scalaires et aussi par restriction de Weil. On décrit aussi précisément les groupes d'extensions d'une certaine classe de groupes pseudo-semi-simples. On a inclus la sous-section 3.2.1, qui présente des résultats récents d'autres auteurs sur les groupes d'extensions et de Picard des groupes unipotents lisses et connexes sur un corps imparfait. Lesdits résultats éclairent les invariants de Brauer des groupes unipotents et l'auteur de la Thèse tient à les exposer pour améliorer leur diffusion qu'il juge importante.

3.1. Conséquences générales du théorème 2.3.2

3.1.1. Comportement de $\mathrm{Inv}(\star, \mathrm{Br})_0$ par produit.

Ici, on établit sans difficulté le comportement additif de $\mathrm{Ext}(\star, \mathbb{G}_m)$ par rapport aux produits de groupes algébriques. Ce comportement se transporte directement aux groupes des invariants à coefficients dans le groupe de Brauer par le théorème 2.3.2.

Propriété 3.1.1. *Soient G_1 et G_2 deux k-groupes algébriques lisses et connexes. Notons $j_i : G_i \to G_1 \times_k G_2$ les injections canoniques et $p_i : G_1 \times_k G_2 \to G_i$ les projections. Alors les morphismes de groupes*

$$\lambda : \mathrm{Ext}^1(G_1, \mathbb{G}_m) \oplus \mathrm{Ext}^1(G_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p_1^* + p_2^*} \mathrm{Ext}^1(G_1 \times_k G_2, \mathbb{G}_m)$$

et

$$\mu : \mathrm{Ext}^1(G_1 \times_k G_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{j_1^* + j_2^*} \mathrm{Ext}^1(G_1, \mathbb{G}_m) \oplus \mathrm{Ext}^1(G_2, \mathbb{G}_m)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration. $\diamond$ Pour commencer, il est facile de constater que le morphisme composé $\mu \circ \lambda$ est égal à l'identité de $\mathrm{Ext}^1(G_1, \mathbb{G}_m) \oplus \mathrm{Ext}^1(G_2, \mathbb{G}_m)$, cela provenant des identités

$$\begin{aligned} p_1 \circ j_1 &= \mathrm{id}_{G_1}, \\ p_2 \circ j_2 &= \mathrm{id}_{G_2}, \\ p_1 \circ j_2 &= 1_{G_1} \text{ (l'élément neutre de } G_1), \\ p_2 \circ j_1 &= 1_{G_2} \text{ (l'élément neutre de } G_2). \end{aligned}$$

Pour prouver la propriété, il suffit donc de montrer que μ est injectif.

$\diamond$ Soit

$$(E) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \xrightarrow{q} G_1 \times_k G_2 \to 1$$

une extension de $G_1 \times_k G_2$ par $\mathbb{G}_m$ qui devient triviale une fois restreinte à G_1 et à G_2. Les restrictions en question sont celles données par $q^{-1}(G_1)$ et $q^{-1}(G_2)$. Il doit donc exister des morphismes de groupes $s_i : G_i \to q^{-1}(G_i) \to H$ pour lesquels $q \circ s_i = \mathrm{id}_{G_i}$ ($i = 1, 2$). Considérons dès lors le morphisme, *a priori* simplement de k-schémas, $s = s_1 \times s_2 : G_1 \times_k G_2 \to H$, $(g_1, g_2) \mapsto s_1(g_1)s_2(g_2)$. Pour $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$, on a $s(g_1, g_2)s_1(g_1)^{-1}s_2(g_2)^{-1} \in \mathbb{G}_m$, donc $r = s \cdot s_1^{-1} \cdot s_2^{-1}$ est un morphisme de schémas de $G_1 \times G_2$ vers $\mathbb{G}_m$ et $r(1,1) = 1$, il s'ensuit d'après le lemme de Rosenlicht ([San81, Lem. 6.5] ou [Con]) que r est un morphisme de groupes, mais pour tout $g_1 \in G_1$, on a $r(g_1, 1) = 1$ et de même pour le deuxième facteur, donc r est le morphisme constant égal à l'unité de $\mathbb{G}_m$. Par conséquent, en se replaçant dans H, il vient que s est un morphisme de groupes, fournissant une section à l'extension (E), ce qui démontre que (E) est l'extension triviale de $G_1 \times G_2$ par $\mathbb{G}_m$.

De cette façon on a montré que μ est injectif, ce que l'on voulait. $\square$

Grâce à la propriété 3.1.1 et au théorème 2.3.2, il vient :

Corollaire 3.1.2. *Si G_1 et G_2 sont deux groupes algébriques affines, lisses et connexes, alors*

$$\mathrm{Inv}(G_1 \times_k G_2, \mathrm{Br})_0 = \mathrm{Inv}(G_1, \mathrm{Br})_0 \oplus \mathrm{Inv}(G_2, \mathrm{Br})_0,$$

fonctoriellement en G_1 et G_2.

3.1.2. Invariants obtenus par morphismes de connexion.

Pour construire des invariants d'un groupe G à valeurs dans le groupe de Brauer, on dispose d'une démarche plus élémentaire/classique que celle développée dans le présent texte en 2.2.2. L'intérêt de la démarche présentée est de pouvoir démontrer le théorème 2.3.2. Disposant du théorème 2.3.2, on peut montrer que la démarche « élémentaire » permet aussi de construire tous les invariants de Brauer de G : voir la proposition 3.1.4 ci-dessous.

Décrivons tout d'abord la construction en question, présentée dans [KMRT98, §31.B]. On convient de l'appeler la *construction connectique* (car elle est basée sur les morphisme de *connexion* des suites exactes longues cohomologiques provenant de suites exactes courtes de faisceaux).

Construction connectique. Fixons G un k-groupe algébrique lisse et connexe. Soit $\mathcal{E}$ un élément du groupe des extensions $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ représenté par une extension

$$(E) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to G' \to G \to 1.$$

Pour toute extension K/k on a l'extension E_K obtenue par extension des scalaires. On sait que E_K est nécessairement une extension centrale (G étant connexe). Ainsi à chaque surcorps K de k, E_K induit une suite exacte longue en cohomologie galoisienne, d'ensembles pointés,

$$0 \to k^\times \to \cdots \to \mathrm{H}^1(K, G) \xrightarrow{\delta_K^E} \mathrm{H}^2(K, \mathbb{G}_m),$$

et en particulier une application δ_K^E naturelle en G et en K qui ne dépend pas du représentant E de $\mathcal{E}$. La collection des δ_K^E pour K/k extension de corps constitue un invariant cohomologique de G à valeurs dans le groupe de Brauer. Il s'agit même d'un invariant normalisé puisque les flèches δ_K^E appliquent la classe du torseur trivial sur 0. Notons $\delta^{\mathcal{E}}$ l'invariant obtenu grâce à $\mathcal{E} \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$, et δ le morphisme $\mathcal{E} \to \delta^{\mathcal{E}}$, $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$.

Justifions que l'on obtient bien un morphisme de groupes.

Lemme 3.1.3. *Pour tout k-groupe algébrique connexe lisse G, le morphisme δ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Soient, pour $i = 1, 2$,

$$(E_i) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H_i \to G \to 1$$

une extension (centrale) de G par le groupe multiplicatif. La classe d'isomorphisme de la somme des classes E_1 et E_2 est par définition la classe de la somme de Baer de E_1 et E_2, c'est- à-dire de l'extension

$$(E) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1$$

où H est le quotient de $H_1 \times_G H_2$ par le sous-groupe $Z = \{(x, x^{-1}) \,|\, x \in \mathbb{G}_m\}$. Notons plutôt δ^i l'application δ^{E_i}, et δ^0 l'application δ^E.

Pour tout extension de corps K/k (dont nous notons K_s une clôture séparable), l'application δ_K^1 est construite comme suit (voir la construction précédant la proposition 28.5 de[KMRT98] par exemple) : pour toute classe $\alpha \in \mathrm{H}^1(K, G)$ représentée par un 1-cocycle $z \in Z^1(G)$, $z : \mathrm{Gal}(K_s/K) \to G(K_s)$, on choisit une application $y_1 : \mathrm{Gal}(K_s/K) \to H_1(K_s)$ qui relève z, ce qui est possible étant donné que $H_1 \to G$ est surjective et que H_1 et G sont lisses ; on définit alors $\delta_K^1(\alpha) \in \mathrm{H}^2(K, K_s^\times)$ comme la classe de cohomologie du 2-cocycle

$$x_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(K_s/K) \times \mathrm{Gal}(K_s/k) & \to & K_s^* \\ (\sigma, \tau) & \mapsto & y_1(\sigma) \cdot (y_1(\tau))^\sigma \cdot y_1(\sigma\tau)^{-1} \end{array} \right. ,$$

la classe de ce cobord ne dépendant pas des choix du représentant z de α et du relevé y_1. Il en va de même pour δ_K^0 et δ_K^2.

Ce faisant, pour tout $\alpha \in \mathrm{H}^1(K, G)$ représenté par un cocycle $z \in Z(G)^1$, on dispose, en accord avec les notations ci-dessus, de relevés y_1 et y_2 de z permettant de définir $\delta_K^1(\alpha)$ et $\delta_K^2(\alpha)$ respectivement. Posons $y_0 := \mathrm{Gal}(K_s/K) \to H(K_s)$, $\sigma \mapsto (y_1(\sigma), y_2(\sigma))$;

il s'agit d'un relevé de z à $H(K_s)$, induisant un 2-cocycle x_0. Dans $H(K_s)$, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$, on a

$$\begin{aligned}
x_0(\sigma) &= y_0(\sigma)\cdot(y_0(\tau))^\sigma\cdot y_0(\sigma\tau)^{-1}\\
&= \Big(y_1(\sigma)\cdot(y_1(\tau))^\sigma\cdot y_1(\sigma\tau)^{-1}\ ,\ y_2(\sigma)\cdot(y_2(\tau))^\sigma\cdot y_2(\sigma\tau)^{-1}\Big)\\
&= \Big(\ \big(y_1(\sigma)\cdot(y_1(\tau))^\sigma\cdot y_1(\sigma\tau)^{-1}\big)\cdot\big(y_2(\sigma)\cdot(y_2(\tau))^\sigma\cdot y_2(\sigma\tau)^{-1}\big)\ ,\ 1\Big)\\
&= \Big(y_1(\sigma)\cdot(y_1(\tau))^\sigma\cdot y_1(\sigma\tau)^{-1}\Big)\cdot\Big(y_2(\sigma)\cdot(y_2(\tau))^\sigma\cdot y_2(\sigma\tau)^{-1}\Big)\ \text{dans } \mathbb{G}_m(K_s)\hookrightarrow H(K_s),
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $x_0 = x_1\cdot x_2$, soit, en terme de classes de cohomologie, $[x_0]=[x_1]+[x_2]$, c'est-à-dire $\delta^0_K(\alpha)=\delta^1_K(\alpha)+\delta^2_K(\alpha)$.

On a ainsi montré, pour toute extension E de G par $\mathbb{G}_m$ somme des extensions E_1 et E_2, que

$$\forall K/k,\ \forall\alpha\in \mathrm{H}^1(K,G),\ \delta^0_K(\alpha)=\delta^1_K(\alpha)+\delta^2_K(\alpha),$$

prouvant par là le lemme. □

Invariants connectiques. Voici le résultat général concernant la construction connectique :

Proposition 3.1.4. *Soit G un k-groupe, affine, lisse et connexe. Alors le morphisme $\delta : \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to \mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0$ issu de la construction connectique est bijectif.*

Démonstration. ⋄ Commençons par montrer que $\delta : \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to \mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0$ est injectif.
Soit E une extension de groupes

$$1\to\mathbb{G}_m\to G'\to G\to 1$$

représentant $\mathcal{E}\in\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$, tel que $\delta^{\mathcal{E}}$ est l'invariant constant égal à $0\in\mathrm{Br}$.

