

*Equations de Klein Gordon sur les
variétés*

BOUDREF Mohamed Ahmed

Maitre de Conférences

Université de Bouira-Algérie-

12 novembre 2019

Table des matières

Préface	v
Résumé	vi
Abstract	vii
Introduction générale	viii
I Rappels mathématiques	1
1 Notions sur les variétés	2
1.1 Variétés et variétés différentielles	2
1.1.1 Cartes. Atlas	2
1.1.2 Variété abstraite et sous variété	7
1.1.3 Variétés différentielles	8
1.1.4 Récapitulatif	9
1.1.5 Surfaces modèles	9
1.2 Variétés et physique théorique	11
2 Equation de Klein-Gordon	13
2.1 Equation de Klein-Gordon et courant conservé	14
2.2 Solutions libres	16

2.3	Résolution de l'équation de Klein Gordon pour le champ coulombien	17
II Equations de Klein-Gordon et géométrie variable		
3	Réduction Dimensionnelle	24
3.1	Introduction	24
3.2	Réduction dimensionnelle	25
3.2.1	Principe de la réduction dimensionnelle	26
3.2.2	Illustration	26
3.2.3	Efficacité \bar{g} pour le modèle φ^4 à diverses dimen- sions	28
3.2.4	La réduction dimensionnelle dans l'espace-moment	29
3.2.5	Réduction avec les Lagrangiens	31
4	Solutions de l'équation de Klein Gordon sur une variété avec géométrie variable	34
4.1	Equation de Klein Gordon dans une géométrie d'espace cylindrique	35
4.1.1	Equation de Klein Gordon en (1+2)-dimensions à symétrie cylindrique	35
4.1.2	Transformation du problème en une résolution d'une équation différentielle ordinaire de type Schrödinger	36
4.1.3	Equation d'onde scalaire dans un espace-temps de dimension (1+1) :	38
4.2	Exemple d'illustration : Deux cylindres de rayons constants R et r , ($r < R$) reliés par une partie de cône	39
4.3	Généralisation aux dimensions supérieures	51
4.3.1	Cas tridimensionnel	51

4.3.2	Cas multidimensionnel	54
III	Conclusion et perspectives	57

Préface

Ce document est une vue sur l'utilisation des mathématiques en physique, il étudie l'équation de Klein Gordon connue en physique théorique, qui est une EDP, sur des variétés.

L'étude de ce type de problème impose l'utilisation de plusieurs notions en mathématiques qu'en physique, telles que : les variétés, les EDP, la réduction dimensionnelle, l'équation de Klein-Gordon.

Ce présent travail, est destiné aux étudiants en post graduation universitaire, souhaitant débiter leurs études en physique mathématique.

Je dédié ce travail, à mes chers étudiants.

Résumé

Ce travail consiste à étudier un développement d'une étude de la réduction dimensionnelle et cela pour construire une théorie de champ quantique renormalisable. La réduction sera à partir d'un espace-temps à 4 dimensions ($D = 1+3$) à une variante avec un plus petit nombre de dimensions spatiales ($D = 1 + d, d < 3$) à des distances suffisamment petites.

Nous allons démontrer un théorème important qui reliera l'étude de l'équation de Klein Gordon sur l'espace (à géométrie variable) à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effective généré par une variation géométrique. Ce résultat sera basé sur la méthode de Fourier (dite séparation de variables) dans l'équation de Klein-Gordon et sur le fait que les espaces bi-dimensionnels sont conformes à plat. Nous allons montrer que dans le cas de la dimension d'espace ($d = 2$) le facteur de conformité de la métrique entre le potentiel effectif dans l'équation de Schrödinger due à la raison des modifications correspondantes des variables.

Comme exemple, nous allons considérer un espace-temps à géométrie spatiale variable incluant une transition vers une réduction dimensionnelle. Cet exemple que nous allons étudier contient une combinaison entre deux régions cylindriques bidimensionnelles de rayons distincts reliées par une région de transition.

Abstract

This work consists of studying a development of a study of dimensional reduction and this to construct a renormalizable quantum field theory. The reduction will be from a 4-dimensional space-time ($D = 1 + 3$) to a variant with a smaller number of spatial dimensions ($D = 1 + d, d < 3$) at sufficiently small distances.

We will prove an important theorem that links the study of Klein Gordon's equation on space (with variable geometry) to the resolution of a Schrödinger equation with an effective potential generated by geometric variation. This result is based on the Fourier method (so-called variable separation) in Klein Gordon's equation and on the fact that two-dimensional spaces are flat. We will show that in the case of the space dimension ($d = 2$) the conformal factor of the metric between the effective potential in the Schrödinger equation due to the corresponding modifications of the variables.

As an example, we will consider a space-time with a variable spatial geometry including a transition to a dimensional reduction. This example which we are going to study contains a combination between two bidimensional cylindrical regions of distinct radii connected by a transition region.

Introduction générale

Le problème principal de la gravité quantique standard avec l'action classique d'*Einstien-Hilbert* est que : la constante de Newton G a une dimension de masse négative $[G] = [M^{2-D}]$ (en terme d'une échelle de masse appropriée M), où $D = 1+d$ est la dimension d'espace-temps et la gravité quantique n'est donc pas renormalisable de façon perturbative pour $D > 2$. La même chose est vraie pour la théorie électrofaible sous le champ de *Higgs*.

L'idée est d'utiliser la réduction dimensionnelle [9] de la variété avec la dimension $(1+3 = 4)$ en une dimension plus petite $(1+d, d < 3)$ à des distances suffisamment petites (grand transfert de quantité de mouvement).

L'approche utilisée ne suppose aucune modification de la notion du temps. Nous pensons plutôt à une réduction suffisamment différentiable des dimensions spatiales.

Comme conséquence, l'espace physique est une variété continue, mais peut être pas indéfiniment différentiable, et se compose de parties ayant des dimensions topologiques différentes. Par la suite, nous allons utiliser quelques modèles d'espace à géométrie variable.

Pour acquérir une certaine intuition physique et de l'expérience, nous commençons par les solutions à ondes scalaires de l'équation de Klein-Gordon.

On considère l'équation de Klein-Gordon

$$\begin{cases} \square(\varphi) - M^2\varphi = 0, \\ \text{avec } \square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu) \end{cases} \quad (1)$$

pour un champ scalaire complexe $\varphi(x)$ dans un espace-temps à $(1+d)$ dimension avec signature $(+, -, \dots, -)$

$$\mu\nu = 0, 1, \dots, d,$$

$$x = \{x^0, x^1, \dots, x^d\} = \{x^0, x\}$$

où $x^0 = t$ et $d \geq 1$ est la dimension de l'espace.

Après quantification, des champs complexes $\varphi(x) \neq \varphi^*(x)$ correspondant à des particules chargées avec la charge électrique $Q = \pm 1$ et la masse (réelle) M avec le courant

$$j_\mu = i(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$$

satisfaisant l'équation de continuité donnant la loi de conservation de la charge.

La possibilité la plus simple, de choisir un système de référence consiste à utiliser des coordonnées gaussiennes dans lesquelles l'opérateur \square , $(1+d)$ -dimensionnel prendra la forme

$$\begin{cases} \square = -\partial_{tt}^2 + \Delta_d \\ \Delta_d = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_m(\sqrt{|\gamma|}\gamma^{mn}\partial_n), m, n = 1, \dots, d \end{cases}$$

avec Δ_d est un laplacien d -dimensionnel défini par la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ d -dimensionnelle.

Dès le début, et pendant tout ce travail, nous fixons le cadre du formalisme $(1+d)$ avec un temps global qui est obligatoire pour construire une charge physique correcte, et en particulier, une théorie quantique des champs.

CHAPITRE 0. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le présent manuscrit est organisé comme suit :

la première partie (Rappels mathématiques) donne des notions théoriques de bases, est divisée en deux chapitres,

- le chapitre premier, est réservé aux notions fondamentales sur les variétés différentielles et exemples.

- le second chapitre, est réservé pour exposer quelques notions de bases sur les équations de Klein Gordon.

La deuxième partie (Equations de Klein-Gordon et géométrie variable) est divisée en deux chapitres,

- le chapitre trois, c'est un exposé sur la réduction dimensionnelle.

- le chapitre quatre, est réservé à la résolution de l'équation de Klein Gordon sur une variété avec géométrie variable.

Chaque chapitre est divisé en section (1, 2, etc.) et la plupart des sections sont divisées en sous-sections. On distinguera, par exemple, la troisième sous-section de la cinquième section du chapitre 3 par "3.5.3".

Nous terminons par une conclusion et perspectives en troisième partie.

Première partie
Rappels mathématiques

Chapitre 1

Notions sur les variétés

Dans ce chapitre nous allons exposer quelques notions de bases sur les variétés topologiques, les variétés différentielles ainsi que quelques exemples les plus utilisés.

1.1 Variétés et variétés différentielles

La notion de variété est assez difficile à définir avec précision. Cette section donnera les propriétés les plus remarquables des variétés, et les exemples d'illustration.

1.1.1 Cartes. Atlas

Définition 1.1.1 [9] *Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé (vérifie l'axiome de Hausdorff) dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe (i.e. existe une application bijective et bicontinue) à un ouvert de \mathbb{R}^n .*

Remarque 1.1.1 *Deux variétés homéomorphes ont la même dimension d'après le théorème d'invariance du domaine.*

1.1. VARIÉTÉS ET VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

- 1- Le graphe de la fonction $f(x) = |x|$ (ou celui de n'importe quelle application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) est une variété topologique de dimension 1.
2. La réunion X des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$, dans \mathbb{R}^2 n'est pas une variété topologique.

Définition 1.1.2 [4] Une carte d'une variété topologique X est la donnée d'un couple (U, φ) formé d'un ouvert U de X (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Donc une carte est une application

$$\varphi : W \longrightarrow U,$$

où W est un sous-ensemble de X et U un ouvert de \mathbb{R}^n , telle que cette application est bijective.

Nous appelons $\varphi(x)$ l'image sur la carte U du point $x \in W \subset X$. Soient les cartes

$$\varphi_i : W_i \longrightarrow U_i \text{ et } \varphi_j : W_j \longrightarrow U_j$$

Si elle n'est pas vide l'intersection $W_i \cap W_j$ des ensembles W_i, W_j possède des images sur les deux cartes :

$$U_{ij} = \varphi_i(W_i \cap W_j),$$

$$U_{ji} = \varphi_j(W_i \cap W_j).$$

On passe d'une carte à l'autre par une application de *domaines d'espaces linéaires*

$$\begin{cases} \varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_i, \\ \varphi_{ij}(x) = \varphi_i(\varphi_j^{-1}(x)). \end{cases}$$

Définition 1.1.3 Deux cartes $\varphi_i : W_i \longrightarrow U_i$ et $\varphi_j : W_j \longrightarrow U_j$ sont dites compatibles si

1. les ensembles U_{ij} et U_{ji} sont ouverts (ou peut être vides),
2. les applications φ_{ij} et φ_{ji} (définies si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$) sont des difféomorphismes des domaines de \mathbb{R}^n .

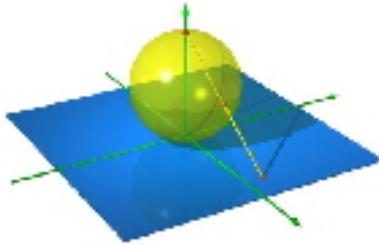
Remarque 1.1.2 Une carte est une portion de la variété analogue à une portion d'espace vectoriel; les changements de cartes indiquent comment ces portions de variétés se raccordent entre elles. Ainsi, pour décrire un cercle il est possible de prendre comme cartes deux arcs qui se chevauchent; le changement de cartes constitue une information sur le recollement au niveau de la zone de chevauchement.

