Commande de robots manipulateurs basée sur le modèle de Takagi-Sugeno : nouvelle approche pour le suivi de trajectoire

Thi van Anh Nguyen

▶ **To cite this version:**

Thi van Anh Nguyen. Commande de robots manipulateurs basée sur le modèle de Takagi-Sugeno : nouvelle approche pour le suivi de trajectoire. Automatique / Robotique. Université Polytechnique Hauts-de-France, 2019. Français. NNT : 2019UPHF0030 . tel-02375886

HAL Id: tel-02375886

https://theses.hal.science/tel-02375886

Submitted on 22 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de

l'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS-DE-FRANCE

Discipline, spécialité selon la liste des spécialités pour lesquelles l'École Doctorale est accréditée :

Automatique

Présentée et soutenue par **Thi Van Anh Nguyen**

Le 04/10/2019, à Valenciennes

École doctorale :
Sciences Pour l'Ingénieur (ED SPI 072)

Laboratoire :
Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH — UMR 8201)

Commande de robots manipulateurs basée sur le modèle de Takagi-Sugeno : nouvelle approche pour le suivi de trajectoire

JURY :

Président du jury :		
Pr. Noureddine Manamanni	-	Université de Reims, CRESTIC
Rapporteur :		
Pr. Ahmed El Hajjaji	-	Université de Picardie Jules Vernes, MIS
Examinateurs :		
Dr. Lynda Seddiki	-	Université Vincennes-Saint-Denis Paris 8, LIASD
Dr. Anh-Tu Nguyen	-	Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH
Encadrants de thèse :		
Pr. Laurent Vermeiren	-	Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH
Dr. Antoine Dequidt	-	Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH
Membres invités :		
Dr. Benyamine Allouche	-	Automation & Robotics, Altran Technology
Pr. Michel Dambrine	-	Université Polytechnique Hauts-de-France, LAMIH

Résumé

Ce travail présente une nouvelle approche de synthèse de la commande non linéaire en suivi de trajectoire de robots manipulateurs. Malgré la richesse de la littérature dans le domaine, le problème n'a pas encore été traité de manière adéquate : en raison de l'existence inévitable dans les applications pratiques de perturbations et incertitudes telles que les forces de frottement, des perturbations externes ou les variations des paramètres il est difficile d'assurer un suivi de trajectoire de haute précision. Afin de résoudre ce problème, nous proposons tout d'abord une méthode de commande prenant en compte la performance $\mathcal{H}_\infty$ pour le suivi de trajectoire d'un robot manipulateur. Deuxièmement, nous proposons un nouveau cadre pour la synthèse de lois de commande combinant une action anticipatrice et un retour d'état basée sur une représentation sous forme Takagi-Sugeno descripteur de la dynamique du manipulateur. Un avantage de la représentation choisie est de pouvoir simultanément simplifier le calcul des gains de commande à l'aide de LMI de dimension réduite et de réduire la complexité du correcteur en agissant sur le nombre de règles du modèle de Takagi-Sugeno. Basé sur la théorie de la stabilité de Lyapunov, le réglage du correcteur est formulé comme un problème d'optimisation LMI (inégalité matricielle linéaire). Les résultats obtenus en simulation effectuée avec un modèle de manipulateur série développé dans l'environnement Simscape Multibody™ de Matlab® démontrent clairement l'efficacité de la méthode proposée en comparaison avec le régulateur PID et la commande *CTC (Computed Torque Control)*.

Mots-clés : Robot manipulateur, commande floue, commande de suivi de trajectoire, stabilité de Lyapunov, performance $\mathcal{H}_\infty$, performance $\mathcal{L}_\infty$, inégalités matricielles linéaires, modèle descripteur, modèle de Takagi-Sugeno.

Abstract

This work presents a new design approach for trajectory tracking control of robot manipulators. In spite of the rich literature in the field, the problem has not yet been addressed adequately due to the lack of an effective control design. In general, it is difficult to adopt design to achieve high-precision tracking control due to the uncertainties in practical applications, such as friction forces, external disturbances and parameter variations. In order to cope this problem, we propose first control with $\mathcal{H}_\infty$ performance to reference trajectory tracking control of two degrees of freedom robot. Secondly, we propose a new design framework with parametric uncertainties and unknown disturbances by using the feedback and the feedforward controllers. Using the descriptor Takagi-Sugeno systems, the design goal is to achieve a guaranteed tracking performance while significantly reducing the numerical complexity of the designed controller through a robust control scheme. Based on Lyapunov stability theory, the control design is formulated as an LMI (linear matrix inequality) optimization problem. Simulation results carried out with a high-fidelity serial manipulator model embedded in the Simscape Multibody™ environment of Matlab® clearly demonstrate the effectiveness of the proposed method by comparing with PID controller and computed torque controller.

Key words : Robot manipulators, fuzzy control, tracking control, Lyapunov stability, $\mathcal{H}_\infty$ performance, $\mathcal{L}_\infty$ performance, linear matrix inequality.

Table des matières

Remercierments **5**

Introduction générale **7**

1 Robots manipulateurs et suivi de trajectoire **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.2 Robots manipulateurs . . . 12
1.2.1 Introduction . . . 12
1.2.2 Espaces articulaire et opérationnel . . . 15
1.2.3 Modèles géométriques, cinématiques et dynamiques . . . 16
1.2.4 Modèle dynamique rigide . . . 19
1.2.5 Modèle dynamique à articulations flexibles . . . 22
1.3 Suivi de trajectoire . . . 25
1.3.1 Introduction . . . 25
1.3.2 Formulation du problème de commande de suivi . . . 26
1.3.3 Lois de commande de suivi de trajectoire . . . 27
1.4 Conclusion . . . 32

2 Approche T–S **33**
2.1 Introduction . . . 33
2.2 Représentation de systèmes non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno . . . 34
2.2.1 Modèle Takagi-Sugeno standard . . . 35
2.2.2 Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno . . . 36
2.2.3 Modèle T-S descripteur . . . 39
2.3 Stabilité et stabilisation des modèles T-S . . . 39
2.3.1 Rappels sur les inégalités matricielles linéaires . . . 39
2.3.2 Méthode directe de Lyapunov . . . 42
2.3.3 Stabilité des modèles T-S . . . 43
2.3.4 Stabilisation des modèles T-S . . . 45
2.4 Spécifications de performance en boucle fermée . . . 48
2.4.1 α-stabilité . . . 48
2.4.2 Critère $\mathcal{H}_\infty$ . . . 49
2.4.3 Robustesse . . . 50
2.4.4 Prise en compte du signal de référence . . . 50
2.5 Conclusion . . . 52

3 Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{H}_\infty$ 53
3.1 Introduction . . . 53
3.2 Formulation du problème de commande . . . 54
3.2.1 Modèle général du manipulateur : forme nominale . . . 54
3.2.2 Spécifications des performances . . . 54
3.3 Synthèse de la loi de commande en poursuite de trajectoire . . . 56
3.3.1 Conditions LMI pour le réglage du correcteur . . . 56
3.3.2 Ajout d'une action intégrale dans le correcteur . . . 59
3.4 Simplification des modèles . . . 59
3.4.1 Réduction du nombre de règles . . . 59
3.4.2 Conditions LMI pour le réglage du correcteur - cas incertain . . . 60
3.5 Application au manipulateur à deux degrés de liberté . . . 62
3.5.1 Représentation descripteur non linéaire de la dynamique des robots manipulateurs . . . 62
3.5.2 Modèle Takagi-Sugeno descripteur . . . 63
3.5.3 Modèle de référence . . . 66
3.5.4 Lois de commande . . . 67
3.5.5 Résultats de simulation et discussions . . . 69
3.6 Conclusion . . . 71

4 Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$ 73
4.1 Introduction . . . 73
4.2 Formulation du problème de suivi de trajectoire d'un robot manipulateur . . . 74
4.3 Synthèse de la loi de commande avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$ . . . 76
4.3.1 Représentation T-S descripteur de la dynamique de l'erreur de suivi 76
4.3.2 Calcul des gains de commande . . . 77
4.3.3 Réduction de la complexité du correcteur . . . 80
4.4 Application au manipulateur à deux degrés de liberté . . . 82
4.4.1 Lois de commande . . . 82
4.4.2 Comparaison des performances obtenues . . . 84
4.5 Conclusion . . . 88

5 Étude comparative des différentes techniques pour le suivi de trajectoire 89
5.1 Introduction . . . 89
5.2 Gains des loi de commande . . . 90
5.2.1 Commande PID . . . 90
5.2.2 Commande CTC . . . 91
5.3 Influence du temps de parcours sur les performances en précision . . . 91
5.3.1 Cas nominal . . . 92
5.3.2 Cas avec force appliquée à l'effecteur . . . 92
5.4 Performances en régime rapide . . . 93
5.4.1 Critères de performance . . . 93
5.4.2 Cas nominal . . . 94
5.4.3 Cas avec force appliquée à l'effecteur . . . 95
5.5 Conclusions . . . 98

Conclusion générale et perspectives 99

Bibliographie 102

Table des figures **114**

Liste des tableaux **115**

Remercierments

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse Laurent Vermeiren et mes co-encadrants Antoine Dequidt, Michel Dambrine et Anh-Tu Nguyen pour m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour ses aides, ses soutiens, ses disponibilités ainsi que ses patiences au cours de ces années. Et je souhaite vraiment les remercie également pour ses nombreuses qualités humaines exceptionnelles pendant la période de ma thèse.

Je remercie aussi Monsieur le Président , madame et messieurs les membres du jury pour ma soutenance de thèse.

Je tiens à addresser mes remerciements à Monsieur le Professeur Thierry-Marie Guerra, le directeur du LAMIH pour avoir accepté ma candidature et aussi m'avoir accueilli dans LAMIH pendant ces années de thèse.

Je remercie l'Ambassade de France au Vietnam pour m'avoir accorder une bourse doctorale.

J'adresse mes remerciements aux personnels administratifs : Madame Isabelle Oliveira-Machado, Madame Veronique Landrain, Madame Sylvie Rubens, Madame Melanie Lecq, Madame Corinne Aureggi, Madame Marlene Geneviève pour leurs aides et leurs soutiens.

Je remercie mes collègues doctorants Anh-Tu, Benyamine, Viet, Pipit, Lydia, Tariq, Thomas, Mathias, Molly, Amir, Younfei, Amine, Ajie, Mohamed, Anas pour leur coopération et leur amitié.

Enfin, je remercie ma famille au Vietnam : mes parents et mes soeurs pour leur soutien spirituel et moral tout au long de mon parcours en france.

Introduction générale

Depuis les années soixante, les applications de la robotique dans l'industrie manufacturière se sont développées grâce à ses atouts se traduisant en termes de productivité, de qualité, de conditions de travail ou de sécurité. La robotique reste un marché prometteur avec le développement de la robotique personnelle et de service permettant de répondre aux grands enjeux sociétaux comme, par exemple, le vieillissement de la population (cf. le rapport « Le développement industriel futur de la robotique personnelle et de service en France », PIPAGE, DGCIS, 2012). Ceci explique très certainement le développement des activités de recherche autour de la robotique ces dernières années.

Un des points importants en robotique est la commande dont la fonction est d'obtenir le mouvement requis d'un robot manipulateur pour exécuter une tâche. L'objet de la commande porte sur le comportement dynamique du robot dans son espace de travail en agissant via ses actionneurs. La modélisation dynamique d'un robot manipulateur est une étape importante pour la synthèse de sa loi de commande. L'utilisation d'un modèle dynamique rigide (corps supposés indéformables) permet d'établir des lois de commande performantes, en particulier pour suivre une trajectoire précisément et à vitesse élevée. Un tel modèle permet de prendre en compte le comportement non linéaire du robot et les couplages entre ses articulations. Néanmoins, l'utilisation d'un tel modèle pour la commande souffre de plusieurs limites. Une limite principale provient de la complexité des modèles non linéaires générés, ce qui rend difficile la synthèse de commande et son implémentation (coût de calcul). Une seconde limite, fortement pénalisante, est liée au risque d'obtenir une commande dont les performances ne sont pas robustes aux incertitudes structurées et non structurées de modélisation ainsi qu'aux perturbations. En effet, si le comportement dynamique rigide se modélise bien, avec des paramètres identifiables par des techniques éprouvés, un certain nombre de phénomènes sont plus difficiles à appréhender. Le frottement sec dans les articulations (avec réducteur) est complexe à modéliser en incluant les différents facteurs (comportement à vitesse nulle, rôle des efforts appliqués à l'articulation, de la température, de l'usure,...). Les modes vibratoires (résonances mécaniques) issus de la flexibilité des organes (transmission dans les articulations, bras, ...) sont également délicats à prendre en compte. Inclure ces phénomènes complexes dans le modèle de synthèse de la commande conduit très vite à des lois de commande avec un coût de calcul rédhibitoire. En outre, compte-tenu des incertitudes de modélisation importantes, la robustesse des performances est difficile à garantir. Enfin, les perturbations extérieures peuvent également dégrader ces performances. Le challenge est donc de proposer des méthodes de synthèse de commande qui permettent d'atteindre les performances les plus élevés possibles tout en garantissant leur robustesse (aux incertitudes de modélisation et aux perturbations) et la maîtrise de la complexité de loi à implémenter.

Sur le plan théorique et des outils de synthèse, cette problématique dépasse largement le cadre de la robotique. Elle concerne un vaste domaine de l'automatique où de nombreuses questions restent encore ouvertes pour la commande des systèmes non linéaires.

Parmi les différentes approches proposées, l'une d'elle a pris son essor en proposant une alternative pour dépasser les difficultés liées à la modélisation et les incertitudes inhérentes.

Cette problématique de modélisation a conduit au développement de systèmes de commande basés sur la logique floue exploitant l'expertise des opérateurs humains et la traduisant sous forme de système de règles du type Si-Alors. Si de nombreuses applications ont été rapportées montrant leur efficacité dans divers domaines d'ingénierie concernant des processus industriels ou des produits grand public, une critique majeure de cette technique de commande a été l'absence de preuve mathématique concernant la stabilité ou les performances des systèmes commandés. Ce verrou scientifique a été levé avec les travaux de Takagi et Sugeno en 1985 proposant une nouvelle classe de modèles flous pour lesquels l'analyse de la stabilité est possible à l'aide de la deuxième méthode de Lyapunov. Depuis lors, de nombreuses techniques de commande exploitant la structure de ces modèles (dits de Takagi-Sugeno) ont été développées et mises en œuvre dans de multiples domaines dont la robotique. Cependant, la très large majorité des travaux sur ces modèles porte sur l'analyse de la stabilité, la stabilisation d'un point d'équilibre fixé a priori, ou encore le rejet de perturbation. En revanche, le suivi de trajectoire est un sujet peu traité et, à notre connaissance, aucune méthode de synthèse n'a été proposée pour la commande de robot manipulateur dédiée à ce suivi selon l'approche Takagi-Sugeno.

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer au développement de nouvelles lois de commande permettant le suivi par un robot manipulateur d'une trajectoire souhaitée en utilisant une méthodologie de commande basée sur l'utilisation de modèles de Takagi-Sugeno. Les enjeux majeurs considérés sont la garantie de certains indicateurs de performances et la réduction de la complexité du calcul de la commande ou de son implémentation permettant l'utilisation de cette technique à des architectures de robots manipulateurs suffisamment complexes. Ce mémoire est décomposé en cinq chapitres.

Robots manipulateurs et suivi de trajectoire (Chapitre 1) : Ce premier chapitre présente un rappel des éléments fondamentaux sur les robots manipulateurs, les espaces articulaire et opérationnel, les différents types de modèles. Le modèle dynamique générique d'un robot manipulateur est ensuite donné dans le cas rigide d'abord, puis en tenant compte de l'élasticité des articulations ensuite. Enfin, dans un second temps, le problème du suivi de trajectoire d'un robot manipulateur est défini et un état de l'art des différentes lois de commande pour le suivi de trajectoire est réalisé.

L'approche Takagi-Sugeno pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires (Chapitre 2) : Le but de ce chapitre est de rappeler brièvement les grandes lignes de l'approche Takagi-Sugeno (T-S) pour la commande de systèmes dans le cas continu. Dans un premier temps, les modèles de type T-S sous forme standard ou descripteur, sont présentés. Ensuite, des techniques issues de la littérature permettant l'étude de la stabilité ou de la stabilisation de tels modèles sont rappelées et incluent un rappel sur les inégalités matricielles linéaires et la méthode directe de Lyapunov. À la fin de ce chapitre, il est montré comment prendre en compte le signal de référence, la robustesse de la stabilité vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, ainsi que quelques indicateurs de performance en boucle fermée comme la α-stabilité ou le critère $\mathcal{H}_\infty$.

Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{H}_\infty$ (Chapitre 3) : Ce chapitre vise à étudier la poursuite de trajectoire avec le critère $\mathcal{H}_\infty$. Premièrement, le modèle général

du manipulateur et les spécifications des performances sont présentés afin de formuler le problème de commande avec un modèle de référence. Ensuite, la structure de commande pouvant inclure une action intégrale est donnée, ainsi que des conditions LMI permettant le réglage du correcteur. La suite de ce chapitre concerne la simplification des modèles avec la réduction du nombre de règles et la prise en compte d'incertitudes paramétriques dans le modèle. Enfin, une application à un manipulateur à deux degrés de liberté est donnée.

Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$ (Chapitre 4) :
Ce chapitre propose une nouvelle structure de commande pour le suivi de trajectoire utilisant un retour d'état et une action anticipatrice. Dans un premier temps, le problème du suivi de trajectoire est formulé incluant la modélisation sous forme descripteur non linéaire de la dynamique des robots manipulateurs et la structure de la commande. Ensuite la synthèse de la loi de commande avec prise en compte de contraintes $\mathcal{L}_\infty$ est donnée. Enfin, cette approche est de nouveau appliquée au manipulateur à deux degrés de liberté pour obtenir des résultats de simulation de suivi de trajectoire.

Étude comparative de différentes techniques pour suivi de trajectoire (Chapitre 5) : Ce chapitre propose une étude comparative des différentes techniques pour le suivi de trajectoire. Les principales techniques de commande (Proportionnelle - Intégrale - Dérivée (PID), *Computed Torque Control (CTC)*) sont comparées aux deux approches de commande proposées précédemment. Dans un premier temps, les calculs des paramètres des correcteurs PID et CTC sont donnés. Ensuite, différents indicateurs de performances obtenues en simulation pour chacun des correcteurs proposés et pour plusieurs cas de fonctionnement sont présentés et permettent de confirmer l'efficacité de la nouvelle approche proposée.

Publications personnelles

Revues internationales

1. Nguyen, V. A., Nguyen, A.-T., Dequidt, A., Vermeiren, L., Dambrine, M. (2019). Nonlinear Tracking Control with Reduced Complexity of Serial Robots : A Robust Fuzzy Descriptor Approach. International Journal of Fuzzy Systems, 21(4) : 1038-1050 (IF=3.085).
2. Nguyen, V. A., Nguyen, A.-T., Dequidt, A., Vermeiren, L., Dambrine, M. (2019). $\mathcal{L}_\infty$ Fuzzy Descriptor Approach for High-Precision Tracking Control of Nonlinear Robot Manipulators IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems (In preparation).

Conférences internationales avec comité de lecture

1. Nguyen, V. A., Nguyen, A.-T., Dequidt, A., Vermeiren, L., Dambrine, M. (2018). A Robust Descriptor Approach for Nonlinear Tracking Control of Serial Robots. In 2018 IEEE Conference on Decision and Control (IEEE CDC 2018) (pp. 6906-6911), Fontainebleau, Miami Beach, FL, USA, December.

2. Nguyen, V. A., Nguyen, A.-T., Dequidt, A., Vermeiren, L., Dambrine, M. (2018). LMI-based 2-DoF control design of a manipulator via TS descriptor approach. IFAC-PapersOnLine, 51(22), 102-107 (IFAC SYROCO 2018), Budapest, Hungary, August.
3. Nguyen, V. A., Vermeiren, L., Dequidt, A., Nguyen, A.-T., Dambrine, M., Cung, L. (2018, May). Takagi-Sugeno fuzzy descriptor approach for trajectory control of a 2-DOF serial manipulator. In 2018 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (IEEE ICIEA) (pp. 1284-1289), Wuhan, China.

Conférences nationales avec comité de lecture

1. Nguyen Thi, V. A., Nguyen, A.-T., Vermeiren, L., Dequidt, A., Dambrine, M., Cung, L. (2018). Synthèse LMI pour la commande d'un robot manipulateur à 2ddl par l'approche descripteur TS. LFA 2018, Arras, France, novembre.
2. Nguyen Thi, V. A., Allouche B., Vermeiren, L., Dequidt, A., Cung, L., Dang Q.V. (2016). Commande temps-réel d'un pendule inversé : Approche TS descripteur robuste. LFA 2016, La Rochelle, France, novembre.

Chapitre 1

Robots manipulateurs et suivi de trajectoire

1.1 Introduction

De nombreuses méthodes ont été développées pour la commande de robots manipulateurs durant ces dernières décennies. Ces différentes approches de commande ont donné lieu à des travaux spécifiques en robotique, particulièrement en raison de deux aspects : la complexité du comportement dynamique des robots et les exigences en terme de suivi de trajectoire. D'une part, pour appréhender le comportement dynamique d'un robot manipulateur dans l'ensemble de son espace de travail, il est nécessaire d'avoir recours à un état (fournissant la position et la vitesse instantanée) de dimension conséquente, par exemple douze pour un robot à six articulations, et à un grand nombre de paramètres géométriques, inertiels, etc. Lorsqu'une trajectoire est parcourue dans l'espace de travail, des caractéristiques fortement non linéaires (dépendant de l'état) et un couplage important entre les articulations sont inhérents à ce comportement. L'utilisation de modèle dynamique pour l'analyse et la synthèse du robot (en conception et commande) permet de prendre en compte ce comportement dynamique complexe grâce à des méthodes de modélisation et d'identification bien établies depuis plusieurs décennies [Dawson et al., 2003, Khalil and Dombre, 2004, Siciliano et al., 2010, Siciliano and Khatib, 2016]. D'autre part, le suivi de trajectoire est l'une des fonctions essentielles d'un robot manipulateur. La capacité d'un robot à effectuer une tâche dépendra fortement de ses performances en suivi de trajectoire. Pour effectuer ce suivi, le choix d'un espace particulier (articulaire ou opérationnel) conditionne le développement d'une loi de commande. Enfin, non seulement la stabilité doit être garantie sur tout l'espace de travail, mais la commande doit également assurer des performances en suivi de trajectoire et, en particulier, une erreur de position inférieure à une tolérance. Dans ce chapitre, après avoir replacé le sujet des robots manipulateurs dans son contexte et rappelé les éléments de modélisation nécessaires à la compréhension de l'étude, les modèles dynamiques utilisés pour la synthèse de commande et pour la validation par simulation sont présentés. Puis la problématique de suivi de trajectoire est présentée ainsi que les principales approches de commande qui y répondent.

1.2 Robots manipulateurs

1.2.1 Introduction

La robotique est à la fois un domaine technologique et une science à la frontière des sciences pour l'ingénieur et des sciences humaines. Elle a récemment été définie comme la science étudiant la relation "intelligente" entre la perception et l'action [Sciavicco and Siciliano, 2012]. Les robots manipulateurs et les robots mobiles sont caractérisés par les fonctions d'action qu'ils apportent : des fonctions de manipulation d'objets dans leur environnement immédiat pour les premiers, des fonctions de mobilité dans un large environnement artificiel ou naturel (une usine, un terrain extérieur irrégulier, la mer,...) pour les seconds. Ces moyens d'action sont constitués de structures mécaniques et de sources de puissance, aujourd'hui le plus souvent électriques. Une variété de capteurs fournit aux robots des moyens de perception pour évoluer dans son espace. Une unité de calcul et de traitement (micro-contrôleur, PC industriel,...) fournit le support pour l'intégration et la connexion des moyens d'action et de perception ainsi que pour "l'intelligence" nécessaire pour les coordonner. Par conséquent, la robotique est une science interdisciplinaire qui s'appuie sur la mécanique, l'électrotechnique, l'électronique, l'automatique et l'informatique. En outre, la robotique fait appel de plus en plus aux sciences humaines comme les neurosciences.

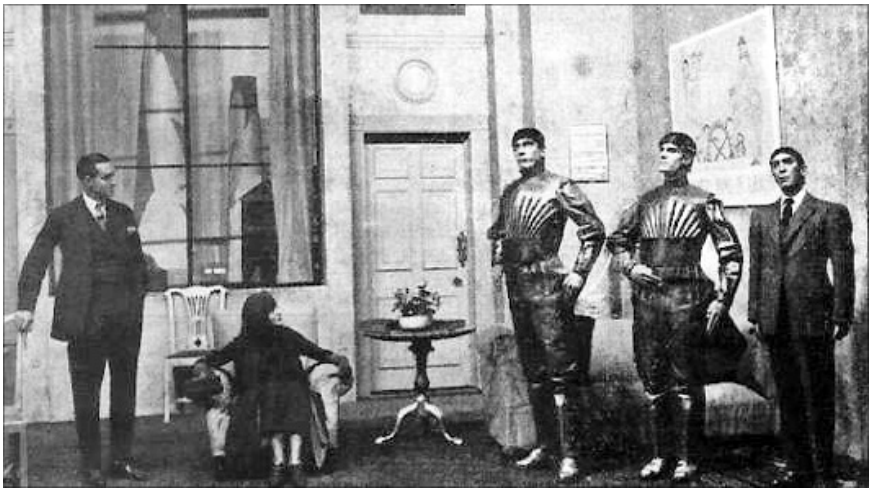


FIGURE 1.1: Une scène de R.U.R. montrant les trois robots.

Voici un certain nombre de faits saillants de l'histoire de la robotique au 20ème siècle :

— En 1921, le dramaturge tchèque K. Capek a utilisé le mot "robot" dans sa pièce de théâtre "Rossum's Universal Robots (R.U.R)" [Sciavicco and Siciliano, 2012, Abdulkareem et al., 2016], voir la figure 1.1.
— En 1942, la nouvelle de science fiction "Runaround", écrite par I. Asimov, définit les "trois lois de la robotique" [Asimov, 1942, Asimov, 2004].
— En 1956, G. Devol et J. Engelberger ont établi la première entreprise de robotique, "Unimation Inc." [Ballard et al., 2012, Kurfess, 2004].
— En 1961, le premier robot "Unimate", cf. figure 1.2, est installé dans une usine General Motors de Trenton, New Jersey [O'Regan, 2015, Gasparetto and Scalera, 2019].
— En 1963, le premier bras robotique commandé par ordinateur, le "Rancho Arm", a été conçu [Nocks, 2007].

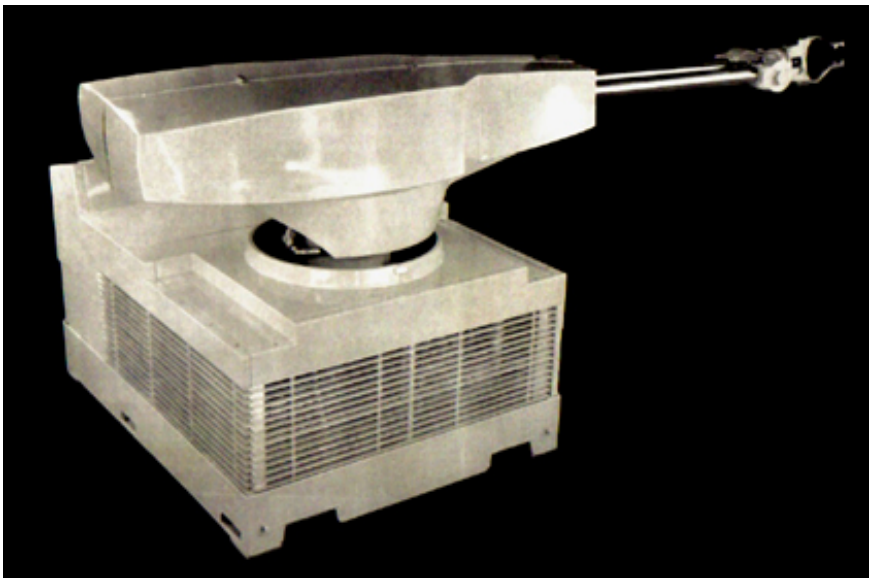


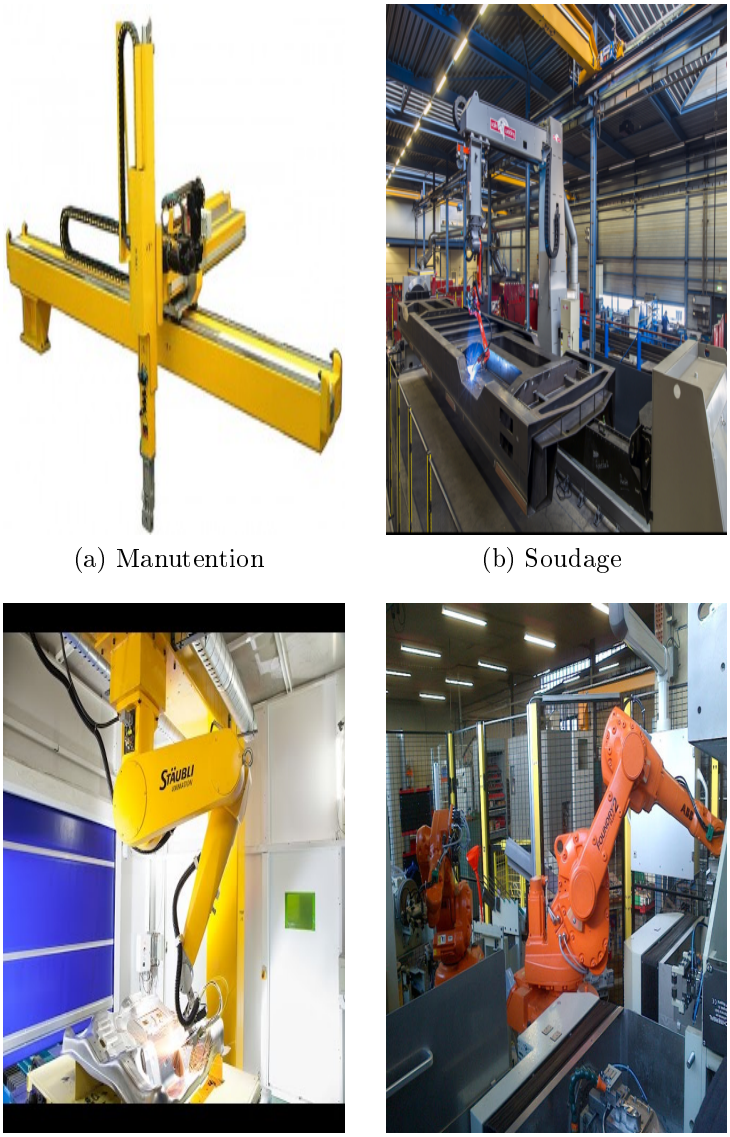
FIGURE 1.2: Le robot Unimate.

Aujourd'hui, la robotique est un domaine en croissance rapide et suit un développement technologique continu grâce aux progrès de l'informatique industrielle, de l'électronique et de l'électrotechnique par exemple. La robotique couvre de nombreux domaines d'application tels que les robots industriels [Kiguchi and Fukuda, 1997, Lindner et al., 2016, Garriz and Domingo, 2019], les applications spatiales [Yim et al., 2003, Khatib, 1987], les applications militaires [Sparrow, 2009, Springer, 2013], les applications médicales ou les robots de services [Breazeal, 2011, Dahl and Boulos, 2014]... Le marché de la robotique a été essentiellement marqué par les robots manipulateurs industriels durant les années 1970-2000 et, depuis, parallèlement à ce développement, on observe un marché en forte croissance des applications non industrielles, notamment dans les domaines médicales et des services.

La robotique industrielle comporte un secteur fortement majoritaire de robots manipulateurs bien que les AGV (Automated Guided Vehicle) et les robots mobiles à roues sont de plus en plus utilisés. L'activité de Recherche et Développement en robotique industrielle reste intense et couvre la conception, la commande et le développement d'applications industrielles (avec de nouveaux procédés, capteurs, interfaces de programmation,...) ; cette activité est stimulée par l'arrivée de la robotique collaborative (cobot) et par de nouvelles entreprises comme Universal Robots parmi des grands groupes comme Fanuc, ABB, Kuka, etc. Plus largement, dans un contexte de développement des concepts de "l'usine du futur" ou de "l'industrie 4.0", la robotique est un maillon essentiel. Pour les activités industrielles, les avantages apportés par les robots manipulateurs sont :

- la répétabilité et la maîtrise de la qualité qui en découle,
- l'augmentation de la productivité,
- l'amélioration de la fiabilité du processus,
- la possibilité d'éliminer des tâches pénibles ou à risque pour l'opérateur humain,
- la réduction des coûts de fabrication,
- la flexibilité de production (pour varier les produits sur une ligne ou s'adapter aux évolutions de produits),
- l'interaction avec l'homme (cellule robotisée ouverte pour une grande souplesse d'utilisation) possible grâce aux évolutions technologiques et réglementaires.

Les robots manipulateurs sont présents principalement dans les industries manufacturières



(a) Manutention (b) Soudage

(c) Découpe laser (d) Meulage CNC

FIGURE 1.3: Applications de robots manipulateurs

(de biens d'équipement), mais aussi les industries agro-alimentaires, pharmaceutiques, etc. Ils sont utilisés dans une très grande variété de tâches (Figure 1.3) :

- la manutention, le transfert de pièces dans une ligne de production, le chargement/déchargement de machine, le conditionnement, la palettisation, etc.
- l'assemblage, le soudage, la peinture, l'encollage, le découpage, le meulage, le polissage, le contrôle qualité, etc.

Un robot manipulateur industriel est destiné au positionnement et à la mise en mouvement dans l'espace qui l'entoure d'un outil ou d'un produit à partir d'une base fixe ou plus rarement mobile (robot manipulateur mobile). Il est composé des éléments principaux suivants [Sciavicco and Siciliano, 2012] (voir la figure 1.4) :

- Le système mécanique articulé (SMA) est constitué d'un ensemble de corps solides articulés entre eux conférant à l'organe terminal (le préhenseur ou l'outil) les degrés de libertés (ddl) souhaités pour générer un mouvement. Le manipulateur est dit sériel (architecture cinématique sériel) lorsque les articulations et les corps sont

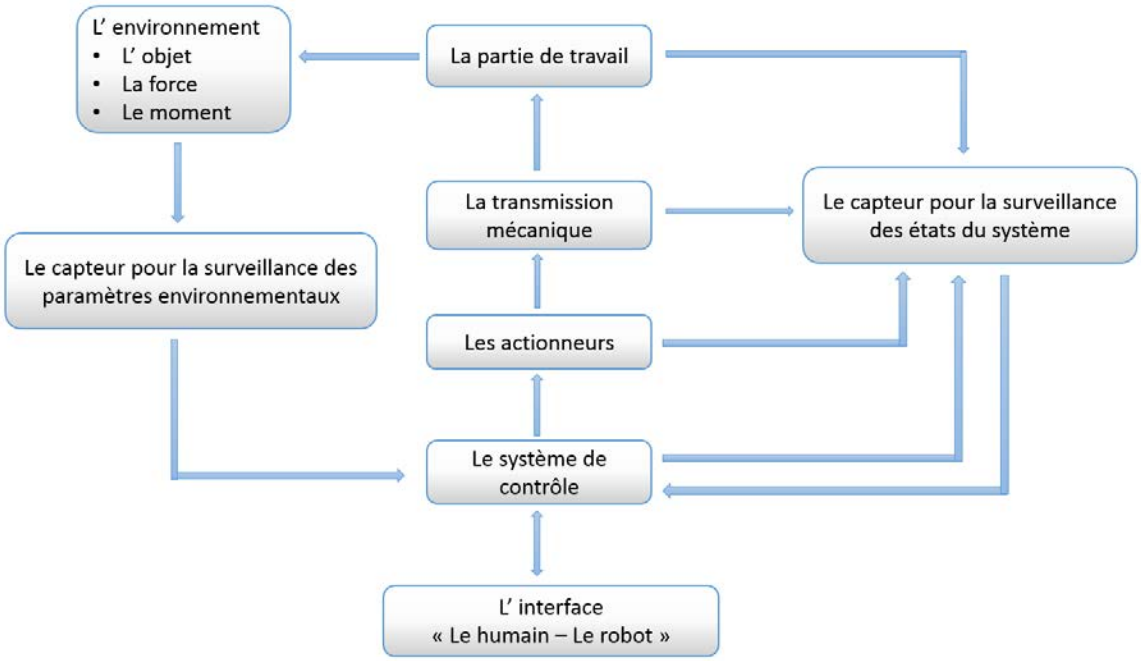


FIGURE 1.4: Composition d'un robot industriel.

placés en série entre la base et l'organe terminal ; il est dit parallèle (architecture cinématique parallèle) lorsque plusieurs SMAs sériels relient la base à l'organe terminal.

— Les actionneurs sont associés aux articulations (toutes les articulations dans le cas d'un cas d'un manipulateur sériel) pour apporter la puissance mécanique nécessaire et les commander en effort (force ou couple) ou en position ; les moteurs utilisés sont le plus souvent électriques, parfois hydrauliques.

— Les capteurs proprioceptifs mesurent l'état des articulations (position, vitesse et parfois l'effort) et, éventuellement, l'effort d'interaction entre le SMA et l'organe terminal par exemple. Des capteurs extéroceptifs peuvent servir à obtenir des informations sur l'environnement, comme, par exemple, un système de vision.

— Le système de contrôle/commande assure la supervision et la commande du manipulateur.

Les tâches effectuées par un robot manipulateur requièrent la génération du mouvement de l'organe terminal. Cette génération de mouvement repose sur deux fonctions principales du système de contrôle/commande : d'une part, la génération de consignes associées à une trajectoire résultant de l'interpolation entre points, appelée planification de trajectoire, et, d'autre part, la commande des actionneurs assurant le suivi (ou la poursuite) de ces consignes, appelée commande du mouvement. Ce mouvement peut être décrit dans un espace propre à l'opération à effectuer par l'organe terminal ou dans l'espace de l'ensemble des articulations. Ceci conduit à distinguer fondamentalement deux espaces, appelés espaces opérationnel et articulaire, dans lesquels la trajectoire pourra être générée et/ou la commande du mouvement assurée.

