Existence de solutions pour des équations apparentées au 1 Laplacien anisotrope

Thomas Dumas

Université de Cergy-Pontoise

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université de Cergy-Pontoise

spécialité :

Mathématiques

Existence de solutions pour des équations apparentées au 1 Laplacien anisotrope

---

par

Thomas Dumas

Soutenue le 16 Juillet 2018, devant le jury composé de :

Carlier Guillaume	*Rapporteur*
Goubet Olivier	*Rapporteur*
Demengel Françoise	*Directrice*
Nazaret Bruno	*Examinateur*
Logak Elisabeth	*Examinatrice, présidente du Jury*
Ye Dong	*Examinateur*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement ma directrice de thèse, Françoise Demengel, qui m'a proposé ce sujet, et qui a su m'accompagner et me soutenir lors de mes premiers pas dans le monde de la recherche. Sa grande disponibilité, sa patience et ses nombreux conseils m'ont étés extrêmement précieux. C'est une réelle chance pour moi d'avoir profité du partage de ses connaissances, et de son expérience.

Je remercie également les rapporteurs Guillaume Carlier et Olivier Goubet, pour leur étude méticuleuse du manuscrit, ainsi que pour leurs remarques pertinentes. Je suis également reconnaissant envers Bruno Nazaret, Elisabeth Logak, et Dong Ye pour avoir accepté d'être examinateurs, et de faire partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements vont tout naturellement à l'ensemble des membres du laboratoire AGM, pour l'ambiance générale qu'ils créent. Ils s'appliquent à faire du laboratoire un lieu agréable et convivial. Je pense particulièrement aux collègues avec qui j'ai pu partager des Tds.

Un grand et sincère merci aux thésards du labo. Je pense notamment à mes collègues de bureau, actuels ou anciens, Bruno, Davit, Pierre-Damien, Icham, Tristan, pour leurs nombreux conseils, mais également à Mouhamadou, Jean-François, Alexandre, Thibault, Aymen, Pierre, Ali, et tous ceux avec qui j'ai pu passer de très bons moments.

J'aimerais profiter de l'occasion pour remercier mes amis, qui m'ont beaucoup soutenu et suivi durant ces années. Les rois de la question "Alors, ça avance ta thèse ?", Raph, Mel, Benjamin, Lucie, Perceval, $(\text{David})^2$, Olivia, Thomas, Cyril, Alex, Damien, Henri, Lex et Tati, Charlène, Oscar, Claude, Heike et Jessica, merci à vous. Je n'oublie pas mon "groupe", Romain, Térence, Chris, et David, la bise les gars ! Je passe également le bonsoir au maître Jedi, Mr Auvray. Bien entendu, tête en l'air que je suis, à tous ceux que j'aurais oubliés, je pense à vous.

Enfin, parce qu'il fallait me supporter pendant ces années, parce que ça n'a pas du être toujours aisé, et parce que votre soutien inconditionnel m'a permis d'aller jusqu'au bout, j'embrasse très fort mon père, ma mère ("à ma maman", voilà c'est dit :)), et mon frère Simon. Je pense très fort également à mes grands parents, ainsi qu'à toute ma famille qui a su m'encourager.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est relative à l'étude qualitative d'une EDP anisotrope singulière, faisant intervenir le 1 Laplacien.

Les problèmes anisotropes requièrent une étude des espaces de Sobolev du même nom, et de nombreux articles y sont consacrés, avec différents objectifs.

Les espaces de Sobolev anisotropes ont des définitions différentes suivant les auteurs dans le cas des ouverts bornés. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$ on définit l'espace $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ comme l'adhérence des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\sum_1^N |\partial_i u|_{p_i}$, avec $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$, $p_i \geq 1$.

Lorsque Ω est borné les auteurs [37] définissent $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ comme l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour la norme $|u|_1 + \sum_1^N |\partial_i u|_{p_i}$, alors que dans un article plus récent, introduisant $p^+ := \sup p_i$, $p^- := \inf p_i$, [34] définit deux espaces extrèmes $\overline{W}^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{p^+}, \partial_i u \in L^{p_i}, i \in [1, N]\}$ et $\underline{W}^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{p^-}, \partial_i u \in L^{p_i}, i \in [1, N]\}$.

Dans cette thèse on propose au chapitre 2 les relations entre ces différents espaces pour des ouverts bornés Lipschitziens.

Un premier résultat classique concernant les espaces de Sobolev anisotropes est le théorème d'injection dans un espace de Lebesgue critique. Différents auteurs introduisent l'exposant critique

$$p^* := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1}, \text{ si } \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} > 1.$$

et Troisi [55] établit une démonstration de l'existence de cette injection, comme cas particulier de toutes les injections dans des espaces anisotropes, avec des exposants de dérivation ≥ 1 à savoir les $\mathcal{D}^{m,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ pour $m > 1$, dont nous ne donnerons pas la définition ici.

Il ressort de l'existence de cette injection que

$$\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^N), \partial_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), i \in [1, N]\}.$$

Lorsque Ω est un ouvert Lipchitzien, on n'a pas toujours la validité de cette injection. (références citées ci dessus). Nous analyserons toujours au chapitre 2 des conditions suffisantes, pour que cette injection ait lieu. Notons que dans le cadre de cette thèse nous travaillerons pour la plupart des résultats dans l'espace $\overline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$ avec Ω un N rectangle, pour lequel l'injection dans $L^{p^\star}$ est valide.

Concernant l'injection critique, rappelons que l'existence de fonctions extrémales pour l'injection de Sobolev classique $\mathcal{D}^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}$ est complètement résolue lorsque $N > p > 1$ par [4] et [53], et que les fonctions extrémales sont radiales, famille à deux paramètres :

$u_{a,b}(r) = (a + br^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-N}{p}}$. Rappelons aussi que l'existence de telles fonctions peut se montrer à l'aide de la théorie de concentration-compacité de P.L Lions [40], [41].

Lorsque $p = 1$ et pour la fonctionnelle

$$\inf_{u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N), |u|_{p^\star}=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|$$

avec $|\cdot|$ la norme euclidienne, les extrémales sont données par les fonctions caractéristiques de boules euclidiennes.

Dans le cas anisotrope, les extrémales ne sont pour l'instant pas connues, mais l'existence est montrée dans [25], lorsque tous les p_i sont strictement plus grands que 1.

Concernant les EDP faisant intervenir les espaces de Sobolev anisotropes, que l'on rencontre en physique, [5], [6], en biologie et dans les processus d'image, [57], une EDP anisotrope modèle est

$$\begin{cases} -\sum_i \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f appartient à un L^q, précisé plus loin, et les p_i sont strictement supérieurs à 1. L'existence de solutions ne pose pas de réel problème, car il sagit de chercher le minimum d'une fonctionnelle convexe, continue, coercive :

$$J(u) = \sum_i \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \int_\Omega fu$$

sur un espace réflexif. En revanche, les résultats de régularité classique du cas isotrope, ne s'étendent pas au cas présent. Par exemple si le sup des p_i est trop grand, ($\sup p_i > p^\star$), les solutions ne sont pas nécessairement bornées, même lorsque $f \equiv 0$, [42], [31]. Lorsque les solutions sont bornées, sachant que Ω étant borné les solutions appartiennent à l'espace isotrope $W^{1,\inf p_i}$, certains auteurs se posent la question de la régularité $W^{1,q}$ avec q plus grand. Il s'avère que cette régularité dépend de la position de $\sup p_i$ par rapport à $\inf p_i$. Pour ces résultats, le lecteur pourra consulter [26], [27].

Dans [18] l'auteur s'intéresse aux solutions de viscosité, pour l'équation du $\vec{p}$ Laplacien, et elle montre que si $\sup p_i < \inf p_i + 1$ alors les solutions sont lipschitziennes. Les solutions faibles étant aussi des solutions de viscosité on en déduit le résultat des solutions sous cette condition.

Lorsque l'un des p_i est égal à 1 se présentent de nouvelles difficultés. Tout d'abord, sur le plan de l'existence de solutions, la fonctionnelle peut ne pas être coercive, on est donc en principe amené à imposer une condition de petitesse de f. En outre l'espace $W^{1,\vec{p}}$ n'est plus réflexif et on est naturellement amenés, comme dans le cas du 1Laplacien isotrope, à chercher des solutions dans un espace de fonctions dont certaines dérivées sont des mesures bornées.

Le seul article à notre connaissance qui considère de telles EDP est [45]. Les auteurs montrent l'existence et l'unicité de solutions à

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x\left(\frac{D_x u}{|D_x u|}\right) - \mathrm{div}(|\nabla_y u|^{q-2}\nabla_y u) = f(x,y), & \text{sur } \Omega \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $(x,y) \in \Omega = \Xi \times \Gamma$, avec Ξ et Γ deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement.

Notons que ces auteurs travaillent sur la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $||u||_{(p,q)} = |\nabla_x u|_p + |\nabla_y u|_q$. En particulier l'injection de Sobolev est satisfaite, les solutions sont nulles sur le bord, et en conséquence ils peuvent supposer seulement que Ω est lipschitzien.

Dans cette thèse on suppose que $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ est tel que $p_i = 1$ pour $1 \le i \le N_1$ pour un entier $N_1 < N$, et $p_i > 1$ pour $N_1 + 1 \le i \le N$. On considère dans le Chapitre 2 l'espace $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $|(\sum_1^{N_1}(\partial_i u)^2)^{\frac{1}{2}}|_1 + \sum_{N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i} := |\nabla_1 u|_1 + \sum_{N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i}$. Notons que puisque au moins un des p_i est égal à 1, la propriété $\sum \frac{1}{p_i} > 1$ est toujours vérifiée. Dans ce cas cet espace s'injecte dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ ([55]), où l'exposant critique s'écrit

$$p^* := \frac{N}{N_1 + \sum_{N_1+1}^N \frac{1}{p_i} - 1}.$$

Nous considérons également dans ce Chapitre, pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, l'espace $X(\Omega) = \{u \in L^{p^+}(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), 1 \le i \le N\}$. $X(\Omega)$ est de type local, ce qui permet entre autres d'avoir la densité de fonctions régulières $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap X(\Omega)$, pour la topologie de la norme.

Puisque $X(\Omega)$ est non réflexif, on introduit au Chapitre 3 son adhérence pour une topologie faible, à savoir $X^b(\Omega) = \{u \in L^{p+}(\Omega), \nabla_1 u \in M^1(\Omega, \mathbb{R}^{N_1}), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega)$ pour $N_1 + 1 \le i \le N\}$, où $\nabla_1 u$ désigne le N_1-vecteur $(\partial_1 u, \cdots, \partial_{N_1} u)$. Nombre de propriétés de $X(\Omega)$ se prolongent à $X^b(\Omega)$, grâce à l'utilisation de la topologie de la convergence faible, et de façon plus significative de la topologie de la convergence étroite.

Dans un deuxième temps, nous supposons que Ω est un "N-rectangle" aux côtés parallèles aux axes. Sans perdre de généralités nous supposerons que $\Omega =]0,1[^N$. Notons que les résultats de cette thèse s'étendent aisément à des ouverts plus généraux. En particulier, elle s'étend à des ouverts de la forme $\Omega = \Omega_1 \times \Pi_{N_1+1}^N]a_i, b_i[$, avec Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^{N_1}$, lipschitzien ([34]). On supposera pour certains résultats de la thèse que $p^+ \le p^\star$.

On étudie entre autre la trace des fonctions de $X(\Omega)$ ou de $X^b(\Omega)$ et on montre en particulier que la trace sur les bords "verticaux" (c'est à dire les bords $x_i = \{0\}$ ou $x_i = \{1\}$ pour $i \le N_1$) est exactement L^1. On donne également quelques propriétés d'appartenance à des L^q pour $q > p_i$ lorsque $i \ge N_1 + 1$, sur un bord $\{x_i = 0\}$.

Enfin, en vue de donner un sens au 1 Laplacien partiel, on clot le chapitre par la définition de $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ lorsque $u \in X^b(\Omega)$, $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, et $\text{div}(\sigma) \in L^{p^\star}$, où $\sigma = (\sigma^1, \sigma_{N_1+1}, \cdots, \sigma_N)$, $\sigma_i \in L^{p_i'}$ pour $i \ge N_1 + 1$. Cette définition est l'analogue des paires d'Anzellotti [3], voir aussi Temam [54], Strang Temam [51].

Dans le chapitre 4, on s'intéresse au problème, pour $\Omega =]0,1[^N$,

$$\inf_{u \in X^b(\Omega), u=0 \text{ sur } \Gamma} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega f u, \tag{1}$$

où $\Gamma \subset \partial\Omega$ est une partie ouverte du bord définie comme suit : On pose pour $0 \le i \le N$ et $j \in \{0,1\}$

$$\partial\Omega_j^i :=]0,1[^{i-1} \times \{j\} \times]0,1[^{N-i}, \ \partial\Omega^i := \partial\Omega_0^i \cup \partial\Omega_1^i,$$

et on suppose qu'il existe alors $K \subset \{1, \cdots, N\}$ tel que $K \neq \emptyset$, et $\Gamma = \cup_{j \in K} \partial\Omega^j$.

On définit également les bords "horizontaux" (respectivement "verticaux")

$$\partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^N \partial\Omega^i,\ \partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1} \partial\Omega^i,\ \Gamma^h = \Gamma \cap \partial\Omega^h,\ \Gamma^v = \Gamma \cap \partial\Omega^v.$$

Pour commencer, l'existence d'une solution de (1) requiert que l'inf soit fini, et sans hypothèse supplémentaire sur Γ, on est amenés à supposer λ assez petit. Dans la section 4.1 on suppose que $\Gamma^v = \emptyset$ et on montre l'existence d'une solution au problème. Lorsque $\Gamma^v \neq \emptyset$, on est amené à introduire le problème relaxé

$$\inf_{u \in X^b(\Omega), u=0 \text{ sur } \Gamma^h} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu.$$

et on montre comme dans les cas classiques de problèmes variationnels sur $W^{1,1}$ que l'infimum est le même que l'inf sur les fonctions nulles sur Γ. Dans la suite on s'attachera à montrer l'existence de solutions pour ce problème.

Notons que lorsque Γ contient une composante connexe $\{x_i = 0\}$ ou $\{x_i = 1\}$ pour un $i > N_1$ on peut s'affranchir de la petitesse de λ ce qui est le cas en particulier si la valeur de u est prescrite sur tout le bord, comme c'est le cas dans [45].

Pour déterminer l'EDP vérifiée par une solution, (Chapitre 5) on est amenés à "régulariser" l'opérateur, et donc à introduire le problème

$$\inf_{u \in X^\epsilon(\Omega), u=0 \text{ sur } \Gamma} \frac{1}{1+\epsilon} \int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu,$$

où $X^\epsilon(\Omega) = \{u \in L^{p^\star}(\Omega), \nabla_1 u \in L^{1+\epsilon}(\Omega, \mathbb{R}^{N_1}), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega) \text{ pour } N_1 + 1 \leq i \leq N\}$.

On montre classiquement l'existence et l'uncité d'une solution u_ϵ, et que cette suite de solutions converge "étroitement" vers une solution u du problème. On obtient alors l'existence d'une EDP satisfaite par u, par passage à la limite. Cette EDP s'écrit

$$\begin{cases} -\text{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(\sigma_i) = \lambda f, \text{ sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|,\ \sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \text{ pour } N_1 + 1 \leq i \leq N \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma^h, \\ -\sigma^1 \cdot \vec{n} u = |u|, \text{ sur } \Gamma^v, \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma} \end{cases}$$

où $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ désigne la mesure définie au chapitre 3, et div_1 est la divergence d'un N_1 vecteur.

On propose ensuite une alternative à cette preuve, qui utilise la théorie de l'analyse convexe, et le problème dual, [23].

On généralise dans le Chapitre 6 la résolution de ce problème au cas de données au bord non homogènes, ce qui revient à étudier le problème

$$\inf_{u \in X(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu,$$

où $g \in \gamma_0(X(\Omega))$, à support compact dans Γ. Approcher le problème par un problème plus régulier, nous demande d'approcher la donnée au bord par une donnée plus régulière. On étudie également dans ce chapitre l'unicité des solutions au problème. En particulier, nous montrons que l'unicité n'est pas toujours garantie, et dépend en un certain sens de la mesure de Γ. Par exemple, lorsque Γ contient une des composantes connexes de $\partial\Omega^h$, alors il y a unicité.

Au Chapitre 7 on montre que les solutions de l'EDP ci dessus sont localement bornées, en utilisant un résultat d'uniforme locale bornitude des solutions de l'EDP satisfaite par u_ϵ. On montre également dans ce chapitre un résultat intéressant en soi, à savoir qu'être solution de l'EDP à l'intérieur d'un ouvert Ω est équivalent à être un minimum local de la fonctionnelle, (sous réserve de conditions sur λ).

Le Chapitre 8 a fait l'objet d'un article en collaboration avec Françoise Demengel et concerne l'existence des extrémales pour l'injection de Sobolev pour l'injection de $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Bien que l'existence des fonctions extrémales puisse être démontrée comme dans le cas où les p_i sont strictement plus grand que 1 ([25]), l'existence de l'EDP ne peut s'obtenir par les méthodes classiques en calcul des variation, du fait de la singularité de la fonctionnelle lorsque certains p_i sont égaux à 1. Nous sommes amenés à considérer une suite de fonctions extrémales pour l'injection de $\mathcal{D}^{1,\vec{p_\epsilon}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ où tous les p_i^ϵ sont strictement plus grand que les p_i, avec $p_i^\epsilon \to p_i$ lorsque $\epsilon \to 0$. Nous montrons à la fois que la meilleure constante pour cette injection converge vers la meilleure constante pour notre problème, et qu'il existe une suite de fonctions extremales u_ϵ qui converge étroitement vers une fonction extrémale. L'obtention de l'EDP satisfaite par la limite est obtenue par passage à la limite dans l'EDP satisfaite par u_ϵ, la difficulté étant entre autre de montrer que la limite n'est pas nulle. Cette preuve demande une utilisation adaptée de la méthode de concentration-compacité de P.L Lions. On montre ensuite comme dans [25] la régularité L^∞ des solutions.

Le chapitre 9 est consacré à l'étude d'une EDP avec second membre sous critique, qui généralise le résultat de [28].

Plus précisément on considère

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = u^{q-1}, \text{ sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|, \text{ au sens des mesures sur } \Omega, \\ |\sigma^1|_\infty \leq 1, \\ u \geq 0 \text{ sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \vec{n} u = -u \text{ presque partout sur } \partial\Omega^v, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^h \end{cases}$$

avec $p+ < q < p^*$. Le cas où tous les p_i sont strictement supérieurs à 1 est traité dans [28]. On approche à nouveau le problème par une EDP "régularisée", où le terme "$-\mathrm{div}_1(\frac{\nabla_1 u}{|\nabla_1 u|})$" est remplacé par $-\mathrm{div}_1(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon)$, on utilise le lemme du col pour ce problème et on montre la convergence étroite, pour une sous suite, des solutions du problème "régularisé", ce qui permet le "passage à la limite" dans l'EDP.

Chapitre 1

Les espaces $W^{1,1}$ et BV.

Rappelons tout d'abord des résultats sur les espaces $W^{1,1}$ et BV. La plupart des résultats présentés ici sont contenus dans [1], [19], [33], [54], [58].

1.1 L'espace $W^{1,1}$:

Pour les preuves de cette section, le lecteur pourra consulter [19], ou encore [1]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. On définit l'espace de Sobolev :

Définition 1.1.1.
$$W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega),\ \nabla u \in L^1(\Omega)\}.$$

Proposition 1.1.2. *L'espace $W^{1,1}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $|u|_{W^{1,1}} = |u|_1 + |\nabla u|_1$, où $|u|_1$ désigne la norme $L^1(\Omega)$.*

Proposition 1.1.3. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$.*

Définition 1.1.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné ou non. On note $W_0^{1,1}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ au sens de la norme $|\cdot|_{W^{1,1}}$.

Proposition 1.1.5. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, et donc $W_0^{1,1}(\mathbb{R}^N) = W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 1.1.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. On dit que Ω est lipschitzien si :

1. Il existe un recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ de Ω tel que $d(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$ et, pour tout $i \geq 1$, Ω_i est borné avec $\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ et, ou bien la famille $\{\Omega_i\}$ a un cardinal fini, ou bien :
$$\exists k \geq 2,\ |i-j| \geq k \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$
2. Il existe un ouvert borné $\mathcal{O}_i'$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, une fonction a_i lipschitzienne sur $\mathcal{O}_i'$ et un système de coordonnées tel que, quitte à renuméroter ces coordonnées :
$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N),\ x' \in \mathcal{O}_i',\ x_N < a_i(x')\},$$
$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', a_i(x')),\ x' \in \mathcal{O}_i'\}.$$

3. Il existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_i$, subordonnée au recouvrement de Ω par les Ω_i et des constantes C_1 et C_2 tels que :

$$\forall i,\ |\varphi_i|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1,\ \text{et } |a_i|_{W^{1,\infty}(\mathcal{O}_i')} \leq C_2.$$

L'une des premières propriétés de l'espace $W^{1,1}$ est le théorème d'injection :

Théorème 1.1.7. *(Injections de Sobolev).*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ lipschitzien. Alors

1. *Pour $N > 1$, $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{N/(N-1)}(\Omega)$.*
2. *Pour $N = 1$, $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^b(\Omega)$.*

Proposition 1.1.8. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ lipschitzien avec $N > 1$. Alors l'injection*

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

est compacte pour $p < N/(N-1)$.

Une autre propriété importante de l'espace $W^{1,1}$ est l'existence d'une trace ([33], [50]).

Proposition 1.1.9. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Il existe une application linéaire continue et surjective, notée γ_0, dite application trace, de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\partial\Omega)$. Cette trace coïncide avec la restriction au bord de u lorsque $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. En outre il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit $u \in L^1(\partial\Omega)$, il existe $U \in W^{1,1}(\Omega)$ avec $\gamma_0 U = u$, et*

$$|U|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C|u|_{L^1(\partial\Omega)}.$$

Proposition 1.1.10. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$W_0^{1,1}(\Omega) = W^{1,1}(\Omega) \cap \{u = 0,\ \textit{sur } \partial\Omega\}.$$

Proposition 1.1.11. *(inégalité de Poincaré). Soit Ω un domaine borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, et M une semi norme continue sur $W^{1,1}(\Omega)$ qui est une norme sur les constantes. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de N et de Ω telle que pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$, on ait l'inégalité :*

$$|u|_{W^{1,1}} \leq C(|\nabla u|_1 + M(u)).$$

Remarque 1.1.1. *Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure $N-1$ dimensionnelle strictement positive. On peut choisir dans la proposition précédente $M(u) = \int_\Gamma |u|$. En particulier, sur $W_0^{1,1}(\Omega)$, les normes $|u|_{W^{1,1}}$ et $|\nabla u|_1$ sont équivalentes.*

Définition 1.1.12. On définit l'espace

$$W(\mathrm{div})(\Omega) = \{\sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \mathrm{div}(\sigma) \in L^N(\Omega)\},$$

où

$$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N),\ \mathrm{div}(\sigma) = \sum_{i=1}^N \partial_i \sigma_i.$$

Proposition 1.1.13. *(Formule de Green généralisée). Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Il existe une application linéaire continue de $W(\mathrm{div})(\Omega)$ dans $L^\infty(\partial\Omega)$ qui à σ associe $\sigma \cdot \vec{n}$ et qui est telle que la formule de Green généralisée :*

$$\int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla U(x) dx + \int_\Omega U(x) \mathrm{div}(\sigma)(x) dx = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) u$$

a lieu pour tout $U \in W^{1,1}(\Omega)$ et $\sigma \in W(\mathrm{div})(\Omega)$ ($\vec{n}$ désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, et $u = \gamma_0(U)$).

Cette formule constitue une extension de la formule de Green car lorsque $\sigma \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\sigma \cdot \vec{n}$ coïncide avec sa définition classique.

Pour finir, rappelons ce qui différentie entre autre l'espace $W^{1,1}$ des espaces de Sobolev $W^{m,p}$ pour $p > 1$:

Proposition 1.1.14. *L'espace $W^{1,1}(\Omega)$ n'est pas réfléxif.*

Ainsi, pour une suite bornée de $W^{1,1}(\Omega)$, rien ne garantit que l'on puisse extraire une sous suite faiblement convergente dans $W^{1,1}(\Omega)$. Il s'avère que l'adhérence faible de $W^{1,1}$ est l'espace BV étudié ci-après.

1.2 L'espace $BV(\Omega)$.

1.2.1 Rappels de théorie de la mesure.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, où $N \geq 2$. On note $M(\Omega)$ l'espace des mesures sur Ω, qui est donc identifiable au dual de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$. On note $M^1(\Omega)$ l'espace des mesures bornées sur Ω. Pour les preuves de cette section, se référer à [19] ou à [21].

Définition 1.2.1. On dit qu'une suite de mesures $\mu_n \in M(\Omega)$ converge vaguement vers une mesure $\mu \in M(\Omega)$ si, quel que soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, on a :

$$|\langle \mu_n - \mu, \varphi \rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On écrira alors $\mu_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mu$.

Lemme 1.2.2 (semi continuité inférieure de la variation totale pour la convergence vague)**.** *Si $\{\mu_n\}$ est une suite de mesures qui converge vaguement vers $\mu \in M(\Omega)$, alors on a l'inégalité dans $\mathbb{R} \cup +\infty$:*

$$\int_\Omega |\mu| \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega |\mu_n|,$$

où la variation totale $\int_\Omega |\mu|$ de μ est défini par

$$\int_\Omega |\mu| := |\mu|_\Omega = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega) \\ 0 \leq \varphi \leq 1}} \langle \mu, \varphi \rangle .$$

Remarque 1.2.1. *Notons que si $\mu_n \geq 0$ converge vaguement vers μ on n'a pas nécessairement $\int_\Omega \mu_n \to \int_\Omega \mu$ comme le montre l'exemple de la suite sur $B(0,1)$ définie par $\mu_n = n(\chi_{B(0,1)} - \chi_{B(0,1-1/n)})$, laquelle converge vaguement vers 0 dans $B(0,1)$, mais dont la variation totale, pour chaque n, est égale au volume ω_{N-1} de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.*

Définition 1.2.3. On dit qu'une suite de mesures bornées $\mu_n \in M^1(\Omega)$ converge étroitement vers $\mu \in M^1(\Omega)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\Omega),\ |\langle \mu_n - \mu, \varphi \rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 1.2.4. *Si une suite de mesures $\mu_n \in M^1(\Omega)$ converge vaguement vers $\mu \in M^1(\Omega)$, alors on a 1 $\Rightarrow$ 2. Si de plus $\mu_n \geq 0$, alors on a également 2 $\Rightarrow$ 1 :*

1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ telle que pour tout n*
$$\int_{\Omega/K} |\mu_n| \leq \epsilon,$$
2. *μ_n converge étroitement vers μ*

Lemme 1.2.5. *Soit $\mu_n \in M^1(\Omega)$ une suite de mesures positives. Alors μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ et $\int_\Omega \mu_n \to \int_\Omega \mu$.*

La proposition suivante découle de la relative compacité séquentielle faible étoile de la boule unité du dual de l'espace normé séparable $\mathcal{C}_c(\Omega)$ ([9]).

Proposition 1.2.6. *Soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures bornées, telle qu'il existe une constante $C > 0$ avec $\int_\Omega |\mu_n| \leq C$. Alors on peut extraire de $\{\mu_n\}$ une suite de mesures qui converge vaguement vers une mesure bornée.*

Rappelons et démontrons deux lemmes qui nous seront utiles dans les prochaines sections :

Lemme 1.2.7. *Soit $\mu \in M^1(\Omega)$. Alors il existe une suite $(u_n)_n$ dans $C_c^\infty(\Omega)$, telle que $u_n^\pm \rightharpoonup \mu^\pm$, et*

$$\int_\Omega |u_n| \to \int_\Omega |\mu|.$$

Démonstration. Soit K un compact tel que $\int_{\Omega\setminus K} |\mu| < \epsilon$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, telle que $\varphi = 1$ sur K, φ à valeur dans $[0,1]$. On a donc $\int_\Omega (1-\varphi)|\mu| \leq \epsilon$. Soient également n tel que $\frac{1}{n} < d(suppt\varphi, \partial\Omega)$, et ρ une fonction positive dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, d'intégrale égale à 1. Soit $\rho_{\frac{1}{n}} = n^N \rho(nx)$, et $u_n = \rho_{\frac{1}{n}} \star \varphi\mu$. Alors u_n est à support compact dans Ω, et $u_n^\pm$ converge vers $(\varphi\mu)^\pm$ vaguement et même pour n assez grand $\left|\int |u_n| - \int \varphi|\mu|\right| < \epsilon$. On a donc en choisissant n assez grand $\left|\int |u_n| - \int |\mu|\right| \leq 2\epsilon$. □

Lemme 1.2.8. *Soit μ_n une suite de mesures positives sur un ouvert Ω, telle que μ_n converge vaguement vers une mesure positive μ. Alors si $\Omega' \subset\subset \Omega$ est un ouvert relativement compact tel que $\int_{\partial\Omega'} \mu = 0$, alors*

$$\int_{\Omega'} \mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega'} \mu.$$

Démonstration. On a par semi continuité inférieure pour la topologie vague sur l'ouvert Ω' :

$$\int_{\Omega'} \mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\Omega'} \mu_n.$$

Par ailleurs en utilisant la définition de $\int_K \mu$ pour un compact $K \subset \Omega$ et une mesure μ :

$$\mu(K) = \int_K \mu = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega) \\ \varphi = 1 \text{ sur } K}} \langle \mu, \varphi \rangle \,,$$

on obtient la semi continuité supérieure sur le compact $\overline{\Omega'}$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\overline{\Omega'}} \mu_n \leq \int_{\overline{\Omega'}} \mu.$$

Or par hypothèse $\int_{\overline{\Omega'}} \mu = \int_{\Omega'} \mu$, donc

$$\int_{\Omega'} \mu \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\Omega'} \mu_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\overline{\Omega'}} \mu_n \leq \int_{\Omega'} \mu,$$

d'où le résultat. □

Rappelons les définitions suivantes ([21]) :

Définition 1.2.9. On rappelle que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν si l'implication suivante est vérifiée :

$$\forall A \subset \Omega, \ \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

On dit également que μ est de base ν.

Définition 1.2.10. On rappelle qu'une mesure μ est étrangère à une mesure ν s'il existe deux parties disjointes A et B de Ω, respectivement localement μ-intégrable et localement ν-intégrable, telles que μ est portée par A et ν est portée par B. On a alors

$$\mu = \mu\chi_A, \ \text{ et } \nu = \nu\chi_B.$$

Dans ces conditions, on peut montrer qu'alors A et B peuvent être choisis universellement mesurables.

Définition 1.2.11. On rappelle qu'une mesure $\mu \geq 0$ est singulière si elle est étrangère à la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.2.12. *Une mesure $\mu \geq 0$ est absolument continue par rapport à une mesure $\nu \geq 0$ si et seulement si il existe une fonction g localement ν-intégrable telle que $\mu = g \cdot \nu$.*

Proposition 1.2.13. *(Décomposition de Lebesgue-Radon-Nykodym). Soit μ une mesure positive. Alors μ se décompose de manière unique de la façon suivante :*

$$\mu = \mu^{ac} + \mu^s,$$

où μ^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et μ^s est une mesure singulière.

1.2.2 L'espace $BV(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Rappelons la définition de l'espace $BV(\Omega)$, et énonçons quelques propriétés. Pour les preuves le lecteur pourra consulter [19], [33].

Définition 1.2.14. $BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in M^1(\Omega)\}$.

On peut aussi définir $BV(\Omega)$ comme l'ensemble des u de $L^1(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega |\nabla u| := \sup_{g \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |g| \leq 1} \left(\int_\Omega u \mathrm{div}(g) \right) < +\infty.$$

Remarque 1.2.2. *Remarquons que $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$. L'exemple élémentaire d'une fonction de $BV(\Omega)$ qui n'est pas dans $W^{1,1}(\Omega)$ est celui de la fonction caractéristique $\chi_{B(0,R)}$ d'une boule.*

Proposition 1.2.15. *On munit $BV(\Omega)$ de la norme*

$$|u|_{BV} = |u|_1 + \int_\Omega |\nabla u|,$$

où $\int_\Omega |\nabla u|$ désigne la variation totale de la mesure bornée ∇u. Muni de cette norme l'espace $BV(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.2.3. *Nombre de propriétés de l'espace BV utilise la densité des fonctions régulières, pour une topologie plus faible que la topologie de la norme, que nous rappelons ci dessous. En effet, nous avons vu que l'adhérence de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pour cette norme était $W^{1,1}(\Omega)$. Ainsi, pour un élément u de $BV(\Omega)$ donné, on ne peut pas s'attendre à trouver une suite φ_n de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $|\varphi_n - u|_1 \to 0$, et $\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - u)| \to 0$. En effet, si une telle suite existait, alors la suite $(\nabla \varphi_n)_n$ serait de Cauchy dans l'espace complet $L^1(\Omega)$, et donc la limite ∇u serait dans $L^1(\Omega)$.*

Définition 1.2.16. On dit qu'une suite $\{u_n\}$ de $BV(\Omega)$ converge faiblement vers u dans $BV(\Omega)$ si u_n converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et ∇u_n converge vaguement vers ∇u.

La Proposition 1.2.6 entraine le résultat suivant :

Proposition 1.2.17. *Soit $\{u_n\}$ une suite bornée dans $BV(\Omega)$. Alors on peut extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite qui converge faiblement dans $BV(\Omega)$.*

Définition 1.2.18. On dit que la suite $\{u_n\}$ de $BV(\Omega)$ converge étroitement vers $u \in BV(\Omega)$ si :

$$|u_n - u|_1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \text{ et } \int_\Omega |\nabla u_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla u|.$$

Remarque 1.2.4. *Remarquons que la convergence étroite entraine la convergence faible dans $BV(\Omega)$. La réciproque est fausse, comme le montre par exemple pour $\Omega = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$*

$$u_n(x) = n|x|\chi_{|x| \leq \frac{1}{n}} + 1\chi_{|x| > \frac{1}{n}}.$$

on a

$$\nabla u_n = n \frac{x}{|x|} \chi_{|x| \leq \frac{1}{n}},$$

u_n tend faiblement dans BV vers 1 et sont gradient est de variation totale $|S_N|$, mesure de la sphère unité.

Proposition 1.2.19. *Soit $u \in BV(\Omega)$. Il existe une suite $\{u_n\}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ qui converge étroitement vers u :*

1. *u_n converge fortement vers u dans $L^1(\Omega)$.*
2. *$\int_\Omega |\nabla u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla u|$.*
   On peut de plus prouver la propriété suivante :
3. *$\int_\Omega |\nabla u_n - (\nabla u)^{ac}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |(\nabla u)^s|$.*

Remarque 1.2.5. *Nous verrons plus loin d'existence d'une trace sur $BV(\Omega)$ lorsque Ω est lipschitzien. La suite u_n ainsi construite est aussi telle que $u_n = u$ sur $\partial\Omega$.*

Le résultat suivant découle du Théorème 1.1.7 d'injection de $W^{1,1}$ dans $L^{N/(N-1)}$, et de la proposition de densité précédente.

Théorème 1.2.20. *Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ \forall p \leq N/(N-1).$$

De plus, si Ω est borné, l'injection de $BV(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour $p < N/(N-1)$.

Théorème 1.2.21. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Il existe une application linéaire continue et surjective de $BV(\Omega)$ sur $L^1(\partial\Omega)$, qui coïncide avec l'application usuelle de restriction au bord lorsque $u \in BV(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, ou encore avec l'application trace sur $W^{1,1}$ lorsque $u \in W^{1,1}(\Omega)$.*

Remarque 1.2.6. *En utilisant les Propositions 1.1.11 et 1.2.19, on peut montrer un analogue de l'inégalité de Poincaré sur BV : Soit Ω un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de Lebesgue $N-1$ dimensionnelle non nulle. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$*

$$|u|_1 + \int_\Omega |\nabla u| \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_\Gamma |u| \right).$$

Pour une preuve de la proposition suivante, le lecteur pourra consulter [19], [33].

Proposition 1.2.22. *L'application trace est continue pour la topologie de la convergence étroite : si une suite $\{u_n\}$ de $BV(\Omega)$ converge étroitement vers $u \in BV(\Omega)$, alors*

$$|\gamma_0(u_n) - \gamma_0(u)|_{L^1(\partial\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 1.2.7. *En revanche, la trace n'est pas continue pour la topologie faible sur BV. Prenons par exemple*

$$u_n(x_1, x') = n x_1 \chi_{]0,1/n[}(x_1) + \chi_{[1/n,1[}(x_1).$$

Cette suite converge faiblement vers 1 sur $BV(]0,1[^N)$, alors que sur le bord $\{x_1 = 0\}$, $\gamma_0(u_n) = 0$ ne converge pas vers 1.

Proposition 1.2.23. *Soit Ω^+ et Ω^- deux ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^N$, et soit Σ un ouvert $N-1$ dimensionnel, tel que $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^- = \overline{\Sigma}$. On pose*

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Sigma \cup \Omega^-,$$

et considérons

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ sur } \Omega^+ \\ u_2 \text{ sur } \Omega^- \end{cases}$$

1. *Si $u_1 \in BV(\Omega^+)$, et $u_2 \in BV(\Omega^-)$, alors $u \in BV(\Omega)$.*
2. *Si $u_1 \in W^{1,1}(\Omega^+)$, et $u_2 \in W^{1,1}(\Omega^-)$, alors $u \in W^{1,1}(\Omega)$ si et seulement si $\gamma_0(u_1) = \gamma_0(u_2)$, où γ_0 désigne la trace sur Σ.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \varphi \rangle &= -\int_\Omega u \mathrm{div} \varphi \\ &= -\int_{\Omega^+} u_1 \mathrm{div}\varphi - \int_{\Omega^-} u_2 \mathrm{div}\varphi + \int_\Sigma (u_1 - u_2)\vec{n}\varphi. \end{aligned}$$

De sorte que

$$\nabla u = \nabla u_1|_{\Omega^+} + \nabla u_2|_{\Omega^-} + (u_1 - u_2)\delta_\Sigma \vec{n},$$

ce qui prouve que $u \in BV(\Omega)$, et que pour que $u \in W^{1,1}(\Omega)$, il est nécessaire d'avoir $u_1 \in W^{1,1}(\Omega^+)$, $u_2 \in W^{1,1}(\Omega^-)$, et $\gamma_0(u_1) = \gamma_0(u_2)$. □

Énonçons une extension de la Proposition 1.1.13 qui est la formule de Green obtenue par Anzellotti dans [3].

Proposition 1.2.24. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, et $(u, \sigma) \in BV(\Omega) \times W(\mathrm{div})(\Omega)$. On considère la distribution, notée $(\nabla u \cdot \sigma)$, définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}),\ \langle (\nabla u \cdot \sigma), \varphi \rangle = -\int_\Omega u \mathrm{div}\sigma \cdot \varphi - \int_\Omega u(\sigma \cdot \nabla\varphi).$$

Alors $(\nabla u \cdot \sigma)$ est une mesure bornée sur Ω, absolument continue par rapport à $|\nabla u|$, qui coïncide avec la définition habituelle de $\nabla u \cdot \sigma$ lorsque $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Plus précisément, $|\nabla u \cdot \sigma| \leq |\sigma|_\infty |\nabla u|$. Par ailleurs, la mesure $\nabla u^s \cdot \sigma$ définie par $(\nabla u^s \cdot \sigma) = (\nabla u \cdot \sigma) - (\nabla u^{ac} \cdot \sigma)$ est une mesure singulière qui vérifie $|(\nabla u^s \cdot \sigma)| \leq |(\nabla u)^s||\sigma|_\infty$.

Enfin, on a la formule de Green suivante : Si $(u, \sigma) \in BV(\Omega) \times W(\mathrm{div})(\Omega)$ et si $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$,

$$\langle (\nabla u \cdot \sigma), \varphi \rangle = -\int_\Omega u \mathrm{div}\sigma\varphi - \int_\Omega u\sigma \cdot \nabla\varphi + \int_{\partial\Omega} u\sigma \cdot \vec{n}\varphi.$$

On énonce un résultat plus faible que le résultat de [33] sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble qui porte la mesure ∇u^s. Nous n'utiliserons ce résultat que dans le chapitre 8, et uniquement pour des points au lieu de $N-2$ plans.

Proposition 1.2.25. *Soit $u \in BV(\Omega)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Alors si H est un $N-2$ plan, $\int_{H\cap\Omega} |\nabla u| = \int_{H\cap\Omega} |\nabla u^s| = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que $H = \{x_{N-1} = x_N = 0\}$. On montre que

$$\int_{x_N=0} |\nabla u| = \int_{x_N=0} |u^+ - u^-| \tag{1.1}$$

où u^+ et u^- désignent la trace de u de chaque coté de $x_N = 0$. Plus précisément, $u^\pm(x') = \lim\limits_{x_N\to 0, \pm x_N>0} u(x', x_N)$. Puisque $u^+ - u^- \in L^1(\mathbb{R}^{N-1} \cap \Omega)$, le $N-2$ plan H est de mesure nulle pour cette fonction.

Pour montrer (1.1), soit $\delta > 0$. Puisque la mesure ∇u est bornée, $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{\Omega\cap\{x_N\in]-\delta,0[\}} |\nabla u| = \lim\limits_{\delta\to 0} \int_{\Omega\cap\{x_N\in]0,\delta[\}} |\nabla u| = 0$. D'autre part sur $A_\delta = \Omega \cap \{x_N \in]-\delta, \delta[\}$ on a $\nabla u = \nabla u \chi_{\{x_N<0\}} + (u^+ - u^-)\delta_{x_N=0} + \nabla u \chi_{\{x_N>0\}}$, de sorte qu'en intégrant sur A_δ,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \int_{A_\delta} |\nabla u| &= \lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega\cap x_N\in]-\delta,0[} |\nabla u| + \lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega\cap x_N\in]0,\delta[} |\nabla u| + \int_{\Omega\cap\{x_N=0\}} |u^+ - u^-| \\ &= \int_{\Omega\cap\{x_N=0\}} |u^+ - u^-|.\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

L'Espace $X(\Omega)$.

2.1 Les espaces de Sobolev anisotropes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soit $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ un N-uplet avec $p_i \geq 1$ pour tout i. Les définitions dans la littérature mathématique varient suivant le cas où Ω est borné ou non. Dans le cas de $\mathbb{R}^N$ tous les auteurs considèrent l'espace anisotrope, $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\sum_i |\partial_i u|_{p_i}$.

Lorsque Ω est borné on définit l'espace de Sobolev anisotrope [37], [38], $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour la norme $|u|_1 + \sum_i |\partial_i u|_{p_i}$. $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\sum_i |\partial_i u|_{p_i}$.

Dans un article plus récent [34], les auteurs définissent deux espaces extrêmes lorsque Ω est un ouvert borné lipschitzien :

Soit $p^+ := \sup p_i,\ p^- = \inf p_i$. On définit

$$\overline{W}^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{p^+}(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), i \in [1, N]\},$$

et

$$\underline{W}^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{p^-}(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), i \in [1, N]\}.$$

Notons tout de suite que le premier espace est de type local alors que le deuxième ne l'est pas nécessairement. C'est à dire, pour $u \in \overline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi u \in \overline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$. Dans cette thèse nous adopterons la notation $X(\Omega)$ pour le premier de ces espaces, dans le cas où certains des p_i sont égaux à 1.

Nous faisons quelques remarques pour faire le lien entre les différentes définitions des espaces précédents.

Théorème 2.1.1. *Supposons que $p^- < N$. Si Ω est borné lipschitzien, $W^{1,\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow \underline{W}^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{\frac{Np^-}{N-p^-}}, \partial_i u \in L^{p_i}\}$.*

Démonstration. On montre que $W^{1,\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow \underline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$. Il suffit de montrer que les fonctions de $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ sont dans $L^{p^-}(\Omega)$. Puisque $u \in L^1(\Omega), \nabla u \in L^{p^-}(\Omega)$, on a donc $u \in W^{1,1}(\Omega)$ (car Ω est borné). Par le Théorème de Gagliardo Nirenberg $u \in L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, et par récurrence, en utilisant $p_{k+1} = \inf(p^-, \frac{Np_k}{N-p_k})$ il existe k tel que $p_k = p^-$. $\square$

D'autre part on a

Théorème 2.1.2. *Supposons que $p^- < N$. Si Ω est borné lipschitzien, et si $p^+ \leq \frac{Np^-}{N-p^-}$, $W^{1,\vec{p}}(\Omega) = \underline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$.*

En d'autres termes les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ sont denses dans $\underline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in \underline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$. On utilise un recouvrement de Ω par des ouverts Ω_i comme dans la définition des ouverts lipschitziens (Définition 1.1.6).

Il existe un nombre fini d'ouverts bornés $\mathcal{O}'_i$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, de fonctions a_i lipschitziennes sur $\mathcal{O}'_i$ et un système de coordonnées tel que, quitte à renuméroter ces coordonnées :

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N),\ x' \in \mathcal{O}'_i,\ x_N < a_i(x')\},$$

$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', a_i(x')),\ x' \in \mathcal{O}'_i\}.$$

Soit une partition de l'unité $(\varphi_i)_i$, subordonnée au recouvrement de Ω par les Ω_i.

On a puisque $p^+ \leq \frac{Np^-}{N-p^-}$, et puisque φ_0 est à support dans $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\varphi_0 u \in W_0^{1,\vec{p}}$, donc est limite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Pour $i \geq 1$, $\varphi_i u$ est définie sur l'ouvert $U_i := \Omega_i \cap \Omega$. On montre dans [19], exercice 3.9, que c'est un ouvert étoilé par rapport à un point que l'on peut supposer être 0 car la translation n'affecte pas les fonctions de $\underline{W}^{1,\vec{p}}$ (ni les espaces anisotropes en général). En outre $U_i^\lambda \subset\subset U_i \subset\subset (U_i)^{\frac{1}{\lambda}}$ avec $U_i^\lambda = \{\lambda x, x \in U_i\}$ et $\lambda < 1$. Soit la fonction définie sur $U_i^{\frac{1}{\lambda}}$ pour $\lambda < 1$ par $u_\lambda(x) = \varphi_i u(\lambda x)$. Cette fonction tend vers $\varphi_i u$ dans l'espace $\{u \in L^1(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega)\}$. En régularisant avec un paramètre assez petit $\epsilon < d(\partial U_i, \partial U_i^{\frac{1}{\lambda}})$ on obtient une suite $(u_\epsilon^i)_\epsilon$ qui appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et converge vers $\varphi_i u$ dans l'espace $\{u \in L^1(\Omega), \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega)\}$. On considère alors $u_\epsilon = \sum_i u_\epsilon^i$ qui converge vers $\sum_i \varphi_i u = u$ au sens voulu. □

Les auteurs cités se sont intéressés aux propriétés de ces espaces, et en particulier aux injections de Sobolev. Dans [55], on définit l'exposant critique par

$$p^* := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1},\ \text{si}\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} > 1.$$

On a alors

Théorème 2.1.3. *Il existe une constante $T_0 > 0$ ne dépendant que de $\vec{p}$ et de N telle que*

$$T_0 |u|_{p^*} \leq \Pi_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N}},\ \textit{et donc}\ |u|_{p^*} \leq \frac{1}{NT_0} \sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i},$$

pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. En particulier,

$$\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

On propose en appendice de ce chapitre une preuve rapide de ce résultat, qui est faite de façon trop générale dans le papier de Troisi, puisqu'il considère les $\mathcal{D}^{m,\vec{p}}$ avec m un exposant de dérivation qui ici est 1.