Définition 1.1.4 Un atlas de X est une famille (U_i, φ_i) , $i \in I$ (pas forcément finie) de cartes, dont les domaines U_i recouvrent X .

Définition 1.1.5 Deux atlas sur X sont équivalents si leur union est de nouveau un atlas (i.e. si une carte quelconque du premier atlas est compatible avec une carte quelconque du second).

Cette terminologie parle d'elle même : la surface de la terre est une sphère S^2 que l'on peut considérer comme une variété de dimension 2. Les cartes sont les présentations planes, forcément partielles (un espace compact ne pouvant être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n) et un atlas est important si on peut représenter toute la terre.

La projection *stéréographique* de la terre montre un exemple de base de cartes et d'atlas (voir figure ci-dessous). La famille des cercles contenus par la sphère et tangents au point N (pôle nord) est représentée sur la carte inférieure par une famille de droites parallèles, et sur la carte supérieure par une famille de cercles tangents.



La projection stéréographique

Remarque 1.1.3 *Il n'est généralement pas possible de décrire une variété à l'aide d'une seule carte, parce que la structure globale de la variété est différente de la structure simple de l'espace modèle. Par exemple, aucune carte plate ne peut décrire convenablement la Terre entière. Les variétés apparaissent comme des espaces topologiques et leurs topologies sont uniquement déterminées par la donnée de leurs atlas respectifs.*

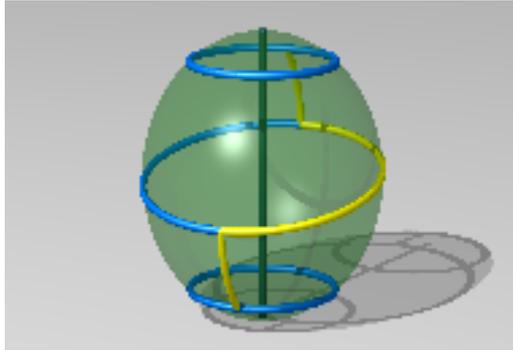
Remarque 1.1.4 *Suivant la nature des applications de changement de cartes, la variété possède une structure plus ou moins forte : variété topologique, variété différentielle, variété localement plate. Pour une variété topologique, la donnée d'un atlas équivaut simplement à la donnée d'une topologie dont les ouverts suffisamment petits s'identifient à l'espace plat. Pour les structures plus fines citées, l'introduction de cartes est indispensable pour les définir.*

Exemple 1.1.1 (de variétés)

1. Un espace linéaire \mathbb{R}^n ou un sous-domaine U ouvert de \mathbb{R}^n .

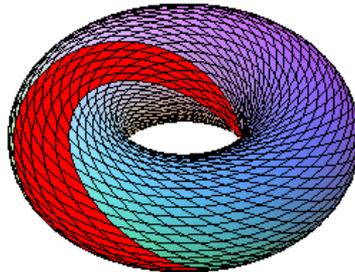
CHAPITRE 1. NOTIONS SUR LES VARIÉTÉS

2. La sphère \mathbb{R}^n définie dans \mathbb{R}^{n+1} par $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = l$ et notamment $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.



La sphère \mathbb{R}^n

3. Le tore : $T^2 = S^2$.



Le tore

4. L'espace projectif $RP^n = \{(x_0, \dots, x_n)\}$.
5. Les courbes sont des variétés de dimension n .

Remarque 1.1.5 *Deux remarques sont à noter :*

1. *Sur une surface il faut deux coordonnées.*
2. *Il existe de nombreuses variétés de dimension supérieure à 2, qu'il est difficile de représenter graphiquement.*

Remarque 1.1.6 *On peut approcher les variétés de deux façons :*

1. *En les construisant par recollement d'autres espaces simples, comme les enfants s'amuse à construire avec du papier des tétraèdres, des cubes et autres polyèdres en dessinant la figure d'un patron sur une feuille, en découpant convenablement les bords, en pliant et en recollant ou comme on construit un vêtement en coutant l'ensemble des morceaux de tissus. Par exemple, les mathématiciens obtiennent un cercle en repliant un segment sur lui-même, un cylindre ou un cône en repliant une bande plane sur elle-même. Un autre exemple classique est le ruban de Möbius illustré ci-contre (en toute rigueur, c'est un exemple de variété à bord). Il est également possible de rajouter des anses à une sphère.*
2. *En leur appliquant une trame dont la métrique dépend de la position. Par exemple, pour les coordonnées sphériques terrestres (altitude, latitude et longitude), un changement de longitude correspond à une distance qui dépend de la latitude (un degré de longitude correspond à une distance plus longue à l'équateur qu'ailleurs). On parlera dans ce cas de variété riemannienne.*

1.1.2 Variété abstraite et sous variété

De nombreux sous-ensembles particuliers du plan et de l'espace de dimension 3 peuvent être munis d'une structure de variétés : le cercle,

le cylindre, la sphère, le ruban de *Möbius*,..., on les appelle sous-variétés ou variétés plongées.

Il existe en outre une notion de variétés abstraites, qui sont construites sans qu'on les considère comme des sous-variétés. Un exemple plus important est celui de la bouteille de Klein, elle est de dimension 2.

Le théorème de plongement de *Whitney* montre que toute variété abstraite de dimension n peut être réalisée comme une sous-variété d'un espace de dimension suffisamment grand, à savoir de dimension $2n$. Ainsi la bouteille de Klein (de dimension 2) ne peut être plongée dans l'espace à 3 dimensions, mais forme une sous variété de l'espace à 4 dimensions.

1.1.3 Variétés différentielles

Autant de façons nous permettent de définir la notion de variétés différentielles [4][9].

Définition 1.1.6 *Une variété différentielle M est composée d'un ensemble M et de la structure de variété différentiable qui lui a été conférée.*

Remarque 1.1.7 *On obtient diverses classes de variétés selon la classe de différentiabilité des applications φ (qui définissent les atlas).*

Définition 1.1.7 *Une variété de classe $C^r_{(r \geq 1)}$ est appelée variété différentielle ou lisse. Elle est dite fermée lorsqu'elle est compacte et sans bord.*

Théorème 1.1.1 [4] *Les sous espaces d'une variété différentielle sont ses sous-variétés, et nous avons*

- Une courbe est une sous-variété de dimension 1.
- Une surface est une sous-variété de dimension 2.

Définition 1.1.8 On dit qu'une partie de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension p si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace affine de dimension p (i.e. plan tangent). Ainsi, une sous-variété de dimension 1 est une partie de \mathbb{R}^n tel que, si on "Zoom" sur n'importe quel de ses points on finira par avoir l'impression qu'il sagirat d'un morceau de droite.

1.1.4 Récapitulatif

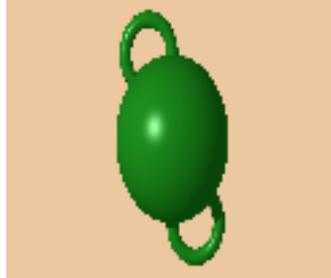
- a) On pourra définir la notion de variétés différentielles comme suit :
- Un espace localement euclidien est dit variété topologique s'il est un espace de Hausdorff à base dénombrable.
 - Un C^r -espace est dit C^r -variété de classe C^r lorsqu'il est une variété topologique.
 - Une variété de classe C^0 est une variété topologique.

b) Un espace topologique est localement euclidien de dimension n si chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n .

1.1.5 Surfaces modèles

Nous donnons les surfaces modèles élémentaires : la sphère à trous, la bande de *Möbius* et la bouteille de *Klein*.

1. Une sphère à l trous est la sphère S^2 de laquelle on a ôté les intérieurs de l segments sphériques disjoints, son bord est la somme de l cercles et possède une orientation induite bien définie.
- La sphère à 1-trou est difféomorphe à la boule D^2 .
 - La sphère à 2-trous, au cylindre $S^1 \times D^1$, ce dernier est dit *anse*.



La surface à anses

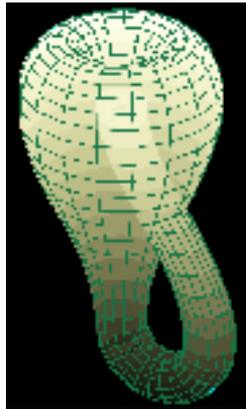
2. On appelle bande de Möbius la sous-variété de l'espace \mathbb{R}^3 engendrée par un segment de longueur 1, dont le centre glisse le long d'un cercle S^1 , tandis que le segment, tout en étant normal à S^1 , effectue une rotation uniforme d'un angle total π . C'est une sous-variété compacte, non orientable, à bord difféomorphe à S^1 .



Le ruban de Möbius

3. **Bouteille de Klein** : c'est une surface fermée sans bord, et non orientable, c'est à dire, une surface pour laquelle il n'est pas possible de définir un intérieur et un extérieur. La bouteille de Klein a été décrite pour la première fois en 1882 par le mathématicien allemand *Felix Klein*. Cette bouteille est étroitement

lié au ruban de Möbius et à des immersions du plan projectif réel telle que la surface de *Boy*. C'est l'un des exemples les plus simples de variétés abstraites car c'est une surface qu'on peut être représentée dans l'espace de trois dimensions.



La bouteille de Klein

Quelques propriétés :

1. La bouteille de Klein est la somme connexe de deux plans projectifs réels.
2. En la coupant en deux par rapport à son plan de symétrie on obtient deux fois un ruban Möbius.

1.2 Variétés et physique théorique

La physique théorique contemporaine utilise abondamment les variétés différentielles, voici quelques exemples :

1. L'espace temps de la relativité générale, qui est un continuum courbé à 4 dimensions (espace + temps), modélisé par une variété à quatre dimensions munie de ce qu'on appelle une pseudo-métrique lorentzienne de signature $(-, +, +, +)$.
2. Les théories de champs de Jauge dans l'espace-temps, modélisé comme précédemment par une variété lorentzienne à quatre dimensions (pas nécessairement courbe), utilisent pour leurs parts la notion enrichie d'espace fibré différentiel. Il s'agit encore d'une variété différentielle, mais de dimension plus grande que celle de l'espace-temps, qui joue ici le rôle d'espace de base du fibré.

Chapitre 2

Equation de Klein-Gordon

Dans un grand nombre de problèmes importants de la physique théorique et mathématique, on est conduit à l'équation différentielle

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0 \quad (2.1)$$

dans laquelle $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1. On rencontre des équations de ce type en résolvant les équations de Laplace et d'Helmholtz en coordonnées curvilignes par séparation de variables dans les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique : mouvement d'une particule dans un champ à symétrie sphérique, oscillateur harmonique, recherche des solutions d'équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein Gordon pour un potentiel coulombien,...

En outre, on est conduit à des équations de ce type dans bon nombre de problèmes modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire liés à l'étude des processus de diffusion, d'interaction des neutrons avec les noyaux lourds, à l'analyse du spectre de rotation et de vibration des molécules par exemple dans la résolution des équations de Schrödinger aux potentiels de Morse, de Kratzer, de Wood-Saxon,

de Pöschl-Teller. . . .

En cherchant les valeurs propres de l'énergie E et les fonctions propres des équations de Schrödinger, de Dirac, de Klein Gordon, on ramène les équations initiales par séparation de variables à l'équation (2.1) sur un intervalle (a, b) .

La résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation de variables (ou la méthode de Fourier) se réduit à celle d'équations différentielles ordinaires.

Dans bon nombre de problèmes intéressants de physique mathématique, les solutions de ces équations se laissent exprimer à l'aide des fonctions spéciales.

Dans ce chapitre nous allons rappeler la théorie des équations de Klein-Gordon du point de vue de la mécanique quantique relativiste [5]. On commence par une étude générale de l'équation, des courants conservés ainsi que son application au problème à potentiel coulombien, en présentant la méthode de résolution.

2.1 Equation de Klein-Gordon et courant conservé

Soit $\phi(x)$ un champ scalaire. L'équation de Klein-Gordon est celle qui décrit les particules de spin 0. Elle est donnée par

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \tag{2.2}$$

avec $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Cette équation est manifestement covariante étant donné que l'opérateur \square est invariant et que le champ ϕ est scalaire. Il existe un courant conservé par les champs vérifiant l'équation de Klein-Gordon. En effet, en posant

2.1. EQUATION DE KLEIN-GORDON ET COURANT CONSERVÉ

$$j^\mu = \frac{i}{2m}(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (2.3)$$

on voit que

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m}(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \phi^* \square \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \square \phi^*) = \frac{i}{2m}(\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*) = 0 \quad (2.4)$$

où l'on a utilisé l'équation de Klein-Gordon pour la dernière égalité. En posant $j^0 = \rho$, on en déduit facilement que

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dV = - \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.5)$$

en supposant que les champs soient locaux. Ainsi, comme en mécanique quantique non relativiste, on aurait envie d'interpréter ρ comme une densité de probabilité à une particule. Toutefois, on peut très vite se rendre compte qu'on rencontre des problèmes avec une telle interprétation directe. En effet, si l'on considère une onde plane

$$\phi(x) = \exp(i \vec{p} \cdot \vec{x} - iEt) \quad (2.6)$$

l'équation de Klein-Gordon implique immédiatement que

$$E^2 = \vec{P}^2 + m^2 \quad (2.7)$$

et donc

$$E = \pm \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \quad (2.8)$$

De plus, le calcul du courant sur cette onde plane donne

$$j^\mu = \left(\frac{E}{m}, \frac{\vec{p}}{m} \right) = \frac{p^\mu}{m} \quad (2.9)$$

et donc $\rho = \frac{E}{m}$ peut être soit positif, soit négatif, dépendant du signe de l'énergie. Une densité de probabilité négative semble évidemment insatisfaisante. On verra par la suite que l'introduction des antiparticules lève ce problème.

2.2 Solutions libres

Nous avons exposé jusque là une théorie libre, c'est à dire ne faisant intervenir aucune interaction. Pour le moment, on va s'intéresser aux solutions libres de l'équation (2.2). Pour ce faire, nous utiliserons la transformation de Fourier. Cette dernière est définie pour $\phi(x)$ par

$$\phi(k, t) = \int \phi(x, t) e^{ik_\mu x^\mu} d^4x \quad (2.10)$$

son inverse est donc

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k, t) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.11)$$

En utilisant la représentation (2.11) pour $\phi(x)$ et en appliquant l'équation (2.2), on trouve que

$$k_\mu k^\mu = k^2 = m^2. \quad (2.12)$$

Cette équation fixe l'énergie de l'onde car elle donne

$$E_\pm = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (2.13)$$

L'introduction de cette contrainte peut se faire de manière naturelle en modifiant l'équation (2.11). On écrit alors

2.3. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE KLEIN GORDON POUR LE CHAMP COULOMBIEN

$$\phi(x, t) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k, t) e^{-ik_\mu x^\mu} (2\pi) \delta(k^2 - m^2) d^4 k \quad (2.14)$$

où le facteur 2π est introduit par souci de normalisation de la fonction δ . En utilisant le fait que cette fonction δ peut s'écrire de manière plus agréable comme

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2E} (\delta(k_0 - E_+) + \delta(k_0 - E_-)) \quad (2.15)$$

où l'on a défini $E = |E_\pm|$. La fonction ϕ solution de l'équation de Klein Gordon peut alors s'écrire sous la forme générale

$$\phi(x, t) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \cdot 2E} [a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - Et)} + b(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + Et)}] d^3 k \quad (2.16)$$

où les fonctions $a(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ sont deux fonctions indépendantes, vu que le champ est complexe. Si le champ était réel, $a(\vec{k})$ et $b^*(\vec{k})$ seraient identifiés. A ce stade, il est très important de remarquer que la fonction ϕ comprend une superposition d'onde d'énergies positives et d'ondes d'énergies négatives.

2.3 Résolution de l'équation de Klein Gordon pour le champ coulombien

Considérons l'équation de Klein-Gordon définissant le mouvement d'une particule chargée de charge $-e$ ($e > 0$), de spin entier et de masse M dans un champ coulombien d'énergie potentielle $U(r) = -Ze^2/r$. un tel problème se pose par exemple quand on étudie le mouvement des mésons π dans le champ de noyaux atomiques. Dans un système

CHAPITRE 2. EQUATION DE KLEIN-GORDON

d'unité où la masse de la particule M , la constante de Planck \hbar et la vitesse de la lumière c sont égales à 1, l'équation de Klein-Gordon prend la forme

$$\Delta\psi + \left[\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 \right] \psi = 0, \quad \left(\mu = \frac{Ze^2}{\hbar c} \approx \frac{Z}{137} \right) \quad (2.17)$$

Pour les états liés on a $0 < E < 1$.

Nous cherchons des solutions particulières de (2.17) par séparation des variables en coordonnées sphériques, en posant $\psi(r) = F(r)Y(\theta, \varphi)$. Procédons dans le même ordre qu'avec l'équation de Laplace (voir 10), nous obtiendrons les équations suivantes pour les fonctions $F(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \left[\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{\lambda}{r^2} \right] F(r) = 0 \quad (2.19)$$

On a vu plus haut que l'équation (2.18) n'admet de solutions bornées et univoques pour $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ que si $\lambda = l(l+1)$, auquel cas $Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ est une fonction sphérique. L'équation (2.19) se réduit par le changement $R(r) = rF(r)$ à

$$R'' + \left[\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec $\sigma(r) = r$, $\tilde{\tau}(r) = 0$, $\tilde{\sigma}(r) = (Er + \mu)^2 - r^2 - l(l+1)$.

La fonction $R(r)$ doit vérifier la condition de normalisation

$$\int_0^\infty R^2(r) dr = 1 \quad (2.21)$$

2.3. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE KLEIN GORDON POUR LE CHAMP COULOMBIEN

et être bornée pour $r \rightarrow 0$.

Remarquons qu'en résolvant l'équation de Schrödinger correspondante, on demande que soit bornée pour $r \rightarrow 0$ la fonction $\frac{R(r)}{r}$, ce qui constitue une condition plus restrictive.

L'équation(2.20) admet une singularité pour $r \rightarrow 0$. Voyons ce que devient $R(r)$ quand $r \sim 0$. Puisqu'on a pour $r \rightarrow 0$

$$\left(E + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2}$$

Le comportement de la fonction $R(r)$ se définira approximativement dans le voisinage du point $r = 0$ par l'équation d'Euler

$$R'' + \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2}R = 0$$

Dont les solutions se présentent sous la forme

$$R(r) = C_1 r^{\nu+1} + C_2 r^{-\nu-1}$$

Où

$$\nu = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 - \mu^2}$$

(il sera supposé par la suite que $\mu < l+1/2$). Comme la fonction $R(r)$ doit rester bornée pour $r \rightarrow 0$, on a $C_2 = 0$, i.e.

$$R(r) \approx C_1 r^{\nu+1} \text{ pour } r \rightarrow 0.$$

Ramenons (2.20) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(r) y'' + \tau(r) y' + \lambda y = 0$$

En posant $R(r) = \varphi(r) y(r)$, où $\varphi(r)$ est solution de l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(r)/\sigma(r)$$

CHAPITRE 2. EQUATION DE KLEIN-GORDON

Le polynôme $\pi(r)$ se définira alors par l'expression

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{(l + 1/2)^2 - \mu^2 - 2\mu E r + (1 - E^2)r^2 + kr}$$

La constante k sera choisie de telle façon que l'expression sous le radical admette des racines multiples. Le polynôme $\pi(r)$ se présentera donc sous l'une des formes suivantes :

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{1 - E^2}r + \nu + \frac{1}{2} \quad \text{pour } k = 2\mu E + (2\nu + 1)\sqrt{1 - E^2}$$

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{1 - E^2}r - \nu - \frac{1}{2} \quad \text{pour } k = 2\mu E - (2\nu + 1)\sqrt{1 - E^2}$$

De toutes les formes possible de $\pi(r)$, on doit choisir celle pour laquelle la fonction $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ a sa racine sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et une dérivée négative. ces conditions seront vérifiées par la fonction $\tau(r) = 2(\nu + 1 - ar)$, où $a = \sqrt{1 - E^2}$ ce qui correspond à

$$\begin{aligned} \pi(r) &= \nu + 1 - ar, & \varphi(r) &= r^{\nu+1}e^{-ar} \\ \lambda &= 2[\mu E - (\nu + 1)a], & \rho(r) &= r^{2\nu+1}e^{-2ar} \\ & & & \left(a = \sqrt{1 - E^2}, \quad \nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \mu^2} \right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de l'énergie E se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0$$

On obtient

$$E = E_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{n+\nu+1}\right)^2}} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.22)$$

2.3. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE KLEIN GORDON POUR LE CHAMP COULOMBIEN

Les fonctions propres correspondantes $y = y_n(r)$ se présentent alors comme suit

$$y_n(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2\nu+1}e^{-2ar}} \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+2\nu+1}e^{-2ar})$$

Et ce confondent à un facteur près avec les polynômes de Laguerre $L_n^{2\nu+1}(x)$, où $x = 2ar$. Les fonctions propres $R(r) = R_{nl}(r)$ s'écriront

$$R_{nl}(r) = C_{nl}x^{\nu+1}e^{-x/2}L_n^{2\nu+1}(x)$$

On vérifie sans peine que les fonctions $R_{nl}(r)$ satisfont à la condition

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r) dr < \infty$$

formulée au départ, la constante C_{nl} se trouve de la condition de normalisation (2.21).

Deuxième partie

**Equations de Klein-Gordon
et géométrie variable**

Cette partie est conçu à l'étude des équations de Klein Gordon en géométrie variable, elle sera divisée en deux chapitres :

- le premier chapitre sera réservé aux notions fondamentales sur la réduction dimensionnelle et ses propriétés.

- le deuxième sera l'objet de ce mémoire, la résolution de l'équation de Klein Gordon sur notre variété bidimensionnelle.

Chapitre 3

Réduction Dimensionnelle

3.1 Introduction

La théorie de champ quantique et la relativité générale sont les plus réussies de la physique théorique fondamentale. Leurs prévisions ont été confirmées avec une très grande précision et semblent correspondre à d'autres descriptions précises et complémentaires de la réalité physique. Cependant, chacun d'eux a quelques problèmes surtout quand on essaie de les combiner.

La relativité générale a des problèmes d'infinis qui apparaissent aux singularités. La théorie de champ quantique a également des problèmes avec les infinis, qui apparaissent dans l'extension perturbative et sont généralement abordés par les techniques de renormalisation.