En vertu de la suite exacte longue en cohomologie galoisienne associée à $\mathcal{E}$, le fait que $\delta^{\mathcal{E}}$ soit trivial implique que les applications canoniques $\mathrm{H}^1(K,G')\to\mathrm{H}^1(K,G)$, pour K/k extension quelconque, sont surjectives. Il s'ensuit que le morphisme canonique $\mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0\to \mathrm{Inv}(G',\mathrm{Br})_0$ est injectif. Donc le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Ext}^1(G',\mathbb{G}_m)$ est injectif d'après le théorème 2.3.2. Étant donné que $\mathcal{E}\in\ker(\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Ext}^1(G',\mathbb{G}_m))$, il faut que $\mathcal{E}$ soit l'élément neutre de $\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$.

⋄ Occupons-nous maintenant de la surjectivité. Le morphisme δ suivi de l'isomorphisme $\mathrm{Inv}(G,\mathrm{Br})_0\simeq\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$ du théorème 2.3.2 donne un morphisme injectif σ_G : $\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$ fonctoriel en G. Soit $\mathcal{E}\in\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$ la classe d'isomorphisme d'une extension

$$(E)\ \ 1\to\mathbb{G}_m\to H\to G\to 1.$$

On va montrer que le sous-groupe $\langle\mathcal{E}\rangle$ de $\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)$ engendré par $\mathcal{E}$ est envoyé dans lui-même par σ_G. Déjà le noyau du morphisme de tiré en arrière $\tau : \mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{G}_m)\to \mathrm{Ext}^1(H,\mathbb{G}_m)$ est exactement $\langle\mathcal{E}\rangle$. De plus, comme σ_G est fonctoriel en G, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}' \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma_G"'] & \mathrm{Ext}^1(H, \mathbb{G}_m) . \arrow[d, "\sigma_H"] \\
\sigma(\mathcal{E}') \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\tau"'] & \mathrm{Ext}^1(H, \mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}$$

Donc comme σ_H, pour tout $\mathcal{E}' \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ on a l'équivalence : $\tau(\mathcal{E}') = 0 \Leftrightarrow \tau \circ \sigma_G(\mathcal{E}') = 0$, c'est-à-dire que $\sigma_G(\mathcal{E}')$ appartient à $\langle \mathcal{E} \rangle$ si, et seulement si, $\mathcal{E}'$ est dans $\langle \mathcal{E} \rangle$. On utilise alors que σ_G est injectif et que $\langle \mathcal{E} \rangle$ est fini pour dire que σ induit un isomorphisme de $\langle \mathcal{E} \rangle$ vers lui-même, ce qui permet de trouver un antécédant de $\mathcal{E}$ par σ_G et donc par δ. □

Remarque 3.1.5. Dans la démonstration on s'aperçoit que la preuve de la surjectivité de δ se réduit au fait suivant : tout morphisme de groupes injectif $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ fonctoriel en G envoie chaque sous-groupe cyclique bijectivement sur lui-même.

La proposition 3.1.4 signifie que tout invariant de G à valeurs dans le groupe de Brauer peut se définir à partir de la suite exacte longue en cohomologie galoisienne associée à une extension de G par $\mathbb{G}_m$, et si deux telles extensions déterminent le même invariant, alors elles sont isomorphes.

3.1.3. Invariants cohomologiques « globaux ».

Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe.

Le théorème 2.3.2 dit en particulier que le morphisme $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})$ est un isomorphisme. La surjectivité implique que tous les invariants de G à valeurs dans le groupe de Brauer sont *globaux*, c'est-à-dire que tout invariant $\lambda \in \mathrm{Inv}(G, Br)$ est défini sur les classes d'isomorphisme des G-torseurs sur une base quelconque, et pas seulement sur une base qui est une extension de corps de k : la collection des applications fonctorielles $\lambda_K : \mathrm{H}^1(K, G) \to \mathrm{Br}(K)$ pour K/k extension de corps est en fait une sous-collection d'une collection d'applications fonctorielles $\lambda_Y : \mathrm{H}^1(Y, G) \to \mathrm{Br}(Y)$ pour Y une k-variété. L'injectivité de $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}G^\bullet, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})$ signifie qu'un invariant global $\lambda = (\lambda_Y)_Y$ est totalement déterminé par sa restriction aux variétés définies par une extension de corps de K (et même, en raison de la proposition 2.2.3, un tel λ est totalement déterminé par sa valeur en le torseur générique associé à un torseur classifiant de G).

Le caractère global des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer peut se voir aussi à partir de la proposition 3.1.4, puisque les invariants connectiques sont bien définis pour les G-torseurs sur toute base.

3.2. Groupes d'extensions et de Picard

3.2.1. Cas des groupes unipotents

Discutons ici du groupe de Picard ainsi que du groupe des extensions par $\mathbb{G}_m$ des groupes unipotents <u>lisses</u> et connexes. On présente simplement des résultats d'autres auteurs.

Sur un corps parfait, les groupes unipotents lisses et connexes admettent des suites de composition dont les quotients sont des groupes additifs $\mathbb{G}_a^n$, donc leur groupe de Picard est trivial. Les choses deviennent beaucoup plus variées lorsque le corps de base est *imparfait*.

Achet ([Ach17, Th. 2.4]) et Totaro ([Tot13, Lem. 9.3 & 9.4]) ont commencé par constater la non-trivialité des groupes de Picard :

Proposition 3.2.1. *Soit G une k-forme non triviale de $\mathbb{G}_a$. Alors $\mathrm{Pic}(G) \neq 0$, et si de plus k est séparablement clos, assurément $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \neq 0$.*

Exemple 3.2.2. Les premiers exemples de formes non-triviales de $\mathbb{G}_a$ sur un corps de base imparfait sont les sous-groupes $\{(x, y) \,|\, y^p = x + ax^p\}$ de $\mathbb{G}_a^2$ pour a décrivant $k \setminus k^p$.

Rosengarten a été plus loin en montrant les deux propositions qui suivent. Le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ peut être infini :

Proposition 3.2.3 ([Ros19, Prop. 5.7])**.** *Supposons que k soit imparfait et séparablement clos (i.e. $k = k_s$). Si la caractéristique de k n'est pas 2, alors pour toute k-forme G du groupe additif $\mathbb{G}_a$, le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ est fini si, et seulement si, $G \simeq \mathbb{G}_a$. En particulier pour tout $a \in k \setminus k^p$, le sous-groupe $\{(x, y) \,|\, y^p = x + ax^p\}$ de $\mathbb{G}_a^2$ a un groupe d'extensions par $\mathbb{G}_m$ infini.*

De plus le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}(G)$ n'est en général pas surjectif pour les groupes unipotents lisses et connexes :

Proposition 3.2.4 ([Ros19, Prop. 5.10])**.** *Soit G une k-forme de $\mathbb{G}_a$. On va supposer que la caractéristique de k est différente de 2. Alors le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}(G)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $G \simeq \mathbb{G}_a$ (c'est-à-dire que G est une forme triviale).*

On dispose tout de même de la restriction suivante :

Proposition 3.2.5. *Soit G un groupe unipotent, lisse et connexe. Alors $\mathrm{Pic}(G)$ est annulé par une certaine puissance de p.*

Puisque le groupe de Picard d'un unipotent lisse et connexe peut être infini, la proposition implique que lorsqu'il est effectivement infini, il n'est de surcroît pas de type fini.

Démonstration. Il existe une extension purement inséparable k'/k pour laquelle $G_{k'}$ est déployé (c'est-à-dire qu'il admet une suite de composition dont les quotients sont des groupes $\mathbb{G}_a^r$). On a $\mathrm{Pic}(G_{k'}) = 0$. Or [Bri15, Lem. 2.4] nous dit que le noyau du morphisme d'extension des scalaires $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G_{k'})$ est annulé par le degré de l'extension k'/k, qui est une puissance de la caractéristique étant donné qu'il s'agit d'une extension purement inséparable. □

En raison de ces divers résultats, dans la description du théorème 2.3.2 du groupe des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer, on ne peut en général pas remplacer $\mathrm{Ext}^1(\star, \mathbb{G}_m)$ par $\mathrm{Pic}(\star)$. Et aussi le théorème implique qu'il existe des groupes algébriques affines, lisses et connexes dont les groupes d'invariants sont infinis.

Exemple 3.2.6. Supposons k séparablement clos et soit G une k-forme de $\mathbb{G}_a$ telle que $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ est infini ; il existe un groupe pseudo-réductif commutatif E qui est une extension de G par $\mathbb{G}_m$ ([Tot13, Cor. 95]). En reprenant [Ros19, Ex. 5.14] mais en s'intéressant à $\mathrm{Ext}^1(\star, \mathbb{G}_m)$ plutôt que sur $\mathrm{Pic}(\star)$, on montre que $\mathrm{Ext}^1(E, \mathbb{G}_m)$ est infini. Dans ce cas $\mathrm{Inv}(E, \mathrm{Br})_0$ est aussi infini.

3.2.2. Cas des groupes réductifs

Pour cette sous-section, on signale qu'en vertu de B.1.4, pour un groupe réductif ou d'une restriction de Weil d'un groupe réductif, le groupe d'extensions par $\mathbb{G}_m$ est isomorphe au groupe de Picard tout entier. On ne fait donc pas de distinction entre ces groupes.

Rigidité du groupe de Picard.

Proposition 3.2.7. *Soit G un k-groupe réductif connexe et soit k'/k une extension finie et purement inséparable. Alors le morphisme d'extension des scalaires* $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G_{k'})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après [CT08, Prop. 3.3], associée à une résolution flasque

$$1 \to S \to H \to G \to 1$$

de G (où S est un tore et H un groupe réductif particulier), on a une suite exacte naturelle

$$\hat{T}(k) \to \hat{S}(k) \to \mathrm{Pic}(G) \to 0$$

avec $T = H/\mathcal{D}(H)$ et l'application $\hat{S}(k) \to \mathrm{Pic}(G)$ étant la construction de poussée en avant de la résolution flasque par un caractère de S. On dispose donc d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \hat{T}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{S}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \hat{T}(k') \arrow[r] & \hat{S}(k') \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G_{k'}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

dont les flèches verticales sont induites par l'extension des scalaires de k à k'. Or pour un tore R, le morphisme $\hat{R}(k) \to \hat{R}(k')$ est un isomorphisme puisque k'/k est finie, purement inséparable. On déduit de (3.1) que $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G_{k'})$ est un isomorphisme. □

Remarque 3.2.8. On pourrait penser [1] que, de façon parallèle, le groupe de Picard d'un groupe unipotent lisse et connexe (totalement ployé) est invariable par une extension séparable des scalaires. Dans le cas d'un corps de base parfait, le groupe de Picard d'un tel groupe unipotent est nul ; il y a donc invariance par extension des scalaires. Mais lorsque le corps de base est imparfait, il n'y a plus invariance en général : si on prend le corps des fractions rationnelles $k = \mathbb{F}_p(T)$ pour $p \geqslant 3$, le groupe unipotent $U := \{(x, y) \in \mathbb{G}_a^2 \mid y^p = x + ax^p\}$ est totalement ployé pour $a \in k \setminus k^p$; les groupes $\mathrm{Ext}(U, \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Pic}(U)$

1. Ce fut le cas de l'auteur de la Thèse.

sont de type fini ([GJR96, Prop. 6.1.] [2]) alors que les mêmes groupes pour U_{k_s} ne le sont pas (voir le commentaire suivant la proposition 3.2.5).