On déduit de ce Théorème que $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$, mais pour $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ cette propriété ne se prolonge pas aux ouverts bornés lipschitziens, comme nous le verrons dans un contre exemple plus loin dans le contexte de cette thèse (voir aussi [34], [37]).

Rappelons que pour les espaces de Sobolev homogènes , ($r = p_i = p$ pour tout i) on déduit facilement de l'existence de cette injection sur $\mathbb{R}^N$ l'existence de la même injection pour des ouverts qui sont lipschitziens, ce qui peut se faire en montrant l'existence d'un opérateur de prolongement continu qui envoie $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Dans le cas non homogène on voit facilement que des ouverts lipschitziens quelconques, n'ont pas cette propriété.

Il y a deux limitations pour le prolongement de cette injection :

1) Une limitation géométrique (l'ouvert doit être un N rectangle borné, ou voir [48] pour des conditions plus générales), voir le contre exemple 2.4.10.

2) Une limitation sur la position de p^+ par rapport à p^-.

Le résultat le plus précis est [34], [38] :

Théorème 2.1.4. *Soit R un $N-$ rectangle. Supposons que $\vec{p}$ vérifie $\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} > 1$, et $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_N$. Alors*

1. $\overline{W}^{\vec{p}}(R) \hookrightarrow L^{p^\star}(R)$.
2. *Si* $p^+ \leq p^\star$, $W^{1,\vec{p}}(R), \underline{W}^{\vec{p}}(R) \hookrightarrow L^{p^\star}(R)$.
3. *Si* $p^+ > p^\star$, *on pose*

$$q = \min_{1 \leq k \leq N} \left(\frac{k}{\max\{0, \sum_1^k \frac{1}{p_i} - 1\}} \right).$$

Alors $W^{1,\vec{p}}(R) \hookrightarrow L^q(R)$, *et* $\underline{W}^{\vec{p}}(R) \hookrightarrow L^k(R)$ *pour tout* $k < q$.

Nous nous intéressons dans cette thèse plus particulièrement à l'espace $\overline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$, lorsque les N_1 premiers exposants sont 1, que nous noterons par la suite $X(\Omega)$. Dans [25] on montre l'existence de fonctions extrémales pour l'injection de $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^\star}$, lorsque tous les $p_i > 1$ et que $p^+ < p^\star$. Dans [56] on donne des propriétés fines de ces fonctions extrémales et on s'interesse aux cas $p^+ > p^\star$.

Dans le chapitre 8 on montre l'existence de fonctions extrémales dans $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, adhérence faible de $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, et on donne l'EDP vérifiée par les fonctions extrémales.

2.2 Définition, premières propriétés.

Nous étudions dans la suite un cas particulier d'espace de Sobolev anisotrope et plus particulièrement le cas où certains p_i sont égaux à 1. Soient $N, N_1 \in \mathbb{N}$, tels que $N \geq 2$, et $1 \leq N_1 < N$. On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, lipschitzien. Soit également

$$\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N),\ p_i = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq N_1,\ \text{et } p_i > 1 \text{ pour } N_1 + 1 \leq i \leq N.$$

Soit $\nabla_1 u$ le N_1 vecteur $(\partial_1 u, \cdots, \partial_{N_1} u)$, et soit $|\nabla_1 u| = (\sum_{i=1}^{N_1} |\partial_i u|^2)^{\frac{1}{2}}$ sa norme euclidienne, on notera par abus $\nabla u = (\nabla_1 u, \partial_{N_1+1} u, \cdots, \partial_N u)$. On rappelle que $p^+ := \sup\{p_i\}$, et

$$p^\star = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1}.$$

Définition 2.2.1. On définit l'espace :

$$X(\Omega) = \{u \in L^{p^+}(\Omega); \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega),\ 1 \leq i \leq N\}.$$

L'espace $X(\Omega)$ correspond donc au cas particulier de $\overline{W}^{\vec{p}}(\Omega)$ lorsque $\vec{p}$ est tel que $p_i = 1$ pour tout $i \leq N_1$, et $p_i > 1$ pour $i > N_1$.

Proposition 2.2.2. *Muni de la norme*

$$|u|_X = |u|_{p^+} + |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i},$$

où $|.|_p$ désigne la norme de $L^p(\Omega)$, l'espace $X(\Omega)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $X(\Omega)$. Alors $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{p^+}(\Omega)$, $(\nabla_1 u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega)$, et pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$, $(\partial_i u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{p_i}(\Omega)$. Il existe donc $u \in L^{p^+}(\Omega)$, $v \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, et $v_i \in L^{p_i}(\Omega)$ tel que u_n converge fortement vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$, $\nabla_1 u_n$ converge fortement vers v dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$ et $\partial_i u_n$ converge fortement vers v_i dans $L^{p_i}(\Omega)$.

Par ailleurs, u_n converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\nabla_1 u_n$ converge vers $\nabla_1 u$, et $\partial_i u_n$ converge vers $\partial_i u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout i. Par conséquent, $v = \nabla_1 u$, $v_i = \partial_i u$, et $u \in X(\Omega)$.

Enfin,

$$|u_n - u|_X = |u_n - u|_{p^+} + |\nabla_1 (u_n - u)|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i (u_n - u)|_{p_i} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc u_n converge vers u dans $X(\Omega)$.

□

Proposition 2.2.3. *Si $u \in X(\Omega)$, et $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u\varphi \in X(\Omega)$. En particulier $X(\Omega)$ est de type local, c'est à dire que pour $u \in X(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi u \in X(\Omega)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de $p_i \leq p^+$ pour tout $1 \leq i \leq N$. □

Remarque 2.2.1. *Par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^{N_1}$:*

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{N_1} |x_i|, \text{ et } ||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme

$$|u| = |u|_{p^+} + \sum_{i=1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} = |u|_{p^+} + \sum_{i=1}^{N} |\partial_i u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i},$$

est équivalente à $|u|_X$.

Proposition 2.2.4. *Pour la norme $|\cdot|_X$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap X(\Omega)$ est dense dans $X(\Omega)$. On a aussi $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $X_c(\Omega)$, où $X_c(\Omega)$ désigne les fonctions de $X(\Omega)$ à support compact.*

Remarque 2.2.2. *Cette proposition n'utilise pas le caractère lipschitzien de Ω, elle est valable dans n'importe quel ouvert.*

Démonstration. On utilise un procédé employé dans [33], [19], [54].

Soit $u \in X(\Omega)$, et soit $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ un recouvrement ouvert de Ω, défini par :

$$\Omega_j = \{x \in \Omega;\ |x| \leq jC_1,\ \text{et } d(x, \partial\Omega) > C_2/(j+1)\},$$

les constantes C_1 et C_2 étant choisies pour que $\Omega_2 \neq \emptyset$. Cette suite d'ouverts bornés est croissante et recouvre Ω. En posant alors $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, on définit une autre suite $\{A_j\}_j$ d'ouverts telle que

$$A_j = \Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega_{j-1}}, \text{ pour tout } j > 1,$$

avec $A_0 = \Omega_2$, et $A_1 = \Omega_3$.

Cette famille constitue encore un recouvrement ouvert de Ω, et on remarque que si $|j - j'| \geq 3$, alors $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$. Soit alors $(\psi_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de Ω par les $\{A_j\}_j$:

$$\psi_j \in C_0^\infty(A_j),\ \ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1,\ \ 0 \leq \psi_j \leq 1 \text{ pour tout } j.$$

Soit également $\rho \in \mathcal{D}(B(0,1))$, tel que $\int_{B(0,1)} \rho = 1$. On pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\rho(\frac{x}{\epsilon})$ pour $\epsilon > 0$.

Soit maintenant $\delta > 0$, et $(\eta_j)_j$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 telle que :

$$A_j + B(0, \eta_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1},\ \text{pour } j \geq 2,$$

et telle que

1. $\left|\rho_{\eta_j} * (\psi_j u) - (\psi_j u)\right|_{p^+} < \delta 2^{-1-j}$,
2. $\left|\rho_{\eta_j} * \partial_i(\psi_j u) - \partial_i(\psi_j u)\right|_{p_i} < \delta 2^{-1-j}$, pour tout $1 \leq i \leq N$,

la première inégalité étant justifiée par le fait que $\psi_j u \in L^{p^+}(\Omega)$, et la deuxième par le fait que $\partial_i(\psi_j u) = \psi_j \partial_i u + u \partial_i \psi_j \in L^{p_i}(\Omega)$.

On pose alors

$$u_\delta = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * (\psi_j u).$$

On obtient ainsi une fonction de classe C^∞ sur Ω. En effet, cette série dont le terme général est une fonction de classe C^∞ est finie sur tout compact K de Ω, car il existe j_0 assez grand pour que $A_{j-1} \cap K = \emptyset$ pour $j > j_0$, d'où la nullité des termes d'indices $> j_0$ puisque leurs supports sont inclus dans $A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}$.

En utilisant le fait que $u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u$, on a

$$\left(\int_\Omega |u_\delta - u|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\rho_{\eta_j} * (\psi_j u) - (\psi_j u)\right|_{p^+} \leq \sum_0^\infty \delta 2^{-1-j} = \delta,$$

et en particulier $u_\delta \in L^{p^+}(\Omega)$. Par ailleurs, comme $\sum_0^\infty \partial_i(\psi_j)u = u\partial_i(\sum_0^\infty \psi_j) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\partial_i u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \partial_i u = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_i(\psi_j u),$$

et donc

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_\delta - \partial_i u|^{p_i}\right)^{1/p_i} = |\sum_0^\infty \rho_{\eta_j} * \partial_i(\psi_j u) - \partial_i(\psi_j u)|_{p_i} \leq \sum_0^\infty \delta 2^{-j-1} = \delta,$$

en particulier $\partial_i u_\delta \in L^{p_i}(\Omega)$, et u_δ ainsi construite vérifie

$$|u_\delta - u|_{p^+} + \sum_{i=1}^N |\partial_i(u_\delta - u)|_{p_i} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et compte tenu de l'équivalence des normes de la remarque précédente :

$$|u_\delta - u|_X \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour la variante, notons que si le support de u est compact on peut trouver un recouvrement fini de ce support parmi les Ω_j. Les ψ_j sont alors en nombre fini et la fonction u_δ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

□

Remarque 2.2.3. *Lorsque Ω est borné, on a $X(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$, ce qui entraine d'après la Proposition 1.1.8 si Ω est borné lipschitzien, la compacité de l'injection de $X(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \sup(p^+, \frac{N}{N-1})$. Nous verrons plus loin que si Ω a une structure géométrique simple on a une injection dans $L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* > \frac{N}{N-1}$ dès que l'un des $p_i > 1$, et donc aussi une injection compacte dans L^q pour $q < p^*$.*

Par ailleurs, la Proposition 1.1.9 assure l'existence d'une trace sur le bord de Ω lorsque Ω est de classe $\mathcal{C}^1$ pour les éléments de $X(\Omega)$, et cette trace est dans $L^1(\partial\Omega)$. On verra aussi plus loin que dans le cas des ouverts rectangles, sur les parties du bord qui sont dans l'hyperplan $e_i^\perp$ avec $i \in [N_1 + 1, N]$, la trace est dans L^q avec $q > 1$ que l'on précisera.

Pour Γ une partie du bord de mesure $N-1$ dimensionnelle $|\Gamma| \neq 0$, on pose

$$X_\Gamma(\Omega) = X(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On rappelle qu'une conséquence de l'inégalité de Poincaré sur $W^{1,1}$ donne

Théorème 2.2.5. *Soit Ω un domaine borné Lipschitzien. Il existe une constante $C > 0$, telles que pour tout $u \in X_\Gamma(\Omega)$,*

$$|u|_{\frac{N}{N-1}} \leq C' \left(|\nabla_1 u|_1 + \sum_{N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i}\right).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Poincaré sur $W^{1,1}(\Omega)$ et d'utiliser $|\partial_i u|_1 \leq C|\partial_i u|_{p_i}$.

□

Remarque 2.2.4. *Le Théorème précédent permet de montrer que si $p^+ \leq \frac{N}{N-1}$ la norme $|u| := |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_i$ est une norme équivalente à $|u|_X$ sur $X_\Gamma(\Omega)$.*

2.3 Le cas de $\mathbb{R}^N$

Définition 2.3.1. On introduit l'espace $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ comme l'adhérence des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}$.

Théorème 2.3.2. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $X(\mathbb{R}^N)$, et donc $X(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. Ces deux espaces ne sont pas égaux si $p^+ < p^\star$.*

Nous prouvons en fait un résultat plus général d'appartenance à $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.3.3. *Si $p^+ < p^\star$, et $u \in L^k(\mathbb{R}^N)$, pour $p^+ \leq k \leq p^*$, et si $\partial_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq i \leq N$, alors $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 2.3.1. *L'hypothèse $p^+ < p^\star$ ne sert que pour la troncature, en d'autres termes si $p^+ = p^\star$ et si u est dans $X_c(\mathbb{R}^N)$ elle appartient bien sûr à $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soient pour $1 \leq i \leq N$ des réels positifs α_i définis par :

$$\alpha_i = \frac{k}{p_i} - 1 \text{ si } k > p^+,$$

et si $k = p^+$:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{p^+}{p_i} - 1 & \text{si } p_i \neq p^+ \\ \epsilon & \text{si } p_i = p^+ \end{cases},$$

où $\epsilon > 0$ est choisi suffisamment petit pour que

$$N_2 \epsilon \leq N - \frac{p^+}{p^*} N,$$

avec $N_2 = |\{i, p_i = p^+\}|$ (rappelons que $p^+ < p^*$). Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(]-2,2[)$, $\varphi = 1$ sur $[-1,1]$. On définit

$$u_n(x) = \Pi_{i=1}^N \varphi(\frac{x_i}{n^{\alpha_i}}) u(x).$$

On pose $C_n = \Pi_{i=1}^N [-2n^{\alpha_i}, 2n^{\alpha_i}]$, et on remarque que $|C_n| = 4^N n^{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$.
Nous allons montrer que $\partial_i u_n \to \partial_i u$ dans $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq i \leq N$.
Remarquons que comme

$$\partial_i u_n(x) = u(x) \partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \right) + \Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \partial_i u(x),$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \partial_i u(x) - \partial_i u(x) \right|^{p_i} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(x)|^{p_i} \left| \Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) - 1 \right|^{p_i} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

par définition de φ, il suffit de montrer que $u \partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \right) \to 0$ in $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$. On a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u \partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \right) |^{p_i} &\leq \frac{c}{n^{\alpha_i p_i}} (\int_{n^{\alpha_i} \leq |x_i| \leq 2n^{\alpha_i}} |u|^k)^{\frac{p_i}{k}} |C_n|^{1-\frac{p_i}{k}} \\ &\leq c' n^{-\alpha_i p_i + (1-\frac{p_i}{k}) \sum_{j=1}^N \alpha_j} o(1) \end{aligned}$$

car $u \in L^k(\mathbb{R}^N)$ entraine que $\int_{n^{\alpha_i} \leq |x_i| \leq 2n^{\alpha_i}} |u|^k \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Ainsi, on obtient le résultat lorsque pour tout $1 \leq i \leq N$:

$$\alpha_i p_i \geq (1 - \frac{p_i}{k}) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j. \tag{2.1}$$

Montrons cette inégalité, tout d'abord lorsque $k > p^+$.

Remarquons que l'on a

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j} = \frac{N}{p^*} + 1,$$

donc $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = k \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j} - N = k\frac{N}{p^*} + k - N$, et (2.1) est équivalent à

$$N \geq \frac{kN}{p^*},$$

inégalité qui est vérifiée puisque $k \leq p^*$.

Montrons maintenant (2.1) lorsque $k = p^+$. On a

$$\sum_{p_j \neq p^+} \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j} - \frac{N_2}{p^+} = \frac{N}{p^*} + 1 - \frac{N_2}{p^+},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \alpha_j &= N_2\epsilon + \sum_{p_j \neq p^+} (\frac{p^+}{p_j} - 1) \\
&= N_2\epsilon + p^+ \sum_{p_j \neq p^+} \frac{1}{p_j} - (N - N_2) \\
&= N_2\epsilon + \frac{p^+}{p^*} N + p^+ - N.
\end{aligned}$$

Maintenant, lorsque $p_i = p^+$, la condition (2.1) équivaut à $\epsilon p^+ \geq 0$, inégalité qui est toujours satisfaite. Enfin, lorsque $p_i < p^+$, (2.1) équivaut à

$$p^+ - p_i \geq \frac{p^+ - p_i}{p^+} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j,$$

ou encore

$$N_2\epsilon \leq N - \frac{p^+}{p^*} N,$$

inégalité vérifiée par définition de ϵ.

Ainsi, $u_n \in X(\mathbb{R}^N)$ converge vers u fortement dans $X(\mathbb{R}^N)$ et est à support dans $C_n = \Pi_{i=1}^{N} [-2n^{\alpha_i}, 2n^{\alpha_i}]$.

Pour finir, il suffit de régulariser. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ une fonction régularisante. On considère $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$. Alors la suite $(\rho_n * u_n)_n$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, et converge toujours vers u dans $X(\mathbb{R}^N)$.

□

Remarque 2.3.2. *Remarquons que l'espace $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ est strictement plus grand que $X(\mathbb{R}^N)$ comme l'illustre l'exemple suivant en dimension 2, avec $p_1 = 1, p_2 = 2$ et donc $p^* = 4$:*

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

fonction qui n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^2)$ (et donc n'est pas dans $X(\mathbb{R}^2)$), mais appartient à $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^2)$, par le Théorème précédent.

Énonçons maintenant le Théorème d'injection dans $\mathbb{R}^N$. Pour une preuve, le lecteur pourra consulter [55], ou l'appendice de ce chapitre.

Théorème 2.3.4. *Il existe une constante $T_0 > 0$ ne dépendant que de $\vec{p}$ et de N telle que*

$$T_0|u|_{p^*} \leq \Pi_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N}}, \text{ et } |u|_{p^*} \leq \frac{1}{NT_0}\sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i},$$

pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. En particulier,

$$\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Remarque 2.3.3. *On montre dans l'appendice de ce chapitre que $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ uniquement pour $q = p^*$.*

Corollaire 2.3.5. *Si $p^+ \leq p^\star$,*

$$X(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Si $p^+ = p^\star$ il n' y a rien à montrer, sinon $p^+ < p^\star$ et on utilise le Théorème 2.3.3 avec $k = p^+$ et le Théorème 2.3.4. □

2.4 Le cas des N rectangles

On suppose dans cette section que Ω est un ouvert "N-rectangle" borné de $\mathbb{R}^N$, en d'autre termes il existe des α_i, β_i tels que $\Omega = \Pi_1^N]\alpha_i, \beta_i[$. En particulier Ω est lipschitzien. En composant avec une application affine conservant les axes on peut supposer que $\Omega =]0,1[^N$. On peut envisager des ouverts plus généraux lorsque certains p_i sont égaux entre eux, en particulier ce que l'on fera ici sera prolongeable au cas où $\Omega = \Omega_1 \times \Pi_{N_1+1}^N]0,1[$, avec Ω_1 un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^{N_1}$.

On notera $\Omega_1 = \Pi_1^{N_1}]0,1[$, $\Omega_2 = \Pi_{N_1+1}^N]0,1[$, et on introduit les notations des bords "horizontaux"

$$\partial\Omega^h = \Omega_1 \times \partial\Omega_2$$

et "verticaux"

$$\partial\Omega^v = \partial\Omega_1 \times \Omega_2.$$

On notera pour $i \geq 1$

$$\partial\Omega^i = (\Pi_1^{i-1}]0,1[\times\{0\} \times \Pi_{i+1}^N]0,1[) \cup (\Pi_1^{i-1}]0,1[\times\{1\} \times \Pi_{i+1}^N]0,1[)$$

de sorte que

$$\partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1}\partial\Omega^i,\ \partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^N \partial\Omega^i.$$

Remarque 2.4.1. *On a bien sûr $\partial\Omega = \partial\Omega^v \cup \partial\Omega^h \cup H$ où H est une réunion de sections de $N-2$ plans.*

Notons que l'on sait déjà que la trace d'un élément de $X(\Omega)$ existe dans $L^1(\partial\Omega)$ car comme Ω est borné $X(\Omega)$ s'injecte dans $W^{1,1}(\Omega)$. On définit alors

$$X_h(\Omega) = X(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^h\},$$

et

$$X_v(\Omega) = X(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^v\}.$$

Proposition 2.4.1. *L' application trace γ_0 envoie $X(\Omega)$ dans $L^{p_i}(\partial\Omega^i)$. Elle est bien sûr linéaire, continue, et coïncide avec la restriction de u sur $\partial\Omega^i$ lorsque u est continue sur $\overline{\Omega}$.*

Démonstration. Faisons la preuve pour la trace sur le bord $(\Pi_1^{i-1}]0,1[\times\{0\}\times\Pi_{i+1}^N]0,1[)$. Le cas de $(\Pi_1^{i-1}]0,1[\times\{1\}\times\Pi_{i+1}^N]0,1[)$ se traite de façon similaire. Il s'agit de montrer qu'elle appartient en fait à $L^{p_i}(\partial\Omega^i)$ (pour tout $N_1+1 \leq i \leq N$).

Pour $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$, on notera x'_i le $N-1$ vecteur

$$x'_i = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N),$$

et on utilisera la notation abusive pour $x = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)$.

Soit $u \in X(\Omega)$, et $1 \leq i \leq N$. On pose pour $x'_i \in \partial\Omega_0^i$, $u_n(x'_i) = u(x'_i, \frac{1}{n})$. On a pour tous $n > m$,

$$u_n(x'_i) - u_m(x'_i) = -\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \partial_i u(x'_i, t)dt,$$

et donc par l'inégalité de Hölder :

$$|u_n(x'_i) - u_m(x'_i)| = \left|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \partial_i u(x'_i, t)dt\right| \leq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p_i}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \left|\partial_i u(x'_i, t)\right|^{p_i} dt\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

En intégrant selon la variable x'_i, on obtient

$$\int_{\partial\Omega^i} |u_n(x'_i) - u_m(x'_i)|^{p_i} dx'_i \leq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{p_i-1} \int_{\partial\Omega^i}\int_{1/m}^{1/n} |\partial_i u(x'_i, t)|^{p_i} dx'_i dt,$$

et donc $|u_n - u_m|_{L^{p_i}(\partial\Omega^i)} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (rappelons que $p_i > 1$ pour $i > N_1$, et que $\partial_i u \in L^{p_i}$ pour tout $1 \leq i \leq N$). La suite u_n est donc de Cauchy dans l'espace complet $L^{p_i}(\partial\Omega^i)$, et donc converge dans $L^{p_i}(\partial\Omega^i)$. Par ailleurs on sait que u_n converge dans $L^1(\partial\Omega^i)$ vers $\gamma_0(u)$, la trace de u. Ainsi $\gamma_0(u) \in L^{p_i}(\partial\Omega^i)$.

Par ailleurs, si $u \in C(\overline{\Omega})$, alors cette trace correspond à l'usuelle valeur au bord. En effet, on a alors au sens de la convergence uniforme

$$\lim_{n\to\infty} u(x'_i, \frac{1}{n}) = u(x'_i, 0),$$

et compte tenu de l'injection de $\mathcal{C}(\partial\Omega^i)$ dans $L^{p_i}(\partial\Omega^i)$,

$$\left(\int_{\partial\Omega^i} |u(x'_i, \frac{1}{n}) - u(x'_i, 0)|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Remarque 2.4.2. *Nous verrons plus loin qu'en fait cette trace est même dans* $L^{1+p^*(1-\frac{1}{p_i})}(\partial\Omega^i)$ *(voir aussi [48]). Elle est sans doute dans un espace plus petit. Caractériser cet espace est à notre connaissance pour le moment un problème ouvert.*

En ce qui concerne la trace sur $\partial\Omega^v$*, il s'avère que l'espace de trace n'est pas plus petit que* $L^1(\partial\Omega^v)$ *comme le montre la proposition suivante.*

Proposition 2.4.2. *Pour* $i \leq N_1$*, Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* $u \in L^1(\partial\Omega^i)$ *il existe* $U \in X(\Omega)$ *tel que* $U(x_i', 0) = u(x_i')$*, pour tout* $x_i' \in]0,1[^{N-1}$*, et*

$$|U|_{X(\Omega)} \leq c|u|_{L^1(\partial\Omega^i)}.$$

Démonstration. On montre le résultat sur la partie du bord $\{0\}\times]0,1[^{N-1}$, les autres cas se démontrent de manière similaire.

Soit $u \in L^1(]0,1[^{N-1})$, et soit $\phi_n \in \mathcal{C}_c^1(]0,1[^{N-1})$ qui converge vers u dans $L^1(]0,1[^{N-1})$. On peut supposer que $\sum_n |\phi_{n+1} - \phi_n|_1 < +\infty$. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels telle que

$$\alpha_n \leq \frac{2^{-n}}{1 + \sum_{j=1}^{N-1}(|\partial_j \phi_n|_{p_j} + |\partial_j \phi_{n+1}|_{p_j})}. \tag{2.2}$$

Soit également $t_0 = \sum_n \alpha_n$, et $t_n = t_{n-1} - \alpha_n$. En fait, on peut choisir α_0 tel que $t_0 = 1$.

Soit la fonction v définie pour $\lambda \in]0,1[$, et pour $y \in]0,1[^{N-1}$ par :

$$v(\lambda t_n + (1-\lambda)t_{n+1}, y) = \lambda\phi_n(y) + (1-\lambda)\phi_{n+1}(y).$$

Alors v est définie sur $]0,1[^N$ car tout $x_1 \in]0,1[$ s'écrit sous la forme $\lambda t_n + (1-\lambda)t_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $v(0,y) = \lim_{t\to 0} v(t,y) = u(y)$. En effet, il suffit de vérifier que

$$\lim_{t\to 0} \int_{]0,1[^{N-1}} |v(t,y) - u(y)|dy = 0.$$

Soient donc $\epsilon > 0$ et $P \in \mathbb{N}$ assez grand pour que pour tout $n > P$ $\int |\phi_n(y) - u(y)|dy < \epsilon$, soit $t < t_P$, alors il existe existe $n \geq P$ tel que $t_{n+1} < t < t_n$ et donc, v étant linéaire par morceaux :

$$\int_{]0,1[^{N-1}} |v(t,y) - u(y)|dy \leq \sup\{\int_{]0,1[^{N-1}} |v(t_{n+1},y) - u(y)|dy, \int_{]0,1[^{N-1}} |v(t_n,y) - u(y)|dy\} \leq \epsilon,$$

d'où le résultat.

On a par ailleurs, pour $t \in]t_{n+1}, t_n[$, en écrivant $t = \lambda t_n + (1-\lambda)t_{n+1}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\phi_n - \phi_{n+1}}{t_n - t_{n+1}},$$

d'où

$$\int_\Omega |\partial_1 v| = \sum_p \int_{t_{n+1}}^{t_n} \frac{|\phi_n - \phi_{n+1}|_1}{t_n - t_{n+1}} = \sum_p |\phi_{n+1} - \phi_n|_1 < +\infty.$$

D'autre part pour $2 \leq i \leq N$,

$$\partial_i v = \lambda\partial_{i-1}\phi_n(y) + (1-\lambda)\partial_{i-1}\phi_{n+1}(y),$$

de sorte que, par (2.2), et comme $t_{n-1} - t_n = \alpha_n$,

$$|\partial_i v|_{p_i} \leq \sum_n (t_{n-1} - t_n)(|\partial_{i-1}\phi_n|_{p_i} + |\partial_{i-1}\phi_{n+1}|_{p_i}) \leq \sum_n 2^{-n} < +\infty,$$

d'où $v \in X(]0,1[^N)$.

Enfin, l'application trace étant continue et surjective de $X(\Omega)$ dans $L^1(\partial\Omega^v)$, le Théorème de l'image ouverte (voir par exemple [9]) donne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in L^1(\partial\Omega^v)$:

$$|U|_{X(\Omega)} \leq c|u|_{L^1(\partial\Omega^v)},$$

où U désigne un relèvement de u. □

Théorème 2.4.3. *On suppose toujours $\Omega =]0,1[^N$. Soit $u \in X(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une suite $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que ϕ_n converge vers u dans $X(\Omega)$.*

Démonstration. Soit un tel u. Prolongeons u à $\mathbb{R}^N$:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que $\tilde{u} \in X(\mathbb{R}^N)$. Clairement, $\tilde{u} \in L^{p+}(\mathbb{R}^N)$. Ensuite, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on écrit pour tout $1 \leq i \leq N$, par définition de la dérivation au sens des distributions, puis par la formule de Green Généralisée, u étant nulle sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \tilde{u}\ \psi &= -\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}\ \partial_i \psi \\ &= -\int_\Omega u\ \partial_i \psi \\ &= \int_\Omega \partial_i u\ \psi, \end{aligned}$$

et donc $\partial_i \tilde{u} = \partial_i u \chi_\Omega \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$, et $\tilde{u} \in X(\mathbb{R}^N)$.

On pose pour $\lambda > 1$, avec $x_o = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^N$:

$$u_\lambda(x) = \tilde{u}\left(x_o + \lambda(x - x_o)\right).$$

Par ce qui précède, pour tout $\lambda > 1$, et comme une dilatation ou une contraction conserve les espaces anisotropes, $u_\lambda \in X(\mathbb{R}^N)$. D'autre part, u_λ est à support dans $]\frac{\lambda-1}{2\lambda}, \frac{\lambda+1}{2\lambda}[^N$, donc inclus strictement dans $]0,1[^N$ lorsque $\lambda > 1$. Rappelons le lemme suivant dont la démonstration est reportée à la fin de la preuve :

Lemme 2.4.4. *Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, où $p \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, et si on pose $\tau_\lambda u(x) = u(\frac{1}{2} + \lambda(x - \frac{1}{2}))$, alors*

$$|\tau_\lambda u - u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Le lemme implique que u_λ converge vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$ lorsque $\lambda \to 1$. De même, comme pour $1 \leq i \leq N$

$$\partial_i u_\lambda(x) = \lambda \partial_i \tilde{u}\left(\frac{1}{2} + \lambda(x - \frac{1}{2})\right),$$

le lemme précédent entraine également que $\partial_i u_\lambda$ converge fortement vers $\partial_i u$ dans $L^{p_i}(\Omega)$. Il suffit pour conclure de régulariser en considérant la suite

$$v_\lambda = u_\lambda * \rho_{\nu_\lambda},$$

où ρ_{ν_λ} est une suite régularisante, et où ν_λ est choisie telle que $\mathrm{supp(u_\lambda)} + \mathcal{B}(0,\nu_\lambda) \subset]0,1[^{\mathrm{N}}$, où $\mathcal{B}(0,\nu_\lambda)$ désigne une boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon ν_λ. Alors $v_\lambda \in \mathcal{D}(\Omega)$, et converge vers u dans $X(\Omega)$.

□

Démonstration du lemme 2.4.4 *:* Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, et par densité soit $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $|\phi - u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{3}$. Or ϕ étant continue à support compact, elle est uniformément continue, donc pour λ suffisamment proche de 1, on a également,

$$|\phi(\frac{1}{2} + \lambda(x - \frac{1}{2})) - \phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{3|\mathrm{supp}\phi|^{\frac{1}{p}}},$$

et donc

$$|\tau_\lambda \phi - \phi|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Le résultat découle alors de l'inégalité

$$|\tau_\lambda u - u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |\tau_\lambda u - \tau_\lambda \phi|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + |\tau_\lambda \phi - \phi|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + |\phi - u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \epsilon.$$

□

Pour étendre les résultats d'injection sur $\mathbb{R}^N$ à l'ouvert $\Omega =]0,1[^N$, on utilise la proposition suivante :

Proposition 2.4.5. *Soit Ω un N rectangle.*

Il existe un opérateur de prolongement :

$E : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & X_c(\mathbb{R}^N) \\ u & \longmapsto & Eu \end{array}$ *, tel que*

1. $|Eu|_{X(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{X(\Omega)}$,
2. $Eu|_\Omega = u|_\Omega$.

où $X_c(\mathbb{R}^N)$ désigne les fonctions de $X(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Démonstration. Pour $u \in X(\Omega)$, où $\Omega =]0,1[^N$, on commence par prolonger u par réflexion sur $]-1,2[\times]0,1[^{N-1}$ de la façon suivante ($y \in]0,1[^{N-1}$) :

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(-x,y) \text{ si } x \in]-1,0[\\ u(x,y) \text{ si } x \in]0,1[\\ u(2-x,y) \text{ si } x \in]1,2[\end{cases}$$

Un simple changement de variables permet de voir que $\tilde{u} \in L^{p^+}(]-1,2[\times]0,1[^{N-1})$. On a de plus pour $\phi \in \mathcal{D}(]-1,2[\times]0,1[^{N-1})$:

$$
\begin{aligned}
\int_{]-1,2[\times]0,1[^{N-1}} (\partial_1 \tilde{u})\phi &= -\int_{-1}^{2}\int_{]0,1[^{N-1}} \tilde{u}(x,y)\partial_1\phi(x,y)dxdy \\
&= -\int_{]0,1[^{N-1}} dy \left(\int_{-1}^{0} u(-x,y)\partial_1\phi dx + \int_0^1 u(x,y)\partial_1\phi(x,y)dx \right.\\
&\left. + \int_1^2 u(2-x,y)\partial_1\phi(x,y)dx\right) \\
&= -\int_{]0,1[^{N-1}} dy \left(\int_0^1 u(x,y)\partial_1\phi(-x,y)dx + \int_0^1 u(x,y)\partial_1\phi(x,y)dx \right.\\
&\left. + \int_0^1 u(x,y)\partial_1\phi(2-x,y)dx\right),
\end{aligned}
$$

et par la formule de Green généralisée,

$$
\begin{aligned}
\int_{]-1,2[\times]0,1[^{N-1}} (\partial_1 \tilde{u})\phi = -\int_{]0,1[^{N-1}} dy &\left(-\int_0^1 \partial_1 u(x,y)(-\phi)(-x,y)dx + u(0,y)\phi(0,y)\right. \\
&- \int_0^1 \partial_1 u(x,y)\phi(x,y)dx + u(1,y)\phi(1,y) - u(0,y)\phi(0,y) \\
&\left. - \int_0^1 \partial_1 u(x,y)(-\phi)(2-x,y)dx - u(1,y)\phi(1,y)\right),
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\int_{]-1,2[\times]0,1[^{N-1}} (\partial_1 \tilde{u})\phi &= \int_{]0,1[^N} \partial_1 u(x,y)\left(\phi(x,y) - \phi(-x,y) - \phi(2-x,y)\right)dxdy \\
&= -\int_{]-1,0[\times]0,1[^{N-1}} \partial_1 u(-x,y)\phi(x,y)dxdy + \int_{]0,1[^N} \partial_1 u\phi \\
&- \int_{]1,2[\times]0,1[^{N-1}} \partial_1 u(2-x,y)\phi(x,y)dxdy.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\partial_1\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} -\partial_1 u(-x,y) \text{ si } -1 < x < 0 \\ \partial_1 u(x,y) \text{ si } 0 < x < 1 \\ -\partial_1 u(2-x,y) \text{ si } 1 < x < 2 \end{cases}
$$

Un calcul similaire permet de calculer $\partial_i\tilde{u}$ pour $2 \leq i \leq N$. Il n'y aura cependant pas de termes de bord dans le calcul, car $\phi \in \mathcal{D}(]-1,2[\times]0,1[^{N-1})$. On trouve :

$$
\partial_i\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} \partial_i u(-x,y) \text{ si } -1 < x < 0 \\ \partial_i u(x,y) \text{ si } 0 < x < 1 \\ \partial_i u(2-x,y) \text{ si } 1 < x < 2 \end{cases}
$$

Les calculs précédents entrainent que $\tilde{u} \in X(]-1,2[\times]0,1[^{N-1})$. En itérant ce procédé, c'est à dire en remplaçant la variable x_1 par la variable x_2, puis x_N, on prolonge à $]-1,2[\times]-$

$1,2[\times]0,1[^{N-2}$ puis finalement à $]-1,2[^N$, on obtient un prolongement $\widetilde{u} \in X(]-1,2[^N)$ de u.

Par ailleurs, on remarque que par construction on a

$$|\partial_i \widetilde{u}|_{L^{p_i}(]-1,2[^N)} = 3^N |\partial_i u|_{L^{p_i}(]0,1[^N)}.$$

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(]-1,2[^N)$, telle que $\phi = 1$ sur $]0,1[^N$. Alors $\phi\widetilde{u} \in X(]-1,2[^N)$ car X est de type local. On prolonge également $\phi\widetilde{u}$ par 0 hors de $]-1,2[^N$. La fonction obtenue est un élément de $X_c(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, $\phi\widetilde{u} = u$ sur $]0,1[^N$ par définition de ϕ.

En remarquant que les normes $|u|_{p^+} + \sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}$ et $|u|_X := |u|_{p^+} + |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i}$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^N$ comme sur Ω, et par ce qui précède, on peut trouver une constante positive C telle que

$$|\phi\widetilde{u}|_{X(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{X(]0,1[^N)},$$

où la constante C dépend de $|\phi|_\infty$, et de $|\partial_i \phi|_\infty$ pour $1 \leq i \leq N$.

□

Remarque 2.4.3. *À l'inverse des espaces de Sobolev isotropes, la proposition précédente n'est à priori pas valable pour un ouvert lipschitzien quelconque. Elle est tout de même valable pour un ouvert de la forme $\Omega = \Omega_1 \times \Pi_{i=N_1+1}^N]a_i, b_i[$, avec Ω_1 un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^{N_1}$, en utilisant un prolongement de $W^{1,1}(\Omega_1)$ dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^{N_1})$.*

Corollaire 2.4.6. *Soit Ω un N rectangle. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $X(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u \in X(\Omega)$. Soit E l'opérateur de prolongement de la Proposition 2.4.5. Alors $Eu \in X_c(\mathbb{R}^N)$. La Proposition 2.2.4 donne l'existence de $\widetilde{U_n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui converge fortement vers $\varphi(Eu)$ dans $X(\mathbb{R}^N)$. Alors $U_n = \widetilde{U_n}|_{\overline{\Omega}}$ convient. □

Définition 2.4.7. Soit Ω un N-rectangle. On définit l'espace

$$\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega) = \{\phi|_{\partial\Omega}, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\}$$

Corollaire 2.4.8. *Soit Ω un N-rectangle. $\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ est dense dans $\gamma_0(X(\Omega))$ pour la norme*

$$|u|_{\gamma_0(X)} = \inf_{\gamma_0(U)=u} |U|_{X(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $u \in \gamma_0(X(\Omega))$, et $U \in X(\Omega)$ tel que $\gamma_0(U) = u$ sur $\partial\Omega$. Soit également par le corollaire 2.4.6 une suite $U_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ qui converge fortement vers U dans $X(\Omega)$.

Ainsi, par définition de la norme $|.|_{\gamma_0(X)}$:

$$|\gamma_0(U_n) - u|_{\gamma_0(X)} = |\gamma_0(U_n - U)|_{\gamma_0(X)} \leq |U_n - U|_{X(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, par définition, pour tout n, la fonction $\gamma_0(U_n)$ est la restriction de U_n à $\partial\Omega$, et donc $\gamma_0(U_n) \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$. □

Théorème 2.4.9. *On suppose toujours que $p^+ \leq p^\star$. Soit Ω un N-rectangle. Alors*

$$X(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega).$$

Démonstration. Notons que si $p^+ = p^\star$ il n'y a rien à montrer. Si $p^+ < p^\star$, et $u \in X(\Omega)$, par la Proposition 2.4.5 on a $E(u) \in X(\mathbb{R}^N)$, et

1. $|Eu|_{X(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{X(\Omega)}$,
2. $Eu|_\Omega = u|_\Omega$.

Comme $Eu|_\Omega = u|_\Omega$, et $Eu \in X(\mathbb{R}^N)$ le Théorème 2.3.3 entraine que $Eu \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, on a donc

$$|u|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq |E(u)|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)},$$

et par le corollaire 2.3.5, on a

$$|E(u)|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1|E(u)|_{X(\mathbb{R}^N)}.$$

Ainsi :

$$|u|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C_1|E(u)|_{X(\mathbb{R}^N)} \leq C_1C|u|_{X(\Omega)},$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.4.4. *Dans [38], [7], les auteurs donnent une autre preuve de ce résultat. Notons que dans ces articles les auteurs utilisent l'espace $W^{1,\vec{p}}$ adhérence des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour la norme $|u|_1 + \sum |\partial_i u|_{p_i}$ et n'utilisent pas le prolongement précédent, mais adaptent la démonstration de Troisi [55] dans un carré.*

Exemple 2.4.10. Voici un contre exemple en dimension 2, lorsque $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ de l'injection $X(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ pour un certain ouvert non rectangle. Cet exemple est inspiré de [34]. Notons que cet ouvert est lipschizien. Posons

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1, |x_2|^r < x_1 < 1\},$$

où $1 < r < 3$, de sorte que $\frac{1}{4}(\frac{1}{r} + 1) < \frac{1}{r}$. Soit alors

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{r} + 1) < \gamma < \frac{1}{r},$$

et posons

$$u(x_1, x_2) = x_1^{-\gamma}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^2 &= 2\int_0^1 \left(\int_{|x_2|^r}^1 |x_1|^{-2\gamma} dx_1\right) dx_2 \\ &= \frac{2}{1-2\gamma}\int_0^1 \left(1 - |x_2|^{r(1-2\gamma)}\right) dx_2,\end{aligned}$$

et cette intégrale converge car $\gamma < \frac{1}{r} < \frac{1}{2}(\frac{1}{r} + 1)$.

D'autre part, il est clair que $\partial_2 u \in L^2(\Omega)$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\partial_1 u| &= 2\gamma\int_0^1 \left(\int_{|x_2|^r}^1 x_1^{-\gamma-1} dx_1\right) dx_2 \\ &= 2\int_0^1 \left(1 - x_2^{-\gamma r}\right) dx_2,\end{aligned}$$

et cette intégrale converge car $\gamma < \frac{1}{r}$, donc $u \in X(\Omega)$.

Enfin,

$$\int_{\Omega} |u|^4 = 2 \int_0^1 \left(\int_{|x_2|^r}^1 x_1^{-4\gamma} dx_1 \right) dx_2$$
$$= \frac{2}{1-4\gamma} \int_0^1 \left(1 - x_2^{r(1-4\gamma)} \right) dx_2,$$

intégrale qui diverge car $\gamma > \frac{1}{4}(\frac{1}{r}+1)$, et donc u n'est pas dans $L^4(\Omega)$.

On rappelle un lemme classique que l'on utilisera fréquemment dans cette thèse.

Lemme 2.4.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et soit $\{u_n\}$ une suite qui converge fortement dans $L^k(\Omega)$ et qui est bornée dans $L^q(\Omega)$ pour un certain $q > k$. Alors elle converge fortement dans tous les $L^p(\Omega)$ tels que $k \leq p < q$.*

Démonstration. On utilise l'inégalité de Hölder en écrivant : $p = \theta k + (1-\theta)q$ où $\theta \in]0,1[$. Alors :

$$|u_n - u_m|_{L^p(\Omega)} \leq |u_n - u_m|^{\theta}_{L^k(\Omega)} |u_n - u_m|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

Le membre de droite tend vers zéro pour n et m tendant vers l'infini, car c'est le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers zéro. On en déduit que $\{u_n\}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, elle converge donc dans $L^p(\Omega)$. □

Corollaire 2.4.12. *Si Ω est un ouvert rectangle borné de $\mathbb{R}^N$, l'injection $X(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte pour tout $p < p^*$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $X(\Omega)$. Par l'injection compacte de $X(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, on peut extraire de u_n une sous suite (toujours notée u_n) qui converge fortement dans $L^1(\Omega)$. Or par le théorème précédent, u_n est bornée dans $L^{p^*}(\Omega)$, donc cette sous suite converge fortement dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p < p^*$ par le lemme 2.4.11, ce qui conclut. □

Rappelons que pour $\Omega =]0,1[^N$, on a posé $\partial\Omega^i = (\{x_i = 0\} \cup \{x_i = 1\}) \cap \overline{\Omega}$. On retrouve le résultat suivant dans [48] :

Corollaire 2.4.13. *Si $\Omega =]0,1[^N$, la trace d'un élément de $X(\Omega)$ est dans $L^{1+p^\star(1-\frac{1}{p_i})}(\partial\Omega^i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$.*

Démonstration. Pour $i \leq N_1$, $p_i = 1$ et le résultat est trivial. On fait la preuve pour p_N et $\partial\Omega_0^N =]0,1[^{N-1} \times \{0\}$. Soit donc $u \in X(\Omega)$, et on note $\gamma = 1 + p^\star(1 - \frac{1}{p_N})$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ telle que $\phi(0) = 1$. Posons $v(x) = u(x', x_N)\phi(x_N)$ de sorte que v a la même trace que u sur $\{x_N = 0\}$ et est nulle sur $\{x_N = 1\}$. On écrit

$$|v|^\gamma(x', 0) = | \int_0^1 \gamma |v|^{\gamma-2} v \partial_N v(x', t) dt|,$$

et en intégrant selon $x' \in]0,1[^{N-1}$:

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[^{N-1}}|v|^{\gamma}(x',0)dx' &\leq \gamma\int_{]0,1[^N}|v|^{\gamma-1}|\partial_N v(x',t)|dtdx'\\ &\leq \gamma(\int_\Omega |v|^{(\gamma-1)p'_N})^{\frac{1}{p'_N}}(\int_\Omega |\partial_N v|^{p_N})^{\frac{1}{p_N}}\\ &= \gamma|v|_{p^*}^{\frac{p^*}{p'_N}}|\partial_N v|_{p_N} < +\infty,\end{aligned}$$

par l'injection de $X(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$, ce qui conclut. $\square$

Rappelons les notations :

$$\text{pour } 0\leq i\leq N, \text{ et } j\in\{0,1\},\ \partial\Omega^i_j = \partial\Omega\cap\{x_i=j\},\ \partial\Omega^i = \partial\Omega^i_0\cup\partial\Omega^i_1$$

Ainsi que les bords "horizontaux" (respectivement "verticaux")

$$\partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^N(\partial\Omega^i_0\cup\partial\Omega^i_1)$$

et

$$\partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1}(\partial\Omega^i_0\cup\partial\Omega^i_1).$$

Enfin, rappelons les définitions

$$X_h(\Omega) = X(\Omega)\cap\{u=0 \text{ sur } \partial\Omega^h\},\ X_v(\Omega) = X(\Omega)\cap\{u=0 \text{ sur } \partial\Omega^v\}.$$

Montrons un théorème de densité qui nous sera utile plus tard.