Heureusement le groupe de renormalisation s'est formalisé et résout un bon nombre de problèmes de la théorie du champ quantique. Le modèle standard de la physique des particules est renormalisable, mais on peut dire que les plus grandes difficultés apparaissent lorsqu'on essaie de quantifier la gravité. La relativité générale sans champ de matière est non-renormalisable de façon perturbative à deux boucles.

Cela nécessite un nombre infini de termes de dérivées supérieures avec leurs constantes de couplage. La raison principale est la dimension de la constante de Newton qui est la suivante :

$$[G_N] = 2 - D = -2$$

en unité de masse.

Les notions présentées accumulées jusqu'à présent semblent aller dans une direction particulière, ce qui exige une nouvelle notion dite la réduction dimensionnelle.

3.2 Réduction dimensionnelle

La réduction dimensionnelle a été utilisée la première fois il y a environ 24 ans [3] comme outil pragmatique dans l'analyse de la diffusion (HE). Cette ligne de raisonnement a été rafraîchie assez récemment dans le contexte de la physique du L.H.C. avec un volume plus explicite sur la mise en œuvre de la réduction dimensionnelle. Récemment, elle a eu un deuxième vent de la gravité quantique. Ici une classe de modèle a été conçue pour Horava [8] avec anisotropie asymptotique entre dimensions spatiales et temporelle dans la limite ultraviolette (U.V) à courte distance.

Pour explorer certains aspects pratiques de la réduction dimensionnelle nous nous tournons ici vers un sujet limité, la question du transfert du couplage effectif (en cours de marche) invariant à la renormalisation $\bar{g}(q^2)$ à travers la région de réduction et en reportant son comportement dans deux domaines de dimensions différentes.

L'approche de la réduction dimensionnelle utilisée ne suggère aucune modification du concept relativiste spécial du temps. Nous ne prenons qu'à une réduction différentiable des dimensions topologiques spatiales.

3.2.1 Principe de la réduction dimensionnelle

On peut discuter du mécanisme de la réduction dimensionnelle soit en terme d'espace-temps, soit dans celui d'énergie-impulsion en utilisant l'hypothèse selon laquelle :

* la réduction dans l'échelle d'espace-temps :

$$X_{DR} \sim \frac{1}{M_{DR}}$$

équivalent, dans un sens, à

* la réduction à l'échelle : énergie-moment :

$$P_{DR} \sim M_{DR}$$

Ce principe est utilisé pour comparer l'approche lagrangienne (espace-temps) à la modification directe *ad-hoc* de l'intégration de la dynamique de l'intégrale de Feynman. Au cours de la première approche, nous utilisons une conjonction comme approximation d'un mécanisme plus souple d'une réduction dimensionnelle continue dans la seconde [13].

3.2.2 Illustration

Pour illustrer l'idée d'approximation, nous imaginons une bouteille de *hamoud-boualem* (posé verticalement, par exemple) comme celle présentée dans la figure 1 ci-après :

3.2. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE

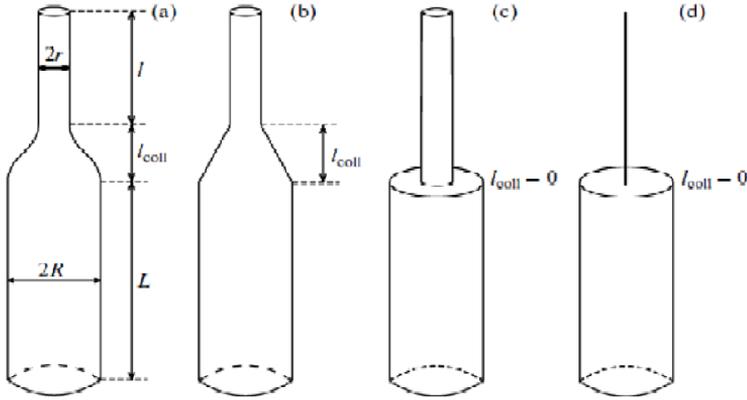


figure1

- (a) bouteille de *hamoud-boualem* à long corps et à long cou.
- (b) bouteille à col conique.
- (c) bouteille à col horizontal.
- (d) bouteille avec un collier horizontal et au cou comme fil.

L'exemple est constitué d'un corps cylindrique principal B de rayon relativement grand R et une longueur L . Le goulot de la bouteille est de longueur ℓ et de rayon r inférieur à R est relié à la partie principale par un collier (une région de transition rétrécie C de rayon variable et de petite longueur ℓ_{coll}). Cette région a une forme cônica. Supposons maintenant qu'il existe une ou plusieurs équations mathématiques décrivant un processus quelconque sur la surface externe bidimensionnelle S_2 de la bouteille.

On peut penser à un problème de valeur limite stationnaire pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre, ainsi qu'à un processus dynamique tel que la propagation des ondes avec rayonnement ou la conductivité thermique, et ainsi de suite.

Un certain nombre de problèmes avec des solutions analytiques exactes sur les surfaces $S_{R,L}$ et $S_{r,l}$ de parties cylindriques peuvent être résolues. Beaucoup d'entre eux pourraient être résolus pour toute la variété bidimensionnelle

$$S_2 = S_{R,L} + S_{r,l} + S_{col} \quad (3.1)$$

pour des formes assez simples et différentiables de région de transition C .

Les processus non stationnaires sont très intéressants, comme une onde solitaire se propageant d'une façon croissante à cause d'une perturbation de courte durée sur le bord intérieur du fond.

Plusieurs remarques doivent être posés :

1. la dépendance des paramètres de la solution sur la forme de la surface S_{col} de la région du collier (voir figure 1).
2. Passage à un changement brusque de rayon (à un collier horizontal) ($\ell_{col} \rightarrow 0$) (voir figure 1, c).
3. Le cas limite $r \rightarrow 0$, i.e. une transition de la surface bidimensionnelle du cou $S_{r,\ell}$ à la variété linéaire unidimensionnelle $S_{0,\ell} \rightarrow L_\ell$ (voir figure 1, d).

3.2.3 Efficacité \bar{g} pour le modèle φ^4 à diverses dimensions

Considérons le champ quantique massif scalaire à une composant $\varphi(x)$, avec le lagrangienne à auto-interaction :

$$L = T - V \quad (3.2)$$

avec

$$V(m; g; \varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{4\pi^{\frac{d}{2}} M^{4-d}}{9} g_d \varphi^4, \quad g > 0 \quad (3.3)$$

3.2. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE

en parallèle dans les dimensions ($d = 4$) et ($d = 2$) .

Nous allons voir le cas au niveau d'approximation à une boucle car cela correspond à la seule contribution du diagramme de Feynman, la première correction à la fonction à 4 sommets (voir figure2)

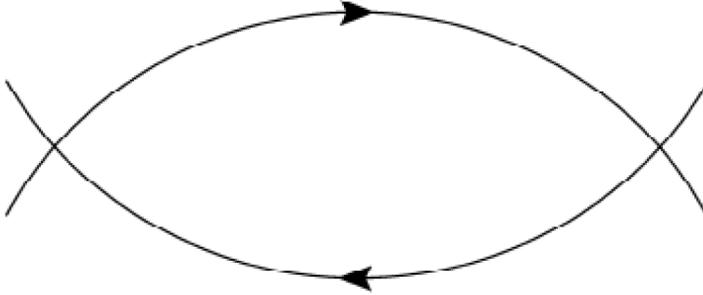


figure 2 : Diagramme de sommets à une boucle.

Cette contribution I entre dans le couplage courant effectif comme suit :

$$\bar{g}(q^2) = \frac{g_i}{1 - g_i I(q^2; m^2, m_i^2)} \quad (3.4)$$

3.2.4 La réduction dimensionnelle dans l'espace-moment

Nous commençons par la réduction des dimensions dans l'intégrale de Feynman et cela en modifiant les métriques dans l'espace-moment :

$$dk = d^4k \rightarrow d_M k = \frac{d^4k}{1 + \frac{k^2}{M^2}} \quad (3.5)$$

$$k^2 = K^2 - k_0^2$$

En particulier, pour une intégrale à une boucle, on a (voir figure 2)

$$\begin{aligned} I\left(\frac{q^2}{m^2}\right) &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(m^2 + k^2)[m^2 + (k + q)^2]} \\ &\rightarrow \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d_M k}{(m^2 + k^2)[m^2 + (k + q)^2]} = J(a; b) \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec

$$a = \frac{q^2}{4m^2}, b = \frac{M^2}{m^2}, q^2 = Q^2 - q_0^2.$$

Etude du comportement asymptotique

Dans la région quadrédimensionnelle profonde, $m^2 \ll q^2 \ll M^2$, on obtient un comportement logarithmique intermédiaire où M joue le rôle du régulateur de Pauli-Villars. Tandis que, dans la région bidimensionnelle profonde $q^2 \gg M^2 \gg m^2$, la limite ultraviolette (UV) est finie.

Dans la normalisation habituelle

$$J \rightarrow J_i = J\left(\frac{q^2}{4m^2}; b\right) - J\left(\frac{m_i^2}{4m^2}; b\right), \quad m_i \sim m \quad (3.7)$$

on a

$$J_i^{[4]}(a; b) \sim \log\left(\frac{q^2}{m_i^2}\right); x \quad (3.8)$$

$$J_i^{[2]}(a; b) \sim \log\left(\frac{4M^2}{m_i^2}\right) + \frac{M^2}{q^2} \log \frac{q^2}{M^2}. \quad (3.9)$$

La 1^{ère} expression (3.8) est croissante, alors que la deuxième (3.9) est décroissante.

3.2. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE

La valeur maximale de J est atteinte à l'échelle de la réduction dimensionnelle $q^2 \sim M^2$ et est proche de $\log b$. Par conséquent, grâce à la R.D., l'évolution du couplage $\bar{g}(q^2)$ change, il démenue au dela de l'échelle de la R.D. et tend a une valeur définée comme dans la figure 3.

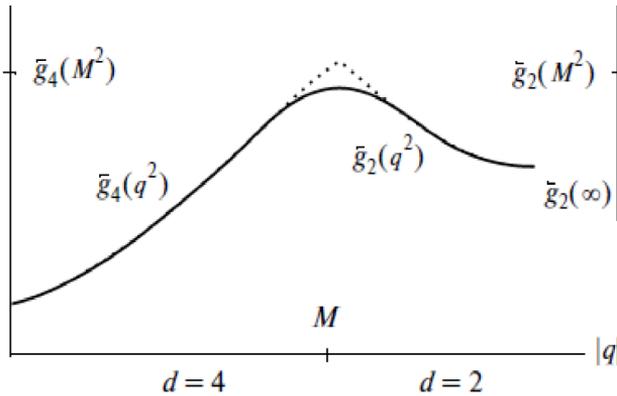


figure 3 : L'évolution effectife du couplage pour le modèle φ^4 avec R.D.

3.2.5 Réduction avec les Lagrangiens

Maintenant avec le principe de la R.D., revenons a l'équation (3.3), et sa descréption lagrangienne en terme de champs.

Ici, lors du passage au cas $d = 2$, le champs scalaire perd sa dédimensionnalité :

$$\varphi_4(x) \rightarrow \varphi_2(x) \sim M^{-1}\varphi_4(x) \quad (3.10)$$

pendant que la constante de couplage l'acquiert :

$$g_4 \rightarrow g_2 \sim M^{-2}g_4 \quad (3.11)$$

avec certaine paramètre M peuvent être égaux à l'échelle de la R.D.

$$M = M_{R.D} \quad (3.12)$$

Couplage invariant dans $d = 2$

En deux dimensions, on peut aussi utiliser des transformations de *Dyson* finies, et formuler un groupe d'invariance GR et de renormalisation dépendant de la masse, aussi définir un couplage courant massif avec sa solution explicite à une boucle [13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}^{[2]}(q^2) = \frac{g}{1 - g J_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right)} \\ J_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) = \frac{i}{\pi} \int \frac{M^2 d^2 k}{(m^2 + k^2)[m^2 + (k+q)^2]} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Ici, J_2 est contribution finie à une boucle de diagramme à 4 sommets, en figure 2, en dimensions 2. C'est une fonction positive décroissante de façon monotone.

