



HAL
open science

Etude numérique et modélisation du modèle d'Euler bitempérature : point de vue cinétique.

Corentin Prigent

► To cite this version:

Corentin Prigent. Etude numérique et modélisation du modèle d'Euler bitempérature : point de vue cinétique.. Modélisation et simulation. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0201 . tel-02363700

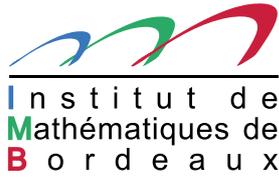
HAL Id: tel-02363700

<https://theses.hal.science/tel-02363700>

Submitted on 14 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

présentée à

l'Université de Bordeaux

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Corentin PRIGENT**

sous la direction de Denise AREGBA-DRIOLLET et Stéphane BRULL

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Étude numérique et modélisation du système d'Euler bi-température: point de vue cinétique.

Soutenue le 24 octobre 2019 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux
devant le jury composé de :

Christophe Chalons	Professeur	Université de Versailles	Rapporteur
Marc Massot	Professeur	École Polytechnique	Rapporteur
David Lannes	Directeur de recherche	CNRS	Président du jury
Hervé Guillard	Directeur de recherche	INRIA	Examineur
Matteo Faganello	Maître de conférences	Université Aix-Marseille	Examineur
Bruno Dubroca	Directeur de recherche	CEA	Examineur
Denise Aregba-Driollet	Maître de conférences	Bordeaux-INP	Directrice de thèse
Stéphane Brull	Maître de conférences	Bordeaux-INP	Directeur de thèse

Titre Étude numérique et modélisation du système d'Euler bi-température: point de vue cinétique.

Résumé Dans divers domaines de la physique, certains phénomènes sont modélisés par des systèmes hyperboliques non-conservatifs. En particulier, dans le domaine de la physique des plasmas, dont l'un des champs d'application majeur est la Fusion par Confinement Inertiel, le système d'Euler bi-température, modélisant les phénomènes de transport de particules chargées, en est un exemple. La difficulté de l'étude de ces systèmes réside dans la présence de termes non-conservatifs, qui empêchent la définition classique des solutions faibles. Pour parvenir à une définition de ce type de solutions, on a recours à l'emploi de systèmes cinétiques sous-jacents. Dans ce manuscrit, on s'intéresse à l'étude numérique de ces systèmes cinétiques pour la résolution du système d'Euler bi-température.

Ce manuscrit se divise en deux parties. La première partie contient l'étude numérique du système d'Euler bi-température. Dans un premier chapitre, on résout numériquement les équations en dimension 1 d'espace par le biais d'un système sous-jacent issu de la physique des plasmas: le système de Vlasov-BGK-Ampère. On présente une méthode numérique préservant l'asymptotique pour ce système sous-jacent et on montre, par des simulations numériques, que le schéma limite obtenu donne des résultats consistants avec Euler bi-température. Dans un second chapitre, on résout le même modèle en dimension 2 d'espace par un système sous-jacent de type BGK discret. On démontre une inégalité d'entropie pour les solutions issues du modèle sous-jacent, ainsi qu'une inégalité discrète de dissipation d'entropie pour le schéma.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, on s'intéresse au développement de méthodes numériques pour quelques modèles cinétiques. On considère ici le cas des écoulements raréfiés de mélanges de gaz, dans l'optique d'une application aux cas des plasmas. Premièrement, on présente un schéma cinétique adaptatif et dynamique en vitesse pour les gaz inertes. Par l'emploi de lois de conservation discrètes, la solution est approchée sur un ensemble de vitesses discrètes local et dynamique. Dans un second temps, on propose une extension de cette méthode visant à améliorer les performances de celle-ci. Puis, ces deux versions de la méthode sont comparées à la méthode classique sur grille fixe uniforme sur une série de cas tests. Enfin, dans le dernier chapitre, on propose une méthode numérique pour la résolution d'une extension de ces équations, prenant en compte la présence de réactions chimiques au sein du mélange. Le contexte considéré est celui des réactions chimiques bimoléculaires réversibles lentes. La méthode proposée, de type implicite-explicite, est linéaire, stable et conservative.

Mots-clés Modélisation en physique des plasmas, modélisation d'écoulements de mélanges de gaz raréfiés, système hyperboliques non-conservatifs, modèles cinétiques sous-jacents, schémas numériques cinétiques

Laboratoire d'accueil Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 Cours de la Libération F-33405 Talence cedex France / Laboratoire Celia, 351 Cours de la Libération F-33405 Talence cedex France

Title Numerical approximation and modelling of the bitemperature Euler system: a kinetic viewpoint.

Abstract In various domains of physics, several phenomena can be modeled via the use of nonconservative hyperbolic systems. In particular, in plasma physics, in the process of developing and understanding the phenomena leading to Inertial Confinement Fusion, the bi-temperature Euler system can be used to model particle transport phenomena in a plasma. The difficulty of the mathematical study of such systems dwells in the presence of so-called non-conservative products, which prevent the classical definition of weak solutions via distribution theory. To attempt to define these quantities, it is useful to supplement the hyperbolic system with an underlying kinetic model. In this work, the objective is the numerical study of such kinetic systems in order to solve the bi-temperature Euler system.

This manuscript is split in two parts. The first one contains the study of the bi-temperature Euler system. In the first chapter, this system in dimension 1 is solved by the use of an underlying kinetic model sprung from plasma physics: the Vlasov-BGK-Ampère system. An asymptotic-preserving numerical method is introduced, and it is shown that the scheme obtained in the limit is consistent with a scheme for the bi-temperature Euler system. In the following chapter, the same hyperbolic model in dimension 2 is studied, this time via a discrete-BGK type underlying model. An entropy inequality is proved for solutions coming from the kinetic model, as well as a discrete entropy dissipation inequality.

In the second part of the manuscript, we are interested in the development of numerical schemes for gas mixture rarefied flows. Firstly, an adaptive kinetic scheme is introduced for inert gas mixtures. By the use of discrete conservation laws, the solution is approximated on a set of discrete velocities that depends on space, time and species. Secondly, an extension of the method is proposed in order to improve the efficiency of the first method. Finally, the two methods are compared to the classical fixed grid method on a series of test cases. In the last chapter, a numerical method is proposed for rarefied flows of reacting mixtures. The setting considered is the case of slow bimolecular reversible chemical reactions. The method introduced is an explicit-implicit treatment of the relaxation operator, which is shown to be stable, linear and conservative.

Keywords Plasma physics modeling, rarefied gas mixture modeling, underlying kinetic models, nonconservative hyperbolic systems, kinetic numerical schemes

Host laboratories Institut de Mathématiques de Bordeaux, 351 cours de la Libération F-33405 Talence cedex France / Laboratoire Celia, 351 Cours de la Libération F-33405 Talence cedex France

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Messieurs Christophe Chalons et Marc Massot pour avoir accepté de rapporter ma thèse.

Je remercie également Messieurs Matteo Faganello et Hervé Guillard pour avoir accepté de prendre part à mon jury de thèse en tant qu'examineurs, ainsi que Monsieur David Lannes pour avoir accepté de présider ce jury.

Enfin, je souhaite remercier Denise Aregba, Stéphane Brull et Bruno Dubroca pour leur encadrement tout au long de ma thèse. Je leur suis très reconnaissant de leur gentillesse et de leur bienveillance à mon égard, ainsi que de tout ce qu'ils m'ont apporté sur le plan scientifique au cours de ces trois années.

Table des matières

Table des matières	9
1 Introduction	13
1.1 Contexte physique	13
1.2 Modèles de la MHD	17
1.2.1 Equations de Maxwell	17
1.2.2 Les équations de la MHD idéale	19
1.2.3 Les équations de la MHD bi-température	26
1.3 Contributions	34
1.3.1 Chapitre 2 : Une approche cinétique du système d'Euler bi-température	34
1.3.2 Chapitre 3 : Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel	36
1.3.3 Chapitre 4 : Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces	37
1.3.4 Chapitre 5 : Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs	39
I Etude numérique et modélisation du système d'Euler bi-température	41
2 Une approche cinétique du système d'Euler bi-température	43
2.1 Introduction	44
2.2 Description des modèles macroscopique et cinétique d'un plasma	45
2.2.1 Le modèle d'Euler bi-température	45
2.2.2 Quantités macroscopiques	46
2.2.3 Le système de Vlasov-BGK-Ampère	47

2.2.4	Un modèle réduit	48
2.2.5	Scaling des équations	55
2.2.6	Reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère	57
2.2.7	Limite hydrodynamique	58
2.2.8	Inégalités d'entropie pour les solutions limites	61
2.3	Traitement numérique des équations cinétiques	63
2.3.1	Résolution numériques des équations de Vlasov-BGK : méthode générale	63
2.3.2	Un schéma amont avec viscosité modifiée	67
2.4	Comparaisons avec des schémas pour le modèle macroscopique	69
2.5	Résultats numériques	75
2.5.1	Tube à choc avec des températures initiales identiques	76
2.5.2	Tube à choc avec des températures initiales différentes	78
2.5.3	Double détente	81
2.5.4	Double choc	81
2.5.5	Tube de Sod avec masses réalistes	84
2.6	Conclusion	86
3	Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel	89
3.1	Introduction	90
3.2	Modèles cinétiques sous-jacents pour un système d'Euler non-conservatif	91
3.2.1	Le système d'Euler bi-température 2D	91
3.2.2	Modèles cinétiques sous-jacents de type BGK pour le système d'Euler conservatif	92
3.2.3	Modèles BGK pour le système d'Euler bi-température	95
3.3	Schémas numériques cinétiques d'ordre 1	99
3.3.1	Le cas conservatif	99
3.3.2	Un schéma numérique entropique pour le système d'Euler bi-température	101
3.4	Extension au second ordre	107
3.4.1	L'ordre 2 en dimension 1	107
3.4.2	Le cas bi-dimensionnel	110
3.5	Résultats numériques	112
3.5.1	Cas test du tube de Sod	113
3.5.2	Cas test du tube de Sod incliné	116
3.5.3	Problème de Riemann à quatre interfaces	117
3.5.4	Cas test de l'implosion	118
3.6	Conclusion	123

II	Méthodes numériques pour les écoulements raréfiés	125
4	Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces	127
4.1	Introduction	128
4.2	Modèles cinétiques pour les écoulements raréfiés de mélanges de gaz .	130
4.2.1	Équations de Boltzmann multi-espèces	130
4.2.2	Quantités macroscopiques	132
4.2.3	Modèle BGK multi-espèces	132
4.2.4	Calcul des taux de relaxation et des coefficients d'interaction .	133
4.3	Une méthode à grille cinétique locale	135
4.3.1	Aperçu de la méthode	135
4.3.2	Calcul des grilles en vitesse locales	136
4.3.3	Interpolation et calcul des fonctions de distribution	140
4.3.4	Élargissement de grilles	141
4.4	Extension de la méthode : grilles cinétiques décalées	142
4.4.1	Notations	142
4.4.2	Calcul des grilles décalées au temps initial	143
4.4.3	Calcul des grilles décalées pour les temps suivants	143
4.5	Résultats numériques	145
4.5.1	Tube de Sod	146
4.5.2	Blast waves	146
4.5.3	Double choc	153
4.5.4	Test plasma	156
4.5.5	Transfert de chaleur raréfié	158
4.6	Conclusion	161
5	Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs	163
5.1	Introduction	164
5.2	Modèles cinétiques pour les gaz raréfiés réactifs	164
5.2.1	Equations de Boltzmann étendues aux réactions chimiques . .	164
5.2.2	Quantités macroscopiques	165
5.2.3	Modèle BGK pour les réactions chimiques	166
5.3	Schéma numérique	167
5.3.1	Calcul des concentrations et des fréquences de relaxation . . .	168
5.3.2	Calcul des vitesses et des températures	168
5.3.3	Calcul des fonctions de distribution	170
5.3.4	Propriétés du schéma	170
5.4	Résultats numériques	171
5.4.1	Retour à l'équilibre	171
5.4.2	Double choc	172

5.5 Conclusion	173
Conclusion / Perspectives	177
A Définition des solutions faibles pour un système hyperbolique non-conservatif	181
B Structure de la Jacobienne d'Euler bi-température 2D	185
Bibliographie	189

L'objectif de ce manuscrit est de présenter quelques résultats relatifs à la résolution numérique des systèmes hyperboliques non-conservatifs et des systèmes cinétiques sous-jacents associés. Dans cette introduction, on commence par définir le contexte physique dans lequel s'inscrit ce travail, la recherche sur la fusion par confinement inertiel. Ces phénomènes sont gouvernés par la branche de la physique appelée la magnéto-hydrodynamique, souvent abrégée en MHD. On présente donc les modèles généraux issus de la MHD utilisés pour décrire un plasma, ainsi que les modèles cinétiques permettant la description au niveau mésoscopique des plasmas et des gaz raréfiés. Puis on procédera à certaines simplifications permettant d'obtenir les modèles qui ont été étudiés ici. Enfin, on détaillera les contributions de cette thèse, chapitre par chapitre.

1.1 Contexte physique

Selon les rapports démographiques de l'ONU [45], on estime que la population mondiale atteindra les 10 milliards d'habitants en 2050. Par conséquent, les besoins en énergie augmentent considérablement. En ajoutant à cela de nombreuses raisons telles que la raréfaction de certaines ressources naturelles cruciales, comme le pétrole, la volonté d'arrêter l'emploi de combustibles extrêmement polluants (comme le charbon) afin de freiner le réchauffement climatique, ou encore le désir de proposer une alternative aux méthodes de fission nucléaire, la production d'énergie est devenue le défi le plus important du XXIème siècle.

Parmi les alternatives proposées, la fusion nucléaire dans des réacteurs à fusion thermonucléaire contrôlée est la seule manière de produire durablement de l'énergie par un procédé propre, en cohérence avec les besoins estimés de la société future. Plus

précisément, les réactions de fusion consistent à assembler deux noyaux atomiques légers en un noyau plus lourd. Les produits de réaction possédant une masse plus faible que la somme des deux noyaux réactifs, ce défaut de masse est accompagné d'une production d'énergie conforme à la formule énoncée par Einstein $E = mc^2$.

Les réactions de fusion typiquement considérées comme les plus accessibles font intervenir deux isotopes de l'atome d'hydrogène : le Deuterium D et le tritium T. Les deux réactions les plus intéressantes sont donc les réactions Deuterium-Deuterium et Deuterium-Tritium. La deuxième possède une section efficace (de l'ordre de 1 barn = 10^{-28}m^2) plus importante que l'autre, et est donc généralement acceptée comme la méthode nominale pour réaliser des réactions de fusion.

La réaction de fusion D-T s'écrit de la façon suivante [94] :



Cette réaction produit donc essentiellement de l'énergie cinétique (14 MeV), et des déchets sous forme de particules α (c'est-à-dire des noyaux d'Hélium), qui ne sont pas dangereux et qui sont faiblement radioactifs, et aucun déchet sous forme de dioxyde de carbone n'est émis. Par ailleurs, la réaction de fusion, contrairement à la réaction de fission, ne peut pas provoquer de réaction en chaîne (ou emballement). Le Tritium n'existe pas à l'état naturel, contrairement au Deuterium, qui lui est trouvable en quantités inépuisables dans l'eau. Cependant, comme la réaction de fusion produit des neutrons, on peut produire du Tritium en faisant réagir ces neutrons avec du Lithium, disponible également en quantités abondantes dans la croûte terrestre.

Pour qu'une réaction de fusion s'auto-entretienne, autrement dit pour que l'énergie produite soit supérieure à l'énergie investie (ce qu'on appelle communément le *break-even*), il faut une température très importante, au moins de l'ordre de 4 keV. A cette température, la matière est entièrement sous forme de plasma, également appelé quatrième état de la matière, où les électrons sont arrachés aux noyaux atomiques pour former un milieu gazeux complètement ionisé, composé d'électrons chargés négativement et d'ions chargés positivement, interagissant avec les champs électromagnétiques. Ainsi, au delà de cette température, la production d'énergie dépend donc des capacités de chauffage et de confinement d'un plasma. Le critère de Lawson impose une condition nécessaire au déclenchement d'une réaction de fusion [74], qui, dans le cas d'une réaction D-T, pour une température de l'ordre de $T \sim 10^8$ K s'écrit :

$$n\tau > 10^{20} \text{ m}^{-3}\text{s},$$

où n désigne le nombre de particules par mètre cube (la concentration) et τ le temps de confinement du plasma. Les réactifs possèdent des charges électriques de même signe, elles se repoussent donc selon la loi de Coulomb. Pour que la réaction de fusion ait lieu, il faut que le mouvement thermique de ces particules soit suffisamment important pour dépasser la *barrière coulombienne*. Pour cela, deux grands axes sont considérés : la Fusion par Confinement Magnétique (FCM) et la Fusion par Confinement Inertiel (FCI).

1. Introduction

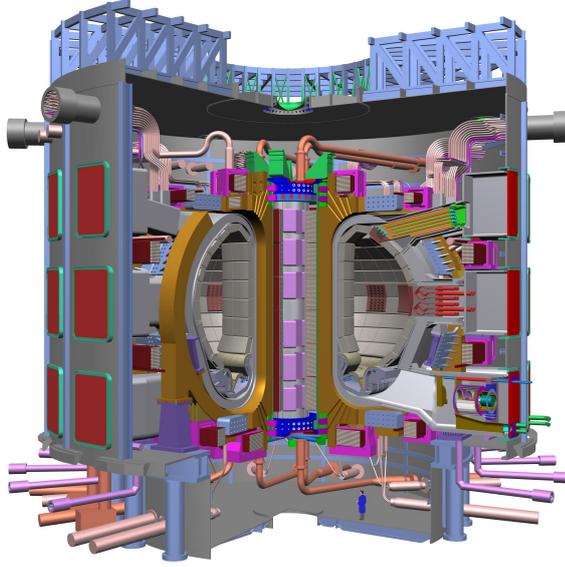


FIGURE 1.1 – Le tokamak possède une chambre de confinement de forme toroïdale

Dans le cas de la Fusion par Confinement Magnétique, en accord avec le critère de Lawson, on souhaite maintenir une concentration de l'ordre de 10^{20}m^{-3} pendant un temps de confinement de l'ordre de plusieurs secondes ou minutes, à une température de l'ordre $T \sim 10^8$ K. Cependant, il est impossible de contenir un plasma dans de telles conditions par des parois matérielles. Dans ce contexte, on a recours aux propriétés de confinement des champs magnétiques. En effet, pour plusieurs raisons, le champ magnétique est capable de maintenir de telles conditions de concentration et de températures :

- les particules chargées s'enroulent autour du champ magnétique (elles suivent les lignes de champ),
- la géométrie du plasma se calque sur celle du champ magnétique,
- la conductivité thermique du plasma est fortement anisotrope, et est largement privilégiée dans les surfaces de niveau dessinées par le champ magnétique, et très réduite dans la direction normale à ces surfaces.

Le *tokamak* ([86],[21],[49],[50]) est un outil de forme toroïdale permettant de confiner le plasma selon les propriétés énoncées ci-dessus, représenté sur la figure 1.1. C'est la configuration principale considérée pour la Fusion par Confinement Magnétique, et on trouve parmi les principaux projets fondés sur cette approche le projet ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), situé à Cadarache, en France, faisant intervenir plus de trente-cinq pays, le EAST (Experimental Advanced Superconducting Tokamak), situé en Chine, ou encore le JT-60, au Japon.

Pour la Fusion par Confinement Inertiel, on cherche à comprimer le plasma dans le but d'augmenter la température et la concentration vers de très hautes valeurs, mais pendant un temps de confinement très court [46]. Deux approches existent :

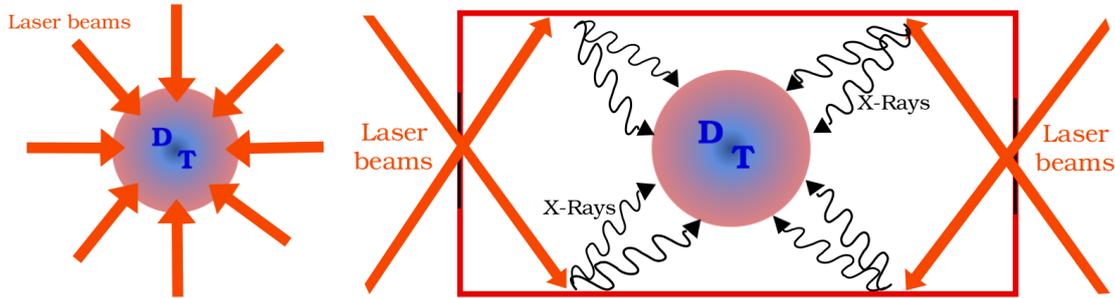


FIGURE 1.2 – Deux procédés d’illumination d’une cible : l’attaque directe (à gauche) et indirecte (à droite)

l’attaque directe et l’attaque indirecte, toutes deux schématisées sur la figure 1.2.

L’idée de l’attaque directe consiste à illuminer par un grand nombre de lasers, depuis toutes les directions, une cible de Deutérium-Tritium afin de faire imploser celle-ci, enclenchant alors la réaction de fusion. Cette méthode s’est révélée très difficile à entreprendre, en raison d’une très faible tolérance à un défaut de symétrie de l’irradiation. Pour circonvenir à la nature contradictoire des phénomènes de chauffage et de compression, une version alternative de l’approche directe a été proposée [99] : la méthode d’allumage rapide. Celle-ci consiste à séparer les processus de compression et de chauffage, ce qui permet de diminuer la précision requise pour l’allumage. On commence par comprimer la cible par la méthode usuelle de l’attaque directe, puis, dans un second temps, on allume celle-ci en envoyant un court faisceau de particules très énergétiques [59].

La seconde approche, appelée attaque indirecte (schéma de droite sur la figure 1.2) consiste à irradier les parois d’une petite cavité en or contenant le plasma (appelée le *hohlraum*). Cette irradiation transforme l’énergie laser en rayons X, qui à leur tour, illuminent la cible D-T. Par cette méthode, il s’avère que la symétrie est meilleure que l’attaque directe, et la méthode est donc moins sensible aux défauts d’isotropie.

Les principaux projets fondés sur l’emploi de la Fusion par Confinement Inertiel sont le *National Ignition Facility* (ou NIF), situé à Livermore, aux États-Unis et le Laser Mégajoule, en France. Ces deux installations sont visibles sur la figure 1.3.

Dans ce manuscrit, on s’intéresse au procédé de Fusion par Confinement Inertiel. Dans l’objectif d’utiliser ces procédés pour déclencher des réactions de fusion, une compréhension complète et précise de la physique des plasmas est indispensable. Pour cela, on s’intéresse à une branche de la physique nommée magnétohydrodynamique (ou MHD), qui décrit le comportement des fluides chargés, notamment grâce à des lois de conservation macroscopiques sur la densité, la quantité de mouvement et l’énergie, couplées aux équations de Maxwell, régissant le comportement du champ électromagnétique. De nombreux phénomènes interviennent dans le processus de Fusion par Confinement Inertiel, tels que le transport de particules,



FIGURE 1.3 – Installations lasers pour FCI : intérieur du NIF (à gauche) et extérieur du LMJ (à droite)

l'interaction laser-plasma ou le transfert radiatif. Dans cette thèse, on s'intéresse aux phénomènes de transport de particules chargées. Le système d'équations aux dérivées partielles d'Euler bi-température est un système hyperbolique non-conservatif qui décrit ces phénomènes. Ce système est le point d'intérêt central de ce manuscrit. Pour comprendre son origine et sa signification, on commence par présenter, dans la section suivante, les équations de la MHD dans toute leur généralité.

1.2 Modèles de la MHD

Les particules qui composent le plasma, les ions et les électrons, sont pourvues d'une charge électrique. Par conséquent, un plasma réagit à la présence d'un champ électromagnétique, et ce dernier est lui-même influencé par la composition du plasma. Ainsi, on commence par présenter les équations de Maxwell, qui régissent le comportement du champ électromagnétique, en explicitant le lien avec le plasma.

1.2.1 Equations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell dans le vide, énoncées historiquement par James C. Maxwell [84] s'énoncent sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E - c^2 \operatorname{rot} B = \frac{-j}{\epsilon_0}, \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div} E = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{div} B = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.1a) \\ (1.1b) \\ (1.1c) \\ (1.1d) \end{array}$$

où E désigne le champ électrique et B le champ magnétique. $\bar{\rho}$ et j désignent respectivement la charge électrique et le courant électrique et sont définis par :

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \sum_{\alpha=e,i} q^\alpha n^\alpha, \\ j &= \sum_{\alpha=e,i} q^\alpha n^\alpha u^\alpha,\end{aligned}$$

où q^α , n^α et u^α désignent respectivement la charge électrique particulaire, la concentration (i.e le nombre de particules par mètre cube) et la vitesse macroscopique de l'espèce α . ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide et c est la vitesse de la lumière. Ces équations portent les noms respectifs de Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday, Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

Ces quatre équations peuvent être rangées en deux catégories : les équations dynamiques (contenant des dérivées temporelles) et les contraintes de données initiales (contenant des divergences). En effet, pourvu que l'équation de Maxwell-Gauss (1.1c) soit vérifiée à l'instant initial, la validité de l'équation de Maxwell-Ampère (1.1a) implique celle de l'équation de Maxwell-Gauss, pour tout temps. Plus précisément, la loi de conservation de la charge, qui s'obtient comme conséquence des équations (1.1a) et (1.1c), s'énonce :

$$\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div} j = 0,$$

et implique, en prenant la divergence de (1.1a) :

$$\partial_t (\operatorname{div} E - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}) = 0.$$

Ainsi, l'équation de Maxwell-Gauss est valide à tout temps si elle est valide au temps initial. De manière analogue, l'équation de Maxwell-Faraday implique celle de Maxwell-Thomson :

$$\partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \Rightarrow \partial_t (\operatorname{div} B) = 0.$$

Du point de vue de l'interprétation physique, l'équation de Maxwell-Gauss traduit le fait que les charges électriques jouent le rôle de source pour le champ électrique. Au contraire, l'équation de Maxwell-Thomson (1.1d) énonce qu'il n'existe pas de source de champ magnétique sous forme de monopôle (l'exemple élémentaire de source de champ magnétique est celui de l'aimant, qui contient nécessairement deux pôles). L'équation de Maxwell-Faraday (1.1b) indique qu'un champ magnétique évoluant au cours du temps donne naissance à un champ électrique. Enfin, la dernière équation de Maxwell-Ampère traduit le fait qu'un champ magnétique peut être produit par la présence, soit d'un courant électrique, soit d'un champ électrique évoluant au cours du temps.

Un premier modèle simplifié de ces équations est celui du cas bi-dimensionnel TM (Transverse Magnétique). On se place dans un système de coordonnées tel que l'on

1. Introduction

ait $E = (E_1, E_2, 0)$, $B = (0, 0, B_3)$. Dans ce cas, les champs ne dépendent que de (x_1, x_2) et on a automatiquement $\text{div} B = 0$. Les autres équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t E_1 - c^2 \partial_2 B_3 = \frac{-j_1}{\epsilon_0}, \\ \partial_t E_2 + c^2 \partial_1 B_3 = \frac{-j_2}{\epsilon_0}, \\ \partial_t B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \\ \text{div} E = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}. \end{cases}$$

Si on suppose que les quantités ne dépendent pas non plus de x_2 , alors en notant $x = x_1$ et $B = B_3$, on a

$$\begin{cases} \partial_t E_1 = \frac{-j_1}{\epsilon_0}, \\ \partial_t E_2 + c^2 \partial_x B = \frac{-j_2}{\epsilon_0}, \\ \partial_t B + \partial_x E_2 = 0, \\ \partial_x E_1 = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}. \end{cases}$$

Dans ce manuscrit, on s'intéressera à un modèle avec une dépendance en x_1 , dans un cas électrostatique $E = (E_1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 0)$, et les équations non triviales s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t E_1 = \frac{-j_1}{\epsilon_0}, \\ \partial_x E_1 = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}. \end{cases}$$

1.2.2 Les équations de la MHD idéale

Dans la section précédente, on a présenté les équations de Maxwell et observé comment le champ électromagnétique était influencé par la présence d'un plasma. A présent, dans cette section, on s'intéresse au comportement d'un plasma idéal (parfaitement conducteur). Pour cela, on présente d'abord les équations issues de la théorie cinétique des plasmas, puis, à partir de celles-ci, on obtient les équations macroscopiques de la MHD idéale ([55]).

La MHD idéale 3D

Le mouvement d'une particule chargée non-relativiste, pourvue d'une masse m et d'une charge électrique q , dans un champ électromagnétique (E, B) peut être décrit par une équation du mouvement issue de la seconde loi de Newton :

$$m \frac{dv}{dt} = q(E + v \wedge B).$$

Cette équation, valable pour une unique particule, ne convient pas à la description d'un plasma, constitué d'un très grand nombre de particules. Pour un tel milieu, on préfère faire appel à une description statistique de celui-ci, connue sous le nom de *théorie cinétique*. En effet, la théorie cinétique des plasmas [93] permet de décrire du point de vue statistique la dynamique d'un ensemble de particules. Dans ce contexte, le comportement individuel des particules est perdu, mais on préserve le comportement global du plasma comme un ensemble de particules. Plus précisément, on considère le plasma comme un milieu constitué de populations de particules chargées ou non, chaque population de particules étant notée $f^\alpha(t, x, v)$. Cette fonction, définie sur l'espace des phases, indique le nombre de particules de l'espèce α qui, au temps t et au point x , possèdent une vitesse v . Dans ce qui suit, on supposera que le plasma est uniquement composé d'ions et d'électrons, et donc que $\alpha \in \{e, i\}$. Cette théorie permet d'énoncer l'équation de Boltzmann, qui permet de décrire l'évolution en temps des fonctions de distribution f^α . Celle-ci s'écrit :

$$\partial_t f^\alpha + v \cdot \nabla_x f^\alpha + \frac{F^\alpha}{m^\alpha} \cdot \nabla_v f^\alpha = \mathcal{C}^\alpha = (\partial_t f^\alpha)_{collision}, \quad (1.2)$$

où F^α désigne la force électromagnétique de Lorentz :

$$F^\alpha = q^\alpha (E + v \wedge B),$$

et m^α désigne la masse particulière (i.e. la masse d'une particule) de l'espèce α . Cette équation traduit l'influence de divers phénomènes : le transport des particules munies d'une vitesse non nulle, les efforts subis par les particules par la présence d'un champ électromagnétique, traduisant les interactions à longue portée entre particules, et enfin les collisions entre particules (ou interactions à courte portée).

Faire la distinction entre les interactions longue et courte portées est une question qui mène à différentes interprétations et à différentes expressions pour le terme collisionnel au second membre. Ainsi, on a, par exemple, l'intégrale de collision de Landau [72], pour l'interaction entre l'espèce α et l'espèce β :

$$\mathcal{C}^{\alpha\beta} = \frac{(q^\alpha)^2 (q^\beta)^2}{8\pi\epsilon_0^2} \ln \Lambda^{\alpha\beta} \int \frac{1}{m^\alpha} \frac{\partial}{\partial v} \cdot [\mathcal{G}(v - v') \cdot (\frac{1}{m^\alpha} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{m^\beta} \frac{\partial}{\partial v'}) f^\alpha(v) f^\beta(v')] dv',$$

où \mathcal{G} représente le tenseur de Landau, défini par :

$$\mathcal{G}(v - v') = \frac{1}{|v - v'|} \left[\mathbf{I} - \frac{(v - v')(v - v')}{|v - v'|^2} \right],$$

et $\ln \Lambda^{\alpha\beta}$ désigne le logarithme coulombien, défini en première approximation par :

$$\ln \Lambda^{\alpha\beta} = \ln \Lambda = \ln \left(\frac{12\pi(\epsilon_0 k_B T)^{\frac{3}{2}}}{e^3 (n^e)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

1. Introduction

Un autre modèle est celui donné par l'équation de Vlasov, dont le terme de collision est nul et les particules n'interagissent qu'à travers le champ électromagnétique :

$$\partial_t f^\alpha + v \cdot \nabla_x f^\alpha + \frac{F^\alpha}{m^\alpha} \cdot \nabla_v f^\alpha = 0.$$

Les phénomènes décrits par ces équations de la théorie cinétique sont des phénomènes se produisant à des échelles de temps et d'espace très courtes, telles que la longueur de Debye λ_{De} ou la fréquence plasma ω_{pe} . Au contraire, les équations de la MHD visent à décrire le plasma à des échelles bien plus grandes, dites macroscopiques. Celles-ci peuvent être obtenues en moyennant les équations cinétiques par rapport aux vitesses microscopiques v . Pour justifier l'emploi de telles équations fluides, plusieurs critères doivent être vérifiés.

Le premier est un critère relatif à la fréquence des collisions entre particules : celles-ci doivent être très fréquentes. Quantitativement, on a :

$$\tau_{MHD} \gg \tau^i \gg \tau^e,$$

où τ^e et τ^i désignent les temps caractéristiques de relaxation collisionnelle électronique et ionique, tandis que τ_{MHD} désigne le temps caractéristique des phénomènes macroscopiques.

Le second critère indique que la longueur caractéristique et le temps caractéristique des phénomènes macroscopiques λ_{MHD} et τ_{MHD} doivent vérifier :

$$\tau_{MHD} \gg \frac{1}{\Omega^i}, \quad \lambda_{MHD} \gg R^i,$$

où $\Omega^i = \frac{|q^i|B}{m^i}$ désigne la fréquence cyclotron ionique et $R^i = \frac{v_\perp}{\Omega^i}$ désigne le rayon cyclotron ionique, avec v_\perp la norme de la vitesse projeté sur le plan orthogonal au champ magnétique.

Le troisième et dernier critère porte sur la définition de fluide idéal. Pour obtenir les équations de la MHD idéale, on se place dans un contexte où les phénomènes macroscopiques sont plus rapides que les phénomènes de dissipation, comme ceux dus à la résistivité du champ magnétique, définis par un temps caractéristique τ_R . On a donc :

$$\tau_{MHD} \gg \tau_R.$$

Dans ces conditions, on peut obtenir les équations fluides en prenant la limite hydrodynamique des équations cinétiques. Dans cette section, on présente un premier modèle fluide à une seule température. On s'intéressera, dans la section suivante, au modèle bi-température. Pour obtenir les équations fluides, on commence par définir les quantités macroscopiques. Ces quantités, telles que la vitesse ou la densité, sont définis comme des moments en vitesse de la fonction de distribution. En notant l'intégration par rapport à v comme :

$$\langle\langle g \rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} g dv,$$

et en prenant les trois premiers moments de f^α , on peut définir la concentration partielle n^α (ainsi que la densité partielle ρ^α), la vitesse macroscopique partielle u^α et l'énergie partielle \mathcal{E}^α (qui s'écrit comme la somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{\text{cinétique}}^\alpha$ et de l'énergie interne $n^\alpha \varepsilon^\alpha$:

$$\begin{aligned}\langle\langle m^\alpha f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^\alpha = m^\alpha n^\alpha, \\ \langle\langle m^\alpha v f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^\alpha u^\alpha = m^\alpha n^\alpha u^\alpha, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} f^\alpha \rangle\rangle &= \mathcal{E}^\alpha = \mathcal{E}_{\text{cinétique}}^\alpha + n^\alpha \varepsilon^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\alpha (u^\alpha)^2 + \frac{3}{2} n^\alpha k_B T^\alpha,\end{aligned}$$

où T^α représente la température de l'espèce α . De manière analogue, en sommant sur α , on peut définir les quantités totales du plasma ρ , ρu , \mathcal{E} .

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \langle\langle m^\alpha f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^e + \rho^i = \rho, \\ \sum_\alpha \langle\langle v m^\alpha f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^e u^e + \rho^i u^i = \rho u, \\ \sum_\alpha \langle\langle \frac{v^2}{2} m^\alpha f^\alpha \rangle\rangle &= \mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} \sum_\alpha n^\alpha k_B T.\end{aligned}$$

On couple à ces équations les équations de Maxwell (1.1) avec

$$\bar{\rho} = \sum_\alpha q^\alpha n^\alpha, \quad j = \sum_\alpha q^\alpha n^\alpha u^\alpha$$

Les collisions entre particules conservent certaines de ces quantités macroscopiques. Plus précisément, toute collision préserve le nombre de particules, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale. Seules les collisions entre particules d'une même espèce préservent la quantité de mouvement et l'énergie de cette espèce. Ainsi, en écrivant de manière très générale le terme de collisions comme une somme d'interactions :

$$\mathcal{C}^\alpha = \sum_{\beta=e,i} \mathcal{C}^{\alpha\beta},$$

on a les propriétés de conservation suivantes sur les collisions intra-espèces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\langle m^\alpha \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha v \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \end{array} \right. \quad (1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\langle m^\alpha \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha v \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \end{array} \right. \quad (1.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\langle m^\alpha v \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \end{array} \right. \quad (1.3c)$$

et les propriétés suivantes sur l'ensemble des collisions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\langle m^\alpha v \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0. \end{array} \right. \quad (1.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\langle m^\alpha v \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} \mathcal{C}^\alpha \rangle\rangle = 0. \end{array} \right. \quad (1.4b)$$

1. Introduction

En intégrant par rapport à v l'équation de Boltzmann (1.2) multipliée par m^α , puis en sommant sur α , et en servant des propriétés (1.3), on obtient la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Ensuite, en multipliant l'équation (1.2) par $m^\alpha v$, puis en intégrant, on obtient l'équation suivante sur la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \langle\langle m^\alpha v \otimes v f^\alpha \rangle\rangle \right) = \bar{\rho} E + j \wedge B,$$

où on a utilisé les propriétés de conservation (1.3) et (1.4). Le terme dans la divergence peut se décomposer en une somme de plusieurs termes :

$$\sum_{\alpha} \langle\langle m^\alpha v \otimes v f^\alpha \rangle\rangle = \sum_{\alpha} (\rho^\alpha u^\alpha \otimes u^\alpha + p^\alpha \mathbf{I} + \Pi^\alpha),$$

avec p^α la pression de l'espèce α définie par :

$$p^\alpha = \frac{1}{3} m^\alpha \langle\langle |v - u^\alpha|^2 f^\alpha \rangle\rangle = n^\alpha k_B T^\alpha,$$

et Π^α le tenseur des contraintes défini par :

$$\Pi^\alpha = m^\alpha \langle\langle \left((v - u^\alpha) \otimes (v - u^\alpha) - \frac{1}{3} |v - u^\alpha|^2 \mathbf{I} \right) f^\alpha \rangle\rangle.$$

Au final, l'équation sur la quantité de mouvement totale s'écrit donc :

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \rho^\alpha u^\alpha \otimes u^\alpha + p \mathbf{I} + \Pi \right) = \bar{\rho} E + j \wedge B. \quad (1.5)$$

La troisième et dernière équation de ce modèle porte sur l'énergie totale du plasma. On commence par multiplier (1.2) par $m^\alpha \frac{|v|^2}{2}$, puis on intègre par rapport à v , et on obtient :

$$\partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \langle\langle m^\alpha \frac{|v|^2}{2} v f^\alpha \rangle\rangle \right) = j \cdot E.$$

Le terme de flux se décompose de la façon suivante :

$$\sum_{\alpha} \langle\langle m^\alpha \frac{|v|^2}{2} v f^\alpha \rangle\rangle = \sum_{\alpha} (u^\alpha \mathcal{E}^\alpha + (p^\alpha \mathbf{I} + \Pi^\alpha) : u^\alpha + h^\alpha),$$

où : désigne le produit contracté et h^α désigne le flux de chaleur de l'espèce α et s'écrit :

$$h^\alpha = \sum_{\alpha} \langle\langle m^\alpha \frac{|v - u^\alpha|^2}{2} (v - u^\alpha) f^\alpha \rangle\rangle.$$

Ainsi, on obtient l'équation de conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} (u^{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} + (p^{\alpha} \mathbf{I} + \Pi^{\alpha}) : u^{\alpha} + h^{\alpha}) \right) = j \cdot E. \quad (1.6)$$

Dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie (1.5) et (1.6), les termes de contraintes et de flux de chaleur dans les divergences font appel à des moments d'ordre supérieur à ceux pour lesquels on a obtenu une équation. Le système n'est donc pas fermé et nécessite de choisir une relation de fermeture. Cette relation de fermeture consiste à choisir une forme spécifique pour la fonction de distribution. Dans le cas des équations d'Euler, on fait l'hypothèse d'un quasi-équilibre thermodynamique, ce qui revient à supposer que chaque fonction s'écrit comme une Maxwellienne, dont l'expression est la suivante :

$$M^{\alpha}(f^{\alpha}) = \frac{n^{\alpha}}{(2\pi k_B \frac{T^{\alpha}}{m^{\alpha}})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v - u^{\alpha}|^2}{2k_B \frac{T^{\alpha}}{m^{\alpha}}}\right).$$

Premièrement, on remarque qu'une Maxwellienne est entièrement déterminée par la donnée des trois premiers moments (masse, quantité de mouvement et énergie). Par ailleurs, cette hypothèse implique les identités suivantes :

$$h^{\alpha} = 0, \quad \Pi^{\alpha} = 0.$$

Dans cette section, on fait l'hypothèse que le plasma est à l'équilibre thermodynamique, ce qui signifie que la Maxwellienne est la même pour les deux espèces ($M^i(f^i) = M^e(f^e)$), qui implique que l'on a $u^e = u^i = u$ et $T^e = T^i = T$. Dans ce cas, on obtient le système hyperbolique d'Euler pour la MHD suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho(u \otimes u) + pI) = \bar{\rho}E + j \wedge B, \\ \partial_t(\mathcal{E}) + \operatorname{div}((\mathcal{E} + p)u) = j \cdot E, \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $p = p^e + p^i$. A présent, on spécifie deux relations supplémentaires que l'on adjoint au système. D'abord, en notant ε l'énergie interne du plasma, on a la loi d'état des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

Puis, on munit ce système d'une loi d'Ohm. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes : le plasma est localement électriquement neutre, la quantité $c^{-2}\partial_t E$ est négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère (qui devient alors la loi d'Ampère classique) :

$$j = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} B$$

et on suppose, en suivant [55], que le champ électrique s'écrit :

$$E = -u \wedge B + \eta j + \frac{1}{n^e e} j \wedge B,$$

1. Introduction

où η désigne la résistivité, et le troisième terme du membre de droite modélise l'effet Hall. Dans le cadre de la MHD idéale, la résistivité est nulle $\eta = 0$ et si l'on suppose l'effet Hall négligeable, on obtient la loi d'Ohm idéale suivante :

$$E = -u \wedge B.$$

En injectant cette expression dans (1.7), le système de la MHD idéale ainsi obtenu est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho(u \otimes u) + pI) = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} B \wedge B, \\ \partial_t B + \operatorname{rot}(B \wedge u) = 0, \\ \partial_t(\mathcal{E}) + \operatorname{div}((\mathcal{E} + p)u) = j\mu_0^{-1} \operatorname{rot} B \cdot (B \wedge u), \end{cases}$$

et la contrainte $\operatorname{div} B = 0$. Ce système peut se réécrire sous forme conservative. Le lecteur intéressé trouvera la preuve de cette réécriture dans [54] :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}\left(\rho(u \otimes u) + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)I - \mu_0^{-1}B \otimes B\right) = 0, \\ \partial_t\left(\mathcal{E} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \operatorname{div}\left((\mathcal{E} + p + \mu_0^{-1}B^2)u - \mu_0^{-1}(B \cdot u)B\right) = 0, \\ \partial_t B + \operatorname{rot}(B \wedge u) = 0, \\ \operatorname{div} B = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les valeurs propres de la matrice associée à cette forme du système sont réelles mais la matrice n'est pas toujours diagonalisable.

Enfin, ce système de la MHD n'est pas invariant par transformation galiléenne. Pour cela, on peut recourir à une modification permettant de le rendre invariant par transformation galiléenne :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}\left(\rho(u \otimes u) + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)I - \mu_0^{-1}B \otimes B\right) = -\mu_0^{-1}(\operatorname{div} B)B \\ \partial_t\left(\mathcal{E} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \operatorname{div}\left((\mathcal{E} + p + \mu_0^{-1}B^2)u - \mu_0^{-1}(B \cdot u)B\right) = -\mu_0^{-1}(B \cdot u)\operatorname{div} B \\ \partial_t B + \operatorname{rot}(B \wedge u) = -u\operatorname{div} B \end{cases}$$

avec la contrainte $\operatorname{div} B = 0$. Cependant, dans ce cas, le système n'est plus conservatif.

Dans le cadre bi-dimensionnel TM introduit dans la section sur les équations de Maxwell, toutes les inconnues ne dépendent que de $x = (x_1, x_2)$, et le champ électromagnétique s'écrit $E = (E_1, E_2, 0)$, $B = (0, 0, B)$. La troisième composante de l'équation sur la quantité de mouvement devient :

$$\partial_t(\rho u_3) + \partial_1(\rho u_1 u_3) + \partial_2(\rho u_2 u_3) = 0.$$

En fixant $u_3 = 0$, on peut ne plus considérer cette équation. Le système (1.8) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u_1) + \partial_{x_1} \left(\rho u_1^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \partial_{x_2}(\rho u_1 u_2) = 0 \\ \partial_t(\rho u_2) + \partial_{x_1}(\rho u_1 u_2) + \partial_{x_2} \left(\rho u_2^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \\ \partial_t \left(\mathcal{E} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div}((\mathcal{E} + p)u) = 0 \\ \partial_t B + \operatorname{div}(Bu) = 0. \end{cases}$$

En effet, on a $B^2 u = (\vec{B} \cdot u)B = (0, 0, B^2 u_3)$ et la contrainte $\operatorname{div} B = 0$ est toujours trivialement vérifiée.

Le cadre d'intérêt de manuscrit (dépendance en $x_1 = x$ uniquement, cas électrostatique) mène au système d'Euler suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho(u \otimes u) + pI) = 0, \\ \partial_t \mathcal{E} + \partial_x((\mathcal{E} + p)u) = 0. \end{cases}$$

1.2.3 Les équations de la MHD bi-température

Dans la section précédente, on a présenté les équations idéales, écrites pour un seul fluide, où uniquement l'équation de conservation de l'énergie totale est considérée. Ici, on s'intéresse au cas bi-température, qui est un modèle intermédiaire entre les modèles cinétiques et le modèle MHD monofluide de la section précédente. La différence principale est donc que l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, selon laquelle $T^i = T^e$, est rejetée, et que seule l'hypothèse de quasi-équilibre est maintenue. Le système macroscopique bi-température est donc constitué d'une équation sur la densité totale, d'une équation sur la quantité de mouvement totale, comme dans le cas précédent, ainsi que d'une équation pour chaque énergie, électronique et ionique. Ces équations sur l'énergie sont donc des équations non-conservatives, qui contiennent des termes d'échange entre les espèces. Notamment, certains termes, appelés produits non-conservatifs, contiennent des dérivées de certaines inconnues, et ne peuvent pas s'écrire sous forme divergentielle. Ces termes sont obtenus par la loi d'Ohm généralisée, liant le champ électromagnétique aux quantités macroscopiques.

On part du modèle cinétique par espèces, comme précédemment, et l'on spécifie plus précisément la nature du terme de collisions \mathcal{C}^α . Ce choix de modèle a été étudié dans [9] et [25], et prend la forme suivante :

$$\partial_t f^\alpha + v \cdot \nabla_x f^\alpha + \frac{F^\alpha}{m^\alpha} \cdot \nabla_v f^\alpha = \frac{1}{\tau^\alpha} (M^\alpha(f^\alpha) - f^\alpha) + \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} (\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) - f^\alpha). \quad (1.9)$$

1. Introduction

Pour décrire un milieu à deux températures, on considère une dissociation des types de collisions. On a donc, au second membre, un premier terme modélisant les collisions entre particules de la même espèce. Ces collisions font tendre la distribution de particules vers la Maxwellienne introduite précédemment (quasi-équilibre thermodynamique).

Les collisions inter-espèces sont modélisées par un terme de relaxation vers une Maxwellienne d'échange, dont l'expression est la suivante :

$$\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) = \frac{n^\alpha}{2\pi k_B \frac{T^\sharp}{m^\alpha}} \exp\left(-\frac{|v - u^\sharp|^2}{2k_B \frac{T^\sharp}{m^\alpha}}\right),$$

définie par les quantités de mélange (également appelées quantités fictives) suivantes :

$$u^\sharp = \frac{\frac{\rho^e}{\tau^{ei}} u^e + \frac{\rho^i}{\tau^{ie}} u^i}{\frac{\rho^e}{\tau^{ei}} + \frac{\rho^i}{\tau^{ie}}}, \quad T^\sharp = \frac{\frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{\rho^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} ((u^\alpha)^2 - (u^\sharp)^2) + \frac{3}{2} k_B \sum_\alpha \frac{n^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} T^\alpha}{\frac{3}{2} k_B \left(\frac{n^e}{\tau^{ei}} + \frac{n^i}{\tau^{ie}}\right)}. \quad (1.10)$$

Comme dit précédemment, on fait l'hypothèse d'un plasma en quasi-équilibre thermodynamique, mais qui n'a pas atteint l'équilibre thermodynamique local. Autrement dit, on suppose que la vitesse de relaxation vers la Maxwellienne intra-espèce est infinie (la fonction est toujours égale à sa Maxwellienne), mais les temps de relaxation τ^{ei} et τ^{ie} vers les Maxwelliennes d'échange (ou Maxwellienne globale) sont finis et comparables au temps caractéristique des phénomènes macroscopiques d'intérêt.

Dans les équations de Maxwell, on néglige, comme précédemment, le terme $c^{-2} \partial_t E$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, et on néglige également le terme $\epsilon_0 \operatorname{div} E$ dans (1.1), qui traduit la quasi-neutralité du plasma :

$$\begin{cases} j = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} B, \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \\ \bar{\rho} = 0, \\ \operatorname{div} B = 0. \end{cases}$$

Ces équations permettent de donner des expressions des quantités partielles en fonction des quantités totales. L'équation $\bar{\rho} = 0$ donne

$$n^e q^e + n^i q^i = 0.$$

La charge électrique d'un électron est $q^e = -e$, avec e la charge élémentaire. La charge d'un ion est $q^i = -Zq^e$, où Z désigne le taux d'ionisation, qui est supposé constant dans tout le manuscrit. On a donc

$$n^e = Zn^i.$$

On définit également les fractions massiques c^i et c^e , qui sont donc également des constantes :

$$c^i = \frac{m^i}{m^i + Zm^e}, \quad c^e = \frac{Zm^e}{m^i + Zm^e},$$

ce qui permet d'exprimer les densités partielles ρ^α de la façon suivante :

$$\rho^\alpha = c^\alpha \rho.$$

et comme $\rho u = \rho^e u^e + \rho^i u^i$, la vitesse de mélange s'écrit :

$$u = c^e u^e + c^i u^i.$$

Par ailleurs, on a :

$$j = n^e q^e u^e + n^i q^i u^i = -e\rho \frac{c^e}{m^e} u^e + Ze\rho \frac{c^i}{m^i} u^i = \frac{\rho e Z}{m^i + Zm^e} (-u^e + u^i).$$

Par conséquent, les vitesses partielles sont égales à :

$$\begin{cases} u^e = u - \frac{m^i}{\rho e Z} j = u - \frac{m^i}{\rho q^i} j, \\ u^i = u + \frac{m^e}{\rho e} j = u - \frac{m^e}{\rho q^e} j, \end{cases} \quad (1.11)$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} u^e = u - \frac{m^i \text{rot} B}{\mu_0 q^i \rho}, \\ u^i = u - \frac{m^e \text{rot} B}{\mu_0 q^e \rho}. \end{cases}$$

Conservation de la masse

Comme dans la section précédente, on obtient l'équation de conservation de la masse en intégrant en v l'équation cinétique (1.9) pour l'espèce α , et multipliant par m^α . L'hypothèse de quasi-équilibre thermodynamique se traduit ici par le fait de prendre la limite de l'équation (1.9) lorsque τ^α tends vers 0 :

$$\partial_t \rho^\alpha + \text{div}(\rho^\alpha u^\alpha) = 0.$$

En sommant sur α , on a :

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0.$$

1. Introduction

Quantité de mouvement

Pour l'équation sur la quantité de mouvement, comme précédemment, on suppose $f^\alpha = M^\alpha(f^\alpha)$. En multipliant l'équation (1.9) par $m^\alpha v$ puis en intégrant par rapport à v , le second membre s'écrit alors :

$$\langle m^\alpha v C^{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} m^\alpha \langle v (\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) - f^\alpha) \rangle = \frac{\rho^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} (u^\sharp - u^\alpha).$$

On trouve, à la faveur de la définition de u^\sharp (1.10) :

$$\frac{\rho^e}{\tau^{ei}} (u^\sharp - u^e) = -\frac{\rho^i}{\tau^{ie}} (u^\sharp - u^i) = \frac{1}{\frac{\tau^{ie}}{c^i} + \frac{\tau^{ei}}{c^e}} \left(\frac{m^i}{q^i} - \frac{m^e}{q^e} \right) j. \quad (1.12)$$

Le membre de gauche de l'équation sur la quantité de mouvement s'écrit de la même manière que dans la section précédente, et l'on détaille ici le calcul du terme de force :

$$\partial_t(\rho^\alpha u^\alpha) + \text{div}(\rho^\alpha(u^\alpha \otimes u^\alpha) + p^\alpha I) + \langle q^\alpha v(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f^\alpha \rangle = \frac{\rho^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} (u^\sharp - u^\alpha).$$

On a, en explicitant les composantes du terme de force, pour $d \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} (\langle q^\alpha v(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f^\alpha \rangle)_d &= q^\alpha \langle v_d ((E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) \partial_{v_1} f^\alpha \\ &\quad + (E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3) \partial_{v_2} f^\alpha \\ &\quad + (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \partial_{v_3} f^\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

On obtient d'abord le terme de force électrostatique :

$$(\langle q^\alpha v E \cdot \nabla_v f^\alpha \rangle)_d = q^\alpha \sum_{i=1}^3 \langle v_d E_i \partial_{v_i} f^\alpha \rangle = -q^\alpha E_d \langle f^\alpha \rangle = -q^\alpha n^\alpha E_d$$

et le terme de force magnétique s'écrit (pour la première composante) :

$$\begin{aligned} &q^\alpha \langle (v_1 v_2 B_3 - v_1 v_3 B_2) \partial_{v_1} f^\alpha + (v_1 v_3 B_1 - v_1^2 B_3) \partial_{v_2} f^\alpha + (v_1^2 B_2 - v_1 v_2 B_1) \partial_{v_3} f^\alpha \rangle \\ &= q^\alpha \langle (-v_2 B_3 + v_3 B_2) f^\alpha \rangle \\ &= q^\alpha n^\alpha (B \wedge u^\alpha)_1. \end{aligned}$$

D'où l'expression du terme de force complet :

$$\langle q^\alpha v(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f^\alpha \rangle = q^\alpha n^\alpha (-E + B \wedge u^\alpha).$$

Par conséquent, les équations sur les quantités de mouvement électroniques et ioniques s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho^e u^e) + \text{div}(\rho^e(u^e \otimes u^e) + p^e I) + q^e n^e (-E + B \wedge u^e) = \frac{\rho^e}{\tau^{ei}} (u^\sharp - u^e), \\ \partial_t(\rho^i u^i) + \text{div}(\rho^i(u^i \otimes u^i) + p^i I) + q^i n^i (-E + B \wedge u^i) = \frac{\rho^i}{\tau^{ie}} (u^\sharp - u^i). \end{cases} \quad (1.13)$$

En additionnant ces deux équations, on obtient l'équation sur la quantité de mouvement totale, où on utilise le fait que $\bar{\rho} = q^e n^e + q^i n^i = 0$ et la définition de $j = n^e q^e u^e + n^i q^i u^i$:

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} (\rho^{\alpha} u^{\alpha} \otimes u^{\alpha} + p^{\alpha} I) \right) + B \wedge j = 0,$$

où le second membre est nul grâce à (1.12). A présent, on peut expliciter le terme de flux dans la divergence à l'aide de l'expression des vitesses partielles (1.11) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (c^{\alpha} u^{\alpha} \otimes u^{\alpha}) &= \sum_{\alpha} \left(c^{\alpha} \left(u - \frac{m^{\beta}}{\rho q^{\beta}} j \right) \otimes \left(u - \frac{m^{\beta}}{\rho q^{\beta}} j \right) \right) \\ &= u \otimes u + \sum_{\alpha} \left(-\frac{c^{\alpha} m^{\beta}}{\rho q^{\beta}} (j \otimes u + u \otimes j) + c^{\alpha} \left(\frac{m^{\beta}}{\rho q^{\beta}} \right)^2 j \otimes j \right) \\ &= u \otimes u + \frac{m^e m^i}{\rho^2 e^2 Z} j \otimes j \end{aligned}$$

en remarquant que $\sum_{\alpha} \frac{c^{\alpha} m^{\beta}}{q^{\beta}} = 0$. Par conséquent, l'équation sur la quantité de mouvement totale se réécrit :

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} \left(\rho u \otimes u + \frac{m^e m^i}{\rho e^2 Z} j \otimes j + (p^e + p^i) I \right) + B \wedge j = 0.$$

En posant

$$\mu = Z \frac{m^e}{m^i},$$

cette équation s'écrit enfin :

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div} \left(\rho u \otimes u + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{m^i}{Z e} \right)^2 j \otimes j + (p^e + p^i) I \right) + B \wedge j = 0.$$

Loi d'Ohm

La loi d'Ohm est une équation qui relie le champ électromagnétique aux quantités macroscopiques. Pour l'obtenir, on multiplie la première équation de (1.13) par q^e/m^e et la seconde par q^i/m^i , de façon à obtenir une équation d'évolution sur le courant $j = q^e n^e u^e + q^i n^i u^i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n^e q^e u^e) + \operatorname{div}(n^e q^e (u^e \otimes u^e) + \frac{q^e p^e}{m^e} I) + \frac{n^e (q^e)^2}{m^e} (-E + B \wedge u^e) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{-j}{\frac{\tau_{ie}}{c^i} + \frac{\tau_{ei}}{c^e}} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \\ \partial_t(n^i q^i u^i) + \operatorname{div}(n^i q^i (u^i \otimes u^i) + \frac{q^i p^i}{m^i} I) + \frac{n^i (q^i)^2}{m^i} (-E + B \wedge u^i) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{j}{\frac{\tau_{ie}}{c^i} + \frac{\tau_{ei}}{c^e}} (1 + \mu). \end{array} \right.$$

1. Introduction

D'où, en sommant ces deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{j}{\frac{\tau_{ie}}{c^i} + \frac{\tau_{ei}}{c^e}} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) &= \partial_t j + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \left(n^{\alpha} q^{\alpha} (u^{\alpha} \otimes u^{\alpha}) + q^{\alpha} (m^{\alpha})^{-1} p^{\alpha} I \right) \right) \\ &+ \sum_{\alpha} \left(n^{\alpha} (m^{\alpha})^{-1} (q^{\alpha})^2 (-E + B \wedge u^{\alpha}) \right). \end{aligned}$$

On décompose la force de Lorentz de la façon suivante :

$$-E + B \wedge u^{\alpha} = -E + B \wedge u - B \wedge \frac{m^{\beta}}{\rho q^{\beta}} j.$$

Le facteur devant le terme $-E + B \wedge u$ s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \frac{n^{\alpha} (q^{\alpha})^2}{m^{\alpha}} = \rho \left[\frac{Ze^2}{m^e (m^i + Zm^e)} + \frac{Z^2 e^2}{m^i (m^i + Zm^e)} \right] = \frac{\rho e^2 Z}{m^e m^i} = \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{Ze}{m^i} \right)^2,$$

tandis que le facteur devant $-B \wedge j$ est :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{n^{\alpha} (q^{\alpha})^2 m^{\beta}}{m^{\alpha} \rho q^{\beta}} &= \frac{Ze^2}{m^e (m^i + Zm^e)} \frac{m^i}{Ze} + \frac{Z^2 e^2}{m^i (m^i + Zm^e)} \frac{m^e}{-e} \\ &= e \left[\frac{m^i}{(m^i + Zm^e) m^e} - \frac{Z^2 m^e}{(m^i + Zm^e) m^i} \right] \\ &= e \frac{m^i - Zm^e}{m^i m^e} \\ &= \frac{1 - \mu Ze}{\mu m^i}. \end{aligned}$$

