



**HAL**  
open science

# Approches "problèmes inverses" régularisées pour l'imagerie sans lentille et la microscopie holographique en ligne

Frederic Jolivet

► **To cite this version:**

Frederic Jolivet. Approches "problèmes inverses" régularisées pour l'imagerie sans lentille et la microscopie holographique en ligne. Imagerie médicale. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSES012 . tel-02316039

**HAL Id: tel-02316039**

**<https://theses.hal.science/tel-02316039>**

Submitted on 15 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2018LYSES012

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
opérée au sein du  
**Laboratoire Hubert Curien**

**Ecole Doctorale 488**  
**Sciences Ingénierie Santé**

**Spécialité de doctorat** : Image

Soutenue publiquement le 13/04/2018, par :  
**Frédéric Jolivet**

---

**Approches « problèmes inverses »  
régularisées pour l'imagerie sans lentille  
et la microscopie holographique en ligne**

---

Devant le jury composé de :

TROUVÉ, Emmanuel	Professeur des Universités	LISTIC	Rapporteur
CHAMPAGNAT, Frédéric	Maître de Recherches	ONERA	Rapporteur
NICOLAS, Jean-Marie	Professeur des Universités	Télécom ParisTech	Examineur
SOULEZ, Ferréol	Astronome adjoint	CRAL	Examineur
FOURNEL, Thierry	Professeur des Universités	LAHC	Directeur de thèse
FOURNIER, Corinne	Maître de conférences	LAHC	Co-encadrante
DENIS, Loïc	Maître de conférences	LAHC	Co-encadrant
ALLIER, Cédric	Ingénieur de Recherche	CEA-leti	Invité
FAURE, Nicolas	Ingénieur de Recherche	Biomérieux SA	Invité
MOMEY, Fabien	Maître de conférences	LAHC	Invité
VERRIER, Nicolas	Maître de conférences	MIPS	Invité





# Remerciements

Je tiens en premier lieu à adresser de profonds remerciements à Frédéric Champagnat et Emmanuel Trouvé pour avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse. Je remercie également tous les autres membres du jury pour avoir accepté de participer à cette soutenance de thèse.

Je remercie tout particulièrement Corinne Fournier qui a permis de maintenir le cap dans la réalisation de cette thèse. Tu as eu les lourdes tâches de me transmettre tes connaissances et ton expérience dans des domaines qui ne m'étaient pas familiers. Je te remercie pour ta grande disponibilité, ton dynamisme et pour m'avoir apporté une certaine rigueur scientifique. Je n'oublie pas non plus tout ton travail administratif, coûteux en temps, qui a permis de mener à bien cette thèse. Mes remerciements vont bien évidemment à mon directeur de thèse Thierry Fournel, qui a su laisser de la liberté à cette thèse, tout en veillant à son bon déroulement. Merci pour tes remarques très souvent positives qui ont permis de lever mes moments de doute.

Merci à Loïc Denis qui a toujours su apporter les bonnes idées au bon moment, notamment celle de l'approche présentée au chapitre 5, dont la paternité lui revient. Je ne te serai jamais assez reconnaissant pour les connaissances que tu m'as transmises à l'aide de ton large savoir.

Comment ne pas remercier Fabien Momey, qui, arrivé dans le laboratoire au cours de ma thèse, a permis d'apporter toute son expertise sur les problèmes inverses. Je me sens privilégié d'avoir pu collaborer de façon étroite avec toi dans cette deuxième partie de thèse. Tu as permis de décupler ma motivation dans ce projet et de me mettre en confiance à l'aide de tes qualités humaines qui, je pense, font l'unanimité.

Mes remerciements vont ensuite à Nicolas Verrier qui avant de s'exiler du côté de Mulhouse pour devenir maître de conférences, a eu la tâche ingrate, comme Corinne Fournier, de me transmettre certaines de ses connaissances sur la physique optique et la physique du capteur, alors que mes connaissances dans ces domaines étaient de l'ordre du néant. Même si mon niveau de connaissance dans ces domaines reste modeste, je le dois entièrement à toi et à Corinne. J'ai aussi énormément appris à tes côtés d'un point de vue expérimental, dans ce que j'appelle encore des fois

"ta" salle de manipulations.

D'un point de vue collaboration, je souhaite remercier en premier lieu l'équipe du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Loïc Mées, Jean-Louis Marié et Nathalie Grosjean, qui nous a fourni toutes les acquisitions de mécaniques de fluides présentes dans cette thèse, ainsi qu'un modèle basé sur la théorie de Mie qui nous a permis de réaliser des simulations au plus proches des conditions expérimentales. Si nos interactions scientifiques ont vraiment apporté de la plus-value à cette thèse, je n'en oublie pas votre bonne humeur qui a rendu le travail encore plus appréciable.

Mes remerciements vont également à l'équipe de l'entreprise bioMérieux avec laquelle j'ai pu collaborer au sein d'un projet de recherche à visée industrielle porté par Nicolas Faure. Je vous remercie pour cette collaboration qui a permis d'ouvrir cette thèse à la microscopie holographique sur des applications de microbiologie. Je souhaite aussi remercier Éric Thiébaud qui a pu par ces remarques toujours très pertinentes, faire avancer mes travaux de thèse. La qualité de son cours de « problèmes inverses », auquel j'ai eu la chance d'assister, a également contribué à faire avancer ces travaux de thèse.

Je tiens également à remercier les membres permanents, les post-doctorants et doctorants que j'ai pu côtoyer au sein du laboratoire Hubert Curien, et qui ont permis que ces trois années de thèse se fassent dans une ambiance studieuse mais aussi et surtout dans la bonne humeur.

En dernier lieu je souhaite remercier ma famille ainsi que mes amis qui ont été présents dans les bons moments, mais je retiendrai surtout leur soutien dans les moments de doutes inhérents à une thèse.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une introduction à l'holographie en ligne et les approches « problèmes inverses » associées</b>	<b>17</b>
1.1	L'holographie . . . . .	17
1.2	Les problèmes inverses associés à l'holographie . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Approches "problèmes inverses" en holographie numérique en ligne</b>	<b>24</b>
2.1	Physique de la diffraction . . . . .	24
2.1.1	La formule de diffraction de Rayleigh Sommerfeld . . . . .	25
2.1.2	L'approximation de Fresnel . . . . .	26
2.2	Modélisation mathématique d'un hologramme d'objets non-paramétriques . . . . .	27
2.2.1	Modèle complet . . . . .	27
2.2.2	Modèle linéarisé . . . . .	28
2.3	Modèle numérique . . . . .	29
2.3.1	Formulation du modèle discrétisé . . . . .	29
2.3.1.1	Modèle complet . . . . .	29
2.3.1.2	Modèle linéarisé . . . . .	30
2.3.2	Condition d'utilisation dus à l'échantillonnage . . . . .	30
2.3.2.1	Théorème de Shannon . . . . .	31
2.3.2.2	Utilisation de la réponse impulsionnelle . . . . .	33
2.3.2.3	Utilisation de la fonction transfert . . . . .	33
2.3.2.4	Zéro-padding . . . . .	33
2.4	Méthodes de reconstructions en holographie numérique . . . . .	35
2.4.1	Rétro-propagation . . . . .	35
2.4.2	Déconvolution de Wiener . . . . .	35
2.4.3	Maximum de vraisemblance . . . . .	36
2.4.4	Méthode régularisée . . . . .	38
2.4.4.1	Point de vue méthode variationnelle . . . . .	38
2.4.4.2	Point de vue probabiliste : <i>Maximum A Posteriori</i> . . . . .	38
2.5	Informations <i>a priori</i> . . . . .	39

2.5.1	Régularisation de Tikhonov . . . . .	39
2.5.2	Régularisation $L1$ (parcimonie) . . . . .	40
2.5.2.1	Point de vue probabiliste . . . . .	40
2.5.2.2	Point de vue pragmatique . . . . .	41
2.5.3	Régularisation de type "préservation de bords" . . . . .	42
2.5.3.1	Définition et propriétés de la variation totale . . . . .	42
2.5.3.2	Quelques propriétés fondamentales de la variation totale . . . . .	43
2.5.3.3	Variation totale relaxée . . . . .	44
2.5.3.4	Effets de la variation totale . . . . .	44
2.5.4	Group-Lasso . . . . .	47
2.5.5	Régularisations multiples . . . . .	47
2.5.6	Problème sous contraintes de bornes . . . . .	47
2.6	Optimisation en grande dimension . . . . .	48
2.6.1	Méthode de Quasi-Newton L-BFGS . . . . .	49
2.6.2	Algorithmes proximaux pour fonctions convexes non-lisses . . . . .	51
2.6.2.1	ISTA . . . . .	53
2.6.2.2	FISTA . . . . .	55
2.6.2.3	Comparaison des algorithmes ISTA, FISTA et VMLM-B . . . . .	56
2.6.3	ADMM . . . . .	61
2.6.4	ALBHO . . . . .	63
2.7	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Super-résolution d'hogrammes en ligne par une méthode "problème inverse" régularisée</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Introduction et état de l'art . . . . .	65
3.2	Méthode proposée . . . . .	70
3.2.1	Modèle de formation d'image . . . . .	70
3.2.2	Formulation du problème inverse . . . . .	71
3.3	Optimisation Alternée . . . . .	73
3.3.1	Reconstruction des décalages . . . . .	73
3.3.2	Reconstruction de l'opacité de l'objet . . . . .	75
3.4	Résultats et comparaisons avec état de l'art . . . . .	76
3.4.1	Validation à l'aide de simulations . . . . .	77
3.4.1.1	Simulation des hologrammes . . . . .	77
3.4.1.2	Estimations des décalages . . . . .	78
3.4.1.3	Qualité de la reconstruction . . . . .	79
3.4.2	Application aux hologrammes expérimentaux . . . . .	81
3.4.2.1	Montage expérimental . . . . .	81
3.4.2.2	Qualité de la reconstruction . . . . .	82

3.5	Temps de calculs & convergence . . . . .	85
3.6	Variante de la méthode pour application à des objets plus étendus .	87
3.6.1	Sur simulations . . . . .	88
3.6.2	Sur données expérimentales . . . . .	90
3.7	Conclusion . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Approches « problèmes inverses » appliquées à l'holographie numérique en ligne "couleur"</b>	<b>94</b>
4.1	Introduction et état de l'art . . . . .	94
4.2	Première approche : méthode inverse appliquée à 3 hologrammes "rouge", "vert" et "bleu" acquis sur un capteur monochrome . . . .	95
4.2.1	Configuration . . . . .	96
4.2.2	Formulation du problème inverse . . . . .	97
4.2.3	Résultats . . . . .	98
4.3	Deuxième approche : méthode inverse appliquée sur un seul hologramme acquis par un capteur RVB . . . . .	101
4.3.1	Configuration . . . . .	101
4.3.2	Formulation du problème inverse . . . . .	102
4.3.3	Résultats . . . . .	105
4.4	Troisième approche : méthode inverse super-résolue à l'aide d'hologrammes RVB translétés dans un plan . . . . .	107
4.4.1	Configuration . . . . .	108
4.4.2	Formulation du problème inverse . . . . .	108
4.4.3	Résultats . . . . .	109
4.5	Conclusion . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Reconstruction de phase par une approche inverse régularisée</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction et état de l'art . . . . .	113
5.2	Modèle de formation d'image non-linéaire . . . . .	114
5.3	Formulation du problème inverse . . . . .	115
5.3.1	Estimation du paramètre $c^*$ . . . . .	116
5.3.2	Régularisations : contraintes physiques sur la transmittance reconstruite . . . . .	116
5.4	Le problème d'optimisation . . . . .	117
5.4.1	Reconstruction par éclatement des variables . . . . .	117
5.4.2	Calcul de l'opérateur proximal $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}$ . . . . .	119
5.4.3	Réglage des hyper-paramètres . . . . .	120
5.5	Résultats . . . . .	122
5.5.1	Application en mécanique des fluides . . . . .	122
5.5.1.1	Contexte et expérience . . . . .	122

5.5.1.2	Validation à l'aide de simulations utilisant la théorie de Mie . . . . .	123
5.5.1.3	Reconstructions à partir d'une séquence d'hologrammes expérimentaux . . . . .	126
5.5.2	Application en microscopie défocalisée pour le bio-médical . . . . .	129
5.5.2.1	Contexte de l'expérience . . . . .	129
5.5.2.2	Reconstructions à partir des hologrammes de bactéries . . . . .	130
5.6	Cas particulier des objets opaques . . . . .	133
5.6.1	Modèle de formation d'hologrammes . . . . .	134
5.6.2	Formulation du problème inverse . . . . .	134
5.6.3	Comparaison qualitative et quantitative entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire . . . . .	135
5.6.3.1	Montage expérimentale . . . . .	135
5.6.3.2	Comparaisons qualitative et quantitative des reconstructions . . . . .	135
5.6.3.3	Qualité de la reconstruction . . . . .	135
5.7	Conclusion . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>138</b>
6.1	Reconstruction "multi-plans" . . . . .	139
6.1.1	Modèle de formation de l'hologramme . . . . .	140
6.1.2	Formulation du problème inverse . . . . .	141
6.1.3	Intérêts et pré-résultats . . . . .	142
6.2	Réglage des hyper-paramètres de régularisation . . . . .	144
6.3	Utilisation de la redondance d'informations . . . . .	146
6.4	Vers la reconstruction 3D (tomographie diffractive) . . . . .	147
	<b>Appendices</b>	<b>148</b>
<b>A</b>	<b>Calcul du gradient de la variation totale relaxée <math>TV_\epsilon</math></b>	<b>149</b>
A.1	Calcul des adjoints $D_m^*$ et $D_n^*$ de respectivement $D_m$ et $D_n$ . . . . .	150
A.2	Calcul du gradient . . . . .	150
<b>B</b>	<b>Démonstration de l'expression de l'opérateur proximal</b>	<b>152</b>
	<b><math>\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}</math></b>	<b>152</b>
B.1	Cas où les contraintes sont inactives ( $\mu = 0$ ) . . . . .	153
B.1.1	Cas $b^* = 0$ . . . . .	153
B.1.2	Cas $b^* \neq 0$ (et donc $ q  > \frac{\alpha_2}{2\beta}$ ) . . . . .	154
B.1.2.1	Si $b^* > 0$ . . . . .	154
B.1.2.2	Si $b^* < 0$ . . . . .	158

B.2	Cas où la contrainte sur le module ( $a^2 + b^2 \leq 1$ ) est active ( $\mu > 0$ ) . .	161
B.2.1	Si $b^* > 0$ . . . . .	162
B.2.2	Si $b^* < 0$ . . . . .	163
B.2.3	Si $b^* = 0$ . . . . .	164
B.3	Cas où la contrainte sur la phase ( $\varphi(a^*, b^*) \in [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ ) est active	164

**C Pseudo algorithme 166**





# Principales notations

## Mathématiques

$\mathbf{A}$	les expressions matricielles sont notées <b>en gras</b>
$\underline{A}$	les valeurs ou quantités complexes ( $\in \mathbb{C}$ ) sont soulignées
$[\cdot]_k$	k-ième élément d'un vecteur
$\Re(\cdot)$	partie réelle
$\Im(\cdot)$	partie imaginaire
$\underline{i}$	imaginaire pur unité
$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla^2$	opérateur laplacien
$div(\cdot)$	la divergence d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial^n}{\partial x^n}$	dérivée partielle d'ordre $n$ en fonction de $x$
$\partial$	sous-différentiel
prox	opérateur proximal
$signe(x)$	fonction renvoyant 1 si $x \geq 0$ , -1 sinon.

## Traitement du signal/d'images

$*$	produit de convolution (en général 2D)
$\Pi$	fonction porte (en général 2D)
$\Delta$	les décalages spatiaux 2D (dans les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ) entre 2 hologrammes
$\mathbf{d}$	l'hologramme mesuré (données)
$\mathcal{F}(\cdot)$	transformée de Fourier
$tp$	taille pixel

## Optique

$\underline{t}$ ou $t$	transmittance complexe ou réelle
$\vartheta$	ouverture réelle d'un objet ( $\vartheta = 1 - t$ ), aussi nommée opacité
$x$ et $y$	coordonnées spatiales transversales
$z$	coordonnée spatiale longitudinale ( <i>i.e.</i> distance à l'hologramme)
$\lambda$	longueur d'onde (dans certains cas, notation utilisée comme coefficient de régularisation)
$\varphi$	phase ou argument d'un nombre complexe
$I$	intensité de l'hologramme
$\underline{h_z}$	fonction de Fresnel

# Contexte

Cette thèse financée par la région Auvergne-Rhône-Alpes s’est déroulée au sein du Laboratoire Hubert Curien qui constitue une unité mixte de recherche (UMR 5516) de l’Université Jean Monnet de Saint-Étienne (UJM), du CNRS et de l’Institut d’Optique Graduate School. Le laboratoire Hubert Curien se compose d’environ 220 chercheurs (permanents et non-permanents), qui se répartissent en deux départements « Optique, photonique et hyperfréquence » et « Informatique, télécommunications et image ». Cette thèse s’est inscrit dans le projet « conception optique et reconstruction d’images » dirigée par Corinne Fournier, qui est l’un des trois projets de l’équipe « science de l’image et vision par ordinateur » dirigée par Thierry Fournel (Fig.1).

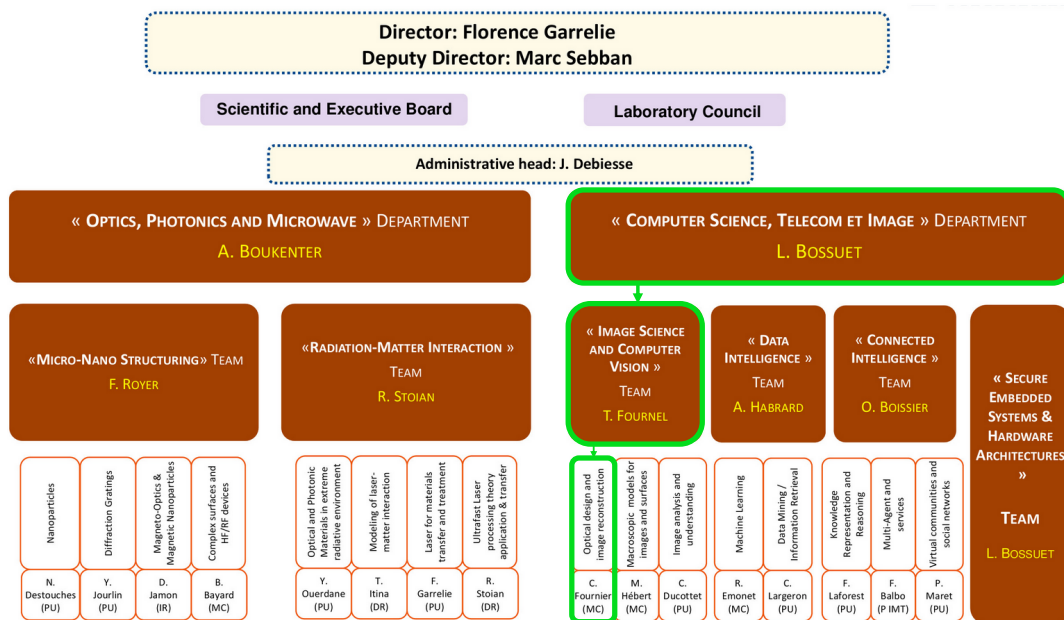


FIGURE 1 – Organigramme au sein du laboratoire Hubert Curien

Le traitement numérique d’images d’holographie est étudié depuis la fin des années 80 au laboratoire Hubert Curien. La reconstruction proprement dite qu’autorisera l’avènement de pixels suffisamment petits, devient une problématique à part entière, celle de l’holographie numérique, à l’occasion de la thèse de Corinne Fournier (2003). L’orientation « problèmes inverses » est prise lors des thèses de Loïc Denis (2006) et de Ferréol Soulez (2008). Les thèses de Jérôme Gire (2009) et de Mozhdeh Seifi (2013) permettront d’accentuer les collaborations avec le Centre d’Astrophysique de Lyon (CRAL) et le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique

(LMFA), et ainsi de renforcer l'expertise du groupe concernant les approches problèmes inverses pour l'holographie (numérique). Aujourd'hui, Corinne Fournier, Loïc Denis, Fabien Momey et Thomas Olivier sont les quatre chercheurs permanents qui assurent la pérennité de cette thématique au sein du laboratoire.

Ce travail réalisé sous la supervision de Thierry Fournel, a été encadré par Corinne Fournier, avec un co-encadrement de Loïc Denis et Fabien Momey du laboratoire Hubert Curien. A noter que Nicolas Verrier, aujourd'hui chercheur au laboratoire Modélisation, Intelligence, Processus et Systèmes (MIPS) à Mulhouse, a également pris part à l'encadrement de la première partie de cette thèse. En outre ce travail a été au cœur de collaborations avec Éric Thiébaud du CRAL pour les aspects théoriques, de Loïc Méès, Jean-Louis Marié et Nathalie Grosjean pour les aspects applicatifs à la mécanique des fluides, et enfin avec l'équipe de Nicolas Faure dans le cadre du projet de collaboration Hologram (entreprise bioMérieux à Grenoble) pour les applications à la microbiologie. Concernant l'holographie "couleur" abordée au chapitre 4, j'ai pu interagir avec Olivier Flasseur, également doctorant au laboratoire Hubert Curien : ses travaux m'ont été très utiles dans l'élaboration d'approches « problèmes inverses » dans ce cadre.

Ces travaux ont été partie prenante de différents projets CNRS DEFI IMAGIn DETECTION puis DEFI IMAGIn RESSOURCES, ayant pour ambition de créer une passerelle entre les problèmes de détection qui se posent en astronomie et les problématiques de microscopie sans lentille.

## Contexte scientifique et enjeux socio-économiques

Le principe de l'holographie en ligne a été proposé en 1948 par Dennis Gabor [1]. Henri Royer sera l'un des principaux artisans de son développement pour la vélocimétrie et la granulométrie de particules dans le cadre d'applications balistiques [2]. C'est la réduction de plus en plus importante de la taille des pixels des capteurs matriciels qui va alors rythmer l'exploitation numérique de ces hologrammes. Il faut attendre les années 90 pour voir le premier dépouillement entièrement automatique par traitement d'images numériques de plaques holographiques acquises avec un montage en ligne [3]. Si l'holographie était à l'origine développée par des opticiens, la capacité aujourd'hui à effectuer une acquisition directement numérique offre une grande souplesse d'utilisation et rend le déploiement de l'holographie (numérique) accessible à bien des secteurs applicatifs (mécaniciens, microscopistes, ou encore traiteurs d'images) que ça soit dans le milieu académique mais aussi pour des applications industrielles. En effet, ces dernières années l'holographie numérique a bénéficié de deux avancées :

- Une nette progression du secteur très dynamique des capteurs « bas coût » et de ses marchés (notamment avec l'arrivée des appareils photo

numériques et des smartphones). Ainsi des capteurs monochromes ou couleurs peu onéreux, ayant des tailles de pixels de l'ordre du micromètre, sont aujourd'hui disponibles et permettent d'accroître encore les performances de l'holographie numérique en ligne, autorisant la reconstruction d'objets faisant quelques microns dans un champ de plusieurs  $mm^2$ .

- Le remplacement des lasers par des LED dans les applications de microscopie, rendent l'utilisation de ce type de montage d'holographie en ligne encore plus compétitif. En effet les LED sont plus compactes, moins fragiles, et bien moins onéreuses. Le fait que les LED soient des sources moins cohérentes que les lasers ne posent généralement pas de problème et peut même s'avérer être un avantage pour certaines applications (moins d'interférences entre objets, taille du support réduit).

Pour ces deux raisons, si l'holographie en ligne a longtemps était utilisée principalement sur des applications de mécanique des fluides dans les laboratoires de recherche, aujourd'hui les applications en microscopie se développent largement et permettent la commercialisation de ce type de montage sous sa forme la plus minimaliste (une LED, un échantillon, un capteur). Les perspectives offertes par la diversité des applications (bio-médicales, en mécanique des fluides...), coïncide avec une dynamique de recherche à l'échelle mondiale .

## Introduction

L'holographie numérique est classiquement exploitée en adoptant un point de vue « optique » reprenant le principe de holographie sur plaques holographiques qui consistait à ré-éclairer l'hologramme : l'hologramme, enregistré dans une première étape, est ensuite restitué numériquement pour donner une image tridimensionnelle des objets holographiés. Malheureusement ce type d'approche présente de nombreux artefacts et limite rapidement l'exploitation de la richesse d'information qu'offre un hologramme numérique. Ces artefacts sont dus au fait que si la modélisation du problème direct, de l'objet vers l'hologramme, est bien connue (basé sur l'optique de Fourier [4]), l'inversion de ce problème, de l'hologramme vers l'objet, est en revanche un problème qui est dit mal posé et mal conditionné. La connaissance du modèle direct, que l'on a du modèle optique de diffraction de l'objet, font des approches « problèmes inverses » des approches adaptées pour exploiter de façon optimale l'information présente dans l'hologramme. Dans le domaine de l'holographie numérique en ligne ces approches « problèmes inverses » pour les objets paramétriques opaques (typiquement des objets sphériques) ont été largement explorées et ont pu repousser les limites de l'holographie notamment en terme de hors champ et de métrologie [5, 6, 7]. Cette thèse vise à explorer au mieux les performances atteignables par les approches

« problèmes inverses » dites *Maximum A Posteriori* pour la reconstruction d'objets non-paramétriques en s'appuyant sur les résultats prometteurs de l'article de 2009 de Loïc Denis *et al.* [8]. Ces travaux montre notamment que la reconstruction d'hologrammes numériques par une approche « problèmes inverses » permettait de supprimer les artefacts tels que les images jumelles, la propagation du bruit capteur ainsi que les effets dûs à la troncature en bord de champ. Il avait montré la possibilité de réaliser une reconstruction hors du champ de l'hologramme avec un bon rapport signal à bruit. En revanche cette méthode n'était appliquée que dans le cas d'objets "simples" permettant d'utiliser un modèle linéarisé de formation de l'hologramme. Cette thèse a été structurée pour apporter un début de réponse à trois questions qui restaient jusque là ouvertes dans le domaine des approches « problèmes inverses » non-paramétriques en holographie en ligne :

- Comment exploiter au mieux la redondance d'informations en holographie en ligne ?
- L'holographie numérique en ligne peut-elle être un système d'imagerie permettant un reconstruction quantitative de la phase d'un objet ?
- Dans quelle mesure est-il possible, à partir d'un hologramme acquis en ligne, de reconstruire un objet purement déphasant sans avoir d'*a priori* sur le support de celui-ci ?

Le but de la thèse a donc été de proposer, dans la continuité des travaux [8], des approches « problèmes inverses » permettant d'exploiter la redondance d'informations, que ce soit à l'aide d'une pile d'hologrammes, ou encore en utilisant la richesse d'informations proposée par l'holographie « couleur ». Cette première partie de thèse a permis de traiter des objets simples (opaques et peu étendus) et ont fourni des « preuves de concept ». La deuxième partie de cette thèse s'est concentrée à développer une approche « problèmes inverses » permettant de traiter des objets plus complexes, absorbants, introduisant un déphasage. Cette approche « problèmes inverses » a été testée sur des applications de mécanique des fluides et de microbiologie.

Le chapitre 1 présente le contexte de l'holographie numérique en ligne, ses applications, les différents montages ainsi que l'intérêt des approches « problèmes inverses » dans ce domaine.

Le chapitre 2 rappelle la physique de la diffraction, les différents modèles non-paramétriques, les différentes méthodes de reconstruction proposées en holographie numérique en ligne. Ce chapitre se termine en présentant les outils mathématiques utiles pour la mise en place d'approches « problèmes inverses » régularisées. Nous

y présenterons les différentes formes que peuvent prendre les *a priori*, ainsi que les outils d'optimisation utilisés dans cette thèse.

Dans le chapitre 3, nous présentons une approche « problèmes inverses » permettant une reconstruction super-résolue à partir d'une pile d'hologrammes translattés les uns par rapport aux autres dans un le plan capteur. Cette approche montrera l'intérêt qu'il peut y avoir à exploiter cette redondance d'informations. La reconstruction hors du champ du capteur est aussi présentée.

Le chapitre 4 est basé sur des travaux qui avaient pour but d'apporter une « preuve de concept » d'approches « problèmes inverses » sur des montages d'holographie « couleur ». L'objectif est dans un premier temps de montrer qu'il est pertinent d'exploiter la redondance d'informations multispectrales de façon conjointe, dans un deuxième temps il s'agit de démontrer qu'il est possible d'adapter les approches « problèmes inverses » développées jusqu'à présent pour des hologrammes RVB (rouge, vert, bleu). Le challenge de cette partie est de prendre en compte au mieux les effets dus à la physique du capteur couleur, et de mettre en relief l'importance de bien estimer les longueurs d'onde des sources lumineuses dans le cas de reconstruction conjointe. Cette partie s'achève sur une application en super-résolution.

Le chapitre 5 quant à lui présente une approche « problèmes inverses » qui permet la reconstruction d'objets absorbants et déphasants. Nous montrerons que cette approche « problèmes inverses » qui permet d'être quantitatif en terme de reconstruction de la phase, est bien adaptée pour différents montages et pour des applications diverses et variées telles que la reconstruction d'une gouttelette d'éther et de son évaporation en mécanique des fluides ou encore la reconstruction de bactéries dans le cadre de la microbiologie.

# Chapitre 1

## Une introduction à l'holographie en ligne et les approches « problèmes inverses » associées

*Dans cette partie, nous présentons l'évolution historique du principe proposé par Dennis Gabor jusqu'à l'holographie numérique en ligne sous la forme que l'on connaît aujourd'hui. Nous exposons le challenge que pose l'holographie numérique en terme de reconstruction d'images, et les solutions que peuvent apporter les approches « problèmes inverses ». Enfin, une présentation généraliste sur deux formalismes d'approches « problèmes inverses », l'un basé sur un modèle paramétrique d'objets, et l'autre sur une modélisation "image", est effectuée.*

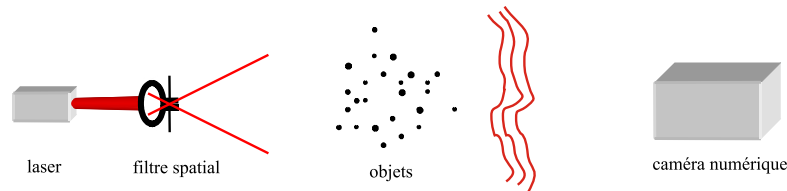
### 1.1 L'holographie

Le principe de l'holographie en ligne a été proposé en 1948 par Dennis Gabor [1], ce qui lui a valu le prix Nobel de physique en 1971. Lors de la présentation de ses travaux sur l'holographie pour la remise du prix Nobel il commenta le problème suivant [9] : « Déterminez la taille de gouttelettes sortant d'un bec d'injection à la vitesse de 2 Machs. La taille des gouttelettes est probablement de quelques microns et plus. N'importe quel physicien se serait avoué impuissant devant un tel problème. Grâce à l'holographie, il suffit d'enregistrer un simple hologramme en ligne du jet, la plaque holographique située à une distance confortable, avec un laser ruby pulsé (20-30 nanosecondes). ».

Aujourd'hui encore l'holographie paraît être le système d'imagerie le plus à même de répondre à ce problème [10]. En effet, l'holographie possède l'avantage d'enregistrer en une seule acquisition l'information sur tout un volume. L'holographie

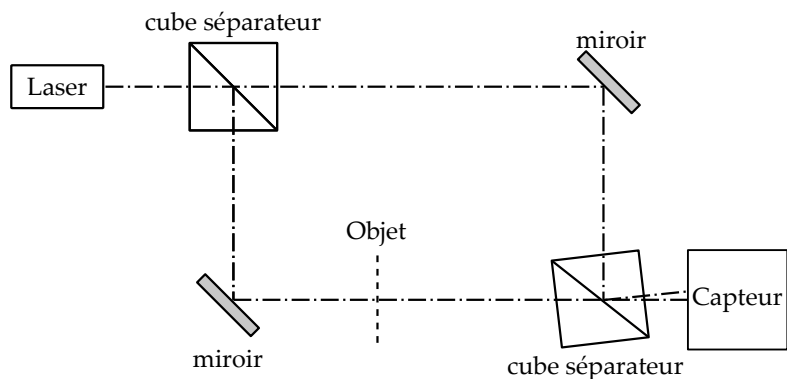


est un système d'imagerie basé sur le montage de Gabor (Fig.1.1) et qui se veut le plus simpliste possible. Si cette technique d'imagerie paraît facile à mettre en



**FIGURE 1.1** – Le montage de Gabor (holographie en ligne) d'après [11]

œuvre, elle a longtemps souffert d'un manque d'intérêt et d'applications, notamment à cause de la faible cohérence des sources à disposition. Ce problème sera résolu dans les années 60-70, avec l'arrivée des lasers, sources lumineuses fortement cohérentes. En revanche l'holographie en ligne souffre toujours d'un artefact appelé « image jumelle » lorsque l'hologramme est ré-éclairé. Ceci est dû au fait de la perte de l'information de la phase lorsque l'on enregistre une intensité. C'est pourquoi en 1962 Leith et Upatnieks proposent un montage, un peu plus complexe et moins facile à mettre en œuvre, nommé « holographie hors axe » permettant de séparer en deux la source lumineuse en une onde lumineuse « référence » qui ne passe pas par l'objet, et une autre appelée « onde objet » (voir la figure 1.2). Ainsi ce montage permet de récupérer l'information de phase, et donc de pouvoir restituer un objet sans « image jumelle ». Si les hologrammes, que ce soit en ligne ou hors axe ont



**FIGURE 1.2** – Montage d'holographie hors-axe

longtemps été acquis à l'aide de plaques photosensibles, une première révolution "numérique" proposée par [12] a consisté à numériser l'hologramme acquis sur la plaque holographique, puis de réaliser non plus la restitution de manière optique mais de manière numérique, un premier pas était fait vers l'holographie numérique. Avec l'avancée technologique dans le domaine de l'informatique, l'utilisation

de cette technique s'est longtemps répandue [13, 14], mais c'est une deuxième évolution "technique", qui va créer une révolution apportant le "tout numérique" à l'holographie et qui va voir se multiplier le nombre d'applications. En effet durant les années 90, les avancées obtenues dans le domaine des capteurs numériques, que ça soit en terme de définition, de taille de pixels et de dynamique, permettent dorénavant d'acquérir un hologramme numérique de façon directe [15, 16]. Dans les années 2000, avec l'avènement du smartphone et de l'appareil photo numérique, les capteurs numériques offrent des caractéristiques de plus en plus performantes (taille des pixels de l'ordre du micron), et pour un coût réduit. Ajouté au fait qu'il est maintenant possible dans certains cas de remplacer les diodes laser par des simples LED, l'holographie numérique en ligne apporte une solution d'imagerie bas coût et facile à mettre en œuvre, facile d'utilisation, compacte, ne demandant aucun réglage optique. Si l'holographie numérique en ligne a vu son nombre d'applications se multiplier ces dernières années, et même être proposée sous forme de solutions commerciales, le champ des améliorations possibles pour élargir son domaine d'applications est encore largement ouvert. Si pendant longtemps les solutions proposées en holographie en ligne pour réduire les artéfacts étaient basées sur des filtrages [17], le milieu des années 2000 a vu le problème de l'holographie être reconsidéré comme un problème inverse [18], ce qui a ouvert la porte à ce type d'approches. Pourquoi les approches « problèmes inverses » sont-elles si bien adaptées pour le problème d'holographie ? C'est l'objectif de ce travail de thèse que de tenter d'apporter une réponse à cette question.

## 1.2 Les problèmes inverses associés à l'holographie

En holographie en ligne la modélisation du problème direct (voir la figure 1.3) permettant à partir de la transmittance d'un objet de modéliser la formation de l'hologramme en ligne acquis sur le capteur est bien connue [4] et sera explicitée dans le chapitre 2. En revanche le problème inverse, qui doit permettre à partir d'un hologramme acquis en ligne de pouvoir retrouver la transmittance de l'objet est un problème qui appartient aux problèmes dit « mal-posés et mal-conditionnés ». Les approches « problèmes inverses » consistent donc à utiliser la modélisation du problème direct afin de retrouver avec quel objet le modèle de formation d'hologramme pourrait expliquer de la façon la plus pertinente l'hologramme acquis sur le capteur. Ces approches inverses en holographie en ligne peuvent être abordées suivant deux formalisations : les approches paramétriques et les approches non-paramétriques. Les approches paramétriques utilisent un modèle de formation d'hologramme paramétrique, qui peut donc reconstruire des objets pouvant

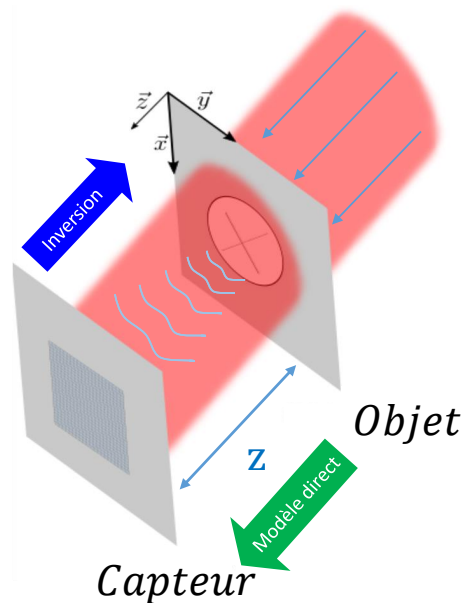
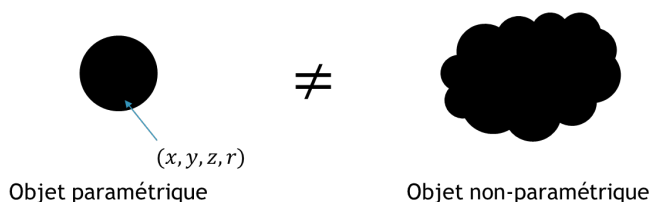


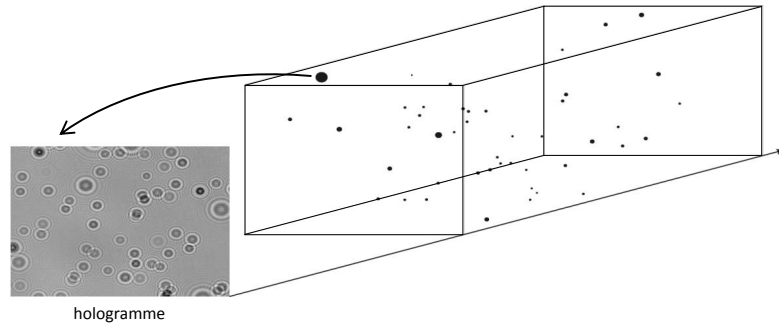
FIGURE 1.3 – Problème direct et inversion en holographie numérique en ligne

être décrits par un nombre restreint de paramètres, typiquement pour un objet sphérique sa position 3D et son rayon. En revanche certains objets ne peuvent pas être décrits aussi simplement. Dans ces cas là nous utiliserons des approches « problèmes inverses » non-paramétriques permettant de reconstruire directement une image de la transmittance. Dans cette dernière approche, les paramètres décrivant l'objet sont directement les pixels de l'image et le nombre d'inconnues du problème est donc beaucoup plus important.



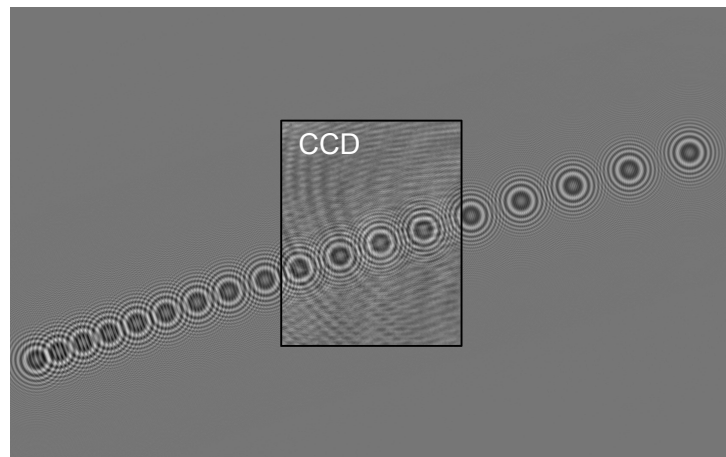
## Approches inverses pour objets paramétriques

Dans beaucoup d'applications, notamment en mécanique des fluides, lorsque l'on veut suivre et mesurer la taille de gouttelettes, il est souvent pertinent de les considérer comme des objets sphériques et opaques. Il est donc intéressant d'avoir une approche inverse qui considère une distribution volumique de ces objets (Fig.1.4).



**FIGURE 1.4** – Exemple d’un hologramme obtenu à partir d’objets sphériques répartis aléatoirement dans un volume 3D

Une approche inverse paramétrique a été proposée en 2007 par Soulez *et al.* [5, 6], permettant d’estimer précisément les paramètres de position et le rayon d’objets opaques et sphériques répartis dans un volume 3D. Cette approche inverse utilise un modèle de formation d’hologramme additif utilisant le modèle paramétrique décrit par [19]. *L’a priori* d’objets sphériques et opaques permet donc d’avoir un modèle de formation d’hologramme très contraint qui doit permettre de trouver les paramètres de chaque objet qui minimisent, au sens des moindres carrés, la différence entre ce modèle et l’hologramme acquis. Cette approche « problèmes inverses » a permis de montrer qu’il était possible d’exploiter les interférences créées par des objets hors du champ du capteur afin de les reconstruire (Fig.1.5). Cette méthode a aussi permis de lever un certain nombre de verrous associés à



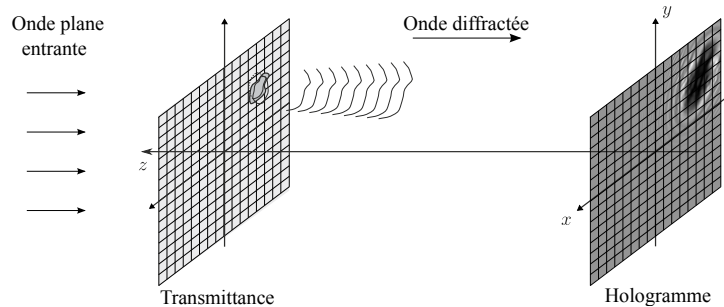
**FIGURE 1.5** – Superposition d’un hologramme acquis expérimentalement (support du capteur représenté par le rectangle) et de la reconstruction obtenue par l’approche inverse paramétrique [5] dans mais aussi hors du champ capteur. Illustration extraite de l’article [6].

l’holographie en ligne, notamment en métrologie, et a connu plusieurs variantes

permettant d'étendre son champ d'applications [20, 21, 7, 22, 23]. La limite de cette méthode réside dans le fait qu'il n'est pas possible de reconstruire des objets dont le modèle de formation d'image n'est pas paramétrique. Il faut alors se tourner vers d'autres types d'approches « problèmes inverses » pour traiter le problème de reconstruction qu'offre l'holographie en ligne pour des objets ne pouvant être décrits de façon paramétrique.

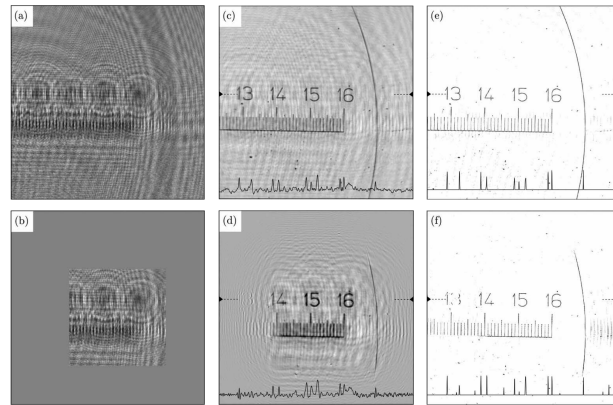
## Approches inverses pour objets non-paramétriques

Puisqu'il n'est pas possible d'extraire des paramètres à reconstruire dans le cas d'objets non-paramétriques, le problème de reconstruction d'holographie numérique doit être reconsidéré comme un problème de déconvolution myope, à PSF connue complètement ou en partie (elle peut dépendre de paramètres à estimer), permettant de reconstruire un plan de transmittance « objet » 2D (Fig.1.6). En



**FIGURE 1.6** – Problème d'holographie numérique en ligne considéré dans le cas d'objets non-paramétriques

2009 a été proposée une approche « problèmes inverses » permettant de reconstruire le plan de transmittance "objet" qui intégrait une contrainte de parcimonie [8]. En effet, contrairement aux approches paramétriques, le modèle de formation d'hologramme est bien moins contraint, il est donc impératif d'injecter des *a priori*. Ces *a priori* sont injectés à l'aide de termes de "régularisation", qui permettent de restreindre l'ensemble des solutions possibles, et ainsi améliorer le conditionnement de ce problème de reconstruction. Ces travaux avaient permis de mettre en relief l'intérêt d'aborder ce problème comme un problème inverse avec notamment la suppression des artéfacts de reconstruction persistant avec l'approche classique, à savoir la présence d'images jumelles, les effets de bord de champ, et la propagation du bruit capteur. En parallèle, ces travaux ont permis de montrer, comme dans le cas paramétrique, qu'il était possible de réaliser une reconstruction hors du champ du capteur (Fig.1.7). Les limites de la méthode proposée est qu'elle est bien adaptée seulement aux objets peu étendus et opaques. Cela restreint donc



**FIGURE 1.7** – Reconstruction d'hologramme par approche « problèmes inverses » avec contrainte de parcimonie [24].

son champ d'applications. Cette thèse s'appuiera sur ces travaux afin de développer de nouvelles approches « problèmes inverses ».

# Chapitre 2

## Approches "problèmes inverses" en holographie numérique en ligne

*L'élaboration d'approches « problèmes inverses » régularisées demande la compréhension, la mise en oeuvre et la manipulation de tout un ensemble d'outils. Ce chapitre introduit donc la physique de la diffraction et du capteur qui permettent ensuite de définir les modèles de formation d'hologrammes numériques utilisés dans cette thèse. Dans un deuxième temps nous discutons des a priori statistiques sur le bruit et sur la distribution de l'objet qui permettent de justifier d'un point de vue théorique les approches « problèmes inverses » régularisées. Nous finissons par la présentation des outils d'optimisation utilisés au cours de cette thèse, afin de résoudre les différents problèmes inverses.*

### 2.1 Physique de la diffraction

Nous allons présenter dans cette partie certains principes physique utiles pour expliquer la propagation d'une onde lumineuse et de sa diffraction. Soit  $U(\vec{r}, t)$  la fonction d'onde complexe satisfaisant l'équation de propagation scalaire d'une onde électromagnétique suivante,

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

avec,  $c = c_0/n$ ,  $c_0$  étant la célérité de la lumière dans le vide,  $n$  l'indice de réfraction du milieu de propagation, et  $\vec{r} = (x, y, z)$  représentant les coordonnées spatiales de l'onde.

Dans le cas d'une onde optique monochromatique, la fonction d'onde peut s'exprimer par  $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(i2\pi\nu t)$  avec  $U(\vec{r})$  l'amplitude complexe de l'onde et

$\nu = c/\lambda$  la fréquence de l'onde. L'amplitude complexe  $U(\vec{r})$  satisfait alors l'équation de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0 \quad (2.2)$$

avec  $k = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$  son nombre d'onde.

Une solution simple de l'équation de Helmholtz (Eq.2.2) est l'onde sphérique. L'amplitude complexe d'une onde sphérique prend la forme suivante,

$$U_S(r) = A \frac{\exp(\underline{ikr})}{r} \quad (2.3)$$

où  $\underline{A}$  est une constante appelée enveloppe complexe.

### 2.1.1 La formule de diffraction de Rayleigh Sommerfeld

En se basant sur l'équation de Helmholtz (Eq.2.2) et le théorème de Green, l'intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld peut modéliser la diffraction d'une onde à une distance  $z$  comme une infinité d'ondes secondaires sphériques d'amplitude proportionnelle à  $\underline{U}_0(\xi, \eta)$ ,

$$U(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_S \underline{U}_0(\xi, \eta, 0) \frac{\exp(\underline{ikr})}{r} \cos(\theta) d\xi d\eta \quad (2.4)$$

où  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$  désigne la distance entre la source secondaire située en  $(\xi, \eta, 0)$  et le point d'observation de coordonnées  $(x, y, z)$ , et  $\theta$  correspond au facteur d'obliquité ( $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$ , voir la figure 2.1).

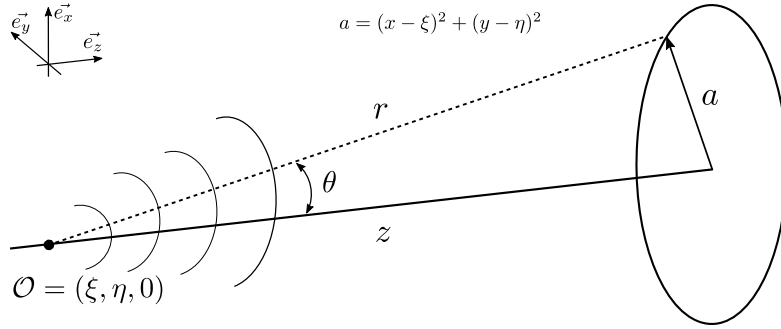


FIGURE 2.1 – Géométrie de la diffraction

Nous pouvons noter que cette formule établie par Rayleigh et Sommerfeld est à la base de l'optique de Fourier [4], et décrit correctement la plupart des expériences de diffraction lorsque les dimensions de la surface de l'objet (notée  $S$ ) sont grandes devant  $\lambda$ . Elle est notamment la traduction du principe de Huygens-Fresnel [4] : chaque point d'une ouverture agit comme une onde sphériques. Ces sources se combinent formant une figure de diffraction.



## 2.1.2 L'approximation de Fresnel

Considérons maintenant une onde sphérique aux points  $(x, y, z)$  pour lesquels l'approximation de Fresnel est valable ( $i.e. z^3 \gg \pi(x^2 + y^2)^2 / (64\lambda)$ ) [4]. En utilisant le fait que le développement limité de  $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + o(\epsilon^2)$ , et que la distance  $r$  peut s'écrire  $r = z\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}$ , nous avons donc l'approximation suivante,

$$r \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (2.5)$$

Substituant  $r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$  (Eq.2.5) pour la phase et  $r = z$  pour le terme au dénominateur, on obtient une approximation parabolique de l'onde sphérique  $U_S(r)$  (Eq.2.3) définie dans (Eq.2.3) :

$$U_S(r) \approx \frac{A}{z} \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \quad (2.6)$$

Dans le régime de Fresnel ( $z^3 \gg \pi(x^2 + y^2)^2 / (64\lambda)$ ), nous pouvons injecter (Eq.2.6) dans (Eq.2.4), et substituer  $\cos(\theta) = 1$  par approximation paraxiale (car  $r \approx z$ ). L'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (Eq.2.4) peut être simplifiée à l'aide de l'approximation de Fresnel,

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int \int_S \underline{U}_0(\xi, \eta, 0) \exp\left(ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z}\right) d\xi d\eta. \quad (2.7)$$

Cette relation (Eq.2.7) est appelée intégrale de Fresnel ou transformée de Fresnel. Notons que nous nous intéressons principalement dans cette thèse à la modélisation de la diffraction d'une onde plane par un plan de transmittance  $\underline{t}$ . Nous posons donc  $\underline{U}_0(\xi, \eta, 0) = \underline{A}_0 \cdot \underline{t}(\xi, \eta)$  avec  $\underline{A}_0$  l'onde référence qui est plane sous incidence normale par rapport au plan de  $\underline{U}_0$ . L'expression de l'intégrale de Fresnel est donc,

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)\underline{A}_0}{i\lambda z} \int \int_S \underline{t}(\xi, \eta) \exp\left(ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z}\right) d\xi d\eta. \quad (2.8)$$

Introduisons maintenant la notion de produit de convolution 2D dans le cas continu. Pour deux fonctions  $v$  et  $h$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , on note  $v \underset{(x,y)}{*} h$  le produit de convolution 2D de  $v$  par  $h$  au point  $(x, y)$  et on le définit par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad v \underset{(x,y)}{*} h = \int \int_{\mathbb{R}^2} v(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (2.9)$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (Eq.2.8) de manière plus compacte,

$$U(x, y, z) = \exp(ikz) \underline{A}_0 \cdot \underline{t} \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z \quad (2.10)$$

avec le noyau de convolution  $\underline{h}_z$  appelé "fonction de Fresnel", défini par,

$$\underline{h}_z(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right). \quad (2.11)$$

Notons trois propriétés importantes de  $\underline{h}_z$  [11, 25] :

- **Propriété de conservation**

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \int \int_{\mathbb{R}^2} \underline{h}_z(x, y) dx dy = 1. \quad (2.12)$$

- **Propriété de dualité** La transformation qui inverse la transformée de Fresnel de paramètre  $\lambda z$  est la transformée de Fresnel de paramètre  $-\lambda z$ ,

$$\underline{h}_z * \underline{h}_{-z} = \delta \quad (2.13)$$

- **Élément neutre** La transformée de Fresnel laisse inchangée une fonction constante

$$\underline{A}_0 * \underline{h}_z = \underline{A}_0 \quad (2.14)$$

## 2.2 Modélisation mathématique d'un hologramme d'objets non-paramétriques

L'intensité optique d'une onde monochromatique est définie comme le carré du module de son amplitude complexe,

$$I(r) = |U(r, t)|^2 = |U(r)|^2. \quad (2.15)$$

Nous pouvons noter que l'intensité optique ne dépend pas du temps.

Si cette intensité  $I(r)$  peut se modéliser à l'aide d'un modèle paramétrique dans le cas d'objets sphérique [26], dans le cas d'objets non-paramétriques nous la modéliserons à l'aide de l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (Eq.2.4), ou de la transformée de Fresnel (Eq.2.8) dans le cas où nous sommes dans le régime de Fresnel [4].

### 2.2.1 Modèle complet

En utilisant l'expression convolutive de la transformée de Fresnel (Eq.2.10) sous l'hypothèse d'une onde référence plane et l'expression de l'intensité optique (Eq.2.15), dans le régime de Fresnel,  $I$  peut s'écrire, dans le cas d'une propagation sous incidence normale, sous la forme :

$$I(x, y, z) = |\underline{A}_0|^2 \left| \underline{t}_{(x,y)} * \underline{h}_z \right|^2. \quad (2.16)$$

En considérant  $z$  la distance entre le plan de transmittance  $\underline{t}$  et le plan de l'hologramme, dans le régime de Fresnel le modèle de formation de l'hologramme  $\mathcal{M}$  s'écrit de la manière suivante,

$$\mathcal{M}(x, y) = |\underline{A}_0|^2 \underline{t} \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2. \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Modèle linéarisé

Si le modèle de formation de l'hologramme complet (Eq.2.17) est un modèle non-linéaire, il est possible dans certains cas de linéariser ce modèle. En effet, l'onde incidente de référence  $\underline{A}_0$  étant une onde plane,  $|\underline{A}_0|^2$  est une constante. Supposons que le plan de transmittance est purement réel, c'est-à-dire qu'il est purement absorbant. On peut alors définir l'opacité par  $\vartheta = (1 - t)$ , où  $t$  est par conséquent une transmittance réelle. Nous avons alors,

$$|\underline{t} \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2 = |(1 - \vartheta) \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2 \quad (2.18)$$

$$= |1 - \vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2 \quad (2.19)$$

$$= (1 - \vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z) (1 - \vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z)^* \quad (2.20)$$

$$= (1 - \vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z) (1 - \vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z^*) \quad (2.21)$$

$$= 1 - 2\vartheta \underset{(x,y)}{*} \Re(\underline{h}_z) + |\vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2. \quad (2.22)$$

Si l'objet, de taille  $l$ , en plus d'être réel est de petite taille ( $\pi l^2 / (4\lambda z) \ll 1$ ) et qu'il est suffisamment isolé des autres objets, le terme non-linéaire  $|\vartheta \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z|^2$  est négligeable. L'intensité optique (Eq.2.15) peut alors être approximée de la manière suivante,

$$I(x, y) \approx |\underline{A}_0|^2 \cdot (1 - 2\vartheta \underset{(x,y)}{*} \Re(\underline{h}_z)) \quad (2.23)$$

avec,

$$\Re(\underline{h}_z) = \frac{1}{\lambda z} \sin\left(\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda z}\right) \quad (2.24)$$

Le modèle linéaire de formation d'hologramme (Eq.2.17) que nous considérons s'écrit donc,

$$\tilde{\mathcal{M}}(x, y) = |\underline{A}_0|^2 \cdot (1 - 2\vartheta \underset{(x,y)}{*} \Re(\underline{h}_z)) \quad (2.25)$$

## 2.3 Modèle numérique

### 2.3.1 Formulation du modèle discrétisé

L'acquisition de l'intensité lumineuse se fait par un appareil de mesure, qui peut être dans notre cas soit un capteur numérique CCD (*Charge Coupled Device*), soit un capteur CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*). Ces capteurs induisent alors un échantillonnage, une quantification, et une troncature de l'hologramme qui sera alors appelé hologramme numérique. Pour modéliser l'hologramme numérique, les modèles physiques explicités précédemment (Eq.2.17, Eq.2.25) établis dans l'espace continu doivent être adaptés afin de prendre en compte l'échantillonnage et la physique du capteur.

Nous considérerons ici un capteur monochrome, l'hologramme numérique est alors acquis sur une grille à deux dimensions dont les éléments sont appelés *pixels*. Ainsi l'hologramme numérique est défini sur un ensemble,

$$\{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\} \quad (2.26)$$

où,  $\{M, N\} \in \mathbb{N}^2$ .

Si le produit de convolution 2D a été introduit pour les fonctions analogiques à support infini en (Eq.2.9), nous devons ici le définir pour des suites finies. Pour deux suites finies  $(v_{m,n})_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N}$  et  $(h_{m,n})_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N}$ , on note  $v * h$  le produit de convolution de  $v$  par  $h$  défini par,

$$v *_{(m,n)} h = \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^N v_{m',n'} h_{m-m',n-n'} \quad (2.27)$$

On supposera que  $h$  est périodisé en dehors de son support tel que,

$$\forall (m, n) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}, \forall (k, l) \in \mathbb{Z}, \quad h_{m+kM, n+lN} = h_{m,n}. \quad (2.28)$$

Cette périodisation peut engendrer des problèmes de bord qui seront discutés dans la partie 2.3. Notons aussi que cette définition est appelée convolution circulaire mais aussi *convolution cyclique*.