Asymptotiquement,

$$J_2 \sim \left(\frac{M^2}{q^2}\right) \log\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \quad (3.14)$$

comme dans la deuxième équation de (3.9).

Par conséquent, le couplage bidimensionnelle dans la limite ultraviolette UV, tend vers sa limite supérieure fixée.

Conjonction forte à l'échelle de la R.D

Pour obtenir l'image connue de l'évolution du couplage, il faut envisager une transition de la région quadri-dimensionnelle "faible énergie" : $q^2 < M^2$ vers la région bidimensionnelle "haute énergie" : $q^2 > M^2$.

3.2. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE

Pour une conjonction forte (dans le modèle classique des bouteilles de vin, cette conjonction forte correspond à la figure 1, d) la condition de continuité

$$\bar{g}_4(M^2) = \bar{g}_2(M^2) = g_M \quad (3.15)$$

donne

$$\bar{g}_4(q^2) = \frac{g_M}{1 - g_M \log(\frac{q^2}{M^2})}, \quad q^2 \leq M^2 \quad (3.16)$$

et avec l'expression (3.13)

$$\bar{g}_2(q^2) = \frac{g_M}{1 - g_M (J_2(\frac{q^2}{M^2}) - J_2(\frac{M^2}{m^2}))}, \quad q^2 \geq M^2 \quad (3.17)$$

avec la limite ultraviolette UV finie.

$$\bar{g}_2(\infty) = \frac{g_M}{1 + g_M J_2(\frac{M^2}{m^2})} < g_M \quad (3.18)$$

Cela signifie qu'au dessus de l'échelle de la réduction, le couplage effectif évolue jusqu'à sa limite finale ultraviolette UV, ce comportement correspond à la figure 3.

Chapitre 4

Solutions de l'équation de Klein Gordon sur une variété avec géométrie variable

Dans ce chapitre, nous allons développer la proposition d'utiliser la réduction dimensionnelle de l'espace-temps en quatre dimensions à celle avec un nombre réduit de dimensions $(1 + d)$; $d < 3$ à une énergie suffisamment élevée.

À cette fin, nous étudions l'équation de Klein-Gordon sur des variétés spatio-temporelles de différentes dimensions. Ici, l'astuce pour transformer le problème de Klein-Gordon sur la géométrie variable en l'équation de Schrödinger avec le potentiel généré par cette variation est utile. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'approche utilisée dans ce chapitre n'implique aucune modification de la notion du temps. Nous allons utiliser plutôt une transformation continue de la géométrie spaciaie jusqu'à avoir une réduction de la dimension de l'espace.

4.1 Equation de Klein Gordon dans une géométrie d'espace cylindrique

4.1.1 Equation de Klein Gordon en (1+2)–dimensions à symétrie cylindrique

On considère l'équation de Klein Gordon

$$\begin{cases} \square\varphi - M^2\varphi = 0, \\ \text{avec } \square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu) \end{cases} \quad (4.1)$$

dans une variété bidimensionnelle $\Sigma_{\phi z}^2$ avec symétrie cylindrique. En coordonnées cartésiennes, elle est définie par une fonction profil $\rho(z)$ en tant que surface de rotation dans la variété euclidienne tridimensionnelle $\mathbb{R}_{X^1, X^2, X^3}^3$ avec

$$\begin{aligned} X^1 &= \rho(z) \cos \phi, \\ X^2 &= \rho(z) \sin \phi, \\ X^3 &= z. \end{aligned}$$

La restriction de l'intervalle tridimensionnel

$$(dL)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2,$$

sur la variété bidimensionnelle $\Sigma_{\phi z}^2$ s'écrit comme suit

$$\left. \begin{aligned} (dl)^2 &= \gamma_{mn}dX^m dX^n = \rho^2 d\phi^2 + (1 + (\rho')^2) dz^2 \\ \rho' &= \frac{d\rho}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Le laplacien est explicité sous la forme

$$\Delta_2 = \frac{1}{\rho^2} \left(\partial_{\phi\phi}^2 + \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z \right). \quad (4.3)$$

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

En utilisant la séparation de variables de Fourier

$$\varphi(t, \phi, z) = T(t)\Phi(\phi)Z(z),$$

nous obtenons trois équations différentielles

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (4.4)$$

$$\Phi''(\phi) + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4.5)$$

avec ω , m sont des constantes de séparation, et une équation non triviale qu'on appellera la Z -équation est donnée par

$$\frac{1}{\rho\sqrt{1+(\rho')^2}}\partial_z\left(\frac{\rho}{\sqrt{1+(\rho')^2}}\partial_z Z(z)\right) + \left(\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{\rho^2(z)}\right)Z(z) = 0, \quad (4.6)$$

avec le potentiel centrifuge $\frac{m^2}{\rho^2(z)}$, ($m \neq 0$).

Nous remarquons que ce terme présente l'exemple le plus simple d'une force d'inertie avec une signification physique. De telles forces sont inévitables pour le mouvement dans un espace-temps courbé. Ils apparaissent dans la région de transition entre les parties de l'espace ayant de différentes dimensions topologiques.

4.1.2 Transformation du problème en une résolution d'une équation différentielle ordinaire de type Schrödinger

Tout d'abord, l'équation (4.4) aura comme solution

$$T(t) = e^{-i\omega t}, \quad (4.7)$$

par contre, l'équation (4.5) aura la solution sous forme

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

4.1. EQUATION DE KLEIN GORDON DANS UNE GÉOMÉTRIE D'ESPACE CYLINDRIQUE

Ainsi que la Z -équation prendra une solution sous forme

$$Z(z) = Z(z, \omega, \phi). \quad (4.9)$$

L'équation (4.6) est compliquée pour la résoudre, pour cela une propriété mathématique utile pour étudier ses solutions est présentée dans le théorème ci-après.

Théorème 4.1.1 *L'équation stationnaire (4.6) peut être transformée en une équation différentielle ordinaire de type Schrödinger*

$$U''(u) + (E - V(u))U(u) = 0. \quad (4.10)$$

La possibilité de réduire les solutions de l'équation de Klein-Gordon aux solutions d'une équation de type Schrödinger se présente du fait de la séparation de variables dans l'équation de Klein-Gordon. De plus, on utilise le fait que toute métrique bidimensionnelle γ_{mn} est conforme à plat.

Transformons la coordonnée z en u et la fonction du profil (que nous appelle parfois fonction poids) $\rho(z)$ en $\chi^2(u) = \rho^2(z(u))$

$$\left. \begin{aligned} z \rightarrow u : u(z) &= \int \sqrt{1 + (\rho'(z))^2} \frac{dz}{\rho(z)} \\ u \rightarrow z : z(u) &= \int \sqrt{\chi^2(u) - \left(\frac{d\chi}{du}\right)^2} du. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Alors on obtient le laplacien Δ_2 comme suit

$$\Delta_2 = \chi^{-2} (\partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{uu}^2), \quad (4.12)$$

avec $\chi^2(u)$ est un facteur de conformité bidimensionnel.

En terme de la variable u l'équation (4.6) aura la forme

$$U''(u) + (-m^2 - (M^2 - \omega^2) \chi^2(u))U(u) = 0, \quad (4.13)$$

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

par identification avec l'équation (4.10) on obtient

$$E = 0, V(u) = (M^2 - \omega^2) \chi^2(u) + m^2 \text{ et } Z(z) = U(u(z)).$$

Ainsi, l'étude de l'équation de Klein-Gordon, sur les variétés courbées revient à la résolution de l'équation de Schrödinger (avec le potentiel $V(u)$ défini par une géométrie variable).

Remarque 4.1.1 *Nous notons qu'il n'y a pas de paramètre spectral dans l'équation (4.13) comme l'énergie mécanique habituelle dans (4.10) contenue dans le terme $E - V$. Plutôt, le paramètre spectral spécifique ω de ce problème apparaît dans le facteur $M^2 - \omega^2$ dans la fonction potentielle $V(u)$. Ce détail modifie légèrement les spectres bien connus des problèmes quantiques présentés dans la littérature.*

4.1.3 Equation d'onde scalaire dans un espace-temps de dimension (1+1) :

Pour un espace unidimensionnel avec la coordonnée Z et le laplacien $\Delta_1 = \partial_{zz}^2$, la fonction d'onde aura la forme

$$\varphi_1^{Q\pm}(t; z) = \begin{cases} C_1 e^{-i\omega t} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - M^2} z}, & Q = +1 \implies \text{particules} \\ C_2 e^{i\omega^* t} e^{\mp i\sqrt{\omega^{*2} - M^2} z}, & Q = -1 \implies \text{antiparticules} \end{cases} \quad (4.14)$$

L'indice additionnel \pm désigne le signe de la quantité de mouvement

$$p_z = \pm k = \pm\sqrt{\omega^2 - M^2},$$

ou une quantité de complexe conjuguée

$$p_z^* = \pm k^* = \pm\sqrt{\omega^{*2} - M^2}.$$

Avec $\text{Re } \omega \geq 0$, on a la combinaison relativiste standard

$$-i(\omega t - p_z z) = -ipx,$$

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET r , ($R < r$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

dans les solutions pour les particules, et

$$i(\omega^*t - p_z^*z) = (-ipx)^* ,$$

dans les solutions conjuguées pour les antiparticules.

4.2 Exemple d'illustration : Deux cylindres de rayons constants R et r , ($r < R$) re- liés par une partie de cône

Considérons la surface de deux cylindres de rayon R et r avec $r < R$, reliés par une partie d'un cône (voir Figure 1).