Enfin, les termes dans la divergence s'écrivent :

$$\begin{aligned} n^e q^e u^e \otimes u^e + n^i q^i u^i \otimes u^i &= n^e q^e \left[\left(u - \frac{m^i}{\rho q^i} j \right) \otimes \left(u - \frac{m^i}{\rho q^i} j \right) \right] \\ &+ n^i q^i \left[\left(u - \frac{m^e}{\rho q^e} j \right) \otimes \left(u - \frac{m^e}{\rho q^e} j \right) \right] \\ &= n^e q^e \left[u \otimes u - \frac{m^i}{\rho q^i} (u \otimes j + j \otimes u) + \frac{(m^i)^2}{\rho^2 (q^i)^2} j \otimes j \right] \\ &+ n^i q^i \left[u \otimes u - \frac{m^e}{\rho q^e} (u \otimes j + j \otimes u) + \frac{(m^e)^2}{\rho^2 (q^e)^2} j \otimes j \right]. \end{aligned}$$

Or, comme

$$n^e q^e \frac{m^i}{\rho q^i} + n^i q^i \frac{m^e}{\rho q^e} = \frac{Z}{m^i + Zm^e} (-e) \frac{m^i}{Ze} + \frac{1}{m^i + Zm^e} (Ze) \frac{m^e}{-e} = -1$$

et

$$\begin{aligned} n^e q^e \frac{(m^i)^2}{\rho^2 (q^i)^2} + n^i q^i \frac{(m^e)^2}{\rho^2 (q^e)^2} &= \frac{Z}{\rho(m^i + Zm^e)} (-e) \frac{(m^i)^2}{Z^2 e^2} + \rho \frac{1}{\rho(m^i + Zm^e)} Z e \frac{(m^e)^2}{e^2} \\ &= \frac{Zm^e - m^i}{\rho Z e} \\ &= -\frac{m^i}{\rho Z e} (1 - \mu), \end{aligned}$$

les termes dans la divergence peuvent s'exprimer par :

$$n^e q^e u^e \otimes u^e + n^i q^i u^i \otimes u^i = u \otimes j + j \otimes u - \frac{m^i}{\rho Z e} (1 - \mu) j \otimes j.$$

Ainsi, on obtient la loi d'Ohm généralisée :

$$\begin{aligned} \partial_t j + \operatorname{div} \left(u \otimes j + j \otimes u - \frac{m^i}{\rho Z e} (1 - \mu) j \otimes j + \sum \alpha \left(\frac{q^\alpha}{m^\alpha} p^\alpha \right) I \right) \\ + \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{Z e}{m^i} j \wedge B - \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{Z e}{m^i} \right)^2 (E + u \wedge B) \\ = \frac{j}{\frac{\tau^{ie}}{c^i} + \frac{\tau^{ei}}{c^e}} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned}$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{\rho}{\mu} \left(\frac{Z e}{m^i} \right)^2 = -\rho \frac{q^e q^i}{m^e m^i},$$

on peut réécrire cette équation comme :

$$\begin{aligned} \partial_t j + \operatorname{div} \left(u \otimes j + j \otimes u - \frac{m^i}{\rho Z e} (1 - \mu) j \otimes j + \sum_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{m^\alpha} p^\alpha \right) I \right) \\ + \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{Z e}{m^i} j \wedge B + \rho \frac{q^e q^i}{m^e m^i} (E + u \wedge B) \\ = \frac{j}{\frac{\tau^{ie}}{c^i} + \frac{\tau^{ei}}{c^e}} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Bilans d'énergie

A présent, on écrit une équation sur chaque énergie, une pour chaque composante du plasma. On rappelle la définition de l'énergie de l'espèce α $\mathcal{E}^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha \langle |v|^2 f^\alpha \rangle$. On obtient l'équation d'évolution suivante :

$$\partial_t \mathcal{E}^\alpha + \operatorname{div}(u^\alpha (\mathcal{E}^\alpha + p^\alpha)) + q^\alpha \langle (E + v \wedge B) \frac{|v|^2}{2} \nabla_v f^\alpha \rangle = \frac{m^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} \left\langle \frac{v^2}{2} (\overline{M}^\alpha (f^e, f^i) - f^\alpha) \right\rangle,$$

1. Introduction

avec f^e et f^i égales à leur Maxwellienne. Le terme de force électrostatique s'écrit :

$$q^\alpha \langle E \frac{|v|^2}{2} \nabla_v f^\alpha \rangle = -E q^\alpha n^\alpha u^\alpha.$$

Par une intégration par partie, on obtient que le terme de force magnétique est nul :

$$q^\alpha \langle (v \wedge B) \frac{|v|^2}{2} \nabla_v f^\alpha \rangle = 0.$$

Enfin, l'énergie associée au terme de relaxation inter-espèces s'écrit :

$$m^\alpha \langle \frac{v^2}{2} (\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) - f^\alpha) \rangle = (\mathcal{E}^\alpha)^\# - \mathcal{E}^\alpha = \frac{3}{2} n^\alpha k_B (T^\# - T^\alpha) + \frac{1}{2} \rho^\alpha ((u^\#)^2 - (u^\alpha)^2).$$

En injectant les expressions des quantités de mélange (1.10), on trouve une expression de la forme suivante :

$$\frac{m^\alpha}{\tau^{\alpha\beta}} \langle \frac{v^2}{2} (\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) - f^\alpha) \rangle = \nu^{1,\alpha\beta} (T^\beta - T^\alpha) + \nu^{2,\alpha\beta} j \cdot j + \nu^{3,\alpha\beta} j \cdot u,$$

où les différentes fréquences de relaxation sont définies par :

$$\begin{aligned} \nu^{1,ei} &= \frac{3}{2} \frac{k_B n^e n^i}{\tau^{ei} n^e + \tau^{ie} n^i}, \\ \nu^{2,ei} &= c^e c^i \rho \frac{(c^e - c^i)(n^i c^i (\tau^{ei})^2 + n^e c^e (\tau^{ie})^2) - 2c^e c^i (n^i - n^e) \tau^{ei} \tau^{ie}}{(\tau^{ie} n^e + \tau^{ei} n^i)(q^e n^e)^2 (\tau^{ie} c^e + \tau^{ei} c^i)^2}, \\ \nu^{3,ei} &= \frac{c^e c^i \rho}{q^e n^e (\tau^{ie} c^e + \tau^{ei} c^i)}. \end{aligned}$$

Au final, l'expression sur l'énergie de l'espèce α est :

$$\partial_t \mathcal{E}^\alpha + \text{div}(u^\alpha (\mathcal{E}^\alpha + p^\alpha)) - E q^\alpha n^\alpha u^\alpha = \nu^{1,\alpha\beta} (T^\beta - T^\alpha) + \nu^{2,\alpha\beta} j \cdot j + \nu^{3,\alpha\beta} j \cdot u, \quad \alpha = e, i.$$

Synthèse

Le système d'Euler bi-température prend donc la forme suivante, pour $\alpha = e, i$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \text{div} \left(\rho u \otimes u + \frac{m^e m^i}{\rho e^2 Z} j \otimes j + (p^e + p^i) \mathbf{I} \right) + B \wedge j = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}^\alpha + \text{div}(u^\alpha (\mathcal{E}^\alpha + p^\alpha)) - E \cdot q^\alpha n^\alpha u^\alpha = \nu^{1,\alpha\beta} (T^\beta - T^\alpha) + \nu^{2,\alpha\beta} j \cdot j + \nu^{3,\alpha\beta} j \cdot u, \end{cases}$$

couplé à la loi d'Ohm généralisée :

$$\begin{aligned} \partial_t j + \text{div} \left(u \otimes j + j \otimes u - \frac{m^i}{\rho Z e} (1 - \mu) j \otimes j + \sum_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{m^\alpha} p^\alpha \right) I \right) \\ + \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{Z e}{m^i} j \wedge B + \rho \frac{q^e q^i}{m^e m^i} (E + u \wedge B) = \frac{j}{\frac{\tau^{ie}}{c^i} + \frac{\tau^{ei}}{c^e}} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right), \end{aligned}$$

et aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} j = \mu_0^{-1} \text{rot} B, \\ \partial_t B + \text{rot} E = 0, \\ n^e q^e + n^i q^i = 0, \\ \text{div} B = 0. \end{cases}$$

Dans ce manuscrit, on s'intéresse au cas électrostatique, avec $B = 0$. Par conséquent, on a $j = 0$, $u = u^e = u^i$ et la loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \frac{q^{\alpha}}{m^{\alpha}} \nabla p^{\alpha} + \rho \frac{q^e q^i}{m^e m^i} E = 0,$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$-n^i q^i E = n^e q^e E = -c^i \nabla p^e + c^e \nabla p^i.$$

En injectant cette expression dans les équations d'énergie, on obtient le système d'Euler bi-température électrostatique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \text{div}(\rho u \otimes u + (p^e + p^i)I) = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \text{div}(u^{\alpha}(\mathcal{E}^{\alpha} + p^i)) + u(c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i) = \nu^{ei}(T^e - T^i), \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \text{div}(u^{\alpha}(\mathcal{E}^{\alpha} + p^e)) + u(c^e \nabla p^i - c^i \nabla p^e) = \nu^{ei}(T^i - T^e). \end{cases} \quad (1.14)$$

1.3 Contributions

Dans cette section, on détaille, chapitre par chapitre, les problèmes étudiés dans ce manuscrit, ainsi que les contributions apportées.

1.3.1 Chapitre 2 : Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution du système d'Euler bi-température électrostatique (1.14) présenté à la fin de la section précédente, en dimension 1 d'espace. La difficulté liée à ce système est celle des produits non-conservatifs, dont une brève introduction est donnée dans l'annexe A. Les produits non-conservatifs sont les termes $u(c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i)$ faisant intervenir des produits d'inconnues et de leurs dérivées, mais que l'on ne peut écrire sous la forme d'une divergence. Comme pour tout système hyperbolique, pour tout type de donnée initiale, on sait que la solution, en temps fini, peut laisser apparaître des discontinuités. Ainsi, on s'intéresse à la recherche de solutions faibles, définies au sens des distributions. Or, dans ce cas, il n'est pas possible de définir le produit de deux distributions et le produit

1. Introduction

non-conservatif est donc mal défini. Plusieurs méthodes de résolution de ce système ont été proposées précédemment dans [9], où un système cinétique sous-jacent compatible à la limite avec le système d'Euler bi-température a été introduit. Ce système cinétique est composé d'équations de Vlasov-BGK couplées aux équations de Maxwell électrostatiques :

$$\begin{cases} \partial_t f^\alpha + v_1 \partial_x f^\alpha + \frac{q^\alpha E}{m^\alpha} \partial_{v_1} f^\alpha = \frac{1}{\tau^\alpha} (M(f^\alpha) - f^\alpha) + \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} (\overline{M}^\alpha(f^e, f^i) - f^\alpha), \\ \partial_t E = -\frac{j}{\epsilon_0}, \\ \partial_x E = \frac{\overline{\rho}}{\epsilon_0}, \end{cases}$$

où les opérateurs de collisions ont été approchés par des opérateurs de relaxation de type BGK.

Dans l'introduction qui précède, il est démontré, de manière formelle, qu'un *scaling* approprié permet de retrouver le système d'Euler bi-température comme limite hydrodynamique de ce système. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est donc de développer une méthode numérique pour le système cinétique sous-jacent permettant d'obtenir des résultats de référence pour le système d'Euler bi-température.

Premièrement, on présente un modèle réduit de ce système cinétique, permettant une économie du coût numérique des méthodes, grâce à la définition de fonctions de distribution dites marginales. On démontre que ce système réduit est bien compatible avec la limite hydrodynamique, qu'une entropie existe et que celle-ci est compatible avec la dissipation de l'entropie d'Euler.

Deuxièmement, on propose une méthode numérique capable de produire de tels résultats. La difficulté réside ici dans le fait que l'on souhaite obtenir une méthode pour le modèle cinétique pour laquelle il est possible de prendre la limite hydrodynamique, et que celle-ci soit, du point de vue discret, consistante avec la limite hydrodynamique au niveau continu. Plus précisément, le *scaling* des équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Gauss implique, qu'à la limite, celles-ci dégénèrent vers des équations algébriques. En effet, les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\partial_t E = -\frac{j}{\tau}, \quad \partial_x E = \frac{\overline{\rho}}{\tau},$$

où atteindre la limite hydrodynamique consiste à faire tendre τ vers 0. Dans ce cas, les équations se récrivent :

$$j = 0, \quad \overline{\rho} = 0,$$

ce qui traduit la description quasi-neutre d'un plasma à l'échelle macroscopique. Du point de vue numérique, cela signifie que les équations de Maxwell ne peuvent plus être utilisées en l'état pour calculer le champ électrique et que ces deux équations algébriques sont des contraintes indispensables à la consistance des résultats. Ainsi, on propose dans ce chapitre un schéma de type volumes finis capable, premièrement,

de calculer le champ électrique pour toute valeur de τ et, deuxièmement, de vérifier ces contraintes. Un tel schéma, possédant des contraintes de stabilité indépendantes de ce type de petit paramètre τ , est dite *asymptotic-preserving*.

Deux contraintes doivent être imposées : la première, portant sur la charge électrique, est vérifiée par le choix d'un schéma *upwind* à viscosité modifiée adéquat. La deuxième contrainte est imposée par le choix du champ électrique, vu comme un degré de liberté. Par une reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère, on peut obtenir une équation valide à la limite $\tau = 0$ dépendant du champ électrique. C'est donc cette équation qui permet le calcul de celui-ci.

Finalement, on présente quelques cas test pour valider le bon comportement de la méthode. On s'assure, pour chacun des cas, que les contraintes sont bien vérifiées, et donc que les résultats sont bien consistants avec la limite hydrodynamique. Par ailleurs, on compare ces résultats avec deux méthodes : une méthode de type BGK discret et un schéma de relaxation de Suliciu, introduits dans [9]. Par ailleurs, on énonce un résultat sur le schéma de relaxation de Suliciu : l'entropie est dissipée par le système du second ordre associé au développement de Chapman-Enskog sous une condition de type sous-caractéristique que l'on calcule.

1.3.2 Chapitre 3 : Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution du système d'Euler bi-température (1.14) en dimension 2 d'espace, dans le cas électrostatique. L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode numérique de type BGK discret ([88], [7],[8]). En partant des travaux développés dans [19], [9] et [6], on peut construire, pour notre système hyperbolique, un système cinétique sous-jacent muni d'entropies compatibles avec l'entropie macroscopique. Les équations de ce système sont donc très similaires aux équations cinétiques étudiées au chapitre précédent, issues de la physique. En effet, elles contiennent un terme de transport et un terme de relaxation vers une "Maxwellienne". La première étape de cette construction consiste à choisir un espace de vitesse définissant le terme de transport. Ici, on choisit un ensemble fini à quatre vitesses. Puis, grâce à des conditions de compatibilité assurant la validité de la limite hydrodynamique du système sous-jacent, on obtient l'expression des Maxwelliennes du système, qui dépendent aussi bien de l'espace des vitesses choisi que des quantités macroscopiques (et leur flux).

Une fois le modèle cinétique défini, on s'intéresse à sa résolution numérique à l'ordre 1. On applique une méthode de type transport-projection. Les termes hyperboliques sont des termes de transport à vitesses constantes, que l'on peut donc traiter par un schéma *upwind*. Puis, pour obtenir la limite hydrodynamique au niveau discret, on projette la solution obtenue sur l'équilibre maxwellien.

A la suite de cela, on propose un passage à l'ordre 2. En dimension 1 et dans le cas conservatif, un formalisme possible consiste à considérer un schéma d'ordre 1 défini sur des demi-maillages. Ici, on adopte le même principe en divisant une maille

1. Introduction

(i.e. un rectangle) en quatre triangles (en suivant les diagonales du rectangle).

Finalement, on propose une série de cas test permettant de valider la méthode développée dans ce chapitre.

1.3.3 Chapitre 4 : Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

Dans le chapitre 2, il a été observé qu'il était intéressant du point de vue numérique de considérer des discrétisations en vitesse différentes pour chaque espèce composant un plasma, en raison des fortes disparités de masses. Cette procédure peut être étudiée plus en détail dans le cas de mélanges de gaz neutres et inertes contenant un nombre arbitraire d'espèces et pour des opérateurs de relaxation différents. C'est l'objet de ce chapitre, où l'on s'intéresse à la résolution numérique des équations cinétiques pour un mélange de gaz en dimension 1 d'espace et 1 de vitesse (modèle 1D1V). On considère un gaz à N composantes, et l'équation cinétique sur la composante α s'écrit :

$$\partial_t f^\alpha + \partial_x(v f^\alpha) = \nu^\alpha(\overline{M}^\alpha(f) - f^\alpha),$$

où l'opérateur de collisions de Boltzmann a été approché par un opérateur BGK [3], relaxant la fonction de distribution vers une fonction Maxwellienne dont les quantités macroscopiques ont été choisies de sorte à faire correspondre les termes d'échange macroscopiques avec ceux du véritable opérateur de Boltzmann. L'objectif de ce chapitre est donc de développer une méthode cinétique adaptative en vitesse pour ce modèle. Pour cela, on étend les idées développées par S. Brull et L. Mieussens dans [26] au cas des mélanges de gaz. Pour les schémas cinétiques, il est nécessaire de mailler l'espace des phases. Cet espace s'écrit sous la forme $\Omega \times \mathbb{R}$, où $\Omega \in \mathbb{R}$ est borné et désigne l'espace physique et \mathbb{R} correspond à l'espace des vitesses. Pour le calcul numérique, une troncature adéquate de cet espace doit donc être choisie. Pour cela, on se réfère aux quantités macroscopiques, et on fait l'hypothèse que la solution ne s'éloigne pas trop d'un état maxwellien. Ainsi, la troncature est donnée par l'intervalle de confiance d'une gaussienne, où la vitesse macroscopique u joue le rôle d'espérance et la vitesse thermique $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ joue le rôle de l'écart-type. Ainsi, l'intervalle de confiance (i.e. la troncature) dépend directement des quantités macroscopiques et la masse particulière des différentes composantes du gaz. Dans la mesure où ces quantités peuvent potentiellement varier au cours du temps et dépendre du point d'espace et de l'espèce du gaz, la troncature idéale peut varier également. Les méthodes standards consistent à choisir un intervalle uniforme en espace et en espèce à l'aide de la donnée initiale, puis de procéder à un test de convergence pour s'assurer de la validité de cette troncature au cours du temps.

L'idée développée ici consiste donc à prendre des intervalles en vitesse dynamiques en temps, différents pour chaque point d'espace et chaque espèce. Ainsi, à chaque pas de temps, on commence par calculer les quantités macroscopiques au

temps suivant, ce qui permet de définir l'ensemble des vitesses discrètes (ou grille) convenable pour décrire la solution au temps suivant.

Pour obtenir les quantités macroscopiques au temps suivant, on commence par choisir un schéma pour les fonctions de distribution : on traite la divergence en espace à l'aide d'un schéma amont standard et on applique une méthode d'Euler implicite pour traiter le terme de relaxation. Le traitement implicite du terme de relaxation permet de se passer de contrainte de stabilité sur la relaxation et d'obtenir notamment un schéma pour Euler. En prenant les moments de ces équations, on obtient d'abord les concentrations par espèce, en chaque point. Puis, on montre que les vitesses macroscopiques et les énergies internes par espèces vérifient chacune un système linéaire de taille N en chaque point d'espace et que ce système est inversible. Ce résultat est propre à la structure du modèle multi-espèces choisi dans ce travail, et est une conséquence du fait que les quantités de mélange dépendent linéairement des quantités partielles.

Une fois les quantités macroscopiques calculées, on calcule, en chaque point d'espace et pour chaque espèce, la grille en vitesse adaptée. Puis, pour pouvoir appliquer le schéma amont, on doit interpoler chaque élément du stencil sur cette nouvelle grille, car ces quantités ne sont pas connues a priori car elles ne sont pas définies sur le même ensemble de vitesses discrètes. Enfin, une fois cette étape d'interpolation réalisée, on peut calculer la solution au temps suivant.

La méthode numérique consiste donc, au cours d'un pas de temps, à réaliser les étapes suivantes :

1. Calcul des quantités macroscopiques
2. Calcul des intervalles adaptés à la solution
3. Calcul de la Maxwellienne de l'opérateur de relaxation
4. Interpolation des quantités du stencil sur la nouvelle grille
5. Calcul des fonctions de distribution

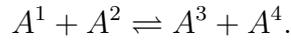
Dans un second temps, on propose une amélioration de la méthode décrite ici permettant de diminuer le nombre d'interpolations nécessaires. En effet, ces interpolations ont un coût numérique élevé et dégradent la qualité de la solution approchée. Pour diminuer leur nombre, on calcule des grilles dites *décalées*. On définit les grilles de sorte à ce que celles-ci, d'un pas de temps à un autre, partagent le plus grand nombre de vitesses discrètes. On commence par identifier le pas de vitesse le plus petit, que l'on note ici d . On modifie alors tous les autres pas de sorte à ce qu'ils soient égaux à leur multiple de d le plus proche. Ainsi, on s'assure que le plus grand nombre d'interpolations est évité, ce qui se traduit par un gain en coût de calcul.

Finalement, on présente quelques résultats numériques, où l'on compare la méthode classique à grille fixe avec nos deux méthodes (à grilles locales et à grilles décalées). On les compare également aux résultats de référence obtenus avec la méthode classique à grille fixe, sur laquelle un test de convergence a été effectué. On montre que les résultats sont comparables pour des temps de calcul plus intéressants.

Par ailleurs, on montre que le test de convergence permettant de trouver la grille idéale n'est pas nécessaire pour ces méthodes, contrairement à la méthode classique.

1.3.4 Chapitre 5 : Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un modèle cinétique de type BGK pour les écoulements de mélanges de gaz raréfiés réactifs. Ce modèle a été développé dans [57] pour le cas d'un mélange à quatre espèces sujet à des réactions bimoléculaires réversibles lentes :



Ce modèle constitue une extension du modèle d'Andries-Aoki-Perthame [3] étudié au chapitre précédent. Dans ce modèle, on conserve la structure du modèle précédent : un unique terme de relaxation vers une distribution maxwellienne, dont les quantités macroscopiques qui la définissent sont choisies de sorte à rendre compte à la fois des effets mécaniques (collisions entre particules) et des effets chimiques. Les premiers mènent à des échanges entre espèces de quantités de mouvement et d'énergie, comme introduit au chapitre précédent, et le second inclue également des échanges de masses entre espèces via les réactions chimiques.

Pour développer un schéma numérique pour ces équations, on considère un traitement explicite-implicite du terme de relaxation. On conserve le traitement implicite des termes issus du modèle d'Andries-Aoki-Perthame, qui mène à un système linéaire pour les vitesses macroscopiques et pour les énergies internes de chaque espèce, en chaque point d'espace. Les termes chimiques sont, quant à eux, traités de manière explicite, afin de préserver la linéarité de la procédure de calcul des quantités macroscopiques. On montre que ce choix explicite-implicite assure la préservation des conservations des quantités macroscopiques totales. Enfin, on applique cette méthode (en grilles fixes) à quelques cas test afin d'exhiber les phénomènes dus aux réactions chimiques.

Première partie

Etude numérique et modélisation du système d'Euler bi-température

Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

2.1	Introduction	44
2.2	Description des modèles macroscopique et cinétique d'un plasma	45
2.2.1	Le modèle d'Euler bi-temperature	45
2.2.2	Quantités macroscopiques	46
2.2.3	Le système de Vlasov-BGK-Ampère	47
2.2.4	Un modèle réduit	48
2.2.5	Scaling des équations	55
2.2.6	Reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère	57
2.2.7	Limite hydrodynamique	58
2.2.8	Inégalités d'entropie pour les solutions limites	61
2.3	Traitement numérique des équations cinétiques	63
2.3.1	Résolution numériques des équations de Vlasov-BGK : méthode générale	63
2.3.2	Un schéma amont avec viscosité modifiée	67
2.4	Comparaisons avec des schémas pour le modèle macroscopique	69
2.5	Résultats numériques	75
2.5.1	Tube à choc avec des températures initiales identiques	76
2.5.2	Tube à choc avec des températures initiales différentes	78
2.5.3	Double détente	81
2.5.4	Double choc	81
2.5.5	Tube de Sod avec masses réalistes	84
2.6	Conclusion	86

2.1 Introduction

La physique des plasmas fait appel à la résolution de problèmes multi-échelles ([35]). Les phénomènes qui la composent vont de l'oscillation plasma et de la séparation de charge, qui ont lieu à de très petites échelles, aux phénomènes de mécaniques des fluides, visibles aux échelles macroscopiques. Plusieurs modèles physiques existent afin de décrire mathématiquement un plasma en fonction de l'échelle d'intérêt. Les modèles cinétiques, tels que les équations de Vlasov-Boltzmann, couplées aux équations de Maxwell, sont adaptées aux descriptions mésoscopiques d'un plasma. Dans ce modèle, chaque population de particules α (dans le cas d'un plasma, il s'agit d'électrons, d'ions, d'atomes neutres et de molécules) est représentée par sa fonction de distribution f^α . Cette fonction, définie sur l'espace des phases, représente le nombre de particules qui, au temps t et au point x , possèdent une vitesse v . Par le biais d'une limite hydrodynamique, on peut obtenir, à partir de ces équations cinétiques, les équations sur les quantités macroscopiques (masse, quantité de mouvement et énergie), qui permettent une description à l'échelle macroscopique d'un plasma. Ces équations forment le système d'Euler bi-température (voir [9] pour le cas électrostatique, et [25] pour le cas transverse magnétique). Du point de vue numérique, ces équations sont moins précises que le système cinétique sous-jacent, mais elles sont moins coûteuses à résoudre.

Le système d'Euler bi-température est constitué d'une équation sur la masse, d'une équation sur la quantité de mouvement, et d'une équation sur chaque énergie par espèce. Ces équations sur les énergies sont non conservatives, en traduisant le fait que, dans un plasma, les ions et les électrons échangent de l'énergie via les collisions, ainsi que par les interactions électromagnétiques. Contrairement au système d'Euler usuel pour les gaz, pour lequel la solution exacte des problèmes de Riemann est connue, la présence de termes non conservatifs empêche l'obtention de telles solutions exactes, en particulier lorsque la solution contient des chocs. C'est une conséquence du fait que les termes non conservatifs s'écrivent comme des produits de distributions, qui ne possèdent pas de définition précise. [41] présente une approche permettant de définir de tels produits à l'aide d'une théorie des chemins. Il est clair, dans cette théorie, que le choix du chemin permettant de définir un produit non conservatif est arbitraire. Autrement dit, la relation de Rankine-Hugoniot permettant de définir les solutions faibles dépend directement de ce choix. Ainsi, une conséquence de cette propriété est que chaque schéma numérique choisit, de manière intrinsèque, sa propre famille de chemins, et donc, la relation de Rankine-Hugoniot sera différente pour chaque méthode numérique. Ce phénomène est mis en valeur par [9]. Plus précisément, chaque schéma possède sa propre viscosité numérique, et les relations de saut dépendent de ces viscosités. Plusieurs approches ont été proposées afin de développer des méthodes numériques employant la théorie des chemins afin de définir les relations de saut ([89], [32]). D'autres approches ont également été proposées pour divers systèmes non conservatifs (voir, par exemple, [33], [47], [79], [106], [1]). Enfin, la monographie de F. Bouchut [20] propose un aperçu des

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

méthodes numériques pour les équations de Saint-Venant non conservatives.

Dans ce chapitre, l'objectif est de proposer une méthode numérique de référence pour de telles solutions, à l'aide d'un système cinétique sous-jacent. Le système cinétique est conservatif dans sa partie hyperbolique, et donc ne présente pas les problèmes présentés précédemment. Ainsi, l'idée est de résoudre les équations de Vlasov-BGK-Ampère à la limite hydrodynamique. Afin de pouvoir comparer les résultats avec les schémas proposées pour le système d'Euler bi-température, il est nécessaire de décrire des échelles identiques. En faisant un *scaling* du système cinétique, des paramètres non-dimensionnels (la longueur de Debye scalé, la fréquence plasma scalé) sont introduits dans le système. Atteindre la limite hydrodynamique revient donc à prendre la limite quand ces paramètres tendent vers zéro. Dans le cas général, si une approche classique est adoptée pour résoudre le système cinétique, des conditions de stabilité très restrictives apparaissent, ce qui rend le schéma inutilisable à la limite. Ainsi, une méthode préservant l'asymptotique (schéma AP) doit être utilisée. Une telle méthode possède des conditions de stabilité indépendantes de ces petits paramètres, et est donc capable de calculer des solutions approchées dans un temps raisonnable, même lorsque ces paramètres tendent vers zéro. Le concept de méthode *Asymptotic-Preserving* a été introduit par Shi Jin dans [67]. Pour l'étude des simulations plasma, de nombreuses méthodes préservant l'asymptotique ont été proposées pour divers modèles, comme Euler-Maxwell, Euler-Poisson, Euler-Lorentz, Vlasov-Poisson ([44], [23], [43], [40], [39], [42], [11]). Enfin, une approche pour la résolution numérique des produits non-conservatifs dans le contexte de la mécanique des plasmas en physique solaire a été proposée dans [104], fondée sur un système hyperbolique-parabolique, obtenu dans [56].

2.2 Description des modèles macroscopique et cinétique d'un plasma

2.2.1 Le modèle d'Euler bi-température

Le système d'Euler bi-température est un système hyperbolique non conservatif qui décrit le comportement d'un plasma, vu comme un fluide chargé composé de deux espèces de particules (électrons et ions), dans une configuration hors-équilibre. Il prend la forme suivante, où chaque inconnue du problème dépend du temps et de

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

trois premiers moments de $m^\alpha f^\alpha(t, x, v)$, c'est-à-dire comme l'intégrale par rapport à v de $m^\alpha f^\alpha(t, x, v)$ contre les puissances successives de v :

$$\begin{aligned}\langle\langle m^\alpha f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^\alpha = m^\alpha n^\alpha, \\ \langle\langle m^\alpha v f^\alpha \rangle\rangle &= \rho^\alpha u^\alpha = m^\alpha n^\alpha u^\alpha, \\ \langle\langle m^\alpha \frac{v^2}{2} f^\alpha \rangle\rangle &= \mathcal{E}^\alpha = \mathcal{E}_{\text{cinétique}}^\alpha + n^\alpha \varepsilon^\alpha = \frac{1}{2} \rho^\alpha (u^\alpha)^2 + \frac{3}{2} n^\alpha k_B T^\alpha,\end{aligned}\tag{2.2}$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann. Ces quantités conservées (qui sont les inconnues du système d'Euler bi-température (2.1)) permettent de définir ainsi la vitesse macroscopique u^α et la température T^α . De manière analogue, on définit les quantités macroscopiques de mélange comme les moments de $m^e f^e + m^i f^i$:

$$\begin{cases} \langle\langle m^e f^e + m^i f^i \rangle\rangle = \rho, & (2.3a) \\ \langle\langle v(m^e f^e + m^i f^i) \rangle\rangle = \rho u, & (2.3b) \\ \langle\langle \frac{v^2}{2}(m^e f^e + m^i f^i) \rangle\rangle = \mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} (n^e + n^i) k_B T. & (2.3c) \end{cases}$$

On obtient ainsi une définition de la vitesse de mélange u et de la température de mélange T . Leur expression en fonction des quantités partielles est donc la suivante :

$$\begin{aligned}u &= \frac{\rho^e u^e + \rho^i u^i}{\rho^e + \rho^i}, \\ T &= \frac{1}{3k_B(n^e + n^i)} \sum_\alpha \rho^\alpha (u^2 - (u^\alpha)^2) + \frac{1}{n^e + n^i} \sum_\alpha n^\alpha T^\alpha.\end{aligned}$$

Enfin, on définit les grandeurs électromagnétiques relatives au plasma : $E(t, x) \in \mathbb{R}$ est le champ électrique selon x , q^α la charge électrique particulière de l'espèce α . On définit de plus le taux d'ionisation Z comme le nombre d'électrons pour chaque ion, ce qui se traduit par la relation $q^i = -Zq^e$, où Z est supposé constant dans toute la suite. Enfin, la charge électrique totale et le courant électrique sont respectivement définis comme les moments d'ordre 0 et 1 de $q^e f^e + q^i f^i$:

$$\langle\langle q^e f^e + q^i f^i \rangle\rangle = \bar{\rho}, \quad \langle\langle v(q^e f^e + q^i f^i) \rangle\rangle = j.\tag{2.4}$$

2.2.3 Le système de Vlasov-BGK-Ampère

Le comportement des fonctions de distribution pour des particules chargées peut être décrit par le modèle de Vlasov-BGK-Ampère, qui s'écrit de la façon suivante,

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

pendent tout de même des trois composantes de $v = (v_1, v_2, v_3)$. En particulier, cela signifie que la fonction f^α est paire en v_2 et v_3 , ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(t, x, v) v_2 dv_2 dv_3 = 0, \right. \quad (2.6a)$$

$$\left. \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(t, x, v) v_3 dv_2 dv_3 = 0. \right. \quad (2.6b)$$

En notant $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha)$, cette hypothèse donne $u^\alpha = (u_1^\alpha, 0, 0)$. Ainsi, dans la suite, on fera l'abus de notation suivant : $u^\alpha = u_1^\alpha$. De manière similaire aux travaux réalisés dans [4], ces hypothèses de parité vont permettre de réduire le nombre de variables du problème. Pour cela, définissons les distributions réduites, également appelées marginales, pour $\alpha = e, i$:

$$\left\{ g_0^\alpha(t, x, v_1) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(t, x, v) dv_2 dv_3, \right. \quad (2.7a)$$

$$\left. g_2^\alpha(t, x, v_1) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(t, x, v) \frac{m^\alpha(v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3, \right. \quad (2.7b)$$

et on définit la notation suivante, qui désignera l'intégration par rapport à la variable v_1 , pour toute fonction intégrable g :

$$\langle g \rangle = \int_{\mathbb{R}} g dv_1.$$

Système d'équations réduites et quelques propriétés

L'objectif de cette section est reformuler le système d'équations (2.5) et les quantités macroscopiques (2.2) à l'aide des fonctions de distribution réduites. Le système d'équations obtenu après réduction est le suivant :

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses (2.6) et (2.7), le système (2.5) peut être réduit sous la forme suivante, avec $\alpha = e, i$ et $p = 0, 2$:*

$$\left\{ \partial_t g_p^\alpha + v_1 \partial_x g_p^\alpha + \frac{q^\alpha E}{m^\alpha} \partial_{v_1} g_p^\alpha = \frac{1}{\tau^\alpha} (M_p^\alpha - g_p^\alpha) + \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} (\bar{M}_p^\alpha - g_p^\alpha), \right. \quad (2.8a)$$

$$\left. \partial_x E|_{t=t_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\rho}|_{t=t_0}, \right. \quad (2.8b)$$

$$\left. \partial_t E = -\frac{1}{\epsilon_0} j, \right. \quad (2.8c)$$

où les différentes distributions Maxwelliennes réduites sont définies de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0^\alpha(t, x, v_1) = \frac{n^\alpha(t, x)}{\sqrt{2\pi k_B \frac{T^\alpha(t, x)}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v_1 - u^\alpha(t, x))^2}{2k_B \frac{T^\alpha(t, x)}{m^\alpha}}\right), \\ M_2^\alpha(t, x, v_1) = k_B T^\alpha(t, x) M_0^\alpha(t, x, v_1), \\ \overline{M}_0^\alpha(t, x, v_1) = \frac{n^\alpha(t, x)}{\sqrt{2\pi k_B \frac{T(t, x)}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v_1 - u(t, x))^2}{2k_B \frac{T(t, x)}{m^\alpha}}\right), \\ \overline{M}_2^\alpha(t, x, v_1) = k_B T(t, x) \overline{M}_0^\alpha(t, x, v_1). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.9a) \\ (2.9b) \\ (2.9c) \\ (2.9d) \end{array}$$

De plus, les quantités macroscopiques peuvent être exprimées à l'aide de g_0^α et g_2^α ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^\alpha = \langle g_0^\alpha \rangle, \\ n^\alpha u^\alpha = \langle g_0^\alpha v_1 \rangle, \\ \frac{3}{2} n^\alpha k_B T^\alpha + \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 = \langle g_0^\alpha \frac{m^\alpha v_1^2}{2} \rangle + \langle g_2^\alpha \rangle. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.10a) \\ (2.10b) \\ (2.10c) \end{array}$$

Démonstration. Premièrement, en intégrant l'équation (2.5a) par rapport à v_2 et v_3 , il vient :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha dv_2 dv_3 + v_1 \partial_x \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha dv_2 dv_3 &= \frac{1}{\tau^\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^2} M(f^\alpha) dv_2 dv_3 - \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha dv_2 dv_3 \right) \\ &+ \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \overline{M}(f^\alpha) dv_2 dv_3 - \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha dv_2 dv_3 \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

et on définit $M_0^\alpha, \overline{M}_0^\alpha : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v \mapsto \mathbb{R}$ via l'équation (2.9).

La définition de g_0^α donnée en (2.7a) permet de mettre l'équation (2.11) sous la forme (2.8a) dans le cas $p = 0$. Ainsi, l'équation sur la fonction g_0^α est obtenue. A présent, exprimons les moments de f^α à l'aide de g_0^α . Le moment d'ordre 0 s'écrit :

$$\langle\langle f^\alpha \rangle\rangle = \langle g_0^\alpha \rangle = n^\alpha.$$

De manière similaire, on obtient l'expression suivante pour le moment d'ordre 1 :

$$n^\alpha u^\alpha = \langle\langle f^\alpha v \rangle\rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dv_2 dv_3 \right\rangle.$$

Grâce aux équations (2.6a) et (2.6b), les deuxième et troisième composantes du moment d'ordre 1 sont égales à 0. Pour la première composante, en revanche, on obtient :

$$\left\langle v_1 \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha dv_2 dv_3 \right\rangle = \langle v_1 g_0^\alpha \rangle = n^\alpha u^\alpha.$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Enfin, le moment d'ordre 2 s'écrit :

$$\left\langle\left\langle f^\alpha \frac{m^\alpha |v|^2}{2} \right\rangle\right\rangle = \left\langle g_0^\alpha \frac{m^\alpha v_1^2}{2} \right\rangle + \left\langle\left\langle f^\alpha \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} \right\rangle\right\rangle. \quad (2.12)$$

Ainsi, l'équation (2.12) indique qu'il n'est pas possible d'exprimer l'énergie totale seulement à l'aide de g_0^α . La fermeture du système justifie donc la définition d'une deuxième fonction, notée g_2^α , définie par (2.7b). Cela permet la réécriture de l'équation (2.12) sous la forme suivante :

$$\frac{3}{2} n^\alpha k_B T^\alpha + \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 = \left\langle g_0^\alpha \frac{m^\alpha v_1^2}{2} \right\rangle + \langle g_2^\alpha \rangle.$$

Ainsi, il est nécessaire d'obtenir une équation sur g_2^α . Pour cela, il suffit de multiplier l'équation (2.5a) par $\frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2}$, et de l'intégrer par rapport à v_2 et v_3 :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t f^\alpha \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3 + \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \partial_x f^\alpha \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3 \\ & + \frac{q^\alpha E}{m^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{v_1} f^\alpha \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3 \\ & = \frac{1}{\tau^\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^2} M(f^\alpha) \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3 - \int_{\mathbb{R}^2} f \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3 \right). \end{aligned}$$

On introduit alors la fonction M_2^α , définie en (2.9b), qui correspond à l'intégration suivante :

$$M_2^\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} M(f^\alpha) \frac{m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3.$$

On obtient alors l'équation (2.8a) dans le cas $p = 2$. □

Remarque 2.2. *La seule modification apportée aux équations de Maxwell porte sur l'équation (2.8b). En effet, cette équation traduit le fait que, pourvu qu'elle soit vérifiée à l'instant initial, la validité de l'équation de Maxwell-Ampère (2.8c) pour tout temps implique celle de l'équation de Maxwell-Gauss.*

Démonstration. Supposons que l'équation de Maxwell-Ampère (2.8c) soit vérifiée pour tout temps. En prenant la divergence de cette équation, on obtient :

$$\partial_t \partial_x E = - \frac{\partial_x j}{\epsilon_0}.$$

Par ailleurs, à la faveur de la définition de la charge électrique (2.4) et de l'équation de Vlasov (2.5a), on obtient l'équation suivante sur la charge électrique :

$$\partial_t \bar{\rho} + \partial_x j = 0.$$

En injectant cette équation dans la précédente, on a :

$$\partial_t(\partial_x E - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}).$$

Autrement dit,

$$(\partial_x E - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0})|_{t=t_0} = (\partial_x E - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0})|_{t=s}, \quad \forall s.$$

Ainsi, si l'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée au temps initial et que l'équation de Maxwell-Ampère est vérifiée pour tout temps, alors l'équation de Maxwell-Gauss sera également vérifiée à tout temps. \square

Remarque 2.3. Dans ce modèle réduit, les quantités électriques du plasma, la charge $\bar{\rho}$ et le courant j sont définis à l'aide de g_0^α uniquement, selon les expressions suivantes :

$$\bar{\rho} = \sum_{\alpha} \langle q^\alpha g_0^\alpha \rangle = \sum_{\alpha} q^\alpha n^\alpha, \quad j = \sum_{\alpha} \langle q^\alpha v g_0^\alpha \rangle = \sum_{\alpha} q^\alpha n^\alpha u^\alpha.$$

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de conservation des opérateurs BGK présents dans les équations (2.8a). La proposition suivante peut être facilement démontrée :

Proposition 2.4. Les opérateur BGK intra-espèces définis par les distributions Maxwelliennes (2.9a) et (2.9b) préservent les densités, quantités de mouvement et énergies partielles selon les identités suivantes, pour $\alpha = e, i$:

$$\left\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \frac{m^\alpha (v_1)^2}{2} \right\rangle + \langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Les distributions Maxwelliennes (2.9c) et (2.9d), qui définissent les opérateurs BGK inter-espèces, jouissent des propriétés de conservation suivantes :

$$\langle \bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha \rangle = 0, \quad \sum_{\alpha} \langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) m^\alpha v_1 \rangle = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_{\alpha} \left\langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) \frac{m^\alpha (v_1)^2}{2} \right\rangle + \sum_{\alpha} \langle \bar{M}_2^\alpha - g_2^\alpha \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Démonstration. à la faveur de l'énoncé de la Proposition 2.1, on rappelle les équations (2.10a-2.10b), qui définissent les quantités macroscopiques à partir de g_0^α et g_2^α :

$$n^\alpha = \langle g_0^\alpha \rangle, \quad n^\alpha u^\alpha = \langle g_0^\alpha v_1 \rangle.$$

Puis, par un calcul direct à partir de l'expression de M_0^α dans (2.9a), on a :

$$n^\alpha = \langle M_0^\alpha \rangle, \quad n^\alpha u^\alpha = \langle M_0^\alpha v_1 \rangle,$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

ce qui donne la première équation de (2.13). Pour la deuxième équation, en utilisant l'expression de M_2^α dans (2.9b), on trouve :

$$\frac{3}{2}n^\alpha k_B T^\alpha + \frac{1}{2}m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 = \langle M_0^\alpha \frac{m^\alpha v_1^2}{2} \rangle + \langle M_2^\alpha \rangle,$$

ce qui donne le résultat énoncé en soustrayant l'équation (2.10c).

Pour les résultats concernant les Maxwelliennes d'échange, les expressions de \overline{M}_0^α et \overline{M}_2^α dans (2.9c) et (2.9d) donne les expressions suivantes, par un calcul simple :

$$\begin{aligned} \langle \overline{M}_0^\alpha \rangle &= n^\alpha, \\ \langle m^\alpha \overline{M}_0^\alpha v_1 \rangle &= \rho^\alpha u, \\ \langle m^\alpha \overline{M}_0^\alpha \frac{v_1^2}{2} \rangle &= \frac{1}{2}\rho^\alpha u^2 + \frac{3}{2}n^\alpha k_B T. \end{aligned}$$

La première équation donne la première équation de (2.14). En sommant la deuxième équation sur α , et à la faveur de la définition de ρ et u données en (2.3), on obtient la deuxième équation de (2.14). De manière similaire, en sommant la troisième équation sur α , et à l'aide de la définition de ρ , u et T dans (2.3), l'équation (2.15) est vérifiée. \square

Concernant la dissipation d'entropie du modèle réduit, il est possible d'exhiber une entropie pour ce système. Considérons la définition suivante de la distribution Maxwellienne pour le modèle non-réduit :

$$\begin{aligned} H^\alpha(M(f^\alpha)) &= \min_{f^\alpha \geq 0} (H^\alpha(f^\alpha) \text{ s.t. } g_0^\alpha(v_1) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(v) dv_2 dv_3, \\ &g_2^\alpha(v_1) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\alpha(v) \frac{m^\alpha(v_2^2 + v_3^2)}{2} dv_2 dv_3), \end{aligned}$$

où $H^\alpha(f^\alpha)$ est définie par

$$H^\alpha(f^\alpha) = \langle\langle f^\alpha \log(f^\alpha) \rangle\rangle. \quad (2.16)$$

La résolution de ce problème de minimisation sous contraintes mène à l'expression suivante de $M(f^\alpha)$ en fonction de g_0^α et g_2^α :

$$M(f^\alpha)(g_0^\alpha, g_2^\alpha) = \frac{(g_0^\alpha)^2 m^\alpha}{2\pi g_2^\alpha} \exp\left(-\frac{g_0^\alpha m^\alpha (v_2^2 + v_3^2)}{2g_2^\alpha}\right). \quad (2.17)$$

Ainsi, en injectant (2.17) dans (2.16), il vient :

$$H^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) = \left\langle g_0^\alpha \log \frac{(g_0^\alpha)^2}{g_2^\alpha} - 2g_0^\alpha \right\rangle.$$

Ainsi, on définit les notations suivantes pour les entropies partielles du modèle réduit, pour $\alpha = e, i$:

$$H^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) = \langle \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) \rangle,$$

avec

$$\eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) = g_0^\alpha \log \frac{(g_0^\alpha)^2}{g_2^\alpha} - 2g_0^\alpha,$$

et l'entropie totale est définie par :

$$H(g_0^e, g_2^e, g_0^i, g_2^i) = \sum_{\alpha} H^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha). \quad (2.18)$$

Dans un premier temps, on montre que cette entropie est convexe :

Proposition 2.5. *Pour $\alpha = e, i$, H^α est une fonction strictement convexe. Par conséquent, H est également strictement convexe.*

Démonstration. Le calcul du gradient de η^α donne l'expression suivante :

$$\nabla \eta^\alpha = \begin{pmatrix} \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha \\ \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \frac{(g_0^\alpha)^2}{g_2^\alpha} \\ -\frac{g_0^\alpha}{g_2^\alpha} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on en déduit la matrice Hessienne de η^α :

$$\nabla^2 \eta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{2}{g_0^\alpha} & -\frac{1}{g_2^\alpha} \\ -\frac{1}{g_2^\alpha} & \frac{g_0^\alpha}{(g_2^\alpha)^2} \end{pmatrix}.$$

à la faveur de la positivité des fonctions de distribution :

$$\text{Tr}(\nabla^2 \eta^\alpha) > 0, \quad \det(\nabla^2 \eta^\alpha) = \frac{1}{(g_2^\alpha)^2} > 0.$$

Ainsi, la matrice Hessienne est bien définie positive et η^α est strictement convexe. H^α est donc strictement convexe. \square

On énonce maintenant la propriété suivante sur la dissipation d'entropie du système :

Proposition 2.6. *Le système réduit (2.8) vérifie le théorème H pour l'entropie définie par (2.18) :*

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} \leq 0, \quad (2.19)$$

où G est le flux d'entropie associé à H :

$$G(g_0^e, g_2^e, g_0^i, g_2^i) = \sum_{\alpha} G^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) = \sum_{\alpha} \langle v_1 \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) \rangle.$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Démonstration. En multipliant l'équation (2.8a) par la quantité $\partial_{g_p^\alpha} \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha)$, puis en sommant sur l'indice p et en intégrant par rapport à v_1 , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial x} &= \frac{1}{\tau^\alpha} \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} \langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (\bar{M}_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Donc, en sommant sur α , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_\alpha \frac{1}{\tau^\alpha} \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle \\ &\quad + \sum_\alpha \frac{1}{\tau^{\alpha\beta}} \langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (\bar{M}_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Considérons successivement chaque terme du membre de droite.

$$\begin{aligned} &\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle \\ &= \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) (\partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) - \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha)) \rangle \\ &\quad + \langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) (\partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha) - \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha)) \rangle \\ &\quad + \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha) \rangle \\ &\quad + \langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha) \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Par convexité de η^α , la somme des deux premiers termes du membre de droite de l'équation (2.21) est négative. Les termes restants s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} &\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha) \rangle + \langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha(M_0^\alpha, M_2^\alpha) \rangle \\ &= \left\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \log \left(\frac{(M_0^\alpha)^2}{M_2^\alpha} \right) \right\rangle - \left\langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \frac{M_0^\alpha}{M_2^\alpha} \right\rangle \\ &= \frac{1}{k_B T^\alpha} \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \log(M_0^\alpha) \rangle - \frac{1}{k_B T^\alpha} \langle (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \rangle \\ &= \frac{1}{k_B T^\alpha} \log \left(\frac{n^\alpha}{(2\pi k_B \frac{T^\alpha}{m^\alpha})^{\frac{1}{2}}} \right) \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \rangle + \left\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \left(\frac{v u^\alpha}{k_B \frac{T^\alpha}{m^\alpha}} - \frac{(u^\alpha)^2}{2k_B \frac{T^\alpha}{m^\alpha}} \right) \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{k_B T^\alpha} \left\langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \frac{m^\alpha (v^\alpha)^2}{2} + (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

en accord avec les identités (2.13). Par un calcul analogue sur le deuxième terme du membre de droite de (2.20), on obtient l'équation (2.19). \square

2.2.5 Scaling des équations

Le régime d'intérêt pour cette étude est celui de la limite hydrodynamique du modèle cinétique. Les équations cinétiques décrites précédemment régissent le comportement d'un plasma vu comme une collection de particules. Cela signifie que

ce modèle décrit les phénomènes inhérents au plasma à une échelle dite mésoscopique. Cependant, l'objectif est l'étude du système d'Euler bi-température, qui décrit l'échelle macroscopique des mêmes phénomènes. Ainsi, pour s'assurer de la consistance des deux modèles, il est nécessaire de procéder à une mise sous forme non-dimensionnelle (ou *scaling*) des équations cinétiques. Ce procédé permet, par la définition de nombres non-dimensionnels, d'identifier les échelles des différents phénomènes décrits par les équations. En particulier, on définira des quantités telles que le libre parcours moyen sans dimension ou la longueur de Debye sans dimension. Il s'agira donc ensuite de considérer la limite quand ces paramètres tendent vers 0, ce qui correspondra à une considération macroscopique des équations cinétiques.

On notera respectivement t_0, L, v_{th}, q, m les temps, longueur, vitesse microscopique, charge électrique et masse particulaire de référence. En notant à l'aide d'un tilde les quantités sans dimension, on a :

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{v_1}{v_{th}}, \quad \tilde{q}^\alpha = \frac{q^\alpha}{q}, \quad \tilde{m}^\alpha = \frac{m^\alpha}{m}.$$

A partir de ces quantités, on définit également les grandeurs de référence suivantes :

$$\tilde{g}_p^\alpha = \frac{v_{th}}{n_0} g_p^\alpha, \quad \tilde{E} = \frac{qt_0}{v_{th}m} E, \quad \tilde{j} = \frac{j}{qv_{th}n_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{qn_0}, \quad \tilde{T} = \frac{k_B}{mv_{th}^2} T.$$

où n_0 représente la concentration de référence.

Appliquons à présent ce scaling à notre modèle. Il vient, en retirant les tildes par souci de lisibilité, pour $p = 0, 2$ et $\alpha = e, i$:

$$\begin{cases} \partial_t g_p^\alpha + v_1 \partial_x g_p^\alpha + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} E \partial_{v_1} g_p^\alpha = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} (M_p^\alpha - g_p^\alpha) + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\bar{M}_p^\alpha - g_p^\alpha), & (2.22a) \\ \partial_t E = -\frac{j}{\beta^2}, & (2.22b) \\ \partial_x E = \frac{\bar{\rho}}{\beta^2}, & (2.22c) \end{cases}$$

où $\varepsilon^\alpha = \frac{\tau^\alpha}{t_0}$, $\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\tau^{\alpha\beta}}{t_0}$ et $\beta = \frac{\lambda_{De}}{L}$, $\lambda_{De} = (\frac{\varepsilon_0 k_B T_0}{q^2 n_0})^{\frac{1}{2}}$, avec $T_0 = \frac{mv_{th}^2}{k_B}$ la température de référence. λ_{De} est appelé la longueur de Debye, longueur caractéristique des phénomènes de séparation de charge dans un plasma. Dans le régime physique d'intérêt, cette quantité est significativement plus petite que la longueur de référence du domaine L . De même, les libres parcours moyens intra-espèces ε^α , longueur caractéristique des phénomènes collisionnels, sont petits devant la longueur de référence L . Ainsi, atteindre la limite hydrodynamique revient à prendre la limite du modèle sans dimension lorsque $\varepsilon^\alpha \beta$ tendent vers 0. Cependant, on notera que $\varepsilon^{\alpha\beta}$, paramètre relatif aux collisions inter-espèces de type $\alpha - \beta$ ne tend pas vers 0, mais prend une valeur finie de l'ordre de $\mathcal{O}(1)$. Ainsi, à la limite, les équations de Maxwell (2.22b-2.22c) deviennent $j = 0$ et $\bar{\rho} = 0$, ce qui peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$u^e = u^i, \quad n^e = Zn^i. \quad (2.23)$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Les équations (2.23) sont appelées contraintes de quasi-neutralité. Elles décrivent le fait que, d'un point de vue macroscopique, un plasma apparaît comme neutre. En effet, les phénomènes électriques sont écrantés par le plasma lui-même, et, par suite, la charge et le courant électrique apparaissent nuls pour un observateur macroscopique. Cette forme prise par les équations décrit la limite singulière du modèle cinétique, où des équations d'évolutions dégénèrent à la limite en équations algébriques. L'objectif de cette étude consiste donc à développer une méthode numérique, dite Asymptotic-Preserving, qui permette de résoudre les équations issues du modèle cinétique à la limite hydrodynamique. Plus précisément, il s'agit d'obtenir une méthode numérique dont les conditions de stabilité sont indépendantes des paramètres tendant vers 0 (ε^α , $\varepsilon^{\alpha\beta}$ et β). En effet, l'équation de Maxwell-Ampère, si traitée par une approche explicite classique, ne permet pas d'obtenir un schéma valide à la limite. Pour contourner à cette difficulté, on propose dans la section 2.3.1, une méthode fondée sur une reformulation discrète de cette équation. Dans la sous-section qui suit, on introduit cette reformulation au niveau continu.

Par souci de simplicité, dans l'équation d'Ampère, ainsi que dans les opérateurs BGK, toutes les quantités sans dimension qui tendent vers 0 dans la limite hydrodynamique, ε^e , ε^i et β sont toutes choisies égales au même paramètre τ . Ainsi, atteindre la limite hydrodynamique revient à prendre la limite $\tau \rightarrow 0$.

2.2.6 Reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère

Dans cette sous-section, on reformule l'équation de Maxwell-Ampère de sorte à obtenir une équation valable pour toute valeur de τ . Pour cela, on considère l'équation sur g_0^α (2.22a), que l'on multiplie par $q^\alpha v$, que l'on intègre en v , puis que l'on somme sur α afin d'obtenir une équation sur le courant :

$$j = \sum_{\alpha} \langle q^\alpha v g_0^\alpha \rangle.$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$\partial_t j + \partial_x \sum_{\alpha} \langle q^\alpha v^2 g_0^\alpha \rangle + E \sum_{\alpha} \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} \langle v \partial_v g_0^\alpha \rangle = 0,$$

où le second membre est nul grâce aux propriétés de conservation de la quantité de mouvement. En utilisant le fait que $\langle v \partial_v g_0^\alpha \rangle = -\langle g_0^\alpha \rangle = n^\alpha$, on obtient l'équation d'évolution sur le courant suivante :

$$\partial_t j + \partial_x \sum_{\alpha} \langle q^\alpha v^2 g_0^\alpha \rangle - E \sum_{\alpha} \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} n^\alpha = 0,$$

En prenant la dérivée en temps de l'équation de Maxwell-Ampère (2.22b), puis en injectant l'équation précédente, on a :

$$\tau^2 \partial_{tt}^2 E = -\partial_t j = \partial_x \sum_{\alpha} \langle q^\alpha v^2 g_0^\alpha \rangle - E \sum_{\alpha} \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} n^\alpha.$$

Au final, on obtient l'équation suivante sur E :

$$\tau^2 \partial_{tt}^2 E + E \sum_{\alpha} \frac{(q^{\alpha})^2}{m^{\alpha}} n^{\alpha} = \partial_x \sum_{\alpha} \langle q^{\alpha} v^2 g_0^{\alpha} \rangle$$

qui donne, à la limite $\tau \rightarrow 0$, l'expression suivante de E :

$$E = \frac{\partial_x \sum_{\alpha} \langle q^{\alpha} v^2 g_0^{\alpha} \rangle}{\sum_{\alpha} \frac{(q^{\alpha})^2}{m^{\alpha}} n^{\alpha}}.$$

Ainsi, cette reformulation permet d'obtenir une équation sur le champ électrique valide pour toute valeur de τ , en particulier lorsque ce paramètre vaut zéro. C'est cette approche que l'on mime au niveau discret pour obtenir une méthode numérique valide à la limite quasi-neutre.

Remarque 2.7. *Calculer le champ électrique par cette équation à la limite $\tau = 0$ revient à imposer $\partial_t j = 0$. Pour s'assurer de la quasi-neutralité de la solution, il est donc nécessaire de se munir d'une donnée initiale qui vérifie la contrainte $j = 0$.*

Remarque 2.8. *L'équation sur la charge électrique $\bar{\rho}$ s'écrit :*

$$\partial_t \bar{\rho} + \partial_x j = 0.$$

Si l'on a bien imposé $j = 0$ en tout point, on a directement $\partial_t \bar{\rho} = 0$. La contrainte de quasi-neutralité sur la charge électrique est préservée au cours du temps, pourvu qu'ici aussi, on ait bien une donnée initiale qui vérifie $\bar{\rho} = 0$.