1.2.2 Espaces articulaire et opérationnel

Pour un manipulateur sériel, chaque articulation fournit un ddl permettant un déplacement relatif en rotation ou en translation dans un intervalle donné, défini par les

butées articulaires ; la position dans cet intervalle est la position articulaire. La configuration d'un manipulateur à un instant donné est définie par l'ensemble des positions articulaires du manipulateur à cet instant ; l'espace articulaire est l'ensemble des configurations possibles du manipulateur, compte-tenu des butées articulaires. L'espace dans lequel la position et/ou l'orientation de l'organe terminal est décrite (par rapport à un repère donné), appelé espace opérationnel du manipulateur, est l'ensemble des points atteignables par l'organe terminal de ce manipulateur lorsqu'il parcourt tout son espace articulaire. L'espace opérationnel, de dimension 6 au maximum, est de même dimension que l'espace articulaire dans le cas d'un robot non redondant ou de dimension inférieure dans le cas d'un robot redondant (i.e. le manipulateur possède plus d'articulations que le nécessite le mouvement de l'organe terminal). La trajectoire de l'organe terminal peut résulter de l'interpolation de points dans l'espace articulaire ou dans l'espace opérationnel. Une interpolation dans l'espace opérationnel permettra de générer une trajectoire avec un chemin prédéfini, comme un chemin rectiligne ou circulaire, d'un point matériel particulier appartenant à l'organe terminal ou comme une orientation constante de cet organe terminal par exemple. En revanche, une interpolation dans l'espace articulaire ne permettra pas de générer une trajectoire avec un chemin prédéfini entre un point de départ et un point d'arrivée, ce chemin dépendant non seulement de la position de ces deux points, mais aussi de l'architecture cinématique du SMA. La commande du mouvement est obtenue à partir d'un écart de position (et de vitesse) entre la consigne et la mesure calculé soit dans l'espace articulaire, soit dans l'espace opérationnel. Dans le cas d'une commande dans l'espace opérationnel, les mesures articulaires doivent être transformées dans l'espace opérationnel à l'aide de modèles du SMA. Un ensemble de modèles régissant la relation entre ces deux espaces et décrivant le comportement dynamique dans l'un de ces espaces est établi pour assurer la planification de trajectoire et la commande du mouvement.

Les manipulateurs sériels à architecture cartésienne (manipulateurs dépourvus d'articulation en rotation, les axes des articulations en translation étant orthogonaux) sont exclus de la description qui est faite par la suite parce qu'ils constituent des cas particuliers ne nécessitant pas les outils de modélisation non linéaires présentés.

1.2.3 Modèles géométriques, cinématiques et dynamiques

Dans cette section, les relations entre les deux espaces en termes de position et de vitesse sont décrites avec les modèles géométriques et cinématiques, respectivement, tandis que la relation entre les efforts appliqués au manipulateur et son mouvement relève de modèles dynamiques. Afin d'obtenir ces modèles pour un robot manipulateur industriel, l'hypothèse de corps solide indéformable est le plus souvent retenue.

Les modèles géométriques établissent les relations entre les positions dans l'espace articulaire (configuration du manipulateur) et les positions dans l'espace opérationnel (position et/ou orientation de l'organe terminal).

Pour décrire la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses opérationnelles, un modèle cinématique est établi. Il peut être obtenu à partir de la dérivée temporelle d'un modèle géométrique ou écrit à partir des relations cinématiques entre corps solides supposés indéformables du SMA. Les vitesses opérationnelles sont les composantes scalaires du vecteur vitesse d'un point matériel donné de l'organe terminal et/ou de son vecteur rotation instantanée (ou pseudo-vitesse de rotation), par rapport à un repère donné.

La conception des manipulateurs, leur commande et leur simulation requièrent éga-

lement un modèle dynamique du SMA dès lors que l'on souhaite prendre en compte les efforts (e.g. les couples moteurs, les forces extérieures) en jeu dans les mouvements générés. En utilisant les formalismes habituels (Équations de Newton-Euler ou de Lagrange), le modèle dynamique d'un manipulateur s'exprime par un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre. Les équations sont non linéaires et en nombre égal à la dimension de l'espace articulaire, exception faite d'un robot redondant dont le modèle dynamique est écrit dans l'espace opérationnel. Le modèle dynamique est par exemple nécessaire pour optimiser une trajectoire entre deux points sous contraintes de limites articulaires en position, vitesse et effort (issues des limites des actionneurs : vitesses nominales et couples maximum des moteurs électriques par exemple). La synthèse de la commande du mouvement pourra également utiliser ce modèle.

Modèle géométrique direct (MGD) :

Le modèle géométrique direct (MGD) est destiné à calculer une position dans l'espace opérationnel, notée χ en fonction de la position dans l'espace articulaire, notée q. Pour un manipulateur sériel, la position dans l'espace opérationnel existe toujours et la solution est unique ; on pourra écrire explicitement le MGD, connaissant les paramètres géométriques du SMA, sous la forme :

$$\chi = g_D(q), \tag{1.1}$$

avec $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{n_q} \end{bmatrix}^T$ et $\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_{n_\chi} \end{bmatrix}^T$, où n_q et n_χ sont les dimensions, respectivement, de l'espace articulaire et de l'espace opérationnel, avec $n_q \geq n_\chi$.

La génération de trajectoire dans l'espace opérationnel permet de générer les consignes de position opérationnelle selon un chemin prédéfini. À partir de ces consignes, il est possible d'établir une commande du mouvement dont la correction se fait dans l'espace opérationnel, cf. figure 1.5, et l'entrée de commande des actionneurs est obtenue grâce au modèle statique (1.5) décrit par la suite. Le MGD permet de calculer la position opérationnelle image des mesures de position articulaire afin de comparer consigne et position effective dans l'espace opérationnel.

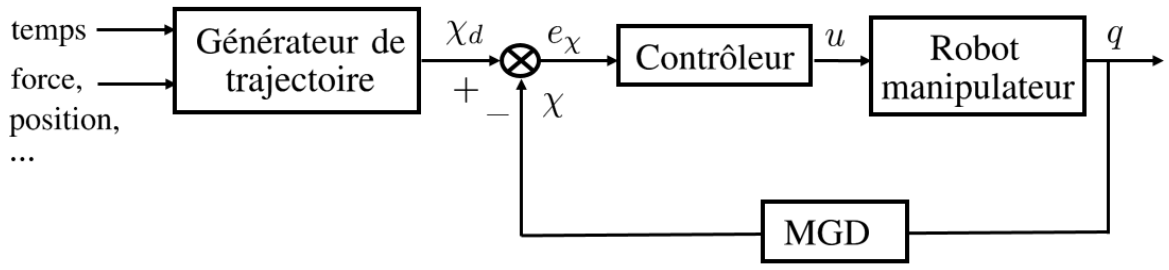


FIGURE 1.5: Génération de trajectoire et commande dans l'espace opérationnel.

Modèle géométrique inverse (MGI) :

Le modèle géométrique inverse (MGI) est destiné à calculer une position articulaire à partir d'une position opérationnelle. La forme explicite du MGI présentée comme suit ne peut s'écrire que pour certains manipulateurs parallèles. Sinon, il prend la forme d'un

algorithme qui s'appuie, pour les manipulateurs industriels courants, sur les différentes solutions analytiques obtenues à partir de l'inversion du MGD.

$$q = g_I(\chi). \tag{1.2}$$

Pour un manipulateur sériel, le MGI permet de calculer, si il existe, le ou les points dans l'espace articulaire à partir de la connaissance d'un point cible dans l'espace opérationnel [Khalil and Dombre, 2004]. Pour un robot redondant ($n_q > n_\chi$), les solutions seront généralement en nombre infini contrairement à un robot non redondant ($n_q = n_\chi$).

Le MGI servira le plus souvent à calculer les consignes de position dans l'espace articulaire à partir des consignes dans l'espace opérationnel, cf. figure 1.6. La commande du mouvement est alors établie dans l'espace articulaire (correction de l'écart de position entre les consignes et les mesures de position articulaire).
NB : Une planification de trajectoire dans l'espace articulaire (e.g. une interpolation entre deux points articulaires) ne nécessite ni le MGD ni le MGI dans le schéma de commande.

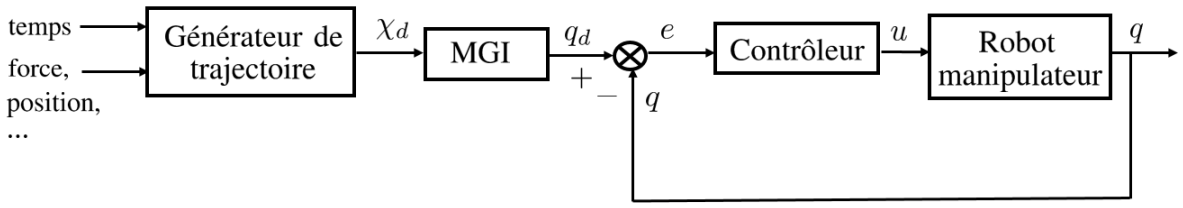


FIGURE 1.6: Génération de trajectoire dans l'espace opérationnel et commande dans l'espace articulaire.

Modèle cinématique direct (MCD) :

Le modèle cinématique direct (MCD) permet de calculer les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. La forme du MCD dans le cas des manipulateurs sériels peut être présentée comme :

$$\dot{\chi} = J(q)\dot{q}, \tag{1.3}$$

avec la jacobienne $J \in \mathbb{R}^{n_\chi \times n_q}$. Le MCD est utilisé comme le MGD pour la commande dans l'espace opérationnel afin de calculer l'écart de vitesse.

Modèle cinématique inverse (MCI) :

Le modèle cinématique inverse (MCI) permet de calculer les vitesses articulaires en fonction des vitesses opérationnelles. La forme du MCI dans le cas d'un robot non redondant $n_q = n_\chi$ peut être présentée (si la configuration q n'est pas singulière) comme :

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad \text{si} \quad \det(J(q)) \neq 0. \tag{1.4}$$

Le MCI est utilisé comme le MGI pour la commande dans l'espace articulaire afin de transformer les consignes de vitesse générées dans l'espace opérationnel.

Modèle statique :

Le modèle statique établit la relation entre les efforts exercés par l'environnement sur l'organe terminal, $F_e \in \mathbb{R}^{n_\chi}$, et les efforts exercés par les actionneurs, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_q}$, en l'absence de mouvement du manipulateur. L'expression suivante de ce modèle se déduit facilement du MCD (1.3) grâce au principe des puissances virtuelles, expression où les frottements secs et l'effet de la pesanteur n'ont pas été pris en compte :

$$\Gamma = -J^T(q)F_e, \tag{1.5}$$

Le modèle statique peut être utilisé pour la commande dans l'espace opérationnel (Fig. 1.5).

Modèle dynamique (MDI et MDD) :

Un modèle dynamique exprime la relation entre le mouvement du manipulateur (caractérisé par les positions, vitesses et accélérations) et les efforts qui lui sont appliqués. Il s'écrit soit dans l'espace articulaire, soit dans l'espace opérationnel (parfois dans les deux pour simplifier son expression pour un manipulateur parallèle). A partir de l'un des principes de la mécanique du solide, on l'écrira naturellement sous la forme dite du modèle dynamique inverse (MDI) qui exprime les efforts articulaires (donc les entrées de commande) en fonction des positions, vitesses et accélérations du manipulateur. Le MDI est utilisé pour la commande et la planification de trajectoire. On peut aussi être amené à utiliser le modèle dynamique direct (MDD) qui exprime les accélérations en fonction des efforts, des positions et des vitesses que ce soit pour la simulation du comportement temporel du robot ou pour établir le modèle en représentation d'état (en vue de sa commande).

Dans cette thèse, nous nous restreindrons au cas le plus courant de la commande du mouvement dans l'espace articulaire (avec une génération de trajectoire dans l'espace opérationnel, mais ceci n'est pas restrictif). Le modèle dynamique utilisé est donc écrit dans l'espace articulaire. Deux types de modèles sont développés par la suite pour les besoins de l'étude :

- le modèle dynamique rigide pour lequel on utilise les hypothèses habituellement retenues de corps solides indéformables et d'articulations indéformables,
- le modèle dynamique à articulations flexibles pour lequel on relâche la seconde hypothèse afin de considérer l'effet de résonances mécaniques sur la commande.

Le premier modèle sera utilisé pour la synthèse de commande tandis que le second, plus réaliste, servira pour la validation par simulation.

1.2.4 Modèle dynamique rigide

La modélisation des manipulateurs supposés indéformables a été largement traitée depuis plus de quatre décennies [Dawson et al., 2003,Khalil and Dombre, 2004,Khalil et al., 2014,Siciliano and Khatib, 2016,Siciliano et al., 2010]. Considérons un robot manipulateur avec n_q degrés de liberté ; son modèle dynamique peut s'écrire dans l'espace articulaire sous la forme générale :

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + \Gamma_f + J^T(q)F_e, \tag{1.6}$$

où

- $M(q) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ est la matrice d'inertie,

— $N(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ est la matrice contenant les termes de Coriolis et centripète ainsi que les coefficients de frottement visqueux aux articulations,
— $G(q) \in \mathbb{R}^{n_q}$ représente le vecteur des termes de pesanteur,
— $\Gamma_f \in \mathbb{R}^n_q$ est le vecteur des efforts de frottement sec appliqués aux articulations.

Notons que cette forme de modèles (1.6) couvre les SMAs à architecture sérielle (éventuellement redondant) à l'exclusion des SMAs sous-actionnés (e.g. le SMA d'un préhenseur à doigts), et couvre des SMAs à architecture parallèle. Néanmoins, le modèle dynamique d'un SMA à architecture parallèle sera la plupart du temps très délicat à écrire explicitement sous cette forme en raison de son modèle cinématique [Allouche, 2016]. Par la suite, un exemple de modèle dynamique est explicité, puis un modèle de frottement sec Γ_f et un modèle de force extérieure F_e pour faire apparaître les perturbations appliquées au manipulateur.

Exemple 1. L'exemple présente un robot manipulateur à 2 ddl en mouvement dans un plan horizontal muni d'un axe x dans la direction du champ de pesanteur et d'un axe y horizontal. Le SMA schématisé à la figure 1.7 est constitué de deux bras en série de longueur L_1 et L_2, les articulations étant localisées en O_1 et O_2 et l'organe terminal en P.

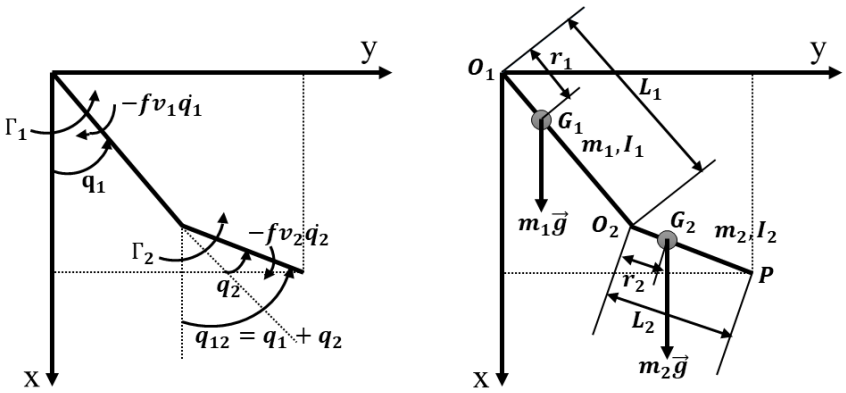


FIGURE 1.7: Un robot de 2ddl.

La position articulaire q_1 du premier bras est définie par rapport à l'axe x et celle du second bras q_2 par rapport à l'axe du premier bras telles que schématisé à la figure 1.7 ; notons également la position angulaire absolue $q_{12} = q_1 + q_2$ du second bras par rapport à l'axe x. Le choix de cette description cinématique aboutissant aux variables angulaires q_1 et q_{12} est fait pour écrire le vecteur des termes de pesanteur $G(q)$ sans utiliser la fonction cos ; ainsi, pour une représentation d'état (ou descripteur), ce vecteur peut être transformé pour être placé dans la matrice d'état. Les couples moteurs appliqués aux premier et second bras sont notés respectivement : Γ_1 et Γ_2, et les coefficients de frottement visqueux articulaires : f_{v1} et f_{v2}. Les paramètres inertiels du SMA sont : les masses m_1 et m_2, les centres de masse G_1 et G_2 situés à une distance r_1 et r_2 de leur articulation et, enfin, les moments d'inertie I_1 et I_2 par rapport à leur centre de gravité, respectivement des premier et second bras. Pour simplifier le paramétrage, les centres de masse G_1 et G_2 sont supposés alignés respectivement avec les points O_1, O_2 et O_2, P. Notons que la dynamique des actionneurs est exprimée en sortie de réducteur de telle sorte que les rapports de réduction n'apparaissent pas dans les équations, afin de simplifier le paramétrage. Par conséquent, le vecteur des efforts moteurs Γ qui constitue l'entrée de commande est exprimé par sa grandeur équivalente en sortie de réducteur. En outre, les

moments d'inertie de la partie tournante des moto-réducteurs ne sont pas inclus dans ceux des bras ; notés respectivement I_{a1} et I_{a2} pour la première et la seconde articulation, ils sont exprimés en sortie de réducteur.

Pour ce robot, les matrices du MDI (1.6) peuvent alors être écrites telles que [Spong and Vidyasagar, 2008a] :

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} I_{a1} + c_1 + 2c_2 \cos q_2 & c_3 + c_2 \cos q_2 \\ c_3 + c_2 \cos q_2 & I_{a2} + c_3 \end{bmatrix}, \\ N(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 2c_2 \dot{q}_2 \sin q_2 + f_{v1} & c_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ -c_2 \dot{q}_1 \sin q_2 & f_{v2} \end{bmatrix}, \\ G(q) &= \begin{bmatrix} -c_4 \sin q_1 - c_5 \sin q_{12} \\ -c_5 \sin q_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 r_1^2 + I_1 + m_2 L_1^2 + m_2 r_2^2 + I_2, \\ c_2 &= m_2 L_1 r_2, \\ c_3 &= m_2 r_2^2 + I_2, \\ c_4 &= m_1 g r_1 + m_2 g L_1, \\ c_5 &= m_2 g r_2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Afin de disposer également d'un modèle de simulation indépendamment de ce modèle analytique, la toolbox Simscape/Multibody (1st generation) de MATLAB/Simulink, est utilisée pour créer le SMA avec les paramètres géométriques et inertiels décrits précédemment, cf. figure 1.8. Ce modèle a permis de valider les modèles analytiques utilisés pour la synthèse de commande, en particulier les modèles sous forme Takagi-Sugeno. De plus, en incluant des articulations flexibles, il permet d'obtenir un modèle dynamique à articulations flexibles utilisé pour les simulations. Les perturbations sont également intégrées au modèle, à savoir les frottements secs et les forces extérieures, telles que présentées par la suite.

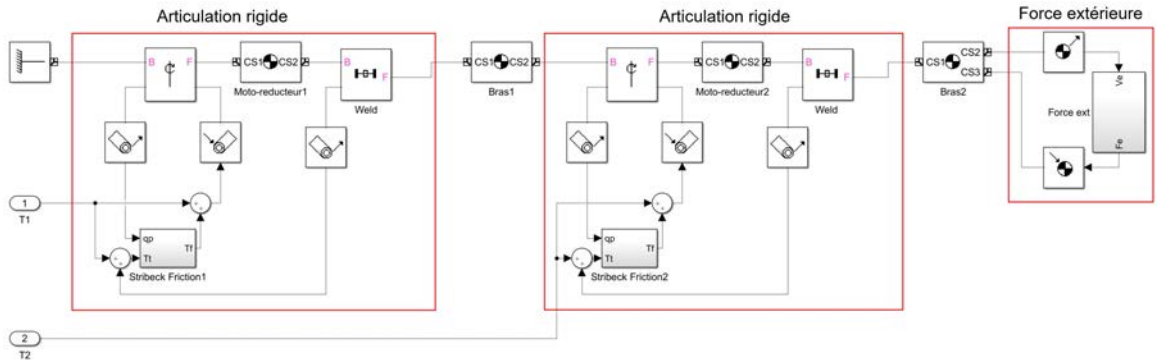


FIGURE 1.8: Modèle Simscape/Multibody (1G) du manipulateur 2ddl rigide.

Modèle de frottement sec

L'effort de frottement sec Γ_{fi} appliqué à l'articulation i, $i \in 1, ..., n_q$, est calculé à partir d'un modèle de Coulomb avec effet de Stribeck [Andersson et al., 2007] comme

suit :

$$\Gamma_{fi} = \begin{cases} \Lambda_{ai} & \text{if } |\dot{q}_i| > 0 \text{ (slip)}, \\ \Lambda_{bi} & \text{if } \dot{q}_i = 0 \text{ (stick)}, \end{cases} \tag{1.9}$$

où

$$\Lambda_{ai} = -\left[\Gamma_{fci} + (\Gamma_{fsi} - \Gamma_{fci}) e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{v_s}\right)^2}\right] \text{sign}(\dot{q}_i), \tag{1.10}$$

$$\Lambda_{bi} = -\min(|\Gamma_i - \Gamma_{ti}|, \Gamma_{fsi}) \text{sign}(\Gamma_i - \Gamma_{ti}) \tag{1.11}$$

et

- Γ_{fsi} est l'effort de frottement statique (seuil d'adhérence),
- Γ_{fci} est l'effort de frottement de Coulomb (effort résistant durant le glissement),
- Γ_{ti} est l'effort transmis dans l'articulation i entre l'actionneur et le bras qu'il entraîne.

Dans ce modèle de frottement sec, le terme Λ_{ai} décrit en phase de glissement (slip) l'effet de Stribeck au voisinage de la vitesse articulaire nulle compte tenu de la différence des constantes Γ_{fsi} et Γ_{fci} dont le raccordement dépend de la constante v_s. En outre, en phase d'adhérence (slip) où la vitesse articulaire $\dot{q}_i$ est nulle, le terme Λ_{bi} décrit exactement l'équilibre statique entre les efforts en présence : l'effort exercé par l'actionneur Γ_i, la réaction du bras via l'articulation $-\Gamma_{ti}$ et l'effort de frottement sec Γ_{fi} dont le seuil est Γ_{fsi}. Ce modèle permet de simuler de manière réaliste le frottement sec dans une articulation.

Modèle de force extérieure

On considère une force extérieure appliquée sur l'organe terminal du manipulateur de l'exemple 1. Afin de simuler l'effet d'un procédé de découpe ou de rainurage avec un outil coupant (e.g. une fraise) dans le plan de déplacement du robot, la force relative à ce procédé est modélisée par un vecteur tangent à la trajectoire de l'organe terminal et opposée au vecteur vitesse $\dot{\chi}$; durant une opération de découpe ou de rainurage, l'intensité de cette force, notée $f_e(t)$, est bornée telle que $f_e(t) \in [f_{e,min}, f_{e,max}]$:

$$F_e(t) = -f_e(t) \frac{\dot{\chi}}{||\dot{\chi}||}, \tag{1.12}$$

avec $\dot{\chi} = [\dot{x}_e \ \dot{y}_e]^T$ la vitesse de l'organe terminal.

1.2.5 Modèle dynamique à articulations flexibles

Les modèles dynamiques utilisés pour la synthèse de commande sont fondés, le plus souvent, sur l'hypothèse de corps solide indéformable sauf, par exemple, dans le cas des robots manipulateurs spatiaux qui sont très souples en raison de leur légèreté. Néanmoins, la déformation élastique des articulations et des bras amène dans le comportement dynamique des robots des résonances mécaniques qui peuvent être excitées par la commande. L'excitation des résonances mécaniques génère des oscillations mal amorties et peut réduire significativement les marges de stabilité. Les manipulateurs industriels sont conçus et dimensionnés afin d'obtenir des bras suffisamment rigide pour que leur déformation ne pénalise pas la justesse de positionnement souhaitée de l'organe terminal ; les articulations,

généralement munis de réducteurs entre le moteur et le bras, constituent le maillon faible de cette chaîne cinématique. Considérant bras et articulations flexibles, il est raisonnable de supposer que les articulations amènent des résonances mécaniques dont les fréquences sont les plus basses [Makarov et al., 2016]. Les articulations flexibles constituent une limite bien connue à l'augmentation des gains de commande pour améliorer les performances en suivi de trajectoire [Spong, 1987]. De ce fait, dans cette étude, on présente un modèle dynamique à articulations flexibles qui sera utilisé pour vérifier que les lois de commande développées n'excitent pas les premières résonances mécaniques.

On sépare donc la dynamique de l'actionneur, représentée par :

$$M_a\ddot{q}_a + N_a\dot{q}_a = \Gamma + \Gamma_f - \Gamma_t, \tag{1.13}$$

de la dynamique des bras, représentée par :

$$M_b(q_b)\ddot{q}_b + N_b(q_b, \dot{q}_b)\dot{q}_b + G_b(q_b) = \Gamma_t + \Gamma_f + J^T(q)F_e, \tag{1.14}$$

où

- $q_a \in \mathbb{R}^n_q$ est le vecteur des positions généralisées des actionneurs,
- $q_b \in \mathbb{R}^n_q$ est le vecteur des positions généralisées des bras,
- $\Gamma_t \in \mathbb{R}^n_q$ est le vecteur des forces généralisées transmises dans les articulations entre les actionneurs et les bras,
- M_a est la matrice diagonale d'inertie des actionneurs,
- N_a est le matrice diagonale des coefficients de frottement visqueux,
- $M_b(q_b)$ est la matrice d'inertie des bras,
- $N_b(q_b, \dot{q}_b)$ est le matrice contenant les termes de Coriolis et centripète,
- $G_b(q_b)$ représente le vecteur des termes de pesanteur.

Les actionneurs et les bras sont couplés par des transmissions visco-élastiques telles que :

$$\Gamma_t = K_t(q_a - q_b) + B_t(\dot{q}_a - \dot{q}_b), \tag{1.15}$$

où

- K_t est la matrice de raideur,
- B_t est la matrice d'amortissement.

Ce modèle dynamique à articulations flexibles repose sur les hypothèses énoncées dans [Spong, 1987]. Lorsque que l'on néglige la déformation dans les articulations, les constantes de raideur contenues dans la matrice K_t sont supposées infiniment grandes et il s'en suit que : $q_a = q_b = q$, ce qui conduit au modèle dynamique rigide (1.6) avec : $M = M_a + M_b$, $N = N_a + N_b$, $G = G_b$.

Exemple 2. Pour l'exemple du manipulateur à 2 ddl, cf. figure 1.7, on donne l'expression des matrices du modèle dynamique à articulations flexibles selon le schéma 1.9 :

$$\begin{aligned}
M_a &= \mathrm{diag}(I_{a1}, I_{a2}),\\
N_a &= \mathrm{diag}(f_{v1}, f_{v2}),\\
M_b &= \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2\cos q_{b2} & c_3 + c_2\cos q_{b2} \\ c_3 + c_2\cos q_{b2} & c_3 \end{bmatrix},\\
N_b &= \begin{bmatrix} 2c_2\dot{q}_{b2}\sin q_{b2} & c_2\dot{q}_{b2}\sin q_{b2} \\ -c_2\dot{q}_{b1}\sin q_{b2} & 0 \end{bmatrix},\\
G_b &= \begin{bmatrix} -c_4\sin q_{b1} - c_5\sin q_{b12} \\ -c_5\sin q_{b12} \end{bmatrix},\\
K_t &= \mathrm{diag}(k_{t1}, k_{t2}),\\
B_t &= \mathrm{diag}(b_{t1}, b_{t2}),
\end{aligned}$$

où k_{ti} et b_{ti} sont respectivement les constantes de raideur et d'amortissement de la $i$ème articulation. Les caractéristiques du robot manipulateur utilisées dans cette étude sont données dans le tableau 1.1.

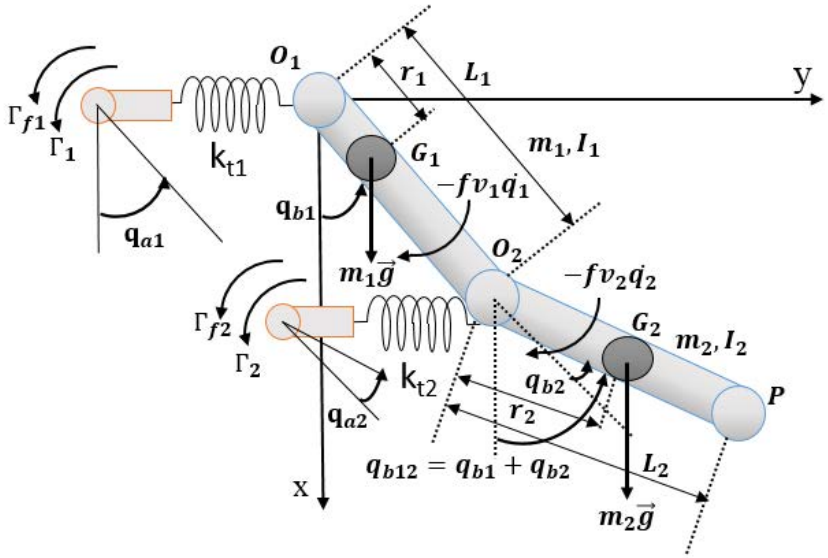


FIGURE 1.9: Description d'un robot manipulateur à 2 degrés de liberté.

TABLE 1.1: Nomenclature du robot

Symbole	Description	Valeur
$L_1,\ L_2$	Longueur des bras (m)	0.5, 0.5
$m_1,\ m_2$	Masses des bras (kg)	15, 9
$I_1,\ I_2$	Moments d'inertie des bras / au centre de masse ($\mathrm{kg\,m^2}$)	0.31, 0.19
$I_{a1},\ I_{a2}$	Moments d'inertie des moto-réducteurs (sur l'arbre de sortie) ($\mathrm{kg\,m^2}$)	2.71, 0.50
$r_1,\ r_2$	Distances entre les articulations et les centres de masse (m)	0.25, 0.25
$f_{v1},\ f_{v2}$	Coefficients de frottements visqueux ($\mathrm{N\,m\,s/rd}$)	0.14, 0.14
g	Constante de gravitation ($\mathrm{m/s^2}$)	9.81
$k_{t1},\ k_{t2}$	Raideurs articulaires $\times 10^4$($\mathrm{N\,m/rd}$)	6.4, 1.2
$b_{t1},\ b_{t2}$	Constantes d'amortissement ($\mathrm{N\,m\,s/rd}$)	20.4, 3.8
$\Gamma_{fs1},\ \Gamma_{fs2}$	Couples de frottement statique ($\mathrm{N\,m}$)	6, 3
$\Gamma_{fc1},\ \Gamma_{fc2}$	Couples de frottement de Coulomb ($\mathrm{N\,m}$)	4, 2
v_s	Coefficient de l'effet de Stribeck (m/s)	0.1
$f_{e,min},\ f_{e,max}$	Bornes de l'intensité de la force extérieure (N)	138, 218

Ce modèle dynamique à articulations flexibles est développé dans MATLAB/Simulink avec la toolbox Simscape/Multibody (1st generation) afin de disposer d'un modèle de simulation contenant les perturbations de type frottement sec et force extérieure appliquée à l'organe terminal ainsi que les résonances mécaniques dues aux articulations flexibles, cf. figure 1.10.

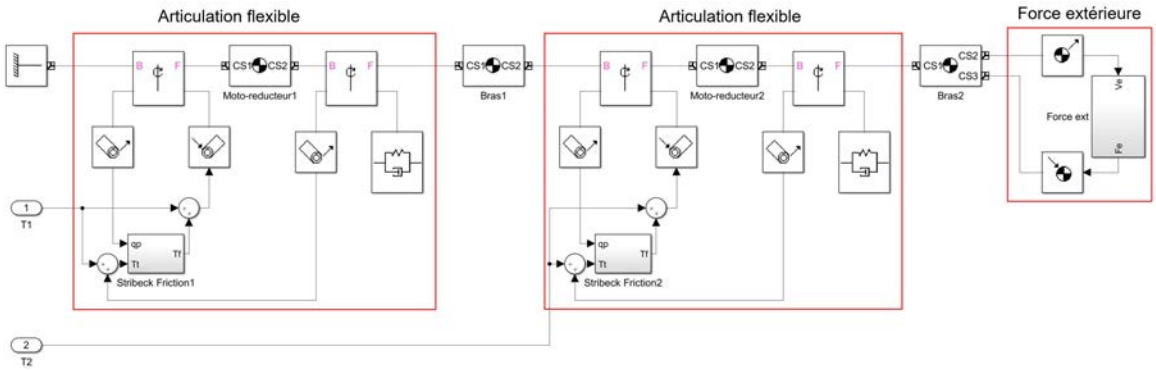


FIGURE 1.10: Modèle Simscape/Multibody (1G) du manipulateur 2ddl à articulations flexibles.

Le but est de pouvoir valider en simulation les lois de commande avec un modèle suffisamment réaliste. Par conséquent, les hypothèses retenues avec ce modèle Simulink détermine le cadre de validité de cette étude, à défaut d'avoir des validations expérimentales.

1.3 Suivi de trajectoire

1.3.1 Introduction

La commande du mouvement d'un manipulateur est un sujet qui peut être formulé à partir de problématiques plus générales issues de l'automatique. Dans le domaine de la commande de systèmes dynamiques, on peut distinguer trois problématiques essentielles pour notre sujet :

— la stabilisation
— le suivi de trajectoire
— le rejet de perturbation.

La condition nécessaire à la mise en œuvre d'un système dynamique comme un robot est de garantir sa stabilité. La stabilisation d'un robot manipulateur autour d'une consigne de position constante au cours du temps est donc le premier objectif à atteindre [Pervozvanski and Freidovich, 1999, Burkov et al., 1996, Burkov et al., 1998]. Mais pour les applications industrielles de robots manipulateurs, la stabilisation n'est pas suffisante. En effet, pour effectuer les tâches décrites précédemment, un robot manipulateur doit suivre des trajectoires avec la précision attendue. Les trajectoires de référence prédéfinies pour générer le mouvement souhaité constituent, in fine, des consignes à suivre pour chaque articulation qui évoluent au cours du temps de manière synchronisée. Ce suivi de trajectoire de référence occupe une place centrale en commande de robot manipulateur. Et il est bien connu que le problème de suivi de trajectoire est plus difficile que celui de la stabilisation. Une des raisons est que la commande doit assurer une erreur inférieure à une valeur tolérée entre la sortie du système et la référence tout en garantissant la stabilité du système en boucle fermée. De plus, le problème de régulation peut être considéré comme un cas particulier du problème de suivi pour lequel la trajectoire de référence est constante dans le temps. En raison du caractère fortement non-linéaire du comportement dynamique des manipulateurs, la synthèse de commande pour le suivi de trajectoire est considérée comme un problème difficile [Spong and Vidyasagar, 2008a,Lu et al., 2017,Hu et al., 2012].

Ce problème reste en robotique un problème de premier ordre [Chen, 2011, Chu et al., 2014, Han et al., 2014, Xiao and Yin, 2018, Zhou et al., 2018, Xiao et al., 2019]. Enfin, le rejet de perturbation consiste à minimiser l'effet de perturbations sur la sortie, comme des phénomènes "mal modélisés" au sein du système en raison de leur caractère incertain ou trop complexe, e.g. le frottement sec sur les articulations, ou comme des actions de l'environnement sur le système, e.g. des forces extérieures exercées sur l'organe terminal [Chen et al., 2000b, Mohammadi et al., 2013, Eom et al., 1998, Sariyildiz et al., 2018, Nikdel et al., 2016]. La commande du mouvement d'un robot manipulateur inclue donc ces trois problématiques. Les travaux présentés dans cette thèse poursuivront l'objectif principal du suivi de trajectoire, tout en traitant conjointement le rejet de perturbation. Après avoir posé formellement le problème du suivi de trajectoire, les lois de commande développées couramment en robotique seront présentées.

1.3.2 Formulation du problème de commande de suivi

Soit un système dynamique non-linéaire continu dont on peut écrire le modèle mathématique sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u), \end{aligned} \tag{1.16}$$

où

— $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état du système,
— $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée avec lequel le système peut être commandé.
— $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie du système qui contient les mesures.

La formulation du problème de suivi de trajectoire présentée par la suite est tirée de [Lefeber, 2000]. Une trajectoire d'état de référence donnée, $x_r(t)$, est à suivre par l'état du système. On suppose que cette trajectoire est réalisable au sens où il existe une entrée de référence $u_r(t)$ telle que

$$\dot{x}_r = f(t, x_r, u_r). \tag{1.17}$$

L'état et l'entrée de référence étant donnés, la sortie de référence résultante est définie par :

$$y_r = h(t, x_r, u_r). \tag{1.18}$$

Le problème de suivi de trajectoire consiste à déterminer une commande de l'entrée u telle que la sortie $y(t)$ converge vers l'entrée de référence $y_r(t)$ quand t tend vers l'infini. Dans le cas des robots manipulateurs, la trajectoire définit directement la position et la vitesse (articulaire par exemple), et par conséquent l'état du système. Pour cette raison, nous pouvons nous focaliser sur le problème du suivi de l'état de référence x_r. Ce problème consiste à déterminer une loi de commande de l'entrée u telle que l'état $x(t)$ converge vers l'état de référence $x_r(t)$. Cette loi de commande peut être établie directement à partir d'un retour d'état ou à partir d'un retour de sortie, ce qui nous amène à distinguer les deux problèmes suivants.

Problème de commande 1. *(Suivi de trajectoire par retour d'état) Considérons le système* (1.16) *et supposons qu'une trajectoire de référence (x_r, u_r) réalisable, i.e. satisfaisant* (1.17)*, soit donnée. Le problème consiste à trouver une loi de commande*

$$u = u(t, x_r, u_r, x) \tag{1.19}$$

telle que, pour le système en boucle fermée résultant de (1.16), (4.3), *on vérifie :*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_r(t)\| = 0 \tag{1.20}$$

Problème de commande 2. *(Suivi de trajectoire par retour de sortie) Considérons le système* (1.16) *et supposons qu'une trajectoire de référence* (x_r, u_r) *réalisable, i.e. satisfaisant* (1.17), *soit donnée. Le problème consiste à trouver une loi de commande*

$$u = u(t, x_r, r, y, z) \tag{1.21}$$
$$\dot{z} = g(t, x_r, r, y, z) \tag{1.22}$$

telle que pour le système en boucle fermée résultant (1.16) (1.21)

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_r(t)\| = 0 \tag{1.23}$$

Par conséquent, le problème de suivi de trajectoire peut être vu comme la détermination d'une commande qui rend l'erreur nulle de suivi de trajectoire asymptotiquement stable.