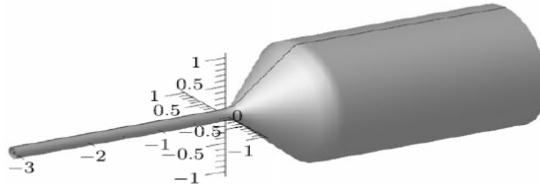


Figure1

L'axe de symétrie est l'axe horizontal oz avec l'origine au sommet du cône. Considérons maintenant l'équation de Klein-Gordon sur cette surface avec fonction profil $\rho(z)$ (voir Figure 2) est donnée par

$$\rho(z) = \begin{cases} R = \text{const}, & z \in [z_R; \infty) \\ z \text{tg}(\alpha), & z \in [z_r; z_R] \\ r = \text{const}, & z \in (-\infty; z_r] \end{cases} \quad (4.15)$$

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

et la solution sera donnée par

$$z(u; R; r; \alpha) = \begin{cases} Ru, & u \geq u_R \\ Ru_R e^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r; u_R] \\ r \left(u + \frac{\log\left(\frac{R}{r}\right)}{\sin \alpha} \right), & u \leq u_r \end{cases} \quad (4.16)$$

avec

$$u_R = ctg\alpha \quad \text{et} \quad u_r = ctg\alpha - \frac{\log\left(\frac{R}{r}\right)}{\sin \alpha},$$

et la fonction profil sera

$$\chi(u; R; r; \alpha) = \begin{cases} R, & u \geq u_R \\ Re^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r; u_R] \\ r, & u \leq u_r \end{cases} \quad (4.17)$$

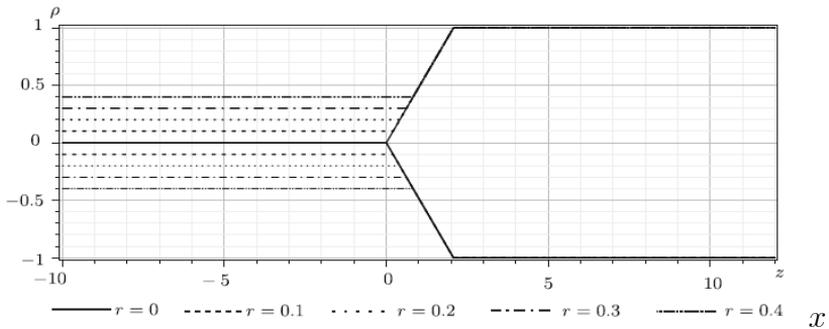


Figure 2 : Une section des variétés continues constituée de deux cylindres de rayons $R = 1$ et $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ reliés par une partie de cône dont l'angle de divergence est $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET R_r ($R < R_r$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

Ici, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ est la moitié de l'angle du sommet du cône, $z_R = R \operatorname{ctg} \alpha > 0$, et $z_r = r \operatorname{ctg} \alpha > 0$.

Les fonctions $z(u)$ et $\chi(u)$ sont obtenues de (4.11) (voir Figures 3 et 4).

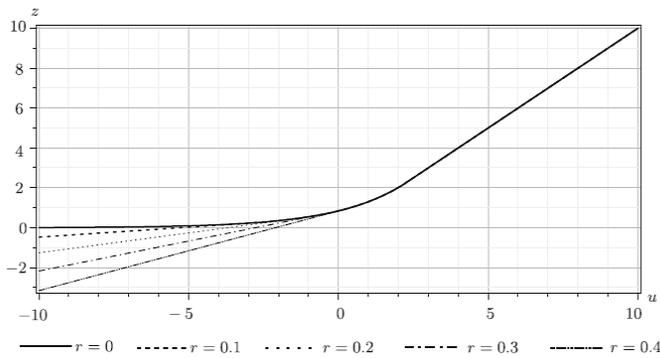


Figure 3 : La fonction $z(u; R, r, \alpha)$ lorsque $r \rightarrow 0$.

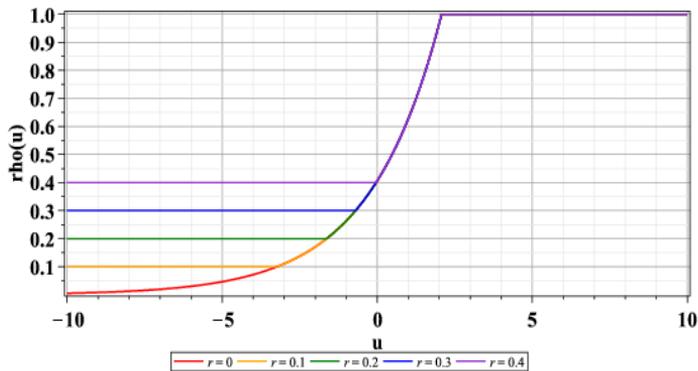


Figure 4 : La fonction $\chi(u; R, r, \alpha)$ lorsque $r \rightarrow 0$.

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

Pour les ondes sur la surface d'un cylindre de rayon arbitraire et constant ρ . La relation de dispersion est :

$$k_\rho = \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{\rho^2}} \quad (4.18)$$

Sous la normalisation

$$\varphi_{\omega,n}^{Q\pm} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) e^{-iQ\omega t} e^{im\phi} e^{\pm k_\rho z}$$

où a est la constante de normalisation, les solutions complexes de l'équation de Klein-Gordon avec la charge $Q = \pm 1$ et la masse M sur le cylindre de rayon ρ génèrent un courant conservé avec les composantes

$$j^t = Q |a|^2 \operatorname{Re}(\omega) ; \quad j^\phi = m |a|^2 ; \quad j^z = \pm |a|^2 \operatorname{Re}(k_\rho) \quad (4.19)$$

Comme on peut le constater, pour $m \neq 0$, l'onde tourne sur la surface du cylindre car $j^\phi \neq 0$ dans (4.19). Cette rotation de l'onde scalaire génère une force centrifuge. Il est clair que pour $m \neq 0$ dans la limite

$$\rho \rightarrow \rho_{crit} = \frac{|m|}{\sqrt{\omega^2 - M^2}},$$

la borne supérieure du potentiel centrifuge augmente sans limite et arrête tous les signaux physiques. En revanche, aucun obstacle de ce type n'existe pour un mouvement non rotationnel le long de l'axe oz avec $m = 0$.

Les signaux physiques peuvent se propager sans obstacles sur le degré de liberté physique commun des deux parties de l'espace physique avec des dimensions topologiques différentes.

Les conditions standards de continuité pour la fonction $Z(z)$ et sa dérivée $Z'(z)$ conduisant à

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET R_r ($R < R_r$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = \\ -\Theta_r^+ e^{ik_r z_r} \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{2ik_r z_r}{\Delta} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R \\ \frac{2ik_r z_r}{\Delta} (Y_R^- J_\nu(k_c z) - J_R^- Y_\nu(k_c z)), & z_r \leq z \leq z_R \\ -e^{ik_r(z-z_r)} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta} e^{-ik_r(z-z_r)}, & z \leq z_r \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

pour des ondes allant de la droite de $z = -\infty$ à $z = +\infty$ se réfléchissant sur la région de transition, et

$$\begin{aligned} \overleftarrow{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = \\ -\Theta_R^- e^{-ik_R z_R} \begin{cases} -e^{-ik_R(z-z_R)} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R \\ \frac{2ik_R z_R}{\Delta} (Y_r^+ J_\nu(k_c z) - J_r^+ Y_\nu(k_c z)), & z_r \leq z \leq z_R \\ \frac{2}{\pi} \frac{2ik_R z_R}{\Delta} e^{-ik_r(z-z_r)}, & z \leq z_r \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

pour des ondes allant de la gauche de $z = +\infty$ à $z = -\infty$.

Notations : La notation standard pour les fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ est utilisée dans le problème avec le domaine de fonction de type cône. Parfois, $J_\nu(x)$ sont appelées les fonctions de Bessel de première espèce, et $Y_\nu(x)$ sont appelées fonctions de Neumann ($N_\nu(x) \equiv Y_\nu(x)$).

Ci-après les expressions explicites des diverses notations utilisées dans les formules (4.18), (4.19) et (4.20). Les nombres d'onde suivant l'axe z sur les cylindres correspondants sont

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

$$k_R = \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{R^2}} \quad (\operatorname{Re} k_R \geq 0)$$

$$k_r = \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{r^2}} \quad (\operatorname{Re} k_r \geq 0)$$

La notation

$$k_c = \frac{\sqrt{\omega^2 - M^2}}{\cos \alpha}$$

est utilisée sur le cône.

Le nombre d'onde des ondes unidimensionnelles avec $m = 0$ se propageant sur l'axe oz (voir 4.14) n'est que la projection

$$k = k_c \cos \alpha = \sqrt{\omega^2 - M^2}, \quad (\operatorname{Re} k \geq 0).$$

En utilisant les brefs notations suivantes

$$J_\nu^\pm(x, \alpha) = \left(x \frac{d}{dx} \pm i \varkappa_\nu(x, \alpha) \right) j_\nu(x),$$

$$Y_\nu^\pm(x, \alpha) = \left(x \frac{d}{dx} \pm i \varkappa_\nu(x, \alpha) \right) Y_\nu(x),$$

$$\varkappa_\nu(x, \alpha) = \cos \alpha \sqrt{x^2 - \nu^2}, \quad \varkappa_R = \varkappa_\nu(k_c z_R, \alpha) = k_R z_R,$$

$$\varkappa_r = \varkappa_\nu(k_c z_r, \alpha) = k_r z_r,$$

$$J_R^\pm = J_\nu^\pm(k_c z_R, \alpha), \quad J_r^\pm = J_\nu^\pm(k_c z_r, \alpha),$$

$$Y_R^\pm = Y_\nu^\pm(k_c z_R, \alpha), \quad Y_r^\pm = Y_\nu^\pm(k_c z_r, \alpha),$$

$$\Delta = J_R^- Y_r^+ - J_r^+ Y_R^-, \quad \Delta_{11} = J_R^- Y_r^- - J_r^- Y_R^-, \quad \Delta_{22} = J_R^+ Y_r^+ - J_r^+ Y_R^+,$$

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET R_r ($R < R_r$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

On considère la limite $r \rightarrow +0$, $R = const$, $\alpha = const$ dans la relation (4.15) lorsque la surface bidimensionnelle du cylindre de rayon r avec $z \leq z_r$ se transforme en une variété unidimensionnelle, un fil infiniment fixe étiré le long de la partie négative de l'axe oz d'un point de vue géométrique, il s'agit d'une limite très singulière (voir les figures 3 et 4).

Dans cette limite, $z = Rctg\alpha$ ne change pas, $z_r \rightarrow 0$, et la troisième partie des fonctions par morceaux $z(u; R, r, \alpha)$ donnée par (4.16) et $\chi(u; R, r, \alpha)$ donnée par (4.17) disparaît car u_r tend vers $-\infty$.

En conséquence, la fonction profil $\chi(u; R, r, \alpha)$ ou le facteur de conformité correspondant $\chi^2(u; R, r, \alpha)$ ne convient pas pour décrire la partie unidimensionnelle de la variété continue émergente (non différentiable) avec dimension variable car l'intervalle infini $u \in (-\infty, +\infty)$ n'est associé qu'à l'intervalle semi-infini $z \in [0; \infty)$ lorsque $r = 0$.

Les états du spectre continu

Si $J_R^- \neq 0$, alors pour des fréquences réelles $\omega \geq M$, on obtient :

$$S(\omega, m; R, \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} S(\omega, m; R, r, \alpha) = -\Theta_R^- e^{-2ik_R z_R} \frac{J_R^+}{J_R^-} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Plusieurs conséquences importantes dans le cas où $m \neq 0$ deviennent évidentes :

1) Dans la limite $r \rightarrow +0$, les coefficients de transition sont

$$|S_{12}|^2 = |S_{21}|^2 \equiv 0.$$

Alors, la communication par signaux d'onde avec le nombre d'Azimuth $m \neq 0$ entre les domaines de dimensions différentes est impossible.

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

- 2) En réalité, la limite $r \rightarrow +0$ des solutions induites de $z = -\infty$ est triviale pour tout $m \neq 0$:

$$\vec{Z}(z; \omega, m; R, \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \vec{Z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) \equiv 0$$

partout, par ce que le facteur

$$\begin{aligned} \Theta_r^+ &= \Theta \left(\omega - \sqrt{M^2 + \frac{m^2}{R^2}} \right) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

pour

$$r < \frac{\sqrt{\omega^2 - R^2}}{|m|}$$

dans (4.20). En plus, $S_{11} \rightarrow 0$ et $S_{12} \rightarrow 0$.