2.2.7 Limite hydrodynamique

L'objectif de cette section est de montrer que le système cinétique (2.22), à la limite hydrodynamique, tend vers le système d'Euler bi-température (2.1). Tout d'abord, on réécrit le système (2.22) sous la forme suivante, où on suppose que tous les paramètres β, ε^i et ε^e sont égaux à une valeur commune notée τ :

$$\begin{cases} \partial_t g_p^{\alpha} + v_1 \partial_x g_p^{\alpha} + \frac{q^{\alpha}}{m^{\alpha}} E \partial_{v_1} g_p^{\alpha} = \frac{1}{\tau} (M_p^{\alpha} - g_p^{\alpha}) + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\bar{M}_p^{\alpha} - g_p^{\alpha}), & (2.24a) \\ \partial_t E = -\frac{j}{\tau^2}, & (2.24b) \\ \partial_x E = \frac{\bar{\rho}}{\tau^2}. & (2.24c) \end{cases}$$

Comme décrit précédemment, les équations de Maxwell donnent, à la limite $\tau \rightarrow 0$, l'équation suivante :

$$u^e = u^i.$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Ainsi, à la limite, les vitesses électroniques et ioniques sont toutes les deux égales à la vitesse de mélange u . Par ailleurs, à la limite, l'opérateur BGK des équations (2.24a) implique que les distributions g_p^α sont égales à leurs distributions Maxwelliennes partielles. Autrement dit, on a, à la limite, pour $\alpha = e, i$ et $p = 0, 2$:

$$g_p^\alpha = M_p^\alpha. \quad (2.25)$$

On commence par intégrer l'équation (2.24a) multipliée par m^α pour $p = 0$ par rapport à v pour chaque α , pour obtenir l'équation suivante, pour $\alpha = e, i$:

$$\partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha u^\alpha) = 0,$$

et, en sommant ces deux équations, à la faveur de la définition de la masse et de la quantité de mouvement totales comme sommes des quantités partielles, on obtient l'équation sur la masse totale :

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0.$$

Pour obtenir l'équation de quantité de mouvement totale, on multiplie l'équation (2.24a) pour $p = 0$ par $m^\alpha v$, puis on intègre par rapport à v . L'équation obtenue s'écrit alors :

$$\partial_t (\rho^\alpha u^\alpha) + \partial_x \langle m^\alpha v^2 g_0^\alpha \rangle + q^\alpha E \langle v \partial_{v_1} g_0^p \rangle = \frac{\rho^\alpha}{\varepsilon_{\alpha\beta}} (u - u^\alpha). \quad (2.26)$$

Le troisième terme du membre de gauche peut se réécrire de la façon suivante, à l'aide d'une intégration par partie :

$$q^\alpha E \langle v \partial_{v_1} g_0^p \rangle = -q^\alpha E \langle g_0^p \rangle = -E \bar{\rho}^\alpha,$$

avec $\bar{\rho}^\alpha = q^\alpha n^\alpha$. Le second terme du membre de gauche, à la faveur de l'égalité (2.25), est égal à :

$$\partial_x \langle m^\alpha v^2 g_0^\alpha \rangle = \partial_x \langle m^\alpha v^2 M_0^\alpha \rangle = \partial_x (\rho^\alpha (u^\alpha)^2 + p^\alpha).$$

En sommant sur α les équations obtenues, et à la faveur des propriétés de conservation 2.4, il vient :

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p^e + p^i) - E \bar{\rho} = 0.$$

à la faveur de l'équation de quasi-neutralité sur la charge $\bar{\rho} = 0$, on a finalement :

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p^e + p^i) = 0.$$

Enfin, calculons les équations d'évolutions des énergies partielles. Pour $\alpha = e, i$, on multiplie (2.24a) (pour $p = 0$) par $m^\alpha \frac{v^2}{2}$, puis on intègre par rapport à v . On a :

$$\partial_t \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} g_0^\alpha \rangle + \partial_x \langle m^\alpha \frac{v^3}{2} g_0^\alpha \rangle + q^\alpha E \langle \frac{v^2}{2} \partial_{v_1} g_0^\alpha \rangle = \frac{1}{\varepsilon_{\alpha\beta}} \langle \bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha \rangle.$$

Pour obtenir une équation sur l'énergie totale de l'espèce α , on intègre l'équation (2.24a) pour $p = 2$ et on somme avec l'équation précédente. On trouve :

$$\partial_t \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} g_0^\alpha + g_2^\alpha \rangle + \partial_x \langle m^\alpha \frac{v^3}{2} g_0^\alpha + v g_2^\alpha \rangle + q^\alpha E \langle \frac{v^2}{2} \partial_{v_1} g_0^\alpha \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\mathcal{E} - \mathcal{E}^\alpha).$$

Par définition de l'énergie totale du plasma \mathcal{E} , le second membre peut se reformuler sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\mathcal{E} - \mathcal{E}^\alpha) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} \frac{3}{2} n^\alpha k_B (T - T^\alpha),$$

puis, à la faveur des propriétés de quasi-neutralité et de la définition de la température de mélange, on a $T = \frac{T^e + T^i}{2}$. On peut alors obtenir une expression de $\nu^{\alpha\beta}$:

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\mathcal{E} - \mathcal{E}^\alpha) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} \frac{3}{4} n^\alpha k_B (T^i - T^e) = \nu^{\alpha\beta} (T^i - T^e).$$

Au membre de gauche, le troisième terme peut être calculé par une intégration par partie, qui donne :

$$q^\alpha E \langle \frac{v^2}{2} \partial_{v_1} g_0^\alpha \rangle = -q^\alpha E \langle v g_0^\alpha \rangle = -E j^\alpha,$$

où $j^\alpha = q^\alpha n^\alpha u^\alpha$ est le courant partiel de l'espèce α . Enfin, le deuxième terme du membre de gauche, à la faveur de l'équation (2.25), peut être explicité :

$$\partial_x \langle m^\alpha \frac{v^3}{2} g_0^\alpha + v g_2^\alpha \rangle = \partial_x \langle m^\alpha \frac{v^3}{2} M_0^\alpha + v M_2^\alpha \rangle = u \left(\frac{\rho^\alpha u^2}{2} + \frac{3}{2} n^\alpha k_B T^\alpha + p^\alpha \right).$$

Ainsi, on obtient l'équation suivante sur l'énergie totale de l'espèce α :

$$\partial_t \mathcal{E}^\alpha + \partial_x (u (\mathcal{E}^\alpha + p^\alpha)) - j^\alpha E = \nu^{\alpha\beta} (T^\beta - T^\alpha). \quad (2.27)$$

Enfin, pour calculer le troisième terme du membre de gauche, on commence par reformuler l'équation (2.26) de la façon suivante :

$$\partial_t u + u \partial_x u + \frac{\partial_x p^\alpha}{\rho^\alpha} - \frac{\bar{\rho}^\alpha E}{\rho^\alpha} = 0.$$

En soustrayant cette équation pour $\alpha = i$ à l'équation pour $\alpha = e$, on obtient la loi d'Ohm généralisée, qui s'exprime :

$$\frac{\partial_x p^e}{\rho^e} - \frac{\partial_x p^i}{\rho^i} = \frac{q^e n^e \rho}{\rho^e \rho^i} E. \quad (2.28)$$

On remarque à présent que les termes $j^\alpha E$ vérifie l'égalité suivante :

$$j^e E = -j^i E.$$

A l'aide de l'expression de E donnée par la loi d'Ohm, on a donc :

$$j^e E = q^e n^e u^e \left(\frac{\partial_x p^e}{\rho^e} - \frac{\partial_x p^i}{\rho^i} \right) \frac{\rho^e \rho^i}{q^e n^e \rho} = u (c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i).$$

Ainsi, on obtient l'expression des produits non-conservatifs, que l'on peut injecter dans les équations sur les énergies électroniques et ioniques (2.27) pour obtenir le système d'Euler bi-température (2.1).

2.2.8 Inégalités d'entropie pour les solutions limites

Dans [9], l'existence d'une paire entropie-flux d'entropie pour le système d'Euler bi-température (2.1) est démontrée. Dans cette section, on obtient une équation de dissipation de l'entropie dans la limite hydrodynamique, pour le modèle réduit de la proposition 2.1.

Premièrement, on note $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \epsilon^e, \epsilon^i)$ le vecteur des inconnues du système d'Euler bi-température et $(H^{\text{macro}}(\mathcal{U}), G^{\text{macro}}(\mathcal{U}))$ la paire entropie-flux d'entropie macroscopique correspondante. On énonce d'abord les propriétés suivantes, qui font le lien entre entropies cinétiques et macroscopiques :

$$H(M_0^e, M_2^e, M_0^i, M_2^i) = H^{\text{macro}}(\mathcal{U}), \quad G(M_0^e, M_2^e, M_0^i, M_2^i) = G^{\text{macro}}(\mathcal{U}). \quad (2.29)$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.9. *Soit \mathcal{U} une solution limite du modèle cinétique issu de la proposition 2.1, c'est-à-dire un vecteur \mathcal{U} qui soit les moments de fonctions de distribution (g_0^α, g_2^α) qui sont solutions des équations cinétiques, dans la limite hydrodynamique. Alors, on a l'inégalité d'entropie suivante :*

$$\frac{\partial H^{\text{macro}}}{\partial t} + \frac{\partial G^{\text{macro}}}{\partial x} \leq -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2, \quad (2.30)$$

où

$$\nu^{\alpha\beta} = \frac{3k_B n^\alpha n^\beta}{2\tau^{\alpha\beta}(n^\alpha + n^\beta)}.$$

Démonstration. On commence par multiplier l'équation (2.8a) par $\partial_{g_p^\alpha} \eta^\alpha(g_0^\alpha, g_2^\alpha)$, on somme sur p et on intègre par rapport à v_1 . Il vient alors, pour $\alpha = e, i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \langle (M_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (M_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} \langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (\bar{M}_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle. \end{aligned}$$

A l'aide des propriétés de dissipation d'entropie des opérateur BGK énoncées dans la section 2.2.4, on a :

$$\frac{\partial H^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial x} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} \langle (\bar{M}_0^\alpha - g_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (\bar{M}_2^\alpha - g_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle.$$

En passant formellement à la limite $\varepsilon^\alpha \rightarrow 0$, on obtient $g_p^\alpha = M g_p^\alpha$, $n^e = n^i$ et $u = u^e = u^i$. Ainsi, en sommant sur α et avec (2.29), l'inégalité s'écrit alors

$$\frac{\partial H^{\text{macro}}(\mathcal{U})}{\partial t} + \frac{\partial G^{\text{macro}}(\mathcal{U})}{\partial x} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} \sum_{\alpha} \langle (\bar{M}_0^\alpha - M_0^\alpha) \partial_{g_0^\alpha} \eta^\alpha + (\bar{M}_2^\alpha - M_2^\alpha) \partial_{g_2^\alpha} \eta^\alpha \rangle.$$

Le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} \langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \partial_{g_0^{\alpha}} \eta^{\alpha}(M_0^{\alpha}, M_2^{\alpha}) + (\bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha}) \partial_{g_2^{\alpha}} \eta^{\alpha}(M_0^{\alpha}, M_2^{\alpha}) \rangle \\
&= \sum_{\alpha} \left\langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \log \left(\frac{(M_0^{\alpha})^2}{M_2^{\alpha}} \right) - (\bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha}) \frac{M_0^{\alpha}}{M_2^{\alpha}} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha} \left\langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \log \left(\frac{M_0^{\alpha}}{k_B T^{\alpha}} \right) - \frac{1}{k_B T^{\alpha}} (\bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha}) \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha} \left\langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \log \left(\frac{n^{\alpha}}{(2\pi k_B \frac{T^{\alpha}}{m^{\alpha}})^{\frac{1}{2}}} \right) - (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \frac{(v-u)^2}{2k_B \frac{T^{\alpha}}{m^{\alpha}}} \right\rangle \\
&\quad - \sum_{\alpha} \langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \log(k_B T^{\alpha}) \rangle \\
&\quad - \sum_{\alpha} \left\langle \frac{1}{k_B T^{\alpha}} (\bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha}) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Les premier et troisième termes sont égaux à 0 à la faveur des propriétés de conservation. Après calcul, le deuxième terme est égal à :

$$- \sum_{\alpha} \left\langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \frac{(v-u)^2}{2k_B \frac{T^{\alpha}}{m^{\alpha}}} \right\rangle = - \sum_{\alpha} \frac{1}{k_B T^{\alpha}} \left\langle m^{\alpha} (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \frac{v^2}{2} \right\rangle.$$

Le membre de droite, dans son intégralité, s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} \langle (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \partial_{g_0^{\alpha}} \eta^{\alpha}(M_0^{\alpha}, M_2^{\alpha}) + (\bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha}) \partial_{g_2^{\alpha}} \eta^{\alpha}(M_0^{\alpha}, M_2^{\alpha}) \rangle \\
&= - \sum_{\alpha} \frac{1}{k_B T^{\alpha}} \left(\left\langle m^{\alpha} (\bar{M}_0^{\alpha} - M_0^{\alpha}) \frac{v^2}{2} \right\rangle + \langle \bar{M}_2^{\alpha} - M_2^{\alpha} \rangle \right) \\
&= - \frac{3}{2} \sum_{\alpha} n^{\alpha} \frac{\bar{T} - T^{\alpha}}{T^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Par la définition de T , on trouve :

$$\bar{T} - T^{\alpha} = \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha} + n^{\beta}} (T^{\beta} - T^{\alpha}).$$

Ainsi,

$$- \frac{3}{2\tau^{\alpha\beta}} \sum_{\alpha} n^{\alpha} \frac{\bar{T} - T^{\alpha}}{T^{\alpha}} = - \frac{3}{2\tau^{\alpha\beta}} \frac{n^{\alpha} n^{\beta}}{n^{\alpha} + n^{\beta}} \frac{(T^{\beta} - T^{\alpha})^2}{T^{\alpha} T^{\beta}},$$

et on obtient enfin (2.30). □

2.3 Traitement numérique des équations cinétiques

Dans cette section, on s'intéresse au traitement numérique du système (2.22) par une méthode de type volumes finis. On commence par présenter la méthode dans un cadre très général, sans spécifier la procédure de calcul des flux en espace, ni la procédure de calcul du champ électrique. Puis, dans un second temps, on précise ces deux points, permettant chacun d'imposer l'une des deux contraintes de quasi-neutralité. Le schéma en espace est un schéma *upwind* avec viscosité modifiée, permettant d'assurer la préservation de la contrainte sur la charge électrique, tandis que la procédure de calcul du champ électrique, fondée sur la reformulation de la section 2.2.6, assure que le courant reste nul en tout point.

2.3.1 Résolution numériques des équations de Vlasov-BGK : méthode générale

Afin de séparer l'équation de Vlasov, c'est-à-dire la partie hyperbolique de l'équation, des opérateurs BGK, on emploie une méthode dite de *splitting* en temps. Cela consiste à résoudre successivement chaque part de l'équation. On résout donc d'abord l'équation de Vlasov, pour $\alpha = e, i$:

$$\partial_t g_p^\alpha + v_1 \partial_x g_p^\alpha + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} E \partial_{v_1} g_p^\alpha = 0, \quad (2.31)$$

couplée à l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\partial_t E = -\frac{j}{\tau^2}.$$

Dans un second temps, on tient compte de l'opérateur BGK inter-espèces :

$$\partial_t g_p^\alpha = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\beta}} (\overline{M}_p^\alpha - g_p^\alpha), \quad (2.32)$$

puis, enfin, les collisions intra-espèces :

$$\partial_t g_p^\alpha = \frac{1}{\tau} (M_p^\alpha - g_p^\alpha),$$

où $\tau \rightarrow 0$.

Pour la résolution numérique de cette série d'équations, on considère une discrétisation uniforme de l'espace des phases (x, v) . Concernant le choix des vitesses discrètes, dans le cas présent, on choisit des grilles fixes en temps et identiques en chaque point d'espace. Pour choisir les vitesses discrètes, il est nécessaire de les sélectionner dans un sous-intervalle de \mathbb{R} qui contienne la quasi-totalité de la fonction de distribution. Formellement, l'existence d'un tel intervalle est assurée par le fait que les distributions de particules sont proches de distributions Maxwelliennes. Pour une telle distribution, qui n'est autre qu'une distribution gaussienne, la connaissance des

quantités u^α et $\frac{k_B T^\alpha}{m^\alpha}$ (c'est-à-dire de l'espérance et de l'écart-type) permet le calcul des bornes de l'intervalle de confiance associé à cette distribution.

Dans ce travail, deux distributions sont considérées, afin de pouvoir suivre séparément la dynamique des ions et des électrons au niveau cinétique. Ces deux distributions diffèrent l'une de l'autre principalement par leur masse particulaire. Dans un plasma, le ratio des masses particulières ioniques et électroniques avoisinent 2000. Ainsi, puisque la valeur des masses particulières m^α intervient dans la valeur de l'écart-type d'une distribution, les électrons et les ions possèdent des intervalles de confiance potentiellement très différents, et cela même si leur vitesse et leur température sont voisines. Comme l'indiquent les contraintes de quasi-neutralité (2.23), les vitesses macroscopiques ioniques et électroniques doivent être égales dans notre étude. Ainsi, les intervalles de confiance électroniques et ioniques sont centrés au même point (qui est la valeur commune $u = u^e = u^i$). Les grilles adéquates d'une espèce à l'autre vont donc différer par leur largeur. Cela signifie que l'emploi d'une unique grille en vitesse pour les ions et les électrons nécessite le choix d'une grille qui soit à la fois assez large pour contenir la distribution dont l'écart-type est le plus grand, et à la fois être suffisamment fine pour décrire correctement la distribution la plus piquée. Un tel choix a donc un fort coût numérique.

Pour circonvier à cela, on considère un ensemble de vitesses discrètes (i.e une grille) différente pour chaque espèce. Pour sélectionner les bornes de l'intervalle de confiance, on procède de la façon suivante. Pour une condition initiale donnée, on note les quantités macroscopiques initiales n_0^α , u_0^α et T_0^α . Pour $\alpha = e, i$, on a :

$$V^\alpha = \left[\min_x (u_0^\alpha(x)) - l^\alpha \max_x \sqrt{k_B \frac{T_0^\alpha(x)}{m^\alpha}}, \max_x (u_0^\alpha(x)) + l^\alpha \max_x \sqrt{k_B \frac{T_0^\alpha(x)}{m^\alpha}} \right], \quad (2.33)$$

où l^α est choisie de sorte à convenir à la donnée initiale. Pour une distribution Maxwellienne en un point donné, un intervalle de confiance en ce point nécessite de choisir $l^\alpha = 4$. Il s'agit donc là de la valeur minimale à choisir, et il est souvent nécessaire de choisir une valeur plus grande pour contenir les effets cinétiques et les gradients de température le long du domaine.

Les grilles en vitesse sont donc différents pour chaque espèce constituant le plasma, et, au sein du espèce, on emploiera une unique grille pour tout temps et tout point d'espace. Au chapitre suivant, on considérera le développement d'une méthode numérique pour des écoulements raréfiés dans le cas où l'on veut des grilles dynamiques en temps et en espace, en plus d'être adaptées à chaque espèce.

Posons maintenant les notations relatives à la discrétisation. On note Δx le pas de discrétisation du domaine $[L_{\min}, L_{\max}] \subset \mathbb{R}$ en N_x cellules. Pour $\alpha = e, i$, on choisit uniformément N_v vitesses discrètes dans chaque intervalle $[V_{\min}^\alpha, V_{\max}^\alpha] \subset \mathbb{R}$:

$$v_r^\alpha = (V_{\min}^\alpha)^\alpha + r \frac{(V_{\max}^\alpha)^\alpha - (V_{\min}^\alpha)^\alpha}{N_v}, \quad r = 1, \dots, N_v,$$

où Δv^e et Δv^i désignent respectivement les pas de vitesse électronique et ionique. On utilise les indices k et r afin de désigner les quantités calculées dans la cellule

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

k d'espace et à la vitesse v_r^α . Enfin, on note Δt le pas de temps et on emploie le superscript n pour désigner les quantités calculées au temps $t^n = t^0 + n\Delta t$, où t^0 désigne le temps initial.

Étape 1 : Calcul de g et de E

On réalise la discrétisation suivante de l'équation de Vlasov (2.31), pour $\alpha = e, i$ et $p = 0$:

$$\tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} = g_{0,k,r}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta v^\alpha} \frac{q^\alpha E_k^{n+1}}{m^\alpha} (g_{0,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{0,k,r-1}^{\alpha,n}), \quad (2.34)$$

couplée avec l'équation de Maxwell-Ampère discrétisée :

$$E_k^{n+1} = E_k^n - \frac{\Delta t}{\tau} j_k^{n+1}. \quad (2.35)$$

La discrétisation du gradient d'espace est assurée par l'emploi d'un flux ϕ_0 qui sera spécifié dans la section suivante. Pour le gradient en vitesse, on emploie ici une discrétisation centrée. Ces équations sont couplées en raison du choix de discrétiser en temps de manière implicite le terme de force de l'équation de Vlasov et l'équation de Maxwell-Ampère. Pour découpler ces équations, on procèdera à un calcul qui sera présenté dans la section suivante. Pour résumer, la méthode consiste d'abord à calculer E^{n+1} , puis $\tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1}$. Ensuite, une procédure similaire est employée pour le calcul de $\tilde{g}_2^{\alpha,n+1}$:

$$\tilde{g}_{2,k,r}^{\alpha,n+1} = g_{2,k,r}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{2,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{2,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta v^\alpha} (\psi_{2,k,r+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \psi_{2,k,r-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}),$$

où

$$\phi_{2,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} = \frac{v_r^\alpha}{2} (g_{2,k+1,r}^{\alpha,n} + g_{2,k,r}^{\alpha,n}) - \frac{|v_r^\alpha|}{2} (g_{2,k+1,r}^{\alpha,n} - g_{2,k,r}^{\alpha,n})$$

et

$$\psi_{2,k,r+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} = \frac{q^\alpha E_k^{n+1}}{2m^\alpha} (g_{2,k,r+1}^{\alpha,n} + g_{2,k,r}^{\alpha,n}) - \frac{|q^\alpha E_k^{n+1}|}{2m^\alpha} (g_{2,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{2,k,r}^{\alpha,n})$$

désignent les flux issus du schéma *upwind* (ou schéma amont) standard.

Les équations (2.34) sont stables sous la condition CFL suivante :

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{1}{\frac{\|V^\alpha\|_\infty}{\Delta x} + \frac{\|q^\alpha E^{n+1}\|_\infty}{m^\alpha \Delta v^\alpha}} \right).$$

Les moments de $\tilde{g}_p^{e,n+1}$ et $\tilde{g}_p^{i,n+1}$ sont ensuite calculés à l'aide de la formule de qua-

drature du point milieu : $\forall k \in \{1, \dots, N_x\}$:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_k^{\alpha,n+1} &= \sum_{r=1}^{N_v} \tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} \Delta v^\alpha, \\ \tilde{u}_k^{\alpha,n+1} &= \frac{1}{\tilde{n}_k^{\alpha,n+1}} \sum_{r=1}^{N_v} \tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} v_r \Delta v^\alpha, \\ \tilde{T}_k^{\alpha,n+1} &= \frac{1}{3\tilde{n}_k^{\alpha,n+1} k_B} \left[\sum_{r=1}^{N_v} m^\alpha \tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} v_r^2 \Delta v^\alpha + 2 \sum_{r=1}^{N_v} \tilde{g}_{2,k,r}^{\alpha,n+1} \Delta v^\alpha - m^\alpha \tilde{n}_k^{\alpha,n+1} \tilde{u}_k^{\alpha,n+1^2} \right].\end{aligned}$$

De même, les quantités de mélange peuvent être calculées. Elles seront nécessaires à l'étape suivante pour le calcul des distributions Maxwelliennes inter-espèces :

$$\begin{aligned}\tilde{n}_k^{n+1} &= \tilde{n}_k^{e,n+1} + \tilde{n}_k^{i,n+1}, \\ \tilde{u}_k^{n+1} &= \frac{\sum_\alpha \tilde{\rho}_k^{\alpha,n+\frac{1}{2}} \tilde{u}_k^{\alpha,n+1}}{\sum_\alpha \tilde{\rho}_k^{\alpha,n+1}}, \\ \tilde{T}_k^{n+1} &= \frac{1}{\tilde{n}_k^{n+1} k_B} \left[\sum_\alpha \frac{1}{3} \tilde{\rho}_k^{\alpha,n+1} ((\tilde{u}_k^{\alpha,n+1})^2 - (\tilde{u}_k^{n+1})^2) + \sum_\alpha \tilde{n}_k^{\alpha,n+1} k_B \tilde{T}_k^{\alpha,n+1} \right].\end{aligned}$$

Étape 2 : Collisions inter-espèces

Pour cette étape, on applique la méthode d'Euler implicite aux équations (2.32) :

$$\hat{g}_{p,k,r}^{\alpha,n+1} = \frac{1}{\Delta t + \tau^{ei}} \left[\Delta t \widetilde{M}_{p,k,r}^{\alpha,n+1} + \tau^{ei} \tilde{g}_{p,k,r}^{\alpha,n+1} \right],$$

qui est un schéma inconditionnellement stable. $\widetilde{M}_{p,k,r}^{\alpha,n+1}$ désigne la Maxwellienne de mélange définie par les quantités macroscopiques $\tilde{n}_k^{\alpha,n+1}$, \tilde{u}_k^{n+1} et \tilde{T}_k^{n+1} , qui sont donc conservés au travers de cette étape. Ainsi, à la faveur de ces propriétés de conservation, la Maxwellienne au temps t^{n+1} est connue à l'avance, ce qui autorise l'implication. Les vitesses et températures partielles (qui ne sont en général pas conservées par cette étape) sont ensuite recalculées par la même formule du point milieu que précédemment.

Étape 3 : Collisions intra-espèces

Cette troisième et dernière étape consiste en la relaxation vers l'équilibre au sein de chaque espèce. Comme chaque opérateur BGK préserve les moments partiels, on a, par un argument similaire à l'étape 2, les propriétés de conservation suivantes : $\forall k \in \{1, \dots, N_x\}$,

$$\hat{n}_k^{\alpha,n+1} = n_k^{\alpha,n+1}, \quad \hat{u}_k^{\alpha,n+1} = u_k^{\alpha,n+1}, \quad \hat{T}_k^{\alpha,n+1} = T_k^{\alpha,n+1}. \quad (2.36)$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

Comme précédemment, ces propriétés permettent d'impliciter le schéma : $\forall k \in \{1, \dots, N_x\}, \forall r \in \{1, \dots, N_v\}$ et $p = 0, 2$,

$$g_{p,k,r}^{\alpha,n+1} = \hat{g}_{p,k,r}^{\alpha,n+1} + \frac{\Delta t}{\tau} (M_{p,k,r}^{\alpha,n+1} - g_{p,k,r}^{\alpha,n+1}), \quad (2.37)$$

où

$$M_{0,k,r}^{\alpha,n+1} = \frac{n_k^{\alpha,n+1}}{\sqrt{2\pi k_B \frac{T_k^{\alpha,n+1}}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v_r - u_k^{\alpha,n+1})^2}{2k_B \frac{T_k^{\alpha,n+1}}{m^\alpha}}\right),$$

$$M_{2,k,r}^{\alpha,n+1} = k_B T_k^\alpha M_{0,k,r}^{\alpha,n+1},$$

qui s'expriment à l'aide de quantités connues à la fin de l'étape 2, grâce aux propriétés (2.36). La limite hydrodynamique $\tau \rightarrow 0$ prise dans l'équation (2.37) mène à :

$$g_{p,k,r}^{\alpha,n+1} = M_{p,k,r}^{\alpha,n+1}.$$

Dans la section suivante, on s'intéressera à la question de l'application des contraintes de quasi-neutralité (2.23). Plus précisément, on donnera des flux spatiaux spécifiques, ainsi qu'une reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère permettant de découpler le système (2.34-2.35). L'objectif est d'obtenir un schéma qui soit consistant à la limite $\tau \rightarrow 0$. On notera une propriété importante du schéma tel qu'il a été présenté jusque-là : si les contraintes de quasi-neutralité sont imposées pendant l'étape 1, alors elles seront trivialement vérifiées par les étapes 2 et 3. Ainsi, la question des contraintes ne se pose que pour la première étape du schéma.

2.3.2 Un schéma amont avec viscosité modifiée

Dans un premier temps, on choisit le flux spatial suivant, fondé sur le schéma amont classique :

$$\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} = \frac{v_r^\alpha}{2} (g_{0,k+1,r}^{\alpha,n} + g_{0,k,r}^{\alpha,n}) - \frac{|V_{\max}|}{2} (g_{0,k+1,r}^{\alpha,n} - g_{0,k,r}^{\alpha,n}), \quad (2.38)$$

où $V_{\max} = \max(|V_{\min}^e|, |V_{\min}^i|, |V_{\max}^e|, |V_{\min}^e|)$ désigne la plus grande de toutes les vitesses discrètes.

Cette méthode consiste en un schéma amont où la viscosité numérique $|v_r^\alpha|$, qui dépend directement des vitesses cinétiques discrètes, a été remplacée par la plus petite valeur indépendante de r et α qui assurent la stabilité de toutes les équations discrètes. Le système discret s'écrit alors :

$$\tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} = g_{0,k,r}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta v^\alpha} \frac{q^\alpha E_k^{n+1}}{m^\alpha} (g_{0,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{0,k,r-1}^{\alpha,n}), \quad (2.39)$$

et

$$E_k^{n+1} = E_k^n - \frac{\Delta t}{\tau} j_k^{n+1}. \quad (2.40)$$

Ce niveau d'implicitation autorise une reformulation de l'équation sur le champ électrique. Plus précisément, dans un contexte numérique, l'équation employée pour calculer le champ électrique (2.40) n'est pas valide à la limite $\tau \rightarrow 0$. Pour lever cette raideur, on suit l'idée développée par [60]. En multipliant l'équation (2.39) par $q^\alpha v_r^\alpha \Delta v^\alpha$ et en sommant sur r , il vient :

$$\begin{aligned} q^\alpha \sum_r v_r^\alpha \tilde{g}_{0,k,r}^{\alpha,n+1} \Delta v^\alpha &= q^\alpha \sum_r v_r^\alpha g_{0,k,r}^{\alpha,n} \Delta v^\alpha - q^\alpha \frac{\Delta t \Delta v^\alpha}{\Delta x} \sum_r v_r^\alpha (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \sum_r v_r^\alpha \left(\frac{(q^\alpha)^2 E_k^{n+1}}{m^\alpha} (g_{0,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{0,k,r-1}^{\alpha,n}) \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Selon la définition du courant $j_k^n = \sum_\alpha q^\alpha \sum_r v_r^\alpha g_{0,k,r}^{\alpha,n} \Delta v^\alpha$, prendre en compte les équations (2.41) avec $\alpha = e, i$ mène à

$$\begin{aligned} \tilde{j}_k^{n+1} &= j_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r \Delta v^\alpha v_r^\alpha (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) \\ &\quad - \frac{\Delta t E_k^{n+1}}{2} \sum_\alpha \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} \sum_r v_r^\alpha (g_{0,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{0,k,r-1}^{\alpha,n}). \end{aligned}$$

En injectant cette équation dans (2.40), on obtient l'expression suivante pour le champ électrique :

$$E_k^{n+1} = \frac{\tau E_k^n - \Delta t j_k^n + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r \Delta v^\alpha v_r^\alpha (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n})}{\tau - \frac{\Delta t^2}{2} \sum_\alpha \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} \sum_r v_r^\alpha (g_{0,k,r+1}^{\alpha,n} - g_{0,k,r-1}^{\alpha,n})},$$

qui est valide pour toute valeur de τ . En particulier, elle est valide à la limite $\tau \rightarrow 0$, qui donne alors :

$$E_k^{n+1} = \frac{\frac{1}{\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r \Delta v^\alpha v_r^\alpha (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n})}{\sum_\alpha \frac{(q^\alpha)^2}{m^\alpha} n_k^{\alpha,n}}, \quad (2.42)$$

où il a été supposé que $j_k^n = 0$. Ainsi, un tel choix de E_k^{n+1} assure que $\tilde{j}_k^{n+1} = 0$, qui est l'une des deux contraintes de quasi-neutralité (2.23). Par ailleurs, le choix de ϕ_0 fait en (2.38) assure que la deuxième contrainte de quasi-neutralité $\tilde{\rho}_k^{n+1} = 0$ soit également vérifiée. Plus précisément, on vérifie cette propriété en calculant l'équation discrète sur la charge électrique $\tilde{\rho}_k^{n+1}$. $\forall k \in \{1, \dots, N_x\}$, en remarquant que

$$\sum_j (\psi_{0,k,r+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \psi_{0,k,r-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) = 0,$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

la charge électrique discrète s'écrit :

$$\sum_r q^\alpha g_{0,k,r}^{\alpha,n+1} \Delta v^\alpha = \sum_r q^\alpha g_{0,k,r}^{\alpha,n} \Delta v^\alpha - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_r (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) \Delta v^\alpha.$$

Ainsi, on obtient l'équation suivante sur la charge électrique totale s'écrit :

$$\bar{\rho}_k^{n+1} = \bar{\rho}_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r (\phi_{0,k+\frac{1}{2},r}^{\alpha,n} - \phi_{0,k-\frac{1}{2},r}^{\alpha,n}) \Delta v^\alpha.$$

A l'aide de l'équation (2.38), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k^{n+1} = \bar{\rho}_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r (v_r^\alpha (g_{0,k+1,r}^{\alpha,n} - g_{0,k-1,r}^{\alpha,n}) \\ - |V_{\max}| (g_{0,k+1,r}^{\alpha,n} - 2g_{0,k,r}^{\alpha,n} + g_{0,k-1,r}^{\alpha,n})) \Delta v^\alpha. \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k^{n+1} = \bar{\rho}_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (j_{k+1}^n - j_{k-1}^n) \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_\alpha q^\alpha \sum_r |V_{\max}| (g_{0,k+1,r}^{\alpha,n} - 2g_{0,k,r}^{\alpha,n} + g_{0,k-1,r}^{\alpha,n}) \Delta v^\alpha \end{aligned}$$

En supposant que $\bar{\rho}_k^n = j_{k+1}^n = j_{k-1}^n = 0$, on a :

$$\bar{\rho}_k^{n+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta x} V_{\max} (\bar{\rho}_{k+1}^n - 2\bar{\rho}_k^n + \bar{\rho}_{k-1}^n) = 0.$$

Ainsi la quasi-neutralité est conservée pour tout temps. Cependant, la modification apportée au flux spatial du schéma a pour conséquence une surestimation très importante de la viscosité numérique du schéma, et donc de la dissipation au sein des approximations numériques. Pour compenser cela, la discrétisation spatiale doit être très précise, avec une valeur importante de N_x . Une conséquence non-souhaitée de ce schéma est donc un coût de calcul très important.

2.4 Comparaisons avec des schémas pour le modèle macroscopique

Dans la section sur les simulation numériques, on compare les résultats de notre méthode à deux méthodes dites *fluides*, i.e. des méthodes appliquées directement sur les quantités macroscopiques.

La première méthode est un schéma de relaxation de type Suliciu, présenté dans [9]. L'objectif d'une telle méthode est d'adjointre plusieurs inconnues supplémentaires au système afin de modifier la structure de celui-ci. Plus précisément, l'objectif

est d'obtenir un système dont tous les champs sont linéairement dégénérés. Ceci rend alors la résolution d'un problème de Riemann plus simple que dans le cas où des champs sont vraiment non-linéaires. Dans cette section, on démontre, de manière formelle, que le système du second ordre associé au développement de Chapman-Enskog du système de relaxation proposé dans [9] dissipe l'entropie d'Euler sous une condition dite condition sous-caractéristique.

La deuxième méthode, également présentée dans [9], est une méthode de type BGK discret, fondée sur les travaux de Bouchut [19] et d'Aregba-Driollet et Natalini [7]. Cette approche est présentée au chapitre 3 pour le système d'Euler bi-température en dimension 2. On présente dans cette section un résultat de dissipation d'entropie du schéma de relaxation de Suliciu.

Forme générale du système de relaxation de Suliciu

On rappelle d'abord le système d'Euler bi-température :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & (2.43a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^e + p^i) = 0, & (2.43b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x(u(\mathcal{E}^i + p^i)) + u(c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i) = -\nu^{ei}(T^i - T^e), & (2.43c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x(u(\mathcal{E}^e + p^e)) - u(c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i) = \nu^{ei}(T^i - T^e). & (2.43d) \end{cases}$$

Le système relaxé proposé dans [9] est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & (2.44a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^e + p^i) = 0, & (2.44b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x(u(\mathcal{E}^i + \pi^i)) + u(c^i \partial_x \pi^e - c^e \partial_x \pi^e) = -\nu^{ei}(T^i - T^e), & (2.44c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x(u(\mathcal{E}^e + \pi^e)) - u(c^i \partial_x \pi^e - c^e \partial_x \pi^i) = \nu^{ei}(T^i - T^e), & (2.44d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \left(\frac{\rho^e \pi^e}{(ac^e)^2} \right) + \partial_x \left(u \left(\frac{\rho^e \pi^e}{(ac^e)^2} \right) \right) = \frac{\rho^e}{(ac^e)^2} (p^e - \pi^e), & (2.44e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \left(\frac{\rho^i \pi^i}{(ac^i)^2} \right) + \partial_x \left(u \left(\frac{\rho^i \pi^i}{(ac^i)^2} \right) \right) = \frac{\rho^i}{(ac^i)^2} (p^i - \pi^i), & (2.44f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho a) + \partial_x(\rho u a) = 0. & (2.44g) \end{cases}$$

Développement de Chapman-Enskog

Pour obtenir une condition de dissipation d'entropie, on cherche un développement de Chapman-Enskog afin d'obtenir les termes de viscosité associés à la relaxation des pressions. On considère pour cela π^α comme une perturbation autour de l'état d'équilibre p^α :

$$\pi^\alpha = p^\alpha + \varepsilon p_1^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.45)$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

En injectant cette expression de π^α dans les quatre premières équations (2.44a, 2.44b, 2.44c, 2.44d), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (2.46a) \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p^e + p^i) = -\varepsilon \partial_x(p_1^e + p_1^i), \quad (2.46b) \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x(u(\mathcal{E}^e + p^e)) + u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) = \nu^{ei}(T^i - T^e) \\ \quad - \varepsilon \partial_x(u p_1^e) \\ \quad + \varepsilon u \partial_x(c^i p_1^e) - \varepsilon u \partial_x(c^e p_1^i), \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x(u(\mathcal{E}^i + p^i)) + u(c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i) = \nu^{ei}(T^e - T^i) \\ \quad - \varepsilon \partial_x(u p_1^i) \\ \quad - \varepsilon u \partial_x(c^i p_1^e) + \varepsilon u \partial_x(c^e p_1^i). \end{array} \right. \quad (2.46c) \quad (2.46d)$$

À présent, en utilisant les équations (2.44e, 2.44f), on peut calculer les expressions de p_1^e et p_1^i . Pour cela, on injecte à nouveau l'expression (2.45) dans ces équations, et on tronque à l'ordre 0 en ε . Il vient alors :

$$p_1^e = -\frac{(ac^e)^2}{\rho^e} \left[\partial_t \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} \right) + \partial_x \left(u \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} + 1 \right) \right) \right]. \quad (2.47)$$

Il s'agit maintenant de remplacer la dérivée en temps dans l'expression de p_1^e . Pour cela, on explicite l'équation d'évolution de la quantité $\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2}$:

$$\partial_t \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} \right) = \frac{1}{(ac^e)^2} (\rho^e \partial_t p^e + p^e \partial_t \rho^e) - \frac{2\rho^e p^e}{(c^e)^2 a^3} \partial_t a.$$

À la faveur de la loi d'état des gaz parfaits $p^e = (\gamma^e - 1)\rho^e \varepsilon^e$, on a :

$$\partial_t p^e = -\partial_x(u p^e) - (\gamma^e - 1)p^e \partial_x u + (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e),$$

ce qui mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} \right) &= \frac{\rho^e}{(ac^e)^2} (-\partial_x(u p^e) - (\gamma^e - 1)p^e \partial_x u + (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e)) \\ &\quad - \frac{p^e}{(ac^e)^2} \partial_x(u \rho^e) + \frac{2\rho^e p^e u}{(c^e)^2 a^3} \partial_x a. \end{aligned}$$

En injectant cette expression dans l'équation (2.47), on a :

$$\begin{aligned} p_1^e &= \partial_x(u p^e) + (\gamma^e - 1)p^e \partial_x u - (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e) + \frac{p^e}{\rho^e} \partial_x(u \rho^e) - \frac{2p^e u}{a} \partial_x a \\ &\quad - \frac{(ac^e)^2}{\rho^e} \partial_x \left(u \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} + 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
p_1^e &= u\partial_x(p^e) + p^e\partial_x u + (\gamma^e - 1)p^e\partial_x u - (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e) \\
&+ p^e\partial_x u + \frac{p^e}{\rho^e}u\partial_x\rho^e - \frac{2p^e u}{a}\partial_x a \\
&- \frac{(ac^e)^2}{\rho^e} \left[u\partial_x\left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2}\right) + \left(\frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2} + 1\right)\partial_x u \right] \\
&= u\partial_x(p^e) + (\gamma^e + 1)p^e\partial_x u - (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e) \\
&+ \frac{p^e}{\rho^e}u\partial_x\rho^e - \frac{2p^e u}{a}\partial_x a \\
&- \frac{(ac^e)^2}{\rho^e} \left[u\frac{\rho^e}{(ac^e)^2}\partial_x p^e + up^e\partial_x\frac{\rho^e}{(ac^e)^2} + \frac{\rho^e p^e}{(ac^e)^2}\partial_x u + \partial_x u \right] \\
&= \gamma^e p^e\partial_x u - (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e) \\
&+ \frac{p^e}{\rho^e}u\partial_x\rho^e - \frac{2p^e u}{a}\partial_x a \\
&- \frac{(ac^e)^2}{\rho^e}up^e\partial_x\left(\frac{\rho^e}{(ac^e)^2}\right) - \frac{(ac^e)^2}{\rho^e}\partial_x u \\
&= (\gamma^e p^e - \frac{(ac^e)^2}{\rho^e})\partial_x u - (\gamma^e - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e).
\end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_1^i &= \partial_x(up^i) + (\gamma^i - 1)p^i\partial_x u + (\gamma^i - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e) + \frac{p^i}{\rho^i}\partial_x(u\rho^i) - \frac{2p^i u}{a}\partial_x a \\
&- \frac{(ac^i)^2}{\rho^i}\partial_x\left(u\left(\frac{\rho^i p^i}{(ac^i)^2} + 1\right)\right) \\
&= (\gamma^i p^i - \frac{(ac^i)^2}{\rho^i})\partial_x u + (\gamma^i - 1)\nu^{ei}(T^i - T^e).
\end{aligned}$$

Maintenant que les expressions de p_1^e et p_1^i ont été calculées, on peut les injecter dans le système (2.46), afin d'obtenir le système d'ordre 2, dont les termes de viscosité sont associés à la relaxation de Suliciu. L'équation de conservation de la masse reste inchangée :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0.$$

L'équation sur la quantité de mouvement s'exprime :

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^e + p^i) &= -\varepsilon\partial_x\left[(\gamma^e p^e + \gamma^i p^i)\partial_x u + (\gamma^i - \gamma^e)\nu^{ei}(T^i - T^e)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{(ac^e)^2}{\rho^e} + \frac{(ac^i)^2}{\rho^i}\right)\partial_x u\right].
\end{aligned}$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

De manière analogue, on a l'équation sur l'énergie électronique :

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x (u(\mathcal{E}^e + p^e)) + u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) - \nu^{ei}(T^i - T^e) \\ &= -\varepsilon \partial_x \left(u \left((\gamma^e p^e - \frac{(ac^e)^2}{\rho^e}) \partial_x u - (\gamma^e - 1) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right) \right) \\ &+ \varepsilon u \partial_x \left((c^i \gamma^e p^e - c^e \gamma^i p^i) \partial_x u - (c^i(\gamma^e - 1) + c^e(\gamma^i - 1)) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right), \end{aligned}$$

ainsi que celle sur l'énergie ionique :

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x (u(\mathcal{E}^i + p^i)) - u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) + \nu^{ei}(T^i - T^e) \\ &= -\varepsilon \partial_x \left(u \left((\gamma^i p^i - \frac{(ac^i)^2}{\rho^i}) \partial_x u + (\gamma^i - 1) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right) \right) \\ &- \varepsilon u \partial_x \left((c^i \gamma^e p^e - c^e \gamma^i p^i) \partial_x u - (c^i(\gamma^e - 1) + c^e(\gamma^i - 1)) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right), \end{aligned}$$

d'où, au final, le système d'ordre 2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p^e + p^i) = -\varepsilon \partial_x \left[(\gamma^e p^e + \gamma^i p^i) \partial_x u + (\gamma^i - \gamma^e) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \left(\frac{(ac^e)^2}{\rho^e} + \frac{(ac^i)^2}{\rho^i} \right) \partial_x u \right], \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x (u(\mathcal{E}^e + p^e)) + u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) - \nu^{ei}(T^i - T^e) \\ = -\varepsilon \partial_x \left(u \left((\gamma^e p^e - \frac{(ac^e)^2}{\rho^e}) \partial_x u - (\gamma^e - 1) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right) \right) \\ + \varepsilon u \partial_x \left((c^i \gamma^e p^e - c^e \gamma^i p^i) \partial_x u - (c^i(\gamma^e - 1) + c^e(\gamma^i - 1)) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right), \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x (u(\mathcal{E}^i + p^i)) - u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) + \nu^{ei}(T^i - T^e) \\ = -\varepsilon \partial_x \left(u \left((\gamma^i p^i - \frac{(ac^i)^2}{\rho^i}) \partial_x u + (\gamma^i - 1) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right) \right) \\ - \varepsilon u \partial_x \left((c^i \gamma^e p^e - c^e \gamma^i p^i) \partial_x u - (c^i(\gamma^e - 1) + c^e(\gamma^i - 1)) \nu^{ei}(T^i - T^e) \right). \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Dissipation d'entropie et condition sous-caractéristique

Proposition 2.10. *Le système (2.48) dissipe l'entropie d'Euler bi-température sous la condition sous-caractéristique suivante :*

$$4 \sum_{\alpha} \left(\gamma n^{\alpha} - \frac{a^2 c^{\alpha}}{k_B \rho T^{\alpha}} \right) \leq -(\gamma - 1) \frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2, \quad (2.49)$$

où l'on suppose que $\gamma^e = \gamma^i = \gamma$.

Démonstration. Considérons le système sous la forme (2.46), que l'on réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\
 \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p^e + p^i) &= \varepsilon W_2, \\
 \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x(u(\mathcal{E}^e + p^e)) + u(c^e \partial_x p^i - c^i \partial_x p^e) &= \nu^{ei}(T^i - T^e) + \varepsilon W_3, \\
 \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x(u(\mathcal{E}^i + p^i)) + u(c^i \partial_x p^e - c^e \partial_x p^i) &= \nu^{ei}(T^e - T^i) + \varepsilon W_4,
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

avec

$$\begin{aligned}
 W_2 &= -\partial_x(p_1^e + p_1^i), \\
 W_3 &= -p_1^e \partial_x u - u c^e \partial_x(p_1^e + p_1^i), \\
 W_4 &= -p_1^i \partial_x u - u c^i \partial_x(p_1^e + p_1^i).
 \end{aligned}$$

Considérons également l'entropie du système d'Euler bi-température :

$$\eta(q) = - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\rho^\alpha}{m^\alpha(\gamma^\alpha - 1)} \ln \left(\frac{p^\alpha}{(\rho^\alpha)^{\gamma^\alpha}} \right),$$

On commence par calculer $\eta'(q)$, le gradient de l'entropie par rapport aux variables du système :

$$\partial_{\rho u} \eta(q) = \sum_{\alpha=e,i} \frac{u c^\alpha}{k_B T^\alpha}, \quad \partial_{\mathcal{E}^\alpha} \eta(q) = \frac{-1}{k_B T^\alpha},$$

puis on calcule le produit scalaire $k_B \eta'(q) W$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \eta'(q) W &= -u \sum_{\alpha=e,i} \frac{c^\alpha}{k_B T^\alpha} \partial_x(p_1^e + p_1^i) + \sum_{\alpha} \frac{1}{k_B T^\alpha} (c^\alpha u \partial_x(p_1^e + p_1^i) + p_1^\alpha \partial_x u) \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{p_1^\alpha}{k_B T^\alpha} \partial_x u \\
 &= (\partial_x u)^2 \sum_{\alpha} \frac{1}{k_B T^\alpha} (\gamma^\alpha p^\alpha - \frac{a^2 c^\alpha}{\rho}) + (\partial_x u) \nu^{ei} (T^i - T^e) \left(-\frac{\gamma^e - 1}{k_B T^e} + \frac{\gamma^i - 1}{k_B T^i} \right) \\
 &= (\partial_x u)^2 \sum_{\alpha} \left(\gamma^\alpha n^\alpha - \frac{a^2 c^\alpha}{k_B \rho T^\alpha} \right) - (\partial_x u) \nu^{ei} (T^i - T^e) \frac{(\gamma^e - 1) T^i - (\gamma^i - 1) T^e}{k_B T^i T^e}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, en multipliant les équations du système (2.50) par ${}^t \eta'(q)$, les calculs mènent à l'inéquation suivante sur l'entropie :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \eta(q) + \partial_x \mathcal{Q}(q) &\leq - \frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2 + (\partial_x u)^2 \left[\sum_{\alpha} \left(\gamma^\alpha n^\alpha - \frac{a^2 c^\alpha}{k_B \rho T^\alpha} \right) \right] \\
 &\quad - (\partial_x u) \nu^{ei} (T^i - T^e) \left[\frac{(\gamma^e - 1) T^i - (\gamma^i - 1) T^e}{k_B T^i T^e} \right].
 \end{aligned}$$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

A présent, il est nécessaire, afin de prouver que cette inéquation est en fait une inéquation de dissipation d'entropie, que le second membre est toujours négatif. Comme $\gamma^e = \gamma^i = \gamma$, ce second membre est un polynôme du second ordre en $\partial_x u$, que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$P(\partial_x u) = A(\partial_x u)^2 + (\gamma - 1)B(\partial_x u) + B,$$

où

$$A = \sum_{\alpha} \left(\gamma n^{\alpha} - \frac{a^2 c^{\alpha}}{k_B \rho T^{\alpha}} \right), \quad B = -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2.$$

Ainsi, l'entropie sera dissipée sous la condition que le discriminant de P est négatif, ce qui se traduit par :

$$B^2(\gamma - 1)^2 \leq 4AB.$$

B étant négatif, on a :

$$B(\gamma - 1)^2 \geq 4A.$$

Cette condition peut alors se réécrire comme (2.49), et on peut remarquer :

$$4 \sum_{\alpha} \left(\gamma n^{\alpha} - \frac{a^2 c^{\alpha}}{k_B \rho T^{\alpha}} \right) \leq -(\gamma - 1) \frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2 \leq 0.$$

Ainsi, on constate que cette condition assure également que A est toujours négatif. Ceci signifie donc que le polynôme P est de signe constant et que ce signe est toujours négatif, et donc que l'entropie est bien dissipée. \square

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, on teste notre méthode sur différents cas tests de type problèmes de Riemann. De tels problèmes sont définis comme des problèmes de Cauchy du système d'Euler bi-température (2.1) avec une condition initiale constante par morceaux. Plus précisément, on rappelle que le domaine physique est le segment noté $[L_{\min}, L_{\max}] \subset \mathbb{R}$. Soit L^* le milieu de ce segment. La condition initiale d'un problème de Riemann prend alors la forme :

$$\mathcal{U}(t_0, x) = \begin{cases} \mathcal{U}_L & \text{pour } x \in [L_{\min}, L^*] \\ \mathcal{U}_R & \text{pour } x \in [L^*, L_{\max}] \end{cases}$$

où $\mathcal{U}_L, \mathcal{U}_R \in \mathbb{R}^4$ sont des vecteurs d'inconnus d'Euler bi-température. Dans l'étude des systèmes hyperboliques, la solution exacte des quantités conservées (densité, quantité de mouvement et énergie totale) peut être calculée pour de telles conditions initiales. Cependant, dans le cas des quantités non conservées que sont les énergies électroniques et ioniques, aucun résultat exact ne peut être obtenu en général.

Les résultats numériques obtenus sont comparés à deux autres méthodes : l'approche de relaxation de type Suliciu, pour laquelle un résultat de dissipation d'entropie a été énoncé et prouvé à la section 2.4 et un schéma à vitesses discrètes [9] à l'ordre 2, que l'on nommera HLL (par abus de langage) dans la suite (présenté dans le cas bi-dimensionnel au chapitre 3).

Pour tout ce qui suit, on fixe le domaine physique $[L_{\min}, L_{\max}] = [0, 1]$, que l'on munit de conditions aux bords de type Neumann homogène. Pour des raisons de simplicité, les quantités physiques (k_B, Z, q^i) sont toutes choisies égales à 1. Dans l'objectif d'obtenir des résultats de référence pour Euler bi-température, tous les cas tests sont réalisés dans la limite hydrodynamique $\tau \rightarrow 0$. Concernant le choix de l^α dans le calcul des bornes de vitesses discrètes (2.33), un test de convergence a priori sur les conditions initiales a été effectué, et la valeur de $l^\alpha = 8$ pour $\alpha = e, i$ convient pour tous les cas tests suivants.

Par ailleurs, on considère pour la plupart des cas un ratio de masse particulière de 10 ($m^e = 0.1$ et $m^i = 1$). Plus ce ratio est important, plus la valeur de V_{\max} dans l'équation (2.38) l'est également. Ainsi, un fort rapport de masse implique une importante quantité de diffusion numérique. Pour le dernier cas test de ce chapitre, on montre les résultats obtenus lorsque les masses ont un rapport de 1000.

2.5.1 Tube à choc avec des températures initiales identiques

Le premier cas test est le cas classique du tube à choc de Sod [98], où les températures électroniques sont égales aux températures ioniques. La condition initiale prend les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x) = 1, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{pour } x \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x) = 0.125, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{pour } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Les paramètres numériques sont les suivants : $N_x = 120000$ points de discrétisation en espace et $N_v = 40$ vitesses discrètes. Le temps de relaxation caractéristique inter-espèces est choisi égal à $\tau^{ei} = 0.1$. Les résultats sont calculés au temps final $t = 0.1$. Pour les deux méthodes fluides, $N_x = 4000$ points de discrétisation sont utilisés.

Les résultats de ce premier cas sont présentés sur les figures 2.1 et 2.2.

Les quantités décrites par des équations conservatives (densités et vitesses) sont consistantes avec les méthodes fluides HLL et Suliciu. De plus, la quasi-neutralité est correctement conservée par le schéma, comme on le voit par le fait que les densités électroniques et ioniques sont égales, de même que les vitesses électroniques et ioniques.

Pour les températures partielles, présentées sur la figure 2.2, l'état intermédiaire entre l'onde de raréfaction et la discontinuité de contact est identique pour tous les schémas, ce qui est cohérent puisque la solution est régulière sur cette portion du domaine. Cependant, les états intermédiaires obtenus entre la discontinuité de contact et le choc sont différents pour chaque méthode. Sur la figure 2.3, on agrandit cette zone, et on observe des résultats différents pour chaque méthode.

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

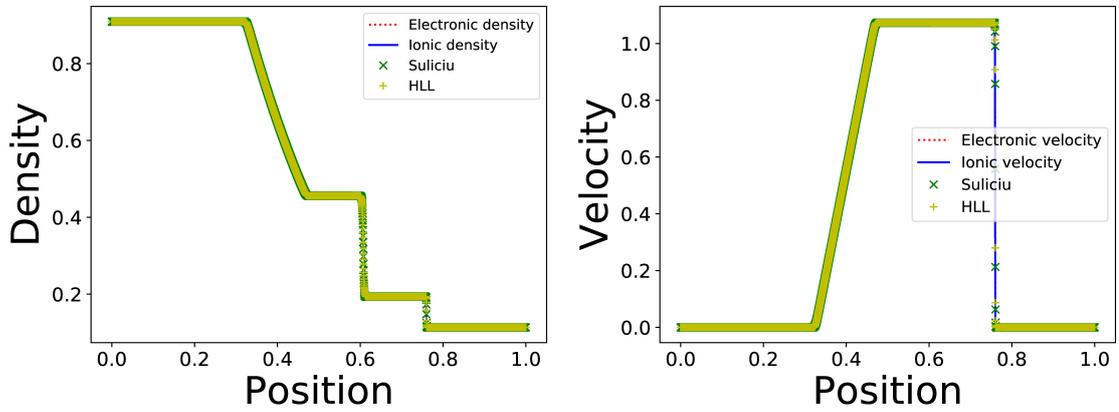


FIGURE 2.1 – Densités et vitesses pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

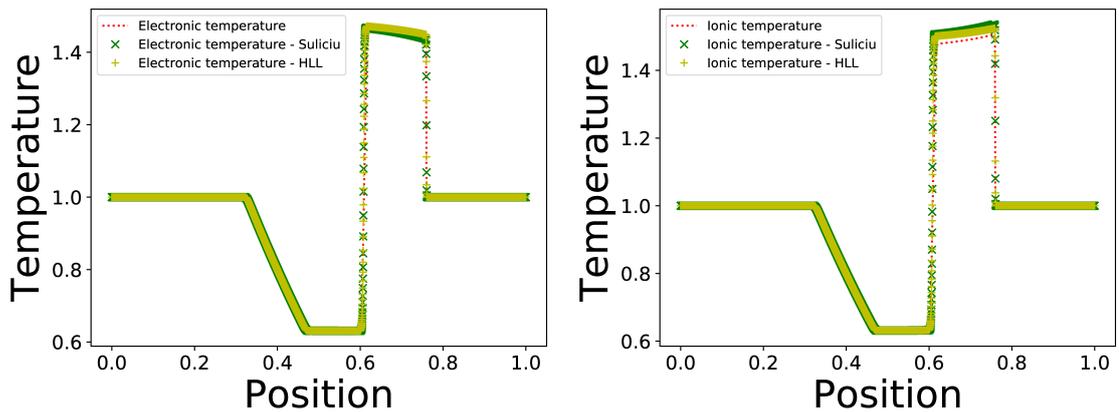


FIGURE 2.2 – Températures électroniques et ioniques pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

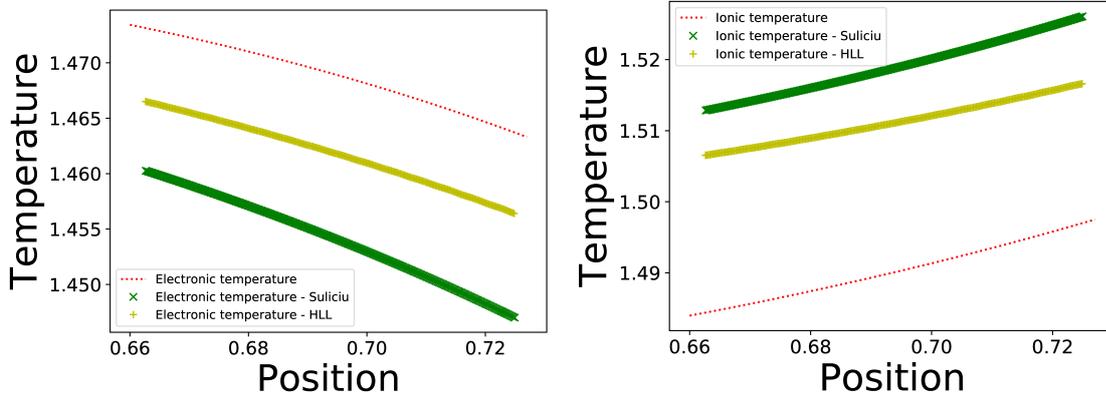


FIGURE 2.3 – Des relations de saut différentes au travers des chocs en températures électroniques et ioniques pour un tube à choc avec un ratio de masse de 10 et 120 000 points de discrétisation spatiale, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine de 8

Sur la figure 2.4, on présente le champ électrique, au temps final $t = 0.1$, obtenu de deux manières différentes. La première méthode est le champ électrique obtenu directement par le schéma cinétique, par la formule (2.42). La deuxième correspond au champ électrique calculé par la loi d’Ohm généralisée (2.28), calculée grâce aux quantités macroscopiques obtenues numériquement. Le comportement du schéma cinétique est ici en total accord avec la limite hydrodynamique, puisque les deux courbes coïncident parfaitement.

2.5.2 Tube à choc avec des températures initiales différentes

Ce cas test est similaire au cas précédent, avec pour seule différence les températures électroniques et ioniques initiales à droite. Les conditions initiales sont donc :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x) = 1, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x) = 0.125, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^e(t_0, x) = 2, T^i(t_0, x) = 3, & \text{si } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Les paramètres sont les suivants : $N_x = 120000$, $N_v = 40$ et $l = 8$. Le temps de relaxation des collisions inter-espèces est pris égal à $\tau^{ei} = 0.1$. Les résultats sont calculés pour un temps final $t = 0.1$. Les résultats sont présentés sur les figures 2.5 et 2.6. Le comportement des solutions est très proche de celui du cas précédent. La quasi-neutralité est obtenue, et les températures présentent des relations de saut différentes pour chaque méthode, comme visible sur la figure 2.7.

Sur la figure 2.8, comme pour le cas test précédent, on compare le champ électrique obtenu par le schéma et par la loi d’Ohm. Ici aussi, on s’aperçoit que les deux courbes coïncident parfaitement.