Étant donnée la proposition 3.2.7, le théorème 2.3.2 nous assure du corollaire suivant.

Corollaire 3.2.9. *Sous les hypothèses et notations de la proposition, le morphisme d'extension des scalaires*

$$\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br}) \to \mathrm{Inv}(G_{k'}, \mathrm{Br})$$

est un isomorphisme.

Comportement par restriction de Weil. Comparons maintenant le groupe d'extension (ou de Picard) de la restriction de Weil à travers une extension purement inséparable d'un groupe réductif. Soit k'/k une extension finie, purement inséparable de hauteur h et soit G' un k'-groupe réductif connexe. Notons G la restriction $\mathrm{R}_{k'/k}G'$. On a un morphisme $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G_{k'}, \mathbb{G}_m)$ d'extension des scalaires, mais $G_{k'}$ est une extension de G' par un groupe unipotent lisse, connexe, *déployé* ([CGP15, Prop. A.5.11(2)]), si bien que la projection canonique $G_{k'} \to G'$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_m) \tilde{\to} \mathrm{Ext}^1(G_{k'}, \mathbb{G}_m)$, d'où un morphisme naturel en G',

$$\phi_{G'} : \mathrm{Ext}^1(\mathrm{R}_{k'/k}(G'), \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_m).$$

Par ailleurs, une extension de k'-groupes algébriques

$$(E') \quad 1 \to \mathbb{G}_{m,k'} \to H' \to G' \to 1$$

induit une extension par restriction de Weil

$$(R(E')) \quad 1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(H') \to \mathrm{R}_{k'/k}(G') \to 1$$

du fait que $\mathbb{G}_{m,k'}$ est lisse ([CGP15, Cor. A.5.4(3)]). En poussant $R(E')$ par le morphisme de groupes $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathbb{G}_m$, qui à $x \in (A \otimes_k k')^\times = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})(A)$ pour toute k-algèbre A, associe $x^{p^h} \in A^\times$, on obtient une extension

$$(E) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1.$$

La construction $E' \mapsto E$ qui vient d'être décrite permet de définir un morphisme de groupes $\psi_{G'} : \mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{R}_{k'/k}(G'), \mathbb{G}_m)$. Disposant de $\phi_{G'}$ et $\psi_{G'}$, on peut alors déterminer le groupe d'extensions de G en fonction de celui de G'.

Proposition 3.2.10. *Soit k'/k une extension finie, purement inséparable de hauteur h et soit G' un k-groupe algébrique réductif connexe. Alors $\psi_{G'}$ est surjectif et $\phi_{G'}$ identifie $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{R}_{k'/k}(G'), \mathbb{G}_m)$ au sous-groupe $p^h\mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'})$ de $\mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'})$*

Démonstration. On se donne un résolution flasque $1 \to S' \to H' \to G' \to 1$ de G' ([CT08, Prop. 3.1.]). Cela signifie que S' est un k'-tore flasque et H' est un k'-groupe réductif de groupe dérivé $\tilde{H}'$ simplement connexe et d'abélianisé un tore quasi-trivial T', c'est-à-dire

2. [GJR96, Prop. 6.1.] demande que le corps de base, ici k, soit de type fini sur son son corps premier, c'est pourquoi on a choisi spécifiquement $k = \mathbb{F}_p$.

une restriction de Weil $\mathrm{R}_{A'/k'}(\mathbb{G}_m)$ pour une k'-algèbre étale A'. En appliquant plusieurs fois [San81, Prop. 6.10.], on obtient une suite exacte ([CT08, Prop. 3.3.])

$$\widehat{S'}(k') \to \widehat{T'}(k') \to \mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'}) \to 0.$$

Appelons S_0 la restriction $\mathrm{R}_{k'/k}(S')$ et T_0 celle de $\mathrm{R}_{k'/k}(T')$. Le groupe $\mathrm{R}_{k'/k}(\tilde{H}')$ est parfait ([CGP15, Cor. A.7.11.]) donc son groupe d'extensions est nul (voir la proposition 3.2.15 de la sous-section 3.2.3 suivante) et son groupe des caractères est trivial. De plus, comme on a une suite exacte ([CGP15, Cor. A.5.4(3)])

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\tilde{H}') \to \mathrm{R}_{k'/k}(H') \to \mathrm{R}_{A'/k}(\mathbb{G}_m) \to 1,$$

la proposition [San81, Prop. 6.10.] implique que le groupe d'extensions de $\mathrm{R}_{k'/k}(H')$ est trivial. Ainsi on peut reprendre les arguments de [CT08, Prop. 3.3.] avec l'extension

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(S') \to \mathrm{R}_{k'/k}(H') \to \mathrm{R}_{k'/k}(G') \to 1$$

(qui est exacte par [CGP15, Cor. A.5.4(3)]), ce qui nous permet d'obtenir un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\widehat{S'}(k') \arrow[r] \arrow[d, "=:f_1"] & \widehat{T'}(k') \arrow[r] \arrow[d, "=:f_2"] & \mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{G'}"] & 0 \\
\widehat{S_0}(k) \arrow[r] \arrow[d, "=:g_1"] & \widehat{T_0}(k) \arrow[r] \arrow[d, "=:g_2"] & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{R}_{k'/k}(G'), \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{G'}"] & 0 \\
\widehat{S'}(k') \arrow[r] & \widehat{T'}(k') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G', \mathbb{G}_{m,k'}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches f_1 et g_1 sont celles définies de façon similaire à $\psi_{G'}$ et $\phi_{G'}$ respectivement (voir A) - de même pour les flèches f_2 et g_2 avec T' et T_0. Grâce à A.0.3 on sait que f_1 et f_2 sont surjectifs et que g_1 et g_2 sont injectifs, identifiants $\widehat{S_0}(k)$ et $\widehat{T_0}(k)$ à $p^h\widehat{S'}(k')$ et $p^h\widehat{T'}(k')$ respectivement. Sachant cela, le diagramme précédent explique le pourquoi du comment du lemme. □

En termes de groupes des invariants cohomologiques, la proposition 3.2.10 se réécrit de la façon qui suit.

Corollaire 3.2.11. *Soit k'/k une extension finie, purement inséparable de hauteur h. Soit G' un k'-groupe algébrique réductif connexe. Alors $\mathrm{Inv}(\mathrm{R}_{k'/k}(G'), \mathrm{Br})_0$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Inv}(G', \mathrm{Br})_0$ constitué des éléments qui sont des itérés p^h fois.*

3.2.3. Cas de groupes pseudo-semi-simples

On va déterminer le groupe $\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0$ des groupes pseudo-semi-simples en décrivant leurs groupes d'extensions. La démarche est similaire à celle servant à décrire le groupe d'extensions des groupes semi-simples.

▷ Revêtement universel d'un groupe parfait. Un k-groupe pseudo-semisimple est un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe qui est parfait et tel que son radical unipotent k-*rationnel* est trivial ([CGP15, Def. 1.1.1. & 11.2.2.]). Cela signifie qu'il n'y a aucun sous-groupe distingué, lisse, connexe et unipotent défini sur k autre que le sous-groupe unité.

Dans [CP16], Conrad et Prasad établissent un résultat sur les extensions centrales *modérées* des groupes affines, lisse, connexes et parfaits qui généralise la notion de revêtements universels des groupes semi-simples. Précisons qu'un k-schéma en groupes affine μ est dit *modéré* si μ ne contient aucun sous-groupe unipotent autre que le groupe unité. On résume ici le théorème [CP16, Th. 5.1.3.] de façon à étayer notre propos.

Définition 3.2.12 ([CP16, §5])**.** Une *extension modérée* d'un k-schéma en groupes affine, lisse, connexe et parfait G est une extension *centrale* de k-schémas en groupes affines

$$1 \to \mu \to H \to G \to 1$$

où H est lisse et parfait et μ modéré.

Rappelons la construction suivante : étant donné H un groupe affine, lisse et connexe défini sur un corps K, si le radical $\bar{R}$ de $H_{\bar{K}}$ est défini sur K, *i.e.* provient d'un groupe R/K, alors le *quotient semi-simple* de H est simplement $H^{ss} := H/R$ — dans ce cas H/R est un K-groupe semi-simple.

Théorème 3.2.13 ([CP16, Th. 5.1.3.])**.** *Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe et parfait. Appelons K/k le corps de définition du radical unipotent $R_u(G_{\bar{k}})$ de $G_{\bar{k}}$. Alors il existe une extension modérée E_0 (unique à isomorphisme d'extension près)*

$$(E_0)\ \ 1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

laquelle a la propriété que pour toute autre extension centrale modérée E

$$(E)\ \ 1 \to \nu \to H \to G \to 1,$$

le groupe semi-simple $(\tilde{G}_K)^{ss}$ est un revêtement de $(H_K)^{ss}$ et l'ensemble des morphismes $E_0 \to E$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes $(\tilde{G}_K)^{ss} \to (H_K)^{ss}$.

L'extension E_0 est caractérisée par le fait que $\tilde{G}_K^{ss}$ est le revêtement universel du groupe semi-simple G_K^{ss}.

On appelle l'extension E_0 (ou plus simplement le groupe $\tilde{G}$) l'extension ou le revêtement *modéré(e) universel(le)*.

Remarque 3.2.14. Soit k'/k une extension finie de corps, purement inséparable. Soit G' un k'-groupe semi-simple, simplement connexe et μ' un sous-groupe central de G'. D'après [CGP15,], le k-groupe $G := \mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu')$ est pseudo-semi-simple, en particulier parfait. Dans ce cas, l'extension modérée universelle de G est

$$(\mathcal{E}_0)\ \ 1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu') \to \mathrm{R}_{k'/k}(G') \to G \to 1.$$

▷ Groupe d'extensions des groupes parfaits. Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe et parfait. Le théorème 3.2.13 fournit une extension centrale modérée $\mathcal{E}_0$

$$1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1.$$

De la même façon que pour les groupes semi-simples, on construit un morphisme $\Theta : \hat{\mu}(k) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ comme suit : si $\chi : \mu \to \mathbb{G}_m$ est un morphisme de groupes, on « pousse » l'extension E_0 par χ, c'est-à-dire que l'on construit une extension

$$(E_\chi) \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1$$

le groupe H étant le quotient de $\tilde{G} \times_k \mathbb{G}_m$ par le sous-groupe $Z_\chi = \{(x, \chi(x)^{-1}) \mid x \in \mu\}$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

L'application Θ est définie comme l'application qui à $\chi \in \hat{\mu}(k)$ associe la classe d'isomorphisme $\mathcal{E}_\chi$ de l'extension E_χ. On vérifie aisément que Θ est un morphisme de groupes.

Proposition 3.2.15. *Soit G un k-groupe affine, lisse, connexe et parfait. Appelons μ le noyau de son extension modérée universelle. Alors le morphisme $\Theta : \hat{\mu}(k) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. $\diamond$ Si $\chi \in \hat{\mu}(k)$ est tel que E_χ soit isomorphe à l'extension triviale de G par $\mathbb{G}_m$, alors E_χ admet une rétraction $r : H \to \mathbb{G}_m$ (H comme défini précédemment), et en appelant $f : \tilde{G} \to H$ le morphisme obtenu par « poussée » de E_0 et i le morphisme $\mu \to \tilde{G}$, on a l'identité $\chi = j \circ f \circ i$ du fait de la commutativité de (3.2), mais $j \circ f$ est un caractère de $\tilde{G}$ qui est un groupe parfait, donc $j \circ f = 1$, impliquant $\chi = 1$.