#### 2.3.1.1 Modèle complet

En tenant compte de l'échantillonnage induit par le capteur, l'intensité de l'onde lumineuse dans le plan du capteur placé à une distance  $z$  du plan de transmittance  $\underline{t}$ , dans le régime de Fresnel peut être modélisée dans l'espace continu par,

$$I(x_p, y_p) = |A_0|^2 \left| (\underline{t} * \underline{h}_z) (x_p, y_p) \right|^2 \quad (2.29)$$

où  $(x_p, y_p)$  est le centre du p-ième pixel, et enfin  $*$  est le produit de convolution continu (Eq.2.9).

Dans l'espace discrétisé posons que  $(x_p, y_p) = (m.tp, n.tp)$  où  $tp$  est le pas d'échantillonnage qui est uniforme dans les deux directions de l'espace. En considérant que le capteur induit une intégration sur le pixel [27] et un facteur de conversion  $\gamma$  (représentant la probabilité de conversion d'un photon en électron suivie du nombre d'électrons par niveau de quantification), on établit le modèle de formation d'hologramme non-linéaire dans l'espace discrétisé suivant,

$$\mathcal{M}(m, n) = c. \left( \underline{t} * \underline{h_z} \right)^2 * \Pi (m, n) \quad (2.30)$$

où, la constante  $c = |\gamma|^2 |A_0|^2$  avec  $\gamma$  le facteur de conversion,  $\Pi$  une fonction porte 2D modélisant la surface photo-sensible de chaque pixel,  $*$  le produit de convolution discret (Eq.2.27), et  $\underline{t}$  le plan de transmittance discrétisé.

### 2.3.1.2 Modèle linéarisé

En utilisant l'approximation linéaire de l'intensité lumineuse (Eq.2.23), nous pouvons la modéliser dans le plan du capteur placé à une distance  $z$  du plan de transmittance  $\underline{t}$ . On a alors dans l'espace continu,

$$I(x_p, y_p) \approx |A_0|^2 \left( 1 - 2.\vartheta * \Re(\underline{h_z}) \right) (x_p, y_p) \quad (2.31)$$

où  $(x_p, y_p)$  est le centre du p-ième pixel, et  $*$  est le produit de convolution continu (Eq.2.9).

On établit alors le modèle de formation d'hologramme linéaire dans l'espace discrétisé suivant,

$$\tilde{\mathcal{M}}(m, n) = c. \left( 1 - 2.\vartheta * \Re(\underline{h_z}) \right) * \Pi (m, n) \quad (2.32)$$

où,  $c = |\gamma|^2 |A_0|^2$  est une constante,  $*$  est le produit de convolution discret (Eq.2.27) et  $\vartheta$  le plan de transmittance discretisé.

### 2.3.2 Condition d'utilisation dus à l'échantillonnage

La propagation de l'onde lumineuse est proportionnelle à  $\underline{t} * \underline{h_z}$ . Numériquement nous utilisons la propriété de la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[u * v] = \mathcal{F}[u].\mathcal{F}[v]$ , afin de réduire la complexité de son implémentation de  $O(n^2)$  en  $O(n \log(n))$ .

### 2.3.2.1 Théorème de Shannon

#### Définition

Le théorème de Shannon énonce que la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être supérieure à deux fois la fréquence maximale que contient ce signal,

$$f_{max} \leq \frac{f_e}{2} \quad (2.33)$$

Si le théorème n'est pas respecté, le signal est mal échantillonné, et donc des phénomènes de repliements spectraux apparaissent (aliasing).

#### Application à l'holographie numérique

Dans le cadre de l'holographie numérique en ligne, nous pouvons voir ce théorème comme une problématique d'échantillonnage du modèle de propagation, et par conséquent d'échantillonnage de la fonction de Fresnel. Cette fonction de Fresnel peut être implémentée dans le domaine direct (comme une réponse impulsionnelle), ou dans le domaine de Fourier (comme une fonction transfert). Cette différence d'implémentation sera discutée par la suite. Concentrons-nous ici à déterminer à quelle condition la fonction de Fresnel est bien échantillonnée dans le l'espace direct, et a contrario faut-il préférer l'implémentation dans le domaine de Fourier.

Reprenons l'expression de la fonction de Fresnel (Eq.2.11),

$$\underline{h_z}(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right). \quad (2.34)$$

La phase  $\varphi(x, y)$  de ce noyau de Fresnel s'exprime donc sous la forme suivante,

$$\varphi(x, y) = \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \quad (2.35)$$

Or la fréquence instantanée d'un signal s'écrit,

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &\stackrel{(Eq.2.35)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda z} x \\ &= \frac{x}{\lambda z} \end{aligned}$$

en posant que  $x_{max}$  est la valeur maximale que peut prendre  $x$ , alors la fréquence instantanée maximale de ce signal en fonction de  $z$  est défini par,

$$f_{imax}(z) = \frac{x_{max}}{\lambda z}. \quad (2.36)$$

Or d'après le théorème de Shannon (Eq.2.33), on a,

$$\frac{f_e}{2} \geq f_{imax}(z) = \frac{x_{max}}{\lambda z}. \quad (2.37)$$

La valeur minimale  $z_{seuil}$  donnant une fréquence instantannée maximale permettant que le théorème de Shannon soit respecté est défini par,

$$\frac{f_e}{2} = f_{imax}(z_{seuil}) \quad (2.38)$$

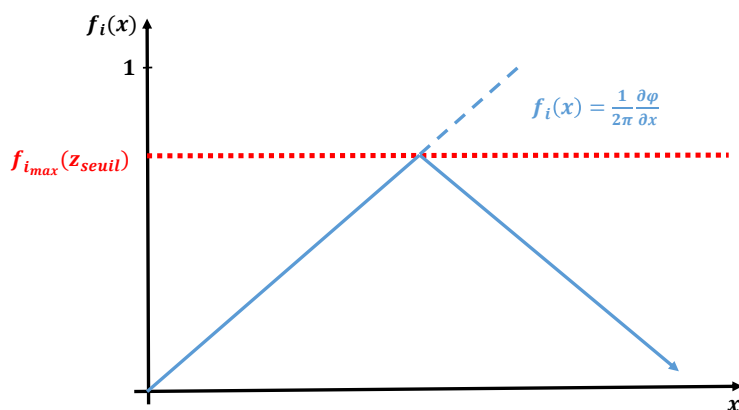


FIGURE 2.2 – Spectrogramme

Sachant que la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est égale à  $\frac{1}{tp}$ , en utilisant (Eq.2.36) et (Eq.2.38) on peut donc en déduire la valeur de  $z_{seuil}$  de la manière suivante

$$\frac{1}{2tp} = \frac{x_{max}}{\lambda z_{seuil}} \quad \Rightarrow \quad z_{seuil} = 2x_{max} \cdot \frac{tp}{\lambda}$$

Or en considérant que  $x_{max} = \frac{N}{2} \cdot tp$  (image de taille  $N \times N$  dont l'origine est centrée). On a donc,

$$z_{seuil} = \frac{N \cdot tp^2}{\lambda}$$

Finalement, nous avons démontré que la valeur théorique de  $z_{seuil}$  est

$$z_{seuil} = \frac{N \cdot tp^2}{\lambda} \quad (2.39)$$

### 2.3.2.2 Utilisation de la réponse impulsionnelle

Si la distance de propagation  $z$  est **supérieure ou égale** à  $z_{seuil}$ , par conséquent la fréquence maximale  $f_{max} = \frac{x_{max}}{\lambda z}$  est inférieure à  $f_{seuil} = \frac{x_{max}}{\lambda z_{seuil}}$ , on aura donc d'après (Eq.2.38),

$$\frac{f_e}{2} > f_{max} \quad (2.40)$$

La fonction de Fresnel implémentée dans l'espace direct (comme une réponse impulsionnelle) sous la forme (Eq.2.11) sera alors bien échantillonnée.

### 2.3.2.3 Utilisation de la fonction transfert

Dans le cas où la distance de propagation  $z$  est **inférieure** à  $z_{seuil}$ , par conséquent la fréquence maximale  $f_{max} = \frac{x_{max}}{\lambda z}$  est supérieure à  $f_{seuil} = \frac{x_{max}}{\lambda z_{seuil}}$ , on aura donc d'après (Eq.2.38),

$$\frac{f_e}{2} \leq f_{max} \quad (2.41)$$

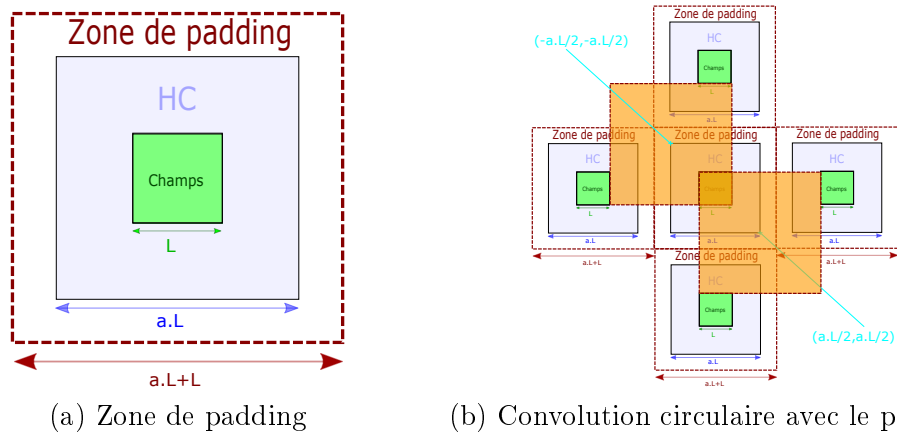
La fonction de Fresnel implémentée dans le domaine direct sera alors mal échantillonnée. A contrario la fonction de Fresnel dans l'espace de Fourier étant bien échantillonnée, nous implémenterons la fonction de Fresnel directement dans l'espace de Fourier (fonction transfert),

$$\mathcal{F}[h_z](\nu_x, \nu_y) = \exp\left(-i\pi\lambda z(\nu_x^2 + \nu_y^2)\right) \quad (2.42)$$

### 2.3.2.4 Zéro-padding

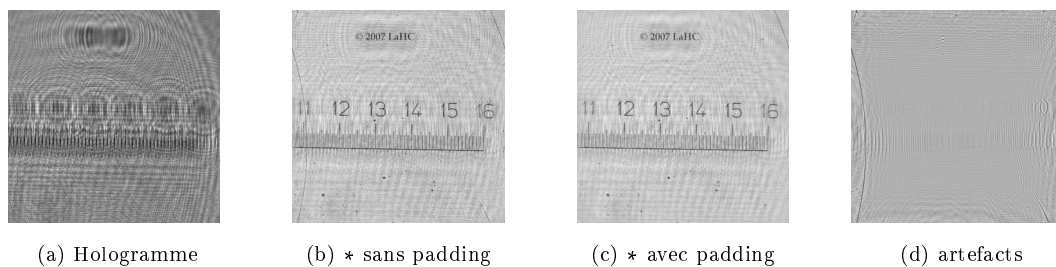
L'utilisation de la transformée de Fourier permet d'implémenter la convolution circulaire. Pour ne pas faire apparaître d'artéfacts dû à la périodisation de la fonction de Fresnel, il est indispensable d'étendre le support de l'hologramme avec les valeurs nulles, cette technique est appelée "zero padding". La figure 2.3.(a) montre la zone de padding qu'il est indispensable de prendre en compte pour ne pas avoir des effets de repliements dus à la convolution circulaire (Fig.2.3.(b)).





**FIGURE 2.3** – Illustration du padding :  $L$  est la taille du capteur,  $a$  le coefficient multiplicatif d'agrandissement de la zone hors du champ du capteur, HC est la zone hors champ

La figure 2.4 montre les effets de repliements (ou de périodisation) qu'engendre la convolution circulaire. En effet si nous effectuons une convolution circulaire d'un hologramme (a) avec un noyau de Fresnel  $\underline{h}_z$  nous pouvons constater que si l'hologramme n'a pas été paddé (b) il y a des effets de repliements (ou de périodisation). Au contraire dans le cas d'une convolution circulaire avec l'hologramme paddé (c) qui ne présente pas ces artéfacts. (d) représente l'ensemble des artéfacts (soustraction entre (b) et (c)).



**FIGURE 2.4** – Artéfacts dus à périodisation de la convolution circulaire

## 2.4 Méthodes de reconstructions en holographie numérique

### 2.4.1 Rétro-propagation

La technique de rétro-propagation d'un hologramme est un principe simple si nous reprenons la transformée de Fresnel explicitée en (Eq.2.7). En effet l'hologramme étant proportionnel à l'intensité de l'onde d'amplitude complexe  $U(x, y, z)$  établi dans le plan capteur, nous avons alors  $|U(x, y, z)| = \sqrt{I(x, y)}$ . De plus d'après la propriété de dualité de la fonction de Fresnel nous avons,

$$U(x, y, z) * \underline{h_{-z}} \propto (\underline{t} * \underline{h_z}) * \underline{h_{-z}} \quad (2.43)$$

$$\propto \underline{t} \quad (2.44)$$

La rétropropagation utilise l'information disponible dans l'hologramme à savoir le module  $|U(x, y, z)|$ , et la fonction de Fresnel de paramètre  $-\lambda z$  afin de reconstruire le plan de l'objet  $\underline{t}^{reconstruit}$  ( $z = 0$ ), tel que

$$\underline{t}^{reconstruit} = \sqrt{I(x, y, z)} * \underline{h_{-z}} \quad (2.45)$$

Si l'hologramme possède l'information du module de l'onde sur le plan capteur, en revanche il ne possède pas le terme de phase. Cela entrainera des artefacts de reconstruction appelés "images jumelles", étant donné que la formule d'inversion ne tient pas compte de cette non-linéarité du problème. Ces problématiques d'images jumelles sont abordées de manière détaillée dans la thèse de Loïc Denis [11]. De plus cette méthode est aussi très exposée aux différents bruits pouvant dégrader l'hologramme acquis. La modélisation complète de la formation des hologrammes devient donc nécessaire (Eq.2.30). Ce modèle n'étant pas inversible, il faut alors se tourner vers des approches "problèmes inverses" que nous expliciterons par la suite.

### 2.4.2 Déconvolution de Wiener

La déconvolution de Wiener aussi appelée filtre de Wiener permet de résoudre des systèmes convolutifs du type,

$$y = x * h + b \quad (2.46)$$

où dans notre cas,

- $y$  est l'hologramme
- $h$  est le noyau de convolution, plus connu sous le nom de réponse impulsionnelle ou *point spread function* dans les problèmes d'imagerie.

- $x$  est l'image initiale avant filtrage par la psf  $h$ .

En partant de la propriété de la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[x * h] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[h]$ , la solution "naïve" pour retrouver le plan de transmittance inconnu serait l'inversion directe de la convolution :

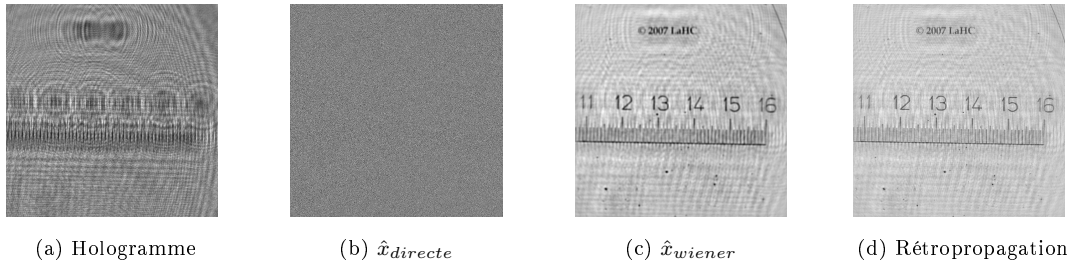
$$\hat{x}_{direct} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{F}[h]} \right] \quad (2.47)$$

Le problème de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne prend pas du tout en compte le bruit et donc le terme  $\frac{\mathcal{F}[b]}{\mathcal{F}[h]}$ , ce qui a pour effet d'amplifier de façon importante le bruit.

Le filtre de Wiener propose d'introduire un facteur permettant de réduire cet effet,

$$\hat{x}_{wiener} = \frac{\mathcal{F}[h]^* \cdot \mathcal{F}[y]}{|\mathcal{F}[h]|^2 + \frac{\langle |\mathcal{F}[b]|^2 \rangle}{\langle |\mathcal{F}[x]|^2 \rangle}} = \frac{\mathcal{F}[h]^* \cdot \mathcal{F}[y]}{|\mathcal{F}[h]|^2 + \frac{1}{RSB(f)}} \quad (2.48)$$

Notons que cette méthode permet d'introduire un *a priori* sur le rapport signal sur bruit (RSB) de chaque fréquence avec le facteur  $\frac{1}{RSB(f)}$ . Plus le RSB d'une fréquence est faible plus le facteur est important et donc à tendance à ne pas prendre en compte cette fréquence. D'un point de vue plus formel la déconvolution de Wiener peut être vue comme une déconvolution approche *Maximum A posteriori* (MAP) avec un *a priori* gaussien.



**FIGURE 2.5** – Méthodes Rétropropagation, déconvolution directe et de Wiener

### 2.4.3 Maximum de vraisemblance

Pour présenter le maximum de vraisemblance et le *Maximum A Posteriori*, on considérera un modèle de formation d'hologramme linéaire (afin de simplifier les calculs)  $\mathbf{H}\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{x}$  les données physiques inconnues et  $\mathbf{H}$  un opérateur linéaire tel que,

$$\mathbf{H} : \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{M' \times N'} \quad (2.49)$$

Ce modèle de formation d'hogramme doit permettre d'interpréter des données mesurées que l'on notera  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M' \times N'}$ . Le bruit de mesure  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M' \times N'}$  sera quant à lui considéré comme un bruit blanc Gaussien d'écart-type  $\sigma$ , mais il peut aussi inclure un bruit dû aux erreurs de modélisation. Nous pouvons alors modéliser les données de la manière suivante,

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2.50)$$

L'objectif va être de reconstruire au mieux  $\mathbf{x}$  en fonction des données observées. Le problème sera plus ou moins difficile à résoudre en fonction du conditionnement de l'opérateur  $\mathbf{H}$  et de l'écart-type du bruit  $\sigma_{\mathbf{b}}$ .

Le meilleur  $\mathbf{x}$  au sens du maximum est vraisemblance est le  $\mathbf{x}_{MV}$  qui maximise la probabilité d'avoir observé les données mesurées  $\mathbf{y}$ ,

$$\mathbf{x}_{MV} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} \quad p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

Le bruit  $\mathbf{b}$  est supposé blanc, gaussien, de variance  $\sigma_{\mathbf{b}}$ , on a

$$p(\mathbf{b}) \propto e^{-\frac{1}{2}\mathbf{b}^T \mathbf{W} \mathbf{b}} \quad (2.52)$$

où  $\mathbf{W}$  est la matrice inverse de la covariance du bruit. Le bruit étant considéré blanc, la matrice  $\mathbf{W}$  est une matrice diagonale définie par,

$$\mathbf{W} = \sigma_{\mathbf{b}}^{-2} \mathbf{I} \quad (2.53)$$

En reprenant (Eq.2.50), nous avons donc pour  $\mathbf{y}$  des données obtenues à partir de  $\mathbf{x}$ ,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{W} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (2.54)$$

Pour illustrer les limites de cette méthode, considérons  $\mathbf{H}$  inversible, on a alors,

$$\mathbf{x}_{MV} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} \quad p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

$$= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \quad -\log(p(\mathbf{y}|\mathbf{x})) \quad (2.56)$$

$$= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \quad (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{W} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.57)$$

$$= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \quad (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.58)$$

$$= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (2.59)$$

$$= \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.60)$$

Cette méthode ne peut pas marcher car elle aura pour effet d'amplifier les bruits, que ce soit le bruit capteur ou le bruit de modélisation. Pour réduire ces effets de bruit il va donc falloir biaiser la solution de maximum de vraisemblance  $\mathbf{x}_{MV}$  en introduisant des *a priori* sur  $\mathbf{x}$ . Les méthodes dites régularisées sont des méthodes essayant de répondre (dans la mesure du possible) à la question : quel est le meilleur compromis biais/erreur ?

## 2.4.4 Méthode régularisée

### 2.4.4.1 Point de vue méthode variationnelle

Les méthodes d'optimisation permettant de construire une telle approximation de  $\mathbf{x}$  utiliseront toutes un *a priori* sur la régularité de l'image ou l'objet reconstruit. On pourra alors minimiser un critère de régularité convexe

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N} \quad (2.61)$$

sous la contrainte que la reconstruction  $\mathbf{x}$  obtenue soit cohérente avec la donnée observée. Pour cela, on impose à

$$\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y} \quad (2.62)$$

d'être conforme à ce que l'on attend du bruit  $\mathbf{b}$ .

Pour l'optimisation, le critère de régularité doit être convexe. Si l'écart-type du bruit  $\mathbf{b}$  est  $\sigma_b$ , et que le bruit de modélisation est négligeable, nous pouvons présumer que  $\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \simeq MN\sigma_b$ .

En formalisant ce problème, nous cherchons donc à minimiser,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathcal{R}(\mathbf{x}) \\ \text{sous la contrainte : } \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 < \tau \end{cases} \quad (2.63)$$

avec un paramètre  $\tau$  proche de  $MN\sigma$ . Dans les faits, plus ce seuil  $\tau$  est important plus nous donnerons d'importance à l'*a priori* de régularité que nous avons sur  $\mathbf{x}$ . Pour des raisons liées au fait que l'optimisation de problèmes sous-contraints présente plus de difficulté que les problèmes d'optimisation non-contraint, il est plus courant de voir le problème de minimisation (Eq.2.63) écrit sous la forme du problème non-contraint suivant,

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \alpha\mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.64)$$

### 2.4.4.2 Point de vue probabiliste : *Maximum A Posteriori*

L'approche Bayésienne permet de bien modéliser les approches de type approche problèmes inverses. L'estimateur MAP conduit alors à un problème d'optimisation dont la résolution fournit une estimation de la solution de notre problème inverse.

En faisant les mêmes suppositions sur le bruit du capteur que dans le cas du maximum de vraisemblance (Eq.2.52), nous avons déjà établi la probabilité des données  $\mathbf{y}$  sachant l'image  $\mathbf{x}$  (Eq.2.54). Supposons maintenant que l'image  $\mathbf{x}$  suit une loi, que l'on appelle une loi *a priori*,

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-\lambda\mathcal{R}(\mathbf{x})} \quad (2.65)$$

En utilisant la loi de Bayes suivante,

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}, \quad (2.66)$$

nous pouvons en déduire la loi *a posteriori* suivante,

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (2.67)$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y})^T\mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y})}e^{-\lambda\mathcal{R}(\mathbf{x})} \quad (2.68)$$

L'estimateur  $\hat{\mathbf{x}}_{MAP}$  va donc maximiser cette loi *a posteriori*,

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (2.69)$$

$$= \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y})^T\mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y})}e^{-\lambda\mathcal{R}(\mathbf{x})} \quad (2.70)$$

Afin d'utiliser les outils d'optimisation habituels (certains seront détaillés partie 2.6), il est commode de réécrire ce problème de MAP (Eq.2.70) sous la forme,

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} -\log(p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})) \quad (2.71)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} -\log(p(\mathbf{y}|\mathbf{x})) - \log(p(\mathbf{x})) \quad (2.72)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y})^T\mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \lambda\mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.73)$$

L'écriture du *Maximum A Posteriori* peut donc s'écrire de la manière suivante,

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_W^2 + \lambda\mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.74)$$

avec,

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_W = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (2.75)$$

où  $w_p$  est l'inverse de la variance du bruit sur le  $p$ -ième pixel. En pratique nous poserons  $w_p = 0$  quand le pixel est manquant,  $w_p = 1$  lorsque le pixel est mesuré et nous utiliserons un hyper-paramètre de régularisation  $\alpha = \sigma_b^2 \lambda$ .

## 2.5 Informations *a priori*

### 2.5.1 Régularisation de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov est un des premiers types de régularisation. Cette régularisation proposée par le mathématicien russe Andreï Tikhonov, est

principalement utilisée pour la résolution de problèmes mal posés, et notamment pour les problèmes inverses [28].

La régularisation de Tikhonov est équivalent à un *Maximum A Posteriori* en supposant que l'image  $\mathbf{x}$  suit une loi *a priori* de forme gaussienne [29],

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}} \quad (2.76)$$

où  $\mathbf{C}^{-1}$  décrit une matrice de covariance s'exprimant sous la forme,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{\Gamma}]^{-1}. \quad (2.77)$$

En supposant que le bruit  $\mathbf{b}$  est supposé indépendant et i.i.d, blanc et gaussien, nous retrouvons la régularisation qui a été imaginée par Andreï Tikhonov,

$$\hat{\mathbf{x}}_{tikhonov} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.78)$$

où  $\mathbf{\Gamma}$  est aussi connue comme la "*matrice de Tikhonov*". Par exemple si nous prenons  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_n$  l'identité, nous aurons une régularisation quadratique qui favorisera des petites valeurs sur la norme euclidienne, correspondant à la régularisation L2. En revanche si nous prenons  $\mathbf{\Gamma}$  une matrice modélisant un filtre Laplacien discret, cela aura tendance à réduire les fortes variations entre pixels "voisins", comme un filtre passe-bas.

## 2.5.2 Régularisation $L1$ (parcimonie)

La régularisation  $L1$ , appelée aussi contrainte de parcimonie est une régularisation qui va favoriser les objets parcimonieux.

### 2.5.2.1 Point de vue probabiliste

D'un point de vue probabiliste cela peut s'expliquer à l'aide de la distribution de Laplace, avec un paramètre de position  $\mu = 0$ , et un facteur d'échelle  $b = \frac{1}{\lambda}$ , défini de la manière suivante,

$$f(x|\mu = 0, b = 1/\lambda) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|} \quad (2.79)$$

Nous pouvons noter qu'en cas de contrainte de positivité sur  $x$  cette loi de distribution peut aussi s'apparenter à une loi de distribution exponentielle de paramètre 1.

Dans le cadre du traitement d'image nous ne considérons pas une variable aléatoire mais un vecteur de variables aléatoires  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{N^2}]$ . Considérant les

variables aléatoires  $x_i$  comme i.i.d, si la loi d'*a priori* décrite en (Eq.2.65) suit une loi de Laplace on a alors,

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N^2} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x_i|} \quad (2.80)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{N^2} e^{-\sum_{i=1}^{N^2} \lambda|x_i|} \quad (2.81)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{N^2} e^{-\lambda|\mathbf{x}|} \quad (2.82)$$

Dans ce cas-là l'estimateur *Maximum A Posteriori* (Eq.2.70) cherche à maximiser la loi *a posteriori* suivante,

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (2.83)$$

$$= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{N^2} e^{-\lambda|\mathbf{x}|} \quad (2.84)$$

$$= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda|\mathbf{x}|. \quad (2.85)$$

Notons que ce problème est connu sous le nom de problème Lasso [30] dont la solution permet à partir de sélectionner un nombre limité de variables expliquant des données.

### 2.5.2.2 Point de vue pragmatique

Si la régularisation  $L1$  permet de favoriser les objets parcimonieux, elle peut aussi permettre de se substituer à une régularisation  $L0$ . En effet la régularisation  $L0$  est non-convexe, non différentiable, et ne peut pas être optimisée par les outils d'optimisation convexe classiquement utilisés pour résoudre les problèmes de grande dimension. En pratique, nous remplacerons donc la norme  $L0$  par son enveloppe convexe, c'est à dire la norme convexe la plus proche de cette norme  $L0$ , qui est la norme  $L1$  [31]. La régularisation  $L1$  ne résoudra pas exactement la régularisation  $L0$ , mais permettra de s'affranchir de la non-convexité de la régularisation  $L0$  (Fig.2.6). Dans notre cas d'holographie numérique le coefficient de régularisation  $\lambda$  agira comme un seuil permettant de discriminer le bruit du signal. D'un point de vue pragmatique cette régularisation  $L1$  permet d'émettre une réponse à la question suivante : comment expliquer au mieux des données avec un minimum de pixels ? C'est notamment pour cela que cette méthode utilisée pour la résolution de certains problèmes inverses est aussi largement utilisée dans les domaines de l'acquisition comprimée, de la restauration d'images, de l'apprentissage statistique ou encore de la vision par ordinateur [32]. Notons que certaines



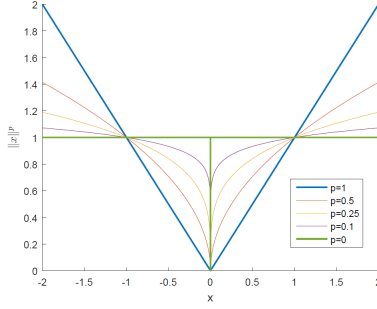


FIGURE 2.6 – Illustration normes  $L_p$

transformations comme la transformation en ondelette permet de avoir une représentation parcimonieuse d'une image [33], et ainsi la régularisation  $L_1$  prend tout son sens lorsqu'elle est appliquée dans cette représentation [34].

### 2.5.3 Régularisation de type "préservation de bords"

Cette partie a pour but de présenter la régularisation dite "Variation Totale" (TV), qui est une régularisation très largement utilisée dans le domaine du traitement d'images, et qui a été introduite dans ce domaine en 1992 par Rudin, Osher et Fatemi [35]. Cette régularisation est une méthode très répandue pour débruiter une image par exemple. Si une interprétation Bayésienne de cette régularisation a été détaillée dans [36], nous nous intéressons ici d'un point de vue méthodes variationnelles à la régularisation TV dans le cadre d'une application de déconvolution/inversion d'opérateur.

#### 2.5.3.1 Définition et propriétés de la variation totale

S'il est possible d'utiliser une version anisotrope de la variation totale, nous travaillerons dans cette thèse à l'aide de la variation totale isotrope discrète. Pour simplifier la présentation de cette fonction variation totale nous considérons ici une image  $w$  établie sous forme de matrice appartenant à  $\mathbb{R}^{N \times N}$ . La fonction variation totale isotrope est définie de la manière suivante,

$$TV(w) = \sum_{m,n=1}^N \|\nabla w_{m,n}\|_2 \quad (2.86)$$

avec,

$$(\nabla w)_{m,n} = \begin{pmatrix} D_m w_{m,n} \\ D_n w_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{m+1,n} - w_{m,n} \\ w_{m,n+1} - w_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Nous pouvons dès à présent remarquer que la variation totale est une norme mixte utilisant une norme  $L1$  sur une norme  $L2$ . Notons, aussi qu'il existe une version anisotrope de cette régularisation qui est une norme  $L1$  d'une norme  $L1$  .

### 2.5.3.2 Quelques propriétés fondamentales de la variation totale

- **continue**, car elle se compose d'une somme de fonctions qui sont la composition de fonctions continues.
- **convexe**, car elle se compose d'une somme de fonctions qui sont trivialement convexes.
- **Invariant à l'ajout d'une constante**, car pour toute image  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et quelque soit une constante  $c \in \mathbb{R}$ , nous avons la relation  $TV(\mathbf{w}+c) = TV(\mathbf{w})$ . Cette fonction est donc non-coercive car il est possible de choisir un  $c$  de manière à avoir  $\|\mathbf{w} + c\|$  aussi grand que l'on veut sans que  $TV(\mathbf{w} + c)$  ne tende vers l'infini. Ceci peut poser problème lorsqu'on cherchera à minimiser la variation totale.
- **une semi-norme** sur  $\mathbb{R}^{N \times N}$ . En effet parmi les propriétés qui définit une norme, seule la propriété  $\{TV(\mathbf{w}) = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = 0\}$  n'est pas satisfaite.
- **une norme** sur  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \sum_{m,n} w_{m,n} = 0\}$ . En effet si  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est telle que  $TV(\mathbf{w}) = 0$ , alors  $\mathbf{w}$  est une constante. Or  $\mathbf{w}$  vérifie  $\{\sum_{m,n} w_{m,n} = 0\}$  on a donc forcément une image  $\mathbf{w}$  nulle partout. Si la propriété de semi-norme garantie la convexité de la fonction variation totale, si l'on ajoute cette propriété de norme sur  $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \sum_{m,n} w_{m,n} = 0\}$  cela garantie que les solutions obtenues n'auront pas une norme arbitrairement grande si un autre terme (en l'occurrence dans notre cas, le terme d'attache aux données) contraint la moyenne de celui-ci à son minimum.
- **non-différentiable**, dès lors qu'il existe un couple  $(m,n)$  tel que  $\|\nabla w_{m,n}\|_2 = 0$ , car  $|\cdot|$  n'est pas différentiable en  $(0,0)$ . Ceci est à prendre en compte lors du choix d'algorithme pour minimiser une fonctionnelle contenant un terme de variation totale. Afin de s'affranchir des problèmes de non-différentiabilité, il est possible d'utiliser des algorithmes proximaux qui possèdent l'avantage d'être bien adaptés aux fonctions convexes non-lisses [37, 38, 39]. Une autre possibilité est d'utiliser une variante de la variation totale, appelée "variation totale relaxée" afin de s'affranchir de ce problème de non-différentiabilité, et qui possède l'avantage de tendre vers une régularisation quadratique lorsque le paramètre  $\epsilon$  sera important, ce qui favorisera les objets "lisses" (ceci sera discuté et illustré par la suite).

### 2.5.3.3 Variation totale relaxée

Dans notre cas nous choisissons de nous affranchir de cette problématique de non différentiabilité en remplaçant la variation totale dans la fonctionnelle par

$$TV_\epsilon(\mathbf{w}) = \sum_{m,n=1}^N \sqrt{(D_m w_{m,n})^2 + (D_n w_{m,n})^2 + \epsilon^2}, \quad (2.88)$$

où  $\epsilon > 0$ . Ce choix d'utiliser une variation totale relaxée est aussi motivé afin d'utiliser le paramètre  $\epsilon$  pour tendre vers une régularisation quadratique.

Les différentes étapes pour calculer le gradient de  $TV_\epsilon(\mathbf{w})$  sont explicitées dans l'annexe A à l'aide de la fonction  $\Phi_\epsilon(t) = \sqrt{t + \epsilon^2}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Au final l'expression du gradient de  $TV_\epsilon(\mathbf{w})$  s'écrit sous la forme,

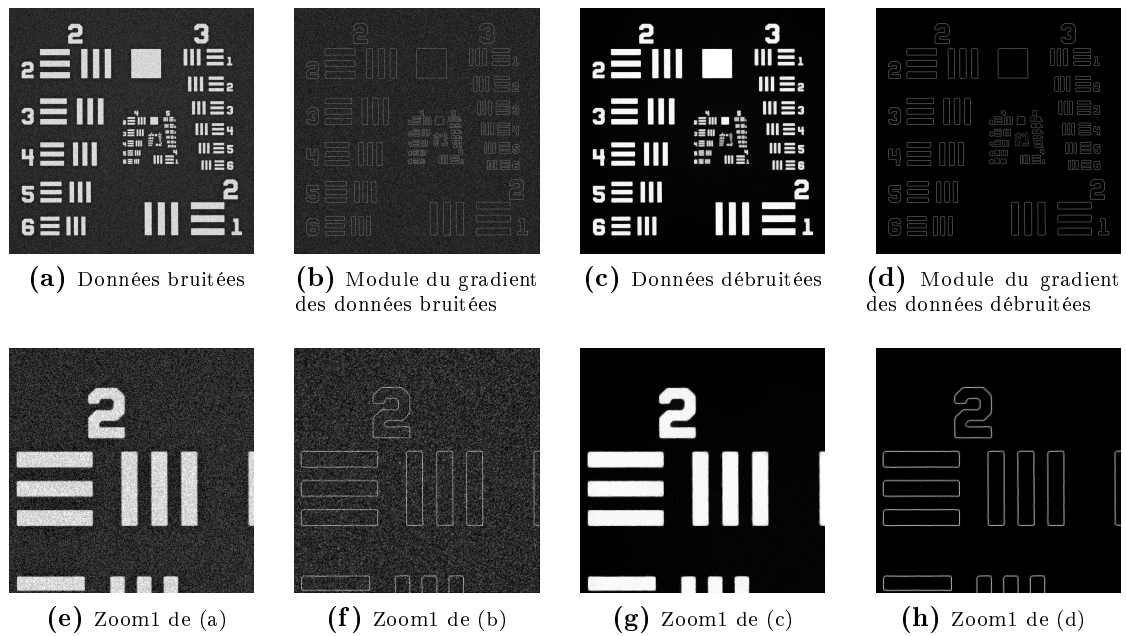
$$\nabla TV_\epsilon(w) = \text{div} \left( \frac{\nabla w}{\Phi_\epsilon(|\nabla w|^2)} \right) \quad (2.89)$$

### 2.5.3.4 Effets de la variation totale

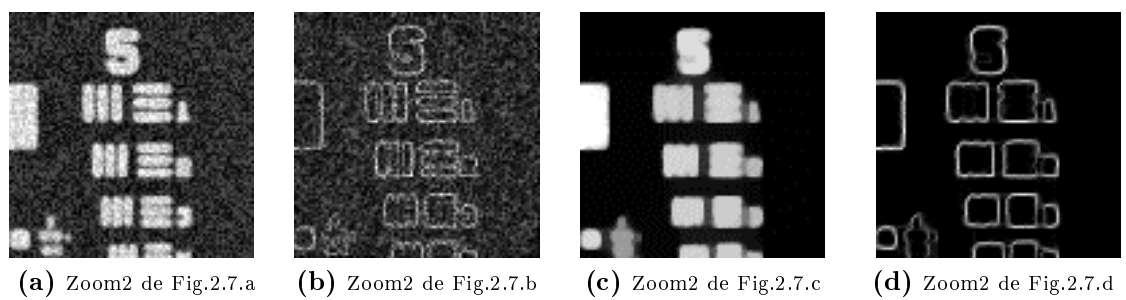
La régularisation par variation totale est une régularisation  $L1$  sur la norme  $L2$  du gradient, son effet principal est de favoriser le module du gradient de l'image parcimonieux. Cela permet d'avoir une "préservation de bord", et donc de favoriser les structures étendues constantes par morceaux. Pour bien comprendre les effets d'une régularisation par variation totale nous l'illustrons avec un problème de débruitage classique (Fig.2.7). En zoomant sur les grosses structures nous pouvons voir les effets de préservations de bords obtenus par une régularisation  $TV$ . Nous pouvons voir que le débruitage se fait dans l'espace "gradient" avec une contrainte de parcimonie sur le gradient. Les effets négatifs qui peuvent être constatés avec la régularisation  $TV$  est qu'en cas de différences d'échelle des structures, une régularisation  $TV$  homogène optimisée pour des structures "étendues" risque d'altérer les petites structures. Par exemple nous voyons dans la figure 2.8 que nous perdons les petites structures si nous appliquons la même régularisation que pour les grosses structures.

Nous touchons ici un point sensible de la régularisation de manière générale : comment adapter au mieux le niveau de la régularisation (i.e. la pondération par son hyperparamètre) afin qu'elle permette de reconstruire un éventail le plus large possible de type de structures. Nous discuterons ultérieurement des stratégies que nous avons proposées pour répondre au mieux à cette question dans notre cas d'holographie numérique.

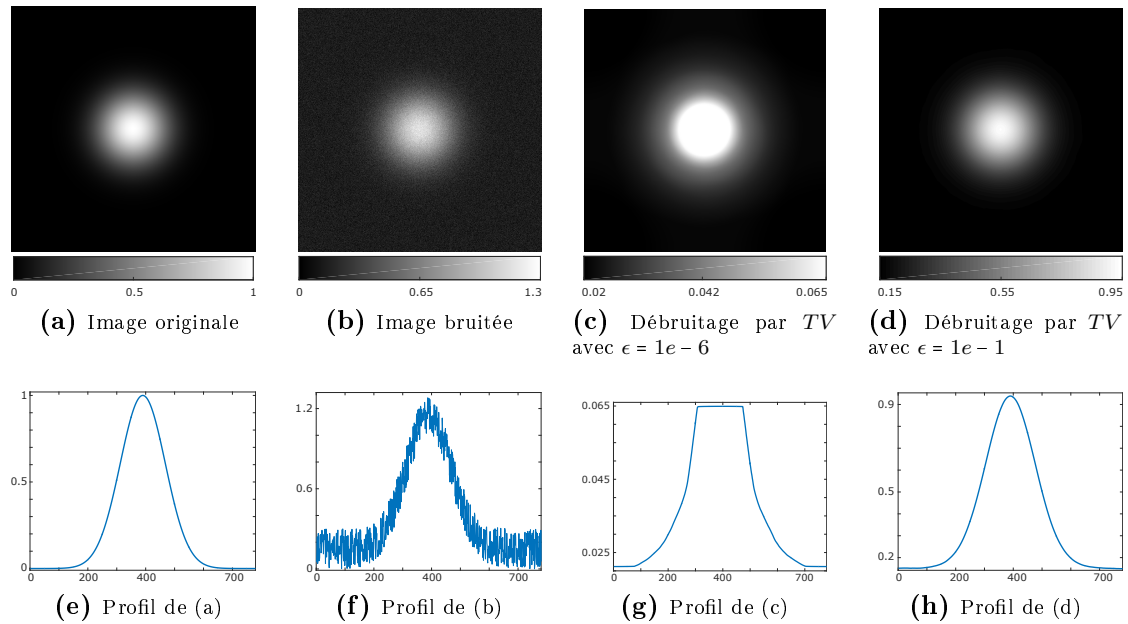
Un artefact de reconstruction pouvant être lié à la régularisation par variation totale est la perte de la dynamique. Ce problème a été discuté et traité à l'aide d'une méthode de "débiaisage" par Deledalle *et al.* [40].



**FIGURE 2.7** – Effets de la régularisation par variation totale



**FIGURE 2.8** – Effets de la régularisation par variation totale sur les petites structures



**FIGURE 2.9** – Effets du paramètre  $\epsilon$

De plus, si la régularisation par variation totale permet d'obtenir de bonnes reconstructions d'images dans le cas où l'image originale est de type "bande-dessinée" (c'est à dire contenant beaucoup d'aplats), pour des images naturelles, cette méthode présente des artefacts donnant un effet "de marches d'escalier" (staircasing effect) qui est discuté et traité dans les papiers [41] et [42]. De même la variation totale relaxée celle-ci peut être utilisée avec un paramètre  $\epsilon$  important ce qui aura pour effet de favoriser un gradient "lisse". En augmentant ce paramètre nous tendons vers une régularisation quadratique appliquée sur la norme  $L2$  du gradient. La figure 2.9 montre cet effet du paramètre  $\epsilon$  avec (a) une image référence, (b) cette image bruitée, (c) le résultat du débruitage de (b) par la régularisation  $TV_\epsilon$  relaxée avec un  $\epsilon = 1e-6$ , (d) le résultat du débruitage de (b) par la régularisation  $TV_\epsilon$  relaxée avec un  $\epsilon = 1e-1$  obtenue avec le même coefficient de régularisation que (c). Comme attendu, plus le paramètre  $\epsilon$  est important moins l'effet "marche d'escalier" est présent, et moins la perte de dynamique est importante. Notons enfin que la valeur de ce paramètre va considérablement influencer sur la vitesse de convergence de l'algorithme. En effet plus la valeur de  $\epsilon$  est importante plus le problème d'optimisation sera quadratique et donc plus sa résolution sera rapide.

## 2.5.4 Group-Lasso

Nous avons vu dans la partie 2.5.2 que la contrainte de parcimonie pouvait se faire à l'aide d'une méthode de régularisation  $L1$ . Ceci est connu comme le problème Lasso [30]. Il est aussi possible d'appliquer une contrainte de parcimonie, non pas des variables mais des groupes. Le groupe Lasso permet de structurer le terme de régularisation dans les groupes [43]. Concrètement en traitement d'images cela revient à avoir une régularisation favorisant les images telles que seuls quelques groupes de valeurs soient non-nuls.

Soit  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_K\}$  des  $n$  variables en  $K$  groupes. On note, pour tout  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ ,  $x_{G_k}$  pour  $G_k \in \mathcal{G}$ , le vecteur  $x$  restreint aux éléments du groupe  $G_k$ . La solution Group-Lasso  $\hat{x}_{LG}$  est définie de la manière suivante,

$$\hat{x}_{LG} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \sum_{k=1}^K w_k \|\mathbf{x}_{G_k}\|_2 \quad (2.90)$$

Typiquement la régularisation dite de type variation totale isotrope est une régularisation group-Lasso permettant d'avoir une contrainte de parcimonie sur le module des différentes composantes du gradients de l'image. Notons que cette régularisation pourra aussi être très utile lorsque nous modélisons un objet à reconstruire à l'aide d'un groupe de variables (par exemple une valeur complexe peut être séparée en deux variables à optimiser  $\Re(\mathbf{x})$  et  $\Im(\mathbf{x})$ ).

## 2.5.5 Régularisations multiples

S'il est courant que les approches problèmes inverses régularisées soient proposées avec un seul terme de régularisation, il peut arriver qu'il y ait plusieurs *a priori* qui se traduisent par deux termes de régularisation ou plus. Pour illustrer et montrer l'intérêt d'utiliser plusieurs termes de régularisation prenons un cas simple de débruitage (Fig.2.10). Le gain en terme de réduction de bruit de fond obtenu peut être confirmé à l'aide d'une visualisation 3D de celui-ci pour les deux reconstructions obtenues (deuxième ligne de la figure 2.10). En revanche nous pouvons constater une petite perte de dynamique de la reconstruction cumulant les deux régularisations (voir la figure 2.10.(d)) comparé à la reconstruction proposée par la seule régularisation TV (voir la figure 2.10.c).

## 2.5.6 Problème sous contraintes de bornes

Si certains *a priori* sur  $\mathbf{x}$  peuvent être traduites sous forme de contraintes douces à l'aide de termes de régularisations comme nous venons de le voir, nous pouvons aussi avoir des *a priori* sur les valeurs que peut prendre  $\mathbf{x}$ , ils se manifesteront sous forme de contraintes dures. En notant  $\Omega$  l'ensemble des valeurs que

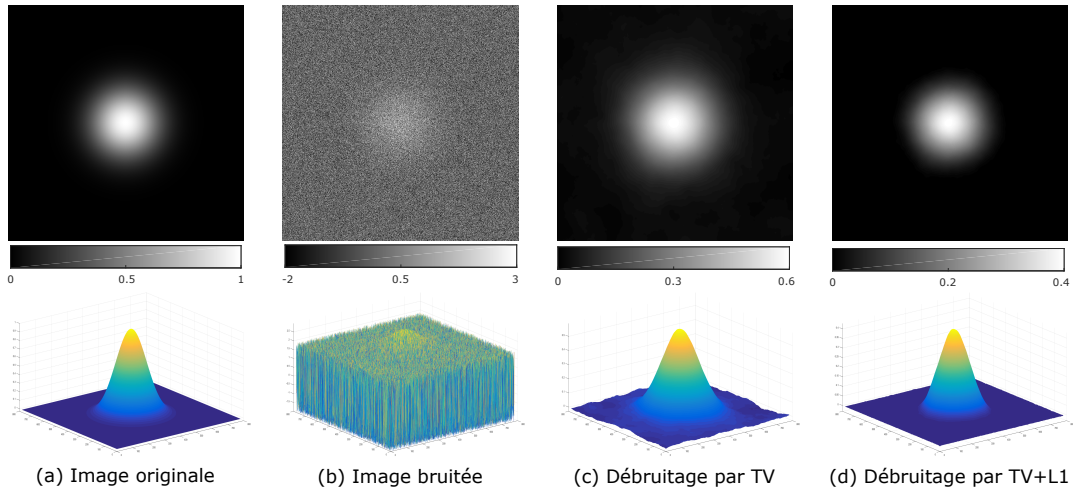


FIGURE 2.10 – Reconstruction avec des régularisations multiples

peut prendre  $\mathbf{x}$ , tel que  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{N^2} \mid lb \leq \mathbf{x} \leq ub\}$ , nous pouvons ajouter des contraintes sur l'objet en redéfinissant le problème variationnel (Eq.2.74) sous la forme,

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_W^2 + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.91)$$

D'un point de vue probabiliste, ce problème sous contraintes de bornes est un problème de *Maximum A Posteriori* avec la probabilité *a priori*  $\mathbb{P}(x \notin \Omega) = 0$ .

## 2.6 Optimisation en grande dimension

Dans le domaine du traitement d'images, une approche souvent efficace pour la résolution de problèmes inverses consiste à rechercher l'image minimisant le critère défini. Si les problèmes inverses résolus avec un modèle paramétrique ne demandent qu'à estimer un nombre restreint de paramètres, les approches inverses utilisant un modèle de formation d'images non-paramétrique demandent d'estimer des inconnues de grandes dimensions. En effet la dimension du problème à résoudre est souvent un multiple de la taille de l'image, ce qui représente en général des millions, voir des milliards de variables à estimer. Il est donc très important d'utiliser des algorithmes d'optimisation adaptés afin d'avoir des temps de calculs raisonnables. Les méthodes de type Newton ne sont par exemple pas applicables à ces problèmes. Il existe un panel d'algorithmes adaptés à ce type de problème sans contraintes (gradient conjugué non-linéaires, ...). Nous détaillons dans cette thèse quelques algorithmes d'optimisation permettant de résoudre des problèmes d'optimisation en grande dimension sous contraintes [44].

## 2.6.1 Méthode de Quasi-Newton L-BFGS

Dans le cas de l'optimisation d'une fonction  $g$  convexe à plusieurs inconnues on cherche à trouver la solution  $\mathbf{x}^*$  telle que le gradient  $\nabla g(\mathbf{x}^*) = 0$ . La solution selon de méthode de Newton est alors,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \nabla^2 g(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla g(\mathbf{x}_k) \quad (2.92)$$

Si cette méthode résout exactement le problème d'optimisation qui consiste à trouver où est-ce que la dérivée s'annule, elle est dans les faits inutilisable pour résoudre les problèmes d'optimisation associés aux problèmes inverses car la matrice Hessienne  $\nabla^2 g(\mathbf{x}_k)$  n'est pas obligatoirement définie positive, et par conséquent pas forcément inversible. Cela impose que le problème ne soit pas vraiment mal conditionné. De plus cette méthode impose que le point initiale  $\mathbf{x}_0$  soit suffisamment proche de la solution  $\mathbf{x}^*$ .

On n'a pas besoin nécessairement de la solution exacte  $\mathbf{x}^*$ . Des méthodes appelées méthodes de quasi-Newton ont été développées pour pallier aux inconvénients de la méthode de Newton liés au calcul de la matrice hessienne qui n'est pas toujours possible ou conseillé. Ces méthodes proposent de remplacer  $\nabla^2 g(\mathbf{x}_k)$  par une matrice  $\mathbf{B}_k$  symétrique et définie positive actualisée à chaque itération. Dans notre cas  $\mathbf{B}_k$  correspond à une approximation de la matrice hessienne de  $g$ . L'expression de la méthode de Quasi-Newton est de la forme,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (2.93)$$

où  $\alpha_k$  est une longueur de pas choisie pour optimiser la convergence, et  $\mathbf{p}_k$  est défini par

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2.94)$$

La méthode de Quasi-Newton la plus courante est la méthode de Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno, nommée communément méthode BFGS. En posant  $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k^{-1}$ , la méthode BFGS propose d'actualiser l'approximation de l'inverse de la matrice hessienne de la manière suivante [44],

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{V}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k + \rho_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \quad (2.95)$$

où,  $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{y}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$  et  $\mathbf{V}_k = (\mathbf{I} - \rho_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T)$ . L'expression de  $\rho_k$  est la suivante,

$$\rho_k = \frac{1}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}. \quad (2.96)$$



Les approximations de la hessienne (Eq.2.95) générées par la méthode BFGS sont souvent denses, même si la matrice hessienne peut être creuse, et le coût de stockage de ces approximations est donc vite excessif pour des problèmes de grande dimension. Les méthodes BFGS à mémoire limitée appelées aussi méthodes L-BFGS sont des méthodes visant à approximer la matrice Hessienne de taille  $n \times n$  à l'aide d'un nombre limité de vecteurs de taille  $n$ . L'idée principale de cette méthode est d'utiliser les informations de courbures  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{s}$  des itérations précédentes ainsi que celle du gradient  $\nabla \mathbf{f}_k$  afin de calculer le produit  $\mathbf{H}_k \nabla \mathbf{f}_k$  sans jamais avoir à stocker l'approximation de la hessienne  $\mathbf{H}_k$ . En entrant dans les détails, à l'itération  $k$  l'approximation de l'inverse de la hessienne  $\mathbf{H}_k$  est construite à l'aide des  $m$  paires de vecteurs  $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i\}$  pour  $i = k - m, \dots, k - 1$ . Dans les faits le nombre de paires  $m$  utilisées n'aura pas besoin d'être important pour approximer l'inverse de la hessienne  $\mathbf{H}_k$  et sera généralement compris entre 3 et une dizaine de paires. L'expression de cette approximation est la suivante,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= (\mathbf{V}_{k-1}^T \dots \mathbf{V}_{k-m}^T) \mathbf{H}_k^0 (\mathbf{V}_{k-1} \dots \mathbf{V}_{k-m}) \\ &+ \rho_{k-m} (\mathbf{V}_{k-1}^T \dots \mathbf{V}_{k-m+1}^T) \mathbf{s}_{k-m} \mathbf{s}_{k-m}^T (\mathbf{V}_{k-1} \dots \mathbf{V}_{k-m+1}) \\ &+ \rho_{k-m+1} (\mathbf{V}_{k-1}^T \dots \mathbf{V}_{k-m+2}^T) \mathbf{s}_{k-m+1} \mathbf{s}_{k-m+1}^T (\mathbf{V}_{k-1} \dots \mathbf{V}_{k-m+2}) \\ &+ \dots \\ &+ \rho_{k-1} \mathbf{s}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^T. \end{aligned}$$

L'initialisation de la hessienne  $\mathbf{H}_k^0$  peut se calculer de la manière suivante,

$$\mathbf{H}_k^0 = \frac{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}{\mathbf{y}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}. \quad (2.97)$$

En résumé, les méthodes L-BFGS sont des méthodes itératives d'optimisation continue permettant de résoudre des problèmes en grande dimension. A chaque itération ces méthodes itératives résolvent,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{H}_k \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2.98)$$

avec  $\alpha_k$  une longueur de pas choisie pour satisfaire les conditions de Wolfe [45, 46]. Notons que dans cette thèse nous utiliserons un algorithme L-BFGS nommé "Variable Metric Limited Memory Bounded" (VMLM-B) qui présente l'avantage de pouvoir intégrer des contraintes de bornes [47]. Cet algorithme est basé sur la recherche linéaire inexacte de Moré et Thuente [48], et sur la projection des gradients permettant de prendre en compte les contraintes.

## 2.6.2 Algorithmes proximaux pour fonctions convexes non-lisses

Les algorithmes d'optimisation continue classiquement utilisés (gradient conjugué, quasi-newton) sont des algorithmes efficaces pour résoudre des problèmes d'optimisation de fonctions convexes et différentiables. En traitement d'images il n'est pas rare de vouloir optimiser une somme de fonctions dont certaines sont non-lisses (variation totale, norme  $L1$ ...). S'il existe des astuces permettant de rendre ces fonctions différentiables à l'aide d'une relaxation ou d'une décomposition des variables [49], il est également possible de résoudre des problèmes d'optimisation non-lisses à l'aide d'algorithmes dit proximaux [50]. Ces algorithmes, qui font intervenir la notion d'opérateur proximal introduit par Moreau [51], se concentrent sur un type de classe de fonction, et sont donc spécifiques à un type de problème. Considérons le problème d'optimisation suivant,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (2.99)$$

où,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est une fonction convexe non nécessairement différentiable.

L'opérateur proximal de  $f$  est défini pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  par,

$$\text{prox}_f(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \quad f(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.100)$$

Quelques propriétés élémentaires de l'opérateur proximal [50]

- L'opérateur proximal  $\text{prox}_f$  est non expansif :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\text{prox}_f(\mathbf{x}) - \text{prox}_f(\mathbf{y})\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad (2.101)$$

- Le point  $\mathbf{x}^*$  minimise  $f$  si et seulement si  $\mathbf{x}^*$  est un point fixe tel que,

$$\mathbf{x}^* = \text{prox}_f(\mathbf{x}^*) \quad (2.102)$$

Introduisons ici brièvement la notion du sous-différentiel, noté  $\partial$ , qui sera à plusieurs reprises utilisées dans cette partie. Dans le cas d'une fonction convexe non nécessairement différentiable, introduire la notion de sous-différentiel permet de décrire une variation locale au point  $x_0$  non pas en fonction de sa dérivée classique qui n'existe pas nécessairement, mais comme l'ensemble des pentes de toutes les minorantes affines de la fonction (droites affines en rouge sur la figure 2.11) appelées sous-dérivées de  $f$  en  $x_0$ . Elles sont exactes en ce point  $x_0$ , c'est-à-dire qui ont en ce point la même valeur que la fonction convexe  $f(x)$  qu'elles minorent (voir la figure 2.11). Cette notion est commode pour une fonction  $f(x)$  non-différentiable

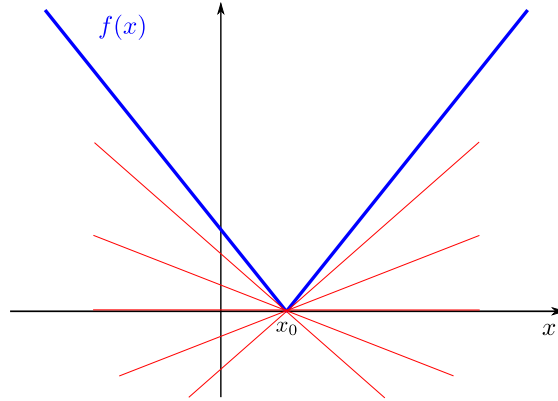


FIGURE 2.11 – Une fonction  $f(x)$  non différentiable en un point  $x_0$

en un point  $x_0$ , où la dérivée n'existe pas en ce point, mais définie en son voisinage par,

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.103)$$

et,

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.104)$$

où  $a$  et  $b$  sont finies (nous considérerons qu'elles respectent  $a \leq b$ ).

L'ensemble  $[a, b]$  ( $[b, a]$  si  $a \geq b$ ) de toutes les sous-dérivées est appelé le sous-différentiel de la fonction  $f$  en  $x_0$ . En pratique le sous différentiel d'une fonction  $f$  est noté  $\partial f$ , et cette fonction est sous-différentiable en  $x_0$  si  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ .

### 2.6.2.1 ISTA

Considérons maintenant un problème tel que la fonction  $f$  soit une somme de fonctions convexes mais non nécessairement différentiables telles que,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \quad (2.105)$$

où,

- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe différentiable de gradient  $L$ -Lipchitz :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla h(\mathbf{x}) - \nabla h(\mathbf{y})\| \leq L(h)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.106)$$

- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est une fonction convexe non nécessairement différentiable admettant un opérateur proximal  $\text{prox}_{\lambda g}$

En supposant que le problème admette au moins une solution, les conditions d'optimalité du problème sont,

$$0 \in \partial g(\mathbf{x}) + \nabla h(\mathbf{x}) \Leftrightarrow -\nabla h(\mathbf{x}) \in \partial g(\mathbf{x}) \quad (2.107)$$

**Propriété :** Les minimiseurs  $\mathbf{x}^*$  peuvent être caractérisés par,

$$\mathbf{x}^* = \text{prox}_{\lambda g}(\mathbf{x}^* - \lambda \nabla h(\mathbf{x}^*)) \quad (2.108)$$

où  $\lambda$  est une taille de pas appropriée.

Preuve [50] :

$$\begin{aligned} & 0 \in \nabla h(x^*) + \partial g(x^*) \\ \Leftrightarrow & 0 \in \lambda \nabla h(x^*) - x^* + x^* + \lambda \partial g(x^*) \\ \Leftrightarrow & (I + \lambda \partial g)(x^*) \ni (I - \lambda \nabla h)(x^*) \\ \Leftrightarrow & x^* = (I + \lambda \partial g)^{-1} (I - \lambda \nabla h)(x^*) \\ \Leftrightarrow & x^* = \text{prox}_{\lambda g}(x^* - \lambda \nabla h(x^*)) \end{aligned}$$

Avec la propriété du point fixe  $\mathbf{x}^*$  (Eq.2.102), l'algorithme proximal va permettre de faire converger  $\mathbf{x}$  de manière itérative vers son point fixe  $\mathbf{x}^*$  à l'aide d'un opérateur proximal,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \text{prox}_{\lambda g}(\mathbf{x}^k - \lambda \nabla h(\mathbf{x}^k)) \quad (2.109)$$

L'idée principale de l'algorithme ISTA (Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm) proposé par Daubechies *et al.* [34] réside dans ce résultat (Eq.2.109). Cet algorithme propose de résoudre le problème de régularisation  $L1$  suivant ,

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\mathbf{x}\|_1. \quad (2.110)$$

En effet en posant  $h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$  une fonction convexe, différentiable, et  $g(x) = \tau \|\mathbf{x}\|_1$  une fonction convexe non différentiable, en reprenant le résultat (Eq.2.109), les méthodes de gradient proximal proposent de résoudre itérativement (Eq.2.110),

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{prox}_{\lambda g}(\mathbf{x}^k - \lambda \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{x}^k - \mathbf{y})) \quad (2.111)$$

Or l'opérateur proximal d'une moindre norme  $L1$  est un seuillage doux (voir la figure 2.12) défini par [34]

$$\operatorname{prox}_{\beta \|\cdot\|_1}(u) = \mathcal{S}_\beta(u) \equiv \begin{cases} u - \beta & \text{si } u > \beta \\ 0 & \text{si } u \in [-\beta, \beta] \\ u + \beta & \text{si } u < -\beta \end{cases} . \quad (2.112)$$

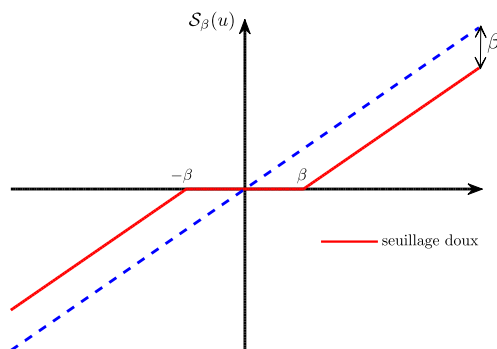


FIGURE 2.12 – Seuillage doux

En utilisant (Eq.2.111) et (Eq.2.112), nous retrouvons l'algorithme ISTA [34] qui propose de résoudre le problème (Eq.2.110) de manière itérative,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathcal{S}_{\lambda\tau}(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{H}^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^k)) \quad (2.113)$$

La convergence de cet algorithme pour l'itération  $k$  est [52],

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^*) \leq \frac{L(h) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^k\|^2}{2k} \quad (2.114)$$

Pour optimiser cette convergence il est donc important de bien régler la taille du pas  $\lambda$ . Théoriquement, pour optimiser la vitesse de convergence de cet algorithme il serait intéressant de connaître la plus petite constante de Lipschitz de la fonction  $h$  nommée  $L(h)$ , et prendre  $\lambda = \frac{1}{L(h)}$ . Dans le cas du problème (Eq.2.110), cette constante de Lipschitz dépend de la valeur propre maximum de  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ . Malheureusement pour les problèmes à grande dimension que l'on peut avoir dans les problèmes inverses, il n'est pas toujours aisé de calculer cette valeur propre, c'est pourquoi il est possible d'utiliser la version de ISTA avec "backtracking", permettant d'avoir une estimation de cette constante de Lipschitz pour chaque itération à partir de la constante de Lipschitz estimée à l'itération précédente.

### 2.6.2.2 FISTA

Suite à la proposition de l'algorithme ISTA plusieurs travaux ont été menés afin d'améliorer la vitesse de convergence de cet algorithme. En 2007, José M. Bioucas-Dias et Mário A. T. Figueiredo ont proposé, dans le cadre d'une application de débruitage d'image, un algorithme appelé *Two-Step Iterative Shrinkage Thresholding* (TwIST) [53] dont l'idée était de reprendre l'algorithme ISTA et d'utiliser non pas la dernière itération pour calculer l'itération suivante, mais les deux dernières itérations (pour les problèmes très mal conditionnés, une version monotone appelée MTWIST a été aussi proposée). Cette technique permet d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme ISTA. Quelques années plus tard deux propositions d'algorithmes assez similaires, nommés NESTA (Nesterov's Algorithm) [54] et FISTA (Fast Iterative Shrinkage Threshold Algorithm) [52] vont être étudiées. Ces deux algorithmes sont basés sur des travaux de Nesterov établis en 1983 permettant d'accélérer la convergence en terme de fonction coût en  $\mathcal{O}(1/k^2)$  (voir Eq.2.118) dans le cas d'un problème de minimisation strictement convexe [55]. Leurs principales différences résident dans le fait que FISTA se limite aux problèmes de régularisation  $L1$  et n'utilise que les deux dernières itérations pour estimer la suivante, alors que NESTA est un algorithme qui reste plus général. Dans un sens FISTA est une version simplifiée de NESTA. Nous nous concentrons dans cette thèse sur l'algorithme FISTA.

L'algorithme FISTA répond au schéma itératif suivant,

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{S}_{\lambda\tau}(\boldsymbol{\nu}_k + \lambda \mathbf{H}^T(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_k)) \quad (2.115)$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (2.116)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}}\right)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \quad (2.117)$$

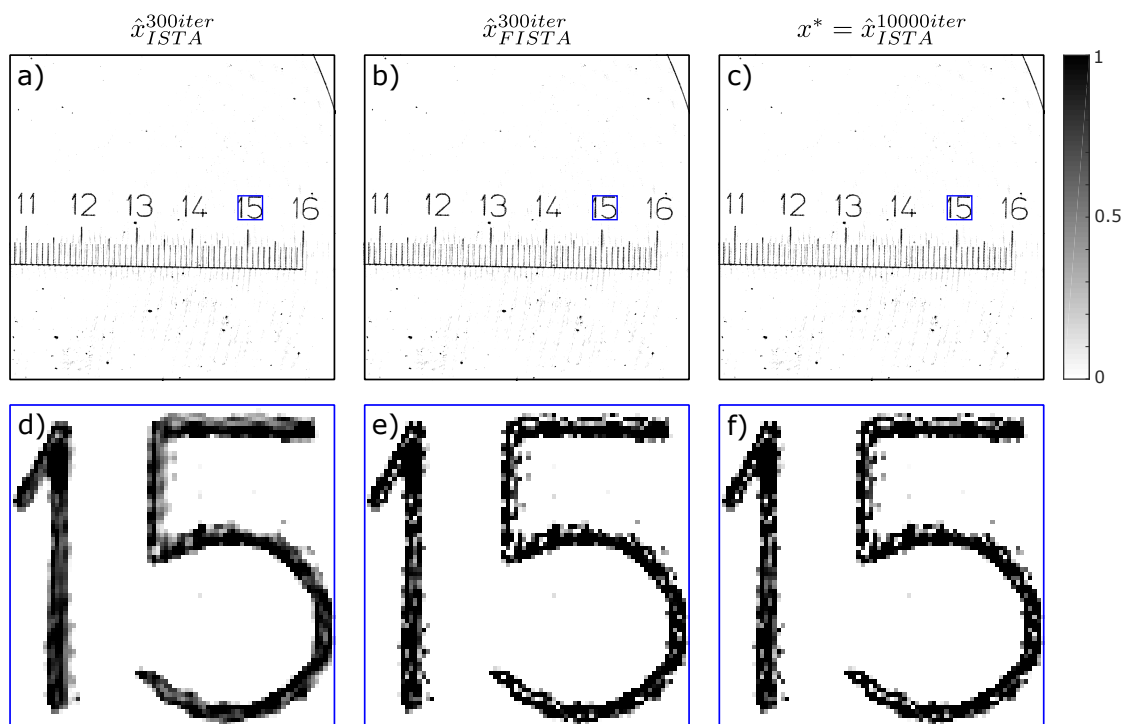
La différence avec l'algorithme ISTA vient du fait que le seuillage doux  $\mathcal{S}_{\lambda\tau}$  n'est pas appliqué seulement sur le précédent point  $\mathbf{x}_{k-1}$  mais sur  $\mathbf{y}_k$  qui est une combinaison des points  $\{\mathbf{x}_{k-2}, \mathbf{x}_{k-1}\}$ . La convergence de l'algorithme FISTA à l'itération  $k$  est [52],

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) \leq \frac{2L(f)\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2}{(k+1)^2} \quad (2.118)$$

Pour les problèmes de grande dimension le temps de calcul le plus conséquent est souvent le calcul du gradient  $\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\nu^k - \mathbf{y})$ , le temps de calcul d'une itération de ISTA est donc similaire à celle de FISTA. La convergence de FISTA étant de  $O(\frac{1}{k^2})$  contre  $O(\frac{1}{k})$  pour ISTA, la vitesse en temps de calcul sera donc grandement améliorée, d'où l'intérêt d'utiliser l'algorithme FISTA plutôt que ISTA.

### 2.6.2.3 Comparaison des algorithmes ISTA, FISTA et VMLM-B

Pour traiter les problèmes inverses avec contrainte de parcimonie nous devons donc théoriquement préférer l'algorithme FISTA à l'algorithme ISTA. Maintenant vérifions qu'en holographie numérique en ligne ces deux algorithmes convergent vers la même solution. Pour cela prenons une référence  $\mathbf{x}^*$  qui correspond à la reconstruction par l'algorithme ISTA avec 10 000 itérations. Nous la comparons dans un premier temps qualitativement avec une reconstruction obtenue avec l'algorithme FISTA qui a réalisé 300 itérations et une reconstruction avec l'algorithme ISTA après 300 itérations (Fig.2.13). Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.13, la reconstruction obtenue avec 300 itérations de l'algorithme FISTA est similaire à la reconstruction obtenue avec 10 000 itérations de l'algorithme ISTA. Pour confirmer l'intérêt en terme de vitesse de convergence de l'algorithme FISTA nous montrons la reconstruction obtenue après 300 itérations de l'algorithme ISTA. Nous pouvons constater que l'algorithme ISTA n'a pas convergé en terme d'itérés après ces 300 itérations. Cette tendance est confirmée par la figure 2.14 qui illustre l'écart quadratique moyen entre les reconstructions courantes des algorithmes ISTA et FISTA et la reconstruction "référence" obtenue par l'algorithme ISTA après 10 000 itérations. Cette illustration permet de comparer la convergence des itérées de ces deux algorithmes. En revanche la courbe de la figure 2.15.(a) nous montre que l'algorithme FISTA nous permet d'atteindre bien plus rapidement cette reconstruction "référence" que l'algorithme ISTA alors que cette référence a pourtant été obtenue avec l'algorithme ISTA. Cela montre que l'algorithme FISTA permet de converger plus rapidement que l'algorithme ISTA. La figure 2.15.b nous montre que l'algorithme FISTA permet d'obtenir aux alentours de 300 itérations une solution plus optimale que la solution que nous avons prise comme référence  $\mathbf{x}^*$  et qui a été obtenue avec 10 000 itérations de l'algorithme ISTA. Cela confirme bien



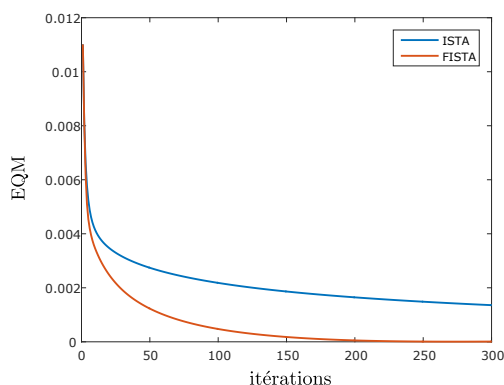
**FIGURE 2.13** – Comparaison des reconstructions obtenues avec les algorithmes ISTA et FISTA : a) Reconstruction obtenue par l’algorithme ISTA avec 300 itérations et son zoom d), b) Reconstruction obtenue par l’algorithme FISTA avec 300 itérations et son zoom e), c) Reconstruction "référence" obtenue par l’algorithme ISTA avec 10 000 itérations et son zoom f)

d’un point de vue pratique, l’intérêt d’utiliser l’algorithme FISTA plutôt que l’algorithme ISTA pour avoir une meilleure vitesse de convergence, et donc avoir de meilleurs temps de calcul. La figure 2.15.b nous montre aussi la non-monotonie de l’algorithme FISTA, notons qu’une version monotone de FISTA nomm e MFISTA a été propos e dans [38]. Notons qu’une discussion plus d taill e sur les différences de ces trois algorithmes (NESTA, ISTA, FISTA) ainsi qu’avec l’algorithme implicite-explicite [56] (dont ISTA est un cas particulier) est propos e dans la thèse de Nelly Pustelnik [57].

Enfin, nous comparons les algorithmes ISTA et FISTA avec l’algorithme d’optimisation de type quasi-Newton à mémoire limit e VMLM-B [47] qui sera largement utilisé dans cette thèse. Nous présentons dans la figure 2.16 une comparaison entre la vitesse de convergence de ces trois algorithmes en fonction du temps de calcul (sur un processeur Intel Core i7-3630QM (2,40 GHz)). Ces trois courbes nous montrent que tant que l’approximation de l’inverse de la Hessienne n’a pas été r alis e (nous utilisons dans ce cas précis 5 itérations pour l’approximer) l’algorithme VMLM-B est moins performant mais qu’une fois que cette première partie est r alis e VMLM-B converge plus rapidement que FISTA qui lui même converge plus

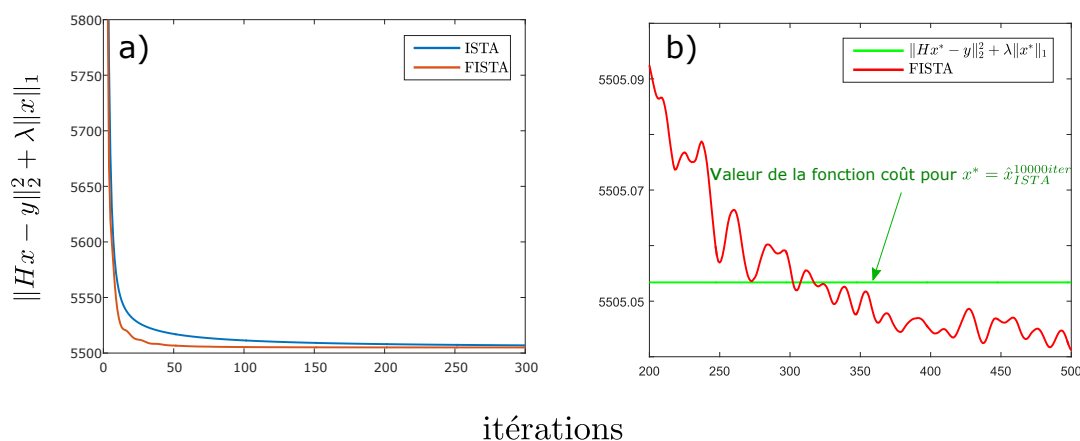


EQM entre la reconstruction courante et la reconstruction "référence"  $x^*$



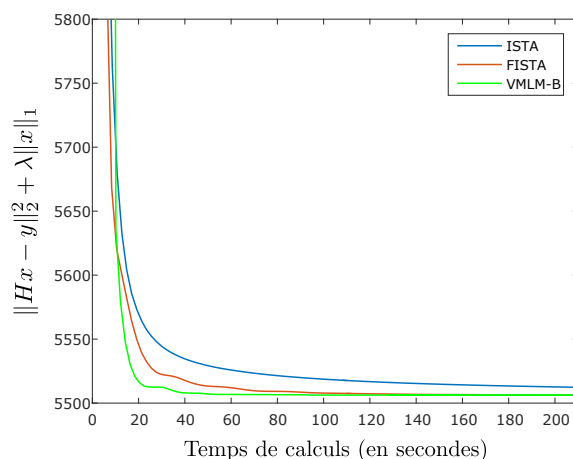
**FIGURE 2.14** – Comparaison de la convergence des itérées des algorithmes ISTA et FISTA : la **courbe bleue** représente l'écart quadratique moyen entre la reconstruction référence  $x^*$  et la reconstruction courante avec l'algorithme ISTA en fonction des itérations, la **courbe rouge** représente l'écart quadratique moyen entre la reconstruction "référence"  $x^*$  ( $x^*$  est l'estimation de  $x$  après 10 000 itération de ISTA) et la reconstruction courante avec l'algorithme FISTA en fonction des itérations.

### Fonctions coût en fonction des itérations



**FIGURE 2.15** – Évolution de la fonction coût  $\|Hx - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$  au cours des itérations des algorithmes ISTA et FISTA : a) Comparaison de l'évolution de la fonction coût avec ISTA et FISTA au cours des itérations, b) zoom sur l'évolution de la fonction coût de FISTA entre la 200ième et la 500ième itérations comparée à la valeur de la fonction coût pour la reconstruction "référence"  $x^* = \hat{x}_{ISTA}^{10000iter}$ .

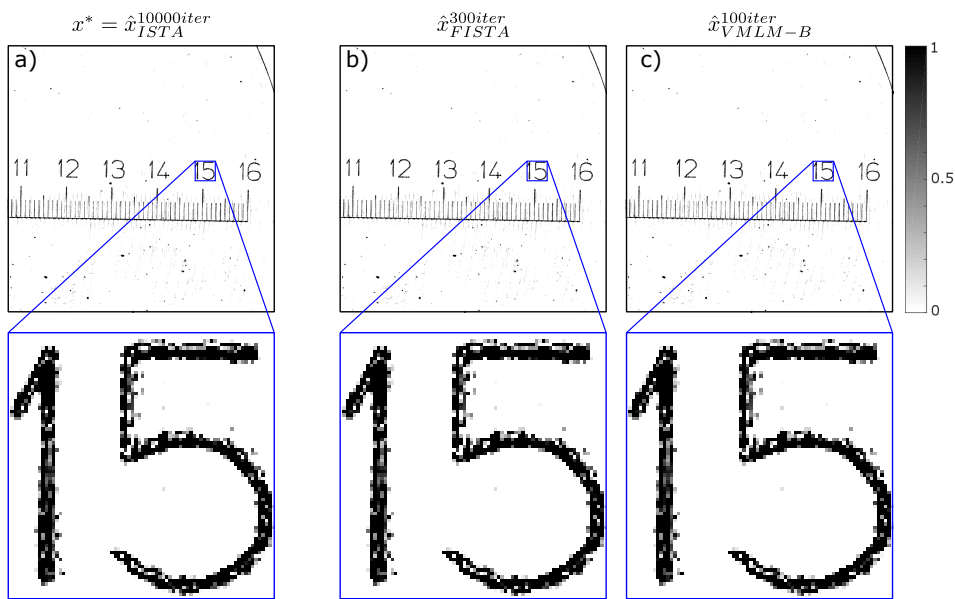
rapidement que ISTA. Notons que réaliser cette comparaison en fonction des itérations aurait été rendue difficile par le fait qu'une itération de VMLM-B demande plus de calculs (l'étape de recherche linéaire peut par exemple nécessiter plusieurs évaluations de la fonction de coût) qu'une itération de ISTA ou FISTA. La figure 2.17 montre quant à elle que les trois algorithmes ISTA, FISTA, et VMLM-B



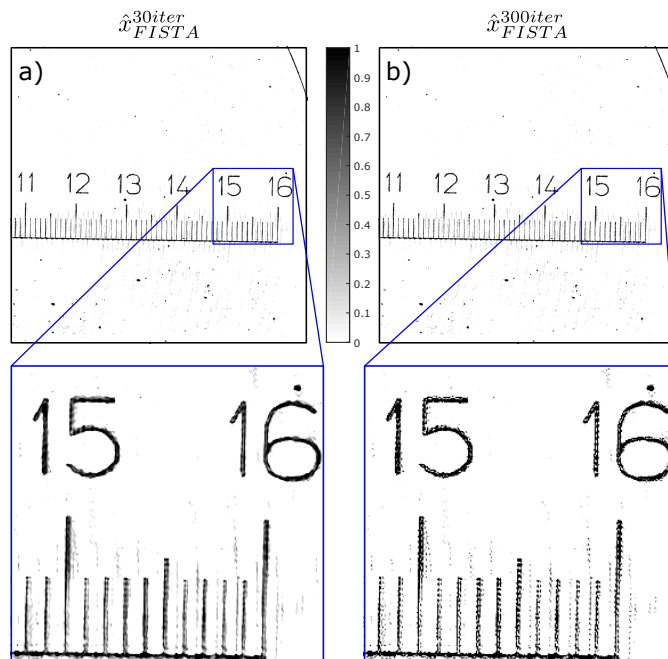
**FIGURE 2.16** – Évolution de la fonction coût  $\|H\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1$  en fonction du temps de calculs (sur le processeur Intel Core i7-3630QM (2,40 GHz)) des algorithmes ISTA, FISTA, et VMLM-B : la courbe rouge représente cette évolution pour l’algorithme ISTA, la courbe bleue celle de l’algorithme FISTA, et enfin la courbe verte représente celle de l’algorithme VMLM-B

convergent vers la même solution. Ces trois algorithmes pourront alors être utilisés de la même manière. Dans le chapitre 3, nous avons privilégié l’algorithme FISTA pour sa facilité d’implémentation et pour permettre de mieux expliquer le problème d’optimisation. En revanche, que ce soit pour des raisons de temps de calcul, pour ses propriétés de convergence meilleures que les algorithmes de gradients, et le fait qu’il peut résoudre des problèmes d’optimisation non-linéaire nous favoriserons et préconisons l’utilisation de l’algorithme VMLM-B. Cet algorithme, ne demandant que l’expression de la fonction coût et de son gradient, va permettre notamment de résoudre des approches inverses utilisant plusieurs termes de régularisation.

Pour finir, nous discuterons de l’effet de la contrainte de parcimonie sur les structures reconstruites. Si d’un point de vue optimisation il est rigoureux de faire converger ces algorithmes, d’un point de vue qualité de reconstruction il n’est pas toujours nécessaire de faire converger ces algorithmes afin de maximiser la qualité de reconstruction de l’objet reconstruit (Fig.2.18). En effet, si l’objet n’est pas aussi parcimonieux que la contrainte de parcimonie le voudrait, la solution optimale d’un point de vue de la convergence présente des structures "creusées" qui ne sont pas souhaitables en terme de qualité de reconstruction (Fig.2.18.(d)). Nous pouvons donc nous demander si dans certains cas, il n’est pas préférable de ne pas pousser les itérations jusqu’à convergence. La figure 2.18 illustre ce problème avec une reconstruction après 300 itérations (Fig.2.18.(b).(d)) qui présente des objets creusés, alors que cet effet est moins présent dans la reconstruction obtenue après 30 itérations (Fig.2.18.(a).(c)).



**FIGURE 2.17** – Comparaison des reconstructions obtenues à convergence avec les algorithmes ISTA, FISTA et VMLM-B : a) Reconstruction obtenue par l’algorithme ISTA avec 10 000 itérations, b) Reconstruction obtenue par l’algorithme FISTA avec 300 itérations, c) Reconstruction obtenue par l’algorithme VMLM-B avec 100 itérations.



**FIGURE 2.18** – Effets de la contraintes de parcimonie : Reconstructions obtenues a) par l’algorithme FISTA après 30 itérations, b) par l’algorithme FISTA après 300 itérations.

### 2.6.3 ADMM

L'algorithme ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) [58] est un mélange de la décomposition duale et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Considérons tout d'abord le problème général linéaire sous contrainte d'égalité suivant,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.c} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (2.119)$$

avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

Le lagrangien du problème (Eq.2.119) s'écrit

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \quad (2.120)$$

et la fonction duale est

$$g(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.121)$$

où  $\mathbf{y}$  est la variable duale (aussi appelé multiplicateur de Lagrange). Le problème dual du problème (Eq.2.119) peut s'écrire,

$$\max_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y}) \quad (2.122)$$

avec  $g(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m$ . Cette maximisation peut être résolue à l'aide du schéma d'optimisation alternée suivant [58],

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) \quad (2.123)$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \alpha^k (\mathbf{Ax}^{k+1} - \mathbf{b}) \quad (2.124)$$

où  $\alpha^k > 0$  est une taille de pas à l'itération  $k$ .

De leur côté les méthodes de lagrangien augmenté ont été développées pour apporter de la robustesse à cette méthode "dual ascent" limitée à la stricte convexité de la fonction  $f$ . Le lagrangien augmenté du problème (Eq.2.119) est défini par [58],

$$L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + (\rho/2) \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (2.125)$$

où  $\rho > 0$  est un paramètre de pénalisation. Notons qu'il faudra bien dissocier dans la résolution des problèmes inverses, les paramètres de régularisation propres à

l'approche inverse et le paramètre de pénalisation  $\rho$  propre à la méthode d'optimisation. Le lagrangien augmenté peut être vu comme un simple lagrangien associé au problème

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) + (\rho/2)\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ \text{s.c} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.126)$$

Ce problème est clairement équivalent au problème (Eq.2.119) puisque  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  et donc on a  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 = 0$ . La méthode des multiplicateurs de Lagrange propose de résoudre le problème (Eq.2.119) en minimisant de manière alternée le lagrangien augmenté (Eq.2.125),

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) \quad (2.127)$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \rho(\mathbf{Ax}^{k+1} - \mathbf{b}) \quad (2.128)$$

De son côté l'algorithme ADMM [58] propose résoudre les problèmes de type éclatement des variables (variable splitting) suivants,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s.c} & \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} = \mathbf{c} \end{cases} \quad (2.129)$$

avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  et  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ . Les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions supposées convexes. La principale différence avec le problème général (Eq.2.119) consiste à éclater la variable  $\mathbf{x}$  en deux variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$ . Comme dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous établissons le lagrangien augmenté du problème (Eq.2.129) de la manière suivante,

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}) + (\rho/2)\|\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}\|_2^2 \quad (2.130)$$

L'algorithme ADMM consiste alors à résoudre le problème de minimisation (Eq.2.129) de façon alternée,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k) \quad (2.131)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} L_\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}, \mathbf{y}^k) \quad (2.132)$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \rho(\mathbf{Ax}^{k+1} + \mathbf{Bz}^{k+1} - \mathbf{c}) \quad (2.133)$$

L'algorithme peut aussi être écrit sous une forme un peu différente par combinaison des termes linéaires et quadratiques dans le lagrangien augmenté et normalisation de la variable duale  $\mathbf{u}$ . En définissant le résidu  $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}$ , nous avons

$$\mathbf{y}^T \mathbf{r} + (\rho/2)\|\mathbf{r}\|_2^2 = (\rho/2)\|\mathbf{r} + (1/\rho)\mathbf{y}\|_2^2 - (1/2\rho)\|\mathbf{y}\|_2^2 \quad (2.134)$$

$$= (\rho/2)\|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|_2^2 - (\rho/2)\|\mathbf{u}\|_2^2 \quad (2.135)$$

où  $u = (1/\rho)y$  est le dual variable normalisé. L'algorithme ADMM peut alors s'écrire à l'aide de ce dual variable de la manière suivante,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \quad \left( f(\mathbf{x}) + (\rho/2) \|\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz}^k - \mathbf{c} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.136)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \quad \left( g(\mathbf{z}) + (\rho/2) \|\mathbf{Ax}^{k+1} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.137)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathbf{Ax}^{k+1} + \mathbf{Bz}^{k+1} - \mathbf{c}. \quad (2.138)$$

Cette version normalisée d'ADMM (Eq.2.138) est clairement équivalente à la version non normalisée (Eq.2.133), mais nous préférons la version normalisée pour son implémentation souvent plus courte.

## 2.6.4 ALBHO

En problème inverse il n'est pas rare que l'on ait à minimiser une fonction qui soit elle-même une somme de fonctions convexe mais pas toujours différentiables (typiquement régularisation de type  $L1...$ ). On utilise alors un éclatement de la variable  $\mathbf{x}$  en deux variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  pour résoudre un problème de la forme,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Omega} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s.c} & \mathbf{x} - \mathbf{z} = 0 \end{cases} \quad (2.139)$$

avec  $f$  une fonction convexe et différentiable, et  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe mais pas forcément différentiable. Notons que ce problème est un cas particulier du problème (Eq.2.129) (avec  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B} = -\mathbf{I}$  et  $\mathbf{c} = 0$ ).

Si l'algorithme ADMM normalisé (Eq.2.138) propose de le résoudre de la manière suivante,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( f(\mathbf{x}) + (\rho/2) \|\mathbf{x} - \mathbf{z}^k + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.140)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \left( g(\mathbf{z}) + (\rho/2) \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.141)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}, \quad (2.142)$$

l'algorithme ALBHO (Augmented Lagrangian By Hierarchical Optimization) [59] propose de son côté de résoudre 2.139 de manière hiérarchique,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}^*(\mathbf{x})) + (\rho/2) \|\mathbf{x} - \mathbf{z}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.143)$$

avec,

$$\mathbf{z}^*(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \left( g(\mathbf{z}) + (\rho/2) \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \right) \quad (2.144)$$

et la mise à jour de la variable duale,

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^*(\mathbf{x}^{k+1}) \quad (2.145)$$

Ce dernier algorithme permet d'obtenir en pratique de meilleures vitesses de convergence que l'algorithme ADMM, ainsi qu'un réglage beaucoup plus facile du paramètre  $\rho$  [59].

## 2.7 Conclusion

En conclusion, ce chapitre aborde l'ensemble des outils physiques, numériques et mathématiques qui sont nécessaires pour traiter la problématique de la reconstruction en holographie numérique en ligne comme un problème inverse. Y sont dès lors exposées la physique de la diffraction et la physique du capteur numérique (engendrant une discrétisation) qui permettent d'établir des modèles de formation d'hologrammes qui sont plus ou moins complexes selon l'objet reconstruit. Les approches « problèmes inverses » traitées dans cette thèse étant des méthodes qui introduisent des termes de régularisation, sont décrits plusieurs types de régularisations vus sous deux points de vue : un premier statistique et un second plus orienté méthodes variationnelles. Ce chapitre se termine par les outils d'optimisation en grande dimension et d'optimisation non-lisse. Les diverses notions essentielles aux approches « problèmes inverses » régularisées étant maintenant clairement définies, nous allons aborder les différentes contributions de cette thèse.

## Chapitre 3

# Super-résolution d'hologrammes en ligne par une méthode "problème inverse" régularisée

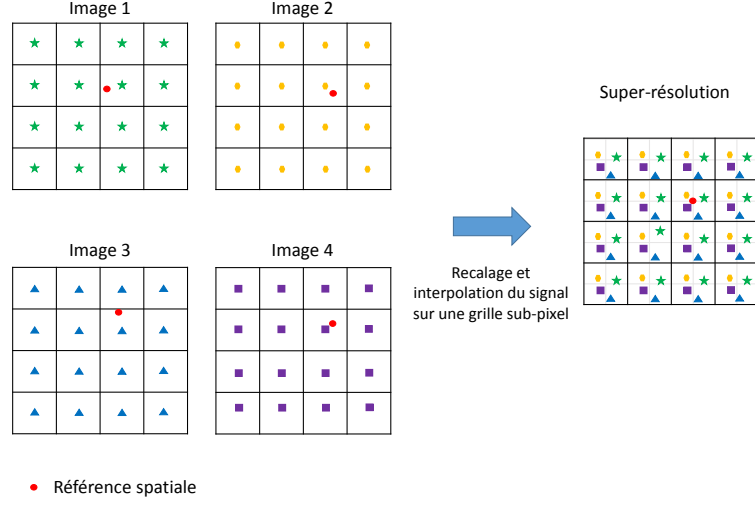
*Ce chapitre a pour but de présenter une approche « problèmes inverses » permettant une reconstruction super-résolue à l'aide d'une pile d'hologrammes translattés les uns par rapport aux autres. Nous discuterons des clés de cette approche « problèmes inverses » que sont l'introduction d'une régularisation de type « contrainte de parcimonie » et la réalisation d'un recalage le plus précis possible. L'approche présentée est comparée, à l'aide de simulations et de données expérimentales, à des approches "état de l'art", ainsi qu'à une reconstruction par approche inverse à l'aide d'un hologramme super-résolu. Une variante de cette approche est ensuite proposée afin d'élargir le champ d'application de celle-ci. Notons que ce chapitre est basé en partie sur l'article [60].*

### 3.1 Introduction et état de l'art

La super-résolution numérique est une technique assez courante en reconstruction d'images [61, 62]. L'idée est d'utiliser une pile d'images sous-résolues acquises avec des décalages transversaux aléatoires, afin de reconstruire une image super-résolue (Fig.3.1). Cette technique permet donc d'obtenir une image super-résolue sur une grille de pixels sur-échantillonnée. Elle permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage, et ainsi de réduire les artefacts d'échantillonnage tels que les effets d'aliasing (crénelage et Moiré) (Fig.3.2).

Le deuxième intérêt que peut comporter la super-résolution à l'aide d'une pile





**FIGURE 3.1** – Principe de la super-résolution

d'images réside dans le fait que le bruit de mesure de chaque "pixel" étant supposé blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ , cette variance va être divisée  $\sigma$  par  $1/N_{pile}$  lorsque l'on exploitera dans la pile, l'information des  $N_{pile}$  mesures associées à chaque pixel. En effet d'un point de vue statistique [64], le moyennage de l'intensité d'un même "pixel"  $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{N_{pile}}\}$ , nous amène pour chaque pile à un nouvel estimateur  $\hat{\theta}$  tel que

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N_{pile}} \sum_{i=1}^{N_{pile}} \hat{\theta}_i \quad (3.1)$$

En supposant que  $\hat{\theta}_i$  sont des estimateurs non-biaisés, indépendants et de même variance, on a donc

$$var(\hat{\theta}) = \frac{var(\hat{\theta}_1)}{N_{pile}} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\sigma_{\hat{\theta}_1}^2}{N_{pile}} \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma_{\hat{\theta}_1}}{\sqrt{N_{pile}}} \quad (3.4)$$

L'écart-type  $\sigma$  de l'estimation diminue proportionnellement à  $\frac{1}{\sqrt{N_{pile}}}$ , ce qui offrira une meilleure estimation du "pixel" (Fig.3.3). L'utilisation de la redondance d'informations a déjà fait l'objet d'une étude dans le cas d'objets paramétriques [7]. Cette approche inverse propose une super-estimation des paramètres  $(x, y, z, r)$

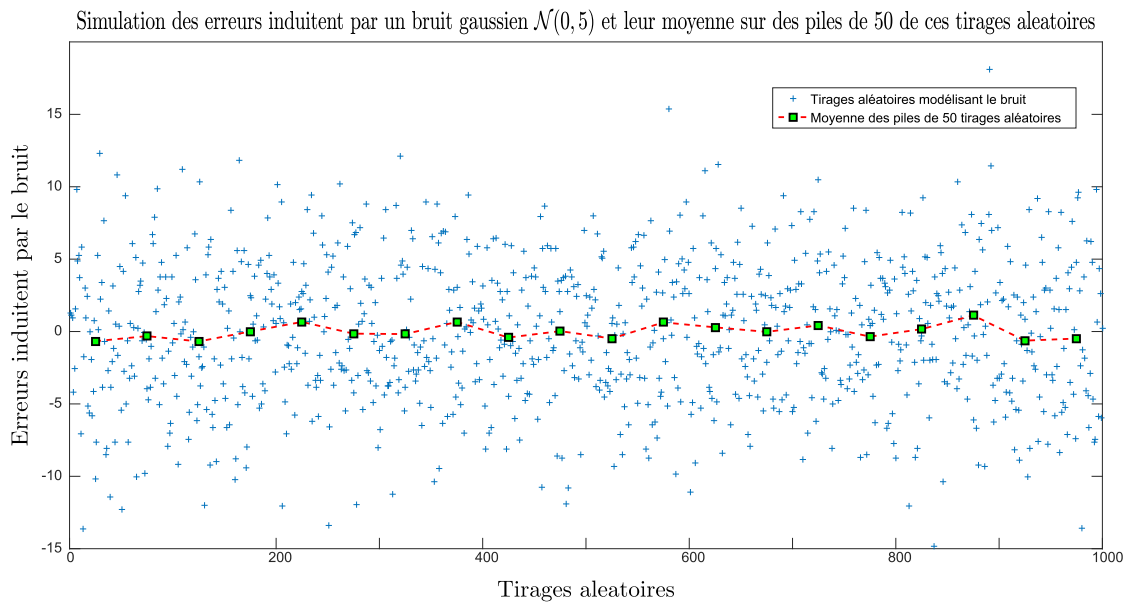


(a) Image Sous-résolue



(b) Image super-résolue

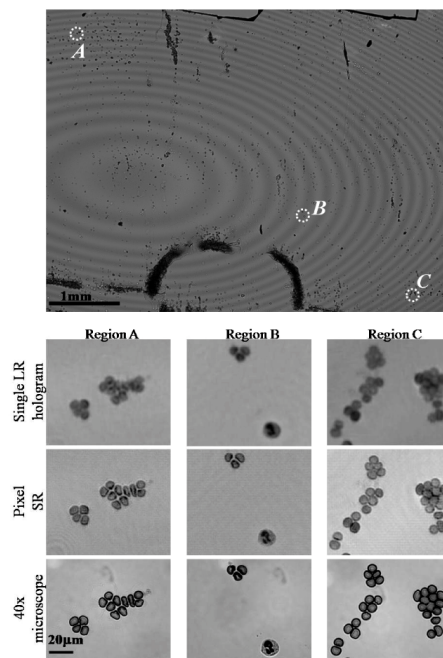
**FIGURE 3.2** – Effets d'aliasing : Illustration extraite du papier [63]



**FIGURE 3.3** – Effet de l'utilisation d'une pile de mesures bruitées

d'un objet par le calcul d'un maximum de vraisemblance entre une pile d'hologrammes décalés transversalement les uns par rapport aux autres et un modèle de formation d'hologramme paramétrique. L'utilisation d'un modèle paramétrique contraint fortement le problème.

Par ailleurs, le papier [65] utilise aussi cette idée de super-résolution à l'aide d'une pile d'hologrammes, en reconstruisant un hologramme super-résolu pour des objets quelconques. Cette super-résolution se fait à l'aide d'une méthode de régularisation de type Tikhonov dans l'espace hologramme permettant de lisser les hautes fréquences de la reconstruction de l'hologramme super-résolu. Les déplacements transversaux utilisés dans cette méthode sont estimés de manière indépendante à l'aide d'une technique de *Maximum A Posteriori*. Au final cette technique permet d'obtenir un hologramme mieux résolu spatialement et de meilleur rapport signal sur bruit que les hologrammes sous-résolus, tout en gardant l'intérêt du grand champ offert par l'holographie numérique en ligne (Fig.3.4).



**FIGURE 3.4** – Retro-propagation à l'aide d'un hologramme super-résolu et comparaison avec des images acquises avec un microscope x40. Illustration extraite du papier [65]

D'un autre côté les travaux [8] ont démontré tout l'intérêt d'utiliser une approche inverse avec une contrainte de parcimonie pour la reconstruction d'un hologramme numérique acquis en ligne. Cette technique permet de reconstruire l'opacité d'objets non paramétriques supposés parcimonieux que l'on notera  $\vartheta$ . L'objet est donc représenté par un plan d'opacité de valeurs réelles. Le principe de cette méthode est d'utiliser un modèle de formation d'hologramme linéaire valable pour les objets

parcimonieux et opaques. Cette méthode propose de formuler le problème inverse de la manière suivante,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \underset{\boldsymbol{\vartheta}, c}{\operatorname{argmin}} \quad 1/2\|c\mathbf{1} - \mathbf{H}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{d}\|_2^2 + \tau\|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 \quad (3.5)$$

où  $c$  est un coefficient multiplicateur à estimer,  $\mathbf{H}$  la matrice modélisant la propagation,  $\boldsymbol{\vartheta}$  le plan 2D d'opacité inconnue, et  $\mathbf{d}$  l'hologramme acquis. Le coefficient optimal  $\hat{c}$  résout donc le problème suivant,

$$\hat{c} = \underset{c}{\operatorname{argmin}} \quad 1/2\|c\mathbf{1} - \mathbf{H}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (3.6)$$

La dérivée de la fonctionnelle s'annulant en  $\hat{c}$ , nous avons donc

$$\mathbf{1}^t(\hat{c}\mathbf{1} - \mathbf{H}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{d}) = 0. \quad (3.7)$$

$\hat{c}$  a donc l'expression analytique suivante,

$$\hat{c} = \frac{\mathbf{1}^t\mathbf{H}\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{1}^t\mathbf{d}}{\mathbf{1}^t\mathbf{1}}. \quad (3.8)$$

En posant,

$$\overline{\mathbf{H}} = -\mathbf{H} + \mathbf{1}\frac{\mathbf{1}^t}{\mathbf{1}^t\mathbf{1}}\mathbf{H} \quad (3.9)$$

et,

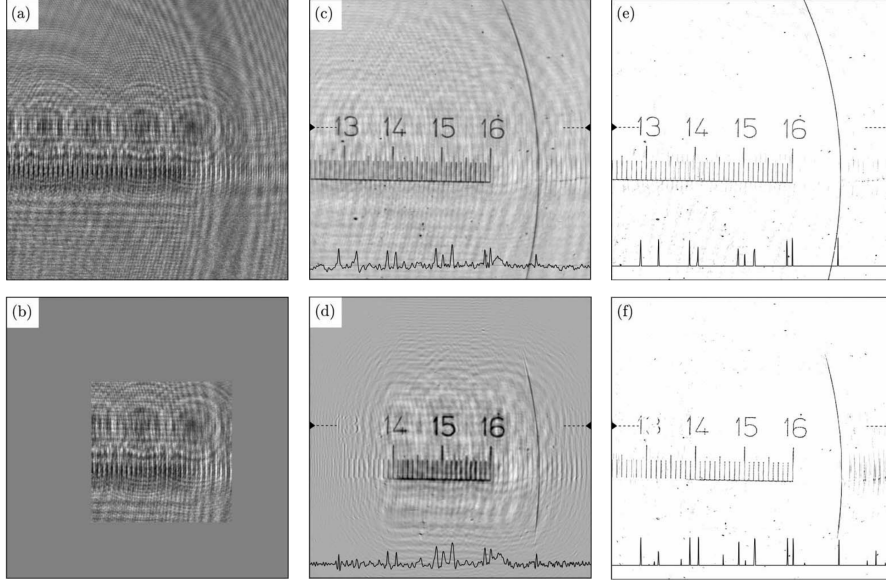
$$\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \mathbf{1}\frac{\mathbf{1}^t}{\mathbf{1}^t\mathbf{1}}\mathbf{d} \quad (3.10)$$

La formulation du problème inverse (Eq.3.5) peut donc se réécrire en fonction de la seule inconnue  $\boldsymbol{\vartheta}$ ,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \underset{\boldsymbol{\vartheta}}{\operatorname{argmin}} \quad 1/2\|\overline{\mathbf{H}}\boldsymbol{\vartheta} - \overline{\mathbf{d}}\|_2^2 + \tau\|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 \quad (3.11)$$

Ce papier [8] démontre l'intérêt de cette approche inverse qui permet de réduire plusieurs artefacts présents dans la rétro-propagation classique, tels que la suppression des images jumelles, la propagation du bruit capteur présent dans l'hologramme, et enfin la suppression de la troncature en bord de champ lorsque l'on souhaite faire des reconstructions hors du champ.

Nous avons donc, dans le cadre de cette thèse, proposé une approche inverse permettant de faire une reconstruction super-résolue avec une contrainte de parcimonie, à l'aide d'hologrammes sous-résolus et translattés les uns par rapport aux autres dans un plan 2D.



**FIGURE 3.5** – Reconstruction d’hologramme par approche inverse avec contrainte de parcimonie [8]

## 3.2 Méthode proposée

### 3.2.1 Modèle de formation d’image

Le modèle de formation d’hologrammes proposé dans cette méthode de super-résolution par approche inverse est un modèle s’appuyant sur le modèle de formation explicité dans [8], mais adapté à une pile d’hologrammes acquis avec des déplacements transversaux aléatoires dans un plan 2D les uns par rapport aux autres. Contrairement à l’article [65] qui propose de traiter cette pile d’hologrammes pour obtenir un hologramme super-résolu, nous proposons ici une reconstruction super-résolue dans l’espace objet à l’aide d’un modèle de formation d’hologrammes adapté. Comme dans l’article [8] nous considérons un objet opaque et parcimonieux, ainsi qu’un modèle linéaire. L’intensité du  $i$ -ème hologramme de cette pile décalé transversalement de  $\Delta^j = (\Delta x^j, \Delta y^j)$  est donc exprimée de la façon suivante,

$$I^j(x_p, y_p) \propto 1 - \vartheta * h_{z, \Delta^j}^{\Pi} \quad (3.12)$$

avec,

$$h_{z, \Delta^j}^{\Pi} = 2 \cdot \Re \{ h_z \} * \Pi * \delta_{\Delta^j} \quad (3.13)$$

où les notations explicitées en (Eq.2.3.1.2).

Nous utilisons une notation matricielle qui simplifiera les expressions mathéma-

tiques, notamment pour la partie d'optimisation utile à la résolution du problème inverse. La convolution de  $h_{z,\Delta^j}^{\Pi}$  avec la plan d'opacité  $\boldsymbol{\vartheta}$  peut être écrite sous forme matricielle comme  $\mathbf{H}_{\Delta^j}\boldsymbol{\vartheta}$ , avec  $\mathbf{H}_{\Delta^j}$  l'opérateur linéaire modélisant les poids de la convolution du noyau  $h_{z,\Delta^j}^{\Pi}$  avec  $\boldsymbol{\vartheta}$  le vecteur colonne représentant l'opacité discrétisée de l'objet à reconstruire. Le modèle de formation du  $j$ -ème hologramme peut alors s'écrire de la façon suivante,

$$\mathbf{m}^j = c^j \mathbf{1} - \mathbf{H}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.14)$$

où  $c^j$  est un coefficient multiplicateur à estimer,  $\mathbf{1}$  est un vecteur de la taille de  $\boldsymbol{\vartheta}$  et dont les éléments valent 1. Notons que dans les faits nous pré-traitons les hologrammes en réalisant une division par le fond de l'hologramme, à l'aide d'un hologramme de fond acquis sans l'objet, le facteur de proportionnalité de l'équation (Eq.3.12) doit alors valoir 1. En revanche afin de traiter des données centrées  $\overline{\mathbf{d}}^j$  dont l'expression est décrite en (Eq.3.10), nous appliquons quand même la méthode de normalisation du modèle comme proposé dans l'article [8] et décrit en (Eq.3.9). On a donc le modèle centré  $\overline{\mathbf{m}}^j$  suivant,

$$\overline{\mathbf{m}}^j = \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.15)$$

avec  $\overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} = -\mathbf{H}_{\Delta^j} + \mathbf{1} \frac{\mathbf{1}^t}{\mathbf{1}^t \mathbf{1}} \mathbf{H}_{\Delta^j}$ .

L'échantillonnage du modèle étant donné par l'échantillonnage du plan d'opacité 2D, nous proposons un modèle de formation d'hologramme permettant de reconstruire une distribution d'opacité super-résolue  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$ . Le  $j$ -ième hologramme sera donc décrit par le modèle de formation d'hologramme super-résolu  $\overline{\mathbf{m}}^{j,SR}$  suivant,

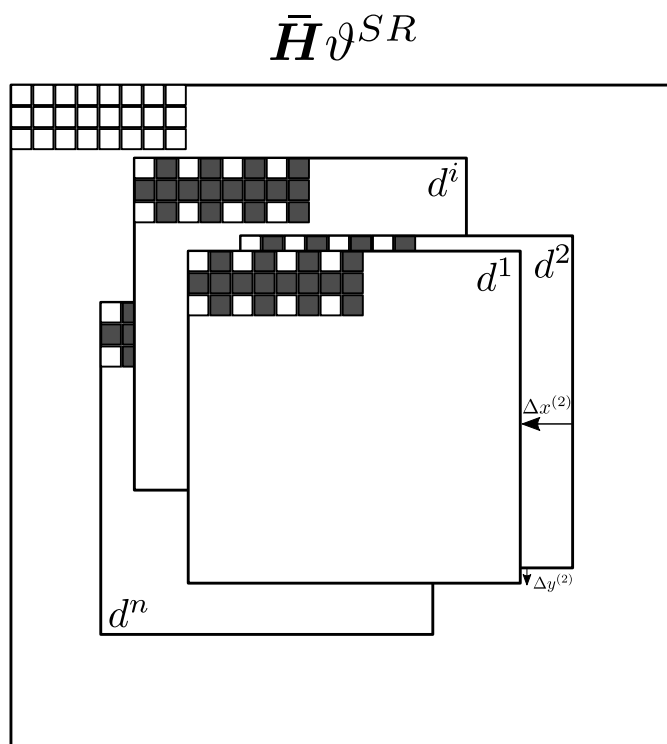
$$\overline{\mathbf{m}}^{j,SR} = \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta}^{SR}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Formulation du problème inverse

L'opacité super-résolue doit permettre de modéliser les  $N_{pile}$  hologrammes mesurés. Pour cela nous avons un terme d'attache aux données  $\mathcal{D}$  défini sous forme d'un terme de vraisemblance. Cette attache aux données est définie comme une somme des fonctions opposée à la log-vraisemblance entre le modèle de formation d'hologramme super-résolu et chaque hologramme de la pile tout en supposant un bruit blanc gaussien. Elle est alors défini de la manière suivante,

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\vartheta}, \{\Delta^{j=1,\dots,N_{pile}}\}) = \frac{1}{N_{pile}} \sum_{j=1}^{N_{pile}} \left\| \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta}^{SR} - \overline{\mathbf{d}}^{j,SR} \right\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (3.17)$$

où,



**FIGURE 3.6** – Illustration du modèle de formation d’hogrammes super-résolu  $\bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$  (facteur de super-résolution égale à 2) obtenu à partir d’hogrammes sous-résolus.

- $\mathbf{W}$  est la matrice inverse de la covariance du bruit (diagonale puisque le bruit est supposé blanc) [5, 66],
- $\bar{\mathbf{d}}^{j,SR}$  sont les hologrammes acquis avec un échantillonnage égal à celui du capteur replacés dans la grille sub-pixelle de l’opacité super-résolue  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$ . En pratique les pixels manquants dans l’échantillonnage super-résolu sont mis à 0 (voir la figure 3.6 pour le cas d’un facteur de super-résolution égale à 2).

Comme nous sommes dans une approche non-paramétrique, nous avons donc un modèle de formation d’image d’hogramme peu contraint et un très grand nombre de variables à estimer. Nous faisons donc face à un problème mal posé et mal-conditionné (non unicité de la solution). C’est pourquoi il est important d’introduire des *a priori* sur la distribution d’opacité super-résolue  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$  à l’aide de termes de régularisation notés  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR})$ . L’approche problème inverse proposée vise à minimiser la fonction coût suivante,

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \{\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}\}) = \mathcal{D}(\boldsymbol{\vartheta}, \{\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}\}) + \tau \mathcal{R}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}) \quad (3.18)$$

où  $\tau$  est le coefficient de régularisation décrit dans le chapitre 2. Le dernier *a priori* que nous pouvons introduire dans la formulation du problème inverse est une contrainte de bornes sur l'opacité. En effet l'opacité doit être comprise entre 0 (transparent) et 1 (complètement opaque). La formulation du problème inverse pour la reconstruction d'hologramme s'écrit donc,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{SR} = \operatorname{argmin}_{0 \leq \boldsymbol{\vartheta}^{SR} \leq 1} \left\{ \min_{\Delta^j} \mathcal{C}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \{\Delta^j\}) \right\} \quad (3.19)$$

La méthode sera présentée avec une régularisation  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}) = \|\boldsymbol{\vartheta}^{SR}\|_1$  qui est une contrainte de parcimonie, car l'approximation linéaire du modèle de formation d'hologramme est particulièrement bien adaptée pour des objets parcimonieux. Nous montrerons quelques exemples reconstructions avec d'autres régularisations dans la partie 3.6.

### 3.3 Optimisation Alternée

Ce problème d'optimisation peut être optimisé de manière hiérarchique en posant  $\hat{\Delta}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}) = \operatorname{argmin}_{\Delta^j} \mathcal{C}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \{\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}\})$ , mais ceci devient vite très coûteux en terme de temps de calculs puisque les déplacements sont estimés à chaque nouvelle estimation de  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$ . Nous avons donc opté pour un schéma d'optimisation itératif alterné [62] sur les quantités  $\{\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}\}$  et  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$  (Fig.3.7),

$$\begin{cases} \{\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}\}^{(k+1)} &= \operatorname{argmin}_{\Delta^j} \mathcal{D}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR(k)}, \{\Delta^j\}) \\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{SR(k+1)} &= \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\vartheta}^{SR}} \mathcal{C}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \{\Delta^j\}^{(k+1)}) \end{cases} \quad (3.20)$$

Ces deux reconstructions qui se font de manière alternée vont donc être détaillées, avec en premier lieu la reconstruction des déplacements, et en deuxième lieu la reconstruction de l'opacité.

#### 3.3.1 Reconstruction des décalages

Dans la littérature sur la super-résolution, il a été montré que l'efficacité des algorithmes de super-résolution utilisant une pile d'images décalées transversalement les unes par rapport aux autres était étroitement liée à la précision de l'estimation des déplacements [67, 68, 69]. L'impact de l'erreur de cette estimation sur une reconstruction super-résolue a été quantifié d'un point de vue théorique à l'aide des bornes de Cramèr-Rao par Robinson et Milanfar [70]. A partir d'une séquence d'images acquises successivement (vidéo) il est souvent possible d'utiliser



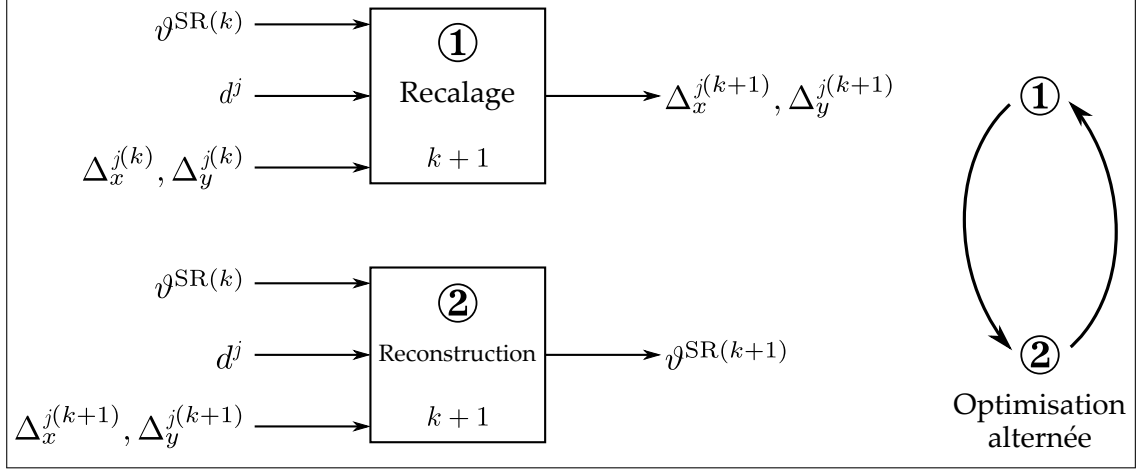


FIGURE 3.7 – Schéma d'optimisation itérative alternée

des méthodes de super-résolution utilisant une approche régularisée sur le recalage de type Tikhonov en faisant l'*a priori* que les déplacements sont faibles comme par exemple [71]. En revanche dans notre cas nous ne faisons aucun *a priori* sur le fait que les déplacements soient importants ou non, mais nous avons comme *a priori* que toutes les images se déplacent de manière rigide (et sans rotation), et cela impose de faire un recalage rigide (paramétrique, et donc plus contraint). Cet *a priori* fort va nous permettre de réaliser un recalage par maximum de vraisemblance. Ces déplacements sont souvent estimés en fonction d'une image référence (soit la première de la pile, soit la plus centrée géométriquement ou encore la moins bruitée). Notons que l'initialisation de ces décalages se fait par maximum de corrélation entre l'image référence et les autres images. En approche inverse, le fait de connaître le modèle de formation des hologrammes nous permet de comparer un modèle avec un hologramme référence. Cela est bien plus intéressant car au lieu de comparer deux images bruitées, nous comparons une image référence qui reste bruitée avec un modèle de formation d'image dont le niveau de bruit est presque négligeable. Le gain théorique provient de la division par 2 de la variance du bruit. Celle-ci induit un gain de  $\sqrt{2}$  sur l'écart-type de l'estimation de l'erreur sur les décalages. L'estimation du déplacement du  $j$ -ième hologramme se fait en minimisant la log-vraisemblance opposée entre ce  $j$ -ième hologramme et le modèle de formation d'hologramme de la manière suivante,

$$\hat{\Delta}^j = \underset{\Delta^j}{\operatorname{argmin}} \quad \left\| \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta}^{SR} - \overline{\mathbf{d}}^{j,SR} \right\|_W^2 \quad (3.21)$$

Un avantage de l'holographie numérique réside en la possibilité d'enregistrer sur le capteur des franges d'interférences dues à des objets hors du champ du capteur. Ceci permet de reconstruire l'objet sur un support plus important que celui du

capteur et donc d'avoir un modèle de formation d'hologramme sur un support plus grand que les hologrammes acquis, ce qui permet un recalage encore plus précis non biaisé par les effets de bord présents lors du recalage de deux images entre elles par exemple.