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

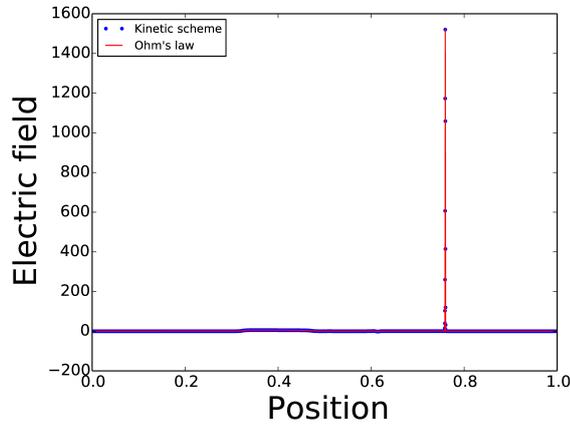


FIGURE 2.4 – Champ électrique obtenu par le schéma cinétique et par la loi d'Ohm pour le cas du tube de Sod à températures égales

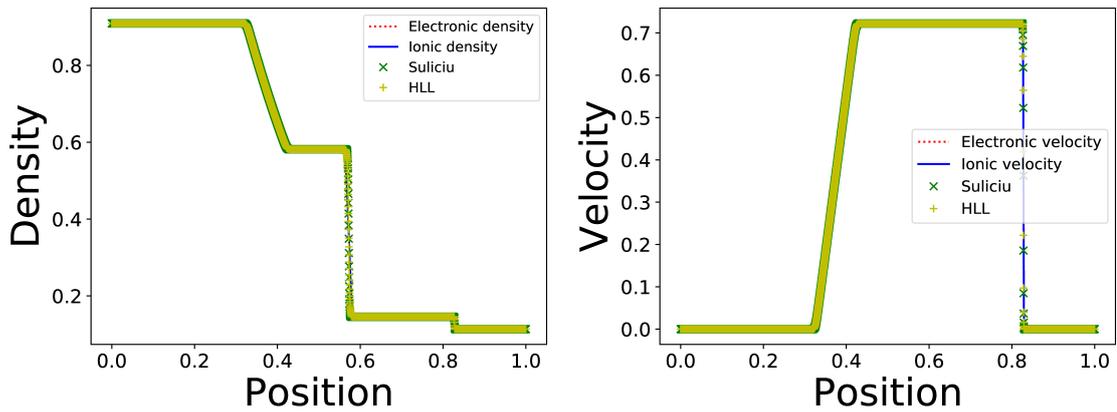


FIGURE 2.5 – Densités et vitesses pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

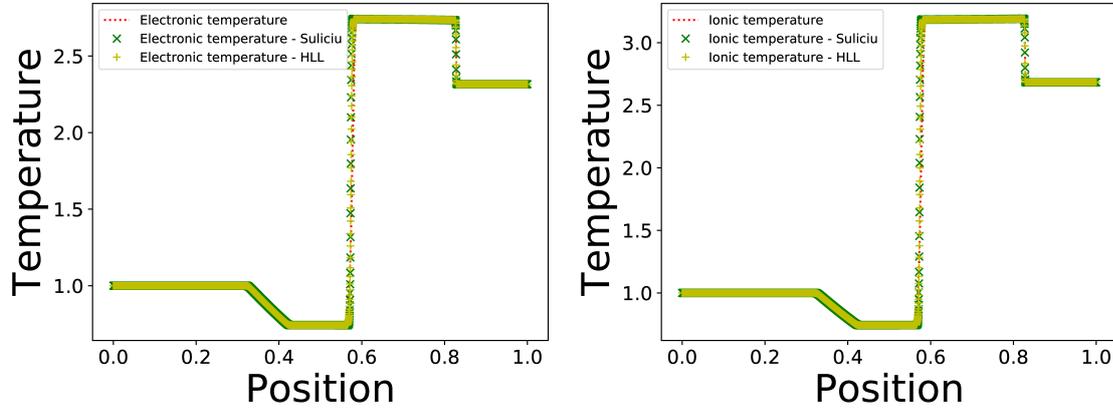


FIGURE 2.6 – Températures électroniques et ioniques pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

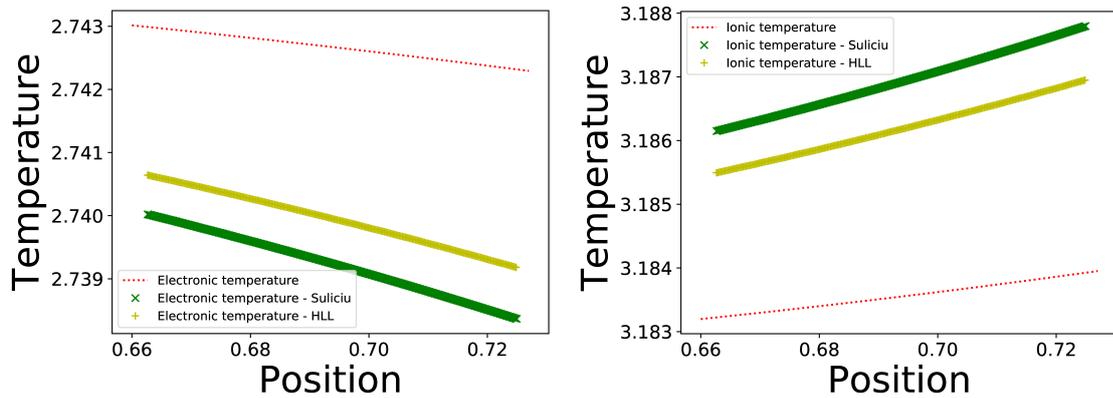


FIGURE 2.7 – Des relations de saut différentes au travers des chocs en températures électroniques et ioniques pour un tube à choc avec un ratio de masse de 10 et 120 000 points de discrétisation spatiale, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine de 8

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

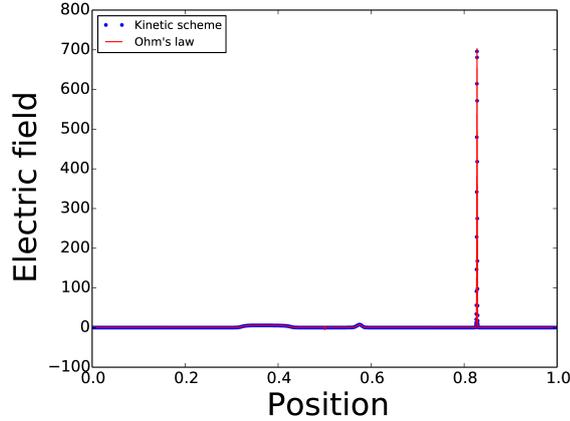


FIGURE 2.8 – Champ électrique obtenu par le schéma cinétique et par la loi d’Ohm pour le cas du tube de Sod à températures différentes

2.5.3 Double détente

Ce cas test est constitué de deux ondes de raréfaction, se propageant dans des directions opposées. Ce cas est défini par les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x) = 1, u^\alpha(t_0, x) = -1, T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{if } x \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x) = 1, u^\alpha(t_0, x) = 1, T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{if } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Pour les paramètres numériques, on choisit $N_x = 120000$, $N_v = 40$ and $l = 8$. Le temps de relaxation pour les collisions inter-espèces est $\tau^{ei} = 0.1$. Le temps final est $t = 0.1$.

Les résultats sont données en 2.9 et 2.10. Dans ce cas test, la solution obtenue est régulière. Il n’y a pas d’ondes de choc. Par conséquent, toutes les méthodes doivent donner les mêmes résultats. La figure 2.11 montre que c’est bien ce que l’on observe.

Les résultats relatifs au champ électrique sont présentés sur la figure 2.12. Les deux courbes sont superposées, attestant de la bonne description de l’échelle macroscopique par notre méthode. L’artéfact apparaissant au milieu du domaine sur la figure 2.9 est un comportement connu des schémas pour les équations d’Euler, et n’est pas lié à la présence de termes non-conservatifs.

2.5.4 Double choc

Ce cas test est constitué de deux ondes de chocs. On choisit les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x) = 1, & u^\alpha(t_0, x) = 1, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{if } x \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x) = 1, & u^\alpha(t_0, x) = -1, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{if } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

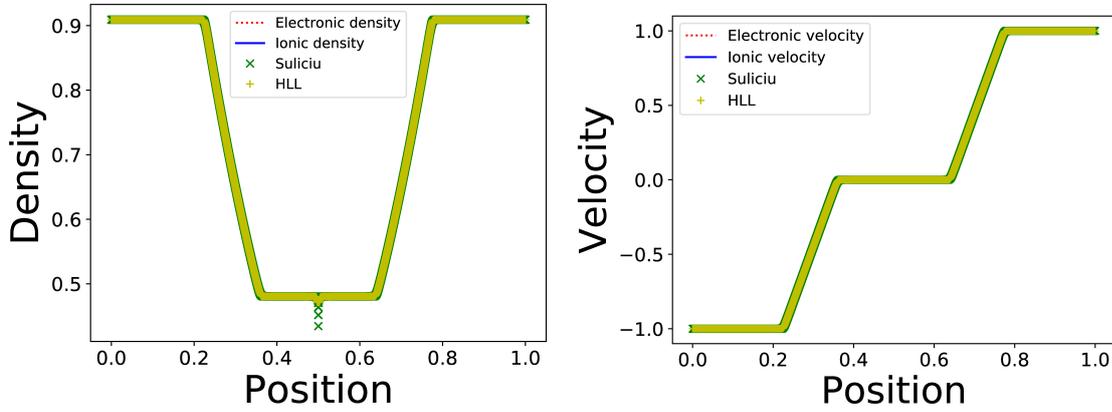


FIGURE 2.9 – Densités et vitesses pour le cas de la double détente avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

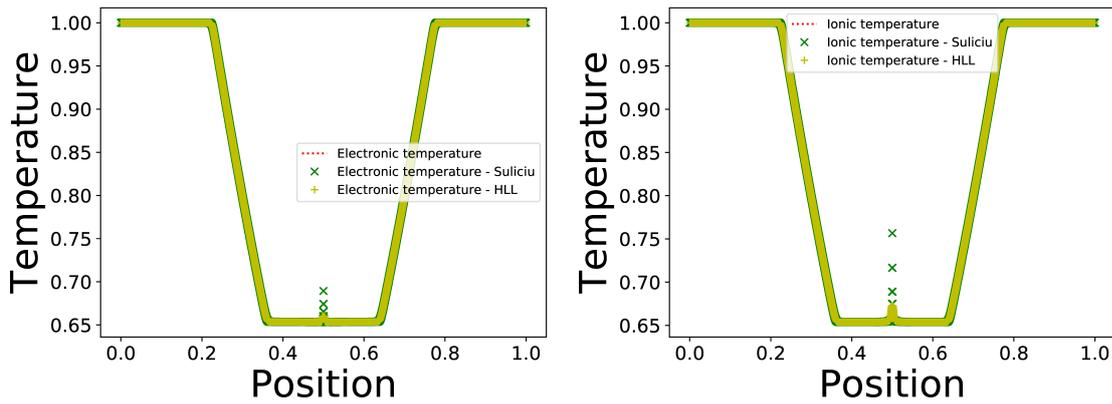


FIGURE 2.10 – Températures électroniques et ioniques pour le cas de la double détente avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

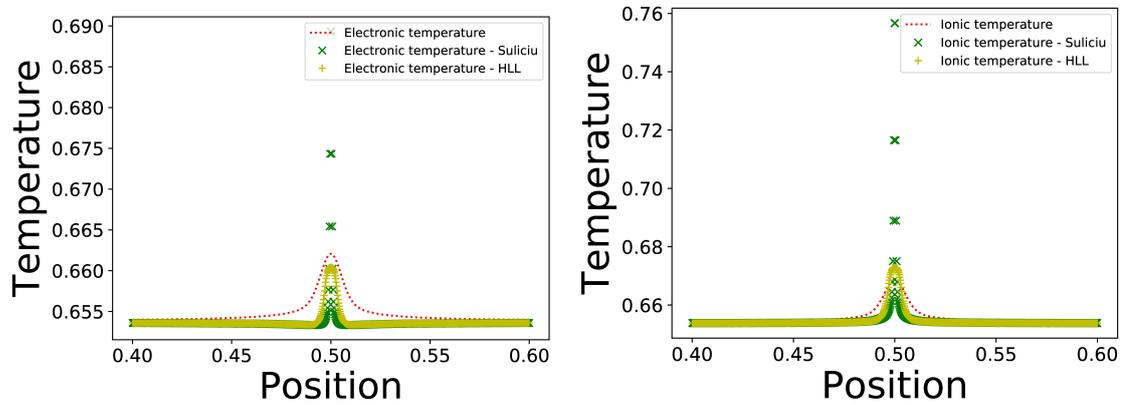


FIGURE 2.11 – Zoom sur les sauts en température pour le cas de la double détente avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

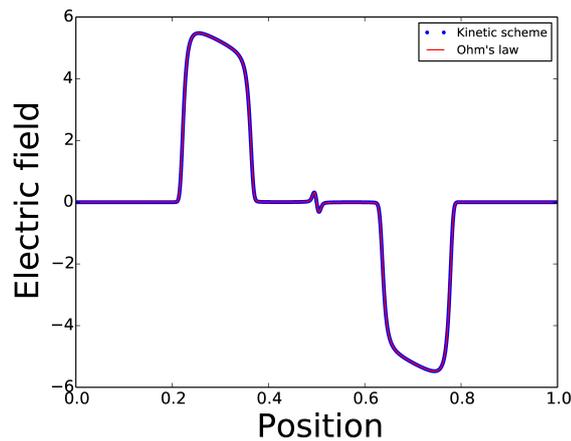


FIGURE 2.12 – Champ électrique obtenu par le schéma cinétique et par la loi d'Ohm pour le cas de la double détente

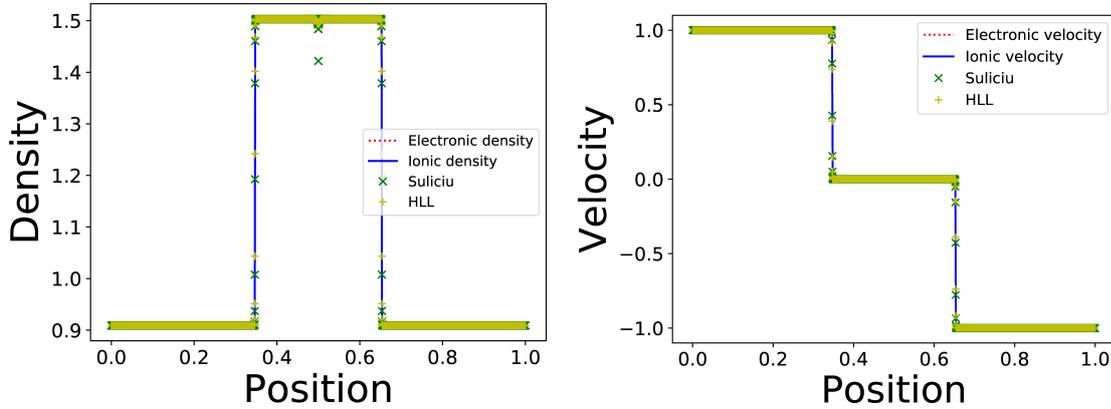


FIGURE 2.13 – Densités et vitesses pour le cas du double choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

On prend $N_x = 120000$, $N_v = 40$ and $l = 8$. Le temps de relaxation pour les collisions inter-espèces est $\tau^{ei} = 0.1$. Le temps final est $t = 0.1$.

Les résultats sont présentés sur les figures 2.13 et 2.14. La quasi-neutralité est obtenue pour les quantités conservées. Dans ce cas-ci, la solution contient deux ondes de choc, et on observe des relations de saut différentes pour chaque méthode numérique. Sur la figure 2.15, on zoome sur les états intermédiaires atteints par chaque méthode, entre les deux chocs. On observe ainsi le comportement distinct des trois méthodes.

Comme pour les cas précédents, la figure 2.16 contient les courbes pour le champ électrique. Celles-ci sont également superposées pour ce cas test.

2.5.5 Tube de Sod avec masses réalistes

Dans ce dernier cas test, on considère les mêmes données que pour le cas 2.5.2, mais l'on choisit ici une masse électronique égal à $m^e = 0,001$, ce qui correspond à un rapport de masse de 1000, ce qui est de l'ordre d'un rapport de masse réaliste. Les données initiales sont donc :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x) = 1, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^\alpha(t_0, x) = 1 & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x) = 0.125, & u^\alpha(t_0, x) = 0, & T^e(t_0, x) = 2, T^i(t_0, x) = 3, & \text{si } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Les paramètres sont les suivants : $N_x = 100000$, $N_v = 40$ et $l = 8$. La relaxation inter-espèce est ignorée dans ce cas test, ce qui revient à choisir $\nu^{ei} = 0$ dans les équations d'Euler bi-température. Les résultats sont calculés pour un temps final $t = 0.05$. Les résultats sont présentés sur les figures 2.17 et 2.18. La quasi-neutralité est obtenue, et les températures présentent des relations de saut identiques pour le schéma présenté dans ce chapitre et le schéma HLL, comme visible sur la figure 2.18

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

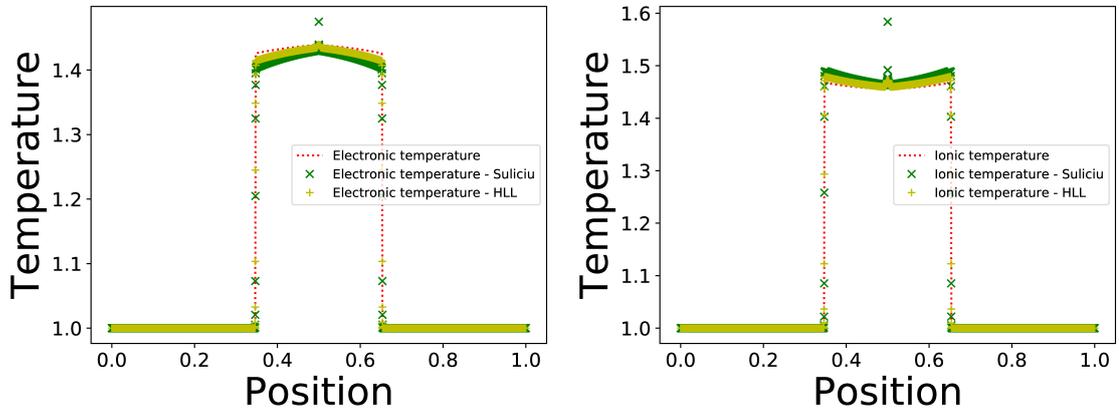


FIGURE 2.14 – Températures électroniques et ioniques pour le cas du double choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

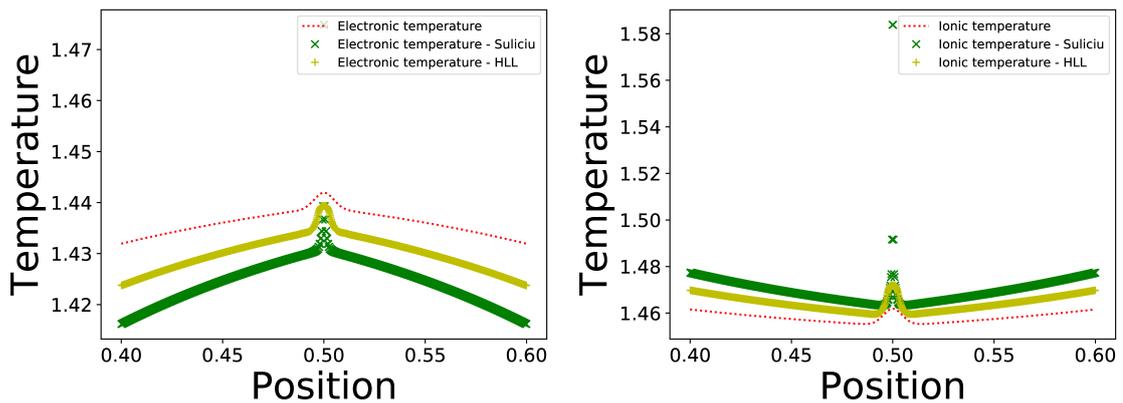


FIGURE 2.15 – Zoom sur les sauts en température pour le cas du double choc avec un rapport de masse de 10 avec 120000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

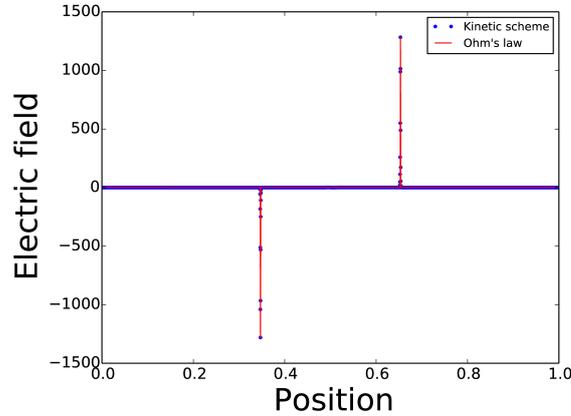


FIGURE 2.16 – Champ électrique obtenu par le schéma cinétique et par la loi d’Ohm pour le cas du double choc

et 2.19. Le comportement du champ électrique est présenté sur la figure 2.20 et est tout à fait consistant avec la limite hydrodynamique.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode numérique pour résoudre le modèle cinétique de Vlasov-BGK-Poisson, afin d’obtenir des résultats de référence pour un système hyperbolique non-conservatif, le système d’Euler bi-température. A limite hydrodynamique, ce système cinétique coïncide avec ce dernier. Dans ce contexte, les équations de Maxwell dégénèrent, depuis des équations d’évolution, vers des contraintes algébriques. Notre méthode est capable de préserver ces contraintes au niveau discret, condition nécessaire à la consistance des résultats numériques avec ceux issus de simulation pour Euler bi-température. Ces résultats sont obtenus par des méthodes fluides, pour lesquelles la définition des solutions faibles et des conditions de Rankine-Hugoniot n’est pas bien posée. Dans notre cas, la méthode cinétique sous-jacente utilisée présente une structure de type transport-projection, où la partie transport de l’équation est conservative. On propose, pour montrer le comportement de notre méthode, divers cas tests permettant de comparer notre méthode aux méthodes fluides mentionnées.

2. Une approche cinétique du système d'Euler bi-température

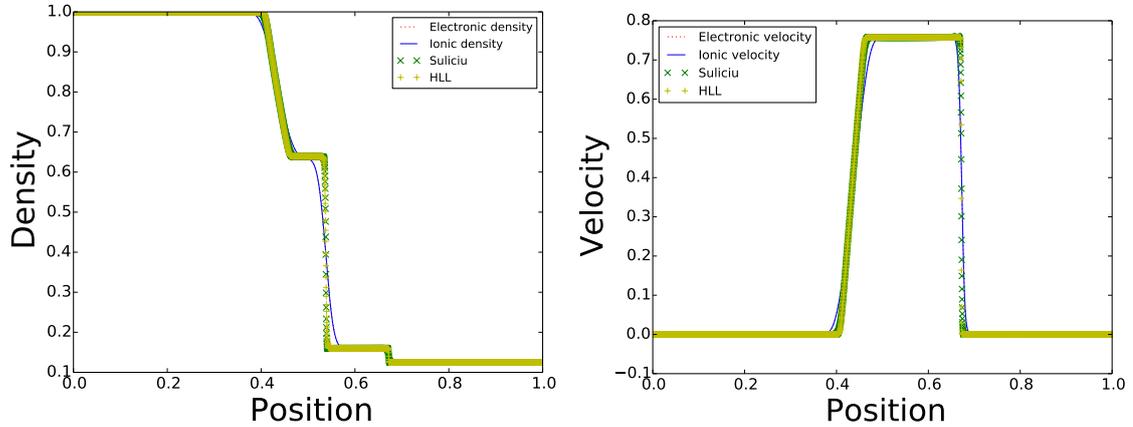


FIGURE 2.17 – Densités et vitesses pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 1000 avec 100000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

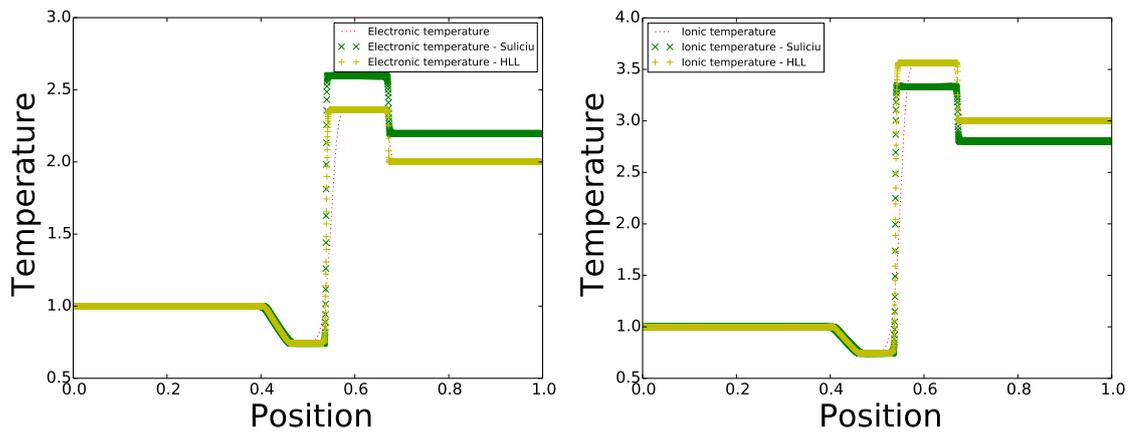


FIGURE 2.18 – Températures électroniques et ioniques pour le cas du tube à choc avec un rapport de masse de 1000 avec 100000 points en espace, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine $l = 8$

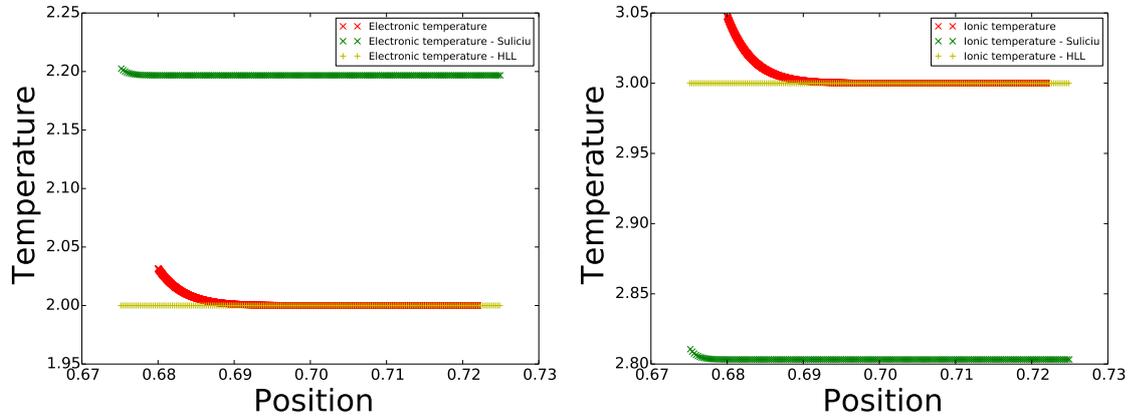


FIGURE 2.19 – Des relations de saut différentes au travers des chocs en températures électroniques et ioniques pour un tube à choc avec un ratio de masse de 1000 et 100000 points de discrétisation spatiale, 40 vitesses discrètes et une longueur de domaine de 8

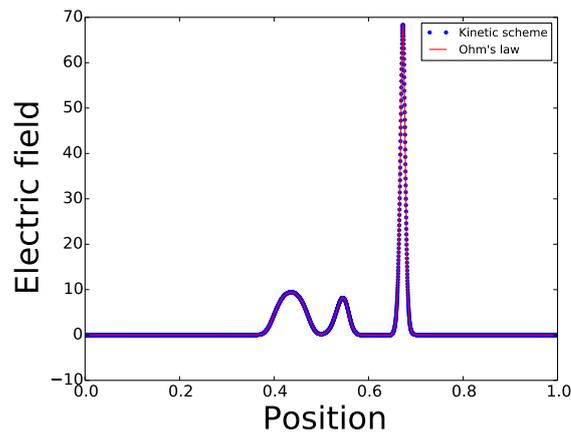


FIGURE 2.20 – Champ électrique obtenu par le schéma cinétique et par la loi d'Ohm pour le cas du tube de Sod à températures différentes avec un rapport de masse réaliste

Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

3.1	Introduction	90
3.2	Modèles cinétiques sous-jacents pour un système d'Euler non-conservatif	91
3.2.1	Le système d'Euler bi-température 2D	91
3.2.2	Modèles cinétiques sous-jacents de type BGK pour le système d'Euler conservatif	92
3.2.3	Modèles BGK pour le système d'Euler bi-température	95
3.3	Schémas numériques cinétiques d'ordre 1	99
3.3.1	Le cas conservatif	99
3.3.2	Un schéma numérique entropique pour le système d'Euler bi-température	101
3.4	Extension au second ordre	107
3.4.1	L'ordre 2 en dimension 1	107
3.4.2	Le cas bi-dimensionnel	110
3.5	Résultats numériques	112
3.5.1	Cas test du tube de Sod	113
3.5.2	Cas test du tube de Sod incliné	116
3.5.3	Problème de Riemann à quatre interfaces	117
3.5.4	Cas test de l'implosion	118
3.6	Conclusion	123

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, on a proposé une approche cinétique pour la résolution des équations d'Euler bi-température mono-dimensionnelle. Dans ce contexte, le système cinétique sous-jacent est composé d'une équation de Vlasov-BGK pour chaque espèce, et des équations de Maxwell. Les vitesses cinétiques peuvent prendre toutes les valeurs de \mathbb{R} , ce qui est un modèle issu de la physique statistique. Cependant, d'autres formalismes existent pour la construction d'un système cinétique sous-jacent. Dans ce chapitre, on s'intéresse donc à la résolution du système d'Euler bi-température en dimension 2, par l'emploi d'un système cinétique sous-jacent de type BGK discret. Ce formalisme a tout d'abord été développé pour les lois de conservation dans [88], [7], [8] et [19]. Puis, il a été généralisé au cas non-conservatif d'Euler bi-température dans [9], en dimension 1 d'espace. Ce formalisme permet la construction d'un modèle sous-jacent à vitesses discrètes (en nombre fini), pour lequel il est possible d'exhiber des entropies compatibles avec l'entropie macroscopique d'Euler, ce qui donne un sens à l'admissibilité des solutions faibles. En effet, dans le contexte des systèmes hyperboliques non-conservatifs, la question de la définition des solutions faibles admissibles n'est pas totalement comprise. Ce problème a été traité dans plusieurs articles, notamment dans les travaux de P. LeFloch ([76],[77],[78]), ceux de Dal Maso et co-auteurs ([41]), ceux de Chalons et co-auteurs ([13]), et, plus anciennement, ceux de Volpert ([102]). Pour la question du traitement numérique de tels systèmes, on référera notamment aux travaux de C. Chalons, C. Berthon et F. Coquel ([37], [12], [31], [30]).

Une fois le modèle cinétique sous-jacent à vitesses discrètes construit, on peut se servir de celui-ci pour l'analyse numérique du système d'Euler bi-température. Les équations cinétiques sont constituées d'un terme de transport (linéaire) et d'un terme de relaxation (de type BGK). Ainsi, on peut traiter ces équations à l'aide d'une méthode de projection-transport : on commence par projeter la solution sur la fonction d'équilibre cinétique (c'est-à-dire la fonction vers laquelle le terme de relaxation fait tendre la solution), puis on traite séparément le terme de transport par un schéma *upwind*. On démontre une propriété de dissipation d'entropie discrète de ce schéma, puis on présente une procédure de passage à l'ordre 2.

Le chapitre s'organise de la façon suivante : dans la section 3.2, on présente le modèle d'Euler bi-température en dimension 2, ainsi que deux modèles cinétiques sous-jacents, dont l'un est le modèle à vitesses discrètes qui nous intéresse pour le traitement numérique. Dans la section 3.3, on présente le schéma numérique construit à partir du système cinétique sous-jacent à vitesses discrètes, à l'ordre 1. Dans la section suivante 3.4, on adapte la méthode à l'ordre 2. Enfin, dans la section 3.5, on applique notre méthode à quelques cas de validation variés afin d'étudier son comportement.

3.2 Modèles cinétiques sous-jacents pour un système d'Euler non-conservatif

3.2.1 Le système d'Euler bi-température 2D

Le système d'Euler bi-température en 2D d'espace s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + (p^e + p^i)\mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^e + p^e)) - u \cdot \nabla (c^i p^e - c^e p^i) = \nu^{ei}(T^i - T^e), \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^i + p^i)) + u \cdot \nabla (c^i p^e - c^e p^i) = -\nu^{ei}(T^i - T^e). \end{cases} \quad (3.1)$$

Les notations employées dans ce chapitre sont très similaires aux notations du Chapitre 2, mais nous les rappelons ici pour des raisons de clarté. On emploie les superscripts e pour les quantités électroniques et i et les quantités ioniques. La densité totale $\rho = \rho^e + \rho^i$ s'écrit comme la somme des densités partielles, qui vérifient :

$$\rho^e = \rho c^e = m^e n^e, \quad \rho^i = \rho c^i = m^i n^i,$$

où $c^e = \frac{Z m^e}{Z m^e + m^i}$ et $c^i = \frac{m^i}{Z m^e + m^i}$ sont des constantes qui désignent les fractions massiques, et m^e et m^i sont les masses particulières électroniques et ioniques. En raison de ces relations entre les différentes densités, le modèle ne nécessite qu'une seule équation de conservation de la masse, choisie ici pour la densité totale.

Les vitesses électroniques et ioniques $u^e, u^i \in \mathbb{R}^2$ sont supposées à l'équilibre thermodynamique dans le modèle. Ainsi $u^e = u^i = u$, où $u = (u_1, u_2)$ désigne la vitesse de mélange. \otimes désigne le produit tensoriel de \mathbb{R}^2 , \mathbf{I} désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la divergence est prise selon les lignes.

Les énergies électroniques et ioniques \mathcal{E}^e et \mathcal{E}^i , définies par :

$$\mathcal{E}^\alpha = n^\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha |u|^2, \quad \alpha = e, i,$$

décrivent dans ce modèle deux dynamiques différentes. L'énergie de l'espèce α s'écrit comme la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \rho^\alpha |u|^2$ et de l'énergie interne $n^\alpha \varepsilon^\alpha$. Deux dynamiques différentes impliquent ici deux lois d'état différentes reliant la pression partielle à la température partielle correspondante :

$$p^\alpha = (\gamma^\alpha - 1) n^\alpha \varepsilon^\alpha = n^\alpha k_B T^\alpha, \quad \alpha = e, i.$$

En annexe B, on donne des détails sur la structure de ce système hyperbolique. On se contente ici d'énoncer les propriétés relatives aux valeurs propres et la nature des champs. Le système (3.1) est hyperbolique, diagonalisable, et ses valeurs propres sont, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^2$, $|\omega| = 1$:

$$\lambda_1 = u \cdot \omega - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u \cdot \omega, \quad \lambda_5 = u \cdot \omega + a$$

où

$$a = \sqrt{\sum_{\alpha=e,i} \frac{\gamma^\alpha p^\alpha}{\rho}}$$

est la vitesse du son. Les champs 1 et 5 sont vraiment non-linéaires, tandis que les champs 2, 3 et 4 sont linéairement dégénérés.

Pour définir les solutions admissibles, on commence par définir une entropie dissipative pour (3.1). En notant $U^\alpha = (\rho^\alpha, \rho^\alpha u, \mathcal{E}^\alpha)$, on pose

$$\eta^\alpha(U^\alpha) = -\frac{\rho^\alpha}{m^\alpha(\gamma^\alpha - 1)} \left[\ln \left(\frac{(\gamma^\alpha - 1)n^\alpha \varepsilon^\alpha}{(\rho^\alpha)^{\gamma^\alpha}} \right) + C \right], \quad (3.2)$$

l'entropie d'Euler de chaque espèce $\alpha = e, \alpha = i$, pour $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \mathcal{E}^e, \mathcal{E}^i)$, et on pose

$$\eta(\mathcal{U}) = \eta^e(U^e) + \eta^i(U^i), \quad Q(\mathcal{U}) = (Q_1(\mathcal{U}), Q_2(\mathcal{U})) = (u_1 \eta(\mathcal{U}), u_2 \eta(\mathcal{U})), \quad (3.3)$$

où η désigne l'entropie totale [100] et Q le flux d'entropie correspondant. Si \mathcal{U} est une solution régulière de (3.1), alors le couple (η, Q) vérifie l'équation suivante :

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \operatorname{div} Q(\mathcal{U}) = -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2.$$

Dans le cas des systèmes non-conservatifs, les solutions faibles admissibles sont définies à l'aide d'une approche cinétique. Ainsi, une solution faible est dite admissible si elle peut être obtenue comme limite d'une solution admissible d'un système cinétique sous-jacent (c'est-à-dire comme limite d'une solution dissipative pour l'entropie cinétique). Dans la section suivante, on s'intéresse à la définition et à la construction de ces modèles sous-jacents.

3.2.2 Modèles cinétiques sous-jacents de type BGK pour le système d'Euler conservatif

Dans cette section, on commence par introduire les modèles BGK pour les équations d'Euler mono-température, c'est-à-dire dans le cas conservatif. Ces modèles seront ensuite utilisés pour la construction d'un système sous-jacent pour Euler bi-température. Soit Ω un sous-ensemble convexe de solutions admissibles : en notant $U = (\rho, \rho u, \mathcal{E})$, $U(t, x) \in \Omega$ pour tout (t, x) , le système d'Euler s'écrit comme un système de lois de conservations :

$$\partial_t U + \operatorname{div} F(U) = 0, \quad (3.4)$$

où

$$F_1(U) = (\rho u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, u_1(\mathcal{E} + p)), \quad F_2(U) = (\rho u_2, \rho u_1 u_2, \rho u_2^2 + p, u_2(\mathcal{E} + p)).$$

On cherche à construire un système sous-jacent possédant des entropies compatibles avec les entropies macroscopiques. Pour cela, on suit le cadre proposé par F. Bouchut

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

dans [19], on définit un espace mesuré $(X, d\xi)$, une fonction $a(\xi) = (v_1(\xi), v_2(\xi))$ définie sur X et à valeurs dans \mathbb{R}^2 , une fonction Maxwellienne $M : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}^K$, et un opérateur de prise de moments $P : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^4)$ tels que, pour tout $U \in \Omega$, on a les conditions de compatibilité suivantes :

$$\int_X P(\xi)(M(U, \xi))d\xi = U, \quad \int_X P(\xi)(v_d(\xi)M(U, \xi))d\xi = F_d(U), \quad d = 1, 2. \quad (3.5)$$

Soit maintenant $f^\varepsilon(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^K$ une solution du système suivant :

$$\partial_t f^\varepsilon + a(\xi) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(M(U(f^\varepsilon), \xi) - f^\varepsilon), \quad U(f^\varepsilon)(t, x) = \int_X P(\xi)(f^\varepsilon(t, x, \xi))d\xi. \quad (3.6)$$

Formellement, si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon = f$, alors $f(t, x, \xi) = M(U(f)(t, x), \xi)$ et $U(f)$ est une solution de (3.4). Dans [19], des conditions pour l'existence d'entropies microscopiques compatibles avec toutes les entropies de la limite macroscopique sont données. On énoncera ces conditions dans le cas du système cinétique à vitesses discrètes construit pour Euler bi-température à la section suivante.

Pour le cas conservatif, nous donnons d'abord deux exemples typiques de systèmes sous-jacents. Le premier est fondé sur la physique sous-jacente aux équations d'Euler, issu de la physique cinétique des gaz [73]. Le second est un modèle à vitesses discrètes issu des travaux d'Aregba-Driollet et Natalini [7] et [8].

Exemple 1 : un modèle BGK mono-espèce pour un gaz polyatomique avec une variable d'énergie interne continue

Dans cet exemple, on a :

$$X = \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[, \quad \xi = (v, I), \quad d\xi = I^\alpha dv, \quad a(\xi) = (v_1, v_2)$$

avec $\alpha = \alpha(\gamma)$, et l'opérateur de prise de moments est défini par

$$P(\xi)(f) = (m, mv_1, mv_2, \frac{I^2 + m|v|^2}{2})f,$$

et $M(v, I) \in \mathbb{R}$ est la Maxwellienne qui, dans le cas polyatomique, s'écrit

$$M(v, I) = \frac{n}{2\pi k_B \frac{T}{m}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2k_B \frac{T}{m}} - \frac{I^\alpha}{\frac{k_B T}{m}}\right),$$

où I désigne l'énergie interne des molécules et m est la masse moléculaire. Comme $f^\varepsilon(t, x, v, I) \in \mathbb{R}$, il s'agit d'un modèle de rang $K = 1$ (voir [4], [28]). Ce modèle est compatible avec l'entropie physique d'Euler, et il s'agit de la version polyatomique mono-espèce bi-dimensionnelle du modèle cinétique sous-jacent étudié dans le chapitre 2. Ce type de système cinétique permet de développer des schémas dits de type Boltzmann pour les lois de conservation ([90],[91],[38]).

Exemple 2 : un modèle BGK à vitesses discrètes

Dans ce deuxième exemple, on considère un modèle à vitesses discrètes de rang maximal, où $X = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la mesure de dénombrement et $K = 4$. On a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$, $M(U, l) = M_l(U) \in \mathbb{R}^4$ pour $l \in X$. Dans ce cas, les conditions de compatibilité (3.5) s'écrivent :

$$\forall U \in \Omega, \quad \sum_{l=1}^4 P_l M_l(U) = U, \quad \sum_{l=1}^4 v_{d,l} P_l M_l(U) = F_d(U), \quad d = 1, 2,$$

avec $P_l \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, pour tout $l \in X$. Soient $\lambda_1^+, \lambda_1^-, \lambda_2^+, \lambda_2^- \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1^+ > \lambda_1^-$, $\lambda_2^+ > \lambda_2^-$. On pose $P_l = \text{Id}$ et on définit ensuite les vitesses discrètes :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^- \\ 0 \\ \lambda_1^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2^- \\ 0 \\ \lambda_2^+ \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

et les Maxwelliennes :

$$M(U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} \left(\frac{\lambda_1^+}{2} U - F_1(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} \left(\frac{\lambda_2^+}{2} U - F_2(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} \left(\frac{-\lambda_1^-}{2} U + F_1(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} \left(\frac{-\lambda_2^-}{2} U + F_2(U) \right) \end{pmatrix}$$

(voir [8]). On peut alors réécrire l'équation (3.6) de la façon suivante :

$$\partial_t f_l + v_{1,l} \partial_{x_1} f_l + v_{2,l} \partial_{x_2} f_l = \frac{1}{\varepsilon} (M_l(U) - f_l), \quad U = \sum_{l=1}^4 f_l, \quad 1 \leq l \leq 4, \quad (3.8)$$

avec $f_l \in \mathbb{R}^4$. Dans la section suivante, on emploiera ce type de système à vitesses discrètes pour le développement d'une méthode numérique pour Euler bi-température. Pour assurer la dissipation de l'entropie d'Euler par le système cinétique, l'existence d'entropies microscopiques compatibles est assurée par des conditions sous-caractéristiques introduites dans [19] qui s'écrivent :

$$\sigma(F'_d(U)) \subset \left] \frac{\lambda_d^-}{2}, \frac{\lambda_d^+}{2} \right[, \quad d = 1, 2.$$

Cette condition traduit le fait que les ondes du système de relaxation (3.8) doivent être plus rapides que les ondes du système de départ (3.4).

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

3.2.3 Modèles BGK pour le système d'Euler bi-température

Construction du modèle

On considère un modèle BGK pour le système d'Euler mono-température (3.4), avec $\gamma = \gamma^e = \gamma^i$. On reprend les notations de la section précédente et on choisit

$$X^e = X^i = X, \quad a^e(\xi) = a^i(\xi) = a(\xi), \quad P^e(\xi) = P^i(\xi) = P(\xi).$$

Pour approcher les produits non-conservatifs, on introduit un terme de force lié au champ électrique $E(t, x) \in \mathbb{R}^2$, et on définit un opérateur linéaire $\mathcal{N}(E)$ à valeurs dans \mathbb{R}^K , de sorte à avoir :

$$\int_X P(\xi) (\mathcal{N}(E) M^\alpha(U^\alpha, \xi)) d^\alpha \xi = -(0, E_1 \rho^\alpha, E_2 \rho^\alpha, \rho^\alpha E \cdot u^\alpha). \quad (3.9)$$

On obtient alors une équation de la forme :

$$\partial_t f^{\alpha, \varepsilon} + a(\xi) \cdot \nabla_x f^{\alpha, \varepsilon} + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} \mathcal{N}(E) f^{\alpha, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M^\alpha - f^{\alpha, \varepsilon}).$$

Dans le cas de l'exemple 1, on obtient un terme de force électrostatique analogue à celui de l'équation de Vlasov :

$$\mathcal{N}(E) f(\cdot, \cdot, v, I) = E \cdot \nabla_v f(\cdot, \cdot, v, I).$$

Dans le cas de l'exemple 2, pour $\xi \in \{1, 2, 3, 4\}$, $f(\xi) \in \mathbb{R}^4$, on choisit :

$$\mathcal{N}(E) f(\xi) = - \begin{pmatrix} 0 \\ (f(\xi))_1 E_1 \\ (f(\xi))_1 E_2 \\ (f(\xi))_2 E_1 + (f(\xi))_3 E_2 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire cet opérateur pour chaque vitesse discrète, $1 \leq l \leq 4$:

$$N(E) f_l = - \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 (f_l)_1 \\ E_2 (f_l)_1 \\ E_1 (f_l)_2 + E_2 (f_l)_3 \end{pmatrix}.$$

On ajoute également aux équations pour $f^{e, \varepsilon}$ et $f^{i, \varepsilon}$ un terme source $B^{\alpha\beta}$ modélisant les interactions entre les ions et les électrons, puis on couple celles-ci aux équations pour le champ électrique E :

$$\begin{cases} \partial_t f^{e, \varepsilon} + a(\xi) \cdot \nabla_x f^{e, \varepsilon} + \frac{q^e}{m^e} \mathcal{N}(E^\varepsilon) f^{e, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M^e - f^{e, \varepsilon}) + B^{ei}(f^{e, \varepsilon}, f^{i, \varepsilon}), \\ \partial_t f^{i, \varepsilon} + a(\xi) \cdot \nabla_x f^{i, \varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} \mathcal{N}(E^\varepsilon) f^{i, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M^i - f^{i, \varepsilon}) + B^{ie}(f^{e, \varepsilon}, f^{i, \varepsilon}), \\ \partial_t E^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q^e}{m^e} \rho^{e, \varepsilon} u^{e, \varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} \rho^{i, \varepsilon} u^{i, \varepsilon} \right), \\ \operatorname{div} E^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q^e}{m^e} \rho^{e, \varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} \rho^{i, \varepsilon} \right). \end{cases} \quad (3.10)$$

Le terme source $B^{\alpha\beta}$ est tel que, si $\varepsilon \rightarrow 0$, alors

$$\int_X P(\xi) B^{\alpha\beta} d\xi \rightarrow (0, 0, 0, \nu^{\alpha\beta}(T^\beta - T^\alpha)). \quad (3.11)$$

Lorsque ε tend vers 0, si une limite existe, on a alors, formellement :

$$u^e = u^i = u, \quad \frac{q^e}{m^e} \rho^e + \frac{q^i}{m^i} \rho^i = 0, \quad f^\alpha = M^\alpha(U^\alpha), \quad \alpha = e, i.$$

Par conséquent, la quasineutralité est atteinte : $\rho^e = \rho c^e$ et $\rho^i = \rho c^i$ et c^e, c^i sont des constantes. En appliquant l'opérateur de moments à ces équations, il vient, pour $\alpha = e, i$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\alpha + \operatorname{div}(\rho^\alpha u) = 0, & (3.12a) \\ \partial_t(\rho^\alpha u_1) + \partial_{x_1}(\rho^\alpha u_1^2 + p^\alpha) + \partial_{x_2}(\rho^\alpha u_1 u_2) - q^\alpha E_1 \rho^\alpha = 0, & (3.12b) \\ \partial_t(\rho^\alpha u_2) + \partial_{x_1}(\rho^\alpha u_1 u_2) + \partial_{x_2}(\rho^\alpha u_2^2 + p^\alpha) - q^\alpha E_2 \rho^\alpha = 0, & (3.12c) \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \partial_x(u(\mathcal{E}^e + p^e)) - q^e E \rho^e u = \nu^{ei}(T^i - T^e), & (3.12d) \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \partial_x(u(\mathcal{E}^i + p^i)) - q^i E \rho^i u = -\nu^{ei}(T^i - T^e). & (3.12e) \end{cases}$$

En divisant l'équation (3.12b) pour $\alpha = e$ et $\alpha = i$ par m^e et m^i respectivement, puis en soustrayant l'une à l'autre, on obtient, à l'aide des relations de quasi-neutralité, la loi d'Ohm généralisée pour E_1 . En faisant la même chose pour l'équation (3.12c), on obtient au total :

$$\frac{\rho^e q^e}{m^e} E = -\frac{\rho^i q^i}{m^i} E = c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i,$$

et, en sommant les équations (3.12b) et (3.12c) sur α , on a

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u_1) + \partial_{x_1}(\rho u_1^2 + p^e + p^i) + \partial_{x_2}(\rho u_1 u_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u_2) + \partial_{x_1}(\rho u_1 u_2) + \partial_{x_2}(\rho u_2^2 + p^e + p^i) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, formellement, $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \mathcal{E}^e, \mathcal{E}^i)$, obtenue comme combinaison de moments de f^e et f^i , est solution du système d'Euler bi-température (3.1).

Admissibilité des solutions

Intéressons-nous maintenant à l'admissibilité des solutions à partir du système sous-jacent à vitesses discrètes issu de l'exemple 2. Dans ce cas, le système sous-jacent (3.10) se réécrit, pour $\alpha = e, i, \beta \neq \alpha$ et $1 \leq l \leq 4$:

$$\begin{cases} \partial_t f_l^\alpha + a_l \cdot \nabla_x f_l^\alpha + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} N(E) f_l^\alpha = \frac{1}{\varepsilon} (M_l^\alpha(U^\alpha) - f_l^\alpha) + B^{\alpha\beta}(f_l^\alpha, f_l^\beta), \\ \partial_t E = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q^e}{m^e} \rho^e u^e + \frac{q^i}{m^i} \rho^i u^i \right), \\ \operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{q^e}{m^e} \rho^e + \frac{q^i}{m^i} \rho^i \right), \end{cases} \quad (3.13)$$

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

où pour chaque l , $f_l \in \mathbb{R}^4$ et $a_l = (v_{1,l}, v_{2,l}) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que les fonctions Maxwelliennes $M_l^\alpha(U)$ s'écrivent comme des combinaisons linéaires de U^α et $F^\alpha(U^\alpha)$:

$$M_l^\alpha(U^\alpha) = \theta_l^\alpha U^\alpha + \zeta_l^\alpha F_1^\alpha(U^\alpha) + \chi_l^\alpha F_2^\alpha(U^\alpha), \quad 1 \leq l \leq 4, \quad \alpha = e, i, \quad (3.14)$$

où θ_l^α , ζ_l^α et χ_l^α sont des constantes réelles. On suppose également que ces fonctions sont bijectives et pour toute solution U^α , on a la condition sous-caractéristique suivante [83] :

$$\sigma((M_l^\alpha)'(U^\alpha)) \subset]0, +\infty[. \quad (3.15)$$

A l'aide de l'entropie d'Euler (3.2) et (3.3), on définit les entropies cinétiques, pour $1 \leq l \leq 4$ et $\alpha = e, i$, :

$$G_l^\alpha(U^\alpha) = \theta_l^\alpha \eta^\alpha(U^\alpha) + \zeta_l^\alpha Q_1^\alpha(U^\alpha) + \chi_l^\alpha Q_2^\alpha(U^\alpha), \quad H_l^\alpha(f_l^\alpha) = G_l^\alpha((M_l^\alpha)^{-1}(f_l^\alpha)). \quad (3.16)$$

Les entropies cinétiques ainsi définies jouissent de quelques propriétés remarquables, démontrées dans [19] :

Proposition 3.1. *Les entropies cinétiques H_l^α définies par (3.14) et (3.16) vérifient :*

— pour $l = 1, \dots, 4$, la fonction H_l^α est convexe. (E0)

$$— \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = \eta^\alpha(U^\alpha). \quad (E1)$$

$$— \sum_{l=1}^4 a_l H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = Q^\alpha(U^\alpha). \quad (E2)$$

— pour tout f , en notant $U_f = \int_X P(f)$, on a $\sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(M_l^\alpha(U_f)) \leq \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(f_l)$. (E3)

Des telles entropies cinétiques seront appelées entropies compatibles avec l'entropie macroscopique η^α .

On peut alors énoncer le théorème suivant, permettant de définir la notion de solutions admissibles pour le système d'Euler bi-température :

Theorème 3.2.1. Supposons qu'il existe des entropies pour le modèle cinétique (3.13) compatibles (au sens de la proposition 3.1) avec l'entropie macroscopique η . Soit \mathcal{U} une solution du système d'Euler bi-température (3.1) obtenue en passant à la limite dans (3.13). La solution \mathcal{U} vérifie alors l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \operatorname{div} Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^i T^e} (T^i - T^e)^2.$$

On définit une telle solution \mathcal{U} comme solution admissible.

Démonstration. On prend le produit scalaire de l'équation sur f_l^α par le gradient $(H_l^\alpha)'(f_l^\alpha)$, et on somme sur l . On obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(f_l^\alpha) + \operatorname{div} \sum_{l=1}^4 a_l H_l^\alpha(f_l^\alpha) + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) N(E) f_l^\alpha \\ = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) (M_l^\alpha(U^\alpha) - f_l^\alpha) + \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) B_l^{\alpha\beta}(f_l^\alpha, f_l^\beta). \end{aligned}$$

Par convexité de H_l^α (propriété (E0)), le premier terme du membre de droite vérifie la première inégalité suivante :

$$\sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) (M_l^\alpha(U^\alpha) - f_l^\alpha) \leq \sum_{l=1}^4 ((H_l^\alpha)(M_l^\alpha(U^\alpha)) - (H_l^\alpha)(f_l^\alpha)) \leq 0$$

et la deuxième inégalité découle de (E3). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(f_l^\alpha) + \operatorname{div} \sum_{l=1}^4 a_l H_l^\alpha(f_l^\alpha) + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) N(E) f_l^\alpha \\ \leq \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) B_l^{\alpha\beta}(f_l^\alpha, f_l^\beta). \end{aligned} \tag{3.17}$$

En passant formellement à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $f_l^\alpha = M_l^\alpha(U^\alpha)$ et à la faveur de (E1) et (E2), l'inégalité (3.17) devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta^\alpha(U^\alpha) + \operatorname{div} Q^\alpha(U^\alpha) + \frac{q^\alpha}{m^\alpha} \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(M_l^\alpha(U^\alpha)) N(E) M_l^\alpha(U^\alpha) \\ \leq \sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(M_l^\alpha(U^\alpha)) B_l^{\alpha\beta}(M_l^\alpha(U^\alpha), M_l^\beta(U^\beta)). \end{aligned} \tag{3.18}$$

D'abord, on remarque que l'on a, pour tout $l \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$(H_l^\alpha)'(M_l^\alpha(U^\alpha)) = (\eta^\alpha)'(U^\alpha). \tag{3.19}$$

En effet, on a, selon (3.16), l'égalité suivante :

$$(H_l^\alpha)'(f_l^\alpha) = (G_l^\alpha)'((M_l^\alpha)^{-1}(f_l^\alpha)) ((M_l^\alpha)'((M_l^\alpha)^{-1}(f_l^\alpha)))^{-1}.$$

Puis, comme $f_l^\alpha = M_l^\alpha(U^\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned} (H_l^\alpha)'(M_l^\alpha(U^\alpha)) &= (G_l^\alpha)'(U^\alpha) ((M_l^\alpha)'(U^\alpha))^{-1} \\ &= [\theta_l^\alpha (\eta^\alpha)'(U^\alpha) + \zeta_l^\alpha (Q_1^\alpha)'(U^\alpha) + \chi_l^\alpha (Q_2^\alpha)'(U^\alpha)] ((M_l^\alpha)'(U^\alpha))^{-1} \\ &= (\eta^\alpha)'(U^\alpha) [\theta_l^\alpha \mathbf{I} + \zeta_l^\alpha (F_1^\alpha)'(U^\alpha) + \chi_l^\alpha (F_2^\alpha)'(U^\alpha)] ((M_l^\alpha)'(U^\alpha))^{-1} \\ &= (\eta^\alpha)'(U^\alpha) (M_l^\alpha)'(U^\alpha) ((M_l^\alpha)'(U^\alpha))^{-1} \\ &= (\eta^\alpha)'(U^\alpha). \end{aligned}$$

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Enfin, par un calcul direct, on obtient :

$$(\eta^\alpha)'(U^\alpha)N(E)U^\alpha = 0. \quad (3.20)$$

Ainsi, il vient que le troisième terme du membre de gauche de l'équation (3.18) est nul. Par ailleurs, en utilisant à nouveau (3.19) et (3.11), on trouve :

$$\sum_{l=1}^4 (H_l^\alpha)'(M_l^\alpha(U^\alpha))B_l^{\alpha\beta}(M_l^\alpha(U^\alpha), M_l^\beta(U^\beta)) = -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^\alpha}(T^\beta - T^\alpha). \quad (3.21)$$

En sommant sur α l'inégalité obtenue, on obtient, au final :

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \operatorname{div} Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu^{ei}}{k_B T^e T^i} (T^e - T^i)^2.$$

□

Remarque 3.2. *Le modèle (3.13) est compatible au sens de la proposition 3.1 et vérifie donc l'inégalité du théorème 3.2.1.*

3.3 Schémas numériques cinétiques d'ordre 1

Dans cette section, on propose un schéma aux volumes finis pour un maillage cartésien pour les systèmes sous-jacents présentés dans la section précédente. On note Δx_1 et Δx_2 les pas d'espace, Δt le pas de temps, et $j = (j_1, j_2) \in \{1, \dots, N_1\} \times \{1, \dots, N_2\} \subset \mathbb{Z}^2$.

En notant $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, et pour toute inconnue $v(t, x_1, x_2)$, v_j^n désigne sa valeur approchée au temps t^n dans la cellule $C_j =]x_{1,j-\frac{e_1}{2}}, x_{1,j+\frac{e_1}{2}}[\times]x_{2,j-\frac{e_2}{2}}, x_{2,j+\frac{e_2}{2}}[$.

On commence par présenter la méthode numérique dans le cas conservatif. Cette procédure permet de traiter les flux (conservatifs) de manière analogue dans le cas non-conservatif.

3.3.1 Le cas conservatif

Pour le système d'Euler mono-température, on cherche à traiter numériquement l'équation de transport sous-jacente suivante :

$$\partial_t f(\xi) + v_1(\xi) \partial_{x_1} f(\xi) + v_2(\xi) \partial_{x_2} f(\xi) = 0. \quad (3.22)$$

Pour cela, on choisit un flux numérique "cinétique" consistant de la forme suivante, pour tout $\xi \in X$:

$$h_{d,j+\frac{e_d}{2}}(\xi) = \bar{h}_d(f_j(\xi), f_{j+e_d}(\xi), \xi), \quad \bar{h}_d(f, f, \xi) = v_d(\xi) f, \quad d = 1, 2.$$

Si l'on suppose la solution au temps t^n , $(U_j^n)_{j \in \mathbb{Z}^2}$, connue, on peut appliquer la procédure de projection-transport suivante :

$$f_j^n(\xi) = M(U_j^n, \xi), \quad f_j^{n+1}(\xi) = f_j^n(\xi) - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(h_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n(\xi) - h_{d,j-\frac{e_d}{2}}^n(\xi) \right).$$

En appliquant l'opérateur de prise de moments P , puis en intégrant par rapport à ξ , on obtient l'équation suivante sur les quantités conservées :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2}}^n \right),$$

où le flux macroscopique est défini par :

$$F_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n = \int_X P(\xi) h_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n(\xi) d\xi = \mathcal{F}_d(U_j^n, U_{j+e_d}^n).$$

Par conséquent, on a l'écriture générale de la fonction de flux suivante :

$$\mathcal{F}_d(U, V) = \int_X P(\xi) h_d(M(U, \xi), M(V, \xi), \xi) d\xi,$$

qui est bien un flux numérique consistant avec $F_d(U)$, à la faveur des conditions de compatibilité (3.5). Détaillons maintenant les flux cinétiques que l'on a pour les deux exemples introduits plus haut.