$\diamond$ Montrons la surjectivité. Donnons-nous une extension

$$(E) : \quad 1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1.$$

En considérant les sous-groupes dérivés successifs de H, on obtient un sous-groupe lisse et parfait H_0 de H, et on a une extension modérée de G :

$$(E') : \quad 1 \to \nu \to H_0 \to G \to 1$$

avec ν un sous-groupe de $\mathbb{G}_m$ (on a bien surjectivité de $H_0 \to G$ car $H \to G$ est surjective et G est *parfait*). D'après le théorème 3.2.13, il existe un morphisme $E_0 \to E'$, qui fournit, lorsqu'on le compose avec l'inclusion $E' \to E$, un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

On vérifie sans difficulté que la ligne du bas (l'extension E) est la poussée de la ligne du haut (E_0) par le morphisme $\chi : \mu \to \nu \hookrightarrow \mathbb{G}_m$, ce qui signifie $E \simeq E_\chi$, d'où la surjectivité de Θ. □

▷ **Cas de (certains) groupes pseudo-semi-simples.** Les groupes pseudo-semi-simples définis comme un quotient $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ (avec k'/k extension finie, purement inséparable, G'/k' semi-simple et $\mu \subset G'$ central) fournissent une large famille d'exemples de nouveaux groupes qui ne sont pas classiques. Dans leur cas, comme il a été vu, le noyau de leur extension modérée universelle est $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ pour un groupe de type multiplicatif fini μ, dont on connaît le groupe des caractères grâce au théorème A.0.3. On obtient la proposition suivante.

Proposition 3.2.16. *Soit k'/k une extension finie de corps, purement inséparable, de hauteur h. Soit G' un k'-groupe semi-simple, simplement connexe et soit μ un sous-groupe central de G'. Alors en posant $G := \mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Inv}(G, \mathrm{Br})_0 \simeq p^h \widehat{\mu}(k').$$

Démonstration. Le groupe des invariants à valeurs dans le groupe de Brauer de G est isomorphe à $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{G}_m)$ d'après 2.3.2, qui lui-même est isomorphe à $\widehat{\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)}(k) = p^h \widehat{\mu}(k')$. □

Exemple 3.2.17. Soient m un entier positif et k'/k une extension finie, purement inséparable de hauteur h. On a un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_{p^m,k'})/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{p^m,k'}), \mathrm{Br}) \simeq p^h \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z},$$

où $\mu_{p^m,k'}$ est le groupe des racines p^m-ièmes de l'unité, centre de $\mathrm{SL}_{p^m,k'}$. On remarque que si $h \geqslant m$, alors le groupe des invariants est trivial ; en un sens, dans ce cas, s'il y a trop « d'inséparabilité » ajoutée à SL_{p^m}, il n'y a plus d'invariant non trivial. Tandis que pour la « pure inséparabilité » d'un groupe unipotent totalement ployé, le groupe des invariants peut être infini, comme il a été mentionné en 3.2.1.

Remarque 3.2.18. La forme $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ comme ci-dessus, ne décrit pas tous les groupes pseudo-semi-simples, même *standard*. Cependant, tous les groupes absolument pseudo-simples standard sont de cette forme, pour G' absolument simple ([CGP15, Rem. 5.3.6.]).

▷ Rigidité du Picard de groupes pseudo-semi-simples.

Proposition 3.2.19. *Soit G un k-groupe pseudo-semi-simple standard, pseudo-déployé. Pour toute extension séparable K/k (finie ou non), le morphisme d'extension des scalaires $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G_K, \mathbb{G}_m)$ est un isomorphisme.*

Remarque 3.2.20. Les groupes pseudo-semi-simples étant parfaits, ils sont unirationnels et donc d'après [Ros19, Prop. 3.1.] leur groupe d'extensions par $\mathbb{G}_m$ est égal à leur groupe de Picard.

Dégageons d'abord le lemme suivant qui est une reprise de divers résultats de [CGP15]. L'énoncé du lemme est utilisé dans la preuve de [CGP15, Prop. 5.3.1.], mais on l'explique avec des différences.

Lemme 3.2.21. *Soit G comme dans la proposition 3.2.19 ci-dessus. Alors il existe un entier r, des extensions finies purement inséparables $k'_1, \cdots, k'_r$ et des groupes absolument simples, simplement connexes déployés*

$$G'_1/k'_1, \cdots, G'_r/k'_r,$$

tels que G soit isomorphe à un quotient central du k-groupe

$$\mathrm{R}_{k'_1/k}(G'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_r/k}(G'_r).$$

Démonstration. $\diamond$ On considère les sous-groupes de G qui sont lisses, connexes, distingués, parfaits et $\neq 1$. D'après [CGP15, Prop. 3.1.8.], les sous-groupes de G qui sont minimaux pour les propriétés précédentes sont en nombre fini. Si on les appelle $N_1, \cdots, N_r$, toujours d'après [CGP15, Prop. 3.1.8.], le morphisme de schémas donné par le produit

$$\phi : N_1 \times_k \cdots \times_k N_r \to G$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau Z est central.

La discussion suivant [CGP15, Prop. 3.1.8.] (avec le lemme [CGP15, Lem. 3.1.4.]) nous dit que les N_i sont absolument pseudo-simples. De plus, en se donnant T un tore maximal de G qui est déployé (G est supposé pseudo-déployé), l'intersection $N_i \cap T$ est un tore maximal de N_i pour $i = 1, \cdots, r$ ([CGP15, Cor. A.2.7.]), donc les N_i sont aussi pseudo-déployés. Enfin, appliquant [CGP15, Prop.5.2.6.], on sait qu'étant donné que G est pseudo-réductif standard, les N_i le sont aussi.

En somme, G est un quotient central de $N := N_1 \times_k \cdots \times_k N_r$, avec les N_i absolument pseudo-simples standard et pseudo-déployés.

$\diamond$ Soit $i \in \{1, \cdots, r\}$ fixé. Grâce à la remarque [CGP15, Rem. 5.3.6.] (et la discussion/construction qui précéde), on sait que pour tout $i = 1, \cdots, r$, il existe une extension finie purement inséparable k'_i/k, un k'_i-groupe absolument simple, simplement connexe G'_i (de centre noté μ'_i) tel que N_i s'insère dans la projection $\mathrm{R}_{k'_i/k}(G'_i) \to \mathrm{R}_{k'_i/k}(G'_i)/\mathrm{R}_{k'_i/k}(\mu'_i)$, c'est-à dire qu'on a deux morphismes de groupes

$$\mathrm{R}_{k'_i/k}(G'_i) \xrightarrow{\pi_i} N_i$$
$$\text{et } N_i \xrightarrow{\xi_i} \mathrm{R}_{k'_i/k}(G'_i)/\mathrm{R}_{k'_i/k}(\mu'_i)$$

dont la composition est la projection-quotient. De plus π_i et ξ sont surjectifs, de noyaux centraux, et G'_i/μ'_i est le quotient semi-simple adjoint de $(N_i)_{k'_i}$.

On justifie alors que G'_i est déployé en disant que N_i contient un tore maximal déployé, donc G'_i/μ'_i aussi car ce dernier groupe est un quotient de $(N_i)_{k'_i}$, donc G'_i a aussi un tore maximal déployé puisque $G'_i \to G'_i/\mu'_i$ est une isogénie centrale.

Pour résumer, pour tout $i = 1, \cdots, r$, le groupe N_i est un quotient de $\mathrm{R}_{k'_i/k}(G'_i)$ par un sous-groupe central Z_i, avec k'_i/k finie purement inséparable et G'_i absolument simple, simplement connexe, déployé.

$\diamond$ Appelons H le k-groupe algébrique

$$\mathrm{R}_{k'_1/k}(G'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_r/k}(G'_r),$$

puis formons le morphisme $j : H \to G$ en composant le morphisme ϕ (du début de la preuve) par la projection

$$p : \mathrm{R}_{k'_1/k}(G'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_1/k}(G'_1) \to N_1 \times_k \cdots \times_k N_r.$$

Pour obtenir l'énoncé complet du lemme, il reste à montrer que le noyau de j est central. Pour cela, invoquons [CGP15, Prop. 2.2.12.], qui nous assure que dans la présente situation, le centre Z_N de N est l'image par p du centre Z_H de H, qui est le produit des $\mathrm{R}_{k'_i/k}(\mu'_i)$. Ainsi, comme p a un noyau central, on a $p^{-1}(Z_N) = Z_H$, donc le noyau de j, qui est égal à $p^{-1}(Z)$ avec $Z \subseteq Z_N$, est un sous-groupe central de H.

□

Démonstration de la proposition 3.2.19. Avec les notations du lemme 3.2.21 ci-dessus, G est isomorphe à $\tilde{G}/Z$ avec $\tilde{G} = \mathrm{R}_{k'_1/k}(G'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_r/k}(G'_r)$ et Z un sous-groupe central de $\tilde{G}$, c'est-à-dire que Z est un sous-groupe de

$$\mathrm{R}_{k'_1/k}(\mu'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_r/k}(\mu'_r),$$

avec μ'_i le centre de G'_i. Les μ'_i/k'_i sont des groupes diagonalisables, finis (les G'_i sont déployés), donc Z est un k-groupe modéré et

$$1 \to Z \to \tilde{G} \to G \to 1$$

est l'extension modérée universelle de G et

$$1 \to Z_K \to \tilde{G}_K \to G_K \to 1$$

est celle de G_K (K est l'extension séparable de k donnée dans l'énoncé de la proposition). Appelons ϕ le morphisme de groupes $\widehat{Z}(k) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ de la proposition 3.2.15 pour G, et $\phi_K : \widehat{Z}(K) \to \mathrm{Ext}^1(G_K, \mathbb{G}_m)$ celui pour G_K. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{Z}(k) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \arrow[d] \\ \widehat{Z}(K) \arrow[r, "\phi_K"'] & \mathrm{Ext}^1(G_K, \mathbb{G}_m) \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont celles obtenues par extension des scalaires et les flèches horizontales sont des isomorphismes (proposition 3.2.15). Il reste donc à justifier que $\widehat{Z}(k) \to \widehat{Z}(K)$ est un isomorphisme.

Puisque les extensions k'_i/k sont finies, purement inséparables, les groupes diagonalisables finis μ'_i sont définis sur k : $\mu'_i = (\mu_i)_{k'_i}$, avec μ_i un k-groupe diagonalisable fini. Notons

$$\mu := \mu_1 \times_k \cdots \times_k \mu_r \text{ et } \mu^\dagger := \mathrm{R}_{k'_1/k}(\mu'_1) \times_k \cdots \times_k \mathrm{R}_{k'_r/k}(\mu'_r).$$

Le k-groupe quotient $\mu^\dagger/\mu$ est unipotent (voir la conséquence A.0.6 de l'annexe), donc aussi $Z/(Z \cap \mu)$. Ainsi pour toute extension L/k, le morphisme de restriction des caractères $\widehat{Z}(L) \to (\widehat{Z \cap \mu})(L)$ est injectif (voir encore A.0.6 et sa preuve). Mais $Z \cap \mu$ est diagonalisable, donc le morphisme d'extension des scalaires $(\widehat{Z \cap \mu})(k) \to (\widehat{Z \cap \mu})(K)$ est un isomorphisme. On se retrouve avec un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{Z}(k) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\widehat{Z \cap \mu})(k) \arrow[d, "\simeq"] \\ \widehat{Z}(K) \arrow[r, hook] & (\widehat{Z \cap \mu})(K) \end{tikzcd}$$

duquel il vient que $\widehat{Z}(k) \to \widehat{Z}(K)$ est un isomorphisme.