La minimisation (Eq.3.21) peut être réécrite sous forme de maximisation de la corrélation croisée normalisée [6] défini par,

$$\hat{\Delta}^j = \underset{\Delta^j}{\operatorname{argmax}} \frac{\langle \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \overline{\mathbf{d}}^{j,SR} \rangle_W}{\sqrt{\|\overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\vartheta}^{SR}\|_W^2} + \sqrt{\|\overline{\mathbf{d}}^{j,SR}\|_W^2}} \quad (3.22)$$

Le but de cette maximisation est d'estimer les décalages de manière sub-pixel par rapport à l'échantillonnage de l'opacité super-résolue. En ajustant une parabole 2D sur le maximum de la carte de corrélation par rapport au pixel déjà super-résolu.

### 3.3.2 Reconstruction de l'opacité de l'objet

L'optimisation de l'opacité super-résolue  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$  peut alors se faire avec la dernière estimation des déplacements  $\Delta^{j=1, \dots, N_{pile}}$ . Le terme de la régularisation  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR})$  se limitant à une contrainte de parcimonie  $\|\boldsymbol{\vartheta}^{SR}\|_1$ , il est possible d'appliquer une variante de l'algorithme proximal FISTA [52] permettant d'introduire la contrainte de positivité et une contrainte sur la borne supérieure que nous fixons à 1 pour les raisons physiques évoquées précédemment. Notons que nous choisissons d'utiliser une variante de FISTA car cet algorithme est très facile à implémenter. Mais il est aussi possible d'utiliser l'algorithme VMLM-B qui est un algorithme de type quasi-Newton L-BFGS permettant d'introduire les contraintes de bornes [47]. Les performances de ces deux algorithmes seront discutées dans la partie 3.5.

**Algorithm 1** : Reconstruction d'une distribution d'opacité super-résolue avec contrainte de parcimonie

**entrées** : hologrammes  $\overline{\mathbf{d}}^{j,SR}$  et déplacements  $\Delta^j$

**sortie** : distribution d'opacité super-résolue  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$

**initialisation** :

distribution d'opacité initiale  $\overline{\boldsymbol{\vartheta}}_0^{SR}$  (peut être initialisée à 0)

$\boldsymbol{\eta}_1 \leftarrow \overline{\boldsymbol{\vartheta}}_0^{SR}$

$t_1 \leftarrow 1$

**for**  $k = 1, 2, \dots$

$$\overline{\vartheta}_k^{SR} \leftarrow \mathcal{S}_{\tau,\alpha}^+ \left[ \boldsymbol{\eta}_k + \frac{2}{N_{pile}} \sum_{i=1}^{N_{pile}} \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j}^* \cdot \mathbf{W} \cdot (\overline{\mathbf{d}}^{j,SR} - \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\eta}_k) \right] \quad (3.23)$$

$$t_{k+1} \leftarrow \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\vartheta}_k^{SR} + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} (\boldsymbol{\vartheta}_k^{SR} - \boldsymbol{\vartheta}_{k-1}^{SR}) \quad (3.25)$$

où  $\overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j}^*$  est l'opérateur adjoint de  $\overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j}$ , et où l'opérateur  $\mathcal{S}^+$  est une variante du seuillage doux permettant d'introduire les contraintes de bornes du problème, et défini de la manière suivante,

$$\mathcal{S}_{\tau,\alpha}^+[\mathbf{u}] = \begin{cases} u - \frac{\tau}{2} & \text{if } \alpha + \frac{\tau}{2} > u > \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{if } u \leq \frac{\tau}{2} \\ \alpha & \text{if } u \geq \alpha + \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (3.26)$$

L'approche inverse offrant une reconstruction hors du champ du capteur il est intéressant d'avoir un coefficient de régularisation variable dépendant de la position spatiale de l'élément reconstruit, et de la convolution entre le support du capteur et le noyau de Fresnel. Comme proposé dans l'article [8] nous proposons une régularisation variable  $\tau'$  permettant de ne pas trop pénaliser les éléments de petite norme, nous définissons une régularisation dépendante du support du capteur et du noyau de Fresnel défini par  $\tau'_m = \tau \sum_n \mathbf{W}_{n,n} \overline{\mathbf{H}}_{m,n}^2 / \sum_n \mathbf{W}_{n,n}$ . En pratique cette régularisation offrira une régularisation proche de  $\tau$  dans le champ capteur et une régularisation moins forte plus l'élément reconstruit est hors du champ.

### 3.4 Résultats et comparaisons avec état de l'art

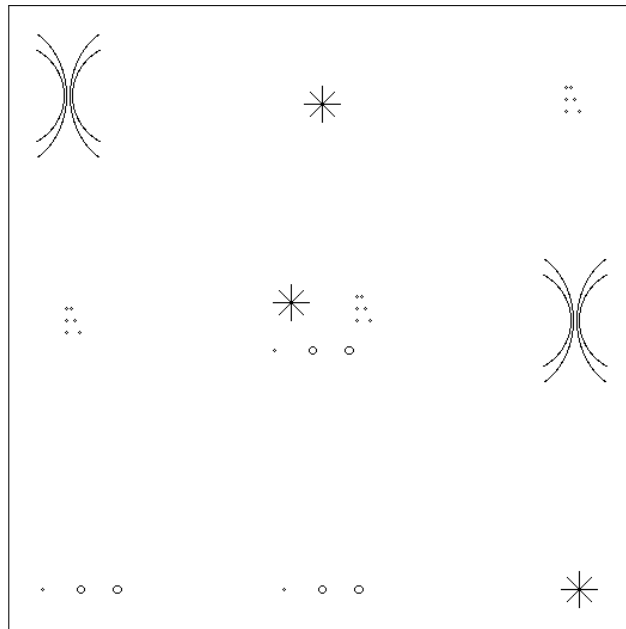
Afin de quantifier le gain que peut apporter cette approche inverse super-résolue nous utiliserons des simulations pour avoir une opacité connue et des déplacement  $\Delta^j$  connus. Nous appliquerons dans un deuxième temps cet algorithme à une pile d'hologrammes acquis expérimentalement. Dans ces deux cas l'approche inverse proposée sera comparée à :

- une rétropropagation avec un hologramme super-résolu dans l'espace hologramme à l'aide d'une pile hologrammes [65],
- une approche inverse à l'aide d'un seul hologramme [8],
- une approche inverse utilisant un hologramme super-résolu dans l'espace hologramme à l'aide d'une pile d'hologrammes.

### 3.4.1 Validation à l'aide de simulations

#### 3.4.1.1 Simulation des hologrammes

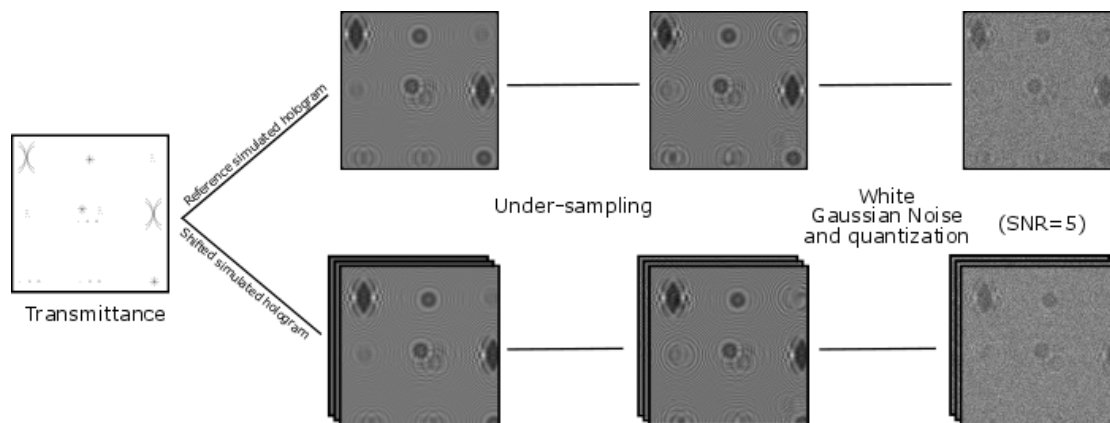
Pour estimer le gain de cette méthode de façon quantitative, il est important de simuler le plus fidèlement les hologrammes expérimentaux. Nous avons simulé un plan de transmittance 2D d'un objet parcimonieux (Fig.3.8). L'amplitude



**FIGURE 3.8** – Plan de transmittance simulé

complexe sur le capteur calculée par simulation de la propagation d'une onde diffractée par le plan de transmittance éclairé par une onde de référence considérée plane. Pour cela nous utilisons le modèle complexe de propagation en espace libre dans l'approximation de Fresnel. L'intensité sur le capteur est calculée en prenant le module au carré de l'amplitude complexe simulée dans le plan capteur. Afin de modéliser au mieux le capteur numérique, nous simulons chaque hologramme de

la pile sur-échantillonné d'un facteur 2, nous le sous-échantillonons en prenant en compte l'intégration sur le pixel du capteur, enfin nous simulons la quantification 12 bit du capteur et nous ajoutons un bruit blanc gaussien modélisant le bruit électronique dû au capteur (Fig.3.9). Chaque hologramme de la pile est simulé avec des décalages aléatoires sous-pixéliques (compris entre -2 et 2 pixel). La pile



**FIGURE 3.9** – Simulation de la pile d'hologrammes

d'hologrammes est simulée avec des hologrammes super-résolus de 512 par 512 pixels, avec une taille de pixel de  $3.7\mu m$ . Une fois sous-résolu d'un facteur 2, nous le sous-échantillonons de manière à obtenir un hologramme de 256 par 256 pixels, avec des pixels ayant une taille de  $7.4\mu m$  et un facteur d'intégration égal à 0.5. La pile se compose de 50 hologrammes simulés avec un ratio signal sur bruit (RSB) égal à 5. Enfin la distance entre le plan capteur et le plan objet et  $z = 16.5mm$ .

### 3.4.1.2 Estimations des décalages

L'avantage de l'approche inverse proposée est qu'elle propose d'estimer les décalages à l'aide d'un hologramme et d'une modèle de formation d'hologramme, contrairement au recalage classique qui estime les décalages entre un hologramme référence et les autres hologrammes. Pour quantifier le gain nous avons fait une statistique sur 100 piles de 50 hologrammes, et comparé les erreurs entre la première estimation (qui correspond à un recalage classique) et les autres estimations qui correspondent aux recalages avec l'approche inverse au cours de la reconstruction (Fig.3.10) Entre le premier recalage classique et le quatrième recalage avec l'approche inverse, l'erreur moyenne sur l'estimation des décalages dans la direction  $x$  (respectivement dans la direction  $y$ ) présente un gain en précision d'un facteur 10.6 (resp. d'un facteur 7.0). Ceci est un gain très significatif qui va permettre d'améliorer la reconstruction.

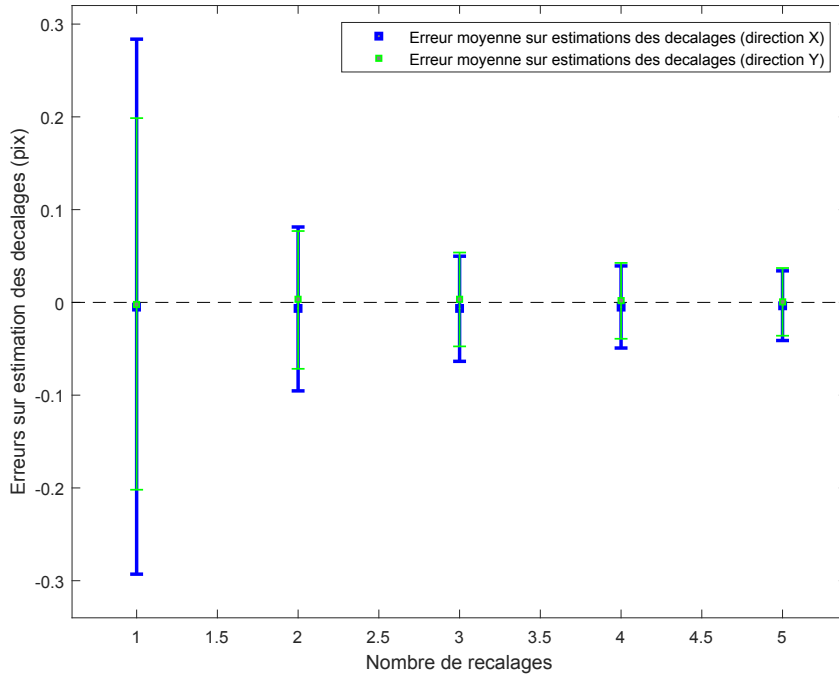
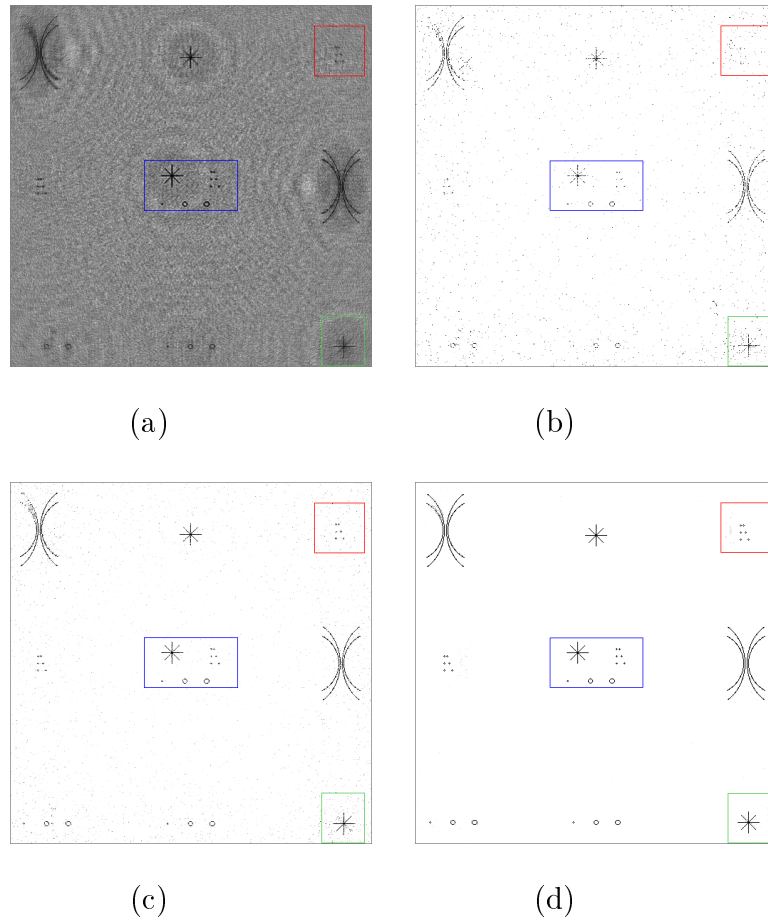


FIGURE 3.10 – Erreur moyenne sur l'estimations des décalages

### 3.4.1.3 Qualité de la reconstruction

Pour quantifier quel est le gain de l'approche inverse super-résolue proposée nous comparons quatre reconstructions (Fig.3.11) : une rétro-propagation classique à l'aide d'un hologramme super résolu comme proposé dans [65] (a), une reconstruction problème inverse avec un seul hologramme sous-résolu comme proposé dans [8] (b), une reconstruction problème inverse avec un hologramme super-résolu classiquement à l'aide d'une pile d'hologrammes sous-résolus (c), ce qui est en soit déjà plus avancé que l'état de l'art, et enfin la reconstruction avec l'approche inverse super-résolue (d). Les régularisations ont été réglées en utilisant pour chaque approche inverse le coefficient de régularisation optimal minimisant l'écart quadratique moyen entre la reconstruction et la transmittance "vérité terrain" ayant permit de construire les hologrammes simulés. Pour mieux visualiser le gain qualitatif de la méthode nous pouvons observer les zooms des zones d'intérêt (Fig.3.20). Si d'un point de vue qualitatif nous pouvons constater que la reconstruction avec l'approche super-résolue proposée présente un intérêt, nous pouvons quantifier cet intérêt en calculant le PSNR ( Peak Signal to Noise Ratio) de chaque reconstruction puisque nous avons la transmittance "vérité terrain". Le PSNR est un critère assez universel en traitement d'image et qui permet de comparer quan-



**FIGURE 3.11** – Comparaisons des reconstructions : (a) Rétro-propagation à l'aide d'un hologramme super-résolu classiquement, (b) Approche inverse avec un hologramme [24], (c) Approche inverse avec un hologramme super-résolu classiquement, (d) Approche inverse super-résolue proposée avec une pile de 50 hologrammes.

titativement ces quatre reconstructions. Les PSNR calculés sont : (a) 16.2 dB, (b) 24.1 dB, (c) 28.0 dB et (d) 39.2 dB. Ainsi nous pouvons constater que le gain obtenu d'un point de vue visuel est confirmé d'un point quantitatif, avec un rapport 2.4 entre le PSNR de la reconstruction (a) et le PSNR de la reconstruction de la méthode proposée (d).

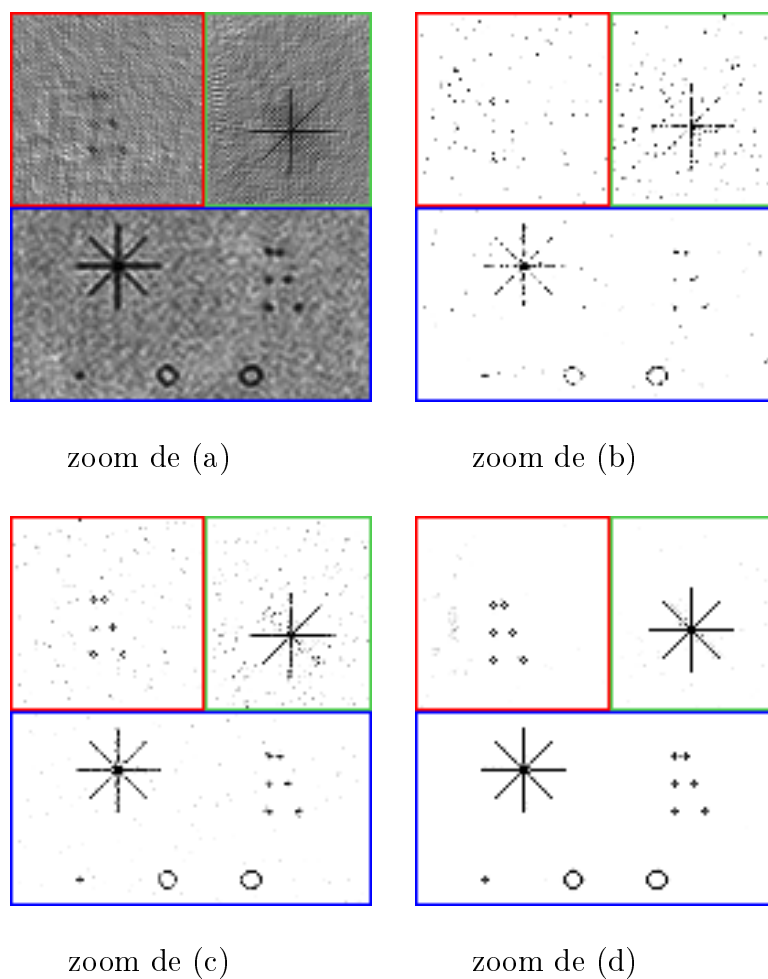


FIGURE 3.12 – Zoom sur zones d'intérêts

## 3.4.2 Application aux hologrammes expérimentaux

### 3.4.2.1 Montage expérimental

Les simulations ont démontré que nous avons un gain de reconstruction dans le champ de l'hologramme acquis. Pour les données expérimentales nous avons veillé à nous placer dans une configuration telle que la distance entre le plan objet et le plan capteur soit assez grande ( $\sim 30cm$ ) pour enregistrer un maximum de franges dues aux objets hors champ (c'est à dire ne se projetant pas sur le support du capteur) et ainsi mettre en évidence la qualité de la reconstruction hors champ atteignable avec cette méthode. Afin de mettre en avant la robustesse de la méthode vis à vis des perturbations qui peuvent intervenir dans le champ de



l'hologramme nous pulvériserons des gouttelettes d'eau en amont de l'objet (voir la figure 3.13).

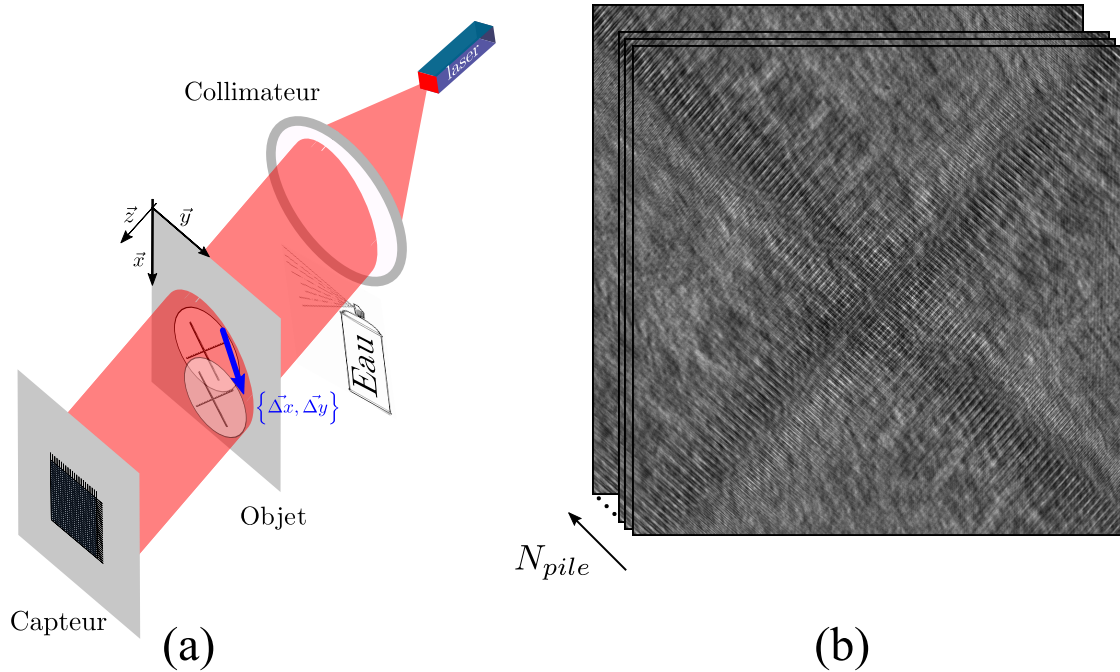


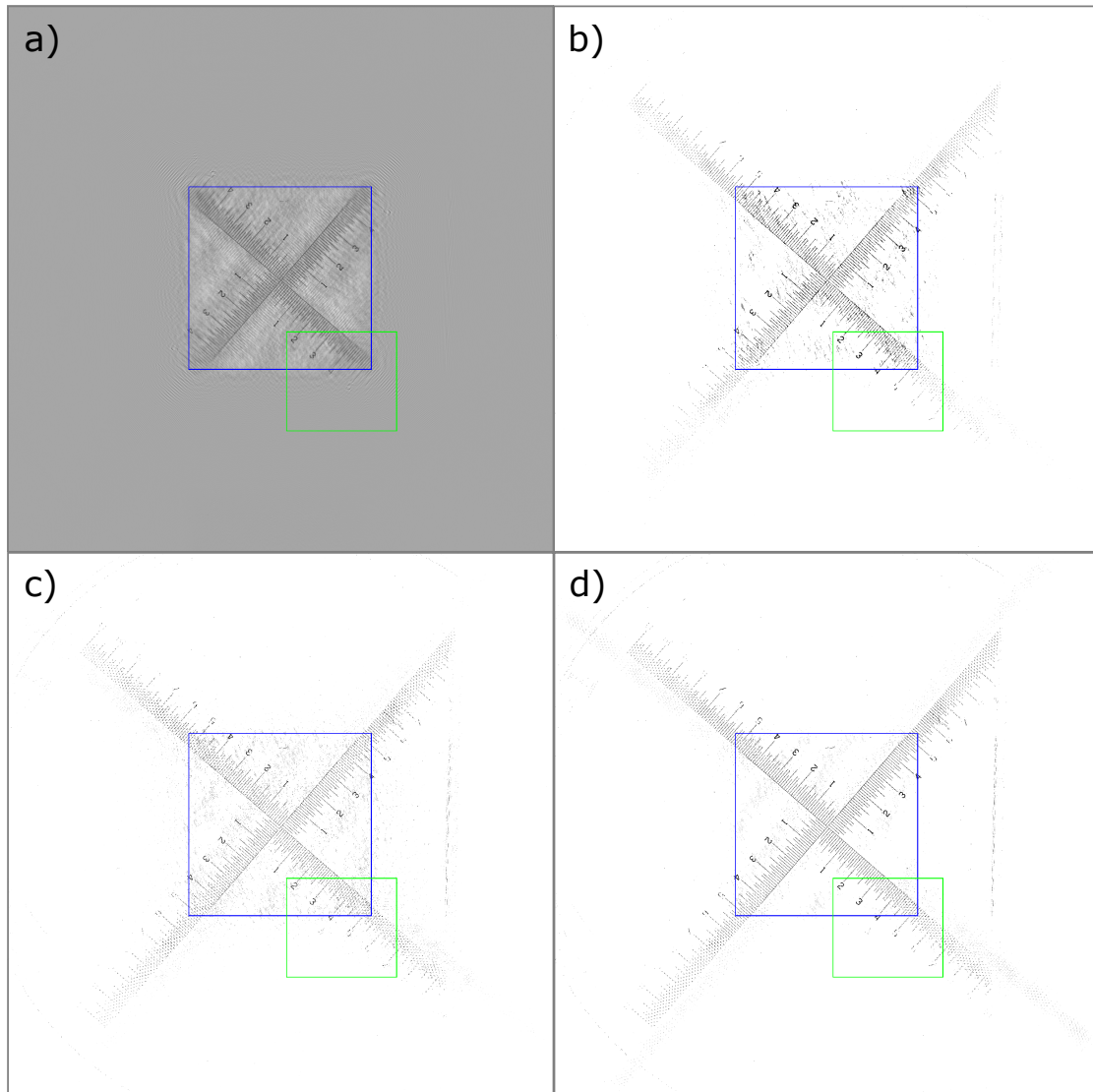
FIGURE 3.13 – Montage et acquisitions expérimentales

### 3.4.2.2 Qualité de la reconstruction

D'un point de vue algorithmique il faut rappeler que le fond des hologrammes est supprimé à l'aide d'une image de fond (image acquise sans objet). Ce pré-traitement est très important dans le cas d'hologramme expérimentaux, car l'initialisation de l'estimation des recalages se fait grâce à un recalage classique entre une hologramme référence et les autres hologrammes de la pile. Si le fond présente de fortes structures, c'est la corrélation de ces structures qui va être prépondérante par rapport aux franges de diffraction de l'objet. Celle-ci biaisera l'initialisation des décalages.

Comme pour les simulations nous comparons les mêmes types de reconstructions, en revanche n'ayant pas de "vérité terrain" ces comparaisons s'arrêteront à une comparaison qualitative (Fig.3.14).

Notons que les reconstructions (a), (c) et (d) ont été effectuées toutes les trois avec la même pile de 15 hologrammes et la reconstruction (b) a été reconstruite avec le premier hologramme de cette pile. La différence de reconstruction obtenue par l'approche inverse super-résolue proposée et les reconstructions (a) et (b),

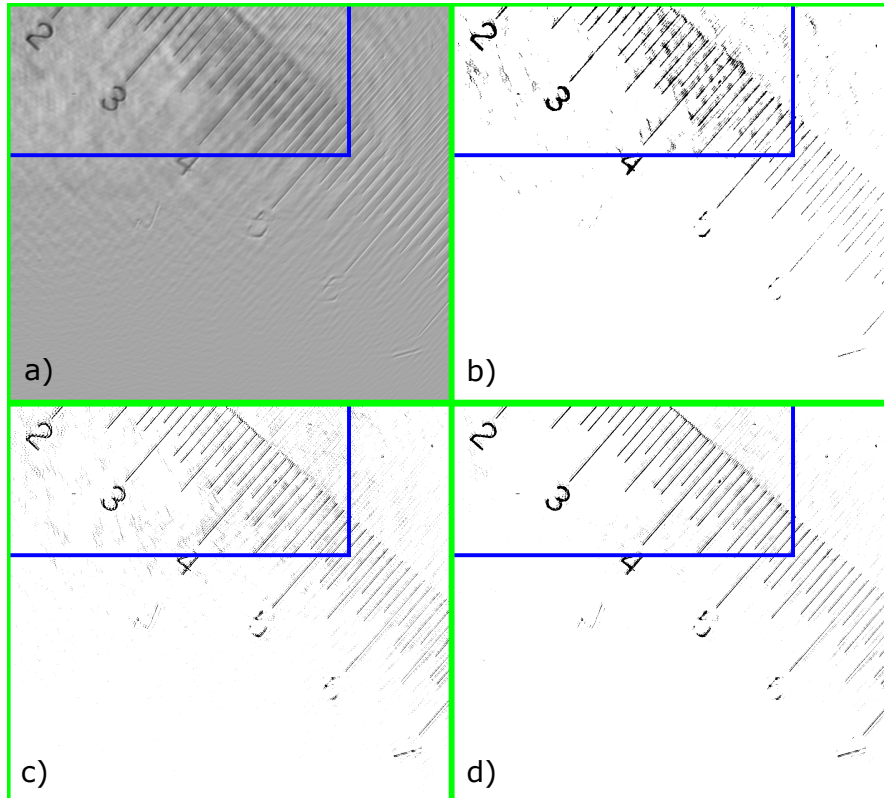


**FIGURE 3.14** – Comparaison qualitative de reconstructions d’hogrammes expérimentales : (a) Rétropropagation d’un hologramme super-résolu, (b) reconstruction MAP avec un seul hologramme [24], (c) reconstruction MAP avec un seul hologramme super-résolu classiquement à partir d’une pile de 15 hologrammes (a), (d) reconstruction MAP super-résolue proposée, à partir d’une pile de 15 hologrammes.

est significative. En effet l’approche proposée permet d’obtenir un gain en qualité de reconstruction, mais aussi permet d’étendre la reconstruction hors du champ classique (nous pouvons par exemple observer que la pince qui tenait la mire est reconstruite). Leur différence en terme de qualité de reconstruction est moins flagrante, mais en zoomant nous voyons que l’approche inverse mène à une meilleure

reconstruction (Fig.3.15).

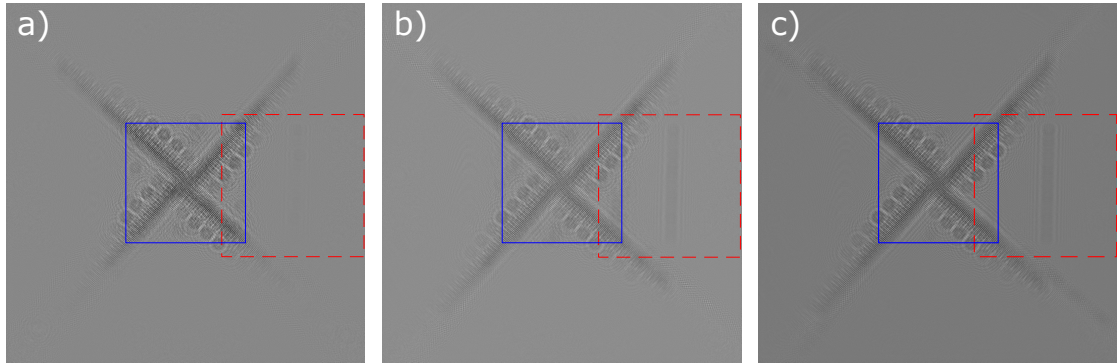
Ce gain en reconstruction dans l'espace objet doit se retrouver dans l'espace ho-



**FIGURE 3.15** – ZOOMS des reconstructions de la figure 3.14

logramme. L'intérêt d'une approche inverse en holographie numérique en ligne est d'utiliser un modèle de formation d'hologramme bien connu afin de modéliser et extraire au mieux l'information présente dans l'hologramme acquis. La figure 3.16 permet de comparer les différents modèles d'hologrammes obtenus à partir des différentes reconstructions de l'opacité : a) l'hologramme reconstruit à l'aide de l'approche inverse utilisant 1 hologramme, b) l'hologramme super-résolu reconstruit à l'aide de l'approche inverse utilisant 1 hologramme super-résolu classiquement à l'aide d'une pile de 15 hologrammes expérimentaux, et enfin c) l'hologramme super-résolu avec l'approche inverse proposée à l'aide de la pile des 15 hologrammes expérimentaux. Le cadre bleu symbolise sur chaque reconstruction la taille des hologrammes utilisés pour réaliser les trois modèles d'hologrammes. La figure 3.17 permet donc de comparer ces trois reconstructions a), b) et c) avec le premier hologramme de la pile utilisée d).

Nous pouvons constater dans cette figure 3.17 que l'*a priori* injecté à l'aide de la contrainte de parcimonie permet une bonne reconstruction qui supprime

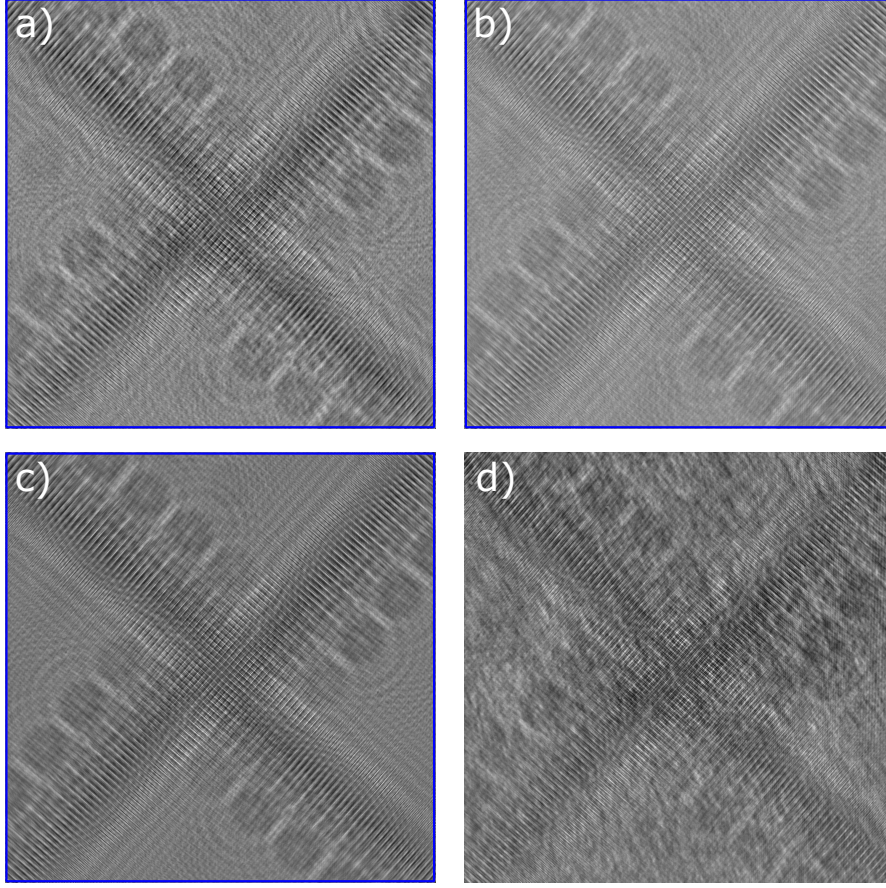


**FIGURE 3.16** – Différentes reconstructions d’hologrammes hors-champ x3 : a) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme, b) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme super-résolu classiquement à l’aide de la pile de 15 hologrammes, et enfin c) à l’aide de l’approche inverse super-résolue proposée utilisant la pile de 15 hologrammes.

de manière significative le bruit présent dans l’hologramme d), et reconstruit la plupart des structures en plein champ. En revanche si nous zoomons sur une partie hors champ des modèles (Fig.3.16, cadre rouge), nous constatons que les approches inverses utilisant la super-résolution permettent à partir des hologrammes de la pile de reconstruire des hautes fréquences dans le champ permettant de reconstruire des objets hors champ comme par exemple la pince servant de support pour tenir la mire dans notre expérience (Fig.3.18 .(b).(c) ). D’autre part, la reconstruction non super-résolue utilisant un seul hologramme (a) ne permet pas de reconstruire suffisamment les hautes fréquences créées par la pince dans le champ du capteur, et ainsi ne permet de modéliser la diffraction créée par cette pince (Fig.3.18.(a) )

### 3.5 Temps de calculs & convergence

Faire de la reconstruction hors champ aussi étendue demande de reconstruire des objets de grandes tailles. Par exemple pour l’approche inverse (c) et (d) pour des hologrammes acquis de  $1024 \times 1024$  pixels, la reconstruction super-résolue d’un facteur 2, et un hors champ multipliant par 9 la surface du capteur, est de taille  $8192 \times 8192$  pixels en incluant le padding. En terme de temps de calcul, l’approche inverse proposée (d) demande donc avec l’algorithme FISTA un temps de calcul d’une dizaine d’heures contre seulement une heure pour la reconstruction (c), quelques minutes pour la reconstruction (b), et quelques secondes pour la reconstruction (a). En revanche des travaux récents ont montré qu’il était possible possible d’améliorer la vitesse de convergence par une implémentation sur processeur graphique (GPU) [72]. Dans le même ordre d’idée, si la vitesse de convergence des algorithmes L-BFGS est moins connue précisément que celle des algorithmes



**FIGURE 3.17** – Différentes reconstructions d’hologrammes en plein champ : a) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme, b) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme super-résolu classiquement à l’aide de la pile de 15 hologrammes, et enfin c) à l’aide de l’approche inverse super-résolue proposée utilisant la pile de 15 hologrammes. d) Le premier hologramme expérimental de la pile.

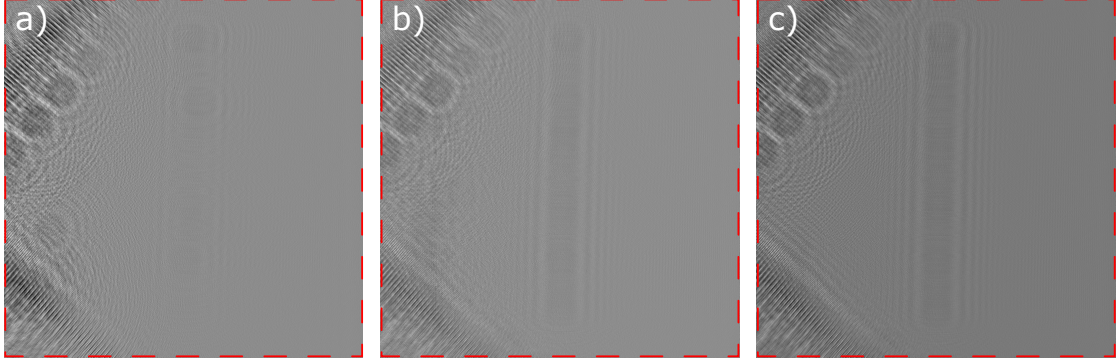
proximaux ISTA  $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$  ou FISTA  $\mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$  plusieurs tests nous ont montré qu’utiliser l’algorithme VMLM-B permet d’avoir un gain en terme de temps de calcul. Afin d’automatiser au maximum l’algorithme proposé nous utilisons le critère de convergence calculé à l’aide du gradient. L’expression du gradient à la  $k$ -ième itération dans ce problème est le suivant :

$$\mathbf{G}_k = \tau \mathbf{1} + \frac{2}{N_{pile}} \sum_{i=1}^{N_{pile}} \overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j}^* \cdot \mathbf{W} \cdot (\overline{\mathbf{H}}_{\Delta^j} \boldsymbol{\eta}_k - \overline{\mathbf{d}}^{j,SR}) \quad (3.27)$$

En prenant en compte les contraintes de bornes (opacité comprise entre 0 et 1), nous pouvons alors exprimer un critère de la manière suivante,

$$crit = \|\mathbf{G}_k \cdot * ((\boldsymbol{\eta}_k \neq 0) \cdot * (\boldsymbol{\eta}_k < 1) + (\mathbf{G}_k < 0) \cdot * (\boldsymbol{\eta}_k = 0) + (\mathbf{G}_k > 0) \cdot * (\boldsymbol{\eta}_k = 1))\|^2$$





**FIGURE 3.18** – Reconstruction de la pince hors du champ du capteur : a) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme, b) à l’aide de l’approche inverse utilisant un hologramme super-résolu classiquement à l’aide de la pile de 15 hologrammes, et enfin c) à l’aide de l’approche inverse super-résolue proposée utilisant la pile de 15 hologrammes.

Typiquement nous avons utilisé comme critère d’arrêt que la moyenne de *crit* soit inférieur ou égale à  $1e-6$ .

### 3.6 Variante de la méthode pour application à des objets plus étendus

Afin d’élargir le champ d’application et de montrer d’autres intérêts de l’approche super-résolue nous avons testé cette approche inverse sur des objets non parcimonieux. Dans ce cas l’approximation du modèle de formation d’hologramme linéaire, dans le régime de la propagation de Fresnel, est moins adaptée et la régularisation doit être adaptée à ce type d’objet. La variation totale est une régularisation bien appropriée à ce type d’objet et qui a été largement utilisée en holographie [73, 74, 75, 76]. Nous proposons donc de modifier la formulation du problème inverse proposée en ajoutant une régularisation de type variation totale relaxée explicitée dans la partie 2.5.3.3. La nouvelle formulation du problème inverse (Eq.3.19) doit donc s’écrire,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{SR} = \operatorname{argmin}_{0 \leq \boldsymbol{\vartheta} \leq 1^{SR}} \left\{ \min_{\Delta^j} \mathcal{D}(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}, \{\Delta^j\}) + \tau_1 \|\boldsymbol{\vartheta}^{SR}\|_1 + \tau_2 TV_\epsilon(\boldsymbol{\vartheta}^{SR}) \right\}. \quad (3.28)$$

La régularisation ici va donc avoir un rôle supplémentaire en réduisant le bruit d’un modèle de formation d’hologramme moins adapté à ces objets (ce problème de modèle sera largement discuté dans la partie 5).

Cette approche est testée sur des simulations et des hologrammes réels de mires USAF.

### 3.6.1 Sur simulations

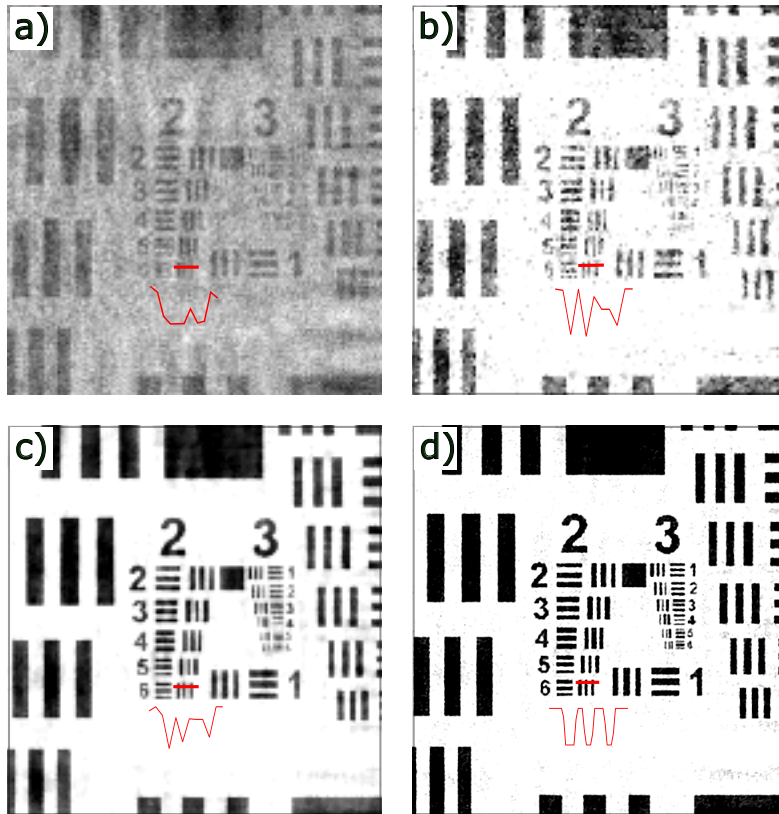
Les simulations ont été faites avec une transmittance de mire USAF binaire. Afin de pousser les performances de l'algorithme et de différencier ce qui est dû à la super-résolution et ce qui est dû à l'utilisation d'une pile d'hologrammes, nous testerons la même approche inverse en utilisant la même pile d'hologrammes mais en réalisant la reconstruction dans un espace qui n'est pas sur-échantillonné. Nous simulons donc une pile d'hologrammes avec un RSB égal à 5, une distance objet-capteur de 3 cm, et des caractéristiques du capteur identiques à celle utilisées pour les simulations décrites dans la partie 3.4.1.1 (Fig.3.19). L'hologramme a



**FIGURE 3.19** – Hologramme simulé avec un faible RSB

volontairement été pris de petite taille afin de pouvoir super-résoudre une pile de 36 hologrammes avec un facteur de super-résolution égal à 4. La figure 3.20 propose une comparaison d'une rétro-propagation classique (a), d'une reconstruction par approche inverse n'utilisant qu'un seul hologramme (b), d'une reconstruction à l'aide de l'approche inverse utilisant les 36 hologrammes de la pile (recalés de la même façon que dans l'approche super-résolue mais dans un espace non sur-échantillonné) mais sans faire intervenir de super-résolution (la taille du "pixel" reconstruit est donc la même que la taille du pixel des hologrammes) (c), et enfin la reconstruction avec l'approche inverse proposée utilisant les 36 hologrammes et un facteur de super-résolution de 4 (en terme de surface le pixel reconstruit est donc 16 fois plus petit que le pixel hologramme) (d).

Sur ces quatre reconstructions nous pouvons observer le gain en terme qualitatif qu'apporte la reconstruction proposée. Nous pouvons aussi constater le gain en terme de résolution sur la mire USAF : les petites structures sont résolues seulement avec l'approche inverse proposée et un facteur de super-résolution de 4. Cela permet notamment de reconstruire de façon bien distincte des objets séparés (Fig.3.21).



**FIGURE 3.20** – Comparaison de reconstructions obtenues à partir d’hogrammes simulés : une rétro-propagation classique à partir d’un hologramme (a), une reconstruction par approche inverse MAP à l’aide d’un seul hologramme (b), une reconstruction par approche inverse MAP utilisant une pile de 36 hologrammes (c), une reconstruction par l’approche inverse super-résolue proposée avec une pile de 36 hologrammes et un facteur de super-résolution de 4 (d). Sur chaque reconstruction figure en rouge des profils sur une des petites structures.



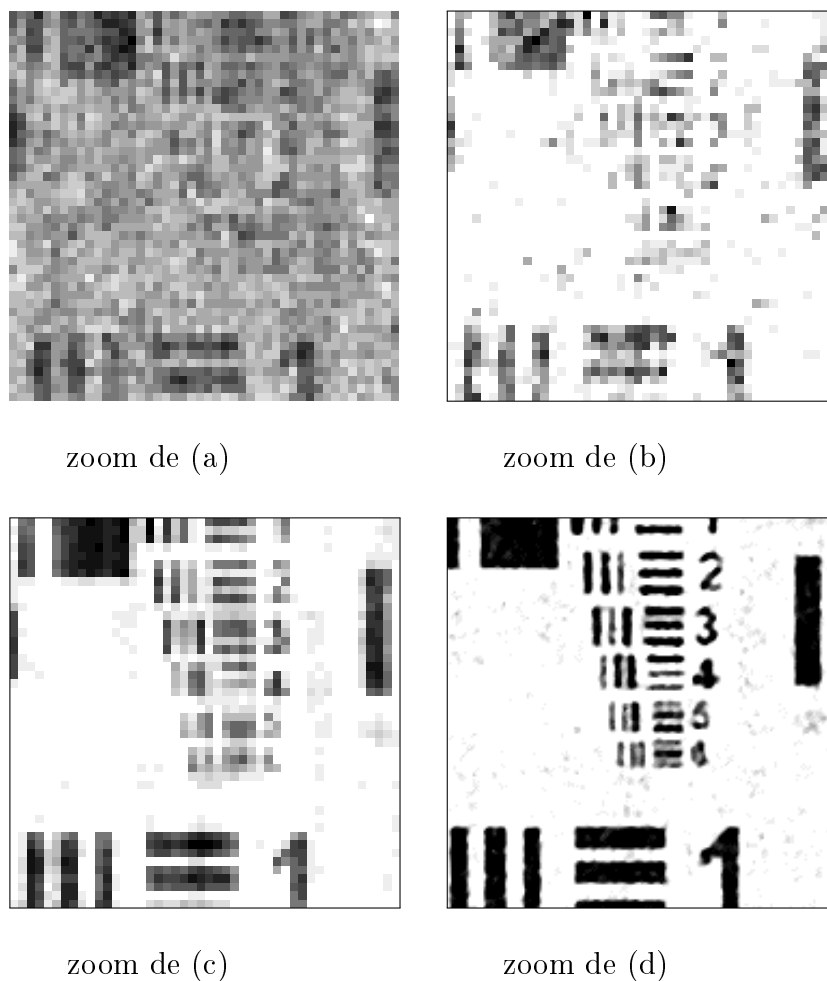
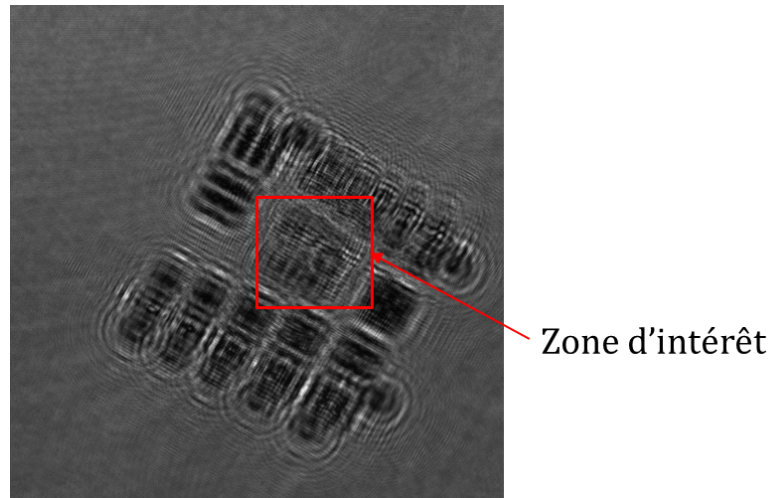


FIGURE 3.21 – Zoom des reconstructions de la figure 3.20

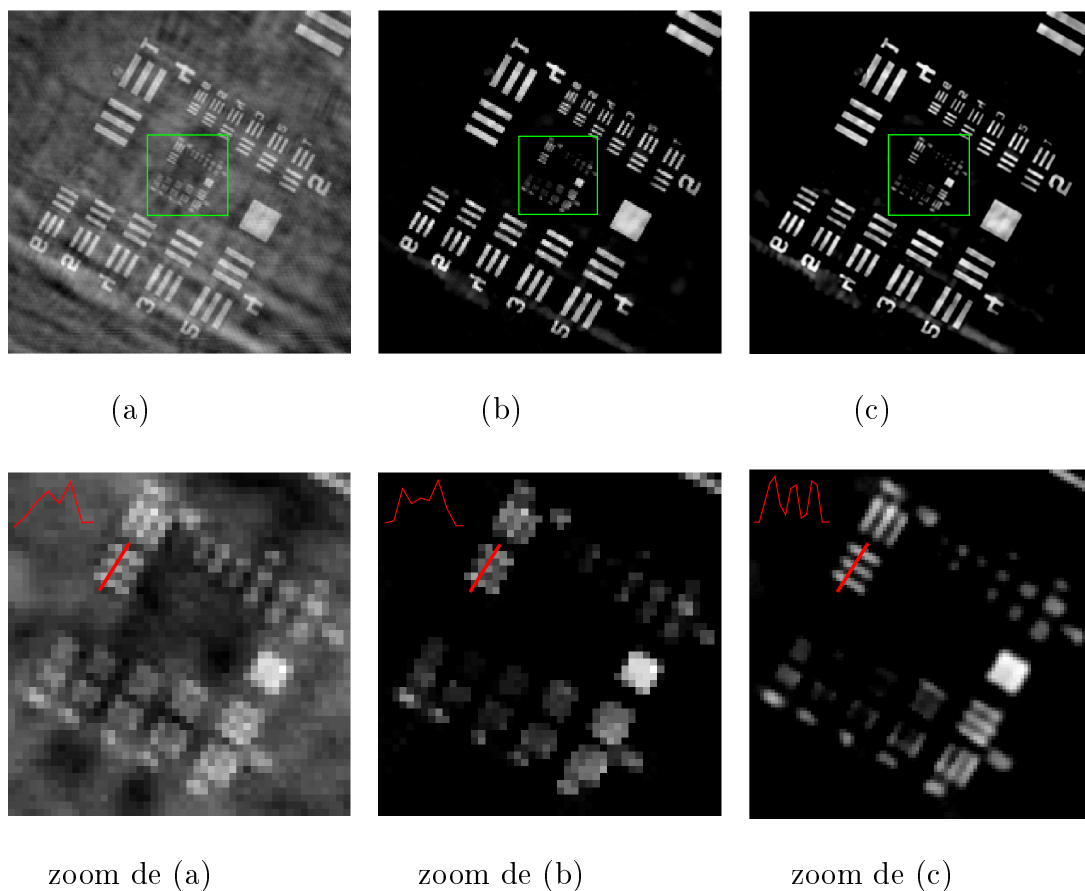
### 3.6.2 Sur données expérimentales

La méthode proposée a aussi été appliquée sur une pile d'hologrammes acquis dans les même conditions et avec le même montage que les hologrammes expérimentaux décrits ci-avant à la différence que la mire utilisée est une mire USAF 1951 et la distance objet-captteur est de  $9.3\text{ cm}$ . Pour démontrer l'intérêt présenté précédemment sur les simulations, c'est à dire que l'approche super-résolue permet de mieux résoudre les petites structures, nous nous intéressons à la partie de la mire USAF présentant les plus petites structures (Fig. 3.22). Les reconstructions qui sont comparées sont des reconstructions dans la zone d'intérêt : une rétro-propagation classique (a), une reconstruction avec l'approche inverse utilisant un seul hologramme (b) et enfin la reconstruction avec l'approche inverse



**FIGURE 3.22** – Hologramme expérimental d'une mire USAF

super-résolue proposée avec un facteur de super-résolution égal à 2 à partir d'une pile de 20 hologrammes (c) (Fig.3.23).



**FIGURE 3.23** – Comparaison de reconstructions obtenues à partir d’hogrammes expérimentaux : une rétro-propagation classique à partir d’un hologramme (a), une reconstruction par approche inverse MAP à l’aide d’un seul hologramme (b), une reconstruction par l’approche inverse super-résolue proposée avec une pile de 20 hologrammes et un facteur de super-résolution de 2 (c). Sur la deuxième ligne un zoom pour les 3 reconstructions avec, en rouge, un profil mettant en évidence une meilleure reconstruction en terme de résolution, avec l’approche super-résolue proposée (c), pour les petites structures.

### 3.7 Conclusion

En conclusion, l’approche « problèmes inverses » proposée reprend la philosophie des travaux de Denis et *al* [8] tout en exploitant la redondance d’information disponible dans une pile d’hogrammes translattés les uns par rapport aux autres dans un plan 2D. Ces travaux ont démontré que cette approche permet d’améliorer le rapport signal à bruit de la reconstruction, ainsi que de repousser les limitations de résolution dues à la taille du pixel du capteur en proposant une reconstruc-

tion sur une grille de pixels super-résolus. En parallèle, ces travaux ont permis de mettre en exergue la possibilité de reconstruction d'objets situés au-delà du champ du capteur, ce qui était déjà évoqué dans [8]. En effet, alors que dans [8] est proposée une reconstruction augmentant d'un facteur deux le champ de reconstruction par rapport au champ capteur, ces travaux de thèse ont, de leur côté, permis de montrer qu'il est possible avec une approche « problèmes inverses » super-résolue d'obtenir une reconstruction augmentant d'un facteur trois le champ de reconstruction par rapport au champ capteur. Ces travaux ont aussi démontré que l'estimation de manière alternée des décalages entre chaque hologramme et la reconstruction de l'opacité, permet de réduire significativement l'erreur sur l'estimation des décalages proposée par [65]. Les résultats obtenus ont été comparés avec des méthodes « état de l'art », à savoir une rétro-propagation obtenue à partir d'un hologramme super-résolu comme le propose [65] et une reconstruction à l'aide de l'approche « problèmes inverses » utilisant un seul hologramme [8]. Ces résultats ont aussi été comparés à une reconstruction plus avancée que l'état de l'art et consistant à appliquer l'approche « problèmes inverses » [8] à l'aide d'un hologramme super-résolu comme [65]. Maintenant qu'a été mise en évidence l'importance de la redondance d'information contenue dans une pile d'hologrammes translatés les uns par rapport aux autres, il semble à présent naturel de s'intéresser à la richesse d'information qui pourrait être obtenue en diversifiant les longueurs d'illumination.