Cas de l'exemple 1. On fixe les vitesses suivantes, choisies en accord avec la condition sous-caractéristique (3.15) :

$$\lambda_1^- \leq 0 \leq \lambda_1^+, \quad \lambda_2^- \leq 0 \leq \lambda_2^+, \quad \lambda_1^- \neq \lambda_1^+, \quad \lambda_2^- \neq \lambda_2^+, \quad (3.23)$$

et on obtient les flux cinétiques suivants :

$$\bar{h}_d(f, g, v, I) = v_d \left(\frac{\lambda_d^+}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} f - \frac{\lambda_d^-}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} g \right) + \frac{\lambda_d^- \lambda_d^+}{2(\lambda_d^+ - \lambda_d^-)} (g - f), \quad d = 1, 2.$$

et, par suite, les flux macroscopiques :

$$\mathcal{F}_d(U, V) = \frac{\lambda_d^+}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} F_d(U) - \frac{\lambda_d^-}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} F_d(V) + \frac{\lambda_d^- \lambda_d^+}{2(\lambda_d^+ - \lambda_d^-)} (U - V), \quad d = 1, 2, \quad (3.24)$$

ce qui correspond au schéma HLL classique pour les lois de conservation [101].

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Cas de l'exemple 2. Soient, comme précédemment, $\lambda_1^-, \lambda_1^+, \lambda_2^-, \lambda_2^+ \in \mathbb{R}$ tels que la condition sous-caractéristique soit respectée. On définit les vecteurs vitesses v_1 et v_2 selon (3.7). L'équation (3.22) se réécrit sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + \lambda_1^- \partial_{x_1} f_1 = 0, \\ \partial_t f_2 + \lambda_2^- \partial_{x_2} f_2 = 0, \\ \partial_t f_3 + \lambda_1^+ \partial_{x_1} f_3 = 0, \\ \partial_t f_4 + \lambda_2^+ \partial_{x_2} f_4 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire d'équations de transport à vitesse constante découplées. On applique donc le schéma *upwind* à chaque composante de ce système.

En notant $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ et $\lambda^- = \max(-\lambda, 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, pour $f, g \in (\mathbb{R}^4)^4$:

$$\bar{h}_1(f, g) = \begin{pmatrix} (\lambda_1^-)^+ f_1 - (\lambda_1^-)^- g_1 \\ 0 \\ (\lambda_1^+)^+ f_3 - (\lambda_1^+)^- g_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2(f, g) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_2^-)^+ f_2 - (\lambda_2^-)^- g_2 \\ 0 \\ (\lambda_2^+)^+ f_4 - (\lambda_2^+)^- g_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le flux numérique macroscopique est donc

$$\mathcal{F}_d(U, V) = \sum_{l=1}^4 \bar{h}_{d,l}(M_l(U), M_l(V)), \quad d = 1, 2.$$

Pour λ_d^\pm tel que (3.23) soit vérifiée, on obtient à nouveau les flux donnés par (3.24). Si λ_d^- et λ_d^+ ont le même signe, alors $\mathcal{F}_d(U, V)$ correspond au flux *upwind* ([80]) :

$$\mathcal{F}_d(U, V) = F_d(U) \quad \text{si } \lambda_d^- > 0, \quad \mathcal{F}_d(U, V) = F_d(V) \quad \text{si } \lambda_d^+ < 0.$$

3.3.2 Un schéma numérique entropique pour le système d'Euler bi-température

On traite maintenant le cas non-conservatif. Pour une solution initiale du système d'Euler bi-température donnée $\mathcal{U}^0 = (\mathcal{U}_j^0)_{j \in \mathbb{Z}^2}$, on note

$$U_j^{\alpha,0} = (c^\alpha \rho_j, c^\alpha \rho_j u_j, \mathcal{E}_j^\alpha) = (\rho_j^\alpha, \rho_j^\alpha u_j, \mathcal{E}_j^\alpha), \quad j \in \mathbb{Z}^2, \quad \alpha = e, i,$$

les solutions des systèmes d'Euler pour les quantités électroniques et pour les quantités ioniques respectivement.

On traite ces équations discrètes par une approche analogue à celle de la section précédente, i.e. une méthode de type transport-projection, en séparant la partie hyperbolique de la partie relaxation, cette dernière étant supposée immédiate.

— **Etape 1 : Projection sur l'équilibre.** Pour $n \geq 0$ fixé, on a \mathcal{U}_j^n , $U_j^{e,n}$ et $U_j^{i,n}$ vérifiant les contraintes de quasi-neutralité. On définit

$$f_j^{\alpha,n} = M^\alpha(U_j^{\alpha,n}), \quad j \in \mathbb{Z}^2, \quad \alpha = e, i. \quad (3.25)$$

— **Etape 2 : Transport.** Pour tout $j \in \mathbb{Z}^2$, $\xi \in X$, $\alpha \in \{e, i\}$ et $\beta \neq \alpha$, on a la formule de mise à jour suivante :

$$\begin{aligned} f_j^{\alpha,n+\frac{1}{2}}(\xi) &= f_j^{\alpha,n}(\xi) - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(h_{d,j+\frac{e_d}{2}}^{\alpha,n}(\xi) - h_{d,j-\frac{e_d}{2}}^{\alpha,n}(\xi) \right) \\ &\quad - \Delta t \frac{q^\alpha}{m^\alpha} \mathcal{N}(E_j^{n+1}) f_j^{\alpha,n+1}(\xi) \\ &\quad + \Delta t B^{\alpha\beta}(f_j^{\alpha,n+1}(\xi), f_j^{\beta,n+1}(\xi)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

La solution macroscopique des équations d'Euler par espèces obtenue à l'issue de l'étape de transport est définie par

$$U_j^{\alpha,n+1} = \int_X P(\xi) (f_j^{\alpha,n+1}(\xi)) d\xi = (\rho_j^{\alpha,n+1}, \rho_j^{\alpha,n+1} u_j^{\alpha,n+1}, \mathcal{E}_j^{\alpha,n+1}).$$

Le flux numérique macroscopique par espèces est lui défini par

$$F_{d,j+\frac{e_d}{2}}^\alpha = \mathcal{F}_d^\alpha(U_j^\alpha, U_{j+e_d}^\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad d = 1, 2,$$

avec

$$\mathcal{F}_d^\alpha(U^\alpha, V^\alpha) = \int_X P(\xi) (h_d^\alpha(M^\alpha(U^\alpha, \xi), M^\alpha(V^\alpha, \xi), \xi)) d\xi, \quad d = 1, 2,$$

qui est un flux consistant avec (3.4). On notera que la deuxième composante de U^α (la quantité de mouvement) est ici un vecteur de \mathbb{R}^2 . A l'aide des ces définitions, en appliquant P et en intégrant sur X l'équation (3.26), et en prenant en compte les équations (3.9) et (3.11), on obtient les équations suivantes pour $\alpha, \beta \in \{e, i\}$ et $\alpha \neq \beta$:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_j^{\alpha,n+1} &= \rho_j^{\alpha,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},1}^{\alpha,n} - F_{d,j-\frac{e_d}{2},1}^{\alpha,n} \right), \end{aligned} \right. \quad (3.27a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_j^{\alpha,n+1} u_j^{\alpha,n+1} &= \rho_j^{\alpha,n} u_j^{\alpha,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},2}^{\alpha,n} - F_{d,j-\frac{e_d}{2},2}^{\alpha,n} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t q^\alpha}{m^\alpha} E_j^{n+1} \rho_j^{\alpha,n+1}, \end{aligned} \right. \quad (3.27b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_j^{\alpha,n+1} &= \mathcal{E}_j^{\alpha,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^{\alpha,n} - F_{d,j-\frac{e_d}{2},3}^{\alpha,n} \right) \\ &\quad + E_j^{n+1} \cdot u_j^{n+1} \frac{\Delta t q^\alpha}{m^\alpha} \rho_j^{\alpha,n+1} + \Delta t \nu^{ei} (T_j^{\beta,n+1} - T_j^{\alpha,n+1}). \end{aligned} \right. \quad (3.27c)$$

On peut remarquer que cette approximation des produits non-conservatifs est consistante :

$$\delta_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n = \delta(\mathcal{U}_{d,j}^n, \mathcal{U}_{d,j+1}^n), \quad \delta(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = -c^i p^e + c^e p^i.$$

Au final, le schéma numérique pour le système d'Euler bi-température total s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},1}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},1}^n \right), \\ \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} = \rho_j^n u_j^n - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},2}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},2}^n \right), \\ \mathcal{E}_j^{e,n+1} = \mathcal{E}_j^{e,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},3}^n \right) \\ \quad - u_j^{n+1} \cdot \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(\delta_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n - \delta_{d,j-\frac{e_d}{2}}^n \right) + \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1}), \\ \mathcal{E}_j^{i,n+1} = \mathcal{E}_j^{i,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},4}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},4}^n \right) \\ \quad + u_j^{n+1} \cdot \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(\delta_{d,j+\frac{e_d}{2}}^n - \delta_{d,j-\frac{e_d}{2}}^n \right) - \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1}), \end{array} \right.$$

avec

$$F_{d,j+\frac{e_d}{2},k}^n = \sum_{\alpha=e,i} F_{d,j+\frac{e_d}{2},k}^{\alpha,n}, \quad k = 1, 2,$$

et

$$F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^n = F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^{e,n}, \quad F_{d,j+\frac{e_d}{2},4}^n = F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^{i,n}$$

Avec les flux cinétiques numériques proposés en exemples, l'approximation des produits non-conservatifs prend la forme suivante :

$$\delta_{j+\frac{e_1}{2}}^n = \left(\begin{array}{c} \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} (-c^i p_j^{e,n} + c^e p_j^{i,n}) - \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} (-c^i p_{j+e_1}^{e,n} + c^e p_{j+e_1}^{i,n}) \\ 0 \end{array} \right),$$

et

$$\delta_{j+\frac{e_2}{2}}^n = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} (-c^i p_j^{e,n} + c^e p_j^{i,n}) - \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} (-c^i p_{j+e_2}^{e,n} + c^e p_{j+e_2}^{i,n}) \end{array} \right).$$

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Par conséquent, les équations sur les énergies partielles peuvent se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_j^{e,n+1} = \mathcal{E}_j^{e,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},3}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},3}^n \right) \\ \quad - \sum_{d=1}^2 u_{d,j}^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(\delta_{d,j+\frac{e_d}{2},d}^n - \delta_{d,j-\frac{e_d}{2},d}^n \right) + \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1}), \\ \mathcal{E}_j^{i,n+1} = \mathcal{E}_j^{i,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(F_{d,j+\frac{e_d}{2},4}^n - F_{d,j-\frac{e_d}{2},4}^n \right) \\ \quad + \sum_{d=1}^2 u_{d,j}^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x_d} \left(\delta_{d,j+\frac{e_d}{2},d}^n - \delta_{d,j-\frac{e_d}{2},d}^n \right) - \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1}). \end{array} \right.$$

En utilisant l'expression suivante de la température,

$$T^\alpha = \frac{1}{C_v^\alpha} \left(-\frac{1}{2} u^2 + \frac{\mathcal{E}^\alpha}{\rho^\alpha} \right), \quad C_v^\alpha = \frac{k_B}{m^\alpha (\gamma^\alpha - 1)}, \quad \alpha \in \{e, i\},$$

on remarque que les énergies électroniques et ioniques $\mathcal{E}_j^{e,n+1}$, $\mathcal{E}_j^{i,n+1}$ sont solutions d'un système linéaire 2×2 dont le déterminant vaut :

$$1 + \Delta t \nu^{ei} \left(\frac{1}{\rho_j^{e,n+1} C_v^e} + \frac{1}{\rho_j^{i,n+1} C_v^i} \right) \neq 0.$$

Concernant la dissipation d'entropie par le schéma développé dans cette section, on a le théorème suivant, dans le cas de l'exemple 2, où $X = \{1, 2, 3, 4\}$, muni de la mesure de dénombrement.

Theorème 3.3.1. Supposons que les fonctions Maxwelliennes sont de la forme (3.14) et que la condition sous-caractéristique (3.15) est vérifiée. Ainsi, il existe des entropies cinétiques compatibles avec l'entropie macroscopique. Supposons par ailleurs que pour $\alpha = e, i$ et pour $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe des flux d'entropie discrets $\mathcal{G}_{d,j+\frac{1}{2},l}^{\alpha,n} = \bar{\mathcal{G}}_{d,l}^\alpha(f_{j,l}^{\alpha,n}, f_{j+1,l}^{\alpha,n})$ pour $d = 1, 2$ tels que l'entropie cinétique soit dissipée par la partie conservative de l'équation :

$$\frac{H_l^\alpha(f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}) - H_l^\alpha(f_{j,l}^{\alpha,n})}{\Delta t} + \sum_{d=1}^2 \frac{\mathcal{G}_{d,j+\frac{1}{2},l}^{\alpha,n} - \mathcal{G}_{d,j-\frac{1}{2},l}^{\alpha,n}}{\Delta x_d} \leq 0, \quad (3.30)$$

où

$$f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}} = f_{j,l}^{\alpha,n} - \sum_{d=1}^2 \frac{\Delta t}{\Delta x_d} (h_l^\alpha(f_{j,l}^{\alpha,n}, f_{j+1,l}^{\alpha,n}) - h_l^\alpha(f_{j-1,l}^{\alpha,n}, f_{j,l}^{\alpha,n})).$$

Alors, pour le schéma décrit dans cette section appliqué au choix de vitesses de l'exemple 2, on a l'inégalité d'entropie discrète suivante :

$$\frac{\eta(\mathcal{U}_j^{n+1}) - \eta(\mathcal{U}_j^n)}{\Delta t} + \sum_{d=1}^2 \frac{Q_{d,j+\frac{1}{2}}^n - Q_{d,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_d} \leq -\frac{\nu^{ei}}{k_B T_j^{i,n+1} T_j^{e,n+1}} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1})^2, \quad (3.31)$$

où le flux d'entropie macroscopique numérique $\mathcal{Q}_{d,j+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{Q}_d(\mathcal{U}_j^n, \mathcal{U}_{j+1}^n)$ est défini, pour $d = 1, 2$ par :

$$\mathcal{Q}_d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sum_{\alpha=e,i} \sum_{l=1}^4 \bar{\mathcal{G}}_{d,l}^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha), M_l^\alpha(V^\alpha)).$$

Démonstration. On somme l'équation (3.30) sur l et sur α . A la faveur des propriétés (E3) et (E1), on a :

$$\sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}) \geq \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(M_l^\alpha(\sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}})) = \eta^\alpha(\sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}),$$

et selon (3.25), on a :

$$\sum_{\alpha} \frac{\eta^\alpha(\sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}) - \eta^\alpha(U_j^{\alpha,n})}{\Delta t} + \sum_{d=1}^2 \frac{\mathcal{Q}_{d,j+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Q}_{d,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_d} \leq 0. \quad (3.32)$$

Par ailleurs,

$$U_j^{\alpha,n+1} = \sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{q^\alpha}{m^\alpha} N(E_j^{n+1}) U_j^{\alpha,n+1} + \Delta t \nu^{\alpha\beta} (T_j^{\beta,n+1} - T_j^{\alpha,n+1}) e_4,$$

avec $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. On multiplie cette équation par $(\eta^\alpha)'(U_j^{\alpha,n+1})$. A la faveur de la convexité de $(\eta^\alpha)'$, on a :

$$\eta^\alpha(U_j^{\alpha,n+1}) - \eta^\alpha(\sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}) \leq (\eta^\alpha)'(U_j^{\alpha,n+1}) (U_j^{\alpha,n+1} - \sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}}). \quad (3.33)$$

De manière analogue au théorème 3.2.1, en utilisant les propriétés (3.20) et (3.21) et en sommant l'équation (3.33) sur α , on a :

$$\sum_{\alpha} (\eta^\alpha(U_j^{\alpha,n+1}) - \eta^\alpha(\sum_{l=1}^4 f_{j,l}^{\alpha,n+\frac{1}{2}})) \leq -\frac{\nu^{ei}}{k_B T_j^{i,n+1} T_j^{e,n+1}} (T_j^{i,n+1} - T_j^{e,n+1})^2. \quad (3.34)$$

Enfin, en combinant (3.32) et (3.34), on obtient l'inégalité d'entropie discrète (3.31). \square

En pratique, on traite les équations de transport sous-jacentes par un schéma *upwind*. En conséquence, les flux entropiques numériques \mathcal{G}_l^α existent sous condition CFL

$$\max_l \left(\left(\frac{|\lambda_1^\pm|}{\Delta x_1} + \frac{|\lambda_2^\pm|}{\Delta x_2} \right) \Delta t \right) \leq 1.$$

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Les flux s'écrivent alors, pour $d = 1, 2$:

$$\mathcal{G}_{d,l}^\alpha(f, g) = \lambda_d^+ H_l^\alpha(f) + \lambda_d^- H_l^\alpha(g).$$

Concernant la préservation des états admissibles, il est démontré dans [48] que le schéma HLLE (et a fortiori HLL, qui coïncide avec le schéma construit ici) préserve la positivité de la densité totale et de l'énergie totale, à l'ordre 1 et en dimension 1, pour le système d'Euler conservatif.

3.4 Extension au second ordre

Dans cette section, on étend la méthode présentée précédemment à l'ordre 2. On commence par rappeler la procédure en dimension 1, puis on propose une extension de cette méthode pour notre système en dimension 2.

3.4.1 L'ordre 2 en dimension 1

Soit un système hyperbolique en dimension 1 :

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x F(\mathcal{U}) = 0.$$

Supposons que l'on a choisi un schéma numérique d'ordre 1 :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

avec $F_{j+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(\mathcal{U}_j^n, \mathcal{U}_{j+1}^n)$, avec un pas d'espace Δx constant. Définissons une reconstruction affine par morceaux d'ordre 2 :

$$\forall x \in C_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[, \quad \mathcal{U}^n(x) = \mathcal{U}_j^n + \sigma_j^n (x - x_j), \quad (3.35)$$

où x_j est le centre de la cellule C_j . De nombreuses exemples existent dans la littérature à ce sujet, comme les reconstructions de type *minmod* ([75]) ou ENO ([96]). Une fois la reconstruction choisie, on peut calculer les valeurs aux interfaces suivantes :

$$\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ = (\mathcal{U}^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^+ = \mathcal{U}_{j+1}^n - \sigma_{j+1}^n \frac{\Delta x}{2}, \quad \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^- = (\mathcal{U}^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^- = \mathcal{U}_j^n + \sigma_j^n \frac{\Delta x}{2}, \quad (3.36)$$

puis, on modifie le schéma d'ordre 1 de la façon suivante :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+) \right). \quad (3.37)$$

La stabilité L^∞ (et la préservation de la positivité) est assurée sous une condition CFL pour le schéma d'ordre 1 divisée par 2. En effet, comme prouvé dans [92], ce schéma peut être interprété comme un schéma d'ordre 1 défini sur des demi-cellules. Le théorème suivant précise cette propriété :

Theorème 3.4.1. Supposons que le schéma d'ordre 1 est stable sous condition CFL suivante :

$$\lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C \text{ avec } C \in]0, 1], \quad (3.38)$$

si $\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+ \in \mathbb{R}^+$, et si on suppose que la reconstruction affine est conservative, i.e. :

$$\frac{1}{2} \left(\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^- + \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) = \mathcal{U}_j^n, \quad (3.39)$$

alors le schéma d'ordre 2 est stable L^∞ et

$$\mathcal{U}_j^{n+1} \in \mathbb{R}^+,$$

sous la condition CFL suivante :

$$\lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{C}{2}.$$

Démonstration. En suivant la procédure de reconstruction (3.36), on a, dans chaque cellule C_j , un état interpolé gauche $\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^-$ et un état interpolé droit $\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+$. L'idée consiste à diviser chaque cellule en deux cellules de tailles égales $C_j^- =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_j[$ et $C_j^+ =]x_j, x_{j+\frac{1}{2}}[$ et à prendre comme valeur dans ces nouvelles cellules les états gauches et droits reconstruits comme approximations constantes par morceaux, comme représenté sur la figure 3.1.

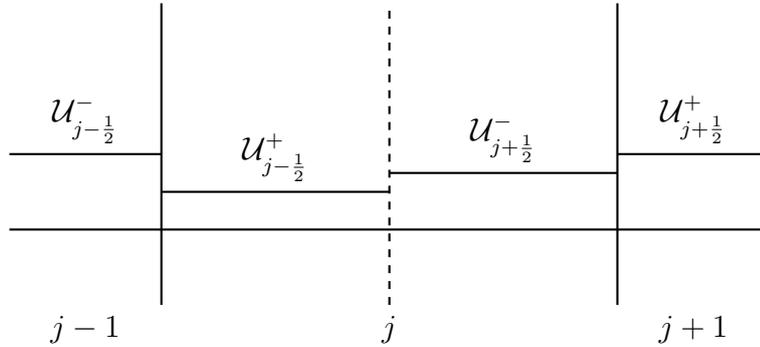


FIGURE 3.1 – Etats interpolés utilisés comme approximations constantes par morceaux

On applique alors le schéma d'ordre 1 sur chacune des nouvelles cellules, avec $\mathcal{U}_j^- = \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+$ dans C_j^- et $\mathcal{U}_j^+ = \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^-$ dans C_j^+ :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{n+1,-} &= \mathcal{U}_j^- - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_{j-1}^+, \mathcal{U}_j^-) \right) \\ &= \mathcal{U}_j^- - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^+) \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_j^{n+1,+} &= \mathcal{U}_j^+ - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(\mathcal{U}_j^+, \mathcal{U}_{j+1}^-) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+)) \\ &= \mathcal{U}_j^+ - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+)).\end{aligned}\tag{3.41}$$

En définissant la solution au temps suivant :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}_j^{n+1,-} + \mathcal{U}_j^{n+1,+}),$$

à la faveur de la propriété de conservation (3.39), on a, en sommant les équations (3.40) et (3.41) :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^-, \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^+)),$$

qui est exactement le schéma d'ordre 2 (3.37). Enfin, selon la condition (3.38), $\mathcal{U}_j^{n+1,-}$ et $\mathcal{U}_j^{n+1,+}$ sont positifs si Δt et Δx vérifient :

$$\lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{C}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{U}_j^{n+1} \in \mathbb{R}^+$. □

Pour traiter le cas non-conservatif, les mêmes idées peuvent être utilisées, comme présenté dans un contexte différent par Bouchut ([20]). Soit des données $(\mathcal{U}_j^n)_j$ au temps t^n , on définit une reconstruction d'ordre 2 (3.35). On définit, comme précédemment, les valeurs dans chaque demi-cellule \mathcal{U}_j^\pm , de sorte à ce que (3.39) soit vérifiée et on applique le schéma d'ordre 1. On obtient $(\mathcal{U}_j^{n+1,-})_j$, $(\mathcal{U}_j^{n+1,+})_j$ et on pose, pour tout j :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}_j^{n+1,-} + \mathcal{U}_j^{n+1,+}).$$

Contrairement au cas conservatif, où les quantités $\mathcal{F}(\mathcal{U}_j^-, \mathcal{U}_j^+)$ n'ont pas besoin d'être calculées, cet algorithme nécessite le calcul des flux au centre de chaque cellule. Il faut donc calculer les flux suivants pour tout j :

$$F_{j+\frac{1}{2}}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(U_j^{\alpha,+}, U_{j+1}^{\alpha,-}), \quad F_j^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(U_j^{\alpha,-}, U_j^{\alpha,+}).$$

Le schéma présenté ci-dessous a été proposé dans [9] en dimension 1 et à l'ordre 1. Ici, pour passer à l'ordre 2, on modifie le schéma en conséquence comme suit. On définit :

$$\begin{cases} F_{j,k} = \sum_{\alpha=e,i} F_{j,k}^\alpha, & (k = 1, 2), \\ F_{j,3} = F_{j,3}^e, \\ F_{j,4} = F_{j,3}^i, \\ \delta_j = -c^i F_{j,2}^e + c^e F_{j,2}^i \end{cases}$$

et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1,-} = \rho_j^- - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j,1} - F_{j-\frac{1}{2},1}), \\ \rho_j^{n+1,-} u_j^{n+1,-} = \rho_j^- u_j^- - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j,2} - F_{j-\frac{1}{2},2}), \\ \mathcal{E}_j^{e,n+1,-} = \mathcal{E}_j^{e,-} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j,3} - F_{j-\frac{1}{2},3}) - \frac{2\Delta t}{\Delta x} u_j^{n+1,-} (\delta_j - \delta_{j-\frac{1}{2}}) \\ \quad + \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1,-} - T_j^{e,n+1,-}), \\ \mathcal{E}_j^{i,n+1,-} = \mathcal{E}_j^{i,-} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j,4} - F_{j-\frac{1}{2},4}) + \frac{2\Delta t}{\Delta x} u_j^{n+1,-} (\delta_j - \delta_{j-\frac{1}{2}}) \\ \quad - \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1,-} - T_j^{e,n+1,-}), \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1,+} = \rho_j^+ - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},1} - F_{j,1}), \\ \rho_j^{n+1,+} u_j^{n+1,+} = \rho_j^+ u_j^+ - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},2} - F_{j,2}), \\ \mathcal{E}_j^{e,n+1,+} = \mathcal{E}_j^{e,+} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},3} - F_{j,3}) - \frac{2\Delta t}{\Delta x} u_j^{n+1,+} (\delta_{j+\frac{1}{2}} - \delta_j) \\ \quad + \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1,+} - T_j^{e,n+1,+}), \\ \mathcal{E}_j^{i,n+1,+} = \mathcal{E}_j^{i,+} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},4} - F_{j,4}) + \frac{2\Delta t}{\Delta x} u_j^{n+1,+} (\delta_{j+\frac{1}{2}} - \delta_j) \\ \quad - \Delta t \nu^{ei} (T_j^{i,n+1,+} - T_j^{e,n+1,+}). \end{array} \right.$$

Enfin, on pose $\mathcal{U}_j^{n+1} = \mathcal{U}_j^{n+1,-} + \mathcal{U}_j^{n+1,+}$.

Cette procédure permet d'obtenir une méthode à l'ordre 2 en espace. Concernant l'ordre 2 en temps, il est atteint grâce à un schéma de Heuhn.

3.4.2 Le cas bi-dimensionnel

L'objectif de cette section est d'exploiter les idées présentées plus haut pour un maillage 2D cartésien. Chaque cellule C_j est divisée en quatre sous-cellules, selon la partition présentée sur la figure 3.2.

On reconstruit la solution approchée \mathcal{U}^n au second ordre en utilisant des pentes $\sigma_j = (\sigma_{1,j}, \sigma_{2,j})$, $j \in \mathbb{Z}^2$:

$$\forall x \in C_j, \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_j^n + (x - x_j) \cdot \sigma_j.$$

Puis, on définit quatre états constants dans les sous-cellules de C_j :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1)} &= \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{1,j}, & \mathcal{U}_j^{(2)} &= \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{2,j}, \\ \mathcal{U}_j^{(3)} &= \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{1,j}, & \mathcal{U}_j^{(4)} &= \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{2,j}, \end{aligned}$$

et on applique le schéma à l'ordre 1 sur ce nouveau maillage, couplé à une discrétisation en temps de type Heuhn. On détaille à présent la procédure avec le modèle

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

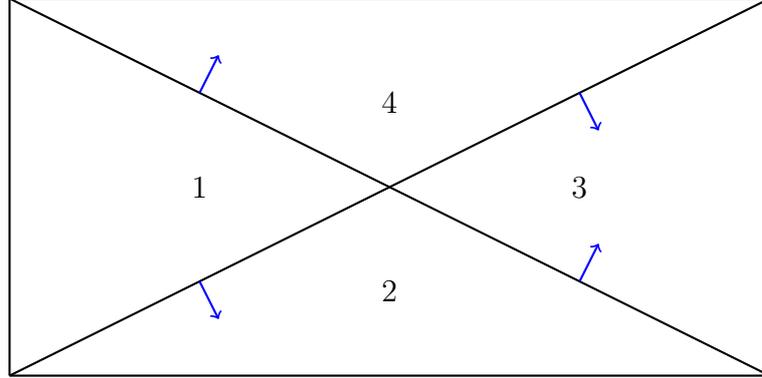


FIGURE 3.2 – Chaque cellule divisée en quatre triangles et les vecteurs normaux unitaires correspondants.

cinétique à vitesses discrètes issu de l'exemple 2 (3.2.2). Premièrement, on définit les flux numériques aux interfaces en utilisant un schéma *upwind* sur chaque équation du système cinétique linéaire (sans terme de force ni terme source) :

$$\partial_t f_l^\alpha + a_l \cdot \nabla_x f_l^\alpha = 0,$$

Le schéma est défini de la façon suivante : pour un maillage triangulaire $\mathcal{T} = \{T_\mu\}_\mu$, les cellules voisines de T_μ sont notées $T_{\mu_1}, T_{\mu_2}, T_{\mu_3}$, le vecteur normal unitaire de T_μ vers T_{μ_k} est noté n_k , l'arête entre T_μ et T_{μ_k} est noté Γ_k . Le schéma *upwind* s'écrit alors, pour la maille T_μ , pour $l \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$f_{\mu,l}^{\alpha,n+1} = f_{\mu,l}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{|T_\mu|} \sum_{k=1}^3 ((a_l \cdot n_k)^+ f_{\mu,l}^n - (a_l \cdot n_k)^- f_{\mu_k,l}^n) |\Gamma_k|,$$

que l'on peut réécrire

$$f_{\mu,l}^{\alpha,n+1} = f_{\mu,l}^{\alpha,n} - \Delta t \sum_{k=1}^3 \Phi_{k,l}(f_{\mu,l}^{\alpha,n}, g_{\mu,l}^{\alpha,n}, n_k),$$

où

$$\Phi_{k,l,\mu}(f, g, n) = ((a_l \cdot n)^+ f - (a_l \cdot n)^- g) \frac{|\Gamma_k|}{|T_\mu|},$$

pour $f, g \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{R}^2$.

On peut alors définir les flux macroscopiques pour l'espèce α comme

$$\forall (U, V) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{F}_{k,\mu}^\alpha(U, V, n_k) = \sum_{l=1}^4 \Phi_{k,l,\mu}(M_l^\alpha(U), M_l^\alpha(V), n_k).$$

Ici, il est donc nécessaire de calculer les quantités $G = \frac{|\Gamma_k|}{|T_\mu|} a_l \cdot n_k$, pour chaque type d'interface. Dans le cas de figure choisi ici, il y a quatre type d'arêtes :

- Arêtes verticales : $G = 4 \frac{v_{1,l}}{\Delta x_1}$.
- Arêtes horizontales : $G = 4 \frac{v_{2,l}}{\Delta x_2}$.
- Arêtes diagonales de type interface entre les sous-cellules 1 et 2 sur la figure (3.2) : $G = 2 \left(\frac{v_{1,l}}{\Delta x_1} - \frac{v_{2,l}}{\Delta x_2} \right)$.
- Arêtes diagonales de type interface entre les sous-cellules 1 et 4 sur la figure (3.2) : $G = 2 \left(\frac{v_{1,l}}{\Delta x_1} + \frac{v_{2,l}}{\Delta x_2} \right)$.

Enfin, on peut calculer l'inconnue $\mathcal{U}_\mu^{n+1} = (\rho_\mu^{n+1}, \rho_\mu^{n+1} u_\mu^{n+1}, \mathcal{E}_\mu^{e,n+1}, \mathcal{E}_\mu^{i,n+1})$ sur le maillage \mathcal{T} , de manière analogue à l'ordre 1, par le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\mu^{n+1} = \rho_\mu^n - \Delta t \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}_{k,\mu,1}^n, \\ \rho_\mu^{n+1} u_\mu^{n+1} = \rho_\mu^n u_\mu^n - \Delta t \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}_{k,\mu,2}^n, \\ \mathcal{E}_\mu^{e,n+1} = \mathcal{E}_\mu^{e,n} - \Delta t \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}_{k,\mu,3}^n + \Delta t u_\mu^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^3 \delta_{k,\mu}^n + \Delta t \nu^{ei} (T_\mu^{i,n+1} - T_\mu^{e,n+1}), \\ \mathcal{E}_\mu^{i,n+1} = \mathcal{E}_\mu^{i,n} - \Delta t \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}_{k,\mu,4}^n - \Delta t u_\mu^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^3 \delta_{k,\mu}^n - \Delta t \nu^{ei} (T_\mu^{i,n+1} - T_\mu^{e,n+1}), \end{array} \right.$$

où

$$\mathcal{F}_{k,\mu}^n = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{k,\mu,1}^{\alpha} (U_\mu^{\alpha,n}, U_{\mu_k}^{\alpha,n}, n_k) \\ \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{k,\mu,2}^{\alpha} (U_\mu^{\alpha,n}, U_{\mu_k}^{\alpha,n}, n_k) \\ \mathcal{F}_{k,\mu,3}^e (U_\mu^{e,n}, U_{\mu_k}^{e,n}, n_k) \\ \mathcal{F}_{k,\mu,3}^i (U_\mu^{i,n}, U_{\mu_k}^{i,n}, n_k) \end{pmatrix},$$

et

$$\delta_{k,\mu}^n = -c^i \mathcal{F}_{k,\mu,2}^e (U_\mu^{e,n}, U_{\mu_k}^{e,n}, n_k) + c^e \mathcal{F}_{k,\mu,2}^i (U_\mu^{i,n}, U_{\mu_k}^{i,n}, n_k) \in \mathbb{R}^2.$$

Le calcul des énergies partielles se fait comme pour le schéma à l'ordre 1, par la résolution d'un système 2×2 .

Finalement, en notant $\mathcal{U}_{j,m}^{n+1}$ la valeur obtenue dans la sous-cellule numéro m de C_j , la solution au temps t^{n+1} est définie par :

$$\mathcal{U}_j^{n+1} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 \mathcal{U}_{j,m}^{n+1}.$$

3.5 Résultats numériques

Dans cette section, on valide la méthode à l'ordre 2 développée précédemment en l'appliquant à une série de cas tests variés : des problèmes de Riemann 1D étendus au cas 2D, permettant une validation simple de la méthode et un cas test d'implosion.

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

Pour tous les cas tests proposés ci-après, on fixe les paramètres physiques suivants : la constante de Boltzmann $k_B = 1,3807.10^{-23}$ J.K⁻¹, la masse particulaire de l'électron $m^e = 9,1094.10^{-31}$ kg, celle de l'ion $m^i = 1,6726.10^{-27}$ kg et la charge élémentaire $e = -q^e = q^i = 1,6022.10^{-19}$ C. Le taux d'ionization Z est fixé à 1, et $\gamma^e = \gamma^i = \gamma = \frac{5}{3}$. A noter qu'il est possible, en pratique, de considérer des cas où $\gamma^e \neq \gamma^i$.

3.5.1 Cas test du tube de Sod

Pour ce premier cas test, on cherche à valider le comportement de notre méthode dans le cas d'un problème mono-dimensionnel. Pour cela, on considère une donnée initiale pour un problème de Riemann de type tube de Sod en x_1 et homogène en x_2 . Le domaine physique est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Les densités totales initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x_1, x_2) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 \in [0, 0.5], \\ \rho(t_0, x_1, x_2) = 0,125 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 \in [0.5, 1], \end{cases}$$

et les températures électroniques et ioniques initiales sont :

$$\begin{cases} T^e(t_0, x_1, x_2) = T^i(t_0, x_1, x_2) = 273 \text{ K}, & \text{si } x_1 \in [0, 0.5], \\ T^e(t_0, x_1, x_2) = 293 \text{ K}, T^i(t_0, x_1, x_2) = 313 \text{ K}, & \text{si } x_1 \in [0.5, 1], \end{cases}$$

et la vitesse est initialement nulle sur tout le domaine. On maille celui-ci avec 200 points dans chaque direction ($N_1 = N_2 = 200$). On munit ce domaine de conditions aux bords de type Neumann homogène. Le temps final de simulation est $t = 0,0001$ s. Dans ce cas test, on fixe $\nu^{ei} = +\infty$, et la méthode numérique devient donc un schéma pour le système d'Euler mono-espèce, car on a, dès le premier pas de temps, $T^e = T^i$. Au temps final, on obtient les solutions en densité totale ρ et en température électronique T^e présentées sur les figures 3.3 et 3.4.

Sur les figures 3.5 et 3.6, on observe les solutions des figures 3.3 et 3.4 en coupe le long de la droite d'équation $x_2 = 0.5$.

En sommant les équations sur les énergies électroniques et ioniques, on obtient une équation conservative sur l'énergie totale. Dans le cas présent, où $\gamma^e = \gamma^i = \gamma$, on obtient les équations d'Euler. Par conséquent, la relation de Rankine-Hugoniot est correctement définie, et on dispose de solutions exactes pour les problèmes de Riemann. De plus, la relation de Rankine-Hugoniot donne la vitesse de propagation du choc, qui est donc la même pour les énergies partielles. La seule information manquante est la répartition du choc entre les deux énergie. Ainsi, on peut comparer les résultats obtenus avec ceux de la solution exacte du problème de Riemann mono-dimensionnel du tube de Sod [101] pour la densité, et avec les températures électroniques et ioniques obtenues pour la même méthode en dimension 1. Par ailleurs, les températures électroniques et ioniques sont bien égales.

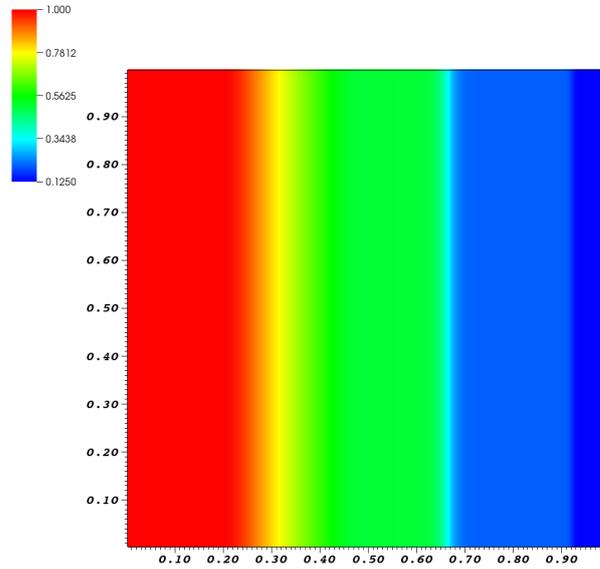


FIGURE 3.3 – Densité totale au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test du tube de Sod avec $\nu^{ei} = +\infty$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

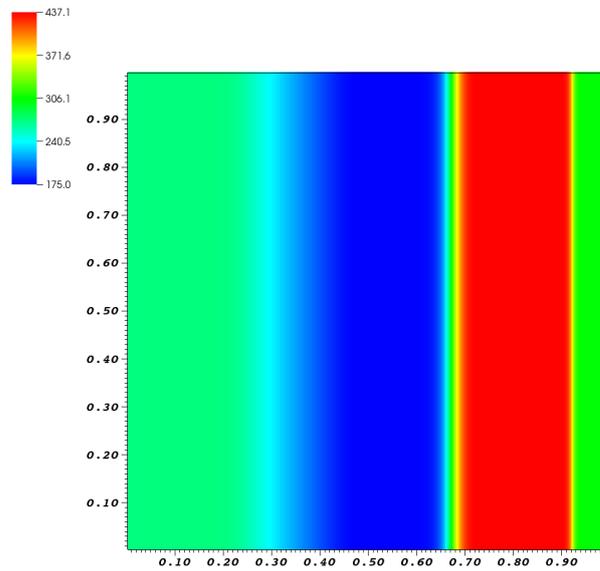


FIGURE 3.4 – Température électronique au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test du tube de Sod avec $\nu^{ei} = +\infty$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

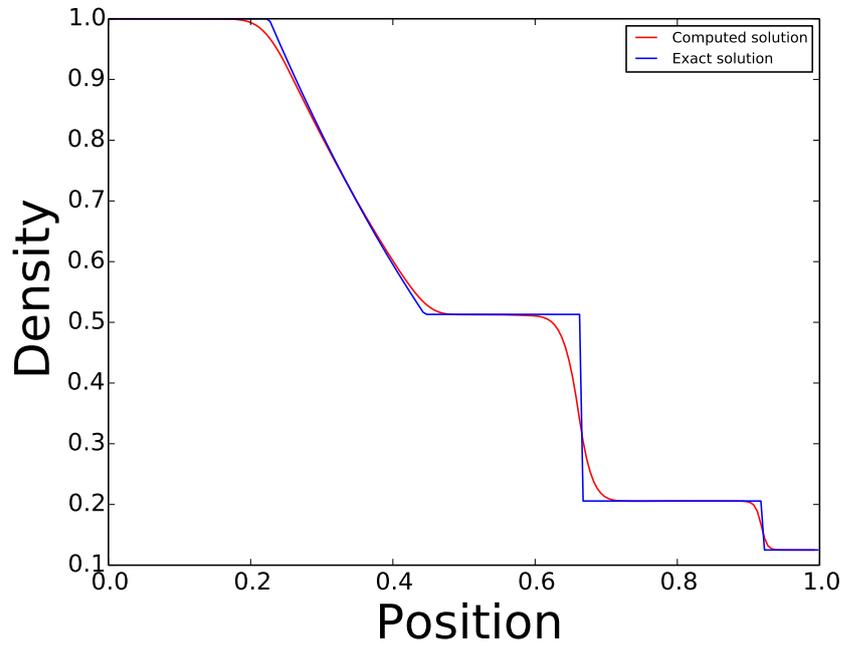


FIGURE 3.5 – Densité totale en coupe le long de la droite $x_2 = 0.5$ au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test du tube de Sod avec $\nu^{ei} = +\infty$, avec un maillage de 200 par 200.

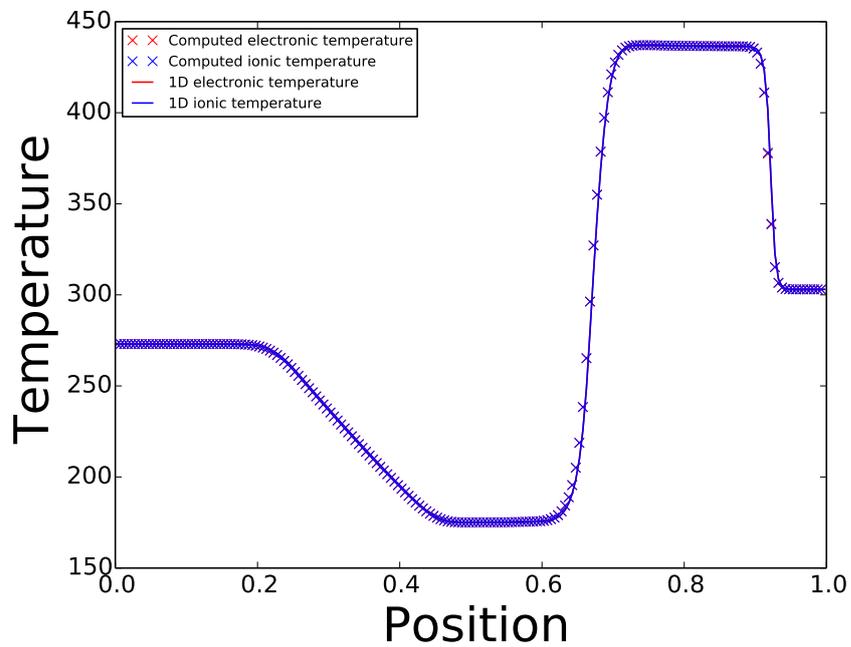


FIGURE 3.6 – Températures électronique et ionique en coupe le long de la droite $x_2 = 0.5$ au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test du tube de Sod avec $\nu^{ei} = +\infty$, avec un maillage de 200 par 200.

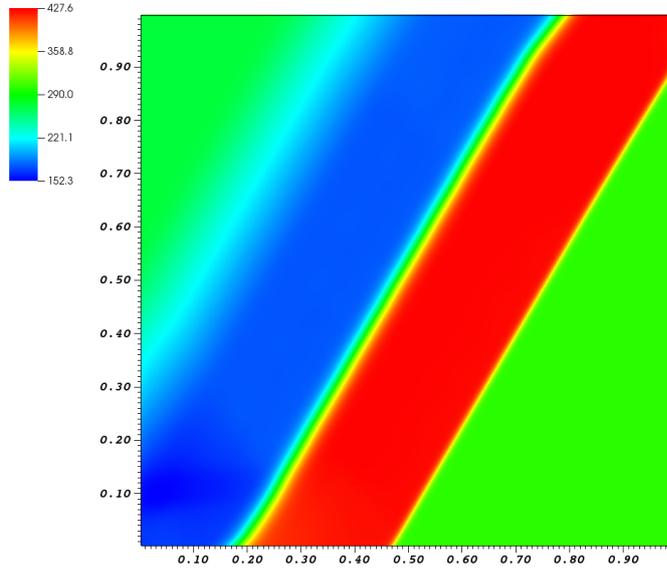


FIGURE 3.7 – Température électronique au temps $t = 0,0001\text{s}$ pour un cas test du tube de Sod incliné avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

3.5.2 Cas test du tube de Sod incliné

Pour ce second cas, on reprend les données initiales du problème précédent, mais on incline la discontinuité initiale de 30 degrés. Les données initiales considérées sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x_1, x_2) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_2 > \sqrt{3}x_1, \\ \rho(t_0, x_1, x_2) = 0,125 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_2 < \sqrt{3}x_1, \end{cases}$$

pour la densité totale, et

$$\begin{cases} T^e(t_0, x_1, x_2) = T^i(t_0, x_1, x_2) = 273 \text{ K}, & \text{si } x_2 > \sqrt{3}x_1, \\ T^e(t_0, x_1, x_2) = 293 \text{ K}, T^i(t_0, x_1, x_2) = 313 \text{ K}, & \text{si } x_2 < \sqrt{3}x_1, \end{cases}$$

pour les températures électroniques et ioniques. Le domaine physique est le même que précédemment, et on a toujours $N_1 = N_2 = 200$ points. Le temps final est $t = 0.0001$. Dans ce cas test, on choisit, de manière *ad hoc*, une valeur de ν^{ei} telle que, au temps final, on ait toujours $T^e \neq T^i$ dans la moitié inférieure droite du domaine. Ainsi, on choisit $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$. La température électronique calculée au temps final est donnée sur la figure 3.7. On observe bien un comportement monodimensionnel, le long de tout axe orthogonal à la discontinuité initiale.

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

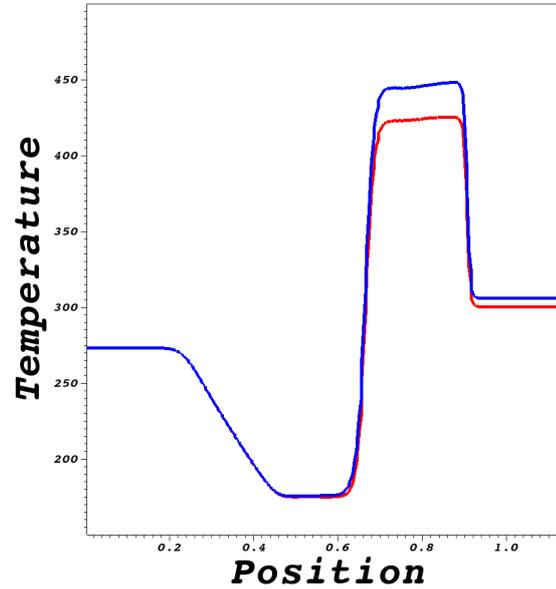


FIGURE 3.8 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la droite $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + 1$ au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test du tube de Sod incliné avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

En visualisant les températures électroniques et ioniques le long d'un tel axe (par exemple, le long de la droite d'équation $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + 1$ sur la figure 3.8), on observe bien, de manière analogue au cas précédent, la solution 1D, malgré quelques légères oscillations dues à la présence du bord du domaine.

3.5.3 Problème de Riemann à quatre interfaces

Pour ce troisième cas test, on considère, sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$, une partition en quatre quadrants de tailles identiques. On choisit alors comme données initiales un état constant sur chaque quadrant. La vitesse initiale est nulle sur tout le domaine initialement et les densités initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t_0, x_1, x_2) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 < 0,5 \text{ et } x_2 < 0,5, \\ \rho(t_0, x_1, x_2) = 0,125 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 < 0,5 \text{ et } x_2 > 0,5, \\ \rho(t_0, x_1, x_2) = 0,125 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 > 0,5 \text{ et } x_2 < 0,5, \\ \rho(t_0, x_1, x_2) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x_1 > 0,5 \text{ et } x_2 > 0,5, \end{cases}$$

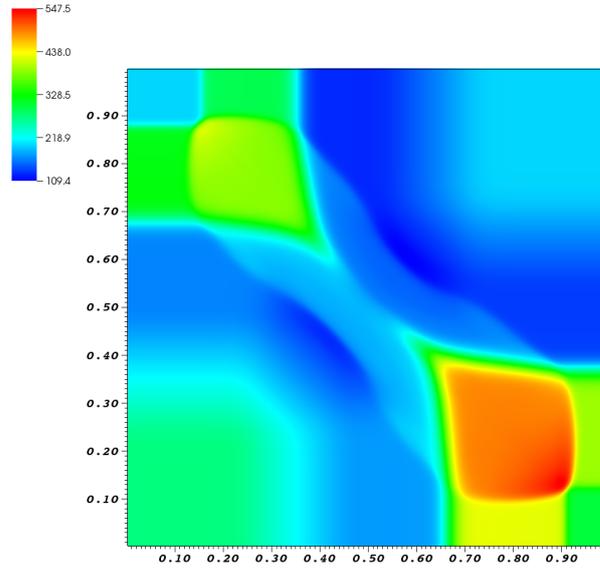


FIGURE 3.9 – Température électronique au temps $t = 0,0001$ s pour un cas test à quatre interfaces avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

et les températures électroniques et ioniques initiales sont définies par :

$$\begin{cases} T^e(t_0, x_1, x_2) = T^i(t_0, x_1, x_2) = 273 \text{ K} , & \text{si } x_1 < 0,5 \text{ et } x_2 < 0,5, \\ T^e(t_0, x_1, x_2) = T^i(t_0, x_1, x_2) = 200 \text{ K} , & \text{si } x_1 < 0,5 \text{ et } x_2 > 0,5, \\ T^e(t_0, x_1, x_2) = 293 \text{ K} , T^i(t_0, x_1, x_2) = 313 \text{ K} , & \text{si } x_1 > 0,5 \text{ et } x_2 < 0,5, \\ T^e(t_0, x_1, x_2) = T^i(t_0, x_1, x_2) = 200 \text{ K} , & \text{si } x_1 > 0,5 \text{ et } x_2 > 0,5, \end{cases}$$

On choisit le même maillage que précédemment, avec $N_1 = N_2 = 200$ points. Le temps final est $t = 0.0001$. On choisit également $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$. La température électronique est présentée en figure 3.9.

On procède à une coupe de la solution en figure 3.9 à deux endroits différents. La première coupe est faite le long de la droite d'équation $x_1 = 0,1$ et est présentée en figure 3.10. La deuxième est faite le long de la droite d'équation $x_2 = 0,9$ et est visible en figure 3.11.

3.5.4 Cas test de l'implosion

Dans ce cas test, on considère un problème de type implosion, introduit dans [51]. Le domaine physique est le carré $[-1,1] \times [-1,1]$. La donnée initiale est le problème de Riemann suivant : $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$ et les températures sont

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

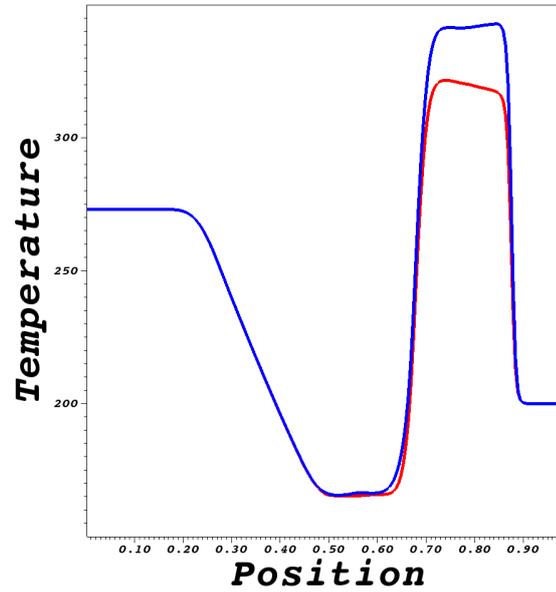


FIGURE 3.10 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la droite $x_1 = 0,1$ au temps $t = 0,0001s$ pour un cas test à quatre interfaces avec $\nu^{ei} = 10^6 s^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

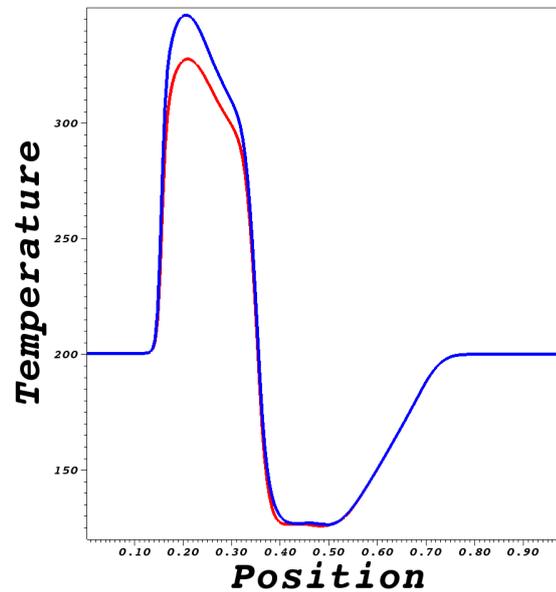


FIGURE 3.11 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la droite $x_2 = 0,9$ au temps $t = 0,0001s$ pour un cas test à quatre interfaces avec $\nu^{ei} = 10^6 s^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

données par :

$$T^e(t_0, x_1, x_2) = 2,3 \cdot 10^6 K, T_i(t_0, x_1, x_2) = 1,7406 \cdot 10^6 K \text{ si } (x_1)^2 + (x_2)^2 < \frac{1}{4},$$

$$T^e(t_0, x_1, x_2) = 2,3 \cdot 10^7 K, T_i(t_0, x_1, x_2) = 1,7406 \cdot 10^7 K \text{ sinon.}$$

et un temps final de simulation de $t = 4,0901 \cdot 10^{-7}$ s. Par des propriétés de symétrie du problème, on se contente de résoudre celui-ci sur le quart de domaine $[0, 1] \times [0, 1]$, muni de conditions aux bords adéquates. Le long des droites d'équation $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$, on considère une condition de Neumann homogène. Le long des droites d'équation $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, on a aussi des conditions de Neumann homogène pour la densité et la température. Pour les vitesses, on impose également des conditions de Neumann homogène, sauf pour les composantes suivantes, afin d'imposer la symétrie du problème :

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} u_1(t, x_1, x_2) = - \lim_{x_1 \rightarrow 0^-} u_1(t, x_1, x_2),$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} u_2(t, x_1, x_2) = - \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} u_2(t, x_1, x_2).$$

Sur les figures 3.12 et 3.13, on observe respectivement la densité totale et la température électronique au temps final. Sur la figure 3.14, on réalise une coupe le long de la première bissectrice. Au temps final, on y observe les températures électroniques et ioniques, qui n'ont pas encore complètement relaxées vers l'équilibre ($T^i \neq T^e$).

Pour ce cas test, on présente également les résultats obtenus pour les températures le long de la première bissectrice lorsque la fréquence de relaxation ν^{ei} est choisie de manière réaliste, selon les formules données par le NRL [64]. On a les expressions suivantes, avec des températures exprimées en eV (électron-volt) :

$$\nu^{ei} = 1.8 \times 10^{-19} \frac{\sqrt{m^e m^i} (Z^e)^2 (Z^i)^2 n^i \lambda^{ei}}{(m^e T^i + m^i T^e)^{3/2}}.$$

Ici, on a $Z^e = -1$, $Z^i = Z$ et

$$\lambda^{ei} = \lambda^{ie} = \begin{cases} 23 - \ln((n^e)^{1/2} Z (T^e)^{-3/2}) & \text{si } T^i m^e / m^i < T^e < 10 Z^2 eV, \\ 24 - \ln((n^e)^{1/2} (T^e)^{-1}) & \text{si } T^i m^e / m^i < 10 Z^2 eV < T^e, \\ 30 - \ln((n^i)^{1/2} (T^i)^{-3/2} Z^2 \mu^{-1}) & \text{si } T^e < T^i Z m^e / m^i. \end{cases}$$

Ici, $\mu = m^i / m^p$ où m^p désigne la masse d'un proton : $m^i = (A - Z)m^n + Zm^p$. Dans notre cas, $A = Z = 1$ et donc $\mu = 1$.

Les températures électroniques et ioniques obtenues au temps $t = 4,0901 \cdot 10^{-7}$ s avec cette valeur de ν^{ei} sont présentés sur la figure 3.15, avec un maillage de 800 points par 800 points. On constate que la relaxation est déjà terminée et que $T^e = T^i$ sur tout le domaine. Pour observer la relaxation, on montre, sur la figure 3.16, les résultats au temps $t = 10^{-8}$ s. A ce temps, les températures n'ont pas encore complètement atteint l'équilibre, mais la relaxation est déjà très entamée, en raison d'une fréquence de relaxation très élevée.

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

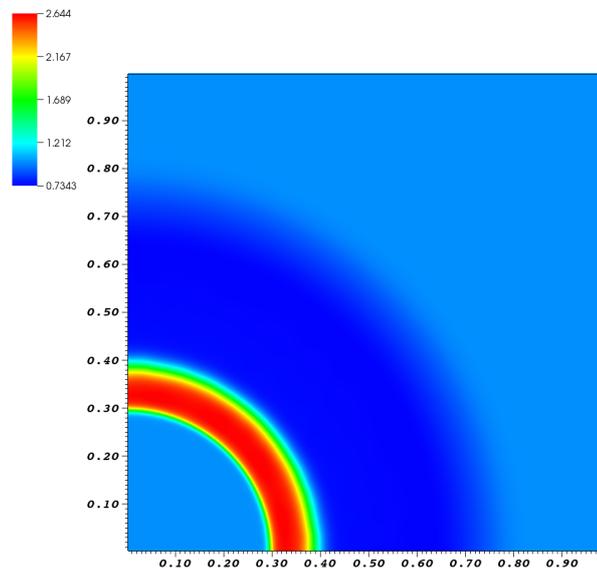


FIGURE 3.12 – Densité totale au temps $t = 4,0901.10^{-7}$ s pour un cas test de l'implosion avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

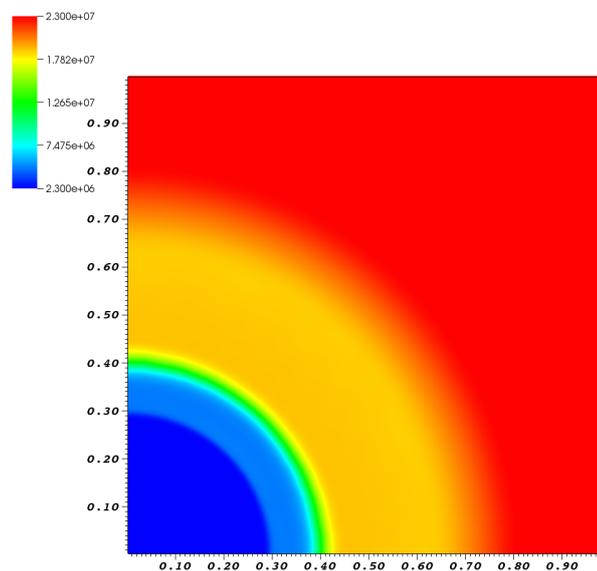


FIGURE 3.13 – Température électronique au temps $t = 4,0901.10^{-7}$ s pour un cas test de l'implosion avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

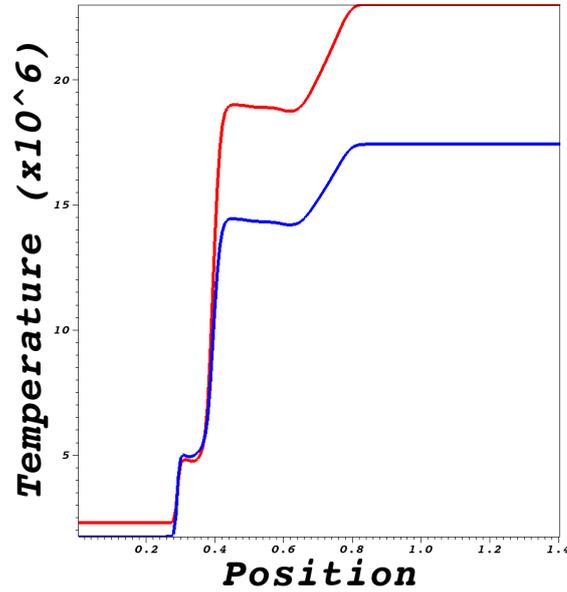


FIGURE 3.14 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la première bissectrice au temps $t = 4,0901 \cdot 10^{-7} \text{s}$ pour un cas test de l'implosion avec $\nu^{ei} = 10^6 \text{s}^{-1}$, avec un maillage de 200 points par 200 points.