Théorème 2.4.14. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})\cap X_h(\Omega)$ est dense dans $X_h(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u\in X_h(\Omega)$. Prolongeons u par réflexion comme dans la preuve de la Proposition 2.4.5.

$$\tilde{u}(x_1,\cdots,x_N) = \begin{cases} u(-x_1,x_2,\cdots,x_N) \text{ si } x_1\in\,]-1,0[\\ u(x_1,\cdots,x_N) \text{ si } x_1\in\,]0,1[\\ u(2-x_1,x_2,\cdots,x_N) \text{ si } x_1\in\,]1,2[\end{cases}$$

On obtient ainsi une prolongée $\tilde{u}\in X(]-1,2[\times]0,1[^{N-1})$. On prolonge de la même manière selon les N_1 premières coordonnées, pour obtenir $u\in X(]-1,2[^{N_1}\times]0,1[^{N-N_1})$. Notons que $\tilde{u}$ est toujours nul sur $\partial\Omega^h$. Prolongeons maintenant $\tilde{u}$ par 0 sur $\Omega' =]-1,2[^{N_1}\times(]-\infty,0[^{N-N_1}\cup]1,+\infty[^{N-N_1})$. Des calculs similaires à ceux de la démonstration de la Proposition 2.4.5 permettent de montrer que $\tilde{u}\in X(\Omega')$. On pose pour $(x,y)\in\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N-N_1}$

$$\tilde{\tilde{u}}(x,y) = \tilde{u}(x,y)\phi(x),$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N_1})$ à support dans $]-1,2[^{N_1}$, et telle que $\phi=1$ sur $]0,1[^{N_1}$. La fonction $\tilde{\tilde{u}}$ obtenue est alors à support compact dans $]-1,2[^{N_1}\times[0,1]^{N-N_1}$, et est égale à u sur Ω.

On définit pour $\lambda>1$:

$$v_\lambda(x,y) = \tilde{\tilde{u}}(x,\frac{1}{2}+\lambda(y-\frac{1}{2})).$$

Alors, $v_\lambda(x,y) = 0$ pour y hors de $]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}[^{N-N_1}$, et puisque $\lambda > 1$, $]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}[^{N-N_1} \subset]0,1[^{N-N_1}$.

Ainsi, v_λ est à support compact dans $]-1,2[^{N_1} \times]0,1[^{N-N_1}$. En outre, v_λ converge fortement vers $\tilde{\tilde{u}}$ dans $X(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ (lemme 2.4.4). En régularisant v_λ, avec un paramètre de régularisation assez petit (inférieur à $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$), on obtient alors le résultat. $\square$

Plus généralement, soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ une union non vide de $\partial\Omega^i$. C'est à dire, soit $K \subset \{1, \cdots, N\}$. On pose

$$\Gamma = \cup_{i\in K} \partial\Omega^i,$$

$$X_\Gamma(\Omega) = X(\Omega) \cup \{u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Théorème 2.4.15. *$X_\Gamma(\Omega) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $X_\Gamma(\Omega)$.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration précédente. Supposons pour fixer les idées que

$$\Gamma = \partial\Omega^1 \cup \partial\Omega^N$$

Il suffit de prolonger par réflexion comme précédemment sur $\Omega' =]0,1[\times]-1,2[^{N-2}\times]0,1[$, puis de prolonger par 0 hors de Ω'. On procède ensuite comme dans la preuve précédente en utilisant une transformation adaptée.

$\square$

2.5 Formule de Green généralisée.

On suppose toujours dans cette section que $\Omega =]0,1[^N$, et que $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ avec $p_i = 1$ pour $i \leq N_1$, $p_i > 1$ pour $i > N_1$. On note p_i' l'exposant conjugué de p_i (avec $p_i' = \infty$ pour $i \leq N_1$).

Nous établissons maintenant une généralisation de la formule de Green classique, adaptée à notre contexte. On définit l'espace

$$Y = \{\sigma, \sigma_i \in L^{p_i'}(\Omega), 1 \leq i \leq N, \mathrm{div}(\sigma) \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}^{\star\prime}}(\Omega)\}.$$

On peut normer Y par $|\sigma|_Y = (\sum_{i=1}^{N_1} |\sigma_i|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\sigma_i|_{p_i'} + |\mathrm{div}(\sigma)|_{p^{*\prime}} := |\sigma^1|_\infty + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\sigma_i|_{p_i'} + |\mathrm{div}(\sigma)|_{(p^\star)'}$.

Théorème 2.5.1. *Soit $\sigma \in Y$. Pour $u \in \gamma_0(X)$ (ou à $C^1(\partial\Omega)$), on définit*

$$T_u^\sigma = \int_\Omega \sigma \cdot \nabla U + \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma) U$$

où $U \in X(\Omega)$ est tel que $\gamma_0(U) = u$. Alors $T^\sigma : u \to T_u^\sigma$ définit une forme linéaire continue sur $\gamma_0(X)$. Cette formule constitue une extension de la formule de Green, car lorsque $\sigma \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, T^σ coïncide avec $\sigma \cdot n$, et donc $T_u^\sigma = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot nu$. En outre, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\sigma \cdot n|_{(\gamma_0(X))'} \leq C|\sigma|_Y.$$

Démonstration. T^σ_u est clairement bien définie. Montrons qu'elle ne dépend pas du choix de U : Soient U_1, $U_2 \in X(\Omega)$ tel que $\gamma_0(U_1) = \gamma_0(U_2) = u$. Alors $U_1 - U_2$ est nul sur $\partial\Omega$. D'après le Théorème 2.4.3, il existe une suite $(\psi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $U_1 - U_2$ dans $X(\Omega)$. On a donc

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla(U_1 - U_2) + \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma)(U_1 - U_2) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \sigma \cdot \nabla\psi_n + \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma)\psi_n \right). \tag{2.3}$$

Or, par définition de $\operatorname{div}(\sigma)$ au sens des distributions, pour tout n entier naturel, on a

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma)\psi_n = -\int_\Omega \sigma \cdot \nabla\psi_n,$$

et donc le membre de gauche de (2.3) est nul, ce qui prouve que T^σ_u ne dépend pas du choix de U.

Montrons que $u \to T^\sigma_u$ est linéaire. Soit donc U, $V \in X(\Omega)$ tel que $\gamma_0(U) = u$ et $\gamma_0(V) = v$. Par linéarité de la trace, on a pour λ, $\mu \in \mathbb{R}$: $\gamma_0(\lambda U + \mu V) = \lambda u + \mu v$. Puisque $T^\sigma_{\lambda u+\mu v}$ ne dépend pas du choix du relèvement, et comme $\lambda U + \mu V$ est un relèvement de $\lambda u + \mu v$:

$$\begin{aligned} T^\sigma_{\lambda u+\mu v} &= \int_\Omega \sigma \cdot \nabla(\lambda U + \mu V) + \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma)(\lambda U + \mu V) \\ &= \lambda T^\sigma_u + \mu T^\sigma_v \end{aligned}$$

d'où la linéarité. On note donc $T^\sigma_u =< T^\sigma, u >$.

Rappelons la norme sur $\gamma_0(X)$:

$$|u|_{\gamma_0(X)} = \inf_{\gamma_0(U)=u} |U|_{X(\Omega)}.$$

Soit $u \in \gamma_0(X)$, et soit $(U_n)_n \in (X(\Omega))^{\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie $\gamma_0(U_n) = u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $|U_n|_{X(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} |u|_{\gamma_0(X)}$. On a donc pour tout n :

$$\begin{aligned} |< T^\sigma, u >| &\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\sigma_i \partial_i U_n| + |\operatorname{div}(\sigma)|_{p^{*\prime}} |U_n|_{p^*} \\ &\le |\sigma^1|_\infty |\nabla_1 U_n|_1 + \sum_{i=N_1+1}^N |\sigma_i|_{p_i'} |\partial_i U_n|_{p_i} + C|\operatorname{div}(\sigma)|_{p^{*\prime}} |U_n|_{X(\Omega)} \\ &\le C'\left(|\sigma|_Y\right)|U_n|_{X(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C' dépend de la constante C d'injection de $X(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$. Par passage à la limite on obtient donc que

$$|< T^\sigma, u >| \le K|u|_{\gamma_0(X)},$$

où $K = C'|\sigma|_Y$.

Ainsi, T^σ définit une forme linéaire continue sur $\gamma_0(X)$. Si de plus $\sigma \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, on a par la formule de Green habituelle :

$$< T^\sigma, u >= \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot nu.$$

□

Remarque 2.5.1. *T^σ est en fait une distribution, car on a vu que $\gamma_0(X) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)}$.*

Appendice : Théorème d'injection critique. sur $\mathbb{R}^N$

Nous proposons dans cette annexe une démonstration du Théorème 2.1.3. Rappelons d'abord le lemme (Gagliardo) dont le lecteur pourra trouver une preuve dans par exemple [19], [30].

Lemme 2.5.2. *Soit $N \geq 2$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on note $x^i = (x_1, x_2, x_{i-1}, x_{i+1}, x_N)$. Soient N fonctions F_i appartenant à $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. On a*

$$\prod_{1 \leq i \leq N} F_i(x^i) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

et l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1 \leq i \leq N} |F_i(x^i)| dx \leq \prod_{1 \leq i \leq N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |F_i(x^i)|^{N-1} \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Preuve du Théorème 2.1.3 : Par la définition de $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, on se ramène à considérer des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $\sigma_i = \frac{1}{N(N-1)}(N - 1 + \sum_1^N \frac{1}{p_i} - \frac{N}{p_i})$. On a alors $\sum_{i=1}^N \sigma_i = 1$, et

$$(p^\star \sigma_i(N-1) - 1)\frac{p_i}{p_i - 1} = p^\star \text{ si } p_i > 1, \ p^\star \sigma_i(N-1) = 1 \text{ si } p_i = 1.$$

On définit pour $x^i = (x_1, x_2, x_{i-1}, x_{i+1}, x_N)$

$$v_i(x^i) = \sup_{y \in]0,1[} |u((x_1, x_2, x_{i-1}, y, x_{i+1}, x_N)|^{p^\star \sigma_i}.$$

D'après le lemme 2.5.2, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_i v_i(x^i) dx \leq \prod_i \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v_i^{N-1}(x^i) \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

On écrit alors

$$|v_i^{N-1}(x^i)| \leq p^\star \sigma_i(N-1) \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{p^\star \sigma_i(N-1)-1} |\partial_i u(x^i, x_i)| dx_i$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v_i^{N-1}(x^i)| dx^i \leq p^\star \sigma_i(N-1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^\star} \right)^{\frac{p_i - 1}{p_i}} |\partial_i u|_{p_i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^\star} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_i v_i(x^i) dx \\
&\leq \prod_i \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v_i^{N-1}(x^i) dx^i \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\leq \left(\prod_i p^\star \sigma_i(N-1) \right)^{\frac{1}{N-1}} |u|_{p^\star}^{\frac{p^\star}{N-1} \sum_i \frac{p_i - 1}{p_i}} \prod_i |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N-1}} \\
&\leq \frac{1}{C} |u|_{p^\star}^{p^\star - \frac{N}{N-1}} \prod_i |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N-1}},
\end{aligned}$$

avec $C = \left(\Pi_i p^\star \sigma_i (N-1)\right)^{\frac{1}{N-1}}$, constante ne dépendant que de $\vec{p}$ et de N. En divisant par $|u|_{p^\star}^{p^\star - \frac{N}{N-1}}$ on obtient

$$C|u|_{p^\star}^{\frac{N}{N-1}} \leq \Pi_i |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N-1}},$$

soit en élevant à la puissance $\frac{N-1}{N}$

$$T_0 |u|_{p^\star} \leq \Pi_i |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N}},$$

avec $T_0 = \left(\Pi_i p^\star \sigma_i (N-1)\right)^{\frac{1}{N}}$.

□

Proposition 2.5.3. *p^* est l'unique réel q tel que $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Remarquons qu'il est équivalent de montrer : Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|u|_q \leq c(\Pi_i |\partial_i u|_{p_i})^{\frac{1}{N}}$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|u|_q \leq c(\sum_i |\partial_i u|_{p_i}).$$

En effet, dans un sens c'est juste l'inégalité arithmético géométrique. Dans l'autre sens , supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|u|_q \leq c(\sum_i |\partial_i u|_{p_i}).$$

On prend alors $u_\lambda(x) = u(\lambda_i x_i)$ avec $\lambda_i = (\Pi_{j=1}^N |\partial_j u|_{p_j})^{\frac{1}{N}} |\partial_i u|_{p_i}^{-1}$. On obtient puisque $\Pi_j \lambda_j = 1$

$$|u_\lambda|_q = (\Pi \lambda_j)^{\frac{-1}{q}} |u|_q \leq c \sum |\partial_i u|_{p_i} \lambda_i (\Pi_{j=1}^N \lambda_j)^{\frac{-1}{p_i}},$$

d'où $|u|_q \leq cN(\Pi_1^N |\partial_j u|_{p_j})^{\frac{1}{N}}$. Il suffit donc de montrer que $q = p^\star$ est le seul exposant tel qu'il existe une constante c telle que pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$

$$|u|_q \leq c(\Pi |\partial_i u|_{p_i})^{\frac{1}{N}}.$$

Soit donc u fixé de norme non nulle, et $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$. On aurait en appliquant l'inégalité à u_λ :

$$\lambda^{\frac{-N}{q}} |u|_q \leq c \lambda^{1 - \sum \frac{1}{p_i}} (\Pi |\partial_i u|_{p_i})^{\frac{1}{N}}$$

et ce n'est possible que si $\frac{N}{q} - (\sum \frac{1}{p_i} - 1) = 0$, soit $q = p^\star$. (Il suffit de faire tendre λ vers 0 si $\frac{N}{q} - (\sum \frac{1}{p_i} - 1) > 0$ et vers $+\infty$ si $\frac{N}{q} - (\sum \frac{1}{p_i} - 1) < 0$).

□

Chapitre 3

L'espace $X^b(\Omega)$.

3.1 Définition et premières propriétés

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ lipschitzien. On suppose toujours que $p^+ \leq p^\star$, parfois que $p^+ < p^\star$.

Définition 3.1.1. On définit l'espace :

$$X^b(\Omega) = \{u \in L^{p^+}(\Omega);\ \partial_i u \in M^1(\Omega), 1 \leq i \leq N_1,\ \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), i \geq N_1 + 1\},$$

que l'on munit de la norme

$$|u|_{X^b} = |u|_{p^+} + \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i},$$

où $\int_\Omega |\nabla_1 u|$ désigne la variation totale de la mesure $\nabla_1 u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_{N_1} u)$. Plus précisément, rappelons que $\int_\Omega |\nabla_1 u| = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{N_1} \partial_i u^2)^{\frac{1}{2}}$.

Remarquons que cette norme est équivalente à

$$|u|_{X_2^b} := |u|_{p^+} + \sum_{i=1}^{N_1} \int_\Omega |\partial_i u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i},$$

avec $\int_\Omega |\partial_i u|$ la variation totale de la mesure $\partial_i u$.

Remarque 3.1.1. *Remarquons que pour $u \in X^b(\Omega)$, on a $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}$ et donc $u \in L^k_{\text{loc}}(\Omega)$ avec $k = \sup\{\frac{N}{N-1}, p^+\}$. Par ailleurs, lorsque Ω est borné, $X^b(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$, et donc on a l'injection de $X^b(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ qui est compacte pour tout $1 \leq p < \sup\{\frac{N}{N-1}, p^+\}$.*

Proposition 3.1.2. *Si $u \in X^b(\Omega)$ et $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\phi u \in X^b(\Omega)$, en particulier $X^b(\Omega)$ est de type local.*

Démonstration. En effet, $\phi u \in L^{p^+}(\Omega)$, et on a pour $1 \leq i \leq N_1$, puisque $\phi \in W^{1,\infty}$ entraine que ϕ est continue bornée,

$$\partial_i(u\phi) = (\partial_i u)\phi + (\partial_i \phi)u \in M^1(\Omega),$$

et pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$:

$$\partial_i(u\phi) = (\partial_i u)\phi + (\partial_i \phi)u \in L^{p_i}(\Omega),$$

ce qui entraine le résultat. $\square$

Proposition 3.1.3. *Muni de la norme $|\cdot|_{X^b}$ l'espace $X^b(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $X^b(\Omega)$. $(u_n)_n$ est alors une suite de Cauchy dans $L^{p^+}(\Omega)$, donc converge vers un élément $u \in L^{p^+}(\Omega)$. De plus, pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$, $(\partial_i u_n)_n$ est de Cauchy dans $L^{p_i}(\Omega)$, donc converge fortement vers un élément $v_i \in L^{p_i}(\Omega)$, et $(\nabla_1 u_n)_n$ est de Cauchy dans $M^1(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, donc pour $1 \leq i \leq N_1$, $(\partial_i u_n)_n$ est de Cauchy dans $M^1(\Omega)$ et converge fortement vers un élément $\mu_i \in M^1(\Omega)$. Or u_n converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\partial_i u_n$ converge vers $\partial_i u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et donc pour $i \leq N_1$, $\mu_i = \partial_i u$, et pour $i > N_1$, $v_i = \partial_i u$.

Enfin, on a

$$|u_n - u|_{X^b(\Omega)} = |u_n - u|_{p^+} + \int_\Omega |\nabla_1 u_n - \nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc u_n converge vers u dans $X^b(\Omega)$ au sens de la norme $|\cdot|_{X^b}$.

$\square$

Introduisons maintenant deux topologies naturelles pour étudier les suites bornées de $X^b(\Omega)$.

Définition 3.1.4. On dit que une suite $(u_n)_n$ de $X^b(\Omega)$ converge faiblement vers $u \in X^b(\Omega)$, et on note $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ dans $X^b(\Omega)$ si :

1. $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $L^{p^+}(\Omega)$,
2. $\partial_i u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_i u$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega)$, pour $i \geq N_1 + 1$,
3. $\partial_i u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_i u$ vaguement dans $M^1(\Omega)$, pour $i \leq N_1$.

   On dit que u_n converge étroitement vers u dans $X^b(\Omega)$ si on a de plus

4. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ fortement dans $L^{p^+}(\Omega)$,
5. $\int_\Omega |\partial_i u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\partial_i u|$ pour $i \leq N_1$,
6. $\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u|$,
7. $\partial_i u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u$ fortement dans $L^{p_i}(\Omega)$ pour $i \geq N_1 + 1$.

Proposition 3.1.5. *Une suite $(u_n)_n$ bornée dans $X^b(\Omega)$ est relativement faiblement compacte dans $X^b(\Omega)$, c'est à dire que l'on peut en extraire une sous suite faiblement convergente dans $X^b(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une telle suite. Elle est alors bornée dans l'espace réflexif $L^{p^+}(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous suite que l'on note toujours u_n qui converge faiblement vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$. Par ailleurs, ceci implique que $\partial_i u_n$ converge vers $\partial_i u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout i. Or pour $i > N_1$, $(\partial_i u_n)_n$ est bornée dans $L^{p_i}(\Omega)$, donc converge finalement vers $\partial_i u$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega)$, et pour $i \leq N_1$, $(\partial_i u_n)_n$ est bornée dans $M^1(\Omega)$, donc converge vaguement pour une sous suite vers $\partial_i u \in M^1(\Omega)$ par la Proposition 1.2.6, d'où le résultat. $\square$

Remarquons que lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ on a $X^b(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$, et donc lorsque Ω est de plus lipschitzien, la trace d'un élément de $X^b(\Omega)$ est bien définie et est dans $L^1(\partial\Omega)$.

Le théorème suivant va nous permettre d'étendre à $X^b(\Omega)$ une partie de nos résultats sur $X(\Omega)$.

Théorème 3.1.6. *Pour tout $u \in X^b(\Omega)$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap X(\Omega)$, tel que*

1. *u_n converge étroitement vers u dans $X^b(\Omega)$,*
2. *$|\nabla_1 u_n|$ converge étroitement vers $|\nabla_1 u|$.*
3. $$\int_\Omega |\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s|,$$
   où μ^{ac} désigne la partie absolument continue de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue, et où μ^s désigne sa partie singulière.
4. *Si de plus Ω est borné, Lipschitzien, $u_n = u$ sur $\partial\Omega$.*

Démonstration. On procède de manière analogue à [19] :

Soit $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ un recouvrement ouvert de Ω, défini par :

$$\Omega_j = \{x \in \Omega;\ |x| \leq jC_1,\ \text{ et } d(x, \partial\Omega) > C_2/(j+1)\},$$

les constantes C_1 et C_2 étant choisies pour que $\Omega_2 \neq \emptyset$. Cette suite d'ouverts bornés est croissante et recouvre Ω. En posant alors $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, on définit une autre suite $\{A_j\}_j$ d'ouverts telle que

$$A_j = \Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega_{j-1}}, \text{ pour tout } j > 1,$$

avec $A_0 = \Omega_2$, et $A_1 = \Omega_3$.

Cette famille constitue encore un recouvrement ouvert de Ω, et on remarque que si $|j - j'| \geq 3$, alors $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$. Soit alors $(\psi_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de Ω par les $\{A_j\}_j$:

$$\psi_j \in C_0^\infty(A_j), \quad \sum_{j=0}^\infty \psi_j = 1, \quad 0 \leq \psi_j \leq 1 \text{ pour tout } j.$$

Soit également $\rho \in \mathcal{D}(B(0,1))$, tel que $\int_{B(0,1)} \rho = 1$. On pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\rho(\frac{x}{\epsilon})$ pour $\epsilon > 0$.

Soit maintenant $\delta > 0$, et $(\eta_j)_j$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 telle que :

$$A_j + B(0, \eta_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1},\ \text{ pour } j \geq 2,$$

et telle que

1. $\left|\rho_{\eta_j} * (\psi_j u) - (\psi_j u)\right|_{p^+} \leq \delta 2^{-1-j}$,
2. $\left|\int_\Omega |\rho_{\eta_j} * (\psi_j \partial_i u)| - \int_\Omega |\psi_j \partial_i u|\right| \leq \delta 2^{-2-j}$ pour tout $1 \leq i \leq N_1$,
3. $\left|\int_\Omega |\rho_{\eta_j} * (\psi_j \nabla_1 u)| - \int_\Omega |\psi_j \nabla_1 u|\right| \leq \delta 2^{-2-j}$,
4. $\int_\Omega \left|\rho_{\eta_j} * ((\partial_i \psi_j)u) - \partial_i(\psi_j)u\right| \leq \delta 2^{-2-j}$, pour tout $1 \leq i \leq N_1$,
5. $\left(\int_\Omega \left|\rho_{\eta_j} * \partial_i(\psi_j u) - \partial_i(\psi_j u)\right|^{p_i}\right)^{1/p_i} \leq \delta 2^{-1-j}$, pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$,

la première inégalité étant justifiée par le fait que $\psi_j u \in L^{p^+}(\Omega)$, la deuxième et la troisième par la preuve du lemme 1.2.7, la quatrième par le fait que $\partial_i(\psi_j)u \in L^1(\Omega)$ pour $i \leq N_1$, et la dernière par le fait que $\partial_i(\psi_j u) = \partial_i\psi_j u + \psi_j\partial_i u \in L^{p_i}(\Omega)$ pour $i > N_1$.

On pose alors

$$u_\delta = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * (\psi_j u).$$

On obtient ainsi une fonction de classe C^∞ sur Ω. En effet, cette série dont le terme général est une fonction de classe C^∞ est finie sur tout compact K de Ω, car il existe j_0 assez grand pour que $A_{j-1} \cap K = \emptyset$ pour $j > j_0$, d'où la nullité des termes d'indices $> j_0$ puisque leurs supports sont inclus dans $A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}$.

En utilisant le fait que $u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u$, on a

$$|u_\delta - u|_{p^+} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\rho_{\eta_j} * (\psi_j u) - (\psi_j u)\right|_{p^+} \leq \sum_{0}^{\infty} \delta 2^{-1-j} = \delta,$$

et en particulier $u_\delta \in L^{p^+}(\Omega)$. Par ailleurs, comme $\sum_0^\infty \partial_i(\psi_j)u = u\partial_i(\sum_0^\infty \psi_j) = 0$, on a

$$\partial_i u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \partial_i u = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_i(\psi_j u),$$

et donc pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$,

$$|\partial_i u_\delta - \partial_i u|_{p_i} = |\sum_{0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * \partial_i(\psi_j u) - \partial_i(\psi_j u)|_{p_i} \leq \sum_{0}^{\infty} \delta 2^{-j-1} = \delta,$$

(en particulier $\partial_i u_\delta \in L^{p_i}(\Omega)$). Enfin, pour $i \leq N_1$,

$$\partial_i u_\delta = \sum_{0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * ((\partial_i \psi_j)u) + \sum_{0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * (\psi_j \partial_i u),$$

donc

$$|\partial_i u_\delta| \leq \left|\sum_{0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * ((\partial_i\psi_j)u) - (\partial_i\psi_j)u\right| + \left|\sum_{0}^{\infty} u\partial_i\psi_j\right| + \left|\sum_{0}^{\infty} \rho_{\eta_j} * (\psi_j\partial_i u)\right|.$$

Comme $\left|\sum_{j=0}^{\infty} u\partial_i\psi_j\right| = 0$, on a finalement :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (|\partial_i u_\delta| - |\partial_i u|)\right| &\leq \sum_{0}^{\infty} \left|\int_\Omega \rho_{\eta_j} * ((\partial_i\psi_j)u) - (\partial_i\psi_j)u\right| \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left|\int_\Omega |\rho_{\eta_j} * (\psi_j\partial_i u)| - \int_\Omega |\psi_j \partial_i u|\right| \\
&\leq 2\sum_{0}^{\infty} \delta 2^{-j-2} = \delta.
\end{aligned}$$

En particulier, $\partial_i u_\delta \in L^1(\Omega)$, et u_δ ainsi construite satisfait l'assertion 1. du Théorème.

La deuxième assertion du théorème se démontre avec les mêmes arguments, en utilisant

$$\left| \int_\Omega |\rho_{\eta_j} * (\psi_j \nabla_1 u)| - \int_\Omega |\psi_j \nabla_1 u| \right| \leq \delta 2^{-2-j}.$$

Pour montrer l'assertion 3. supposons que de plus on a pour $\delta > 0$, pour tout $i \leq N_1$:

1. $\int_\Omega |\rho_{\eta_j} * ((\nabla_1 u)^{ac} \psi_j) - \psi_j (\nabla_1 u)^{ac}| \leq \delta 2^{-j-1}$,
2. $\left| \int_\Omega |\rho_{\eta_j} * ((\nabla_1 u)^s \psi_j)| - \int_\Omega |\psi_j (\nabla_1 u)^s| \right| \leq \delta 2^{-j-1}$,

La première inégalité est justifiée par le fait que $(\nabla_1 u)^{ac} \psi_j \in L^1(\Omega)$, et la deuxième est justifiée par le lemme 1.2.7. On écrit maintenant, en utilisant le fait que $\sum \psi_j = 1$:

$$\begin{aligned}
|\nabla_1 u_\delta - (\nabla_1 u)^{ac}| &= \left| \sum_j \left(\rho_{\eta_j} * ((\nabla_1 \psi_j) u) + \rho_{\eta_j} * (\psi_j (\nabla_1 u)^{ac}) + \rho_{\eta_j} * (\psi_j (\nabla_1 u)^s) - \psi_j (\nabla_1 u)^{ac} \right) \right| \\
&\leq \sum_j \left| \rho_{\eta_j} * (\psi_j (\nabla_1 u)^{ac}) - \psi_j (\nabla_1 u)^{ac} \right| + \sum_j \left| \rho_{\eta_j} * ((\nabla_1 \psi_j) u) - (\nabla_1 \psi_j) u \right| \\
&+ \sum_j \left| \rho_{\eta_j} * (\psi_j (\nabla_1 u)^s) \right|.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|(\nabla_1 u)^s| = \sum \psi_j |(\nabla_1 u)^s|$, et en intégrant, on obtient que

$$\left| \int_\Omega |\nabla_1 u_\delta - (\nabla_1 u)^{ac}| - \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s| \right| \leq 3\delta,$$

d'où le résultat.

Pour montrer la dernière proposition du Théorème, considérons :

$$u_\delta^N = \sum_0^N (\rho_{\eta_j} \star (\psi_j u) - \psi_j u).$$

La suite $(u_\delta^N)_N$ est limite forte de $u_\delta - u$ dans $X^b(\Omega)$, et est de trace nulle pour tout entier N, car à support compact dans Ω. Ainsi, $\gamma_0(u_\delta) = \gamma_0(u)$.

□

Théorème 3.1.7. *On suppose que $p^+ < p^\star$.*

Soit $u \in X^b(\mathbb{R}^N)$. Il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui converge étroitement vers u dans $X^b(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. C'est une conséquence des Théorèmes 2.3.3 et 3.1.6. □

Corollaire 3.1.8. *On suppose que $p^+ \leq p^\star$. On a l'injection $X^b(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\mathbb{R}^N)$:*

$$|u|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)} \leq C |u|_{X^b(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. Si $p^+ = p^\star$ il n'y a rien à montrer. Supposons que $p^+ < p^\star$. Soit $u \in X^b(\mathbb{R}^N)$, et soit par le Théorème 3.1.6 une suite u_n de $X(\mathbb{R}^N)$ qui converge étroitement vers u dans $X^b(\mathbb{R}^N)$. On a par le Théorème 2.3.5 l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n :

$$|u_n|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u_n|_{X(\mathbb{R}^N)}.$$

Or, $|u_n|_{X(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |u|_{X^b(\mathbb{R}^N)}$, et u_n est donc bornée dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, donc u_n converge faiblement dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ pour une sous suite vers un élément qui ne peut être que u. On a alors par semi continuité inférieure pour la topologie faible :

$$|u|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \varliminf_{n\to\infty} |u_n|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \varliminf_{n\to\infty} |u_n|_{X(\mathbb{R}^N)} = C|u|_{X^b(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Terminons cette section par quelques remarques : comme dans le cas de $X(\Omega)$, on pourrait définir l'adhérence faible de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour la topologie faible ou encore étroite, qui coincide avec un espace que l'on peut noter $\underline{W}^{\vec{p},b}(\Omega) = \{u \in L^{p^-}(\Omega), \partial_i u \in M^1(\Omega),\ 1 \leq i \leq N_1,\ \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega),\ N_1 + 1 \leq i \leq N\}$ lorsque $p^+ \leq \frac{Np^-}{N-p^-}$, et on aurait l'analogue du Théorème 2.1.4, que l'on pourrait montrer par exemple par densité.

3.2 Résultats sur les traces.

Supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, lipschitzien. Comme pour $BV(\Omega)$, la trace sur $X^b(\Omega)$ n'est pas continue pour la topologie faible :

Exemple 3.2.1. Pour $N = 2$, $p_1 = 1, p_2 > 1$, sur l'ouvert $\Omega =]0,1[^2$, posons la suite $u_n = \chi_{]0,1-\frac{1}{n}[\times]0,1[}$. On a $\partial_2 u_n = 0$, et $\partial_1 u_n(x,y) = \delta_{1-\frac{1}{n}}(x)\chi_{]0,1[}(y)$, où δ désigne la mesure de Dirac. Alors u_n converge faiblement dans $X^b(\Omega)$ vers 1, et la trace $\gamma_{\{x=1\}} u_n = 0$ ne converge pas faiblement vers 1.

Proposition 3.2.2. $\gamma_0(X(\Omega)) = \gamma_0(X^b(\Omega))$.

Démonstration. Il est clair que l'on a $\gamma_0(X) \hookrightarrow \gamma_0(X^b)$. L'inclusion réciproque est une conséquence directe du Théorème 3.1.6. □

Notons que comme pour le cas de $BV(\Omega)$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.3. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. L'application trace est continue pour la topologie étroite de $X^b(\Omega)$: si u_n converge étroitement vers u dans $X^b(\Omega)$, alors*

$$|\gamma_0(u_n) - \gamma_0(u)|_{L^1(\partial\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence immédiate du même résultat de continuité sur BV puisque Ω étant borné, X^b s'injecte dans BV. Cependant pour le confort du lecteur nous en redonnons la preuve ici. L'application trace étant continue pour la topologie forte sur $BV(\Omega)$ ([19],[33]), et $X^b(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:

$$\int_{\partial\Omega} |u| \le C\left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_\Omega |u|\right). \tag{3.1}$$

Soit u_n une suite convergeant étroitement vers u dans $X^b(\Omega)$:

1. u_n converge fortement vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$,
2. $\partial_i u_n$ converge fortement vers $\partial_i u$ dans $L^{p_i}(\Omega)$, pour $i \ge N_1 + 1$
3. $\int_\Omega |\partial_i u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\partial_i u|$ pour $i \le N_1$.

En particulier, $(\nabla u_n, |\nabla u_n|)$ converge étroitement vers $(\nabla u, |\nabla u|)$ et donc $\int_\Omega |\nabla u_n| \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega |\nabla u|$. Soit $\epsilon > 0$ donné. Soit également Ω_0 un ouvert relativement compact dans Ω, et soit ϕ_0 une fonction continue à support compact dans Ω, égale à 1 sur Ω_0, avec $0 \le \phi_0 \le 1$, et telle que $\int_\Omega (1-\phi_0)|\nabla u| \le \epsilon$. Par la convergence étroite, on en déduit qu'il existe un entier N_0 tel que :

$$\forall n > N_0,\ \int_\Omega (1-\phi_0)|\nabla u_n| \le 2\epsilon.$$

On peut supposer N_0 assez grand pour que :

$$\int_\Omega |u_n - u| \le \frac{\epsilon}{1 + |\nabla\phi_0|_\infty}.$$

Alors, pour $n > N_0$, en utilisant (3.1), et le fait que $1 - \phi_0 = 1$ sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} |u_n - u| \le C\left(\int_\Omega |\nabla((u_n - u)(1-\phi_0))| + \int_\Omega |u_n - u|(1-\phi_0)\right). \tag{3.2}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla((u_n-u)(1-\phi_0))| &\le \int_\Omega |\nabla u_n|(1-\phi_0) + \int_\Omega |\nabla u|(1-\phi_0) + \int_\Omega |u_n - u| \cdot |\nabla\phi_0| \\ &\le 3\epsilon + \frac{\epsilon|\nabla\phi_0|_\infty}{1+|\nabla\phi_0|_\infty}.\end{aligned}$$

Ce résultat couplé à (3.2) entraine que

$$\int_{\partial\Omega} |u_n - u| \le 4\epsilon C,$$

d'où le résultat.

□

Proposition 3.2.4. *On suppose que Ω est un domaine borné lipschitzien. Soit Γ un ouvert de $\partial\Omega$ de mesure $N-1$-dimensionnelle strictement positive. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$ on a*

$$|u|_{\frac{N}{N-1}} \le C\left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i} + \int_\Gamma |u|\right).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Poincaré sur $BV(\Omega)$ et de remarquer que $X^b(\Omega)$ s'injecte dans $BV(\Omega)$ lorsque Ω est borné.

□

Corollaire 3.2.5. *On suppose toujours que Ω est un domaine borné, lipschitzien. Soit Γ une partie de $\partial\Omega$ telle que $|\Gamma| > 0$. On définit l'espace*

$$X^b_\Gamma(\Omega) = X^b(\Omega) \cap \{u = 0 \textit{ sur } \Gamma\}.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b_\Gamma(\Omega)$,

$$|u|_{\frac{N}{N-1}} \le C \left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} \right).$$

Remarque 3.2.1. *Ainsi pour Γ un ouvert de $\partial\Omega$ tel que $|\Gamma| > 0$, en posant*

$$|u|_\Gamma = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} + \int_\Gamma |u|,$$

on obtient sur $X^b(\Omega)$ une norme équivalente à la norme usuelle.

3.3 Le cas du N rectangle.

On suppose dans cette section que Ω est un ouvert N-rectangle borné de $\mathbb{R}^N$ aux côtés parallèles aux axes. Une fois encore, sans perdre de généralité, on suppose que $\Omega =]0,1[^N$.

Rappelons également les notations pour $1 \le i \le N$, et $k \in \{0,1\}$:

$$\partial\Omega^i_k = \left((\Pi_{j=1}^{i-1}]0,1[) \times \{k\} \times (\Pi_{j=i+1}^{N}]0,1[) \right),$$

et

$$\partial\Omega^i = \partial\Omega^i_0 \cup \partial\Omega^i_1.$$

Autrement dit, $\partial\Omega^i$ désigne le bord $(\{x_i = 0\} \cup \{x_i = 1\}) \cap \overline{\Omega}$.

Rappelons également que $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ est tel que $p_i = 1$ pour $1 \le i \le N_1$, et $p_i > 1$ pour $i > N_1$.

On pose également

$$\partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^{N} \partial\Omega^i, \text{ et } \partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1} \partial\Omega^i.$$

Proposition 3.3.1. *On suppose que $p^+ \le p^\star$. $X^b(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$. Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:*

$$|u|_{L^{p^\star}(\Omega)} \le C \left(|u|_{L^{p^+}(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} \right).$$

En outre, l'injection de $X^b(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q < p^\star$ est compacte car Ω est borné.

Démonstration. Soit $u \in X^b(\Omega)$. Par le Théorème 3.1.6, Il existe une suite $(u_n)_n$ de $X(\Omega)$ qui converge vers u étroitement dans $X^b(\Omega)$. Or par le Théorème 2.4.9, on a l'existence d'une constante C telle que pour tout entier n :

$$|u_n|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C|u_n|_{X(\Omega)}.$$

Par convergence étroite, on a $|u_n|_{X(\Omega)} \to |u|_{X^b(\Omega)}$. En particulier, $(u_n)_n$ est bornée dans $L^{p^*}(\Omega)$, donc converge faiblement pour une sous suite vers un élément v dans $L^{p^*}(\Omega)$, et comme elle converge vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$, $v = u$. Par semi continuité inférieure pour la topologie faible, on a :

$$|u|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \varliminf_{n\to\infty} |u_n|_{p^*} \leq C|u|_{X^b(\Omega)},$$

d'où le résultat d'injection.

Un raisonnement analogue à celui du corollaire 2.4.12 nous permet de montrer la compacité de l'injection. Pour une suite $(u_n)_n$ bornée de $X^b(\Omega)$, par la compacité de l'injection de $BV(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite (encore notée u_n) qui converge fortement dans $L^1(\Omega)$. Par l'injection précédente, u_n est également bornée dans $L^{p^*}(\Omega)$, d'où le résultat.

□

Nous aurions pu démontrer le corollaire 3.3.1 comme dans la section précédente, en utilisant l'injection dans $\mathbb{R}^N$, et la proposition de prolongement suivante.

Proposition 3.3.2. *Il existe un opérateur de prolongement :*

$$E : \begin{array}{ccc} X^b(\Omega) & \longrightarrow & X_c^b(\mathbb{R}^N) \\ u & \longmapsto & Eu \end{array} \text{, tel que}$$

1. $|Eu|_{X^b(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{X^b(\Omega)}$,
2. $Eu|_\Omega = u|_\Omega$.

Démonstration. La preuve est la même que pour la Proposition 2.4.5. Remarquons tout de même que le prolongement par réflexion de u par rapport aux droites $\{x_i = 0\}$ et $\{x_i = 1\}$ nous permet d'éviter les sauts de traces, de sorte que par exemple

$$\int_{]-1,2[\times]0,1[^{N-1}} |\partial_i E(u)| = \int_{]0,1[^N} |\partial_i u| + \int_{]-1,0[\times]0,1[^{N-1}} |\partial_i E(u)| + \int_{]1,2[\times]0,1[^{N-1}} |\partial_i E(u)|.$$

□

Remarque 3.3.1. *Dans le Théorème 3.1.6 lorsque Ω est un $N-$rectangle on peut alors imposer que u_n converge vers u fortement dans $L^{p^\star}(\Omega)$.*

En utilisant la théorie de concentration-compacité de P.L Lions, adaptée à notre problème, comme dans le Chapitre 8, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 3.3.3. *Lorsque Ω est un $N-$rectangle, si une suite u_n de $X^b(\Omega)$ converge étroitement dans $X^b(\Omega)$, alors elle converge pour une sous suite fortement dans $L^{p^\star}(\Omega)$.*

La Proposition 3.2.2 couplée aux résultats de trace sur $X(\Omega)$ nous permettent d'obtenir :

Proposition 3.3.4. *Soit $\alpha_i = 1 + p^\star(1 - \frac{1}{p_i})$. Alors $\gamma_o u \in L^{\alpha_i}(\partial_i\Omega)$. Sur $\partial\Omega^v$, la trace est exactement $L^1(\partial\Omega^v)$.*

On note γ_i la trace sur le bord $\partial\Omega^i$. Nous avons vu que la trace n'était en général pas continue pour la topologie faible. Dans le cas du rectangle, on a néanmoins le résultat sur les bords "horizontaux" :

Théorème 3.3.5. *Rappelons la définition de α_i : $\alpha_i = 1 + p^\star(1 - \frac{1}{p_i})$. Si une suite u_n de $X^b(\Omega)$ converge faiblement vers u dans $X^b(\Omega)$, alors pour $i \geq N_1 + 1$, $\gamma_i(u_n)$ converge fortement pour une sous suite dans $L^p(\partial\Omega^i)$ vers $\gamma_i(u)$ pour tout $p < \alpha_i$, et faiblement pour une sous suite dans $L^{\alpha_i}(\partial\Omega^i)$.*

Démonstration. On montre le résultat sur $\partial\Omega^N$, le résultat sur les autres $\partial\Omega^i$ se démontre de la même manière. Par ailleurs, on se contente de montrer le résultat sur $]0,1[^{N-1}\times\{0\}$. Le résultat sur $]0,1[^{N-1}\times\{1\}$ se montre de la même façon. Soit u_n une suite de $X^b(\Omega)$ convergeant faiblement vers u dans $X^b(\Omega)$, c'est à dire :

1. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ faiblement dans $L^{p^+}(\Omega)$,
2. $\partial_i u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_i u$ faiblement dans $L^{p_i}(\Omega)$, pour $i \geq N_1 + 1$
3. $\partial_i u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_i u$ vaguement dans $M^1(\Omega)$ pour $i \leq N_1$.

Montrons la convergence forte de $\gamma_N(u_n)$ dans $L^{p_N}(]0,1[^{N-1}\times\{0\})$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ telle que $\phi(0) = 1$. Posons $v_n(x,y) = u_n(x,y)\phi(y)$, pour $x \in]0,1[^{N-1}$. Alors $v_n \in X^b(\Omega)$ car $X^b(\Omega)$ est de type local, et $v_n(x,1) = 0$. De plus, v_n a la même trace que u_n sur $]0,1[^{N-1}\times\{0\}$, et v_n converge faiblement vers $v = u\phi$ dans $X^b(\Omega)$. On peut donc supposer que $u_n(x,1) = u(x,1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et presque tout $x \in]0,1[^{N-1}$.

On écrit :

$$|u_q - u|^{p_N}(x,0) = \int_0^1 p_N |u_q - u|^{p_N-2}(u_q - u)\partial_N(u_q - u)(x,t)dt$$

de sorte qu'en intégrant

$$\int_{]0,1[^{N-1}} |u_q - u|^{p_N}(x,0)dx \leq p_N |u_q - u|_{p_N}^{p_N-1} |\partial_N(u_q - u)|_{p_N}$$

et lorsque q tend vers l'infini, le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 pour une sous suite car $\partial_N u_n$ converge faiblement dans $L^{p_N}(\Omega)$ donc en particulier est bornée dans $L^{p_N}(\Omega)$, alors que comme $p_N < p^\star$, $u_q - u$ tend vers 0 dans $L^{p_N}(\Omega)$ pour une sous suite. Ainsi, $\gamma_N(u_n)$ converge fortement dans $L^{p_N}(]0,1[^{N-1}\times\{0\})$ pour une sous suite vers $\gamma_N(u)$.

Par ailleurs, on écrit pour presque tout x :

$$|u_n(x,0)|^{\alpha_N} = \int_0^1 \alpha_N |u_n(x,t)|^{\alpha_N-2} u_n |\partial_N u_n|(x,t)dt \leq \Big(|u_n(x,t)|^{p^\star}dt\Big)^{\frac{(\alpha_N-1)}{p^\star}} |\partial_N u_n|_{p_N}$$

En particulier u_n est bornée dans $L^{\alpha_N}(\{x_N = 0\})$.

Le lemme 2.4.11 entraine que $\gamma_N(u_n)$ converge pour une sous suite vers $\gamma_N(u)$ fortement dans $L^p(]0,1[^{N-1}\times\{0\})$ pour tout $p < \alpha_N$.

□

3.4 Formule de Green généralisée.

Soit Ω un ouvert N-rectangle borné de $\mathbb{R}^N$ aux côtés parallèles aux axes. Prenons à nouveau $\Omega =]0,1[^N$. Rappelons la définition :

$$Y = \{\sigma, \sigma_i \in L^{p_i'}(\Omega), 1 \leq i \leq N, \mathrm{div}(\sigma) \in \mathrm{L}^{(\mathrm{p}^\star)'}(\Omega)\}.$$

La formule suivante est un prolongement de la fomule d'Anzelotti [3], [54], [51] (voir aussi la Proposition 1.2.24).

Lemme 3.4.1. *Soit $\sigma \in Y$. On pose $\sigma^1 = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{N_1}) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$. On définit les distributions pour $u \in X^b(\Omega)$:*

$$< \sigma \cdot \nabla u, \phi >= -\int_\Omega u\mathrm{div}(\sigma)\phi - \int_\Omega u\sigma \cdot \nabla\phi,$$

et

$$< \sigma^1 \cdot \nabla_1 u, \phi >=< \sigma \cdot \nabla u, \phi > - \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_\Omega \sigma_i \partial_i u\phi.$$

Alors

1. *$\sigma \cdot \nabla u$ et $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ se prolongent en des mesures bornées sur Ω.*
2. *Pour tout $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, on a :*

$$< \sigma \cdot \nabla u, \phi >= -\int_\Omega u\mathrm{div}(\sigma)\phi - \int_\Omega u\sigma \cdot \nabla\phi + T^\sigma(u\phi)$$

où T^σ désigne la forme linéaire continue sur $\gamma_0(X(\Omega)) = \gamma_0(X^b(\Omega))$ définie par le Théorème 2.5.1.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\sigma \cdot \nabla u$ est bien définie compte tenu de l'injection de $X^b(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$.

Soit maintenant une suite $u_n \in X(\Omega)$ convergeant faiblement vers u dans $X^b(\Omega)$. Soit également $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

u_n converge vers u faiblement dans $L^{p^\star}(\Omega)$, et $\mathrm{div}(\sigma) \in L^{p^{\star\prime}}(\Omega)$, donc

$$\int_\Omega u_n \mathrm{div}(\sigma)\phi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\mathrm{div}(\sigma)\phi. \tag{3.3}$$

De plus, on a

$$\int_\Omega (u_n - u)\sigma \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \left((u_n - u) \sum_i \sigma_i \partial_i \phi \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4}$$

En combinant (3.3) et (3.4), on obtient que $\sigma \cdot \nabla u_n$ converge vers $\sigma \cdot \nabla u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'autre part par la formule de Green du Théorème 2.5.1,

$$< \sigma \cdot \nabla u_n, \phi >= \int_\Omega \sigma \cdot \nabla u_n \phi.$$

On a par ailleurs

$$\int_\Omega |\sigma \cdot \nabla u_n| \leq \sum_{i=1}^{N} |\sigma_i|_{p_i'} |\partial_i u_n|_{p_i} \leq C$$

par la convergence faible de u_n dans $X^b(\Omega)$. Ainsi, la suite $(\sigma\cdot\nabla u_n)_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Il existe donc une sous suite de u_n que l'on note toujours u_n, et une mesure $\mu \in M^1(\Omega)$ telle que $\sigma \cdot \nabla u_n$ converge vaguement vers μ. Par ce qui précède, $\sigma \cdot \nabla u = \mu \in M^1(\Omega)$.

Il s'ensuit que $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ se prolonge également en une mesure bornée sur Ω.

En outre si on prend la suite u_n qui converge étroitement vers u on obtient

$$|\langle\sigma^1 \cdot \nabla_1 u, \phi\rangle| = |\lim \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n \phi| \leq \lim |\sigma^1|_\infty |\nabla_1 u_n|_1 |\phi|_\infty = |\sigma^1|_\infty \int |\nabla_1 u||\phi|_\infty$$

ce qui montre que $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ est une mesure absolument continue par rapport à $|\nabla_1 u|$.