1.3.3 Lois de commande de suivi de trajectoire

Aujourd'hui encore, la plupart des robots industriels sont commandés avec des lois linéaires décentralisées (articulation par articulation) de type PID. Néanmoins, depuis plusieurs décennies, d'autres lois de commande, basées sur des approches non linéaires, ont été proposées pour améliorer les performances. Nous les passons en revue dans cette partie.

Commandes linéaires

La commande des robots manipulateurs industriels est basée le plus souvent sur un schéma de type *commande linéaire PID* en raison d'une structure décentralisée simple et adaptée à une implémentation articulation par articulation (un correcteur linéaire implémenté par carte d'axe ou variateur numérique). La commande PID est donnée par l'expression en temps continu :

$$\Gamma = K_p e_q + K_v \dot{e}_q + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

avec $e_q = q_d - q$, l'erreur de position et K_p, K_v, K_i les matrices diagonales de gains proportionnels, dérivés et intégraux, respectivement. La figure 1.11 présente le schéma de principe de la commande PID pour les robots manipulateurs. Les conditions de stabilité d'un manipulateur rigide commandé avec une commande de type PID ont fait l'objet de nombreux travaux. D'un point de vue pratique, des règles ont également été proposées pour le choix des différents gains du correcteur. L'ouvrage de Kelly propose une synthèse de ces travaux [Kelly et al., 2006]. On pourra utiliser un réglage par placement de pôles comme proposé dans [Khalil and Dombre, 2004].

La commande PID n'est pas directement dédiée au suivi de trajectoire. Le parcours d'une trajectoire à vitesse élevée conduit à des accélérations importantes ; le comportement dynamique inhérent du robot implique des efforts importants qui causent des écarts de suivi à corriger par la boucle de rétroaction. Par ailleurs, les trajectoires utilisées en

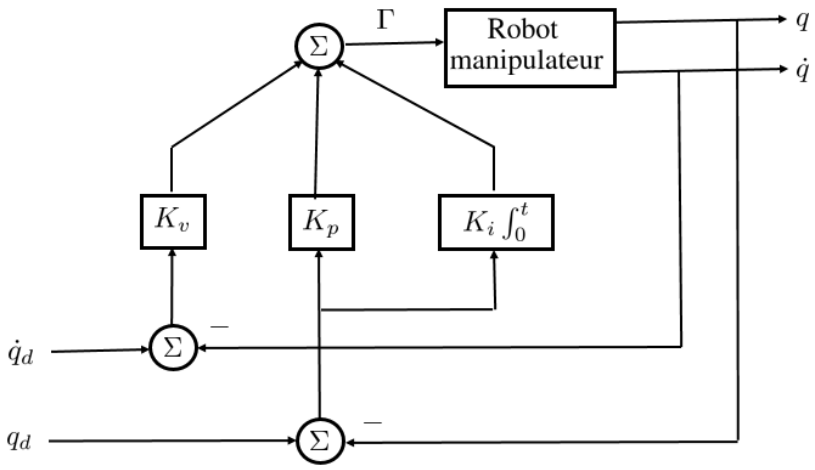


FIGURE 1.11: Schéma de principe de la commande PID

robotique utilisent des lois d'évolution des vitesses continues et dérivables à un ordre supérieur à un ; ces dérivées peuvent donc être facilement exploitées pour améliorer les performances de suivi de trajectoire grâce à des termes d'anticipation (feedforward) en réduisant l'écart de suivi de trajectoire à corriger par la rétroaction (feedback). Des termes d'anticipation en vitesse et en accélération sont facilement ajoutés à la commande pour compenser partiellement les forces de frottement visqueux (forces proportionnelles à la vitesse) et les pseudo-forces d'inertie (forces nécessaires pour générer l'accélération d'un bras compte-tenu de son inertie). Le terme d'anticipation u_{ff} peut donc s'écrire sous forme linéaire à partir de deux matrices diagonales à termes constants positifs tel que :

$$u_{ff} = M_{ff}\ddot{q}_d + C_{ff}\dot{q}_d \tag{1.25}$$

Cette *commande PID avec anticipation linéaire* [Paccot et al., 2009, Zhiyong and Tian, 2004, Denkena and Holz, 2006], cf. figure 1.12, s'écrit donc sous la forme :

$$\Gamma = M_{ff}\ddot{q}_d + C_{ff}\dot{q}_d + K_p e_q + K_v \dot{e}_q + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.26}$$

Cette loi de commande que l'on peut facilement implémenter sur les baies de commande industrielles est bien adaptée pour des manipulateurs rapides (parcours de trajectoire à vitesse élevée) dont le comportement est quasi linéaire et dont le couplage dynamique entre les articulations est faible. C'est le cas par exemple pour des robots de type SCARA avec des rapports de réduction élevés entre le moteur et le bras [Khalil and Dombre, 2004, Spong and Vidyasagar, 2008a].

Lorsque l'effet du champ de pesanteur sur le manipulateur est variable en raison d'articulation possédant un axe de rotation non vertical, les perturbations induites dépendent de la position articulaire. La commande d'une articulation par un correcteur PID permet de rejeter les perturbations supposées constantes (faiblement variables) appliquées à cette articulation. Les perturbations principales que le correcteur PID rejettent sont les frottements et les forces de pesanteur. Des alternatives aux commandes linéaires de type PID consistent à utiliser une commande linéaire PD à laquelle on rajoute un terme de compensation des perturbations. Citons ici la *commande PD avec compensation de pesanteur* [Kelly et al., 2006], bien que ce schéma ne soit plus linéaire, pour faire la transition

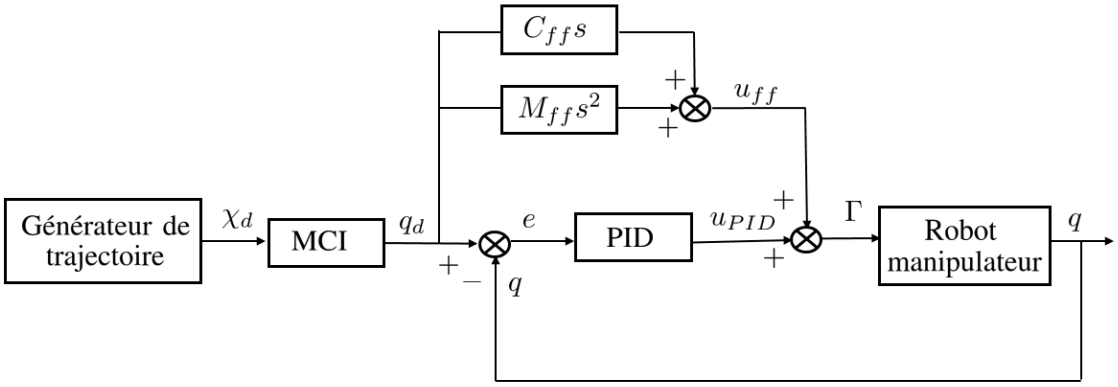


FIGURE 1.12: Commande PID avec anticipation linéaire.

avec les commandes non linéaires. Le terme de compensation est issu de la partie statique du modèle dynamique (1.6) et peut être calculé à partir des mesures de positions :

$$\Gamma = K_p e_q + K_v \dot{e_q} + G(q), \tag{1.27}$$

ou à partir des positions articulaires de référence :

$$\Gamma = K_p e_q + K_v \dot{e_q} + G(q_d) \tag{1.28}$$

Ces schémas de commande préfigurent les commandes non linéaires basées sur le modèle dynamique du manipulateur.

Commandes non linéaires

Dès lors que les vitesses de parcours de trajectoire sont élevées et que le comportement dynamique du manipulateur ne peut plus être considéré comme quasi-linéaire et découplé entre ses articulations, des lois de commande non linéaires permettent d'améliorer les performances en suivi de trajectoire. Beaucoup d'approches ont été développées depuis quelques décennies. Les approches principales, que l'on retrouve aussi dans les ouvrages de synthèse [Dawson et al., 2003,Khalil and Dombre, 2004,Spong and Vidyasagar, 2008a,Siciliano et al., 2010,Sciavicco and Siciliano, 2012,Siciliano and Khatib, 2016], sont présentées par la suite. La plupart de ces approches sont basées sur le modèle dynamique du manipulateur.

La commande directement basée sur le modèle dynamique inverse (1.6) est la *commande CTC (Computed Torque Control)* qui permet de linéariser et découpler le comportement dynamique du robot par rétroaction. Sous certaines conditions, elle est identique à une commande linéarisante (feedback linearization) [Siciliano and Khatib, 2016]. Cette loi de commande s'écrit à partir du modèle dynamique inverse :

$$\Gamma = M(q)v + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \tag{1.29}$$

où l'accélération articulaire est remplacée par une nouvelle entrée de commande, v, telle que le système résultant est un ensemble de n_q systèmes linéaires découplés de type double intégrateur : $v = \ddot{q}$. On peut alors appliquer à la nouvelle entrée v un correcteur linéaire de type PD ou PID avec une anticipation en accélération, par exemple :

$$v = \ddot{q}_d + K_p e_q + K_v \dot{e_q} + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.30}$$

Il en résulte l'équation suivante régissant la dynamique de l'erreur pour un modèle dynamique exact et en l'absence de perturbation :

$$\ddot{e_q} + K_v \dot{e_q} + K_p e_q + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.31}$$

Les erreurs paramétriques qui apparaissent irrémédiablement dans le modèle dynamique inverse utilisé pour la commande conduisent à un terme de perturbation de l'équation précédente tel que cela est montré dans [Khalil and Dombre, 2004] par exemple. La commande CTC est une stratégie efficace en suivi de trajectoire qui peut assurer une stabilité asymptotique globale [Shah et al., 2015, Llama et al., 2000, Codourey, 1998]. Néanmoins, cette méthode comportent plusieurs handicaps :

- Elle nécessite une connaissance exacte du modèle dynamique pour obtenir de très bonnes performances, ce qui n'est pas possible en pratique. Il s'en suit la nécessité de générer un modèle dynamique complexe à obtenir avec précision qui requiert des méthodes d'identification très performantes.
- Elle n'est pas robuste face aux incertitudes paramétriques et aux incertitudes non structurées (dynamique non modélisée), ce qui peut dégrader les performances.
- Elle nécessite une charge de calcul importante pour le système de commande à la fréquence d'échantillonnage des boucles de vitesse et de position, ce qui freine considérablement son exploitation industrielle.

De nombreuses lois de commande dérivent de la structure CTC.

Un schéma assez répandu en pratique s'appuie sur l'utilisation du modèle dynamique inverse en anticipation plutôt qu'en rétroaction, ce qui permet notamment d'utiliser une fréquence d'échantillonnage pour le calcul du modèle en anticipation plus faible que la fréquence d'échantillonnage nécessaire en rétroaction. Le schéma suivant est obtenu à partir d'une CTC où les termes articulaires mesurés sont remplacés par les références de position et vitesse articulaires, appelée aussi "commande dynamique prédictive" dans [Khalil and Dombre, 2004] :

$$\Gamma = M(q_d)(\ddot{q}_d + K_p e_q + K_v \dot{e_q} + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s) + N(q_d, \dot{q_d})\dot{q_d} + G(q_d), \tag{1.32}$$

Pour simplifier l'implémentation, on peut aussi séparer les termes d'anticipation et de rétroaction, cf. figure 1.13, pour obtenir une *commande PID avec anticipation non-linéaire :*

$$\Gamma = M(q_d)\ddot{q}_d + N(q_d, \dot{q_d})\dot{q_d} + G(q_d) + K_p e_q + K_v \dot{e_q} + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.33}$$

Afin d'obtenir des lois de commande robustes aux incertitudes de modélisation, diverses approches ont été proposées. Par exemple, en exploitant la propriété de passivité du modèle dynamique, des lois de commande dites par passivité ont été développées (cf. [Slotine and Li, 1991, Ortega et al., 1998]). Comme ces commandes reposent sur le choix d'une fonction de Lyapunov basée sur des considérations énergétiques, elles possèdent généralement de bonnes propriétés de robustesse. Cependant, pour obtenir un suivi de trajectoire suffisamment précis, une action anticipatrice doit être ajoutée nécessitant ici encore une bonne identification du système.

Pour faire face aux incertitudes et aux variations paramétriques du modèle, la théorie de la commande adaptative a été exploitée en robotique. En reprenant la structure CTC, on obtient une première version de *commande adaptative* en introduisant un mécanisme

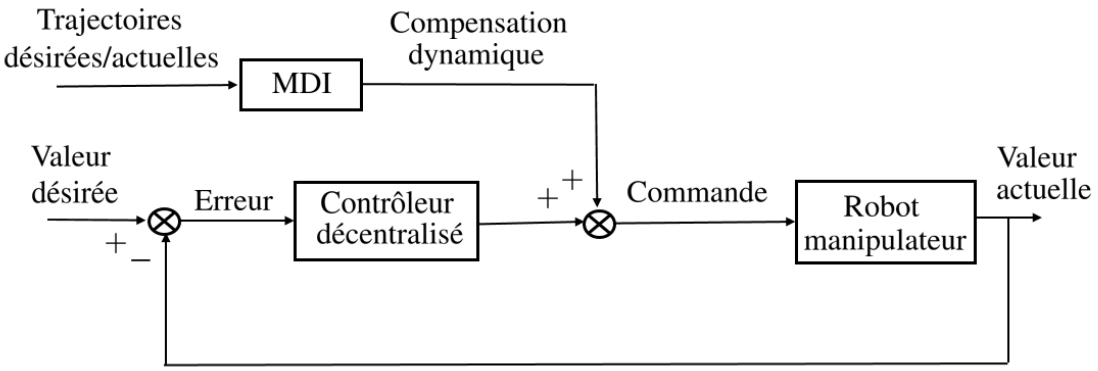


FIGURE 1.13: Commande PID avec anticipation non linéaire.

d'ajustement des paramètres du modèle dynamique en temps réel [Craig et al., 1987, Slotine and Weiping, 1988]. Ce type de commande exploite le fait que le modèle dynamique peut s'écrire linéairement en fonction de ses paramètres. L'utilisation de la propriété de passivité du manipulateur conduit à une version de commande adaptative passive [Slotine and Li, 1987]. De nombreuses autres versions ont été proposées [Middletone and Goodwin, 1986, Whitcomb et al., 1996, Lee and Khalil, 1997, Tomei, 2000].

Parmi toutes les approches de commande robuste, on peut citer la *commande par mode glissant (Sliding mode control)* qui est une approche populaire pour les systèmes non linéaires avec incertitudes et perturbations extérieures [Slotine, 1984]. Le principe de cette approche repose sur une logique de commutation afin d'amener et maintenir l'état du système sur une surface stable selon lequel il va glisser vers l'état d'équilibre. Différents schémas ont été proposés pour les manipulateurs, voir par exemple [Slotine and Sastry, 1983, Yeung and Chen, 1988]. Le phénomène de broutement dû au mécanisme de commutation est préjudiciable pour le manipulateur (sollicitation de ses actionneurs, excitation des modes vibratoires) ; différentes techniques permettent de dépasser cette difficulté, comme par exemple celle présentée dans [Zhihong et al., 1994].

Enfin, les approches de *commande par logique floue* répondent directement aux problématiques liées à l'obtention d'un modèle fidèle du manipulateur. Les approches dites classiques s'appuient sur la théorie des ensembles flous introduite par Zadeh pour prendre en compte des connaissances approximatives. Cette approche est particulièrement bien adaptée pour la commande des systèmes complexes difficiles à modéliser. Elle a été initialement développée par Mandani sous la forme d'un système expert implémenté pour la commande du système en l'absence de modèle mathématique. Cette approche a été utilisée pour la commande de manipulateurs, par exemple avec un correcteur PID flou [Li et al., 2001]. Elle a aussi été combinée avec des commandes non linéaires comme la commande par mode glissant [Choi and Kim, 1997]. Néanmoins, en raison de sa nature heuristique et de l'absence de preuve de stabilité, cette approche a connue des réticences dans la communauté des automaticiens. Dans ce contexte, une approche différente, basée sur un modèle mathématique, a été introduire pour pouvoir utiliser les outils de l'automatique, tels que la méthode de Lyapunov : l'approche basée sur la représentation floue de type *Takagi–Sugeno (T-S)* d'un modèle dynamique [Tanaka and Sugeno, 1992]. La construction de modèle TS, très proche des modèles LPV (Linear Parameter-Varying Models), permet d'adopter une approche polytopique de la commande des systèmes non linéaires en exploitant les propriétés de convexité du modèle TS. Cette approche est donc particulièrement bien adaptée à l'analyse et la synthèse de commande de systèmes non linéaires incertains

en formulant le problème via des inégalités linéaires matricielles (LMI) résolues avec des outils d'optimisation efficaces. Si le problème de stabilisation a été très largement étudié avec l'essor de cette approche depuis deux décennies, le problème du suivi de trajectoire de robot manipulateur n'a été que très peu abordé. C'est donc cette approche qui est choisie dans cette thèse.

1.4 Conclusion

Ce premier chapitre a présenté le contexte de la commande des robots manipulateurs, avec les modèles utilisés, ainsi que la problématique de suivi de trajectoire abordée dans cette thèse. Une revue de littérature succincte a permis de rappeler les différentes approches développées pour le suivi de trajectoire. Si les travaux sur le sujet sont très nombreux comme en témoigne les bibliographies des ouvrages de synthèse [Dawson et al., 2003, Khalil and Dombre, 2004, Kelly et al., 2006, Spong and Vidyasagar, 2008a, Siciliano et al., 2010, Siciliano and Khatib, 2016], il s'avère que peu de travaux sur le sujet ont exploité l'approche flou Takagi–Sugeno ; cette approche a pourtant rencontré un vif succès pour la commande de systèmes non linéaires sur le plan théorique et avec de nombreux domaines d'applications. Le cadre général de cette approche, choisie dans cette thèse, est rappelé dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

L'approche Takagi-Sugeno pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de l'analyse et de la commande des systèmes non linéaires. Il existe principalement deux approches pour la commande des processus.

La première repose sur l'utilisation d'un modèle comportemental ou de connaissance du processus donné sous formes d'équations différentielles ou d'équations de récurrence. La synthèse de lois de commande peut alors se révéler délicate lorsque le caractère non linéaire des dynamiques en jeu a un rôle prépondérant pour le respect des performances attendues. Il s'agit alors d'exploiter le maximum d'informations disponibles sur le système (structure, énergie, ...) ou se ramener à des systèmes plus simples à commander via des transformations adaptées (formes normales, platitudes, ...). Reste encore à s'assurer de la robustesse des performances atteintes en présence d'incertitudes sur le modèle, phénomène inéluctable et sans nul doute en grande partie responsable de l'écart théorie-pratique souvent discuté dans la littérature [Bernstein, 1999].

Une deuxième approche consiste à profiter de l'expertise d'un opérateur à commander le processus et à traduire celle-ci sous forme exploitable. Ce principe est le fondement de la commande floue [Mamdani and Assilian, 1975], une des grandes applications de la logique floue et de la théorie des ensembles flous proposées en 1965 par L. Zadeh comme une manière de traiter l'incertitude [Zadeh, 1965]. La plupart des premières applications développées dans les années 80-90 avaient une complexité limitée (contrôleurs de type Mamdani). Les principales difficultés étant, premièrement, l'analyse des performances du système commandé – avec en particulier l'étude de sa stabilité – et, deuxièmement, la nécessité de recourir à de nombreuses variables linguistiques pour les systèmes multivariables. Ceci a conduit T. Takagi et M. Sugeno a proposé une nouvelle classe de modèles flous sous forme d'une famille de règles du type Si-Alors [Takagi and Sugeno, 1985]. La principale caractéristique est le fait que la partie conséquence des règles est décrite par des variables numériques et non plus par des variables linguistiques, autorisant une écriture du modèle sous forme quasi-linéaire à paramètres variants de type polytopique et, donc,

l'utilisation pour l'analyse et la commande de concepts et méthodes propres aux systèmes non linéaires.

Ce chapitre vise à présenter brièvement les principaux résultats concernant l'analyse de la stabilité et la commande des systèmes représentés par des modèles de Takagi-Sugeno (T-S).

Il commence par une description plus en détail de cette classe de modèles et de la procédure de construction d'un tel modèle à partir d'un autre obtenu, par exemple, à partir d'une modélisation physique.

Quelques rappels sur la seconde méthode de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité d'un système sont ensuite donnés. C'est en effet cette méthode qui est le plus souvent appliquée pour obtenir les conditions de stabilité d'un modèle T-S. En particulier, quelques résultats standard sur la stabilité quadratique sont présentés. Ces conditions étant formulées en termes de contraintes de type inégalité matricielle linéaire (LMI) [Boyd et al., 1994], une brève introduction à ce formalisme sera effectuée. Il est ensuite montré comment ces résultats peuvent être appliqués au réglage des paramètres d'une loi de commande spécifique à l'approche par modèle T-S : la commande par compensation distribuée parallèle (PDC).

Enfin, l'objet de la dernière partie de ce chapitre est de montrer comment enrichir cette démarche de calcul d'une loi de commande à partir d'un modèle T-S en prenant en considération différents types d'indicateur de performance.

2.2 Représentation de systèmes non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno

Une classe de modèles couramment utilisée pour décrire le comportement dynamique d'un système physique est la représentation d'état définie de manière générale par [Khalil, 2002] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est le temps, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur des entrées de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ le vecteur des sorties (mesures ou variables à commander selon le contexte).

Sous certaines hypothèses sur les fonctions f et g, le système précédent peut se récrire sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), t)x(t) + B(x(t), t)u(t) \\ y(t) = C(x(t), t)x(t) + D(x(t), t)u(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

où $A(.) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(.) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C(.) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D(.) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ sont des matrices appelées respectivement matrices de dynamique, de commande, d'observation et d'action directe.

Il est parfois nécessaire ou judicieux d'utiliser une forme plus générale de modèles pouvant prendre en compte, outre les relations différentielles précédentes, des contraintes algébriques liant les différentes grandeurs du système [Luenberger, 1977]. Ces modèles sont appelés systèmes descripteurs et sont de la forme :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ \qquad\quad y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \tag{2.3}$$

où $E(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Lorsque la matrice $E(x(t))$ est non inversible, le système est alors dit singulier [Dai, 1989]. Sinon, le système est dit régulier. Dans ce cas, il est alors possible de se ramener sous une forme standard donnée par une représentation d'état de la forme (2.1) ou (2.2). Il est cependant souvent avantageux de conserver la forme descripteur pour l'analyse ou la synthèse d'une loi de commande [Taniguchi et al., 2000, Guelton et al., 2008].

Ces systèmes seront étudiés par la suite et constituent l'objet principal des contributions présentées dans ce manuscrit.

2.2.1 Modèle Takagi-Sugeno standard

Un modèle flou de type Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi and Sugeno, 1985] est défini par la donnée d'un nombre r de règles de la forme

$$R_i : \quad \textbf{Si } z_1(t) \text{ est } \mathcal{M}_{i1} \text{ et } \ldots \text{ et } z_p(t) \text{ est } \mathcal{M}_{ip} \textbf{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

où les $\mathcal{M}_{ij}$ sont des ensembles flous de fonctions d'appartenance $\mu_{ij}(.)$, les grandeurs $z_l(t)$ sont les variables de prémisse dépendant de l'état $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ du système ou éventuellement d'autres entrées exogènes comme le vecteur d'entrée de commande $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$. Le vecteur $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente les sorties. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ et $D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ sont supposées constantes.

Pour chaque règle R_i, une fonction $\omega_i(z)$ caractérisant le degré de vérité de son antécédent est définie comme le produit des fonctions d'appartenance $\mu_{ij}(.)$ des variables de prémisse :

$$\omega_i(z) = \prod_{j=1}^{p} \mu_{ij}(z_j) \tag{2.5}$$

Les fonctions d'appartenance normalisées sont définies comme :

$$h_i(z) = \frac{\omega_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z)} \tag{2.6}$$

de telle sorte qu'elles possèdent les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} &0 \leq h_i(z) \leq 1 \\ &\sum_{i=1}^{r} h_i(z) = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Le modèle T-S global est alors obtenu en utilisant la somme pondérée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\big(A_i x(t) + B_i u(t)\big) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\big(C_i x(t) + D_i u(t)\big) \end{cases} \tag{2.8}$$

Les modèles T-S sont donc des cas particuliers de systèmes quasi-linéaires à paramètres variants (quasi-LPV) [Shamma and Cloutier, 1993] de forme polytopique.

Remarque 1. Dans le cas général, les fonctions d'appartenance peuvent dépendre du vecteur d'état $x(t)$ et/ou de la loi de commande $u(t)$. Néanmoins, la présence du signal de commande dans le vecteur des prémisses entraîne des difficultés théoriques et pratiques dans la détermination de l'entrée dans le cas d'une loi de commande par rétro-action dépendant de l'état et des prémisses : une telle loi $u = \kappa(x, \xi(x, u))$ conduit à l'apparition d'une boucle algébrique qui peut compliquer la mise en œuvre du correcteur.

2.2.2 Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno

Dans la littérature, on trouve principalement trois approches pour obtenir un modèle non linéaire d'un système sous forme T-S. Ces différentes approches sont :

— par identification à partir de données expérimentales d'entrée-sortie [Takagi and Sugeno, 1985, Babuška, 1998, Gasso et al., 2000], c'est historiquement la première méthode proposée et elle ne nécessite pas de modélisation préalable ;

— par linéarisation d'un modèle non linéaire préétabli autour d'un ensemble de points de fonctionnement [Ma et al., 1998, Johansen et al., 2000, Tanaka and Wang, 2004], les degrés de liberté pour la modélisation repose alors sur le choix de ces points ainsi que des fonctions d'appartenance ;

— par décomposition en secteurs non linéaires d'un modèle non linéaire préétabli [Ohtake et al., 2003, Tanaka et al., 1998, Kawamoto et al., 1992, Morère, 2001].

Dans la suite de ce manuscrit, les modèles T-S étudiés sont tous obtenus à partir d'une décomposition en secteurs non linéaires. Le principe de cette méthode est donc explicité ci-dessous.

Considérons un modèle de la forme (2.2) pour lequel les éléments des matrices $A(.)$, $B(.)$, $C(.)$ et $D(.)$ s'expriment tous comme des combinaisons affines à coefficients constants de variables z_1, z_2, ..., z_p :

$$\mathcal{A}(x,t) = \mathcal{A}^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} z_i(t)\mathcal{A}^{(i)}, \tag{2.9}$$

où $\mathcal{A}(x,t) = \begin{bmatrix} A(x,t) & B(x,t) \\ C(x,t) & D(x,t) \end{bmatrix}$ et les $\mathcal{A}^{(i)}$ sont des matrices constantes vérifiant le même partitionnement que $\mathcal{A}(x,t)$:

$$\mathcal{A}^{(i)} := \begin{bmatrix} A^{(i)} & B^{(i)} \\ C^{(i)} & D^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Supposons que, sur un certain domaine $\mathcal{D}$ de l'état (et, éventuellement, des autres signaux exogènes), les variables z_i soient bornées : $\underline{z}_i \leq z_i(t) \leq \overline{z}_i$. Alors, en définissant les fonctions ω_i^0 et ω_i^1 par

$$\omega_i^0(z_i) = (\overline{z}_i - z_i)/(\overline{z}_i - \underline{z}_i) \quad \text{et} \quad \omega_i^1(z_i) = 1 - \omega_i^0(z_i),$$

il vient

$$z_i(t) = \omega_i^0(z_i(t))\underline{z}_i + \omega_i^1(z_i(t))\overline{z}_i.$$

Ces fonctions vérifient les relations

$$\omega_i^0(z_i(t)) \geq 0, \quad \omega_i^1(z_i(t)) \geq 0 \quad \text{et } \omega_i^0(z_i(t)) + \omega_i^1(z_i(t)) = 1.$$

En multipliant l'équation (2.9) par $1 = \prod_{j\neq i}(\omega_j^0(z_j(t)) + \omega_j^1(z_j(t)))$, la relation

$$\mathcal{A}(x,t) = \mathcal{A}^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} \Big[\prod_{j\neq i} (\omega_j^0(z_j(t)) + \omega_j^1(z_j(t))) \Big] \big(\omega_i^0(z_i(t))\underline{z}_i + \omega_i^1(z_i(t))\overline{z}_i\big)\mathcal{A}^{(i)} \tag{2.10}$$

est obtenue. Pour $1 \leq k \leq 2^p$, notons

$$\begin{aligned} k &= 2^0 k_1 + 2^1 k_2 + \cdots + 2^{p-1} k_p + 1, \text{ avec } k_1, \ldots, k_p \in \{0,\ 1\}, \\ h_k(z) &= \prod_{j=1}^{p} \omega_j^{k_j}(z_j), \text{ et} \\ \mathcal{A}_k &= \mathcal{A}^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} \left[(1-k_i)\underline{z}_i + k_i\overline{z}_i\right] \mathcal{A}^{(i)}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions h_k vérifient sur $\mathcal{D}$ les propriétés (2.7) et que l'égalité (2.10) peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{A}(x,t) = \sum_{k=1}^{2^p} h_k(z(t))\mathcal{A}_k. \tag{2.11}$$

Le système non linéaire (2.2) se réécrit donc, sur le domaine $\mathcal{D}$, sous la forme de Takagi-Sugeno (2.8) avec le nombre de règles $r = 2^p$; les matrices A_k, B_k, C_k et D_k étant

définies par

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} := \mathcal{A}_k.$$

Exemple 3. Pour illustrer cette démarche, considérons le système du second ordre suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & (x_1^2+1)x_2 \\ \cos(x_2) & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ \cos(x_2) \end{bmatrix} u \tag{2.12}$$

Définissons $z_1 = \cos(x_2)$ et $z_2 = (x_1^2+1)x_2$ et choisissons $\mathcal{D} = [-1,\ 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sur ce sous-ensemble de l'espace d'état, les variables z_1 et z_2 vérifient :

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 := -1 \leq z_1 \leq 1 := \overline{z}_1 \\ \underline{z}_2 := -\pi \leq z_2 \leq \pi := \overline{z}_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Posons

$$\begin{aligned} \omega_1^0(z_1) &= \frac{1-z_1}{2} & \omega_1^1(z_1) &= \frac{1+z_1}{2} \\ \omega_2^0(z_2) &= \frac{\pi - z_2}{2\pi} & \omega_2^1(z_2) &= \frac{\pi + z_2}{2\pi} \end{aligned} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \omega_1^0(z_1)\omega_2^0(z_2) & h_3(z) &= \omega_1^0(z_1)\omega_2^1(z_2) \\ h_2(z) &= \omega_1^1(z_1)\omega_2^0(z_2) & h_4(z) &= \omega_1^1(z_1)\omega_2^1(z_2) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Une représentation T-S standard du système (2.12) sur le sous-ensemble $[-1,\ 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est alors donnée par :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{4} h_i(z)(A_i x + B_i u) \tag{2.16}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 3 & -\pi \\ -1 & 8 \end{bmatrix} & A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & \pi \\ -1 & 8 \end{bmatrix} & B_1 = B_3 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 3 & -\pi \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} 3 & \pi \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & B_2 = B_4 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Remarque 2. Remarquons que la représentation T-S n'est pas unique, elle dépend de la décomposition du système sous la forme quasi-linéaire (2.2) et du choix des variables de prémisse. Par exemple, le système (2.12) aurait pu être écrit sous la forme

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & x_1 x_2^2 + x_2 \\ \cos(x_2) & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ \cos(x_2) \end{bmatrix} u$$

conduisant alors à définir naturellement les 3 prémisses $z_1 = \cos(x_2)$, $z_2 = x_2$ et $z_3 = x_1 x_2^2$ et, donc, à un modèle T-S plus complexe que le précédent car défini à partir de 8 règles au lieu de 4.

2.2.3 Modèle T-S descripteur

Les premiers modèles flous de type descripteur proposés en 1999 par [Yoneyama and Ichikawa, 1999] et [Taniguchi et al., 1999] sont décrits par des règles de la forme :

$$R_i : \quad \textbf{Si } z_1(t) \text{ est } \mathcal{M}_{i1} \text{ et } \ldots \text{ et } z_p(t) \text{ est } \mathcal{M}_{ip} \quad \textbf{Alors } \begin{cases} E_i\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \tag{2.18}$$

Yonemaya et Ichikawa ont considéré le cas où toutes les matrices E_i sont identiques : $E_i = E$. Taniguchi et ses collaborateurs se ramènent à ce cas en choisissant l'état augmenté $x^*(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ conduisant à un modèle TS de type singulier avec $E = diag(I_{n_x \times n_x}, 0_{n_x \times n_x})$.

En 2000, dans [Taniguchi et al., 2000], une nouvelle forme de systèmes T-S descripteurs est proposée :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t))E_k\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t))[A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t)] \\ \displaystyle y(t) = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t))[C_i(x(t))x(t) + D_i(x(t))u(t)] \end{cases} \tag{2.19}$$

où les fonctions d'appartenance $v_k(.)$ et $h_i(.)$ vérifient les propriétés :

$$\begin{aligned} h_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t)) = 1, \\ v_k(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) = 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Notons qu'en utilisant la décomposition par secteurs non linéaires présentée ci-dessus, il est possible de construire, sur un domaine donné de l'espace d'état, un tel modèle T-S à partir d'un modèle initial écrit sous la forme

$$\begin{cases} E(x(t),t)\dot{x}(t) = A(x(t),t)x(t) + B(x(t),t)u(t) \\ y(t) = C(x(t),t)x(t) + D(x(t),t)u(t) \end{cases} \tag{2.21}$$

2.3 Stabilité et stabilisation des modèles T-S

2.3.1 Rappels sur les inégalités matricielles linéaires

Le livre [Boyd et al., 1994] a popularisé l'utilisation des techniques basées sur l'optimisation convexe avec des contraintes de type inégalité matricielle linéaire (LMI) pour l'analyse et la commande des systèmes (principalement linéaires). Rappelons qu'une contrainte LMI est une condition exprimant qu'une matrice symétrique dont les entrées sont des combinaisons affines des variables de décision est définie positive :

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0, \tag{2.22}$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des variables de décision et les matrices $F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (pour $i = 0, \ldots, m$) sont symétriques.

L'écriture sous forme LMI d'une inégalité matricielle nécessite souvent l'utilisation de transformations spéciales. Les résultats ci-dessous en présentent quelques unes parmi les plus utilisées.

Lemme 1 (Congruence). *Soient deux matrices carrées P et Q de même dimension. On suppose que la matrice Q est inversible, alors la matrice P est définie positive si et seulement si la matrice QPQ^T l'est aussi.*

Lemme 2 (Complément de Schur). *Soient deux matrices symétriques $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et soit une matrice $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors, les expressions suivantes sont équivalentes :*

$$\textit{(i)} \qquad \begin{bmatrix} Q & X^T \\ X & P \end{bmatrix} > 0 \tag{2.23}$$

$$\textit{(ii)} \qquad \begin{cases} Q > 0 \ \textit{et} \\ P - XQ^{-1}X^T > 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\textit{(iii)} \qquad \begin{cases} P > 0 \ \textit{et} \\ Q - X^TP^{-1}X > 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Lemme 3 ([Petersen, 1987]). *Soient X, Y et Δ trois matrices réelles de dimensions appropriées. Si $\Delta^T\Delta \leq I$, alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$,*

$$X\Delta Y + Y^T\Delta^T X^T \leq \varepsilon XX^T + \varepsilon^{-1}Y^TY. \tag{2.26}$$

Lemme 4 (S-Procédure [Boyd et al., 1994]). *Soient $p+1$ matrices symétriques T_0, T_1,..., $T_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La propriété :*

$$\zeta^T T_0 \zeta > 0, \quad \forall \zeta \neq 0 \ \textit{tel que} \ \zeta^T T_i \zeta > 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, p\} \tag{2.27}$$

est vraie si il existe des nombres réels $\tau_i \geq 0$, pour $i = 1, \ldots, p$, tels que :

$$T_0 - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0 \tag{2.28}$$

Dans l'approche basée sur l'utilisation de modèles T-S, de nombreux problèmes d'analyse de la stabilité ou de synthèse de lois de commande stabilisantes peuvent être résumées en un problème d'optimisation semi-définie positive impliquant une ou plusieurs LMI paramétrées ; ces dernières pouvant être sous la forme d'une simple somme :

$$\Upsilon_h := \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\Upsilon_i < 0, \tag{2.29}$$

ou d'une double somme :

$$\Upsilon_{hh} := \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0 \tag{2.30}$$

$$\Upsilon_{hv} := \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) v_k(z(t)) \Upsilon_{ik} < 0, \tag{2.31}$$

les matrices Υ_i et Υ_{ij}, dépendant linéairement des variables de décision du problème en question.

Une condition suffisante pour que la LMI paramétrée (2.29) soit vérifiée est que

$$\Upsilon_i < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., r\}. \tag{2.32}$$

Sans autre information disponible que la propriété de somme convexe (2.20) sur les fonctions d'appartenance h_i et v_k, ces conditions sont peu restrictives. Il en est de même pour la LMI (2.31) qui est vérifiée si chacune des matrices Υ_{ik} est définie négative. Ces conditions se révèlent par contre très sévères dans le cas de la LMI (2.30). Plusieurs résultats sont disponibles dans la littérature permettant de la relâcher. Dans ce qui suit, trois d'entre eux assurant différents compromis complexité-conservatisme sont présentés.

Lemme 5 (Lemme de relaxation de [Tanaka et al., 1998])**.** *La LMI* (2.30) *est vérifiée pour toute famille de fonctions* $\{h_i\}_{1 \leq i \leq r}$ *vérifiant les conditions* (2.7) *si*

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0 & \forall i = 1, 2, ..., r \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 & \forall i, j = 1, 2, ..., r \text{ tels que } i < j \end{cases} \tag{2.33}$$

Lemme 6 (Lemme de relaxation de [Tuan et al., 2001])**.** *La LMI* (2.30) *est vérifiée pour toute famille de fonctions* $\{h_i\}_{1 \leq i \leq r}$ *vérifiant les conditions* (2.7) *si*

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0 & \forall i = 1, 2, ..., r \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 & \forall i, j = 1, 2, ..., r \text{ tels que } i \neq j \end{cases} \tag{2.34}$$

Les conditions précédentes sont moins fortes que celles du lemme de Tanaka et al. au prix d'un nombre plus important de contraintes LMI ($r(r-1)/2$ LMI supplémentaires). Il est possible de réduire davantage le conservatisme en introduisant des variables auxiliaires comme dans le lemme suivant, cas particulier des conditions données dans [Sala and Ariño, 2007] et basées sur l'utilisation du théorème de Polya.