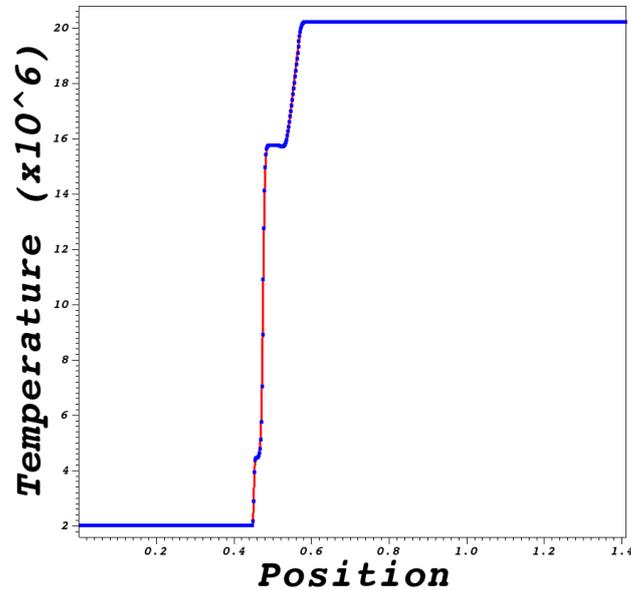


FIGURE 3.15 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la première bissectrice au temps $t = 4,0901 \cdot 10^{-7} \text{s}$ pour un cas test de l'implosion avec ν^{ei} calculée par le NRL, avec un maillage de 800 points par 800 points.

3. Un schéma numérique à vitesses discrètes pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel

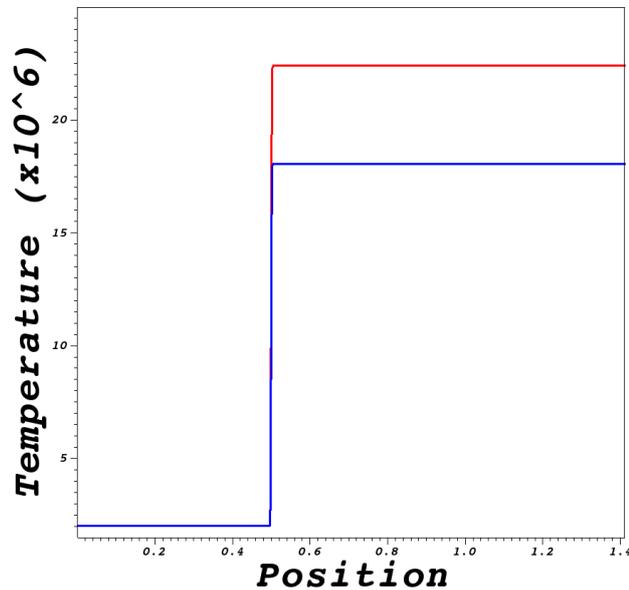


FIGURE 3.16 – Températures électronique et ioniques en coupe le long de la première bissectrice au temps $t = 10^{-8}$ s pour un cas test de l'implosion avec ν^{ei} calculée par le NRL, avec un maillage de 800 points par 800 points.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a construit un système cinétique sous-jacent à vitesses discrètes de type BGK pour le système d'Euler bi-température bi-dimensionnel. Ce système cinétique, suivant le formalisme introduit dans [19], possède des entropies microscopiques compatibles avec l'entropie macroscopique d'Euler. En raison du caractère non-conservatif du système d'Euler bi-température, la définition des solutions faibles n'est pas bien posé. Cette compatibilité des entropies permet de définir la notion de solutions faibles admissibles pour ce système.

Dans un deuxième temps, cette construction permet la résolution numérique du système d'Euler bi-température, grâce à une approche de type projection-transport des équations cinétiques. On démontre que ce schéma dissipe l'entropie discrète. On termine le chapitre par quelques cas tests attestant du bon comportement de la méthode dans diverses situations.

Deuxième partie

Méthodes numériques pour les
écoulements raréfiés

Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

4.1	Introduction	128
4.2	Modèles cinétiques pour les écoulements raréfiés de mélanges de gaz	130
4.2.1	Équations de Boltzmann multi-espèces	130
4.2.2	Quantités macroscopiques	132
4.2.3	Modèle BGK multi-espèces	132
4.2.4	Calcul des taux de relaxation et des coefficients d'interaction	133
4.3	Une méthode à grille cinétique locale	135
4.3.1	Aperçu de la méthode	135
4.3.2	Calcul des grilles en vitesse locales	136
4.3.3	Interpolation et calcul des fonctions de distribution	140
4.3.4	Élargissement de grilles	141
4.4	Extension de la méthode : grilles cinétiques décalées	142
4.4.1	Notations	142
4.4.2	Calcul des grilles décalées au temps initial	143
4.4.3	Calcul des grilles décalées pour les temps suivants	143
4.5	Résultats numériques	145
4.5.1	Tube de Sod	146
4.5.2	Blast waves	146
4.5.3	Double choc	153
4.5.4	Test plasma	156
4.5.5	Transfert de chaleur raréfié	158
4.6	Conclusion	161

4.1 Introduction

Lors de l'étude de phénomènes comme les rentrées atmosphériques, il est nécessaire d'étudier la dynamique des mélange de gaz dans des configurations raréfiées. Dans de tels cas, les systèmes d'équations aux dérivées partielles, comme Euler ou Navier-Stokes, peuvent se révéler inadéquats lorsque le nombre de Knudsen, qui décrit le niveau de raréfaction d'un gaz, prend des valeurs importantes. Par exemple, il est observé que les équations de Navier-Stokes sont correctes lorsque ce nombre est inférieur à 10^{-2} . Ainsi, dans ces cas, il devient indispensable d'utiliser des modèles cinétiques, décrivant l'évolution des fonctions de distribution, définies sur l'espace des phases - un espace dont la dimension est supérieure à la dimension de l'espace physique. Les équations issues de ces modèles, plus générales et plus précises que celles des modèles fluides, permettent de décrire toute échelle d'un gaz raréfié.

Cependant, dans le contexte du développement de méthodes numériques pour la simulation, le gain en précision se fait au prix d'une augmentation du coût de calcul. Plus précisément, dans une configuration générale en dimension d , la variable cinétique v parcourt \mathbb{R}^d entier. Donc, pour réaliser une approximation numérique, le domaine en vitesse doit être remplacé par un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^d , choisi de sorte à contenir la quasi-totalité de la distribution. Proche de l'équilibre thermodynamique, les quantités macroscopiques (vitesses moyennes et températures) peuvent être utilisées pour déterminer les bornes de ces sous-ensembles. Cependant, puisque ces bornes dépendent des quantités macroscopiques, qui elles-mêmes dépendent du point d'espace physique $x \in \mathbb{R}^d$, le sous-ensemble adéquat peut varier fortement d'un point à un autre, en particulier au travers des ondes de choc. Par ailleurs, d'une composante du gaz à une autre, la disparité des masses moléculaires mène à des bornes différentes, même lorsque les vitesses et températures sont comparables. Enfin, en un point donné, les quantités macroscopiques peuvent grandement varier au cours du temps.

Dans les méthodes numériques classiques, une unique grille en vitesse est habituellement choisie pour tous les points et toutes les espèces, fixe au cours du temps, fondée sur la donnée initiale. Cela implique que cette grille doit être suffisamment large pour contenir la distribution la plus étalée, et les vitesses discrètes doivent être suffisamment nombreuses pour capturer la distribution la plus étroite.

Dans ce chapitre, on généralise une méthode numérique adaptative aux équations cinétiques pour les mélanges. Une telle méthode est capable d'utiliser une grille en vitesse différente pour chaque point de l'espace physique et chaque composante du gaz, tout en étant adaptative en temps. L'idée de cette méthode consiste à résoudre, à chaque pas de temps, des lois de conservations sur les quantités macroscopiques. Ces quantités, dépendant du temps, de l'espace et des composantes du gaz, sont ensuite utilisées pour définir un intervalle de vitesses adapté à la fonction de distribution au temps suivant. De plus, le calcul à l'avance de ces quantités macroscopiques permet d'impliciter l'opérateur de relaxation modélisant les collisions, ce qui permet d'obtenir un schéma préservant l'asymptotique pour Euler (i.e. dans le cas où le

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

nombre de Knudsen tend vers 0).

Une fois que les grilles en vitesse ont été calculées, on souhaite appliquer un schéma amont à l'équation cinétique. Comme chaque fonction de distribution est connue sur un ensemble de vitesses discrètes qui lui est propre, il est nécessaire de passer par une procédure d'interpolation. On utilise ici une méthode ENO4, qui consiste à trouver le stencil d'interpolation avec le plus petit taux de variation de la solution. Cette méthode permet notamment d'éviter d'interpoler au travers d'une discontinuité, ce qui pourrait dégrader la qualité de l'interpolation. Une deuxième version de la méthode est présentée, où une étape supplémentaire dans le calcul des grilles est ajoutée. Celle-ci permet de faire coïncider un maximum de vitesses discrètes d'une grille à l'autre, afin d'éviter les interpolations. Ceci est réalisé en choisissant des grilles dont les pas sont tous des multiples d'une même quantité, afin de faire en sorte qu'elles partagent un grand nombre de vitesses. Ceci permet de diminuer le coût de calcul lorsque le nombre d'interpolations est important.

Les collisions dans un gaz à plusieurs composantes sont modélisées par l'opérateur de Boltzmann multi-espèces, présenté par exemple dans [34], [5] ou encore [71]. Cependant, pour les applications numériques, il est courant de remplacer l'opérateur de Boltzmann par un opérateur de relaxation avec une structure plus simple. Dans le cas d'un gaz mono-espèce, le modèle de Bhatnagar-Gross-Krook [14] est généralement utilisé. Celui-ci préserve toutes les propriétés fondamentales de l'opérateur de Boltzmann mono-espèce : positivité de la solution, conservation des moments, dissipation de l'entropie. Cependant, dans le cas multi-espèces, un plus grand nombre de propriétés peut être requis pour modéliser correctement les collisions. Par exemple, on peut réclamer d'un modèle qu'il possède les bons coefficients macroscopiques lorsqu'on en prend la limite hydrodynamique, qui sont plus nombreux que dans le cas mono-espèce. Les coefficients de Fick, Soret et Dufour, qui décrivent différents types de diffusion entre les différentes composantes du gaz, sont des exemples de coefficients qui ne sont pas décrits par les modèles mono-espèces. D'autres paramètres tels que la section efficace des collisions, ou les coefficients d'échange de quantité de mouvement et d'énergie entre espèces, ou encore le principe d'indifférentiabilité (qui assure que, lorsque les masses particulières et les sections efficaces sont toutes égales, le modèle revient à un modèle à une seule espèce), peuvent être utilisés comme base pour construire un modèle. Différentes classes de modèles existent à ce jour pour approximer les opérateurs de collisions. Les premiers résultats remontent aux décennies 60-70, avec les modèles de Gross-Krook, Hamel, Sirovich, Morse et McCormack ([58],[62],[97],[87], [85]). Par la suite, plusieurs autres modèles ont été développés, tels que le modèle d'Andries-Aoki-Perthame [3], le modèle de Kosuge [70], le modèle de Brull-Pavan-Schneider [27], le modèle ellipsoïdal de Brull [22] et le modèle de Haack-Hauck-Murillo [61]. Dans ce travail, le modèle retenu est celui d'Andries-Aoki-Perthame [3], sa propriété principale était qu'il donne les mêmes termes d'échange de quantité de mouvement et d'énergie que l'opérateur de Boltzmann pour des molécules maxwelliennes. Un avantage de ce modèle est sa simplicité, puisqu'il s'agit d'un unique opérateur de relaxation analogue à l'opérateur BGK classique par es-

pèce. Cela signifie que, comme développé plus bas dans ce chapitre, l'implicitation du modèle est simple à réaliser.

La résolution numérique des équations cinétiques pour des mélanges a été étudiée dans plusieurs travaux récents. Dans [63], une méthode spectrale de type Fast Fourier est appliquée afin de comparer les résultats obtenus pour les modèles de Boltzmann et de McCormack. Par ailleurs, la méthode DUGKS (Discrete Unified Gas Kinetic Scheme) a été étendue aux écoulements multi-espèces décrits par divers modèles ([109], [108], [103], [36], [105], [82]). D'autre part, une approche de type Galerkin Discontinu est appliquée aux équations de Boltzmann multi-espèces dans [66] et [65]. Enfin, une méthode de type BGK pénalisé proposé par Filbet et Jin pour des modèles mono-espèces dans [52] est étendue au cas multi-espèces dans [68].

A propos des méthodes adaptatives pour les écoulements cinétiques, plusieurs auteurs ont été étudié des problèmes concernant différents types d'applications. Filbet et Rey ont proposé dans [53] une méthode fondée sur l'adaptation des domaines en vitesse. Des procédures utilisant des quad-trees et des octree ont été étudiées par Arslanbekov et Kolobov dans [10], [69] et [107].

Le chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 4.2, le modèle de Boltzmann est présenté, ainsi que le modèle d'Andries-Aoki-Perthame utilisé dans la méthode numérique. Ensuite, dans la section 4.3, une première version de la méthode numérique, fondée sur les travaux présentés par [26], est décrite en détails. Dans la section 4.4, une deuxième version de la méthode est présentée, où les grilles locales sont choisis de sorte à réduire le nombre d'interpolations. Enfin, des expérimentations numériques sont menées dans la section 4.5, afin de valider la méthode et de comparer son efficacité par rapport aux méthodes classiques.

4.2 Modèles cinétiques pour les écoulements raréfiés de mélanges de gaz

4.2.1 Équations de Boltzmann multi-espèces

Un mélange de gaz composé de N espèces peut être modélisé par les équations de Boltzmann multi-espèces tridimensionnelles, qui s'énoncent de la façon suivante, pour $\alpha \in \{1, \dots, N\}$:

$$\partial_t f^\alpha + \nabla \cdot (v f^\alpha) = \mathcal{Q}^\alpha(f), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

où $f^\alpha(t, x, v) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}_+$ est la fonction de distribution de l'espèce α , qui désigne le nombre de particules de l'espèce α qui se trouve, au temps t , dans le volume infinitésimal $\prod_{i=1}^3 [x_i, x_i + dx_i] \times \prod_{j=1}^3 [v_j, v_j + dv_j]$.

Au second membre de ces équations, on trouve l'opérateur \mathcal{Q}^α , qui est un terme

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

source modélisant les collisions entre particules, et qui est défini par :

$$\mathcal{Q}^\alpha(f) = \sum_{\beta=1}^N \mathcal{Q}^{\alpha\beta}(f^\alpha, f^\beta) = \sum_{\beta=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_2} ((f^\alpha)'(f_*^\beta)' - f^\alpha f_*^\beta) B^{\alpha\beta}(n.V, |V|) dn dv^*, \quad (4.1)$$

avec les notations $f_*^\beta = f^\beta(t, x, v_*)$, $(f^\alpha)' = f^\alpha(t, x, v')$, $(f_*^\beta)' = f^\beta(t, x, v'_*)$, où v et v_* sont les vitesses pré-collisionnelles d'une collision binaire donnée, et v' et v'_* sont les vitesses post-collisionnelles correspondantes, données par

$$\begin{aligned} v' &= v - 2 \frac{\mu^{\alpha\beta}}{m^\alpha} (V.n)n, \\ v'_* &= v_* + 2 \frac{\mu^{\alpha\beta}}{m^\beta} (V.n)n, \end{aligned}$$

où $\mu^{\alpha\beta} = \frac{m^\alpha m^\beta}{m^\alpha + m^\beta}$ est la masse du mobile réduit $\alpha - \beta$, n est un vecteur unitaire joignant les centres des deux sphères entrant en collision et $V = v - v_*$ est la vitesse relative. Le domaine d'intégration de n est S_2 , la sphère bidimensionnelle définie par $n.V = 0$, et $B^{\alpha\beta}(n.V, |V|)$ est le noyau de collision des interactions de type $\alpha - \beta$. Par la suite, seules les molécules maxwelliennes seront considérées. Cela signifie que, pour de telles molécules, le noyau de collision est indépendant de la norme de la vitesse relative $|V|$, qui peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$B^{\alpha\beta}(n.V, |V|) = \bar{B}^{\alpha\beta}(\omega), \quad \omega = \frac{n.V}{|V|}.$$

On définit quelques quantités relatives au noyau de collision, qui seront utiles par la suite :

$$\chi^{\alpha\beta} = \int_{S_2} \cos(\omega)^2 \bar{B}^{\alpha\beta}(\omega) d\omega, \quad (4.2a)$$

$$\nu^{\alpha\beta} = \int_{S_2} \bar{B}^{\alpha\beta}(\omega) d\omega. \quad (4.2b)$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique de ces équations pour les écoulements raréfiés multi-espèces en dimension 1. Le domaine physique sera noté $\Omega = [L_{\min}, L_{\max}]$, avec $L_{\min}, L_{\max} \in \mathbb{R}$. Les équations s'écrivent alors, pour $\alpha \in \{1, \dots, N\}$:

$$\partial_t f^\alpha + \partial_x (v f^\alpha) = \tilde{\mathcal{Q}}^\alpha, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in [L_{\min}, L_{\max}], \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

où $\tilde{\mathcal{Q}}^\alpha$ est un opérateur modélisant les collisions en dimension 1. Bien que l'opérateur de Boltzmann ne soit pas défini en dimension 1, des opérateurs simplifiés, tels que ceux présentés ci-après, peuvent tout de même être définis.

4.2.2 Quantités macroscopiques

Les quantités macroscopiques, qui sont les inconnues des modèles fluides tels que les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, sont définies comme les moments des fonctions de distribution. Pour toute fonction g dépendant de v telle que $(1+v^2)g \in L^1(\mathbb{R})$, on note

$$\langle g \rangle = \int_{\mathbb{R}} g dv.$$

La concentration de particules, vitesse et température de l'espèce α , noté respectivement n^α, u^α et T^α , sont définis à l'aide des trois premiers moments de f^α :

$$\begin{aligned} \langle f^\alpha \rangle &= n^\alpha, \\ \langle m^\alpha v f^\alpha \rangle &= m^\alpha n^\alpha u^\alpha = \rho^\alpha u^\alpha, \\ \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} f^\alpha \rangle &= \mathcal{E}^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 + n^\alpha \varepsilon^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 + \frac{1}{2} n^\alpha k_B T^\alpha, \end{aligned}$$

où \mathcal{E}^α et $n^\alpha \varepsilon^\alpha$ représentent respectivement l'énergie totale et l'énergie interne de l'espèce α . Dans toute la suite du chapitre, on fera l'abus de langage suivant : on appellera énergie interne la quantité ε^α .

4.2.3 Modèle BGK multi-espèces

Dans l'objectif de résoudre numériquement les équations cinétiques, il est utile de remplacer l'opérateur collisionnel de Boltzmann par un autre opérateur, plus simple à traiter numériquement. Pour des écoulements multi-espèces, de nombreux modèles existent, chacun possédant différentes propriétés. Dans ce travail, le choix s'est arrêté sur le modèle de type BGK, introduit par Andries, Aoki et Perthame dans [3]. Ainsi, en utilisant les notations définies précédemment, on définit l'opérateur de relaxation suivant comme approximation de \tilde{Q}^α

$$\tilde{Q}^\alpha := \nu^\alpha (\overline{M}^\alpha(f) - f^\alpha), \quad (4.4)$$

où la fréquence de relaxation est définie par $\nu^\alpha = \sum_{\beta=1}^N \nu^{\alpha\beta} n^\beta$.

Cet opérateur modélise les collisions multi-espèces à l'aide d'une unique relaxation vers une distribution maxwellienne d'échange \overline{M}^α , qui est définie par

$$\overline{M}^\alpha(f) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{2\pi k_B \frac{\overline{T}^\alpha}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v - \overline{u}^\alpha)^2}{2k_B \frac{\overline{T}^\alpha}{m^\alpha}}\right),$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann. Les quantités de mélange (ou quantités fictives) sont notées \overline{u}^α et \overline{T}^α . Elles sont définies par les équations (4.5) et (4.6), et sont des quantités choisies de sorte à ce que la quantité de mouvement et l'énergie de l'opérateur BGK (4.4) soit égales à la quantité de mouvement et l'énergie à

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

l'opérateur collisionnel de Boltzmann pour des molécules maxwelliennes (4.1), défini dans la section précédente. Plus précisément, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\langle (\overline{M}^\alpha(f) - f^\alpha)v \rangle &= \langle \tilde{Q}^\alpha v \rangle, \\ \langle (\overline{M}^\alpha(f) - f^\alpha)v^2 \rangle &= \langle \tilde{Q}^\alpha v^2 \rangle.\end{aligned}$$

Les expressions de ces quantités sont les suivantes :

$$\nu^\alpha m^\alpha \bar{u}^\alpha = \nu^\alpha m^\alpha u^\alpha + 2 \sum_{\beta=1}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n^\beta (u^\beta - u^\alpha), \quad (4.5)$$

$$\bar{\varepsilon}^\alpha = \varepsilon^\alpha - \frac{m^\alpha}{2} (\bar{u}^\alpha - u^\alpha)^2 + \frac{2}{\nu^\alpha} \sum_{\beta=1}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n^\beta \frac{2}{m^\alpha + m^\beta} \left(\varepsilon^\beta - \varepsilon^\alpha + m^\beta \frac{(u^\beta - u^\alpha)^2}{2} \right), \quad (4.6)$$

où $\bar{\varepsilon}^\alpha$ l'énergie interne de mélange, définie par $\bar{\varepsilon}^\alpha = \frac{1}{2} k_B \bar{T}^\alpha$ et $\chi^{\alpha\beta}$ est le coefficient d'interaction entre les espèces α et β , défini par l'équation (4.2a).

Ces expressions de \bar{u}^α et \bar{T}^α permettent d'assurer la positivité de l'énergie interne (et donc la positivité de la température) sous la condition suivante, portant sur ν^α :

$$\nu^\alpha \geq \sum_{\beta=1}^N \chi^{\alpha\beta} n^\beta.$$

Ainsi, selon les définitions (4.2a) et (4.2b), il est clair que l'on a l'inégalité $\chi^{\alpha\beta} \leq \nu^{\alpha\beta}$, ce qui assure que la condition précédente est toujours bien vérifiée en définissant la

fréquence totale de l'espèce α par $\nu^\alpha = \sum_{\beta=1}^N \nu^{\alpha\beta} n^\beta$.

4.2.4 Calcul des taux de relaxation et des coefficients d'interaction

En pratique, dans le cadre de simulations numériques, les régimes des écoulements sont caractérisés par la valeur du nombre de Knudsen, défini par $K_n = \frac{\delta}{L}$, où δ est le libre parcours moyen des molécules constituant le gaz, et L est la longueur caractéristique du domaine physique. Ainsi, lorsque $K_n \rightarrow 0$, les équations cinétiques tendent vers les équations d'Euler. Selon la définition du libre parcours moyen, ce nombre est directement lié à la quantité de collisions entre particules intervenant au sein du gaz. Ainsi, ce nombre doit dépendre des paramètres d'interaction et des taux de relaxation $\chi^{\alpha\beta}$ et $\nu^{\alpha\beta}$. Cependant, Bird, dans son ouvrage de référence [15], explique que la définition du nombre de Knudsen pour un mélange de gaz n'est pas un problème aisé. Ainsi, dans ce travail, de manière similaire aux travaux présentés par Kosuge dans [70], le choix a été fait de définir le nombre de Knudsen du mélange comme le nombre de Knudsen du gaz mono-espèce d'une composante référence du

gaz (ici, on choisit l'espèce 1 comme référence). Ceci permet de définir la quantité ν^{11} , et les quantités restantes sont alors définies à l'aide d'expressions sous forme non-dimensionnelle. Plus précisément, le libre parcours moyen δ est défini par

$$\delta = \frac{1}{\nu^{11} n_0^1} \sqrt{\frac{8k_B T_0^1}{\pi m^1}},$$

où T_0^1 et n_0^1 sont, respectivement, la température et la concentration caractéristiques de l'espèce 1. La longueur L est choisie comme la longueur du domaine physique, qui sera égale à 1 dans les exemples donnés plus bas. À partir de là, on obtient l'expression de ν^{11} :

$$\nu^{11} = \frac{1}{K_n n_0^1} \sqrt{\frac{8k_B T_0^1}{\pi m^1}}.$$

Selon Kosuge [70] et Cercignani [29], le noyau de collision pour des molécules maxwelliennes peut s'écrire sous la forme suivante :

$$B^{\alpha\beta}(\theta) = \left(\frac{a^{\alpha\beta}}{\mu^{\alpha\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{g(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dg}{d\theta}, \quad \theta = \arccos(\omega) \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

où $a^{\alpha\beta}$ est la constante de proportionnalité intervenant dans le potentiel d'interaction, qui s'écrit sous la forme $\Phi^{\alpha\beta}(r) = \frac{a^{\alpha\beta}}{4r^4}$ pour des molécules maxwelliennes, où r représente la distance entre deux particules, et g est une fonction dépendant de θ , définie de manière implicite par

$$\theta = \int_{y=0}^{y=y_c(g)} \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{y}{g})^4 - y^2)}} dy, \quad y_c(g) = \left[\frac{-g^4 + (g^8 + 4g^4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour assurer une valeur finie pour la fréquence partielle $\nu^{\alpha\beta}$, il est nécessaire de réaliser un *cut-off*, i.e ignorer les collisions d'angle d'incident $\theta \in [\theta_c, \frac{\pi}{2}]$, où θ_c désigne l'angle de *cut-off*. Ainsi, cette expression de $B^{\alpha\beta}(\theta)$ mène aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \nu^{\alpha\beta} &= 2\pi \left(\frac{a^{\alpha\beta}}{\mu^{\alpha\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} g_c^{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta, \\ \chi^{\alpha\beta} &= 2\pi \left(\frac{a^{\alpha\beta}}{\mu^{\alpha\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} A(g_c^{\alpha\beta}), \quad \text{for } \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

où $g_c^{\alpha\beta} = g(\theta_c)$ ne dépend que de l'angle de *cut-off* pour les collisions de type $\alpha - \beta$, et A est une fonction définie par

$$A(z) = 2 \int_{g=0}^{g=z} g \cos^2(\theta) dg.$$

Les rapports sans dimension suivants peuvent, par suite, être obtenus, pour les taux de relaxation et les coefficients d'interaction restants :

$$\frac{\nu^{\alpha\beta}}{\nu^{11}} = \left(\frac{a^{\alpha\beta}}{a^{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m^1}{2} \frac{m^\alpha + m^\beta}{m^\alpha m^\beta} \left(\frac{g_c^{\alpha\beta}}{g_c^{11}}\right)^2, \quad \frac{\chi^{\alpha\beta}}{\nu^{11}} = \frac{\nu^{\alpha\beta}}{\nu^{11}} \frac{A(g_c^{\alpha\beta})}{(g_c^{\alpha\beta})^2}.$$

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

En supposant que $\forall \alpha, \beta, a^{\alpha\beta} = a^{11} = a$ et $g_c^{\alpha\beta} = g_c^{11} = g_c$, on obtient les expressions suivantes pour $\nu^{\alpha\beta}$ et $\chi^{\alpha\beta}$:

$$\nu^{\alpha\beta} = \frac{m^1 m^\alpha + m^\beta}{2 m^\alpha m^\beta} \nu^{11}, \quad \chi^{\alpha\beta} = \nu^{\alpha\beta} \frac{A(g_c)}{g_c^2}.$$

Enfin, la fonction A vérifie les inégalités $0 < \frac{A(z)}{z^2} \leq 1, \forall z$. Ainsi, dans ce travail, on supposera que $\frac{A(g_c)}{(g_c)^2} = 1$, ce qui revient à poser $\chi^{\alpha\beta} = \nu^{\alpha\beta}$.

4.3 Une méthode à grille cinétique locale

4.3.1 Aperçu de la méthode

L'objectif de ce travail est d'appliquer les idées proposées par [26] au cas des écoulements raréfiés multi-espèces. Localement en temps et en espace, une fonction de distribution est une fonction de la vitesse microscopique v , définie sur \mathbb{R} . Pour des applications numériques, \mathbb{R} doit être remplacé par un sous-ensemble convenable qui doit être choisi de sorte à décrire correctement la fonction de distribution. Pour un temps t et un point x donnés, si l'on suppose que la fonction de distribution est une distribution maxwellienne, les quantités u et $\frac{k_B T}{m}$ correspondent respectivement à l'espérance et à l'écart-type d'une distribution gaussienne. Ainsi, dans les méthodes classiques, à l'aide de la notion d'intervalle de confiance d'une distribution gaussienne, ces quantités permettent de définir un intervalle en vitesse adéquat de la forme $[V_{\min}, V_{\max}] \subset \mathbb{R}$, qui peut alors être remplacé par un ensemble de N_v vitesses discrètes afin de définir une grille en vitesse discrète $\mathcal{V} = \{(v_k)_k, k \in \{1, \dots, N_v\}\}$, qui est uniforme en temps et en espace. L'idée développée par [26] consiste à choisir des grilles locales pour chaque point de discrétisation en espace, qui dépendent des valeurs locales de la vitesse macroscopique et de la température, dans le cas mono-espèce. Ces grilles sont également dynamiques, c'est-à-dire qu'elles dépendent du temps en étant recalculées à chaque pas de temps, afin de tenir compte des évolutions des données macroscopiques.

En notant avec un indice i et un superscript n les quantités calculées au point x_i et au temps t^n , cette méthode revient à définir des grilles de vitesses discrètes de la forme $\mathcal{V}_i^n = \{(v_{i,k}^n)_k, k \in \{1, \dots, N_v\}\}$, qui dépendent alors du temps et de l'espace.

Premièrement, cette méthode permet d'éviter l'emploi d'une grille globale qui serait identique en tout point d'espace. L'approche classique nécessite ainsi de choisir une grille qui soit suffisamment large pour englober la distribution la plus large (i.e la distribution avec la température la plus importante), tout en étant suffisamment finement maillée afin de capturer la distribution la plus étroite. Nécessairement, une telle méthode a un coût de calcul élevé et contient de nombreux calculs dispensables. Dans un second temps, cette méthode recalcule, au début de chaque pas de temps, des grilles locales adaptées. Ainsi, cette méthode permet de simplifier les éventuels tests de convergence, qui sont parfois nécessaires pour des grilles fixes.

Plus précisément, les grilles fixes requièrent que le choix initial (et unique) de la grille discrète soit aussi convenable pour tout temps, où les températures peuvent croître, par exemple. Avec des grilles dynamiques, cette contrainte est levée grâce à la dépendance en temps.

Pour chaque pas de temps, pour obtenir la valeur de $(f_{i,k}^{n+1})_k$, la méthode consiste à suivre les étapes suivantes :

1. Calcul de la grille en vitesse $\mathcal{V}_i^{n+1}, \forall i \in \{1, \dots, N_x\}$
2. Calcul de la Maxwellienne d'échange au temps $n + 1$ $(\overline{M}_{i,k}^{\alpha,n+1})_k$, définie par les quantités macroscopiques calculées à l'étape 1.
3. Interpolation des distributions $(f_{i,k}^n)_k, (f_{i-1,k}^n)_k$ et $(f_{i+1,k}^n)_k$ sur la nouvelle grille \mathcal{V}_i^{n+1} .
4. Calcul de f_i^{n+1} sur la nouvelle grille, en utilisant un schéma amont explicite et un terme de relaxation implicite.

Dans ce travail, on étend la procédure au cas des écoulements multi-espèces. Pour l'espèce α , les quantités u^α et $\frac{T^\alpha}{m^\alpha}$ permettent d'obtenir les bornes des intervalles en vitesse. Ainsi, on constate que, même si les vitesses macroscopiques et les températures sont comparables, les distributions peuvent varier d'une espèce à une autre en raison de la présence de la masse moléculaire m^α dans l'écart-type de la distribution. Cette nouvelle méthode consiste donc à définir, pour tout i, n et α , des grilles de vitesses discrètes de la forme $\mathcal{V}_i^{\alpha,n} = \{(v_{i,k}^{\alpha,n})_k, k \in \{1, \dots, (N_v)_i^{\alpha,n}\}\}$.

4.3.2 Calcul des grilles en vitesse locales

Supposons que l'on connaisse les quantités $(f_{i,k}^{\alpha,n})_k$ pour tout point en espace x_i , avec $i \in \{1, \dots, N_x\}$ et pour toute espèce $\alpha \in \{1, \dots, N\}$. On définit $(N_v)_i^{\alpha,n+1}$ le nombre de vitesses discrètes pour l'espèce α au point x_i et au temps t^{n+1} . L'étape (1) de la méthode consiste à définir les grilles en vitesse $\mathcal{V}_i^{\alpha,n+1} = \{(v_{i,k}^{\alpha,n+1})_k, k \in \{1, \dots, (N_v)_i^{\alpha,n+1}\}\}$, où

$$v_{i,k}^{\alpha,n+1} = (V_{\min})_i^{\alpha,n+1} + (k - 1) \frac{(V_{\max})_i^{\alpha,n+1} - (V_{\min})_i^{\alpha,n+1}}{(N_v)_i^{\alpha,n+1} - 1}, \quad (4.7)$$

où $(V_{\min})_i^{\alpha,n+1}$ et $(V_{\max})_i^{\alpha,n+1}$ dépendent de l'espace, du temps et de l'espèce. Afin de calculer les vitesses discrètes qui composent cet ensemble, il est nécessaire de calculer les bornes adéquates V_{\min} et V_{\max} .

Ces bornes sont données par la formule suivante, pour tout i, α :

$$[(V_{\min})_i^{\alpha,n+1}, (V_{\max})_i^{\alpha,n+1}] = [u_i^{\alpha,n+1} - l_i^\alpha \sqrt{\frac{k_B T_i^{\alpha,n+1}}{m^\alpha}}, u_i^{\alpha,n+1} + l_i^\alpha \sqrt{\frac{k_B T_i^{\alpha,n+1}}{m^\alpha}}], \quad (4.8)$$

où l^α est un nombre entier qui peut être réglé afin de décrire correctement le régime d'écoulement que l'on considère. Dans le cas d'écoulements du type décrit par les

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

équations d'Euler, où la fonction de distribution est supposée comme étant toujours à l'état de Maxwellienne, l'intervalle de confiance d'une distribution gaussienne donne $l_i^\alpha = 4$, ce qui donne une valeur minimale pour le choix de l^α .

Selon l'équation (4.8), le calcul des grilles en vitesse requiert la connaissance de $u_i^{\alpha,n+1}$ et $T_i^{\alpha,n+1}$. Par ailleurs, la connaissance de ces quantités permet également de calculer la Maxwellienne $(\overline{M}_{i,k}^{\alpha,n+1})_k$, ce qui permet d'impliciter l'opérateur BGK dans le schéma (plus de détails sont données à la section suivante). Afin d'obtenir des équations sur ces quantités, considérons la semi-discrétisation de l'équation (4.3), où seule la variable de vitesse v est laissée continue :

$$f_i^{\alpha,n+1}(v) = f_i^{\alpha,n}(v) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n}(v) - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}(v)) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\overline{M}_i^{\alpha,n+1}(v) - f_i^{\alpha,n+1}(v)), \quad (4.9)$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n}(v) = \frac{1}{2} (v (f_{i+1}^{\alpha,n}(v) + f_i^{\alpha,n}(v)) - |v| (f_{i+1}^{\alpha,n}(v) - f_i^{\alpha,n}(v))),$$

est la discrétisation classique des flux par le schéma amont. Notons que l'implicitation de l'opérateur de relaxation permet d'obtenir un schéma inconditionnellement stable par rapport à la fréquence de relaxation. Ainsi, le schéma préserve l'asymptotique à la limite $\nu^\alpha \rightarrow +\infty$, ce qui donne un schéma cinétique pour Euler. En prenant les moments en vitesse de cette équation, on obtient des équations de conservation, qui permettent de calculer les quantités macroscopiques, par la résolution de systèmes linéaires.

Concernant les vitesses macroscopiques, on énonce la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Pour tout point x_i du domaine physique, i.e. $\forall i \in \{1, \dots, N_x\}$, les vitesses macroscopiques $(u_i^{\alpha,n+1})_\alpha$ vérifient le système linéaire suivant, de taille $N \times N$:*

$$A_i U_i^{n+1} = B_i, \quad (4.10)$$

où

$$U_i^{n+1} = (u_i^{1,n+1}, \dots, u_i^{N,n+1})^T, \quad B_i^\alpha = \rho_i^{\alpha,n} u_i^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha v (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) \rangle,$$

et pour tout $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ et $\beta \neq \alpha$, les éléments de la matrice A_i correspondants s'expriment par :

$$(A_i)_{\alpha\alpha} = \rho_i^{\alpha,n+1} + 2\Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,n+1},$$

$$(A_i)_{\alpha\beta} = -2\Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,n+1}.$$

En faisant l'hypothèse que la densité ne s'annule jamais ($\rho_i^{\alpha,n} > 0$), chaque système (4.10) admet une et une seule solution.

Démonstration. En intégrant l'équation (4.3) par rapport à v , les concentrations au temps t^{n+1} peuvent être calculées, $\forall i \in \{1, \dots, N_x\}$ et $\alpha \in \{1, \dots, N\}$:

$$n_i^{\alpha, n+1} = n_i^{\alpha, n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle \phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, n} \rangle.$$

Ensuite, la fréquence de relaxation au temps t^{n+1} , $\nu^{\alpha, n+1} = \sum_{\beta=1}^N \nu^{\alpha\beta} n^{\beta, n+1}$, peut à son tour être calculée. Pour obtenir les équations sur les vitesses, on prend le moment d'ordre 1 de l'équation (4.3), et on obtient :

$$\rho_i^{\alpha, n+1} u_i^{\alpha, n+1} = \rho_i^{\alpha, n} u_i^{\alpha, n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^{\alpha} v (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, n}) \rangle + \Delta t \nu_i^{\alpha, n+1} \rho_i^{\alpha, n+1} (\bar{u}_i^{\alpha, n+1} - u_i^{\alpha, n+1}).$$

Par définition des vitesses de mélange (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_i^{\alpha, n+1} u_i^{\alpha, n+1} &= \rho_i^{\alpha, n} u_i^{\alpha, n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^{\alpha} v (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, n}) \rangle \\ &\quad + 2\Delta t n_i^{\alpha, n+1} \sum_{\beta=1}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, n+1} (u_i^{\beta, n+1} - u_i^{\alpha, n+1}). \end{aligned}$$

Enfin, pour tout α, i :

$$\begin{aligned} (\rho_i^{\alpha, n+1} + 2\Delta t n_i^{\alpha, n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, n+1}) u_i^{\alpha, n+1} &- 2\Delta t n_i^{\alpha, n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, n+1} u_i^{\beta, n+1} \\ &= \rho_i^{\alpha, n} u_i^{\alpha, n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^{\alpha} v (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, n}) \rangle. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être regroupées sous la forme (4.10).

Pour tout i , la matrice A_i est une matrice à diagonale strictement dominante (grâce à l'hypothèse de solutions non-vides, i.e. $\rho_i^{\alpha, n} > 0$). Ainsi, à la faveur du théorème de Gershgorin, la matrice A_i est inversible et le système possède une unique solution. \square

En résolvant ce système, on obtient les valeurs des vitesses partielles $u_i^{\alpha, n+1}$, qui permettent ensuite de calculer les vitesses de mélange $\bar{u}_i^{\alpha, n+1}$ (selon l'équation (4.5)). En supposant ces quantités connues, une procédure similaire peut être appliquée pour calculer les énergies internes $\varepsilon_i^{\alpha, n+1}$, qui servent à leur tour à calculer les températures $T_i^{\alpha, n+1}$ et les températures de mélange $\bar{T}_i^{\alpha, n+1}$, selon l'équation (4.6). La procédure est résumée par la proposition suivante :

Proposition 4.2. *En chaque point d'espace x_i , i.e. $\forall i \in \{1, \dots, N_x\}$, les énergies internes $(\varepsilon_i^{\alpha, n+1})_{\alpha}$ vérifient le système linéaire $N \times N$ suivant :*

$$G_i Y_i^{n+1} = C_i, \tag{4.11}$$

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

où $Y_i^{n+1} = (\varepsilon_i^1, \dots, \varepsilon_i^N)^T$ correspond au vecteur de toutes les énergies internes au point x_i . Par ailleurs, $C_i \in \mathbb{R}^N$ et la composante α de C_i s'écrit :

$$\begin{aligned} C_i^\alpha &= E_i^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} m^\alpha n_i^{\alpha,n+1} (u_i^{\alpha,n+1})^2 + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha}{2} n_i^{\alpha,n+1} ((\bar{u}_i^{\alpha,n+1})^2 - (u_i^{\alpha,n+1})^2) \\ &\quad - \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha \nu_i^{\alpha,n+1}}{2} (\bar{u}_i^{\alpha,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2 \\ &\quad + \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,n+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} (m^\beta \frac{(u_i^{\beta,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2}{2}), \end{aligned}$$

où $E_i^{\alpha,n}$ représente l'énergie totale de l'espèce α au temps t^n et au point x_i . Enfin, les entrées de la matrice $G_i \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ s'expriment :

$$\begin{aligned} (G_i)_{\alpha\alpha} &= n_i^{\alpha,n+1} + \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,n+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta}, \\ (G_i)_{\alpha\beta} &= -\Delta t n_i^{\alpha,n+1} \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,n+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta}. \end{aligned}$$

Démonstration. Le moment d'ordre 2 de l'équation (4.9) mène à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m^\alpha n_i^{\alpha,n+1} (u_i^{\alpha,n+1})^2 + n_i^{\alpha,n+1} \varepsilon_i^{\alpha,n+1} &= E_i^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) \rangle \\ &\quad + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\bar{E}_i^{\alpha,n+1} - E_i^{\alpha,n+1}). \end{aligned}$$

A l'aide des définitions des énergies de mélange (4.6), il vient

$$\begin{aligned} n_i^{\alpha,n+1} \varepsilon_i^{\alpha,n+1} &= E_i^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} m^\alpha n_i^{\alpha,n+1} (u_i^{\alpha,n+1})^2 + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha}{2} n_i^{\alpha,n+1} ((\bar{u}_i^{\alpha,n+1})^2 - (u_i^{\alpha,n+1})^2) \\ &\quad - \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha \nu_i^{\alpha,n+1}}{2} (\bar{u}_i^{\alpha,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2 \\ &\quad + \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} \frac{4 n_i^{\beta,n+1}}{m^\alpha + m^\beta} (\varepsilon_i^{\beta,n+1} - \varepsilon_i^{\alpha,n+1} + m^\beta \frac{(u_i^{\beta,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2}{2}). \end{aligned}$$

Puis, en réarrangeant les termes, on obtient les équations suivantes, portant sur les

énergies internes :

$$\begin{aligned}
 & (n_i^{\alpha,n+1} + \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} \frac{4n_i^{\beta,n+1}}{m^\alpha + m^\beta}) \varepsilon_i^{\alpha,n+1} \\
 & - \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} \frac{4n_i^{\beta,n+1}}{m^\alpha + m^\beta} \varepsilon_i^{\beta,n+1} \\
 & = E_i^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,n} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,n}) \rangle - \frac{m^\alpha}{2} n_i^{\alpha,n+1} (u_i^{\alpha,n+1})^2 \\
 & + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha}{2} n_i^{\alpha,n+1} ((\bar{u}_i^{\alpha,n+1})^2 - (u_i^{\alpha,n+1})^2) \\
 & - \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \frac{m^\alpha \nu_i^{\alpha,n+1}}{2} (\bar{u}_i^{\alpha,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2 \\
 & + \Delta t n_i^{\alpha,n+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} \frac{4n_i^{\beta,n+1}}{m^\alpha + m^\beta} \frac{m^\beta}{2} (u_i^{\beta,n+1} - u_i^{\alpha,n+1})^2.
 \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être réécrites de façon condensée sous la forme (4.11). Grâce aux mêmes arguments que précédemment (théorème de Gershgorin), l'existence et l'unicité des solutions sont assurées. \square

Numériquement, toutes les intégrales par rapport à v sont approchées par une formule de quadrature des trapèzes, qui s'énonce :

$$\langle f^\alpha(t^n, x_i, v) \rangle = \sum_{k=1}^{N_v} f^\alpha(t^n, x_i, v_k) \omega_k \Delta v_{i,k}^{\alpha,n},$$

où $\omega_1 = \omega_{N_v} = \frac{1}{2}$ et $\omega_k = 1$ pour $k = \{2, \dots, N_v - 1\}$.

A la faveur des ces deux propositions, les bornes des intervalles tronqués peuvent être calculées, selon la formule (4.8), et les vitesses discrètes sont données par :

$$v_{i,k}^{\alpha,n+1} = (V_{\min})_i^{\alpha,n+1} + (k-1) \frac{(V_{\max})_i^{\alpha,n+1} - (V_{\min})_i^{\alpha,n+1}}{(N_v)_i^{\alpha,n+1} - 1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, (N_v)_i^{\alpha,n+1}\},$$

pour tout i et tout α .

4.3.3 Interpolation et calcul des fonctions de distribution

Une fois le calcul des grilles en vitesse $\mathcal{V}_i^{\alpha,n+1}$ réalisé, on peut écrire la discrétisation complète de l'équation (4.3) sur celles-ci. On notera donc l'approximation de la fonction de distribution sur ces grilles de la façon suivante :

$$f_{i,k}^{\alpha,n+1} \simeq f^\alpha(t^{n+1}, x_i, v_{i,k}^{\alpha,n+1}).$$

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

On a alors, en écrivant l'équation (4.9) sur chacune des vitesses discrètes :

$$f_{i,k}^{\alpha,n+1} = \tilde{f}_{i,k}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,n} - \tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,n}) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\overline{M}_{i,k}^{\alpha,n+1} - f_{i,k}^{\alpha,n+1}),$$

ce qui donne la formule de mise à jour suivante :

$$f_{i,k}^{\alpha,n+1} = \frac{1}{1 + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1}} \left(\tilde{f}_{i,k}^{\alpha,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,n} - \tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,n}) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} \overline{M}_{i,k}^{\alpha,n+1} \right), \quad (4.12)$$

où $\tilde{f}_{i,k}^{\alpha,n}$, $\tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,n}$, $\tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,n}$ représentent les interpolations de ces quantités sur la grille $\mathcal{V}_i^{\alpha,n+1}$. Cette phase d'interpolation est nécessaire car les quantités intervenant dans le stencil du schéma amont sont toutes définies sur des grilles différentes, avec des vitesses discrètes différentes. Pour cela, on emploie une procédure de type ENO4 (Essentially Non-Oscillatory with 4 points). Cette méthode a été développée par Shu et présentée en détails dans l'ouvrage [96]. Nous donnerons ici un aperçu de cette procédure d'interpolation.

On considère par exemple l'ensemble $(f_{i,k}^{\alpha,n})_k$, défini sur la grille cinétique $\mathcal{V}_i^{\alpha,n}$. L'objectif est d'interpoler les éléments de cet ensemble sur la grille du temps suivant, i.e. $\mathcal{V}_i^{\alpha,n+1}$. Pour chaque vitesse $v_{i,k}^{\alpha,n+1} \in \mathcal{V}_i^{\alpha,n+1}$, la première étape consiste à trouver l'indice l tel que

$$v_{i,k}^{\alpha,n+1} \in]v_{i,l}^{\alpha,n}, v_{i,l+1}^{\alpha,n}[,$$

où l'on a par avance exclu le cas où $v_{i,k}^{\alpha,n+1}$ se trouverait en dehors des bornes de la grille $\mathcal{V}_i^{\alpha,n}$. Dans ce cas, puisque l'on travaille avec des fonctions de distributions qui sont supposées à support compact, la valeur interpolée est fixée à 0.

Une fois que la vitesse $v_{i,k}^{\alpha,n+1}$ a été localisée, la méthode consiste à trouver le meilleur stencil à 4 points pour interpoler les valeurs. "Meilleur" prend ici le sens suivant : il est nécessaire d'éviter d'interpoler à travers des discontinuités, ce qui dégraderait la qualité des reconstructions. Ainsi, la procédure consiste à considérer le stencil $\{v_{i,l}^{\alpha,n}, v_{i,l+1}^{\alpha,n}\}$ et d'ajouter un troisième point, soit $v_{i,l-1}^{\alpha,n}$, soit $v_{i,l+2}^{\alpha,n}$, en choisissant le point qui donne la différence divisée la plus petite. Ensuite, sans perte de généralités, en supposant que le point $v_{i,l-1}^{\alpha,n}$ a été choisi, le quatrième et dernier point est choisi parmi $v_{i,l-2}^{\alpha,n}$ et $v_{i,l+2}^{\alpha,n}$, à l'aide du même critère que précédemment.

Selon les résultats obtenus à la section précédente, les quantités réelles et fictives au temps t^{n+1} sont connues. Ainsi, $\overline{M}_{i,k}^{\alpha,n+1} \simeq \overline{M}^{\alpha}(t^{n+1}, x_i, v_{i,k}^{\alpha,n+1})$ est également connue, pour tout α, i et k . En conséquence, toutes les quantités apparaissant dans la formule de mise à jour (4.12) sont connues, et la méthode peut être appliquée.

4.3.4 Élargissement de grilles

Dans cette section, on présente une amélioration de la méthode, qui permet de gérer plus facilement les cas très raréfiés. Celle-ci consiste à permettre à la méthode de s'adapter au niveau de raréfaction du gaz. Plus précisément, dans la méthode

développée jusqu'à présent, les grandeurs l^α sont choisies *ad hoc* au début du calcul. Souvent, lorsque les distributions sont proches de distributions Maxwelliennes, choisir $l^\alpha = 4$ ou 5 suffit à obtenir de très bons résultats, comme on le mettra en évidence dans la section 4.5. Cependant, lorsque le flot est particulièrement raréfié, il peut être nécessaire de procéder à un test de convergence, même pour les méthodes adaptatives.

L'extension proposée ici consiste à *splitter* la partie hyperbolique et la partie relaxation des équations. En chaque point d'espace, une fois la partie transport effectuée, on calcule le rapport entre la valeur maximale de la distribution et la valeur de la fonction à la borne de droite du domaine en vitesse. Si ce rapport est supérieur à une tolérance donnée, on rajoute une vitesse discrète à droite du domaine et on répète l'étape de transport. On réitère cette procédure jusqu'à ce que le critère sur le rapport soit atteint, puis on applique cette même procédure à la borne gauche du domaine. Cette méthode sera utilisée pour le cas test du transfert de chaleur dans la dernière section, pour une configuration très raréfiée.

4.4 Extension de la méthode : grilles cinétiques décalées

La méthode présentée dans la section précédente nécessite, pour tout i et tout α , l'interpolation des trois fonctions de distributions $f_i^{\alpha,n}(v)$, $f_{i-1}^{\alpha,n}(v)$ et $f_{i+1}^{\alpha,n}(v)$ sur chaque vitesse discrète $v_{i,k}^{\alpha,n+1}$, pour tout k . Avec la méthode fondée sur la grille statique classique, cette quantité importante d'opérations fait croître la complexité de la méthode et dégrade la précision des résultats numériques. Afin de diminuer le nombre d'interpolations, la méthode à grilles cinétiques locales présentée plus haut peut être améliorée de la façon suivante. Une fois que les grilles au temps t^{n+1} ont été calculées par la procédure de la section 4.3.2, celles-ci sont ensuite légèrement décalées afin de faire correspondre le plus de vitesses discrètes d'une grille à l'autre, de sorte à ce que toutes les interpolations correspondantes deviennent inutiles, puisque la fonction de distribution sera alors déjà connue aux points requis.

4.4.1 Notations

Premièrement, considérons l'initialisation des grilles locales. Pour un jeu de données initiales $n_i^{\alpha,0}$, $u_i^{\alpha,0}$, $T_i^{\alpha,0}$ et une quantité de vitesses discrètes de référence N_v , chaque grille $\mathcal{V}_i^{\alpha,0}$ est calculée à l'aide de la formule (4.8). Ensuite, afin de les décaler, on commence par identifier le plus petit pas de vitesse pour chaque espèce :

$$\Delta v_{\min}^{\alpha,0} = \min_i (\Delta v_i^{\alpha,0}). \quad (4.13)$$

Ensuite, les valeurs de tous les autres pas de vitesse sont réajustées de sorte à être égales au multiple de $\Delta v_{\min}^{\alpha,0}$ le plus proche. La valeur corrigée sera ici notée à l'aide

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

d'une barre :

$$\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0} = \lfloor \frac{\Delta v_i^{\alpha,0}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,0}} \rfloor \Delta v_{\min}^{\alpha,0}, \quad (4.14)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est défini comme l'entier le plus proche de x . Par la suite, il est alors nécessaire de modifier les bornes de l'intervalle de manière similaire : la borne inférieure $(V_{\min})_i^{\alpha,0}$ est décalée pour être égale au plus grand multiple de $\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}$ inférieur à $(V_{\min})_i^{\alpha,0}$. De manière analogue, la borne supérieure $(V_{\max})_i^{\alpha,0}$ est ajustée au plus petit multiple de $\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}$ supérieur à $(V_{\max})_i^{\alpha,0}$. Les quantités ajustées s'écrivent alors :

$$(\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,0} = \lfloor \frac{(V_{\min})_i^{\alpha,0}}{\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}} \rfloor \overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}, \quad (\overline{V}_{\max})_i^{\alpha,0} = \lceil \frac{(V_{\max})_i^{\alpha,0}}{\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}} \rceil \overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}, \quad (4.15)$$

où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ représentent respectivement la partie entière de x et la partie entière de $x + 1$. Cette procédure permet d'assurer que, pour chaque α , toutes les quantités $(\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,0}$, $(\overline{V}_{\max})_i^{\alpha,0}$ et $\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}$ sont des multiples dans \mathbb{Z} de $\Delta v_{\min}^{\alpha,0}$.

4.4.2 Calcul des grilles décalées au temps initial

A partir de là, les nouvelles grilles décalées peuvent être calculées. Puisque les bornes et les pas ont été modifiés, le nombre de vitesses discrètes pour chaque grille peut également augmenter. Cependant, on peut démontrer que le nombre de vitesses rajoutées reste relativement faible. Le nombre de vitesses après décalage au point x_i pour l'espèce α , noté $(\overline{N}_v)_i^{\alpha,0}$ est donné par

$$(\overline{N}_v)_i^{\alpha,0} = \frac{(V_{\max})_i^{\alpha,0} - (V_{\min})_i^{\alpha,0}}{\overline{\Delta v}_i^{\alpha,0}} - 1. \quad (4.16)$$

Ainsi, selon la formule (4.7), les vitesses discrètes sont obtenues par l'expression suivante :

$$\mathcal{V}_i^{\alpha,0} = \{(v_{i,k}^{\alpha,0})_k = (\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,0} + (k-1) \frac{(\overline{V}_{\max})_i^{\alpha,0} - (\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,0}}{(\overline{N}_v)_i^{\alpha,0} - 1}, k \in \{1, \dots, (\overline{N}_v)_i^{\alpha,0}\}\}. \quad (4.17)$$

4.4.3 Calcul des grilles décalées pour les temps suivants

Pour les temps suivants, la procédure (4.13)-(4.14)-(4.15)-(4.16)-(4.17) est appliquée afin d'obtenir les bornes et les pas au temps t^{n+1} multiples de la quantité de référence. Cependant, il est maintenant nécessaire de faire en sorte que les grilles soient également homothétiques aux grilles au temps t^n . Pour cela, une fois que le calcul décrit par (4.13) a été réalisé, deux cas peuvent survenir.

Le premier cas est le suivant :

$$\Delta v_{\min}^{\alpha,n+1} \geq \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Dans ce cas-ci, $\Delta v_{\min}^{\alpha,n+1}$ est pris égal à son multiple de $\Delta v_{\min}^{\alpha,n}$ le plus proche, donné par :

$$(\overline{\Delta v_{\min}})^{\alpha,n+1} = \left\lfloor \frac{(\Delta v_{\min})^{\alpha,n+1}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,n}} \right\rfloor \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Ainsi, les vitesses discrètes au temps t^{n+1} sont multiples de $\Delta v_{\min}^{\alpha,n}$.

Le second cas est :

$$\Delta v_{\min}^{\alpha,n+1} \leq \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Dans ce cas-là, $\Delta v_{\min}^{\alpha,n+1}$ est ajusté de sorte à être égal au diviseur de $\Delta v_{\min}^{\alpha,n}$ le plus proche, dont l'expression est donnée par :

$$(\overline{\Delta v_{\min}})^{\alpha,n+1} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{(\Delta v_{\min})^{\alpha,n+1}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,n}} \right\rfloor} \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Ici, on s'assure donc que toutes les vitesses discrètes au temps t^n et t^{n+1} sont des multiples dans \mathbb{Z} de $(\overline{\Delta v_{\min}})^{\alpha,n+1}$. Une fois cet ajustement de $(\overline{\Delta v_{\min}})^{\alpha,n+1}$ effectué, la fin de la procédure (4.14)-(4.15)-(4.16)-(4.17) peut être appliquée comme précédemment.

La proposition suivante, concernant l'augmentation du nombre de vitesses discrètes au cours de la phase d'ajustement, peut être démontrée.