Notons que la preuve précédente montre aussi que si u_n converge faiblement dans X^b vers u, $\sigma \cdot \nabla u_n$ converge vaguement vers $\sigma \cdot \nabla u$.

Pour montrer la formule de Green, soit u_n dans $X(\Omega)$ qui converge étroitement vers u avec $u_n = u$ sur $\partial\Omega$. On va montrer qu'alors $\sigma \cdot \nabla u_n$ converge étroitement vers $\sigma \cdot \nabla u$. Pour ce faire en utilisant la Proposition 1.2.4 on montre que pour $\epsilon > 0$ il existe K compact tel que pour tout n $\int_{\Omega\setminus K} |\sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n| \leq \epsilon$ ce qui est immédiat par le fait que comme $|\nabla_1 u_n|$ converge étroitement vers $|\nabla_1 u|$ on a pour ϵ l'existence de K compact tel que $\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u_n| \leq \epsilon$, en utilisant $|\sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n| \leq |\sigma^1|_\infty |\nabla_1 u_n|$.

Puisque $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n$ converge étroitement vers $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ et que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et pour tout $i \geq N_1 + 1$, $\int \sigma_i \partial_i u_n \varphi \to \int \sigma_i \partial_i u \varphi$, on obtient la convergence étroite de la suite $\sigma \cdot \nabla u_n$ vers $\sigma \cdot \nabla u$.

Par la formule de Green du Théorème 2.5.1 pour u_n :

$\int \sigma \cdot \nabla u_n \varphi + \int \sigma \cdot \nabla \varphi u_n + \int \mathrm{div}(\sigma) u_n \varphi =< T^\sigma, \gamma_0(u\phi) >$. On obtient par passage à la limite

$$< \sigma \cdot \nabla u, \varphi >= - \int_\Omega u \mathrm{div}(\sigma)\varphi - \int_\Omega u\sigma \cdot \nabla\varphi + < T^\sigma, \gamma_0(u\phi) > .$$

□

Proposition 3.4.2. *On pose pour $u \in X^b(\Omega)$, et $\sigma \in Y$, $\sigma^1 = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{N_1}) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$:*

$$\sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^s := \sigma^1 \cdot \nabla_1 u - \sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^{ac}$$

où $(\mu)^s$ et $(\mu)^{ac}$ désignent les partie singulière et absolument continue, par rapport à la mesure de Lebesgue, d'une mesure μ.

Alors la mesure $|\sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^s|$ est absolument continue par rapport à la mesure $|(\nabla_1 u)^s|$.

Démonstration. Soit $u \in X^b(\Omega)$, et soit par le Théorème 3.1.6, $u_n \in X(\Omega)$ qui converge étroitement vers u telle que

$$|(\nabla_1 u_n) - (\nabla_1 u)^{ac}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |(\nabla_1 u)^s|. \tag{3.5}$$

Par la Proposition précédente, on sait que

$$< \sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n, \phi > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < \sigma^1 \cdot \nabla_1 u, \phi > . \tag{3.6}$$

Par (3.6), et par construction, la suite $\sigma^1 \cdot (\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac})$ converge vaguement vers $\sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^s$. Par semi continuité inférieure pour la topologie vague, et par (3.5), on a pour tout $\phi \in C_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}| < \sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^s, \phi > | &\leq \varliminf_{n \to \infty} \left| \int_\Omega \sigma^1 \cdot (\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac}) \, \phi \right| \\ &\leq |\sigma^1|_\infty \varliminf_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac}| \, |\phi| \\ &= |\sigma^1|_\infty \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s||\phi|.\end{aligned}$$

Ainsi, la mesure $|\sigma^1 \cdot (\nabla_1 u)^s|$ est absolument continue par rapport à la mesure $|(\nabla_1 u)^s|$.
$\square$

Chapitre 4

Résultats d'existence

Considérons à nouveau Ω un ouvert N-rectangle borné de $\mathbb{R}^N$ aux côtés parallèles aux axes. Sans perdre de généralité supposons que $\Omega =]0,1[^N$. Rappelons également que $p^+ \leq p^*$, et que puisque Ω est un $N-$rectangle $X(\Omega)$ et $X^b(\Omega)$ s'injectent dans $L^{p^*}(\Omega)$.

Rappelons les notations :

$$\text{pour } 0 \leq i \leq N, \text{ et } j \in \{0,1\}, \ \partial\Omega_j^i :=]0,1[^{i-1} \times \{j\} \times]0,1[^{N-i}, \ \partial\Omega^i := \partial\Omega_0^i \cup \partial\Omega_1^i$$

ainsi que les bords "horizontaux" (respectivement "verticaux")

$$\partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^{N} \partial\Omega^i$$

et

$$\partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1} \partial\Omega^i.$$

Soit $K \subset \{1, \cdots, N\}$ tel que $K \neq \emptyset$. On définit

$$\Gamma = \cup_{j \in K} \partial\Omega^j, \tag{4.1}$$

ainsi que

$$X_\Gamma(\Omega) = X(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

4.1 Définition du problème

Pour $u \in X(\Omega)$, on définit la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega f u,$$

où $f \in L^{p^{\star\prime}}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit le problème :

$$(\mathcal{P}) : \ m = \inf_{u \in X_\Gamma(\Omega)} \{J(u)\}. \tag{4.2}$$

Remarquons que Γ est de mesure $N-1$ dimensionnelle strictement positive. L'injection de $X(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ nous permet de démontrer le résultat suivant

Lemme 4.1.1. *Il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que pour tout $u \in X_\Gamma(\Omega)$*

$$|u|_{p^\star} \leq C(|\nabla_1 u|_1 + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i}).$$

Proposition 4.1.2. *Soit C la constante du lemme 4.1.1. Alors pour $|\lambda| < \frac{1}{C|f|_{p^{\star\prime}}}$ la fonctionnelle J est coercive sur $X_\Gamma(\Omega)$.*

Démonstration. On écrit par l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, et le lemme 4.1.1, en définissant $\epsilon = |\lambda| C |f|_{p^{*\prime}}$

$$\begin{aligned}
|\lambda \int_\Omega fu| &\leq |\lambda||f|_{p^{\star\prime}}|u|_{p^\star} \\
&\leq |\lambda||f|_{p^{\star\prime}} C(|\nabla_1 u|_1) + |\lambda||f|_{p^{\star\prime}} C(\sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i}) \\
&\leq \epsilon |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} (\frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} + \frac{(|\lambda||f|_{p^{\star\prime}} C)^{p_i'} 2^{p_i'-1}}{p_i'}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
J(u) &= |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu \\
&\geq (1-\epsilon)|\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(|\lambda||f|_{p^{\star\prime}} C)^{p_i'} 2^{p_i'-1}}{p_i'},
\end{aligned}$$

et la fonctionnelle est coercive lorsque $1 - \epsilon > 0$, soit $|\lambda| < \frac{1}{C|f|_{p^{\star\prime}}}$. □

En vue d'obtenir une solution au problème (4.2), démontrons le résultat suivant :

Proposition 4.1.3. *On définit l'espace*

$$X_\Gamma^b(\Omega) = X^b(\Omega) \cap \{u = 0 \ sur \ \Gamma\}.$$

On a alors :

$$m = \inf_{u \in X_\Gamma^b(\Omega)} \{J(u)\}.$$

Démonstration. On a $X_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow X_\Gamma^b(\Omega)$, donc il est clair que

$$\inf_{u \in X_\Gamma^b(\Omega)} \{J(u)\} \leq \inf_{u \in X_\Gamma(\Omega)} \{J(u)\}.$$

Pour l'inégalité inverse, soit $u \in X_\Gamma^b(\Omega)$, et soit par le Théorème 3.1.6 une suite $\{u_n\}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap X(\Omega)$ qui converge étroitement dans $X^b(\Omega)$ vers u et telle que $u_n = u$ sur $\partial\Omega$. En particulier, $u_n \in X_\Gamma(\Omega)$ pour tout n, et donc

$$\inf_{v \in X_\Gamma(\Omega)} \{J(v)\} \leq J(u_n). \tag{4.3}$$

On a par convergence étroite

$$\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u|,$$

et

$$\sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}.$$

De plus, on a par la convergence faible de u_n vers u dans $L^{p^\star}(\Omega)$, comme $f \in L^{p^{\star\prime}}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f u.$$

Ainsi, on a $J(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} J(u)$, et donc par passage à la limite dans (4.3) :

$$\inf_{v\in X_\Gamma(\Omega)}\{J(v)\} \leq J(u).$$

Comme ceci est valable pour tout $u \in X^b_\Gamma(\Omega)$, on obtient bien

$$\inf_{v\in X_\Gamma(\Omega)}\{J(v)\} \leq \inf_{v\in X^b_\Gamma(\Omega)}\{J(v)\}.$$

□

4.2 Le cas $\Gamma^v = \emptyset$

Rappelons la définition des bords "horizontaux" (respectivement "verticaux") :

$$\partial\Omega^h = \cup_{i=N_1+1}^N \partial\Omega^i$$

et

$$\partial\Omega^v = \cup_{i=1}^{N_1} \partial\Omega^i,$$

où $\partial\Omega^i := \big(]0,1[^{i-1}\times\{0\}\times]0,1[^{N-i}\big) \cup \big(]0,1[^{i-1}\times\{1\}\times]0,1[^{N-i}\big)$.

Rappelons également que $\Gamma \subset \partial\Omega$ est défini par (4.1). On note $\Gamma^h = \Gamma\cap\partial\Omega^h$, et $\Gamma^v = \Gamma\cap\partial\Omega^v$.

Théorème 4.2.1. *Soit C la constante du lemme 4.1.1. Si $\Gamma \subset \Gamma^h$, pour λ tel que $|\lambda| < \frac{1}{C|f|_{p^{\star\prime}}}$, il existe une solution au problème sur $X^b(\Omega)$. C'est à dire qu'il existe $u \in X^b_\Gamma(\Omega)$ qui réalise*

$$J(u) = \inf_{v\in X^b_\Gamma(\Omega)}\{J(v)\}.$$

Démonstration. Par la coercivité de J on a $m > -\infty$. Soit u_n une suite minimisante, c'est à dire telle que pour tout entier n, $u_n \in X^b_\Gamma(\Omega)$, et $J(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} m$. La coercivité de J entraine que $(u_n)_n$ est bornée dans $X^b(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous suite que l'on note toujours u_n qui converge faiblement vers u dans $X^b(\Omega)$. Par la continuité faible de la trace sur les bords "horizontaux" (Théorème 3.3.5), $\gamma_0(u_n)$ converge faiblement dans

$L^{p_i}(\partial\Omega^h)$ vers $\gamma_0(u)$, et donc $u = 0$ sur $\Gamma \subset \Gamma^h$. On a de plus par semi continuité inférieure de la variation totale pour la topologie vague des mesures

$$\int_\Omega |\nabla_1 u| \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla_1 u_n|$$

et par semi continuité inférieure pour la topologie faible dans L^{p_i}, pour $i \geq N_1 + 1$

$$\frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}$$

De plus, comme $f \in L^{p^{\star\prime}}(\Omega)$, par convergence faible de u_n vers u dans $L^{p^\star}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f u.$$

Finalement :

$$m = \inf_{v\in X^b_\Gamma(\Omega)} \{J(v)\} \leq J(u) \leq \varliminf_{n\to\infty} J(u_n) = m,$$

d'où $J(u) = m$. $\square$

Remarque 4.2.1. *Nous allons voir que puisque Γ^h contient l'un des $\partial\Omega^i_j$, pour $i \geq N_1+1$ et $j \in \{0, 1\}$, en rajoutant la condition $f \in L^{p_i'}(\Omega)$, le résultat du Théorème précédent est également valable sans contrainte sur λ.*

Proposition 4.2.2. *On suppose toujours que $\Gamma^v = \emptyset$. Supposons que Γ^h contient $\partial\Omega^i_j$, pour un $i \geq N_1 + 1$ et un $j \in \{0, 1\}$, et que $f \in L^{p_i'}(\Omega)$. Alors quel que soit λ il existe une solution au problème sur $X^b(\Omega)$.*

Démonstration. Notons que la contrainte dans le résultat d'existence précédent sur le réel λ n'intervient que pour démontrer la coercivité de J. Il suffit ainsi de démontrer la coercivité de J sur $X_\Gamma(\Omega)$ sans contrainte sur λ. On suppose $i = N$, $j = 0$ pour simplifier. Alors par définition de Γ^h, $u(x', 0) = 0$ pour tout $x' \in]0, 1[^{N-1}$. On écrit pour presque tout $(x', y) \in]0, 1[^N$:

$$|u(x', y)| = \left|\int_0^y \partial_N u(x', t)dt\right| \leq y^{\frac{1}{p_N'}} \left(\int_0^y |\partial_N u(x', t)|^{p_N} dt\right)^{\frac{1}{p_N}},$$

et donc

$$|u|_{p_N} \leq |\partial_N u|_{p_N}.$$

En écrivant par les inégalités de Hölder et de Young :

$$\begin{aligned}\left|\lambda \int_\Omega f u\right| &\leq |\lambda||f|_{p_N'}|u|_{p_N} \\ &\leq C + \frac{1}{2p_N}|\partial_N u|^{p_N}_{p_N},\end{aligned}$$

où C ne dépend que de p_N, $|f|_{p_N'}$ et λ, on obtient finalement que J est coercive.

$\square$

4.3 Le cas de $|\Gamma^v| > 0$

Considérons maintenant le cas où $\Gamma = \Gamma^v \cup \Gamma^h$ avec $|\Gamma^v| > 0$. La difficulté ici vient en partie du fait que la trace n'est pas continue pour la topologie faible sur les bords $\partial\Omega^i$ lorsque $i \leq N_1$, le Théorème 3.3.5 ne s'applique pas. On introduit alors le problème relaxé :

Définition 4.3.1. On définit pour $u \in X^b(\Omega)$:

$$J_r(u) = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| \; + \sum_{i \geq N_1+1} \frac{1}{p_i} |\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu = J(u) + \int_{\Gamma^v} |u|,$$

ainsi que le problème

$$(\mathcal{P}_r) : \; m_r = \inf_{u \in X^b(\Omega), \; u=0 \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u).$$

Montrons tout d'abord un lemme qui nous servira par la suite.

Lemme 4.3.2. *Soit $k \geq 1$, soit ϕ une fonction sur $\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}$, soit ν une mesure positive sur $\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}$, et $a \in \mathbb{R}$. Pour $t > 1$, on pose pour $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}$, etpour ϕ une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$*

$$\phi_t(x) = \phi(a + t(x_1 - a), \cdots, a + t(x_k - a), x_{k+1}, \cdots, x_N).$$

On définit la mesure ν_t par :

$$< \nu_t, \phi > = \frac{1}{t^k} < \nu, \phi_{\frac{1}{t}} > .$$

Alors ν_t converge vaguement vers ν sur $\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}$ lorsque t tend vers 1, et

$$\int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} \nu_t \underset{t \to 1}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} \nu.$$

Démonstration. On peut supposer que la mesure est bornée car sinon chacune des intégrales vaut $+\infty$. On commence par le cas où la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k})$, on pose

$$f_t(x) = f(a + t(x_1 - a), \cdots, a + t(x_k - a), x_{k+1}, \cdots, x_N).$$

Alors un changement de variable permet de montrer :

$$\int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} |f_t|(x,y)dx = \frac{1}{t^k} \int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} |f|(x,y)dx.$$

Soit maintenant $\mu \in M^1(\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k})$, $\mu \geq 0$, et soit par le lemme 1.2.7, $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k})$, $f_n \geq 0$ une suite qui converge étroitement vers μ sur $\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}$. Pour tout entier n, $f_n \in L^1(\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k})$, et donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} (f_n)_t(x)dx = \frac{1}{t^k} \int_{\mathbb{R}^k \times]0,1[^{N-k}} f_n(x)dx.$$

Il est clair que $(f_n)_t$ converge étroitement vers μ_t sur $\mathbb{R}^k\times]0,1[^{N-k}$. Par passage à la limite on obtient bien

$$\int_{\mathbb{R}^k\times]0,1[^{N-k}} \mu_t(x)dx = \frac{1}{t^k}\int_{\mathbb{R}^k\times]0,1[^{N-k}} \mu(x)dx,$$

d'où le résultat en faisant tendre t vers 1. $\square$

Théorème 4.3.3. *Si $u \in X^b(\Omega)$, tel que $u = 0$ sur Γ^h, il existe une suite u_n de $X^b(\Omega)$ telle que $u_n = 0$ sur Γ telle que*

1. $|u_n - u|_{p^\star} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
2. $|\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *pour tout* $N_1 + 1 \leq i \leq N$,
3. $\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|$
4. $\int_\Omega |\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s| + \int_{\Gamma^v} |u|$.

Démonstration. Soit $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur Γ^h. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\Gamma^v = \cup_{i=1}^k \partial\Omega^i$ avec $k \leq N_1$. Soit

$$\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^k\times]0,1[^{N-k}.$$

On prolonge u par 0 à $\widetilde{\Omega}$. On obtient un élément $\tilde{u} \in X^b(\widetilde{\Omega})$, avec

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}| = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|. \tag{4.4}$$

En effet, la définition de dérivation au sens des distributions ainsi que la formule de Green classique entraine, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^{N_1})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Omega}} \nabla_1 \widetilde{u} \cdot \varphi &= -\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{u}\mathrm{div}\varphi \\
&= -\int_\Omega u\mathrm{div}\varphi \\
&= \int_\Omega \nabla_1 u \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} u\varphi
\end{aligned}$$

et donc comme φ est nul sur tous les $\partial\Omega^i$ pour $i > k$, on obtient

$$\nabla_1 \widetilde{u} = \nabla_1 u \chi_\Omega + u\delta_{\Gamma^v}\vec{n},$$

ce qui prouve (4.4).

On considère maintenant pour $\mu > 1$, en notant $(x, y) \in \mathbb{R}^k\times]0,1[^{N-k}$:

$$v_\mu(x, y) = \tilde{u}(\frac{1}{2} + \mu(x - \frac{1}{2}), y),$$

on remarque que $v_\mu \in X^b(\widetilde{\Omega})$ et que v_μ est à support dans

$$]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu}[^k\times]0,1[^{N-k}$$

et que cet ensemble est inclus dans $]0,1[^N$ puisque $\mu > 1$.

Par ailleurs, puisque u est nul sur Γ^h, v_μ l'est également. En utilisant les mêmes arguments que dans le Lemme 2.4.4, on peut montrer que

$$|v_\mu - u|_{p^*}^{p^*} \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |v_\mu - \tilde{u}|^{p^*} \underset{\mu \to 1}{\longrightarrow} 0,$$

et que pour tout $i > N_1$

$$|\partial_i v_\mu - \partial_i u|_{p_i}^{p_i} \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |\partial_i v_\mu - \partial_i \tilde{u}|^{p_i} \underset{\mu \to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Remarquons que

$$\nabla_1 v_\mu(x,y) = \mu \nabla_1 \tilde{u}(\frac{1}{2} + \mu(x - \frac{1}{2}), y)$$

et donc

$$\begin{aligned}\left| \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 v_\mu|(x,y) - \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}|(x,y) \right| &\leq \left| \mu \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}|(\frac{1}{2} + \mu(x - \frac{1}{2}), y) - \mu \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}|(x,y) \right| \\ &\quad + (\mu - 1) \left| \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}|(x,y) \right| \\ &\underset{\mu \to 1}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{4.5}$$

par le lemme 4.3.2 appliqué à $|\nabla_1 \tilde{u}|$ qui est une mesure positive sur $\widetilde{\Omega}$, et donc d'après (4.4)

$$\int_\Omega |\nabla_1 v_\mu| = \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 v_\mu| \underset{\mu \to 1}{\to} \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla_1 \tilde{u}| = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|.$$

Enfin, on a

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |(\nabla_1 v_\mu) - (\nabla_1 u)^{ac}| = \int_{\widetilde{\Omega}} |(\nabla_1 v_\mu)^{ac} - (\nabla_1 u)^{ac}| + \int_{\widetilde{\Omega}} |(\nabla_1 v_\mu)^s|,$$

et les mêmes arguments que le lemme 2.4.4 permettent de montrer que

$$\int_\Omega |(\nabla_1 v_\mu)^{ac} - (\nabla_1 u)^{ac}| \underset{\mu \to 1}{\longrightarrow} 0$$

puisque $(\nabla_1 u)^{ac} \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$. Enfin, en procédant comme en (4.5), on peut montrer que

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |(\nabla_1 v_\mu)^s| \underset{\mu \to 1}{\longrightarrow} \int_{\widetilde{\Omega}} |(\nabla_1 \tilde{u})^s| = \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s| + \int_{\Gamma^v} |u|,$$

ce qui conclut.

$\square$

Corollaire 4.3.4. *Si $u \in X^b(\Omega)$, tel que $u = 0$ sur Γ^h, il existe une suite u_n de $X(\Omega)$ telle que $u_n = 0$ sur Γ telle que*

1. $|u_n - u|_{p^*} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$,
2. *Pour* $i \geq N_1 + 1$, $|\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$,

3. $\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|$.

Démonstration. Il suffit de combiner le Théorème 4.3.3 et le Théorème 3.1.6. □

Proposition 4.3.5.

$$m_r = m.$$

Démonstration. On a $X^b_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow X^b(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \Gamma^h\}$, donc clairement

$$m_r = \inf_{u\in X^b(\Omega),\ u=0 \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u) \leq \inf_{u\in X^b_\Gamma(\Omega)} J_r(u) = \inf_{u\in X^b_\Gamma(\Omega)} J(u) = m.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, soit $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur Γ^h. Soit par le Théorème 4.3.3 une suite $u_n \in X^b_\Gamma(\Omega)$ qui vérifie donc : $|u_n - u|_{p^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $|\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour $i > N_1$, et $\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|$.

Il est clair qu'alors $J(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} J_r(u)$. Par ailleurs, pour tout entier n, on a

$$m \leq J(u_n),$$

et donc par passage à la limite $m \leq J_r(u)$. Ceci étant valable pour tout $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur Γ^h, on obtient bien que $m \leq m_r$.

□

Lemme 4.3.6. *Il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:*

$$|u|_{p^\star} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u| \right).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'injection de $X^b(\Omega)$ dans $L^{p^\star}(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré sur $X^b(\Omega)$.

□

Proposition 4.3.7. *La fonctionnelle J_r est coercive sur $X^b(\Omega)$ pour $|\lambda| < \frac{1}{C|f|_{p^{\star\prime}}}$, où $C > 0$ est défini dans le lemme précédent.*

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}
|\lambda \int_\Omega fu| &\leq |\lambda||f|_{p^{*\prime}}|u|_{p^*} \\
&\leq |\lambda||f|_{p^{*\prime}} C \left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u| \right) \\
&\leq |\lambda||f|_{p^{*\prime}} C \int_\Omega |\nabla_1 u| + |\lambda||f|_{p^{*\prime}} C \int_{\Gamma^v} |u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i} |\partial_i u|_{p_i}^{p_i} + \frac{(2^{\frac{1}{p_i}} |\lambda||f|_{p^{*\prime}} C)^{p_i'}}{p_i'}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\epsilon = |\lambda||f|_{p^{*\prime}} C$:

$$
\begin{aligned}
J_r(u) &= \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| \ + \sum_{i\geq N_1+1} |\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu \\
&\geq (1-\epsilon)\int_\Omega |\nabla_1 u| + (1-\epsilon)\int_{\Gamma^v} |u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{\star\prime}}C)^{p_i'}}{p_i'}
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour $\epsilon < 1$ la fonctionnelle J est coercive sur $X^b(\Omega)$ ce qui conclut. □

Rappelons les problèmes :

$$
(\mathcal{P}): \ m = \inf_{u\in X_\Gamma(\Omega)} J(u), \tag{4.6}
$$

$$
(\mathcal{P}_r): \ m_r = \inf_{u\in X^b(\Omega),\ u=0 \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u),
$$

Rappelons que l'on a vu dans les Propositions 4.1.3 et 4.3.5 que

$$
m = \inf_{u\in X_\Gamma^b(\Omega)} J(u) = m_r.
$$

Proposition 4.3.8. *Pour* $|\lambda| < \frac{1}{C|f|_{p^{\star\prime}}}$ *le problème relaxé* $(\mathcal{P}_r)$ *admet une solution.*

Démonstration. On a $m = m_r$. Soit donc $u_n \in X_\Gamma(\Omega)$ une suite minimisante du problème $(\mathcal{P})$.

Soit Ω' une réunion de rectangles aux côtés parallèles aux axes, telle que $\Omega \cup \Gamma^v \subset \Omega'$ et $\Omega' \cap \partial\Omega = \overline{\Gamma^v}$. Par exemple, si $\Gamma^v = \cup_{i=1}^k \partial\Omega^i$ avec $k \leq N_1$, on peut prendre $\Omega' =]-1,2[^k \cup]0,1[^{N-k}$.

On prolonge u_n par 0 sur l'ouvert $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$.

La suite prolongée $\{\tilde{u_n}\}$ est clairement bornée dans $X(\Omega')$. On en extrait une sous suite que l'on note toujours $\{\tilde{u_n}\}$ qui converge faiblement dans $X^b(\Omega')$ vers $v \in X^b(\Omega')$. Il est clair que v est nul sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$. On a par ailleurs en notant u la restriction de v à Ω

$$
|\partial_i v|_{L^{p_i}(\Omega')} = |\partial_i u|_{L^{p_i}(\Omega)}, \text{ pour } i \geq N_1+1,
$$

$$
\int_{\Omega'} |\nabla_1 v| = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|.
$$

Par la continuité de la trace sur les bords horizontaux, $u = 0$ sur Γ^h. De plus, par semi continuité inférieure pour les topologies faible et vague sur Ω' :

$$
\begin{aligned}
m_r \leq J_r(u) &= \int_{\Omega'} |\nabla_1 v| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_{\Omega'} |\partial_i v|^{p_i} - \lambda \int_{\Omega'} fv \\
&\leq \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega'} |\nabla_1 \tilde{u_n}| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_{\Omega'} |\partial_i \tilde{u_n}|^{p_i} - \lambda \int_{\Omega'} f\tilde{u_n} \right) \\
&= m_r,
\end{aligned}
$$

et donc u est solution du problème relaxé $(\mathcal{P}_r)$.

□

Chapitre 5

EDP vérifiée par un minimiseur.

Nous allons proposer deux méthodes pour déterminer une EDP vérifiée par un minimiseur du problème (4.6). La première est l'utilisation d'un problème approché sur un espace plus régulier. La seconde utilise le problème dual, méthode d'analyse convexe.

5.1 Problème approché

Nous cherchons dans cette section à approcher le problème (4.6) par un problème sur un espace plus régulier. En effet, La fonctionnelle J n'est pas différentiable sur $X^b(\Omega)$. Le travail que l'on fera plus tard revient dans un sens à calculer le sous differentiel de la fonctionnelle J sur $X(\Omega)$ et d'écrire qu'en un minimum il est nul. On pourra consulter [15], [16], ou [17] pour des méthodes similaires sur BV.

Soit Ω un ouvert rectangle borné de $\mathbb{R}^N$ aux côtés parallèles aux axes. Une fois de plus, sans perte de généralité, supposons que $\Omega =]0,1[^N$.

5.1.1 Définition du problème

Définition 5.1.1. Pour $\epsilon > 0$, on définit l'espace

$$X^\epsilon(\Omega) = \{u \in L^{p^+}(\Omega), \partial_i u \in L^{1+\epsilon}(\Omega),\ i \leq N_1, \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), i \geq N_1 + 1\}.$$

On suppose ϵ suffisamment petit pour que

$$\frac{N_1}{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1 \tag{5.1}$$

et

$$1 + \epsilon < p_i,\ \text{pour tout } N_1 + 1 \leq i \leq N. \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.1. *L'espace X^ϵ est un cas particulier des espaces de Sobolev anisotropes, et la théorie générale relative à ces espaces nous permet de montrer que lorsque Ω est un ouvert borné rectangle aux côtés parallèles aux axes, et que ϵ satisfait* (5.1)*, $X^\epsilon(\Omega)$ s'injecte dans $L^{p^*_\epsilon}(\Omega)$ avec*

$$p^*_\epsilon = \frac{N}{\frac{N_1}{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1}$$

(voir par exemple [48], [37], [38], [34]). Remarquons que $p^* < p^*_\epsilon$, et de par la dépendance en ϵ, nous utiliserons principalement le fait que $X^\epsilon(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$, et donc on a l'injection $X^\epsilon(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$, et l'injection est compacte dans $L^p(\Omega)$ pour $p < p^\star$.

De plus, puisque ϵ satisfait (5.2), *on a également $X^\epsilon(\Omega) \subset W^{1,1+\epsilon}(\Omega)$, et il en découle donc le résultat suivant :*

Proposition 5.1.2. *On a*

$$\gamma_0(X^\epsilon(\Omega)) \hookrightarrow W^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\partial\Omega) \cap \gamma_0(X(\Omega)).$$

Par ailleurs, la trace est continue sur $X^\epsilon(\Omega)$ pour la topologie faible : Si une suite u_n de $X^\epsilon(\Omega)$ converge faiblement vers u, alors $\gamma_0(u_n)$ converge vers $\gamma_0(u)$ dans $W^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\partial\Omega)$.

Démonstration. Il est clair que $\gamma_0(X^\epsilon(\Omega)) \hookrightarrow \gamma_0(X(\Omega))$. Par ailleurs, $u \in W^{1,1+\epsilon}(\Omega)$. La théorie classique des espaces de Sobolev isotropes entraine l'injection de $\gamma_0(X^\epsilon(\Omega))$ dans $W^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\partial\Omega)$ ([19], [1]), et que l'application trace est faiblement continue de $W^{1,1+\epsilon}(\Omega)$ dans $W^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\partial\Omega)$.

□

Définition 5.1.3. Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ défini dans la section précédente par (4.1). C'est à dire, soit $K \subset \{1, \cdots, N\}$ non vide, alors on pose

$$\Gamma = \cup_{i\in K}\partial\Omega^i,$$

avec $\partial\Omega^i := \big(]0,1[^{i-1}\times\{0\}\times]0,1[^{N-i}\big) \cup \big(]0,1[^{i-1}\times\{1\}\times]0,1[^{N-i}\big)$.
On pose :

$$X^\epsilon_\Gamma(\Omega) = X^\epsilon(\Omega) \cap \{u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f \in L^{p^{\star\prime}}(\Omega)$, on définit le problème approché :

$$(\mathcal{P}_\epsilon) : \; m_\epsilon = \inf_{u\in X^\epsilon_\Gamma(\Omega)}\{J^\epsilon(u)\},$$

avec

$$J^\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i\geq N_1+1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fu.$$

5.1.2 Existence de solution sur $X^\epsilon(\Omega)$

Proposition 5.1.4. *La fonctionnelle J^ϵ est coercive sur $X^\epsilon_\Gamma(\Omega)$.*

Démonstration. Remarquons que l'on a l'inégalité de Poincaré sur $X^\epsilon(\Omega)$ puisque Ω est un N rectangle borné on a également l'injection de $X^\epsilon(\Omega)$ dans $L^{p^\star}(\Omega)$, et donc lorsque u est nul sur sur Γ de mesure non nulle

$$|u|_{p^\star} \leq C'(|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1}|\partial_i u|_{p_i}). \tag{5.3}$$

On écrit ensuite par l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young :

$$
\begin{aligned}
|\lambda \int_\Omega fu| &\le |\lambda||f|_{p^{\star\prime}}|u|_{p^\star} \\
&\le C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} + C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}} \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i} \\
&\le \frac{1}{2(1+\epsilon)}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \frac{2^{\frac{1}{\epsilon}}\epsilon}{1+\epsilon}(C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} \right. \\
&\left. + \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{\star\prime}}C')^{p_i'}}{p_i'} \right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
J^\epsilon(u) \ge \frac{1}{2(1+\epsilon)}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \frac{2^{\frac{1}{\epsilon}}\epsilon}{1+\epsilon}(C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \\
- \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{\star\prime}}C')^{p_i'}}{p_i'}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

d'où le résultat.

□

Remarque 5.1.2. *Remarquons que pour la coercivité de J^ϵ à ϵ fixé, la condition sur λ n'est pas nécessaire. En revanche, si $2C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}}$ est plus grand que 1, le terme $(2C'|\lambda||f|_{p^{\star\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$ diverge lorsque ϵ tend vers 0. Ainsi, pour montrer plus loin la convergence d'une suite de solutions du problème approché, une condition de petitesse de λ sera nécessaire.*

Proposition 5.1.5. *Le problème approché $(\mathcal{P}_\epsilon)$ admet une solution $u_\epsilon \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante du problème. Par coercivité de J^ϵ, $(u_n)_n$ est bornée dans $X^\epsilon(\Omega)$. Par l'injection de X^ϵ dans $L^{p^\star}$ on peut donc en extraire une suite (que l'on note toujours u_n) qui converge faiblement vers $u_\epsilon \in X^\epsilon(\Omega)$:

1. u_n converge vers u_ϵ faiblement dans $L^{p^\star}(\Omega)$
2. $\partial_i u_n$ converge faiblement vers $\partial_i u_\epsilon$ dans $L^{1+\epsilon}(\Omega)$, pour $i \le N_1$.
3. $\partial_i u_n$ converge faiblement vers $\partial_i u_\epsilon$ dans $L^{p_i}(\Omega)$, pour $i \ge N_1 + 1$.

On a donc

$$\int_\Omega u_n f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u_\epsilon f.$$

Or, $X^\epsilon(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\epsilon}(\Omega)$, donc par continuité faible de la trace sur $W^{1-\frac{1}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\Gamma)$, on a également que $\gamma_0(u_n)$ converge faiblement dans $W^{1-\frac{1}{1+\epsilon},1+\epsilon}(\Gamma)$ vers $\gamma_0(u_\epsilon)$, et donc $u_\epsilon \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$.

Enfin, par semi continuité inférieure pour la topologie faible de toutes les intégrales en jeu, on a

$$\inf_{u \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)} J^\epsilon(u) \le J^\epsilon(u_\epsilon) \le \varliminf_{n\to\infty} J^\epsilon(u_n) = \inf_{u \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)} J^\epsilon(u),$$

ce qui conclut. □

Nous donnons un lemme pour déterminer la condition au bord sur $\sigma \cdot \vec{n}$ dans l'EDP

Lemme 5.1.6. *Si* $\varphi \in \mathcal{D}(\partial\Omega \backslash \overline{\Gamma})$ *il existe* $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, *telle que* $\psi = \varphi$ *sur* $\partial\Omega$. *En particulier* $\psi = 0$ *sur* Γ.

Démonstration. On peut supposer que l'une des composantes connexes de $\partial\Omega \setminus \Gamma$ est $]0,1[^{N-1} \times \{0\}$. Soit $h \in \mathcal{D}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$, $h(0) = 1$, et soit $\psi(x', x_N) = \varphi(x')h(x_N)$. Alors ψ convient. On peut additionner K fonctions construites de la même façon pour les K composantes connexes de $\partial\Omega \setminus \Gamma$. □

Proposition 5.1.7. *Posons* $\sigma_\epsilon = (\sigma_\epsilon^1, (\sigma_\epsilon)_{N_1+1}, \cdots, (\sigma_\epsilon)_N) \in \mathbb{R}^N$ *avec*

$$\sigma_\epsilon^1 = |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 u_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_1},$$

et pour $i \geq N_1 + 1$

$$(\sigma_\epsilon)_i = |\partial_i u_\epsilon|^{p_i - 2} \partial_i u_\epsilon.$$

Il est équivalent de dire que u_ϵ *est solution du problème* $(\mathcal{P}_\epsilon)$, *ou que* u_ϵ *satisfait l'EDP :*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma_\epsilon) = \lambda f, \\ u_\epsilon = 0 \ \ sur\ \Gamma, \\ \sigma_\epsilon \cdot \vec{n} = 0 \ \ sur\ \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}. \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons que J^ϵ est différentiable sur l'espace $X^\epsilon(\Omega)$, avec pour $u, v \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$:

$$DJ^\epsilon(u)(v) = \int_\Omega |\nabla_1 u|^{\epsilon-1} \nabla_1 u \nabla_1 v + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i v - \lambda \int_\Omega f v.$$

Ainsi, u_ϵ vérifiant $DJ^\epsilon(u_\epsilon) = 0$, on a alors au sens des distributions :

$$-\mathrm{div}_1 \left(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 u_\epsilon \right) - \sum_{i>N_1} \partial_i (|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2} \partial_i u_\epsilon) = \lambda f,$$

soit

$$-\mathrm{div}(\sigma_\epsilon) = \lambda f.$$

Par ailleurs, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ à support compact dans $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Gamma}$, (donc nulle sur Γ) on a :

$$\int_\Omega \sigma_\epsilon \cdot \nabla\varphi = \lambda \int_\Omega f\varphi,$$

et donc par la formule de Green, on obtient :

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\sigma_\epsilon)\varphi + \langle \sigma_\epsilon \cdot \vec{n}, \varphi \rangle = \lambda \int_\Omega f\varphi$$

et donc

$$\langle \sigma_\epsilon \cdot \vec{n}, \varphi \rangle = 0,$$

ce qui signifie grâce au lemme 5.1.6 que $\sigma_\epsilon \cdot \vec{n}$ est à support dans $\overline{\Gamma}$. On dira par abus de notation que $\sigma_\epsilon \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$.

Réciproquement, puisque J^ϵ est une fonctionnelle convexe (et même strictement convexe), un point où $DJ^\epsilon(u) = 0$ est un minimum global de J^ϵ.

□

5.1.3 Convergence du problème approché

Rappelons à nouveau les problèmes

$$(\mathcal{P}) : \ m = \inf_{u \in X_\Gamma(\Omega)} J(u),$$

$$(\mathcal{P}_r) : \ m_r = \inf_{u \in X^b(\Omega), \ u=0 \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u),$$

$$(\mathcal{P}_\epsilon) : \ m_\epsilon = \inf_{u \in X^\epsilon_\Gamma(\Omega)} \{J^\epsilon(u)\},$$

où

$$\begin{aligned} J_r(u) &= \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u| - \lambda \int_\Omega fu \\ &= J(u) + \int_{\Gamma^v} |u|, \end{aligned}$$

$$J^\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon} \int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu.$$

Rappelons que l'on a vu dans les Propositions 4.1.3 et 4.3.5 que

$$m = \inf_{u \in X^b_\Gamma(\Omega)} J(u) = m_r.$$

Proposition 5.1.8.

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} m_\epsilon \le m.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Par définition, il existe $u_\delta \in X_\Gamma(\Omega)$ tel que

$$J(u_\delta) \le m + \delta.$$

Par le Théorème 2.4.15, il existe $v_\delta \in X_\Gamma(\Omega) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tel que

$$|J(v_\delta) - J(u_\delta)| \le \delta.$$

En particulier, $v_\delta \in X^\epsilon_\Gamma(\Omega)$. Or, $|\nabla_1 v_\delta|^{\epsilon+1}$ converge presque partout vers $|\nabla_1 v_\delta|$ lorsque ϵ tend vers 0, et pour une constante $\epsilon_0 > 0$, on a pour tout $\epsilon < \epsilon_0$

$$|\nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon} \le \sup\{1, |\nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon_0}\},$$

donc par le Théorème de Convergence Dominée :

$$J^\epsilon(v_\delta) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} J(v_\delta).$$

Enfin, on a $m_\epsilon \le J^\epsilon(v_\delta)$, on obtient donc

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} m_\epsilon \le \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} J^\epsilon(v_\delta) = J(v_\delta) \le J(u_\delta) + \delta \le m + 2\delta,$$

d'où le résultat puisque δ est arbitraire. $\square$

Remarque 5.1.3. *La Proposition 5.1.5 donne à $\epsilon > 0$ fixé l'existence d'une solution $u_\epsilon \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$ du problème approché $(\mathcal{P}_\epsilon)$. On obtient donc une suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ de solutions. La proposition suivante assure la bornitude de la suite sous la condition précédente sur λ.*

Proposition 5.1.9. *Pour $|\lambda|$ suffisamment petit, la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ de solutions du problème approché est bornée dans $X^\epsilon(\Omega)$ indépendamment de ϵ.*

Démonstration. Soit u_ϵ une solution du problème $(\mathcal{P}_\epsilon)$. Il est clair que $0 \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$, donc on a

$$J^\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} - \lambda \int_\Omega f u_\epsilon \leq 0.$$

Or, on a par l'inégalité (5.4) :

$$J^\epsilon(u) \geq \frac{1}{2(1+\epsilon)}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \frac{2^{\frac{1}{\epsilon}}\epsilon}{1+\epsilon}(C'|\lambda||f|_{p^{*\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} - \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{*\prime}}C')^{p_i'}}{p_i'}$$

et donc pour $0 < \epsilon < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}|\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u_\epsilon|_{p_i}^{p_i} &\leq \frac{1}{2(1+\epsilon)}|\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{2p_i}|\partial_i u_\epsilon|_{p_i}^{p_i} \\
&\leq \frac{2^{\frac{1}{\epsilon}}\epsilon}{1+\epsilon}(C'|\lambda||f|_{p^{*\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{*\prime}}C')^{p_i'}}{p_i'} \\
&\leq (2C'|\lambda||f|_{p^{*\prime}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{(2^{\frac{1}{p_i}}|\lambda||f|_{p^{*\prime}}C')^{p_i'}}{p_i'}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $|\lambda| < \frac{1}{2C'|f|_{p^{*\prime}}}$, il existe $K > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ telle que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, $\epsilon > 0$ on a

$$|\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} |\partial_i u_\epsilon|_{p_i}^{p_i} \leq K.$$

Enfin, l'inégalité (5.3) nous permet également de majorer $|u_\epsilon|_{p^*}$ indépendamment de ϵ par les calculs précédents.

□

Supposons donc que $|\lambda| < \frac{1}{2C'|f|_{p^{*\prime}}}$, où la constante C' est telle que

$$|u|_{p^*} \leq C'(|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i}).$$

Rappelons que Γ est une réunion de $\partial\Omega^i$:

$$\Gamma = \cup_{i \in K} \partial\Omega^i, \text{ avec } K \subset \{1, \cdots, N\},$$

et on pose $\Gamma^v = \Gamma \cap \partial\Omega^v$.

Soit Ω' un ouvert réunion de rectangles de $\mathbb{R}^N$ telle que $\Omega \cup \Gamma^v \subset \Omega'$, et $\Omega' \cap \partial\Omega = \Gamma^v$. Par exemple, si $\Gamma^v = \cup_{i=1}^k \partial\Omega^i$ avec $k \leq N_1$, on peut choisir $\Omega' =]-1, 2[^k \times]0, 1[^{N-k}$.

Proposition 5.1.10. *Soit $u_\epsilon \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega)$ une solution du problème approché $(\mathcal{P}_\epsilon)$. On prolonge u_ϵ par 0 sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$. On note $(\widetilde{u_\epsilon})_\epsilon$ la suite de prolongées obtenues.*

Alors la suite $(\widetilde{u_\epsilon})_\epsilon$ converge étroitement sur Ω' pour une sous suite vers un élément $v \in X^b(\Omega')$ dont la restriction u à Ω est solution du problème relaxé $(\mathcal{P}_r)$. En particulier

$$m = \lim_{\epsilon \to 0} m_\epsilon.$$

Démonstration. On a $\widetilde{u_\epsilon} \in X_\Gamma^\epsilon(\Omega')$, avec :

$$|\widetilde{u_\epsilon}|_{L^{p^*}(\Omega')} = |u|_{L^{p^*}(\Omega)}, \sum_{i > N_1} |\partial_i \widetilde{u_\epsilon}|_{L^{p_i}(\Omega')} = \sum_{i > N_1} |\partial_i u_\epsilon|_{L^{p_i}(\Omega)}, \ |\nabla_1 \widetilde{u_\epsilon}|_{L^1(\Omega')} = |\nabla_1 u_\epsilon|_{L^1(\Omega)}.$$

Par la proposition précédente, la suite $(\widetilde{u_\epsilon})_\epsilon$ est alors bornée dans $X^\epsilon(\Omega')$, indépendamment de ϵ. On peut en extraire une sous suite que l'on note toujours $\widetilde{u_\epsilon}$ qui converge faiblement vers $v \in X^b(\Omega')$.

Par semi continuité inférieure de la variation totale sur l'ouvert Ω', on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\nabla_1 v| &\leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u_\epsilon}| = \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon| \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} \right)^{1/(1+\epsilon)} |\Omega|^{\epsilon/(1+\epsilon)}, \end{aligned}$$

et par semi continuité inférieure pour la topologie faible sur $L^{p_i}(\Omega')$ pour tout $i > N_1$:

$$|\partial_i v|_{L^{p_i}(\Omega')} \leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} |\partial_i \widetilde{u_\epsilon}|_{L^{p_i}(\Omega')} = \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} |\partial_i u_\epsilon|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

De plus, quitte à extraire à nouveau une sous suite, on peut supposer que $\widetilde{u_\epsilon}$ converge faiblement vers v dans $L^{p^*}(\Omega')$, et donc

$$\int_{\Omega'} f \widetilde{u_\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega'} f v.$$

Soit maintenant $u = v/_\Omega$. Alors $u \in X^b(\Omega)$, avec

$$|\partial_i v|_{L^{p_i}(\Omega')} = |\partial_i u|_{L^{p_i}(\Omega)},$$

pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$, et

$$\int_{\Omega'} |\nabla_1 v| = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u|.$$

Enfin, $u_\epsilon = 0$ sur Γ^h, donc $\widetilde{u_\epsilon}$ également, et par continuité faible de la trace sur les bords "horizontaux" de Ω', $v = 0$ sur Γ^h, et donc u également. Ainsi, en reprenant les calculs précédents :

$$
\begin{aligned}
m = m_r \leq J_r(u) &= \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u| - \lambda \int_\Omega fu \\
&= \int_{\Omega'} |\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_{\Omega'} |\partial_i v|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu \\
&\leq \varliminf_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}_\epsilon| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_{\Omega'} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu_\epsilon \\
&\leq \varliminf_{\epsilon\to 0} \left(\int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |\Omega|^{1-\frac{1}{1+\epsilon}} + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu_\epsilon \\
&= \varliminf_{\epsilon\to 0} J^\epsilon(u_\epsilon) = \varliminf_{\epsilon\to 0} m_\epsilon \leq \varlimsup_{\epsilon\to 0} m_\epsilon \leq m,
\end{aligned}
$$

et donc, $J_r(u) = m_r$, u est solution du problème relaxé $(\mathcal{P}_r)$. Par ailleurs, les inégalités précédentes (qui sont en fait des égalités) impliquent que

$$
\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}_\epsilon|^{1+\epsilon} = \int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| = \int_{\Omega'} |\nabla_1 v|, \tag{5.5}
$$

mais également

$$
\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}_\epsilon| = \int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon| \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| = \int_{\Omega'} |\nabla_1 v|.
$$

Il nous reste à montrer la convergence forte de $\partial_i \widetilde{u}_\epsilon$ vers $\partial_i v$ dans $L^{p_i}(\Omega')$ pour $i > N_1$. On a pour tout $i > N_1$ d'après ce qui précède :

$$
\int_{\Omega'} |\partial_i \widetilde{u}_\epsilon|^{p_i} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega'} |\partial_i v|^{p_i}.
$$

Énonçons un lemme dont la preuve est reportée à la fin de cette démonstration :

Lemme 5.1.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si une suite u_n converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, et si*

$$
\int_\Omega |u_n|^p \longrightarrow \int_\Omega |u|^p,
$$

alors u_n converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$.