- 3) Dans le domaine bidimensionnel, le module du coefficient de réflexion pour les fréquences réelles ω est $|S_{22}| \equiv 1$, i.e. nous avons une réflexion totale sur le cône des ondes provenant de $z = +\infty$, accompagné d'un changement de la phase de l'onde diffusée, selon l'équation (4.22). Par conséquent, nous obtenons maintenant des solutions non triviales avec $m \neq 0$.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{z}(z; \omega, m; R, \alpha) &= \lim_{r \rightarrow 0} \overleftarrow{z}(z; \omega, m; R, r, \alpha) = \\ &= -\Theta_R^- e^{-ik_R z_R} \begin{cases} -e^{-ik_R(z-z_R)} + \frac{J_R^+}{J_R^-} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R \\ \frac{2ik_R z_R}{J_R^-} J_\nu(k_c z), & 0 \leq z \leq z_R \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET R_1 ($R < R_1$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

Caractéristiques des solutions obtenues

Nous notons les caractéristique suivantes de ses solutions :

1. Elles sont régulières et finies partout, y compris le point singulier $z = 0$, où elles disparaissent.
2. Il n'existe pas de solutions avec un réel positif

$$\omega < M^2 + \frac{m^2}{R^2}$$

car, dans le cas contraire, le facteur Θ_R^- s'annule. Ceci est évidemment un résultat d'un sens physique correct, car la vitesse du groupe d'ondes s'annule pour

$$\omega = \sqrt{M^2 + \frac{m^2}{R^2}}.$$

De plus, la longueur d'onde devient infinie dans ce cas.

3. Les ondes se propageant sur la région de transition (cône) ont un spectre continu complexe de moment p_z . Le spectre peut être obtenu par la transformée de Fourier des solutions (4.23) par rapport à z . Ce spectre est une sorte d'empreinte digital caractérisant la géométrie de la région de transition (un cône dans ce cas). *Lord Rayleigh* posa d'abord un problème de reconstruction de la géométrie de transition dès 1877, puis considérablement avancé en 1911 par *Weyl* et plus tard de nombreux autres (voir [2] et les références que figurent).

Les états de résonance

Jusqu'à présent, nous avons travaillé loin des pôles de la matrice de diffusion S définie comme de zéros du dénominateur dans (4.22) ou (4.23). Pour certains $m \neq 0$, on considère une suite discrète (infinie)

*CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE*

de fréquence $\omega_{n,m}$, $n = 0, 1, \dots$, satisfaisant la condition $J_R^- = 0$. Utilisant la variable adimensionnelle $\Omega = k_c z_R$, nous écrivons la condition spectrale sous la forme

$$\frac{\Omega J'_\nu(\Omega)}{J_\nu(\Omega)} = \cos \alpha \sqrt{\nu^2 - \Omega^2}.$$

Un exemple illustrant un modèle typique d'absence de racines réelles et une suite représentative de racines complexes est montré dans les Figures 5 et 6.

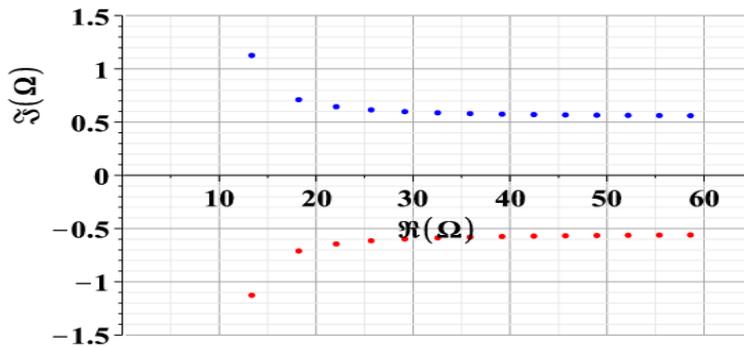


Figure 5 : Le spectre complexe $\omega_{n,m}^Q = 0, 1, 2, \dots$ pour $m = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $M = 0$ et $R = \sin \alpha$. La partie supérieur pour les antiparticules, et celle inférieur pour les particules.

4.2. EXEMPLE D'ILLUSTRATION : DEUX CYLINDRES DE
RAYONS CONSTANTS R ET R_1 ($R < R_1$) RELIÉS PAR UNE
PARTIE DE CÔNE

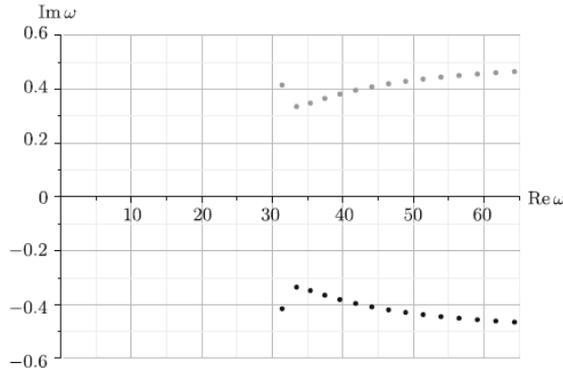


Figure 6 : Le spectre complexe $\omega_{n,m}^Q = 0, 1, 2, \dots$ pour $m = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}, M = 28.85$ et $R = \sin \alpha$. La partie supérieur pour les antiparticules, et celle inférieur pour les particules.

Comme on peut le constater il existe une infinité de fréquences de résonances complexes

$$\omega_{n,m}^Q = \sqrt{M^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} \left(\Omega_{n,m}^Q \right)^2}, \quad (4.24)$$

qui correspondent aux racines complexes $\Omega_{n,m}$ et dépendent de la masse M du champ scalaire. Le spectre $\omega_{n,m}^Q$ caractérise la géométrie conique de la région de transition dont la transition est continue mais pas différentiable entre les deux cylindres.

Utilisant le développement asymptotique des fonctions de Bessel $J_\nu(\Omega)$ (voir [1]) pour les grandes valeurs $|\Omega| \gg v = \frac{|m|}{\sin \alpha}$, on obtient la forme asymptotique des racines complexes

$$\Omega_{n,m}^Q \approx \pi \left(n + \frac{|m|}{2 \sin \alpha} - \frac{1}{4} \right) - iQ \operatorname{arctg}(\cos \alpha) \quad (4.25)$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

*CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE*

Le choix du signe de la partie imaginaire de $\Omega_{n,m}^Q$ dans (4.25) assure la décroissance exponentielle des excitations de champ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour les particules $Q = +1$ et les antiparticules $Q = -1$.

La formule simple (4.25) reflète dans une certaine mesure l'influence de la géométrie de la région de transition de l'espace bidimensionnel à l'espace unidimensionnel sur la physique des excitations résonantes du champ de Klein-Gordon.

Lorsque l'angle de divergence α du cône tend vers sa limite supérieure $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, et $n \gg |m|$, nous avons la relation

$$\omega_{n,m}^Q \rightarrow \sqrt{M^2 + \frac{\pi^2}{R^2} \left(n + \frac{|m|}{2} - \frac{1}{4} \right)^2}.$$

Dans cette limite, la demi-vie de l'excitation résonante augmente sans limite

$$\tau_{n=0,m} = \frac{1}{\text{Im} \left(\omega_{n=0,m}^Q \right)} \rightarrow \infty$$

i.e. les excitations de résonance sont conservés pendant un temps très long.

Dans le cas contraire où l'angle $\alpha \rightarrow 0$, l'approximation (4.25) elle même est inapplicable parce que

$$|\Omega_{n,m}^Q| \sim \pi v \rightarrow \infty$$

et la condition

$$|\Omega_{n,m}^Q| \gg v$$

n'est pas satisfaite, car

$$\frac{|\Omega_{n,m}^Q|}{v} \sim \pi > 1.$$

Les estimations plus précises correspondantes se trouvent dans [6].

4.3. GÉNÉRALISATION AUX DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Par conséquent, nous observons que le changement de la dimension topologique de l'espace, produit un nouvel effet physique. Le spectre de masse effectif (4.24) des excitations et leur durée de vie dépendent de la géométrie de la partie cônica entre les espaces bidimensionnels et unidimensionnels.

En utilisant la normalisation la plus simple, nous écrivons deux représentations équivalentes des fonctions d'onde résonantes relativistes

$$Z_{res}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha) = \begin{cases} e^{ik_R(z-z_R)}, & z \geq z_R \\ Z_{res,c}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha), & z_r \leq z \leq z_R \\ 0, & z \leq z_r. \end{cases} \quad (4.26)$$

avec

$$Z_{res,c}(z; \omega_{n,m}, m; R, \alpha) = \frac{\pi}{2} Y_R^- J_\nu(k_c z) = \frac{2ik_R z_R}{J_R^+} J_\nu(k_c z), \quad (4.27)$$

(une identité pour les fonctions de Bessel et leurs dérivés en tant que sous-produit).

4.3 Généralisation aux dimensions supérieures

La généralisation des résultats aux cas des dimensions supérieures présente un acquis théorique pour le développement du problème traité dans ce mémoire. Dans ce qui suit, deux tentatives de généralisation, une pour le cas de dimension trois, et l'autre pour le cas de la dimension supérieure à trois.

4.3.1 Cas tridimensionnel

Considérons une variété $(1+3)$ -dimensionnelle $\sum_{t\phi_1\phi_2z}^{(1,3)}$ comme étant un hypersurface dans un espace pseudo-euclidien $(1+5)$ -dimensionnel

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

noté $E_{x^0 x^1 x^2 x^3 x^4 x^5}^{(1,5)}$ avec signature $\{+, -, -, -, -, -\}$, cette variété est définie par les équations

$$\sum_{t\phi_1\phi_2z}^{(1,3)} : \begin{cases} x^0 = t, x^1 = \rho_1(z) \cos \phi_1, x^3 = \rho_2(z) \cos \phi_2 \\ x^5 = z, x^2 = \rho_1(z) \cos \phi_1, x^4 = \rho_1(z) \cos \phi_1, \end{cases}$$

pour tout $t, z \in \mathbb{R}$ et $\phi_{1,2} \in [0, 2\pi]$.