Proposition 4.3. *Le nombre de vitesses discrètes au point x_i pour l'espèce α au temps t^{n+1} après décalage, $(\overline{N}_v)_i^{\alpha,n}$, peut s'exprimer en fonction du nombre de vitesses discrètes avant décalage $(N_v)_i^{\alpha,n}$:*

$$(\overline{N}_v)_i^{\alpha,n} = \frac{((N_v)_i^{\alpha,n} + 1)(k_i^{\alpha,n} + s_i^{\alpha,n})}{k_i^{\alpha,n} + \lfloor s_i^{\alpha,n} \rfloor} - 1 + R_i^{\alpha,n}, \quad (4.18)$$

où $R_i^{\alpha,n} \in [0, 2[$ et $k_i^{\alpha,n} \in \mathbb{N}^*$, $s_i^{\alpha,n} \in [0, 1[$ sont définis par

$$\Delta v_i^{\alpha,n} = (k_i^{\alpha,n} + s_i^{\alpha,n}) \Delta v_{\min}^{\alpha,n}, \quad (4.19)$$

qui peuvent, de manière équivalente, être définis par :

$$k_i^{\alpha,n} = \left\lfloor \frac{\Delta v_i^{\alpha,n}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,n}} \right\rfloor, \quad s_i^{\alpha,n} = \frac{\Delta v_i^{\alpha,n}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,n}} - \left\lfloor \frac{\Delta v_i^{\alpha,n}}{\Delta v_{\min}^{\alpha,n}} \right\rfloor.$$

Démonstration. Selon les équations (4.19) et (4.14), il vient :

$$(\overline{\Delta v})_i^{\alpha,n} = (k_i^{\alpha,n} + \lfloor s_i^{\alpha,n} \rfloor) \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Ensuite, selon l'équation (4.15), l'intervalle en vitesse après décalage est légèrement plus grand que l'intervalle avant décalage. Cependant, il existe $R_i^{\alpha,n} \in [0, 2[$ tel que :

$$(\overline{V}_{\max})_i^{\alpha,n} - (\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,n} = (V_{\max})_i^{\alpha,n} - (V_{\min})_i^{\alpha,0} + R_i^{\alpha,n} \overline{\Delta v}_i^{\alpha,n}. \quad (4.20)$$

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

Ceci traduit simplement le fait que, afin d'obtenir des bornes qui sont des multiples de $(\overline{\Delta v})_i^{\alpha,n}$, la longueur de l'intervalle est au plus accrue d'une quantité strictement inférieure à $2(\overline{\Delta v})_i^{\alpha,n}$. A présent, en se servant des définitions de N_v et $(\overline{N}_v)_i^{\alpha,n}$, on trouve :

$$\begin{aligned} (\overline{V}_{\max})_i^{\alpha,n} - (\overline{V}_{\min})_i^{\alpha,n} &= ((\overline{N}_v)_i^{\alpha,n} + 1)(\overline{\Delta v})_i^{\alpha,n}, \\ (V_{\max})_i^{\alpha,n} - (V_{\min})_i^{\alpha,n} &= (N_v + 1)(\Delta v)_i^{\alpha,n}. \end{aligned}$$

En injectant ces équations dans (4.20), on obtient la relation suivante :

$$((\overline{N}_v)_i^{\alpha,n} + 1)(\overline{\Delta v})_i^{\alpha,n} = (N_v + 1)(\Delta v)_i^{\alpha,n} + R_i^{\alpha,n} \overline{\Delta v}_i^{\alpha,n},$$

qui mène, à la faveur des équations (4.19) et (4.4.3), à :

$$((\overline{N}_v)_i^{\alpha,n} + 1 - R_i^{\alpha,n})(k_i^{\alpha,n} + \lfloor s_i^{\alpha,n} \rfloor) \Delta v_{\min}^{\alpha,n} = (N_v + 1)(k_i^{\alpha,n} + \lfloor s_i^{\alpha,n} \rfloor) \Delta v_{\min}^{\alpha,n}.$$

Enfin, en simplifiant par $\Delta v_{\min}^{\alpha,n}$ et en réarrangeant les termes, on obtient la relation (4.18). \square

Une estimation grossière de la formule (4.18) indique que, dans le cas le plus défavorable où $\Delta v_i^{\alpha,n} = \frac{3}{2} \Delta v_{\min}^{\alpha,n}$, l'accroissement du nombre de vitesses discrètes n'excédera jamais 50 pourcents. Cependant, comme il sera illustré dans les expérimentations numériques, en fonction du cas test en considération, l'augmentation de la complexité due à cette augmentation du nombre de vitesses discrètes peut contrebalancer le gain dû à l'économie des interpolations.

4.5 Résultats numériques

Dans cette section, plusieurs cas tests sont présentés afin d'étudier le comportement de la méthode. On compare cette méthode avec les résultats obtenus pour la méthode classique à grille unique. Comme dit précédemment, la méthode classique nécessite l'emploi d'une grille suffisamment grande pour contenir la distribution la plus large et suffisamment bien maillée pour décrire la distribution la plus resserrée. De plus, comme la grille est fixe en temps, elle doit être choisie de sorte à être convenable pour tout temps de simulation, ce qui nécessite souvent un test de convergence en vitesse. L'objectif de cette section est de montrer que, pour un jeu de paramètres de discrétisation donné, la méthode à grilles locales donne de meilleurs résultats et que la méthode classique demande des bornes en vitesse plus grande et plus de vitesses discrètes. Pour fixer les notations, les méthodes adaptatives seront notées LDV (Local Discrete Velocities), SLDV (Shifted Local Discrete Velocities) et la méthode standard sera nommée DVM (Discrete Velocity Method). Deux paramètres principaux seront utilisées pour discriminer les méthodes : le nombre de vitesses discrètes N_v et la longueur du domaine en vitesse (l^α dans l'équation (4.8)).

Dans toutes les expérimentations qui suivent, la constante de Boltzmann sera notée k_B et sera égale à $1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$. De plus, dans tous les cas tests,

$L_{\min} = 0$ et $L_{\max} = 1\text{m}$ et le domaine spatial sera discrétisé avec $N_x = 5000$ points, sauf indication contraire. Par ailleurs, le nombre de composantes du gaz sera fixé à $N = 2$, mais la méthode fonctionne pour tout nombre de composantes, et aucune raideur n'apparaît dans la méthode si N augmente.

4.5.1 Tube de Sod

Le premier cas test est un problème de type tube de Sod, considéré ici pour un gaz à deux composantes de masses moléculaires respectives $m^1 = 66,3 \cdot 10^{-27}$ kg et $m^2 = 66,3 \cdot 10^{-28}$ kg, ce qui correspond à un rapport de 10. Les données initiales consistent en une discontinuité en vitesses et températures, données par :

$$\begin{cases} u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = 213,92 \text{ m.s}^{-1}, & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = -213,92 \text{ m.s}^{-1}, & \text{si } x \in [0.5, 1], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} T^1(t_0, x) = 300 \text{ K}, T^2(t_0, x) = 600 \text{ K}, & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ T^1(t_0, x) = 500 \text{ K}, T^2(t_0, x) = 900 \text{ K}, & \text{si } x \in [0.5, 1], \end{cases}$$

et les densités sont initialement constantes égales à 1 kg.m^{-3} sur tout le domaine. La solution est calculée au temps $T = 10^{-4}$ s. Le nombre de Knudsen est choisi égal à 10^{-3} , ce qui correspond à un régime légèrement raréfié. Les paramètres N_v et l , ainsi que le temps CPU, sont compilés dans le tableau 4.4. Les résultats sont présentés sur les figures 4.1, 4.2 et 4.3.

La méthode LDV se révèle très efficace avec un très petit nombre de vitesses discrètes ($N_v = 10$) et une longueur de grille standard ($l^\alpha = 5$). La méthode SLDV donne des résultats comparables à la méthode LDV pour un nombre de vitesses plus faible ($N_v = 7$) et une grille plus courte ($l^\alpha = 4$). Par ailleurs, la méthode DVM nécessite un domaine plus grand ($l^\alpha = 6$) et plus de vitesses discrètes ($N_v = 100$). Sans quoi, si l'on utilise les mêmes paramètres discrets que pour la méthode SLDV, les quantités macroscopiques ne sont pas correctement calculées, comme on le constate sur les figures 4.2 et 4.3.

Au sujet des temps de calcul, on s'aperçoit que la méthode LDV est plus coûteuse que la méthode DVM classique. Cependant, grâce au gain de temps en limitant les interpolations et à la capacité à diminuer le nombre initial de vitesses discrètes, la méthode SLDV est la méthode la plus rapide.

4.5.2 Blast waves

Le deuxième cas test est un cas de *blast waves* à 2 espèces, de masses moléculaires respectives $m^1 = 66,3 \cdot 10^{-27}$ kg et $m^2 = 20 \times m^1 = 13,26 \cdot 10^{-25}$ kg. Ce cas consiste

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

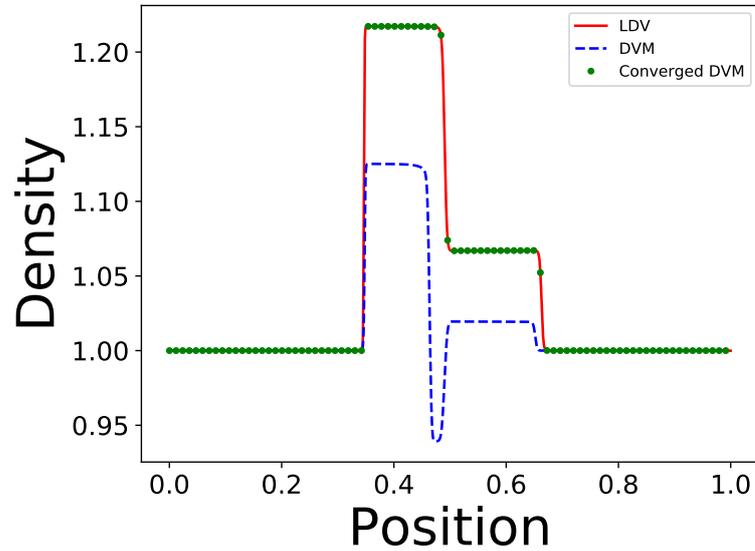


FIGURE 4.1 – Densités pour un cas test du tube de Sod ($K_n = 10^{-3}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 10 avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 10$ pour la méthode LDV, $l = 4$ et $N_v = 7$ pour la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode DVM convergée.

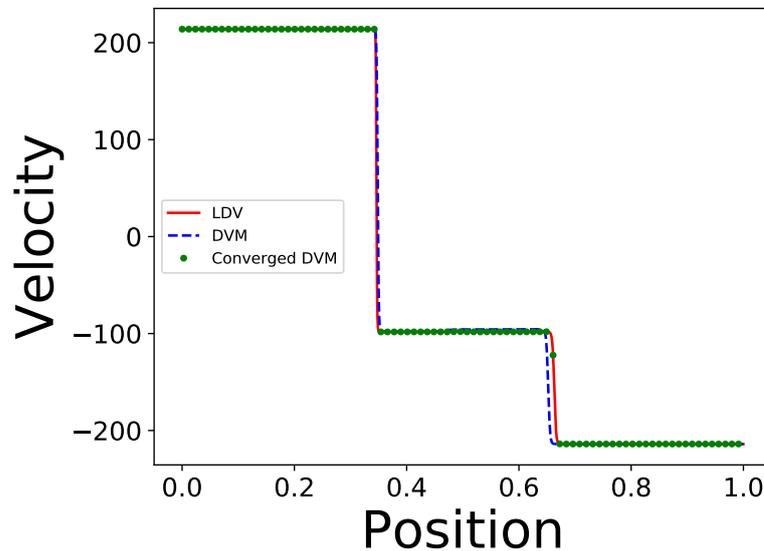


FIGURE 4.2 – Vitesses pour un cas test du tube de Sod ($K_n = 10^{-3}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 10 avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 10$ pour la méthode LDV, $l = 4$ et $N_v = 7$ pour la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode DVM convergée.

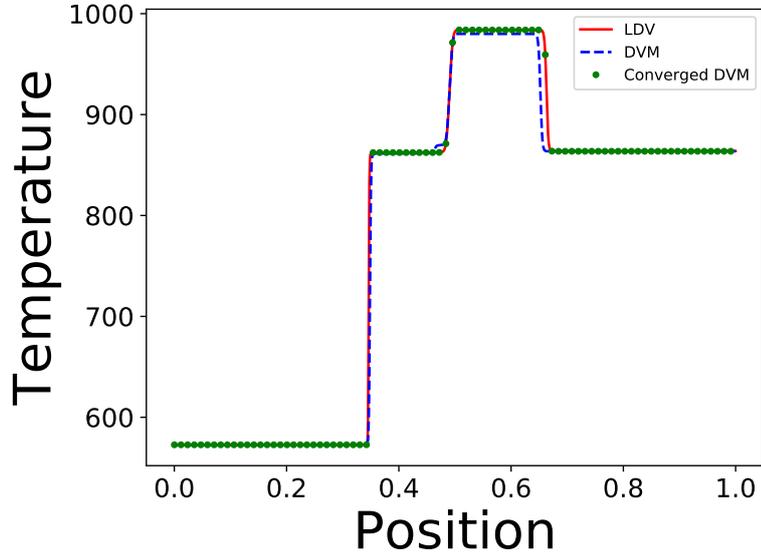


FIGURE 4.3 – Températures pour un cas test du tube de Sod ($K_n = 10^{-3}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 10 avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 10$ pour la méthode LDV, $l = 4$ et $N_v = 7$ pour la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode DVM convergée.

	l	N_v	Temps CPU
LDV	5	10	96,2s
SLDV	4	7	77,4s
DVM	5	30	86,7s

FIGURE 4.4 – Paramètres de discrétisation cinétique et temps de calcul pour le cas 4.5.1

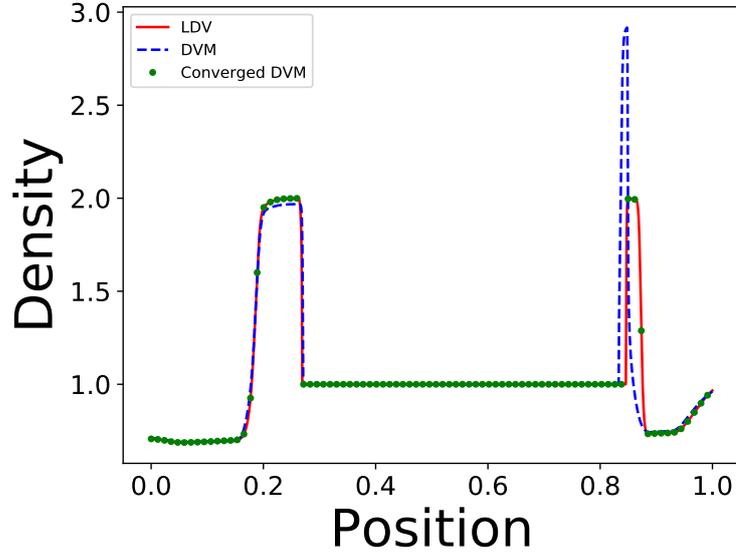


FIGURE 4.5 – Densités pour une interaction de blast waves pré-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

en deux discontinuités initiales importantes en température, données par :

$$\begin{cases} \rho^1(t_0, x) = \rho^2(t_0, x) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \forall x \in [0, 1], \\ u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = 0 \text{ m.s}^{-1}, & \forall x \in [0, 1], \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 4.8 \text{ K}, & \text{si } x \in [0, 0.1], \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 4.8 \cdot 10^{-5} \text{ K}, & \text{si } x \in [0.1, 0.9], \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 4.8 \cdot 10^{-1} \text{ K}, & \text{si } x \in [0.9, 1]. \end{cases}$$

La solution est calculée à deux temps différents, premièrement au temps $t_1 = 0.008$ s, avant la collision des deux chocs, puis au temps $t_2 = 0.05$ s, après la collision des deux chocs. Le nombre de Knudsen est égal à 10^{-3} , comme pour le cas précédent. Pour la solution pré-choc, les résultats sont présentés aux figures 4.5, 4.6 et 4.7. Pour la solution post-choc, voir les figures 4.8, 4.9 et 4.10. Enfin, les paramètres discrets et les temps de calcul sont contenus dans les tableaux 4.11 et 4.12.

Dans ce test, la donnée initiale contient deux gradients importants en température. Cela signifie que la méthode DVM classique doit englober toutes les fonctions de distribution en une seule grille. Ainsi, un nombre relativement important de vitesses discrètes est nécessaire (200). Au contraire, la méthode LDV fonctionne parfaitement avec seulement 30 vitesses discrètes. Pour le premier temps de calcul, la méthode LDV fonctionne mieux que la méthode SLDV. Cela est une conséquence de l'augmentation du nombre de vitesses discrètes lors de l'ajustement des grilles, qui s'équilibre avec le gain de temps dû à la réduction du nombre d'interpolations. Ce-

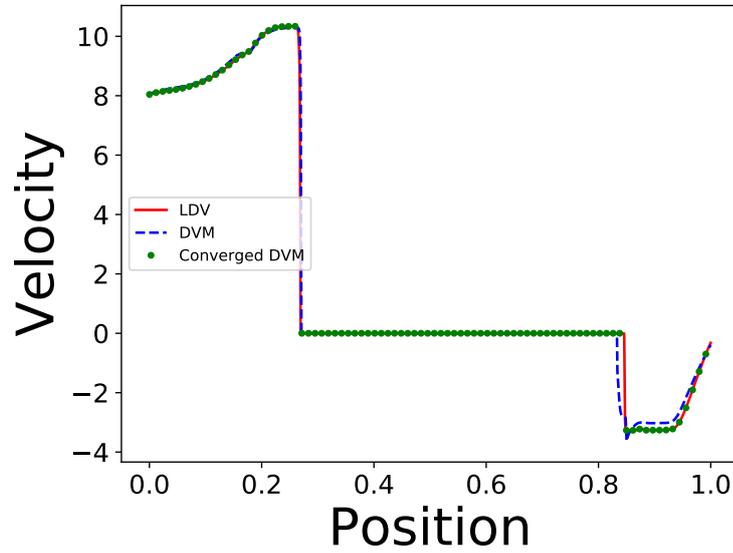


FIGURE 4.6 – Vitesses pour une interaction de blast waves pré-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

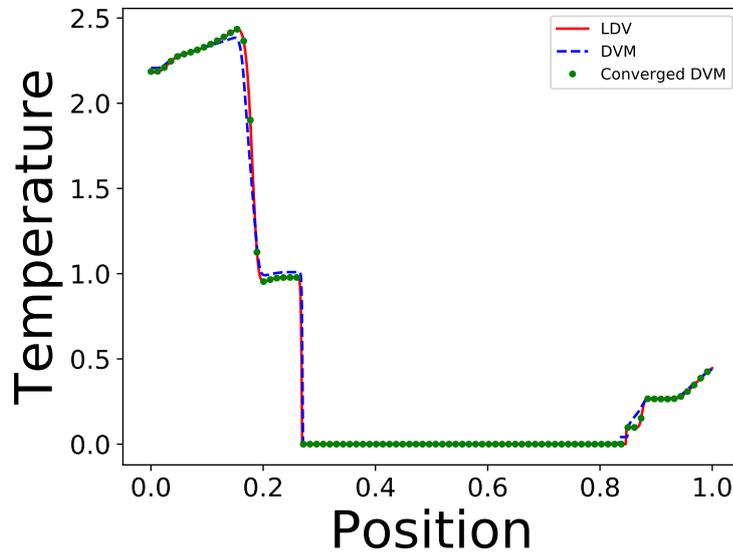


FIGURE 4.7 – Températures pour une interaction de blast waves pré-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

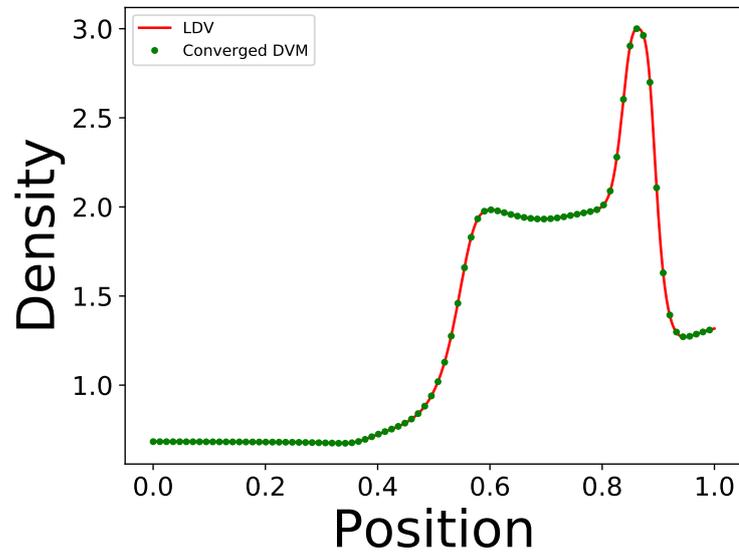


FIGURE 4.8 – Densités pour une interaction de blast waves post-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

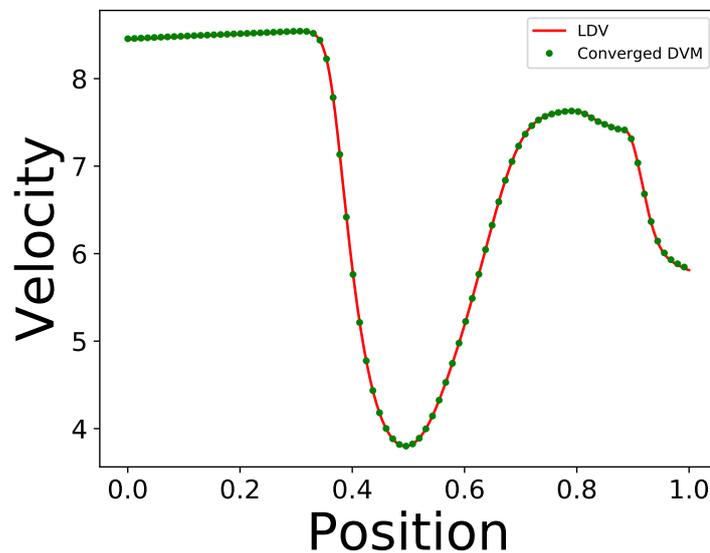


FIGURE 4.9 – Vitesses pour une interaction de blast waves post-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

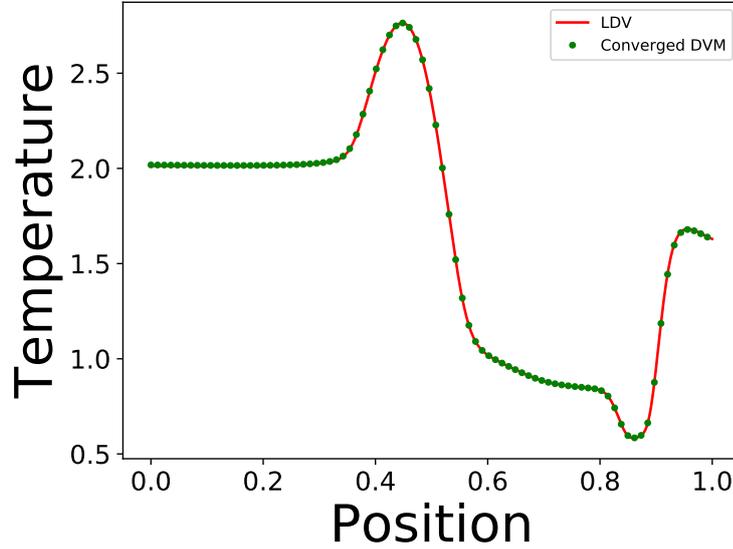


FIGURE 4.10 – Températures pour une interaction de blast waves post-choc ($K_n = 10^{-3}$) avec 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV et la méthode DVM non-convergée et $l = 5$ et $N_v = 200$ pour la méthode DVM convergée.

	l	N_v	Temps CPU
LDV	5	30	279,6s
SLDV	5	30	300,9s
DVM	5	200	516,6s

FIGURE 4.11 – Paramètres discrets et temps de calcul pour le cas 4.5.2 au temps $t = 0.008$

	l	N_v	CPU time
LDV	5	30	2002s
SLDV	5	30	1710s
DVM	5	200	3456s

FIGURE 4.12 – Paramètres discrets et temps de calcul pour le cas 4.5.2 au temps $t = 0.05$

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

pendant, si le temps de calcul est suffisamment long, comme c'est le cas du deuxième temps de calcul proposé, la méthode SLDV finit par devenir plus intéressante. Enfin, comme pour le cas précédent, la méthode DVM non-convergée (i.e. avec le même nombre de vitesses que pour les méthodes LDV et SLDV) n'est pas capable de capturer correctement la solution pour le premier temps de calcul, et finit même par ne plus fonctionner du tout pour le deuxième temps de simulation. Le dysfonctionnement s'explique par le fait que, puisqu'une partie importante de la fonction de distribution n'est pas "vue" par la grille choisie, une énergie interne négative finit par être calculée, ce qui mène à une température négative et donc l'impossibilité de définir la Maxwellienne dans ce cas.

4.5.3 Double choc

Pour le troisième cas test, on considère un gas à deux composantes avec pour masses moléculaires respectives $m^1 = 66, 3 \cdot 10^{-27}$ kg et $m^2 = 20 \times m^1 = 13, 26 \cdot 10^{-25}$ kg. La donnée initiale consiste en deux chocs interagissant au temps initial avec une vitesse significative. Les densités et températures sont homogènes sur tout le domaine et sont données pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \rho^1(t_0, x) = \rho^2(t_0, x) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 300 \text{ K}, \end{cases}$$

tandis que les vitesses initiales sont données par :

$$\begin{cases} u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = 10^4 \text{ m.s}^{-1} & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = -10^4 \text{ m.s}^{-1} & \text{si } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

La solution est calculée au temps $t = 10^{-5}$ s. Le nombre de Knudsen est choisi égal à 10^{-5} , ce qui correspond à un régime fluide (de type Euler). Les résultats sont présentés aux figures 4.13, 4.14 et 4.15, et les paramètres cinétiques, accompagnés du temps CPU sont inscrits dans le tableau 4.16.

Pour les méthodes LDV et SLDV, seulement 30 vitesses discrètes suffisent à obtenir une solution convergée, avec une longueur de domaine de 5. Cependant, pour la méthode DVM classique, une longueur de 180 est nécessaire pour obtenir une solution convergée, ce qui implique, en conséquence, une quantité importante de vitesses discrètes (2000) pour mailler correctement la grille. Si ces conditions ne sont pas remplies, la méthode DVM donne des résultats totalement faux, comme on peut le voir sur toutes les quantités macroscopiques. Concernant les temps CPU, les deux méthodes adaptatives sont plus rapides que la méthode DVM, mais la méthode SLDV ne semble pas permettre un gain en temps de calcul. Ceci est dû aux mêmes raisons que pour le cas précédent, l'augmentation du nombre de vitesses discrètes au cours de l'étape de décalage augmente le temps de calcul.

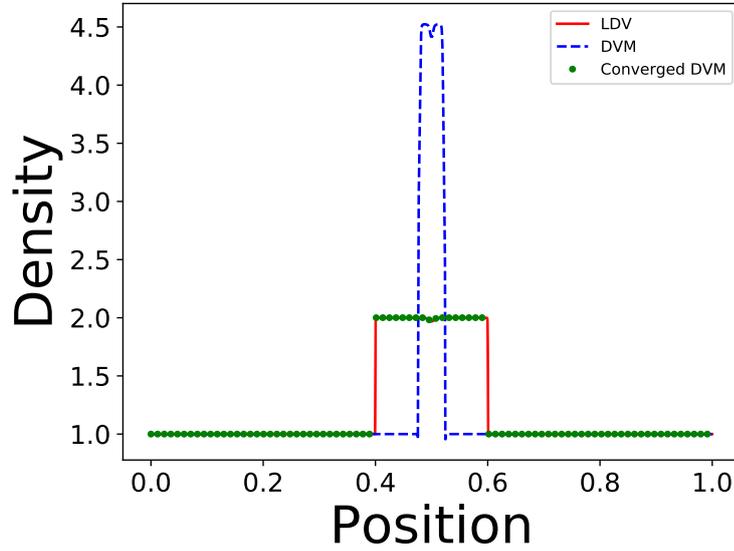


FIGURE 4.13 – Densités pour un double choc ($K_n = 10^{-5}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour les méthodes LDV et DVM non-convergée, et $l = 180$ et $N_v = 2000$ pour la méthode DVM convergée.

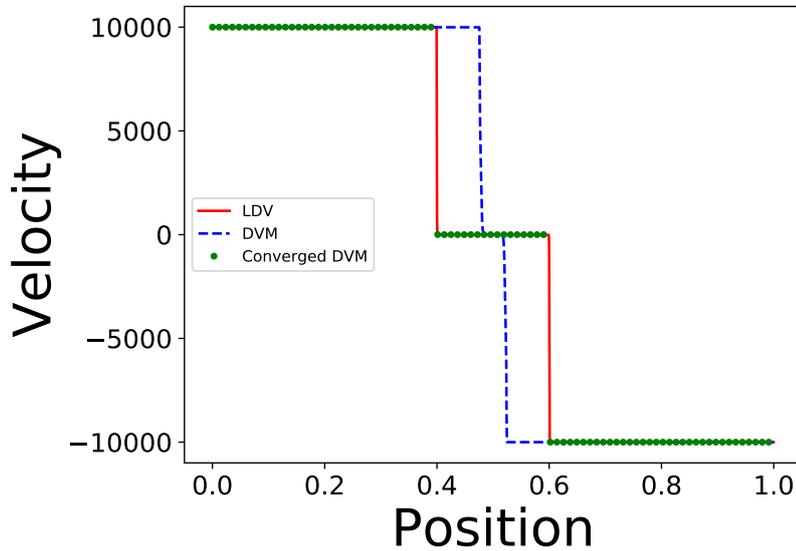


FIGURE 4.14 – Vitesses pour un double choc ($K_n = 10^{-5}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour les méthodes LDV et DVM non-convergée, et $l = 180$ et $N_v = 2000$ pour la méthode DVM convergée.

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

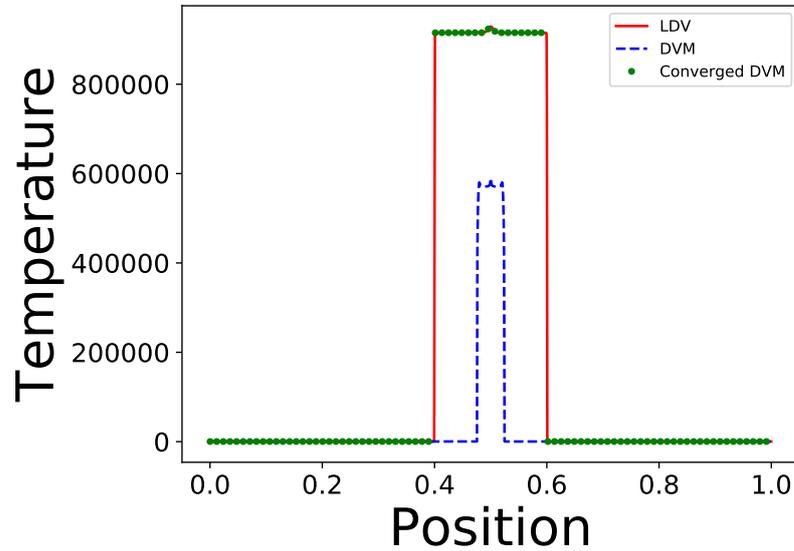


FIGURE 4.15 – Températures pour un double choc ($K_n = 10^{-5}$) à 2 espèces avec un rapport de masse de 20, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 30$ pour les méthodes LDV et DVM non-convergée, et $l = 180$ et $N_v = 2000$ pour la méthode DVM convergée.

	l	N_v	Temps CPU
LDV	5	30	147s
SLDV	5	30	179s
DVM	180	2000	1824s

FIGURE 4.16 – Paramètres discrets et temps de calcul pour le cas 4.5.3

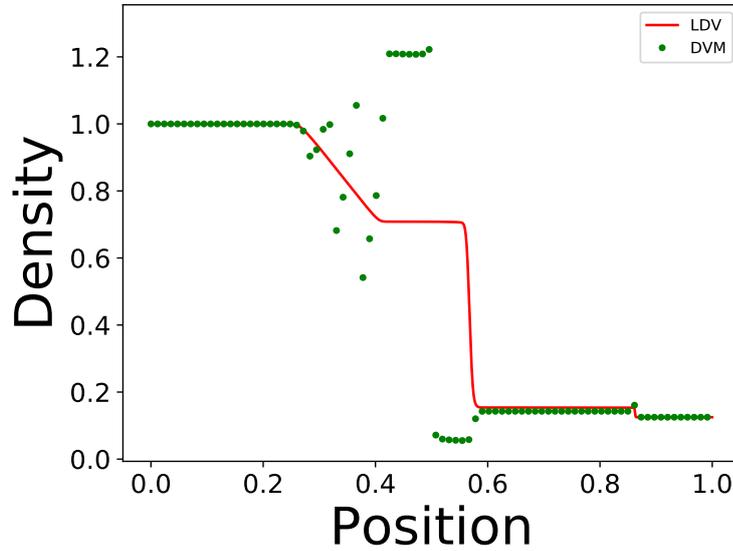


FIGURE 4.17 – Densités d’un tube de Sod ($K_n = 10^{-7}$) à 2 espèces, avec un rapport de masse de 2000, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 4$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV, et $l = 20$ et $N_v = 400$ pour la méthode DVM convergée.

4.5.4 Test plasma

L’objectif de ce cas test est de montrer le comportement de la méthode lorsque l’on considère des particules dont le ratio de masse est de l’ordre des particules constituant un plasma. Les électrons et les ions, de masses respectives $m^1 = 9,109.10^{-31}$ kg et $m^2 = 1,627.10^{-27}$ kg, donnent un rapport de masse de l’ordre de 2000. Les données initiales choisies ici sont celles d’un tube de Sod classique. Les densités initiales sont :

$$\begin{cases} \rho^1(t_0, x) = \rho^2(t_0, x) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ \rho^1(t_0, x) = \rho^2(t_0, x) = 0,125 \text{ kg.m}^{-3}, & \text{si } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Les températures sont données par :

$$\begin{cases} T^1(t_0, x) = 300, T^2(t_0, x) = 600 \text{ K}, & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ T^1(t_0, x) = 500, T^2(t_0, x) = 900 \text{ K}, & \text{si } x \in [0.5, 1], \end{cases}$$

et la vitesse est initialement égale à 0 sur tout le domaine. La solution est calculée au temps $t = 2.10^{-6}$ s. Le nombre de Knudsen est égal à 10^{-7} , ce qui correspond au régime fluide. Les résultats sont présentés sur les figures 4.17, 4.18 et 4.19, et les paramètres cinétique, ainsi que le temps CPU sont compilés dans le tableau 4.20.

Dans ce cas test, les méthodes LDV et SLDV fonctionnent très bien avec une longueur de domaine de 4 et 30 vitesses discrètes. Par ailleurs, le coût de la méthode DVM classique augmente fortement lorsque l’on essaye d’obtenir des résultats

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

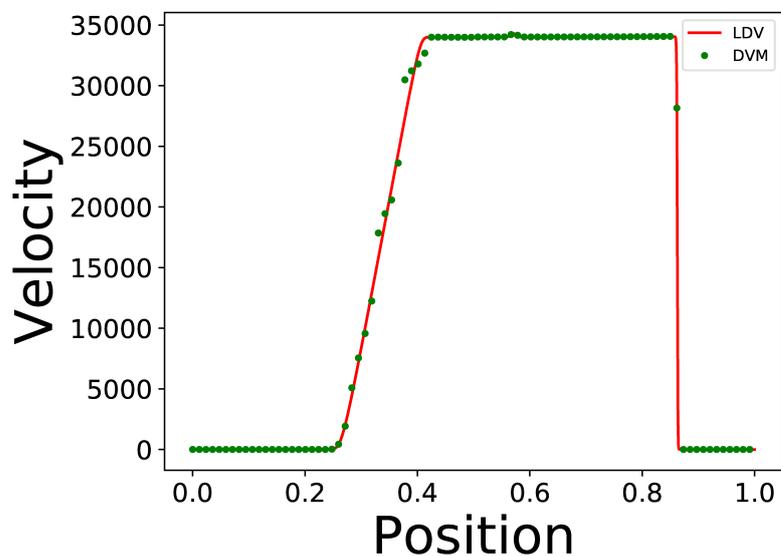


FIGURE 4.18 – Vitesses d'un tube de Sod ($K_n = 10^{-7}$) à 2 espèces, avec un rapport de masse de 2000, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 4$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV, et $l = 20$ et $N_v = 400$ pour la méthode DVM convergée.

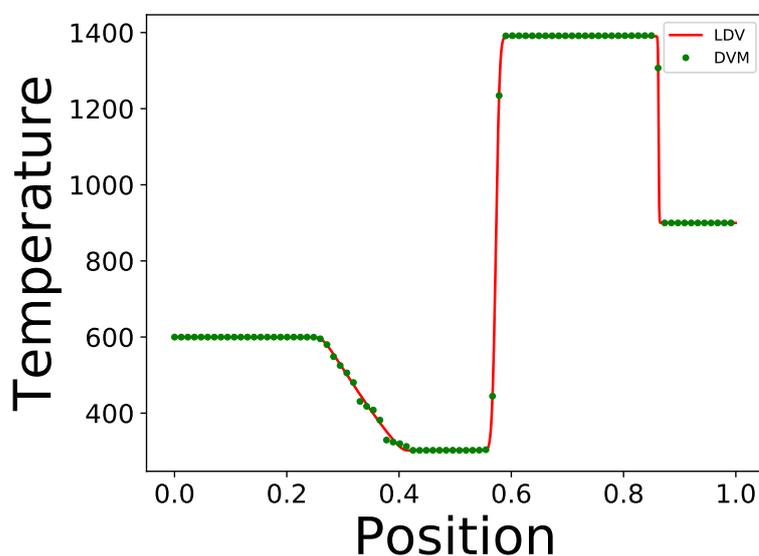


FIGURE 4.19 – Températures d'un tube de Sod ($K_n = 10^{-7}$) à 2 espèces, avec un rapport de masse de 2000, avec 5000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 4$ et $N_v = 30$ pour la méthode LDV, et $l = 20$ et $N_v = 400$ pour la méthode DVM convergée.

	l	N_v	Temps CPU
LDV	4	30	312s
SLDV	4	30	350s
DVM	20	400	3419s

FIGURE 4.20 – Paramètres discrets et temps de calcul pour le cas 4.5.4

convergés. Les paramètres choisis ici ($l = 20$ and $N_v = 400$) ne permettent pas d'obtenir des résultats convergés, alors que le coût computationnel est déjà très élevé (plus de 10 fois plus important que le temps nécessaire pour que les méthodes adaptatives soient convergées).

4.5.5 Transfert de chaleur raréfié

Dans ce cas test, on considère un problème de transfert de chaleur. Ce problème consiste en un gaz à 2 espèces ($m^1 = 66,3 \cdot 10^{-27}$ kg, $m^2 = 20 \cdot m^1 = 13,26 \cdot 10^{-25}$ kg) contenu dans un barreau au repos, et le bord droit du domaine est chauffé à une température plus élevée, gardée constante pour tout temps. Les données initiales sont :

$$\begin{cases} \rho^1(t_0, x) = \rho^2(t_0, x) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, u^1(t_0, x) = u^2(t_0, x) = 0 \text{ m.s}^{-1}, & \forall x \in [0, 1], \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 300 \text{ K} & \text{si } x \in [0, 1[, \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 1000 \text{ K} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La solution est calculée au temps $t = 1.3 \cdot 10^{-3}$ s. Le domaine physique $[0, 1]$ est discrétisé avec $N_x = 1000$ points. Le nombre de Knudsen est choisi égal à 10, ce qui correspond à un régime très raréfié. Dans ce cas, on utilise la procédure d'élargissement présentée dans la section 4.3.4. Les résultats sont présentés sur les figures 4.21, 4.22 et 4.23, et les paramètres cinétiques et le temps CPU sont présentés au tableau 4.24.

Pour ce problème de transfert de chaleur, les méthodes LDV et SLDV fonctionnent toutes les deux plus efficacement que la méthode DVM. De plus, elles nécessitent une grille plus courte et donc moins de vitesses discrètes. En raison du niveau de raréfaction, des oscillations peuvent être observées sur les résultats, mais elles sont facilement contrôlées et diminuées en augmentant le nombre de vitesses discrètes.

Un autre avantage de la méthode est le suivant : pour une longueur de domaine et un nombre de vitesses discrètes donnés, les méthodes SLDV et LDV donnent de bien meilleurs résultats que la méthode DVM, comme on peut le constater sur la figure 4.25. Cela signifie que ces méthodes adaptatives n'ont pas besoin de test de convergence pour obtenir des résultats corrects, contrairement à la méthode classique. Cela permet de mettre en valeur le fait que l'on gagne du temps CPU dans le sens où il n'est pas nécessaire de procéder plusieurs fois de suite à la même si-

4. Grilles cinétiques discrètes locales pour la simulation d'écoulements raréfiés multi-espèces

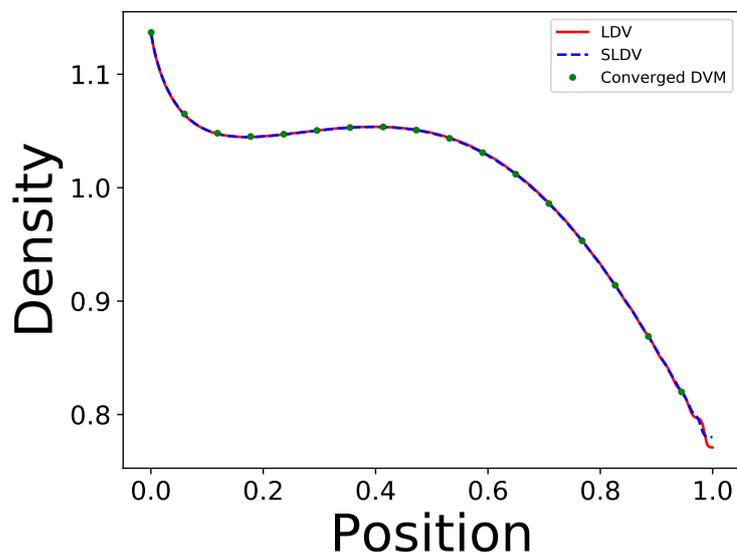


FIGURE 4.21 – Densités pour un problème de transfert de chaleur ($K_n = 10$) à 2 espèces avec 1000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 150$ pour les cas LDV et SLDV et $l = 20$ et $N_v = 600$ pour le cas DVM convergé.

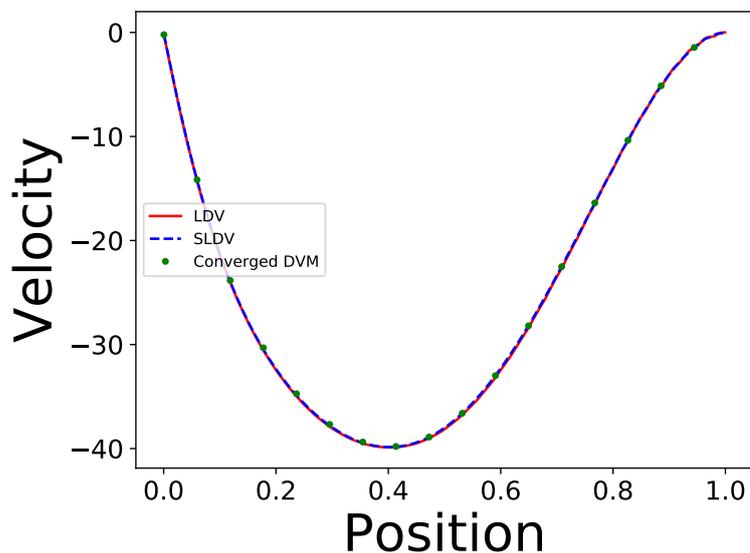


FIGURE 4.22 – Vitesses pour un problème de transfert de chaleur ($K_n = 10$) à 2 espèces avec 1000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 150$ pour les cas LDV et SLDV et $l = 20$ et $N_v = 600$ pour le cas DVM convergé.

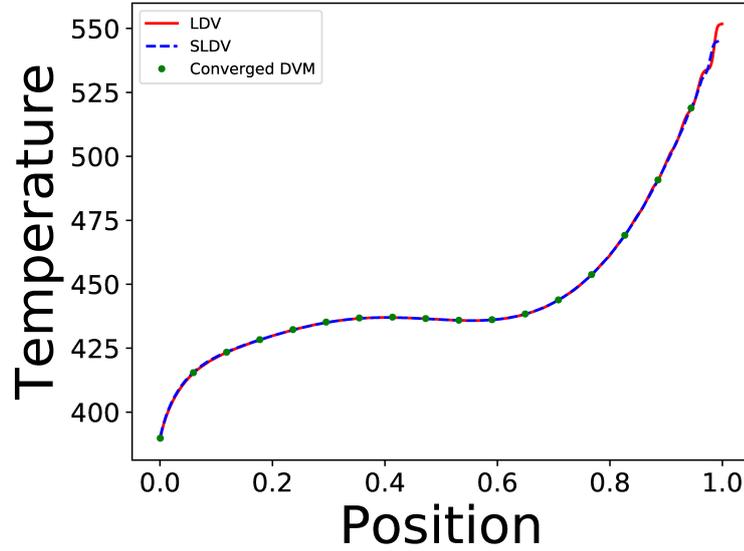


FIGURE 4.23 – Températures pour un problème de transfert de chaleur ($K_n = 10$) à 2 espèces avec 1000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 5$ et $N_v = 150$ pour les cas LDV et SLDV et $l = 20$ et $N_v = 600$ pour le cas DVM convergé.

	l	N_v	CPU time
LDV	5	150	223s
SLDV	5	150	138s
DVM	20	600	274s

FIGURE 4.24 – Paramètres discrets et temps de calcul pour le cas 4.5.5

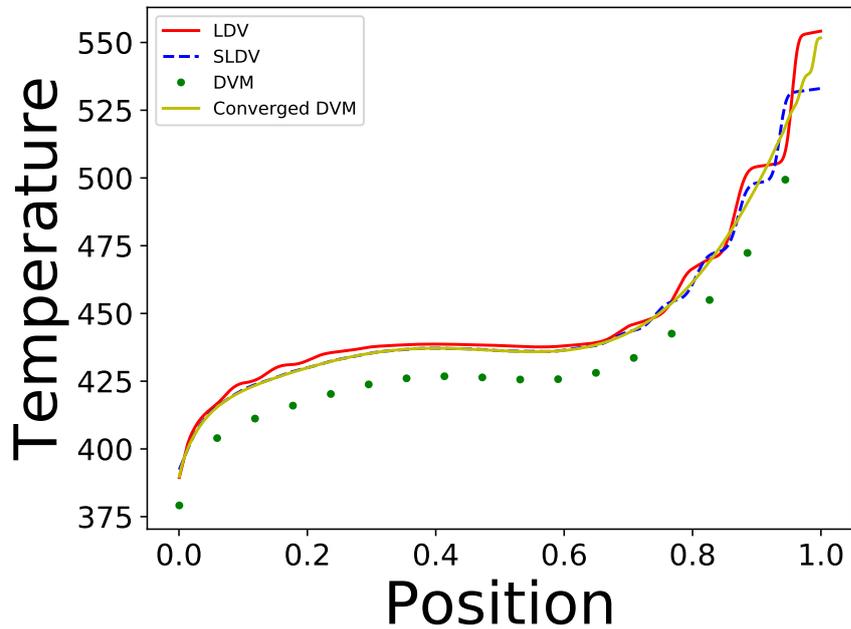


FIGURE 4.25 – Températures pour un problème de transfert de chaleur ($K_n = 10$) avec 2 espèces, avec 1000 points de discrétisation spatiale, avec $l = 4$ et $N_v = 50$ pour les cas LDV, SLDV et DVM, et $l = 20$ et $N_v = 600$ pour le cas DVM de référence.

mulation pour obtenir des résultats convergés. La méthode DVM, elle, nécessite ces itérations afin d'obtenir des paramètres discrets convenables.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on propose une méthode numérique adaptative permettant de résoudre les équations de la théorie cinétique pour les mélanges de gaz. L'ingrédient principal de cette méthode est la capacité à adapter le choix des vitesses discrètes en fonction de la valeur de la vitesse macroscopique et de la température localement en temps et en espace, pour chaque espèce composant le gaz. Un intérêt majeur de la méthode est que le temps de calcul n'est pas impacté par la présence de gradients importants en température et en vitesse, ni par la présence de rapports de masses moléculaires importants. Cependant, un défaut de la méthode est une augmentation du coût de calcul due aux interpolations, qui sont nécessaires puisque les fonctions de distribution discrètes, d'un point à un autre, sont connues à des vitesses discrètes différentes. Pour circonvenir à cela, on propose une extension de la méthode, visant à diminuer le nombre d'interpolations en choisissant des grilles en vitesse ajustées, de sorte à faire coïncider un maximum de vitesses d'une grille à l'autre.

On présente ensuite quelques cas tests permettant d'illustrer l'efficacité de la

méthode, en comparaison de la méthode classique, n'utilisant qu'une seule grille statique.

Une perspective intéressante de cette méthode est l'extension aux modèles multi-dimensionnels. Une première approche dans le cas 2D a été effectuée dans [24], mais la présence d'interpolations rend la méthode extrêmement coûteuse. Ainsi, la méthode permettant d'économiser le nombre d'interpolations présentée ici est indispensable dans le cas de la dimension supérieure.

Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

5.1	Introduction	164
5.2	Modèles cinétiques pour les gaz raréfiés réactifs	164
5.2.1	Equations de Boltzmann étendues aux réactions chimiques	164
5.2.2	Quantités macroscopiques	165
5.2.3	Modèle BGK pour les réactions chimiques	166
5.3	Schéma numérique	167
5.3.1	Calcul des concentrations et des fréquences de relaxation	168
5.3.2	Calcul des vitesses et des températures	168
5.3.3	Calcul des fonctions de distribution	170
5.3.4	Propriétés du schéma	170
5.4	Résultats numériques	171
5.4.1	Retour à l'équilibre	171
5.4.2	Double choc	172
5.5	Conclusion	173

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose une méthode numérique pour un modèle de type BGK, développé par Spiga et co-auteurs, et présenté dans [57],[16], modélisant un gaz raréfié à quatre espèces soumis à des réactions chimiques réversibles bimoléculaires. Ce modèle est une extension du modèle d'Andries-Aoki-Perthame [3] qui traite des mélanges de gaz inertes.

Ainsi, le modèle étudié ici contient, de manière analogue au modèle d'Andries-Aoki-Perthame, un unique terme de relaxation pour chaque espèce vers une distribution maxwellienne convenablement choisie. En particulier, dans ce cas, les réactions chimiques génèrent des termes sources et termes puits de concentrations, quantités de mouvement et énergies. Ainsi, les concentrations de mélange sont distinctes des concentrations partielles lorsque des réactions chimiques ont lieu, contrairement au modèle pour les gaz inertes.

Ici, on propose donc une procédure d'implicitation de ce terme de relaxation par une approche analogue à celle du chapitre 4, sur grilles en vitesse fixes. Comme précédemment, on traite de manière implicite les termes liés aux interactions mécaniques entre espèces. Cependant, on traite de manière explicite les termes liés aux réactions chimiques. Ce couplage explicite-implicite permet d'obtenir une méthode numérique linéaire, et qui est conservative au regard des grandeurs macroscopiques.

Le chapitre s'organise comme suit. Dans la section 5.2, on présente le modèle de Boltzmann initial et sa modélisation par une approche de type BGK. Puis, dans la section 5.3, on propose un schéma numérique explicite-implicite pour sa résolution. Enfin, dans la section 5.4, on donne quelques résultats numériques.

5.2 Modèles cinétiques pour les gaz raréfiés réactifs

5.2.1 Equations de Boltzmann étendues aux réactions chimiques

On considère un mélange de gaz à quatre espèces modélisé par le système d'équations cinétiques suivant :

$$\partial_t f^\alpha + \nabla \cdot (v f^\alpha) = \mathcal{Q}^\alpha(f), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

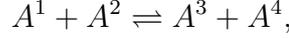
où $f^\alpha(t, x, v) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est la fonction de distribution de l'espèce α et $f = (f^\alpha)_{\alpha \in \{1, \dots, 4\}}$. L'opérateur au second membre se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{Q}^\alpha(f) = \mathcal{I}^\alpha(f) + \mathcal{J}^\alpha(f), \quad \mathcal{I}^\alpha(f) = \sum_{\beta} \mathcal{I}^{\alpha\beta}(f),$$

où $\mathcal{I}^{\alpha\beta}(f)$ désigne l'opérateur de collision élastique classique, considéré au chapitre précédent. Le deuxième terme $\mathcal{J}^\alpha(f)$ modélise le transfert de masse ($m^1 + m^2 =$

5. Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

$m^3 + m^4 = M$) suite aux réactions chimiques entre les espèces, définies par :



où A^α désigne le symbole chimique de l'espèce α . On suppose que la réaction endothermique (réaction de gauche à droite, conventionnellement) a lieu si l'énergie du gaz dépasse le seuil de liaison chimique :

$$\Delta E = - \sum_{\alpha=1}^4 \lambda^\alpha E^\alpha > 0,$$

où $\lambda^1 = \lambda^2 = -\lambda^3 = -\lambda^4 = 1$. L'expression générale du terme de réaction chimique $\mathcal{J}^1(f)$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1(f) = & \int_{\mathbb{R}^3 \times S_2} \Theta \left(|V|^2 - \frac{2\Delta E}{\mu^{12}} \right) |V| \sigma_{12}^{34}(|V|, V \cdot n) \\ & \times \left[\left(\frac{\mu^{12}}{\mu^{34}} \right)^3 f^3(v') f^4(v'_*) - f^1(v) f^2(v_*) \right] dv_* dn, \end{aligned}$$

où Θ désigne la fonction d'Heaviside, qui traduit le fait qu'une réaction n'a lieu que si le seuil est atteint. Les termes de réaction pour les autres espèces s'obtiennent par permutation des indices. Par ailleurs, on introduit la fréquence de relaxation chimique suivante :

$$\nu_{12}^{34}(V) = 2\pi |V| \int_0^\pi \sigma_{12}^{34}(|V|, V \cdot n) \sin \chi d\chi.$$

L'équilibre chimique, en dimension 1, est donnée par la loi d'action des masses suivante :

$$\frac{n^1 n^2}{n^3 n^4} = \left(\frac{\mu^{12}}{\mu^{34}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{\Delta E}{k_B T} \right).$$

5.2.2 Quantités macroscopiques

Les notations des quantités macroscopiques sont les mêmes que celles du chapitre 4. On les rappelle brièvement ici par souci de lisibilité. La concentration de particules, vitesse et température de l'espèce α , notées respectivement n^α , u^α et T^α , sont définies à l'aide des trois premiers moments de f^α :

$$\begin{cases} \langle f^\alpha \rangle = n^\alpha, \\ \langle m^\alpha v f^\alpha \rangle = m^\alpha n^\alpha u^\alpha = \rho^\alpha u^\alpha, \\ \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} f^\alpha \rangle = \mathcal{E}^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 + n^\alpha \varepsilon^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha (u^\alpha)^2 + \frac{1}{2} n^\alpha k_B T^\alpha, \end{cases}$$

où \mathcal{E}^α et ε^α représentent respectivement l'énergie totale et l'énergie interne de l'espèce α (où l'on fait le même abus de langage que dans le chapitre précédent).

5.2.3 Modèle BGK pour les réactions chimiques

Pour les mêmes raisons que dans le chapitre 4 et par un procédé analogue, on remplace le terme de collision \mathcal{Q}^α par un unique opérateur de relaxation vers une distribution Maxwellienne dont les quantités macroscopiques utilisées pour sa définition rendent compte des échanges de masse, quantité de mouvement et énergie dus aux interactions mécaniques et chimiques entre les différentes espèces composant le gaz. L'objectif de ce chapitre est donc le traitement numérique des équations suivantes :

$$\partial_t f^\alpha + \partial_x(v f^\alpha) = \tilde{\mathcal{Q}}^\alpha := \nu^\alpha(\bar{M}^\alpha(f) - f^\alpha), \quad (5.1)$$

où $\bar{M}^\alpha(f)$ est définie par :

$$\bar{M}^\alpha(f) = \frac{\bar{n}^\alpha}{\sqrt{2\pi k_B \frac{\bar{T}^\alpha}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v - \bar{u}^\alpha)^2}{2k_B \frac{\bar{T}^\alpha}{m^\alpha}}\right),$$

où les quantités de mélange (surmontées d'une barre) sont définies par :

$$\begin{aligned} \bar{n}^\alpha &= n^\alpha + \frac{\lambda^\alpha}{\nu^\alpha} \mathcal{S}, \\ m^\alpha \bar{n}^\alpha \bar{u}^\alpha &= m^\alpha n^\alpha u^\alpha + \frac{2}{\nu^\alpha} \sum_{\beta=1}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta (u^\beta - u^\alpha) + \frac{\lambda^\alpha}{\nu^\alpha} m^\alpha u \mathcal{S}, \\ \bar{n}^\alpha \bar{\varepsilon}^\alpha &= n^\alpha \varepsilon^\alpha - \frac{m^\alpha}{2} (\bar{n}^\alpha (\bar{u}^\alpha)^2 - n^\alpha (u^\alpha)^2) + \frac{1}{\nu^\alpha} \sum_{\beta=1}^N \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} (\varepsilon^\beta - \varepsilon^\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{\nu^\alpha} \sum_{\beta=1}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n^\beta n^\alpha \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} (m^\alpha u^\alpha + m^\beta u^\beta) \cdot (u^\beta - u^\alpha) \\ &\quad + \frac{\lambda^\alpha}{\nu^\alpha} \mathcal{S} \left[\frac{1}{2} m^\alpha u^2 + \frac{1}{2} k_B T \right] \\ &\quad + \frac{M - m^\alpha}{M} k_B T \frac{\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T}\right)} - \frac{1 - \lambda^\alpha}{2} \frac{M - m^\alpha}{M} \Delta E \end{aligned}$$

où le terme source \mathcal{S} , représentant le nombre de particules produites (ou détruites) par unité de temps, est défini par :

$$\mathcal{S} = \nu_{12}^{34} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T}\right) \left[n^3 n^4 \left(\frac{m^1 m^2}{m^3 m^4}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) - n^1 n^2 \right],$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler incomplète [2]. On remarque que lorsque l'équilibre est atteint et que la loi d'action des masses est vérifiée, ce terme source est nul.

5.3 Schéma numérique

Dans tout ce qui suit, on note par un indice i et un superscript m les quantités calculées au point de discrétisation en espace x_i au temps t^m . En supposant connues les fonctions de distribution au temps t^m , la première étape de la méthode consiste à calculer les quantités macroscopiques au temps t^{m+1} . Pour cela, on considère la semi-discrétisation de l'équation sur les fonctions de distribution :

$$f_i^{\alpha,m+1}(v) = f_i^{\alpha,m}(v) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,m}(v) - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,m}(v)) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\overline{M}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}(v) - f_i^{\alpha,m+1}(v)), \quad (5.2)$$

où $\overline{M}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}(v)$ est définie par :

$$\overline{M}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}(v) = \frac{\overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k_B \frac{\overline{T}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v - \overline{u}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}})^2}{2k_B \frac{\overline{T}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{m^\alpha}}\right),$$

où les quantités macroscopiques de mélange sont traitées de la façon suivante : on implícite les quantités issues des effets mécaniques (comme dans le chapitre précédent) et on explicite les quantités issues des effets chimiques. Cela donne :

$$\overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} = n_i^{\alpha,m+1} + \frac{\lambda^\alpha}{\nu_i^{\alpha,m+1}} \mathcal{S}_i^m, \quad (5.3)$$

$$m^\alpha \overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} (\overline{u}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}})^2 = m^\alpha n_i^{\alpha,m+1} (u_i^{\alpha,m+1})^2 \quad (5.4)$$

$$+ \frac{2}{\nu_i^{\alpha,m+1}} \sum_{\beta=1}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\alpha,m+1} n_i^{\beta,m+1} \left(u_i^{\beta,m+1} - u_i^{\alpha,m+1} \right)$$

$$+ \frac{\lambda^\alpha}{\nu_i^{\alpha,m+1}} m^\alpha u_i^m \mathcal{S}_i^m,$$

$$\overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} \overline{\varepsilon}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} = n_i^{\alpha,m+1} \varepsilon_i^{\alpha,m+1} - \frac{m^\alpha}{2} (\overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} (\overline{u}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}})^2 - n_i^{\alpha,m+1} (u_i^{\alpha,m+1})^2)$$

$$+ \frac{1}{\nu_i^{\alpha,m+1}} \sum_{\beta=1}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\alpha,m+1} n_i^{\beta,m+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} \left(\varepsilon_i^{\beta,m+1} - \varepsilon_i^{\alpha,m+1} \right)$$

$$+ \frac{1}{\nu_i^{\alpha,m+1}} \sum_{\beta=1}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,m+1} n_i^{\alpha,m+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} (m^\alpha u_i^{\alpha,m+1} + m^\beta u_i^{\beta,m+1}) \cdot (u_i^{\beta,m+1} - u_i^{\alpha,m+1})$$

$$+ \frac{\lambda^\alpha}{\nu_i^{\alpha,m+1}} \mathcal{S}_i^m \left[\frac{1}{2} m^\alpha (u_i^m)^2 + \frac{1}{2} k_B T_i^m \right]$$

$$+ \frac{M - m^\alpha}{M} k_B T_i^m \frac{\left(\frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right)} - \frac{1 - \lambda^\alpha}{2} \frac{M - m^\alpha}{M} \Delta E], \quad (5.5)$$

où le terme source chimique S_i^m est donné par :

$$S_i^m = \nu_{12}^{34} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) \left[n_i^{3,m} n_i^{4,m} \left(\frac{m^1 m^2}{m^3 m^4}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) - n_i^{1,m} n_i^{2,m} \right].$$

5.3.1 Calcul des concentrations et des fréquences de relaxation

A partir des quantités de mélange définies précédemment, en intégrant l'équation (5.2) par rapport à v , on obtient les équations d'évolution sur les concentrations partielles $n_i^{\alpha,m+1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, N_x\}$ et pour tout $\alpha \in \{1, \dots, 4\}$:

$$n_i^{\alpha,m+1} = n_i^{\alpha,m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle \phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha,m}(v) - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha,m}(v) \rangle + \Delta t \lambda^\alpha S_i^m.$$

Ces quantités suffisent ensuite au calcul des fréquences de relaxation assurant une positivité des énergies internes et des concentrations de mélange. De telles fréquences $\nu_i^{\alpha,m+1}$ sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_i^{1,m+1} &= \sum_{\alpha=1}^4 \chi^{1\alpha} n^{\alpha,m+1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) \nu_{12}^{34} n_i^{2,m}, \\ \nu_i^{2,m+1} &= \sum_{\alpha=1}^4 \chi^{2\alpha} n^{\alpha,m+1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) \nu_{12}^{34} n_i^{1,m}, \\ \nu_i^{3,m+1} &= \sum_{\alpha=1}^4 \chi^{3\alpha} n^{\alpha,m+1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) \nu_{12}^{34} \left(\frac{\mu^{34}}{\mu^{12}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) n_i^{4,m}, \\ \nu_i^{4,m+1} &= \sum_{\alpha=1}^4 \chi^{4\alpha} n^{\alpha,m+1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) \nu_{12}^{34} \left(\frac{\mu^{34}}{\mu^{12}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T_i^m}\right) n_i^{3,m}. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule les concentrations de mélange $\bar{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}$, données par (5.3).