La convergence faible de $\partial_i \widetilde{u}_\epsilon$ vers $\partial_i v$ couplée au lemme 5.1.11 entraine finalement la convergence forte de $\partial_i \widetilde{u}_\epsilon$ vers $\partial_i v$ dans $L^{p_i}(\Omega')$, d'où le résultat.

$\square$

Démonstration Du lemme 5.1.11 : Supposons tout d'abord que $|u_n|_p = |u|_p = 1$ pour tout entier n. Clairement, $\frac{u_n+u}{2}$ converge faiblement vers u. Par semi continuité inférieure pour la topologie faible, on a :

$$
1 = |u|_p \leq \varliminf |\frac{u_n + u}{2}|_p \leq 1,
$$

et donc

$$|\frac{u_n+u}{2}|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

L'uniforme convexité de L^p pour $p>1$ entraine que

$$|u_n-u|_p \to 0.$$

Pour le cas général, posons $v_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}$, et $v=\frac{u}{|u|_p}$. On a bien $|v_n|_p = |v|_p = 1$, v_n converge faiblement vers v dans $L^p(\Omega)$, et $|v_n|_p \to |v|_p$. Par ce qui précède, on déduit

$$|v_n - v|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, on a

$$|u_n-u|_p \leq |u_n|_p|v_n-v|_p + |u|_p\left(\frac{|u_n|_p}{|u|_p}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

5.1.4 EDP vérifiée par une solution limite

Soit u_ϵ la solution du problème approché $(\mathcal{P}_\epsilon)$, et soit $\widetilde{u_\epsilon}$ sa prolongée par 0 à Ω'. On en extrait par la Proposition 5.1.10 une sous suite qui converge étroitement vers $v\in X^b(\Omega')$ dont la restriction u à Ω est solution du problème relaxé.

Rappelons que par la Proposition 5.1.7, u_ϵ vérifie au sens des distributions

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma_\epsilon^1) - \sum_{i\geq N_1+1}^N \partial_i(\sigma_\epsilon)_i = \lambda f, \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \sigma_\epsilon\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}. \end{cases} \tag{5.6}$$

avec $\sigma_\epsilon = (\sigma_\epsilon^1, (\sigma_\epsilon)_{N_1+1},\cdots,(\sigma_\epsilon)_N)\in\mathbb{R}^N$,

$$\sigma_\epsilon^1 = |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_1},$$

et pour $N_1+1\leq i\leq N$

$$(\sigma_\epsilon)_i = |\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon.$$

Proposition 5.1.12. *Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ la suite de solutions de la Proposition 5.1.10. Alors*

1. *σ_ϵ^1 converge faiblement pour une sous suite dans tous les $L^q(\Omega,\mathbb{R}^{N_1})$, $q>1$ vers un élément $\sigma^1\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{N_1})$.*
2. *Pour $i\geq N_1+1$ $(\sigma_\epsilon)_i$ converge fortement dans $L^{p_i'}(\Omega)$ vers un élément $\sigma_i\in L^{p_i'}(\Omega)$, et $\sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u$.*

Démonstration. 1. On a $\sigma_\epsilon^1 \in L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)$, avec

$$|\sigma_\epsilon^1|^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)} = |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}_{L^{1+\epsilon}(\Omega)}.$$

Par ailleurs, la proposition 5.1.9 entraine pour $0<\epsilon<1$:

$$\begin{aligned} |\sigma_\epsilon^1|_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)} &= |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon}_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} \\ &\leq 1 + |\nabla_1 u_\epsilon|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} \\ &\leq C \end{aligned}$$

où C ne dépend pas de ϵ. Soit maintenant $q > 1$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $q < (1+\epsilon_0)/\epsilon_0$. Or $\epsilon \to (1+\epsilon)/\epsilon$ est décroissante, on a alors pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ par l'inégalité de Hölder :

$$\left(\int_\Omega |\sigma_\epsilon^1|^q\right) \le \left(\int_\Omega |\sigma_\epsilon^1|^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right)^{\frac{q\epsilon}{1+\epsilon}} |\Omega|^{1-\frac{q\epsilon}{1+\epsilon}},$$

et donc

$$|\sigma_\epsilon^1|_{L^q(\Omega)} \le |\sigma_\epsilon^1|_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \le C(|\Omega|+1),$$

la dernière inégalité étant due au fait que $|\Omega|^b \le |\Omega| + 1$ lorsque $0 < b < 1$. Ainsi la suite $(\sigma_\epsilon^1)_\epsilon$ est bornée dans tous les espaces $L^q(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, $q > 1$, donc converge faiblement pour une sous suite dans tous les $L^q(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$ vers un élément σ^1 qui appartient également à tous les $L^q(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$. Par semi continuité inférieure pour la topologie faible :

$$|\sigma^1|_{L^q(\Omega)} \le C(|\Omega|+1), \ \forall q > 1.$$

On obtient alors que $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$. En effet, si on pose $M = C(|\Omega|+1)$, et pour $\epsilon > 0$ donné,

$$E_{M+\epsilon} = \{x \in \Omega, |\sigma^1(x)| \ge M + \epsilon\},$$

on a pour tout q :

$$|\sigma^1|_{L^q(\Omega)} \ge \left(\int_{E_{M+\epsilon}} |\sigma^1|^q\right)^{1/q} \ge (M+\epsilon)|E_{M+\epsilon}|^{1/q},$$

et donc

$$|E_{M+\epsilon}| \le \left(\frac{M}{M+\epsilon}\right)^q, \quad \forall q > 1.$$

Comme nous pouvons prendre q aussi grand que l'on veut, on obtient donc que $|E_{M+\epsilon}| = 0$, d'où $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, avec $|\sigma^1|_{L^\infty(\Omega)} \le M$.

2. Par la Proposition 5.1.10, pour $i > N_1$, $\partial_i \widetilde{u_\epsilon}$ converge fortement dans $L^{p_i}(\Omega')$ vers $\partial_i v$, et en considérant la restriction u de v à Ω, $|\partial_i u_\epsilon - \partial_i u|_{p_i} \to 0$, donc en particulier $\partial_i u_\epsilon$ converge vers $\partial_i u$ presque partout sur Ω.
   Ainsi, $|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon$ converge presque partout vers $|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u$.
   Par ailleurs, on remarque que $|(\sigma_\epsilon)_i|_{p_i'} = |\partial_i u_\epsilon|_{p_i}^{p_i-1} \longrightarrow |\partial_i u|_{p_i}^{p_i-1} = |\sigma_i|_{p_i'}$, ce qui entraine la convergence forte dans $L^{p_i'}(\Omega)$.

□

Proposition 5.1.13. *Soit σ^1 défini par la proposition précédente. On a $|\sigma^1|_{L^\infty(\Omega)} \le 1$.*

Démonstration. On a

$$|\sigma^1|_{L^\infty(\Omega)} \le \varlimsup_{\epsilon\to 0} |\sigma_\epsilon^1|_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)}.$$

Or,

$$|\sigma_\epsilon^1|_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)} = |\nabla_1 u_\epsilon|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)}^\epsilon = \exp\left(\epsilon \log(|\nabla_1 u_\epsilon|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)})\right),$$

et on a vu en (5.5) que $\lim_{\epsilon\to 0} |\nabla_1 u_\epsilon|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| \ge 0$. On note k_1 cette limite. Pour ϵ suffisamment petit, on a donc

$$|\nabla_1 u_\epsilon|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} \le k_1 + 1.$$

Ainsi,

$$|\sigma^1|_{L^\infty(\Omega)} \leq \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \exp\left(\epsilon \log(k_1+1)\right) = 1,$$

d'où le résultat. □

Remarque 5.1.4. *Rappelons la notation*

$$\sigma_\epsilon = (\sigma^1_\epsilon, (\sigma_\epsilon)_{N_1+1}, \cdots, (\sigma_\epsilon)_N) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N-N_1}$$

On pose

$$\sigma = (\sigma^1, \sigma_{N_1+1}, \cdots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N-N_1}.$$

Remarquons que σ_ϵ converge vers σ au sens des distributions, et $-\mathrm{div}(\sigma_\epsilon) = \lambda f$. Ainsi, par passage à la limite dans (5.6), on obtient :

$$-\mathrm{div}(\sigma) = \lambda f. \tag{5.7}$$

On sait de plus que $\sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u$ pour $i \geq N_1 + 1 sur\ \Omega$.

Proposition 5.1.14. *Il est équivalent de dire que u est solution du problème relaxé $(\mathcal{P}_r)$, ou que u satisfait l'EDP :*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(\sigma_i) = \lambda f,\ \ sur\ \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|,\ \ \sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\ \ pour\ N_1+1 \leq i \leq N\ \ sur\ \Omega, \\ u = 0\ \ sur\ \Gamma^h, \\ -\sigma^1 \cdot \vec{n} u = |u|,\ \ sur\ \Gamma^v, \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0\ \ sur\ \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}. \end{cases}$$

Remarque 5.1.5. *L'expression $\sigma \cdot \vec{n} = 0\ \ sur\ \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ est prise au sens distributions après avoir remarqué que $\sigma \cdot \vec{n}$ est une distribution sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$. L'identité $-\sigma^1 \cdot \vec{n}u = |u|$ sur Γ^v est simplement une égalité presque partout, qui a un sens, puisque $\sigma^1 \cdot \vec{n} \in L^\infty(\Gamma^v)$ et $u \in L^1(\Gamma^v)$.*

Démonstration. • Supposons dans un premier temps que le problème relaxé $(\mathcal{P}_r)$ admette une unique solution u. Alors u est obtenu comme limite de la suite u_ϵ de la proposition 5.1.10.

En multipliant (5.7) par u, et en intégrant, on a en utilisant la définition de $< \sigma \cdot \nabla u, 1 >$ (lemme 3.4.1) :

$$\int_\Omega \sigma^1 \cdot \nabla_1 u + \sum_{i>N_1} \int_\Omega \sigma_i \partial_i u - < \sigma \cdot \vec{n}, u > = \lambda \int_\Omega f u.$$

Par ailleurs, en multipliant l'edp approchée par u_ϵ et en intégrant, on obtient par la Proposition 5.1.10

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega fu &= \lambda\int_{\Omega'} fv\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\lambda\int_{\Omega'} f\widetilde{u_\epsilon}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega'}|\nabla_1\widetilde{u_\epsilon}| + \sum_{i>N_1}\int_{\Omega'}|\partial_i\widetilde{u_\epsilon}|^{p_i}\\ &= \int_\Omega|\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1}\int_\Omega|\partial_i u|^{p_i} + \int_{\Gamma^v}|u|,\end{aligned}$$

et comme $\sigma_i\partial_i u = |\partial_i u|^{p_i}$ pour tout $i \geq N_1+1$, il s'ensuit

$$\int_\Omega \sigma^1\cdot\nabla_1 u - <\sigma\cdot\vec{n}, u> = \int_\Omega|\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v}|u|. \tag{5.8}$$

Par la convergence faible de $\sigma^\epsilon\cdot\vec{n}$ vers $\sigma\cdot\vec{n}$, ou encore par le lemme 5.1.6 on a en particulier si $\varphi\in\mathcal{D}(\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma})$ on obtient $<\sigma\cdot\vec{n},\varphi> = 0$, ce qui entraine $\sigma\cdot\vec{n}=0$ sur $\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}$ au sens distribution.

En utilisant $\int_\Omega|\nabla_1 u| \geq \int_\Omega\sigma^1\cdot\nabla_1 u$ et $\int_{\Gamma^v}|u| \geq -<\sigma^1\cdot\vec{n}, u>$ on déduit

$$\sigma^1\cdot\nabla_1 u = |\nabla_1 u| \text{ sur } \Omega,$$

et

$$-\sigma^1\cdot\vec{n}u = |u| \text{ sur } \Gamma^v.$$

• Revenons au cas général, sans supposer l'unicité des solutions du problème relaxé. Soit u une solution du problème relaxé. On considère le problème

$$\inf_{v\in X(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma}\int_\Omega|\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega|v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv$$

Montrons que ce problème admet pour unique solution u. En effet, on a

$$\begin{aligned} & \inf_{v\in X(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma}\int_\Omega|\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega|v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv\\ = & \inf_{v\in X^b(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma^h}\int_\Omega|\nabla_1 v| + \int_{\Gamma^v}|v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega|v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv\\ \leq & \int_\Omega|\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v}|u| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i u|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fu\\ = & \inf_{v\in X(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma}\int_\Omega|\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fv\\ \leq & \inf_{v\in X(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma}\int_\Omega|\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega|v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv\end{aligned}$$

et du fait de la présence du terme $\frac{1}{p^+}\int_\Omega|v-u|^{p^+}$ il y a unicité des solutions, puisque la fonctionnelle $J_u(v) = \int|\nabla_1 v| + \sum\frac{1}{p_i}\int|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int|v-u|^{p^+} - \lambda\int fv$ est strictement convexe.

On considère alors le problème approché

$$\inf_{v\in X^\epsilon(\Omega),v=0 \text{ sur } \Gamma} \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 v|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega |v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv$$

On démontre comme sans la présence du terme $\frac{1}{p^+}\int |v-u|^{p^+}$ l'existence d'une unique solution u_ϵ à ce problème. En outre, comme précédemment, on peut extraire de u_ϵ une sous suite qui converge vers l'unique solution de

$$\inf_{v\in X(\Omega),v=0 \text{ sur } \Gamma} \int_\Omega |\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p^+}\int_\Omega |v-u|^{p^+} - \lambda\int_\Omega fv$$

c'est à dire u. Or u_ϵ satisfait l'équation

$$-\mathrm{div}_1(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon) - \sum_{i>N_1}\partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon) + |u_\epsilon - u|^{p^+-2}(u_\epsilon - u) = \lambda f$$

Par passage à la limite comme précédemment, on obtient que u satisfait l'EDP

$$-\mathrm{div}(\sigma^1) - \sum_{i>N_1}\partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = \lambda f.$$

• Réciproquement, supposons que $u\in X^b(\Omega)$ est solution de l'EDP. Alors pour tout $v\in X^b(\Omega)$, nulle sur Γ^h :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v}|u| &+ \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i u|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fu \\
&= \int_\Omega \sigma^1\cdot\nabla_1 u - <\sigma\cdot\vec{n}, u> + \sum_{i=N_1+1}^{N}\int_\Omega \sigma_i\partial_i u - \lambda\int_\Omega fu \\
&- \sum_{i=N_1+1}^{N}(1-\frac{1}{p_i})\int_\Omega|\partial_i u|^{p_i} \\
&= \int_\Omega \sigma^1\cdot\nabla_1(u-v) - <\sigma\cdot\vec{n},(u-v)> + \sum_{i=N_1+1}^{N}\int_\Omega\sigma_i\partial_i(u-v) \\
&- \lambda\int_\Omega f(u-v) + \int_\Omega\sigma^1\cdot\nabla_1 v - <\sigma\cdot\vec{n}, v> \\
&+ \sum_{i=N_1+1}^{N}\int_\Omega\sigma_i\partial_i v - \lambda\int_\Omega fv - \sum_{i=N_1+1}^{N}(1-\frac{1}{p_i})\int_\Omega|\partial_i u|^{p_i} \\
&\leq \int_\Omega|\nabla_1 v| + \int_{\Gamma^v}|v| + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_\Omega|\partial_i v|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fv
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que puisque (u,σ) est solution de l'EDP

$$\int\sigma^1\cdot\nabla_1(u-v) - \langle\sigma\cdot n,(u-v)\rangle + \sum_{i\geq N_1+1}\int\sigma_i\partial_i(u-v) - \lambda\int f(u-v) = 0$$

ainsi que l'inégalité de convexité $\sigma_i \partial_i v \leq \frac{1}{p_i}|\partial_i v|^{p_i} + \frac{1}{p_i'}|\sigma_i|^{p_i'} = \frac{1}{p_i}|\partial_i v|^{p_i} + (1-\frac{1}{p_i})|\partial_i u|^{p_i}$. $\square$

Remarque 5.1.6. *Par abus de langage, nous pourrions écrire :*

$$\mathrm{div}_1\left(\frac{\nabla_1 u}{|\nabla_1 u|}\right) + \sum_{i>N_1} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = -\lambda f.$$

où la notation $\mathrm{div}_1\left(\frac{\nabla_1 u}{|\nabla_1 u|}\right)$ *désigne le* 1 *Laplacien par rapport à la "première" variable* $x \in \mathbb{R}^{N_1}$.

5.2 Le problème dual

Nous proposons dans cette section une autre méthode de détermination de l'EDP. Rappelons à nouveau les problèmes

$$(\mathcal{P}): \ m = \inf_{u \in X_\Gamma(\Omega)} J(u),$$

$$(\mathcal{P}_r): \ m_r = \inf_{u \in X^b(\Omega),\ u=0 \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u), \tag{5.9}$$

où

$$\begin{aligned} J_r(u) &= \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i \geq N_1+1} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u| - \lambda \int_\Omega fu \\ &= J(u) + \int_{\Gamma^v} |u|. \end{aligned}$$

Pour exhiber l'EDP vérifiée par une solution du problème $(\mathcal{P}_r)$, introduisons le problème Dual. Rappelons pour cela des résultats d'Analyse convexe [23] :

Définition 5.2.1. Soit V un espace de Banach. Une fonction convexe $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, et ne prend pas la valeur $-\infty$. En particulier, son domaine $\mathrm{dom}(F) = \{x, F(x) \in \mathbb{R}\}$ est non vide.

Définition 5.2.2. Soient V et Y deux espaces de Banach, V^* et Y^* leurs duaux (ou des espaces en dualité avec V et Y). Soit aussi $\Lambda : V \longrightarrow Y$ linéaire et continue, $\Lambda^* : Y^* \longrightarrow V^*$ son adjoint. Soient F et G deux fonctions convexes sci et propres $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème

$$P \ : \ \inf_{v \in V}\{F(v) + G(\Lambda v)\}$$

et on définit le problème dual de P comme

$$P^* \ : \ \sup_{p^* \in Y^*}\{-F^*(-\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*)\}$$

où la fonction conjuguée F^* de F est définie pour $u^* \in V^*$ par :

$$F^*(u^*) = \sup_{v \in V}\{< u^*, v > -F(v)\}.$$

Le résultat que nous utilisons ici est le suivant : [23]

Théorème 5.2.3. *$-\infty \leq P^* \leq P < +\infty$, et s'il existe $u_0 \in V$ tel que $F(u_0) < +\infty$ et tel que G est continue en Λu_0, alors on a*

$$\inf\ P = \sup\ P^*.$$

De plus, $\sup P^*$ *possède une solution.*

Revenons à notre problème :

Proposition 5.2.4. *Le problème dual du problème variationnel $(\mathcal{P})$ est :*

$$(\mathcal{P}^*):\ \beta^* = \sup_{\substack{\sigma\in(L^\infty)^{N_1}\times\Pi_{N_1+1}^N L^{p_i'},\ |\sigma^1|_\infty\leq 1,\ \mathrm{div}\sigma=-\lambda f\\ \sigma\cdot\vec{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma}}} \left(-\sum_{i\geq N_1+1}\frac{1}{p_i'}\int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'}\right). \tag{5.10}$$

Démonstration. On pose (en respectant les notations de la définition précédente pour plus de clarté) :

1. $F : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par

$$F =: \left| \begin{array}{ccc} u & \longmapsto & -\lambda\int_\Omega fu, \text{ si } u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ +\infty & & \text{sinon} \end{array} \right.$$

2. $G : (L^1(\Omega))^{N_1}\times\Pi_{i\geq N_1+1}L^{p_i}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$$G =: u \longmapsto \int_\Omega |\sum_{i=1}^{N_1} u_i^2|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |u_i|^{p_i}$$

3. $\Lambda : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & (L^1(\Omega))^{N_1}\times\Pi_{i\geq N_1+1}L^{p_i}(\Omega) \\ u & \longmapsto & (\nabla_1 u, \partial_{N_1+1}u, \cdots, \partial_N u) \end{array}.$

Avec ces notations, on a $J(u) = F(u) + G(\Lambda u)$.

Calculons G^* : Soit $\vec{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_N) \in (L^\infty(\Omega))^{N_1}\times\Pi_{i\geq N_1+1}L^{p_i'}(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} G^*(\vec{q}) &= \sup_{\vec{u}\in(L^1(\Omega))^{N_1}\times\Pi_{i\geq N_1+1}L^{p_i}(\Omega)} \{\int_\Omega \vec{q}\cdot\vec{u} - \int_\Omega(\sum_1^{N_1}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}} - \sum_{i\geq N_1+1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |u_i|^{p_i}\} \\ &= \sup_{\vec{u}\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^{N_1})}\{\sum_1^{N_1}\int q_i u_i - \int_\Omega(\sum_1^{N_1}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}}\} + \sum_{i\geq N_1+1}\sup_{u_i\in L^{p_i}(\Omega)}\{\int q_i u_i - \frac{1}{p_i}|u_i|_{p_i}^{p_i}\} \end{aligned}$$

Remarquons que par les inégalités de Hölder et de Young, $\sup_{u_i\in L^{p_i}(\Omega)}\{\int q_i u_i - \frac{1}{p_i}|u_i|_{p_i}^{p_i}\} \leq \frac{1}{p_i'}\int_\Omega |q_i|^{p_i'}$. En prenant $u_i = |q_i|^{p_i'-2}q_i$, on trouve finalement qu'il y a égalité.

Énonçons un lemme dont la preuve est reportée à la fin de la démonstration :

Lemme 5.2.5.

$$\sup_{\vec{u}\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^{N_1})}\{\sum_1^{N_1}\int q_i u_i - \int_\Omega(\sum_1^{N_1}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}}\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } |\sum_1^{N_1} q_i^2|_\infty \leq 1, \\ \infty & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

D'après le lemme 5.2.5, on obtient finalement

$$G^*(\vec{q}) = \begin{cases} \sum_{i \geq N_1+1} \frac{1}{p_i'} |q_i|_{p_i'}^{p_i'} & \text{si } |\sum_1^{N_1} q_i^2|_\infty \leq 1, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Passons maintenant au calcul de F^* : pour $\vec{q} \in (L^\infty(\Omega))^{N_1} \times \Pi_{i=N_1+1}^N L^{p_i}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} F^*(-\Lambda^* \vec{q}) &= \sup_{u \in X_\Gamma(\Omega)} \left\{ < -\Lambda^*(\vec{q}), u > +\lambda \int_\Omega fu \right\} \\ &= \sup_{u \in X_\Gamma(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega (\sum_{i=1}^N q_i \partial_i u) + \lambda \int_\Omega fu \right\}. \end{aligned}$$

Si il existe $\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\int \mathrm{div}(\vec{q})\psi_0 + \lambda \int f\psi_0 \neq 0$, par linéarité en considérant $\mu\psi_0$ avec μ un scalaire du signe de $\int \mathrm{div}(\vec{q})\psi_0 + \lambda \int f\psi_0$, et en faisant tendre μ vers l'infini, on obtient

$$\sup_{u \in \mathcal{D}(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega (\sum_{i=1}^N q_i \partial_i u) + \lambda \int_\Omega fu \right\} = \sup_{u \in \mathcal{D}(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega \mathrm{div}(\vec{q})u + \lambda \int_\Omega fu \right\} = +\infty.$$

Or, $\mathcal{D}(\Omega) \rightharpoonup X_\Gamma(\Omega)$, donc

$$\sup_{u \in X_\Gamma(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega (\sum_{i=1}^N q_i \partial_i u) + \lambda \int_\Omega fu \right\} = +\infty.$$

Supposons donc que $\mathrm{div}(\vec{q}) + \lambda f \equiv 0$. En particulier, $\mathrm{div}(\vec{q}) \in L^{p^*}(\Omega)$. Par la formule de Green du Théorème 2.5.1, pour $u \in X_\Gamma(\Omega)$

$$-\int_\Omega (\sum_{i=1}^N q_i \partial_i u) + \lambda \int_\Omega fu =< T^\sigma, \gamma_0(u) >:= -\int_{\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}} \vec{q} \cdot \vec{n} u,$$

et à nouveau par linéarité, si $\vec{q} \cdot \vec{n} \neq 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, $F^\star(-\Lambda^* \vec{q}) = +\infty$.

On obtient alors,

$$F^*(-\Lambda^* \vec{q}) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\mathrm{div}(\vec{q}) = \lambda f \text{ et } \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour conclure, on obtient donc pour problème dual, puisque $\sup\ P^* \leq \inf\ P < +\infty$,

$$\begin{aligned} \beta^* &= \sup_{\sigma \in (L^\infty(\Omega))^{N_1} \times \Pi_{i=N_1+1}^N L^{p_i'}(\Omega)} \{-F^*(-\Lambda^*\sigma) - G^*(-\sigma)\} \\ &= \sup_{\substack{\sigma \in (L^\infty(\Omega))^{N_1} \times \Pi_{i=N_1+1}^N L^{p_i'}(\Omega),\ |\sum_1^{N_1} \sigma_i^2|_\infty \leq 1,\ \mathrm{div}\sigma = -\lambda f \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}}} \left(-\sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'} \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Démonstration du lemme 5.2.5. :

Il suffit de montrer que si $\vec{q} \in (L^\infty(\Omega))^{N_1}$, alors

$$\sup_{\vec{v} \in (L^1(\Omega))^{N_1}} \{\sum_1^{N_1} \int q_i v_i\} = |\vec{q}|_\infty \sup_{\vec{v} \in (L^1(\Omega))^{N_1}} |\vec{v}|_1,$$

où $|\vec{q}|_\infty = |(\sum_1^{N_1} q_i^2)^{\frac{1}{2}}|_\infty$, et $|\vec{v}|_1 = |(\sum_1^{N_1} v_i^2)^{\frac{1}{2}}|_1$.

Il est clair par l'inégalité de Cauchy Schwartz que

$$\sup_{\vec{v} \in (L^1(\Omega))^{N_1}} \{\sum_1^{N_1} \int q_i v_i\} \leq |\vec{q}|_\infty \sup_{\vec{v} \in (L^1(\Omega))^{N_1}} |\vec{v}|_1.$$

Par définition de $|\vec{q}|_\infty$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure non nulle tel que pour tout $x \in A$

$$\sum_1^{N_1} q_i^2(x) \geq |\vec{q}|_\infty^2 - \epsilon.$$

Soit alors $\vec{v}$ défini par $v_i = q_i \chi_A$ pour tout $1 \leq i \leq N_1$. On a

$$|\vec{v}|_1 = \int_A (\sum_1^{N_1} q_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq |\vec{q}|_\infty |A|,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_1^{N_1} \int_\Omega q_i v_i &\geq \int_A \sum_1^{N_1} q_i^2 \\
&\geq |A|(|\vec{q}|_\infty^2 - \epsilon) = |A|(|\vec{q}|_\infty - \sqrt{\epsilon})|\vec{q}|_\infty + \sqrt{\epsilon}) \\
&\geq |A|(|\vec{q}|_\infty - \sqrt{\epsilon}) \geq |\vec{v}|_1 - \sqrt{\epsilon}|A|
\end{aligned}$$

d'où le résultat puisque ϵ est arbitraire.

□

Proposition 5.2.6. *Le problème dual* (5.10) *admet une solution.*

Démonstration. Le Théorème 5.2.3 nous donne directement le résultat. Nous en donnons tout de même une preuve directe pour le confort du lecteur.

Soit $(\sigma^n) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1}) \times \Pi_{i \geq N_1+1} L^{p_i}(\Omega)$ une suite maximisante. Alors $|\sigma^{1,n}|_\infty = |\sum_{i \leq N_1} (\sigma_i^n)^2|_\infty \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc il existe donc une sous suite (toujours notée $\sigma^{1,n}$) qui converge faiblement vers $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, avec $|\sigma^1|_\infty \leq 1$. On a également

$$-\sum_{i \geq N_1+1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\sigma_i^n|^{p_i} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \beta^*,$$

σ_i^n est donc bornée dans $L^{p_i'}$ pour $i \geq N_1 + 1$, on peut donc aussi extraire de σ_i^n pour $i \geq N_1 + 1$ une sous suite qui converge faiblement dans $L^{p_i'}$. Par convergence au sens des distributions on a

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i\geq N_1+1} \partial_i\sigma_i = \lambda f.$$

Par ailleurs, la formule de Green du Théorème 2.5.1 entraine pour $\varphi \in X_\Gamma(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma^n \cdot \vec{n}\varphi = \int_\Omega \sigma^n \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma^n)\varphi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \vec{n}\varphi,$$

et donc $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$.

Enfin, par semi continuité inférieure pour la topologie faible dans L^{p_i} pour tout $i \geq N_1 + 1$ on a :

$$\sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i^n|^{p_i'},$$

et donc

$$\beta^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} - \sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i^n|^{p_i'} \geq - \sum_{i\geq N_1+1} \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'} \geq \beta^*,$$

ce qui conclut.

□

Nous allons maintenant déterminer l'EDP vérifiée par le couple de solution (u, σ).

D'après le Théorème 5.2.3, on a $m = \beta^*$. Or nous avons montré l'existence d'une solution au problème (5.9) pour λ suffisamment petit, et l'existence d'une solution au problème (5.10). Ainsi, il existe $u \in X^b(\Omega)$, $\sigma \in (L^\infty(\Omega))^{N_1} \times \Pi_{N_1+1}^N L^{p_i}(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur Γ^h, $|\sigma^1|_\infty \leq 1$, $-\mathrm{div}(\sigma) = \lambda f$, et $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, tel que

$$\begin{aligned}
-\sum_{N_1+1} \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'} &= \sum_{N_1+1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| - \lambda \int_\Omega fu \\
&= \sum_{N_1+1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u| + \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma)u.
\end{aligned}$$

La deuxième partie du lemme 3.4.1 avec $\phi = 1 \in C^1(\overline{\Omega})$ nous donne :

$$< \sigma \cdot \nabla u, 1 >= - \int_\Omega u\mathrm{div}(\sigma) + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \vec{n}u,$$

donc en utilisant à la fois que $u = 0$ sur Γ^h et que $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, on obtient :

$$\sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \frac{1}{p_i'} \int_\Omega |\sigma_i|^{p_i'} - \int_\Omega \sigma_i \partial_i u \right) + \int_\Omega |\nabla_1 u| - < \sigma^1, \nabla_1 u > + \int_{\Gamma^v} (|u| + \sigma \cdot \vec{n}u) = 0.$$

Puisque pour tout $i \geq N_1 + 1$ par les inégalités de Hölder et de Young

$$\int_\Omega \frac{1}{p_i} |\partial_i u|^{p_i} + \int_\Omega \frac{1}{p_i'} |\sigma_i|^{p_i'} - \int_\Omega \sigma_i \partial_i u \geq 0,$$

et
$$\int_\Omega |\nabla_1 u| - \int_\Omega \sigma^1 \cdot \nabla_1 u \geq 0$$
$$\int_{\Gamma^v} (|u| + \sigma \cdot \vec{n} u) \geq 0$$
on obtient que toutes les inégalités sont des égalités et donc pour $i \geq N_1+1$, $|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u = \sigma_i$ et $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|$ sur $\Omega \cup \partial\Omega^v$.

On obtient donc l'EDP :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(\sigma_i) = \lambda f, \text{ sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|, \ \sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \text{ pour } N_1+1 \leq i \leq N \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma^h, \\ -\sigma^1 \cdot \vec{n} u = |u|, \text{ sur } \Gamma^v, \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}. \end{cases}$$

Chapitre 6

Données au bord non homogènes, unicité

On considère à nouveau $\Omega =]0,1[^N$. Rappelons les notations :

$$\partial\Omega^i_j = \{x \in \partial\Omega, x_i = j\}, \text{ pour } 1 \leq i \leq N, \ j \in \{0,1\},$$

$$\partial\Omega^i := \partial\Omega^i_0 \cup \partial\Omega^i_1, \text{ pour } 1 \leq i \leq N,$$

ainsi que les bords "horizontaux" (respectivement "verticaux")

$$\partial\Omega^h := \cup_{i>N_1}\partial\Omega^i, \text{ et } \partial\Omega^v := \cup_{i\leq N_1}\partial\Omega^i.$$

Supposons que $\Gamma \subset \partial\Omega$ est comme dans la section précédente. C'est à dire, pour $K \subset \{1, \cdots, N\}$, on pose

$$\Gamma = \cup_{i\in K}\partial\Omega^i, \ \Gamma^h = \Gamma \cap \partial\Omega^h, \ \Gamma^v = \Gamma \cap \partial\Omega^v.$$

6.1 Données au bord non homogène

Considérons à nouveau

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu,$$

avec λ un réel, et $f \in L^{p^{*\prime}}(\Omega)$. Nous voulons dans cette section généraliser les résultats des sections précédentes en considérant le problème

$$(\mathcal{P}) : \quad m = \inf_{u\in X(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u)$$

avec $g \in \gamma_0(X(\Omega))$, à support compact dans Γ.

Proposition 6.1.1. *Soit $g \in \gamma_0(X)$ à support compact dans Γ et $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = g$ sur Γ^h. Il existe une suite $u_n \in X^b(\Omega)$ telle que*

1. *$u_n = g$ sur Γ,*

2. *u_n converge fortement vers u dans $L^{p^*}(\Omega)$,*
3. *$|\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$,*
4. *$\int_\Omega |\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s| + \int_{\Gamma^v} |u - g|$.*
5. *en particulier $\int_\Omega |\nabla_1 u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u - g|$.*

Démonstration. Soit $G \in X(\Omega)$ un relèvement de g. Alors $u - G \in X^b(\Omega)$ et $u - G = 0$ sur Γ^h. D'après le Théorème 4.3.3 il existe $u_n \in X^b(\Omega)$ telle que

1. $u_n = 0$ sur Γ,
2. u_n converge fortement vers $u - G$ dans $L^{p^*}(\Omega)$,
3. $\partial_i u_n$ converge fortement vers $\partial_i(u - G)$ dans $L^{p_i}(\Omega)$, pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$,
4. $\int_\Omega |\nabla_1 u_n - (\nabla_1 u)^{ac} + \nabla_1 G| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |(\nabla_1 u)^s| + \int_{\Gamma^v} |u - g|$.

Alors la suite $v_n = u_n + G$ convient.

□

Lemme 6.1.2. *Soit $g \in \gamma_0(X)$ à support compact dans Γ. Il existe une constante $C > 0$ et une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:*

$$|u|_{p^*} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u - g| \right) + K.$$

Démonstration. Le lemme 4.3.6 appliqué à $u - G$, où $G \in X(\Omega)$ est un relèvement de g entraine l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:

$$|u - G|_{p^*} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla_1 (u - G)| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i (u - G)|_{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u - g| \right).$$

Ainsi,

$$|u|_{p^*} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} + \int_{\Gamma^v} |u - g| \right) + C \left(\int_\Omega |\nabla_1 G| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i G|_{p_i} \right) + |G|_{p^*}.$$

□

Proposition 6.1.3.

$$\begin{aligned} \inf_{u\in X(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) &= \inf_{u\in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) \\ &= \inf_{u\in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u - g|, \end{aligned}$$

et le problème relaxé admet une solution $u \in X^b(\Omega)$.

Démonstration. La première égalité est triviale par le Théorème 3.1.6. Par inclusion d'ensembles, il est clair que

$$\inf_{u \in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) \geq \inf_{u \in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|,$$

Soit maintenant $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = g$ sur Γ^h. D'après la Proposition 6.1.1, il existe une suite $u_n \in X^b(\Omega)$ telle que $u_n = g$ sur Γ, et

$$J(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|.$$

Or, pour tout entier n on a

$$\inf_{v \in X^b(\Omega), v=g \text{ sur } \Gamma} J(v) \leq J(u_n),$$

donc par passage à la limite

$$\inf_{v \in X^b(\Omega), v=g \text{ sur } \Gamma} J(v) \leq J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|$$

d'où le résultat car ceci est valable pour tout $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = g$ sur Γ^h.

Montrons maintenant l'existence d'une solution au problème relaxé. Remarquons que la coercivité de la fonctionnelle $J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|$ découle du lemme 6.1.2.

Sans perdre de généralité, supposons que Γ^v est de la forme $\Gamma^v = \cup_{i=1}^k \partial\Omega^i$, avec $k \leq N_1$. Soit

$$\Omega' =]-1, 2[^k \times]0, 1[^{N-k},$$

et soit $G \in X(\Omega)$ un relèvement de g sur Ω. On prolonge G par réflexion sur Ω' en suivant la démarche de la Proposition 2.4.5, et on note toujours G le prolongement. Soit $u_n \in X(\Omega)$ une suite minimisante, telle que $u_n = g$ sur Γ. On prolonge u_n par G sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$.

Alors la suite $\widetilde{u_n}$ obtenue vérifie :

$$|\widetilde{u_n}|_{L^{p^+}(\Omega')} = |u_n|_{L^{p^+}(\Omega)} + |G|_{L^{p^+}(\Omega'\setminus\Omega)},$$

$$|\partial_i \widetilde{u_n}|_{L^{p_i}(\Omega')} = |\partial_i u_n|_{L^{p_i}(\Omega)} + |\partial_i G|_{L^{p_i}(\Omega'\setminus\Omega)}, \text{ pour tout } N_1 + 1 \leq i \leq N,$$

et

$$|\nabla_1 \widetilde{u_n}|_{L^1(\Omega')} = |\nabla_1 u_n|_{L^1(\Omega)} + |\nabla_1 G|_{L^1(\Omega'\setminus\Omega)}.$$

Alors $\widetilde{u_n}$ est bornée dans $X(\Omega')$. On en extrait une sous suite qui converge vers $\tilde{u}$ dans $X^b(\Omega')$ faiblement. Il est clair que $\widetilde{u} = G$ sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$. On note u la restriction de $\widetilde{u}$ à Ω. On a par ailleurs,

$$\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}| = \int_{\Omega} |\nabla_1 u| + |\nabla_1 G|_{L^1(\Omega'\setminus\Omega)} + \int_{\Gamma^v} |u-g|.$$

Par semi continuité inférieure pour la topologie vague sur Ω' :

$$\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}| \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u_n}|_{L^1(\Omega')}$$

ce qui entraine

$$\int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u-g| \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla_1 u_n|.$$

En utilisant alors la semi continuité inférieure pour la topologie faible dans L^{p_i} pour $\partial_i u_n$ sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Gamma^v} |u-g| \quad &+ \quad \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu \\ &\leq \quad \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla_1 u_n| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} - \lambda \int_\Omega f u_n. \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Par ailleurs, $u_n = g$ sur Γ^h, donc $u = g$ sur Γ^h par continuité de la trace sur $\partial\Omega^h$ pour la topologie faible. Ainsi

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{w\in X^b(\Omega)\\ w=g \text{ sur } \Gamma^h}} J(w) + \int_{\Gamma^v} |w-g| \leq J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g| & \\ \leq \lim_{n\to\infty} J(u_n)& \\ = \inf_{\substack{w\in X(\Omega)\\ w=g \text{ sur } \Gamma}} J(w)&\end{aligned}$$

d'où le résultat car nous avons vu que les deux inf étaient égaux, et donc u est solution du problème relaxé.

□

Comme pour le problème avec donnée au bord homogène de la section précédente, nous cherchons à approcher le problème $(\mathcal{P})$ par un problème approché sur l'espace $X^\epsilon(\Omega)$. Ceci nécessite bien sûr de prendre une donnée au bord qui appartient à l'espace des traces $\gamma_0(X^\epsilon)$.

Théorème 6.1.4. *Soit $v \in X(\Omega)$. Il existe une suite v_ϵ dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ qui converge fortement vers v dans $X(\Omega)$ et telle que*

$$\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 v|.$$

En outre on peut supposer que $|\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}$ est dominée par une fonction de $L^1(\Omega)$ indépendante de ϵ.

Démonstration. On commence par prolonger v en $E(v) \in X(\mathbb{R}^N)$ avec E l'opérateur de prolongement de la Proposition 2.4.5. Alors $E(v)$ est à support compact dans $\mathbb{R}^N$, $E(v) = v$ sur Ω, et il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout i, $\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i E(v)|^{p_i} \leq K \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}$, Soit ρ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \rho \leq 1$, et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$. On pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\rho(x/\epsilon)$, et soit pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$v_\epsilon(x) = \rho_\epsilon \star E(v)(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(\frac{x-t}{\epsilon}) E(v)(t)dt.$$

Il est classique que $|v_\epsilon - E(v)|_{X(\mathbb{R}^N)} \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0$. En outre on a

$$|\nabla_1 v_\epsilon|(x) \leq \frac{1}{\epsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1(E(v))(t)|dt \leq \frac{1}{\epsilon^N}K'\int_\Omega |\nabla_1 v|,$$

et donc

$$\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} \leq \sup_{x\in\Omega}\{|\nabla_1 v_\epsilon|^\epsilon(x)\}\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon| \leq e^{-N\epsilon\log\epsilon+\epsilon\log(K'\int|\nabla_1 v|)}\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon|,$$

qui tend vers $\int_\Omega |\nabla_1 v|$ car $e^{-N\epsilon\log\epsilon+\epsilon\log(K'\int|\nabla_1 v|)}$ tend vers 1. Comme d'autre part on a

$$\int_\Omega |\nabla_1 v| = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon| \leq \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}(\int_\Omega |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon})^{\frac{1}{1+\epsilon}}|\Omega|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \leq \int_\Omega |\nabla_1 v|,$$

la suite v_ϵ convient. Le fait que $\nabla_1 v_\epsilon$ converge fortement vers $\nabla_1 v$ dans $L^1(\Omega)$ entraine par ailleurs qu'en extrayant une sous suite on peut supposer qu'il existe une fonction φ de L^1 telle que $|\nabla_1 v_\epsilon| \leq \varphi$, ce qui entraine que $|\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} \leq (\frac{1}{\epsilon^N}K'\sum_1^{N_1}\int_\Omega |\partial_i v|)^\epsilon \varphi \leq c\varphi$. □

Corollaire 6.1.5. *Soit $g \in \gamma_0(X(\Omega))$, et soit $G \in X(\Omega)$ un relèvement de g. Il existe une suite $G_\epsilon \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ telle que*

1. *G_ϵ converge fortement vers G dans $X(\Omega)$,*
2. *$\int_\Omega |\nabla_1 G_\epsilon|^{1+\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla_1 G|$,*
3. *$|\nabla_1 G_\epsilon|^{1+\epsilon}$ est dominée par une fonction de $L^1(\Omega)$.*
4. *$g_\epsilon := \gamma_0(G_\epsilon)$ converge vers g au sens où*

$$|g_\epsilon - g|_{\gamma_0(X(\Omega))} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

avec par définition

$$|u|_{\gamma_0(X(\Omega))} = \inf_{U\in X(\Omega),\gamma_0(U)=u}|U|_{X(\Omega)}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème précédent, en remarquant que par la convergence forte de G_ϵ vers G dans $X(\Omega)$, on a

$$|g_\epsilon - g|_{\gamma_0(X(\Omega))} \leq |G_\epsilon - G|_{X(\Omega)} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

Définition 6.1.6. Soient $g \in \gamma_0(X(\Omega))$, à support compact dans Γ, $G \in X(\Omega)$ un relèvement de g, et soient G_ϵ, g_ϵ définies par le corollaire 6.1.5.

On définit pour $\epsilon > 0$, et $u \in X^\epsilon(\Omega)$:

$$J^\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i\geq N_1+1}\frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fu,$$

ainsi que le problème approché

$$(\mathcal{P}_\epsilon) : m_\epsilon = \inf_{u\in X^\epsilon, u=g_\epsilon \text{ sur } \Gamma} J^\epsilon(u).$$

Proposition 6.1.7. *Le problème* $(\mathcal{P}_\epsilon)$ *admet une solution* u_ϵ.

Démonstration. La preuve est la même que dans la section précédente. □

Proposition 6.1.8. *On pose*

$$\sigma_\epsilon^1 = |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_1},\ \text{ et pour } i \geq N_1+1,\ (\sigma_\epsilon)_i = |\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon.$$

On pose également $\sigma_\epsilon = (\sigma_\epsilon^1, (\sigma_\epsilon)_{N_1+1}, \cdots, (\sigma_\epsilon)_N)$. *Alors une solution* u_ϵ *du problème approché vérifie l'EDP :*

$$(E) : \begin{cases} -\mathrm{div}\sigma_\epsilon = \lambda f \ \text{ sur } \Omega, \\ u_\epsilon = g_\epsilon \ \text{ sur } \Gamma, \\ \sigma_\epsilon \cdot n = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega/\overline{\Gamma}. \end{cases}$$

Démonstration. La fonctionnelle J_ϵ est différentiable sur $X^\epsilon(\Omega)$ avec pour tout $u, v \in X^\epsilon(\Omega)$

$$DJ^\epsilon(u)(v) = \int_\Omega |\nabla_1 u|^{\epsilon-1}\nabla_1 u \nabla_1 v + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \partial_i v - \lambda \int_\Omega fv.$$

Ainsi, u_ϵ vérifiant $DJ^\epsilon(u_\epsilon) = 0$, on a alors au sens des distributions :

$$-\mathrm{div}_1\left(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon\right) - \sum_{i>N_1} \partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon) = \lambda f,$$

soit

$$-\mathrm{div}(\sigma_\epsilon) = \lambda f. \tag{6.2}$$

Par ailleurs, pour tout $v \in X^\epsilon(\Omega)$ tel que $v = 0$ sur Γ, on a

$$\int_\Omega \sigma_\epsilon \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega fv.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\sigma_\epsilon)v + \int_{\partial\Omega} \sigma_\epsilon \cdot nv = \lambda \int_\Omega fv,$$

et en combinant (6.2) et le fait que $v = 0$ sur Γ,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_\epsilon \cdot nv = \int_{\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}} \sigma_\epsilon \cdot nv = 0,$$

ce qui entraine que $\sigma_\epsilon \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$. □

Proposition 6.1.9.

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} m_\epsilon \leq m.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Il existe $u_\delta \in X(\Omega)$ tel que $u_\delta = g$ sur Γ, et

$$J(u_\delta) \leq m + \delta.$$

Soit $G \in X(\Omega)$ le relèvement de g dans $X(\Omega)$ défini dans le corollaire 6.1.5. Alors $u_\delta - G \in X(\Omega)$ et $u_\delta - G = 0$ sur Γ. Par le Théorème 2.4.15 il existe $v_\delta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap X_\Gamma(\Omega)$ tel que

1. $|\nabla_1 v_\delta - (\nabla_1 u_\delta - \nabla_1 G)|_1 \leq \delta$,
2. $|\partial_i v_\delta - (\partial_i u_\delta - \partial_i G)|_{p_i} \leq \delta$, pour tout $i > N_1$,
3. $|\int f(v_\delta - (u_\delta - G))| \leq \delta$.

Soit $\epsilon_0 > 0$, et pour $\epsilon < \epsilon_0$, soient G_ϵ et g_ϵ définies par le corollaire 6.1.5. On pose $w_\delta = v_\delta + G$, et $w_{\delta,\epsilon} = v_\delta + G_\epsilon$ pour $\epsilon < \epsilon_0$. Alors $w_\delta \in X(\Omega)$, et les inégalités précédentes entrainent

$$|J(w_\delta) - J(u_\delta)| \leq C\delta,$$

pour une constante $C > 0$.