Remarque 4.3.1 *Il est clair lorsqu'on pose $x^4 = x^5 = 0$, nous obtenons le cas $(1+2)$ -dimensionnel traité avant.*

Nous allons donner la méthode de séparation de variables au cas tridimensionnel relativement à notre problème. En coordonnées ϕ_1, ϕ_2 et z le laplacien tridimensionnel sera

$$\Delta_3 = \frac{1}{\rho_1^2(z)} \partial_{\phi_1}^2 + \frac{1}{\rho_2^2(z)} \partial_{\phi_2}^2 + \frac{1}{\rho_1^2(z) \rho_2^2(z)} \left(\frac{\rho_1(z) \rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \left(\frac{\rho_1(z) \rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \right) \right) \quad (4.28)$$

L'introduction de la nouvelle variable

$$u = u(z) = \int \frac{\rho_3(z)}{\rho_1(z) \rho_2(z)} dz = \int \frac{\sqrt{1 + \rho_1'^2(z) + \rho_2'^2(z)}}{\rho_1(z) \rho_2(z)} dz \quad (4.29)$$

Nous conduit à écrire le laplacien par la formule

$$\Delta_3 = \chi_1'^2(u) \partial_{\phi_1}^2 + \chi_2'^2(u) \partial_{\phi_2}^2 + \chi_1'^2(u) \chi_2'^2(u) \partial_u^2 \quad (4.30)$$

avec

$$\chi_i^2(u) = \rho_i^2(z(u)). \quad i = \overline{1,2}$$

Considérons l'équation de Klein-Gordon

$$(\square - M^2) \varphi = 0, \quad \text{avec} \quad \square = -\partial_{tt}^2 + \Delta_3 \quad (4.31)$$

4.3. GÉNÉRALISATION AUX DIMENSIONS SUPÉRIEURES

En utilisant la séparation de variables

$$\varphi(t, \phi_1; \phi_2, z) = T(t) \Phi_1(\phi_1) \Phi_2(\phi_2) Z(z),$$

on obtient quatres équations différentielles

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad (4.32)$$

$$\Phi_1'' + m_1^2 \Phi_1 = 0 \quad (4.33)$$

$$\Phi_2'' + m_2^2 \Phi_2 = 0 \quad (4.34)$$

ainsi qu'une EDP appelée la Z -équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1^2(z) \rho_2^2(z)} \left(\frac{\rho_1(z) \rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \left[\frac{\rho_1(z) \rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z Z \right] \right) + \\ + \left(\omega^2 - M^2 - \frac{m_1^2}{\rho_1^2(z)} - \frac{m_2^2}{\rho_2^2(z)} \right) Z = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

La solution de (4.35) sera de la forme

$$Z(z) = Z(z; \omega; m_1; m_2)$$

Après avoir porter la variable $u = u(z)$, l'équation (4.35) sera une équation de Schrödinger de forme

$$\psi''(u) + (E - V(u)) \psi(u) = 0 \quad (4.36)$$

telle que

$$\psi''(u) + (-[M^2 - \omega^2] \chi_1^2(u) \chi_1^2(u) - m_1^2 \chi_1^2(u) - m_2^2 \chi_2^2(u)) \psi(u) = 0 \quad (4.37)$$

par identification, on obtient

$$E = 0,$$

$$V = (M^2 - \omega^2) \chi_1^2(u) \chi_2^2(u) + m_1^2 \chi_1^2 + m_2^2 \chi_2^2,$$

$$Z(z) = \psi(u(z)),$$

on procède donc à la résolution des équations (4.32), (4.33), (4.34), (4.35).

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

4.3.2 Cas multidimensionnel

Il est facile d'obtenir une généralisation aux cas $d > 3$, pour cela considérons une variété $(1 + d)$ -dimensionnelle notée $\Sigma_{t, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z}^{(1,d)}$ comme un hypersurface dans un espace pseudo-euclidien $(1 + (2d - 1))$ -dimensionnel qu'on le note $E_{x^0, x^1, \dots, x^{2d-1}}^{(1, 2d-1)}$ avec signature $\{+, -, -, -, -, -\}$ définie par les équations

$$\Sigma_{t, \phi_1, \phi_2, z}^{(1,d)} : \begin{cases} x^0 = t, & x^1 = \rho_1(z) \cos \phi_1, \dots, x^{2d-3} = \rho_{d-1}(z) \cos \phi_{d-1}, \\ x^{2d-1} = z, & x^2 = \rho_1(z) \sin \phi_1, \dots, x^{2d-2} = \rho_{d-1}(z) \sin \phi_{d-1}, \end{cases} \quad (4.38)$$

en supposant $t \in (-\infty, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$, et $\phi_1, \dots, \phi_{d-1} \in [0, 2\pi]$. Il est évident d'après (4.38) que la variété $\Sigma_{t, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z}^{(1,d)}$ a une structure

$$\Sigma_{t, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z}^{(1,d)} = R_t^{(1)} \otimes T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)} \otimes R_z^{(1)}, T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)}$$

avec le tore

$$T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)} = S_{\phi_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes S_{\phi_{d-1}}^{(1)}.$$

La géométrie de ce tore $(d - 1)$ -dimensionnel reflète les conditions aux limites multi-périodiques sur les champs Ψ dans le problème à résoudre

$$\Psi(t, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z) \equiv \Psi(t, \phi_1 + 2n_1\pi, \dots, \phi_{d-1} + 2n_{d-1}\pi, z),$$

où n_1, \dots, n_{d-1} étant des entiers arbitraires.

La restriction de l'intervalle pseudo-euclidien $2d$ -dimensionnel

$${}^{(2d)}ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{2d-1})^2$$

sur la variété (4.38) induit à un simple pseudo-intervalle riemannien $(1 + d)$ -dimensionnel

4.3. GÉNÉRALISATION AUX DIMENSIONS SUPÉRIEURES

$$ds^2 = dt^2 - (\rho_1(z))^2 d\phi_1^2 - \dots - (\rho_{d-1}(z))^2 d\phi_{d-1}^2 - (\rho_d(z))^2 dz^2 \quad (4.39)$$

où $\rho_d(z) = \sqrt{1 + \rho_1'(z)^2 + \dots + \rho_{d-1}'(z)^2}$. Pour $d > 3$, l'espace d -dimensionnel avec l'intervalle riemannien

$$dt^2 = (\rho_1(z))^2 d\phi_1^2 + \dots + (\rho_{d-1}(z))^2 d\phi_{d-1}^2 + (\rho_d(z))^2 dz^2 \quad (4.40)$$

possède un tenseur de *Weyl* et une courbure scalaire non nulle assez complexe.

Dans les coordonnées $\phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z$ le laplacien d -dimensionnel sera sous forme :

$$\begin{aligned} \Delta_d = & \frac{1}{\rho_1^2(z)} \partial_{\phi_1}^2 + \dots + \frac{1}{\rho_{d-1}^2(z)} \partial_{\phi_{d-1}}^2 + \\ & + \frac{1}{\rho_1^2(z) \dots \rho_{d-1}^2(z)} \left(\frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \left(\frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \right) \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

L'introduction de la nouvelle variable

$$u = u(z) = \int \frac{\rho_d(z)}{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)} dz = \int \frac{\sqrt{1 + \rho_1'^2(z) + \dots + \rho_{d-1}'^2(z)}}{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)} dz \quad (4.42)$$

simplifie le laplacien d -dimensionnel comme suit :

$$\Delta_d = \frac{1}{\chi_1^2(u)} \partial_{\phi_1}^2 + \frac{1}{\chi_2^2(u)} \partial_{\phi_2}^2 + \frac{1}{\chi_1^2(u) \dots \chi_{d-1}^2(u)} \partial_u^2 \quad (4.43)$$

où

$$\chi_{\alpha=1, \dots, d}(u) = \rho_{\alpha=1, \dots, d}(z(u)).$$

CHAPITRE 4. SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE KLEIN
GORDON SUR UNE VARIÉTÉ AVEC GÉOMÉTRIE VARIABLE

Après la séparation des variables dans l'équation de Klein-Gordon correspondant au type (4.31), nous obtenons la Z -équation non triviale suivante :

$$\frac{1}{\rho_1^2(z) \dots \rho_{d-1}^2(z)} \left(\frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \left(\frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \right) \right) + \left(\omega^2 - M^2 - \frac{m_1^2}{\rho_1^2(z)} - \dots - \frac{m_{d-1}^2}{\rho_{d-1}^2(z)} \right) Z = 0, \quad (4.44)$$

La solution de (4.44) sera notée $Z(z) = Z(z; \omega, m_1, \dots, m_{d-1})$.

Les termes $m_1^2/\rho_1^2(z), \dots, m_{d-1}^2/\rho_{d-1}^2(z)$ décrivent l'énergie potentielle des forces d'inertie de type centrifuge qui agissent lorsque $m_1, \dots, m_{d-1} \neq 0$.

En utilisant la variable u nous obtenons à la place de l'équation (4.44) l'équation de type Schrödinger (4.36) avec le potentiel

$$V(u) = \chi_1^2(u) \dots \chi_{d-1}^2(u) \left((M^2 - \omega^2) + \frac{m_1^2}{\chi_1^2(u)} + \dots + \frac{m_{d-1}^2}{\chi_{d-1}^2(u)} \right). \quad (4.45)$$

Troisième partie

Conclusion et perspectives

Ce manuscrit est une contribution à l'étude des équations de Klein-Gordon sur des variétés bidimensionnelles. Le concept mathématique donné est basé sur des notions de variétés et sous-variétés, comme exemple, nous avons considéré une variété bidimensionnelle constituée de deux cylindres des rayons différents, reliés par une région conique (sorte d'une bouteille).

Les remarques suivantes sont à noter :

1. Nous avons démontré un théorème utile reliant l'étude de l'équation de Klein-Gordon sur des espaces à géométrie variable à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effectif généré par la variation géométrique. Ce résultat est basé sur la séparation de variables de Fourier dans l'équation de Klein-Gordon et sur le fait que les espaces bidimensionnels sont conformes à plat.
2. Comme conséquence, nous concluons que les spectres d'excitation de champ obtenu pourraient servir comme **empreintes** du profil $\rho(z)$ de la région de transition (cône). Les spectres non triviaux obtenus pour des excitations scalaires ressemblent qualitativement à certains spectres réels de résonances de particules élémentaires.
3. Uniquement, les signaux liés aux degrés de liberté de la partie d'espace de dimension supérieure ne se propagent pas librement à travers la région de transition (cône), en particulier, ces signaux ne pénètrent pas dans la partie de plus petite dimension. Dans notre exemple, la raison en est que la force centrifuge agissant sur les solutions avec les moments cinétiques non nuls. Dans le cas limite de la réduction dimensionnelle cette force croît à l'infini et bloque toutes les solutions sauf une avec le nombre d'Azimuth $m = 0$. On peut dire que les signaux qui pénètrent des dimensions les plus hautes dans les plus basses ne sont que ceux associés à des degrés de liberté communs.

-
4. L'étude de la géométrie variable dans des espaces plus réalistes ($d = 3$) est certainement importante, ce cas est proche des problèmes de la physique des ondes.
 5. Les généralisations apportées aux dimensions supérieures présentera une ouverture vers plusieurs axes de recherches, ainsi que l'étude des variétés correspondantes sera un exploit mathématique.

Bibliographie

- [1] Abramowitz M. and Stegun A., *Handbook of mathematical functions with formulas. Graphs and mathematical tables.* (NBS Appl. Math. Ser., Vol 55), Dover, New-York, 1964.
- [2] Arendt W., Nittka R., Peter W. and Steiner F., *Weyl's law : Spectral properties of the laplacian in mathematics and physics.* Mathematical analysis of evolution, information and complexity, Wiley-VCH, Weinheim pp 1-71, 2009.
- [3] Aret'eva I. Ya. *Regge Regime in QCD and asymmetric Lattice Gauge theory.* Phys. Lett. B 325, 171-182, 1994.
- [4] Arnold V. *Equations différentielles ordinaires.* Ed. Mir Moscou, 1974.
- [5] Drell S. and Bjorken J. *Relativistic quantum mechanics.* McGraw Hill Book company, 1964.
- [6] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. *Tables of Integrals, Sums, Series, and Products.* Fizmatlit, Moscow, 1971.
- [7] Holstein B. *Topics and advanced quantum mechanics.* Addison-Wesley Publishing company, 1991.
- [8] Horeva P. *Phys. Rev. D : Part Fields 79, 084008, 2009.*
- [9] Lafontaine J. *Introduction aux variétés différentielles.* Collection Grenoble Sciences, EDP, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] Meshchenko A., Fomenko A. *A course of differential geometry and topology*. Ed. Mir Moscou, 1988.
- [11] Rohlin Y., Fuchs D. *Premier cours de topologie : chapitres géométriques*. Ed. Mir Moscou, 1981.
- [12] Shirkov D. V. *Dreamland with classic Higgs Field, Dimensional Reduction and all that*. Proceeding of the Steklov Institute of mathematics, vol. 272, 216-222, 2011.
- [13] Shirkov D. V. *Nucl. Phys. B 371, 467-481, 1992*.