Lemme 7 (Lemme de relaxation de [Liu and Zhang, 2003])**.** *La LMI* (2.30) *est vérifiée pour toute famille de fonctions* $\{h_i\}_{1 \leq i \leq r}$ *vérifiant les conditions* (2.7) *s'il existe des matrices* Ξ_{ij} *telles que*

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} > \Xi_{ii} & \forall i = 1, 2, ..., r \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > \Xi_{ij} + \Xi_{ji} & \forall i, j = 1, 2, ..., r \text{ tels que } i < j \\ \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{1r} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Xi_{r1} & \Xi_{r2} & \cdots & \Xi_{rr} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

2.3.2 Méthode directe de Lyapunov

Depuis les travaux pionniers de [Tanaka and Sugeno, 1992], l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande d'un modèle T-S sont principalement basées sur la méthode directe de Lyapunov, dont nous rappelons en quelques lignes le principe.

Soit un système décrit par

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.36}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état du système. Sans perte de généralité, nous supposons que ce système admet $x = 0$ comme point d'équilibre. La seconde méthode de Lyapunov repose sur la notion fondamentale de fonction dite de Lyapunov. Ces fonctions doivent posséder certaines propriétés afin de garantir la propriété de stabilité de la solution nulle du système :

Définition 1. Une fonction $V : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite :

— *définie positive* s'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, strictement croissante telle que $\alpha(0) = 0$ et

$$V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall x, \forall t$$
$$V(0, t) = 0 \quad \forall t,$$

— *semi-définie positive* si elle vérifie les deux conditions précédentes avec la fonction $\alpha = 0$.

— *décroissante* s'il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, strictement croissante telle que $\beta(0) = 0$ et $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$ pour tout (x, t).

S'il est possible de démontrer qu'une telle fonction décroît strictement le long de toute trajectoire du système non réduite au point d'équilibre, alors la stabilité est assurée. C'est l'idée sur laquelle repose le théorème de Lyapunov énoncé ci-dessous.

Théorème 8. *S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuellement différentiable, définie positive, décroissante et telle que la dérivée temporelle de $V(x, t)$ le long des trajectoires de* (2.36) *est définie négative alors le point d'équilibre $x = 0$ du système* (2.36) *est asymptotiquement stable.*

Définition 2. Une fonction $V(x,t)$ satisfaisant toutes les hypothèses du théorème précédent est appelée une fonction de Lyapunov.

Remarque 3. La notion de stabilité est une propriété locale du système autour du point d'équilibre étudié ; les conditions fixées sur la fonction V sont donc à vérifier localement autour de $x = 0$. Pour montrer la stabilité asymptotique globale de l'équilibre, ces conditions doivent être vérifiées globalement (i.e. pour tout x dans $\mathbb{R}^{n_x}$) et la fonction α de la définition 1 doit être non bornée.

Dans le cadre de l'approche par modèles T-S, le choix des fonctions de Lyapunov est crucial pour l'obtention de solutions. Plusieurs formes de fonctions de Lyapunov sont proposées dans la littérature telles que les fonctions de Lyapunov de type quadratique [Tanaka and Wang, 2004], ou quadratique par morceaux [Johansson et al., 1999,Feng, 2003], de type non quadratique, floue ou multiple [Tanaka et al., 2003, Guerra and Vermeiren, 2004,Tanaka et al., 2007,Mozelli et al., 2009,Nguyen et al., 2016], de type polynomial [Sala and Ariño, 2009] ou encore des fonctions définies par des intégrales de chemin [Rhee and Won, 2006]. Afin de réduire le conservatisme, il est nécessaire d'exploiter tous les renseignements disponibles sur le comportement local des solutions. Cependant, certaines approches nécessitent des hypothèses supplémentaires comme la connaissance de bornes sur les dérivées de l'état ou des fonctions d'appartenance. D'autres peuvent aboutir à des conditions LMI de grande complexité (en termes de nombre de contraintes ou de variables) ne pouvant être résolues avec les solveurs LMI actuels [Nguyen et al., 2019b].

Une fonction quadratique de Lyapunov est de la forme

$$V(x) = x^T P x \tag{2.37}$$

où P est une matrice symétrique, définie positive. Lorsqu'une fonction quadratique de Lyapunov est utilisée pour garantir la stabilité d'un système, on parle de *stabilité quadratique*. Il est clair que l'utilisation d'une fonction quadratique de Lyapunov peut introduire un certain degré de conservatisme pour l'analyse de la stabilité ou la recherche d'une loi de commande stabilisante. Cependant, la technique de synthèse basée sur ce type de fonctions de Lyapunov peut présenter des avantages précieux par rapport aux alternatives précédemment énumérées. Tout d'abord, elle est numériquement efficace car elle conduit à des problèmes d'optimisation convexe. Deuxièmement, les lois de commande résultantes sont d'une complexité raisonnable permettant de considérer des applications industrielles de la méthode.

2.3.3 Stabilité des modèles T-S

Systèmes T-S standard

Soit le modèle T-S suivant :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z) A_i x \tag{2.38}$$

La dérivée de la fonction quadratique de Lyapunov (2.37) le long des trajectoires du système (2.38) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \tag{2.39}$$

$$= x^T \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z)(A_i^T P + P A_i) \right) x \tag{2.40}$$

La fonction $\dot{V}$ est donc définie négative si, pour tout z,

$$\Upsilon_h := \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i^T P + P A_i) < 0.$$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 9 ([Tanaka and Sugeno, 1992]). *La solution nulle du système* (2.38) *est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice* $P > 0$ *telle que les contraintes LMIs suivantes soient vérifiées pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *:*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \tag{2.41}$$

Rappelons que ce théorème ne donne que des conditions suffisantes : seul le fait que les fonctions d'appartenance $h_i(\cdot)$ soient positives et de somme l'unité a été pris en compte. De ce fait, la preuve de la stabilité a été faite, non pas pour un modèle donné, mais pour tous les systèmes pouvant s'écrire sous la forme (2.38) avec les matrices A_i spécifiées. Ceci garantit une forme de robustesse au résultat obtenu.

Systèmes T-S descripteurs réguliers

Soit le système

$$\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z) E_k \dot{x} = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) A_i(x) x, \tag{2.42}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et les fonctions d'appartenance v_k et h_i vérifient (2.20).

Le théorème suivant donne une condition de stabilité quadratique de ce système.

Théorème 10 ([Taniguchi et al., 2000]). *La solution nulle du système T-S descripteur* (2.42) *est asymptotiquement stable s'il existe des matrices carrées de taille* n_x, $P_1 > 0$, P_3 *et* P_4 *telles que les conditions LMIs suivantes soient vérifiées pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}$ *et tout* $k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}$ *:*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_3 + P_3^T A_i & \star \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_4^T A_i & -E_k^T P_4 - P_4^T E_k \end{bmatrix} < 0. \tag{2.43}$$

Démonstration. En choisissant l'état augmenté $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, on obtient une nouvelle description sous forme T-S singulière du système (2.19) :

$$\bar{E}\, \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{hv} \bar{x}(t), \tag{2.44}$$

où $\bar{E} = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & 0_{n_x} \end{bmatrix}$, $\bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0_{n_x} & I_{n_x} \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}$.

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E} \bar{P} \bar{x}, \tag{2.45}$$

où

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0_{n_x} \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}. \tag{2.46}$$

Notons que V est bien une fonction quadratique et définie positive de l'état x car $V(\bar{x}) = x^T P_1 x$. On a en effet $\bar{E}\bar{P} = \bar{P}^T \bar{E}^T = \text{diag}(P_1, 0_{n_x})$. La dérivée de V le long des trajectoires du système (2.42) a pour expression

$$\begin{aligned} \dot{V}(\overline{x}) &= \dot{\bar{x}}^T \bar{E} \bar{P} \bar{x} + \bar{x}^T \bar{E} \bar{P} \dot{\bar{x}} \\ &= \dot{\bar{x}}^T \bar{E} \bar{P} \bar{x} + \bar{x}^T \bar{P}^T \bar{E} \dot{\bar{x}} \\ &= (\bar{E}\dot{\bar{x}})^T \bar{P} \bar{x} + \bar{x}^T (\bar{P}^T \bar{E} \dot{\bar{x}}) \\ &= \bar{x}^T (\bar{A}_{hv}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_{hv}) \bar{x}. \end{aligned}$$

La solution nulle du système descripteur (2.19) est donc globalement asymptotiquement stable si

$$\Upsilon_{hv} := \bar{A}_{hv}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_{hv} < 0. \tag{2.47}$$

En effectuant le produit des matrices selon le partitionnement donné, on obtient la matrice Υ_{ik} correspondant au membre de gauche de l'inégalité (2.43). Chacune des ces matrices étant supposées définies négatives, il en résulte que l'inégalité (2.47) est vraie si les fonctions d'appartenance v_k et h_i vérifient (2.20). □

Remarque 4. Notons que, de (2.43), on déduit que les matrices $-E_k^T P_4 - P_4^T E_k$ doivent être, elles aussi, définies négatives. Cela n'est possible que si les matrices E_k sont régulières. Ces conditions de stabilité ne peuvent donc s'appliquer à un système T-S descripteur singulier.

2.3.4 Stabilisation des modèles T-S

Cas des systèmes T-S standard

Étant donné un modèle T-S standard ou descripteur, le problème de la stabilisation consiste à déterminer une loi de commande par rétroaction $u(t)$ telle que l'équilibre étudié du système en boucle fermée avec cette entrée soit asymptotiquement stable. Pour les modèles T-S, plusieurs lois de commande ont été proposées dans la littérature. La plus répandue est la loi de commande par compensation distribuée parallèle (abrégée par les initiales PDC pour l'expression anglaise *Parallel Distributed Compensation* introduite pour la première fois dans [Wang et al., 1996]).

Cette loi de commande par retour d'état non linéaire partage les mêmes fonctions d'appartenance que le modèle T-S et est défini comme suit :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))F_i x(t). \tag{2.48}$$

Il s'agit alors de déterminer les matrices des gains de retour d'état $F_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ de chaque sous-modèle afin d'obtenir les performances désirées pour le système asservi.

On peut facilement remarquer que si tous les gains F_i sont identiques, la loi de commande par retour d'état linéaire est retrouvée.

Utilisant la loi PDC (2.48) dans le modèle (2.8), le modèle T-S standard en boucle fermée devient :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)(A_i - B_iF_j)x. \tag{2.49}$$

Des conditions suffisantes de stabilisation sont présentées dans le théorème suivant.

Théorème 11 ([Wang et al., 1996]). *S'il existe une matrice X définie positive et des matrices M_j vérifiant les contraintes LMI suivantes :*

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r\} \text{ tels que } i < j, \end{cases} \tag{2.50}$$

où $\Upsilon_{ij} = A_iX - B_iM_j + XA_i^T - M_j^TB_i^T$, alors, en choisissant la loi de commande (2.48) *avec les gains de retour d'état $F_j = M_jX^{-1}$, la solution nulle du système* (2.8) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Reprenons la fonction de Lyapunov (2.37) avec $P = X^{-1}$. Sa dérivée le long des trajectoires du système en boucle fermée (2.49) a pour expression :

$$\dot{V}(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)(X^{-1}(A_i - B_iF_i) + (A_i - B_iF_i)^TX^{-1}) \right) x. \tag{2.51}$$

D'après le lemme de Tanaka et al., les inégalités (2.50) impliquent que la LMI suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)(A_iX - B_iM_j + XA_i^T - M_j^TB_i^T) < 0. \tag{2.52}$$

Par congruence avec la matrice $P = X^{-1}$ et en tenant compte des relations $M_j = F_jX$, cette dernière inégalité est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)(X^{-1}(A_i - B_iF_i) + (A_i - B_iF_i)^TX^{-1}) < 0. \tag{2.53}$$

La dérivée $\dot{V}$ est donc définie négative. D'après le théorème de Lyapunov, l'équilibre $x = 0$ du système (2.49) est bien asymptotiquement stable. □

Cas des systèmes T-S descripteurs réguliers

Pour les systèmes T-S descripteurs, la loi de commande utilisée est de type PDC modifiée [Taniguchi et al., 2000]. Elle incorpore les fonctions d'appartenance $h_i(z)$ et $v_k(z)$ dans la définition de la loi de commande :

$$u = -F_{hv}x := -\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)F_{ik}x, \tag{2.54}$$

avec $F_{ik} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}$ représentant les matrices des gains de retour d'état de chaque sous-modèle.

Réécrivons le système (2.19) en utilisant de nouveau l'état augmenté $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$:

$$\bar{E}\,\dot{\bar{x}} = \bar{A}_{hv}\bar{x} + \bar{B}_h u, \tag{2.55}$$

où les matrices $\bar{E}$ et $\bar{A}_{hv}$ ont été définies en (2.44) et $\bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0_{n_u \times n_x} \\ B_h \end{bmatrix}$.

La loi de commande (2.54) peut être réécrite sous la forme :

$$u = -\bar{F}_{hv}\bar{x}, \tag{2.56}$$

avec $\bar{F}_{hv} = \begin{bmatrix} F_{hv} & 0_{n_u \times n_x} \end{bmatrix}$.

Le système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\bar{E}\,\dot{\bar{x}} = (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h\bar{F}_{hv})\bar{x}. \tag{2.57}$$

Des conditions suffisantes de stabilisation sont présentées dans le théorème suivant.

Théorème 12 ([Taniguchi et al., 2000]). *L'équilibre $x = 0$ du système (2.19)-(2.54) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $X_1 > 0$, X_3, X_4 et M_{jk} vérifiant les contraintes LMIs suivantes :*

$$\begin{cases} \Upsilon_{iik} < 0 & \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\},\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}, \\ \Upsilon_{ijk} + \Upsilon_{jik} < 0 & \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\},\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r_a\} \text{ tels que } i < j, \end{cases} \tag{2.58}$$

où

$$\Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & \star \\ A_iX_1 - B_iM_{jk} - E_kX_3 + X_4^T & -E_kX_4 - (E_kX_4)^T \end{bmatrix}$$

et en choisissant les gains de retour d'état $F_{jk} = M_{jk}X_1^{-1}$.

Démonstration. Les inégalités (2.58) impliquent que la matrice X_4 est inversible. Posons alors $\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0_{n_x} \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ et $\bar{P} = \bar{X}^{-1} := \begin{bmatrix} P_1 & 0_{n_x} \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$.

Comme P_1 est l'inverse de X_1, elle est également définie positive. Choisissons de nouveau la fonction candidate de Lyapunov (2.45).

On a alors

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T \left((\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv})^T \bar{P} + \bar{P}^T((\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}))\right) \bar{x} \\ &= \bar{x}^T \bar{P}^T \left(\bar{X}^T (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv})^T + (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}) \bar{X}\right) \bar{P} \bar{x} \\ &= \bar{x}^T \bar{P}^T \left(\sum_{i=1}^{r_a} \sum_{v=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) h_j(z) v_k(z) \Upsilon_{ijk} \right) \bar{P} \bar{x}.\end{aligned}$$

Les inégalités (2.58) impliquent que $\dot{V}$ est une fonction définie négative. La solution nulle du système bouclé est donc asymptotiquement stable. □

2.4 Spécifications de performance en boucle fermée

La propriété de stabilité asymptotique est une notion purement qualitative : le point d'équilibre étudié peut être asymptotiquement stable ou non. S'il l'est, alors les trajectoires du systèmes vont converger (localement ou globalement) vers cet équilibre. Il est intéressant en pratique d'avoir d'autres informations sur le comportement dynamique du système comme la rapidité de convergence de ces solutions, le comportement du système vis-à-vis de perturbations, d'incertitudes paramétriques... Dans le cadre des systèmes linéaires, de nombreuses méthodologies d'analyse ou de synthèse ont été développées pour différents types de performance. Cela n'est plus aussi vrai dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires. Cependant, avec les mêmes outils que précédemment, la méthodologie de commande basée sur la modélisation de Takagi-Sugeno permet de prendre en compte différents critères de performance.

2.4.1 α-stabilité

Le premier critère de performance présenté dans ce mémoire est la propriété d'α-stabilité et concerne la rapidité de convergence des solutions vers l'équilibre. Les critères de stabilité/stabilisation donnés dans la section précédente permettent en fait de démontrer la stabilité exponentielle de l'équilibre $x = 0$, qui est une propriété plus forte que la stabilité asymptotique. Cette propriété revient à démontrer que l'état courant du système est majoré en norme par une fonction de la forme $e^{-\alpha t}$, pour un certain réel positif α donné. Lorsque le paramètre α est fixé a priori, on parle de α-stabilité.

En utilisant la deuxième méthode de Lyapunov avec une fonction de Lyapunov de type quadratique, il est possible de vérifier que l'origine est un point d'équilibre α-stable en renforçant la condition portant sur la dérivée de cette fonction :

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}. \tag{2.59}$$

2.4.2 Critère $\mathcal{H}_\infty$

Soit le modèle T-S perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)(A_i x + D_i w), \\ y = \sum_{i=1}^{r} h_i(z) C_i x, \end{cases} \tag{2.60}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont les mêmes grandeurs que précédemment et $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est un signal de perturbation à énergie bornée ($w \in \mathcal{L}_2$).

Définition 3 ([van der Schaft, 1992]). Soit $\gamma \geq 0$. Le système (2.60) possède un gain $\mathcal{L}_2$ inférieur ou égal à γ si la sortie $y(t)$ du système (2.60) partant de la condition initiale $x(0) = 0$ vérifie

$$\int_0^T y(t)^T y(t)\,\mathrm{d}t \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.61}$$

pour tout $T \geq 0$ et tout signal w à énergie bornée sur $[0, T]$.

Pour étudier cette propriété, il est possible ici encore d'utiliser la seconde méthode de Lyapunov en remplaçant la condition sur la dérivée de la fonction de Lyapunov par l'inégalité

$$\dot{V}(x) \leq \gamma^2 w^T w - y^T y.$$

Soit le modèle T-S perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)(A_i x + B_i u + D_i w) \\ y = \sum_{i=1}^{r} h_i(z) C_i x \end{cases} \tag{2.62}$$

En utilisant la même démarche que pour le théorème 11, on peut démontrer le résultat suivant.

Théorème 13 ([Tanaka and Wang, 2004]). *Soit $\gamma \geq 0$. S'il existe une matrice $X > 0$ et des matrices M_j, pour $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ telles que les contraintes* (2.33) *soient vérifiées avec les matrices Υ_{ij} définies par*

$$\Upsilon_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} X A_i^T + A_i X - M_j^T B_i^T - B_i M_j & D_i & X C_i^T \\ \star & -\gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix}, \tag{2.63}$$

alors, pour la loi PDC (2.48) *avec les gains de retour d'état $F_j = M_j X^{-1}$, le système* (2.62) *a un gain $\mathcal{L}_2$ inférieur ou égal à γ vis-à-vis de l'entrée de perturbation w. De plus, lorsque w est nul, l'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

2.4.3 Robustesse

Un modèle comporte toujours un certain degré d'approximation, d'erreurs de modélisation... Il est important d'en tenir compte dans l'analyse ou la commande d'un système asservi. Il existe de nombreuses manières de prendre en compte dans le modèle ces incertitudes, une des plus souvent utilisée est l'incertitude paramétrique menant au modèle de Takagi-Sugeno incertain

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\big[(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\big], \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(C_i + \Delta C_i(t))x(t), \end{cases} \tag{2.64}$$

où les matrices ΔA_i, ΔB_i et ΔC_i admettent les factorisations :

$$\Delta A_i(t) = H_a \Delta_a(t) W_{a,i}, \quad \Delta B_i(t) = H_b \Delta_b(t) W_{b,i}, \quad \Delta C_i(t) = H_c \Delta_c(t) W_{c,i}. \tag{2.65}$$

Les matrices H_a, H_b, H_c, W_{a_i}, W_{b_i},W_{c_i} sont constantes, de dimensions appropriées et les matrices variables $\Delta_x(t)$ (avec $x = a,\ b$ ou c) vérifient

$$\Delta_x^T(t)\Delta_x(t) \leqslant I. \tag{2.66}$$

En utilisant ce modèle, la seconde méthode de Lyapunov avec une fonction V quadratique, ainsi que le lemme 3, il est possible de déduire des conditions LMI permettant la stabilisation robuste de ce système [Tanaka and Wang, 2004, Taniguchi et al., 2001, Lee et al., 2001, Yoneyama, 2006].

2.4.4 Prise en compte du signal de référence

La stabilité au sens de Lyapunov traduit le comportement des solutions du système étudié vis-à-vis de variation des conditions initiales. Dans le cadre des systèmes non linéaires, le principe de superposition ne s'appliquant pas, il faut aussi prendre en compte l'existence possibles d'entrées exogènes comme le signal de référence. Un concept important inspiré de la théorie de Lyapunov et de la notion classique de stabilité entrée-sortie est celui de stabilité entrée-état (ou ISS des initiales de l'anglais input-to-state stability) introduit par Sontag [Sontag and Wang, 1995].

Dans le cas des modèles T-S, la matrice de commande B_h (ou le terme équivalent pour l'entrée considérée) étant bornée, on peut déduire que le système est ISS vis-à-vis de l'entrée u si l'équilibre $x = 0$ du système libre associé est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov [Lendek et al., 2011].

Lorsque le signal de référence est constant, une structure de commande avec action intégrale peut être nécessaire afin d'éliminer toute erreur statique conduisant à la loi de commande d'expression

$$u(t) = -F_h x(t) - F_I \int_0^t (y(s) - y_d(s))\,\mathrm{d}s$$

représentée à la figure 2.1.

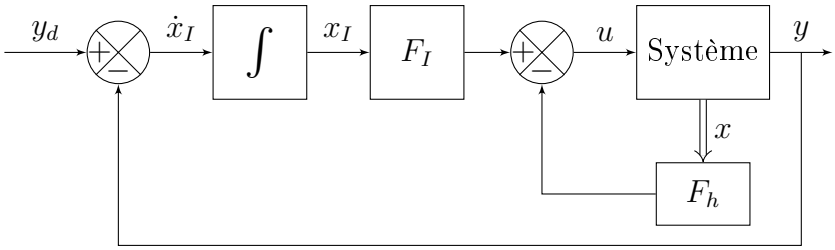


FIGURE 2.1: Commande PDC avec action intégrale.

Pour tenir compte de cet intégrateur dans la détermination des gains de commande, la représentation d'état du système peut être augmentée en y associant la dynamique définissant l'intégrale de l'erreur de sortie $x_I(t)$:

$$\dot{x}_I(t) = y(t) - y_d(t) \quad (= C_h(z(t))x(t) - y_d(t)) \tag{2.67}$$

où $y_d(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le signal de référence du système.

En notant

$$x^*(t) = \left[x^T \, x_I^T\right]^T$$

et

$$F_h^* := \begin{bmatrix} F_h & L_h \end{bmatrix},$$

l'entrée de commande s'écrit alors de manière plus condensée :

$$u(t) = -F_h^* x^*(t), \tag{2.68}$$

ainsi que la dynamique du système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\left(A_i^* - B_i^* F_j^*\right)x^* + B_0 y_d, \\ y = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} h_i(z) C_i^* x^*. \end{cases} \tag{2.69}$$

où

$$A_i^* = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i^* = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i^* = \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}.$$

Tous les résultats précédents peuvent alors être appliqués avec le modèle T-S étendu (2.69) et le contrôleur PDC étendu (2.68).

Le cas des systèmes T-S descripteur peut être traité de la même façon en considérant la commande [Vermeiren et al., 2012] :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t))v_k(z(t))F_i^* x^*(t). \tag{2.70}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un bref aperçu de la modélisation sous forme T-S standard ou descripteur et de son intérêt pour la commande des systèmes non linéaires a été donné. Ce chapitre a montré comment peuvent être obtenues des conditions suffisantes de stabilité/stabilisation sous forme de contraintes LMI via la théorie de la stabilité de Lyapunov. Des éléments de la panoplie disponible pour la synthèse de commande ont été donnés : α-stabilité, atténuation des effets d'une perturbation avec critère $\mathcal{H}_\infty$, stabilité robuste et stabilité entrée-état. D'autres techniques peuvent être trouvées dans la littérature comme la commande à coût garanti, la commande H_2 [Chen et al., 2000a, Tognetti et al., 2011, Wu and Cai, 2006]. Pour un état de l'art plus complet sur l'approche T-S, le lecteur peut se reporter aux références [Tanaka and Wang, 2004, Sala et al., 2005, Feng, 2006] ou encore [Guerra et al., 2009].

La plupart des résultat présentés peuvent être étendus à d'autres classes de modèles T-S, comme les systèmes sous forme descripteur singulière [Yoneyama and Ichikawa, 1999, Chadli et al., 2014, Guelton et al., 2009], les systèmes de type retardé [Cao and Frank, 2000, Yoneyama, 2007]...

Ces problèmes de synthèse de commande seront examinés plus en détail aux chapitres suivants.

Chapitre 3

Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{H}_\infty$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une approche de synthèse de commande pour la poursuite de trajectoire d'un manipulateur avec prise en compte d'une contrainte $\mathcal{H}_\infty$.

La synthèse de correcteurs robustes pour la poursuite de trajectoire d'un système robotique est encore de nos jours considérée comme une tâche difficile [Tsai et al., 2007,Huang and Chiang, 2016,Pan et al., 2018,Ouyang et al., 2014,Nojavanzadeh and Badamchizadeh, 2016]. Ceci peut s'expliquer par le caractère non linéaire et incertain de la dynamique du robot du fait du manque de connaissance des couples de frottements, des incertitudes sur les inerties ou de l'environnement extérieur. Par conséquent, une méthodologie de synthèse de lois de commande robustes est essentielle pour le problème du suivi de trajectoires des manipulateurs.

Dans ce chapitre, la modélisation sous la forme Takagi-Sugeno descripteur présentée au chapitre précédent est utilisée pour décrire la dynamique non linéaire du robot. Un modèle de référence sous forme standard est considéré pour générer une trajectoire de référence vérifiant les performances souhaitées. Pour la synthèse de la loi de commande, nous considérons la structure de commande appelée compensation distribuée parallèle (PDC) [Tanaka and Wang, 2004] qui permet de préserver la structure convexe des systèmes T-S. Avec le choix de cette structure, il est possible d'obtenir en utilisant la méthode directe de Lyapunov des conditions de stabilité exprimées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) pour lesquelles il existe des solveurs numériques efficaces [Nguyen et al., 2017b].

Cependant, lorsque le système possède de nombreuses non-linéarités (ou, de manière équivalente, un grand nombre de règles pour le modèle T-S déduit), il est fortement probable qu'aucune solution réalisable au problème LMI permettant le calcul des gains de commande ne puisse être trouvée du fait des limitations des solveurs LMI actuels. Pour remédier à ce problème, nous proposons une méthodologie de synthèse de lois de commande basée sur l'utilisation de modèles possédant moins de règles. Ces derniers sont décrits sous la forme de systèmes T-S descripteurs incertains. On utilise la forme descripteur obtenue naturellement dans la modélisation mécanique du système et non pas la

représentation d'état standard pouvant être obtenue après multiplication des équations du modèle par l'inverse de la matrice d'inertie car ainsi la matrice de commande (matrice B) reste constante et l'introduction de non-linéarités additionnelles est évitée. Enfin, le caractère incertain est dû au fait que, pour simplifier davantage le modèle, certaines non-linéarités de la dynamique du robot sont interprétées comme des incertitudes.

Le manipulateur série à 2 ddl présenté dans le premier chapitre sera utilisé dans la section 3.5 pour présenter notre méthodologie de synthèse de lois de commande en poursuite.

3.2 Formulation du problème de commande

3.2.1 Modèle général du manipulateur : forme nominale

Soit un manipulateur décrit par le modèle T-S descripteur

$$\begin{cases} E_{pv}\dot{x}_p(t) = A_{ph}x_p(t) + B_{ph}u(t) + B_d\, d(t), \\ \qquad y(t) = C_p x_p(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

avec les signaux

- $x_p \in \mathbb{R}^{n_x}$: le vecteur d'état,
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$: le vecteur d'entrée,
- $y \in \mathbb{R}^{n_y}$: le vecteur de sortie commandée et
- $d \in \mathbb{R}^{n_d}$: le vecteur de perturbation

et

$$E_{pv} = \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z)E_{pk}, \quad [A_{ph}\ B_{ph}] = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)[A_{pi}\ B_{pi}].$$

où les deux familles de fonctions $\{v_k\}$ et $\{h_i\}$ sont positives et de somme l'unité (condition 2.20). On suppose la matrice E_{pv} régulière pour tout z.

3.2.2 Spécifications des performances

Notre objectif est que l'état $x_p(t)$ du manipulateur suive le plus fidèlement possible la trajectoire de référence $x_r(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ générée par le modèle

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t), \tag{3.2}$$

où l'entrée de référence $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ est supposée bornée et les matrices A_r et B_r sont choisies en fonction de la dynamique en boucle fermée souhaitée du manipulateur.

Pour préciser d'un point de vue quantitatif cet objectif, soit l'erreur de suivi $e(t)$ définie par

$$e(t) = x_p(t) - x_r(t). \tag{3.3}$$

À partir des équations (3.1) et (3.2), la dynamique de l'erreur de suivi peut être déduite :

$$E_{pv}\dot{e}(t) = A_{ph}e(t) + (A_{ph} - E_{pv}A_r)x_r(t) + B_{ph}u(t) - E_{pv}B_r r(t) + B_d d(t). \tag{3.4}$$

Définissons :

— le vecteur d'état augmenté : $x = [e^T \; x_r^T]^T$, et
— le vecteur des entrées exogènes : $w(t) = [d(t)^T \; r(t)^T]^T$.

Les deux dynamiques (3.2) et (3.4) peuvent être combinées dans la représentation descripteur suivante :

$$E_v\dot{x}(t) = A_{hv}x(t) + B_h u(t) + D_v w(t), \tag{3.5}$$

où

$$E_v = \begin{bmatrix} E_{pv} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad A_{hv} = \begin{bmatrix} A_{ph} & A_{ph} - E_{pv}A_r \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$B_h = \begin{bmatrix} B_{ph} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_v = \begin{bmatrix} B_d & -E_{pv}B_r \\ 0 & B_r \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

C'est à partir de ce modèle que la loi de commande pour le suivi de trajectoire sera déterminée.

Notre objectif est de déterminer une loi de commande par rétroaction de façon à ce que le système (3.5) vérifie en boucle fermée les performances suivantes :

— (*Stabilité asymptotique*). Pour $w(t) = 0$, la solution nulle du système asservi (3.1)-(3.9) est asymptotiquement stable.

— (α-*stabilité*). Pour un nombre réel positif α donné et pour $w(t) = 0$, l'erreur de suivi $e(t)$ converge de manière exponentielle vers l'origine avec un taux de décroissance supérieur à α.

— (*Rejet de perturbation - critère* $\mathcal{H}_\infty$). Pour une matrice Q définie positive et un réel γ positif, l'inégalité

$$\int_0^{t_f} e^T(t)Qe(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} w^T(t)w(t)dt \tag{3.8}$$

est vérifiée pour tout instant terminal $t_f > 0$, en supposant les conditions initiales nulles.

Remarque 5. L'inégalité (3.8) implique que si w est un signal à énergie bornée ($w \in \mathcal{L}_2$), il en va de même pour l'erreur de suivi : $e \in \mathcal{L}_2$. Le coefficient γ est un majorant du gain $\mathcal{L}_2$ du système. Plus γ est petit, plus le suivi de la trajectoire de référence est précis. Il est à noter que la matrice Q, généralement choisie égale à la matrice identité (voir [van der Schaft, 1992]), permet d'introduire des degrés de liberté supplémentaires dans le réglage du correcteur.

3.3 Synthèse de la loi de commande en poursuite de trajectoire

Pour résoudre notre problème de commande, nous choisissons une loi de commande étendant la structure PDC en ajoutant un terme de commande anticipatrice (feedforward) :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) \left(K_{ik} e(t) + L_{ik} r(t) \right) \\ &= \left[K_{hv} \; 0 \right] x(t) + \left[0 \; L_{hv} \right] w(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3.1 Conditions LMI pour le réglage du correcteur

Le résultat suivant donne — sous réserve qu'un problème LMI soit réalisable — des valeurs pour les matrices de gain K_{ik} et L_{ik} telles que les spécifications précisées au point précédent soient respectées.

Théorème 14. *Supposons qu'il existe des matrices carrées d'ordre n_x notées P_{11}, P_{22}, Q_{11ij}, Q_{12ij}, Q_{21ij}, Q_{22ij}, X_{11ij}, X_{12ij}, X_{21ij}, X_{22ij}, avec $P_{11} > 0$ et $P_{22} > 0$, des matrices $M_{jk} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $L_{jk} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_r}$ et un réel positif γ tels que*

$$\begin{aligned} \Xi_{iik} < 0, \qquad & \forall i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\} \\ \Xi_{ijk} + \Xi_{jik} < 0, \qquad & \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r_a\} \text{ avec } i < j, \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où Ξ_{ijk} est la matrice par blocs définie par

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} S_{11} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ S_{21} & S_{22} & \star & \star & \star & \star & \star \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \star & \star & \star & \star \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & B_d^T & 0 & -\gamma^2 I & \star & \star \\ 0 & 0 & S_{63} & B_r^T & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ P_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned} S_{11} &= \mathrm{He}(Q_{11ij} + \alpha P_{11}), \\ S_{21} &= Q_{21ij} + Q_{12ij}^T, \\ S_{22} &= \mathrm{He}(Q_{22ij} + \alpha P_{22}), \\ S_{31} &= A_{pi} P_{11} + B_{pi} M_{jk} - E_{pk} Q_{11ij} + X_{11ij}^T, \\ S_{32} &= (A_{pi} - E_{pk} A_r) P_{22} - E_{pk} Q_{12ij} + X_{21ij}^T, \\ S_{33} &= -\mathrm{He}(E_{pk} X_{11ij}), \\ S_{41} &= -Q_{21ij} + X_{12ij}^T, \\ S_{42} &= A_r P_{22} - Q_{22ij} + X_{22ij}^T, \\ S_{43} &= -X_{21ij} - X_{12ij}^T E_{pk}^T, \\ S_{44} &= -\mathrm{He}(X_{22ij}), \\ S_{63} &= (B_{pi} L_{jk})^T - (E_{pk} B_r)^T. \end{aligned}$$

Alors, la loi de commande (3.9) *avec les gains* $K_{ik} = M_{ik}P_{11}^{-1}$ *et* L_{ik} *est telle que les spécifications données dans la section 3.2.2 sont satisfaites.*

Démonstration. En introduisant le vecteur d'état étendu $\bar{x} = [x^T \ \dot{x}^T]^T$, le système en boucle fermée peut être représenté sous la forme descripteur singulière suivante :

$$\bar{\mathbb{E}}\dot{\bar{x}} = \bar{\mathbb{A}}_{hhv}\bar{x} + \bar{\mathbb{B}}_{hv}w \tag{3.12}$$

où

$$\bar{\mathbb{E}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbb{A}}_{hhv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A}_{hhv} & -E_v \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbb{B}}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_{hv} \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{A}_{hhv} = A_{hv} + B_h[K_{hv} \ 0], \ \mathbb{B}_{hv} = D_v + B_h[0 \ L_{hv}].$$

Soit

$$\bar{\mathbb{P}}_{hh} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} & 0 \\ \mathbb{Q}_{hh} & \mathbb{X}_{hh} \end{bmatrix},$$

avec $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbb{Q}_{hh} = \begin{bmatrix} Q_{11hh} & Q_{12hh} \\ Q_{21hh} & Q_{22hh} \end{bmatrix}$ et $\mathbb{X}_{hh} = \begin{bmatrix} X_{11hh} & X_{12hh} \\ X_{21hh} & X_{22hh} \end{bmatrix}$.

Par calcul, on montre aisément que la matrice Ξ_{hhv} s'écrit également sous la forme

$$\Xi_{hhv} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star & \star \\ \bar{\mathbb{B}}_{hv}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{C}_z\bar{\mathbb{P}}_{hh} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

où $\bar{C}_z = [I \ 0 \ 0 \ 0]$ et $\Xi_{11} = \mathrm{He}(\bar{\mathbb{P}}_{hh}^T\bar{\mathbb{A}}_{hv}^T + \alpha\bar{\mathbb{P}}_{hh}^T\bar{\mathbb{E}})$.

Par convexité, il résulte des conditions (3.10) que

$$\Xi_{hhv} < 0. \tag{3.14}$$

La matrice Ξ_{11} admettant le partitionnement

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} \mathrm{He}(\mathbb{Q}_{hh} + \alpha\mathbb{P}) & \star \\ \mathbb{A}_{hv}\mathbb{P} - E_v\mathbb{Q}_{hh} + \mathbb{X}_{hh}^T & -\mathrm{He}(E_v\mathbb{X}_{hh}) \end{bmatrix},$$

il résulte de l'inégalité (3.14) que $\mathrm{He}(E_v\mathbb{X}_{hh}) > 0$. On montre alors, par contradiction, que la matrice $\mathbb{X}_{hh}$ est inversible. Comme la matrice $\bar{\mathbb{P}}_{hh}$ est triangulaire inférieure par blocs et que tous ses blocs diagonaux sont inversibles, elle l'est également.

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T\bar{\mathbb{E}}\bar{\mathbb{P}}_{hh}^{-1}\bar{x}. \tag{3.15}$$

La dérivée de la fonction V le long des trajectoires de (3.12) est donnée par

$$\dot{V}(\bar{x}) = \dot{\bar{x}}^T\bar{\mathbb{E}}\bar{\mathbb{P}}_{hh}^{-1}\bar{x} + \bar{x}^T\bar{\mathbb{P}}_{hh}^{-T}\bar{\mathbb{E}}\dot{\bar{x}} \tag{3.16}$$

Il est à noter que dans cette expression, il n'apparaît pas de dérivées temporelles des fonctions d'appartenance du fait de la structure choisie de $\bar{\mathbb{P}}_{hh}$. Cela simplifie grandement l'approche choisie car le cas contraire nécessite une estimation de ces termes dérivées pouvant être fixée arbitrairement imposant une vérification a fortiori du respect des bornes choisies, ou intégrée dans la démarche de synthèse au prix de nombreuses contraintes additionnelles (cf. [Guerra et al., 2012, Nguyen et al., 2017a]).