Par la définition de G_ϵ, $\nabla_1 G_\epsilon + \nabla_1 v_\delta$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $\nabla_1 G + \nabla_1 v_\delta$ lorsque $\epsilon \to 0$, donc presque partout pour une sous suite. D'autre part toujours pour une sous suite $|\nabla_1 G_\epsilon|^{1+\epsilon}$ est dominée par une fonction φ de L^1 et puisque v_δ est régulière, on a aussi pour tout $\epsilon < \epsilon_0$:

$$|\nabla_1 G_\epsilon + \nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon} \leq 2^{\epsilon_0}(\varphi + \sup\{|\nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon_0}, 1\}).$$

Ainsi, le Théorème de convergence dominée entraine que $J^\epsilon(w_{\delta,\epsilon})$ converge vers $J(w_\delta)$ lorsque ϵ tend vers 0. Par ailleurs, $w_{\delta,\epsilon}$ est dans $X^\epsilon(\Omega)$, et est égal à g_ϵ sur Γ. On a donc

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} m_\epsilon \leq \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} J^\epsilon(w_{\delta,\epsilon}) = J(w_\delta) \leq J(u_\delta) + C\delta \leq m + (C+1)\delta,$$

d'où le résultat puisque δ est arbitraire.

$\square$

Proposition 6.1.10. *Pour $|\lambda|$ suffisamment petit, la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ de solutions du problème approché est bornée dans $X(\Omega)$ indépendamment de ϵ.*

Démonstration. la démonstration est identique à celle de la section précédente. $\square$

Une fois encore, pour fixer les idées, on suppose que $\Gamma^v = \cup_{i=1}^k \partial\Omega^i$ avec $k \leq N_1$.

Soient $\epsilon_0 > 0$, et pour $\epsilon < \epsilon_0$, $u_\epsilon \in X^\epsilon(\Omega)$ une solution du problème

$$\inf_{u \in X^\epsilon(\Omega), u = g_\epsilon \text{ sur } \Gamma} J^\epsilon(u),$$

avec g_ϵ, et G_ϵ définies par le corollaire 6.1.5.

On prolonge G_ϵ par réflexion, et on note $\widetilde{G_\epsilon}$ cette prolongée sur

$$\Omega' =]-1, 2[^k \times]0, 1[^{N-k}$$

et on prolonge u_ϵ par $\widetilde{G_\epsilon}$ sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$. Alors la suite $(\widetilde{u_\epsilon})_\epsilon$ est bornée sur $X^\epsilon(\Omega')$, avec

$$|\widetilde{u_\epsilon}|_{X^\epsilon(\Omega')} = |u_\epsilon|_{X^\epsilon(\Omega)} + |\widetilde{G_\epsilon}|_{X^\epsilon(\Omega' \setminus \overline{\Omega})}.$$

Proposition 6.1.11.

$$m \leq \underline{\lim_{\epsilon\to 0}} m_\epsilon.$$

De plus, on peut extraire de $\widetilde{u_\epsilon}$ une sous suite qui converge vers un élément de $X^b(\Omega')$ dont la restriction à Ω est une solution du problème relaxé

$$\inf_{u \in X^b(\Omega), u = g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u - g|.$$

Démonstration. Par la proposition précédente, $\widetilde{u_\epsilon}$ est bornée dans $X(\Omega')$ indépendamment de ϵ. On en extrait une sous suite qui converge faiblement dans $X^b(\Omega')$ vers une fonction que l'on note $\widetilde{u} \in X^b(\Omega')$. Par la définition de G et de G_ϵ, $\widetilde{u} = \widetilde{G}$ sur $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$, et par continuité faible de la trace sur $\partial\Omega^h$, $\widetilde{u} = g$ sur Γ^h. Par semi continuité inférieure pour la topologie vague sur Ω', et faible sur Ω, en notant u la restriction de $\widetilde{u}$ à Ω, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega fu &\leq \underline{\lim}_{\epsilon\to 0} \Bigg(\int_\Omega |\nabla_1 u_\epsilon| + \int_{\Omega'\setminus\overline{\Omega}} |\nabla_1 \widetilde{G_\epsilon}| \\ &\quad + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} - \lambda \int_\Omega f u_\epsilon \Bigg) \\ &\leq \underline{\lim}_{\epsilon\to 0} J^\epsilon(u_\epsilon) + \int_{\Omega'\setminus\overline{\Omega}} |\nabla_1 \widetilde{G}|.\end{aligned}$$

En notant que

$$\int_{\Omega'} |\nabla_1 \widetilde{u}| = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\Omega'\setminus\overline{\Omega}} |\nabla_1 \widetilde{G}| + \int_{\Gamma^v} |u-g|,$$

et en retranchant de chaque côté des inégalités précédentes le terme $\int_{\Omega'\setminus\overline{\Omega}} |\nabla_1 \widetilde{G}|$, on obtient

$$m \leq J(u) + \int_{\Gamma^v} |g-u| \leq \underline{\lim}_{\epsilon\to 0} m_\epsilon \leq m,$$

d'où le résultat. □

Comme dans la section précédente, on peut montrer que u vérifie sur Ω

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i>N_1} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = \lambda f, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u| \end{cases}$$

Enfin, comme dans la Proposition 5.1.14, on peut montrer que $|u-g| = -\sigma^1 \cdot \vec{n}(u-g)$ sur Γ^v et que $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$.

On obtient l'EDP :

$$(E) : \begin{cases} -\mathrm{div}_1 \sigma^1 - \sum_{i>N_1} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = \lambda f \text{ sur } \Omega, \\ |\nabla_1 u| = \sigma^1 \cdot \nabla_1 u \text{ sur } \Omega, \\ u = g \text{ sur } \Gamma^h, \\ |u-g| = -\sigma^1 \cdot \vec{n}(u-g) \text{ sur } \Gamma^v, \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}. \end{cases}$$

Remarque 6.1.1. *Notons que l'on a également la continuité des solutions par rapport aux données au bord au sens précisé dans la proposition suivante.*

Proposition 6.1.12. *Soit $g \in \gamma_0(X)$, et $g_n \in \gamma_0(X)$ telle que g_n converge fortement vers g dans $L^1(\Gamma^v)$ lorsque n tend vers l'infini. Alors :*

$$\inf_{u\in X^b(\Omega), u=g_n \text{ sur } \Gamma^v, u=g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{u\in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u).$$

Démonstration. Par la Proposition 6.1.3, on est amené à montrer :

$$\inf_{u\in X^b(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{u\in X^b(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma^h} J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|.$$

On pose pour $u \in X^b(\Omega)$:

$$\varphi_n(u) = J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g_n|, \ \varphi(u) = J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g|.$$

Remarquons que pour tout $u \in X^b(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(u) - \varphi(u)| &= \left| \int_{\Gamma^v} |u-g_n| - \int_{\Gamma^v} |u-g| \right| \\ &\leq \int_{\Gamma^v} |g_n - g|, \end{aligned}$$

et la convergence forte de g_n vers g dans $L^1(\Gamma^v)$ entraine la convergence uniforme de φ_n vers φ dans $X^b(\Omega)$. Le résultat en découle.

□

6.2 Bords plus généraux dans le cas de la dimension 2

On suppose dans cette section $N = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = p < p^*$. Les résultats de cette section sont généralisables à la dimension N sous réserve de préciser la forme de Γ. Par exemple si Γ a des composantes connexes étoilées par rapport à un point et tel que $\overline{\Gamma}$ ne contient aucun "coin", c'est à dire l'ensemble $\{x_i = j, \ x_k = l, \text{ avec } i \neq k, j, l \in \{0,1\}\} \cap \overline{\Omega}$, l'extension des résultats ci dessous est immédiate.

Nous souhaitons généraliser les résultats des sections précédentes en considérant un ouvert Γ plus général. La difficulté pour considérer des bords plus généraux dans le problème de minimisation est due entre autre à la Proposition 2.4.15. Nous montrons dans cette section un résultat d'approximation avec un bord plus général, dans le cas de la dimension 2.

On suppose que Ω est un ouvert rectangle de $\mathbb{R}^2$. Sans perdre de généralités, nous considérons $\Omega =]0,1[^2$. Soit Γ une partie ouverte de $\partial\Omega$. On suppose que Γ a un nombre fini de composantes connexes.

Théorème 6.2.1. *Soit $u \in X(\Omega)$, $u = 0$ sur Γ. Il existe une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dont la restriction à Ω converge fortement vers u dans $X(\Omega)$ et qui vaut aussi 0 sur Γ.*

Démonstration. Soient I_i l'ensemble pour $i \in [1,k]$ des composantes connexes de Γ. Soit k' le nombre de composantes connexes de $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Il existe alors des ouverts O_i pour $i \leq k$, U_j pour $j \in [1,k']$ tel que $\overline{\Omega} \subset \cup_1^k O_i \cup_1^{k'} U_j$ et pour i et j dans $[1,k]$ $\overline{I_i} \subset O_i$ et quel que soit $j \neq i$, $\overline{I_j} \cap O_i = \emptyset$ ainsi que $U_j \cap (\cup \overline{I_i}) = \emptyset$ quel que soit $j \leq k'$. (voir **Figure 1**).

Soit $(\varphi_i, \psi_j)_{i,j}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement avec φ_i à support dans O_i, $\varphi_i = 1$ sur $\overline{I_i}$, et ψ_j à support dans U_j.

Notons que nous avons 3 cas à distinguer :

1. I_i est situé sur un des côtés du carré, et ne touche pas un de ses coins (par exemple I_1 ou I_4 sur la figure 1).

2. I_i est situé sur un des côtés du carré, et touche un de ses coins (par exemple I_3).
3. I_i est à cheval sur deux côtés du rectangle (par exemple I_2 sur la figure).

Dans chacun de ces cas, nous allons montrer que l'on peut approcher $\varphi_i u$ par une suite de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ également nulle sur un voisinage de I_i. C'est le sujet des lemmes suivants dont la démonstration est reportée à la fin de cette preuve pour le confort du lecteur.

Lemme 6.2.2. *Supposons que $u \in X(\Omega)$ est nul sur un ouvert $I_i \subset \partial\Omega$, à support compact dans un ouvert rectangle O_i, avec $\overline{I_i} \subset \overline{O_i} \cap \overline{\Omega}$. Supposons de plus que I_i ne touche aucun coin de Ω. Alors il existe une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dont la restriction à Ω converge vers u dans $X(\Omega)$ et qui vaut aussi 0 sur I_i.*

Lemme 6.2.3. *Supposons que $u \in X(\Omega)$ est nul sur un ouvert $I_i \subset \partial\Omega$, à support compact dans un ouvert rectangle O_i, avec $\overline{I_i} \subset \overline{O_i} \cap \overline{\Omega}$. Supposons de plus que ∂I_i contienne un des coins de Ω. Alors il existe une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dont la restriction à Ω converge vers u dans $X(\Omega)$ et qui vaut aussi 0 sur I_i.*

Lemme 6.2.4. *Supposons que $u \in X(\Omega)$ soit nul sur sur un ouvert $I_i \subset \partial\Omega$, à support compact dans un ouvert rectangle O_i, avec $\overline{I_i} \subset \overline{O_i} \cap \overline{\Omega}$. Supposons de plus que I_i contienne un des coins de Ω. Alors il existe une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dont la restriction à Ω converge vers u dans $X(\Omega)$ et qui vaut aussi 0 sur I_i.*

On applique donc ces résultats à $\varphi_i u$ pour tout i. Il existe donc $\varphi_i^n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_i^n = 0$ sur un voisinage de I_i dans $\mathbb{R}^2$ qui converge fortement dans $X(\Omega)$ vers $\varphi_i u$. Soit également une suite ψ_j^n de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ qui converge fortement vers $\psi_j u$ dans $X(\mathbb{R}^2)$. Pour n assez grand ψ_j^n est nulle sur I_i pour tout i. Alors la somme $\sum_1^k \varphi_i^n + \sum_1^{k'} \psi_j^n$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et converge fortement vers $\sum_1^k \varphi_i u + \sum_1^{k'} \psi_i u = u$ dans $X(\Omega)$. Cette suite est également nulle sur $\cup I_i = \Gamma$.

□

Démonstration du lemme 6.2.2. Sans perdre de généralité, on peut considérer que u est nul sur $\{0\}\times]a,b[$, et à support compact dans $[0,\frac{A+1}{2}[\times]\frac{a}{2},\frac{b+1}{2}[$, avec $0 < a < b < 1$, et $0 < A < 1$.

On peut se ramener à montrer le résultat lorsque u est nul sur $\{0\}\times]a-\epsilon, b+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ petit. En effet, considérons la rétractation de paramètre $\lambda < 1$:

$$u_\lambda(x,y) = u\left(x, \frac{a+b}{2} + \lambda(y - \frac{a+b}{2})\right).$$

Alors u_λ est à support dans

$$\left[0, \frac{A+1}{2}\right[\times \left]\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2\lambda}, \frac{a+b}{2} + \frac{1-a}{2\lambda}\right[\subset [0,1[\times]0,1[,$$

pour λ suffisamment proche de 1, et u_λ est nul sur

$$\{0\} \times \left]\frac{a-b}{2\lambda} + \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2\lambda} + \frac{a+b}{2}\right[.$$

Or, $\lambda < 1$ entraine que $\frac{b-a}{2\lambda} + \frac{a+b}{2} > b$, et que $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2\lambda} < a$. Il suffit donc de choisir ϵ pour que $\epsilon + b < \frac{b-a}{2\lambda} + \frac{a+b}{2}$, et pour que $a - \epsilon > \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2\lambda}$. Alors la suite u_λ converge fortement dans $X(\Omega)$ vers u lorsque $\lambda \to 1$, et vaut 0 sur $\{0\}\times]a-\epsilon, b+\epsilon[$.

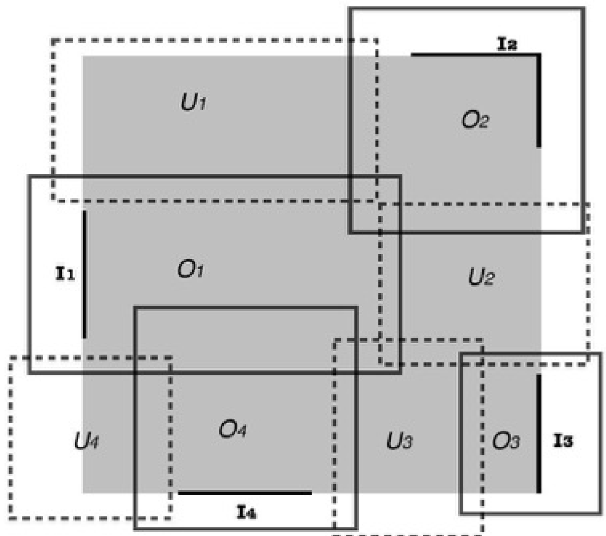

Figure 1

Supposons donc que u est nul sur $\{0\}\times]a-\epsilon, b+\epsilon[$ pour un $\epsilon > 0$, et soit φ une fonction régulière à support compact dans $]-\frac{A+1}{2}, \frac{A+1}{2}[\times]a-\epsilon, b+\epsilon[$, et égale à 1 sur $]-\frac{A+1}{4}, \frac{A+1}{4}[\times]a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2}[$. On écrit $u = \varphi u + (1-\varphi)u$.

Alors $\varphi u \in X(\Omega)$, $\varphi u = 0$ sur $\partial\Omega$. On prolonge φu par 0 sur $\widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$, où $\widetilde{\Omega} =]-1, 2[\times]-1, 2[$. La prolongée $\widehat{\varphi u}$ appartient à $X(\widetilde{\Omega})$.

On utilise l'opérateur de prolongement E du théorème 2.4.5, donc $E((1-\varphi)u)$ est nulle sur $]-\frac{A+1}{4}, \frac{A+1}{4}[\times]a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2}[$. On note $\overline{u} = \widehat{\varphi u} + E((1-\varphi)u)$. Soit h une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ qui vaut 1 sur $[-\frac{A+1}{8}, 1]\times[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, à support dans $\widetilde{\Omega}$. Alors $h\overline{u}$ est dans $X(\mathbb{R}^2)$, à support compact, et est nulle sur $]-\infty, 0]\times]a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2}[$, et est égale à u sur Ω. On considère alors la rétraction pour $\mu > 1$:

$$u_\mu(x, y) = \overline{u}(\frac{1}{2} + \mu(x - \frac{1}{2}), y).$$

Alors u_μ converge fortement vers $\overline{u}$ dans $X(\widetilde{\Omega})$, et est nulle sur $]-\infty, \frac{\mu-1}{2\mu}[\times]a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2}[$. Pour finir, il suffit de régulariser par une suite ρ_η, pour $\eta = \eta(\mu) < \inf\{\frac{\epsilon}{4}, \frac{\mu-1}{4\mu}\}$. Alors $\rho_\eta \star u_\mu$ converge fortement vers u dans $X(\Omega)$, est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, et est nulle sur un voisinage de $\{0\}\times]a, b[$. □

On traite maintenant le cas où Γ^v ou Γ^h a dans son adhérence un "coin" du carré.

Démonstration du lemme 6.2.3. On peut supposer sans perdre de généralité que u est nul sur $\{0\}\times]0, a[$, et à support compact dans $[0, \frac{A+1}{2}[\times[0, a'[$, avec $0 < a < a' < 1$, et $0 < A < 1$.

Soit $0 < \lambda < 1$. On pose $u_\lambda(x, y) = u(x, \lambda y)$, alors $u_\lambda \in X(]0, 1[\times]0, \frac{1}{\lambda}[)$ donc u_λ appartient à $X(\Omega)$. En outre u_λ est nulle sur $\{0\}\times]0, \frac{a}{\lambda}[$, et à support compact dans $[0, \frac{A+1}{2}[\times[0, \frac{a'}{\lambda}[$. On pose $\epsilon = \frac{a}{\lambda} - a > 0$. Alors u_λ est nulle sur $\{0\}\times]0, a+\epsilon[$, et u_λ converge fortement vers u dans $X(\Omega)$ lorsque λ tend vers 1.

On peut donc supposer que u est nul sur $\{0\}\times]0, a+\epsilon[$, et à support compact dans $[0, \frac{A+1}{2}[\times[0, a'[$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi = 1$ sur $[0, a+\frac{\epsilon}{2}]$, $\varphi(y) = 0$ pour $y > a+\epsilon$. Alors $\varphi(y)u(x,y)$ est nul sur $\partial\Omega^v$. On prolonge φu par 0 sur $\mathbb{R}^-\times]0,1[$, puis comme dans la démonstration du Théorème 2.4.5, on prolonge φu par réflexion par rapport aux droites $y=0$, et $y=1$. On multiplie ensuite φu par une fonction ψ régulière, à support compact dans $]-1,2[^2$, égale à 1 sur Ω, puis on prolonge $\psi\varphi u$ par 0 sur $\mathbb{R}^2$. On note $\widehat{\psi\varphi u}$ la prolongée qui est dans $X(\mathbb{R}^2)$. On utilise à nouveau l'opérateur de prolongement E du théorème 2.4.5. On note $\overline{u} = \widehat{\psi\varphi u} + E((1-\varphi)u)$ la somme des deux fonctions prolongées. Alors $\overline{u}$ est dans $X(\mathbb{R}^2)$, est égale à u sur Ω, et est nulle sur $]-\infty, 0]\times]-a-\frac{\epsilon}{2}, a+\frac{\epsilon}{2}[$. On fait ensuite la rétraction suivante pour $\mu > 1$:

$$u_\mu(x,y) = \overline{u}(\frac{1}{2} + \mu(x - \frac{1}{2}), y).$$

u_μ est nulle pour $x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mu}$, et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\mu} > 0$. En particulier, u_μ est nulle sur $\{0\}\times]0,a[$. Il est de plus clair que la restriction de u_μ à Ω converge vers u fortement dans $X(\Omega)$. On régularise enfin de la même façon que dans la preuve du lemme précédent pour obtenir une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ qui converge au sens voulu.

$\square$

On traite maintenant le cas où $\overline{\Gamma^h} \cap \overline{\Gamma^v} \neq \emptyset$.

Démonstration du lemme 6.2.4. Sans perdre de généralités, supposons que u est nul sur $\{0\}\times]0,a[\cup]0,c[\times\{0\}$, à support compact dans $[0,c'[\times[0,a'[$, avec $0 < a < a' < 1$, $0 < c < c' < 1$.

Considérons la dilatation de centre $(0,0)$. Soit $\lambda < 1$, on pose

$$u_\lambda(x,y) = u(\lambda x, \lambda y).$$

Alors u_λ appartient à $X(\Omega)$, est à support compact dans $[0, \frac{c'}{\lambda}[\times[0, \frac{a'}{\lambda}[$, est nulle sur $]0, \frac{c}{\lambda}[\times]0, \frac{a}{\lambda}[$, et converge fortement vers u dans $X(\Omega)$ lorsque λ tend vers 1. On peut donc supposer que $u = 0$ sur $\{0\}\times]0, a+\epsilon[\cup]0, c+\epsilon[\times\{0\}$, pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

Soit maintenant φ une fonction régulière, égale à 1 sur $[0, c+\frac{\epsilon}{2}[\times[0, a+\frac{\epsilon}{2}[$, à support compact dans $[-(c+\epsilon), (c+\epsilon)] \times [-(a+\epsilon), (a+\epsilon)]$.

On prolonge φu par 0 hors de Ω. On note $\overline{u} = \widehat{\varphi u} + E((1-\varphi)u)$, où E est l'opérateur de prolongement défini dans le théorème 2.4.5. $\overline{u}$ est en particulier nulle sur $]-c-\frac{\epsilon}{2}, 0[\times]-a-\frac{\epsilon}{2}, a+\frac{\epsilon}{2}[\cup[0, c+\frac{\epsilon}{2}[\times]-a-\frac{\epsilon}{2}, 0[$. Soit maintenant h une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ qui vaut 1 sur $[-c-\frac{\epsilon}{4}, 1] \times [-a-\frac{\epsilon}{4}, 1]$, à support compact dans $]-c-\frac{\epsilon}{2}, 2[\times]-a-\frac{\epsilon}{2}, 2[$, de sorte que $h\overline{u}$ est maintenant nulle sur $]-\infty, 0[\times]0, a+\frac{\epsilon}{2}[\cup[0, c+\frac{\epsilon}{2}]\times]-\infty, 0[$, et est égale à u sur Ω. On fait ensuite une rétraction de centre (c,a) pour se ramener à une fonction nulle sur un voisinage de $\{0\}\times]0, a+\frac{\epsilon}{4}[\times]0, c+\frac{\epsilon}{4}[\times\{0\}$. On utilise donc pour $1 < \mu < 2$ $u_\mu(x,y) = h\overline{u}((c,a) + \mu(x-c, y-a))$ qui est donc nulle sur $]-\infty, c-\frac{c}{\mu}[\times]-\infty, a+\frac{\epsilon}{2\mu}[\cup]-\infty, c+\frac{\epsilon}{2\mu}[\times]-\infty, a-\frac{a}{\mu}[$ qui est un voisinage de $\{0\}\times]0, a+\frac{\epsilon}{4}[\times]0, c+\frac{\epsilon}{4}[\times\{0\}$ pour $1 < \mu < 2$. En outre, la suite u_μ converge vers u dans $X(\Omega)$ lorsque μ tend vers 1.

Il suffit pour finir de régulariser u_μ de sorte que la restriction à Ω de la suite obtenue converge toujours fortement vers u dans $X(\Omega)$, et soit toujours nulle sur un voisinage de $\{0\}\times]0,a[\times]0,c[\times\{0\}$.

$\square$

6.3 Unicité des solutions

Nous nous intéressons dans cette section à l'unicité des solutions du problème

$$\inf_{u\in X(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) = \inf_{u\in X^b(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma^h} J_r(u), \tag{6.3}$$

où $g \in \gamma_0(X(\Omega))$, Γ est un ouvert de $\partial\Omega$ de la forme

$$\Gamma = \cup_{i\in K}\partial\Omega^i, \text{ avec } K \subset \{1, \cdots, N\},$$

avec $\partial\Omega^i = \partial\Omega^i_0 \cup \partial\Omega^i_1 = \big(]0,1[^{i-1}\times\{0\}\times]0,1[^{N-i}\big) \cup \big(]0,1[^{i-1}\times\{1\}\times]0,1[^{N-i}\big)$, et

$$\begin{aligned} J_r(u) &= J(u) + \int_{\Gamma^v} |u-g| \\ &= \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda\int_\Omega fu + \int_{\Gamma^v}|u-g|, \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^{p^{*\prime}}(\Omega)$.

Nous allons voir dans le contre exemple suivant que l'unicité n'est pas garantie, et dépend en un certain sens de la mesure de Γ^h :

Proposition 6.3.1. *Pour $f = 0$, $\Gamma = \partial\Omega^1$, et $g = 0$ sur $\partial\Omega^1_0 = \{0\}\times]0,1[^{N-1}$, $g = 1$ sur $\partial\Omega^1_1 = \{1\}\times]0,1[^{N-1}$, le problème (6.3) admet une infinité de solutions.*

Démonstration. Soit $v(x_1, \cdots, x_N) = x_1$. On a

$$\inf_{u\in X(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) \le J(v) = \int_\Omega |\nabla_1 u| = 1.$$

Par ailleurs, pour tout $u \in X^b(\Omega)$ tel que $u = 0$ sur $\partial\Omega^1_0$ et $u = 1$ sur $\partial\Omega^1_1$:

$$\begin{aligned} 1 = |u(1, x_2, \cdots, x_N) - u(0, x_2, \cdots, x_N)| &\le \int_0^1 |\partial_1 u(x, x_2, \cdots, x_N)|dx \\ &\le \int_0^1 |\nabla_1 u(x, x_2, \cdots, x_N)|dx \end{aligned}$$

donc en intégrant sur $]0,1[^{N-1}$ on obtient

$$\inf_{u\in X(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) \ge \inf_{u\in X(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma} \int_\Omega |\nabla_1 u| \ge 1.$$

Ainsi

$$\inf_{u\in X(\Omega),u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) = 1,$$

et $v(x_1, \cdots, x_N) = x_1$ réalise (6.3). On définit pour $0 < \lambda < 1$:

$$v_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x_1 < \lambda, \\ 1 \text{ si } x_1 > \lambda. \end{array} \right. .$$

Alors $v_\lambda \in X^b(\Omega)$ réalise (6.3) puisque $\int_\Omega |\partial_i v_\lambda| = 0$ pour tout $N_1 + 1 \le i \le N$, et $\int_\Omega |\nabla_1 v_\lambda| = \int_\Omega |\partial_1 v_\lambda| = \int_0^1 |\delta_{\{x_1=\lambda\}}| = 1.$ $\square$

Proposition 6.3.2. *Soient u et v des solutions du problème* (6.3). *Alors $\partial_i(u-v)=0$ pour tout $i \geq N_1+1$. Autrement dit, $u-v$ ne dépend que des N_1 premières variables.*

Démonstration. Soient u et v des solutions du problème relaxé (6.3), et soit $0<t<1$. Il est immédiat que $tu+(1-t)v \in X^b(\Omega)$ et que $tu+(1-t)v=g$ sur Γ^h. De plus $J_r(u)=J_r(v)$, et la convexité de J_r entraine que

$$J_r(tu+(1-t)v) \leq tJ_r(u)+(1-t)J_r(v)=J_r(u),$$

et donc $tu+(1-t)v$ est solution du problème (6.3). On a donc :

$$J_r(tu+(1-t)v)=tJ_r(u)+(1-t)J_r(v).$$

En particulier, on a pour $i \geq N_1+1$,

$$\int_\Omega |t\partial_i u+(1-t)\partial_i v|^{p_i}=t\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i}+(1-t)\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i},$$

et puisque $p_i>1$ pour $i>N_1$, la stricte convexité de $u \to \int |\partial_i u|^{p_i}$ entraine que $\partial_i u=\partial_i v$, d'où le résultat. □

Énonçons donc une condition suffisante pour obtenir l'unicité des solutions du problème.

Corollaire 6.3.3. *Supposons que Γ contienne un des $\partial\Omega_j^i$ pour $i \geq N_1+1$, $j \in \{0,1\}$, alors le problème* (6.3) *admet une unique solution.*

Démonstration. Soient u et v des solutions de (6.3). Par la proposition précédente, $\partial_i v=\partial_i u$ pour tout $i \geq N_1+1$, donc il existe une fonction $\psi \in W^{1,1}(]0,1[^{N_1})$ telle que $(u-v)(x,y)=\psi(x)$ pour tout $(x,y) \in]0,1[^{N_1} \times]0,1[^{N-N_1}$.

Or, comme Γ contient un des $\partial\Omega_i^j$ pour $j>N_1$, $i \in \{0,1\}$, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N-N_1}$, en notant y_j le vecteur y dont la $(j-N_1)$ ème coordonnée est remplacée par 0 (ou par 1) :

$$(u-v)(x,y)=(u-v)(x,y_j)=g(x,y_j)-g(x,y_j)=0,$$

et donc $u \equiv v$. □

Dans ce qui suit, on voit que pour des conditions au bord plus générales, l'unicité n'est pas garantie :

Proposition 6.3.4. *On suppose que $N=2$, $N_1=1$. Supposons que Γ s'écrive sous la forme :*

$$\Gamma^h=]0,a[\times\{0\}\cup]b,1[\times\{1\},\ \Gamma^v=\partial\Omega^v=\{0\}\times]0,1[\cup\{1\}\times]0,1[,$$

avec $0 \leq a<b \leq 1$, et que $g(x,0)=0=g(0,y)$ pour $x \in]0,a[$ et $y \in]0,1[$, $g(x,1)=1=g(1,y)$ pour $x \in]b,1[$, et $y \in]0,1[$. Alors le problème (6.3) *avec $f=0$ admet une infinité de solutions.*

Démonstration. Comme dans la preuve de la Proposition 6.3.1, on a

$$\inf_{u \in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} J(u) \geq \inf_{u \in X^b(\Omega), u=g \text{ sur } \Gamma} \int_\Omega |\nabla_1 u| \geq 1.$$

D'autre part la suite de fonctions pour $\lambda < b - a$

$$u_\lambda(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a + \lambda \\ (\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}) & \text{si } x \in]a+\lambda, b[\\ 1 & \text{si } \; x > b \end{cases}$$

est une suite de solutions au problème.

$\square$

Chapitre 7

Régularité locale

Dans cette section, nous montrons que si u est solution de l'EDP

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}_1\sigma^1 - \sum_{i>N_1} \partial_i(\sigma_i) = f \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u| \text{ au sens des mesures,} \\ \sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \text{ pour } i > N_1, \\ |\sigma^1|_\infty \leq 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

alors $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$. Pour ce faire, on peut utiliser deux procédés :

1. Un résultat intéressant en soi est le fait que une solution de (7.1) est un minimum local de la fonctionnelle

$$J(u) = \int |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int |\partial_i u|^{p_i} - \int fu.$$

   On utilise alors la suite u_ϵ de minima locaux de la section 6.1 pour laquelle on montre des estimations L^∞ uniformes, et on passe à la limite pour obtenir des estimations L^∞ pour u. Cette méthode est détaillée ci après.

2. Un autre procédé consiste à utiliser les arguments de la section 8 (dont le lemme 8.3.4) pour voir qu'une solution u de (7.1) satisfait pour une constante $C > 0$

$$\int_{A_{k,\sigma R}} |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_{A_{k,\sigma R}} |\partial_i u|^{p_i} \leq C \left(\int_{A_{k,R}} \frac{|u-k|^{p^+}}{((1-\sigma)R)^{p^+}} + |A_{k,R}| \right)$$

   où

$$A_{k,R} = \{x \in \Omega \cap C_R, u(x) > k\},$$

   ce qui nous permet de montrer la régularité L^∞_{loc} sans passer par un problème approché.

7.1 Minimum local de la fonctionnelle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Définition 7.1.1. Soit $u \in X^b(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > p^+$. On dit que u est un minimum local pour la fonctionnelle $J(u) = \int |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int |\partial_i u|^{p_i} - \int fu$ si pour tout ouvert Ω' inclus dans Ω strictement et pour $v \in X^b(\Omega')$ tel que $u = v$ sur $\partial\Omega'$, $J_{\Omega'}(u) \leq J_{\Omega'}(v)$, avec $J_{\Omega'}$ définie par $J_{\Omega'}(u) = \int_{\Omega'} |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_{\Omega'} |\partial_i u|^{p_i} - \int_{\Omega'} fu$.

On définit de la même manière un minimum local $u_\epsilon \in X^\epsilon(\Omega)$ de la fonctionnelle $J^\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon} \int |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int |\partial_i u|^{p_i} - \int fu$.

On commence par montrer l'équivalence entre être minimum local et être solution d'une EDP :

Théorème 7.1.2. *u est minimum local de J sur Ω si et seulement si u satisfait dans Ω*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}_1 \sigma^1 - \sum_{i>N_1} \partial_i(\sigma_i) = f \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u| \textit{ au sens des mesures,} \\ \sigma_i = |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \textit{ pour } i > N_1, \\ |\sigma^1|_\infty \leq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Dans un sens, si u est minimum local, en particulier il satisfait pour tout N-rectangle $\Omega' \subset\subset \Omega$ de cotés parallèles aux axes, le minimum de la fonctionnelle J. En utilisant la partie 6.1, u satisfait l'EDP dans tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, et donc u satisfait l'EDP dans Ω.

Pour la réciproque, on commence par remarquer que tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ peut être recouvert par un nombre fini de N-rectangles $\{R_j\}_{j=1,\cdots,n}$ tels que $\cup_j R_j \subset\subset \Omega$, de cotés parallèles aux axes. On se ramène donc à montrer que si u satisfait l'EDP dans toute réunion de N-rectangles parallèles aux axes, elle est minimum local de la fonctionnelle. En outre, on peut montrer le résultat dans le cas de deux N-rectangles "accolés", le cas général s'ensuivant aisément.

Supposons donc que $R = R_1 \cup R_2 \cup \Gamma$ avec Γ la partie verticale commune à $\bar{R}_1$ et $\bar{R}_2$. Pour fixer les idées on prend pour $0 < a < b < 1$:

$$R_1 =]0,1[^N, \ R_2 =]1,2[\times]a,b[^{N-1}, \text{ et } \Gamma = \{1\}\times]a,b[^{N-1}.$$

Soit u une solution de l'EDP dans R. Notons que alors sur $\{x = 1\}$, et pour $y \in]a,b[^{N-1}$ on a, en utilisant la partie 6.1, et en posant $\sigma^1 = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq N_1}$, $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq N}$

$$-\sigma \cdot \vec{n}(u^+(1,y) - u^-(1,y)) = (\sigma_1(1,y)(u^+(1,y) - u^-(1,y)) = |u^+(1,y) - u^-(1,y)|$$

où u^+ désigne la trace sur $\partial R_2 \cap \{x = 1\}$, et u^- la trace sur l'analogue $\partial R_1 \cap \{x = 1\}$.

Soit v dans $X(R)$, qui vaut u sur le bord de R, donc qui vaut u sur $\partial R_1 \cup \partial R_2 \setminus \Gamma$. On écrit :

$$
\begin{aligned}
&\int_R |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_R |\partial_i u|^{p_i} - \int_R fu \\
&= \int_{R_1} |\nabla_1 u| + \int_{R_2} |\nabla_1 u| + \int_\Gamma |u^+ - u^-| \\
&+ \sum_{i>N_1} (\int_{R_1} |\partial_i u|^{p_i} + \int_{R_2} |\partial_i u|^{p_i}) - \int_R fu - \sum_{i>N_1} (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i} \\
&= \int_{R_1} [\sigma^1 \cdot \nabla_1 u + \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i u] + \int_{R_2} [\sigma^1 \cdot \nabla_1 u + \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i u] \\
&+ \int_\Gamma |u^+ - u^-| - \int_R fu - \sum_{i>N_1} (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i} \\
&= \int_{R_1} [\sigma^1 \cdot \nabla_1 (u - v) + \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i (u - v)] \\
&+ \int_{R_2} [\sigma^1 \cdot \nabla_1 (u - v) + \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i (u - v)] \\
&+ \int_{R_1} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \int_{R_2} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \int_R \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i v - \int_R fu \\
&+ \int_\Gamma \sigma_1(1, y)(u^+(1, y) - u^-(1, y)) - \sum_{i>N_1} (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i}.
\end{aligned}
$$

Par la formule de Green sur chacun des rectangles, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_R |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_R |\partial_i u|^{p_i} - \int_R fu \\
&= -\int_{R_1} (\mathrm{div}_1(\sigma^1) + \sum_{i>N_1} \partial_i \sigma_i)(u - v) + \int_{\partial R_1} \sigma \cdot \vec{n}(u - v) \\
&- \int_{R_2} (\mathrm{div}_1(\sigma^1) + \sum_{i>N_1} \partial_i \sigma_i)(u - v) + \int_{\partial R_2} \sigma \cdot \vec{n}(u - v) \\
&+ \int_{R_1} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \int_{R_2} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \int_R \sum_{i>N_1} \sigma_i \partial_i v - \int_R fu \\
&+ \int_\Gamma \sigma_1(1, y)(u^+(1, y) - u^-(1, y)) - \sum_{i>N_1} (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i}.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, $u = v$ sur $\partial R_1 \cup \partial R_2 \setminus \Gamma$, donc

$$
\int_{\partial R_1} \sigma \cdot \vec{n}(u - v) = \int_\Gamma \sigma_1(1, y)(u^-(1, y) - v^-(1, y)),
$$

et

$$
\int_{\partial R_2} \sigma \cdot \vec{n}(u - v) = -\int_\Gamma \sigma_1(1, y)(u^+(1, y) - v^+(1, y)).
$$

Par ailleurs, les inégalités de Hölder et Young entrainent puisque $\sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u$:

$$\sum_{i>N_1} \int_R \sigma_i \partial_i v - (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i} \leq \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int |\partial_i v|^{p_i}.$$

En reprenant les calculs précédents, et en utilisant le fait que u vérifie l'EDP sur R_1 et sur R_2, on obtient (rappelons que $|\sigma^1|_\infty \leq 1$) :

$$\begin{aligned}
&\int_R |\nabla_1 u| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_R |\partial_i u|^{p_i} - \int_R fu \\
&= \int_{R_1} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \int_{R_2} \sigma^1 \cdot \nabla_1 v + \sum_{i>N_1} \int_R \sigma_i \partial_i v - \int_R fv \\
&+ \int_\Gamma \sigma_1(1,y)(v^+(1,y) - v^-(1,y)) - \sum_{i>N_1} (1 - \frac{1}{p_i}) \int_R |\partial_i u|^{p_i} \\
&\leq \int_{R_1} |\nabla_1 v| + \int_{R_2} |\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_R |\partial_i v|^{p_i} + \int_\Gamma |v^+ - v^-| - \int_R fv \\
&= \int_R |\nabla_1 v| + \sum_{i>N_1} \frac{1}{p_i} \int_R |\partial_i v|^{p_i} - \int_R fv
\end{aligned}$$

et donc u est minimum de J sur R.

□

Avant de donner les résultats d'approximation de minima locaux par des minima d'équations plus régulières, qui nous permettront d'obtenir les estimations "apriori" L^∞ et de conclure à la régularité L^∞_{loc} pour les solutions dans X^b, rappelons que le corollaire 6.3.3 établit l'unicité de solution lorsque la donnée est prescrite sur tout le bord d'un rectangle.

7.2 Régularité L^∞ des solutions du problème approché

La régularité L^∞ étant locale, il suffit de montrer le résultat lorsque Ω est un ouvert rectangle.

Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un rectangle ouvert, borné. On définit le cube $C_R =]-R, R[^N$.

Lemme 7.2.1. *Soit $\epsilon > 0$.*

Supposons que $u_\epsilon \in X^\epsilon(\Omega)$ est un minimum local de la fonctionnelle

$$J^\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon} \int |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \int |\partial_i u|^{p_i} - \int fu,$$

où

$$f = \mathrm{div}_1(f_1) + \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i f_i$$

avec $f_1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, et pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$, $f_i \in L^\infty(\Omega)$. Supposons également que $|f_1|_\infty < 1$.

On pose pour $k > 0$, et $R > 0$,

$$A^\epsilon_{k,R} = \{x \in \Omega \cap C_R, u_\epsilon(x) > k\}.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ϵ telle que pour tout C_R inclus dans Ω, et pour tout $\sigma \in]0,1[$:

$$\int_{A^\epsilon_{k,\sigma R}} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_{A^\epsilon_{k,\sigma R}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} \leq C \left(\int_{A^\epsilon_{k,R}} \frac{|u_\epsilon - k|^{p^+}}{((1-\sigma)R)^{p^+}} + |A^\epsilon_{k,R}| \right). \qquad (7.2)$$

La preuve de ce lemme s'inspire des techniques d'estimations de Moser [32] (voir aussi [8], [29]).

Démonstration. Soit $R > 0$, et $0 < \sigma < 1$, et $C_R =]-R,R[\times]-R,R[$.

Pour $z = (z_1, \cdots, z_N)$, on note $x = (z_1, \cdots, z_{N_1})$, et $y = (z_{N_1+1}, \cdots, z_N)$. Soit

$$\psi(z) = \gamma_1^{1+\epsilon}(x) \Pi_{i=N_1+1}^N \zeta^{p_i}(z_i),$$

avec $\gamma_1 \in \mathcal{D}(]-R,R[^{N_1})$, $\zeta \in \mathcal{D}(]-R,R[)$ tels que $\zeta = 1$ sur $[-\sigma R, \sigma R]$, $\gamma_1 = 1$ sur $[-\sigma R, \sigma R]^{N_1}$, $\zeta \leq 1$, $\gamma_1 \leq 1$ et $|\zeta'|, |\nabla_1 \gamma_1'| \leq \frac{c}{(1-\sigma)R}$ où c est une constante positive. On note $\gamma_2(y) = \Pi_{i=N_1+1}^N \zeta^{p_i}(z_i)$.

Rappelons que u_ϵ vérifie l'équation :

$$-\mathrm{div}_1(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 u_\epsilon) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2} \partial_i u_\epsilon) = f.$$

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Multiplions cette équation par $(u_\epsilon - k)^+ \psi$ et utilisons la formule de Green sur $A^\epsilon_{k,R}$:

$$\int_{A^\epsilon_{k,R}} (|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 u_\epsilon) \nabla_1((u_\epsilon - k)^+ \psi) + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_{A^\epsilon_{k,R}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2} \partial_i u_\epsilon \partial_i((u_\epsilon - k)^+ \psi)$$
$$= \int_{A^\epsilon_{k,R}} f(u_\epsilon - k)^+ \psi.$$

En développant l'égalité précédente, on trouve :

$$\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon+1} \psi + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} \psi = -\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 u_\epsilon \cdot \nabla_1 \psi (u_\epsilon - k)^+$$
$$- \sum_{i=N_1+1}^{N} \int |\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2} \partial_i u_\epsilon (u_\epsilon - k)^+ \partial_i \psi + \int f(u_\epsilon - k)^+ \psi. \qquad (7.3)$$

On écrit en utilisant les inégalités de Hölder et de Young : (la constante C indépendante de ϵ pouvant varier d'une ligne à l'autre)

$$\begin{aligned}
&\left|\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon\cdot\nabla_1\gamma_1(x)(u_\epsilon-k)^+\gamma_1^\epsilon(x)\gamma_2(y)\right|\\
&\le\left(\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon+1}\gamma_1^{1+\epsilon}(x)\gamma_2(y)\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}\times\left(\int((u_\epsilon-k)^+)^{1+\epsilon}|\nabla_1\gamma_1|^{1+\epsilon}(x)\gamma_2(y)\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}\\
&\le\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\gamma_1^{1+\epsilon}(x)\gamma_2(y)+C\int((u_\epsilon-k)^+)^{1+\epsilon}|\nabla_1\gamma_1|^{1+\epsilon}(x)\\
&\le\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\gamma_1^{1+\epsilon}(x)\gamma_2(y)+C\left(|\nabla_1\gamma_1|_\infty^{p^+}\int((u_\epsilon-k)^+)^{p^+}+|A_{k,R}^\epsilon|\right).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante K_1 indépendante de ϵ telle que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{A_{k,R}^\epsilon}|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon\cdot\nabla_1\psi(u_\epsilon-k)^+\right|\\
&\le\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int_{A_{k,R}^\epsilon}|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi(x,y)+K_1\left(\int_{A_{k,R}^\epsilon}\left(\frac{(u_\epsilon-k)^+}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+}+|A_{k,R}^\epsilon|\right)
\end{aligned}\tag{7.4}$$

De même pour $N_1+1\le i\le N$ il existe une constante K_i indépendante de ϵ telle que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_{k,R}^\epsilon}|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon(u_\epsilon-k)^+\partial_i\psi\right|&\le\frac{p_i-1}{p_i}\int_{A_{k,R}^\epsilon}|\partial_i u_\epsilon|^{p_i}\psi\\
&\quad+K_2\left(\int_{A_{k,R}^\epsilon}\left(\frac{(u_\epsilon-k)^+}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+}+|A_{k,R}^\epsilon|\right).
\end{aligned}\tag{7.5}$$

Par ailleurs, on a, puisque $f=\mathrm{div}_1(f_1)+\sum_{i=N_1+1}^N\partial_i f_i$,

$$\int_{A_{k,R}^\epsilon}f(u_\epsilon-k)^+\psi=-\int_{A_{k,R}^\epsilon}f_1\cdot\nabla_1((u_\epsilon-k)^+\psi)-\sum_{i=N_1+1}^N\int_{A_{k,R}^\epsilon}f_i\partial_i((u_\epsilon-k)^+\psi).\tag{7.6}$$

Or, sur $A_{k,R}^\epsilon$, $(u_\epsilon-k)^+=u_\epsilon-k$, et

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A_{k,R}^\epsilon}f_1\cdot\nabla_1\left((u_\epsilon-k)\psi\right)\right|&\le|f_1|_\infty\left(\int_{A_{k,R}^\epsilon}|\nabla_1 u_\epsilon|\psi+\int_{A_{k,R}^\epsilon}|u_\epsilon-k||\nabla_1\psi|\right)\\
&\le|f_1|_\infty\left((\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi^{1+\epsilon})^{\frac{1}{1+\epsilon}}|A_{k,R}^\epsilon|^{1-\frac{1}{1+\epsilon}}+\int|u_\epsilon-k||\nabla_1\psi|\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
|f_1|_\infty(\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi^{1+\epsilon})^{\frac{1}{1+\epsilon}}|A_{k,R}^\epsilon|^{1-\frac{1}{1+\epsilon}}&\le\frac{|f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon}\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi^{1+\epsilon}+\frac{\epsilon}{1+\epsilon}|A_{k,R}^\epsilon|\\
&\le\frac{|f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon}\int|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi+|A_{k,R}^\epsilon|.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $|\nabla_1 \gamma_1| \leq \frac{c}{(1-\sigma)R}$,

$$
\begin{aligned}
|f_1|_\infty \int |u_\epsilon - k||\nabla_1 \psi| &\leq (1+\epsilon)\left(\int |u_\epsilon - k|^{p^+} |\nabla_1 \gamma_1|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} \left|A^\epsilon_{k,R}\right|^{1-\frac{1}{p^+}} \\
&\leq \frac{1+\epsilon}{p^+}\int |u_\epsilon - k|^{p^+} |\nabla_1 \gamma_1|^{p^+} + (1-\frac{1}{p^+}) \left|A^\epsilon_{k,R}\right| \\
&\leq c^{p^+} \int \left(\frac{|u_\epsilon - k|}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+} + \left|A^\epsilon_{k,R}\right|.
\end{aligned}
$$

Il existe donc une constante K'_1 indépendante de ϵ telle que

$$
\left|\int f_1 \cdot \nabla_1 \left((u_\epsilon - k)\psi\right)\right| \leq \frac{|f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi + K'_1\left(\int_{A^\epsilon_{k,R}} \left(\frac{|u_\epsilon - k|}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+} + |A^\epsilon_{k,R}|\right). \tag{7.7}
$$

Par des calculs analogues, pour tout $N_1 + 1 \leq i \leq N$ il existe une constante K'_i indépendante de ϵ telle que

$$
\left|\int f_i \partial_i \left((u_\epsilon - k)\psi\right)\right| \leq \frac{1}{2p_i}\int |\partial_i u_\epsilon|^{p_i}\psi + K'_i\left(\int_{A^\epsilon_{k,R}} \left(\frac{|u_\epsilon - k|}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+} + |A^\epsilon_{k,R}|\right). \tag{7.8}
$$

En retranchant les quantités $\frac{|f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi$ de (7.7), $\frac{1}{2p_i}\int |\partial_i u_\epsilon|^{p_i}\psi$ de (7.8), $\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi$ de (7.4), et $\frac{p_i - 1}{p_i}\int |\partial_i u_\epsilon|^{p_i}\psi$ de (7.5), puis en injectant ces inégalités dans (7.3), en utilisant (7.6), et comme $\psi = 1$ sur $[-\sigma R, \sigma R]^N$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\epsilon + |f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon}\right)\int_{A^\epsilon_{k,\sigma R}} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} (1 - \frac{2p_i - 1}{2p_i})\int_{A^\epsilon_{k,\sigma R}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} \\
&\leq C\left(\int_{A^\epsilon_{k,R}} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\psi + \sum_{i=N_1+1}^{N}\int_{A^\epsilon_{k,R}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i}\psi\right) \\
&\leq C'\left(\int_{A^\epsilon_{k,R}} \left(\frac{|u_\epsilon - k|}{(1-\sigma)R}\right)^{p^+} + |A^\epsilon_{k,R}|\right).
\end{aligned}
$$

Rappelons que $|f_1|_\infty < 1$, donc $1 - \frac{\epsilon + |f_1|_\infty^{1+\epsilon}}{1+\epsilon} > 0$. Le résultat en découle.