Finalement, on a bien montré que le morphisme d'extension des scalaires $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1(G_K, \mathbb{G}_m)$ est un isomorphisme. $\square$

Annexe A

Groupes de caractères de restrictions de Weil

On se propose ici de déterminer le groupe des caractères de groupes de la forme $\mathrm{R}_{k'/k}(M_{k'})$ en fonction de celui de M, avec M un groupe multiplicatif de type fini et k'/k une extension finie purement inséparable.

Remarque A.0.1. Le directeur et l'auteur de la Thèse ont établi l'énoncé et la preuve du théorème A.0.3 avant de s'apercevoir qu'il y a un résultat analogue dans [Oes84]. Le [Oes84, Th. II.2.4.] est une reformulation de A.0.3 pour le groupe des caractères d'un k-groupe $\mathrm{R}_{k'/k}(G')$ avec G' affine, lisse, connexe général, mais Oesterlé ne s'est intéressé qu'au cas d'une restriction de Weil par une extension de corps globaux K, si bien que la hauteur d'une extension purement inséparable K'/K est exactement le degré de l'extension - l'énoncé de Oesterlé est moins précis que celui présenté ici (Oesterlé fait tout de même une remarque sur le problème de hauteur à la suite de sa démonstration).

Commençons par rappeler que si G est un k-groupe algébrique affine et K/k une extension de corps, alors on peut voir canoniquement G comme un sous-groupe de $\mathrm{R}_{K/k}(G_K)$: en termes de foncteurs des points, l'immersion fermée correspond au morphisme de foncteurs donné par les applications $G(A) \to G(K \otimes_k A)$ induites par $A \to K \otimes_k A$, $a \mapsto 1 \otimes a$, pour toute k-algèbres A.

Notation A.0.2. Pour tout groupe abstrait $\mathtt{G}$ et entier positif m, on note $m\mathtt{G}$ l'image du morphisme $\mathtt{G} \to \mathtt{G}$, $g \mapsto m \cdot g$.

Théorème A.0.3. *Soit k'/k une extension finie, purement inséparable ; notons h le plus petit entier positif tel que $(k')^{p^h} \subset k$. Soit M/k un groupe de type multiplicatif et de type fini ; on note M_0 le k-groupe algébrique $\mathrm{R}_{k'/k}(M_{k'})$ (M est un sous-groupe de M_0). Alors le morphisme de restriction des caractères $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$ est injectif, et identifie $\widehat{M_0}(k)$ au sous-groupe $p^h\widehat{M}(k)$ de $\widehat{M}(k)$.*

Remarque A.0.4. Si M est déployé, choisissant un isomorphisme entre M et un produit de groupes $\mathbb{G}_m$ et de groupes de racines de l'unité μ_n, on désigne par l'entier m le caractére qui, sur chaque composant $\mathbb{G}_m$ ou μ_n, s'écrit $x \mapsto x^m$. On retrouve que si M est un sous-groupe de $\mathbb{G}_m$, alors m est la notation usuelle pour le caractère $x \mapsto x^m$.

On a alors deux sous-groupes ayant la même notation, car $m\widehat{M}(k)$ peut signifier « le sous-groupe engendré par m » ou « l'image de $\widehat{M}(k) \xrightarrow{m\cdot} \widehat{M}(k)$ ». Mais on comprend rapidement que les deux sous-groupes sont bien identiques.

On va découper la démonstration de A.0.3 en plusieurs cas :

1. injection de $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$ pour M quelconque ;
2. $M = \mathbb{G}_m$;
3. M est un groupe de racines de l'unité μ_n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
4. M est déployé ;
5. M est quelconque.

<u>*Démonstration du théorème A.0.3*</u>

On se donne, pour toute la démonstration, k'/k et M comme dans les hypothèses du théorème et on fera usage des notations h et M_0.

• ***Injection entre les groupes de caractères.*** On signale le lemme suivant. On peut le trouver dans [Oes84] comme application du Lemme §5.1. ou du Corollaire A.3.5., mais il s'agit de résultats bien plus forts.

Lemme A.0.5. *Soit T un k-tore. Alors le sous-tore T de $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})$ est un tore maximal et $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})/T$ est unipotent.*

<u>*Démonstration*</u>. On peut supposer que k est égal à sa clôture séparable k_s. Dans ce cas le quotient $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})/T$ s'écrit $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m^r)/\mathbb{G}_m^r$ et on a $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m^r)/\mathbb{G}_m^r(k) = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m^r)(k)/\mathbb{G}_m^r(k) = ((k')^\times)^r/(k^\times)^r$. Cela permet de voir que tous les k-points de $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})/T$ sont annulés une fois élevés à la puissance p^h. On en déduit que les k-points sont des éléments unipotents. Or les k-points de $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})/T$ constituent une partie dense (le groupe en question étant lisse), donc $\mathrm{R}_{k'/k}(T_{k'})/T$ est un groupe unipotent. Et on sait de ce fait que T en est le tore maximal. □

On déduit du lemme A.0.5 ci-dessus :

Conséquence A.0.6. *Le groupe quotient M_0/M est unipotent et le morphisme de restriction $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$ est injectif.*

<u>*Démonstration*</u>. Quitte à étendre les scalaires à la clôture séparable k_s de k, pour prouver l'unipotence on peut supposer que M est déployé. Le groupe M est donc le produit d'un certain nombre (fini) de copies de $\mathbb{G}_m$ et d'un certain nombre (fini) de groupes de racines de l'unité μ_n, et M_0 est le produit du même nombre de copies de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)$ et des groupes $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)$. En raison du lemme d'Oesterlé pré-cité, le quotient $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ est unipotent, et cela implique par ailleurs que pour $n \geqslant 1$ entier, $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)/\mu_n$ est unipotent puisque c'est un sous-groupe de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$. Finalement, M_0/M est unipotent comme produit de facteurs de la forme $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ ou $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)/\mu_n$.

On ne suppose plus k séparablement clos. Pour l'injectivité de $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$, soit $\chi \in \widehat{M_0}(k)$ qui est trivial sur $M \hookrightarrow M_0$. Alors χ passe au quotient, induisant un morphisme de groupes $\tilde{\chi} : M_0/M \to \mathbb{G}_m$. Mais d'après [DG70, Exp. XVII, Prop. 2.4], $\tilde{\chi}$ doit être le morphisme trivial vu que M_0/M est unipotent. Par conséquent, χ est trivial, montrant de ce fait que le noyau de $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$ est trivial. □

• ***Cas*** $M = \mathbb{G}_m$**.** On traite ici le cas où le k-groupe algébrique de type multiplicatif et de type fini M est le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$.

On a une identification $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}_m}(k)$, $r \mapsto (x \mapsto x^r)$. On veut montrer que l'image du morphisme injectif $R : \widehat{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})}(k) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{G}_m}(k)$ est le sous-groupe $p^h\mathbb{Z}$.

Déjà, p^h est bien dans l'image de R : en effet, pour toute k-algèbre A, l'application

$$\begin{cases} (A \otimes_k k')^\times & \to & A^\times \\ \sum_i x_i \otimes \lambda_i & \mapsto & \sum_i x_i^{p^h} \lambda_i^{p^h} \end{cases}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes ; la collection de ces morphismes détermine un morphisme de k-groupes algébriques $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathbb{G}_m$ dont la restriction à $\mathbb{G}_m$ est $x \mapsto x^{p^h}$.

Ensuite, $\widehat{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})}(k)$ étant un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, admet un générateur ρ. On peut supposer l'entier $r = R(\rho)$ strictement positif (comme $p^h \in \mathrm{Im}(R)$, r ne peut pas être nul).

Pour montrer que $r = p^h$, écrivons $r = p^\alpha s$ avec s un entier non-divisible par p et $s \in \mathbb{N}$. Puisque $p^h \in r\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(R)$, il faut que $s = 1$ et $\alpha \leqslant h$. De la sorte, les morphismes de groupes $(\cdot)^{p^h}$, $\rho^{p^{h-\alpha}} : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathbb{G}_m$ coïncident sur $\mathbb{G}_m \subset \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)$, donc sont égaux et en considérant leur action sur les k-points, on a

$$\forall x \in (k')^\times,\ x^{p^h} = \rho(x)^{p^{h-\alpha}},$$

donc par injectivité du Frobenius

$$\forall x \in (k')^\times, x^{p^\alpha} = \rho(x),$$

ce qui montre que $(k'^\times)^{p^\alpha} = \rho(k'^\times) \subseteq k^\times$, donc $(k')^{p^h} \subseteq k$, ce qui permet de conclure que $\alpha = h$ (on savait déjà que $\alpha \leqslant h$).

En conclusion, le théorème A.0.3 est valable pour le groupe multiplicatif.

• ***Cas*** $M = \mu_n$**.** On traite le cas où M est le k-groupe des racines n-ièmes de l'unité, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. Par le théorème des restes chinois, μ_n s'exprime comme le produit de μ_{n_0} et $\mu_{p_1^n}$ avec n_0 premier à p et n_1 entier positif ou nul. On se ramène ainsi à deux cas : n premier à p et n puissance de p. On suppose que l'on est dans l'un de ces cas de figure.

Comme précédemment, on a une identification $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mu_n}(k)$, $r \mapsto (x \mapsto x^r)$. On veut montrer que l'image du morphisme injectif $R : \widehat{\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)}(k) \hookrightarrow \widehat{\mu_n}(k)$ est le sous-groupe $p^h\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Comme pour le cas $M = \mathbb{G}_m$, on peut définir un caractère de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)$ dont l'image par R est p^h : pour toute k-algèbre A, l'application

$$\begin{cases} \{a \in (A \otimes_k k')^\times \mid a^n = 1\} & \to & \{a \in A^\times \mid a^n = 1\} \\ \sum_i x_i \otimes \lambda_i & \mapsto & \sum_i x_i^{p^h} \lambda_i^{p^h} \end{cases}$$

est bien définie et la collection de ces applications détermine bien un morphisme de groupes $\chi_0 : \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n) \to \mu_n$ tel que $R(\chi_0) = p^h \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Soit ϕ un caractère de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n)$. Notons r le représentant de $R(\phi) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que

$0 \leqslant r \leqslant n-1$ et montrons que r est un multiple de p^h dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'argument crucial pour établir la validité du théorème A.0.3 pour μ_n est :

Lemme A.0.7. *Il est possible d'étendre ϕ en un caractère de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})$.*

Démonstration. $\diamond$ dans le cas où n n'est guère divisible par p, d'après [CGP15, Cor. A.5.4(3)], comme μ_n est lisse, on a une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_n) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to 1. \tag{A.1}$$

En poussant (A.1) par le morphisme ϕ, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{n,k'}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 . \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & H \arrow[r] & \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

Mais $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})$ a un groupe de Picard trivial (c'est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}_k^{[k':k]}$), donc la seconde ligne de (A.2) est isomorphe à l'extension triviale de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})$ par $\mathbb{G}_m$ et ce faisant il existe une rétraction $H \to \mathbb{G}_m$ de $\mathbb{G}_m \to H$, qui, composée avec f fournit un morphisme (*a priori* seulement de variétés) $\tilde{\phi} : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathbb{G}_m$ qui étend ϕ. En invoquant le lemme de Rosenlicht ([San81, Lem. 6.5]), il est immédiat que $\tilde{\phi}$ est un morphisme de groupes ;

$\diamond$ dans le cas où $n = p^m$, on procède de même, en considérant la suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{n,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to \mathrm{R}_{k(k'^{p^m})/k}(\mathbb{G}_{m,k(k'^{p^m})}) \to 1. \tag{A.3}$$

$\square$

On dispose de la sorte d'un morphisme de groupes $\tilde{\rho}$ de $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})$ vers $\mathbb{G}_m$ qui étend ρ. D'une part, via le morphisme $\widehat{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})}(k) \to \widehat{\mathbb{G}_m}(k) \overset{\mathrm{can}}{\simeq} \mathbb{Z}$, $\tilde{\rho}$ correspond à un entier s congru à r modulo n. D'autre part, comme il a été vu précédemment pour le cas $M = \mathbb{G}_m$, l'entier s doit être divisible par p^h. Modulo n, cela fournit le résultat voulu et achève la preuve du théorème A.0.3 pour les groupes des racines de l'unité.