# Chapitre 4

## Approches « problèmes inverses » appliquées à l'holographie numérique en ligne "couleur"

*La possibilité de multiplier les sources lumineuses de différentes longueurs d'onde ouvre des perspectives pour l'holographie numérique "couleur". Il est présenté dans ce chapitre trois approches utilisant cette redondance d'informations de manières différentes : la première approche « problèmes inverses » proposée s'intéresse à la possibilité d'utiliser cette redondance d'information de manière conjointe à partir de trois hologrammes acquis sur un capteur monochrome. La deuxième approche, quant à elle, propose d'exploiter au mieux la physique d'un capteur "couleur" et démontre l'intérêt d'estimer de manière précise les longueurs d'onde des lasers et le phénomène de "crosstalk" présent sur chaque canal d'un capteur "couleur", afin d'optimiser au mieux la reconstruction multispectrale d'un hologramme acquis sur ce type de capteur. Pour finir une extension de la deuxième approche à la super-résolution est proposée afin d'améliorer la résolution numérique et le rapport signal à bruit de la reconstruction d'hologrammes "couleur".*

### 4.1 Introduction et état de l'art

Le chapitre précédent a montré qu'utiliser la redondance d'information contenue dans une pile d'hologrammes translattés pouvait améliorer la reconstruction d'opacité d'un objet d'intérêt. Dans ce nouveau chapitre nous allons aborder des approches inverses utilisant la richesse d'information exploitable dans l'hologra-

phie "couleur". Les travaux [77, 78, 79] ont montré l'intérêt d'utiliser un montage d'holographie en ligne opérant à plusieurs longueurs d'onde d'illumination (sources « rouge, vert, bleu ») et potentiellement muni d'un capteur couleur. Durant cette thèse des travaux ont été effectués afin de montrer l'intérêt de l'utilisation de cette redondance d'information dans le cas d'objets opaques [80]. Nous proposons dans ce chapitre trois approches « problèmes inverses » différentes pour trois configurations différentes d'un montage d'holographie couleur (Fig.4.1). La première configuration consiste à acquérir trois hologrammes à l'aide d'un capteur monochrome respectivement à trois longueurs d'onde différentes. La deuxième configuration consiste à éclairer simultanément un objet à trois longueurs d'onde et à acquérir un hologramme « rouge, vert, bleu » RVB à l'aide d'un capteur couleur muni d'une matrice de Bayer. La dernière configuration consiste à acquérir une pile d'hologrammes RVB avec un capteur couleur qui sont translatés dans un plan les uns par rapport aux autres dans le but d'y appliquer et d'étendre la méthode de super-résolution présentée au chapitre précédent au cas « couleur ». Le montage d'holographie couleur (Fig.4.1) commun à ces trois approches comprend trois diodes laser de longueur d'onde respectives «  $635\text{ nm}$  », «  $532\text{ nm}$  » et «  $405\text{ nm}$  », une fibre optique unique dans laquelle les trois faisceaux sont injectés et qui permet d'éclairer l'objet. Un capteur monochrome ou couleur, placé derrière l'objet, permet d'enregistrer l'intensité des ondes diffractées.

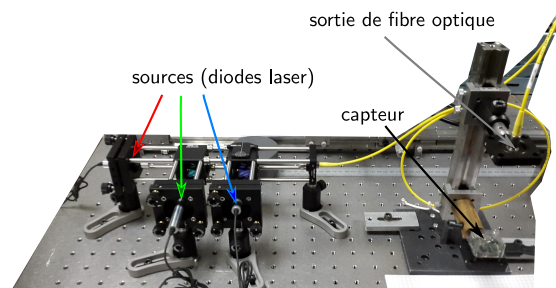
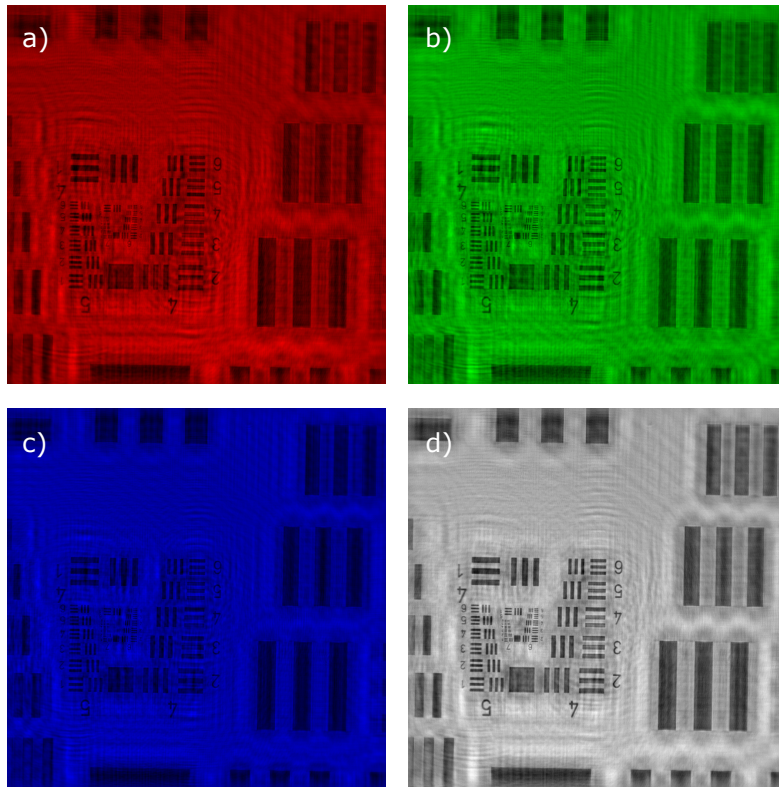


FIGURE 4.1 – Montage général holographie couleur

## 4.2 Première approche : méthode inverse appliquée à 3 hologrammes "rouge", "vert" et "bleu" acquis sur un capteur monochrome

La première approche inverse pour l'holographie couleur proposée utilise trois hologrammes acquis successivement avec un capteur monochrome aux trois longueurs d'onde d'illumination  $635\text{ nm}$ ,  $532\text{ nm}$  et  $405\text{ nm}$ . En sommant naïvement

les rétro-propagations classiques de ces différents hologrammes nous percevons déjà l'intérêt de la richesse d'information apportée par la combinaison des trois longueurs d'onde (Fig.4.2). Nous montrons qu'une approche inverse rigoureuse peut tirer meilleur parti des données.



**FIGURE 4.2** – Rétropropagations classiques : en haut à gauche la rétropropagation de l'hologramme "rouge", en haut à droite la rétropropagation de l'hologramme "vert", en bas à gauche la rétropropagation de l'hologramme "bleu" et en bas à gauche la moyenne des trois rétropropagations aux différentes longueurs d'onde.

### 4.2.1 Configuration

Pour cette configuration du montage (Fig.4.1) nous utilisons un capteur monochrome avec une taille de pixels de  $2.2 \mu m$ . Le but de cette expérience est d'allumer un seul laser à la fois pour acquérir trois hologrammes à différentes longueurs d'onde (Fig.4.3).

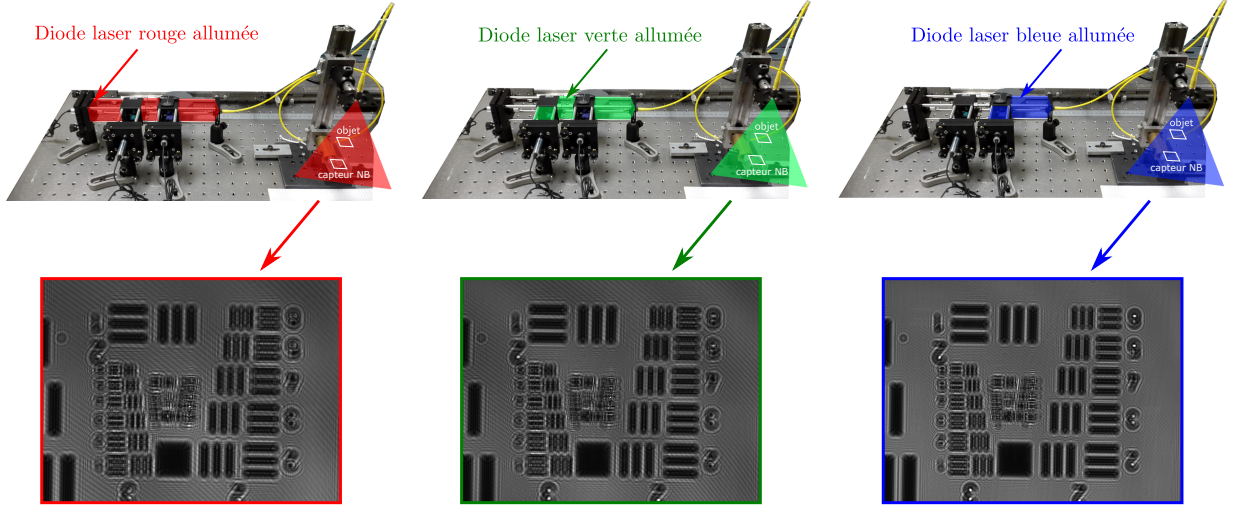


FIGURE 4.3 – Montage holographique couleur avec capteur monochrome

## 4.2.2 Formulation du problème inverse

Pour expliquer le modèle de formation d'image nous reprenons le modèle linéaire de formation d'hologramme explicité dans (Eq.2.25). Nous considérons un objet opaque et parcimonieux décrit par sa distribution d'opacité réelle dans un plan 2D noté  $\vartheta$ . L'intensité de l'hologramme acquis à la longueur d'onde  $\lambda_k$  s'exprime,

$$I^k(x_p, y_p) \propto 1 - \vartheta * h_{z, \lambda_k}^{\Pi} \quad (4.1)$$

avec,

$$h_{z, \lambda_k}^{\Pi} = 2 \cdot \Re \left( \underline{h}_{z, \lambda_k} \right) * \Pi \quad (4.2)$$

où  $\underline{h}_{z, \lambda_k}$  est la fonction de Fresnel  $\underline{h}_z$  explicitée en (2.3.1.2) pour la longueur d'onde  $\lambda_k$ , et  $\Pi$  représente une fonction porte 2D modélisant la surface photosensible de chaque pixel.

De manière similaire au chapitre précédent notons  $\mathbf{H}_{\lambda_k}$  l'opérateur linéaire modélisant la convolution du noyau  $h_{z, \lambda_k}^{\Pi}$  avec  $\vartheta$  le vecteur colonne représentant l'opacité discrétisée de l'objet à reconstruire. Le modèle de formation de l'hologramme acquis à la longueur d'onde  $\lambda_k$  dans l'espace discrétisé du capteur est donc,

$$\mathbf{m}_{\lambda_k} = c_k \mathbf{1} - \mathbf{H}_{\lambda_k} \vartheta. \quad (4.3)$$

Nous centrons l'opérateur linéaire  $\mathbf{H}_{\lambda_k}$  tel que  $\overline{\mathbf{H}}_{\lambda_k} = -\mathbf{H}_{\lambda_k} + \mathbf{1} \frac{1^t}{\mathbf{1}^t \mathbf{1}} \mathbf{H}_{\lambda_k}$  pour les mêmes raisons que dans le cas de l'approche inverse SR du chapitre 3. Nous



utilisons donc le modèle centré de formation de l'hologramme acquis à la longueur d'onde  $\lambda_k$  suivant,

$$\overline{\mathbf{m}}_{\lambda_k} = \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_k} \boldsymbol{\vartheta} \quad (4.4)$$

La formulation du problème inverse prenant en compte de façon conjointe les trois hologrammes acquis avec un capteur monochrome à différentes longueurs d'onde est donc la suivante,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \underset{0 \leq \boldsymbol{\vartheta} \leq 1}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \|\overline{\mathbf{H}}_{\lambda_k} \boldsymbol{\vartheta} - \overline{\mathbf{d}}^k\|_W^2 + \tau_1 \|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 + \tau_2 TV_\epsilon(\boldsymbol{\vartheta}) \quad (4.5)$$

où,

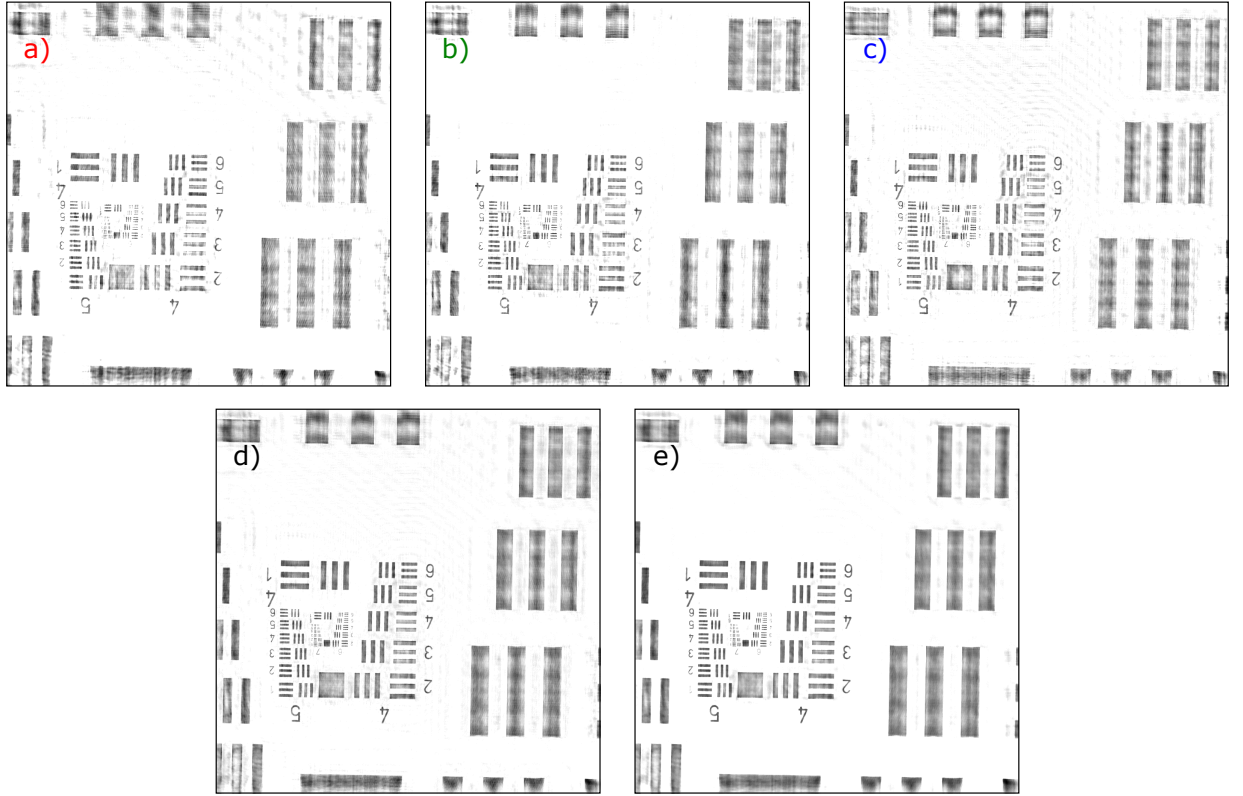
- $\mathbf{W}$  est la matrice inverse de la covariance du bruit (ici diagonale car nous supposons que le bruit est blanc),
- $\overline{\mathbf{d}}^k$  est l'hologramme centré acquis à la longueur d'onde  $\lambda_k$ .

Cette minimisation est réalisée à l'aide de l'algorithme d'optimisation de type quasi-Newton à mémoire limitée [47] qui requiert l'expression de la fonction coût, ainsi que son gradient.

Nous pouvons noter que dans notre cas nous utilisons 3 longueurs d'ondes mais qu'il est possible de généraliser cette approche à un nombre quelconque de longueurs d'onde.

### 4.2.3 Résultats

Pour étudier le gain de l'approche inverse proposée nous comparons plusieurs reconstructions sur des hologrammes expérimentaux acquis avec le montage décrit figure 4.3. Nous montrons dans la figure 4.4 les reconstructions obtenues par approche inverse à l'aide d'un seul hologramme pour les trois longueurs d'onde, la moyenne de ces trois reconstructions et enfin la reconstruction avec l'approche conjointe proposée à l'aide des trois hologrammes acquis à différentes longueurs d'onde. La figure 4.4 nous montre le gain en qualité de reconstruction apporté par une approche inverse gérant de façon rigoureuse les données multi- $\lambda$ . Cette première approche peut encore être optimisée considérant le modèle de formation d'hologramme non-linéaire, décrit (Eq.2.30), plus précis qui sera plus détaillé dans le chapitre 5 (voir la figure 4.5). Le dernier résultat intéressant que nous pouvons mettre en évidence à l'aide de cette approche est l'importance de bien connaître les longueurs d'onde des lasers lorsqu'on traite des approches utilisant plusieurs longueurs d'onde en holographie numérique en ligne. Il est essentiel d'étalonner correctement ces longueurs d'onde en cherchant à les estimer lors de la résolution du problème inverse comme cela a été fait en collaboration avec Olivier Flas-seur [22]. En effet la distance objet-capteur  $z$  étant un paramètre commun pour



**FIGURE 4.4** – Reconstructions sur hologrammes expérimentaux : Reconstruction par approche inverse à l’aide d’un hologramme « rouge » a) ou « vert » b) ou bleu c). d) représente la moyenne des reconstructions a), b) et c). e) représente la reconstruction avec l’approche inverse proposée

les trois hologrammes (Eq.4.6), une erreur sur l’estimation d’une longueur d’onde peut biaiser *a priori* d’unicité que l’on a sur  $z$ . En effet le noyau de propagation de Fresnel  $\underline{h}_z^{\lambda_c}$  étant défini par :

$$\underline{h}_z^{\lambda_c}(x, y) = \frac{1}{i\lambda_c \cdot z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda_c \cdot z}\right) \quad (4.6)$$

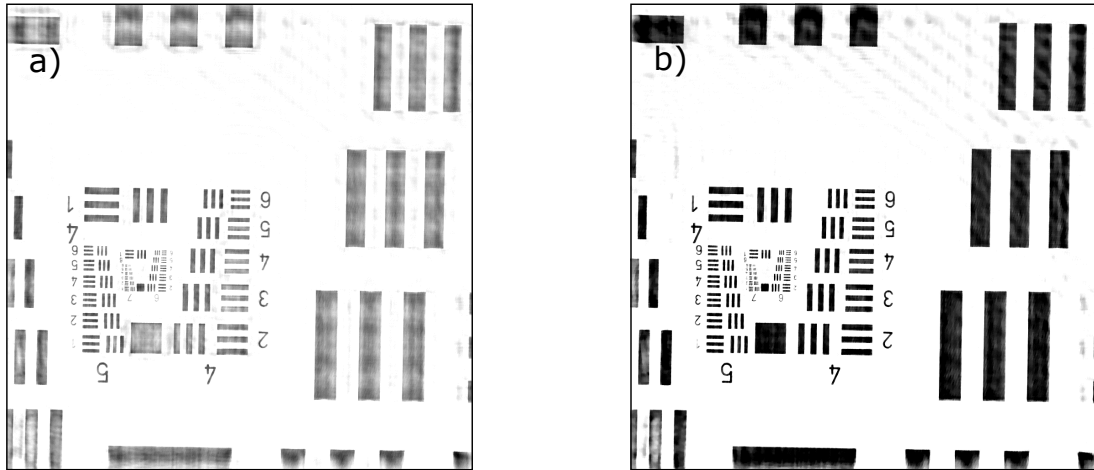
Il est donc important que les trois relations suivantes dépendent d’un seul  $z$ ,

$$\lambda_R^{\text{vrai}} \cdot z^{\text{vrai}} = \lambda_R \cdot z \quad (4.7)$$

$$\lambda_V^{\text{vrai}} \cdot z^{\text{vrai}} = \lambda_V \cdot z \quad (4.8)$$

$$\lambda_B^{\text{vrai}} \cdot z^{\text{vrai}} = \lambda_B \cdot z. \quad (4.9)$$

Nos travaux [22] présentent une méthode d’auto-étalonnage effectuée via une approche inverse paramétrique permettant d’estimer ces longueurs d’ondes de manière plus précise que ce que propose la donnée constructeur. Nous avons donc

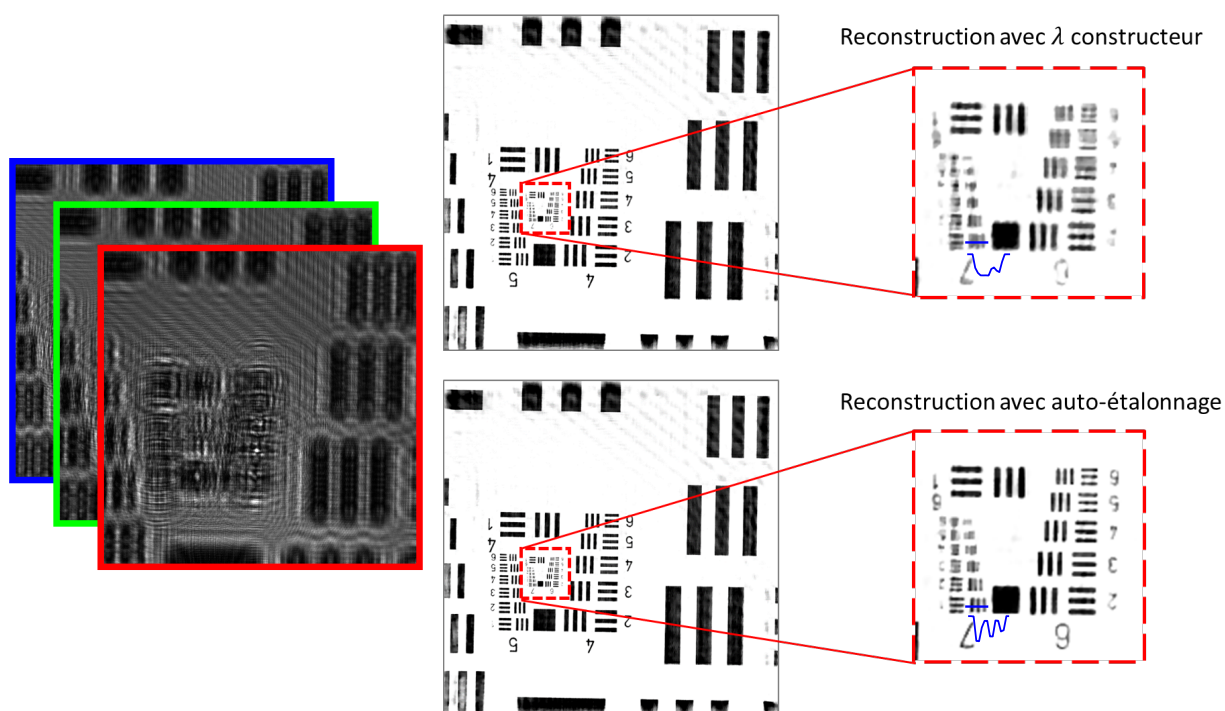


**FIGURE 4.5** – Reconstruction par l’approche inverse proposée avec deux modèles de formation d’hologrammes : **a)** Avec modèle de formation d’hologrammes linéaire, **b)** avec modèle de formation d’hologrammes non-linéaire.

estimé les longueurs d’onde de nos trois sources (Fig.4.1) à l’aide de cette méthode d’auto-étalonnage ( $\lambda_V$  estimée par un spectro-mètre) :

	$\lambda_R$ (en $nm$ )	$\lambda_V$ (en $nm$ )	$\lambda_B$ (en $nm$ )
Constructeur	$635 \pm 5$	$532 \pm 1$	$405 \pm 5$
Auto-étalonnage	$637.8 \pm 0.2$	$531.4$ ( <i>ref</i> )	$402.9 \pm 0.2$

Afin de montrer le gain qualitatif que permet d’obtenir cette estimation des longueurs d’onde nous avons proposé dans les travaux [81] de comparer deux reconstructions obtenues avec l’approche inverse munie d’un modèle de formation d’hologrammes non-linéaire : une reconstruction utilisant les longueurs d’onde données par le constructeur, et une deuxième reconstruction avec les longueurs d’onde estimées par la méthode [22] (voir la figure 4.6). Sur la figure 4.6, nous pouvons observer sur les petites structures que le gain en qualité est bien visible.



**FIGURE 4.6** – Comparaison des reconstructions obtenues avec les longueurs d’onde données par le constructeur pour l’une, et avec les longueurs d’onde estimées par la méthode auto-étalonnage. Sur les deux zooms des reconstructions figure en bleu des profils sur une des petites structures.

### 4.3 Deuxième approche : méthode inverse appliquée sur un seul hologramme acquis par un capteur RVB

La deuxième approche inverse en holographie "couleur" que nous proposons utilise un hologramme "couleur" acquis à l’aide d’un capteur RVB muni d’une matrice de Bayer, ce qui permet d’obtenir simultanément trois illuminations sur un hologramme "unique" à trois canaux spectraux. (Fig.4.7).

#### 4.3.1 Configuration

Pour ce montage nous utilisons donc un capteur RVB muni d’une matrice de Bayer avec une taille de pixel de  $2.2 \mu m$ , et trois diodes laser respectivement de longueur d’onde  $635 nm$ ,  $532 nm$  et  $405 nm$  selon les données constructeurs. Le but de cette expérience est d’allumer les trois diodes laser en même temps afin d’acquérir un hologramme couleur (Fig.4.7).

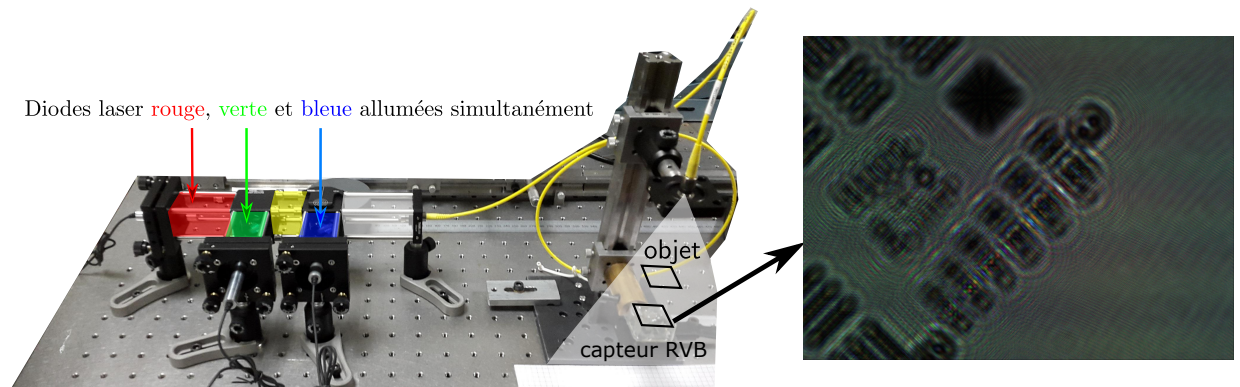


FIGURE 4.7 – Montage holographie couleur avec capteur RVB muni d'une matrice de Bayer

### 4.3.2 Formulation du problème inverse

Les motivations qui nous ont amené à proposer cette approche inverse étaient de pouvoir adapter les modèles de formation d'hologrammes proposés jusqu'à présent pour des hologrammes acquis avec un capteur monochrome, pour des hologrammes RVB acquis avec des capteurs RVB munis d'une matrice de Bayer (Fig.4.8). Les

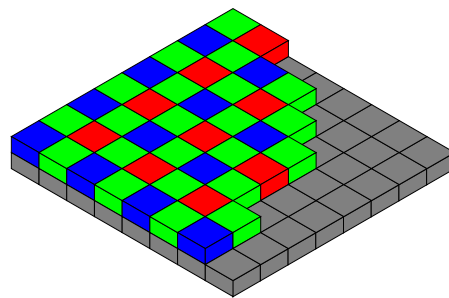


FIGURE 4.8 – matrice de Bayer

photodiodes étant seulement sensible à une intensité, la matrice de Bayer agit comme un filtre "couleur" sur l'ensemble des pixels, les répartissant sur trois canaux. On aura donc des pixels "rouges", des pixels "verts", et des pixels "bleus". Dans le cas idéal, lorsque chaque canal  $c$  ne laisse passer que les longueurs d'onde  $\lambda_c$ , le modèle associé à chaque canal  $c$  d'un hologramme RVB est modélisable de la manière suivante,

$$\overline{m}_{RVB}^c = \overline{H}_{\lambda_c} \vartheta \quad (4.10)$$

où  $\overline{H}_{\lambda_c}$  est l'opérateur modélisant la propagation d'une onde monochromatique décrit en (Eq.4.4) pour la longueur d'onde  $\lambda_c$ .

La formulation de ce problème inverses peut alors s'écrire,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \underset{0 \leq \vartheta \leq 1}{\operatorname{argmin}} \sum_{c=R,V,B} \left\| \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_c} \boldsymbol{\vartheta} - \overline{\mathbf{d}}_{RVB} \right\|_{\mathbf{W}^c}^2 + \tau_1 \|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 + \tau_2 TV_c(\boldsymbol{\vartheta}) \quad (4.11)$$

où,  $\mathbf{W}^c$  est la matrice inverse de covariance du bruit qui permet notamment dans ce cas de masquer les pixels non actifs dans le canal  $c$  selon la matrice de Bayer utilisée (Fig.4.9).

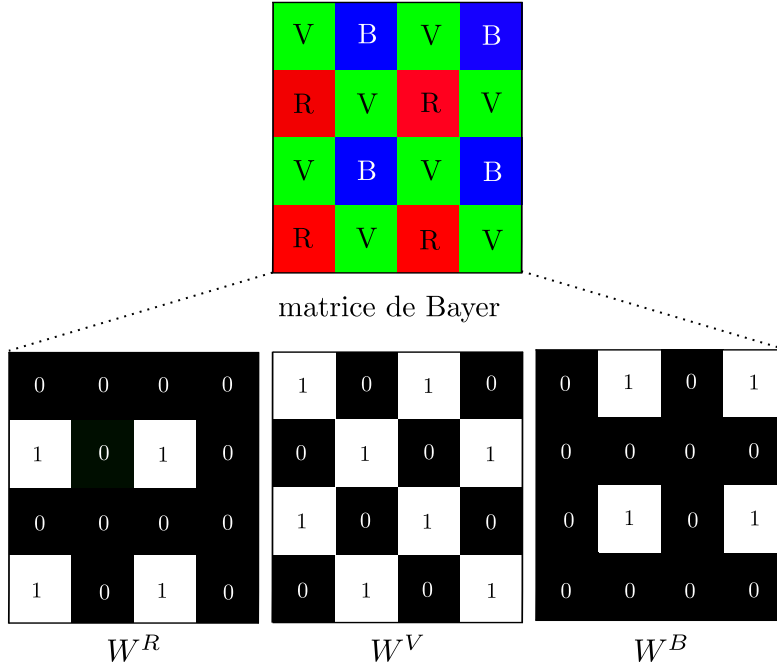
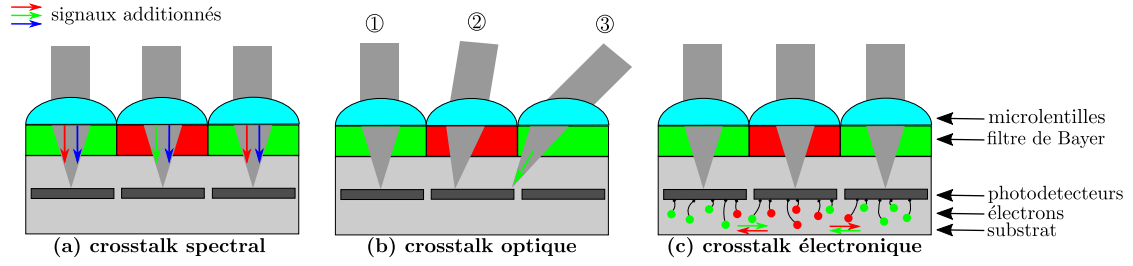


FIGURE 4.9 – Matrices poids  $W^c$  pour chaque canal de la matrice de Bayer

En pratique, l'utilisation d'un capteur RVB muni d'une matrice de Bayer fait apparaître des phénomènes dits de "crosstalk" traduisant des mélanges des longueurs d'onde d'illumination sur les canaux du capteur. Ils se manifestent sous trois formes différentes : un crosstalk spectral, un crosstalk optique et enfin un crosstalk qui peut être électronique (Fig.4.10). Les travaux [22] ont démontré qu'il était possible, d'estimer de façon précise les longueurs d'onde des diodes et de quantifier de manière précise cet effet de crosstalk à l'aide d'un auto-étalonnage réalisé à l'aide d'une approche inverse paramétrique. Cet auto-étalonnage permet d'estimer la matrice de crosstalk  $\mathbf{q}$  dont les éléments représentent les contributions de chaque longueur d'onde pour chaque canal spectral,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_R^R & q_R^V & q_R^B \\ q_V^R & q_V^V & q_V^B \\ q_B^R & q_B^V & q_B^B \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$



**FIGURE 4.10** – Phénomènes de crosstalk : (a) le crosstalk spectral, (b) le crosstalk optique, et (c) le crosstalk électronique

où  $q_V^R$  par exemple correspond au poids de la contribution de l'onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda_V$  dans le canal rouge  $C_R$ . La matrice de crosstalk définie par le constructeur est la suivante,

	$C_R$	$C_V$	$C_B$
$\lambda_R$	74	16	10
$\lambda_V$	12	70	18
$\lambda_B$	14	14	72

L'avantage de l'auto-étalonnage proposé par [22] est d'estimer de manière précise les longueurs d'onde et la matrice de crosstalk du montage expérimental. Compte-tenu des longueurs d'onde des diodes laser déjà estimées précédemment, l'estimation de la matrice de crosstalk associée donne les résultats suivants :

	$C_R$	$C_V$	$C_B$
$\lambda_R$	$73.7 \pm 0.1$	$15.6 \pm 0.1$	$10.7 \pm 0.1$
$\lambda_V$	$11.5 \pm 0.1$	$71.2 \pm 0.2$	$17.3 \pm 0.2$
$\lambda_B$	$13.1 \pm 0.1$	$10.9 \pm 0.1$	$76 \pm 0.1$

En reprenant le modèle de formation d'hologramme (Eq.4.10) , nous pouvons établir un nouveau modèle de formation d'hologramme RVB  $\overline{\mathbf{m}}_{RVB,CT}$  prenant en compte les phénomènes de crosstalk. Ce modèle de formation d'hologramme induit donc un mélange des ondes lumineuses à différentes longueurs d'onde sur chaque canal spectral  $c$  suivant un poids respectif donné par les coefficients de la matrice de crosstalk (Eq.4.12),

$$\overline{\mathbf{m}}_{RVB,CT}^c = \sum_{k=R,V,B} q_k^c \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_k} \vartheta \quad (4.13)$$

En définissant la matrice  $\mathbf{Q}_c$  de la manière suivante,

$$\mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} q_R^c \mathbf{I}_N \\ q_V^c \mathbf{I}_N \\ q_B^c \mathbf{I}_N \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

avec  $\mathbf{I}_N$  la matrice identité de taille  $N \times N$ , nous avons le modèle de formation d'hologramme RVB suivant,

$$\overline{\mathbf{m}}_{RVB,CT}^c = \mathbf{Q}_c^T (\overline{\mathbf{H}}_{\lambda_R} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_V} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_B})^T \boldsymbol{\vartheta} \quad (4.15)$$

La formulation du problème inverse proposant la reconstruction d'un hologramme RVB prenant en compte les phénomènes de crosstalk s'exprime de la manière suivante,

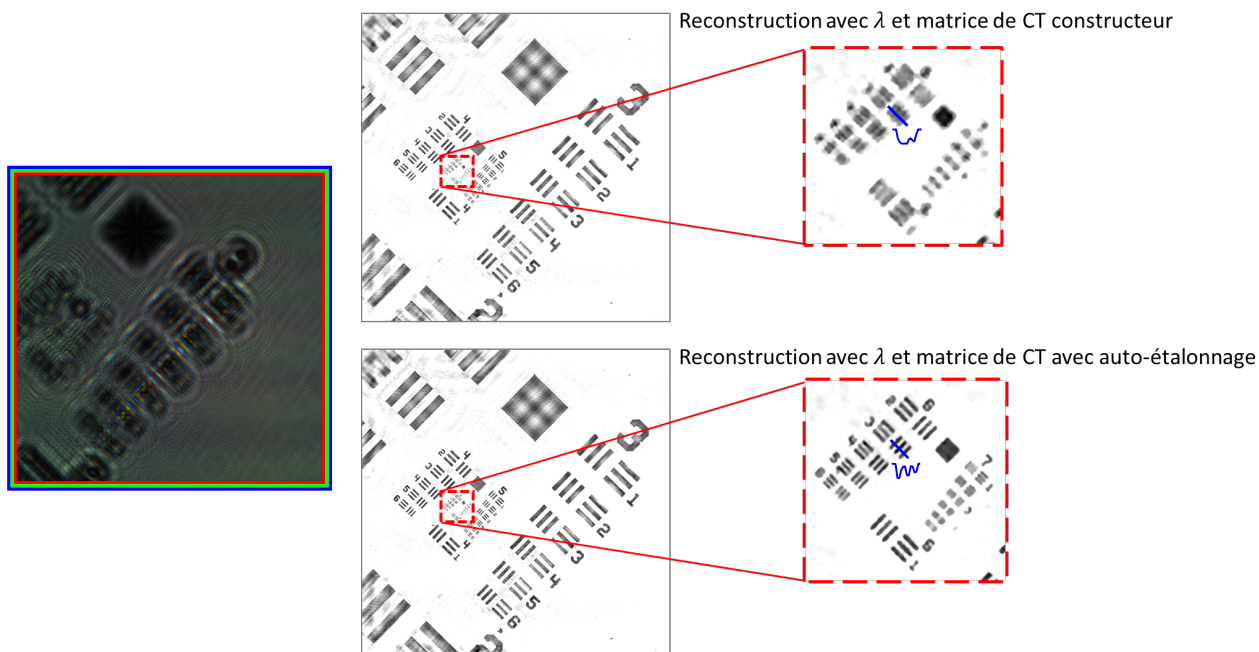
$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \underset{0 \leq \boldsymbol{\vartheta} \leq \mathbf{1}}{\operatorname{argmin}} \sum_{c=R,V,B} \left\| \mathbf{Q}_c^T (\overline{\mathbf{H}}_{\lambda_R} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_V} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_B})^T \boldsymbol{\vartheta} - \overline{\mathbf{d}}_{RVB} \right\|_{\mathbf{W}_c}^2 + \tau_1 \|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 + \tau_2 TV_\epsilon(\boldsymbol{\vartheta})$$

### 4.3.3 Résultats

Pour valider la faisabilité de cette méthode nous avons acquis un hologramme RVB à l'aide du montage (Fig.4.7). La distance objet-capteur est de 5.6 cm. L'objet est une mire type USAF 1951 opaque. Si la précédente approche multi- $\lambda$  devait théoriquement avoir le même  $z$  quelque soit l'hologramme rouge, vert ou bleu, l'unicité du paramètre  $z$  quelque soit le canal de l'hologramme RVB traité est encore plus évident. Si l'approche proposée ici a juste pour ambition d'être une preuve de faisabilité (le but final est de reconstruire des objets ayant une phase et une amplitude, cf. chapitre 5), nous montrons des résultats permettant de mettre en relief l'intérêt d'estimer le plus précisément possible les longueurs d'onde mais également la matrice de crosstalk lorsque l'on utilise un capteur RVB. Pour cela nous avons acquis un hologramme RVB de la mire et nous avons effectué deux reconstructions avec l'approche inverse proposée : une avec les longueurs d'onde et la matrice de crosstalk données par le constructeur, et l'autre avec les longueurs d'onde et la matrice de crosstalk estimées par la méthode d'auto-étalonnage. Il est à noter que l'estimation du  $z$  se fait à l'aide de la longueur d'onde "rouge". Les deux reconstructions obtenues paraissent similaires sur les grosses structures, mais comme pour la précédente approche, le fait de mieux estimer les longueurs d'onde ainsi que mieux estimer la matrice de crosstalk permet une meilleure reconstruction des petites structures (Fig.4.11).

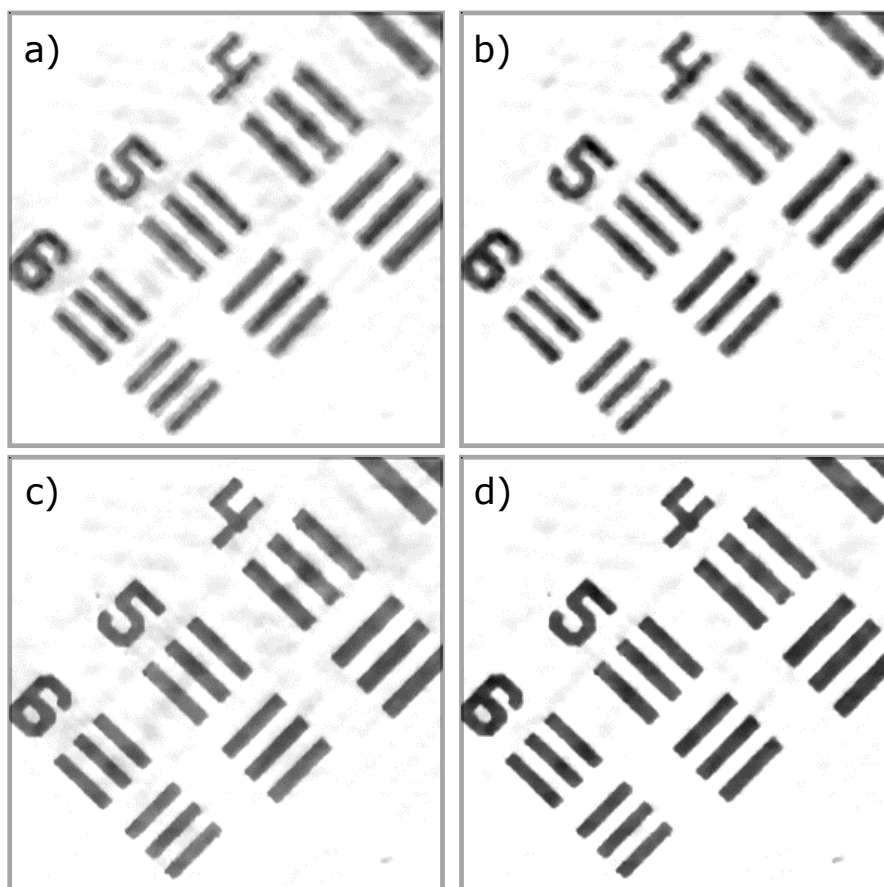
Afin de décorrélérer l'intérêt de la précision d'estimation des longueurs d'onde et de la matrice de crosstalk nous avons reconstruit une zone de cet hologramme de quatre manières différentes (Fig.4.12). La première reconstruction utilise les longueurs d'onde du constructeur mais ne prend pas en compte le crosstalk (Fig.4.12.(a)), la deuxième utilise les longueurs d'onde ainsi que la matrice de crosstalk données par le constructeur (Fig.4.12.(b)), la troisième utilise les longueurs d'onde estimées par la méthode d'auto-étalonnage tout en négligeant l'effet du crosstalk (Fig.4.12.(c)), et enfin la quatrième reconstruction utilise les longueurs d'onde ainsi que la matrice





**FIGURE 4.11** – Comparaison des reconstructions d'un hologramme RVB obtenues avec les longueurs d'onde et la matrice de crosstalk données par le constructeur pour l'une, et avec la méthode d'auto-étalonnage pour l'autre. Sur chaque reconstruction figure en bleu des profils sur une des petites structures.

de crosstalk estimées par la méthode d'étalonnage (Fig.4.12.(d)). Nous pouvons donc constater que l'estimation par la méthode d'auto-étalonnage des longueurs d'onde permet de supprimer les effets de défocalisation induits par la non-unicité du  $z$  alors que la bonne estimation de la matrice de crosstalk permet d'avoir un meilleur RSB sur le fond des reconstructions.



**FIGURE 4.12** – Comparaison des reconstructions à partir d'un hologramme couleur avec les mêmes coefficients de régularisation : Avec  $\lambda$  constructeur (a,b) et la matrice de crosstalk du constructeur b), avec  $\lambda$  optimisés par auto-étalonnage (c,d) et la matrice de crosstalk estimée par auto-étalonnage d).

#### 4.4 Troisième approche : méthode inverse super-résolue à l'aide d'hologrammes RVB translattés dans un plan

La troisième approche inverse en holographie "couleur" que nous proposons est une approche inverse super-résolue utilisant une pile d'hologrammes "couleur" acquis à l'aide d'un capteur RVB muni d'une matrice de Bayer. Cette approche inverse reprend la philosophie de la méthode inverse super-résolue décrite chapitre 3 ainsi que celle de l'approche inverse RVB décrite dans la partie 4.3. Il est à noter que cette approche a été l'objet d'une présentation orale à la conférence francophone Holophi4 [80].

### 4.4.1 Configuration

Le montage utilisé pour l'acquisition de la pile d'hologrammes RVB est similaire au montage 4.7, à la différence près que pour chaque hologramme de la pile nous translatons aléatoirement l'objet dans le plan (Fig.4.13). Nous obtenons alors une

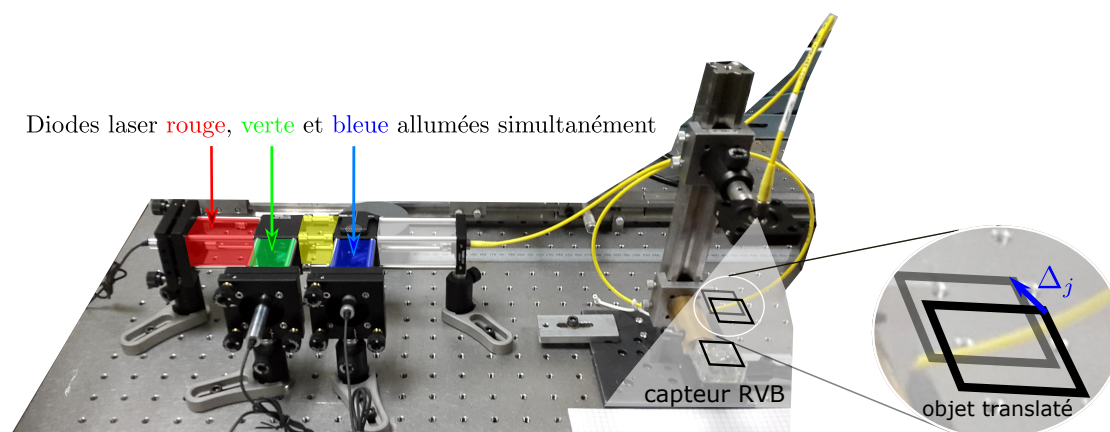


FIGURE 4.13 – Montage holographie couleur avec tranlation du capteur RVB

pile de  $N_{pile}$  hologrammes RVB (Fig.4.14).

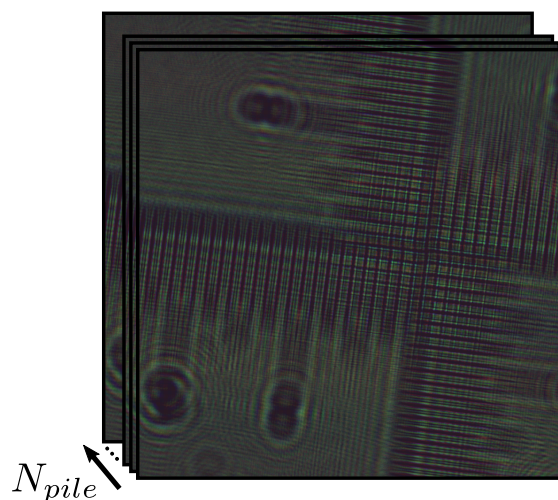


FIGURE 4.14 – Pile de  $N_{pile}$  hologramme RVB translatis

### 4.4.2 Formulation du problème inverse

Le problème inverse que nous proposons cherche toujours à reconstruire l'opacité d'un objet. Le modèle de formation d'image permettant de modéliser le canal

spectral  $c$  du  $j$ -ième hologramme RVB de la pile translaté de  $\Delta_j$  est le suivant,

$$\overline{\mathbf{m}}_{RVB}^{c,j} = Q_c^T \left( \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_R, \Delta_j}^{SR} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_V, \Delta_j}^{SR} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_B, \Delta_j}^{SR} \right)^T \boldsymbol{\vartheta}^{SR} \quad (4.16)$$

où  $\overline{\mathbf{H}}_{\lambda_k, \Delta_j}^{SR}$  est l'opérateur linéaire centré modélisant la propagation d'onde monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda_k$  dans l'espace échantillonné super-résolu (SR) à l'aide d'un noyau de Fresnel décentré de  $\Delta_j$  comme dans le cas de l'approche inverse super-résolue décrite au chapitre 3.  $\boldsymbol{\vartheta}^{SR}$  est l'opacité réelle inconnue de l'objet dans l'espace échantillonné super-résolu (SR).

La formulation du problème inverse s'établit donc de la manière suivante,

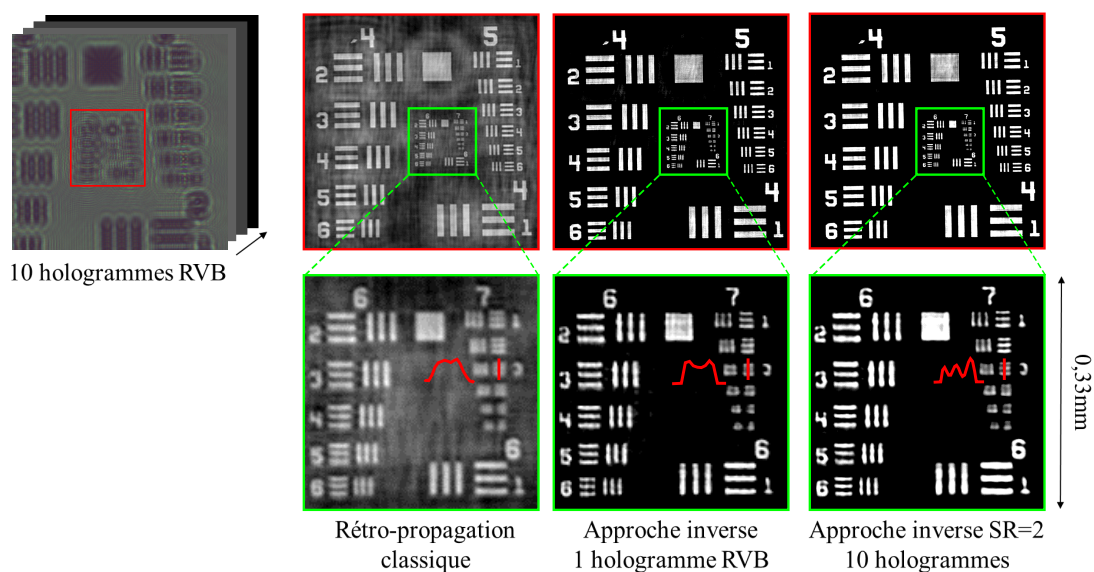
$$\boldsymbol{\vartheta}^{\hat{SR}} = \underset{\Delta_j, \{0 \leq \boldsymbol{\vartheta}^{SR} \leq 1\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{N_{pile}} \sum_{c=R,V,B} \left\| Q_c^T \left( \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_R, \Delta_j}^{SR} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_V, \Delta_j}^{SR} \overline{\mathbf{H}}_{\lambda_B, \Delta_j}^{SR} \right)^T \boldsymbol{\vartheta}^{SR} - \overline{\mathbf{d}}_j^{SR} \right\|_{\mathbf{W}_{SR}^c}^2 + \tau_1 \|\boldsymbol{\vartheta}^{SR}\|_1 + \tau_2 TV_\epsilon(\boldsymbol{\vartheta}^{SR})$$

où,

- $\overline{\mathbf{d}}_j^{SR}$  sont les données du  $j$ -ième hologramme RVB réparties sur une grille sur-échantillonnée (Remarque : comme dans l'approche inverse super résolue du chapitre précédent, les données manquantes dans l'espace super-résolu sont mises arbitrairement à 0 comme le montre l'illustration de la figure 3.6),
- $\mathbf{W}_{SR}^c$  est la matrice inverse de covariance du bruit qui permet notamment dans ce cas de masquer les pixels non actifs dans le canal  $c$  selon la matrice de Bayer utilisée (Fig.4.9) ainsi que les données manquantes dans l'espace super-résolu.

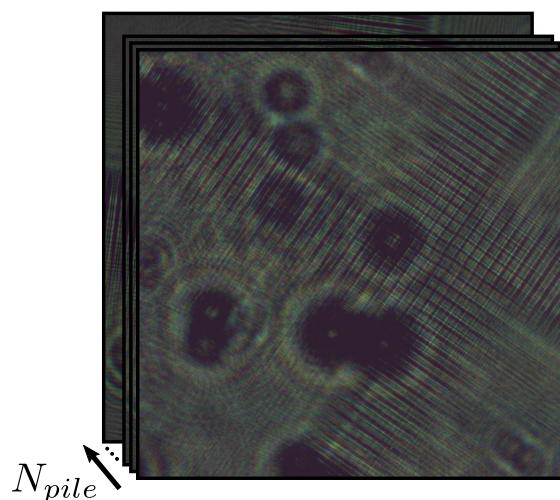
### 4.4.3 Résultats

La figure 4.15 montre un premier résultat de reconstruction d'une mire USAF par l'approche proposée. Le gain en qualité apporté par la super-résolution est nettement visible sur les petites structures. Dans une seconde expérience, nous nous sommes intéressés à montrer que l'approche inverse RGB super-résolue permettait de reconstruire des hologrammes fortement dégradés. Si le gain en terme de qualité de reconstruction a été montré et quantifié à l'aide de simulations dans la publication [80], nous allons ici montrer des résultats sur des hologrammes expérimentaux. Pour cela nous avons acquis 25 hologrammes RVB translatés sur un plan 2D les uns par rapport aux autres avec le montage 4.13. Des objets perturbateurs opaques (des spores de lycopes) sont placés entre l'objet et le capteur RVB afin de perturber le front d'onde incident arrivant sur la mire. Notons que ces objets perturbateurs sont déplacés aléatoirement pour chaque nouvel hologramme acquis. Avec cette procédure nous avons donc acquis une



**FIGURE 4.15** – Amélioration résolution spatiale

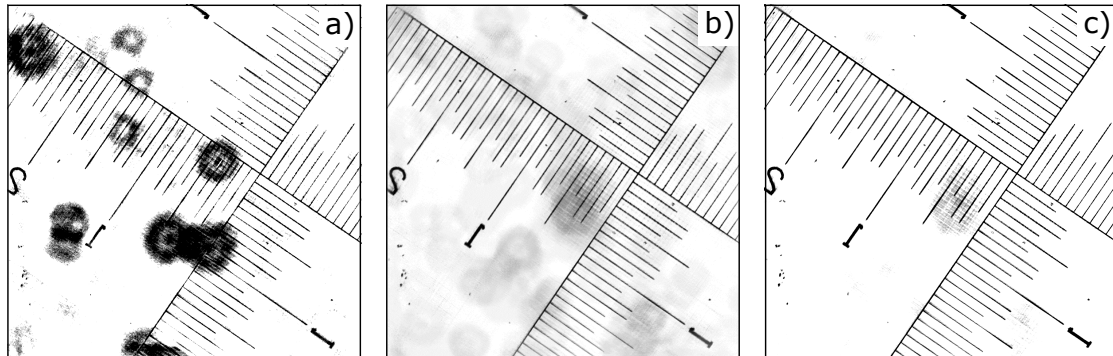
pile d'hologrammes dégradés par un bruit nonstationnaire, et décalés les uns par rapport aux autres dans un plan 2D (Fig.4.16). Cette pile d'hologrammes nous



**FIGURE 4.16** – Pile d'hologrammes perturbés par des spores de lycopes positionnées entre la source et l'objet

a permis de comparer une reconstruction par approche inverse à l'aide d'un seul hologramme (Fig.4.17.(a)), la moyenne des  $N_{pile}$  reconstructions par approche inverse effectuée sur chaque hologramme de la pile (Fig.4.17.(b)) et enfin une approche inverse super-résolue (avec un facteur de super-résolution égal à 2 utilisant

la pile d'hologrammes (Fig.4.17.(c)). Ces reconstructions (Fig.4.17) permettent



**FIGURE 4.17** – Reconstructions obtenues à l'aide des hologrammes perturbés par des lycopes :  
a) Reconstruction avec l'approche inverse "méthode 2" proposée à l'aide d'un hologramme RVB,  
b) Somme des  $N_{pile}$  approches inverses "méthode 2" avec les  $N_{pile}$  hologrammes RVB de la pile,  
c) Reconstruction RVB super-résolue "méthode 3" à l'aide des  $N_{pile}$  hologrammes de la pile.

de confirmer l'intérêt d'utiliser la redondance d'information présente dans la pile d'hologrammes, mais aussi de montrer qu'une approche inverse super-résolue permettant de reconstruire conjointement un objet permet d'obtenir une bien meilleure reconstruction de l'opacité de l'objet comparée à une moyenne des  $N_{pile}$  reconstructions par approche inverse obtenues chacune avec un hologramme différent de la pile (Fig.4.17.(b).(c)).

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre ont été proposées trois approches « problèmes inverses » permettant de traiter l'holographie "couleur" sous différents aspects. La première approche demande trois acquisitions indépendantes et est donc seulement utilisable dans le cas d'objets fixes, alors que la deuxième approche s'applique sur des hologrammes "couleur" (acquisition simultanée sur un capteur muni d'une matrice de Bayer) en permettant de traiter les situations où les objets sont en mouvement. Une troisième approche, super-résolue, a été proposée afin d'améliorer la résolution et le RSB des reconstructions obtenues avec la deuxième approche. Ce chapitre a mis en évidence à quel point il est important de connaître la physique du capteur, surtout dans le cas des capteurs « couleur » munis d'une matrice de Bayer car ils nécessitent de prendre en compte de manière rigoureuse les effets de mélanges spectraux dans les approches « problèmes inverses ». Ces travaux ont aussi permis de montrer que l'auto-calibration proposée par Flasseur et *al* [22] est très pertinente et permet un gain significatif en terme de reconstruction. Ces trois approches

« problèmes inverses » ont essentiellement pour visée de constituer des « preuves de concepts » de l'application d'approches « problèmes inverses » adaptées à l'holographie en ligne. Les approches « problèmes inverses » proposées permettent de reconstruire exclusivement des objets purement absorbants présentant l'avantage de pouvoir être représentés sous forme d'une transmittance réelle invariante quelle que soit la longueur d'onde. Cette *a priori* d'objets réels (purement absorbants) peut être vite limitant, notamment lorsque les objets d'intérêt sont des objets de phase, c'est-à-dire transparents. Pour aller plus loin dans la complexité des objets reconstruits, nous allons à présent nous intéresser à la reconstruction de l'information de phase, information notamment nécessaire afin de remonter à l'information de l'indice optique d'un objet si son épaisseur est connue.

# Chapitre 5

## Reconstruction de phase par une approche inverse régularisée

*Dans ce dernier chapitre est présentée une approche « problèmes inverses » permettant de reconstruire des objets déphasants et absorbants, qui repose sur des a priori physiques. Résoudre ce problème inverse demande de pouvoir minimiser une fonction coût qui est non-convexe et non-différentiable, ce qui n'est pas possible avec les outils d'optimisation utilisés jusqu'à présent pour résoudre les problèmes de grande dimension. Nous exposons la stratégie d'optimisation, basée sur l'éclatement des variables et l'élaboration d'un opérateur proximal, que l'on a adoptée. Cette méthode est testée sur une application en mécanique des fluides et une application en microbiologie qui utilisent deux montages d'holographie en ligne différents. L'essentiel de ce chapitre est basé sur l'article [82].*

### 5.1 Introduction et état de l'art

Cette partie porte sur une approche inverse régularisée permettant la reconstruction d'objets non-paramétriques ayant une phase et une absorbance. En holographie numérique en ligne les premières reconstructions de phase ont été proposées par Liu *et al.* à l'aide des algorithmes de reconstructions proposés par [83, 84]. C'est une méthode de choix notamment pour imager des objets transparents qui ne peuvent pas se voir avec des systèmes d'imagerie conventionnels.