□

Remarque 7.2.1. *La propriété* $f = \mathrm{div}(f_1) + \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i f_i$ *avec* $f_1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, $f_i \in L^\infty(\Omega)$ *peut être remplacée par* $f \in L^p(\Omega)$, *avec* $p > N$. *En effet, par des résultats de régularité sur les solutions d'équations elliptiques, il existe* $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *telle que* $f = \mathrm{div} g$. *En utilisant par exemple [32], si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, *si* $f \in L^p(\Omega)$ *avec* $p > N$, *alors les solutions de* $-\Delta u = f$, *satisfont* $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *et donc* $\nabla u \in W^{1,p}$. *Par les injections de Sobolev, comme* $p > N$, ∇u *est continue, et donc dans* L^∞_{loc}. *Ainsi, en prenant* $g = -\nabla u$, *on a bien* $f = \mathrm{div} g$.

Lemme 7.2.2. *Soit $u \in L^p(\Omega)$, avec $p \geq 1$. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} |\{x, |u(x)| > k\}| = 0,$$

et

$$\int_{|u|>k} |u|^p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. La première limite découle de l'inégalité

$$|\{x, |u(x)| > k\}| \leq \frac{1}{k^p} \int_\Omega |u|^p.$$

Pour la deuxième, soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe k suffisamment grand tel que

$$\int_{|u|>k} |u|^p < 2\epsilon.$$

Par densité il existe $\varphi \in C_c(\Omega)$ tel que $\int_\Omega |\varphi - u|^p < \frac{\epsilon}{2^p}$. Soit $k > 2\sup_{\overline{\Omega}}|\varphi|$.

Si $u > k > 2\varphi$, alors $0 \leq u \leq 2(u - \varphi)$, et donc

$$\int_{u>k} |u|^p \leq 2^p \int_{u>k} |u - \varphi|^p < \epsilon.$$

Si $u < -k < 2\varphi$, alors $0 \leq k \leq -u \leq 2(\varphi - u)$, et donc

$$\int_{u<-k} |u|^p \leq 2^p \int_{u<-k} |\varphi - u|^p < \epsilon.$$

Ainsi, on a bien

$$\int_{|u|>k} |u|^p < 2\epsilon.$$

□

Théorème 7.2.3. *Supposons toujours que u_ϵ vérifie les hypothèses du lemme 7.2.1. Alors $u_\epsilon \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. En outre, si u_ϵ converge étroitement dans $X^b(\Omega)$ vers $u \in X^b(\Omega)$, alors $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Remarque 7.2.2. *Il est important de montrer dans la suite que les estimations pour les minima de la fonctionnelle approximés dans $X^\epsilon(\Omega)$ ne dépendent pas de ϵ pour obtenir la régularité de la limite.*

Démonstration du Théorème 7.2.3. Soit $C_R \subset\subset \Omega$ un cube fixé. Nous pouvons toujours supposer que ce cube est centré en l'origine. Définissons les suites suivantes :

$$\rho_h = \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{h+1}}, \quad \overline{\rho}_h = \frac{\rho_h + \rho_{h+1}}{2}$$

$$k_h = k\left(1 - \frac{1}{2^{h+1}}\right), \quad h = 0, 1, 2, ...$$

où k est un nombre positif que nous choisirons ultérieurement.

Posons également

$$J_h^\epsilon = \int_{A^\epsilon_{k_h,\rho_h}} |u_\epsilon(x) - k_h|^{p^+} dx.$$

Nous cherchons à montrer que $J_h^\epsilon \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$, car nous aurons alors que

$$0 \leq \int_{A^\epsilon_{k,\frac{R}{2}}} |u_\epsilon(x) - k|^{p^+} dx \leq J_h^\epsilon \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{7.9}$$

donc, $\int_{A^\epsilon_{k,\frac{R}{2}}} |u_\epsilon(x) - k|^{p^+} dx = 0$ et donc que $u_\epsilon \leq k$ dans $C_{R/2}$.

Soit donc $\zeta \in C^1([0,+\infty[)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(t) = 1$ pour $t \leq 1/2$, $\zeta(t) = 0$ pour $t \geq 3/4$, et $|\zeta'| \leq c$, où $c > 0$.

On pose

$$\zeta_h(x) = \Pi_{i=1}^N \zeta\left(\frac{2^{h+1}}{R}(|x_i| - R/2)^+\right),$$

de sorte que $\zeta_h = 1$ dans $C_{\rho_{h+1}}$, et $\zeta_h = 0$ hors de $C_{\overline{\rho}_h}$. Notons que $\zeta_h \in W^{1,\infty}$.

Ainsi, comme $\overline{\rho}_h \geq \rho_{h+1}$, on a

$$\begin{aligned} J_{h+1}^\epsilon &\leq \int_{A^\epsilon_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}} |u_\epsilon(x) - k_{h+1}|^{p^+} \zeta_h^{p^+}(x) dx \\ &= \int_{A^\epsilon_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}} |(u_\epsilon(x) - k_{h+1})^+ \zeta_h(x)|^{p^+} dx. \\ &\leq \left(\int_{C_R} |(u_\epsilon(x) - k_{h+1})^+ \zeta_h(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{p^+}{p^*}} |A^\epsilon_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}|^{1-\frac{p^+}{p^*}}. \end{aligned}$$

Ainsi par l'injection de $X^\epsilon(C_R)$ dans $L^{p^*}(C_R)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_{h+1}^\epsilon \leq C(R)|A^\epsilon_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}|^{1-\frac{p^+}{p^*}} &\left[\left(\int_{C_R} |\nabla_1((u_\epsilon(x) - k_{h+1})^+ \zeta_h(x))|^{1+\epsilon} dx\right)^{\frac{p^+}{1+\epsilon}}\right. \\ &\left.+ \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\int_{C_R} |\partial_i((u_\epsilon(x) - k_{h+1})^+ \zeta_h(x))|^{p_i} dx\right)^{p^+/p_i}\right]. \end{aligned}$$

où la constante $C(R)$ ne dépend pas de ϵ puisque $X(C_R)$ s'injecte aussi dans $L^{p^*}(C_R)$. Pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$, on a

$$\begin{aligned} |\partial_i((u_\epsilon - k_{h+1})^+ \zeta_h)|^{p_i} &\leq 2^{p_i - 1}\left(|(\partial_i u_\epsilon)\zeta_h|^{p_i} + |(u_\epsilon - k_{h+1})^+ \partial_i \zeta_h|^{p_i}\right) \\ &\leq C\left(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i} + \frac{2^{hp_i}}{R^{p_i}}|(u_\epsilon - k_{h+1})^+|^{p_i}\right) \end{aligned}$$

et de même

$$|\nabla_1((u_\epsilon - k_{h+1})^+ \zeta_h)|^{1+\epsilon} \leq C\left(|\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} + \frac{2^{h(1+\epsilon)}}{R^{1+\epsilon}}|(u_\epsilon - k_{h+1})^+|^{1+\epsilon}\right)$$

et donc

$$J_{h+1}^{\epsilon} \leq C'(R)|A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}|^{1-\frac{p^+}{p^*}} \left[\left(\int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} + \frac{2^{h(1+\epsilon)}}{R^{1+\epsilon}} \int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |(u_\epsilon - k_{h+1})^+|^{1+\epsilon} \right)^{\frac{p^+}{1+\epsilon}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} + \frac{2^{hp_i}}{R^{p_i}} \int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p_i} \right)^{p^+/p_i} \right].$$

On écrit maintenant par l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, pour $q_i = 1+\epsilon$ ou $q_i = p_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{2^{hq_i}}{R^{q_i}} \int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{q_i} &\leq \frac{2^{hq_i}}{R^{q_i}} \left(\int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} \right)^{\frac{q_i}{p^+}} |A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}|^{1-\frac{q_i}{p^+}} \\
&\leq \frac{2^{hp^+}}{R^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}| \\
&\leq \frac{2^{hp^+}}{R^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'estimation (7.2) il existe une constante C indépendante de ϵ telle que

$$\int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon} \leq C \left(\frac{1}{(\rho_h - \overline{\rho}_h)^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}| \right),$$

et pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$

$$\int_{A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}} |\partial_i u_\epsilon|^{p_i} \leq C \left(\frac{1}{(\rho_h - \overline{\rho}_h)^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}| \right).$$

Remarquons que

$$\frac{1}{(\rho_h - \overline{\rho_h})^{p^+}} = \frac{2^{(h+3)p^+}}{R^{p^+}},$$

et donc par ce qui précède, il existe une constante C indépendante de ϵ telle que

$$J_{h+1}^{\epsilon} \leq C|A_{k_{h+1},\overline{\rho}_h}^{\epsilon}|^{1-\frac{p^+}{p^*}} \left[\left(\frac{2^{hp^+}}{R^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}| \right)^{\frac{p^+}{1+\epsilon}} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\frac{2^{hp^+}}{R^{p^+}} \int_{A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}} |u_\epsilon - k_{h+1}|^{p^+} + |A_{k_{h+1},\rho_h}^{\epsilon}| \right)^{p^+/p_i} \right]. \quad (7.10)$$

Remarquons maintenant que $k_h \leq k_{h+1}$, donc

$$\int_{A^{\epsilon}_{k_{h+1},\rho_h}} |u_\epsilon(x) - k_{h+1}|^{p^+} dx \leq J^{\epsilon}_h$$

et

$$|A^{\epsilon}_{k_{h+1},\rho_h}|(k_{h+1} - k_h)^{p^+} \leq \int_{A^{\epsilon}_{k_{h+1},\rho_h}} (u_\epsilon(x) - k_h)^{p^+} dx \leq J^{\epsilon}_h,$$

et donc, comme $k_{h+1} - k_h = \frac{k}{2^{h+2}}$, en choisissant $k \geq 1$, on obtient

$$|A^{\epsilon}_{k_{h+1},\rho_h}| \leq \frac{2^{p^+(h+2)}}{k^{p^+}} J^{\epsilon}_h \leq 2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h.$$

Enfin, il est clair que $|A^{\epsilon}_{k_{h+1},\bar{\rho}_h}| \leq |A^{\epsilon}_{k_{h+1},\rho_h}|$. Par (7.10) et ce qui précède, on obtient, en posant $q_{N_1} = 1 + \epsilon, q_i = p_i$ pour $N_1 + 1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} J^{\epsilon}_{h+1} &\leq C(2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h)^{1-\frac{p^+}{p^*}} \sum_{i=N_1}^{N} (\frac{2^{hp^+}}{R^{p^+}} J^{\epsilon}_h + 2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h)^{\frac{p^+}{q_i}} \\ &\leq C'(2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h)^{1-\frac{p^+}{p^*}} \sum_{i=N_1}^{N} (2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h)^{\frac{p^+}{q_i}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Par ailleurs, soit $(2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h) < 1$ pour tout h, et donc $J^{\epsilon}_h \underset{h\to\infty}{\to} 0$, ce qui entraine $u_\epsilon \leq k$ dans $C_{R/2}$ par (7.9), soit pour une sous suite $(2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h) > 1$ et alors

$$J^{\epsilon}_{h+1} \leq C'(N - N_1)(2^{p^+(h+2)} J^{\epsilon}_h)^{1-\frac{p^+}{p^\star}+p^+} \leq Cl^h (J^{\epsilon}_h)^{1+p^+-\frac{p^+}{p^\star}} \tag{7.12}$$

avec $l = 2^{(p^+)^2+p^+-\frac{(p^+)^2}{p^*}} > 1$, et $C = C'(N - N_1)2^{2p^+(1-\frac{p^+}{p^\star}+p^+)}$.

Pour achever la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant ([39], [50]) dont nous donnons un preuve pour le confort du lecteur.

Lemme 7.2.4. *Soit une suite $(y_l)_l$ de réels positifs. Supposons que pour tout $l \geq 0$ on ait*

$$y_{l+1} \leq cb^l y_l^{1+\delta},$$

où $c, \delta > 0$, et $b > 1$.

Supposons de plus que $y_0 \leq c^{-\frac{1}{\delta}} b^{-\frac{1}{\delta^2}}$, alors $y_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Définissons la suite $u_l := \log(y_l)$. On a alors

$$u_{l+1} \leq c_1 + lc_2 + (1 + \delta)u_l,$$

où $c_1 = \log(c)$, et $c_2 = log(b) > 0$. On définit également la suite $z_l := u_l + l\frac{c_2}{\delta} + \frac{c_1}{\delta} + \frac{c_2}{\delta^2}$. On a

$$\begin{aligned} z_{l+1} &= u_{l+1} + (l + 1)\frac{c_2}{\delta} + \frac{c_1}{\delta} + \frac{c_2}{\delta^2} \\ &\leq c_1 + lc_2 + (1 + \delta)u_l + (l + 1)\frac{c_2}{\delta} + \frac{c_1}{\delta} + \frac{c_2}{\delta^2} \\ &= (1 + \delta)\left(u_l + l\frac{c_2}{\delta} + \frac{c_1}{\delta} + \frac{c_2}{\delta^2}\right) \\ &= (1 + \delta)z_l. \end{aligned}$$

Par ailleurs $y_0 < c^{-\frac{1}{\delta}} b^{-\frac{1}{\delta^2}}$ implique que

$$u_0 < -\frac{1}{\delta}\log(c) - \frac{1}{\delta^2}\log(b) = -\frac{1}{\delta}c_1 - \frac{1}{\delta^2}c_2,$$

et donc $z_0 < 0$. Ainsi, par le calcul précédent, on a $y_l < 0$ pour tout entier l. Ainsi, pour tout entier l :

$$u_l < -l\frac{c_2}{\delta} - \frac{c_1}{\delta} - \frac{c_2}{\delta^2},$$

et donc comme $c_2 = \log(b) > 0$, $u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui prouve que $y_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Ainsi, en appliquant le lemme avec $\delta = p^+ - \frac{p+}{p*}$, et $b = 2^{(p^+)^2 + p^+ - \frac{(p^+)^2}{p^*}}$, on en déduit que si l'on choisi $k \geq 1$ tel que

$$J_0^\epsilon \leq c^{-\frac{1}{\delta}} b^{-\frac{1}{\delta^2}},$$

alors $J_h^\epsilon \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et le résultat en découle.

Or,

$$J_0^\epsilon = \int_{A^\epsilon_{k/2,R}} |u_\epsilon - \frac{k}{2}|^{p^+},$$

et donc comme $u_\epsilon \in L^{p^+}$, on a par le lemme 7.2.2

$$\int_{u_\epsilon > \frac{k}{2}} |u_\epsilon - \frac{k}{2}|^{p^+} \leq \int_{u_\epsilon > \frac{k}{2}} |u_\epsilon|^{p^+} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et le résultat en découle.

Montrons maintenant la deuxième partie du Théorème. Notons que jusqu'à présent nous avons montré qu'il existe k_ϵ assez grand pour que $\{u_\epsilon > k_\epsilon\}$ soit de mesure nulle. On remarque maintenant que l'on peut choisir un k ne dépendant pas de ϵ.

Supposons donc que u_ϵ converge étroitement dans $X^b(\Omega)$ vers $u \in X^b(\Omega)$.

Soit $\delta > 0$. La convergence étroite de u_ϵ vers u implique en particulier que u_ϵ converge fortement vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$. Soit donc ϵ_0 tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$,

$$|u_\epsilon - u|_{L^{p^+}(\Omega)} < \frac{\delta}{2}.$$

Par ailleurs, $u \in L^{p^+}(\Omega)$, donc il existe k assez grand tel que

$$\left(\int_{A_{k/2,R}} |u - \frac{k}{2}|^{p^+}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{u > \frac{k}{2}} |u|^{p^+}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Or l'inégalité

$$(u_\epsilon - \frac{k}{2})^+ \leq (u - \frac{k}{2})^+ + |u_\epsilon - u|$$

nous permet d'écrire d'après l'inégalité de Minkowski :

$$(J_0^\epsilon)^{\frac{1}{p^+}} = \left(\int_{A^\epsilon_{k/2,R}} |u_\epsilon - \frac{k}{2}|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} = \left(\int_{C_R} ((u_\epsilon - \frac{k}{2})^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}}$$
$$\leq \left(\int_{C_R} ((u - \frac{k}{2})^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\int_{C_R} |u_\epsilon - u|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}}$$
$$\leq \delta.$$

Notons donc que nous avions montré en (7.12) qu'il existe des constantes $l > 1$, $C'' > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$

$$J^\epsilon_{h+1} \leq C'' l^h (J^\epsilon_h)^{1+p^+ - \frac{p^+}{p^*}},$$

avec

$$J^\epsilon_h := \int_{A^\epsilon_{k_h,\rho_h}} |u_\epsilon(x) - k_h|^{p^+} dx = \int_{C_{\rho_h}} \left((u_\epsilon(x) - k_h)^+\right)^{p^+} dx, ,$$

et

$$A^\epsilon_{k_h,\rho_h} = \{x \in \Omega \cap C_{\rho_h}, u_\epsilon(x) > k_h\}.$$

Posons également

$$J_h := \int_{A_{k_h,\rho_h}} |u(x) - k_h|^{p^+} dx = \int_{C_{\rho_h}} \left((u(x) - k_h)^+\right)^{p^+} dx,$$

et

$$A_{k_h,\rho_h} = \{x \in \Omega \cap C_{\rho_h}, u(x) > k_h\}.$$

Montrons que $J^\epsilon_h \underset{\epsilon \to 0}{\to} J_h$. On a les inégalités :

$$(u_\epsilon - k_h)^+ \leq (u - k_h)^+ + |u_\epsilon - u|, \text{ et } (u - k_h)^+ \leq (u_\epsilon - k_h)^+ + |u - u_\epsilon|,$$

donc d'après l'inégalité de Minkowsky :

$$\left(\int_{C_{\rho_h}} ((u_\epsilon - k_h)^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} \leq \left(\int_{C_{\rho_h}} ((u - k_h)^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\int_{C_{\rho_h}} |u_\epsilon - u|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}},$$

et

$$\left(\int_{C_{\rho_h}} ((u - k_h)^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} \leq \left(\int_{C_{\rho_h}} ((u_\epsilon - k_h)^+)^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}} + \left(\int_{C_{\rho_h}} |u - u_\epsilon|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}},$$

si bien que finalement

$$|(J^\epsilon_h)^{\frac{1}{p^+}} - (J_h)^{\frac{1}{p^+}}| \leq \left(\int_{C_{\rho_h}} |u - u_\epsilon|^{p^+}\right)^{\frac{1}{p^+}},$$

et le résultat en découle puisque u_ϵ converge fortement vers u dans $L^{p^+}(\Omega)$.

Ainsi, par passage à la limite dans (7.12) :

$$J_{h+1} \leq C'' l^h (J_h)^{1+p^+ - \frac{p^+}{p^*}},$$

et donc en appliquant à nouveau le lemme 7.2.4 on obtient que J_h tend vers 0, et donc

$$0 \leq \int_{A_{k,\frac{R}{2}}} |u-k|^{p+} \leq J_h \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui implique que $u \leq k$ dans $B(0, \frac{R}{2})$.

□

7.3 Régularité de la limite

Soit u un minimum local de J, et soit $R \subset\subset \Omega$ un ouvert N-rectangle.
Par définition, u réalise

$$J(u) = \inf_{v \in X(R), v=u \text{ sur } \partial R} J(v).$$

Compte tenu de la section 6.1, on sait qu'il existe une suite $g_\epsilon \in \gamma_0(X^\epsilon)$ telle que $|g_\epsilon - u|_{\gamma_0(X(R))} \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0$. Par ailleurs, on sait qu'il existe une solution u_ϵ au problème

$$\inf_{v \in X^\epsilon(R), v=g_\epsilon \text{ sur } \partial R} J^\epsilon(v),$$

qui vérifie l'EDP :

$$(E) : \begin{cases} -\mathrm{div}_1(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i-2}\partial_i u_\epsilon) = f \text{ sur } R, \\ u_\epsilon = g_\epsilon \text{ sur } \partial R \end{cases}$$

Enfin, on a vu que cette solution u_ϵ convergeait étroitement vers u dans $X(R)$ par l'unicité des solutions du problème. D'après le Théorème 7.2.3, on obtient que $u \in L^\infty(R/2)$, d'où le résultat.

Chapitre 8

Extremal functions and partial differential equation for an embedding from some anisotropic space, involving the "one Laplacian"

Cet article en anglais fait l'objet d'une publication. Arxiv numéro 1804.06351.

Abstract. *In this paper, we prove the existence of extremal functions for the best constant of embedding from anisotropic space, allowing some of the Sobolev exponents to be equal to* 1*. We prove also that the extremal functions satisfy a partial differential equation involving the* 1 *Laplacian.*

8.1 Introduction

Anisotropic Sobolev spaces have been studied for a long time, with different purposes. Let us recall that for $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_N)$, and the $p_i \geq 1$ the space $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, denotes the closure of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ for the norm $\sum_i |\partial_i u|_{p_i}$. The existence of a critical embedding from $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ into $L^{p^\star}$, with $p^\star = \frac{N}{\sum_i \frac{1}{p_i} - 1}$ when $\sum_i \frac{1}{p_i} > 1$ is due to Troisi, [55].

There is by now a large number of papers and an increasing interest about anisotropic problems. With no hope of being complete, let us mention some pioneering works on anisotropic Sobolev spaces [38], [47] and some more recent regularity results for minimizers of anisotropic functionals, that we will cite below.

Let us note that anisotropic operators bring new problems, essentially when one wants to prove regularity properties. As an example the property that Ω be Lipschitz does not ensure the embedding $W^{1,\vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$. This is linked to the fact that in the absence of further geometric properties of Ω, one cannot provide a continuous extension operator from $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ in $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. To illustrate this, see the counterexample in [37], see also [22] for one example when some of the p_i are equal to 1, in the context of the present article.

Let us say a few words about the existence and regularity results of solutions to $-\sum_i \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = f$, $u = 0$ on $\partial\Omega$ when Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$. Assuming a convenient assumption on f, the existence of solutions can generally easily be obtained by the use of classical methods in the calculus of variations. But, as a first step in the regularity of such solutions, the local boundedness of the solutions, can fail if the supremum of the p_i is too large, let us cite to that purpose [31] and [42] where the author exhibits a counterexample to the local boundedness when $p_i = 2$ for $i \leq N-1$ and $p_N > 2\frac{N-1}{N-3}$. This restriction on $\vec{p}$, to ensure the local boundedness is confirmed by the results obtained later : let us cite in a non exhaustive way [13], [42], [8]. From all these papers it emanates in a first time that a sufficient condition for a local minimizer to be locally bounded is that the supremum of the p_i be strictly less than the critical exponent $p^\star$. This local boundedness is extended by Fusco Sbordone in [29] to the case where $\sup p_i = p^\star$. For further regularity properties of the solutions, as the local higher integrability of the local minimizers for some genarized functionals, see Marcellini in [43], and Esposito Leonetti Mingione [26, 27] .

Coming back to $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, and concerning extremal functions, let us recall that in the isotropic case, the first results concerned the case where $p_i = 2$ for all i, in which case the extremal functions are solutions of $-\Delta u = u^{2^\star - 1}$. The existence and the explicit form of them is completely solved by Aubin [4], and Talenti, [53]. For $W^{1,p}$ and the isotropic p Laplacian, say $-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ the explicit form is also known as the family of radial functions $u_{a,b}(r) = (a + br^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-N}{p}}$, while for the p-Laplacian non isotropic, say for the equation $-\sum_{i=1}^N \partial_i(|\partial_i u|^{p-2}\partial_i u) = u^{p^\star - 1}$, the explicit solutions are obtained by Alvino Ferrone Trombetti Lions [2] and are given by $u_{a,b}(r) = (a + b\sum_{i=1}^N |x_i|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-N}{p}}$. For further results about sharp embedding constant, and a new, elegant approach by using mass transportation the author can see [11].

Let us now consider the case where the p_i can be different from each others, and let us first cite the paper of Fragala Gazzola and Kawohl [28], where the authors prove the existence of extremal functions for some subcritical embeddings in the case of bounded domains.

For the case of $\mathbb{R}^N$ and the critical case, the existence of extremal functions is proved in [25], when all the $p_i > 1$, and $p^+ := \sup p_i < p^\star$. The authors provide also some properties of the extremal functions, as the L^∞ behaviour, extending in that way the regularity results already obtained for solutions of anisotropic partial differential equation in a bounded domain, with a right hand side sub-critical as in [28], to the critical one. The method uses essentially the concentration compactness theory of P. L. Lions [40, 41] adapted to this context, and some other tools developed also in a more general context in [24] .

In the case where $p^+ = p^\star$ and for more general domains than $\mathbb{R}^N$ the reader can see Vetois, [56]. In this article this author provides also some vanishing properties of the solutions, as well as some further regularity properties of the solutions.

When some of the p_i are equal to 1, let us cite the paper of Mercaldo, Rossi, Segura de leon, Trombetti, [45], which proved the existence of solutions in some anisotropic space, with some derivative in the space of bounded measures, for the $\vec{p}$-Laplace equation in bounded domains, using the definition of the one Laplacian with respect to the coordinates for which $p_i = 1$. For the existence of extremal functions in the case of $\mathbb{R}^N$, and in the best of our knowledge, nothing has been done in the case where some of the p_i are equal to 1. Of course in that case these extremal functions have their corresponding derivative in the space $M^1(\mathbb{R}^N)$ of bounded measures on $\mathbb{R}^N$. Even if the existence of such extremal can be obtained following the lines in the proof of [25], the partial differential equation satisfied by the extremal cannot be obtained by this existence's result. In order to get it, we are led to consider a sequence of extremal functions for the embedding of $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p^\star_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ where in $\vec{p}_\epsilon$, all the $p_i^\epsilon > p_i$ and tend to them as ϵ goes to zero. Note that one of the difficulties raised by this approximation is that, due to the unboundedness of $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ is not a subspace of $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, a problem which does not appear when one works with bounded domains, see [22]. In particular this does not allow to use directly the concentration compactness theory of P.L. Lions, [40]. We will prove both that the best constant for the embedding from $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p^\star_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ converges to the best constant for the embedding of $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ into $L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$, and that some extremal u_ϵ converge sufficiently tightly to some u. Passing to the limit in the partial differential equation satisfied by u_ϵ one obtains that u is extremal and satisfies the required partial differential equation.

8.2 Notations, and previous results

8.2.1 Some measure Theory, definition and properties of the space $BV^{\vec{p}}$

Definition 8.2.1. *Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^N$, and $M(\Omega)$, the space of scalar Radon measures, i.e. the dual of $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Let $M^1(\mathbb{R}^N)$ be the space of scalar bounded Radon measures or equivalently the subspace of $\mu \in M(\Omega)$ which satisfy $\int_\Omega |\mu| = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)} \langle \mu, \varphi \rangle < \infty$.*

$M^+(\Omega)$ is the space of non negative bounded measures on $\mathbb{R}^N$.

Definition 8.2.2. *When $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ we define $|\mu| = (\sum \mu_i^2)^{\frac{1}{2}}$ as the measure : For $\varphi \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(\Omega)$, $\langle |\mu|, \varphi \rangle = \sup_{\psi \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R}^N), \sum_1^N \psi_i^2 \leq \varphi^2} \sum \langle \mu_i, \psi_i \rangle$.*

Let us recall that

Definition 8.2.3. *$\mu_n \rightharpoonup \mu$ vaguely or weakly in $M(\Omega)$ if for any $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, $\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle$.*

When μ_n and μ are in $M^1(\Omega)$ we will say that μ_n converges tightly to μ if for any $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ and bounded, $\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle$.

Remark 8.2.1. *When $\mu_n \geq 0$, the tight convergence of μ_n to μ is equivalent to both the two conditions 1) $\mu_n \rightharpoonup \mu$ vaguely and 2) $\int_\Omega \mu_n \to \int_\Omega \mu$.*

We will frequently use the following density result:

Proposition 8.2.1. *If $\vec{\mu} \in M^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ there exists $u_n \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ such that $(u_n)_i^{\pm}$, respectively $|u_n|$ converges tightly to $\mu_i^{\pm}$ (respect. $|\mu|$).*

The reader is referred to [21], [20], for further properties on convergence of measures and density of regular functions for the vague and tight topology.

Let $N_1 \leq N \in \mathbb{N}$, and $\vec{p} := (p_1, \cdots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ such that $p_i = 1$ for all $1 \leq i \leq N_1$, and $p_i > 1$ for all $N_1 + 1 \leq i \leq N$.

Let $p^+ = \sup p_i$, and

$$p^* := \frac{N}{N_1 + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} - 1}.$$

In all the paper we will suppose that $p^+ < p^\star$. Let $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ be the completion of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ with respect to the norm

$$|u|_{\vec{p}} = |(\sum_{i=1}^{N_1}(\partial_i u)^2)^{\frac{1}{2}}|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} := |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i} \tag{8.1}$$

where $\nabla_1 u$ is the N_1 vector $(\partial_1 u, \cdots, \partial_{N_1} u)$, and $|u|_{p_i}$ denotes for $i \geq N_1 + 1$ the usual $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ norm.

Remark 8.2.2. *Of course by the equivalence of norms in $\mathbb{R}^{N_1}$ this completion coincides with the completion for the norm $\sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}$.*

We now recall the existence of the embedding from $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$, a particular case of the result of Troisi , [55].

Theorem 8.2.1.

$$\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

and there exists some constant T_0 depending only on $\vec{p}$, and N such that

$$T_0 |u|_{p^*} \leq \prod_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i}^{\frac{1}{N}}, \text{ and } |u|_{p^*} \leq \frac{1}{T_o N}\left(\sqrt{N_1}|\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i}\right), \tag{8.2}$$

for all $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.

We now introduce a weak closure of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ for the norm (8.1). Set

$$\begin{aligned} BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N) : \;&=\; \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \partial_i u \in M^1(\mathbb{R}^N) \text{ for } 1 \leq i \leq N_1, \text{ and } \partial_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \\ & \quad \text{for } N_1 + 1 \leq i \leq N\}. \end{aligned}$$

We also define

$$BV^{\vec{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N), \text{ for any } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\}$$

Definition 8.2.4. *We will say that $u_n \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ converges weakly to u if $u_n \rightharpoonup u$ (weakly) in $L^{p^\star}$, $\partial_i u_n$ converges vaguely to $\partial_i u$ in $M^1(\mathbb{R}^N)$ when $i \leq N_1$, and $\partial_i u_n \rightharpoonup \partial_i u$ (weakly) in L^{p_i}, when $i > N_1$. .*

The convergence is said to be tight if furthermore $\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u_n|^{p_i} \to \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u|^{p_i}$ for any $i \geq N_1$, and $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 u_n| \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 u|$.

Remark 8.2.3. *If u_n converges weakly to u, since (u_n) is bounded in $L^{p^\star}$, it converges strongly in L^q_{loc} for a subsequence, when $q < p^\star$ and then for a subsequence it converges almost everywhere.*

Proposition 8.2.2. *It is equivalent to say that*

1. *$u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$*
2. *There exists $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ which converges tightly to u.*
3. *There exists $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ which converges weakly to u.*

Remark 8.2.4. *Following the lines in the proof below, but using strong convergence in L^1 of $\partial_i u_n$ for $i \leq N_1$, in place of tight convergence, it is clear that $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^N), \partial_i u \in L^1(\mathbb{R}^N),\ i \leq N_1,\ \partial_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N),\ i \geq N_1 + 1\}$.*

Proof. Suppose that 1) holds.

We begin by a troncature. For $1 \leq i \leq N$ let α_i defined as

$$\alpha_i = \frac{p^\star}{p_i} - 1.$$

Let $\varphi \in \mathcal{D}(]-2, 2[)$, $\varphi = 1$ on $[-1, 1]$, and for all $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \Pi_{i=1}^N \varphi(\frac{x_i}{n^{\alpha_i}}) u(x).$$

We denote $C_n = \Pi_{i=1}^N [-2n^{\alpha_i}, 2n^{\alpha_i}]$, note that $|C_n| = 4^N n^{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$. We need to prove that $\partial_i u_n \to \partial_i u$ in $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ for all $i \in [N_1 + 1, N]$. Since

$$\partial_i u_n(x) = u(x)\partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}})\right) + \Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}}) \partial_i u(x),$$

it is sufficient to prove that $u\partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}})\right) \to 0$ in $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$. By Hölder's inequality

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u\partial_i \left(\Pi_{j=1}^N \varphi(\frac{x_j}{n^{\alpha_j}})\right)|^{p_i} &\leq \frac{c}{n^{\alpha_i p_i}} (\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{n^{\alpha_i} \leq |x_i| \leq 2n^{\alpha_i}} |u|^{p^\star})^{\frac{p_i}{p^\star}} |C_n|^{1-\frac{p_i}{p^\star}} \\
&\leq c' n^{-\alpha_i p_i + (1-\frac{p_i}{p^\star}) \sum_{j=1}^N \alpha_j} o(1)
\end{aligned}$$

which tends to zero, since $u \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^N)$ implies that $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{n^{\alpha_i} \leq |x_i| \leq 2n^{\alpha_i}} |u|^{p^\star} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, and for any i by the definition of α_i, $\alpha_i p_i \geq (1 - \frac{p_i}{p^\star}) \sum_{j=1}^N \alpha_j$. In the same manner we have $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 u_n - \nabla_1 u| \to 0$. The second step classically uses a regularisation process. Recall that that when $\vec{\mu}$ is a compactly supported measure in $\mathbb{R}^N$, with values in $\mathbb{R}^N$, when $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\int \rho = 1$, $\rho \geq 0$, and $\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^N}\rho(\frac{x}{\epsilon})$, $\rho_\epsilon \star |\vec{\mu}|$ converges tightly to $|\vec{\mu}|$, $\rho_\epsilon \star \mu_i^\pm$ converges tightly to $\mu_i^\pm$. From this one derives the tight convergence when ϵ goes to zero and n to ∞ of $|\nabla_1(\rho_\epsilon \star u_n)|$ towards $|\nabla_1 u|$.

2) implies 3) is obvious. To prove that 3) implies 1), note that if (u_n) is weakly convergent to u, one has the existence of some constant independent on n so that $|\nabla_1 u_n|_1 + \sum_{i=N_1+1}^N |\partial_i u_n|_{p_i} \leq C$. Then by the embedding in Theorem 8.2.1, (u_n) is bounded in $L^{p^\star}$, and by extracting subsequences from $\nabla_1 u_n$ in $M^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N_1})$ weakly and from $\partial_i u_n$ in L^{p_i} weakly for $i \geq N_1 + 1$, one gets that the limit $u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. □

Remark 8.2.5. *Using the last proposition, one sees that* (8.2)*extends to the functions in $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.*

We now enounce a result which extends the definition of the "Anzelotti pairs", [3], see also Temam [54], Strang Temam in [51], and [15, 16, 17].

Theorem 8.2.2. *Let σ a function with values in $\mathbb{R}^N$, such that its projection σ^1 on the first N_1 coordinates, belongs to $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N_1})$, and suppose that for any $i \geq N_1 + 1$,*

$\sigma \cdot e_i \in L^{p'_i}_{loc}$, and that $\mathrm{div}\sigma \in L^{\frac{p^\star}{p^\star-1}}_{loc}$. *Then if $u \in BV^{\vec{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, one can define a distribution $\sigma \cdot \nabla u$ in the following manner, for $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}\sigma(u\varphi) - \int_{\mathbb{R}^N} (\sigma \cdot \nabla \varphi) u.$$

Then $\sigma \cdot \nabla u$ is a measure, and $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u := \sigma \cdot \nabla u - \sum_{i=N_1+1}^N \sigma_i \partial_i u$ is a measure absolutely continuous with respect to $|\nabla_1 u|$, with for $\varphi \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$:

$$\langle |\sigma^1 \cdot \nabla_1 u|, \varphi \rangle \leq |\sigma^1|_{L^\infty(Suppt\varphi)} \langle |\nabla_1 u|, \varphi \rangle. \tag{8.3}$$

Furthermore when $\sigma^1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N_1})$ and $\sigma_i \in L^{p'_i}(\mathbb{R}^N)$, for any $i \geq N_1 + 1$, $\mathrm{div}\sigma \in L^{\frac{p^\star}{p^\star-1}}(\mathbb{R}^N)$ *and $u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, $\sigma \cdot \nabla u$ and $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ are bounded measures on $\mathbb{R}^N$ and one has*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sigma \cdot \nabla u = -\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}(\sigma) u \tag{8.4}$$

and

$$|\sigma^1 \cdot \nabla_1 u| \leq |\sigma^1|_\infty |\nabla_1 u|$$

Proof. Take $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\psi = 1$ on Suppt φ. Then if $u \in BV^{\vec{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\psi u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. By Proposition 8.2.2, there exists $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ such that u_n converges tightly to ψu in $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$. By the classical Green's formula

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sigma \cdot \nabla u_n \varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}(\sigma)(u_n \varphi) - \int_{\mathbb{R}^N} (\sigma \cdot \nabla \varphi) u_n.$$

Using the weak convergence of u_n towards ψu one gets that $\int (\sigma \cdot \nabla u_n)\varphi$ converges to $\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle$. By the assumptions on σ_i and $\partial_i u_n$, one has $\int \sigma_i \partial_i u_n \varphi \to \int \sigma_i \partial_i u \varphi$, for $i \geq N_1+1$, hence $\int (\sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n)\varphi \to \langle \sigma^1 \cdot \nabla_1 u, \varphi \rangle$. Furthermore, using for $\varphi \geq 0$, $|\int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u_n \varphi| \leq |\sigma^1|_{L^\infty(Suppt\varphi)} \int |\nabla_1 u_n| \varphi \to |\sigma^1|_{L^\infty(Suppt\varphi)} \int |\nabla_1 u| \varphi$, one gets (8.3). The identity (8.4) is easily obtained by letting φ go to $1_{\mathbb{R}^N}$, since all the measures involved are bounded measures. □

8.2.2 The approximated space $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$

Let $\epsilon > 0$ small, define

$$a_i^\epsilon = \frac{(p_i - 1)p_i \epsilon^2}{1 - \epsilon(p_i - 1)}, \ \epsilon_i = p_i \epsilon + a_i^\epsilon \text{ and } p_i^\epsilon = p_i(1 + \epsilon_i). \tag{8.5}$$

Note that one has for all $i \geq N_1 + 1$, $\frac{p_i(1+\epsilon_i)}{\epsilon_i} = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$. We define $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ as the closure of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ for the norm $|\nabla_1 v|_{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^N |\partial_i v|_{p_i^\epsilon}$. Then the critical exponent $p_\epsilon^\star$ for this space is defined by $\frac{N}{p_\epsilon^\star} = \frac{N_1}{1+\epsilon} + \sum_i \frac{1}{p_i^\epsilon} - 1$. Note that $p_\epsilon^\star$ satisfies

$$\frac{N}{p_\epsilon^\star} = \frac{N}{p^\star} - \frac{\epsilon N}{1 + \epsilon},$$

and as soon as ϵ is small enough, $p_\epsilon^+ < p_\epsilon^\star$. Let us finally define

$$\lambda_\epsilon = \frac{p_\epsilon^\star \epsilon}{1+\epsilon} + 1, \tag{8.6}$$

and note for further purposes that $\lambda_\epsilon p^\star = p_\epsilon^\star$.

Recall that as a consequence of the embedding of Troisi, [55] one has

$$\mathcal{D}^{1,\vec{p_\epsilon}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_\epsilon^*}(\mathbb{R}^N),$$

and there exists some $T_0^\epsilon > 0$, such that for all $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$,

$$T_0^\epsilon |u|_{p_\epsilon^*} \le \prod_{i=1}^N |\partial_i u|_{p_i^\epsilon}^{\frac{1}{N}}, \text{ and then } |u|_{p_\epsilon^*} \le \frac{1}{NT_0^\epsilon}(\sqrt{N_1}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^N |\partial_i u|_{p_i^\epsilon})$$

for all $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p_\epsilon}}(\mathbb{R}^N)$.

Let us define

$$\mathcal{K}_\epsilon = \inf_{u\in\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N),|u|_{p_\epsilon^\star}=1} \left[\frac{1}{1+\epsilon}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i^\epsilon}|\partial_i u|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon}\right]$$

and

$$\mathcal{K} = \inf_{u\in\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N),|u|_{p^\star}=1} \left[|\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i}\right]$$

It is clear by Proposition 8.2.2 that

$$\mathcal{K} = \inf_{u\in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N),|u|_{p^\star}=1} \left[\int |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i}\right]$$

Adapting the proof in [25] one has the following result

Theorem 8.2.3. *There exists $u_\epsilon \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$ non negative which satisfies $|u_\epsilon|_{p_\epsilon^\star} = 1$ and*

$$\mathcal{K}_\epsilon = \frac{1}{1+\epsilon}|\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i^\epsilon}|\partial_i u_\epsilon|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon}.$$

Furthermore there exists $l_\epsilon > 0$, so that

$$-\sum_{i=1}^{N_1} \partial_i(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\partial_i u_\epsilon) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i^\epsilon-2}\partial_i u_\epsilon) = l_\epsilon u_\epsilon^{p_\epsilon^\star-1}. \tag{8.7}$$

In the sequel we will use the notation div_1 as the divergence of some N_1 vector with respect to the N_1 first variables.

By multiplying equation (8.7) by u_ϵ and integrating one has $\mathcal{K}_\epsilon \le l_\epsilon \le p_\epsilon^+\mathcal{K}_\epsilon$, and as we will see in Proposition 8.3.1 that $\limsup \mathcal{K}_\epsilon \le \mathcal{K}$, if u_ϵ is an extremal function for $\mathcal{K}_\epsilon$, $|\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}$ and $|\partial_i u_\epsilon|_{p_i^\epsilon}$ are bounded independently on ϵ, hence one can extract from it a subsequence which converges weakly in $BV_{\mathrm{loc}}^{\vec{p}}$. In the sequel we will prove that by choosing conveniently the sequence u_ϵ, it converges up to subsequence to an extremal function for $\mathcal{K}$.

8.3 The main results

The main result of this paper is the following :

Theorem 8.3.1. *1) There exists $v_\epsilon \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$, $|v_\epsilon|_{p^\star_\epsilon} = 1$, an extremal function for $\mathcal{K}_\epsilon$, which converges in the following sense to $v \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$: v_ϵ converges to v in the distribution sense, and almost everywhere, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v|$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon} \to \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v|^{p_i}$ for all $i \geq N_1+1$, and $|v|_{p^\star} = 1$. Furthermore $\lim \mathcal{K}_\epsilon = \mathcal{K}$. As a consequence v is an extremal function for $\mathcal{K}$.*

2) v satisfies the partial differential equation :

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v) = l v^{p^\star-1},\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 v = |\nabla_1 v| \tag{8.8}$$

where $\mathcal{K} \leq l \leq p^+\mathcal{K}$.

The proof of Theorem 8.3.1 is given in the next subsection, and it relies of course on a convenient adaptation of the PL Lions compactness concentration theory. However, due to the fact that the exponents of the derivatives and the critical exponent vary with ϵ, we are led to introduce a power $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}$ of some convenient extremal function, - where λ_ϵ has been defined in (8.6)-, and to analyze the behaviour of this new sequence, which belongs to $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, and is bounded in that space, independently on ϵ, as we will see later.

In a second time we prove that

Theorem 8.3.2. *Let v be given by Theorem 8.3.1. Then $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ and there exists some constant $C(|v|_{p^\star})$ depending on the $L^{p^\star}$ norm of v and on universal constants, such that $|v|_\infty \leq C(|v|_{p^\star})$.*

8.3.1 Proof of Theorem 8.3.1

The proof is the consequence of several lemmata and propositions.

Lemma 8.3.1. *Suppose that $u \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, and that $|u|_{p^\star} \leq 1$, then*

$$\mathcal{K}|u|_{p^\star}^{p^+} \leq |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i}$$

and analogously if $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$, $|u|_{p^\star_\epsilon} \leq 1$

$$\mathcal{K}_\epsilon |u|_{p^\star_\epsilon}^{p^+_\epsilon} \leq \frac{1}{1+\epsilon}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i^\epsilon}|\partial_i u|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon}.$$

Hint of the proof :

Use $\frac{u}{|u|_{p^\star}}$ in the definition of $\mathcal{K}$ and the fact that if $|u|_{p^\star} \leq 1$, $|u|_{p^\star}^{p_i} \geq |u|_{p^\star}^{p^+}$.

Proposition 8.3.1. *One has*

$$\limsup \mathcal{K}_\epsilon \leq \mathcal{K}.$$

As a consequence any sequence (v_ϵ) of extremal functions for $\mathcal{K}_\epsilon$ is bounded independently on ϵ, more precisely there exists some positive constant c so that, for all $\epsilon > 0$, $|\nabla_1 v_\epsilon|_{1+\epsilon}, |\partial_i v_\epsilon|_{p_i^\epsilon} \leq c$, for all $i \geq N_1+1$.