Des expressions (3.12) et (3.16), il vient l'égalité

$$\dot{V}(\bar{x}) + e^T Q e - \gamma^2 w^T w + 2\alpha V(\bar{x}) = \xi^T \Omega_{hhv} \xi,$$

où

$$\xi = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{P}}_{hh}^{-1} \bar{x} \\ w \end{bmatrix}, \ \Omega_{hhv} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} + \bar{\mathbb{P}}_{hh}^T \bar{C}_z^T Q \bar{C}_z \bar{\mathbb{P}}_{hh} & \star \\ \bar{\mathbb{B}}_{hv}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

En utilisant le lemme de complément de Schur, nous pouvons montrer que (3.14) est équivalent à $\Omega_{hhv} < 0$. Cela signifie que

$$\dot{V}(\bar{x}) + e^T Q e - \gamma^2 w^T w + 2\alpha V(\bar{x}) < 0. \tag{3.17}$$

On en déduit alors les résultats suivants :

— Quand $w(t) = 0$, l'inégalité (3.17) implique :

$$\dot{V}(\bar{x}) < -2\alpha V(\bar{x}). \tag{3.18}$$

D'après le lemme de comparaison [Khalil, 2002, Lemme 3.4], il vient :

$$V(\bar{x}(t)) \leq V(\bar{x}(0)) e^{-2\alpha t}, \tag{3.19}$$

impliquant à son tour la majoration

$$\|e(t)\| \leq \kappa e^{-\alpha t}, \tag{3.20}$$

où $\kappa > 0$, démontrant la stabilité exponentielle avec un taux de convergence supérieur ou égal à α du système bouclé.

— Quand $w(t) \neq 0$, de (3.17), on déduit l'inégalité

$$\dot{V}(\bar{x}) + e^T Q e - \gamma^2 w^T w < 0. \tag{3.21}$$

Par intégration sur l'intervalle $[0, \ t_f]$, il vient pour un vecteur initial $\bar{x}(0)$ nul :

$$\int_0^{t_f} (\gamma^2 w^T w - e^T Q e) dt > V(\bar{x}(t_f)) - V(\bar{x}(0)) = V(\bar{x}(t_f)) > 0 \tag{3.22}$$

L'inégalité (3.8) est donc vérifiée.

□

Remarque 6. Il a été choisi de considérer γ non pas comme un paramètre imposé par le cahier des charges mais comme une variable de décision. Cela laisse la possibilité d'estimer sa plus petite valeur possible afin de minimiser l'impact des perturbations sur la sortie ou, si cette approche conduit à des gains trop importants, à fixer une valeur maximale en imposant une contrainte supplémentaire.

Remarque 7. Une valeur trop élevée du taux de décroissance exponentielle garanti α ou une trop faible valeur du gain-$\mathcal{H}_\infty$ γ peut conduire à des valeurs inacceptables des gains de commande. Ce problème peut être facilement traité dans la synthèse de la commande en introduisant des contraintes LMI supplémentaires dans le problème d'optimisation. La variable de décision M_{ik} est liée aux gains de commande par l'expression $M_{ik} = K_{ik}P_{11}$. Pour éviter des gains excessivement élevés, on peut imposer que

$$M_{ik}M_{ik}^T \leq \epsilon^2 I_{n_u}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}, \tag{3.23}$$

pour un réel positif ϵ. Les conditions (3.23) sont équivalentes aux LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} \epsilon^2 I_{n_u} & M_{ik} \\ M_{ik}^T & I_{n_x} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}. \tag{3.24}$$

3.3.2 Ajout d'une action intégrale dans le correcteur

Une action intégrale peut facilement être introduite dans la loi de commande afin d'obtenir une erreur statique nulle lorsque les entrées exogènes sont constantes. Il suffit pour cela d'augmenter le vecteur d'état en ajoutant les composantes du vecteur $x_I(t)$ défini comme l'intégrale du l'erreur de suivi en sortie :

$$\dot{x}_I(t) = C_p e(t).$$

En notant $x(t) = [e^T \ x_I^T \ x_r^T]^T$, la loi de commande est alors

$$\begin{aligned} u(t) &= K_{hv}e(t) + H_{hv}x_I(t) + L_{hv}r(t) \\ &= [K_{hv}^* \ 0]\, x(t) + [0 \ L_{hv}]\, w(t), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où

$$K_{hv}^* = [K_{hv} \ H_{hv}].$$

La représentation du système augmenté s'écrit de nouveau sous la forme (3.5) mais avec les définitions (3.6) remplacées par :

$$E_v = \begin{bmatrix} E_{pv} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad A_{hv} = \begin{bmatrix} A_{ph} & 0 & A_{ph} - E_{pv}B_r \\ C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

$$B_h = \begin{bmatrix} B_{ph} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_v = \begin{bmatrix} B_d & -E_{pv}B_r \\ 0 & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

3.4 Simplification des modèles

3.4.1 Réduction du nombre de règles

Dans cette section, une méthode de réduction du nombre de règles pour un modèle T-S est présentée. Le nombre de règles d'un modèle T-S a deux impacts distincts en termes de commande. Premièrement, il conditionne le nombre de contraintes LMI et de

variables de décision du problème d'optimisation semi-définie permettant le calcul des gains du correcteur ; un nombre trop élevé pouvant conduire à des temps de calculs trop long, voire l'impossibilité d'obtenir une solution du fait des erreurs numériques. Un autre impact visible de par l'expression (3.9) de la commande est la complexité du correcteur en termes de nombre d'opérations à effectuer pour déterminer à chaque instant la valeur de l'entrée à appliquer au système. Pour traiter ce problème, une solution possible consiste à considérer certaines non-linéarités apparaissant dans le modèle initial comme des incertitudes paramétriques : pour certaines valeurs de l'indice i, on remplace la variable $z_i(t)$ par une expression de la forme

$$z_i(t) = z_{im} + \delta_i(t) z_{ir}, \quad \delta_i(t) \in [-1,\ 1]. \tag{3.28}$$

En appliquant la méthode par décomposition en secteurs non-linéaires, une représentation du système sous forme T-S descripteur incertaine est obtenue :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{pv}\dot{x}_p(t) &= \hat{A}_{ph}x_p(t) + \hat{B}_{ph}u(t) + B_d\, d(t), \\ y(t) &= C_h x(t), \end{aligned} \tag{3.29}$$

où

$$\hat{E}_{pv} = \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z)(E_{pk} + \Delta E_{pk}),$$

$$[\hat{A}_{ph}\ \hat{B}_{ph}] = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)[A_{pi} + \Delta A_{pi}\ B_{pi} + \Delta B_{pi}].$$

Les incertitudes du système peuvent être représentées sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta E_{pk} &= H_e^T \Delta_e(t) W_{epk}, \\ \Delta A_{pi} &= H_a^T \Delta_a(t) W_{api}, \\ \Delta B_{pi} &= H_b^T \Delta_b(t) W_{bpi}, \end{aligned}$$

où $\Delta_\ell^T(t)\Delta_\ell(t) \leq I$ avec $\ell \in \{e, a, b\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}$.

3.4.2 Conditions LMI pour le réglage du correcteur - cas incertain

Le résultat suivant donne des conditions LMI permettant de régler les gains du correcteur PDC robuste (3.9) pour le système descripteur incertain (3.29).

Théorème 15. *Supposons qu'il existe des matrices carrées d'ordre n_x notées P_{11}, P_{22}, Q_{11ij}, Q_{12ij}, Q_{21ij}, Q_{22ij}, X_{11ij}, X_{12ij}, X_{21ij}, X_{22ij}, avec $P_{11} > 0$ et $P_{22} > 0$, des matrices $M_{jk} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $L_{jk} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_r}$, et des réels positifs γ, τ^a_{ijk}, τ^b_{ijk}, τ^e_{ijk} tels que*

$$\begin{aligned} \Psi_{iik} < 0, \qquad & \forall i \in \{1, 2, \ldots, r_a\}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\} \\ \Psi_{ijk} + \Psi_{jik} < 0, \qquad & \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r_a\} \text{ avec } i < j, \forall k \in \{1, 2, \ldots, r_e\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

où Ψ_{ijk} est une matrice par blocs définie par

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Psi_{1ijk} & \star \\ \Psi_{2ijk} & \Psi_{3ijk} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

avec

$$\Psi_{1ijk} = \begin{bmatrix} S_{11} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ S_{21} & S_{22} & \star & \star & \star & \star & \star \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}^* & \star & \star & \star & \star \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & B_d^T & 0 & -\gamma^2 I & \star & \star \\ 0 & 0 & S_{63} & B_r^T & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ P_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{2ijk} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{26} & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 0 & T_{36} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$\Psi_{3ijk} = \mathrm{diag}(-\tau_{ijk}^a I, -\tau_{ijk}^b I, -\tau_{ijk}^e I),$$

où

$$\begin{aligned} S_{33}^* =& S_{33} + \tau_{ijk}^a H_a^T H_a + \tau_{ijk}^b H_b^T H_b + \tau_{ijk}^e H_e^T H_e, \\ T_{11} =& W_{api} P_{11}, \\ T_{12} =& W_{api} P_{22}, \\ T_{21} =& W_{bpi} M_{jk}, \\ T_{26} =& W_{bpi} L_{jk}, \\ T_{31} =& -W_{epk} Q_{11ij}, \\ T_{32} =& -W_{epk}(A_r P_{22} - Q_{12ij}), \\ T_{33} =& -W_{epk} X_{11ij}, \\ T_{34} =& -W_{epk} X_{12ij}, \\ T_{36} =& -W_{epk} B_r. \end{aligned}$$

Alors, la loi de commande (3.9) *avec les gains* $K_{ik} = M_{ik} P_{11}^{-1}$ *et* L_{ik} *est telle que les spécifications données dans la section 3.2.2 sont satisfaites pour le système incertain* (3.29).

Démonstration. La démonstration suit les mêmes lignes que celle du théorème 14, il est possible de montrer que (3.17) est satisfaite si

$$\hat{\Xi}_{hhv} = \Xi_{hhv} + \Delta\Xi_{hhv} < 0, \tag{3.33}$$

où la matrice Ξ_{hhv} est celle définie en (3.13). Le terme incertain $\Delta\Xi_{hhv}$ est lui défini par :

$$\Delta\Xi_{hhv} = \bar{H}^T \Delta(t) \Psi_{2hhv} + \Psi_{2hhv}^T \Delta(t)^T \bar{H},$$

où

$$\Delta(t) = \mathrm{diag}(\Delta_a(t), \Delta_b(t), \Delta_e(t)),$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_e & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme de relaxation de [Tanaka et al., 1998], les inégalités (3.30) impliquent que la matrice Ψ_{hhv} est toujours définie négative. Soit $S_{hhv} = -\Psi_{3hhv}$. Cette matrice est

donc définie positive, par complétion des carrés, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\Xi_{hhv} + \Delta\Xi_{hhv} &\leq \Xi_{hhv} + \bar{H}^T S_{hhv}\bar{H} + \Psi_{2hhv}^T \Delta^T(t) S_{hhv}^{-1}\Delta(t)\Psi_{2hhv} \\ &\leq \Xi_{hhv} + \bar{H}^T S_{hhv}\bar{H} + \Psi_{2hhv}^T S_{hhv}^{-1}\Psi_{2hhv}.\end{aligned}$$

Par application du lemme de complément de Schur, la matrice Ψ_{hhv} étant définie négative, il en est de même pour $\Xi_{hhv} + \Delta\Xi_{hhv}$. La fin de la démonstration reprend alors les mêmes arguments que précédemment. □

Remarque 8. La complexité des conditions de stabilité LMI peut être évaluée par le nombre de variables de décision scalaires $\mathcal{N}_{var}$ et le nombre de lignes de toutes les conditions LMI considérées $\mathcal{N}_{row}$. Pour le théorème 14, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{var} &= 1 + n_x(1 + n_x + 8r_a^2 n_x + n_u r_a r_e) + n_u n_r r_a r_e, \\ \mathcal{N}_{row} &= 3r_a^2 r_e(5n_x + n_d + n_r) + 2n_x,\end{aligned} \tag{3.34}$$

alors que pour le théorème 15 on a

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{var} &= 1 + n_x(1 + n_x + 8\bar{r}_a^2 n_x + n_u \bar{r}_a \bar{r}_e) + n_u n_r \bar{r}_a \bar{r}_e + 3\bar{r}_a^2 \bar{r}_e, \\ \mathcal{N}_{row} &= 3\bar{r}_a^2 \bar{r}_e(8n_x + n_d + n_r) + 2n_x,\end{aligned} \tag{3.35}$$

où $\bar{r}_a$ et $\bar{r}_e$ sont les nombres de règles du modèle simplifié 3.29. Le nombre de règles augmentant exponentiellement avec le nombre de non-linéarités considérées, il est clair que nous pouvons réduire la complexité de calcul en utilisant l'approche proposée.

3.5 Application au manipulateur à deux degrés de liberté

Dans cette section, l'approche présentée dans la section précédente est appliquée pour le suivi d'une trajectoire de référence pour le robot à 2 ddl présenté au chapitre 1. Des résultats de simulation obtenus en utilisant le modèle de simulation dans l'exemple 2 sont ensuite fournis afin de démontrer l'applicabilité de notre démarche à des problèmes industriels.

3.5.1 Représentation descripteur non linéaire de la dynamique des robots manipulateurs

Le modèle dynamique dans l'espace d'articulaire d'un robot manipulateur à n degrés de liberté a été donné au 1er chapitre par l'équation (1.6) rappelée ci-dessous

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + \Gamma_f + J^T(q)F_e.$$

Le vecteur $G(q)$ étant une fonction continûment différentiable de q, en choisissant une description cinématique telle que $q = 0$ soit une position d'équilibre vérifiant $G(0) = 0$, il est toujours possible de le décomposer sous la forme

$$G(q) = P(q)q.$$

En notant $x_p = \begin{bmatrix} q^\top & \dot{q}^\top \end{bmatrix}^\top$, la dynamique du manipulateur (1.6) peut être réécrite sous la forme descripteur suivante :

$$E_p(x_p)\dot{x}_p = A_p(x_p)x_p + B_p(\Gamma + d), \tag{3.36}$$

où

$$\begin{aligned} A_p(x_p) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P(q) & -N(q,\dot{q}) \end{bmatrix}, \\ E_p(x_p) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ d(t) &= \Gamma_f(t) + J^T(q(t))F_e(t). \end{aligned}$$

En raison de contraintes technologiques, le vecteur d'état du robot x reste dans un ensemble borné $\mathcal{D}_x$ défini par

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : \; x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}, \; \forall i \in \Omega_{2n} \right\}, \tag{3.37}$$

où $\Omega_{2n} = \{1,\ 2, \ldots,\ 2n\}$. Les bornes $x_{i\min}$ et $x_{i\max}$ caractérisant l'espace articulaire du manipulateur et ses limites en vitesse dues aux moteurs sont supposées connues.

3.5.2 Modèle Takagi-Sugeno descripteur

Dans cette section, une représentation T-S descripteur du manipulateur considéré est donnée. La forme descripteur (3.36) peut être représentée telle que :

$$\begin{aligned} E_p(z)\dot{x}_p(t) &= A_p(z)\, x_p(t) + B_p(u(t) + d(t)), \\ y(t) &= C_p x_p(t), \end{aligned} \tag{3.38}$$

où $x_p = [q_1\ q_2\ \dot{q}_1\ \dot{q}_2]^T$, $u = [\Gamma_1\ \Gamma_2]^T$, $y = [q_1\ q_2]^T$, $d \in \mathbb{R}^2$, et les matrices du système sont définies par [1]

$$\begin{aligned} E_p(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_{a1} + 2c_2 z_1 & c_3 + c_2 z_1 \\ 0 & 0 & c_3 + c_2 z_1 & \hat{I}_{a2} \end{bmatrix}, \\ A_p(z) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ z_2 & z_3 & 2z_4 - f_{v1} & z_4 \\ z_3 & z_3 & z_5 & -f_{v2} \end{bmatrix}, \\ B_p = B_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

1. Pour simplifier l'écriture, on notera plus loin $E_p(z) = E_p(z_1)$ et $A_p(z) = A_p(z_2, \ldots, z_5)$

avec $\hat{I}_{a1} = I_{a1} + c_1$, $\hat{I}_{a2} = I_{a2} + c_3$ et

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos q_2, \\ z_2 &= -c_4 \operatorname{sinc} q_1 - c_5 \operatorname{sinc} q_{12}, \\ z_3 &= -c_5 \operatorname{sinc} q_{12}, \\ z_4 &= c_2 \dot{q}_2 \sin q_2, \\ z_5 &= -c_2 \dot{q}_1 \sin q_2. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Les bornes suivantes sur l'état du robot seront considérées :

$$\begin{aligned} |q_1| &\leq \pi \text{ rad}, & |q_2| &\leq \pi \text{ rad}, \\ |\dot{q}_1| &\leq 15 \text{ rad/s}, & |\dot{q}_2| &\leq 15 \text{ rad/s}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ces limites ont été définies de façon à ce que le robot puisse fonctionner dans un grand espace de travail.

Représentation par modèle T-S de type descripteur

Les variables de prémisse z_i définies dans (3.39) sont bornés sur le sous-ensemble de l'espace d'état défini par les inégalités (3.40). On notera $z_{i\min}$ et $z_{i\max}$ respectivement les limites inférieure et supérieure de la prémisse z_i sur ce sous-ensemble. En utilisant les valeurs des paramètres du robot données dans le tableau 1.1, page 24, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{z}_1 &= 1, \quad \underline{z}_1 = -1, \\ \overline{z}_2 &= 4.79, \quad \underline{z}_2 = -103.01, \\ \overline{z}_3 &= 4.79, \quad \underline{z}_3 = -22.07, \\ \overline{z}_4 &= 16.87, \quad \underline{z}_4 = -16.87, \\ \overline{z}_5 &= 16.87, \quad \underline{z}_5 = -16.87. \end{aligned}$$

La méthode de décomposition par secteurs non linéaires [Tanaka and Wang, 2004] conduit alors à une représentation T-S descripteur à 32 règles ($r_e = 2$ et $r_a = 16$) du robot équivalente au modèle (3.38) sur le domaine considéré.

Soient

$$\omega_i^1 = \frac{z_i - \underline{z}_i}{\overline{z}_i - \underline{z}_i}, \ \omega_i^0 = 1 - \omega_i^1,$$

pour $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ et posons

$$v_1(z) = \omega_1^0, \ v_2(z) = \omega_1^1 \ \text{ et } \ h_k(z) = \omega_2^{k_2} \omega_3^{k_3} \omega_4^{k_4} \omega_5^{k_5},$$

où $k_i \in \{0,\ 1\}$ et $k = 1 + k_2 + k_3 \cdot 2 + k_4 \cdot 2^2 + k_5 \cdot 2^3$. Avec ces fonctions d'appartenance, le modèle (3.38) peut être représenté sous la forme (3.1) avec les matrices :

$$E_{p1} = E_p(\underline{z}_1), \quad E_{p2} = E_p(\overline{z}_1)$$

et, pour $k = 1, \ldots, 16$

$$A_{pk} = A_p(\hat{z}_2, \ldots, \hat{z}_5),$$

avec $\hat{z}_i = \underline{z}_i$ si $k_i = 0$ et $\hat{z}_i = \overline{z}_i$ sinon, et

$$B_{pk} = B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théoriquement, l'approche de commande proposée dans la section 3.3 peut être utilisée pour traiter les systèmes T-S descripteurs possédant un nombre quelconque de règles. Cependant, la complexité du modèle de commande impacte directement celle du correcteur (cf. expression 3.9 de l'entrée de commande). Il est par conséquent utile, et parfois indispensable, de simplifier le modèle pour faire face aux limitations matérielles. Pour atteindre cet objectif, certaines non-linéarités du système seront considérées comme des incertitudes de modélisation afin de réduire le nombre de variables de prémisse et donc le nombre de sous-modèles. Ensuite, ces incertitudes peuvent être traitées en utilisant le schéma de commande robuste proposé dans le théorème 15. Nous présentons ici un exemple menant à un système T-S de la forme (3.29) possédant 4 règles. À cette fin, nous considérons les variables z_2, z_4 et z_5 comme des incertitudes décrites par

$$z_2(t) = z_{2m} + \delta_2(t) z_{2r}, \quad z_4(t) = z_{4m} + \delta_4(t) z_{4r}, \quad z_5(t) = z_{5m} + \delta_5(t) z_{5r}, \tag{3.41}$$

avec (pour $i = 2, 3, 4$) $z_{im} = (\overline{z}_i + \underline{z}_i)/2$ et $z_{ir} = (\overline{z}_i - \underline{z}_i)/2$. On a donc $|\delta_i(t)| \leq 1$. Les fonctions d'appartenance sont

$$v_1(z) = \omega_1^0,\ v_2(z) = \omega_1^1,\ h_1(z) = \omega_3^0 \text{ et } h_2(z) = \omega_3^1.$$

Avec ces fonctions d'appartenance, le modèle (3.38) peut être représenté sous la forme (3.29) avec les matrices E_{p1} et E_{p2} définies comme précédemment,

$$A_{p1} = A_p(z_{2m}, \underline{z}_3, z_{4m}, z_{5m}),\ A_{p2} = A_p(z_{2m}, \overline{z}_3, z_{4m}, z_{5m})$$

$$B_{p1} = B_{p2} = B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_a(t) &= \mathrm{diag}(\delta_2(t), \delta_4(t), \delta_5(t)), \\ H_a &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \\ W_{aph} &= \begin{bmatrix} z_{2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_{4r} & z_{4r} \\ 0 & 0 & z_{5r} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Remarquons que $\bar{r}_e = 2$, $\bar{r}_a = 2$, le modèle possède donc 4 règles. Il est possible de réduire davantage le nombre de règles en considérant, par exemple, z_2,z_3, z_4, z_5 comme incertitudes du système. Dans le cas extrême où toutes les variables de prémisse sont considérées comme des incertitudes, un modèle linéaire descripteur incertain peut être obtenu.

3.5.3 Modèle de référence

Selon, la figure 1.7, page 20, les coordonnées de la position de l'effecteur **P** dans le plan xy sont données par le modèle géométrique direct suivant :

$$\begin{aligned} x_P &= L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_1 + q_2), \\ y_P &= L_1 \sin(q_1) + L_2 \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \tag{3.43}$$

L'objectif est que le point **P** suive une trajectoire de référence circulaire ayant un rayon de $R = 0.2$ m et un centre de coordonnées $x_{P0} = 0.35$ m, $y_{P0} = 0.65$ m. La position correspondante de **P** à l'instant t est donc donnée par les expressions :

$$x_P = x_{P0} + R\cos\psi(t), \quad y_P = y_{P0} + R\sin\psi(t), \tag{3.44}$$

où $\psi(t)$ est choisi sous la forme d'un polynôme de degré 5 afin que la trajectoire soit exécutée en une durée de 1.5 s avec une vitesse curviligne maximale de 1.57 m/s. Les positions angulaires désirées $q_{1d}(t)$ et $q_{2d}(t)$ sont calculées en utilisant le modèle géométrique inverse. Le modèle de référence choisi correspond à deux axes mécaniques linéaires ($i = 1, 2$) d'inertie J_r, de position q_{ir} avec une commande en position (correcteur PD) et une anticipation "parfaite" en accélération, voir la figure 3.1.

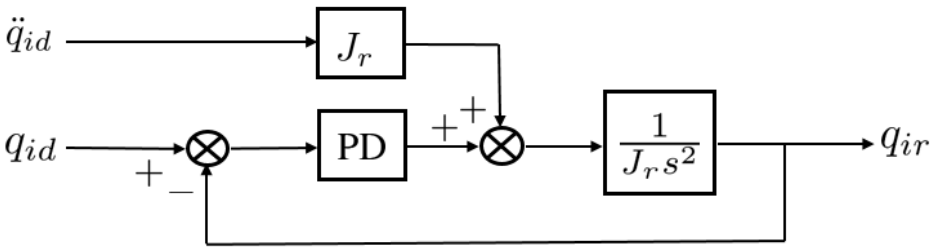


FIGURE 3.1: Référence : axe mécanique linéaire i.

Par conséquent, la position désirée q_{id} doit être deux fois dérivable pour construire l'entrée de référence r_i de l'axe i :

$$r_i = \begin{bmatrix} q_{id}^T & \dot{q}_{id}^T & \ddot{q}_{id}^T \end{bmatrix}^T. \tag{3.45}$$

L'équation d'état de l'axe i s'écrit donc :

$$\dot{x}_{ir} = A_{ir} x_{ir} + B_{ir} r_i \tag{3.46}$$

avec $x_{ir} = \begin{bmatrix} q_{ir} & \dot{q}_{ir} \end{bmatrix}^T$,

$$A_{ir} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r^2 & -2\xi_r\omega_r \end{bmatrix}, \quad B_{ir} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega_r^2 & 2\xi_r\omega_r & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

On choisit les paramètres du modèle en fonction de la plus basse fréquence de résonance ω_m du manipulateur [Spong and Vidyasagar, 2008b] afin que la référence n'excite pas les

résonances mécaniques. Ces paramètres sont donc fixés de façon identique pour les deux axes ($i = 1, 2$) afin d'avoir un comportement identique telles que :

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_m, \quad \xi_r = 1. \tag{3.48}$$

Dans l'exemple choisi (tableau 1.1), la fréquence de résonance des bras étant de 125.6 rad/s, la fréquence du modèle de référence ω_r est fixée à 62 rad/s. En combinant les deux axes pour obtenir l'équation d'état de référence (3.2), avec $x_r = \begin{bmatrix} q_{1r} & q_{2r} & \dot{q}_{1r} & \dot{q}_{2r} \end{bmatrix}^T$, les matrices de ce modèle s'écrivent :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3844 & 0 & -124 & 0 \\ 0 & -3844 & 0 & -124 \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3844 & 0 & 124 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3844 & 0 & 124 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

L'entrée du modèle de référence est définie comme suit :

$$r(t) = \begin{bmatrix} q_{1d}^T(t) & q_{2d}^T(t) & \dot{q}_{1d}^T(t) & \dot{q}_{2d}^T(t) & \ddot{q}_{1d}^T(t) & \ddot{q}_{2d}^T(t) \end{bmatrix}^T.$$

3.5.4 Lois de commande

Pour améliorer la précision, une action intégrale est incorporée dans le schéma de commande PDC comme cela a été expliqué au paragraphe 3.3.2.

Tous les problèmes LMI ont été résolus en utilisant Matlab avec la boîte à outils Yalmip [Löfberg, 2004] et le solveur SDPT3 [Toh et al., 1999].

Notons tout d'abord qu'une solution admissible au problème LMI du théorème 15 n'a pu être obtenue que pour des modèles T-S descripteurs comportant au minimum 4 règles. Un compromis doit donc être trouvé entre la complexité du modèle et le conservatisme des conditions de stabilisation.

À titre d'illustration, nous prenons le cas du modèle incertain à 4 règles obtenu en considérant z_2, z_4 et z_5 comme des incertitudes décrites par les expressions 3.41. La résolution directe des conditions LMI du théorème 15 conduit à des gains de commande ayant des valeurs très élevées :

$$\begin{aligned} K_{11} &= 10^9 \times \begin{bmatrix} 3.88 & 0.15 & 0.03 & 0.01 \\ 0.20 & 7.89 & 0.01 & 0.08 \end{bmatrix}, \\ H_{11} &= 10^9 \times \begin{bmatrix} -3.88 & -0.15 \\ -0.21 & -7.89 \end{bmatrix}, \\ K_{12} &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 8.12 & -0.03 & 0.08 & -0.01 \\ -0.04 & 0.01 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix}, \\ H_{12} &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -8.13 & 0.03 \\ 0.04 & -0.01 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Il est clair que de telles valeurs pour les gains de commande ne peuvent pas être retenus pour ce système. Par conséquent, les gains de commande sont recalculés en incluant la contrainte supplémentaire (3.24) avec $\epsilon = 10^4$ comme cela a été expliqué dans la remarque 7. Nous donnons ci-dessous quelques exemples de gains obtenus :

$$K_{11} = 10^4 \times \begin{bmatrix} -6.31 & 1.16 & -0.0978 & -0.0018 \\ 0.91 & -6.513 & 0.0044 & -0.0591 \end{bmatrix},$$
$$H_{11} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.720 & 0.939 \\ 0.939 & 4.62 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -9.73 & -1.74 & -0.469 & -0.0896 \\ -1.89 & -3.76 & -0.0968 & -0.162 \end{bmatrix},$$
$$H_{12} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.312 & 0.159 \\ 0.152 & 0.0302 \end{bmatrix},$$
$$L_{11} = \begin{bmatrix} 14.7 & -1.13 & 0.47 & -0.04 & 0.004 & -3 \times 10^{-4} \\ -6.37 & 15.2 & -0.21 & 0.49 & -0.002 & 3.9 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$
$$L_{12} = \begin{bmatrix} 12.3 & 0.634 & 0.395 & 0.0205 & 0.0032 & 0.0002 \\ 3.82 & 11.8 & 0.123 & 0.380 & 0.0010 & 0.0031 \end{bmatrix},$$

avec $\alpha = 20$ et $Q = \mathrm{diag}(10^{-5}, 10^{-5}, 1, 1)$.

En utilisant le théorème 14 et le modèle complet, un correcteur PDC à 32-règles a été calculé pour les mêmes valeurs de α et Q. Quelques exemples de gains obtenus sont :

$$K_{11} = 10^5 \times \begin{bmatrix} -0.9254 & 0.4664 & -0.0080 & -0.0004 \\ 0.1738 & -1.0869 & 0.0001 & -0.0035 \end{bmatrix},$$
$$H_{11} = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.0466 & -0.0169 \\ -0.0169 & -0.1312 \end{bmatrix},$$
$$L_{11} = \begin{bmatrix} 0.264 & -0.1294 & 0.0085 & -0.0042 & 0.0001 & -3.3 \times 10^{-5} \\ -0.520 & 0.612 & -0.0168 & 0.0197 & -0.0001 & 0.0002 \end{bmatrix},$$
$$K_{12} = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.2761 & -0.4625 & -0.0105 & -0.0025 \\ -0.1713 & -0.9200 & -0.0022 & -0.0034 \end{bmatrix},$$
$$H_{12} = 10^{-7} \times \begin{bmatrix} 0.9266 & 0.4632 \\ 0.4632 & 0.7926 \end{bmatrix},$$
$$L_{12} = \begin{bmatrix} 0.0627 & -0.0899 & 0.0020 & -0.0029 & 1.6 \times 10^{-5} & -2.3 \times 10^{-5} \\ 0.2122 & 0.4943 & 0.0068 & 0.0159 & 5.5 \times 10^{-5} & 0.0001 \end{bmatrix},$$

Comme expliqué en remarque 8, la complexité des LMI pour le calcul de la commande simplifiée à 4 règles est bien moindre que celles pour le modèle complet. Le tableau 3.1 donne les valeurs de $\mathcal{N}_{var}$ et $\mathcal{N}_{row}$ pour le modèle exact à 32 règles (avec $r_e = 2$ et $r_a = 16$) et le modèle simplifié à 4 règles (avec $\bar{r}_e = \bar{r}_a = 2$).

TABLE 3.1: Coûts de calcul.

Nombre de règles	32-règles (Théorème 14)	4-règles (Théorème 15)
$\mathcal{N}_{var}$	33429	605
$\mathcal{N}_{row}$	36872	872

3.5.5 Résultats de simulation et discussions

Dans cette section nous présentons quelques résultats de simulation illustrant l'applicabilité de notre démarche de commande au manipulateur à deux degrés de liberté présenté au premier chapitre. Si le calcul de la loi de commande a été fait à l'aide du modèle présenté ci-dessus, les simulations seront quant à elles réalisées à l'aide du modèle plus complet présenté dans le premier chapitre et du logiciel Matlab/Simulink en utilisant l'environnement Simscape Multibody$^{\text{TM}}$.

Afin de démontrer la robustesse de l'approche proposée, trois différents cas associés à des modes opératoires différents du robot.

Cas 1 : Le premier correspond au cas nominal à vide : le robot travaille à vide et sans contact avec l'environnement extérieur.

Cas 2 : Le second cas se produit au cours d'un processus d'usinage. Dans ce cas, la perturbation externe correspond à une force externe $F_e(t)$ appliquée sur l'effecteur (1.12). Cette force est supposée tangente à la trajectoire et opposée au vecteur vitesse ; son intensité notée $f_e(t)$ varie entre 138 et 218 N (voir la figure 3.3).

Cas 3 : Dans le troisième cas, le robot manipulateur doit déplacer une masse de 5 kg correspondant à une variation de la masse de l'effecteur m_2 de 55.6%.

Dans chacun des cas, les effets de frottement et d'élasticité articulaire sont pris en compte dans la simulation, mais pas dans le modèle de commande.

On notera

$$\Delta R = \sqrt{(x_P - x_{P0})^2 + (y_P - y_{P0})^2} - R, \tag{3.52}$$

l'erreur de circularité.

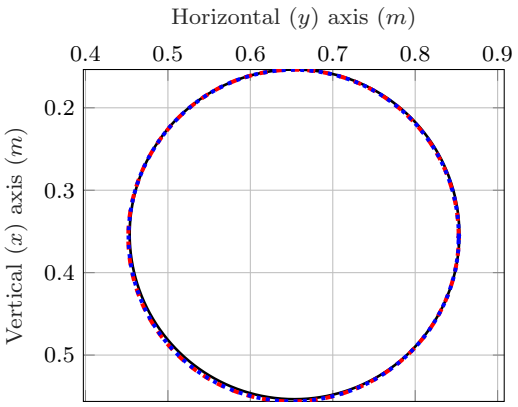


FIGURE 3.2: Trajectoires de l'effecteur pour le cas 1. Référence (noir solide), trajectoire avec le correcteur à 32 règles (bleu), trajectoire avec le correcteur à 4 règles (rouge).

La trajectoire de référence de l'effecteur du robot dans le plan xy ainsi que celles obtenues pour les deux correcteurs déterminées précédemment sont tracées en figure 3.2, page 69 pour le premier cas. Comme on peut l'observer sur cette figure, les performances obtenues sont similaires pour les deux correcteurs. Ceci est confirmé à l'examen des erreurs de circularité tracées à la figure 3.4 et indiquant une déviation maximale par rapport au rayon de la trajectoire de référence d'environ 1.3 mm pour les deux correcteurs.

Les erreurs de circularité sont également tracées pour les deux autres modes opératoires à la figure 3.5. Dans chacun de ses cas, les deux correcteurs conduisent là encore à des

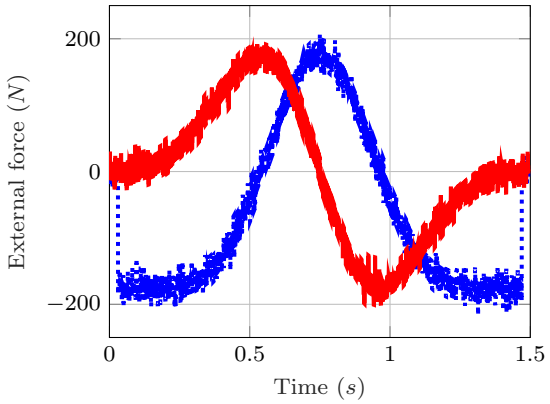


FIGURE 3.3: Force extérieure $F_e(t)$ (cas 2). Composantes verticale (en bleu) et horizontale (en rouge)

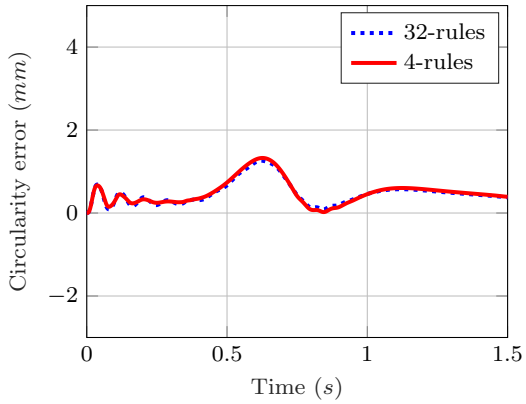
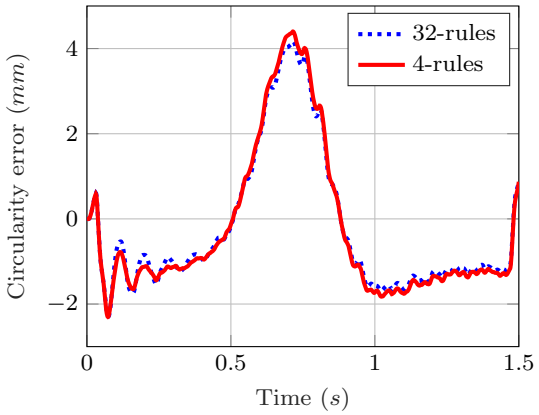
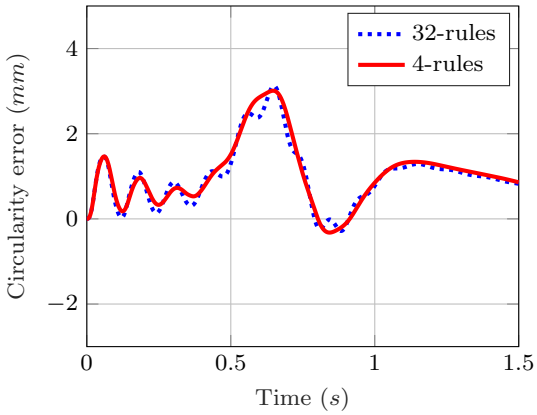


FIGURE 3.4: Erreurs de circularité (cas 1) : correcteur à 32 règles (bleu), à 4 règles (rouge).



(a) Cas 2



(b) Cas 3

FIGURE 3.5: Erreurs de circularité pour le correcteur à 32 règles (en bleu) et le correcteur à 4 règles (en rouge).

comportements similaires. Le pire résultat est obtenu dans le Cas 2, c'est-à-dire lorsqu'une force externe est appliquée. L'écart en rayon évolue alors entre -2.3 et 4.4 mm.

Les couples des actionneurs sont donnés à la figure 3.6 pour le correcteur à 4 règles dans le cas nominal. Les couples maximum requis sont de 228 Nm pour le joint 1 et 47 Nm pour le joint 2. Les vitesses des articulations sont illustrées à la figure 3.7.

Les résultats obtenus pour les deux derniers cas illustrent la robustesse des performances de suivi de trajectoire vis-à-vis des perturbations externes (force d'usinage) et des incertitudes (variation de la charge). Les performances obtenues en précision restent cependant à améliorer (surtout pour le 2e cas).

Remarque 9. Le modèle de simulation du manipulateur comprend également les perturbations liées aux frottements secs et aux résonances mécaniques (cf. pages 20 à 24). Les résultats présentées dans le Cas 1 montrent la robustesse à ces perturbations internes au manipulateur.