• ***Cas M déployé.*** Si M est un k-groupe de type multiplicatif et de type fini, déployé, alors M est un produit de diverses copies de $\mathbb{G}_m$ et de groupes des racines de l'unité. Les cas de $\mathbb{G}_m$ et des μ_n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ayant été traités, le théorème est aussi valable pour M déployé.

• ***Cas M quelconque.*** Tout k-groupe de type multiplicatif de type fini M est déployé sur k_s, donc d'après ce qui précède, le morphisme

$$\widehat{M_0}(k_s) \to \widehat{M}(k_s) \tag{A.4}$$

a pour image $p^h\widehat{M}(k_s)$. Or pour tout k-groupe algébrique G, le groupe $\widehat{G}(k)$ est le sous-groupe de $\widehat{G}(k_s)$ constitué des éléments invariants par l'action du groupe de Galois Γ, un élément $\gamma \in \Gamma$ agissant sur $\phi : G_{k_s} \to \mathbb{G}_{m,k_s}$ par $\gamma \cdot \phi := \gamma \circ (\phi \circ \gamma^{-1})$; et le morphisme (A.4) est invariant par l'action du groupe de Galois. Donc en prenant les éléments Γ-fixes dans (A.4), on trouve que l'image de $\widehat{M_0}(k) \to \widehat{M}(k)$ est $\left(\widehat{M}(k_s)\right)^{\Gamma} \bigcap \left(p^h \widehat{M}(k_s)\right)$, qui est bien $p^h \widehat{M}(k)$.

<u>*Fin de la démonstration du théorème A.0.3* $\square$</u>

Annexe B

Résultats périphériques

B.1. Le groupe de Picard des variétés algébriques

B.1.1. Additivité

Soient X et Y deux k-variétés. On dispose des morphismes de projections $p_X : X \times_k Y \to X$ et $p_Y : X \times_k Y \to Y$, induisant des morphismes de groupes $p_X^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X \times_k Y)$ et $p_Y^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X \times_k Y)$, s'assemblant en

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X \times_k Y) \\ (\alpha, \beta) \mapsto p_X^*(\alpha) + p_Y^*(\beta) \end{array} \right. ,$$

que l'on note $\phi_{X,Y}$.

Suivant [San81], on exprime le fait que $\phi_{X,Y}$ soit un isomorphisme par la formule

$$« \mathrm{Pic}(X \times_k Y) = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y) » :$$

le groupe de Picard est *additif* pour X et Y. Le résultat suivant de Sansuc sera utile pour la section 2.3.

Proposition B.1.1 ([San81, Lem. 6.6])**.** *Soient X et Y deux k-variétés lisses, géométriquement intègres, avec Y rationnelle sur k_s et $Y(k) \neq \emptyset$. Alors*

$$\mathrm{Pic}(X \times_k Y) = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y).$$

En reprenant la démonstration de [San81, Lem. 6.6] (et de [CTS77, Lem. 11] qui sert à [San81, Lem. 6.6]), on peut généraliser la proposition B.1.1 en remplaçant « rationnelle » par « rétractilement rationnelle » (voir la section B.2 pour la définition).

Proposition B.1.2. *Soient X et Y deux k-variétés lisses géométriquement intègres, avec Y* rétractilement rationnelle *sur k_s et $Y(k) \neq \emptyset$. Alors*

$$\mathrm{Pic}(X \times_k Y) = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y).$$

Démonstration. • Traitons d'abord le cas où $k = k_s$ est séparablement clos (on reprend la preuve de [CTS77, Lem. 11] en ajoutant quelques lignes et diagrammes).

$\diamond$ Dans ce cas, X et Y ont des points rationnels en raison de leur lissité, et on trouve que $\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X \times_k Y)$ est injectif. En effet, soient $x_0 \in X(k)$ et $y_0 \in Y(k)$. Ces points permettent de définir les morphismes $i_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \times_k Y \\ x & \mapsto & (x, y_0) \end{array} \right.$ et $i_Y : \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \to & X \times_k Y \\ y & \mapsto & (x_0, y) \end{array} \right.$. Le morphisme composé

$$(i_X, i_Y)^* \circ (p_1^* + p_2^*) : \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X \times_k Y) \to \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y)$$

étant égale à l'identité de la somme directe, on est assuré que $\phi_{X,Y} = (p_1^* + p_2^*)$ est injectif.

$\diamond$ Soit V un ouvert non vide de Y et V_0 un ouvert non vide d'un espace $\mathbb{A}_k^n$ tels qu'il existe $f : V_0 \to V$ et $r : V \to V_0$ pour lesquels $f \circ r = \mathrm{Id}_V$. Soit U un ouvert affine non vide de X. On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Div}_{X \setminus U}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{X,Y}"] & \mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{U,Y}"] & 0 \\
\mathrm{Div}_{X \times_k Y \setminus U \times_k Y}(X \times_k Y) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X \times_k Y) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U \times_k Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La flèche verticale à gauche étant un isomorphisme, on a l'équivalence : $\phi_{X,Y}$ est surjective si, et seulement si, $\phi_{U,Y}$ est surjective. Le même raisonnement, avec (Y, U) à la place de (X, Y), montre que $\phi_{X,Y}$ est surjective si, et seulement si, $\phi_{U,V}$ est surjective, et montre aussi (avec $(U, \mathbb{A}_k^n)$ à la place de (X, Y)) que $\phi_{U,\mathbb{A}_k^n}$ est surjective si, et seulement si, ϕ_{U,V_0} est surjective. Or on sait que $\phi_{U,\mathbb{A}_k^n}$ est surjective. Alors en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_U^* \oplus f^*"] & \mathrm{Pic}(U \times_k V) \arrow[d, "(\mathrm{Id}_U \times f)^*"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{Id}"] \\
\mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(V_0) \arrow[r, "\phi_{U,V_0}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_U^* \oplus r^*"] & \mathrm{Pic}(U \times_k V_0) \arrow[d, "(\mathrm{Id}_U \times r)^*"] \\
\mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"] & \mathrm{Pic}(U \times_k V)
\end{tikzcd}$$

on obtient le sous diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(V_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(U \times_k V_0) \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(V) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U \times_k V)
\end{tikzcd}$$

donc $\phi_{U,V}$ est surjective, et partant, $\phi_{X,Y}$ aussi.

• Pour le cas général, on procède à une descente galoisienne du point précédent. Il s'agit exactement de la démonstration de [San81, Lem. 6.6] en changeant la référence à [CTS77] par le point précédent.

$\square$

B.1.2. Groupe d'extensions et groupe de Picard

Toute extension (de groupes algébriques) de G par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ détermine un fibré en droites sur G et cette construction fournit un morphisme injectif $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(G)$. D'après la proposition B.1.3 ci-dessous, $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m)$ s'identifie même au sous-groupe de $\mathrm{Pic}(G)$ constitué des fibrés en droites sur G dit « primitifs », et qui correspondent aux fibrés en droites sur G invariants par translations (on pourrait dire *fibrés homogènes*).

Pour un k-groupe algébrique affine G, notons $\mathrm{Pic}_m(G)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(G)$ formé des éléments α pour lesquels $p_1^*(\alpha) + p_2^*(\alpha) = m^*(\alpha)$, où $p_1 : G \times_k G \to G$ est la projection sur le premier facteur, $p_2 : G \times_k G \to G$ la projection sur le deuxième facteur et $m : G \times_k G \to G$ la multiplication de G. Pour un tel G, à tout $\alpha \in \mathrm{Pic}(G)$ provenant d'une extension de groupes algébriques affines $1 \to \mathbb{G}_m \to H \to G \to 1$, α appartient à $\mathrm{Pic}_m(\alpha)$:

Proposition B.1.3. *Pour tout k-groupe algébrique affine lisse et connexe G, $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}_m(G)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La proposition est en réalité une variation simplifiée de l'énoncé de [CT08, Th. 5.6]. Dans son article, Colliot-Thélène énonce [CT08, Th. 5.6] pour un groupe *réductif* G si la caractéristique du corps de base est non nulle. Mais cette hypothèse n'est là que pour s'assurer que, pour tout tore S, tous les S-torseurs sur G réductif de fibre triviale au-dessus de l'unité de G, sont primitifs. Son propos fonctionne exactement de la même manière si l'on s'occupe de $\mathbb{G}_m$-torseurs qui sont déjà primitifs. Voici la trame de l'argument.

$\diamond$ Soit $p : H \to G$ un $\mathbb{G}_m$-torseur (donc un fibré en droites) qui soit primitif. On appelle α sa classe d'isomorphisme. Le but est de munir H d'une structure de groupe faisant de p un morphisme de groupes ; alors son noyau sera $\mathbb{G}_m$ et on aura une extension (centrale puisque G est connexe) de G par $\mathbb{G}_m$. On va utiliser les notations p_1, p_2 et m précédant l'énoncé de la proposition B.1.3.

La fibre au-dessus de l'élément unité $e \in G(k)$ est un $\mathbb{G}_m$-torseur sur $\mathrm{Spec}(k)$, donc $p^{-1}(e) \simeq \mathbb{G}_m$ et en particulier il existe un k-point e' de H au-dessus de e. Puisque $p_1^*(\alpha) + p_2^*(\alpha) = m^*(\alpha)$ (dans $\mathrm{Pic}(G \times G)$), on a un isomorphisme entre les $\mathbb{G}_m$-torseurs, sur $G \times_k G$, que sont

$$H \times_k H \xrightarrow{p \times p} G \times_k G$$

et

$$(G \times_k G) \times_{m,G,p} H \to G \times_k G.$$

En définissant $\varphi : H \times_k H \to H$ comme la composée de l'isomorphisme $H \times_k H \simeq (G \times_k G) \times_{m,G,p} H$ avec la projection $(G \times_k G) \times_{m,G,p} H \to H$, on obtient un diagramme commutatif de *k-schémas*

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p \times p"'] & H \arrow[d, "p"] \\ G \times_k G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} .$$

Grâce à la propriété de simple transitivité de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur les fibres d'un $\mathbb{G}_m$-torseur, il est possible de modifier le morphisme de schémas φ pour qu'il soit une opération associative et que e' soit un élément neutre. On renvoie à la preuve de [CT08, Th. 5.6] pour les détails.