Alors que les montages interférométriques comme l'holographie hors axe [85] ou de phase shifting [86] permettent de mesurer la phase dans le plan de l'hologramme et donc retrouver l'amplitude complexe dans le plan objet par simple rétro-propagation de l'onde complexe, l'holographie en ligne demande de son côté



une inversion pour retrouver la phase dans le plan de l'hologramme [83, 84, 87] ou dans le plan objet [88]. La reconstruction de la phase est d'ailleurs un problème central de l'holographie en ligne [89], mais aussi pour tomographie diffractive par rayons X [90, 91].

Les méthodes de l'état-de-l'art proposent de nombreuses variantes de l'algorithme très répandu Gerchberg-Saxton [92, 93, 94] ou encore l'utilisation de plusieurs hologrammes à différentes distances [92, 94]. Ces algorithmes de reconstruction de phase requièrent d'injecter des contraintes sur l'objet souvent sous forme de support (support de l'absorption des objets mais aussi de leurs phases...). Pour estimer correctement ce support cela nécessite donc une bonne pré-estimation de la phase, mais la phase ne peut pas être bien estimée sans ce support, nous faisons donc face à un paradoxe qui ne peut être résolu que par une reconstruction jointe de ce support et de la phase. Les approches inverses demandent d'avoir un modèle de formation d'images le plus fin possible (ce point précis sera d'ailleurs discuté dans ce chapitre) et d'inclure des contraintes sur l'objet reconstruit permettant de réaliser cette estimation jointe. Plusieurs approches inverses ont déjà été proposées en holographie numérique [18, 73, 95, 96] et appliquées pour différents problèmes d'estimation de la phase : en holographie numérique en ligne [88, 95, 97], en holographie numérique hors-axe [18, 73, 96] et en tomographie diffractive [98]. Le point clé de telles approches est qu'elles ont souvent besoin de résoudre des problèmes d'optimisation non-différentiables et non-convexes. Dans ce contexte les algorithmes proximaux sont particulièrement adaptés, résolvant des problèmes convexes [50, 99] mais aussi non-convexes [95, 100].

## 5.2 Modèle de formation d'image non-linéaire

L'objet d'intérêt est modélisé comme une distribution complexe de transmittance  $\underline{t}(x, y)$  localisée dans un plan. Contrairement aux chapitres 3 et 4 qui utilisaient des modèles linéaires de formation d'hologrammes, nous nous appuyerons dans ce chapitre sur le modèle non-linéaire de formation d'hologramme explicité en (Eq.2.17). Ce modèle a le mérite d'introduire moins d'approximations et donc d'être plus précis, surtout en ce qui concernant les objets de transmittance complexe. L'enregistrement numérique de cette intensité par le capteur induit une discrétisation. On définit donc les données comme un vecteur  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{N^2}$  à  $N^2$  échantillons ( $N^2$  pixels). Nous utilisons la même discrétisation dans l'espace objet que dans l'espace du capteur et représentons par un vecteur  $\mathbf{m}(\underline{t}) \in \mathbb{R}^{N^2}$  le modèle de l'hologramme calculé pour une transmittance discrétisée  $\underline{t} \in \mathbb{C}^{N^2}$  (les inconnues de notre problème). Nous notons  $\underline{H}$  la matrice représentant l'opérateur linéaire discrétisé de convolution 2D modélisant la propagation en chaque pixel de coordonnées  $(x, y)$  de la transmittance  $\underline{t}$ . Le vecteur  $\underline{t}$  constitue donc le vecteur d'inconnues

à reconstruire. Le modèle de formation de l'hologramme en continu (Eq.2.17) peut donc se réécrire comme suit :

$$[\mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}})]_k = |[\underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{t}}]_k|^2, \quad (5.1)$$

où  $[\cdot]_k$  indique le  $k$ -ième élément du vecteur.

Le modèle de formation de l'hologramme  $\mathbf{d}$  s'écrit donc :

$$[\mathbf{d}]_k = c \cdot [\mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}})]_k + [\mathbf{n}]_k = c \cdot |[\underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{t}}]_k|^2 + [\mathbf{n}]_k \quad (5.2)$$

où nous avons introduit un paramètre d'échelle  $c$  tenant compte de l'intensité de l'onde de référence  $\underline{\mathbf{A}}_0$  et du facteur de conversion de cette intensité en niveaux de gris. Le vecteur  $[\mathbf{n}]_k$  représente quant à lui le bruit, que nous considérerons blanc gaussien, sur le  $k$ -ème pixel du capteur.

### 5.3 Formulation du problème inverse

L'algorithme de reconstruction doit permettre d'estimer la transmittance  $\underline{\mathbf{t}}$  dans le plan objet à partir d'un hologramme  $\mathbf{d}$ . Une simple inversion du modèle de formation d'hologramme (Eq.5.2) n'est pas possible ( $2N^2$  valeurs complexes inconnues alors que l'hologramme possède seulement  $N^2$  valeurs réelles). Il est donc primordial d'introduire des contraintes sur la transmittance reconstruite. Ces contraintes peuvent prendre deux formes : (i) des contraintes dures étant des contraintes strictes telles que des contraintes de bornes, et (ii) des contraintes douces favorisant des propriétés (lissage spatial, ...). Les contraintes dures restreignent le domaine dans lequel peut être reconstruite la transmittance ; ce domaine sera noté  $\Lambda$ . Nous proposons une approche inverse régularisée visant à minimiser la somme entre une attache aux données notée  $\mathcal{D}$  et un terme de régularisation noté  $\mathcal{R}$ . Le problème de reconstruction est formulé sous la forme d'un problème de minimisation :

$$\widehat{\underline{\mathbf{t}}} = \arg \min_{\underline{\mathbf{t}} \in \Lambda} \left\{ \min_c \mathcal{D}(\underline{\mathbf{t}}, c) \right\} + \mathcal{R}(\underline{\mathbf{t}}), \quad (5.3)$$

Notons que le paramètre d'échelle  $c$  introduit dans l'équation (Eq.5.2) constitue également dans notre cas un paramètre inconnu à estimer. Comme nous faisons l'hypothèse que l'hologramme est perturbé par un bruit blanc gaussien (Eq.5.2), nous utilisons comme attache aux données à minimiser la log-vraisemblance gaussienne suivante :

$$\mathcal{D}(\underline{\mathbf{t}}, c) = \|c \cdot \mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}}) - \mathbf{d}\|_{\mathbf{W}}^2, \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{W}$  est l'inverse de la matrice de covariance du bruit (diagonale puisque le bruit est supposé blanc) [5, 66, 60].

<i>A priori</i> physique	Contraintes mathématiques sur $\underline{t} =  \underline{t} .e^{i\varphi(\underline{t})}$	
Milieu dilué (parcimonie des objets opaques)	$\mathcal{R}_1(\underline{t}) : \sum_k  1 - [\underline{t}]_k $	( $1 -  \underline{t} $ a une faible norme $L1$ )
Milieu dilué (parcimonie des objets déphasants)	$\mathcal{R}_2(\underline{t}) : \sum_k  \Im([\underline{t}]_k) $	( $\Im(\underline{t})$ a une faible norme $L1$ )
Absorption et phase lisses	$\mathcal{R}_{TV}^\epsilon(\underline{t})$	(norme TV relaxée, cf.Eq. 5.8)
Milieu passif (absorbant)	$\underline{t} \in \Omega = \{\underline{t} \in \mathbb{C}^N, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket,  [\underline{t}]_k  \leq 1\}$	
Objets peu épais/différence d'indice faible	$\underline{t} \in \Psi = \{\underline{t} \in \mathbb{C}^N, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \varphi_{min} \leq \varphi([\underline{t}]_k) \leq \varphi_{max}\}$	

**TABLE 5.1** – Contraintes physiques considérées pour la méthode de reconstruction.

### 5.3.1 Estimation du paramètre $c^*$

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'estimation du paramètre d'échelle optimal  $c^*$  établi de la manière suivante,

$$c^*(\underline{t}) = \underset{c}{\operatorname{argmin}} \quad \|c \cdot \mathbf{m}(\underline{t}) - \mathbf{d}\|_W^2. \quad (5.5)$$

La résolution directe de ce critère donne la solution suivante :

$$c^*(\underline{t}) = \frac{\mathbf{m}(\underline{t})^T \mathbf{W} \mathbf{d}}{\mathbf{m}(\underline{t})^T \mathbf{W} \mathbf{m}(\underline{t})}. \quad (5.6)$$

En remplaçant  $c$  par  $c^*(\underline{t})$  dans (Eq.5.4) on peut définir une attache aux données ne dépendant que de  $\underline{t}$  :

$$\mathcal{D}^*(\underline{t}) = \|c^*(\underline{t}) \cdot \mathbf{m}(\underline{t}) - \mathbf{d}\|_W^2. \quad (5.7)$$

### 5.3.2 Régularisations : contraintes physiques sur la transmittance reconstruite

Plusieurs contraintes issues d'une réalité physique sur la transmittance des objets peuvent être considérées. La Table 5.1 répertorie l'ensemble des contraintes que nous considérerons dans la méthode problèmes inverses proposée. Les deux premières contraintes sont des contraintes douces favorisant le fait qu'un grand nombre de pixels de la transmittance reconstruite sont complètement transparents ( $|[\underline{t}]_k| = 1$  pour beaucoup de  $k$ ) et/ou n'introduisent pas de déphasage ( $\varphi([\underline{t}]_k) = 0$ , alors  $\Im([\underline{t}]_k) = 0$  pour beaucoup de  $k$ ). La troisième contrainte favorise une transmittance spatialement lisse (par conséquent un module et une phase lisses), tout en gardant des bords francs (qui a pour but de délimiter les frontières de l'objet). Cette contrainte se fait à l'aide d'une généralisation de la variation totale pour les matrices à valeurs complexes, et inclut un paramètre  $\epsilon$  permettant de

s'affranchir des problèmes de non-différentiabilités par une relaxation :

$$\mathcal{R}_{\text{TV}}^\epsilon(\underline{t}) = \sum_k \sqrt{(\Delta_k^x \Re(\underline{t}))^2 + (\Delta_k^y \Re(\underline{t}))^2 + (\Delta_k^x \Im(\underline{t}))^2 + (\Delta_k^y \Im(\underline{t}))^2} + \epsilon^2. \quad (5.8)$$

où  $\Delta^x$  et  $\Delta^y$  sont respectivement les opérateurs de différences finies dans la direction  $\vec{x}$  (respect. dans la direction  $\vec{y}$ ), approximation du gradient.

Les deux dernières contraintes sont des contraintes dures, qui sont appliquées de façon stricte. La première de ces contraintes impose que puisque nous reconstruisons une transmittance et que l'objet n'agit pas comme une source lumineuse, le module de sa transmittance doit être comprise entre 0 (objet complètement absorbant) et 1 (objet complètement transparent). La seconde contrainte peut être utilisée pour mettre des contraintes de bornes sur la phase reconstruite (borne inférieure et supérieure). Cela est notamment utilisé lorsque l'on a un *a priori* sur l'indice de refraction du milieu et celui de l'objet observé, ainsi que l'épaisseur maximum de l'objet. Remarquons qu'en général si les objets observés sont en contraste positif ou négatif par rapport au milieu (plus ou moins réfractant), ce qui permet de mettre  $\varphi_{min}$  ou  $\varphi_{max}$  à 0.

L'approche problème inverse proposée incluant les différentes contraintes physiques énumérées se résume au problème de minimisation suivant :

$$\hat{\underline{t}} = \arg \min_{\underline{t} \in \Omega \cap \Psi} \mathcal{D}^*(\underline{t}) + \alpha_1 \mathcal{R}_1(\underline{t}) + \alpha_2 \mathcal{R}_2(\underline{t}) + \alpha_3 \mathcal{R}_{\text{TV}}^\epsilon(\Re(\underline{t}), \Im(\underline{t})) \quad (5.9)$$

où  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \mathbb{R}^+$  sont aussi appelés hyper-paramètres dont leurs valeurs donnent un poids plus ou moins important à chaque contrainte physique considérée.

## 5.4 Le problème d'optimisation

### 5.4.1 Reconstruction par éclatement des variables

Le problème inverse est formulé comme la minimisation d'une somme de fonctions sous contraintes (Eq.5.9), mais certaines de ces fonctions sont non-lisses et sont non-convexes, ce qui complique le problème de minimisation. La solution pour résoudre ce problème est d'introduire un éclatement des variables [99]. Pour ce faire, nous posons  $\Re(\underline{t}) = \mathbf{a}$  et  $\Im(\underline{t}) = \mathbf{b}$  et nous ré-écrivons le problème (Eq.5.9) comme suit :

$$\begin{cases} \underline{t}^* = \underset{\underline{t}, \mathbf{a}, \mathbf{b}}{\text{argmin}} & f_{\alpha_3}(\underline{t}) + g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \text{sous les contraintes :} & \Re(\underline{t}) = \mathbf{a}, \Im(\underline{t}) = \mathbf{b}, \text{ et } (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \in \Omega \cap \Psi, \end{cases} \quad (5.10)$$

où  $f_{\alpha_3}(\underline{\mathbf{t}}) = \mathcal{D}^*(\underline{\mathbf{t}}) + \alpha_3 \mathcal{R}_{\mathcal{T}\mathcal{V}}^\epsilon(\Re(\underline{\mathbf{t}}), \Im(\underline{\mathbf{t}}))$  est une fonction non convexe lisse, et  $g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1 \sum_k \left(1 - \sqrt{\mathbf{a}_k^2 + \mathbf{b}_k^2}\right) + \alpha_2 \sum_k |\mathbf{b}_k|$  est une fonction non convexe non lisse.

Le lagrangien augmenté du problème (Eq.5.10) s'écrit :

$$\mathcal{L}_\beta(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{u}}) = f_{\alpha_3}(\underline{\mathbf{t}}) + g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta \|\underline{\mathbf{t}} - (\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) + \underline{\mathbf{u}}\|_2^2 \quad (5.11)$$

où  $\underline{\mathbf{u}}$  est la variable duale normalisée, et  $\beta > 0$  est le paramètre de pénalisation augmentée.

La résolution classique par la méthode des multiplicateurs revient à une minimisation itérative alternée ( $j$  sera le compteur du nombre d'itérations) :

$$\{\underline{\mathbf{t}}^{(j+1)}, \mathbf{a}^{(j+1)}, \mathbf{b}^{(j+1)}\} = \arg \min_{\underline{\mathbf{t}}, (\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) \in \Omega \cap \Psi} \mathcal{L}_\beta(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{u}}^{(j)}) \quad (5.12)$$

$$\text{mise à jour des variables duales : } \underline{\mathbf{u}}^{(j+1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(j)} + \underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} - (\mathbf{a}^{(j+1)} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}^{(j+1)}) \quad (5.13)$$

Si (5.12) est un problème d'optimisation joint des variables  $\underline{\mathbf{t}}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  avec contraintes de bornes, il est possible de résoudre ce problème de manière alternée à l'aide de l'algorithme des directions alternées (ADMM) [58] (méthode détaillée partie 2.6.3) de la manière itérative suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} = \underset{\underline{\mathbf{t}}}{\operatorname{argmin}} \quad f_{\alpha_3}(\underline{\mathbf{t}}) + \beta \|\underline{\mathbf{t}} - (\mathbf{a}^{(j)} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}^{(j)}) + \underline{\mathbf{u}}^{(j)}\|_2^2 \\ \{\mathbf{a}^{(j+1)}, \mathbf{b}^{(j+1)}\} = \underset{(\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) \in \Omega \cap \Psi}{\operatorname{argmin}} \quad g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta \|\underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} - (\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) + \underline{\mathbf{u}}^{(j)}\|_2^2 \\ \text{mise à jour des variables duales : } \underline{\mathbf{u}}^{(j+1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(j)} + \underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} - (\mathbf{a}^{(j+1)} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}^{(j+1)}), \end{array} \right. \quad (5.14)$$

nous utiliserons dans notre cas, la variante proposée par Mourya *et al.* [59] (et détaillée dans la partie 2.6.4), présentant de meilleures propriétés de convergence en résolvant ce problème de manière hiérarchique :

$$\underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} = \underset{\underline{\mathbf{t}}}{\operatorname{argmin}} f_{\alpha_3}(\underline{\mathbf{t}}) + g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}^*(\underline{\mathbf{t}}), \mathbf{b}^*(\underline{\mathbf{t}})) + \beta \|\underline{\mathbf{t}} - (\mathbf{a}^*(\underline{\mathbf{t}}) + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}^*(\underline{\mathbf{t}})) + \underline{\mathbf{u}}^{(j)}\|_2^2 \quad (5.15)$$

$$\text{avec } \{\mathbf{a}^*(\underline{\mathbf{t}}), \mathbf{b}^*(\underline{\mathbf{t}})\} = \underset{(\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) \in \Omega \cap \Psi}{\operatorname{argmin}} g_{\alpha_1, \alpha_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta \|\underline{\mathbf{t}} - (\mathbf{a} + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}) + \underline{\mathbf{u}}^{(j)}\|_2^2 \quad (5.16)$$

$$\text{mise à jour des variables duales : } \underline{\mathbf{u}}^{(j+1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(j)} + \underline{\mathbf{t}}^{(j+1)} - (\mathbf{a}^*(\underline{\mathbf{t}}^{(j+1)}) + \underline{\mathbf{i}}\mathbf{b}^*(\underline{\mathbf{t}}^{(j+1)})).$$

Le problème (Eq.5.15) est un problème de minimisation différentiable pouvant être résolu à l'aide d'une méthode quasi-Newton [47]. Ce type de méthode ne requiert, à chaque itération  $j$ , que le calcul du coût et du gradient au "point"  $\underline{\mathbf{t}}$  de

la fonctionnelle à minimiser : on parle d'évaluation de la fonctionnelle. Lors d'une itération, la fonctionnelle peut être évaluée plusieurs fois en des points  $\underline{\mathbf{t}}$  différents (et pas seulement en  $\underline{\mathbf{t}}^{(j)}$ ), notamment lors de la recherche de pas. Dans le cas de l'optimisation hiérarchique proposée ci-dessus, les valeurs optimales  $a^*$  et  $b^*$  doivent systématiquement être ré-estimées au point  $\underline{\mathbf{t}}$  où est évaluée la fonctionnelle. Pour cela à chaque itération il faut résoudre le problème de minimisation (Eq.5.16) qui ne peut être résolu à l'aide d'outils d'optimisation lisse, car il est non-convexe et surtout non-différentiable, et enfin met en jeu des contraintes de bornes non-linéaires. Le problème (Eq.5.16) présente cependant l'avantage d'être séparable sur chaque pixels. Le concept de "proximal mapping" peut être étendu aux fonctions non-convexes [100], et dans notre cas  $a^*$  et  $b^*$  peuvent calculées sous forme analytique, en utilisant l'opérateur proximal suivant :

$\forall k \in \llbracket 1, N^2 \rrbracket$  avec  $\{p, q\} \in \mathbb{R}^2$  :

$$\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}(p, q) = \begin{cases} \underset{\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k}{\text{argmin}} & \beta(p - a_k)^2 + \beta(q - b_k)^2 + g_{\alpha_1, \alpha_2}(a_k, b_k) \\ \text{sous contraintes :} & a_k^2 + b_k^2 \leq 1, \text{ et } \varphi_{\min} \leq \varphi(a_k + \underline{i}b_k) \leq \varphi_{\max} \end{cases} \quad (5.17)$$

Le problème de minimisation sous contrainte (Eq.5.16) peut donc se résoudre pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  de la manière suivante :

$$\{\mathbf{a}_k^*(\underline{\mathbf{t}}), \mathbf{b}_k^*(\underline{\mathbf{t}})\} = \text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}(\Re(\underline{\mathbf{t}}_k + \underline{\mathbf{u}}_k), \Im(\underline{\mathbf{t}}_k + \underline{\mathbf{u}}_k)) \quad (5.18)$$

#### 5.4.2 Calcul de l'opérateur proximal $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}$

Si l'algorithme et la preuve de cet opérateur proximal sont détaillés dans l'annexe B (preuve) et l'annexe C (algorithme), nous allons expliquer dans cette partie 5.4.2 comment calculer cet opérateur proximal. L'opérateur proximal

$$\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}(p, q) = \begin{cases} \underset{a, b}{\text{argmin}} & \beta(p - a)^2 + \beta(q - b)^2 + g_{\alpha_1, \alpha_2}(a, b) \\ \text{sous contraintes :} & a^2 + b^2 \leq 1, \text{ et } \varphi_{\min} \leq \varphi(a + \underline{i}b) \leq \varphi_{\max} \end{cases} \quad (5.19)$$

peut être obtenu sous forme analytique :

- Dans le cas où les contraintes ne sont pas actives, il s'agit simplement de la solution au problème :

$$\underset{\mathbf{a}, \mathbf{b}}{\text{argmin}} \quad \beta(p - a)^2 + \beta(q - b)^2 + g_{\alpha_1, \alpha_2}(a, b) \quad (5.20)$$

qui s'écrit :

$$(a^*, b^*) = \left( p + \frac{\alpha_1}{2\beta} \frac{p}{|p + \underline{i}\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)|}, \mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q) + \frac{\alpha_1}{2\beta} \frac{\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)}{|p + \underline{i}\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)|} \right) \quad (5.21)$$

où  $\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)$  correspond au seuillage doux (défini en Eq.2.112) appliqué sur  $q$ .

Cas particulier : Si  $p = 0$  et  $q = 0$

$$(a^*, b^*) = \left( \frac{\alpha_1}{2\beta}, 0 \right) \quad (5.22)$$

- Si la contrainte de module  $a^2 + b^2 \leq 1$  est active :

$$(a^*, b^*) = \left( \frac{p}{|p + i\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)|}, \frac{\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)}{|p + i\mathcal{S}_{\alpha_2/2\beta}(q)|} \right) \quad (5.23)$$

- Si la contrainte de phase est active, alors  $\varphi(a^* + ib^*) = \varphi_{min}$  ou  $\varphi(a^* + ib^*) = \varphi_{max}$  et le module associé  $|a^* + ib^*|$  vaut :

$$|a^* + ib^*| = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho^*(\varphi^*) \geq 1 \\ \rho^*(\varphi^*) & \text{si } \rho^*(\varphi^*) \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } \rho^*(\varphi^*) \leq 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

avec,

$$\rho^*(\varphi) = p \cos(\varphi) + q \sin(\varphi) + \frac{\alpha_1}{2\beta} - \frac{\alpha_2}{2\beta} |\sin(\varphi)| \quad (5.25)$$

et,

$$\varphi^* = \underset{\varphi \in \{\varphi_{min}, \varphi_{max}\}}{\operatorname{argmin}} \beta(p - a_{\rho^*}(\varphi))^2 + \beta(q - b_{\rho^*}(\varphi))^2 + g_{\alpha_1, \alpha_2}(a_{\rho^*}(\varphi), b_{\rho^*}(\varphi))$$

avec,  $a_{\rho^*}(\varphi) = \rho^*(\varphi) \cos(\varphi)$  et  $b_{\rho^*}(\varphi) = \rho^*(\varphi) \sin(\varphi)$ .

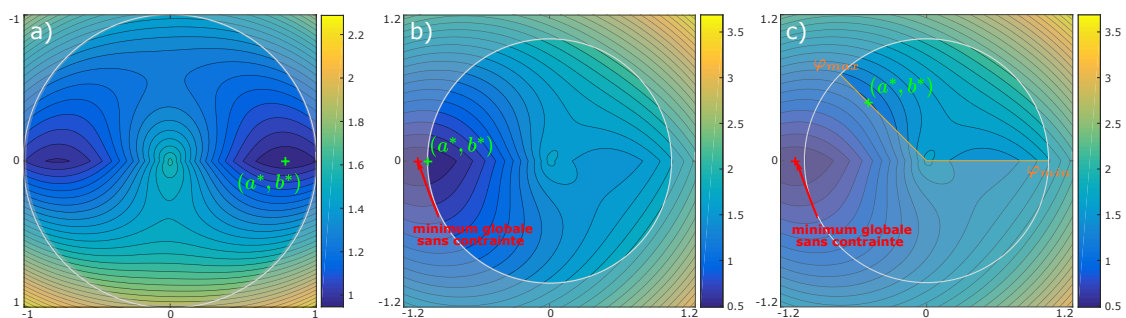
On a alors,

$$(a^*, b^*) = (\rho^*(\varphi^*) \cos(\varphi^*), \rho^*(\varphi^*) \sin(\varphi^*)) \quad (5.26)$$

La figure 5.1.a) montre la forme non convexe que peut avoir la fonction coût et le fait que l'opérateur proximal permet de trouver le point qui la minimise. Les figures 5.1.b) et 5.1.c) montrent respectivement les cas où la contrainte sur le module est active et la même fonction coût lorsque nous restreignons par exemple la phase entre  $\varphi_{min} = 0$  et  $\varphi_{max} = \frac{3\pi}{4}$ .

### 5.4.3 Réglage des hyper-paramètres

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents la difficulté principale dans les approches inverses régularisée est le réglage des hyper-paramètres pour



**FIGURE 5.1** – Illustration du problème de minimisation résolu par l’opérateur proximal  $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}$ , dans trois cas de figure différents : **a) Premier cas** : le minimum global non contraint se trouve dans le cercle unité qui représente la contrainte sur le module (on note la présence du minimum global et d’un minimum local). **b) Deuxième cas** : le minimum global non contraint se trouve hors du cercle unité, la solution optimale respectant la contrainte sur le module est sur le cercle unité  $a^2 + b^2 = 1$ . **c) Troisième cas** : même fonction coût que dans le cas **b)** sauf que nous imposons également une contrainte sur la phase  $\{\varphi_{min} = 0, \varphi_{max} = \frac{3\pi}{4}\}$ . Les couples  $(a, b)$  situés en dehors du domaine de faisabilité (c.a.d. ne respectant pas les contraintes) sont représentés en grisé. On vérifie dans chacun des cas que la solution  $(a^*, b^*)$  donnée par l’expression analytique de l’opérateur proximal respecte les contraintes et correspond toujours au minimum global contraint.

chaque *a priori*. Cette problématique est décuplée dans l’approche proposée car elle demande de régler 3 hyper-paramètres de régularisation  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  et 2 contraintes de bornes sur la phase  $(\varphi_{min}, \varphi_{max})$ . Différents test nous ont montré qu’une bonne combinaison réglée "à la main" de ces hyper-paramètres et contraintes de bornes pour un hologramme pouvait être appliquée pour des hologrammes acquis dans les mêmes configurations. Cela est dû en partie à la bonne normalisation de la transmittance (dont le module est compris entre 0 et 1) qui remet à l’échelle les gradients spatiaux et donne des normes  $L1$  semblables d’un hologramme à un autre. De plus, afin de simplifier le réglage de ces hyper-paramètres, nous normalisons chaque hologramme par sa valeur maximum pour que la gamme des valeurs de l’attache aux données soit similaire d’une acquisition à une autre (cela permet notamment d’être plus robuste quel que soit la quantification du capteur). Dans certains cas nous avons des *a priori* sur certains de ces hyper-paramètres :

- pour reconstruire des objets purement absorbants, une valeur très importante peut être donnée à l’hyper-paramètre  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 \rightarrow \infty$ ),
- pour reconstruire des objets purement déphasant, une valeur très importante peut être donnée à l’hyper-paramètre  $\alpha_1$  ( $\alpha_1 \rightarrow \infty$ ),
- quand la différence d’indice de réfraction entre le milieu référence  $n_0$  et l’indice de réfraction de l’objet  $n_{objet}$  est inférieure ou égale à 0 ( $n_0 - n_{objet} \leq 0$ ) nous pouvons régler  $\varphi_{min} = 0$ , à l’inverse si  $n_0 - n_{objet} \geq 0$  nous pouvons



- régler  $\varphi_{max} = 0$ ,
- pour obtenir une reconstruction de la phase et du module plus lisse, la valeur de l'hyper-paramètre  $\alpha_3$  doit être augmentée.

Comme discuté dans la partie 2.5.3.4 du chapitre 2, nous préconisons de régler le paramètre  $\epsilon$  de la variation totale relaxée entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ . Rappelons que la valeur de ce paramètre peut influencer significativement sur la vitesse de convergence de l'algorithme (plus  $\epsilon$  est important plus le problème d'optimisation sera lisse et donc plus sa résolution sera rapide).

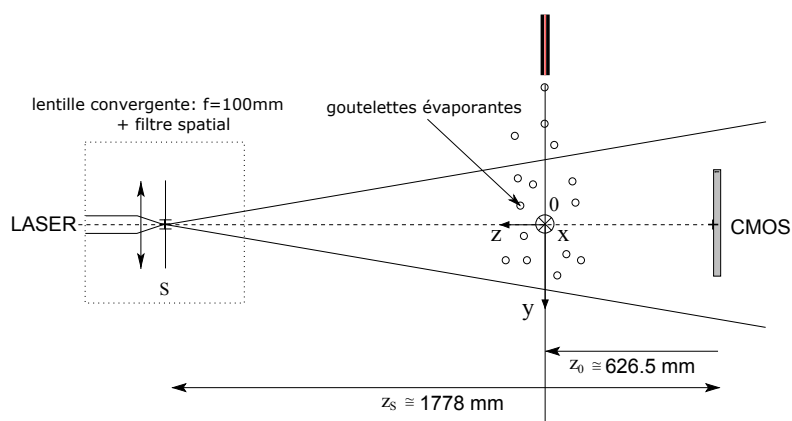
## 5.5 Résultats

La méthode inverse proposée a été appliquée sur des hologrammes issus d'expériences en mécanique des fluides et sur des applications bio-médicales, avec des montages d'holographie numérique en ligne différents (cela à pour but de montrer la robustesse de la méthode problèmes inverses proposée). La partie simulation ainsi que l'application en mécanique des fluides a été le fruit d'une collaboration avec une équipe du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, alors que la partie bio-médicale est le fruit d'une collaboration avec une équipe de bio-Mérieux.

### 5.5.1 Application en mécanique des fluides

#### 5.5.1.1 Contexte et expérience

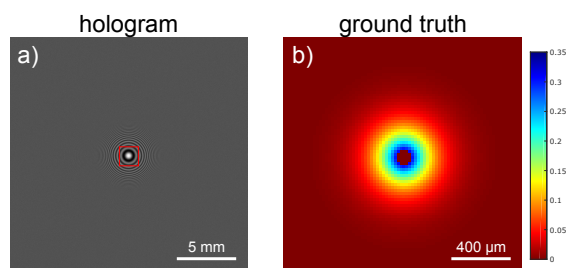
L'algorithme proposée a été testé sur des données issues de la mécanique des fluides. L'expérience qui va être exposée ici est une expérience qui a été réalisée par une équipe du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'école Centrale Lyon et qui a été détaillée dans le papier [101]. L'expérience consiste à acquérir des hologrammes à partir d'une gouttelette d'éther diéthylique, évaporant dans une milieu turbulent. Le montage expérimental est un montage d'holographie en ligne comprenant un dispositif permettant d'injecter les gouttelettes, un dispositif permettant de générer une turbulence (voir l'illustration du montage expérimental de la figure 5.2). Les gouttelettes observées, dont le diamètre est d'environ  $100 \mu m$ , sont illuminées par un faisceau divergent monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 532 nm$ . Ces hologrammes en lignes ont été acquis à l'aide du capteur CMOS d'une caméra rapide Phantom V611 dont la fréquence d'acquisition des images est à 3kHz. Le capteur est composé de  $1280 \times 800$  pixels avec un pixel pitch de  $20 \mu m$ . La distance  $z$  entre les gouttelettes se situe aux alentours de  $630 mm$ . La divergence du faisceau lumineux introduisant un facteur de grossissement d'environ 1.5, il est important de le prendre en compte dans la



**FIGURE 5.2** – Montage expérimental pour l’observation de gouttelettes évaporantes dédiées à la mécanique des fluides

méthode de reconstruction. Par équivalence, en pratique les hologrammes obtenus seront considérées comme ayant été acquis à une distance de  $z$  multipliée par ce facteur 1.5 et le diamètre des gouttelettes sera de même multiplié par ce facteur (soit  $150 \mu m$ ). La figure 5.5 montre les hologrammes expérimentaux obtenus à trois temps d’acquisitions différents.

### 5.5.1.2 Validation à l’aide de simulations utilisant la théorie de Mie



**FIGURE 5.3** – Simulation d’une hologramme d’une gouttelette avec un panache de vapeur, le tout illuminé à la longueur d’onde  $532nm$ , et une distance gouttelette-captteur considérée égale à  $z = 0.5m$  : a) L’hologramme synthétique. b) La vérité terrain de la phase obtenue par rétro-propagation de l’amplitude complexe dans le plan capteur. Le champ représenté correspond à la zone décrite par le carré rouge sur l’hologramme.

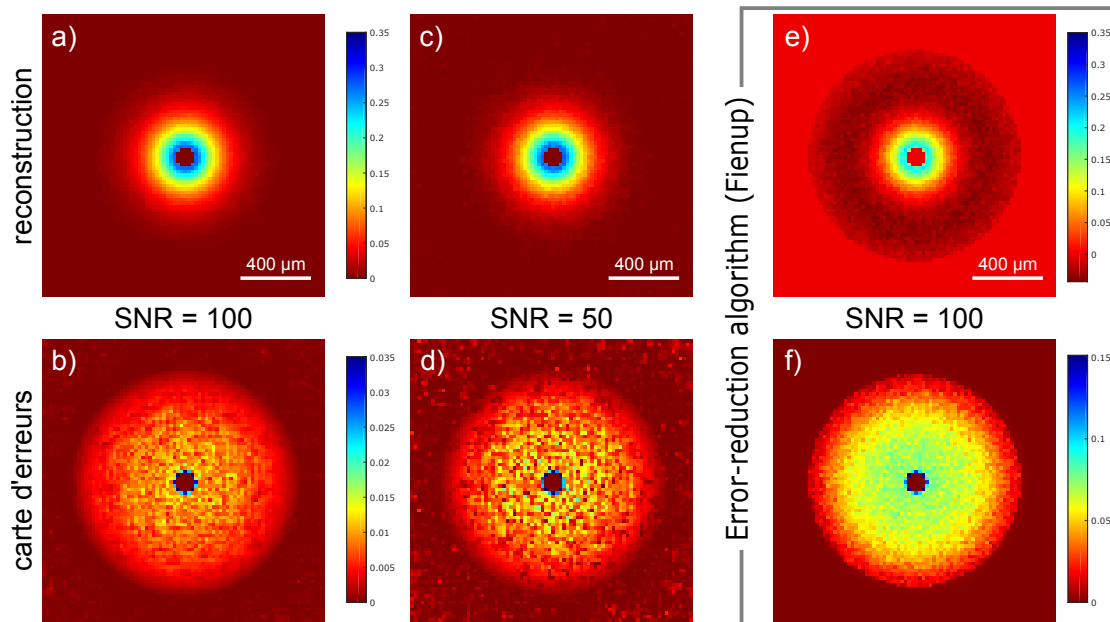
Pour valider l’approche problèmes inverses proposée dans le cas de mécanique des fluides exposé ci-dessus, des simulations ont été générées<sup>1</sup> à l’aide de la théorie de Lorenz-Mie (TLM), simulant des hologrammes d’une particule fluide. Cette

1. Ces simulations ont été réalisées par Loïc Mées au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique de Lyon

théorie donne une solution rigoureuse au problème de la diffusion de la lumière par une sphère parfaitement homogène et isotrope [102, 103]. Cette solution a été étendue pour les sphères radialement inhomogènes [104, 105]. Cette extension peut être utilisée pour simuler l'hologramme d'une gouttelette de liquide entourée d'un panache de vapeur, à toute distance  $z$  entre la gouttelette et le plan capteur. Les hologrammes synthétiques ont été simulés à partir d'une simulation par la TLM auquel a été ajoutée l'intégration sur pixel (avec un facteur de remplissage égal à 1). La gouttelette sphérique est définie par un rayon de  $a = 50 \mu m$  et un indice complexe de réfraction  $n_d = 1.35$ . La gouttelette est illuminée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 532 nm$ . Le panache de vapeur, supposé sphérique, est défini par un indice de réfraction  $n_\nu(r)$ ,  $r$  étant la distance radiale dans les données sphérique. Pour la suite nous avons simplement utilisé la décroissance exponentielle de  $n_s = 1 + 10^{-4}$  (à la surface de la gouttelette) à 1 lorsqu'on s'éloigne de la gouttelette, conformément à la formule  $n_\nu(r) = (n_s - 1)exp(-(r - a)/\sigma)$  où le paramètre de décroissance est fixé ici à  $\sigma = 10 \mu m$ . Le capteur considéré pour la simulation est un capteur de  $1000 \times 1000$  pixels avec un pitch pixel de  $20 \mu m$ . La distance considéré entre la gouttelette et un capteur est de  $z = 0.5 m$ . Dans le panache de vapeur, l'indice de réfraction est proche de 1 et varie lentement. Alors, l'objet peut être considéré plutôt comme un objet de phase. En revanche, le liquide de la gouttelette se comporte plutôt comme une objet absorbant (presque opaque). Nous considérons une gouttelette sphérique de rayon  $a = 50 \mu m$  et un indice de réfraction  $n_d = 1.35$ , entouré par un panache de vapeur. L'objet complexe diffractant est donc composé de la gouttelette ainsi que du panache de vapeur, ce qui en fait un objet absorbant et déphasant, par conséquent la transmittance attendue doit prendre des valeurs complexes. La figure 5.3.a montre un hologramme synthétique et la figure 5.3.b) montre la phase (sur la zone zoomée) de la rétro-propagation obtenue à l'aide de l'amplitude complexe de l'onde dans le plan hologramme qui sera considérée comme la vérité terrain de la phase de l'objet. Deux hologrammes bruités sont générés en ajoutant un bruit gaussien uniforme et indépendant avec un ratio signal sur bruit (RSB) égal à 100 et à 50, respectivement. Au niveau du centre de la gouttelette, comme il est purement absorbant, les valeurs de la phase sont non significatives (non unicité de la phase). Pour conséquent nous masquons ces valeurs de phase à 0 pour mieux se concentrer sur la phase au niveau du panache de vapeur. Le masque est appliqué pour tous les pixels dont le module est inférieur à 0.5.

Les reconstructions (Fig.5.4.(a).(c)) ont été obtenues par la méthode proposée avec 16 mises à jour de la variable duale avec 30 itérations entre chaque mise à jour pour assurer la bonne convergence de l'algorithme. Les 5 hyper-paramètres ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \epsilon, \beta$ ) ont été réglés "à la main" pour obtenir ces résultats. Il est donc possible qu'un autre réglage de ces hyper-paramètres donne un meilleur résultat

par la méthode proposée. Le temps de calcul pour réaliser ces reconstructions est d'environ 5 minutes. La figure 5.4 compare la reconstruction de la phase avec la



**FIGURE 5.4** – Reconstruction de l’absorbance et de la phase de la gouttelette et du panache de vapeur à partir de l’hologramme simulé. a) Reconstruction de la phase pour l’hologramme ayant un RSB de 100. c) Valeur absolue de la différence (carte d’erreurs) entre la vérité terrain et la reconstruction, pour l’hologramme avec un RSB=100. b) Reconstruction de la phase pour l’hologramme ayant un RSB de 50. d) Valeur absolue de la différence (carte d’erreurs) entre la vérité terrain et la reconstruction, pour l’hologramme avec un RSB=50.

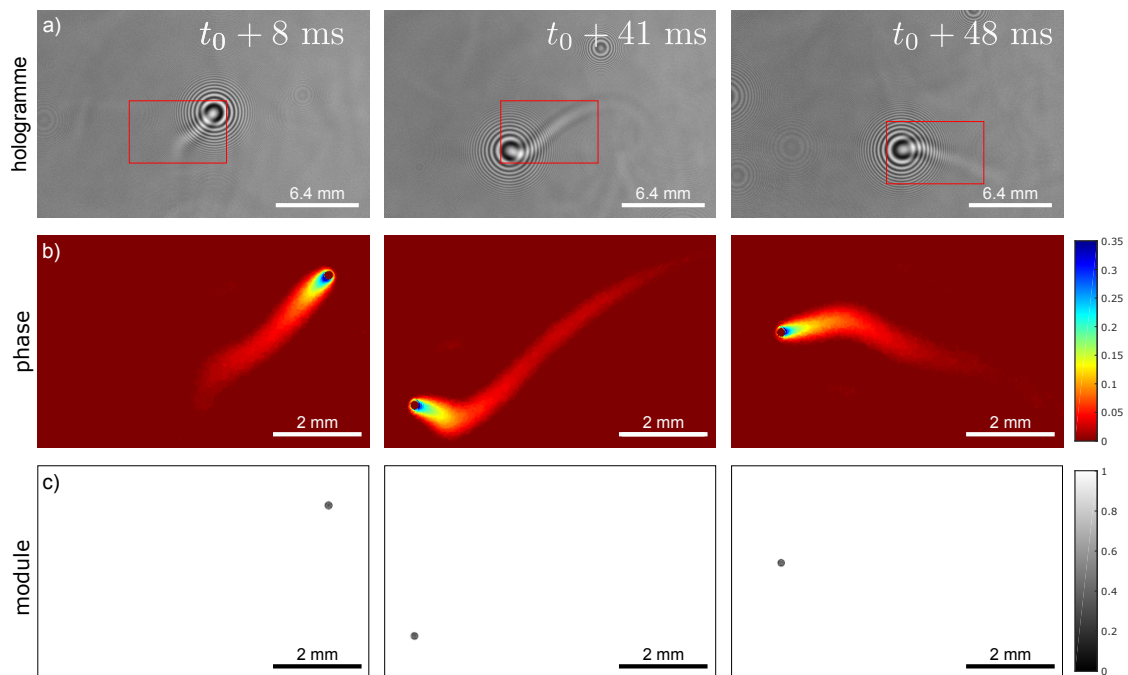
vérité terrain de celle-ci (voir la figure 5.3.b). Nous montrons sur cette figure les phases reconstruites (a,c), et leur carte d’erreurs (c,d), à partir des hologrammes synthétiques avec respectivement un RSB égal à 100 (a,b) et 50 (c,d). Pour ces reconstructions la même procédure de masquage des pixels dont le module est inférieur à 0.5 à été appliquée. Nous choisissons ici de ne pas montrer les reconstructions du module pour nous concentrer sur la quantification de la phase. Afin d’avoir une comparaison avec une méthode « état de l’art » nous montrons également une reconstruction obtenue à l’aide d’algorithme de type réduction de l’erreur proposée par Fienup [84], en utilisant un support, prenant en compte l’objet et le panache de vapeur, qui a été obtenue avec la vérité terrain de la transmittance (ce qui est dans les faits impossible à reproduire dans le cas de données expérimentales). Notons que la palette de couleur utilisée pour la carte d’erreurs de cette dernière méthode est étendue sur une dynamique de valeur bien plus grande. A première vue les reconstructions de la phase sont proches de la vérité terrain, montrant que les reconstructions offrent estimations de phase dans la même gamme

de valeur que la vérité terrain. La même observation peut être faite pour les reconstructions en module. Les cartes d'erreurs permettent d'avoir une comparaison plus fine, et logiquement nous observons que les erreurs sont plus importantes plus le RSB de l'hologramme est faible. Pour une meilleure quantification des erreurs, nous calculons l'erreur quadratique moyenne normalisée (EQM). Sa normalisation est obtenue en divisant l'erreur quadratique moyenne par la valeur maximum de la vérité terrain. Ces résultats quantitatifs confirment que plus le RSB de l'hologramme est faible plus l'erreur quadratique moyenne est importante. En effet avec l'hologramme avec un RSB=100, l'erreur quadratique moyenne entre la reconstruction de phase et la vérité terrain est d'environ 1.53% alors qu'elle est d'environ 1.68% pour l'hologramme de RSB=50. Par comparaison, à partir de l'hologramme ayant un SNR 100, l'erreur quadratique moyenne de l'algorithme de type réduction de l'erreur est de 10.67%.

### 5.5.1.3 Reconstructions à partir d'une séquence d'hologrammes expérimentaux

La figure 5.5.(a) montre 3 hologrammes de la même gouttelette à des temps successifs, extraits d'une séquence d'hologrammes acquis avec la caméra rapide décrite ci-avant. Les hologrammes montrent les franges circulaires typiques à un hologramme de gouttelette, et une trace du panache de vapeur qui change d'orientation avec la direction du flux d'évaporation. Les résultats de reconstructions obtenus avec la méthode problèmes inverses proposée sont présentés sur la figure 5.5(b,c), avec les reconstructions de phase (Fig.5.5(b)), et les reconstructions des modules (Fig.5.5(c)). Ces résultats ne peuvent pas valider quantitativement la méthode de reconstruction, cependant ils illustrent le potentiel de la méthode dans ce cas particulier d'application. Néanmoins nous pouvons noter que l'ordre de grandeur du déphasage maximum, à proximité de la gouttelette peut être estimé par  $\varphi = l * n_s * 2\pi / \lambda$ , où  $l$  est la profondeur du panache et  $n_s$  est l'indice de réfraction du mélange vapeur d'éther/air à la surface de la gouttelette. En considérant  $l$  comme égal à deux fois le diamètre de de la gouttelette (aux alentours de  $200\mu m$  par conséquent) et  $n_s \approx 1.5 + 10^{-4}$  (sur la base de mesures effectuées sur des gouttes de taille millimétrique en suspension [106]) le déphasage maximum doit être de l'ordre de 0.35 radian. Dans le papier [101], la séquence d'hologrammes de gouttelette était reconstruite en utilisant une méthode paramétrique [5, 6], mais si cette méthode donne de résultats quantitatifs très précis en terme de mesure de la taille de la gouttelette et de sa position (notons d'ailleurs que le paramètre  $z$  utilisée dans la méthode proposée est issue de cette approche paramétrique), cette méthode ne prend pas en compte l'information de phase et donc ne peut reconstruire le panache. En mécanique des fluides, mesurer et suivre le déplacement d'une gouttelette ainsi que de son panache d'évaporation est crucial pour la bonne compréhension du rôle joué

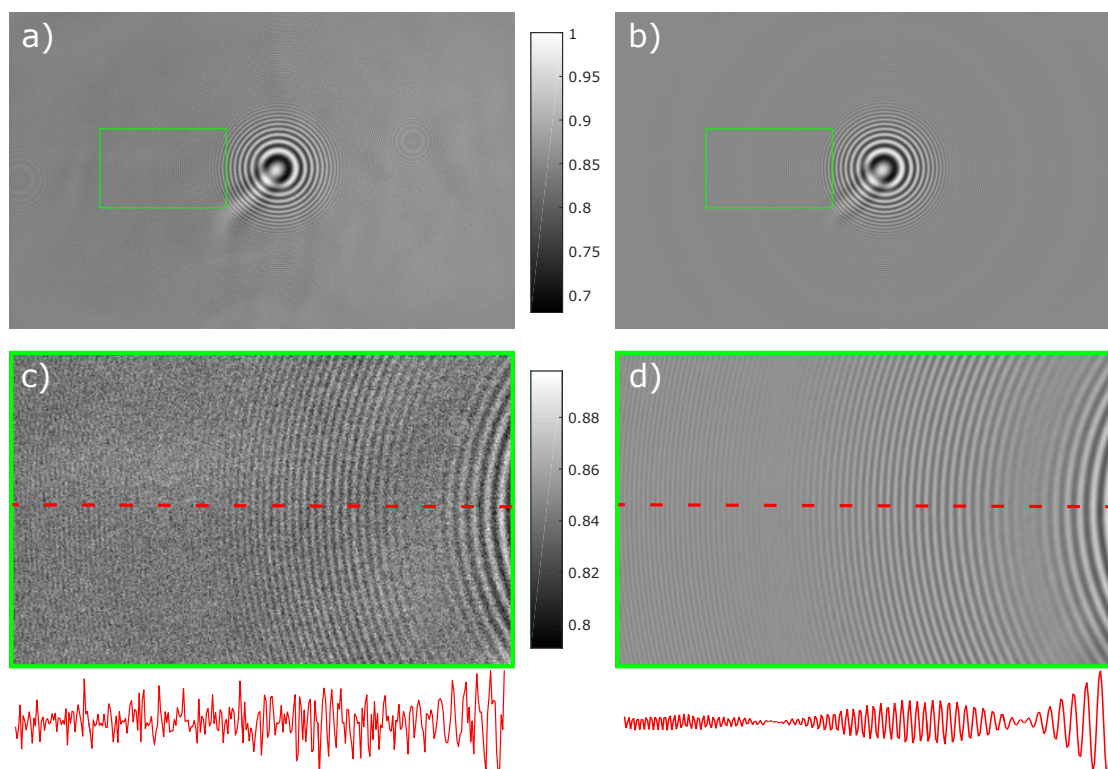
par la turbulence dans le cas de gouttelettes évaporantes, et plus spécifiquement dans [101] où certains écarts ont été observés entre le taux d'évaporation quasi constant prédit et la modélisation de la force de la trainée du panache [101]. Dans ce contexte, les résultats obtenus avec l'approche problèmes inverses proposée ici sont prometteurs pour quantifier à la fois l'absorption et le déphasage induits par la gouttelette et le panache l'évaporation. D'un point de vue qualitatif, la figure



**FIGURE 5.5** – Reconstructions avec la méthode proposée de gouttelettes s'évaporant à partir à une séquence d'hologrammes expérimentaux. a) Hologrammes acquis à trois différents temps. b) Reconstruction de la phase à ces 3 différents temps. Le panache d'évaporation est clairement visible une information purement de phase. c) Reconstruction du module à ces 3 temps. Seule la gouttelette est visible comme un objet purement absorbant.

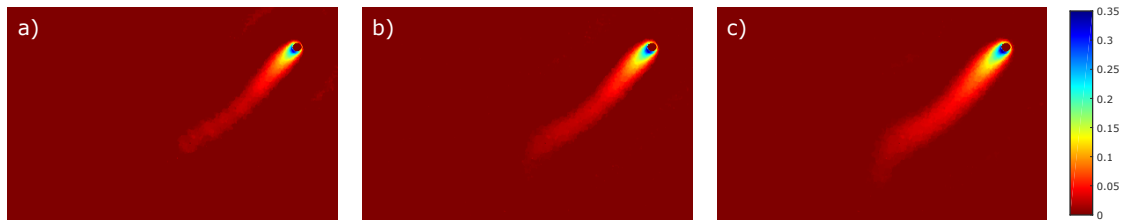
5.6 montre la reconstruction de l'hologramme obtenue avec la transmittance reconstruite  $\hat{t}$  et le modèle de formation d'hologramme 5.2 (Fig.5.6.(b).(d) ) a une grande fidélité avec l'hologramme expérimental (Fig.5.6.(a).(c) ) tout en réduisant significativement la proportion du bruit expérimental (bruit capteur, données aberrantes dues à la diffraction d'un objet hors du plan objet...) comme nous pouvons le voir en comparant les profils de l'hologramme expérimental et l'hologramme reconstruit par la méthode proposée (voir troisième ligne de la figure 5.6).

D'un point de vue convergence de la méthode proposée, les reconstructions en module et en phase ont été obtenus avec 16 mises à jour de la variable duale avec 50 itérations entre chaque mise à jour pour assurer la bonne convergence de l'algorithme. Les calculs ont été lancés sur un processeur Intel i7-3630QM (2.40GHz). Le



**FIGURE 5.6** – Première ligne : Comparaison qualitative entre a) l'hologramme expérimental et b) l'hologramme reconstruit avec la méthode approche inverse proposée. Deuxième ligne : comparaison qualitative entre c) une partie zoomée de l'hologramme expérimental et d) une partie zoomée de l'hologramme reconstruit.

temps de calcul se situe approximativement entre 15 et 20 minutes. La figure 5.7 montre la reconstruction de la phase, obtenue à partir de l'hologramme à  $t_0 + 8ms$  (voir la figure 5.5), pour différents choix en terme de nombre de mises à jour de la variable duale et du nombre d'itérations réalisées entre chaque itération. Si le meilleur résultat est obtenu avec la stratégie adoptée pour la reconstruction de la figure 5.5, à savoir pour 16 mises à jour de la variable duale avec 50 itérations entre chaque itération (voir la figure 5.7.(c) ), nous voyons que nous pouvons obtenir des reconstructions plutôt satisfaisantes au bout de quelques minutes en utilisant une stratégie utilisant moins d'itérations et de mises à jour (voir la figure 5.7.(a).(b) ) même si la convergence de l'algorithme n'est pas satisfaite dans ces cas là. Cette remarque est valable pour des applications qui demanderaient un temps de calcul réduit.



**FIGURE 5.7** – Phase reconstruite pour différents choix de mises à jour de la variable duale et du nombre d’itérations entre chaque mise à jour : a) 2 mise à jour de la variable duale avec 30 itérations (temps de calcul  $\sim 1$ min); b) 4 mise à jour de la variable duale avec 30 itérations (temps de calcul  $\sim 3$  minutes); c) 16 mises à jour de la variable duale avec 50 itérations (temps de calcul  $\sim 15$  minutes). Ces temps de calcul sont donnés pour des reconstructions réalisées à l’aide d’un processeur Intel i7-3630QM (2.40GHz).

## 5.5.2 Application en microscopie défocalisée pour le bio-médical

### 5.5.2.1 Contexte de l’expérience

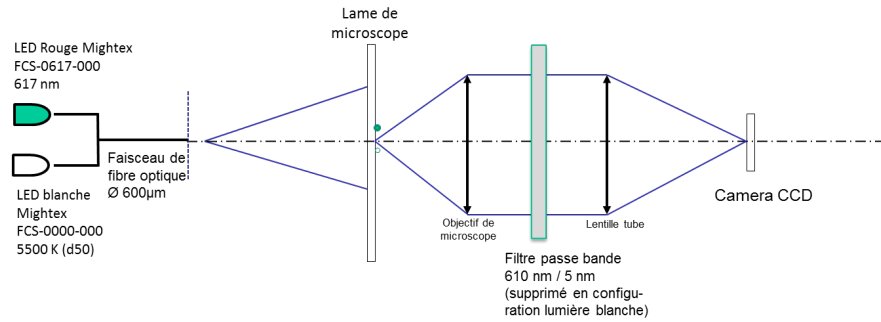
La méthode proposée a été testée dans le domaine de la microbiologie<sup>2</sup>. L’expérience consiste à observer des bactéries colorées à l’aide du montage de microscopie suivant (voir la figure 5.8). Les objets observés sont des bactéries : soit des Gram négatifs en forme de bâtonnets (*Escherichia coli* notés *E.coli*) ou des Gram positif de forme sphérique (*Staphylococcus epidermis*, notés *S.epidermis*). Une colonie de chacune des deux types de ces bactéries est isolée dans une boîte de Petri, puis elles sont étalées sur une lame de microscope. Les bactéries subissent alors une coloration de Gram (Fig.5.9) utilisant une procédure standard (système PREVI<sup>®</sup> COLOR GRAM développé par bioMérieux). Au final les objets immobilisés sur la surface de la lame sont roses (gram négatif) ou violets (gram positif), avec des tailles de l’ordre de  $1 \mu m$ .

Ces objets sont alors observés à l’aide de deux montages de microscope différents (voir la figure 5.8) :

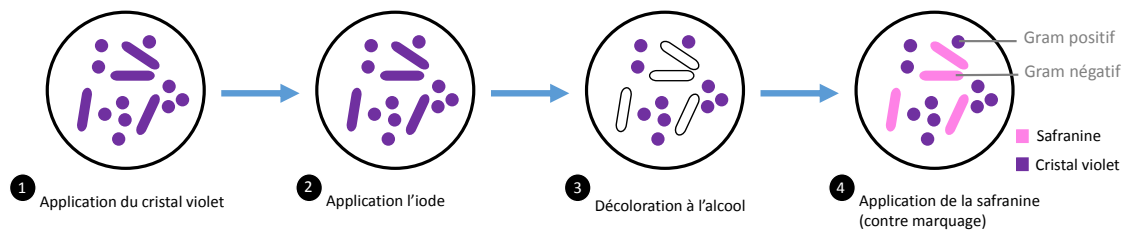
- le premier montage (qui servira à acquérir les images "références") est similaire à celui généralement utilisé dans les laboratoires de diagnostic in vitro de routine. Cela consiste à utiliser un montage de microscopie à immersion dans l’huile qui est éclairé en transmission par une lumière "blanche" et disposant d’un capteur couleur, le tout avec un instrument standard (Olympus BX-61). La source de lumière est une LED "blanche" (5500 K, Mightex FCS-0000-000), couplée à un faisceau de fibre optique. La fin de la fibre optique est positionnée à quelques centimètres de la lame, qui est elle-même

2. Cette expérience a été réalisée au sein de bioMérieux par l’équipe de Nicolas Faure.





**FIGURE 5.8** – Montage d’un microscope d’holographie en ligne dédié à l’observation de bactéries.



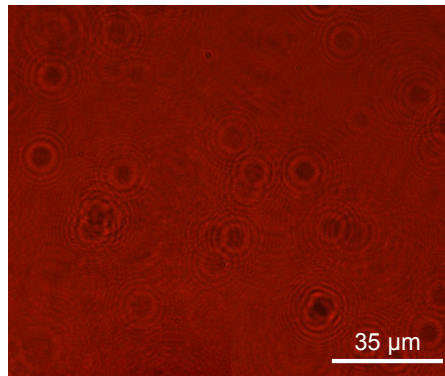
**FIGURE 5.9** – Principe général de la coloration de Gram.

placée sur une platine motorisée. Les objets sont placés par l’opérateur dans le plan focal de l’objectif (l’observation des objets sera donc faite dans le plan au focus). L’image est acquise avec un objectif 60X/NA1.4 (Olympus), une lentille de tube 10x, et un capteur couleur 5Mpix (Basler) dont la taille de pixel est de  $3.45\mu m$ .