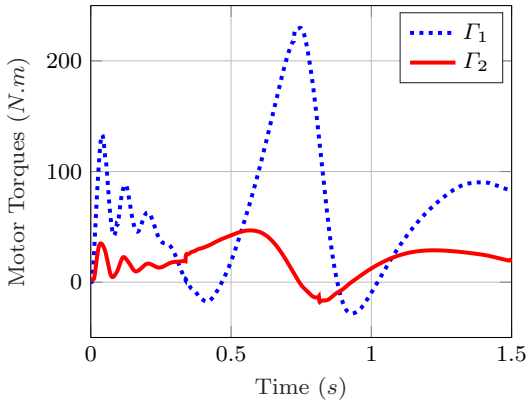


FIGURE 3.6: Couples des actionneurs (Cas 1).

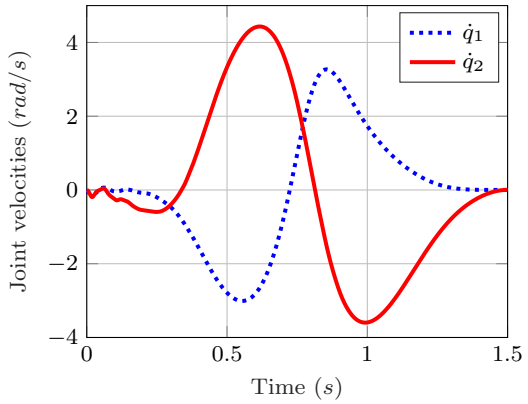


FIGURE 3.7: Vitesse des articulations (Cas 1).

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la synthèse de lois de commande non linéaires pour la poursuite de trajectoire d'un robot manipulateur a été présentée. Le modèle de référence génère la trajectoire de référence. L'approche proposée est basée sur l'utilisation de modèles T-S de type descripteur et de la seconde méthode de Lyapunov et permet de moduler la complexité du calcul et de la structure du régulateur sans trop pénaliser les performances du système asservi comme l'exemple considéré a pu l'illustrer. Ces performances sont spécifiées dans la synthèse par la prise en compte d'un taux de convergence exponentiel, ainsi que d'un gain L_2 maximal entre la sortie et les entrées exogènes.

Chapitre 4

Poursuite de trajectoire avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle approche pour le problème de suivi de trajectoires d'un robot manipulateur basée de nouveau sur une représentation sous forme Takagi-Sugeno descripteur de la dynamique non linéaire du robot.

Cette approche utilise de nouveau une loi de commande combinant une action anticipatrice avec un retour d'état, ce qui permet d'améliorer de façon significative les performances du système asservi par rapport à une commande par rétroaction simple.

Contrairement au chapitre précédent, la structure de commande proposée ne nécessite plus la définition d'un modèle de référence, ce qui conduit à une dynamique des erreurs en suivi de trajectoire plus simple. L'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov permet ici encore de dériver des conditions de stabilité exprimées sous la forme de problème d'optimisation avec contraintes de type inégalité matricielle linéaire (LMI) pouvant être efficacement résolu avec les solveurs numériques disponibles. Pour la commande par rétroaction, nous considérons la structure à compensation distribuée parallèle (PDC) [Tanaka and Wang, 2004] qui permet de préserver la structure polytopique des systèmes T-S.

Pour assurer un bon rejet des perturbations, il a été imposé au chapitre précédent que le système en boucle fermée soit $\mathcal{L}_2$-stable vis-à-vis des entrées exogènes avec un gain $\mathcal{L}_2$ suffisamment faible. De cette manière, on limite l'énergie de l'erreur de suivi de trajectoire. Dans cette section, la commande est déterminée de façon à assurer la stabilité entrée-état de la dynamique de l'erreur de suivi vis-à-vis des perturbations. Les performances en précision du suivi de trajectoire seront alors évaluées en termes de gain $\mathcal{L}_\infty$ garantissant une amplitude maximale de l'erreur de suivi pour une entrée de perturbation donnée et supposée bornée.

Ce chapitre est organisé comme suit. Il commence par une formulation du problème de suivi de trajectoire et la structure de commande associée. Ensuite, les conditions LMI permettant de régler les gains du correcteur sont données. Enfin, des résultats de simulation obtenus avec le manipulateur série considéré dans le premier chapitre sont proposés.

4.2 Formulation du problème de suivi de trajectoire d'un robot manipulateur

La formulation du problème de suivi de trajectoire s'appuie sur la forme descripteur (3.36) du modèle non linéaire, présenté au chapitre précédent, que l'on réécrit ici sans l'indice p :

$$E(x)\dot{x} = A(x)x + B(\Gamma + d), \tag{4.1}$$

Le problème de suivi de trajectoire est formulé à partir de la structure de commande suivant.

Structure de la commande pour le suivi de trajectoire

La trajectoire de référence d'un robot manipulateur est définie par la donnée à chaque instant du vecteur

$$x_r = \begin{bmatrix} q_r^\top & \dot{q}_r^\top \end{bmatrix}^\top,$$

où les n-vecteurs q_r et $\dot{q}_r$ sont, respectivement, les position et vitesse articulaire de référence. On supposera dans la suite que x_r est suffisamment régulière et que sa dérivée seconde est bornée.

Soit $e = x - x_r$, l'erreur de suivi de trajectoire. La dynamique de $e(t)$ est déduite du modèle descripteur (4.1) :

$$E(x)\dot{e} = A(x)e + B(\Gamma + d) - E(x)\dot{x}_r + A(x)x_r. \tag{4.2}$$

Pour améliorer les performances en suivi de trajectoire, nous proposons de décomposer la loi de commande Γ en deux termes :

$$\Gamma = u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}. \tag{4.3}$$

La commande par retour d'état u_{fb} est utilisée pour garantir certaines spécifications de la dynamique d'erreur de suivi en boucle fermée. La commande par anticipation u_{ff} vise à contrer les effets de x_r sur la dynamique de l'erreur de suivi. La structure de commande proposée est illustrée à la figure 4.1.

De (4.2) et de (4.3), la dynamique de l'erreur de suivi en boucle fermée est donnée par

$$E(x)\dot{e} = A(x)e + B(u_{\text{fb}} + d) + \mathcal{F}(u_{\text{ff}}, x, x_r), \tag{4.4}$$

où

$$\mathcal{F}(u_{\text{ff}}, x, x_r) = Bu_{\text{ff}} - E(x)\dot{x}_r + A(x)x_r,$$

Il résulte de (4.4) que u_{ff} devrait être tel que $\mathcal{F}(u_{\text{ff}}, x, x_r) \simeq 0$, pour atténuer les effets des signaux exogènes x_r et $\dot{x}_r$ sur la dynamique de l'erreur e. Le terme de commande par

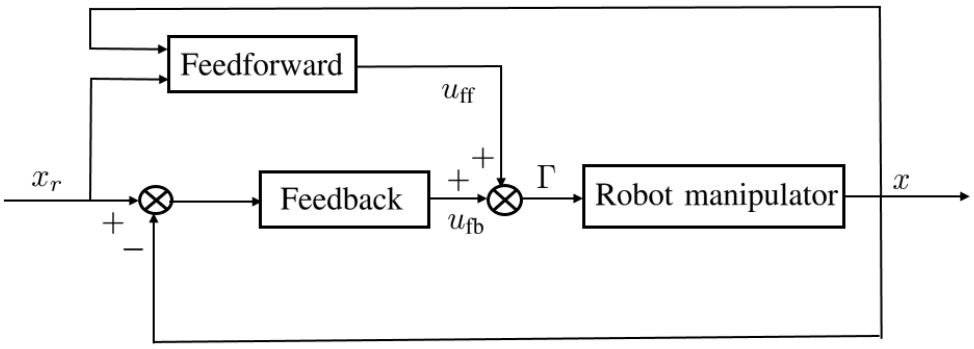


FIGURE 4.1: Schéma de commande proposé.

anticipation est donc choisi sous la forme :

$$u_{\text{ff}} = B^{\dagger}(E(x)\dot{x}_r - A(x)x_r). \tag{4.5}$$

où $B^{\dagger} = [0\ I]$ est la pseudo-inverse de B.

Notons que du fait de la définition de B, on a $\mathcal{F}(u_{\text{ff}}, x, x_r) = 0$ si le modèle est exact. La dynamique de l'erreur de suivi s'écrit alors sous la forme

$$E(x)\dot{e} = A(x)e + B(u_{\text{fb}} + d) \tag{4.6}$$

où le signal de perturbation d inclut à la fois les perturbations externes et les inévitables erreurs paramétriques sur le modèle. Du fait des hypothèses précédentes, nous supposerons par la suite que le signal d est borné en amplitude. Nous sommes maintenant en position de formuler le problème de commande :

Problème de commande 3. *Déterminer une loi de commande par retour d'état u_{fb} telle que la dynamique* (4.6) *satisfait aux spécifications suivantes.*

(P1) Pour un signal de perturbation nul, $d \equiv 0$, la solution nulle du système (4.6) *est exponentiellement stable avec un taux de décroissance supérieur à un scalaire positif α prédéfini.*

(P2) Le système en boucle fermée (4.6) *est stable entrée-état par rapport à la perturbation d.*

(P3) Pour une erreur de suivi initialement nulle, $e(0) = 0$, on a

$$\|e(t)\| \leq \gamma \|d(.)\|_{\infty}, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.7}$$

pour un scalaire positif γ, où $\|e(t)\|$ représente la norme euclidienne du vecteur $e(t)$ et $\|d(.)\|_{\infty}$ est la norme $\mathcal{L}_{\infty}$ du signal d :

$$\|d(.)\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} \|d(t)\|.$$

De plus, si $e(0) = e_0 \neq 0$, alors l'inégalité suivante est vraie :

$$\limsup_{t\to\infty} \|e(t)\| \leq \gamma \|d(.)\|_\infty. \tag{4.8}$$

4.3 Synthèse de la loi de commande avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$

Pour le calcul de la loi de commande, on va d'abord transformer la dynamique de l'erreur de suivi en une forme TS descripteur équivalente. Ensuite, des conditions LMI sont proposées pour le calcul des gains de commande permettant de vérifier les conditions du problème 3. Enfin, afin de réduire la complexité du contrôleur, des conditions de stabilisation robuste de l'erreur de suivi sont données.

4.3.1 Représentation T-S descripteur de la dynamique de l'erreur de suivi

Afin de déterminer la loi de commande, le système (4.6) est transformé en une représentation T-S descripteur équivalente.

En utilisant l'approche par décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka and Wang, 2004, Chap. 2], la dynamique de l'erreur de suivi (4.6) peut être représentée sous la forme T-S descripteur suivante [Taniguchi et al., 2000] :

$$\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z) E_k \dot{e} = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) A_i e + B(u_{\text{fb}} + d). \tag{4.9}$$

Soit $\bar{e} = \begin{bmatrix} e^\top & \dot{e}^\top \end{bmatrix}^\top$. Le système (4.9) peut être réécrit comme

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) \bar{A}_{ik} \bar{e} + \bar{B}(u_{\text{fb}} + d), \tag{4.10}$$

où

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

La loi de commande par retour d'état sera choisie sous la forme

$$u_{\text{fb}} = -\sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) K_{ik} e, \tag{4.12}$$

où les gains $K_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ doivent être déterminés. De (4.10) et de (4.12), la dynamique en boucle fermée de l'erreur de suivi peut être exprimée sous la forme T-S descripteur suivante :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) (\bar{A}_{ik} - \bar{B}\bar{K}_{ik}) \bar{e} + \bar{B} d, \tag{4.13}$$

où $\bar{K}_{ik} = \begin{bmatrix} K_{ik} & 0 \end{bmatrix}$.

4.3.2 Calcul des gains de commande

Le résultat suivant permet de transformer le problème de commande 3 en un problème d'optimisation LMI.

Théorème 16. *Étant donné un réel positif α, s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ définie positive, des matrices $Q_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $R_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $M_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ (avec $(i,k) \in \Omega_r \times \Omega_{r_e}$) et un réel positif $\bar{\gamma}$ solutions du problème d'optimisation*

minimiser $\bar{\gamma}$
sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ P & I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.14}$$

$$\Xi_{ik} = \mathrm{He}\begin{bmatrix} \alpha P + Q_i & R_i & 0 \\ A_i P - B M_{ik} - E_k Q_i & -E_k R_i & B \\ 0 & 0 & -\alpha\bar{\gamma} I \end{bmatrix} \prec 0,\ \forall (i,k) \in \Omega_{r_a} \times \Omega_{r_e} \tag{4.15}$$

alors, la loi de commande par retour d'état (4.12) *avec les gains $K_{ik} = M_{ik}P^{-1}$ est telle que les spécifications données dans le problème 3 sont satisfaites avec le gain $\mathcal{L}_\infty$ $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.*

Démonstration. Il résulte de l'inégalité (4.15) que

$$\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z)\, \mathrm{He}(E_k R_i) \succ 0 \tag{4.16}$$

pour toute famille v_k et h_k vérifiant la propriété de somme convexe (2.20), et donc que toute combinaison convexe $\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) R_i$ est régulière.

De ce qui précède, il est possible de définir la fonction candidate de Lyapunov $\mathcal{V}$ par

$$\mathcal{V}(\bar{e}) = \bar{e}^\top \bar{E} \left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) \bar{P}_i \right)^{-1} \bar{e}, \tag{4.17}$$

où $\bar{P}_i = \begin{bmatrix} P & 0 \\ Q_i & R_i \end{bmatrix}$.

En raison des structures spéciales des matrices partitionnées $\bar{E}$ et $\bar{P}_i$, il s'ensuit que

$$\bar{E} \left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) \bar{P}_i \right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) \bar{P}_i \right)^{-1} \bar{E} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

En conséquence :

$$\mathcal{V}(\bar{e}) = \begin{bmatrix} e^T & \dot{e}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = e^\top P^{-1} e. \tag{4.19}$$

Donc $\mathcal{V}(e)$ est une fonction définie positive de e.

En notant $\hat{e} = \left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)\bar{P}_i\right)^{-1} \bar{e}$, la dérivée de $\mathcal{V}$ définie dans le long des trajectoires de (4.13) a pour expression

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) &= \mathrm{He}\left\{\left[\mathcal{A}_{hv}\bar{e} + \bar{B}d\right]^\top \left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)\bar{P}_i\right)\bar{e}\right\} \\ &= \mathrm{He}\left\{\left[\mathcal{A}_{hv}\left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)\bar{P}_i\right)\hat{e} + \bar{B}d\right]^\top \hat{e}\right\}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\mathcal{A}_{hv} = \sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)(\bar{A}_{ik} - \bar{B}\bar{K}_{ik})$.

L'expression $\dot{\mathcal{V}}(\bar{e})$ devient :

$$\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) = \mathrm{He}\left\{\left[(\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)(\bar{A}_{ik} - \bar{B}\bar{K}_{ik}))\left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)\bar{P}_i\right)\hat{e} + \bar{B}d\right]^\top \hat{e}\right\} \tag{4.21}$$

En utilisant

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ik} - \bar{B}\bar{K}_{ik} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{ik} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i - BK_{ik} & -E_k \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.22}$$

L'expression $\dot{\mathcal{V}}(\bar{e})$ (Équation (4.21)) devient :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) &= \mathrm{He}\left\{\left[(\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i - BK_{ik} & -E_k \end{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z)\begin{bmatrix} P & 0 \\ Q_i & R_i \end{bmatrix}\right)\hat{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ Bd \end{bmatrix}\right]^\top \hat{e}\right\} \\ &= \mathrm{He}\left\{\left[(\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\begin{bmatrix} Q_i & R_i \\ A_iP - BM_{ik} & -E_kQ_i \end{bmatrix}\hat{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ Bd \end{bmatrix}\right]^\top \hat{e}\right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

À partir des expression de $\mathcal{V}(\bar{e})$ (Équation (4.17)) et de $\dot{\mathcal{V}}(\bar{e})$ (Équation (4.23)), la relation suivant devient :

$$\begin{aligned}&\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) + 2\alpha\mathcal{V}(\bar{e}) - 2\alpha\bar{\gamma}d^\top d \\ &= \begin{bmatrix}\hat{e}^\top & d^\top\end{bmatrix}\sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\,\mathrm{He}\begin{bmatrix} \alpha P + Q_i & R_i & 0 \\ A_iP - BM_{ik} - E_kQ_i & -E_kR_i & B \\ 0 & 0 & -\alpha\bar{\gamma}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{e} \\ d\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Il vient alors l'expression

$$\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) + 2\alpha\mathcal{V}(\bar{e}) - 2\alpha\bar{\gamma}d^\top d = \xi^\top \Xi_{hv}\xi, \tag{4.25}$$

où

$$\xi = \begin{bmatrix} \hat{e}^\top & d^\top \end{bmatrix}^\top,$$
$$\Xi_{hv} = \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) \Xi_{ik}.$$

Par convexité, il résulte de (4.15) que $\Xi_{hv} \prec 0$. Combinant ceci avec (4.25) conduit à

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\bar{e}(t)) &\leq -2\alpha(\mathcal{V}(\bar{e}(t)) - \bar{\gamma}\|d(t)\|^2) \\ &\leq -2\alpha(\mathcal{V}(\bar{e}(t)) - \bar{\gamma}\|d(.)\|_\infty^2). \end{aligned} \tag{4.26}$$

En appliquant le lemme de comparaison [Khalil, 2002, Lemme 3.4] à (4.26), il s'ensuit que

$$\mathcal{V}(\bar{e}(t)) \leq e^{-2\alpha t}\mathcal{V}(\bar{e}(0)) + \bar{\gamma}\|d(.)\|_\infty^2. \tag{4.27}$$

Par utilisation du lemme du complément de Schur, la condition (4.14) est équivalente à $P^{-1} \succeq I$. Il s'ensuit que

$$e^\top(t)e(t) \leq e^\top(t)P^{-1}e(t) = \mathcal{V}(\bar{e}(t)) \leq \sigma_1\|e(t)\|^2, \tag{4.28}$$

où $\sigma_1 = \lambda_{\max}(P^{-1})$.

De (4.27), il résulte alors que

$$\|e(t)\|^2 \leq \sigma_1 e^{-2\alpha t}\|e_0\|^2 + \bar{\gamma}\|d(.)\|_\infty^2 \tag{4.29}$$

et, par suite,

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\sigma_1}e^{(-\alpha t)}\|e_0\| + \sqrt{\bar{\gamma}}\|d(.)\|_\infty. \tag{4.30}$$

On en déduit alors les résultats suivants :

— Quand $d = 0$, l'inégalité (4.27) implique :

$$\mathcal{V}(\bar{e}(t)) \leq e^{-2\alpha t}\mathcal{V}(\bar{e}(0)). \tag{4.31}$$

impliquant à son tour la majoration

$$\|e(t)\| \leq \kappa e^{-\alpha t}, \tag{4.32}$$

où $\kappa > 0$, démontrant la stabilité exponentielle avec un taux de convergence supérieur ou égal à α du système bouclé.

— Quand $d \neq 0$:

— Pour une erreur de suivi initialement, $e(0) = 0$, l'inégalité (4.30) implique :

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\bar{\gamma}}\|d(.)\|_\infty = \gamma\|d(.)\|_\infty. \tag{4.33}$$

— Si $e(0) \neq 0$, par intégration (4.30) sur l'intervalle $[0,\ \infty]$, l'inégalité (4.8) est donc vérifiée.

L'inégalité (4.30) garantit les propriétés (P1), (P2) et (P3) données dans le problème 3 en posant $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$. □

4.3.3 Réduction de la complexité du correcteur

Comme expliqué à la section 3.4, il est possible de simplifier le correcteur en réduisant le nombre de règles du système T-S descripteur modélisant la dynamique de l'erreur de suivi. La même astuce est utilisée : considérer certaines non-linéarités du modèle initial comme des incertitudes. À cette fin, nous réécrivons certaines variables de prémisse sous la forme

$$z_j(t) = z_{jm} + \delta_j(t) z_{jr}, \quad \delta_j(t) \in [-1,\ 1], \tag{4.34}$$

où

$$\begin{aligned} z_{jm} &= (\overline{z}_j + \underline{z}_j)/2, \\ z_{jr} &= (\overline{z}_j - \underline{z}_j)/2 \end{aligned}$$

avec $j \in \Omega_{p_e+p_a} = \{1, \ldots,\ p_e + p_a\}$, où p_e et p_a sont, respectivement, les nombres d'incertitudes dans les matrices E et A.

En substituant (3.28) à (4.6), puis en appliquant l'approche par décomposition en secteurs non linéaires, on obtient le système TS descripteur incertain

$$\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z) \hat{E}_k \dot{e} = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z) \hat{A}_i e + B(u_{\text{fb}} + d), \tag{4.35}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{E}_k &= E_k + \Delta E_k(t), \quad k \in \Omega_{r_e}, \\ \hat{A}_i &= A_i + \Delta A_i(t), \quad i \in \Omega_{r_a}. \end{aligned}$$

Les matrices $\Delta E_k(t)$ et $\Delta A_i(t)$ pouvant être paramétrées comme suit

$$\begin{aligned} \Delta E_k(t) &= H_e^\top \Delta_e(t) W_{ek}, \\ \Delta A_i(t) &= H_a^\top \Delta_a(t) W_{ai} \end{aligned}$$

avec $(k, i) \in \Omega_{r_e} \times \Omega_{r_a}$ et $\Delta_\ell^\top \Delta_\ell \preceq I$, pour $\ell \in \{e, a\}$.

Le résultat suivant fournit des conditions LMI permettant de déterminer une loi de commande par retour d'état

$$u_{\text{fb}} = -\sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z) v_k(z) K_{ik} e, \tag{4.36}$$

satisfaisant les propriétés spécifiées dans le problème 3 pour la dynamique de l'erreur de suivi modélisée par le système incertain (4.35).

Théorème 17. *Étant donné un réel $\alpha > 0$, s'il existe une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, les matrices $Q_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $R_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $M_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ et les scalaires positifs $\bar{\gamma}$, ϕ^a_{ik}, ϕ^e_{ik}, avec $(i,k) \in \Omega_{r_a} \times \Omega_{r_e}$, solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\textit{minimiser} \quad \bar{\gamma} \tag{4.37}$$

sous les contraintes (4.14) *et* (4.38)

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ik} & \star & \star \\ \mathcal{S}_{ik}\mathcal{H}^\top & -\mathcal{S}_{ik} & \star \\ \mathcal{W}_{ik} & 0 & -\mathcal{S}_{ik} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall (i,k) \in \Omega_{r_a} \times \Omega_{r_e}, \tag{4.39}$$

où Ξ_{ik} est défini dans (4.15),

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ik} &= \operatorname{diag}(\phi^a_{ik} I, \phi^e_{ik} I), \\ \mathcal{W}_{ik} &= \begin{bmatrix} W_{ai}P & 0 & 0 \\ -W_{ek}Q_i & -W_{ek}R_i & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{H} &= \begin{bmatrix} 0 & H_a^\top & 0 \\ 0 & H_e^\top & 0 \end{bmatrix}^\top, \end{aligned}$$

alors, la loi de commande par retour d'état (4.36) *avec les gains $K_{ik} = M_{ik}P^{-1}$ est telle que les spécifications données dans le problème 3 sont satisfaites avec le gain $\mathcal{L}_\infty$ γ.*

Démonstration. Par convexité, on déduit de (4.39) que

$$\begin{bmatrix} \Xi_{hv} & \star & \star \\ \mathcal{S}_{hv}\mathcal{H}^\top & -\mathcal{S}_{hv} & \star \\ \mathcal{W}_{hv} & 0 & -\mathcal{S}_{hv} \end{bmatrix} \prec 0, \tag{4.40}$$

où

$$\begin{aligned} \Xi_{hv} &= \sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\Xi_{ik}, \\ \mathcal{S}_{hv} &= \sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\mathcal{S}_{ik}, \\ \mathcal{W}_{hv} &= \sum_{i=1}^{r_a}\sum_{k=1}^{r_e} h_i(z)v_k(z)\mathcal{W}_{ik}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme du complément de Schur, il vient alors l'inégalité

$$\Xi_{hv} + \mathcal{H}\mathcal{S}_{hv}\mathcal{H}^\top + \mathcal{W}_{hv}^\top \mathcal{S}_{hv}^{-1}\mathcal{W}_{hv} \prec 0. \tag{4.41}$$

Soit $\Delta = \operatorname{diag}(\Delta_a, \Delta_e)$, on a alors $\Delta^\top\Delta \preceq I$ et en complétant les carrés :

$$\mathbf{X}^\top\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^\top\mathbf{X} \preceq \mathbf{X}^\top\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\top\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y},$$

avec $\mathbf{S} = \mathcal{S}_{hv}$, $\mathbf{X} = \mathcal{H}^\top$ et $\mathbf{Y} = \Delta\mathcal{W}_{hv}$, l'inégalité

$$\Xi_{hv} + \mathrm{He}(\mathcal{H}\Delta\mathcal{W}_{hv}) \prec 0 \tag{4.42}$$

est obtenue.

De la même façon que pour la démonstration du théorème 16 et du (4.42), on peut alors montrer que

$$\dot{\mathcal{V}}(\bar{e}) + 2\alpha\mathcal{V}(\bar{e}) - 2\alpha\gamma d^\top d = \xi^\top \left[\Xi_{hv} + \mathrm{He}(\mathcal{H}\Delta\mathcal{W}_{hv})\right]\xi < 0,$$

garantissant que les propriétés (P1), (P2) et (P3) du problème 3 sont vérifiées pour la dynamique de l'erreur de suivi décrite par le modèle incertain (4.35). □

4.4 Application au manipulateur à deux degrés de liberté

Pour montrer l'efficacité de l'approche de commande proposée, nous fournissons dans cette section des résultats de simulation obtenus pour le manipulateur série présenté dans le premier chapitre.

Dans la section 3.5.2 du chapitre 3, deux modèles T-S descripteur du manipulateur étudié ont été donnés : le premier avec 32 sous-modèles linéaires ($r_e = 2$ et $r_a = 16$), le second à caractère incertain et avec 4 sous-modèles linéaires.

4.4.1 Lois de commande

Concernant le calcul des gains du correcteur, les problèmes d'optimisation définis au théorème 16 pour le modèle à 32 règles et au théorème 17 pour le modèle à 4 règles sont tous les deux réalisables avec un taux de décroissance $\alpha = 60$.

Avec le modèle à 32 règles et le théorème 16, les premières valeurs des gains du cor-

recteur obtenu sont :

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 3.3963 & -0.6804 & 0.1065 & -0.0235 \\ -0.2474 & 3.2393 & -0.0096 & 0.1042 \end{bmatrix}, \\
K_{21} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 3.2825 & -0.6270 & 0.1024 & -0.0217 \\ -0.2252 & 3.0701 & -0.0088 & 0.0986 \end{bmatrix}, \\
K_{31} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 3.3895 & -0.6771 & 0.1063 & -0.0234 \\ -0.2441 & 3.2368 & -0.0095 & 0.1040 \end{bmatrix}, \\
K_{41} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 3.2876 & -0.6108 & 0.1026 & -0.0212 \\ -0.2168 & 3.0527 & -0.0086 & 0.0979 \end{bmatrix}, \\
K_{12} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.5382 & 1.3438 & 0.1757 & 0.0419 \\ 0.7173 & 3.2047 & 0.0216 & 0.1031 \end{bmatrix}, \\
K_{22} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.3417 & 1.3121 & 0.1689 & 0.0408 \\ 0.6952 & 3.0550 & 0.0209 & 0.0982 \end{bmatrix}, \\
K_{32} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.5259 & 1.3435 & 0.1753 & 0.0418 \\ 0.7180 & 3.2015 & 0.0215 & 0.1029 \end{bmatrix}, \\
K_{42} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5.3599 & 1.3256 & 0.1694 & 0.0411 \\ 0.7065 & 3.0470 & 0.0211 & 0.0978 \end{bmatrix}, \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

avec la matrice P définissant la fonction de Lyapunov (4.17) donnée par :

$$
P = \begin{bmatrix} 4.14 \times 10^{-4} & -1.15 \times 10^{-5} & -0.0128 & 3.65 \times 10^{-4} \\ -1.15 \times 10^{-5} & 4.60 \times 10^{-4} & 3.72 \times 10^{-4} & -0.0143 \\ -0.0128 & 3.73 \times 10^{-4} & 0.7686 & -0.0137 \\ 3.65 \times 10^{-4} & -0.0143 & -0.0137 & 0.8207 \end{bmatrix}. \tag{4.44}
$$

Pour le modèle simplifié à 4 règles, les gains du correcteurs obtenus sont :

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.8721 & -0.3635 & 0.1326 & -0.0148 \\ -0.2828 & 4.2778 & -0.0206 & 0.1862 \end{bmatrix}, \\
K_{12} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.4378 & 0.3333 & 0.2032 & 0.0161 \\ 0.2915 & 4.7488 & 0.0052 & 0.2069 \end{bmatrix}, \\
K_{21} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.8534 & -0.3580 & 0.1317 & -0.0146 \\ -0.2779 & 4.2497 & -0.0204 & 0.1849 \end{bmatrix}, \\
K_{22} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.4080 & 0.3360 & 0.2018 & 0.0161 \\ 0.2919 & 4.7188 & 0.0051 & 0.2055 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

avec la matrice P égale à :

$$
P = \begin{bmatrix} 0.001 & 8.60 \times 10^{-6} & -0.0218 & -0.001 \\ 8.60 \times 10^{-6} & 9.09 \times 10^{-4} & -3.03 \times 10^{-5} & -0.0209 \\ -0.0218 & -3.03 \times 10^{-5} & 0.8146 & 0.029 \\ -0.001 & -0.0209 & 0.0290 & 0.7501 \end{bmatrix}. \tag{4.46}
$$

Les valeurs des gains $\mathcal{L}_\infty$ obtenus sont $\gamma = 1$ pour le modèle à 32 règles et $\gamma = 3.48$ pour le modèle à 4 règles.

4.4.2 Comparaison des performances obtenues

Afin de démontrer la robustesse de l'approche proposée, on va considérer les deux premiers modes opératoires décrits dans la section 3.5.5 (fonctionnement nominal à vide et fonctionnement avec contact avec une surface).

On va aussi examiner l'intérêt de l'action anticipatrice de la structure de commande proposée en comparant les résultats obtenus pour celle-ci avec ceux obtenus pour une commande PDC classique.

On reprend la trajectoire circulaire de référence définie à la section 3.5.3 du précédent chapitre.

Performances en précision : erreurs de circularité

La figure 4.2 représente les erreurs de circularité obtenues dans le 1er cas (fonctionnement nominal à vide) pour les différents correcteurs considérés. Comme on peut l'observer sur cette figure, les performances obtenues sont meilleures avec les correcteurs incluant une action anticipatrice. On remarque aussi que les correcteurs à 4 règles donnent sensiblement les mêmes performances que les correcteurs à 32 règles correspondants.

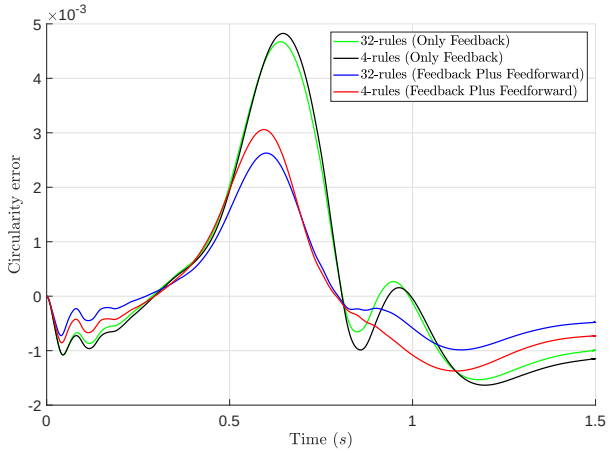


FIGURE 4.2: Erreurs de circularité pour le cas nominal

Pour être plus précis dans la comparaison, nous définissons deux indicateurs de précision :

— la valeur absolue maximale de l'erreur de circularité :

$$E_{RM} = \max_{t\in[0,T]} |\Delta R|, \tag{4.47}$$

et

	32-Règles		4-Règles	
	u_{fb}	$u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}$	u_{fb}	$u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}$
$E_{R\text{M}}$ (mm)	4.7	2.6	4.8	3.1
$E_{R\text{mav}}$(mm)	1.3	0.75	1.4	0.99

TABLE 4.1: Valeurs de $E_{R\text{M}}$ et $E_{R\text{mav}}$ pour le 1er cas

	32-Règles		4-Règles	
	u_{fb}	$u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}$	u_{fb}	$u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}$
$E_{R\text{M}}$ (mm)	6.6	4.1	6.6	3.9
$E_{R\text{mav}}$(mm)	1.8	1.7	1.8	1.6

TABLE 4.2: Valeurs de $E_{R\text{M}}$ et $E_{R\text{mav}}$ pour le 2e cas

— la valeur absolue moyenne de l'erreur de circularité :

$$E_{R\text{mav}} = \frac{1}{T}\int_0^T |\Delta R| \mathrm{d}t. \tag{4.48}$$

Ces deux indicateurs de performance sont donnés, pour le 1er cas, dans le tableau 4.1. Les observations précédentes sont confirmées : la plus petite erreur absolue moyenne (0.75 mm) est obtenue pour la structure complète à 32 règles. Par rapport à cette référence, l'erreur augmente de 32 % pour le modèle simplifié correspondant et d'au moins 73 % sans action anticipatrice.

Dans le 2e cas (force externe s'appliquant sur l'effecteur), les erreurs de circularité sont représentées à la figure 4.3, les indicateurs correspondants sont donnés au tableau 4.2. Les erreurs de circularité moyenne sont ici relativement voisines pour tous les cas considérés de 1.6 à 1.8 mm, le meilleur résultat étant obtenu pour le correcteur simplifié à 4 règles avec l'action anticipatrice.

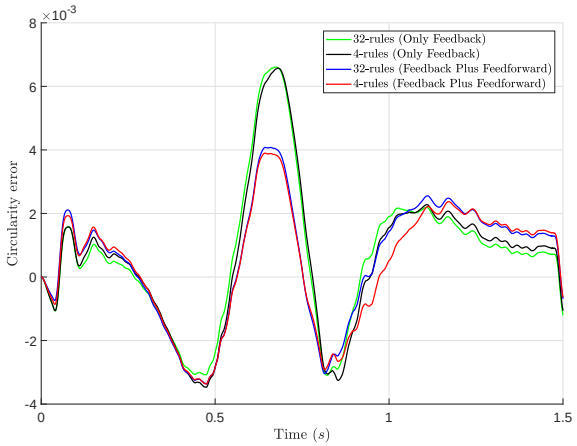


FIGURE 4.3: Erreurs de circularité pour le 2e cas.

Sollicitations des actionneurs

On ne considère ici que la structure de commande proposée à la section 4.2. Les évolutions en fonction du temps des couples des actionneurs sont présentées aux figures 4.4 et 4.5 pour le 1er cas. Les couples maximum requis sont de 231.5 Nm pour l'articulation 1 et 49.8 Nm pour l'articulation 2. Les erreurs de positions des articulations sont illustrées aux figure 4.6 4.7. Les erreurs de vitesses des articulations sont données aux figure 4.8 4.9.

Pour le 2e cas considéré, les couples des actionneurs sont représentées sur les figures 4.10 et 4.11. Les couples maximum requis sont plus importants que précédemment : 308.1 Nm pour le joint 1 et 132.7 Nm pour le joint 2. Les erreurs de positions des articulations sont illustrées aux figure 4.12 4.13. Les erreurs de vitesses des articulations sont données aux figure 4.14 4.15.

Comme dans le chapitre précédent, la commande obtenue pour le correcteur simplifié ne diffère que de très peu de celle du correcteur à 32 règles.

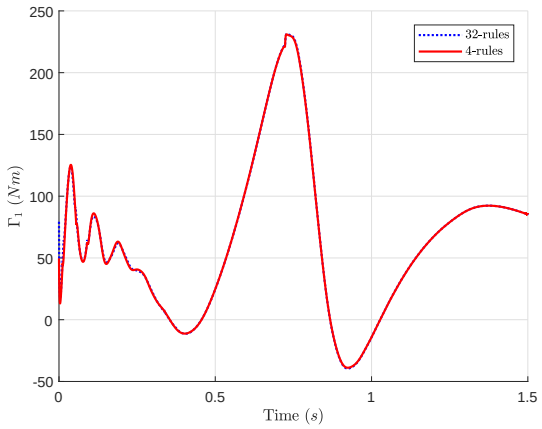


FIGURE 4.4: Couple moteur Γ_1 pour le 1er cas.

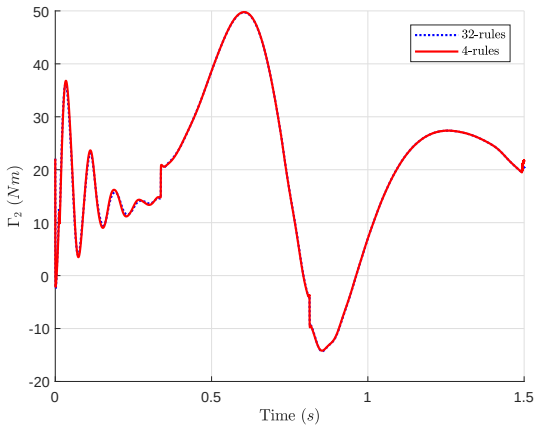


FIGURE 4.5: Couple moteur Γ_2 pour le 1er cas.

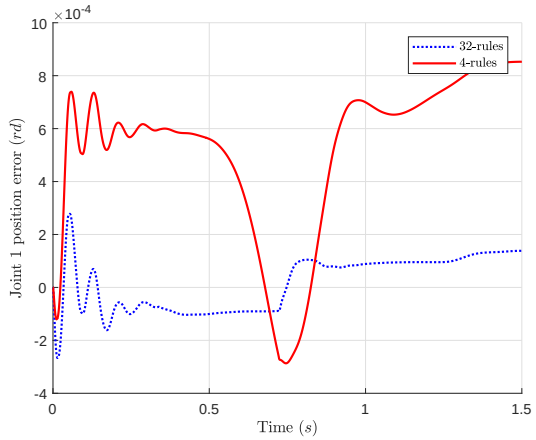


FIGURE 4.6: Erreur de position de l'articulation 1 pour le 1er cas.

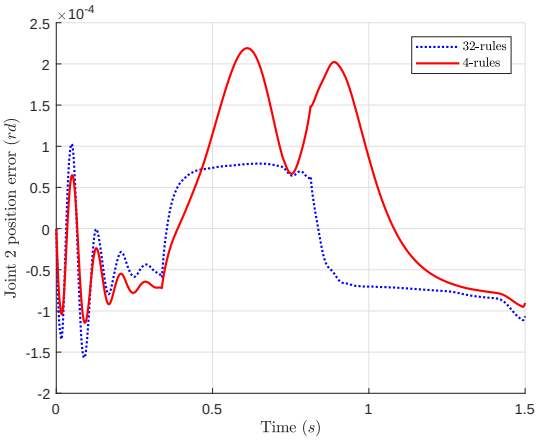


FIGURE 4.7: Erreur de position de l'articulation 2 pour le 1er cas.