5.3.2 Calcul des vitesses et des températures

Le calcul des vitesses et températures au temps suivant suit la même logique que dans le chapitre 4. Puisque les termes issus des effets des réactions chimiques sont exprimés au temps t^m , on obtient à nouveau, en chaque point de discrétisation x_i , un système linéaire couplant les vitesses $u_i^{\alpha,m+1}$ et un système couplant les énergies internes $\varepsilon_i^{\alpha,m+1}$ pour $\alpha = 1, \dots, 4$. Par rapport aux propositions 4.1 et 4.2, les matrices des deux systèmes restent inchangées. En revanche, les termes sources chimiques viennent s'ajouter aux seconds membres.

On énonce donc les propriétés suivantes sur les vitesses et températures, sans détailler les démonstrations :

5. Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

Proposition 5.1. *Pour tout point x_i du domaine physique, i.e. $\forall i \in \{1, \dots, N_x\}$, les vitesses macroscopiques $(u_i^{\alpha, m+1})_\alpha$ vérifient le système linéaire suivant, de taille 4×4 :*

$$A_i U_i^{m+1} = B_i, \quad (5.6)$$

où

$$U_i^{m+1} = (u_i^{1, m+1}, \dots, u_i^{4, m+1})^T,$$

et

$$B_i^\alpha = \rho_i^{\alpha, m} u_i^{\alpha, m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha v (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, m} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, m}) \rangle + \Delta t \lambda^\alpha m^\alpha u_i^m S_i^m,$$

et pour tout $\alpha \in \{1, \dots, 4\}$ et $\beta \neq \alpha$, les éléments de la matrice A_i correspondants s'expriment par :

$$(A_i)_{\alpha\alpha} = \rho_i^{\alpha, m+1} + 2\Delta t n_i^{\alpha, m+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, m+1},$$

$$(A_i)_{\alpha\beta} = -2\Delta t n_i^{\alpha, m+1} \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, m+1}.$$

En faisant l'hypothèse que la densité ne s'annule jamais ($\rho_i^{\alpha, m} > 0$), chaque système (5.6) admet une et une seule solution.

Une fois les vitesses partielles calculées, on obtient les vitesses de mélange $\bar{u}_i^{\alpha, m+\frac{1}{2}}$ par la formule (5.4). Pour les énergies internes $\varepsilon_i^{\alpha, m+1}$, on a :

Proposition 5.2. *En chaque point d'espace x_i , i.e. $\forall i \in \{1, \dots, N_x\}$, les énergies internes $(\varepsilon_i^{\alpha, m+1})_\alpha$ vérifient le système linéaire 4×4 suivant :*

$$G_i Y_i^{m+1} = C_i,$$

où $Y_i^{m+1} = (\varepsilon_i^1, \dots, \varepsilon_i^4)^T$ correspond au vecteur de toutes les énergies internes au point x_i . Par ailleurs, $C_i \in \mathbb{R}^4$ et la composante α de C_i s'écrit :

$$C_i^\alpha = \mathcal{E}_i^{\alpha, m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \langle m^\alpha \frac{v^2}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^{\alpha, m} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{\alpha, m}) \rangle$$

$$- \frac{1}{2} m^\alpha n_i^{\alpha, m+1} (u_i^{\alpha, m+1})^2 + \Delta t \nu_i^{\alpha, m+1} \frac{m^\alpha}{2} n_i^{\alpha, m+1} ((\bar{u}_i^{\alpha, m+1})^2 - (u_i^{\alpha, m+1})^2)$$

$$- \Delta t n_i^{\alpha, m+1} \frac{m^\alpha \nu_i^{\alpha, m+1}}{2} (\bar{u}_i^{\alpha, m+1} - u_i^{\alpha, m+1})^2$$

$$+ \Delta t n_i^{\alpha, m+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta, m+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta} (m^\beta \frac{(u_i^{\beta, m+1} - u_i^{\alpha, m+1})^2}{2}),$$

où $\mathcal{E}_i^{\alpha,m}$ représente l'énergie totale de l'espèce α au temps t^m et au point x_i . Enfin, les entrées de la matrice $G_i \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ s'expriment :

$$(G_i)_{\alpha\alpha} = n_i^{\alpha,m+1} + \Delta t n_i^{\alpha,m+1} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^4 \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,m+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta},$$

$$(G_i)_{\alpha\beta} = -\Delta t n_i^{\alpha,m+1} \mu^{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} n_i^{\beta,m+1} \frac{4}{m^\alpha + m^\beta}.$$

Enfin, on obtient les énergies internes de mélange par la formule (5.5).

5.3.3 Calcul des fonctions de distribution

Une fois les quantités macroscopiques connues au temps t^{m+1} , on peut procéder au calcul des fonctions de distribution. Pour cela, on considère ici une discrétisation uniforme du domaine en vitesse par l'emploi de N_v vitesses discrètes $(v_k)_k$ pour $k \in \{1, \dots, N_v\}$. On note donc l'approximation suivante :

$$f_{i,k}^{\alpha,m} \simeq f^\alpha(t^m, x_i, v_k),$$

et on a la formule de mise à jour suivante :

$$f_{i,k}^{\alpha,m+1} = f_{i,k}^{\alpha,m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,m} - \phi_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,m}) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\overline{M}_{i,k}^{\alpha,m+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{\alpha,m+1}), \quad (5.7)$$

avec le flux *upwind* :

$$\phi_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,n} = \frac{1}{2} (v_k (f_{i+1,k}^{\alpha,n} + f_{i,k}^{\alpha,n}) - |v_k| (f_{i+1,k}^{\alpha,n} - f_{i,k}^{\alpha,n})),$$

et la Maxwellienne d'échange :

$$\overline{M}_{i,k}^{\alpha,m+\frac{1}{2}} = \frac{\overline{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi k_B \frac{\overline{T}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{m^\alpha}}} \exp\left(-\frac{(v_k - \overline{u}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}})^2}{2k_B \frac{\overline{T}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}}}{m^\alpha}}\right).$$

5.3.4 Propriétés du schéma

Dans cette section, on énonce quelques propriétés du schéma. Celui-ci est conservatif au regard des quantités macroscopiques totales et assure la positivité des fonctions de distributions.

5. Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

Proposition 5.3. *Le schéma (5.7) conserve la concentration, quantité de mouvement et énergie totales, i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,\alpha} n_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} n_i^{\alpha,m}, \\ \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m+1} u_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m} u_i^{\alpha,m}, \\ \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m}. \end{array} \right. \quad (5.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m+1} u_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m} u_i^{\alpha,m}, \\ \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m}. \end{array} \right. \quad (5.8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m+1} u_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \rho_i^{\alpha,m} u_i^{\alpha,m}, \\ \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m+1} = \sum_{i,\alpha} \mathcal{E}_i^{\alpha,m}. \end{array} \right. \quad (5.8c)$$

Démonstration. En sommant l'équation (5.7) sur k , on obtient une équation d'évolution sur la concentration partielle $n_i^{\alpha,m+1}$:

$$n_i^{\alpha,m+1} = n_i^{\alpha,m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_v} (\phi_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,m} - \phi_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,m}) + \Delta t \nu_i^{\alpha,n+1} (\bar{n}_i^{\alpha,m+\frac{1}{2}} - n_i^{\alpha,m+1}),$$

puis, à la faveur de l'équation (5.3), on a :

$$n_i^{\alpha,m+1} = n_i^{\alpha,m} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_v} (\phi_{i+\frac{1}{2},k}^{\alpha,m} - \phi_{i-\frac{1}{2},k}^{\alpha,m}) + \Delta t \lambda^\alpha S_i^m.$$

En sommant sur i , les flux en espace s'annulent. Puis, en sommant sur α , puisque $\sum_{\alpha} \lambda^\alpha = 0$, le terme d'échange s'annule également, et on obtient l'équation (5.8a). Les égalités (5.8b) et (5.8c) s'obtiennent de manière analogue par les mêmes arguments. \square

Proposition 5.4. *Le schéma (5.7) assure la positivité de $f_{i,k}^{\alpha,m+1}$ pour tout $\Delta t \geq 0$.*

5.4 Résultats numériques

Dans cette section, on présente deux cas tests permettant d'illustrer les phénomènes de réaction chimiques. Le premier cas test est un cas homogène en espace dont la donnée initiale est hors-équilibre chimique. La deuxième simulation est un cas test du double choc, que l'on compare au cas sans réactions chimiques.

5.4.1 Retour à l'équilibre

Pour ce premier cas test, on considère les masses moléculaires suivantes :

$$m^1 = m^3 = 10^{-25} \text{ kg}, \quad m^2 = m^4 = 10^{-26} \text{ kg}.$$

La constante de Boltzmann est égale à $k_B = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, et l'énergie d'activation de la réaction chimique est $\Delta E = 300 k_B \text{ J}$. Le nombre de Knudsen est

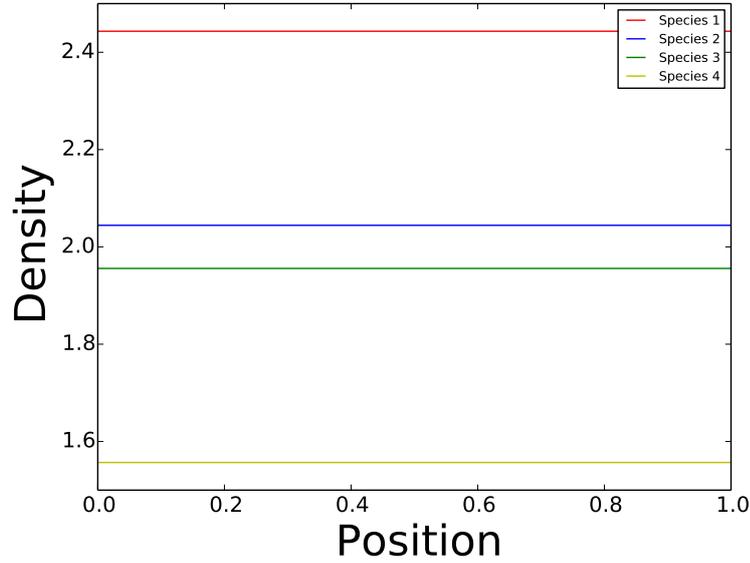


FIGURE 5.1 – Densités pour un problème de retour à l'équilibre.

égal à $K_n = 10^{-8}$ et la fréquence de réaction chimique est $\nu_{12}^{34} = 10^{-21} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les données initiales (homogènes en espace et en espèce) sont les suivantes :

$$\rho^\alpha = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad u^\alpha = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad T^\alpha = 600 \text{ K}.$$

Le temps final de simulation est $t_f = 0,01 \text{ s}$. On considère une longueur de domaine de $l = 4$ et $N_v = 30$ vitesses discrètes. On maille le domaine en espace avec $N_x = 200$ points.

5.4.2 Double choc

Pour ce deuxième cas test, on considère les mêmes masses moléculaires que précédemment :

$$m^1 = m^3 = 10^{-25} \text{ kg}, \quad m^2 = m^4 = 10^{-26} \text{ kg}.$$

Dans ce cas, l'énergie d'activation de la réaction chimique exprimée en Joules est $\Delta E = 450k_B$. Le nombre de Knudsen est égal à $K_n = 10^{-8}$ et la fréquence de réaction chimique est $\nu_{12}^{34} = 10^{-24} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les densités et températures initiales, choisies homogènes en espace, sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho^\alpha(t_0, x) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \forall \alpha, \\ T^1(t_0, x) = T^2(t_0, x) = 300 \text{ K}, \quad T^3(t_0, x) = T^4(t_0, x) = 600 \text{ K}, \end{cases}$$

tandis que les vitesses initiales sont données par :

$$\begin{cases} u^\alpha(t_0, x) = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} & \text{si } x \in [0, 0.5], \\ u^\alpha(t_0, x) = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} & \text{si } x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

5. Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

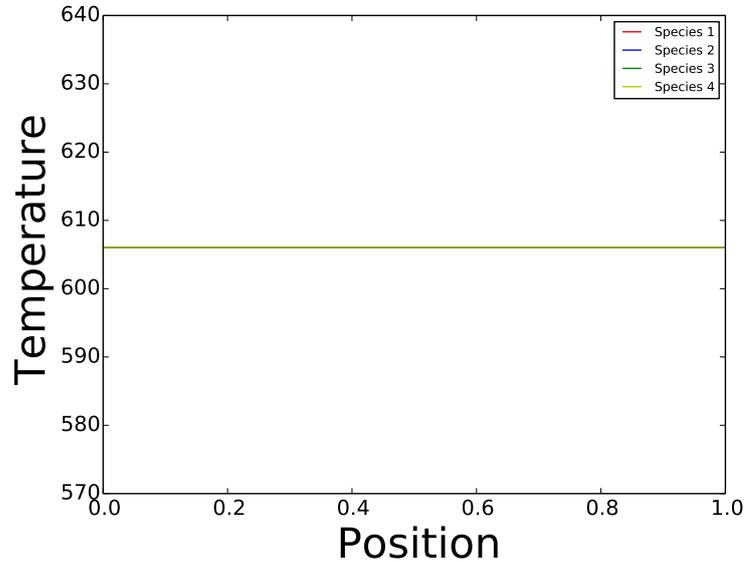


FIGURE 5.2 – Températures pour un problème de retour à l'équilibre.

Le temps final de simulation est $t_f = 0,01$ s. On considère les mêmes paramètres de discrétisation que précédemment pour le domaine en vitesse : une longueur de domaine de $l = 4$ et $N_v = 30$ vitesses discrètes. On considère un maillage de $N_x = 500$ points. Sur les figures 5.3, 5.4 et 5.5, on observe respectivement les densités, vitesses et températures avec et sans termes de réactions chimiques. Comme le nombre de Knudsen est choisi suffisamment petit, toutes les espèces partagent la même vitesse et la même température. Cependant, les densités sont différentes pour chaque espèce, car l'équilibre est dicté par la loi d'action des masses.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une méthode numérique explicite-implicite pour un modèle cinétique de type BGK pour les gaz raréfiés à réactions chimiques lentes. La méthode est conservative et assure la positivité de la fonction de distribution.

Ce travail présente deux perspectives. La première consiste à appliquer la méthode des grilles locales présentée au chapitre 4. La procédure reste la même, car les différences avec le modèle pour les gaz inertes (concentrations de mélange différentes des concentrations partielles) ne modifient pas la façon de calculer les bornes des grilles locales.

Par ailleurs, dans [17], Spiga et co-auteurs ont étendu leur modèle au cas des réactions rapides. Le développement d'une méthode numérique pour ce modèle-ci constitue une extension intéressante.

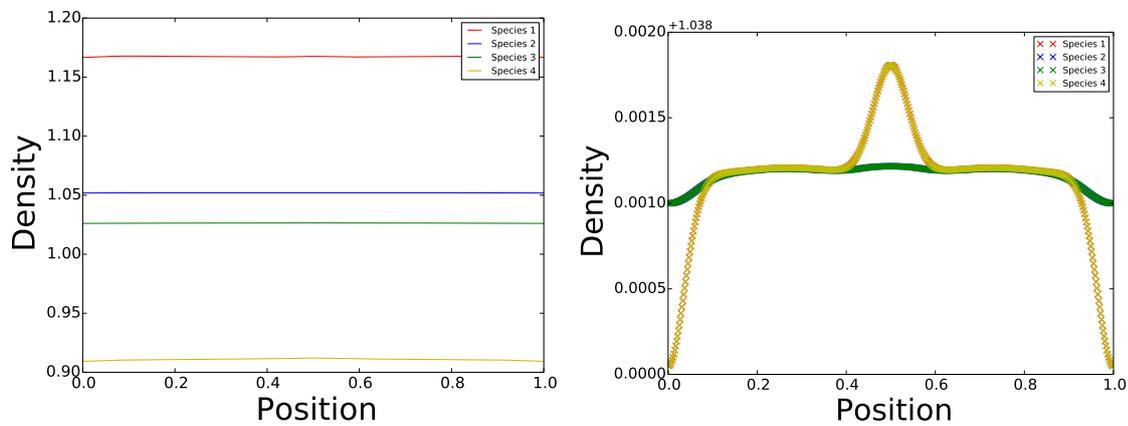


FIGURE 5.3 – Densités pour un cas test du double choc, avec réactions chimiques (à gauche) et sans réactions chimiques (à droite).

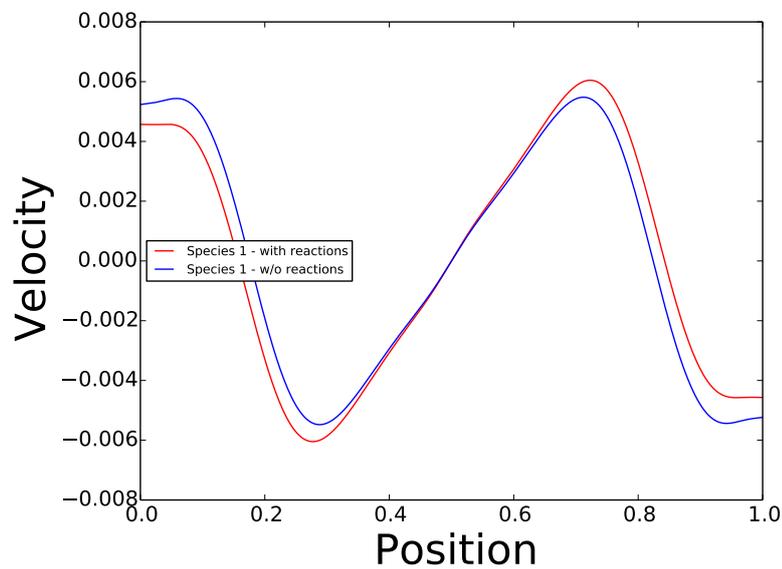


FIGURE 5.4 – Densités pour un cas test du double choc avec et sans réactions chimiques.

5. Un schéma numérique explicite-implicite pour les écoulements de gaz raréfiés réactifs

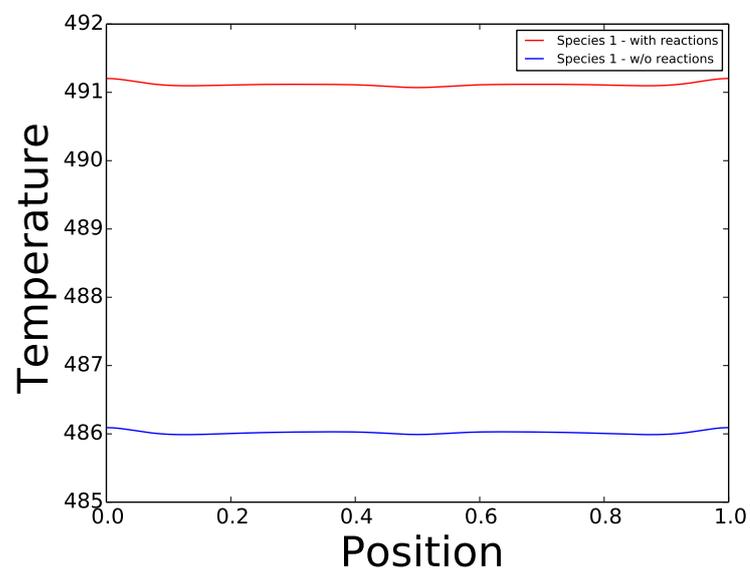


FIGURE 5.5 – Températures pour un cas test du double choc avec et sans réactions chimiques.

Conclusion / Perspectives

Dans ce manuscrit, on s'est intéressé à la résolution numérique des systèmes d'équations issues de la physique des plasmas, du point de vue cinétique.

Ce manuscrit est constitué de deux parties. Dans la première, l'objectif était de proposer une méthode numérique pour la résolution du système d'Euler bi-température. Ce système, décrivant le transport de masse, quantité de mouvement et des énergies électroniques et ioniques dans un plasma, est un système hyperbolique non-conservatif. La présence de termes non-conservatifs empêchent la définition classique des solutions faibles et des relations de Rankine-Hugoniot. Pour circonvenir à ce problème, il est nécessaire de fournir une définition des produits non-conservatifs du modèle. Pour cela, on se donne un système cinétique sous-jacent, qui revient, de manière intrinsèque, à choisir une famille de chemins ([41]) et donc une relation de Rankine-Hugoniot. Deux types de systèmes cinétiques sont proposés dans cette partie.

Le premier chapitre présente une méthode fondée sur une approche cinétique sous-jacente par le système de Vlasov-BGK-Ampère, issue de la physique statistique. Ce système converge formellement, par limite hydrodynamique, vers le système d'Euler bi-température. Ainsi, pour s'assurer de la validité de l'approche numérique par un système sous-jacent, il est indispensable de vérifier que la limite hydrodynamique du schéma que l'on propose coïncide avec un schéma fluide consistant avec le système d'Euler bi-température. Un schéma vérifiant une telle propriété, dit *Asymptotic-Preserving* (ou AP), a été proposé dans ce chapitre. La difficulté de développement d'un tel schéma réside dans le comportement à la limite des équations de Maxwell. Celles-ci dégénèrent, depuis des équations d'évolution, vers des équations algébriques. Par conséquent, ces équations, initialement utilisables pour le calcul du champ électrique, deviennent des contraintes, dites contraintes de quasi-neutralité, indispensables à la consistance des résultats numériques. Ces deux contraintes, portant sur la nullité de la charge et du courant électrique du plasma, sont imposées par les deux degrés de liberté suivants : le calcul du champ électrique et le choix du

flux d'espace.

Une reformulation de l'équation de Maxwell-Ampère permet d'obtenir une expression du champ électrique où l'on a imposé que le courant électrique est nul. Concernant la charge électrique, il est nécessaire de choisir un flux en espace pour lequel les termes de viscosité s'annulent lorsque l'on en prend les moments.

Le choix qui a été fait ici pour le flux en espace a pour conséquence notable une très forte viscosité numérique, et donc un coût de calcul très important. Une perspective immédiate de ce travail est donc le développement d'une méthode d'ordre élevé, préservant les contraintes de quasi-neutralité. Cependant, cette préservation semble devenir très difficile, si l'on traite les équations par une méthode de reconstruction MUSCL, par exemple, en raison de l'impossibilité d'assurer la nullité des termes non-linéaires du schéma.

Une deuxième perspective est celle de l'ajout du champ magnétique au modèle. Les équations de Maxwell dégénérées prennent dans ce cas une forme différente, et les outils proposés ici ne suffiront certainement pas, en l'état, à la consistance de la méthode. Enfin, une troisième perspective est celle de l'application de la méthode cinétique à grilles locales à ce modèle pour les plasmas.

Le second chapitre de cette première partie porte sur la résolution du système d'Euler bi-température en dimension 2 d'espace, cette fois-ci à l'aide d'un système sous-jacent de type BGK discret. L'objectif du chapitre est d'étendre la méthode proposée en dimension 1 dans [9] au cas 2D. Les mêmes problématiques qu'au chapitre précédent, concernant la consistance du traitement numérique du système cinétique, sont résolues, par un choix convenable de flux en espace et de calcul du champ électrique (ou, ce qui revient au même, de calcul des produits non-conservatifs). Par ailleurs, on démontre que les solutions du modèle cinétique construit dans ce chapitre, si elles existent, dissipent l'entropie du système d'Euler bi-température. Cette propriété permet ainsi de donner la définition de solutions admissibles pour ce système. Dans ce chapitre, on a également développé une procédure de passage à l'ordre 2 pour le système en dimension 2.

Comme au chapitre précédent, l'ajout du champ magnétique est une première perspective évidente permettant d'enrichir le traitement de ces modèles. Par ailleurs, plusieurs propriétés concernant le schéma à l'ordre 2 (dissipation d'entropie, positivité de la densité et des énergies internes) restent à démontrer.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, on s'est intéressé de manière plus approfondie au traitement numérique des équations cinétiques pour les gaz raréfiés. Le premier chapitre de cette seconde partie porte sur une méthode cinétique adaptative en vitesse pour les mélanges de gaz. La deuxième partie porte sur le traitement numérique des phénomènes de réactions chimiques des mélanges de gaz.

Dans ce premier chapitre, on s'est intéressé à la réduction du coût computationnel des méthodes numériques pour les modèles d'écoulements de mélanges de gaz raréfiés. En effet, l'étude d'équations cinétiques dans la première partie (notamment dans le chapitre 2) a révélé le fort coût numérique des méthodes pour ces modèles. Cette difficulté est principalement due au fait que les fonctions de distribution sont

définies sur l'espace des phases, dont la dimension est double lorsqu'on la compare à celle de l'espace physique. En particulier, il est nécessaire de procéder à une troncature du domaine en vitesse adéquat. Ainsi, on a proposé une méthode adaptative où la troncature en vitesse dépend du point d'espace, de l'espèce composante du gaz, ainsi que du temps. Cette non-uniformité des discrétisations a pour conséquence le besoin d'interpoler de nombreuses quantités. Pour parer à cela, on a également proposé une extension de la méthode autorisant un choix de troncature limitant au maximum les interpolations. Cette méthode a montré une efficacité certaine dans de nombreux cas, notamment ceux où les supports des fonctions de distribution varient fortement en espace.

Dans ce chapitre, on a considéré des gaz électriquement neutres. Une première perspective est donc celle de l'application de cette méthode adaptative au cas des plasmas. Ce cas fait apparaître un terme de force sous la forme d'un gradient en vitesse. Cette extension semble a priori relativement simple, car le stencil d'un flux de type *upwind* ne nécessitera pas d'interpolations supplémentaires, ce qui n'augmentera pas considérablement le temps de calcul. Cependant, une telle méthode, en l'état, ne s'appliquera pas aux problématiques du chapitre 2 aisément. En effet, la phase d'interpolation n'étant pas conservative, la préservation des contraintes de quasi-neutralité n'est pas évidente a priori.

Une deuxième perspective est celle de l'extension de cette méthode au cas de la dimension supérieure. A nouveau, les interpolations posent problème : leur coût de calcul augmente très fortement avec la dimension. Il est donc indispensable de réussir à diminuer encore considérablement ce coût.

Dans ce dernier chapitre, on s'intéresse au cas des gaz raréfiés réactifs. Plus précisément, on considère le cas d'un mélange de quatre espèces soumis à des réactions chimiques bimoléculaires réversibles lentes, dont un modèle de type BGK a été développé dans [57]. Le modèle est constitué d'un unique terme de relaxation vers une Maxwellienne dont les quantités de mélange la définissant rendent à la fois compte des échanges de quantités de mouvement et d'énergies par collisions et des échanges de masse par réactions chimiques. On développe un schéma explicite-implicite, où les termes mécaniques sont traités de manière implicite et les termes chimiques de manière explicite.

Le traitement implicite des termes mécaniques mène à la résolution de systèmes linéaires en chaque point d'espace, à chaque temps, couplant les vitesses macroscopiques et les énergies internes de chaque espèce. Par ailleurs, on obtient un schéma AP au regard de la fréquence de relaxation mécanique. Concernant le traitement explicite des termes chimiques, ce choix permet de garder le schéma linéaire. On démontre que le schéma est conservatif vis-à-vis des quantités macroscopiques totales. Cependant, une contrainte sur la fréquence de relaxation chimique existe, limitant ainsi la modélisation de réactions chimiques lentes.

Une perspective immédiate est celle du cas des réactions chimiques rapides, permettant l'obtention d'un schéma totalement AP. Un modèle théorique a été développé dans [17] et constitue une extension intéressante.

Définition des solutions faibles pour un système hyperbolique non-conservatif

Dans cette annexe, on présente brièvement la théorie relative à la définition des produits non-conservatifs, utilisée dans le cadre de l'étude des systèmes hyperboliques non-conservatifs. Considérons un tel système en dimension 1 d'espace, de la forme suivante :

$$\partial_t U(t, x) + A(U(t, x)) \partial_x U(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

où le vecteur des inconnues U appartient à Ω , où Ω est un sous-ensemble convexe ouvert de \mathbb{R}^N . Le terme de flux s'écrit ici à l'aide de l'application $A : \Omega \mapsto \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où l'on ne fait pas l'hypothèse que $A(u)$ est une matrice jacobienne, autrement dit, on ne suppose pas qu'il existe de fonction de flux $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$ telle que $F'(U) = A(U)$. Le système (A.1) ne peut donc pas s'écrire sous forme divergentielle.

On suppose que le système est hyperbolique, i.e. pour tout $U \in \Omega$, la matrice $A(U)$ est diagonalisable et possèdent N valeurs propres $(\lambda_k(U))_{k \in \{1, \dots, N\}}$, avec une base de vecteurs propres associés $(r_k(U))_k$. Par ailleurs, on suppose que tout champ est soit linéairement dégénéré

$$(\lambda_k)'(U) \cdot r_k(U) = 0, \quad \forall U \in \Omega,$$

soit vraiment non linéaire :

$$(\lambda_k)'(U) \cdot r_k(U) \neq 0, \quad \forall U \in \Omega.$$

Comme pour tout système hyperbolique, on souhaite affaiblir la définition de solution classique, car celle-ci est trop restrictive pour permettre d'obtenir des solutions pertinentes, notamment celles qui contiennent des chocs (ou des discontinuités en

général) et qui ne sont donc pas dérivables partout. Dans le cas conservatif, on a pour cela recours à la définition des solutions au sens des distributions, qui permet d'inclure ces solutions discontinues. Cependant, dans le cas non-conservatif, cette définition est mal posée. En effet, si l'on considère une solution discontinue en un point donnée x , alors la quantité $A(U(t, x))\partial_x U(t, x)$ s'écrit, au sens des distributions, comme le produit entre une fonction discontinue en x ($A(u)$) et la dérivée d'une fonction discontinue en x , ou masse de Dirac en x ($\partial_x U$). Ces quantités ne possèdent pas de définition unique.

Pour répondre à ce problème, une théorie, dite théorie des chemins, a été introduite par Dal Maso et coauteurs en 1995 dans [41]. La définition des produits non-conservatifs à l'aide de cette théorie passe par l'emploi d'une famille de chemins :

Définition A.1. Une famille de chemins dans Ω est une application de la forme :

$$\phi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega,$$

telle que

- $\phi(0, U, V) = U$ et $\phi(1, U, V) = V$, $\forall (U, V) \in \Omega \times \Omega$.
- pour tout ensemble borné $\mathcal{O} \subset \Omega$, il existe une constante k telle que

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial s}(s; U_L, U_R) \right| \leq k|U_R - U_L|,$$

pour tout $U_L, U_R \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $s \in [0, 1]$.

- pour tout ensemble borné $\mathcal{O} \subset \Omega$, il existe une constante M telle que

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial s}(s; U_L^1, U_R^1) - \frac{\partial \phi}{\partial s}(s; U_L^2, U_R^2) \right| \leq M(|U_L^1 - U_L^2| + |U_R^1 - U_R^2|),$$

pour tout $U_L^1, U_L^2, U_R^1, U_R^2 \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $s \in [0, 1]$.

En choisissant une famille de chemins ϕ , on peut alors interpréter le produit non-conservatif comme une mesure de Borel [95], notée $[A(U)\partial_x U]_\phi$. En un point de discontinuité x_0 séparant deux états gauche et droite U_L et U_R , le produit est défini par :

$$[A(U)\partial_x U]_\phi = \int_0^1 A(\phi(s; U_L, U_R)) \frac{\partial \phi}{\partial s}(s; U_L, U_R) ds \delta_{x_0}.$$

Par conséquent, les solutions faibles doivent vérifier, au travers des discontinuités, la relation de Rankine-Hugoniot généralisée suivante :

$$\int_0^1 (\sigma I - A(\phi(s; U_L, U_R))) \frac{\partial \phi}{\partial s}(s; U_L, U_R) ds = 0,$$

où σ désigne la vitesse de la discontinuité. Dans le cas conservatif, on remarque que cette condition redonne bien la condition de Rankine-Hugoniot classique :

$$F(U_L) - F(U_R) = \sigma(U_L - U_R),$$

qui est indépendante du choix de ϕ .

Exemple. Un premier exemple de choix de famille de chemins est celui des segments, introduit initialement dans [102], définie par :

$$\phi(s; U_L, U_R) = U_L + s(U_R - U_L),$$

pour tout $U_L, U_R \in \Omega$ et $s \in [0, 1]$.

Ainsi, en l'absence de relations de Rankine-Hugoniot, dans le cas général, deux informations manquent donc à la caractérisation des solutions discontinues : la vitesse de propagation des discontinuités σ , et l'amplitude du saut à travers une discontinuité $\Delta U = U_L - U_R$. A priori, le choix d'une famille de chemins est arbitraire. Pour orienter ce choix, il est nécessaire de supplémenter de nouvelles informations à ce système. On peut se donner une régularisation parabolique du système (A.1) de la forme :

$$\partial_t U(t, x) + A(U(t, x)) \partial_x U(t, x) = \varepsilon \Delta U(t, x),$$

où ε est une quantité traduisant de la petitesse de la viscosité, qui a pour effet de régulariser la solution et donc de lisser les discontinuités. Il s'agira alors de considérer notre système hyperbolique comme la limite quand ε tend vers 0.

Dans ce manuscrit, on considère le cas où l'on se donne un système cinétique sous-jacent qui, par un développement de Chapman-Enskog à l'ordre 1, permet d'explicitier les termes de viscosité.

Structure de la Jacobienne d'Euler bi-température 2D

Dans cette annexe, on détaille quelques calculs relatifs au système d'Euler bi-température en dimension 2, étudié dans le chapitre 3. On calcule la jacobienne dans un système de variables convenable et on obtient les valeurs propres de celle-ci.

On commence par rappeler l'expression du système d'Euler bi-température 2D :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + (p^e + p^i)\mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}^e + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^e + p^e)) - u \cdot \nabla (c^i p^e - c^e p^i) = \nu^{ei}(T^i - T^e), \\ \partial_t \mathcal{E}^i + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^i + p^i)) + u \cdot \nabla (c^i p^e - c^e p^i) = -\nu^{ei}(T^i - T^e). \end{cases}$$

Le système est ici écrit dans les variables "conservatives" $\mathcal{U} = (\rho, \rho u, \mathcal{E}^e, \mathcal{E}^i)$. On le réécrit dans les variables $\mathcal{W} = (\rho, u_1, u_2, \varepsilon^i, \varepsilon^e)$, où ε^α désigne l'énergie interne spécifique (i.e. l'énergie totale s'écrit $\mathcal{E}^\alpha = \frac{1}{2}\rho^\alpha |u| + \rho^\alpha \varepsilon^\alpha$). L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\partial_t \rho + \rho \operatorname{div} u + u \cdot \nabla \rho = 0.$$

Puis, en remarquant l'identité suivante :

$$\operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho(u \cdot \nabla)u + u \operatorname{div}(\rho u),$$

et en utilisant l'équation de conservation de la masse, l'équation sur la vitesse est :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \rho^{-1} \nabla p = 0,$$

où $p = p^e + p^i$. Enfin, pour obtenir les équations sur les énergies internes, on commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u p^e) - u \cdot (c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i) &= p^e \operatorname{div} u + c^e u \cdot \nabla p, \\ \operatorname{div}(u p^i) + u \cdot (c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i) &= p^i \operatorname{div} u + c^i u \cdot \nabla p. \end{aligned}$$

A l'aide de l'équation sur la vitesse, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^\alpha}(\partial_t \mathcal{E}^\alpha + \operatorname{div}(u \mathcal{E}^\alpha)) &= \frac{1}{2}(\rho u \cdot \partial_t u + u \cdot \partial_t(\rho u)) + \partial_t(\rho \varepsilon^\alpha) + \operatorname{div}\left(\frac{\rho |u|^2 u}{2} + \rho u \varepsilon^\alpha\right) \\ &= -\frac{1}{2}\rho u \cdot [(u \cdot \nabla)u + \rho^{-1}\nabla p] - \frac{1}{2}u \cdot [\operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p] \\ &\quad + \rho \partial_t \varepsilon^\alpha - \varepsilon^\alpha \operatorname{div}(\rho u) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho |u|^2 u + \rho u \varepsilon^\alpha\right). \end{aligned}$$

Les termes en énergies internes peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$-\varepsilon^\alpha \operatorname{div}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \varepsilon^\alpha) = \rho u \cdot \nabla \varepsilon^\alpha.$$

On peut montrer que les autres termes donnent :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\rho u \cdot [(u \cdot \nabla)u + \rho^{-1}\nabla p] - \frac{1}{2}u \cdot [\operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p] + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho |u|^2 u\right) \\ &= -\frac{1}{2}\rho u \cdot \nabla(|u|^2) - u \cdot \nabla p - \frac{1}{2}|u|^2 \operatorname{div}(\rho u) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho |u|^2 u\right) \\ &= -u \cdot \nabla p, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{c^\alpha}(\partial_t \mathcal{E}^\alpha + \operatorname{div}(u \mathcal{E}^\alpha)) = \rho \partial_t \varepsilon^\alpha + \rho u \cdot \nabla \varepsilon^\alpha - u \cdot \nabla p.$$

Ainsi, le membre de gauche des équations sur les énergies totales peut se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^e}(\partial_t \mathcal{E}^e + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^e + p^e))) - u \cdot (c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i) = \rho \partial_t \varepsilon^e + \rho u \cdot \nabla \varepsilon^e + \frac{1}{c^e} p^e \operatorname{div} u, \\ \frac{1}{c^i}(\partial_t \mathcal{E}^i + \operatorname{div}(u(\mathcal{E}^i + p^i))) + u \cdot (c^i \nabla p^e - c^e \nabla p^i) = \rho \partial_t \varepsilon^i + \rho u \cdot \nabla \varepsilon^i + \frac{1}{c^i} p^i \operatorname{div} u, \end{cases}$$

et on a, finalement, les équations sur les énergies internes suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \varepsilon^e + u \cdot \nabla \varepsilon^e + (\gamma^e - 1)\varepsilon^e \operatorname{div} u = \nu^{ei}(c^e \rho)^{-1}(T^i - T^e), \\ \partial_t \varepsilon^i + u \cdot \nabla \varepsilon^i + (\gamma^i - 1)\varepsilon^i \operatorname{div} u = \nu^{ei}(c^i \rho)^{-1}(T^e - T^i). \end{cases}$$

Au total, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \rho^{-1} \nabla(p^e + p^i) = 0, \\ \partial_t \varepsilon^e + u \cdot \nabla \varepsilon^e + (\gamma^e - 1)\varepsilon^e \operatorname{div} u = \nu^{ei}(c^e \rho)^{-1}(T^i - T^e), \\ \partial_t \varepsilon^i + u \cdot \nabla \varepsilon^i + (\gamma^i - 1)\varepsilon^i \operatorname{div} u = \nu^{ei}(c^i \rho)^{-1}(T^e - T^i). \end{cases}$$

Le système prend alors la forme suivante :

$$\partial_t \mathcal{W} + B_1(\mathcal{W}) \partial_{x_1} \mathcal{W} + B_2(\mathcal{W}) \partial_{x_2} \mathcal{W} = H(\mathcal{W}),$$

avec les jacobienues $B_j(\mathcal{W})$ définies, pour $j \in \{1, 2\}$, par :

$$B_j(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} u_j & \rho\delta_{1j} & \rho\delta_{2j} & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\bar{\varepsilon}\delta_{1j} & u_j & 0 & c^e(\gamma^e - 1)\delta_{1j} & c^i(\gamma^i - 1)\delta_{1j} \\ \rho^{-1}\bar{\varepsilon}\delta_{2j} & 0 & u_j & c^e(\gamma^e - 1)\delta_{2j} & c^i(\gamma^i - 1)\delta_{2j} \\ 0 & (\gamma^e - 1)\varepsilon^e\delta_{1j} & (\gamma^e - 1)\varepsilon^e\delta_{2j} & u_j & 0 \\ 0 & (\gamma^i - 1)\varepsilon^i\delta_{1j} & (\gamma^i - 1)\varepsilon^i\delta_{2j} & 0 & u_j \end{pmatrix},$$

où $\bar{\varepsilon} = \sum_{\alpha} c^{\alpha}(\gamma^{\alpha} - 1)\varepsilon^{\alpha}$ et δ le symbole de Kronecker. Le terme source $H(\mathcal{W})$ s'écrit :

$$H(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nu^{ei}(c^e\rho)^{-1}(T^i - T^e) \\ \nu^{ei}(c^i\rho)^{-1}(T^e - T^i) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir les valeurs propres du système, on doit calculer celles de $\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \omega_1 B_1(\mathcal{W}) + \omega_2 B_2(\mathcal{W})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^2$ avec $|\omega| = 1$. Un long calcul de déterminant donne le polynôme caractéristique suivant :

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - u \cdot \omega)^3((\lambda - u \cdot \omega)^2 - a^2),$$

où a est la vitesse du son, définie par :

$$a = \sqrt{\sum_{\alpha=e,i} \frac{\gamma^{\alpha} p^{\alpha}}{\rho}}.$$

Par conséquent, les valeurs propres sont, en les rangeant dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 = u \cdot \omega - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u \cdot \omega, \quad \lambda_5 = u \cdot \omega + a.$$

Les champs associés aux valeurs propres $u \cdot \omega - a$ et $u \cdot \omega + a$ sont vraiment non-linéaires, tandis que le champ associé à la valeur propre triple $u \cdot \omega$ est linéairement dégénéré.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall and S. Karni. A comment on the computation of non-conservative products. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2759–2763, 2010.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1965.
- [3] P. Andries, K. Aoki, and B. Perthame. A consistent BGK-type model for gas mixtures. *Journal of Statistical Physics*, 106(5-6) :993–1018, 2002.
- [4] P. Andries, P. Le Tallec, J.-P. Perlat, and B. Perthame. The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl number. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 19, 2000.
- [5] K. Aoki, C. Bardos, and S. Takata. Knudsen layer for gas mixtures. *Journal of Statistical Physics*, 112(3-4) :629–655, 2003.
- [6] D. Aregba-Driollet, S. Brull, and X. Lhébrard. Nonconservative hyperbolic systems in fluid mechanics. In *SMAI 2017—8ème Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles*, volume 64 of *ESAIM Proc. Surveys*. EDP Sci., 2018.
- [7] D. Aregba-Driollet and R. Natalini. Discrete kinetic schemes for systems of conservation laws. *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. I (Zürich, 1998)*, 129 :1–10, 1999.
- [8] D. Aregba-Driollet and R. Natalini. Discrete kinetic schemes for multidimensional systems of conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(6) :1973–2004, 2000.

-
- [9] D. Aregba–Driollet, J. Breil, S. Brull, B. Dubroca, and E. Estibals. Modelling and numerical approximation for the nonconservative bitemperature Euler model. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52(4) :1353–1383, 2018.
- [10] R.R. Arslanbekov, V.I. Kolobov, and A.A. Frolova. Kinetic solvers with adaptive mesh in phase space. *Physical Review E*, 88, 2013.
- [11] R. Belaouar, N. Crouseilles, P. Degond, and E. Sonnendrücker. An asymptotically stable semi-Lagrangian scheme in the quasi-neutral limit. *Journal of Scientific Computing*, 41(3) :341–365, 2009.
- [12] C. Berthon and F. Coquel. Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems. *Mathematics of Computation*, 76(259) :1163–1194, 2007.
- [13] C. Berthon, F. Coquel, and P.G. LeFloch. Why many theories of shock waves are necessary : kinetic relations for non-conservative systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*, 142(1) :1–37, 2012.
- [14] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, 94, 1954.
- [15] G.A Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, volume 5. Clarendon press Oxford, 1994.
- [16] M. Bisi, M. Groppi, and G. Spiga. Grad’s distribution functions in the kinetic equations for a chemical reaction. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14(2) :207–222, 2002.
- [17] M. Bisi, M. Groppi, and G. Spiga. Kinetic Bhatnagar-Gross-Krook model for fast reactive mixtures and its hydrodynamic limit. *Physical Review E*, 81(3), 2010.
- [18] A.V. Bobylev, M. Bisi, M. Groppi, G. Spiga, and I.F. Potapenko. A general consistent BGK model for gas mixtures. *Kinetic and Related Models*, 11(6) :1377–1393, 2018.
- [19] F. Bouchut. Construction of BGK Models with a Family of Kinetic Entropies for a Given System of Conservation Laws. *Journal of Statistical Physics*, 95 :113–170, 1999.
- [20] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Birkäuser Verlag, Basel, 2004.

- [21] C.M. Braams and P.E. Stott. *Nuclear Fusion : Half a Century of Magnetic Confinement Fusion Research*. CRC Press, 2002.
- [22] S. Brull. An ellipsoidal statistical model for gas mixtures. *Communications in Mathematical Sciences*, 13(1) :1–13, 2015.
- [23] S. Brull, P. Degond, F. Deluzet, and A. Mouton. Asymptotic-preserving scheme for a bi-fluid Euler-Lorentz model. *Kinetic and Related Models*, 4(4) :991–1023, 2011.
- [24] S. Brull, L. Forestier-Coste, and L. Mieussens. Two dimensional local adaptive discrete velocity grids for rarefied flow simulations. *AIP Conference Proceedings*, 1786(1), 2016.
- [25] S. Brull, X. Lhébrard, and B. Dubroca. Modelling and entropy satisfying relaxation scheme for the nonconservative bitemperature Euler system with transverse magnetic field. preprint, 2018.
- [26] S. Brull and L. Mieussens. Local discrete velocity grids for deterministic rarefied flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 266 :22–46, 2014.
- [27] S. Brull, V. Pavan, and J. Schneider. Derivation of a BGK model for mixtures. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 33 :74–86, 2012.
- [28] S. Brull and J. Schneider. On the ellipsoidal statistical model for polyatomic gases. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(8) :489–508, 2009.
- [29] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.
- [30] C. Chalons and F. Coquel. The Riemann problem for the multi-pressure euler system. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 02(03) :745–782, 2005.
- [31] C. Chalons and F. Coquel. Euler equations with several independent pressure laws and entropy satisfying explicit projection schemes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(9) :1469–1504, 2006.
- [32] C. Chalons and F. Coquel. A new comment on the computation of non-conservative products using Roe-type path conservative schemes. *Journal of Computational Physics*, 335 :592–604, 2017.
- [33] C. Chalons, M. Girardin, and S. Kokh. Large Time Step and Asymptotic Preserving Numerical Schemes for the Gas Dynamics Equations with Source Terms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(6) :A2874–A2902, 2013.

-
- [34] S. Chapman, T.G. Cowling, D. Burnett, and C. Cercignani. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases : An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1990.
- [35] F.F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Number vol. 1 in Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Springer, 1984.
- [36] S. Chen, K. Xu, C. Lee, and Q. Cai. A unified gas kinetic scheme with moving mesh and velocity space adaptation. *Journal of Computational Physics*, 231(20) :6643–6664, 2012.
- [37] F. Coquel and C. Marmignon. Numerical methods for weakly ionized gas. *Astrophysics and Space Science*, 260(1) :15–27, 1998.
- [38] F. Coron and B. Perthame. Numerical Passage from Kinetic to Fluid Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1) :26–42, 1991.
- [39] P. Crispel, P. Degond, and M.-H. Vignal. An asymptotically stable discretization for the Euler-Poisson system in the quasi-neutral limit. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 341(5) :323–328, 2005.
- [40] P. Crispel, P. Degond, and M.-H. Vignal. An asymptotic preserving scheme for the two-fluid Euler-Poisson model in the quasineutral limit. *Journal of Computational Physics*, 223(1) :208–234, 2007.
- [41] G. Dal Maso, P. Le Floch, and F. Murat. Definition and weak stability of non-conservative products. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 74 :483–548, 1995.
- [42] P. Degond and F. Deluzet. Asymptotic-preserving methods and multiscale models for plasma physics. *Journal of Computational Physics*, 336 :429–457, 2017.
- [43] P. Degond, F. Deluzet, and D. Savelief. Numerical approximation of the Euler-Maxwell model in the quasineutral limit. *Journal of Computational Physics*, 231(4) :1917–1946, 2012.
- [44] P. Degond, H. Liu, D. Savelief, and M.-H. Vignal. Numerical approximation of the Euler-Poisson-Boltzmann model in the quasineutral limit. *Journal of Scientific Computing*, 51(1) :59–86, 2012.
- [45] Organisation des Nations Unies. La population mondiale devrait atteindre 9,8 milliards en 2050 et 11,2 milliards en 2100, selon l'ONU, 2017.

- [46] J.J. Duderstadt and G.A. Moses. *Inertial confinement fusion*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1982.
- [47] M. Dumbser and D.S. Balsara. A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 304 :275–319, 2016.
- [48] B. Einfeldt, C.-D. Munz, P. L. Roe, and B. Sjögreen. On Godunov-type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, 92(2) :273–295, 1991.
- [49] L. G. Eriksson and P. Helander. Simulation of runaway electrons during tokamak disruptions. *Computer Physics Communications*, 154(3) :175–196, 2003.
- [50] L.-G. Eriksson, P. Helander, F. Andersson, D. Anderson, and M. Lisak. Current dynamics during disruptions in large tokamaks. *Physical Review Letters*, 92, 2004.
- [51] É. Estibals, H. Guillard, and A. Sangam. *Bi-temperature Euler Equations Modeling for Fusion Plasma*, 2017.
- [52] F. Filbet and S. Jin. A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources. *Journal of Computational Physics*, 229(20) :7625–7648, 2010.
- [53] F. Filbet and T. Rey. A rescaling velocity method for dissipative kinetic equations. Applications to granular media. *Journal of Computational Physics*, 248 :177–199, 2013.
- [54] G. Gallice. *Système d’Euler-Poisson, magnétohydrodynamique et schémas de Roe*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 1997.
- [55] J.P. Goedbloed and S. Poedts. *Principles of Magnetohydrodynamics : With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Principles of Magnetohydrodynamics : With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas. Cambridge University Press, 2004.
- [56] B. Graille, T. Magin, and M. Massot. Kinetic theory of plasmas : translational energy. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(4) :527–599, 2009.
- [57] M. Groppi and G. Spiga. A Bhatnagar–Gross–Krook-type approach for chemically reacting gas mixtures. *Physics of Fluids*, 16(12) :4273–4284, 2004.
- [58] E. P. Gross and M. Krook. Model for Collision Processes in Gases : Small-Amplitude Oscillations of Charged Two-Component Systems. *Physical Review*, 102(3) :593–604, 1956.

-
- [59] S. Guisset. *Modelling and numerical methods for the study of particle transport in a hot plasma*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2016.
- [60] S. Guisset, S. Brull, E. D’Humières, and B. Dubroca. Asymptotic-preserving scheme for the M_1 -Maxwell system in the quasi-neutral regime. *Communications in Computational Physics*, 19 :301–328, 2016.
- [61] J.R. Haack, C.D. Hauck, and M.S. Murillo. A Conservative, Entropic Multispecies BGK Model. *Journal of Statistical Physics*, 168(4) :826–856, 2017.
- [62] B.B. Hamel. Kinetic Model for Binary Gas Mixtures. *Physics of Fluids*, 8(3) :418, 1965.
- [63] M.T. Ho, L. Wu, I. Graur, Y. Zhang, and J.M. Reese. Comparative study of the Boltzmann and McCormack equations for Couette and Fourier flows of binary gaseous mixtures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 96 :29–41, 2016.
- [64] J. D. Huba and Beam Physics Branch. 2004 revised nrl plasma formulary.
- [65] S. Jaiswal, A.A. Alexeenko, and J. Hu. A discontinuous Galerkin fast spectral method for the multi-species Boltzmann equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 352 :56–84, 2019.
- [66] S. Jaiswal, A. Pikus, A. Strongrich, I.B. Sebastião, J. Hu, and A.A. Alexeenko. Quantification of thermally-driven flows in microsystems using Boltzmann equation in deterministic and stochastic contexts. *arXiv :1905.01385 [physics]*, 2019.
- [67] S. Jin. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 21(2) :441–454, 1999.
- [68] S. Jin and Q. Li. A BGK-penalization-based asymptotic-preserving scheme for the multispecies Boltzmann equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 29(3) :1056–1080, 2013.
- [69] V.I. Kolobov and R.R. Arslanbekov. Towards adaptive kinetic-fluid simulations of weakly ionized plasmas. *Journal of Computational Physics*, 231(3) :839–869, 2012.
- [70] S. Kosuge. Model Boltzmann equation for gas mixtures : Construction and numerical comparison. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 28(1) :170–184, 2009.
- [71] S. Kosuge, H. Mizuno, and K. Aoki. Numerical Investigation on Models of the Boltzmann Equation for Gas Mixtures. *Rarefied Gas Dynamics*, page 6, 2007.

- [72] L. Landau. 24 - the transport equation in the case of coulomb interactions. In D. Ter haar, editor, *Collected Papers of L.D. Landau*, pages 163–170. Pergamon, 1965.
- [73] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Number vol. 5 in course of theoretical physics. Elsevier Science, 2013.
- [74] J.D. Lawson. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1) :6–10, 1957.
- [75] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32(1) :101–136, 1979.
- [76] P.G. LeFloch. Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form. *Communications in Partial Differential Equations*, 13(6) :669–727, 1988.
- [77] P.G. LeFloch. Graph solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(4) :643–689, 2004.
- [78] P.G. LeFloch. Kinetic relations for undercompressive shock waves. Physical, mathematical, and numerical issues. In *Nonlinear partial differential equations and hyperbolic wave phenomena*, volume 526 of *Contemp. Math.*, pages 237–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [79] P.G. LeFloch and S. Mishra. Numerical methods with controlled dissipation for small-scale dependent shocks. *Acta Numerica*, 23 :743–816, 2014.
- [80] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Department of Mathematics Research Institute of Mathematics. Springer, 1992.
- [81] C.D. Levermore. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *Journal of Statistical Physics*, 83(5-6) :1021–1065, 1996.
- [82] C. Liu and K. Xu. A unified gas kinetic scheme for continuum and rarefied flows v : Multiscale and multi-component plasma transport. *Communications in Computational Physics*, 22(5) :1175–1223, 2017.
- [83] T.-P. Liu. Hyperbolic conservation laws with relaxation. *Communications in Mathematical Physics*, 108(1) :153–175, 1987.
- [84] J.C. Maxwell and G. Séligmann-Lui. *Traité d’électricité et de magnétisme*. Number vol. 1 in *Traité d’électricité et de magnétisme*. Gauthier-Villars, 1885.
- [85] F.J. McCormack. Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases. *Physics of Fluids*, 16(12) :2095, 1973.

-
- [86] K. Miyamoto. *Plasma Physics for Nuclear Fusion*. MIT Press, 1980.
- [87] T. F. Morse. Kinetic Model Equations for a Gas Mixture. *Physics of Fluids*, 7(12) :2012, 1964.
- [88] R. Natalini. A Discrete Kinetic Approximation of Entropy Solutions to Multidimensional Scalar Conservation Laws. *Journal of Differential Equations*, 148(2) :292–317, 1998.
- [89] C. Parés. Path-conservative numerical methods for nonconservative hyperbolic systems. In *Numerical methods for balance laws*, volume 24 of *Quad. Mat.*, pages 67–121. Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2009.
- [90] B. Perthame. Boltzmann Type Schemes for Gas Dynamics and the Entropy Property. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(6) :1405–1421, 1990.
- [91] B. Perthame. Second-Order Boltzmann Schemes for Compressible Euler Equations in One and Two Space Dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(1) :1–19, 1992.
- [92] B. Perthame and C.-W. Shu. On positivity preserving finite volume schemes for euler equations. *Numerische Mathematik*, 73(1) :119–130, 1996.
- [93] L.P. Pitaevskii and E.M. Lifshitz. *Physical Kinetics*. Number vol. 10 in course of theoretical physics. Elsevier Science, 2012.
- [94] J.M. Rax. *Physique des plasmas : Cours et applications*. Physique. Dunod, 2005.
- [95] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Sciences sup. Dunod, 1998.
- [96] C.-W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In Alfio Quarteroni, editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, volume 1697, pages 325–432. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [97] L. Sirovich. Kinetic Modeling of Gas Mixtures. *Physics of Fluids*, 5(8) :908, 1962.
- [98] G. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27(1) :1–31, 1978.
- [99] M. Tabak, J. Hammer, M.E. Glinsky, W.L. Kruer, S.C. Wilks, J. Woodworth, E.M. Campbell, M.D. Perry, and R.J. Mason. Ignition and high gain with ultrapowerful lasers. *Physics of Plasmas*, 1(5) :1626–1634, 1994.

- [100] E. Tadmor. A minimum entropy principle in the gas dynamics equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2(3) :211–219, 1986.
- [101] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [102] A. I. Vol’pert. Spaces BV and quasilinear equations. *Matematicheskii Sbornik*, 73 (115) :255–302, 1967.
- [103] R. Wang and K. Xu. Unified gas-kinetic scheme for multi-species non-equilibrium flow. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1628, pages 970–975. AIP, 2014.
- [104] Q. Wargnier, S. Faure, B. Graille, T. Magin, and M. Massot. Numerical treatment of the nonconservative product in a multiscale fluid model for plasmas in thermal nonequilibrium : application to solar physics. preprint, 2018.
- [105] T. Xiao, K. Xu, and Q. Cai. A unified gas-kinetic scheme for multiscale and multicomponent flow transport. *Applied Mathematics and Mechanics*, 40(3) :355–372, 2019.
- [106] K. Xu, X. He, and C. Cai. Multiple temperature kinetic model and gas-kinetic method for hypersonic non-equilibrium flow computations. *Journal of Computational Physics*, 227(14) :6779–6794, 2008.
- [107] S. Zabelok, R. Arslanbekov, and V. Kolobov. Adaptive kinetic-fluid solvers for heterogeneous computing architectures. *Journal of Computational Physics*, 303 :455–469, 2015.
- [108] Y. Zhang, L. Zhu, P. Wang, and Z. Guo. Discrete unified gas kinetic scheme for flows of binary gas mixture based on the McCormack model. *Physics of Fluids*, 31 :017101, 2019.
- [109] Y. Zhang, L. Zhu, R. Wang, and Z. Guo. Discrete unified gas kinetic scheme for all Knudsen number flows. III. Binary gas mixtures of Maxwell molecules. *Physical Review E*, 97(5), 2018.