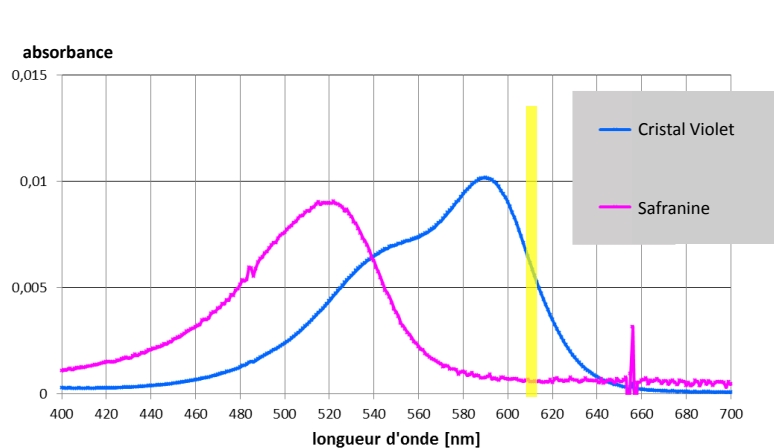
- En modifiant ce premier montage, un second montage a été mis en œuvre. Utilisant une autre fibre du faisceau, le source de lumière est interchangée avec une source qui est une LED monochromatique de longueur d’onde 617nm (Mightex FCS-0617-000). La platine motorisé permet de placer les objets à une distance de  $32\mu m$  du plan focal de l’objectif. Un filtre passe-bande (d’une largeur de  $5nm$  autour de  $610nm$ ) est positionné entre l’objectif et la lentille tube. Cela permet d’acquérir des hologrammes acquis en ligne des objets (Fig.5.10). Afin de bénéficier d’une comparaison, une image des objets au plan focal a aussi été acquise à l’aide de ce dernier montage (Fig.5.12.(b)).

### 5.5.2.2 Reconstructions à partir des hologrammes de bactéries

La figure 5.10 montre un hologramme d’un échantillon contenant les deux types de bactéries déjà présentées, des *S.epidermis* et *E.coli*. La figure 5.12.(a) montre



**FIGURE 5.10** – Hologramme de bactéries colorées par coloration de Gram illuminées à la longueur d'onde  $\lambda=610\text{nm}$ .

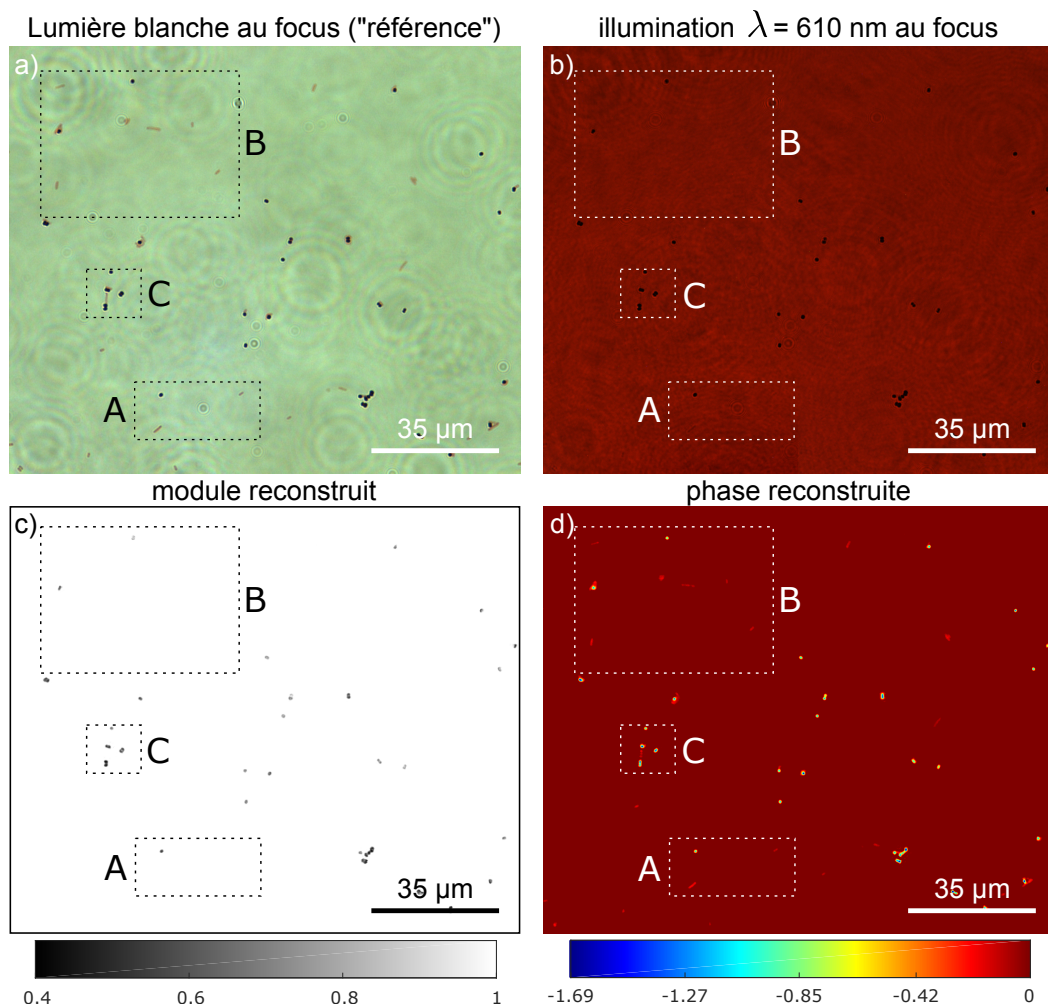


**FIGURE 5.11** – Spectre d'absorbance des chromophores utilisés pour la coloration de Gram des bactéries.

l'image au focus de l'échantillon biologique lorsqu'il est éclairé avec la LED lumière "blanche", qui sera utilisée comme image "référence". La figure 5.12.(b) montre l'image au focus de l'échantillon biologique lorsqu'il est éclairé avec la LED monochromatique  $\lambda = 610 \text{ nm}$ . Les figures 5.12.(c).(d) respectivement montrent le module et la phase de la reconstruction obtenue avec la méthode proposée à partir de l'hologramme (Fig.5.10). Pour l'illumination à la longueur d'onde  $610 \text{ nm}$ , les *E.coli* (gram négatif) n'absorbent pas, et se comportent comme un objet de phase, pendant que les *S.epidermis* se comportent comme des objets absorbants et déphasants. Ces résultats sont cohérents avec l'absorbance attendue des chromophores (cristal violet et safranine) pour la longueur d'onde  $610\text{nm}$  (voir la figure 5.11).

Utiliser l'information interférométrique d'un hologramme défocalisé permet de récupérer une information sur la phase des objets qui ne peut pas être enregistrée dans

le plan focal. Dans le champ image de la figure 5.12 nous sélectionnons trois régions d'intérêt A,B et C. La figure 5.13 montre les zooms de la "référence" ainsi que les reconstructions de ces trois régions. Nous pouvons voir que les bactéries *E.coli* sont reconstruites par la méthode proposée comme un objet purement déphasant (troisième et quatrième colonne), alors qu'elles ne peuvent tout simplement pas être observées dans les images acquises au focus pour la longueur d'onde  $\lambda=610\text{nm}$  (seconde colonne). De leur côté, les bactéries *S.epidermis* sont reconstruites par la méthode proposée comme des objets qui absorbent et qui déphasent (troisième et quatrième colonne). Enfin la méthode proposée a démontré ses capacités à reconstruire les informations de phase et d'absorbance des bactéries en accord avec ce qui est physiquement attendu (Fig.5.11).



**FIGURE 5.12** – Reconstructions en module et en phase par la méthode proposée à partir des hologrammes des bactéries colorées par une coloration de Gram.

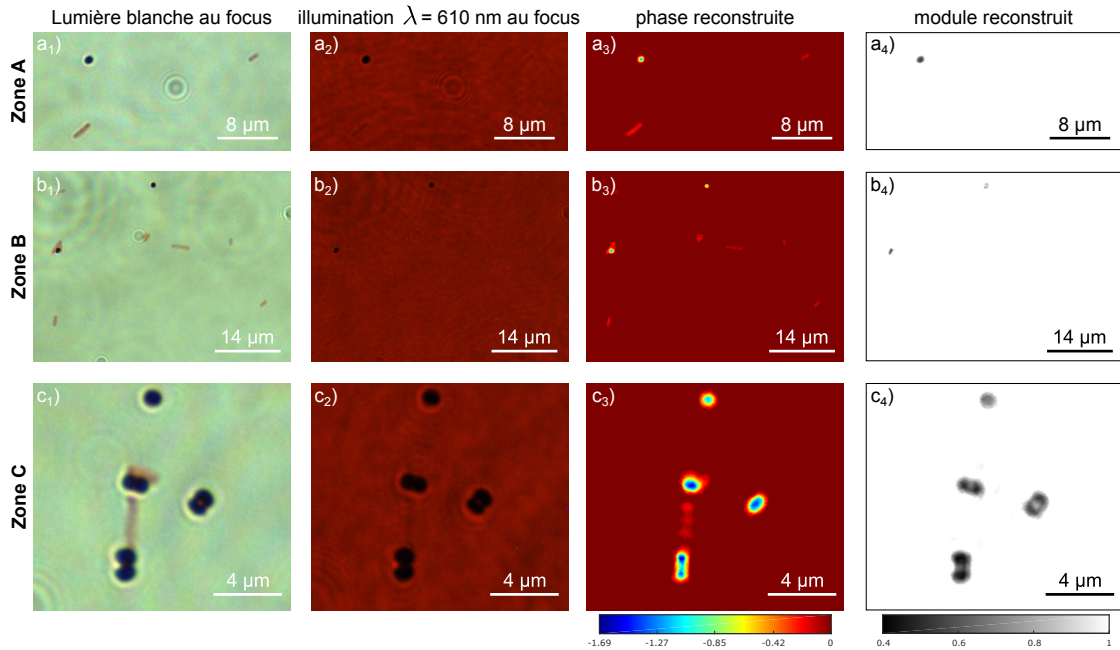


FIGURE 5.13 – Zoom des reconstructions de la figure 5.12

## 5.6 Cas particulier des objets opaques

Dans le cas où nous avons *a priori* que les objets à reconstruire sont opaques nous pouvons utiliser une méthode simplifiée n'ayant pas besoin de passer par un opérateur proximal, et résolvable juste à l'aide d'un algorithme d'optimisation de type quasi Newton L-BFGS [47]. D'un point de vue état de l'art, plusieurs méthodes problèmes inverses ont déjà été développées par l'équipe du laboratoire Hubert Curien pour ces objets opaques dans le cas où ils étaient paramétriques (considérés sphériques) [5, 6], ou non-paramétriques [8, 60]. Ces approches utilisent un modèle de formation d'hologrammes linéaire approximé qui faisait l'hypothèse que l'objet était opaque (transmittance donc réelle), mais aussi que l'objet était parcimonieux. Nous allons ici proposer une variante de l'approche inverse proposée dans ce chapitre pour des objets opaques calibrés (mire USAF 1951) ce qui nous permettra de comparer quantitativement le gain qu'apporte la prise en compte du terme quadratique dans le modèle de formation d'hologramme. Notons que cette étude a fait l'objet d'une communication scientifique au XXVIème colloque GRETSI (Septembre 2017) [107].

### 5.6.1 Modèle de formation d'hologrammes

Dans le cas d'objets opaques la transmittance réelle  $t$  peut s'écrire à l'aide d'une opacité réelle  $\vartheta$  de la manière suivante,  $t = 1 - \vartheta$ . Afin de simplifier au maximum de problème d'optimisation nous reconstruirons la l'opacité réelle  $\vartheta$  sous contrainte de positivité. En effet la transmittance devant être comprise entre 0 et 1, naturellement il en est de même pour l'opacité  $\vartheta$ . Dans le cas d'une opacité réelle le modèle de formation d'image explicité en (Eq.5.1) est juste modifié en remplaçant la transmittance complexe  $\underline{t}$  par le vecteur de l'opacité réelle dans l'espace discrétisé  $\boldsymbol{\vartheta}$ . Le modèle de l'intensité obtenue par la diffraction de l'objet est donc dans ce cas,

$$[\mathbf{m}(\boldsymbol{\vartheta})]_k = |1 - [\underline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\vartheta}]_k|^2, \quad (5.27)$$

où  $[\cdot]_k$  indique le  $k$ -ième élément du vecteur.

Le modèle de formation de l'hologramme  $\mathbf{d}$  s'écrit donc :

$$[\mathbf{d}]_k = c \cdot [\mathbf{m}(\boldsymbol{\vartheta})]_k + [\mathbf{n}]_k = c \cdot |1 - [\underline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\vartheta}]_k|^2 + [\mathbf{n}]_k \quad (5.28)$$

où nous avons introduit le même paramètre d'échelle  $c$  que dans le cas d'une transmittance complexe, qui se calcul analytiquement de la même manière (Eq.5.6). Le vecteur  $[\mathbf{n}]_k$  représente quant à lui le bruit, que nous considérerons blanc gaussien, sur le  $k$ -ème pixel du capteur.

### 5.6.2 Formulation du problème inverse

Pour la formulation du problème inverse, nous utilisons le paramètre d'échelle optimisé de manière hiérarchique par l'expression analytique (Eq.5.6) (à la seule différence qu'elle appliqué sur  $\boldsymbol{\vartheta}$  et non  $\underline{t}$ . L'attache aux données ne dépendant que de  $\boldsymbol{\vartheta}$  prend alors l'expression suivante,

$$\mathcal{D}^* (\boldsymbol{\vartheta}) = \|c^* (\boldsymbol{\vartheta}) \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\vartheta}) - \mathbf{d}\|_{\mathbf{W}}^2. \quad (5.29)$$

où  $\mathbf{W}$  est l'inverse de la matrice de covariance du bruit (diagonale puisque le bruit est supposé blanc) [5, 66, 60].

En ce qui concerne le terme de régularisation nous avons opté pour une contrainte de parcimonie  $\|\cdot\|_1$  ainsi qu'une régularisation de type préservation de bords avec une variation totale relaxée  $\mathcal{TV}_\epsilon$  puisque l'objet calibrée utilisé sera une mire type USAF 1951. L'expression de l'approche inverse utilisé dans ce cas-là prend l'expression suivante,

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \arg \min_{0 \leq \boldsymbol{\vartheta} \leq 1} \mathcal{D}^* (\boldsymbol{\vartheta}) + \alpha_1 \|\boldsymbol{\vartheta}\|_1 + \alpha_2 \mathcal{TV}_\epsilon(\boldsymbol{\vartheta}), \quad (5.30)$$

où  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathbb{R}^+$  sont les hyper-paramètres de régularisation, et  $\mathcal{TV}_\epsilon(\cdot)$  est la fonction de variation totale décrite dans le Chapitre 2.

### 5.6.3 Comparaison qualitative et quantitative entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire

Pour valider et quantifier l'intérêt de l'utilisation d'un modèle non-linéaire comparé à un modèle linéaire, nous avons utilisé un hologramme obtenu à l'aide d'un objet réel calibré.

#### 5.6.3.1 Montage expérimentale

L'objet calibré est une mire de résolution USAF1951 (ThorLabs - réf. R1DS1P) que nous utilisons pour estimer la qualité de la reconstruction des petites et grosses structures. Le capteur utilisé est un capteur CMOS ayant un pixel pitch de  $2.2 \mu\text{m}$  et la distance objet-capteur  $z$  est de  $5.15 \text{ cm}$ . Un laser de longueur d'onde  $405 \text{ nm}$  est utilisé pour illuminer l'objet.

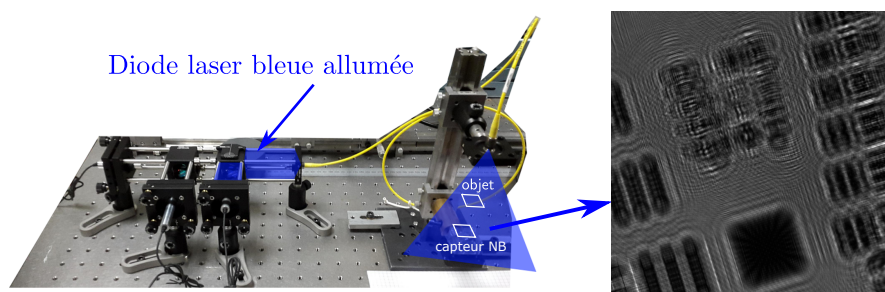


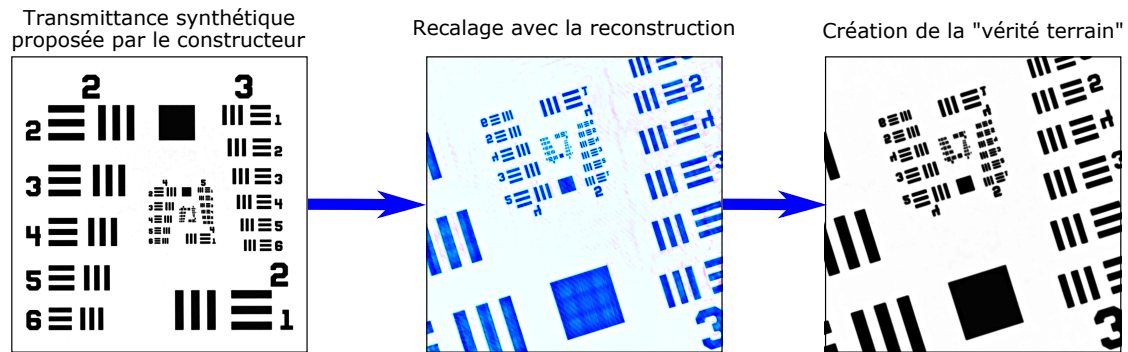
FIGURE 5.14 – Le montage expérimental et l'hologramme acquis

#### 5.6.3.2 Comparaisons qualitative et quantitative des reconstructions

##### 5.6.3.3 Qualité de la reconstruction

Plusieurs reconstructions sont comparées (Fig.5.16.(b).(c).(d)) : la rétro-propagation classique obtenue en appliquant une convolution avec le noyau  $\underline{h}_{-z}$  (Eq.2.11), l'approche inverse utilisant un modèle linéaire [8], et l'approche proposée avec un modèle non-linéaire. Dans les deux approches inverses, la même régularisation est utilisée, à savoir celle décrite dans la formulation du problème inverse (Eq.5.30). Afin de quantifier la qualité de la reconstruction, nous comparons les résultats à l'aide d'une vérité terrain obtenue à partir du modèle numérique proposé par le constructeur (Fig.5.15). Cela permet de comparer les PSNR de chaque résultat. Notons que les reconstructions "problème inverse" ont été obtenues avec les mêmes coefficients de régularisation, le même nombre d'itérations de l'algorithme VMLM-B (100 itérations assurant une "bonne" convergence des deux

méthodes), et sont affichées avec la même dynamique (Fig.5.16.(c).(d)). Nous pouvons observer que la qualité de la reconstruction avec le modèle proposé offre un meilleur rapport signal sur bruit (PSNR=14.7dB) que la reconstruction avec un modèle linéaire [8](PSNR=11.6dB), qui offre elle-même un meilleur rapport signal sur bruit que la rétro-propagation classique (PSNR=9.6dB). Notons que les plus petites structures de cette mire USAF ont une taille de l'ordre de  $5\mu m$ .



**FIGURE 5.15** – Création d'une "vérité terrain". L'image au milieu de cette illustration représente la superposition de la transmittance synthétique recalée avec la reconstruction obtenue

Notons que ces résultats ne remettent pas en cause la pertinence d'utiliser un modèle linéaire, quand les objets reconstruits s'y prêtent bien (objets parcimonieux, en très faible quantité) [5, 6, 8, 60], qui reste relativement plus facile à implémenter pour la résolution du problème d'optimisation. En revanche ces résultats montrent que si l'on se tourne vers la reconstruction d'objets plus étendus mais aussi en densité plus importante, il est important de prendre en compte le modèle complet non-linéaire qui prend en compte le terme quadratique.

## 5.7 Conclusion

Ce chapitre propose une approche « problèmes inverses » permettant la reconstruction d'objets absorbants et/ou déphasants parcimonieux. Si cette approche « problèmes inverses » présente l'avantage d'introduire des régularités sur l'objet et des contraintes ayant un sens physique, elle demande en contrepartie une complexité plus importante en terme d'optimisation. En effet, le fait de cumuler un modèle de formation d'hologramme non-linéaire, des termes de régularisations non-différentiables ainsi que des contraintes non-linéaires sur les objets reconstruits, rend le problème de minimisation à résoudre bien plus complexe. Le cœur des travaux de ce chapitre a résidé dans l'élaboration d'un opérateur proximal permettant de prendre en compte et de minimiser les termes de régularisations

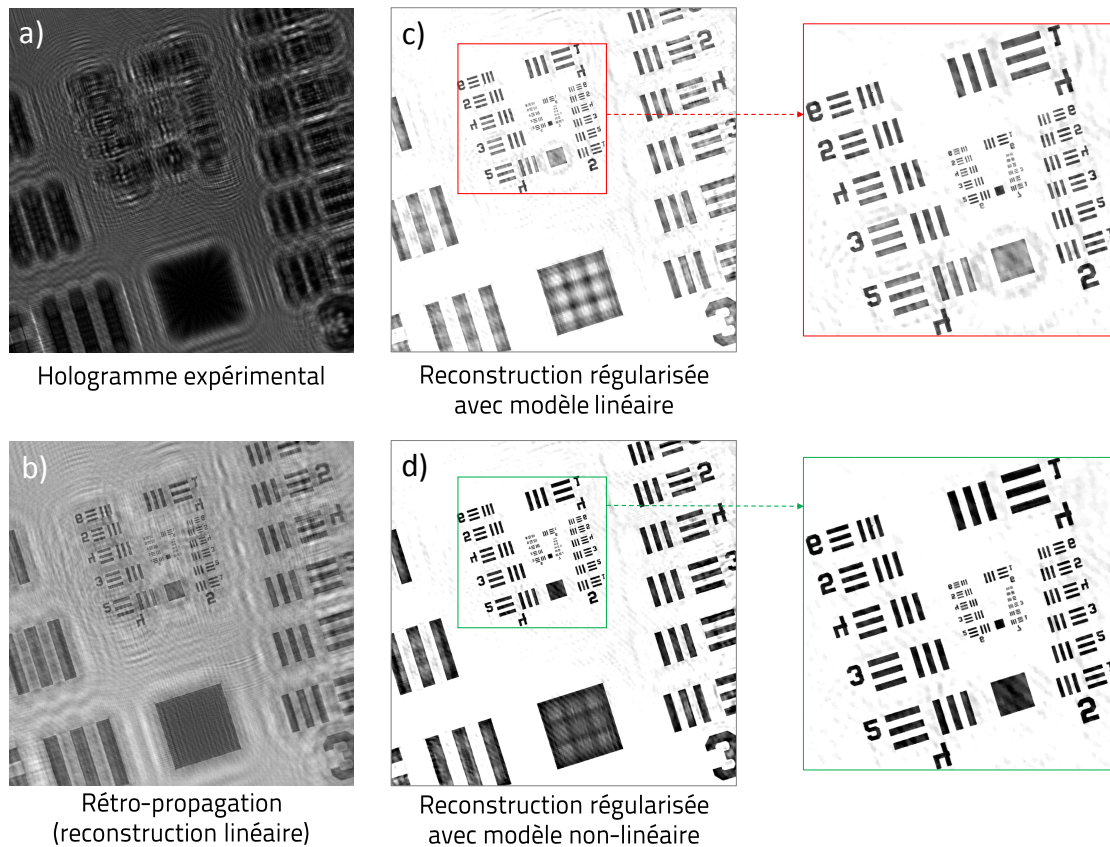


FIGURE 5.16 – Comparaison des reconstructions

non-différentiables ainsi que les contraintes non-linéaires. Les simulations ont permis de montrer que l'approche « problèmes inverses » proposée permet d'obtenir une reconstruction quantitative de la phase dans la configuration d'une expérience de mécanique des fluides. Cette approche a ensuite démontré qu'elle est capable de reconstruire l'information de déphasage du panache d'une gouttelette d'éther évaporante, ce qui apporte une information supplémentaire importante pour la compréhension des phénomènes intervenant dans cette expérience de mécanique des fluides. Cette approche a aussi montré sa robustesse en étant appliquée dans un cadre complètement différent de la mécanique des fluides, à savoir une expérience de microbiologie intégrant un objectif de microscope. Enfin, les reconstructions obtenues ont permis de montrer que certains objets qui ne sont pas visibles lorsqu'ils sont au focus, sont en revanche visibles dans la reconstruction de phase.



# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspectives

Cette thèse propose plusieurs approches « problèmes inverses » régularisées permettant de lever plusieurs verrous liés à l'holographie numérique en ligne. Dans un premier temps cette thèse s'est employée à lever un premier verrou qui limite la résolution de la reconstruction à la résolution du capteur. Pour cela il a été proposé une approche « problèmes inverses » pour obtenir une reconstruction super-résolue d'une opacité à l'aide de la redondance d'information présente dans une pile d'hologrammes translatés les uns par rapport aux autres. Dans un second temps, ces travaux de thèse ont cherché à étudier la possibilité d'exploiter la redondance d'information présente en éclairant un objet à différents longueurs d'ondes. Ces travaux ont notamment permis de montrer que la complexité des capteurs RVB incluant une matrice de Bayer demande de reconsidérer l'approche « problèmes inverses » pour s'adapter à ce type de capteur, et notamment les effets de crosstalk qui y sont associés. Si les deux premières contributions de cette thèse proposent une reconstruction d'objets purement absorbants et parcimonieux, amenant à utiliser des modèles de formation d'hologramme linéaire, la troisième et dernière contribution de cette thèse propose quant à elle une approche « problèmes inverses » régularisée permettant la reconstruction d'objets de phase et utilisant un modèle de formation d'hologramme plus précis mais non-linéaire. L'approche « problèmes inverses » intègre des termes de régularisation et des contraintes traduisant des a priori sur l'objet avec un maximum de sens physique. Cette approche « problèmes inverses » qui permet d'obtenir une reconstruction quantitative de la phase demande de minimiser une fonction coût qui n'est ni convexe, ni différentiable sur un ensemble décrit par des contraintes non-linéaires, ce qui aboutit à un problème d'optimisation non-trivial à résoudre. Cette thèse a permis de proposer un nouvel opérateur proximal pouvant être intégré dans une stratégie d'optimisation de type « langrangien augmenté » avec une optimisation hiérarchique. Si cette dernière approche n'en reste pas moins la plus originale des approches proposées dans cette thèse, apportant notamment une information de déphasage précieuse

pour de nombre applications, c'est bien l'ensemble de ces travaux de thèse mis bout à bout qui permet de tirer le maximum d'information d'hologrammes. Ces travaux ouvrent un certain nombre de questions : comment prendre en compte un objet qui n'est pas dans le plan reconstruit ? Comment automatiser les réglages des hyper-paramètres ? Comment utiliser au mieux la redondance d'information dans le cas des objets de phase ? Comment bien prendre en compte le comportement de la phase dans le cas d'un objet éclairé à plusieurs longueurs d'onde ? Ou encore, quelle serait la solution pour ne pas reconstruire uniquement un déphasage (intégré dans l'axe  $\vec{z}$ ), mais l'indice optique en toute position 3D de l'objet ? Toutes ces questions restent actuellement ouvertes et permettent de dresser un certain nombre de perspectives discutées dans les paragraphes suivants.

## 6.1 Reconstruction "multi-plans"

S'il existe des méthodes permettant de réaliser des reconstructions 3D des objets comme en tomographie diffractive [108, 109, 110], en holographie numérique il n'est possible de reconstruire que des plans 2D. Durant cette thèse nous avons commencé à étudier l'avantage que présentait le fait de modéliser la formation de l'hologramme dans le cas où nous avons un nombre limité d'objets dans différents plans (nous nous sommes limités à 2 plans objets pour le moment) (voir la figure 6.1). Au sens du modèle de formation de l'hologramme, cela doit permettre notamment de réduire dans les reconstructions l'influence qu'ont les objets placés dans d'autres plans que le plan à reconstruire. On peut aussi imaginer que parmi les autres plans il y ait d'autres objets d'intérêts. Cette méthode permet de mieux modéliser et donc interpréter l'hologramme acquis.

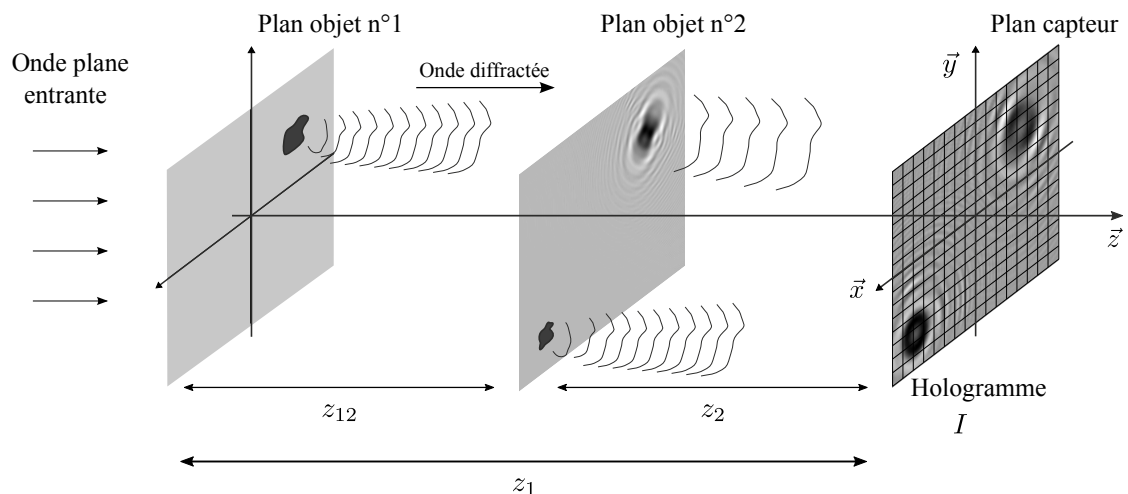


FIGURE 6.1 – Illustrations d'un hologramme d'objets placés dans différents plans.

### 6.1.1 Modèle de formation de l'hologramme

Considérons que les objets placés dans le plan objet n°1 ont une transmittance complexe  $\underline{t}_1 = \mathbf{1} - \underline{\vartheta}_1$  (où  $\underline{\vartheta}_1$  est une opacité complexe) et ceux placés dans le plan objet n°2 ont une transmittance complexe  $\underline{t}_2 = \mathbf{1} - \underline{\vartheta}_2$  (où  $\underline{\vartheta}_2$  est une opacité complexe). Pour bien détailler chaque étape de la modélisation de l'hologramme dans ce cas là nous reprenons la notation  $\underline{H}$  de l'opérateur linéaire complexe modélisant la propagation de la lumière décrit par l'équation (Eq.5.1). Ainsi nous pouvons décrire chaque étape de cette propagation :

- L'onde plane référence passant par le plan objet n°1 va diffracter jusqu'au plan objet n°2, l'amplitude complexe de l'onde diffractée dans ce dernier plan sur une distance de  $z_{12}$  peut donc être modélisée par,

$$\underline{Up}_2^- = \underline{H}_{12} \underline{t}_1 = \underline{H}_{12}(\mathbf{1} - \underline{\vartheta}_1) = \mathbf{1} - \underline{H}_{12} \underline{\vartheta}_1. \quad (6.1)$$

où  $\underline{H}_{12}$  modélise l'opérateur linéaire complexe de propagation avec le paramètre  $z = z_{12}$  (voir la figure 6.1).

- Cette onde est ensuite "masquée" par la transmittance  $\underline{t}_2$  du plan objet n°2,

$$\underline{Up}_2^+ = \underline{t}_2 \cdot \underline{Up}_2^- = \underline{t}_2 - (\mathbf{1} - \underline{\vartheta}_2) \cdot \underline{H}_{12} \underline{\vartheta}_1. \quad (6.2)$$

- La dernière étape de cette onde est qu'elle est propagée sur une distance  $z_2$  jusqu'au plan capteur,

$$\underline{Up} = \underline{H}_2 \underline{Up}_2^+ = \underline{H}_2 \underline{t}_2 - \underbrace{\underline{H}_2 \underline{H}_{12}}_{\underline{H}_1} \underline{\vartheta}_1 + \underline{H}_2 (\underline{\vartheta}_2 \cdot \underline{H}_{12} \underline{\vartheta}_1). \quad (6.3)$$

où  $\underline{H}_1$  (respectivement  $\underline{H}_2$ ) modélise l'opérateur linéaire complexe de propagation avec le paramètre  $z = z_1$  (respectivement avec le paramètre  $z = z_2$ ) (voir la figure 6.1).

En reprenant l'équation (Eq.6.3) nous pouvons donc modéliser l'onde complexe  $\underline{Up}$  située dans le plan capteur comme,

$$\underline{Up} = \underline{H}_2 \underline{t}_2 - \underline{H}_1 \underline{\vartheta}_1 + \underline{H}_2 (\underline{\vartheta}_2 \cdot \underline{H}_{12} \underline{\vartheta}_1). \quad (6.4)$$

Dans l'approche inverse qui a été utilisée pour le moment nous négligeons le troisième terme  $\underline{H}_2 (\underline{\vartheta}_2 \cdot \underline{H}_{12} \underline{\vartheta}_1)$ . En négligeant ce terme nous partons du principe que l'onde diffractée au niveau du plan objet n°2 n'est que très peu "masquée" par l'objet n°2. Cela implique donc que l'objet n°2 soit suffisamment petit. On considère donc l'approximation de l'onde sur le capteur suivante,

$$\underline{Up} \approx \underline{H}_2 \underline{t}_2 + \underline{H}_1 \underline{t}_1 - \mathbf{1} \quad (6.5)$$

A l'aide de cette approximation, le modèle de l'intensité obtenue par la diffraction des différents plans objet est donc,

$$[\mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2)]_k = |[\underline{\mathbf{H}}_2 \underline{\mathbf{t}}_2 + \underline{\mathbf{H}}_1 \underline{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{1}]_k|^2, \quad (6.6)$$

où  $[\cdot]_k$  indique le  $k$ -ième élément du vecteur.

Le modèle de formation de l'hologramme  $\mathbf{d}$  s'écrit donc :

$$[\mathbf{d}]_k = c \cdot [\mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2)]_k + [\mathbf{n}]_k = c \cdot |[\underline{\mathbf{H}}_2 \underline{\mathbf{t}}_2 + \underline{\mathbf{H}}_1 \underline{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{1}]_k|^2 + [\mathbf{n}]_k \quad (6.7)$$

où nous avons introduit le même paramètre d'échelle  $c$  que dans le cas d'une transmittance complexe et qui se calcule analytiquement de la même manière que (Eq.5.6). Le vecteur  $[\mathbf{n}]_k$  représente quant à lui le bruit, que nous considérerons blanc gaussien, sur le  $k$ -ème pixel du capteur.

### 6.1.2 Formulation du problème inverse

Pour la formulation du problème inverse, nous utilisons le paramètre d'échelle optimisé de manière hiérarchique par l'expression analytique Eq.5.6 (à la seule différence que le calcul analytique de  $c^*$  utilise le modèle de formation d'hologramme (Eq.6.6) dépendant des reconstructions des transmittances  $\underline{\mathbf{t}}_1$  et  $\underline{\mathbf{t}}_2$ . L'attache aux données ne dépendant que de ces transmittances  $\underline{\mathbf{t}}_1$  et  $\underline{\mathbf{t}}_2$  prend alors l'expression suivante,

$$\mathcal{D}^*(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) = \|c^*(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) \cdot \mathbf{m}(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) - \mathbf{d}\|_{\mathbf{W}}^2. \quad (6.8)$$

où  $\mathbf{W}$  est l'inverse de la matrice de covariance du bruit (diagonale puisque le bruit est supposé blanc) [5, 66, 60].

En reprenant les régularisations proposées dans le tableaux (Tab.5.1), nous appliquons les mêmes régularisations que dans l'approche inverse du Chapitre 5, en revanche nous les appliquons sur les deux plans ce qui nous donne la fonction de régularisation suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) &= \alpha_1 \mathcal{R}_1(\underline{\mathbf{t}}_1) + \alpha_2 \mathcal{R}_2(\underline{\mathbf{t}}_1) + \alpha_3 \mathcal{R}_{\text{TV}}^\epsilon(\Re(\underline{\mathbf{t}}_1), \Im(\underline{\mathbf{t}}_1)) \\ &+ \alpha_4 \mathcal{R}_1(\underline{\mathbf{t}}_2) + \alpha_5 \mathcal{R}_2(\underline{\mathbf{t}}_2) + \alpha_6 \mathcal{R}_{\text{TV}}^\epsilon(\Re(\underline{\mathbf{t}}_2), \Im(\underline{\mathbf{t}}_2)) \end{aligned}$$

où  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \in \mathbb{R}^+$  sont les hyper-paramètres dont les valeurs donnent un poids plus ou moins important à chaque contrainte physique considérée.

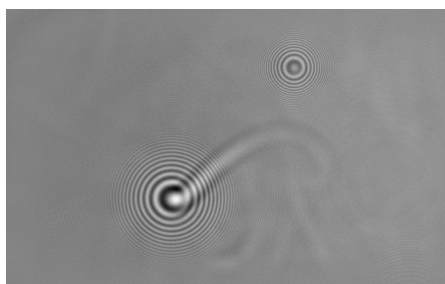
L'approche problème inverse multi-plans testée se résume au problème de minimisation suivant :

$$\{\hat{\underline{\mathbf{t}}}_1, \hat{\underline{\mathbf{t}}}_2\} = \arg \min_{\{\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2\} \in \Omega \cap \Psi} \mathcal{D}^*(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) + \mathcal{R}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}(\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2) \quad (6.9)$$

Cette approche peut être optimisée de la même manière que la méthode proposée dans le chapitre 5, à savoir par une méthode d'optimisation hiérarchique [59], et l'opérateur proximal détaillé dans la partie (Eq.5.4.2) qui sera appliqué sur chaque plan reconstruit.

### 6.1.3 Intérêts et pré-résultats

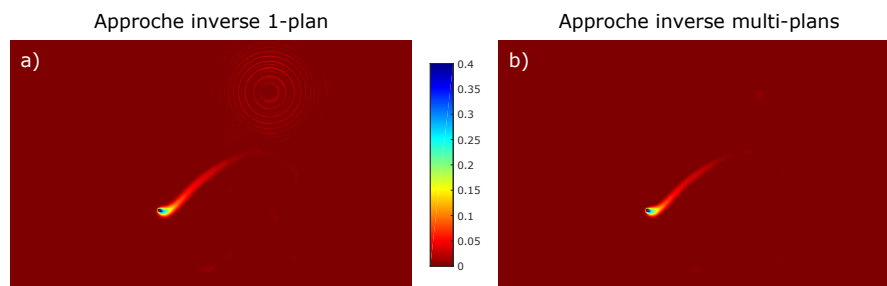
Pour tester cette approche nous avons utilisé les hologrammes de mécanique des fluides du chapitre 5 acquis par le LMFA. L'hologramme qui sera traité ici, est un hologramme de la gouttelette d'éther qui a été acquis alors qu'il y avait un autre objet dans le champ d'acquisition (Fig.6.2). L'intérêt de cette méthode



**FIGURE 6.2** – Hologramme de la gouttelette d'éther évaporante, présentant un autre objet placé dans un plan différent.

est de reconstruire les deux plans et ainsi améliorer la reconstruction de l'objet d'intérêt. L'amélioration est particulièrement visible pour les reconstructions de phase contaminées par un objet placé dans un autre plan (Fig.6.3).

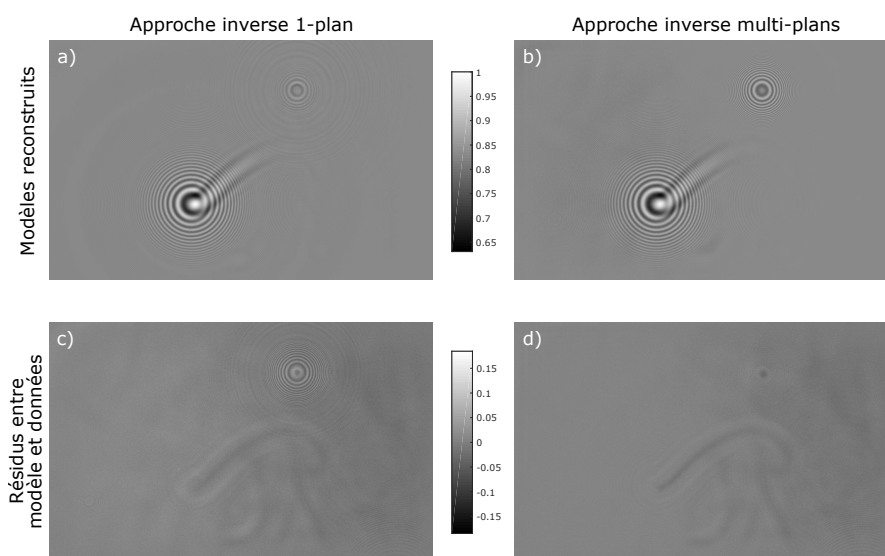
Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.3, la reconstruction de la phase ob-



**FIGURE 6.3** – Comparaisons des reconstructions de la phase entre a) l'approche inverse reconstruisant un seul plan et b) l'approche inverse multi-plans.

tenue à l'aide de l'approche inverse 1-plan décrite au chapitre 5 offre une reconstruction contaminée par un objet qui n'était pas dans le même plan que l'objet reconstruit (Fig.6.3.(a)). En revanche l'approche multi-plans proposée permet de

prendre en compte l'objet dans l'autre plan et ainsi d'obtenir une meilleure reconstruction de l'objet d'intérêt. Cette amélioration peut aussi se retrouver dans le plan hologramme (voir Fig.6.4). En effet l'approche inverse 1-plan propose une reconstruction à l'aide de son modèle de formation d'hologramme qui ne prend en compte qu'un seul plan et donc reconstruit mal la figure de diffraction induite par l'objet dans l'autre plan (Fig.6.4.(a)) et cela se retrouve donc lorsque l'on observe le résidu entre l'hologramme reconstruit et l'hologramme acquis (Fig.6.4.(c)). A l'inverse dans le cas de l'approche inverse multi-plans autant l'hologramme reconstruit que le résidu (Fig.6.4.(b).(d)) se retrouvent significativement impactés par les "figures de diffraction" créées par l'objet situé dans un autre plan car il est lui-même pris en compte dans le modèle de formation d'hologramme. Notons que la



**FIGURE 6.4** – Première ligne : l'hologramme reconstruit avec le modèle obtenu par l'approche inverse 1-plan a), et celui reconstruit par l'approche multi-plans b). Deuxième ligne : Résidu entre les données (voir la figure 6.2) et l'hologramme reconstruit muni du modèle obtenu par l'approche inverse 1-plan c), et le même résidu pour la reconstruction multi-plans d).

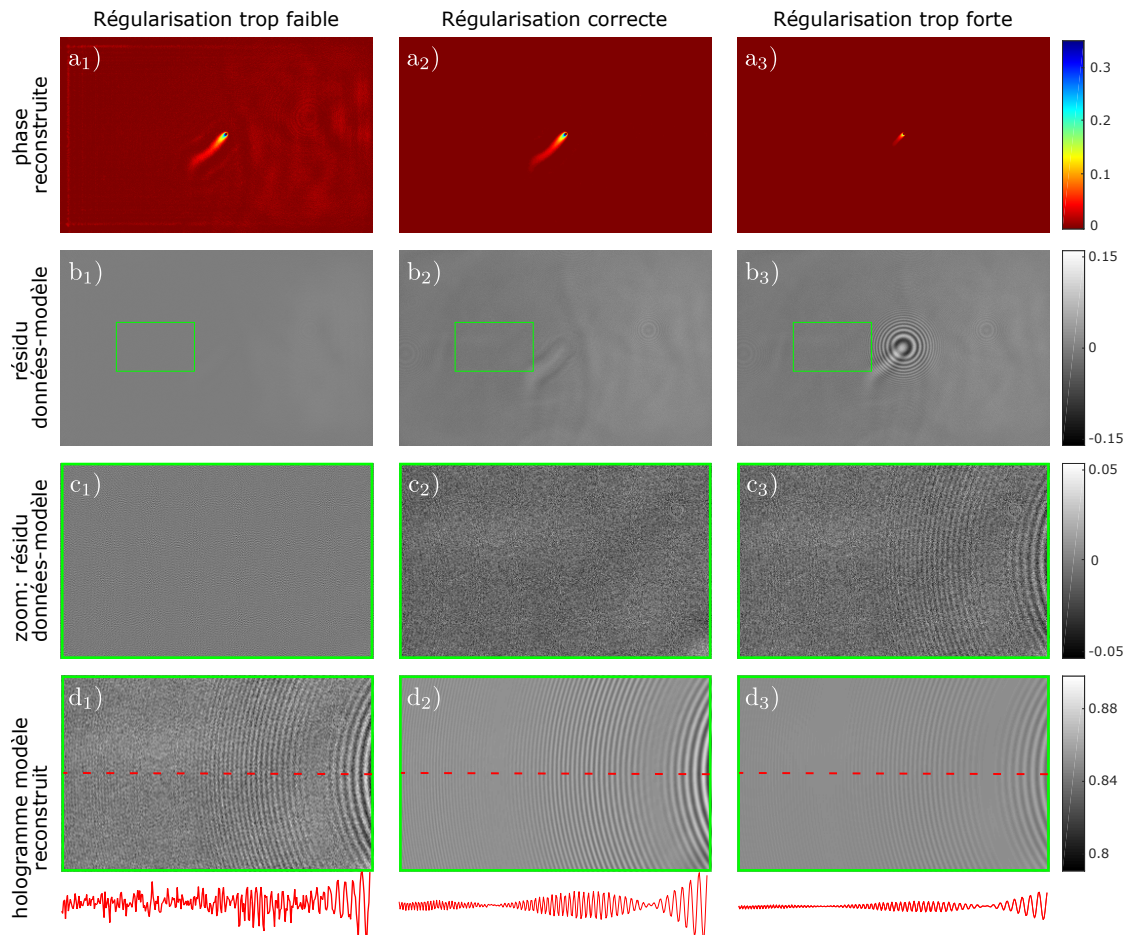
méthode de réglages des hyper-paramètres peut altérer cette comparaison dans le fait qu'il n'y a pas vraiment d'équivalence entre les valeurs des hyper-paramètres de l'approche 1-plan et l'approche multi-plans. De plus ces deux méthodes ont été appliquées sur plusieurs hologrammes de la séquence de l'évaporation de la gouttelette d'éther, il est apparu que souvent l'étendue du panache d'évaporation était moins importante sur la reconstruction avec l'approche multi-plans qu'avec l'approche 1-plan, il reste donc à lever les causes de cette différence d'étendue. Une autre piste qui serait intéressante à explorer (et peut être liée à la première) est l'influence de l'approximation (Eq.6.5) qui est faite dans ces travaux préliminaires. De plus il serait intéressant d'explorer de voir s'il n'est pas possible de réduire le

nombre d'hyper-paramètres car le nombre d'hyper-paramètres à régler peut rapidement devenir un casse-tête si l'on prend en compte plus de 2 plans. Enfin une des pistes envisageables, si l'on néglige le temps de calcul, serait pour les objets de phase avec une absorbance "paramétrique" (par exemple la gouttelette d'éther évaporante) d'appliquer une approche paramétrique [5, 6] dans un premier temps, d'estimer le nombre de plan à reconstruire (à des distances suffisamment distinctes), et dans un deuxième temps de réaliser une reconstruction à l'aide d'une méthode multi-plans.

## 6.2 Réglage des hyper-paramètres de régularisation

Si les termes de régularisation ont un sens dans l'espace "objet" via les *a priori* que l'on met sur la distribution de celui-ci, cette régularisation peut aussi avoir un sens dans l'espace "hologramme". En effet, la figure 6.5 met en avant la philosophie qui doit être adoptée pour régler les hyper-paramètres de régularisation, et les réponses que doivent apporter les approches inverses régularisées à la question suivante : quel doit être le poids que l'on donne à un terme de régularisation afin de maximiser l'exploitation de l'information du signal présent dans l'hologramme tout en discriminant au mieux le bruit du signal ? Dans le cas de données expérimentales ces hyper-paramètres sont souvent réglés "à la main", et ce réglage est souvent basé sur des aspects "visuels" (objets lisses, parcimonieux...) dans l'espace objet. On peut alors se demander si ce critère visuel (ici basé sur la reconstruction de la phase et la reconstruction du module) est pertinent, et s'il n'est pas important de vérifier, avec les informations du résidu (entre l'hologramme expérimental et l'hologramme reconstruit par la méthode régularisée) et de la reconstruction de l'hologramme, que le réglage choisit offre un compromis biais/variance optimal. En effet la figure 6.5 montre bien que si le poids de la régularisation est trop faible nous allons trop bien interpréter toutes les franges d'interférence de l'hologramme (voir résidus la figure 6.5.b<sub>1</sub>.c<sub>1</sub>), en revanche nous voyons que l'hologramme modèle reconstruit est très bruité (voir la figure 6.5.(d<sub>1</sub>)). A l'inverse si l'on régularise trop, la méthode interprète toute une partie du signal comme du bruit (voir résidus figure 6.5.(b<sub>3</sub>).c<sub>3</sub>), la reconstruction ne peut alors être optimale (voir la figure 6.5.(d<sub>3</sub>)). Finalement la régularisation qui discrimine au mieux le bruit (que l'on doit retrouver dans les résidus figures 6.5.(b<sub>2</sub>).c<sub>2</sub>), du signal (que l'on doit retrouver dans l'hologramme modèle figure 6.5.(d<sub>2</sub>)) est la régularisation utilisée dans la colonne centrale de la figure 6.5. Malgré le fait que l'on ait trouvé une régularisation bien adaptée, il peut rester un peu de signal dans les résidus (voir résidu b<sub>2</sub> au niveau du panache). Cela peut venir du fait qu'il est très difficile

de discriminer de manière parfaite le bruit du signal sans altérer une partie du signal. Notons qu'enfin dans le domaine du débruitage d'images ces questions sur l'exploitation de l'information contenue dans les résidus a été abordées à plusieurs reprises [111, 112], et Ferhenbach *et al.* ont proposé une méthode permettant de régler un hyper-paramètre pour une méthode régularisée à l'aide l'information dans l'espace de Fourier du résidu [113].

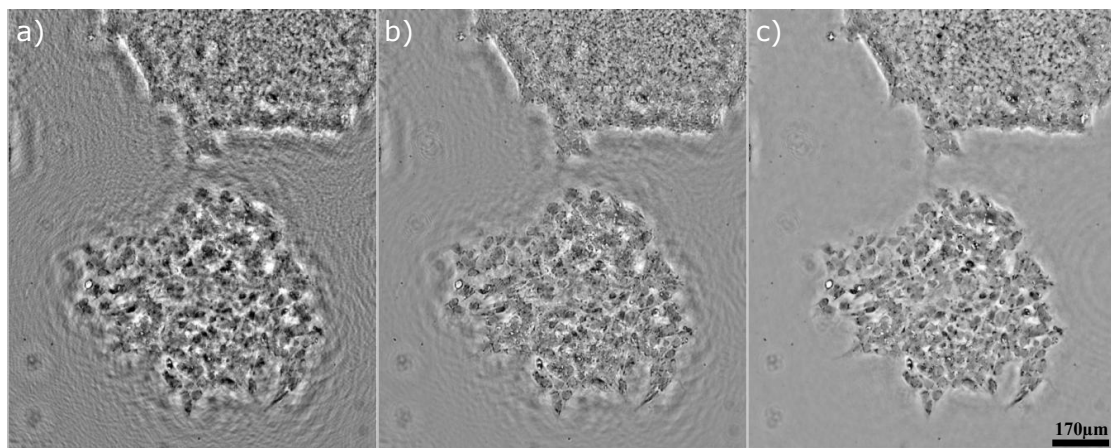


**FIGURE 6.5** – Effets du poids de la régularisation. Première ligne a) : les reconstructions de phase obtenues. Deuxième ligne b) : les résidus entre l'hologramme expérimental et l'hologramme modèle obtenu avec le modèle de formation d'hologramme (Eq.5.2) et la transmittance reconstruite. Troisième ligne c) : Zooms de b). Quatrième ligne : Zoom de l'hologramme modèle obtenu avec le modèle de formation d'hologramme (Eq.5.2) et la transmittance reconstruite. La première colonne montre ces résultats pour une reconstruction sous-régularisée; la deuxième colonne pour une reconstruction correctement régularisée et enfin la troisième colonne pour une reconstruction sur-régularisée.



### 6.3 Utilisation de la redondance d'informations

En holographie numérique en ligne l'exploitation de la redondance d'informations permettent d'obtenir de meilleures reconstructions, que ce soit avec des méthodes utilisant la super-résolution à l'aide d'une pile d'images sous-résolues [65, 7, 60], des méthodes utilisant des hologrammes d'un objet acquis à plusieurs longueurs d'onde [114, 78], ou encore en utilisant plusieurs hologrammes d'un objet acquis à plusieurs distances  $z$ . Une première piste qui pourrait être prospectée serait une approche inverse reprenant la philosophie d'une version super-résolue de l'approche inverse du chapitre 5 permettant d'améliorer les reconstructions des objets absorbants et déphasants à partir d'une pile d'hologrammes. La deuxième piste envisageable serait d'adapter les approches inverses RVB proposées chapitre 4 à la reconstruction d'objets couleurs et de phase ce qui devrait améliorer fortement le ratio signal sur bruit comme l'a déjà montré Stahl *et al.* à l'aide d'une méthode itérative de type Gerchberg-Saxton [114] (voir la figure 6.6). Cette dernière technique devrait permettre, à partir des phases reconstruites pour chaque longueur d'onde, de remonter à l'indice optique des objets reconstruits. La troisième et dernière piste qui peut être explorée est d'établir une méthode

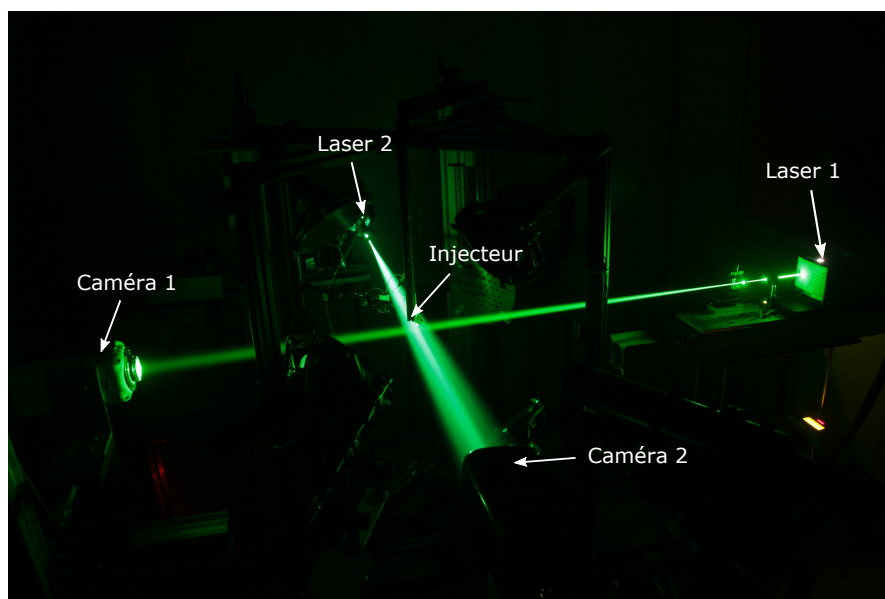


**FIGURE 6.6** – Récupération de la phase à l'aide d'une méthode itérative de type Gerchberg-Saxton utilisée sur des images à différentes longueurs d'onde de colonies de cellules souches humaines du papier [114] : Qualité de la reconstruction avec une longueur d'onde a), après itération de la méthode utilisant plusieurs longueurs d'ondes b) et après 100 itérations de cette dernière méthode c).

inverse permettant de reconstruire de manière conjointe des hologrammes acquis à différentes distances  $z$ . Nous pouvons noter que dans le cas de la reconstruction d'objets opaques cette dernière proposition est théoriquement équivalente à la méthode multi longueurs d'onde.

## 6.4 Vers la reconstruction 3D (tomographie diffractive)

Nous avons démontré dans cette thèse qu'il était possible à partir d'un seul hologramme de reconstruire de manière quantitative l'absorption et la phase d'un objet projeté sur un plan 2D. Dans l'idéal, il serait intéressant d'obtenir une reconstruction 3D de l'indice optique de l'objet, l'holographie n'offrant qu'une estimation de l'intégration de l'indice optique dans l'axe  $\vec{z}$ , c'est-à-dire du chemin optique. De son côté l'utilisation de la tomographie diffractive, permet de reconstruire des objets en 3D [98, 108, 109, 110], et donc potentiellement cet indice optique, mais requiert des acquisitions tomographiques, c'est à dire à plusieurs angles de vue pour permettre de récupérer une information volumique. Dans le cas de la gouttelette évaporante [101] cela pourrait potentiellement donner une information sur la distribution 3D du panache. La figure 6.7 présente une évolution du montage au LMFA pour permettre l'acquisition d'hologrammes dans deux directions. Cette première étape pourrait permettre d'avoir une information directe de cet indice optique selon les coordonnées  $(x, z)$ . Ces travaux, à l'état prospectif pour le moment, devraient encore plus ouvrir le champ d'application des travaux présentés dans le chapitre 5.



**FIGURE 6.7** – Deux montages d'holographie en ligne permettant l'acquisition de deux hologrammes en ligne pris avec un angle de vue différent. Ce montage et l'illustration ont été réalisés dans le cadre d'une expérience de mécanique des fluides du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA).

# Appendices

## Annexe A

# Calcul du gradient de la variation totale relaxée $TV_\epsilon$

Nous allons dans cette annexe expliciter le calcul qui permet d'obtenir l'expression du gradient de la fonction variation totale relaxée  $TV_\epsilon$ ,

$$TV_\epsilon(w) = \sum_{m,n=1}^N \sqrt{(D_m w_{m,n})^2 + (D_n w_{m,n})^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{A.1})$$

où  $\epsilon > 0$ .