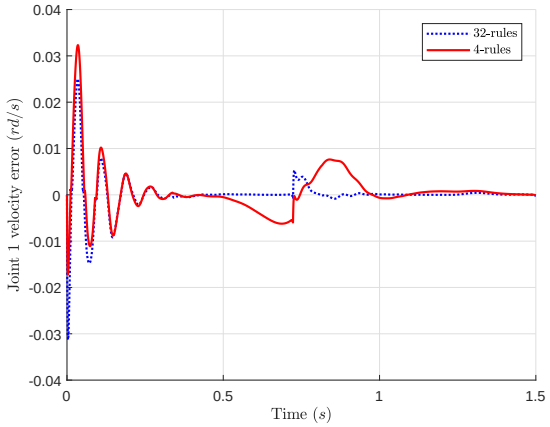


FIGURE 4.8: Erreur de vitesse de l'articulation 1 pour le 1er cas.

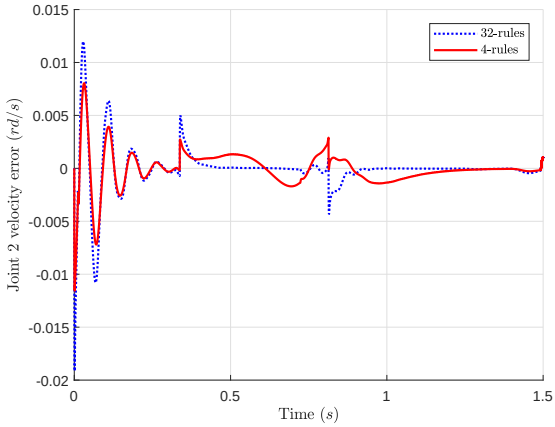


FIGURE 4.9: Erreurs de vitesse de l'articulation 2 pour le 1er cas.

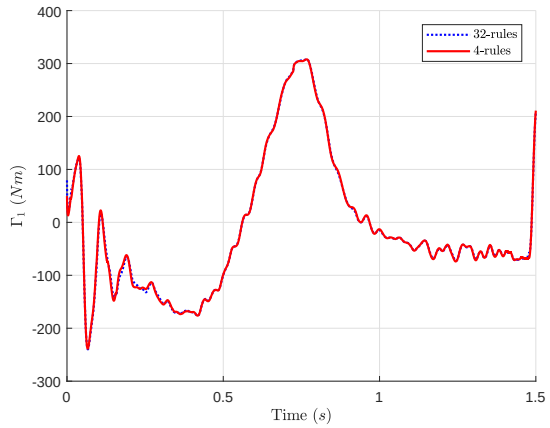


FIGURE 4.10: Couple moteur Γ_1 dans le cas avec la perturbation externe.

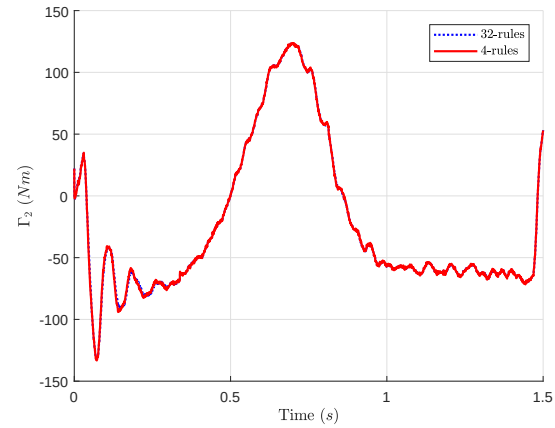


FIGURE 4.11: Couple moteur Γ_2 dans le cas avec la perturbation externe.

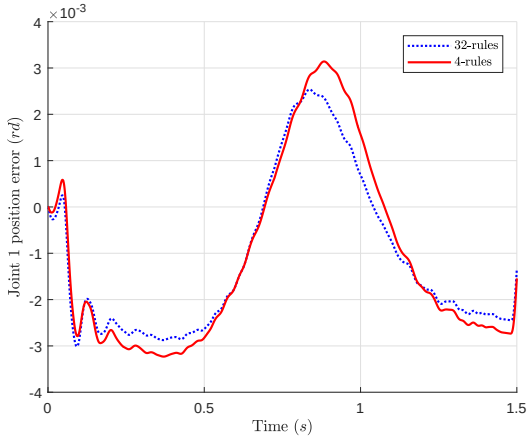


FIGURE 4.12: Erreur de position de l'articulation 1 dans le cas avec la perturbation externe.

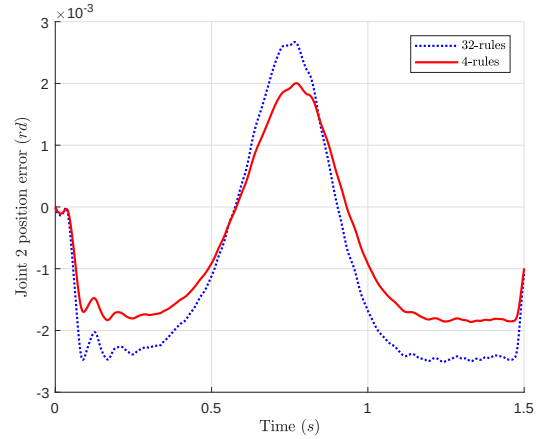


FIGURE 4.13: Erreur de position de l'articulation 2 dans le cas avec la perturbation externe.

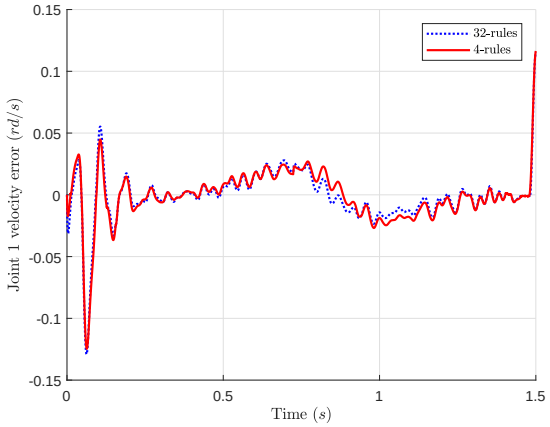


FIGURE 4.14: Erreur de vitesse de l'articulation 1 dans le cas avec la perturbation externe.

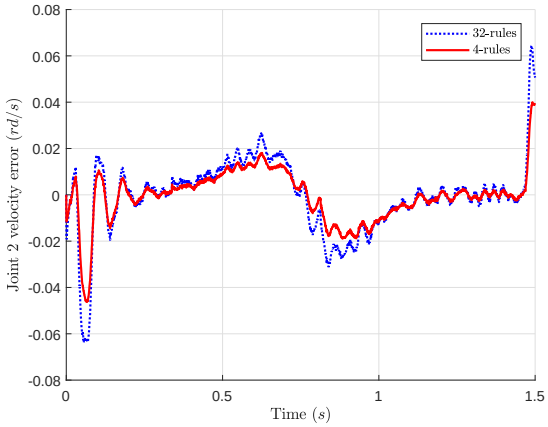


FIGURE 4.15: Erreurs de vitesse de l'articulation 2 dans le cas avec la perturbation externe.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche systématique pour la synthèse d'une loi de commande pour le suivi de trajectoires de robots manipulateurs a été proposée. Basée sur une représentation sous forme de Takagi-Sugeno descripteur, cette approche utilise les arguments de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov pour garantir les propriétés en boucle fermée des dynamiques des erreurs de suivi de trajectoire.

La structure de commande proposée combine comme celle du 3e chapitre une action anticipatrice à une commande PDC, mais ne nécessite pas la définition d'un modèle de référence simplifiant ainsi la complexité des LMI permettant le calcul des différents gains de la commande. La performance en précision est prise en compte via une contrainte sur le gain $\mathcal{L}_\infty$ entre le signal de perturbation et l'erreur de suivi. L'efficacité de l'approche proposée est illustré par des résultats de simulation pour le manipulateur série à 2 ddl.

Deux techniques de commande ont été proposées pour la poursuite en trajectoire d'un robot manipulateur. Le chapitre suivant propose de comparer les performances de ces deux approches avec d'autres utilisées classiquement en robotique : les commandes par PID ou CTC.

Chapitre 5

Étude comparative des différentes techniques pour le suivi de trajectoire

5.1 Introduction

La commande en suivi de trajectoires des robots manipulateurs a fait l'objet de nombreuses études du fait de la complexité des dynamiques mises en jeu et d'un réel besoin industriel. Une commande de suivi de trajectoires est nécessaire pour que chaque articulation suive la trajectoire souhaitée le plus précisément possible. De nombreuses méthodes de commande telles que la commande CTC (Computed Torque Control), la commande optimale, la commande adaptative, la commande par mode glissant et la commande par logique floue ont été proposées pour traiter ce problème de commande robotique.

L'objet de ce chapitre est de comparer les performances des différentes correcteurs proposés aux chapitres précédents avec un correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée et une commande CTC. Ces derniers seront représentés par les abréviations PID et CTC. Les notations utilisées pour les correcteurs proposées aux chapitres 3 et 4 sont :

- pour les lois de commande avec contrainte $\mathcal{H}_\infty$ définies au Chapitre 3 :
  - $\mathcal{H}_\infty$ 32-rules pour le correcteur à 32 règles,
  - $\mathcal{H}_\infty$ 4-rules pour le correcteur à 4 règles ;
- pour les lois de commande avec contrainte $\mathcal{L}_\infty$ définies au Chapitre 4 :
  - FBFF 32-rules pour le correcteur à 32 règles et
  - FBFF 4-rules pour le correcteur à 4 règles.

En raison de la flexibilité des transmissions, la commande des robots manipulateurs permettant de hautes performances dynamiques est un véritable défi. Dans ce chapitre, l'objectif est de faire suivre un cercle au robot manipulateur à des vitesses différentes. Dans tous les cas, les flexibilités des transmissions ainsi que l'effet des frottements secs sont pris en compte dans la simulation. Deux cas sont traités : fonctionnement à vide (cas nominal) et avec force d'extérieur (cas avec perturbation).

5.2 Gains des loi de commande

5.2.1 Commande PID

La loi de commande PID a été donnée par l'équation (1.24) avec $e_q = q_d - q$. Pour déterminer les paramètres du correcteur PID, on va suivre la méthodologie présentée dans [Dombre and Khalil, 1999]. On considère le modèle de l'articulation j suivant :

$$\Gamma_j = a_j \ddot{q}_j + f v_j \dot{q}_j + \gamma_j \tag{5.1}$$

avec $a_j = M_{jj\,\max}$ la valeur maximale de l'élément M_{jj} de la matrice d'inertie du robot et γ_j est un couple perturbation.

Pour $\gamma = 0$, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\frac{q_j(s)}{q_{dj}(s)} = \frac{K_{vj}s^2 + K_{pj}s + K_{ij}}{a_j s^3 + (K_{vj} + f_{vj})s^2 + K_{pj}s + K_{ij}} \tag{5.2}$$

L'équation caractéristique du système bouclé s'écrit :

$$\Delta(s) = a_j s^3 + (K_{vj} + f_{vj})s^2 + K_{pj}s + K_{ij} \tag{5.3}$$

Pour obtenir une réponse la plus rapide possible sans oscillation, un choix classique consiste à déterminer les gains du correcteur afin d'obtenir un pôle triple réel négatif.

$$\Delta(s) = a_j(s + \varpi_j)^3 \tag{5.4}$$

avec $\varpi_j > 0$. Cette valeur ϖ_j est choisie la plus grande possible tout en restant en deçà de la pulsation de résonance ϖ_{rj} afin de ne pas déstabiliser le système. Un choix courant consiste à prendre $\varpi_j = \varpi_{rj}/2$. Les gains obtenus sont les suivants :

$$K_{pj} = 3a_j\varpi_j^2, \tag{5.5}$$
$$K_{vj} = 3a_j\varpi_j - f_{vj}, \tag{5.6}$$
$$K_{ij} = a_j\varpi_j^3. \tag{5.7}$$

Pour le manipulateur à 2 ddl considérés, nous avons

$$a_1 = 7.4583 \tag{5.8}$$
$$a_2 = 1.25 \tag{5.9}$$

ce qui conduit aux gains suivants du correcteur PID

$$\begin{aligned} K_p &= 10^4 \begin{bmatrix} 4.8000 & 0.9000 \end{bmatrix} \\ K_v &= 10^3 \begin{bmatrix} 1.0362 & 0.1836 \end{bmatrix} \\ K_i &= 10^5 \begin{bmatrix} 7.4107 & 1.4697 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

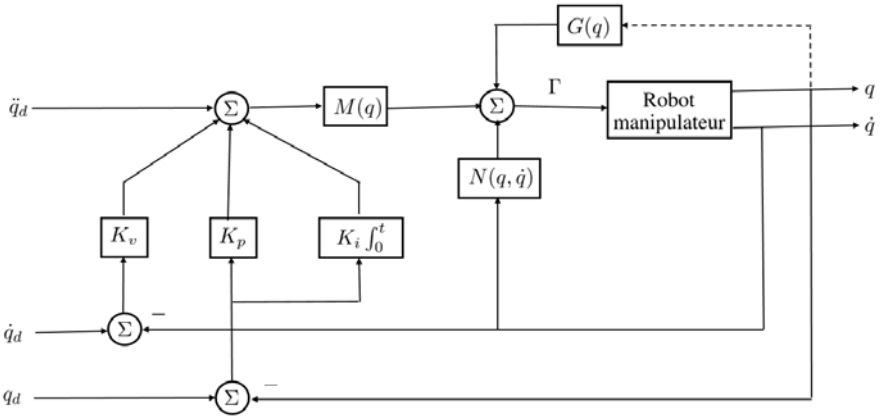


FIGURE 5.1: Schéma de principe de la commande CTC.

5.2.2 Commande CTC

A partir des équations (1.29) et (1.30), la loi de commande s'écrit sous la forme (voir la figure 5.1) :

$$\Gamma = M(q)\big(\ddot{q}_d + K_p e_q + K_v \dot{e}_q + K_i \int_0^t e_q(s)\,\mathrm{d}s\big) + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q). \tag{5.11}$$

Les gains K_p, K_v et K_i sont ici indépendants de l'inertie. En utilisant la même technique de placement de pôles que pour le correcteur PID, on obtient les expressions suivantes des gains :

$$K_{pj} = 3\varpi_{\min}^2, \tag{5.12}$$
$$K_{vj} = 3\varpi_{\min}, \tag{5.13}$$
$$K_{ij} = \varpi_{\min}^3, \tag{5.14}$$

où $\varpi_{\min}$ est la valeur minimale de ϖ_1 et ϖ_2, avec $\varpi_j = \varpi_{rj}/2$, cf. paragraphe précédent.

Les gains de la commande CTC sont :

$$\begin{aligned} K_p &= 10^3 \begin{bmatrix} 6.4358 & 6.4358 \end{bmatrix} \\ K_v &= \begin{bmatrix} 138.9509 & 138.9509 \end{bmatrix} \\ K_i &= 10^4 \begin{bmatrix} 9.9362 & 9.9362 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.3 Influence du temps de parcours sur les performances en précision

Les comportements de suivi de trajectoire d'un robot manipulateur peuvent changer en fonction de la durée imposée. Dans cette section, pour la trajectoire de référence circulaire définie aux deux chapitres précédents, on compare les erreurs de circularité maximales et les erreurs de circularité moyennes obtenues pour trois durées de parcours différentes :

— rapide (1 seconde),
— normale (1.5 secondes),
— lente (3 secondes).

5.3.1 Cas nominal

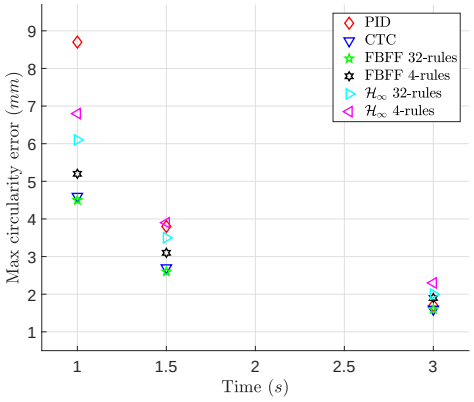


FIGURE 5.2: Erreur de circularité maximale en fonction du temps de parcours imposé — cas nominal.

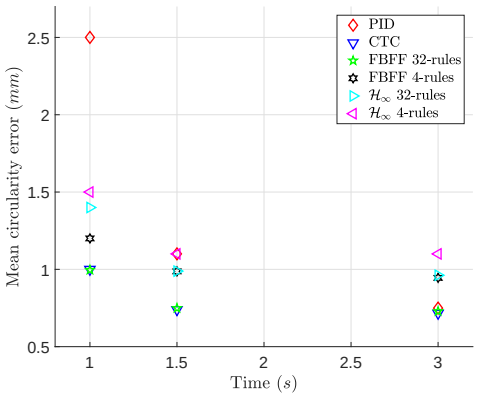


FIGURE 5.3: Erreur de circularité moyenne en fonction du temps de parcours imposé — cas nominal

Pour un fonctionnement à vide et sans contact, les erreurs de circularité maximales et moyennes sont données dans les figures 5.2 et 5.3. Pour les deux indicateurs et les trois durées, les meilleurs résultats ont été obtenus avec le correcteur à 32 règles défini au 4e chapitre. Des résultats très similaires sont obtenus pour la commande par CTC. Il est à noter également que la dispersion des résultats obtenus avec les différents correcteurs augmente lorsqu'on fait parcourir plus rapidement la trajectoire de référence. Le pire résultat est obtenu pour le correcteur PID : une erreur moyenne de 2.5 mm pour une durée de une seconde à comparer à l'erreur de 1 mm obtenue pour les deux correcteurs précédents. Enfin, bien que présentant une structure simplifiée, le correcteur FBFF 4-rules permet d'obtenir des résultats satisfaisants.

5.3.2 Cas avec force appliquée à l'effecteur

Pour le cas avec force extérieure, les erreur de circularité maximales et moyennes sont données dans les figures 5.4 et 5.5. Il n'y a pas ici de correcteur miraculeux qui produit les meilleurs résultats dans les différents cas considérés.

En ce qui concerne l'erreur maximale de suivi de trajectoire, elle est minimisée par les deux correcteurs FBFF 4-rules et FBFF 32-rules et maximisée pour le correcteur PID.

Quant à l'erreur moyenne, les résultats sont plus variables : elle est minimisée par le correcteur CTC pour la durée la plus longue, par le correcteur $\mathcal{H}_\infty$ 32-rules pour une durée de parcours de 2 s et par le correcteur FBFF 4-rules pour le régime le plus rapide. Remarquons que l'erreur moyenne obtenue par ce dernier varie peu en fonction de la durée de parcours, si bien qu'il est un mauvais choix pour la plus grande durée de parcours considérée.

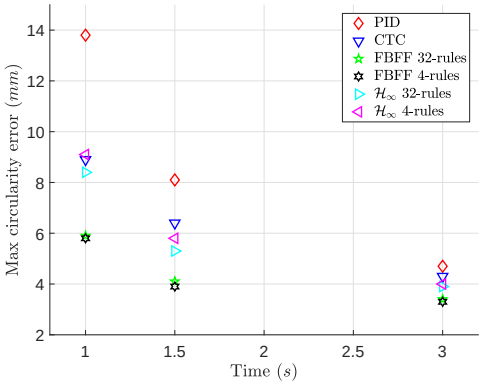


FIGURE 5.4: Erreur de circularité maximale en fonction du temps de parcours imposé — cas avec perturbation

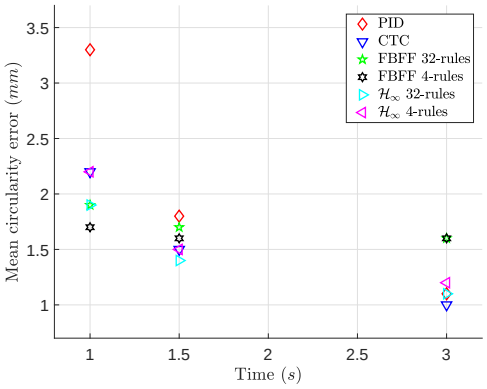


FIGURE 5.5: Erreur de circularité moyenne en fonction du temps de parcours imposé — cas avec perturbation

5.4 Performances en régime rapide

5.4.1 Critères de performance

Nous nous plaçons ici dans le cas le plus exigent en termes de performance dynamique attendue du robot. Pour affiner l'étude précédente, nous considérons dans cette section de nouveaux indicateurs :

— la valeur absolue moyenne (mav) de l'erreur de suivi pour la $i-$ème articulation :

$$E_{i\text{mav}} = \frac{1}{T}\int_0^T |q_i(t) - q_{ir}(t)|\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2; \tag{5.16}$$

— la valeur absolue maximale (M) de l'erreur de suivi pour la $i-$ème articulation :

$$E_{i\text{M}} = \max_{t\in[0,T]} |q_i(t) - q_{ir}(t)|, \quad i = 1, 2; \tag{5.17}$$

— la valeur quadratique moyenne (rms) du couple du $i-$ème actionneur :

$$\Gamma_{i\text{rms}} = \frac{1}{T}\sqrt{\int_0^T \Gamma_i^2(t)\mathrm{d}t}, \quad i = 1, 2, \tag{5.18}$$

(cet indicateur représente l'énergie de commande consommée) ;

— la valeur absolue maximale (M) du couple du $i-$ème actionneur :

$$\Gamma_{i\text{M}} = \max_{t\in[0,T]} |\Gamma_i(t)|, \quad i = 1, 2. \tag{5.19}$$

5.4.2 Cas nominal

Les évolutions des erreurs de circularité pour les différents correcteurs sont tracées à la figure 5.6 confirmant certains faits relevés dans la section précédente sur les bonnes performances des correcteurs CTC et FBFF 32-rules et 4-rules ou, au contraire, des performances limitées du correcteur PID.

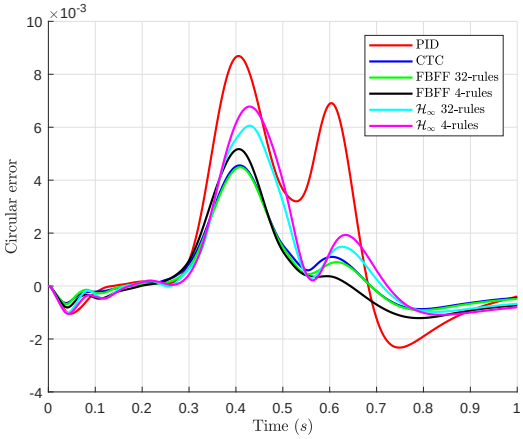


FIGURE 5.6: Erreurs de circularité.

Concernant les performances de suivi dans l'espace articulaire du robot, les évolutions des positions et vitesses des deux actionneurs sont représentées figures 5.7-5.10 et confirment les résultats précédents.

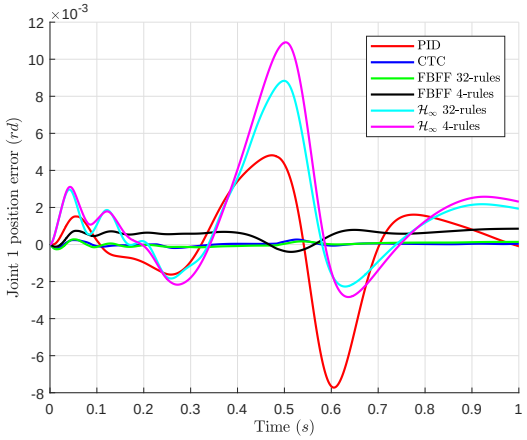


FIGURE 5.7: Erreurs de position de l'articulation 1.

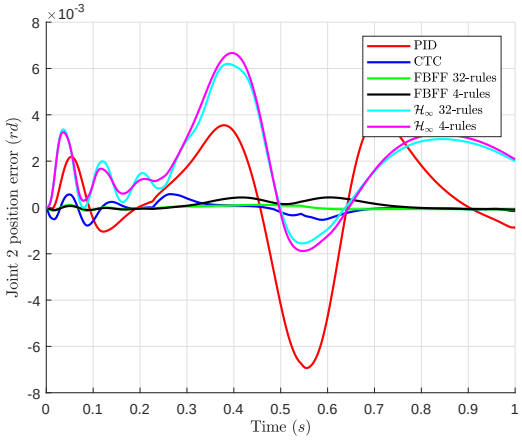


FIGURE 5.8: Erreurs de position de l'articulation 2.

La table 5.1 donne les valeurs moyennes absolues et maximales des erreurs de suivi des deux articulations. Pour l'articulation 1, les meilleures performances sont obtenues pour la commande CTC, suivie de peu du correcteur FBFF 32-rules. Le correcteur FBFF 4-rules vient en 3e position, mais donne aussi des erreurs inférieures au millimètre, contrairement au trois autres correcteurs conduisant à une erreur moyenne supérieure à 7 mm. Les résultats sont assez semblables pour l'articulation 2, l'ordre différant légèrement (le correcteur

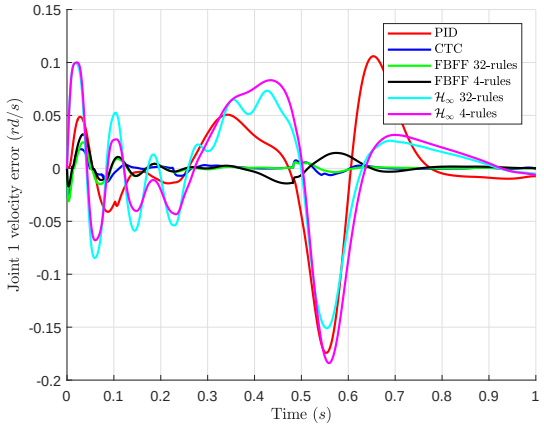


FIGURE 5.9: Erreurs de vitesse de l'articulation 1.

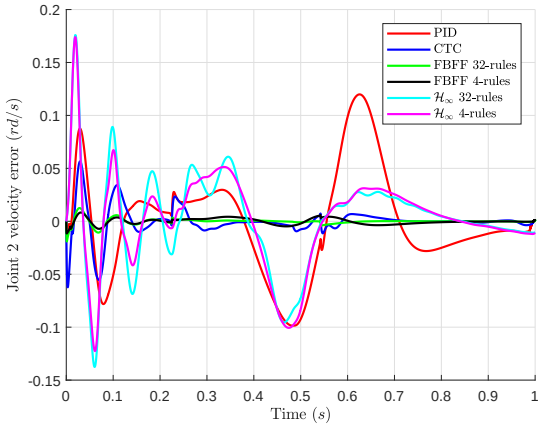


FIGURE 5.10: Erreurs de vitesse de l'articulation 2.

TABLE 5.1: valeurs moyennes absolues et maximales des erreurs de suivi des deux articulations (en gras : plus petite valeur, en italique : deuxième meilleure valeur)

Critère	E_{1M} (mm)	E_{2M} (mm)	E_{1mav} (mm)	E_{2mav} (mm)
PID	7.7	6.9	2	2
CTC	**0.27**	0.78	**0.067**	0.19
FBFF 32-rules	*0.28*	**0.14**	*0.097*	**0.069**
FBFF 4-rules	0.85	*0.43*	0.57	*0.15*
$\mathcal{H}_\infty$ 32-rules	8.8	6.2	2.2	2.2
$\mathcal{H}_\infty$ 4-rules	10.9	6.7	2.7	2.4

CTC est en 3e place).

Les tracés des couples des deux actionneurs en fonction du temps sont donnés aux figures 5.11 et 5.12. Leurs valeurs quadratiques moyennes et efficaces (rms) sont données à la table 5.2. Il n'y a pas de différences importantes sur les valeurs de ces différents indicateurs entre les approches proposées. Les couples maximaux nécessaires vont de 497 N ($\mathcal{H}_\infty$ 32-rules) à 509 N (PID) pour l'articulation 1 et de 76 N ($\mathcal{H}_\infty$ 32-rules) à 84.6 N (PID) pour l'articulation 2. D'un point de vue énergétique, les performances des différents correcteurs sont voisines, mis à part, peut être, le régulateur PID qui donne systématiquement les plus mauvaises valeurs.

5.4.3 Cas avec force appliquée à l'effecteur

Concernant les performances en précision, les évolutions des erreurs de circularité obtenues pour chacun des correcteurs sont données dans la figure 5.13. On peut noter les bonnes performances des régulateurs FBFF simplifié ou complet avec une erreur de circularité variant de -4 à 6 mm. Contrairement au cas précédent, les performances du correcteur CTC sont plus faibles et se rapprochent de celles des correcteurs $\mathcal{H}_\infty$ (32 et 4 règles) avec une erreur allant de -3.5 à 9 mm. Enfin, le PID conduit à une erreur de

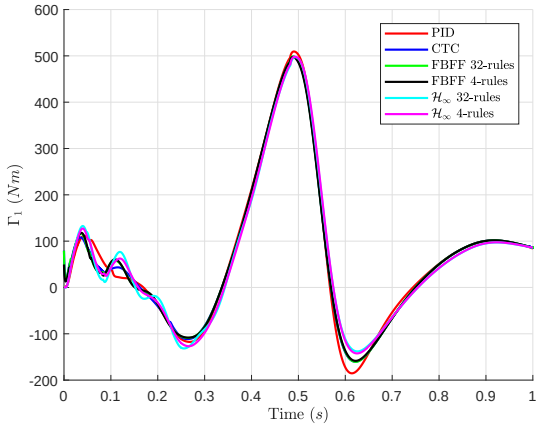


FIGURE 5.11: Couples Γ_1 (1er actionneur).

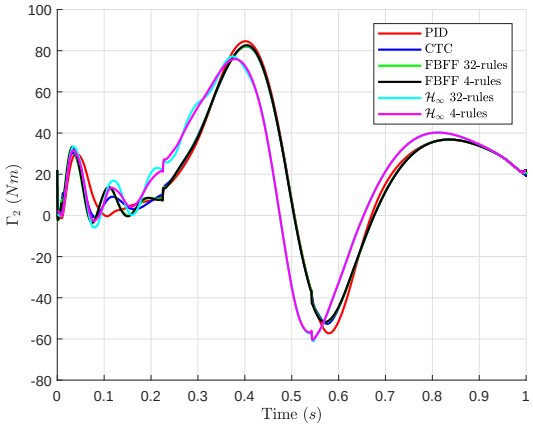


FIGURE 5.12: Couples Γ_2 (2nd actionneur).

TABLE 5.2: Couples maximaux et efficaces (en gras : plus petite valeur, en italique deuxième meilleure valeur)

Critère	Γ_{1M}	Γ_{2M}	Γ_{1rms}	Γ_{2rms}
PID	509.43	84.59	174.53	38.17
CTC	498.20	82.14	169.73	**37.15**
FBFF 32-rules	498.75	82.21	169.78	*37.18*
FBFF 4-rules	*497.25*	82.67	169.37	37.24
$\mathcal{H}_\infty$ 32-rules	**497.12**	*77.21*	**168.58**	38.12
$\mathcal{H}_\infty$ 4-rules	498.12	**75.92**	*169.20*	38.01

circularité de l'ordre de 14 mm au maximum.

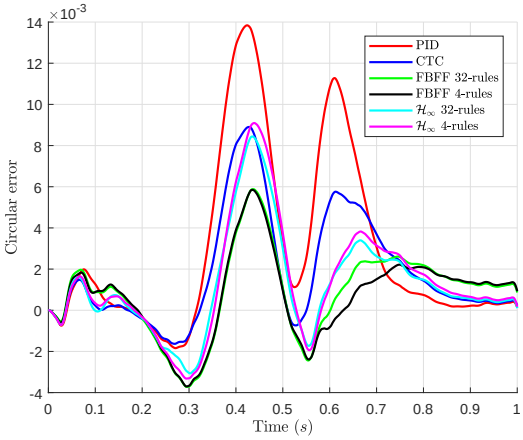


FIGURE 5.13: Erreurs de circularité.

Les erreurs de suivi en position et en vitesse pour chacun des deux actionneurs sont représentées sur les figures 5.14–5.17. La table 5.3 regroupe les différentes valeurs des

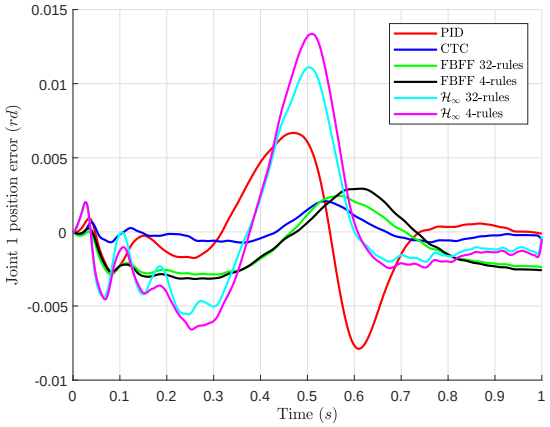


FIGURE 5.14: Erreurs de position de l'articulation 1.

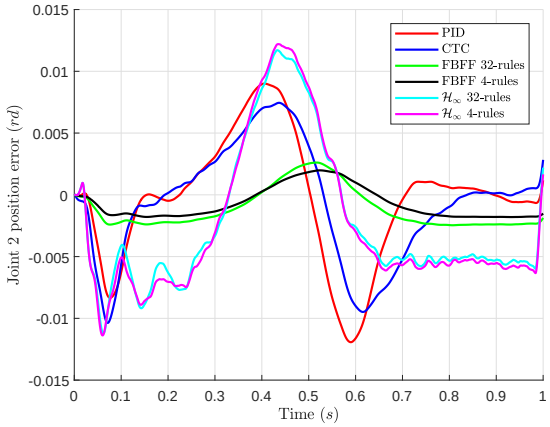


FIGURE 5.15: Erreurs de position de l'articulation 2.

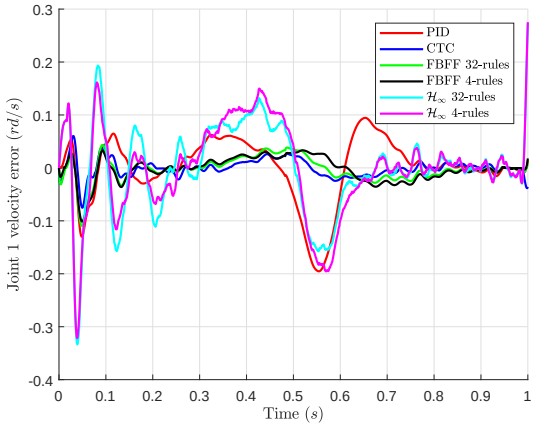


FIGURE 5.16: Erreurs de vitesse de l'articulation 1.

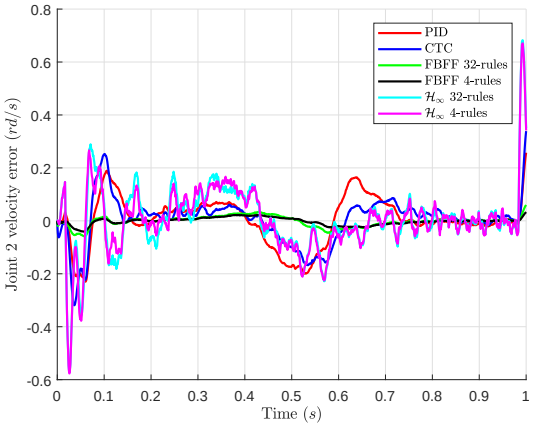


FIGURE 5.17: Erreurs de vitesse de l'articulation 2.

TABLE 5.3: valeurs moyennes absolues et maximales des erreurs de suivi des deux articulations (en gras : plus petite valeur, en italique : deuxième meilleure valeur)

Critère	E_{1M} (mm)	E_{2M} (mm)	E_{1mav} (mm)	E_{2mav} (mm)
PID	7.9	11.9	2.2	3.4
CTC	**2.1**	10.4	**0.55**	3.5
FBFF 32-rules	*2.9*	*2.6*	*1.8*	*1.8*
FBFF 4-rules	3.2	**2**	2	**1.3**
$\mathcal{H}_\infty$ 32-rules	11.1	11.7	3.1	5.6
$\mathcal{H}_\infty$ 4-rules	13.4	12.2	3.8	5.9

indicateurs (5.16) et (5.17). Les conclusions précédentes restent valables à une nuance près : pour la 1er articulation, le correcteur CTC fournit des erreurs absolues moyennes et maximales plus faibles - il y a cependant peu de différences avec les correcteurs FBFF.

Les évolutions des couples des deux actionneurs sont données dans les figures 5.18 et

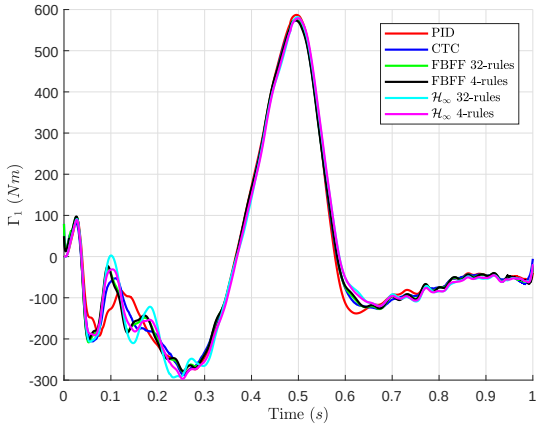


FIGURE 5.18: Couples Γ_1.

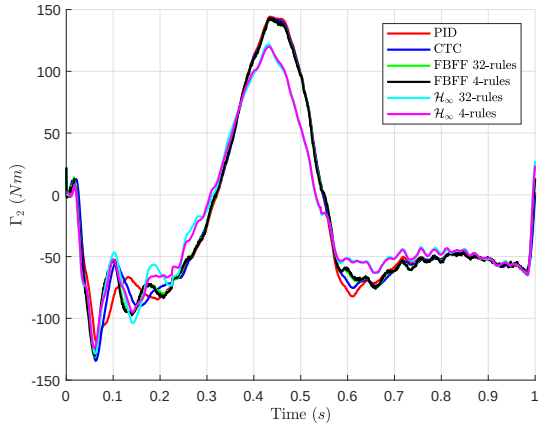


FIGURE 5.19: Couples Γ_2.

5.19, leurs valeurs efficaces et maximales sont présentées dans la table 5.4. Il n'y a pas de différences notables entre les correcteurs.