⋄ Il reste à définir un inverse $H \to H$ pour φ. Là encore, il n'est pas nécessaire que tous les éléments de $\mathrm{Pic}(G)$ soient primitifs. Ce qui importe et suffit est qu'il existe un endomorphisme de k-schéma $\theta : H \to H$ tel qu'on ait un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & H \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "i"'] & G \end{tikzcd}$$

avec $i : G \to G$ le morphisme d'inversion de G, et tel que $\forall \lambda \in \mathbb{G}_m, \forall h \in H$, $\theta(\lambda \cdot h) = \lambda^{-1} \cdot \theta(h)$. Pour cela on doit voir que le torseur $i^{-1}(p)$ est isomorphe au torseur p dont on a inversé l'action de $\mathbb{G}_m$ sur les fibres. Le morphisme $m \circ (\mathrm{Id}_G \times i)$ factorise par e et le morphisme structural $G \to \mathrm{Spec}(k)$, donc $(\mathrm{Id}_G \times i)^* \circ m^* : \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G \times_k G) \to \mathrm{Pic}(G)$ est le morphisme nul, mais $p_1^*(\alpha) + p_2^*(\alpha) = m^*(\alpha)$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{Id}_G \times i)^*(p_1^*(\alpha) + p_2^*(\alpha)) \\ &= (p_1 \circ (\mathrm{Id}_G \times i))^*(\alpha) + (p_2 \circ (\mathrm{Id}_G \times i))^*(\alpha) \\ &= \mathrm{Id}_G^*(\alpha) + i^*(\alpha). \end{aligned}$$

Or, appelant q le $\mathbb{G}_m$-torseur sur G obtenu à partir de p en inversant l'action du groupe multiplicatif sur les fibres et en notant β sa classe d'isomorphisme, on a $\beta = -\alpha$ dans $\mathrm{Pic}(G)$. Comme il est détaillé dans la démonstration de [CT08, Th. 5.6], on peut modifier θ pour que $\theta(e') = e'$, $\phi(\theta(h), h) = e'$ pour tout $h \in H$ et cela de sorte que θ soit toujours un relevé de i à travers p. Comme l'explique Colliot-Thélène, les ϕ, θ et e' constituent une structure de k-groupe algébrique telle que p est un morphisme de k-groupes. □

Si l'on associe la proposition B.1.3 avec B.1.2, on obtient :

Conséquence B.1.4. *Soit G un k-groupe algébrique affine, lisse et connexe qui soit k_s-rétractilement rationnel. Alors le morphisme de groupes $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}(G)$ est un isomorphisme.*

Exemple B.1.5. Étant donné qu'un groupe réductif G est rationnel sur la clôture séparable k_s du corps de base k, les propositions B.1.1 et B.1.3 montrent que $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(G)$.

Il se peut que le morphisme $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(G)$ ne soit point surjectif ([Ros19, Prop. 5.10]). Mais il l'est dans de nombreux cas, que l'on présente maintenant.

Exemple B.1.6. On sait ([San81, Lem. 6.9 (iii)]) que pour un groupe semi-simple G/k, tout élément de $\mathrm{Pic}(G)$ provient d'une extension de groupes de G par $\mathbb{G}_m$. Plus précisément, tout élément de $\mathrm{Pic}(G)$ peut être décrit comme le « poussé en avant » de l'extension du revêtement universel

$$1 \to \mu \to G^{sc} \to G \to 1$$

(où G^{sc} est le revêtement universel de G et μ le groupe fondamental de G) par un caractère du k-groupe fini multiplicatif μ.

Exemple B.1.7. Généralisant l'exemple précédent, Rosengarten a montré que pour avoir

$$\mathrm{Pic}(G \times_k G) = \mathrm{Pic}(G) \oplus \mathrm{Pic}(G),$$

et donc avoir $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(G)$, il suffit que $\mathrm{Pic}(G)$ soit fini (voir [Ros19, Th. 2.3]).

Exemple B.1.8. De manière très générale, qui recouvre le cas de la rationalité rétractile (proposition B.1.2), Rosengarten, aiguillé par Gabber, montre ([Ros19, Prop. 3.1]) que pour tout groupe G lisse tel que G_{k_s} est unirationnel, on a $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(G)$. Ce résultat s'applique notamment aux groupes affines, lisses et parfait (*i.e.* le groupe est égal à son groupe dérivé) puisque un tel groupe est unirationnel ([CGP15, Prop. A.2.11]).

B.2. Rationalité rétractile de groupes absolument pseudo-simples

Dans cette section, on revoit les bases de la rationalité rétractile (suivant [Mer17]) avant de démontrer que cette propriété vaut pour un certaine famille de groupes algébriques pseudo-semi-simples.

On se fixe un corps k. On désigne par k_s une clôture séparable de k. Par « k-variété » on entend k-schéma séparé de type fini et géométriquement intègre. Et par « k-groupe » on entend k-schéma en groupes de type fini.

B.2.1. Variétés rétractilement rationnelles

Définition B.2.1. Soit l/k une extension de corps. Une k-variété X est dite *l-rétractilement rationnelle* s'il existe un ouvert non-vide U d'un espace affine $\mathbb{A}^n_l$, un ouvert dense V de X_l et deux l-morphismes $f : U \to V$, $r : V \to U$ tels que $f \circ r = \mathrm{id}_U$.

Pour un quelconque anneau local A, on va désigner par $\bar{A}$ le corps résiduel de A.

Proposition B.2.2 ([Mer17, Prop. 3.1.]). *Soit X une k-variété intègre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est k-rétractilement rationnelle*
2. *Pour toute k-algèbre locale A, il existe un ouvert non vide V de X tel que $V(A) \to V(\bar{A})$ est surjective*
3. *Pour toute k-algèbre locale A avec $\bar{A}$ infini, il existe un ouvert non vide V de X tel que $V(A) \to V(\bar{A})$ est surjective*
4. *Pour toute k-algèbre locale A telle que $\bar{A} \simeq k(X)$ en tant que k-algèbres, il existe un ouvert non vide V de X tel que $V(A) \to V(\bar{A})$ est surjective.*

En fait, comme il apparaît dans la démonstration de [Mer17, Prop. 3.1] ou dans celle de [CTS07, Prop. 1.2], on a aussi le critère plus particulier [1] :

Lemme B.2.3. *Soit X une k-variété. On se donne une k-algèbre de polynômes localisée en un idéal premier $A = k[X_1, \cdots, X_m]_{\mathfrak{p}}$, telle que $\bar{A} \underset{k-alg}{\simeq} k(X)$. Alors X est k-rétractilement rationnelle si, et seulement si, il existe un ouvert non vide V de X tel que $V(A) \to V(\bar{A})$ est surjective.*

Le résultat suivant compare les diverses propriétés de rationalité des variétés algébriques.

1. que l'on mentionne mais qui finalement n'est pas véritablement nécessaire dans la Thèse

Proposition B.2.4 ([Mer17, Prop. 3.4.]). *Soit X une k-variété. Considèrons les propriétés :*

(i) X est k-rationnelle

(ii) X est k-rétractilement k-rationnelle

(iii) X est k-unirationnelle

Alors on a les implications (i)⇒(ii)⇒(iii).

▷ **Cas des groupes algébriques.**

Lemme B.2.5. *Soit G un k-groupe algébrique et soit A une k-algèbre locale. On suppose que l'ensemble des k-points $G(k)$ est dense dans G (ce qui est le cas si G est k-unirationnel et k est infini). S'il existe un ouvert dense V de G tel que $V(A) \to V(\bar{A})$ soit surjective, alors il en est de même de $G(A) \to G(\bar{A})$.*

Démonstration. Il s'agit d'un argument d'homogénéité. Tout d'abord, $\bigcup_{g\in G(k)} (gV(A)) \to \bigcup_{g\in G(k)} \left(gV(\bar{A})\right)$ est surjective. Mais du fait que $G(k)$ est dense dans G, la réunion des gV pour $g \in G(k)$ est égale à G. Ainsi, $G(\bar{A}) = \bigcup_{g\in G(k)} \left(gV(\bar{A})\right)$ car $\bar{A}$ est un corps, donc $\bigcup_{g\in G(k)} (gV(A)) \to G(\bar{A})$ est surjective, avec $\bigcup_{g\in G(k)} (gV(A)) \subseteq G(A)$ (il n'y a pas nécessairement égalité). □

Conséquence B.2.6. *Si k est infini et G est k-rétractilement rationnel, alors pour toute k-algèbre locale A, l'application $G(A) \to G(\bar{A})$ est surjective.*

B.2.2. Exemples de groupes pseudo-semi-simples rétractilement rationnels

▷ **Groupes pseudo-réductifs non rétractilement rationnels.** Les groupes pseudo-réductifs ne sont pas toujours rétractilement rationnels. Voici un exemple tiré de [CGP15].

Supposons k imparfait et notons p sa caractéristique. Soit $q = p^r$ une puissance de p tel que $q > 2$, et soit $t \in k \setminus k^p$. Comme expliqué dans [CGP15, Ex. 11.3.1],

- le sous-k-groupe affine lisse connexe $U = \{(x,y) \in \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \,|\, y^q = x - tx^p\}$ de $\mathbb{G}_a \times_k \mathbb{G}_a\}$ n'est pas unirationnel sur k ;
- tout k-groupe C qui s'insère dans une suite exacte
$$1 \to \mathbb{G}_m \to C \to U \to 1$$
et qui n'est pas $\mathbb{G}_m \times_k U$ est pseudo-réductif commutatif ;
- il existe des k-groupes C extensions de U par $\mathbb{G}_m$ qui ne sont pas isomorphes à $\mathbb{G}_m \times_k U$.

Il existe donc effectivement des k-groupes pseudo-réductifs commutatifs C qui ont un quotient isomorphe à U. En particulier ces groupes C ne sont pas k-unirationnels puisque leur quotient U ne l'est pas.

Cependant, les k-groupes affines, lisses et connexes qui sont parfaits, sont k-unirationnels ([CGP15, Prop. A.2.11]). Cela s'applique en particulier aux k-groupes pseudo-semi-simples.

▷ **Des groupes pseudo-semi-simples rétractilement rationnels.** Pour la proposition B.2.9, on aura besoin des deux lemmes suivants.

Lemme B.2.7 ([DG11, Prop. 8.2])**.** *Soit $S \to S'$ un morphisme de schémas. Alors pour tout faisceau fppf en groupes $\mathcal{G}'$ sur S', l'application $\mathrm{H}^1(S, \mathrm{R}_{S'/S}(\mathcal{G}')) \to \mathrm{H}^1(S', \mathcal{G}')$ est injective, d'image constituée par les classes de torseurs qui sont trivialisés par un recouvrement fppf $R \times_S S'$ de S' avec R un recouvrement fppf de S.*

Lemme B.2.8. *Soient k'/k une extension finie de corps et A une k-algèbre locale. Alors $A \otimes_k k'$ est un anneau semi-local. En particulier son groupe de Picard est trivial.*

Démonstration. En fait le lemme vaut plus généralement pour A semi-locale et en remplaçant $A \otimes_k k'$ par une A-algèbre finie B. Supposons qu'on soit dans cette situation. Le fait que que $A \times_k k'$ soit semi-local est une conséquence du théorème du « going-up » de Cohen-Seidenberg. On a une extension injective et finie d'anneaux $A \hookrightarrow A \otimes_k k'$, le going-up implique que les idéaux maximaux de B sont tous au-dessus de ceux de A. Or B/A est finie, donc il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers (ou maximaux) de B au-dessus d'un idéal maximal de A donné. Ainsi, puisque A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, c'est aussi le cas de B.

En ce qui concerne l'assertion sur le groupe de Picard, il s'agit du fait que, sur un anneau semi-local, les modules projectifs de type fini et de rang constant sont libres [Bou06, II.§5.3. Prop. 5.]. □

On arrive désormais au résultat principal de cette section.