Pour simplifier les calculs, notons

$$\Phi_\epsilon(t) = \sqrt{t + \epsilon^2}, \forall t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

On a donc,

$$\Phi'_\epsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{t + \epsilon^2}}, \forall t \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

## A.1 Calcul des adjoints $D_m^*$ et $D_n^*$ de respectivement $D_m$ et $D_n$

$$\langle w, D_m w' \rangle = \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} (w'_{m+1,n} - w'_{m,n}) \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{m,n=1}^N w_{m,n} w'_{m+1,n} - w_{m,n} w'_{m,n} \quad (\text{A.5})$$

$$= \sum_{m,n=1}^N w_{m-1,n} w'_{m,n} - w_{m,n} w'_{m,n} \quad (\text{A.6})$$

$$= \sum_{m,n=1}^N (w_{m-1,n} - w_{m,n}) w'_{m,n} \quad (\text{A.7})$$

$$= \langle D_m^* w, w' \rangle \quad (\text{A.8})$$

On a donc pour tout  $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ ,

$$D_m^* w_{m,n} = w_{m-1,n} - w_{m,n}, \forall (m,n) \in 1, \dots, N^2 \quad (\text{A.9})$$

Avec la même méthodologie nous avons,

$$D_n^* w_{m,n} = w_{m,n-1} - w_{m,n}, \forall (m,n) \in 1, \dots, N^2 \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Calcul du gradient

Considérons  $w'$  et  $w$  dans  $\mathbb{R}^{N^2}$ ,

$$\begin{aligned} TV_\epsilon(w + w') - TV_\epsilon(w) &= \sum_{m,n=1}^N \Phi_\epsilon(|\nabla(w + w')_{m,n}|^2) - \Phi_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2) \\ &= \sum_{m,n=1}^N \Phi_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2 + 2(D_m w_{m,n} D_m w'_{m,n} + D_n w_{m,n} D_n w'_{m,n}) \\ &\quad + o(|\nabla w'_{m,n}|)) - \Phi_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2) \\ &= \sum_{m,n=1}^N 2\Phi'_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2) (D_m w_{m,n} D_m w'_{m,n} + D_n w_{m,n} D_n w'_{m,n}) + o(|\nabla w'_{m,n}|) \end{aligned}$$

En notant,

$$X_{m,n} = 2\Phi'_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2) D_m w_{m,n} \quad (\text{A.11})$$

et

$$Y_{m,n} = 2\Phi'_\epsilon(|\nabla w_{m,n}|^2)D_n w_{m,n} \quad (\text{A.12})$$

on obtient finalement,

$$\begin{aligned} TV_\epsilon(w + w') - TV_\epsilon(w) &= \sum_{m,n=1}^N X_{m,n} D_m w'_{m,n} + \sum_{m,n=1}^N Y_{m,n} D_n w'_{m,n} + \sum_{m,n=1}^N o(|\nabla w_{m,n}|) \\ &= \langle X, D_m w' \rangle + \langle Y, D_n w' \rangle + o(\|\nabla w'\|_1) \\ &= \langle D_m^* X + D_n^* Y, w' \rangle + o(\|w'\|_2) \end{aligned}$$

On voit qu'un terme négligeable devant  $\|\nabla w'\|_1$  est aussi négligeable devant  $\|w'\|_2$  car

$$\sum_{m,n=1}^N |\nabla w'_{m,n}| \leq 4 \sum_{m,n=1}^N |w'_{m,n}| = 4 \langle w', \text{signe}(w') \rangle \leq 4N \|w'\|_2$$

$$\text{car } \|\text{signe}(w')\| = \left(\sum_{m,n=1}^N 1\right)^{1/2} = N$$

On peut donc conclure que pour tout  $w \in \mathbb{R}^{N^2}$

$$\nabla TV_\epsilon(w) = D_m^* X + D_n^* Y \quad (\text{A.13})$$

où  $X$  et  $Y$  sont définis par (Eq.A.11) et (Eq.A.12).

En utilisant (Eq.A.3) dans (Eq.A.11) et (Eq.A.12), nous avons,

$$X_{m,n} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \frac{D_m w_{m,n}}{|\nabla w_{m,n}|} \quad (\text{A.14})$$

et,

$$Y_{m,n} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \frac{D_n w_{m,n}}{|\nabla w_{m,n}|} \quad (\text{A.15})$$

Finalement nous pouvons donc exprimer le gradient de la variation totale de la manière suivante,

$$\nabla TV_\epsilon(w) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \text{div} \left( \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \right) \quad (\text{A.16})$$

Il est à noter que dans les faits afin d'éviter les problèmes de non-différentiabilité en "0", on fixe un  $\epsilon$  assez petit, nous pouvons utiliser la version du gradient suivante,

$$\nabla TV_\epsilon(w) = \text{div} \left( \frac{\nabla w}{\Phi_\epsilon(|\nabla w|^2)} \right) \quad (\text{A.17})$$

## Annexe B

# Démonstration de l'expression de l'opérateur proximal $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}$

L'opérateur proximal  $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}(p, q)$  (Eq.5.17) permet de résoudre de manière analytique le problème suivant,

$$(a^*, b^*) = \begin{cases} \underset{a, b}{\text{argmin}} & \beta(p-a)^2 + \beta(q-b)^2 + \alpha_1(1 - \sqrt{a^2 + b^2}) + \alpha_2|b| \\ \text{sous contraintes :} & a^2 + b^2 \leq 1, \text{ et } \varphi_{\min} \leq \varphi(a + ib) \leq \varphi_{\max} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dans un premier temps nous résoudrons le problème (Eq.B.1) sans prendre en compte la contrainte sur la phase et dans un deuxième temps nous ajouterons la contrainte sur la phase.

Pour résoudre le problème (Eq.B.1) sans prendre en compte la contrainte de phase, nous utilisons les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [115]. Pour cela, posons  $\mathcal{C}$  la fonction coût que l'on souhaite minimiser dans (Eq.B.1), telle que

$$\mathcal{C}(a, b) = \beta(p-a)^2 + \beta(q-b)^2 + \alpha_1(1 - \sqrt{a^2 + b^2}) + \alpha_2|b|, \quad (\text{B.2})$$

et  $\mathcal{H}$  une fonction permettant d'exprimer la contrainte sur le module (ici  $\mathcal{H}(a, b) = (a^2 + b^2) - 1$ ) sous une contrainte de négativité. Le lagrangien de ce problème est de la forme  $L_\mu(a, b) = \mathcal{C}(a, b) + \mu\mathcal{H}(a, b)$ . Le point point critique  $(a^*, b^*)$  est le point telle que le gradient du lagrangien s'annule, autrement dit,  $\nabla L_\mu(a^*, b^*) = 0$ . Le problème à résoudre est donc de la forme,

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{C}(a^*, b^*) + \mu \nabla \mathcal{H}(a^*, b^*) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu \cdot \mathcal{H}(a^*, b^*) = 0 \\ \mathcal{H}(a^*, b^*) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

## B.1 Cas où les contraintes sont inactives ( $\mu = 0$ )

Dans le cas où la contrainte sur le module est inactive (cas où  $\sqrt{a^{*2} + b^{*2}} \leq 1$ ), résoudre le problème (Eq.B.3), revient à trouver le point critique  $(a^*, b^*)$  tel que,

$$\nabla \mathcal{L}(a^*, b^*) = 0 \quad (\text{B.4})$$

### B.1.1 Cas $b^* = 0$

En partant du fait que le sous-différentiel de  $|b| \in [-1, 1]$  en "0", alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{cases} 2\beta(a-p) - \alpha_1 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + [-\alpha_2, \alpha_2] \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Calcul de  $a^*$

$$2\beta a - \alpha_1 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\beta p, \quad a \in \mathbb{R}^* \quad (\text{B.6})$$

Comme  $b^* = 0$ , c'est équivalent à

$$2\beta a - \alpha_1 \text{signe}(a) = 2\beta p, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

Il faut donc résoudre cette équation sur  $\mathbb{R}^*$  :

- Si  $p \in ]\infty, 0[ \cup ]0, \infty[ \Rightarrow$  Pas de solution unique

$$a_1 = p - \frac{\alpha_1}{2\beta} \quad \text{ou} \quad a_2 = p + \frac{\alpha_1}{2\beta}$$

On a donc deux minima locaux, mais la solution permettant de minimiser la fonction coût globalement est la solution  $a_1$  ou  $a_2$  qui minimise le terme  $|1 - \sqrt{a^2 + b^2}|$ . Le minimum globale  $a^*$  est donc,

$$a^* = p + \text{signe}(p) \frac{\alpha_1}{2\beta}$$

- Si  $p=0$

En reprenant (Eq.B.6), on a

$$2\beta a = \alpha_1 \text{signe}(a) \quad \Rightarrow \text{Pas de solution unique si } \alpha_1 \neq 0$$

Nous avons donc,

$$a^* = \pm \frac{\alpha_1}{2\beta}.$$

Dans le cas où l'une des deux valeurs ne respecte pas la contrainte sur la phase, nous prendrons l'autre. Dans le cas où les deux valeurs respectent la contrainte de phase nous prendrons celle du signe de  $p$ . Si  $\alpha_1 = 0$  alors  $a^* = 0$ .



### Quelles sont les conditions sur $q$ pour que $b^* = 0$ ?

En reprenant (Eq.B.5), on a

$$\begin{cases} 2\beta b - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \alpha_2 - 2\beta q \geq 0 \\ 2\beta b - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \alpha_2 - 2\beta q \leq 0 \end{cases}$$

Les cas où  $b^* = 0$  est donc lorsque,

$$\frac{-\alpha_2}{2\beta} \leq q \leq \frac{\alpha_2}{2\beta}$$

### **B.1.2 Cas $b^* \neq 0$ (et donc $|q| > \frac{\alpha_2}{2\beta}$ )**

#### **B.1.2.1 Si $b^* > 0$**

En considérant que les points  $(a^*, b^*)$  sont les point où les dérivées en fonction de  $a$  et de  $b$  s'annulent, on a

$$\begin{cases} 2\beta(a-p) - \alpha_1 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En reprenant la première égalité de (Eq.B.7) nous avons,

$$2\beta(a-p) - \alpha_1 \frac{a}{\rho} = 0,$$

on a donc,

$$\rho = \frac{\alpha_1 a}{2\beta(a-p)} \quad (\text{B.8})$$

et,

$$\left(2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}\right) a = 2\beta p.$$

Au final nous avons donc,

$$a = \frac{2\beta p}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}}. \quad (\text{B.9})$$

Posons  $b = \sqrt{\rho^2 - a^2}$  (car  $b > 0$ ). En reprenant la deuxième égalité de (Eq.B.7) on a

$$2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \alpha_2 = 0$$

On a donc deux égalités équivalentes

$$\Rightarrow 2\beta \left( \sqrt{\rho^2 - a^2} - q \right) - \alpha_1 \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} + \alpha_2 = 0$$

et,

$$b \left( 2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) = 2\beta q - \alpha_2.$$

On a donc,

$$b = \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}}. \quad (\text{B.10})$$

En reprenant l'égalité (Eq.B.8), nous avons

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\alpha_1 a}{2\beta(a-p)} \quad \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{\alpha_1^2 a^2}{4\beta^2(a-p)^2}.$$

En injectant ce resultat dans la deuxième égalité de (Eq.B.7), on a

$$\begin{aligned} & 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \alpha_2 = 0 \\ \Rightarrow & 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b(2\beta(a-p))}{\alpha_1 a} \\ \Rightarrow & b \left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) = q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \\ \Rightarrow & b = \frac{q}{1 + \frac{p-a}{a}} - \frac{\alpha_2}{2\beta \left( 1 + \frac{p-a}{a} \right)} \\ \Rightarrow & b = \frac{qa}{p} - \frac{\alpha_2 a}{2\beta p}. \end{aligned}$$

Au final, nous avons

$$b = a \left( \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta p} \right) \quad (\text{B.11})$$

En reprenant les résultats (Eq.B.9) et (Eq.B.10),

$$\rho^2 = \left( \frac{2\beta p}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}} \right)^2 + \left( \frac{-\alpha_2 + 2\beta q}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}} \right)^2.$$

$\rho$  possède trois solutions (calculées à l'aide d'un logiciel de calcul formel) :

$b^* > 0$ ,  
ou

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1\beta + \sqrt{\alpha_2^2\beta^2 - 4q\alpha_2\beta^3 + 4p^2\beta^4 + 4q^2\beta^4}}{2\beta^2}$$

$$\stackrel{\text{car } \beta > 0}{=} \frac{\alpha_1 + \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}{2\beta},$$

ou

$$\rho_2 \stackrel{\text{car } \beta > 0}{=} \frac{\alpha_1 - \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}{2\beta}.$$

En reprenant le calcul (Eq.B.8) nous pouvons calculer  $a^*$ ,

$$\begin{aligned} 2\rho\beta(a-p) &= \alpha_1 a \\ \Rightarrow (2\rho\beta - \alpha_1)a &= 2\rho\beta p \\ \Rightarrow a &= \frac{2\rho\beta p}{2\rho\beta - \alpha_1} \\ \Rightarrow a &= p + \frac{\alpha_1 p}{2\rho\beta - \alpha_1} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\rho\beta - \alpha_1 &= 2\beta \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}{2\beta} - \alpha_1 \\ &= \pm \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}. \end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{cases} \text{Si } \rho^* = \rho_1 & \Rightarrow a^* = p + \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}} \\ \text{Si } \rho^* = \rho_2 & \Rightarrow a^* = p - \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}} \end{cases}$$

En reprenant le  $b^*$  décrit dans (Eq.B.11),

$$b^* = a \left( \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta p} \right)$$

Si  $\rho^* = \rho_1$

$$a^* = p + \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}, \quad \text{et} \quad b^* = \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta} \frac{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2} + \alpha_1}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}$$

Si  $\rho^* = \rho_2$

$$a^* = p - \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}, \quad \text{et} \quad b^* = \frac{2\beta q - \alpha_2 \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2} - \alpha_1}{2\beta \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}$$

La solution optimale  $\rho^*$  va donc dépendre de  $\beta, \alpha_2, p$ , et  $q$ . Il faut donc traiter tous les cas possibles.

Si  $2\beta q - \alpha_2 > 0$  ( $q > \frac{\alpha_2}{2\beta}$ )

- Si  $\alpha_1 \geq \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$

$$\rho^* = \rho_1$$

- Si  $\alpha_1 < \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$

$$\rho^* = \rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho^* = \rho_2$$

mais dans le cas  $\rho^* = \rho_2$ , on a  $\rho^* < 0$ , donc solution impossible. On a donc une solution unique,

$$\rho^* = \rho_1.$$

Si  $\frac{-\alpha_2}{2\beta} \leq q \leq \frac{\alpha_2}{2\beta}$   $\Rightarrow$  Cas déjà traité ( $b^* = 0$ )

**Si**  $2\beta q - \alpha_2 < 0$   $\left(q < \frac{-\alpha_2}{2\beta}\right)$  (Cas impossible car  $\text{signe}(q) \neq \text{signe}(b^*)$ )

- Si  $\alpha_1 > \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$

$$\rho^* = \rho_2$$

- Si  $\alpha_1 \leq \sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$

Pas de solution car  $\rho_1$  et  $\rho_2$  donne  $b^* < 0$  alors que la condition de départ est  $b^* > 0 \Rightarrow$  Absurde

### B.1.2.2 Si $b^* < 0$

En considérant que les points  $(a^*, b^*)$  sont les point où les dérivées en fonction de  $a$  et de  $b$  s'annulent, on a

$$\begin{cases} 2\beta(a-p) - \alpha_1 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

En reprenant la première égalité de (Eq.B.12) nous avons,

$$2\beta(a-p) - \alpha_1 \frac{a}{\rho} = 0,$$

on a donc,

$$\rho = \frac{\alpha_1 a}{2\beta(a-p)} \quad (\text{B.13})$$

et,

$$\left(2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}\right) a = 2\beta p.$$

Au final nous avons donc,

$$a^* = \frac{2\beta p}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}}. \quad (\text{B.14})$$

Posons  $b = -\sqrt{\rho^2 - a^2}$  (car  $b < 0$ ). En reprenant la dexième égalité de (Eq.B.12) on a

$$2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \alpha_2 = 0$$

On a donc deux égalités équivalentes

$$\Rightarrow -2\beta \left(\sqrt{\rho^2 - a^2} + q\right) + \alpha_1 \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} - \alpha_2 = 0$$

et,

$$b \left( 2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho} \right) = 2\beta q + \alpha_2.$$

On a donc,

$$b^* = \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}}. \quad (\text{B.15})$$

En reprenant l'égalité (Eq.B.8), nous avons

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\alpha_1 a}{2\beta(a-p)} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = \frac{\alpha_1^2 a^2}{4\beta^2(a-p)^2}.$$

En injectant ce resultat dans la deuxième égalité de (Eq.B.12), on a

$$\begin{aligned} & 2\beta(b-q) - \alpha_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \alpha_2 = 0 \\ \Rightarrow & \quad b \left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) = q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \\ \Rightarrow & \quad b = \frac{qa}{p} + \frac{\alpha_2 a}{2\beta p}. \end{aligned}$$

Au final, nous avons

$$b = a \left( \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta p} \right) \quad (\text{B.16})$$

En reprenant les résultats (Eq.B.14) et (Eq.B.15),

$$\rho^2 = \left( \frac{2\beta p}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha_2 + 2\beta q}{2\beta - \frac{\alpha_1}{\rho}} \right)^2.$$

$\rho$  possède trois solutions (calculées à l'aide d'un logiciel de calcul formel) :

$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Solution ne respectant pas l'hypothèse de départ}$$

$b^* < 0$ ,

ou

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\alpha_1 \beta + \sqrt{\alpha_2^2 \beta^2 + 4q\alpha_2 \beta^3 + 4p^2 \beta^4 + 4q^2 \beta^4}}{2\beta^2} \\ &\stackrel{\text{car } \beta > 0}{=} \frac{\alpha_1 + \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2 \beta^2}}{2\beta}, \end{aligned}$$

ou

$$\rho_2 \underset{\text{car } \beta > 0}{=} \frac{\alpha_1 - \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}{2\beta}.$$

En reprenant le calcul (Eq.B.13) nous pouvons calculer  $a^*$ ,

$$\begin{aligned} 2\rho\beta(a-p) &= \alpha_1 a \\ \Rightarrow (2\rho\beta - \alpha_1)a &= 2\rho\beta p \\ \Rightarrow a &= \frac{2\rho\beta p}{2\rho\beta - \alpha_1} \\ \Rightarrow a &= p + \frac{\alpha_1 p}{2\rho\beta - \alpha_1} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\rho\beta - \alpha_1 &= 2\beta \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}{2\beta} - \alpha_1 \\ &= \pm \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}. \end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{cases} \text{Si } \rho^* = \rho_1 & \Rightarrow a^* = p + \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}} \\ \text{Si } \rho^* = \rho_2 & \Rightarrow a^* = p - \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}} \end{cases}$$

En reprenant le  $b^*$  décrit dans (Eq.B.16),

$$b^* = a \left( \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta p} \right)$$

Si  $\rho^* = \rho_1$

$$a^* = p + \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}, \quad \text{et} \quad b^* = \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta} \frac{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2} + \alpha_1}{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}$$

Si  $\rho^* = \rho_2$

$$a^* = p - \frac{\alpha_1 p}{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}, \quad \text{et} \quad b^* = \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta} \frac{\sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2} - \alpha_1}{\sqrt{(\alpha_2 - 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}}$$

La solution optimale  $\rho^*$  va donc dépendre de  $\beta$ ,  $\alpha_2$ ,  $p$  et  $q$ . Il faut donc traiter tous les cas possibles.

Si  $2\beta q + \alpha_2 > 0$  ( $q > \frac{-\alpha_2}{2\beta}$ )

- Si  $\frac{-\alpha_2}{2\beta} \leq q \leq \frac{\alpha_2}{2\beta}$   $\Rightarrow$  Cas déjà traité ( $b^* = 0$ )
- Si  $(q > \frac{\alpha_2}{2\beta})$  (Cas impossible car  $\text{signe}(q) \neq \text{signe}(b^*)$ )
  - Si  $\alpha_1 > \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$ 

$$\rho^* = \rho_2$$
  - Si  $\alpha_1 \leq \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$   
Pas de solution donnant  $b^* < 0$ .

Si  $2\beta q + \alpha_2 < 0$  ( $q < \frac{-\alpha_2}{2\beta}$ )

- Si  $\alpha_1 \geq \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$ 

$$\rho^* = \rho_1$$
- Si  $\alpha_1 < \sqrt{(\alpha_2 + 2q\beta)^2 + 4p^2\beta^2}$ 

$$\rho^* = \rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho^* = \rho_2$$

mais dans le cas  $\rho^* = \rho_2$ , on a  $\rho^* < 0$ , donc solution impossible. On a donc une solution unique,

$$\rho^* = \rho_1.$$

## B.2 Cas où la contrainte sur le module ( $a^2 + b^2 \leq 1$ ) est active ( $\mu > 0$ )

Dans le cas où la contrainte sur le module est active, il faut résoudre le problème (Eq.B.3), avec  $\mu > 0$ . En explicitant la fonction de contrainte  $\mathcal{H}$  en fonction de  $a$  et  $b$ , cela revient à résoudre le problème suivant,

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(a^*, b^*) + \mu \begin{pmatrix} 2a^* \\ 2b^* \end{pmatrix} = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu \cdot (a^{*2} + b^{*2} - 1) = 0 \\ a^{*2} + b^{*2} - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$



### B.2.1 Si $b^* > 0$

Dans le cas où  $b^* > 0$ , résoudre le problème B.17 demande de résoudre le problème suivant,

$$\begin{cases} 2\beta(a-p) + 2\mu a = 0 & \Rightarrow \mu = \beta \frac{p-a}{a} \\ 2\beta(b-q) + \alpha_2 + 2\mu b = 0 \\ b = \sqrt{1-a^2} \quad \text{car } b > 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

En injectant  $\mu = \beta \frac{p-a}{a}$  et  $b = \sqrt{1-a^2}$  dans la deuxième équation de B.18, on a

$$\begin{aligned} & 2\beta(\sqrt{1-a^2}-q) + \alpha_2 + 2\beta \frac{p-a}{a} \sqrt{1-a^2} = 0 \\ \Rightarrow & \sqrt{1-a^2} \left( 2\beta + 2\beta \frac{p-a}{a} \right) = 2\beta q - \alpha_2 \\ \Rightarrow & \sqrt{1-a^2} = \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta \left( 1 + \frac{p-a}{a} \right)} \\ \Rightarrow & \sqrt{1-a^2} = \frac{2\beta q - \alpha_2}{2\beta \frac{p}{a}} \\ \Rightarrow & 1-a^2 = \frac{\left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2}{\left( \frac{p}{a} \right)^2} \\ \Rightarrow & \frac{p^2(1-a^2)}{a^2} = \left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 \\ \Rightarrow & \frac{p^2}{a^2} - p^2 = \left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 \\ \Rightarrow & \frac{p^2}{a^2} = \left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2 \\ \Rightarrow & a^2 = \frac{p^2}{\left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2} \\ \Rightarrow & a = \pm \sqrt{\frac{p^2}{\left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} \quad \Rightarrow \text{ 2 minima locaux} \end{aligned}$$

En éliminant la solution qui n'est pas du même signe que  $p$ , l'expression du point critique est,

$$\begin{cases} a^* = \text{signe}(p) \sqrt{\frac{p^2}{\left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} & \Rightarrow \text{ minimum global} \\ b^* = \sqrt{1-a^{*2}} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{\left( q - \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

### B.2.2 Si $b^* < 0$

Dans le cas où  $b^* < 0$ , résoudre le problème B.17 demande de résoudre le problème suivant,

$$\begin{cases} 2\beta(a-p) + 2\mu a = 0 & \Rightarrow \mu = \beta \frac{p-a}{a} \\ 2\beta(b-q) - \alpha_2 + 2\mu b = 0 \\ b = -\sqrt{1-a^2} \quad \text{car } b < 0 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

En injectant  $\mu = \beta \frac{p-a}{a}$  et  $b = -\sqrt{1-a^2}$  dans la deuxième équation de B.20, on a

$$\begin{aligned} & 2\beta(-\sqrt{1-a^2}-q) - \alpha_2 - 2\beta \frac{p-a}{a} \sqrt{1-a^2} = 0 \\ \Rightarrow & -\sqrt{1-a^2} \left( 2\beta + 2\beta \frac{p-a}{a} \right) = 2\beta q + \alpha_2 \\ \Rightarrow & -\sqrt{1-a^2} = \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta \left( 1 + \frac{p-a}{a} \right)} \\ \Rightarrow & -\sqrt{1-a^2} = \frac{2\beta q + \alpha_2}{2\beta \frac{p}{a}} \\ \Rightarrow & 1-a^2 = \frac{\left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2}{\left( \frac{p}{a} \right)^2} \\ \Rightarrow & \frac{p^2(1-a^2)}{a^2} = \left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 \\ \Rightarrow & \frac{p^2}{a^2} - p^2 = \left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 \\ \Rightarrow & \frac{p^2}{a^2} = \left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2 \\ \Rightarrow & a^2 = \frac{p^2}{\left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2} \\ \Rightarrow & a = \pm \sqrt{\frac{p^2}{\left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} \quad \Rightarrow \text{ 2 minima locaux} \end{aligned}$$

En éliminant la solution qui n'est pas du même signe que  $p$ , l'expression du point critique est,

$$\begin{cases} a^* = \text{signe}(p) \sqrt{\frac{p^2}{\left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} & \Rightarrow \text{ minimum global} \\ b^* = -\sqrt{1-a^{*2}} = -\sqrt{1 - \frac{p^2}{\left( q + \frac{\alpha_2}{2\beta} \right)^2 + p^2}} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

### B.2.3 Si $b^* = 0$

$$\begin{cases} a^* = \text{signe}(p) \\ b^* = 0 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

## B.3 Cas où la contrainte sur la phase ( $\varphi(a^*, b^*) \in [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ ) est active

Si on a  $\{a^*, b^*\}$  tel que  $\varphi(a^*, b^*) \in [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ , alors nous gardons le couple  $a^*, b^*$  calculé jusqu'à présent. En revanche si nous avons  $\{a^*, b^*\}$  tel que  $\varphi(a^*, b^*) \notin [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ , alors nous devons nous poser deux questions :

$$\begin{cases} \text{Si } \varphi = \varphi_{min}, \text{ que vaut } \rho ? \\ \text{Si } \varphi = \varphi_{max}, \text{ que vaut } \rho ? \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Pour répondre à cette question, reprenons le problème (Eq.5.17), non plus en fonction du couple  $\{a, b\}$  mais en fonction de  $\{\rho, \varphi\}$ ,

$$\begin{cases} \underset{\rho}{\text{argmin}} & \beta(p - \rho \cos(\varphi))^2 + \beta(q - \rho \sin(\varphi))^2 + \alpha_1 \left(1 - \sqrt{(\rho \cos(\varphi))^2 + (\rho \sin(\varphi))^2}\right) + \alpha_2 |\rho \sin(\varphi)| \\ \text{sous contraintes :} & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -2\beta \cos(\varphi) (p - \rho \cos(\varphi)) - 2\beta \sin(\varphi) (q - \rho \sin(\varphi)) - \alpha_1 + \alpha_2 |\sin(\varphi)| = 0 \\ \Rightarrow & 2\beta \rho (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) - 2\beta (\cos(\varphi)p + \sin(\varphi)q) - \alpha_1 + \alpha_2 |\sin(\varphi)| = 0 \end{aligned}$$

On a donc,

$$\rho^* = \frac{2\beta (\cos(\varphi)p + \sin(\varphi)q) + \alpha_1 - \alpha_2 |\sin(\varphi)|}{2\beta}$$

On peut donc maintenant calculer  $\rho^*$  pour  $\varphi_{min}$  et  $\varphi_{max}$ ,

$$\begin{cases} \rho_{\varphi_{min}}^* = \max(\min(\rho^*(\varphi_{min}), 1), 0) \\ \rho_{\varphi_{max}}^* = \max(\min(\rho^*(\varphi_{max}), 1), 0) \end{cases}$$

Le minimum global du problème sous contrainte (Eq.5.17) sera donc,

$$\{\rho, \varphi\}^* = \min_{\rho, \varphi} (\mathcal{F}(\rho^*(\varphi_{min}), \varphi_{min}), \mathcal{F}(\rho^*(\varphi_{max}), \varphi_{max}))$$

avec,

$$\mathcal{F}(\rho, \varphi) = \beta (p - \rho \cos(\varphi))^2 + \beta (q - \rho \sin(\varphi))^2 + \alpha_1(1 - \rho) + \alpha_2\rho|\sin(\varphi)|$$

Arrivé à ce stade, si la contrainte sur la phase est active, nous avons recherché le minimum en bord de contrainte de la phase, ce qui est vrai dans une optimisation convexe. Malheureusement, notre problème est non-convexe et peut présenter des minima locaux. Pour remédier à ce problème, il faut juste vérifier dans le cas où le minimum global ne respecte pas la contrainte de phase, que le minimum obtenue en bord de contrainte est bien un minimum par rapport aux autres minima locaux dont les expressions analytiques ont été donné ci-avant (notons que le point (0,0) en fait toujours parti).

# Annexe C

## Pseudo algorithmme

---

**Algorithm 1** Algorithmme proximal  $\text{prox}_{\beta^{-1}g_{\alpha_1, \alpha_2}}$

---

**Variables d'entrée :**  $p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$

**Paramètres d'entrée :**  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$  (option :  $\varphi_{min} \in [-\pi, \pi], \varphi_{max} \in [-\pi, \pi]$ )

**Sortie :**  $a^* \in \mathbb{R}, b^* \in \mathbb{R}$

**if**  $p = 0$  &  $q = 0$  **then**

$$a^* \leftarrow \min\left(\frac{\alpha_1}{2\beta}, 1\right)$$

$$b^* \leftarrow 0$$

**else**

$$a^* \leftarrow \frac{p}{|p + iS_{\alpha_2/2\beta}(q)|}$$

$$b^* \leftarrow S_{\alpha_2/2\beta}(q) + \frac{\alpha_1}{2\beta} \frac{S_{\alpha_2/2\beta}(q)}{|p + iS_{\alpha_2/2\beta}(q)|}$$

**end if**

**if**  $|a^* + ib^*| > 1$  **then**

$$a^* \leftarrow \frac{p}{|p + iS_{\alpha_2/2\beta}(q)|}$$

$$b^* \leftarrow \frac{S_{\alpha_2/2\beta}(q)}{|p + iS_{\alpha_2/2\beta}(q)|}$$

**end if**

**if**  $\varphi(a^* + ib^*) \notin [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  **then**

$$\rho(\varphi) = \max\left(\min\left(\frac{2\beta(p \cos(\varphi) + q \sin(\varphi)) + \alpha_1 - \alpha_2 |\sin(\varphi)|}{2\beta}, 1\right), 0\right)$$

$$\{\rho^*, \varphi^*\} \leftarrow \min_{\rho, \varphi} (\mathcal{C}(\rho(\varphi_{min}), \varphi_{min}), \mathcal{C}(\rho(\varphi_{max}), \varphi_{max}))$$

$$\text{with, } \mathcal{C}(\rho, \varphi) = \beta(p - \rho \cos(\varphi))^2 + \beta(q - \rho \sin(\varphi))^2 + \alpha_1(1 - \rho) + \alpha_2 \rho |\sin(\varphi)|$$

$$a^* \leftarrow \rho^* \cos(\varphi^*)$$

$$b^* \leftarrow \rho^* \sin(\varphi^*)$$

**end if**

---

# Bibliographie

- [1] D. Gabor *et al.*, “A new microscopic principle,” *Nature*, vol. 161, no. 4098, pp. 777–778, 1948.
- [2] H. Royer, “Holographic velocimetry of submicron particles,” *Optics Communications*, vol. 20, no. 1, pp. 73–75, 1977.
- [3] C. Geiler, M. Stanislas, H. Royer, and T. Fournel, “Automatic assessment of aerosol holograms for granulometry and velocimetry,” in *Flow Visualization VI*, pp. 431–435, Springer, 1992.
- [4] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [5] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, É. Thiébaud, and C. Goepfert, “Inverse-problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimization,” *JOSA A*, vol. 24, no. 4, pp. 1164–1171, 2007.
- [6] F. Soulez, L. Denis, E. Thiébaud, C. Fournier, and C. Goepfert, “Inverse problem approach in particle digital holography : out-of-field particle detection made possible,” *JOSA A*, vol. 24, no. 12, pp. 3708–3716, 2007.
- [7] N. Verrier and C. Fournier, “Digital holography super-resolution for accurate three-dimensional reconstruction of particle holograms,” *Optics letters*, vol. 40, no. 2, pp. 217–220, 2015.
- [8] L. Denis, D. Lorenz, E. Thiébaud, C. Fournier, and D. Trede, “Inline hologram reconstruction with sparsity constraints,” *Optics letters*, vol. 34, no. 22, pp. 3475–3477, 2009.
- [9] D. Gabor, “Holography 1948-1971-abstract of nobel lecture, 11 december 1971,” *Europhysics News*, vol. 3, no. 3, pp. 8–9, 1972.
- [10] J. Katz and J. Sheng, “Applications of holography in fluid mechanics and particle dynamics,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 42, pp. 531–555, 2010.
- [11] L. Denis, *Traitement et analyse quantitative d’hogrammes numériques*. PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Etienne, 2006.

- [12] J. W. Goodman and R. Lawrence, "Digital image formation from electronically detected holograms," *Applied physics letters*, vol. 11, no. 3, pp. 77–79, 1967.
- [13] M. Kronrod, N. Merzlyakov, and L. Yaroslavskii, "Reconstruction of a hologram with a computer," *Soviet Physics Technical Physics*, vol. 17, p. 333, 1972.
- [14] L. Onural and P. D. Scott, "Digital decoding of in-line holograms," *Optical engineering*, vol. 26, no. 11, p. 261124, 1987.
- [15] W. S. Haddad, D. Cullen, J. C. Solem, J. W. Longworth, A. McPherson, K. Boyer, and C. K. Rhodes, "Fourier-transform holographic microscope," *Applied optics*, vol. 31, no. 24, pp. 4973–4978, 1992.
- [16] U. Schnars and W. P. Jüptner, "Digital recording and reconstruction of holograms in hologram interferometry and shearography," *Applied optics*, vol. 33, no. 20, pp. 4373–4377, 1994.
- [17] L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, and C. Ducottet, "Twin-image noise reduction by phase retrieval in in-line digital holography," in *Wavelets XI, SPIE's Symposium on Optical Science and Technology*, vol. 5914, p. 59140J, 2005.
- [18] S. Sotthivirat and J. A. Fessler, "Penalized-likelihood image reconstruction for digital holography," *JOSA A*, vol. 21, no. 5, pp. 737–750, 2004.
- [19] G. A. Tyler and B. J. Thompson, "Fraunhofer holography applied to particle size analysis a reassessment," *Optica Acta : International Journal of Optics*, vol. 23, no. 9, pp. 685–700, 1976.
- [20] J. Gire, "Holographie numérique de micro-particules : apports de l'approche problème inverse et optimisation de l'algorithme de traitement," *Hal : ujm*, vol. 51, 2009.
- [21] M. Seifi, *Methodes de traitement du signal pour la reconstruction rapide et précise des hologrammes numériques*. PhD thesis, Citeseer, 2014.
- [22] O. Flasseur, C. Fournier, N. Verrier, L. Denis, F. Jolivet, A. Cazier, and T. Lépine, "Self-calibration for lensless color microscopy," *Applied Optics*, vol. 56, no. 13, pp. F189–F199, 2017.
- [23] O. Flasseur, L. Denis, C. Fournier, and E. Thiébaud, "Robust object characterization from lensless microscopy videos," in *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2017 25th European*, pp. 1445–1449, IEEE, 2017.
- [24] L. Denis, D. Lorenz, E. Thiébaud, C. Fournier, and D. Trede, "Inline hologram reconstruction with sparsity constraints," *Optics letters*, vol. 34, no. 22, pp. 3475–3477, 2009.

- [25] M. Liebling, T. Blu, and M. Unser, “Fresnelets : new multiresolution wavelet bases for digital holography,” *IEEE Transactions on image processing*, vol. 12, no. 1, pp. 29–43, 2003.
- [26] B. J. Thompson, “A new method of measuring particle size by diffraction techniques,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 3, no. S1, p. 302, 1964.
- [27] T. M. Kreis, “Frequency analysis of digital holography with reconstruction by convolution,” *Optical Engineering*, vol. 41, no. 8, pp. 1829–1839, 2002.
- [28] A. N. Tikhonov, “Regularization of incorrectly posed problems,” *SOVIET MATHEMATICS DOKLADY*, 1963.
- [29] A. Tarantola and B. Valette, “Inverse problems= quest for information,” *J. geophys*, vol. 50, no. 3, pp. 150–170, 1982.
- [30] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the lasso,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 267–288, 1996.
- [31] M. Carlván, P. Weiss, and L. Blanc-Féraud, “Régularité et parcimonie pour les problèmes inverses en imagerie : algorithmes et comparaisons,” *Traitement du signal*, 2010.
- [32] H. Badri, *Sparse and Scale-Invariant Methods in Image Processing*. PhD thesis, Bordeaux, 2015.
- [33] S. G. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation,” *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.
- [34] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 57, no. 11, pp. 1413–1457, 2004.
- [35] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms,” *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259–268, 1992.
- [36] A. Chambolle, V. Caselles, D. Cremers, M. Novaga, and T. Pock, “An introduction to total variation for image analysis,” *Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery*, vol. 9, no. 263-340, p. 227, 2010.
- [37] A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications,” *Journal of Mathematical imaging and vision*, vol. 20, no. 1, pp. 89–97, 2004.
- [38] A. Beck and M. Teboulle, “Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, no. 11, pp. 2419–2434, 2009.



- [39] L. Condat, “A generic proximal algorithm for convex optimization—application to total variation minimization,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 21, no. 8, pp. 985–989, 2014.
- [40] C.-A. Deledalle, N. Papadakis, J. Salmon, and S. Vaiteer, “Clear : Covariant least-square refitting with applications to image restoration,” *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 10, no. 1, pp. 243–284, 2017.
- [41] C. Louchet and L. Moisan, “Total variation denoising using posterior expectation,” in *Signal Processing Conference, 2008 16th European*, pp. 1–5, IEEE, 2008.
- [42] P. Blomgren, T. F. Chan, P. Mulet, and C.-K. Wong, “Total variation image restoration : numerical methods and extensions,” in *Image Processing, 1997. Proceedings., International Conference on*, vol. 3, pp. 384–387, IEEE, 1997.
- [43] L. Meier, S. Van De Geer, and P. Bühlmann, “The group lasso for logistic regression,” *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, vol. 70, no. 1, pp. 53–71, 2008.
- [44] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [45] P. Wolfe, “Convergence conditions for ascent methods,” *SIAM review*, vol. 11, no. 2, pp. 226–235, 1969.
- [46] P. Wolfe, “Convergence conditions for ascent methods. ii : Some corrections,” *SIAM review*, vol. 13, no. 2, pp. 185–188, 1971.
- [47] E. Thiébaud, “Optimization issues in blind deconvolution algorithms,” in *Proc. SPIE*, vol. 4847, pp. 174–183, 2002.
- [48] J. J. Moré and D. J. Thuente, “Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 20, no. 3, pp. 286–307, 1994.
- [49] M. A. Figueiredo, R. D. Nowak, and S. J. Wright, “Gradient projection for sparse reconstruction : Application to compressed sensing and other inverse problems,” *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, vol. 1, no. 4, pp. 586–597, 2007.
- [50] N. Parikh, S. Boyd, *et al.*, “Proximal algorithms,” *Foundations and Trends® in Optimization*, vol. 1, no. 3, pp. 127–239, 2014.
- [51] J.-J. Moreau, “Proximité et dualité dans un espace hilbertien,” *Bull. Soc. Math. France*, vol. 93, no. 2, pp. 273–299, 1965.
- [52] A. Beck and M. Teboulle, “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems,” *SIAM journal on imaging sciences*, vol. 2, no. 1, pp. 183–202, 2009.

- [53] J. M. Bioucas-Dias and M. A. Figueiredo, “A new twist : Two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration,” *IEEE Transactions on Image processing*, vol. 16, no. 12, pp. 2992–3004, 2007.
- [54] Y. Nesterov *et al.*, “Gradient methods for minimizing composite objective function,” 2007.
- [55] Y. Nesterov, “A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $o(1/k^2)$ ,” in *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 27, pp. 372–376, 1983.
- [56] P. L. Combettes and V. R. Wajs, “Signal recovery by proximal forward-backward splitting,” *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 4, no. 4, pp. 1168–1200, 2005.
- [57] N. Pustelnik, *Méthodes proximales pour la résolution de problèmes inverses : application à la tomographie par émission de positrons*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2010.
- [58] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
- [59] R. Mourya, L. Denis, J.-M. Becker, and E. Thiebaut, “Augmented lagrangian without alternating directions : Practical algorithms for inverse problems in imaging,” in *Image Processing (ICIP), 2015 IEEE International Conference on*, pp. 1205–1209, IEEE, 2015.
- [60] C. Fournier, F. Jolivet, L. Denis, N. Verrier, E. Thiebaut, C. Allier, and T. Fournel, “Pixel super-resolution in digital holography by regularized reconstruction,” *Applied Optics*, vol. 56, no. 1, pp. 69–77, 2017.
- [61] S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang, “Super-resolution image reconstruction : a technical overview,” *IEEE signal processing magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 21–36, 2003.
- [62] R. C. Hardie, K. J. Barnard, and E. E. Armstrong, “Joint map registration and high-resolution image estimation using a sequence of undersampled images,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 6, no. 12, pp. 1621–1633, 1997.
- [63] P. Vandewalle, L. Sbaiz, M. Vetterli, and S. Sustrunk, “Super-resolution from highly undersampled images,” in *Image Processing, 2005. ICIP 2005. IEEE International Conference on*, vol. 1, pp. I–889, IEEE, 2005.
- [64] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice Hall PTR, 1993.

- [65] W. Bishara, T.-W. Su, A. F. Coskun, and A. Ozcan, “Lensfree on-chip microscopy over a wide field-of-view using pixel super-resolution,” *Optics express*, vol. 18, no. 11, pp. 11181–11191, 2010.
- [66] C. Fournier, L. Denis, M. Seifi, and T. Fournel, “Digital hologram processing in on-axis holography,” *Multi-dimensional Imaging*, vol. 0, pp. 51–73, 2014.
- [67] S. Farsiu, D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar, “Advances and challenges in super-resolution,” *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 47–57, 2004.
- [68] P. Vandewalle, S. Süsstrunk, and M. Vetterli, “A frequency domain approach to registration of aliased images with application to super-resolution,” *EURASIP Journal on applied signal processing*, vol. 2006, pp. 233–233, 2006.
- [69] G. Rochefort, F. Champagnat, G. Le Besnerais, and J.-F. Giovannelli, “An improved observation model for super-resolution under affine motion,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 11, pp. 3325–3337, 2006.
- [70] D. Robinson and P. Milanfar, “Statistical performance analysis of super-resolution,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 6, pp. 1413–1428, 2006.
- [71] F. Champagnat, G. L. Besnerais, and C. Kulcsár, “Statistical performance modeling for superresolution : a discrete data-continuous reconstruction framework,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 26, pp. 1730–1746, Jul 2009.
- [72] Y. Endo, T. Shimobaba, T. Kakue, and T. Ito, “Gpu-accelerated compressive holography,” *Optics express*, vol. 24, no. 8, pp. 8437–8445, 2016.
- [73] A. Bourquard, N. Pavillon, E. Bostan, C. Depeursinge, and M. Unser, “A practical inverse-problem approach to digital holographic reconstruction,” *Optics express*, vol. 21, no. 3, pp. 3417–3433, 2013.
- [74] D. J. Brady, K. Choi, D. L. Marks, R. Horisaki, and S. Lim, “Compressive holography,” *Optics express*, vol. 17, no. 15, pp. 13040–13049, 2009.
- [75] M. Marim, E. Angelini, J.-C. Olivo-Marin, and M. Atlan, “Off-axis compressed holographic microscopy in low-light conditions,” *Optics letters*, vol. 36, no. 1, pp. 79–81, 2011.
- [76] M. M. Marim, M. Atlan, E. Angelini, and J.-C. Olivo-Marin, “Compressed sensing with off-axis frequency-shifting holography,” *Optics letters*, vol. 35, no. 6, pp. 871–873, 2010.
- [77] P. Ferraro, S. Grilli, L. Miccio, D. Alfieri, S. De Nicola, A. Finizio, and B. Javidi, “Full color 3-d imaging by digital holography and removal of chromatic aberrations,” *Journal of Display Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 97–100, 2008.
- [78] S. Morel, *Imagerie grand champ en anatomopathologie*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2016.

- [79] B. Javidi, P. Ferraro, S.-H. Hong, S. De Nicola, A. Finizio, D. Alfieri, and G. Pierattini, “Three-dimensional image fusion by use of multiwavelength digital holography,” *Optics letters*, vol. 30, no. 2, pp. 144–146, 2005.
- [80] F. Jolivet, C. Fournier, L. Denis, N. Verrier, O. Flasseur, F. Momey, and T. Fournel, “Reconstruction super-résolue d’hologrammes rgb,” in *Holophi4 : 4ième rencontre francophone d’holographie numérique appliquée à la métrologie des fluides*, 2016.
- [81] F. Jolivet, O. Flasseur, F. Momey, L. Denis, and C. Fournier, “Auto-étalonnage d’un dispositif d’holographie couleur sans lentille et étude de performances,” in *Journée Co-conception : capteurs hybrides et algorithmes pour des systèmes innovants*, GDR ISIS, 2017.
- [82] F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, L. Mèès, N. Faure, N. Grosjean, F. Pinston, J.-L. Marié, and C. Fournier, “Regularized reconstruction of absorbing and phase objects from a single in-line hologram, application to fluid mechanics and micro-biology,” *Optics Express*, vol. 26, no. 7, pp. 8923–8940, 2018.
- [83] R. W. Gerchberg, “A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures,” *Optik*, vol. 35, pp. 237–246, 1972.
- [84] J. R. Fienup, “Phase retrieval algorithms : a comparison,” *Applied optics*, vol. 21, no. 15, pp. 2758–2769, 1982.
- [85] M. Liebling, T. Blu, and M. Unser, “Complex-wave retrieval from a single off-axis hologram,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, pp. 367–377, Mar 2004.
- [86] I. Yamaguchi, J.-i. Kato, S. Ohta, and J. Mizuno, “Image formation in phase-shifting digital holography and applications to microscopy,” *Applied Optics*, vol. 40, no. 34, pp. 6177–6186, 2001.
- [87] G. Liu and P. Scott, “Phase retrieval and twin-image elimination for in-line fresnel holograms,” *JOSA A*, vol. 4, no. 1, pp. 159–165, 1987.
- [88] J. Song, C. L. Swisher, H. Im, S. Jeong, D. Pathania, Y. Iwamoto, M. Pivovarov, R. Weissleder, and H. Lee, “Sparsity-based pixel super resolution for lens-free digital in-line holography,” *Scientific reports*, vol. 6, 2016.
- [89] M. Jericho, H. Kreuzer, M. Kanka, and R. Riesenberger, “Quantitative phase and refractive index measurements with point-source digital in-line holographic microscopy,” *Applied Optics*, vol. 51, no. 10, pp. 1503–1515, 2012.
- [90] B. Sixou, V. Davidoiu, M. Langer, and F. Peyrin, “Absorption and phase retrieval with tikhonov and joint sparsity regularizations.,” *Inverse Problems & Imaging*, vol. 7, no. 1, 2013.
- [91] A. Pein, S. Looock, G. Plonka, and T. Salditt, “Using sparsity information for iterative phase retrieval in x-ray propagation imaging,” *Optics express*, vol. 24, no. 8, pp. 8332–8343, 2016.

- [92] Y. Rivenson, Y. Wu, H. Wang, Y. Zhang, A. Feizi, and A. Ozcan, “Sparsity-based multi-height phase recovery in holographic microscopy,” *Scientific reports*, vol. 6, p. 37862, 2016.
- [93] D. Ryu, Z. Wang, K. He, G. Zheng, R. Horstmeyer, and O. Cossairt, “Sub-sampled phase retrieval for temporal resolution enhancement in lensless on-chip holographic video,” *Biomed. Opt. Express*, vol. 8, pp. 1981–1995, Mar 2017.
- [94] F. Eilenberger, S. Minardi, D. Pliakis, and T. Pertsch, “Digital holography from shadowgraphic phase estimates,” *Optics letters*, vol. 37, no. 4, pp. 509–511, 2012.
- [95] F. Soulez, É. Thiébaud, A. Schutz, A. Ferrari, F. Courbin, and M. Unser, “Proximity operators for phase retrieval,” *Applied optics*, vol. 55, no. 26, pp. 7412–7421, 2016.
- [96] C. Schretter, D. Blinder, S. Bettens, H. Ottevaere, and P. Schelkens, “Regularized non-convex image reconstruction in digital holographic microscopy,” *Optics Express*, vol. 25, no. 14, pp. 16491–16508, 2017.
- [97] S. Bettens, H. Yan, D. Blinder, H. Ottevaere, C. Schretter, and P. Schelkens, “Studies on the sparsifying operator in compressive digital holography,” *Optics Express*, vol. 25, no. 16, pp. 18656–18676, 2017.
- [98] A. Berdeu, F. Momey, B. Laperrousaz, T. Bordy, X. Gidrol, J.-M. Dinten, N. Picollet-D’ahan, and C. Allier, “Comparative study of fully three-dimensional reconstruction algorithms for lens-free microscopy,” *Applied Optics*, vol. 56, no. 13, pp. 3939–3951, 2017.
- [99] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*, pp. 185–212, Springer, 2011.
- [100] W. Hare and C. Sagastizábal, “Computing proximal points of nonconvex functions,” *Mathematical Programming*, vol. 116, no. 1, pp. 221–258, 2009.
- [101] J. Marié, T. Tronchin, N. Grosjean, L. Méès, O. C. Öztürk, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance, “Digital holographic measurement of the lagrangian evaporation rate of droplets dispersing in a homogeneous isotropic turbulence,” *Experiments in Fluids*, vol. 58, no. 2, p. 11, 2017.
- [102] C. F. Bohren and D. R. Huffman, “Absorption and scattering of light by small particles,” 1983.
- [103] G. Gouesbet and G. Gréhan, *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Springer, 2017.
- [104] L. Kai and P. Massoli, “Scattering of electromagnetic-plane waves by radially inhomogeneous spheres : a finely stratified sphere model,” *Applied optics*, vol. 33, no. 3, pp. 501–511, 1994.

- [105] F. Onofri, G. Gréhan, and G. Gouesbet, “Electromagnetic scattering from a multilayered sphere located in an arbitrary beam,” *Applied optics*, vol. 34, no. 30, pp. 7113–7124, 1995.
- [106] G. Toker and J. Stricker, “Holographic study of suspended vaporizing volatile liquid droplets in still air,” *International journal of heat and mass transfer*, vol. 39, no. 16, pp. 3475–3482, 1996.
- [107] F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, C. Fournier, and T. Fournel, “Reconstruction régularisée basée sur un modèle non-linéaire de formation d’hologramme,” in *GRETSI 2017*, 2017.
- [108] E. Wolf, “Three-dimensional structure determination of semi-transparent objects from holographic data,” *Optics Communications*, vol. 1, no. 4, pp. 153–156, 1969.
- [109] T. Noda, S. Kawata, and S. Minami, “Three-dimensional phase-contrast imaging by a computed-tomography microscope,” *Applied optics*, vol. 31, no. 5, pp. 670–674, 1992.
- [110] V. Lauer, “New approach to optical diffraction tomography yielding a vector equation of diffraction tomography and a novel tomographic microscope,” *Journal of Microscopy*, vol. 205, no. 2, pp. 165–176, 2002.
- [111] D. Brunet, E. R. Vrscay, and Z. Wang, “The use of residuals in image denoising,” in *International conference image analysis and recognition*, pp. 1–12, Springer, 2009.
- [112] P. Riot, A. Almansa, Y. Gousseau, and F. Tupin, “Penalizing local correlations in the residual improves image denoising performance,” in *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2016 24th European*, pp. 1867–1871, IEEE, 2016.
- [113] J. Fehrenbach, M. Nikolova, G. Steidl, and P. Weiss, “Bilevel image denoising using gaussianity tests,” in *International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, pp. 117–128, Springer, 2015.
- [114] R. Stahl, G. Vanmeerbeeck, G. Lafruit, R. Huys, V. Reumers, A. Lambrechts, C.-K. Liao, C.-C. Hsiao, M. Yashiro, M. Takemoto, *et al.*, “Lens-free digital in-line holographic imaging for wide field-of-view, high-resolution, and real-time monitoring of complex microscopic objects,” in *Proc. SPIE*, vol. 8947, p. 89471F, 2014.
- [115] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, “Nonlinear programming,” in *Traces and emergence of nonlinear programming*, pp. 247–258, Springer, 2014.

## Bibliographie personnelle

---

### Revue internationale à comité de lecture

F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, L. Méès, N. Faure, N. Grosjean, F. Pinston, J.-L. Marié, and C. Fournier, "*Regularized reconstruction of absorbing and phase objects from a single in-line hologram, application to fluid mechanics and micro-biology*", *Optics Express*, vol. 26, no. 7, pp. 8923-8940, 2018.

C. Fournier, F. Jolivet, L. Denis, N. Verrier, E. Thiébaud, C. Allier, and T. Fournel, "*Pixel super-resolution in digital holography by regularized reconstruction*", *Applied Optics*, vol. 56, no. 1, pp. 69-77, 2017.

O. Flasseur, C. Fournier, N. Verrier, L. Denis, F. Jolivet, A. Cazier, and T. Lépine, "*Self-calibration for lensless color microscopy*", *Applied Optics*, vol. 56, no. 13, pp. 189-199, 2017.

### Congrès internationaux avec actes

F. Momey, F. Jolivet, L. Denis, L. Méès, N. Faure, N. Grosjean, F. Pinston, J.-L. Marié, and C. Fournier, "*Quantitative phase retrieval reconstruction from in-line hologram using a new proximal operator : application to microscopy of bacteria and tracking of droplets*", *Unconventional Optical Imaging. Vol. 10677. International Society for Optics and Photonics, SPIE*, avril 2018, Strasbourg.

O. Flasseur, F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, and C. Fournier, "*Improving color lensless microscopy reconstructions by self-calibration*", *Unconventional Optical Imaging. Vol. 10677. International Society for Optics and Photonics, SPIE*, avril 2018, Strasbourg.

### Congrès nationaux

F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, L. Méès, N. Faure, N. Grosjean, F. Pinston, J.-L. Marié, et C. Fournier, "*Reconstruction quantitative de phase à partir d'un seul hologramme en ligne utilisant un nouvel opérateur proximal : application à la microscopie de bactéries et au suivi de gouttelettes*", *Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle*, mars 2018, Paris.

F. Jolivet, O. Flasseur, F. Momey, L. Denis, et C. Fournier, "*Auto-étalonnage d'un dispositif d'holographie couleur sans lentille et étude de performances*", Journée Co-conception : capteurs hybrides et algorithmes pour des systèmes innovants, octobre 2017, Paris.

F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, C. Fournier, et T. Fournel, "*Reconstruction régularisée basée sur un modèle non-linéaire de formation d'hologramme*", XX-VIème colloque GRETSI, septembre 2017, Juan-Les-Pins.

F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, C. Fournier, et T. Fournel, "*Reconstruction d'hologrammes par une approche problème inverse non-linéaire*", Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, mars 2017, Paris.

F. Jolivet, C. Fournier, L. Denis, N. Verrier, O. Flasseur, F. Momey, et T. Fournel, "*Reconstruction super-résolue d'hologrammes rgb*", IVème rencontre francophone d'holographie numérique appliquée à la métrologie des fluides, novembre 2016, Lille.

F. Jolivet, N. Verrier, C. Fournier, L. Denis, E. Thiébaud, et T. Fournel, "*Reconstruction holographique super-résolue par approches inverses alternées*", Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, mars 2016, Paris.







## Résumé

---

En imagerie numérique, les approches « problèmes inverses » régularisées reconstruisent une information d'intérêt à partir de mesures et d'un modèle de formation d'image. Le problème d'inversion étant mal posé, mal conditionné et le modèle de formation d'image utilisé peu contraint, il est nécessaire d'introduire des a priori afin de restreindre l'ambiguïté de l'inversion. Ceci permet de guider la reconstruction vers une solution satisfaisante. Les travaux de cette thèse ont porté sur le développement d'algorithmes de reconstruction d'hologrammes numériques, basés sur des méthodes d'optimisation en grande dimension (lisse ou non-lisse). Ce cadre général a permis de proposer différentes approches adaptées aux problématiques posées par cette technique d'imagerie non conventionnelle : la super-résolution, la reconstruction hors du champ du capteur, l'holographie « couleur » et enfin la reconstruction quantitative d'objets de phase (c.a.d. transparents). Dans ce dernier cas, le problème de reconstruction consiste à estimer la transmittance complexe 2D des objets ayant absorbé et/ou déphasé l'onde d'éclairement lors de l'enregistrement de l'hologramme. Les méthodes proposées sont validées à l'aide de simulations numériques puis appliquées sur des données expérimentales issues de l'imagerie sans lentille ou de la microscopie holographique en ligne (imagerie cohérente en transmission, avec un objectif de microscope). Les applications vont de la reconstruction de mires de résolution opaques à la reconstruction d'objets biologiques (bactéries), en passant par la reconstruction de gouttelettes d'éther en évaporation dans le cadre d'une étude de la turbulence en mécanique des fluides.

**Mots clés :** Problèmes inverses, Holographie numérique en ligne, Techniques de reconstruction d'image, Approches régularisées, Reconstruction de phase, Holographie couleur, Optimisation grande dimension, Optimisation non-lisse, Imagerie biomédicale.

## Abstract

---

In Digital Imaging, the regularized inverse problems methods reconstruct particular information from measurements and an image formation model. With an inverse problem that is ill-posed and ill-conditioned, and with the used image formation model having few constraints, it is necessary to introduce a priori conditions in order to restrict ambiguity for the inversion. This allows us to guide the reconstruction towards a satisfying solution. The works of the following thesis delve into the development of reconstruction algorithms of digital holograms based on large-scale optimization methods (smooth and non-smooth). This general framework allowed us to propose different approaches adapted to the challenges found with this unconventional imaging technique : the super-resolution, reconstruction outside the sensor's field, the color holography and finally, the quantitative reconstruction of phase objects (i.e. transparent). For this last case, the reconstruction problem consists of estimating the complex 2D transmittance of objects having absorbed and/or dephased the light wave during the recording of the hologram. The proposed methods are validated with the help of numerical simulations that are then applied on experimental data taken from the lensless imaging or from the in-line holographic microscopy (coherent imaging in transmission, with a microscope object glass). The applications range from the reconstruction of opaque resolution sights, to the reconstruction of biological objects (bacteria), passing through the reconstruction of evaporating ether droplets from a perspective of turbulence study in fluid mechanics.

**Key words :** Inverse problems, In-line holography, Image reconstruction techniques, Regularized approaches, Phase retrieval, Color holography, Large scale optimization, Non-smooth optimization, Biomedical imaging.