Le correcteur PID conduit aux valeurs maximales de ces indicateurs avec un couple maximal de 586.9 N pour l'articulation 1 et 144.3 N pour l'articulation 2. L'approach $\mathcal{H}_\infty$ a la meilleur performance de suivi de trajectoire pour l'articulation 2.

TABLE 5.4: Couples maximaux et efficaces (en gras : plus petite valeur, en italique deuxième meilleure valeur)

Critère	Γ_{1M}	Γ_{2M}	Γ_{1rms}	Γ_{2rms}
PID	586.92	144.31	214.64	72.72
CTC	**573.83**	142.65	*211.30*	72.50
FBFF 32-rules	575.68	142.81	211.33	71.80
FBFF 4-rules	*573.98*	143.20	**210.78**	71.67
$\mathcal{H}_\infty$ 32-rules	581.59	*128.63*	213.40	*62.76*
$\mathcal{H}_\infty$ 4-rules	578.77	**124.18**	213.26	**62.51**

5.5 Conclusions

Ce chapitre présente une comparaison des performances des correcteurs proposés aux chapitres 3 et 4 avec d'autres correcteurs utilisés couramment en industrie : le correcteur PID et la commande *CTC (Computed Torque Control)*. Ces résultats montrent que le correcteur simplifié FBFF 4-rules avec la méthode de synthèse proposée au chapitre 4 constitue une solution viable de commande d'un robot manipulateur avec des performances proches voire meilleure que la technique de commande *CTC* et une architecture relativement simple.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire présente notre contribution à la modélisation et la commande en suivi de trajectoire de robots manipulateurs.

Dans un premier temps, le contexte des robots manipulateurs industriels a été présenté. Les modèles utilisés pour l'analyse et la synthèse des lois de commande de robot manipulateur ont été rappelés. En particulier, les modèles dynamiques sous forme analytique d'un manipulateur plan à deux degrés de liberté ont été développés afin de servir d'exemple dans la suite du manuscrit pour la synthèse de commande. En l'absence d'essais expérimentaux, le but était de disposer également d'un modèle de simulation le plus fidèle possible du point de vue du comportement mécanique. Ce modèle a été développé dans l'environnement Simulink de Matlab avec la toolbox Simscape Multibody^{TM}. Sachant que la synthèse de commande est basée sur un modèle dynamique rigide sans connaissance précise des lois de comportement des perturbations comme le frottement sec ou des forces extérieures, le modèle de simulation inclut des articulations flexibles (responsable de résonances mécaniques), un modèle de frottement sec réaliste par articulation (avec effet de Stribeck et équilibre des efforts à vitesse nulle) et un modèle de force extérieure exercée sur l'organe terminal (représentant un procédé de découpage ou d'usinage). L'utilisation de ce modèle a permis de valider dans les derniers chapitres les méthodes de synthèse proposées et la robustesse des performances des lois de commande aux incertitudes de modélisation structurées et non structurées et aux perturbations. Par la suite, la problématique du suivi de trajectoire a été posée et une revue de littérature succincte sur les principales méthodes de commande des robots manipulateurs a été exposée.

Dans le chapitre 2, l'approche Takagi-Sugeno pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires a été rappelée. L'approche T-S offre différentes possibilités en matière d'analyse et de synthèse de lois de commande. Dans ce chapitre, les représentations de systèmes non linéaires sous la forme T-S standard ou descripteur ont été rappelées. Ensuite, les problèmes de stabilité et stabilisation de ces modèles ont été abordés. Les problèmes de commande basée sur les modèles T-S peuvent être formulés sous forme de contraintes décrites par des inégalités matricielles linéaires. La méthode directe de Lyapunov est utilisée pour obtenir les conditions de stabilité permettant le calcul des gains. Enfin, des critères de performance en boucle fermée comme la $\alpha-$stabilité, le critère $\mathcal{H}_\infty$, etc. ont été présentés.

Dans le chapitre 3, une étude sur le suivi de trajectoire d'un manipulateur avec une contrainte $\mathcal{H}_\infty$ pour le rejet de perturbation a été donnée. La dynamique non linéaire du robot a été écrite sous forme T-S descripteur. Le problème de synthèse de commande pour le suivi de trajectoire a été posé en introduisant un modèle de référence sous forme standard. Ce problème a été transformé grâce à l'approche T-S descripteur et la définition d'une loi PDC en conditions LMIs pour le calcul des matrices de gain. Une commande PDC avec action intégrale a également été introduite. Afin de simplifier le modèle T-S descripteur et réduire le nombre de règles dans la loi PDC, des conditions LMI pour la

synthèse des gains ont été établies dans le cas d'un modèle avec incertitudes. Les résultats de simulation illustrent la robustesse de l'approche proposée dans différents cas (suivant les perturbations et les variations de charge de l'effecteur). Dans tous les cas considérés, l'effet du frottement sec et des résonances mécaniques est pris en compte dans la simulation. Les performances obtenues sont similaires pour les commandes PDC à 32 règles et 4 règles ; elles apparaissent comme satisfaisantes dans le cas nominal et le cas avec variation de charge. Néanmoins, les performances obtenues en présence d'une force externe appliquée à l'effecteur restent à améliorer sur le plan de la précision de suivi de trajectoire.

Dans le chapitre 4, une nouvelle approche de commande pour le suivi de trajectoire d'un manipulateur a été présentée. Elle est fondée sur un schéma avec retour d'état et anticipation et elle s'appuie sur une contrainte $\mathcal{L}_\infty$ de façon à garantir une amplitude maximale de l'erreur de suivi pour une entrée de perturbation donnée et supposée bornée. Le problème est reformulé grâce à une représentation descripteur T-S de l'écart entre l'état du robot et la trajectoire pour aboutir à des conditions LMI permettant le calcul des gains du retour d'état PDC. Cette approche, contrairement à celle du chapitre précédent, ne nécessite pas de modèle de référence, ce qui la rend plus simple. Les résultats de simulation présentés ont permis d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Le dernier chapitre expose un comparatif des performances de nos deux approches avec d'autres utilisées couramment en robotique : les commandes PID et CTC. L'influence de la vitesse de parcours de la trajectoire et des perturbations appliquées a été analysée. Les simulations ont montré les bonnes performances de l'approche $\mathcal{L}_\infty$ dans les différents cas. En revanche, l'approche $\mathcal{H}_\infty$ présente de moins bonnes performances que le schéma CTC en l'absence de forces extérieures et, même avec ces perturbations, son intérêt n'est pas avéré. Quant à l'approche $\mathcal{L}_\infty$, elle est similaire ou parfois sensiblement meilleure que le schéma CTC dans le cas nominal et elle dépasse les autres approches dans le cas avec perturbations. En outre, les commandes PDC avec 4 règles ont des performances assez proches de celles avec 32 règles, ce qui permet donc de réduire la complexité des lois de commande sans dégrader les performances.

Les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de développement :

1. **À court terme et moyen terme**
   - Un robot de type SCARA opérationnel devrait être prochainement disponible dans notre laboratoire et permettrait de valider les différents résultats de simulation par des essais expérimentaux. Pour cela, une identification paramétrique du modèle dynamique sera nécessaire au préalable.
   - La commande proposée dans le chapitre 4 combine une action anticipatrice à un retour d'état ce qui nécessite la présence de capteurs de vitesse. Sans ces capteurs, une commande par retour de sortie est nécessaire. Il est donc nécessaire d'aborder le problème du suivi de trajectoire en utilisant des correcteurs à retour de sortie.
     - La possibilité d'utiliser en premier lieu un retour de sortie statique [Kau et al., 2007,Bouarar et al., 2013,Nguyen et al., 2018] est à étudier en terme de faisabilité, en premier lieu pour des modèles de robot avec peu de non-linéarités. Ce type de lois de commande par retour de sortie statique est intéressant dans le cadre d'applications nécessitant un faible coût de calcul parce qu'il n'y a pas besoin de résolution numérique d'équations différentielles supplémentaires comme des lois de commande à retour de sortie dy-

namique. Notons que dans la littérature, il existe déjà plusieurs résultats concernant la commande par retour de sortie statique de systèmes T-S de différents types (en temps continu ou discret, sous forme standard ou descripteur) [Bouarar et al., 2013, Nguyen et al., 2017c, Wang et al., 2019]. Ces travaux abordent tous le problème de la stabilisation. Il reste à étudier leur applicabilité au problème du suivi de trajectoires.

  - Pour une plus grande marge de manoeuvre, on envisage de développer des commandes à retour de sortie dynamique reposant, par exemple, sur l'utilisation d'observateurs [Tanaka and Wang, 2004, Nguyen et al., 2019a, Guerra et al., 2015, Guelton et al., 2008]. Une des difficultés rencontrées pour la commande des robots manipulateurs est l'existence de prémisses non mesurables. Les travaux récents sur les observateurs avec prémisses non mesurables seront étudiés [Ichalal et al., 2018, Guerra et al., 2018]. Les conditions seront BMI ; par conséquent, des techniques de convexification seront testées pour réduire le conservatisme [Nguyen et al., 2017c, Nguyen et al., 2018].

- Dans le travail présenté, on a utilisé un modèle dynamique rigide du robot manipulateur pour la synthèse de la loi de commande. Lors du parcours des trajectoires à haute vitesse, les modes de résonance du robot manipulateur sont excités, ce qui se traduit par des vibrations et donc une dégradation de la précision de suivi de trajectoire. Pour limiter ces vibrations, un critère $\mathcal{H}_\infty$ en fréquence finie [Iwasaki and Hara, 2005, Wang et al., 2013, Xu et al., 2016, El-Amrani et al., 2018] pourrait être introduit, conduisant à la définition de nouvelles lois de commande.

2. **À long terme** Ces dernières années connaissent le développement rapide d'applications de robotique en interaction avec l'homme (robotique collaborative, exosquelette actif, etc.). Un des défis concerne la génération de mouvement du robot paraissant naturel pour l'utilisateur. Il serait intéressant de voir comment les travaux développés dans cette thèse peuvent s'inscrire dans cette problématique.

Bibliographie

[Abdulkareem et al., 2016] Abdulkareem, A., Awosope, C., Daramola, S., and Nnorom, E. (2016). Development of a programmable mobile robot. *International Journal of Applied Engineering Research*, 11(4).

[Allouche, 2016] Allouche, B. (2016). *Modélisation et commande des robots : nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.

[Andersson et al., 2007] Andersson, S., Söderberg, A., and Björklund, S. (2007). Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts. *Tribol Int*, 40(4) :580–587.

[Asimov, 1942] Asimov, I. (1942). Runaround. astounding science fiction. *Street & Smith, New York*.

[Asimov, 2004] Asimov, I. (2004). *I, robot*, volume 1. Spectra.

[Babuška, 1998] Babuška, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*. International series in intelligent technologies. Springer Science+Business Media.

[Ballard et al., 2012] Ballard, L. A., Sabanovic, S., Kaur, J., and Milojevic, S. (2012). George charles devol, jr.[history]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3) :114–119.

[Bernstein, 1999] Bernstein, D. S. (1999). On bridging the theory/practice gap. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(6) :64–70.

[Bouarar et al., 2013] Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2013). Robust non-quadratic static output feedback controller design for Takagi-Sugeno systems using descriptor redundancy. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(2) :739–756.

[Boyd et al., 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia.

[Breazeal, 2011] Breazeal, C. (2011). Social robots for health applications. In *2011 Annual international conference of the IEEE engineering in medicine and biology society*, pages 5368–5371. IEEE.

[Burkov et al., 1996] Burkov, I., Pervozvanski, A., and Freidovich, L. (1996). Algorithms of robust global stabilization of flexible manipulators. In *Proc. World Automation Congress, Montepellier, France*.

[Burkov et al., 1998] Burkov, I. V., Pervozvanski, A. A., and Freidovich, L. (1998). Robust stabilization of manipulators via control with slight integral feedback. *Mechanics of Solids*, 34(3) :13–20.

[Cao and Frank, 2000] Cao, Y.-Y. and Frank, P. M. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8(2) :200–211.

[Chadli et al., 2014] Chadli, M., Karimi, H., and Shi, P. (2014). On stability and stabilization of singular uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems. *J. Franklin Inst.*, 351(3) :1453–1463.

[Chen et al., 2000a] Chen, B.-S., Tseng, C.-S., and Uang, H.-J. (2000a). Mixed H_2-H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems : an LMI approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8(3) :249–265.

[Chen, 2011] Chen, C.-S. (2011). Supervisory adaptive tracking control of robot manipulators using interval type-2 tsk fuzzy logic system. *IET Control Theory Appl.*, 5(15) :1796–1807.

[Chen et al., 2000b] Chen, W.-H., Ballance, D. J., Gawthrop, P. J., and O'Reilly, J. (2000b). A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators. *IEEE Transactions on industrial Electronics*, 47(4) :932–938.

[Choi and Kim, 1997] Choi, S.-B. and Kim, J. (1997). A fuzzy-sliding mode controller for robust tracking of robotic manipulators. *Mechatronics*, 7(2) :199–216.

[Chu et al., 2014] Chu, Z., Cui, J., and Sun, F. (2014). Fuzzy adaptive disturbance-observer-based robust tracking control of electrically driven free-floating space manipulator. *IEEE Syst. J.*, 8(2) :343–352.

[Codourey, 1998] Codourey, A. (1998). Dynamic modeling of parallel robots for computed-torque control implementation. *The International Journal of Robotics Research*, 17(12) :1325–1336.

[Craig et al., 1987] Craig, J. J., Hsu, P., and Sastry, S. S. (1987). Adaptive control of mechanical manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(2) :16–28.

[Dahl and Boulos, 2014] Dahl, T. and Boulos, M. (2014). Robots in health and social care : A complementary technology to home care and telehealthcare ? *Robotics*, 3(1) :1–21.

[Dai, 1989] Dai, L. (1989). *Singular control systems*. Lect. Notes Contr. Inf. Springer-Verlag.

[Dawson et al., 2003] Dawson, D. M., Abdallah, C. T., and Lewis, F. L. (2003). *Robot Manipulator Control : Theory and Practice*. CRC Press.

[Denkena and Holz, 2006] Denkena, B. and Holz, C. (2006). Advanced position and force control concepts for the linear direct driven hexapod palida. In *Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, volume 33, pages 359–378.

[Dombre and Khalil, 1999] Dombre, E. and Khalil, W. (1999). *Modélisation, identification et commande des robots*. Hermes Sciences. in French, Paris.

[El-Amrani et al., 2018] El-Amrani, A., Boukili, B., Hmamed, A., El Hajjaji, A., and Boumhidi, I. (2018). Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for 2D continuous systems with finite frequency specifications. *Int. J. Syst. Sci.*, 49(1) :43–57.

[Eom et al., 1998] Eom, K. S., Suh, I. H., Chung, W. K., and Oh, S.-R. (1998). Disturbance observer based force control of robot manipulator without force sensor. In *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146)*, volume 4, pages 3012–3017. IEEE.

[Feng, 2003] Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(5) :605–612.

[Feng, 2006] Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 14(5) :676–697.

[Garriz and Domingo, 2019] Garriz, C. and Domingo, R. (2019). Development of trajectories through the kalman algorithm and application to an industrial robot in the automotive industry. *IEEE Access*.

[Gasparetto and Scalera, 2019] Gasparetto, A. and Scalera, L. (2019). A brief history of industrial robotics in the 20th century. *Advances in Historical Studies*, 8(1).

[Gasso et al., 2000] Gasso, K., Mourot, G., and Ragot, J. (2000). Identification of an output error Takagi-Sugeno model. In *IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 1, pages 14–19.

[Guelton et al., 2009] Guelton, K., Bouarar, T., and Manamanni, N. (2009). Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems-a descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19) :2796–2811.

[Guelton et al., 2008] Guelton, K., Delprat, S., and Guerra, T.-M. (2008). An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi-Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form. *Control Eng. Pract.*, 16(12) :1414–1426.

[Guerra et al., 2012] Guerra, T. M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.

[Guerra et al., 2015] Guerra, T. M., Estrada-Manzo, V., and Lendek, Z. (2015). Observer design for takagi–sugeno descriptor models : An lmi approach. *Automatica*, 52 :154–159.

[Guerra et al., 2009] Guerra, T. M., Kruszewski, A., and Lauber, J. (2009). Discrete tagaki–sugeno models for control : Where are we ? *Annual Reviews in control*, 33(1) :37–47.

[Guerra et al., 2018] Guerra, T.-M., Márquez, R., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2018). $\mathcal{H}_\infty$-based observer design for nonlinear systems via Takagi–Sugeno models with unmeasured premise variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3) :1498–1509.

[Guerra and Vermeiren, 2004] Guerra, T.-M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5) :823–829.

[Han et al., 2014] Han, Q., Zhang, H., and Liu, J. (2014). Nonlinear dynamics of controlled synchronizations of manipulator system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

[Hu et al., 2012] Hu, Q., Xu, L., and Zhang, A. (2012). Adaptive backstepping trajectory tracking control of robot manipulator. *J. Franklin Inst.*, 349(3) :1087–1105.

[Huang and Chiang, 2016] Huang, H.-C. and Chiang, C.-H. (2016). Backstepping holonomic tracking control of wheeled robots using an evolutionary fuzzy system with qualified ant colony optimization. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 18(1) :28–40.

[Ichalal et al., 2018] Ichalal, D., Marx, B., Mammar, S., Maquin, D., and Ragot, J. (2018). How to cope with unmeasurable premise variables in Takagi-Sugeno observer design : dynamic extension approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67 :430–435.

[Iwasaki and Hara, 2005] Iwasaki, T. and Hara, S. (2005). Generalized kyp lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :41–59.

[Johansen et al., 2000] Johansen, T. A., Shorten, R., and Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8(3) :297–313.

[Johansson et al., 1999] Johansson, M., Rantzer, A., and Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 7(6) :713–722.

[Kau et al., 2007] Kau, S.-W., Lee, H.-J., Yang, C.-M., Lee, C.-H., Hong, L., and Fang, C.-H. (2007). Robust $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy static output feedback control of ts fuzzy systems with parametric uncertainties. *Fuzzy sets and systems*, 158(2) :135–146.

[Kawamoto et al., 1992] Kawamoto, S., Tada, K., Onoe, N., Ishigame, A., and Taniguchi, T. (1992). Construction of exact fuzzy system for nonlinear system and its stability analysis. In *8th Fuzzy System Symposium (in Japanese)*, pages 517—-520.

[Kelly et al., 2006] Kelly, R., Davila, V. S., and Perez, J. A. L. (2006). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media.

[Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.

[Khalil and Dombre, 2004] Khalil, W. and Dombre, E. (2004). *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann.

[Khalil et al., 2014] Khalil, W., Vijayalingam, A., Khomutenko, B., Mukhanov, I., Lemoine, P., and Ecorchard, G. (2014). Opensymoro : An open-source software package for symbolic modelling of robots. In *2014 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 1206–1211. IEEE.

[Khatib, 1987] Khatib, O. (1987). A unified approach for motion and force control of robot manipulators : The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(1) :43–53.

[Kiguchi and Fukuda, 1997] Kiguchi, K. and Fukuda, T. (1997). Intelligent position/force controller for industrial robot manipulators-application of fuzzy neural networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 44(6) :753–761.

[Kurfess, 2004] Kurfess, T. R. (2004). *Robotics and automation handbook*. CRC press.

[Lee et al., 2001] Lee, K. R., Jeung, E. T., and Park, H. B. (2001). Robust fuzzy $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain nonlinear systems via state feedback : an LMI approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 120(1) :123–134.

[Lee and Khalil, 1997] Lee, K. W. and Khalil, H. K. (1997). Adaptive output feedback control of robot manipulators using high-gain observer. *International Journal of Control*, 67(6) :869–886.

[Lefeber, 2000] Lefeber, A. A. J. (2000). *Tracking control of nonlinear mechanical systems*. Universiteit Twente Eindhove, The Netherlands.

[Lendek et al., 2011] Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer.

[Li et al., 2001] Li, W., Chang, X., Wahl, F. M., and Farrell, J. (2001). Tracking control of a manipulator under uncertainty by fuzzy p+ id controller. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(1) :125–137.

[Lindner et al., 2016] Lindner, L., Sergiyenko, O., Rodríguez-Quiñonez, J. C., Rivas-Lopez, M., Hernandez-Balbuena, D., Flores-Fuentes, W., Natanael Murrieta-Rico, F., and Tyrsa, V. (2016). Mobile robot vision system using continuous laser scanning for industrial application. *Industrial Robot : An International Journal*, 43(4) :360–369.

[Liu and Zhang, 2003] Liu, X. and Zhang, Q. (2003). New approaches to $\mathcal{H}_\infty$ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 39(9) :1571–1582.

[Llama et al., 2000] Llama, M. A., Kelly, R., and Santibanez, V. (2000). Stable computed-torque control of robot manipulators via fuzzy self-tuning. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, 30(1) :143–150.

[Löfberg, 2004] Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in Matlab. In *IEEE Int. Symp. Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 284–289, Taipei.

[Lu et al., 2017] Lu, X.-G., Liu, M., and Liu, J.-X. (2017). Design and optimization of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot trajectory control. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 19(1) :190–206.

[Luenberger, 1977] Luenberger, D. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Trans. Autom. Control*, 22(3) :312–321.

[Ma et al., 1998] Ma, X.-J., Sun, Z.-Q., and He, Y.-Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6(1) :41–51.

[Makarov et al., 2016] Makarov, M., Grossard, M., Rodríguez-Ayerbe, P., and Dumur, D. (2016). Modeling and preview H_∞ control design for motion control of elastic-joint robots with uncertainties. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 63(10) :6429–6438.

[Mamdani and Assilian, 1975] Mamdani, E. and Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1) :1–13.

[Middletone and Goodwin, 1986] Middletone, R. and Goodwin, G. (1986). Adaptive computed torque control for rigid link manipulators. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 25, pages 68–73. IEEE.

[Mohammadi et al., 2013] Mohammadi, A., Tavakoli, M., Marquez, H. J., and Hashemzadeh, F. (2013). Nonlinear disturbance observer design for robotic manipulators. *Control Engineering Practice*, 21(3) :253–267.

[Morère, 2001] Morère, Y. (2001). *Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Valenciennes.

[Mozelli et al., 2009] Mozelli, L. A., Palhares, R. M., Souza, F., and Mendes, E. M. (2009). Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. *Automatica*, 45(6) :1580–1583.

[Nguyen et al., 2018] Nguyen, A.-T., Chevrel, P., and Claveau, F. (2018). Gain-scheduled static output feedback control for saturated LPV systems with bounded parameter variations. *Automatica*, 89 :420–424.

[Nguyen et al., 2019a] Nguyen, A.-T., Guerra, T., and Campos, V. (2019a). Simultaneous estimation of state and unknown input with l_∞ guarantee on error-bounds for fuzzy descriptor systems. *IEEE Control Systems Letters*, 3(4) :1020–1025.

[Nguyen et al., 2016] Nguyen, A.-T., Laurain, T., Palhares, R., Lauber, J., Sentouh, C., and Popieul, J.-C. (2016). LMI-based control synthesis of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems subject to $\mathcal{L}_2$ or $\mathcal{L}_\infty$ disturbances. *Neurocomputing*, 207 :793–804.

[Nguyen et al., 2017a] Nguyen, A.-T., Márquez, R., and Dequidt, A. (2017a). An augmented system approach for LMI-based control design of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 61 :96–102.

[Nguyen et al., 2017b] Nguyen, A.-T., Sentouh, C., and Popieul, J.-C. (2017b). Driver-automation cooperative approach for shared steering control under multiple system constraints : Design and experiments. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 64(5) :3819–3830.

[Nguyen et al., 2017c] Nguyen, A.-T., Tanaka, K., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2017c). Static output feedback design for a class of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems. *J. Franklin Inst.*, 354(7) :2856–2870.

[Nguyen et al., 2019b] Nguyen, A.-T., Taniguchi, T., Eciolaza, L., Campos, V., Palhares, R., and Sugeno, M. (2019b). Fuzzy control systems : Past, present and future. *IEEE Comput. Intell. Mag.*, 14(1) :56–68.

[Nikdel et al., 2016] Nikdel, N., Badamchizadeh, M., Azimirad, V., and Nazari, M. A. (2016). Fractional-order adaptive backstepping control of robotic manipulators in the presence of model uncertainties and external disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(10) :6249–6256.

[Nocks, 2007] Nocks, L. (2007). *The robot : the life story of a technology.* Greenwood Publishing Group.

[Nojavanzadeh and Badamchizadeh, 2016] Nojavanzadeh, D. and Badamchizadeh, M. (2016). Adaptive fractional-order non-singular fast terminal sliding mode control for robot manipulators. *IET Control Theory Appl.*, 10(13) :1565–1572.

[Ohtake et al., 2003] Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integr Comput-Aid E*, 10(4) :333–341.

[O'Regan, 2015] O'Regan, G. (2015). Unimation. In *Pillars of Computing*, pages 219–223. Springer.

[Ortega et al., 1998] Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, P. J., and Sira-Ramírez, H. (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems.* Springer.

[Ouyang et al., 2014] Ouyang, P., Acob, J., and Pano, V. (2014). PD with sliding mode control for trajectory tracking of robotic system. *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, 30(2) :189–200.

[Paccot et al., 2009] Paccot, F., Andreff, N., and Martinet, P. (2009). A review on the dynamic control of parallel kinematic machines : Theory and experiments. *The International Journal of Robotics Research*, 28(3) :395–416.

[Pan et al., 2018] Pan, Y., Wang, H., Li, X., and Yu, H. (2018). Adaptive command-filtered backstepping control of robot arms with compliant actuators. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 26(3) :1149–1156.

[Pervozvanski and Freidovich, 1999] Pervozvanski, A. A. and Freidovich, L. B. (1999). Robust stabilization of robotic manipulators by pid controllers. *Dynamics and Control*, 9(3) :203–222.

[Petersen, 1987] Petersen, I. R. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Syst. Control Lett.*, 8(4) :351–357.

[Rhee and Won, 2006] Rhee, B.-J. and Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1211–1228.

[Sala and Ariño, 2007] Sala, A. and Ariño, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24) :2671–2686.

[Sala and Ariño, 2009] Sala, A. and Ariño, C. (2009). Polynomial fuzzy models for nonlinear control : A Taylor series approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 17(6) :1284–1295.

[Sala et al., 2005] Sala, A., Guerra, T. M., and Babuška, R. (2005). Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3) :432–444.

[Sariyildiz et al., 2018] Sariyildiz, E., Sekiguchi, H., Nozaki, T., Ugurlu, B., and Ohnishi, K. (2018). A stability analysis for the acceleration-based robust position control of robot manipulators via disturbance observer. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(5) :2369–2378.

[Sciavicco and Siciliano, 2012] Sciavicco, L. and Siciliano, B. (2012). *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media.

[Shah et al., 2015] Shah, J., Rattan, S., and Nakra, B. (2015). Dynamic analysis of two link robot manipulator for control design using computed torque control. *International Journal of Research in Computer Applications and Robotics*, 3(1) :52–59.

[Shamma and Cloutier, 1993] Shamma, J. S. and Cloutier, J. R. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *J. Guid. Control Dyn.*, 16(2) :256–263.

[Siciliano and Khatib, 2016] Siciliano, B. and Khatib, O. (2016). *Springer handbook of robotics*. Springer.

[Siciliano et al., 2010] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2010). *Robotics : modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media.

[Slotine and Li, 1991] Slotine, J. J. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.

[Slotine and Sastry, 1983] Slotine, J.-J. and Sastry, S. S. (1983). Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *International journal of control*, 38(2) :465–492.

[Slotine and Weiping, 1988] Slotine, J.-J. and Weiping, L. (1988). Adaptive manipulator control : A case study. *IEEE Trans. Autom. Control*, 33(11) :995–1003.

[Slotine, 1984] Slotine, J.-J. E. (1984). Sliding controller design for non-linear systems. *International Journal of control*, 40(2) :421–434.

[Slotine and Li, 1987] Slotine, J.-J. E. and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The international journal of robotics research*, 6(3) :49–59.

[Sontag and Wang, 1995] Sontag, E. D. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Syst. Control Lett.*, 24(5) :351–359.

[Sparrow, 2009] Sparrow, R. (2009). Building a better warbot : Ethical issues in the design of unmanned systems for military applications. *Science and Engineering Ethics*, 15(2) :169–187.

[Spong, 1987] Spong, M. W. (1987). Modeling and control of elastic joint robots. *J Dyn Syst Meas Control*, 109(4) :310–318.

[Spong and Vidyasagar, 2008a] Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (2008a). *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons.

[Spong and Vidyasagar, 2008b] Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (2008b). *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons.

[Springer, 2013] Springer, P. J. (2013). *Military robots and drones : a reference handbook*. ABC-CLIO.

[Takagi and Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, 15(1) :116–132.

[Tanaka et al., 2003] Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(4) :582–589.

[Tanaka et al., 1998] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6(2) :250–265.

[Tanaka et al., 2007] Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H. O. (2007). A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 15(3) :333–341.

[Tanaka and Sugeno, 1992] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2) :135–156.

[Tanaka and Wang, 2004] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2004). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach.* John Wiley & Sons.

[Taniguchi et al., 2001] Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 9(4) :525–538.

[Taniguchi et al., 2000] Taniguchi, T., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2000). Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 8(4) :442–452.

[Taniguchi et al., 1999] Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., and Wang, H. O. (1999). Fuzzy descriptor systems : stability analysis and design via LMIs. In *American Control Conference*, volume 3, pages 1827–1831. IEEE.

[Tognetti et al., 2011] Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D. (2011). Selective H_2 and H_∞ stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 19(5) :890–900.

[Toh et al., 1999] Toh, K., Todd, M., and Tutuncu, R. (1999). SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, 11 :545–581.

[Tomei, 2000] Tomei, P. (2000). Robust adaptive friction compensation for tracking control of robot manipulators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 45(11) :2164–2169.

[Tsai et al., 2007] Tsai, C.-C., Cheng, M.-B., and Lin, S.-C. (2007). Robust tracking control for a wheeled mobile manipulator with dual arms using hybrid sliding-mode neural network. *Asian J. Control*, 9(4) :377–389.

[Tuan et al., 2001] Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 9(2) :324–332.

[van der Schaft, 1992] van der Schaft, A. J. (1992). L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H_∞ control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 37(6) :770–784.

[Vermeiren et al., 2012] Vermeiren, L., Dequidt, A., Afroun, M., and Guerra, T.-M. (2012). Motion control of planar parallel robot using the fuzzy descriptor system approach. *ISA Trans.*, 51(5) :596–608.

[Wang et al., 2013] Wang, H., Peng, L.-Y., Ju, H.-H., and Wang, Y.-L. (2013). $\mathcal{H}_\infty$ state feedback controller design for continuous-time T-S fuzzy systems in finite frequency domain. *Information Sciences*, 223 :221–235.

[Wang et al., 1996] Wang, H., Tanaka, K., and Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 4(1) :14–23.

[Wang et al., 2019] Wang, J., Ma, S., and Zhang, C. (2019). Finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for T-S fuzzy descriptor semi-Markov jump systems via static output feedback. *Fuzzy Sets Syst.*, 365 :60–80.

[Whitcomb et al., 1996] Whitcomb, L., Arimoto, S., Naniwa, T., and Ozaki, F. (1996). Experiments in adaptive model-based force control. *IEEE Control Systems*, 16(1) :49–57.

[Wu and Cai, 2006] Wu, H.-N. and Cai, K.-Y. (2006). $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost fuzzy control design for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainty. *Automatica*, 42(7) :1183–1188.

[Xiao et al., 2019] Xiao, B., Yang, X., Karimi, H. R., and Qiu, J. (2019). Asymptotic tracking control for a more representative class of uncertain nonlinear systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*.

[Xiao and Yin, 2018] Xiao, B. and Yin, S. (2018). Exponential tracking control of robotic manipulators with uncertain dynamics and kinematics. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 15(2) :689–698.

[Xu et al., 2016] Xu, J., Shi, P., Lim, C.-C., and Cai, C. (2016). A descriptor-system approach for finite-frequency $\mathcal{H}_\infty$ control of singularly perturbed systems. *Information Sciences*, 370 :79–91.

[Yeung and Chen, 1988] Yeung, K. S. and Chen, Y. P. (1988). A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 33(2) :200–206.

[Yim et al., 2003] Yim, M., Roufas, K., Duff, D., Zhang, Y., Eldershaw, C., and Homans, S. (2003). Modular reconfigurable robots in space applications. *Autonomous Robots*, 14(2-3) :225–237.

[Yoneyama, 2006] Yoneyama, J. (2006). Robust $\mathcal{H}_\infty$ control analysis and synthesis for Takagi-Sugeno general uncertain fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(16) :2205–2223.

[Yoneyama, 2007] Yoneyama, J. (2007). Robust stability and stabilization for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy time-delay systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(2) :115–134.

[Yoneyama and Ichikawa, 1999] Yoneyama, J. and Ichikawa, A. (1999). H_∞-control for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. In *IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 3, pages 28–33. IEEE.

[Zadeh, 1965] Zadeh, L. A. (1965). Information and control. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(3) :338–353.

[Zhihong et al., 1994] Zhihong, M., Paplinski, A. P., and Wu, H. R. (1994). A robust mimo terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(12) :2464–2469.

[Zhiyong and Tian, 2004] Zhiyong, Y. and Tian, H. (2004). A new method for tuning pid parameters of a 3 dof reconfigurable parallel kinematic machine. In *IEEE International*

Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004, volume 3, pages 2249–2254. IEEE.

[Zhou et al., 2018] Zhou, Q., Zhao, S., Li, H., Lu, R., and Wu, C. (2018). Adaptive neural network tracking control for robotic manipulators with dead zone. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*.

Table des figures

1.1 Une scène de R.U.R. montrant les trois robots. 12
1.2 Le robot Unimate. 13
1.3 Applications de robots manipulateurs 14
1.4 Composition d'un robot industriel. 15
1.5 Génération de trajectoire et commande dans l'espace opérationnel. 17
1.6 Génération de trajectoire dans l'espace opérationnel et commande dans l'espace articulaire. 18
1.7 Un robot de 2ddl. 20
1.8 Modèle Simscape/Multibody (1G) du manipulateur 2ddl rigide. 21
1.9 Description d'un robot manipulateur à 2 degrés de liberté. 24
1.10 Modèle Simscape/Multibody (1G) du manipulateur 2ddl à articulations flexibles. 25
1.11 Schéma de principe de la commande PID 28
1.12 Commande PID avec anticipation linéaire. 29
1.13 Commande PID avec anticipation non linéaire. 31

2.1 Commande PDC avec action intégrale. 51

3.1 Référence : axe mécanique linéaire i. 66
3.2 Trajectoires de l'effecteur pour le cas 1. Référence (noir solide), trajectoire avec le correcteur à 32 règles (bleu), trajectoire avec le correcteur à 4 règles (rouge). 69
3.3 Force extérieure $F_e(t)$ (cas 2). Composantes verticale (en bleu) et horizontale (en rouge) 70
3.4 Erreurs de circularité (cas 1) : correcteur à 32 règles (bleu), à 4 règles (rouge). 70
3.5 Erreurs de circularité pour le correcteur à 32 règles (en bleu) et le correcteur à 4 règles (en rouge). 70
3.6 Couples des actionneurs (Cas 1). 71
3.7 Vitesse des articulations (Cas 1). 71

4.1 Schéma de commande proposé. 75
4.2 Erreurs de circularité pour le cas nominal 84
4.3 Erreurs de circularité pour le 2e cas. 85
4.4 Couple moteur Γ_1 pour le 1er cas. 86
4.5 Couple moteur Γ_2 pour le 1er cas. 86
4.6 Erreur de position de l'articulation 1 pour le 1er cas. 86
4.7 Erreur de position de l'articulation 2 pour le 1er cas. 86
4.8 Erreur de vitesse de l'articulation 1 pour le 1er cas. 87
4.9 Erreurs de vitesse de l'articulation 2 pour le 1er cas. 87

4.10 Couple moteur Γ_1 dans le cas avec la perturbation externe. 87
4.11 Couple moteur Γ_2 dans le cas avec la perturbation externe. 87
4.12 Erreur de position de l'articulation 1 dans le cas avec la perturbation externe. 87
4.13 Erreur de position de l'articulation 2 dans le cas avec la perturbation externe. 87
4.14 Erreur de vitesse de l'articulation 1 dans le cas avec la perturbation externe. 88
4.15 Erreurs de vitesse de l'articulation 2 dans le cas avec la perturbation externe. 88

5.1 Schéma de principe de la commande CTC. 91
5.2 Erreur de circularité maximale en fonction du temps de parcours imposé — cas nominal. 92
5.3 Erreur de circularité moyenne en fonction du temps de parcours imposé — cas nominal 92
5.4 Erreur de circularité maximale en fonction du temps de parcours imposé — cas avec perturbation 93
5.5 Erreur de circularité moyenne en fonction du temps de parcours imposé — cas avec perturbation 93
5.6 Erreurs de circularité. 94
5.7 Erreurs de position de l'articulation 1. 94
5.8 Erreurs de position de l'articulation 2. 94
5.9 Erreurs de vitesse de l'articulation 1. 95
5.10 Erreurs de vitesse de l'articulation 2. 95
5.11 Couples Γ_1 (1er actionneur). 96
5.12 Couples Γ_2 (2nd actionneur). 96
5.13 Erreurs de circularité. 96
5.14 Erreurs de position de l'articulation 1. 97
5.15 Erreurs de position de l'articulation 2. 97
5.16 Erreurs de vitesse de l'articulation 1. 97
5.17 Erreurs de vitesse de l'articulation 2. 97
5.18 Couples Γ_1. 98
5.19 Couples Γ_2. 98

Liste des tableaux

1.1 Nomenclature du robot 24

3.1 Coûts de calcul. 68

4.1 Valeurs de $E_{R\mathrm{M}}$ et $E_{R\mathrm{mav}}$ pour le 1er cas 85
4.2 Valeurs de $E_{R\mathrm{M}}$ et $E_{R\mathrm{mav}}$ pour le 2e cas 85

5.1 valeurs moyennes absolues et maximales des erreurs de suivi des deux articulations (en gras : plus petite valeur, en italique : deuxième meilleure valeur) 95
5.2 Couples maximaux et efficaces (en gras : plus petite valeur, en italique deuxième meilleure valeur) 96
5.3 valeurs moyennes absolues et maximales des erreurs de suivi des deux articulations (en gras : plus petite valeur, en italique : deuxième meilleure valeur) 97
5.4 Couples maximaux et efficaces (en gras : plus petite valeur, en italique deuxième meilleure valeur) 98