Proposition B.2.9. *Soit k'/k une extension finie et purement inséparable de corps. Soit G' un k'-groupe semi-simple simplement connexe,* déployé *; et soit μ un sous-k'-groupe du centre de G'. Alors $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ est rétractilement rationnel sur k.*

Démonstration. On note G le k-groupe algébrique $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ et on se donne pour toute la preuve une k-algèbre locale A. Notons que l'on peut supposer que k est infini, car si k est fini, il est parfait donc la seule extension finie purement inséparable de k est k lui-même et le groupe $\mathrm{R}_{k'/k}(G')/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)$ est un k-groupe semi-simple déployé, donc rationnel (cette hypothèse est utile pour pouvoir utiliser le résultat B.2.6 à quelques occasions dans la preuve). On cherche à montrer que $G(A) \to G(\bar{A})$ est surjective. On saura alors que G est k-rétractilement rationnel en vertu de B.2.2.

La suite exacte de faisceaux *fppf* sur A et $\bar{A}$

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu) \to \mathrm{R}_{k'/k}(G') \to G \to 1$$

donne le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & \mathrm{R}_{k'/k}(G')(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & G(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] & \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(G')) . \arrow[d, "\phi'_5"] \\
\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)(\bar{A}) \arrow[r] & \mathrm{R}_{k'/k}(G')(\bar{A}) \arrow[r] & G(\bar{A}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(G'))
\end{tikzcd}$$

On cherche à appliquer la partie surjective du « lemme des cinq » pour montrer que $G(A) \to G(\bar{A})$ est surjective. Pour cela, on aimerait voir que ϕ_2 et ϕ_4 sont surjectives et que ϕ'_5 est injective.

En réalité on n'a pas besoin de savoir si ϕ_5' est injective. En effet, G' étant déployé, il contient un tore déployé T' qui contient μ (puisque μ est l'intersection des tores maximaux de G'), donc $\mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \to \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(G'))$ se factorise par $\mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(T'))$, mais ce dernier ensemble s'injecte dans $\mathrm{H}^1(A', T'))$ (lemme B.2.7) qui est nul puisque T' est déployé sur k' et A' est semi-locale (lemme B.2.8), si bien que la flèche $\mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \to \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(G'))$ est en fait nulle. De même pour la flèche avec K à la place de A. On se retrouve ainsi à vouloir appliquer le « lemme des cinq » au diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & \mathrm{R}_{k'/k}(G')(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & G(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] & 1 \arrow[d, "\phi_5"] \\
\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)(\bar{A}) \arrow[r] & \mathrm{R}_{k'/k}(G')(\bar{A}) \arrow[r] & G(\bar{A}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}.$$

⋄ Tout d'abord, ϕ_5 est bien injective...

⋄ Ensuite G' étant un groupe réductif déployé, il est rationnel sur k', donc sa restriction de Weil à k est rationnelle sur k, et en particulier rétractilement rationnelle sur k. Grâce à B.2.6 (on a supposé k infini), on en déduit que ϕ_2 est surjective.

⋄ Montrons que ϕ_4 est surjective.

Le k'-groupe μ est multiplicatif et fini, donc est un produit de groupes de racines de l'unité $\mu_{l,k'}$, $l \in \mathbb{N}$. Pour les facteurs $\mu_{l,k'}$ avec l premier à p, le k'-groupe $\mu_{l,k'}$ est lisse, donc d'après [CGP15, Cor. A.5.4(3)] on a la suite exacte de k-groupes algébriques

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{l,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{(\cdot)^l} \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \to 1.$$

Pour toute k-algèbre locale B le début de la suite longue associée en cohomologie *fppf* (sur le site *fppf* de $\mathrm{Spec}(B)$) montre que $\mathrm{H}^1(B, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{l,k'})) = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)(B)/(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)(B))^l$. Du fait que $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)$ est k-rétractilement rationnel, l'application $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)(A) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)(\bar{A})$ est surjective et on trouve que $\mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{l,k'})) \to \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{l,k'}))$ est surjective.

Pour les facteurs $\mu_{q,k'}$ avec $q = p^r$, on a la suite exacte de k-groupes algébriques

$$1 \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{q,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathrm{R}_{k(k'^{p^r})/k}(\mathbb{G}_m) \to 1, \tag{B.1}$$

où la flèche $\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{q,k'}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)$ est l'inclusion et la flèche $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathrm{R}_{k(k'^p)/k}(\mathbb{G}_m)$ est la puissance p^r-ième. Voyant (B.1) comme deux suites exactes de faisceaux *fppf* sur les sites $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(\bar{A})$ respectivement, des suites exactes longues associées on extrait le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_k k(k'^{p^r}))^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] & \mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m)) \arrow[d] \\
(\bar{A} \otimes_k k(k'^p))^* \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu)) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mathbb{G}_m))
\end{tikzcd}.$$

Mais les groupes de la colonne de droite sont triviaux (lemmes B.2.7 et B.2.8) et la première flèche verticale est surjective car $\mathrm{R}_{k(k'^{p^r})/k}(\mathbb{G}_m)$ est k-rétractilement rationnel, d'où la surjectivité de $\mathrm{H}^1(A, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{q,k'})) \to \mathrm{H}^1(\bar{A}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{q,k'}))$, c'est-à-dire de ϕ_4. □

Exemple B.2.10. Soit k'/k une extension finie, purement inséparable.

— Pour l entier positif premier à la caractéristique du corps de base k, le k-groupe algébrique $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_{\mathrm{l,k'}})/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{l,k'})$ est isomorphe à $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{PGL}_{l,k'})$ ([CGP15, Cor. A.5.4(3)]), qui est k-rationnel ;

— Pour q une puissance de la caractéristique de k ($q \neq 1$), la proposition B.2.9 nous dit que le groupe $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_{q,k'})/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_{q,k'})$ est k-rétractilement rationnel.

Bibliographie

[Ach17] R. Achet : Picard groups of the form of the affine line and of the additive group. *Journal of pure and applied algebra*, 221(11): pp 2838–2860, 2017.

[AGV77] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269, 270, 305 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud : *Néron models*, volume 21 de *A series of modern surveys of mathematics*. Springer-Verlag, 1990.

[BM13] S. Blinstein et A. Merkurjev : Cohomological invariants of algebraic tori. *Algebra Number Theory*, 7(7): pp 1643–1684, 2013.

[Bou06] N. Bourbaki : *Algèbre commutative, chapitres 1 à 4*. Éléments de mathématique. Springer-Verlag, 2006.

[Bri15] M. Brion : On linearization of line bundles. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo (Kodaira Centennial Issue)*, 22: pp 1–35, 2015.

[CGP15] B. Conrad, O. Gabber et G Prasad : *Pseudo-reductive groups*, volume 26 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, second édition, 2015.

[CHK97] J. L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn : The Bloch-Ogus-Gabber theorem. *In* AMS, éditeur : *Algebraic K-theory*, volume 16 de *Field Institute Communication*, pages pp 31–94, 1997.

[Con] B. Conrad : Units on product varieties. Notes sur la page personnelle de Conrad, http://math.stanford.edu/~conrad/papers/unitthm.pdf.

[CP16] B. Conrad et G. Prasad : *Classification of Pseudo-reductive Groups (AM-191)*. Princeton University Press, 2016.

[CT08] J.-L. Colliot-Thélène : Résolutions flasques des groupes linéaires connexes. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik*, 2008: pp 77–133, 05 2008.

[CTS77] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : La R-équivalence sur les tores. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 10: pp 175–229, 1977.

[CTS07] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer groups). *In Algebraic groups and homogeneous spaces*, pages pp 113–186. Tata Institut of Fundamental Research, 2007.

[Del74] P. Deligne : Théorie de Hodge : III. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 44: pp 5–77, 1974.

[Del96] P. Deligne : Extensions centrales de groupes algébriques simplement connexes et cohomologie galoisienne. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 84: pp 35–89, 1996.

[DG70] M. Demazure et A. Grothendieck : *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie : Schémas en Groupes, I-III. (SGA3) :*. Lecture notes in mathematics (Springer-Verlag) ; 151-153. Springer-Verlag, 1970.

[DG11] M. Demazure et A. Grothendieck : *Schémas en groupes (SGA 3)*, volume 8 de *Documents Mathématiques*, chapitre Exposé XXIV. Société Mathématiques de France, 2011.

[EKLV98] H. Esnault, B. Kahn, M Levine et E. Viehweg : The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles. *Journal of the American Mathematical Society*, 11(1): pp 73–118, January 1998.

[GJR96] R. Guraldick, D. Jaffe et W. Raskind : On the Picard group : torsion and the kernel indeuced by a faithfully flat map. *Journal of Algebra*, 183: pp 420–455, 1996.

[GMS03] S. Garibaldi, A. Merkurjev et J.-P. Serre : *Cohomological invariants in Galois cohomology*. University Lectures Series. American Mathematical Society, 2003.

[Gro68] A. Grothendieck : Le groupe de Brauer : II. théories cohomologiques. *In Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, chapitre V, pages pp 66–87. Amsterdam : North-Holland ; Paris : Masson et Cie, 1968.

[Ill79] Luc Illusie : Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 12(4): pp 501–661, 1979.

[Kah12] B. Kahn : Classes de cycles motiviques étales. *Algebra and Number Theory*, 6(7): pp 1369–1407, 2012.

[KMRT98] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost et J.-P. Tignol : *The book of involutions*, volume 44 de *Colloquium Publications*. AMS, 1998.

[LM16] D. Laackman et A. Merkurjev : Degree three cohomological invariants of reductive groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, (3): pp 493—-518, 2016.

[Mer16] A. Merkurjev : Degree three cohomological invariants of semisimple groups. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(2), 2016.

[Mer17] A. Merkurjev : Invariants of algebraic groups and retract rationality of classifying spaces. *In Algebraic Groups : Structure and Actions (à paraître)*, volume 94 de *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. American Mathematical Society, 2017.

[Mil13] James S. Milne : Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf`.

[Oes84] J. Oesterlé : Nombres de Tamagawa et groupes unipotentes en caractéristique p. *Inventiones mathematicae*, 78: pp 13–88, 1984.

[Pop86] D. Popescu : General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math. J.*, 104: pp 85–115, 1986.

[Rem11] B. Remy : Groupes algébriques pseudo-réductifs et applications, d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad (Exposé 1021). *In Séminaire Bourbaki, volume 2009/2010*, volume 339 de *Astérisque*, pages : 259—-304. SMF, 2011.

[Ros19] Z. Rosengarten : Translation-invariant line bundles on linear algebraic groups. Soumis, arXiv :1806.10292, https://arxiv.org/abs/1806.10292, 2019.

[Sal84] D. J. Saltman : Retract rational fields and cyclic Galois extensions. *Israel J. Math.*, 47(2–3): pp 165–215, 1984.

[San81] J.-J. Sansuc : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 327: pp 12–80, 1981.

[Ser94] J.-P. Serre : *Cohomologie galoisienne*, volume 5 de *Lecture note in mathematics*. Springer, cinquième édition, 1994.

[Shi07] A. Shiho : On logarithmic Hodge-Witt cohomology of regular schemes. *Journal of Mathematical Sciences (University of Tokyo)*, 14: pp 567–635, 2007.

[Tam94] G. Tamme : *Introduction to étale cohomology*. Universitext. Springer-Verlag, 1994.

[Tot13] B. Totaro : Pseudo-abelian varieties. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 46: pp 693–721, 2013.

[Č18] K. Česnavičius : Purity for the Brauer group. 2018. pré-publication, arXiv :1711.06456, https://arxiv.org/abs/1711.06456.

[Wat79] W. C. Waterhouse : *Introduction to affine group schemes*, volume 66 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag New-York, 1979.

[Wei94] C. Weibel : *An introduction to homological algebra*, volume 38 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1994.