Proof. Let $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{2}$ and let $u_\delta \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, (or $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$), so that $|u_\delta|_{p^*} = 1$ and

$$|\nabla_1 u_\delta|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i u_\delta|_{p_i}^{p_i} \le \mathcal{K} + \delta.$$

By definition of $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, there exists $v_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ such that $||v_\delta|_{p^\star} - 1| \le \delta$,

$$|\nabla_1 v_\delta|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i v_\delta|_{p_i}^{p_i} \le \mathcal{K} + 2\delta.$$

For ϵ small enough one has $||v_\delta|_{p_\epsilon^\star} - 1| \le 2\delta$. By considering $w_\delta^\epsilon = \frac{v_\delta}{|v_\delta|_{p_\epsilon^\star}}$, one sees that $w_\delta^\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $|w_\delta^\epsilon|_{p_\epsilon^\star} = 1$, and

$$\begin{aligned} |\nabla_1 w_\delta^\epsilon|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i w_\delta^\epsilon|_{p_i}^{p_i} &\le \frac{|\nabla_1 v_\delta|_1}{1-2\delta} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \frac{|\partial_i v_\delta|_{p_i}^{p_i}}{(1-2\delta)^{p_i}} \\ &\le \frac{1}{(1-2\delta)^{p^+}} (\mathcal{K} + 2\delta). \end{aligned}$$

By the Lebesgue's dominated convergence theorem, $|\nabla_1 w_\delta^\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} \to \frac{|\nabla_1 v_\delta|_1}{|v_\delta|_{p^*}}$, and $|\partial_i w_\delta^\epsilon|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon} \to \frac{|\partial_i v_\delta|_{p_i}^{p_i}}{|v_\delta|_{p^*}^{p_i}}$ for all $i \ge N_1 + 1$ when $\epsilon \to 0$, hence we get

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \mathcal{K}_\epsilon \le \limsup_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{1+\epsilon} |\nabla_1 w_\delta^\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i^\epsilon} |\partial_i w_\delta^\epsilon|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon} \right] \le \frac{\mathcal{K} + 2\delta}{(1-2\delta)^{p^+}},$$

which concludes the proof since δ is arbitrary.

□

Proposition 8.3.2. *Suppose that $w_\epsilon \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ satisfies $|w_\epsilon|_{p^\star} = 1$, and that $w_\epsilon \to v$ almost everywhere. Then for ϵ small enough $|w_\epsilon - v|_{p^\star} \le 1$.*

Proof. If $v \equiv 0$, there is nothing to prove. If $v \ne 0$, using Brezis Lieb Lemma, [10] one has $|w_\epsilon - v|_{p^\star} - (|w_\epsilon|_{p^\star} - |v|_{p^\star}) \to 0$ which implies that $\limsup |w_\epsilon - v|_{p^\star} < 1$, hence the result holds. This lemma will be used for $w_\epsilon = v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}$, where v_ϵ is some convenient extremal function, given in Lemma 8.3.2 below, and λ_ϵ has been defined in (8.6). □

Lemma 8.3.2. *Let u_ϵ be a non negative extremal function for $\mathcal{K}_\epsilon$, so that $|u_\epsilon|_{p_\epsilon^\star} = 1$. There exists $v_\epsilon \ge 0$ which satisfies*

$$\begin{aligned} |u_\epsilon|_{p_\epsilon^*} &= |v_\epsilon|_{p_\epsilon^*} = 1, \ |\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon} = |\nabla_1 v_\epsilon|_{1+\epsilon}, \ \textit{and} \ |\partial_i u_\epsilon|_{p_i^\epsilon} = |\partial_i v_\epsilon|_{p_i^\epsilon}, \ \textit{for all} \ i \ge N_1 + 1, \\ & \textit{and} \int_{B(0,1)} v_\epsilon^{p_\epsilon^\star} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Proof. This proof is as in [25], but we reproduce it here for the reader's convenience. Let $\alpha_i^\epsilon = \frac{p_\epsilon^*}{p_i^\epsilon} - 1, i = 1, \cdots, N$. For every $y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, and for any $u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p_\epsilon}}(\mathbb{R}^N)$, and $t > 0$, we set

$$u^{t,y}(x) = tu(t^{\alpha_1^\epsilon}(x_1 - y_1), \cdots, t^{\alpha_N^\epsilon}(x_N - y_N)).$$

Then, we have

$$|u|_{p_\epsilon^*} = |u^{t,y}|_{p_\epsilon^*},$$
$$|\partial_i u|_{p_i^\epsilon} = |\partial_i u^{t,y}|_{p_i^\epsilon}, \text{ for all } 1 \le i \le N,$$
$$|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} = |\nabla_1 u^{t,y}|_{1+\epsilon}.$$

Let u_ϵ be an extremal function for $\mathcal{K}_\epsilon$ so that $|u_\epsilon|_{p_\epsilon^*} = 1$. As in [25], [41], we recall the definition of the Levy concentration function, for $t > 0$:

$$Q_\epsilon(t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{E(y,t^{\alpha_1^\epsilon},\cdots,t^{\alpha_N^\epsilon})} |u_\epsilon|^{p_\epsilon^*},$$

where $E(y,t^{\alpha_1^\epsilon},\cdots,t^{\alpha_N^\epsilon})$ is the ellipse defined by

$$\{z = (z_1,\cdots,z_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \frac{(z_i-y_i)^2}{t^{2\alpha_i^\epsilon}} \le 1\},$$

with $y = (y_1,\cdots,y_N)$, and $\alpha_i^\epsilon = \frac{p_\epsilon^*}{p_i^\epsilon} - 1$ for all i.

Since for every $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} Q_\epsilon(t) = 0$, and $\lim\limits_{t\to\infty} Q_\epsilon(t) = 1$, there exists $t_\epsilon > 0$ such that $Q_\epsilon(t_\epsilon) = \frac{1}{2}$, and there exists $y_\epsilon \in \mathbb{R}^N$ such that

$$\int_{E(y_\epsilon,t_\epsilon^{\alpha_1^\epsilon},\cdots,t_\epsilon^{\alpha_N^\epsilon})} |u_\epsilon|^{p_\epsilon^*}(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Thus, by a change of variable one has for $v_\epsilon = u_\epsilon^{t_\epsilon,y_\epsilon}$:

$$\int_{B(0,1)} |v_\epsilon|^{p_\epsilon^*} = \frac{1}{2} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_\epsilon|^{p_\epsilon^*}.$$

Note for further purpose that v_ϵ is also extremal for $\mathcal{K}_\epsilon$.

□

Proposition 8.3.3. *Let $v_\epsilon \ge 0$ be in $\mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$, bounded in that space, independently on ϵ. Then for λ_ϵ defined in (8.6), the sequence $w_\epsilon = v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}$ is bounded in $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.*

Proof. One has

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| &= \lambda_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{\lambda_\epsilon-1}|\nabla_1 v_\epsilon| \\
&\le \lambda_\epsilon \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}\Big)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{\frac{(\lambda_\epsilon-1)(1+\epsilon)}{\epsilon}}\Big)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \\
&= \lambda_\epsilon \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}\Big)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{p_\epsilon^\star}\Big)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}
\end{aligned}$$

and for all $i > N_1$, using the definition in (8.5)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i} &= \lambda_\epsilon^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{(\lambda_\epsilon-1)p_i}|\partial_i v_\epsilon|^{p_i} \\
&\le \lambda_\epsilon^{p_i} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}\Big)^{\frac{1}{1+\epsilon_i}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{\frac{(\lambda_\epsilon-1)p_i^\epsilon}{\epsilon_i}}\Big)^{\frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_i}} \\
&= \lambda_\epsilon^{p_i} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}\Big)^{\frac{1}{1+\epsilon_i}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon^{p_\epsilon^\star}\Big)^{\frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_i}}
\end{aligned}$$

Then $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|$ and $\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i}$ for $i \geq N_1+1$ are bounded independently on ϵ, by the assumptions. $\square$

Let v_ϵ be given by Lemma 8.3.2. One has by the definition of λ_ϵ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon|^{p_\epsilon^\star} = 1 = \int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star}.$$

Let us define

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>R} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star} = \nu_\infty,$$

and

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>R} \left(|\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i} \right) = \mu_\infty$$

while

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>R} \left(\frac{1}{1+\epsilon} |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i^\epsilon} |\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon} \right) = \tilde{\mu}_\infty,$$

Remark 8.3.1. *Note that since* $\int_{B(0,1)} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star} = \frac{1}{2}$, *and* $\int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star} = 1, \ \ \nu_\infty \leq \frac{1}{2}$.

Theorem 8.3.3. *Let* $v_\epsilon \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}_\epsilon}(\mathbb{R}^N)$, *be given by Lemma 8.3.2, and* λ_ϵ *be defined in (8.6). There exist positive bounded measures on* $\mathbb{R}^N$: $\tau, \tilde{\tau}, \mu^i, \tilde{\mu}^i$, *for* $N_1+1 \leq i \leq N$, *and* ν, *a sequence of points* $x_j \in \mathbb{R}^N$, *and some positif reals* $\nu_j, \mu_j^i, \tau_j, \tilde{\tau}_j, j \in \mathbb{N}$, *so that for a subsequence*

1. v_ϵ, *and* $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}$ *converge both to* v, *almost everywhere and strongly in every* L^q_{loc}, $q < p^\star$, *and* $v \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.
2. $|\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| \rightharpoonup |\nabla_1 v| + \tau$, $|\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon} \rightharpoonup |\nabla_1 v| + \tilde{\tau}$, *with* $\tilde{\tau} \geq \tau$, *in* $M^1(\mathbb{R}^N)$ *weakly.*
3. $|\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i} \rightharpoonup |\partial_i v|^{p_i} + \mu^i$ *for all* $i \geq N_1+1$, $|\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon} \rightharpoonup |\partial_i v|^{p_i} + \tilde{\mu}^i$ *with* $\tilde{\mu}^i \geq \mu^i$, *in* $M^1(\mathbb{R}^N)$ *weakly.*
4. $|v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star} = |v_\epsilon|^{p_\epsilon^\star} \rightharpoonup |v|^{p^\star} + \nu := |v|^{p^\star} + \sum_j \nu_j \delta_{x_j}$ *in* $M^1(\mathbb{R}^N)$ *weakly.*
5. *One has* $\tau \geq \sum_j \tau_j \delta_{x_j}$, $\mu^i \geq \sum_j \mu_j^i \delta_{x_j}$, *for all* $i \geq N_1+1$, *and for any* $j \in \mathbb{N}$, $\nu_j^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \frac{1}{\mathcal{K}}(\tau_j + \sum_i \frac{1}{p_i}\mu_j^i)$, *and* $\nu_\infty^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \frac{1}{\mathcal{K}}\mu_\infty$.
6.
$$\begin{aligned} |\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|_1 \ &+ \ \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|_{p_i}^{p_i} \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v|^{p_i} \\ &+ \ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\tau + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \mu^i \right] + \mu_\infty. \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\epsilon} |\nabla_1 v_\epsilon|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} \ &+ \ \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i^\epsilon} |\partial_i v_\epsilon|_{p_i^\epsilon}^{p_i^\epsilon} \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \int |\partial_i v|^{p_i} \\ &+ \ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\tilde{\tau} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} \tilde{\mu}^i \right] + \tilde{\mu}_\infty. \end{aligned}$$

8.
$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon|^{p_\epsilon^\star} = 1 = \int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon|^{\lambda_\epsilon p^\star} \to \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^\star} + \int_{\mathbb{R}^N} \nu + \nu_\infty.$$

Proof. 1 The convergence of $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}$ is clear by using the compactness of the embedding from $BV^{\vec{p}}$ in L^q with $q < p^\star < p_\epsilon^\star$, on bounded sets of $\mathbb{R}^N$, the analogous for v_ϵ is also true since $q < \liminf p_\epsilon^\star$.

Let us prove the existence of $\tilde{\tau}, \tau, \mu^i, \tilde{\mu}^i, N_1 + 1 \le i \le N$, and ν. Indeed one has by extracting a subsequence the existence of $\tilde{\tau}$, since we know that $|\nabla_1 v| \le \liminf |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}$. The existence of τ is obtained from the same arguments. Furthermore, by Hölder's inequaltiy

$$\int |\nabla_1 (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|\varphi \quad \le \quad \lambda_\epsilon (\int |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}\varphi)^{\frac{1}{1+\epsilon}} (\int v_\epsilon^{p_\epsilon^\star}\varphi)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}.$$

Letting ϵ go to zero, since λ_ϵ goes to 1, one gets that $\tilde{\tau} \ge \tau$. We argue in the same manner to prove the analogous results for $|\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i}$ and $|\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}$. The existence of ν is clear.

We prove in the lines which follow that ν is purely atomic. This is classical, but we reproduce the proof for the convenience of the reader. Let

$$\mu = 2|\nabla_1 v| + \tau + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{2^{p_i-1}}{p_i}(\mu^i + 2|\partial_i v|^{p_i})$$

Claim 1 For all $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$(\int |\varphi|^{p^\star} d\nu)^{\frac{1}{p^\star}} \le (p^+)^{\frac{1}{N}+\frac{1}{p^\star}} (\int \mu)^{\frac{1}{N}+\frac{1}{p^\star}-\frac{1}{p^+}} \frac{1}{T_o} (\int |\varphi|^{p^+} d\mu)^{\frac{1}{p^+}} \tag{8.9}$$

To prove **Claim 1**, let us define $h_\epsilon = (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v)$. Using (8.2),

$$(\int |h_\epsilon \varphi|^{p^\star})^{\frac{1}{p^\star}} \le \frac{1}{T_o} \Pi_1^N (\int |\partial_i (h_\epsilon \varphi)|^{p_i})^{\frac{1}{Np_i}}. \tag{8.10}$$

We have defined ν and μ^i by the following vague convergences : $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon p^\star} \rightharpoonup v^{p^\star} + \nu$, $|\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i} \rightharpoonup |\partial_i v|^{p_i} + \mu^i$, and $|\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| \rightharpoonup |\nabla_1 v| + \tau$. By Bresis Lieb's Lemma, one derives that

$$|h_\epsilon|^{p^*} \rightharpoonup \nu,$$

while
$$|\partial_i h_\epsilon|^{p_i} \le 2^{p_i-1}(|\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i} + |\partial_i v|^{p_i}) \rightharpoonup 2^{p_i-1}(2|\partial_i v|^{p_i} + \mu^i),$$

and

$$|\nabla_1 h_\epsilon| \le |\nabla_1 (v_\epsilon)^{\lambda_\epsilon}| + |\nabla_1 v| \rightharpoonup 2|\nabla_1 v| + \tau \text{ vaguely}.$$

Using the fact that h_ϵ tends to 0 in $L^{p_i}(Suppt\varphi)$, for all i, since $p_i < p^\star$, one has $\int |h_\epsilon|^{p_i} |\partial_i \varphi|^{p_i} \to 0$. Passing to the limit in (8.10), one gets

$$\left(\int |\varphi|^{p^\star} d\nu\right)^{\frac{1}{p^\star}} \le \frac{1}{T_o}\left(\int |\varphi| d(2|\nabla v| + \tau)\right)^{\frac{N_1}{N}} \Pi_{i=N_1+1}^{N} \left(\int |\varphi|^{p_i} d(2^{p_i-1}(2|\partial_i v|^{p_i} + \mu^i))\right)^{\frac{1}{Np_i}}.$$

We then use for $i \geq N_1 + 1$

$$\int |\varphi|^{p_i} d(2^{p_i-1}(2|\partial_i v|^{p_i} + \mu^i)) \leq p^+ (\int \mu)^{1-\frac{p_i}{p^+}} (\int |\varphi|^{p^+} d\mu)^{\frac{p_i}{p^+}},$$

and

$$\int |\varphi| d(2|\nabla v| + \tau) \leq p^+ (\int \mu)^{1-\frac{1}{p^+}} (\int |\varphi|^{p^+} d\mu)^{\frac{1}{p^+}}.$$

Taking the power $\frac{1}{Np_i}$ and $\frac{N_1}{N}$ and multiplying the inequalities, one derives **Claim 1**.

By (8.9) one sees that ν is absolutely continuous with respect to μ, with for some constant c and for any borelian set E,

$$\nu(E) \leq c\mu(E)^{\frac{p^\star}{p^+}}$$

Let then $h \geq 0$ be μ integrable so that $\nu = h d\mu$. Then if x is a density point for μ, ie, so that $\lim_{r\to 0} \mu(B(x,r)) = 0$, one gets that $\frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \to 0$, hence if D is the at most numerable set where $\mu(\{x_j\}) > 0$, one has $h = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus D$. This implies that ν has only atoms that we will denote $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

We now prove 5. We still follow the lines in [25].

Let $\delta > 0$ small, $q_i = \frac{p_i p^\star}{p^\star - p_i}$, $\alpha_i = \frac{1}{q_i}$, (note that $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$), define for $j \in \mathbb{N}$ fixed, $\phi \in \mathcal{D}(B(0,1))$, $\phi(0) = 1$, $0 \leq \phi \leq 1$ the function ϕ_δ as $\phi_\delta(x) = \phi(\frac{x - x_j^1}{\delta^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{x - x_j^N}{\delta^{\alpha_N}})$. ϕ_δ satisfies $\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \phi_\delta|^{q_i} = \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \phi|^{q_i}$. In particular for all $i \leq N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \phi_\delta|^{p_i} v^{p_i} \leq (\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \phi_\delta|^{q_i})^{\frac{p_i}{q_i}} (\int_{B(x_j, \max_i \delta^{\alpha_i})} v^{p^\star})^{\frac{p_i}{p^\star}} \to 0, \tag{8.11}$$

when δ goes to zero.

Claim 2

$$\mathcal{K}\nu_j^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \limsup_{\delta\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\phi_\delta |\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i} \phi_\delta^{p_i} \right)$$

To prove **Claim 2**, we apply Lemma 8.3.1 with $|v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta|_{p^\star} \leq 1$

$$\mathcal{K}(\int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta|^{p^\star})^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta)| + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta)|^{p_i}.$$

We use

$$\begin{aligned} \Big| |\nabla_1 (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta)| - |\nabla_1 (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| \phi_\delta \Big| &\leq v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} |\nabla_1 \phi_\delta| \\ &\leq |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v| |\nabla_1 \phi_\delta| + v |\nabla_1 \phi_\delta|, \end{aligned}$$

hence by (8.11) when $p_i = 1$ and $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v \to 0$ in L^q_{loc} for all $q < p^\star$, this goes to zero in L^1 when ϵ and δ go to zero. For $i \geq N_1 + 1$, by the mean value's theorem

$$\begin{aligned} \Big| |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} \phi_\delta)|^{p_i} & - |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}) \phi_\delta|^{p_i} \Big| \\ &\leq p_i |(\partial_i \phi_\delta) v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| \ \Big| |\partial_i \phi_\delta| v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} + |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| \phi_\delta \Big|^{p_i - 1} \\ &\leq p_i \left(|\partial_i \phi_\delta| |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v| + |\partial_i \phi_\delta| v \right) \Big| |(\partial_i \phi_\delta) v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| + |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})| \phi_\delta \Big|^{p_i - 1}. \end{aligned}$$

Using Holder's inequality, (8.11) for $i \geq N_1+1$, the fact that $\left||\partial_i \phi_\delta| v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} + |\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})\phi_\delta|\right|^{p_i-1}$ is bounded in $L^{\frac{p_i}{p_i-1}}$, and $v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v \to 0$ in L^q_{loc} for all $q < p^\star$, this goes to zero in L^1, when ϵ and δ go to zero. **Claim 2** is proved.

We can now conclude, using the fact that $|\nabla_1 v|$ is orthogonal to Dirac masses, as a consequence of the results on the dimension of the support of $|\nabla_1 v|^s$, [33], and using the fact that $|\partial_i v|^{p_i}$ belongs to L^1, for $i \geq N_1+1$, that

$$\mathcal{K}\nu_j^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \limsup_{\delta\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \tau\phi_\delta + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} \mu^i \phi_\delta^{p_i}\right)$$

Defining $\tau_j = \limsup_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\tau\phi_\delta$ and $\mu_j^i = \limsup_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^i\phi_\delta^{p_i}$, one gets the first part of 5.

To prove the last part of 5, let $R>0$ large and ψ_R some $\mathcal{C}^\infty$ function which is 0 on $|x|<R$, and equals 1 for $|x|>R+1$, $0\leq\psi_R\leq 1$. It can easily be seen that for any $i\geq N_1+1$ and for any $\gamma_i \geq 1$

$$\int_{|x|>R+1} |\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i}\psi_R^{\gamma_i} \leq \int_{|x|>R} |\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i} \tag{8.12}$$

$$\int_{|x|>R+1} |\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|\psi_R^{\gamma_1} \leq \int_{|x|>R} |\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}| \tag{8.13}$$

and

$$\int_{|x|>R+1} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star}\psi_R^{p^\star} \leq \int_{|x|>R} |v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p^\star}. \tag{8.14}$$

And then by the definition of μ_∞

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|\psi_R + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i}\psi_R^{p_i} = \mu_\infty.$$

Let us remark that since $v \in BV^{\vec{p}}$, one has $\lim_{R\to+\infty}\int |\nabla_1 v|\psi_R + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int |\partial_i v|^{p_i}\psi_R^{p_i} + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^\star}\psi_R^{p^\star} = 0$.

We use once more $h_\epsilon = v_\epsilon^{\lambda_\epsilon} - v$, which goes to zero in L^q_{loc}. Note that since $|h_\epsilon|_{p^\star}\leq 1$, one also has $|h_\epsilon\psi_R|_{p^\star}\leq 1$ and then applying Lemma 8.3.1

$$\mathcal{K}\left(\int |h_\epsilon\psi_R|^{p^\star}\right)^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \int |\nabla_1(h_\epsilon\psi_R)| + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int |\partial_i(h_\epsilon\psi_R)|^{p_i}. \tag{8.15}$$

Since $\nabla\psi_R$ is compactly supported in $R<|x|<R+1$, and since $p_i<p^\star$ one has

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} h_\epsilon|\nabla_1(\psi_R)| + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i\psi_R|^{p_i}h_\epsilon^{p_i} = 0.$$

Then

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1(h_\epsilon\psi_R)| + \sum_{i=N_1+1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i(h_\epsilon\psi_R)|^{p_i} = \mu_\infty.$$

Note also that $\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\mathcal{K}(\int_{\mathbb{R}^N}|h_\epsilon\psi_R|^{p^\star})^{\frac{p^+}{p^\star}} = \mathcal{K}\nu_\infty^{\frac{p^+}{p^\star}}$, hence, taking the limit in (8.15), one gets $\mathcal{K}\nu_\infty^{\frac{p^+}{p^\star}} \leq \mu_\infty$.

To show 6. by the definition of τ and μ^i,

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|(1-\psi_R)+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i v_\epsilon^{\lambda_\epsilon}|^{p_i}(1-\psi_R)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v|+\int_{\mathbb{R}^N}\tau+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}(|\partial_i v|^{p_i}+\mu^i).$$

And then one gets 6. by writing $1=\psi_R+(1-\psi_R)$ and using (8.12) and (8.13).

7 can be proved in the same manner. 8 is obtained by gathering 4. and (8.14).

□

Proof. of Theorem 8.3.1 We take a subsequence $v_{\epsilon'}$ so that

$$\frac{1}{1+\epsilon'}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v_{\epsilon'}|^{1+\epsilon'}+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i^{\epsilon'}}\int|\partial_i v_{\epsilon'}|^{p_i^{\epsilon'}}=\mathcal{K}_{\epsilon'}$$

with $\lim\mathcal{K}_{\epsilon'}=\liminf\mathcal{K}_\epsilon$, in the sequel we will still denote it v_ϵ for simplicity .

We are going to prove both that $\limsup\mathcal{K}_\epsilon=\mathcal{K}=\liminf\mathcal{K}_\epsilon$, $\nu_\infty=\mu_\infty=0, \mu_j^i=\nu_j=0$, for all $j\in\mathbb{N}$, that for all i $|\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}\to|\partial_i v|^{p_i}$, tightly on $\mathbb{R}^N$, and that $\lim|\nabla_1(v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|=\lim|\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}=|\nabla_1 v|$, tightly on $\mathbb{R}^N$. Indeed, using the previous convergences in Theorem 8.3.3

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v| \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^N}\tau+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i v|^{p_i}+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^i+\mu_\infty\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v|+\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{\tau}+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i v|^{p_i}+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{\mu}^i+\tilde{\mu}_\infty\\
&\leq \lim\frac{1}{1+\epsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i^\epsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i(v_\epsilon)|^{p_i^\epsilon}\\
&= \liminf\mathcal{K}_\epsilon=\liminf\mathcal{K}_\epsilon(|v|_{p^\star}^{p^\star}+\sum\nu_j+\nu_\infty)^{\frac{p^+}{p^\star}}\\
&\leq \liminf\mathcal{K}_\epsilon\left((|v|_{p^\star}^{p^\star})^{\frac{p^+}{p^\star}}+(\sum\nu_j)^{\frac{p^+}{p^\star}}+\nu_\infty^{\frac{p^+}{p^\star}}\right)\\
&\leq \liminf\mathcal{K}_\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{p^\star}\right)^{\frac{p^+}{p^\star}}+\frac{\liminf\mathcal{K}_\epsilon}{\mathcal{K}}\left[\sum_j(\ \tau_j+\sum_{i=N_1+1}^N\frac{1}{p_i}\mu_j^i)+\mu_\infty\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \frac{\liminf \mathcal{K}_\epsilon}{\mathcal{K}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1 v| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v|^{p_i}\right)\\
&+ \quad \frac{\liminf \mathcal{K}_\epsilon}{\mathcal{K}}\left(\sum_j \tau_j + \sum_j \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\mu_j^i + \mu_\infty\right)
\end{aligned}
$$

Using the fact that $\limsup \mathcal{K}_\epsilon \leq \mathcal{K}$, $\int_{\mathbb{R}^N} \tau \geq \sum_j \tau_j$, $\int_{\mathbb{R}^N} \mu^i \geq \sum_j \mu^i_j$, one gets that we have equalities in place of inequalities everywhere we used them. In particular $(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^\star} + \sum_j \nu_j + \nu_\infty)^{\frac{p^+}{p^\star}} = (\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^\star})^{\frac{p^+}{p^\star}} + \sum_j \nu_j^{\frac{p^+}{p^\star}} + \nu_\infty^{\frac{p^+}{p^\star}}$, and then only one of the positive reals $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^\star}, \nu_j, \nu_\infty$, can be different from zero. But this imposes that the only one which is $\neq 0$ must be equal to one. By Remark 8.3.1, one then gets $\nu_\infty = 0$. On the other hand, let $j \in \mathbb{N}$, either $x_j \notin B(0,1)$ and then for δ small enough $\int_{B(x_j,\delta)} |v_\epsilon|^{p^\star_\epsilon} + \int_{B(0,1)} |v_\epsilon|^{p^\star_\epsilon} \leq 1$, hence $\nu_j = 0$, or $x_j \in B(0,1)$ and then $\nu_j \leq \lim \int_{B(0,1)} |v_\epsilon|^{p^\star_\epsilon} = \frac{1}{2}$, and once more $\nu_j = 0$. One then derives that $1 = |v_\epsilon|^{p^\star_\epsilon}_{p^\star_\epsilon} \to |v|^{p^\star}_{p^\star}$. By the definition of $\mathcal{K}$ one has

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} \leq |\nabla_1 v|_1 + \sum_{N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}|\partial_i v|^{p_i} \quad &\leq \quad |\nabla_1 v|_1 + \sum_{N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}|\partial_i v|^{p_i} + \tilde{\tau} + \sum_{N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\tilde{\mu}^i + \tilde{\mu}_\infty\\
&\leq \quad \liminf \mathcal{K}_\epsilon \leq \limsup \mathcal{K}_\epsilon \leq \mathcal{K}
\end{aligned}
$$

and then $\tilde{\tau} = \tau = \tilde{\mu}_\infty = \mu_\infty = \tilde{\mu}^i = \mu^i = 0$, $\lim |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}_{1+\epsilon} = \lim |\nabla_1 (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|_1 = |\nabla_1 v|_1$, and for all $i \geq N_1+1$, both $|\partial_i (v_\epsilon^{\lambda_\epsilon})|^{p_i}_{p_i}$ and $|\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}_{p_i^\epsilon}$ converge to $|\partial_i v|^{p_i}_{p_i}$. We have obtained that v is an extremal function, and $\lim \mathcal{K}_\epsilon = \mathcal{K}$.

We now prove that v satisfies (8.8). First recall that $l_\epsilon \geq \mathcal{K}_\epsilon \geq \frac{1}{p^+} l_\epsilon$, as we can see by multiplying (8.7) by v_ϵ the equation, integrating, and using $|v_\epsilon|^{p^\star_\epsilon}_{p^\star_\epsilon} = 1$. In particular l_ϵ is bounded. Let us extract from it a subsequence which converges to some $l \geq 0$.

Let us define $\sigma^{1,\epsilon} = |\nabla_1 v_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 v_\epsilon$, $\sigma_i^\epsilon = |\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon - 2}\partial_i v_\epsilon$ for $i \geq N_1+1$, and -with an obvious abuse of notation- $\sigma_\epsilon = (\sigma^{1,\epsilon}, \sigma^\epsilon_{N_1+1}, \cdots, \sigma^\epsilon_N)$. Note that $\sigma^{1,\epsilon}$ is bounded in L^q_{loc}, for any $q < \infty$. Indeed, let K be a compact set, one has by Holder's inequality $\int_K |\sigma^{1,\epsilon}|^q = \int_K |\nabla_1 v_\epsilon|^{\epsilon q} \leq (\int_K |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon})^{\frac{q\epsilon}{1+\epsilon}} |K|^{1-\frac{q\epsilon}{1+\epsilon}}$ and then $(\int_K |\sigma^{1,\epsilon}|^q)^{\frac{1}{q}} \leq ((1+\epsilon)\mathcal{K}_\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} |K|^{\frac{1}{q}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}$. Using the boundedness of $\mathcal{K}_\epsilon$ one gets that $\sigma^{1,\epsilon}$ is bounded in L^q_{loc}, hence converges up to subsequence weakly in L^q_{loc} to some σ^1 which satisfies for any compact set K $|\sigma^1|_{L^q(K)} \leq |K|^{\frac{1}{q}}$, hence $\sigma^1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N_1})$ and $|\sigma^1|_\infty \leq 1$. Furthermore, the strong convergence of $|\partial_i v_\epsilon|^{p_i^\epsilon}$ towards $|\partial_i v|^{p_i}$ in L^1 when $i \geq N_1+1$ ensures that $\sigma_i = |\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v$. From these convergences, one gets that defining $\sigma = (\sigma^1, \sigma_{N_1+1}, \cdots, \sigma_N)$, by the definition in Theorem 8.2.2, $\sigma^\epsilon \cdot \nabla v_\epsilon$ converges to $\sigma \cdot \nabla v$ in the distribution sense. Using $\sum_{N_1+1}^N \sigma_i^\epsilon \partial_i v_\epsilon \to \sum_{N_1+1}^N \sigma_i \partial_i v$ in L^1_{loc}, one derives that $\sigma^{1,\epsilon} \cdot \nabla_1 v_\epsilon$ converges to $\sigma^1 \cdot \nabla_1 v$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Since $\sigma^{1,\epsilon} \cdot \nabla_1 v_\epsilon$ is also bounded in L^1, this convergence is in fact vague. By lower semi-continuity for the vague topology, for any $\varphi \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$

$$
\int |\nabla_1 v|\varphi \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int |\nabla_1 v_\epsilon|^{1+\epsilon}\varphi = \liminf_{\epsilon \to 0} \int \sigma^{1,\epsilon} \cdot \nabla_1 v_\epsilon \varphi = \langle \sigma^1 \cdot \nabla_1 v, \varphi \rangle
$$

This implies that $|\nabla_1 v| \le \sigma^1 \cdot \nabla_1 v$ in the sense of measures, and since one always has the reverse inequality, we have obtained that $\sigma^1 \cdot \nabla_1 v = |\nabla_1 v|$.

We get by passing to the limit in (8.7) that v satisfies the partial differential equation :

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v) = l v^{p^\star-1}$$

with

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^{p^\star} = 1, \text{ and } \sigma^1 \cdot \nabla_1 v = |\nabla_1 v|.$$

Furthermore, multiplying the equation by v and integrating, one gets $l \ge \mathcal{K} > 0$.

□

8.3.2 Proof of Theorem 8.3.2

We will prove the L^∞ regularity when u is some extremal function which satisfies (8.8), with $l = 1$. Indeed one has

Lemma 8.3.3. *Let v_ϵ and v be as in Theorem 8.3.1. Then*

$$u(x) = v(l^{-1}x_1, \cdots, l^{-1}x_{N_1}, l^{-\frac{1}{p_{N_1+1}}}x_{N_1+1}, \cdots, l^{\frac{-1}{p_N}}x_N)$$

and

$$u_\epsilon(x) = v_\epsilon(l_\epsilon^{\frac{-1}{1+\epsilon}}x_1, \cdots, l_\epsilon^{\frac{-1}{1+\epsilon}}x_{N_1}, l_\epsilon^{-\frac{1}{p^\epsilon_{N_1+1}}}x_{N_1+1}, \cdots, l_\epsilon^{\frac{-1}{p^\epsilon_N}}x_N)$$

satisfy respectively

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1(u)) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = u^{p^\star-1}$$

with $\sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|$, and

$$-\mathrm{div}_1(|\nabla_1 u_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_\epsilon) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i u_\epsilon|^{p_i^\epsilon-2}\partial_i u_\epsilon) = u_\epsilon^{p_\epsilon^\star-1} \tag{8.16}$$

Furthermore u_ϵ converges tightly to u in $BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$.

We do not give the proof of this lemma, which is left to the reader.

In the sequel we will consider u and u_ϵ as in Lemma 8.3.3.

Lemma 8.3.4. *Suppose that $u \in BV^{\vec{p}}$ is as in Lemma 8.3.3. Suppose that g is Lipschitz continuous on $\mathbb{R}$, such that $g(0) = 0$ and $g' \ge 0$, then $g(u) \in BV^{\vec{p}}$, with $\sigma^1 \cdot \nabla_1(g(u)) = |\nabla_1(g(u))|$. Furthermore one has the identity*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_1(g(u))| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} g'(u)|\partial_i u|^{p_i} = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u^{p^\star-1} \tag{8.17}$$

Proof. In the following lines, we will use "UTS" to say that the convergence holds up to subsequence .

Note that $g(u_\epsilon) \in \mathcal{D}^{1,\vec{p_\epsilon}}(\mathbb{R}^N)$ by the mean value's theorem, since $g' \in L^\infty$, and $(g(u_\epsilon))_\epsilon$ is bounded in that space by the assumptions on u_ϵ, and then also in $BV^{\vec{p}}_{loc}$. Then since u_ϵ converges to u almost everywhere "UTS" and g is continuous, $g(u) \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, and $g(u_\epsilon)$ converges weakly to $g(u)$ in $BV^{\vec{p}}_{loc}$ "UTS" . In particular it converges to $g(u)$ in L^q_{loc}, "UTS" for all $q < p^\star$. Let us observe that the sequence of measures $\sigma_\epsilon \cdot \nabla(g(u_\epsilon))$ converges "UTS" to $\sigma \cdot \nabla(g(u))$: Since $\sigma_\epsilon \cdot \nabla g(u_\epsilon)$ is bounded in L^1, it is sufficient to prove that it converges in the distribution sense. To check this, let $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, take $q < p^\star$ so that for ϵ small enough $p_i^\epsilon < q$, then $\sigma_\epsilon \to \sigma$ "UTS" in $L^{q'}_{loc}$. Using $g(u_\epsilon) \to g(u)$ in L^q_{loc} strongly and "UTS" for all $q < p^\star$, one has $\int g(u_\epsilon)\sigma_\epsilon \cdot \nabla\varphi \to \int g(u)\sigma \cdot \nabla\varphi$. Secondly note that $u_\epsilon^{p_\epsilon^\star - 1} g(u_\epsilon) \leq |g'|_\infty |u_\epsilon|^{p_\epsilon^\star}$. By the strong convergence of $(u_\epsilon)^{p_\epsilon^\star}$ in L^1 one can suppose that "UTS" is dominated by a function h in L^1, hence so does $u_\epsilon^{p_\epsilon^\star - 1} g(u_\epsilon)$. By the almost everywhere convergence "UTS"of $u_\epsilon^{p_\epsilon^\star - 1} g(u_\epsilon)$ to $u^{p^\star - 1} g(u)$ and the Lebesgue's dominated convergence theorem, one gets that for any $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\int u_\epsilon^{p_\epsilon^\star - 1} g(u_\epsilon)\varphi \to \int u^{p^\star - 1} g(u)\varphi$. We have obtained that $\int \sigma_\epsilon \cdot \nabla(g(u_\epsilon))\varphi \to \int \sigma \cdot \nabla(g(u))\varphi$, for any φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, hence also for φ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Furthermore, by lower semicontinuity one has for all $\varphi \geq 0$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\int |\nabla_1(g(u))|\varphi &\leq \liminf_{\epsilon \to 0} \int |\nabla_1(g(u_\epsilon))|^{1+\epsilon}\varphi \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \int (g'(u_\epsilon))^{1+\epsilon} |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\varphi \\
&\leq \liminf_{\epsilon \to 0} |g'|_\infty^\epsilon \int (g'(u_\epsilon)) |\nabla_1 u_\epsilon|^{1+\epsilon}\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \int \sigma^{1,\epsilon} \cdot \nabla_1(g(u_\epsilon))\varphi \\
&= \int \sigma^1 \cdot \nabla_1(g(u))\varphi
\end{aligned}$$

This implies since one also has $\sigma^1 \cdot \nabla_1(g(u)) \leq |\nabla_1 g(u)|$, that $\sigma^1 \cdot \nabla_1(g(u)) = |\nabla_1(g(u))|$.

To get identity (8.17) it is then sufficient to multiply the equation (8.16) by $g(u_\epsilon)\varphi$, and pass to the limit using the previous convergence. Next one can let φ go to $1_{\mathbb{R}^N}$ since all the measures involved are bounded measures.

$\square$

Corollary 8.3.1. *Let u be as in Lemma 8.3.3. For any L and $a > 0$, $(u \min(u^a, L)) \in BV^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, $\sigma^1 \cdot \nabla_1(u \min(u^a, L)) = |\nabla_1(u \min(u^a, L))|$, and*

$$\int |\nabla_1(u \min(u^a, L))| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{p_i}}\right)^{p_i - 1} \int |\partial_i(u \min(u^{\frac{a}{p_i}}, L))|^{p_i} \leq \int u^{p^\star} \min(u^a, L).$$

Proof. We use Lemma 8.3.4 with $g(u) = u \min(u^a, L)$ and equation (8.17). Then it is sufficient to observe that

$$\int g'(u)|\partial_i u|^{p_i} \geq \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{p_i}}\right)^{p_i - 1} \int |\partial_i(u \min(u^{\frac{a}{p_i}}, L))|^{p_i}.$$

$\square$

We now prove the following

Proposition 8.3.4. *Let u be as in Lemma 8.3.3, then $u \in L^\infty$.*

Proof. This proof follows the lines in [28] and [25]. Once more, we reproduce it here for the sake of completeness. We begin to prove that $u \in L^q$ for all $q < \infty$. In the sequel, c denotes some positive constant which does not depend on k nor on a, which can vary from one line to another. Let k to choose later, and write for all p_j, (recall that $p_j = 1$ for $j \leq N_1$) :

$$\begin{aligned}\int u^{p^\star} \min(u^{ap_j}, L^{p_j}) &= \int_{u\leq k} u^{p^\star} (\min(u^a, L))^{p_j} + \int_{u\geq k} u^{p^\star} (\min(u^a, L))^{p_j} \\ &\leq k^{ap_j} \int |u|^{p^\star} + (\int_{u\geq k} u^{p^\star})^{1-\frac{p_j}{p^\star}} \left(\int (u\min(u^a, L))^{p^\star}\right)^{\frac{p_j}{p^\star}}.\end{aligned}$$

Using the embedding from $BV^{\vec{p}}$ in $L^{p^\star}$ one has

$$\left(\int (u\min(u^a, L))^{p^\star}\right)^{\frac{1}{p^\star}} \leq c\left(\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| + \sum_{j=N_1+1}^{N} (\int |\partial_j(u\min(u^a, L))|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}}\right). \tag{8.18}$$

Using Corollary 8.3.1, for $u\min(u^{ap_j}, L)$ one gets for all j

$$(1+a)^{-p_j+1} \int |\partial_j(u\min(u^a, L))|^{p_j} \leq \int u^{p^\star} \min(u^{ap_j}, L^{p_j})$$

and then defining $I_j = (\int |\partial_j(u\min(u^a, L))|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}}$ and $\epsilon_k = \int_{u\geq k} u^{p^\star}$,

$$I_j \leq c(1+a)\left(k^a(\int u^{p^\star})^{\frac{1}{p_j}} + \epsilon_k^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p^\star}}\left[\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| + \sum_{i=N_1+1}^{N} I_i\right]\right)$$

and

$$\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| \leq c(1+a)\left(k^a\int u^{p^\star} + \epsilon_k^{1-\frac{1}{p^\star}}\left[\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| + \sum_{i=N_1+1}^{N} I_i\right]\right).$$

Summing over j one gets

$$\begin{aligned}\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| &+ \sum_{j=N_1+1}^{N} I_j \\ &\leq c(1+a)\left(k^a \sum_{j=1}^{N} |u|_{p^\star}^{\frac{p^\star}{p_j}}\right. \\ &+ \left.\sum_{j=1}^{N} \epsilon_k^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p^\star}}(\int |\nabla_1(u\min(u^a, L))| + \sum_{i=N_1+1}^{N} I_i)\right).\end{aligned}$$

Choosing k_a so that $c(a+1)\sum \epsilon_k^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p^\star}} < \frac{1}{2}$, (recall that $p_j < p^\star$ for all j and $\epsilon_k \to 0$ when $k \to +\infty$), we have obtained

$$\frac{1}{2}\left[\int |\ \nabla_1(u\min(u^a, L))| + \sum_{j=N_1+1}^{N} I_j\right] \le c(1+a)k_a^a \sum_{j=1}^{N} |u|_{p^\star}^{\frac{p^\star}{p_j}},$$

hence, coming back to (8.18)

$$|u\min(u^a, L)|_{p^\star} \le c(1+a)k_a^a \sum_{j=1}^{N} |u|_{p^\star}^{\frac{p^\star}{p_j}}.$$

Letting L go to ∞ one gets $|u^{a+1}|_{p^\star} \le C'(|u|_{p^\star})(1+a)k_a^a$, taking the power $\frac{1}{a+1}$, one has obtained that for $q = p^\star(a+1)$,

$$|u|_q \le C'(|u|_{p^\star})^{\frac{1}{1+a}}(1+a)^{\frac{1}{a+1}} k_a^{\frac{a}{a+1}},$$

and then u belongs to L^q for all $q < \infty$.

To prove that $u \in L^\infty$, we still follow the lines in [25].

Choose $q > p^\star$ so that $\epsilon := \frac{-1}{p^\star} + (1-\frac{p^\star}{q})(1-\frac{1}{p^\star})\frac{1}{p^+-1} > 0$. Let $\varphi_k = (u-k)_+$, and $A_k = \{x, u(x) > k\}$. Let us begin to note that A_k is of finite measure for all $k > 0$, since

$$|\{x, u(x) > k\}|k^{p^\star} \le \int_{u>k} |u|^{p^\star} \le |u|_{p^\star}^{p^\star}.$$

We then deduce that for $k > 0$, $(u-k)_+ \in L^1$, since

$$\int (u-k)^+ \le \int_{u\ge k} u \le \int_{u \ge k} \frac{u^{p^\star}}{k^{p^\star - 1}}. \tag{8.19}$$

We now apply Lemma 8.3.4 with $g(u) = (u-k)^+$. Using (8.17) one gets

$$\begin{aligned}
|\nabla_1 \varphi_k|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i \varphi_k|_{p_i}^{p_i} &= \int u^{p^\star - 1}(u-k)^+ \\
&\le |u|_q^{p^\star-1} |A_k|^{(1-\frac{p^\star}{q})(1-\frac{1}{p^\star})} |\varphi_k|_{p^\star} \\
&\le c|A_k|^{(1-\frac{p^\star}{q})(1-\frac{1}{p^\star})} |\varphi_k|_{p^\star}.
\end{aligned}$$

We then have since $|\varphi_k|_{p^\star} \le |u|_{p^\star} = 1$, by Lemma 8.3.1

$$\begin{aligned}
|\varphi_k|_{p^\star}^{p^+} &\le c\left(|\nabla_1 \varphi_k|_1 + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i} |\partial_i \varphi_k|_{p_i}^{p_i}\right) \\
&\le c|A_k|^{(1-\frac{p^\star}{q})(1-\frac{1}{p^\star})} |\varphi_k|_{p^\star}.
\end{aligned}$$

hence

$$|\varphi_k|_{p^\star} \le c|A_k|^{\epsilon + \frac{1}{p^\star}},$$

and using Hölder's inequality, one derives $\int_{\mathbb{R}^N}(u-k)_+ \le |A_k|^{1-\frac{1}{p^\star}}|\varphi_k|_{p^\star} \le c|A_k|^{1+\epsilon}$.

Let $y(k) = \int_k^\infty |A_\tau| d\tau$, then $y(k) = \int_{\mathbb{R}^N}(u-k)_+ \le c(-y'(k))^{1+\epsilon}$, and integrating one obtains

$$-y^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(u(s)) + y^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(k) \ge \frac{\epsilon}{1+\epsilon} c^{\frac{-1}{1+\epsilon}}(u(s)-k)$$

hence for any s, recalling (8.19), for some constants b and $\gamma > 0$:

$$u(s) - k \le \frac{1+\epsilon}{\epsilon} c^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{|u|_{p^\star}^{\frac{p^\star \epsilon}{1+\epsilon}}}{k^{\frac{(p^\star-1)\epsilon}{1+\epsilon}}} \le \frac{b}{k^\gamma}.$$

Optimizing with respect to k, ie taking the infimum one gets that

$$u(s) \le c(|u|_{p^\star})$$

□

Remark 8.3.2. *Let $q_1, \cdots, q_m$ be such that $\{p_{N_1+1}, \cdots, p_N\} = \{q_1, \cdots, q_m\}$, and $q_i \ne q_j$ when $i \ne j$.*

Note that one could consider in place of $\mathcal{K} = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}, |u|_{p^\star}=1} |\nabla_1 u|_1 + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i}$ the infimum

$$\tilde{\mathcal{K}} = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N), |u|_{p^\star}=1} |\nabla_1 u|_1 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{q_j}\int \left(\sum_{i, p_i = q_j} |\partial_i u|^2\right)^{\frac{q_j}{2}}\right)$$

and prove the existence of an extremal function with obvious changes.

8.4 Counter example

We prove here that when $N_1 = N-1$, an extremal cannot be of the form $w(x) = u(x')v(x_N)$, with $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$.

We suppose by contradiction that there exists such extremal function, then we can suppose that both u and v are non negative and we then have the equation

$$-\mathrm{div}_1(\sigma_1(x')) - (|v'|^{p-2}v')'|u|^{p-2}u = u^{p^\star-1}v^{p^\star-1}$$

Let us also observe that since $w \in BV^{\vec{p}}$, and we know that $w \in L^\infty$, one has $u \in L^p \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, hence $u \in L^q$ for all $q \in [p, \infty]$ and $v \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Since $v' \in L^p$ one easily obtains that v goes to zero at $\pm\infty$.

Multiply the equation by u and integrate one gets

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_1 u| - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^p (|v'|^{p-2}v')' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u^{p^\star} v^{p^\star-1}$$

Mutliply by v' one gets

$$-|v'|^p \frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^p + v\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\nabla_1 u| = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u^{p^\star}\frac{v^{p^\star}}{p^\star} + cte$$

By this identity one sees that v' also has a finite limit at $\pm\infty$ which implies since it belongs to L^p, that this limit is 0. Then $cte = 0$. We have obtained that v satisfies

$$|v'|^p = c_1 v - c_2 v^{p^\star}$$

with $c_1 > 0, c_2 > 0$. Note that then $v \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p^\star - 1}}$.

Since v has one global maximum, this value is achieved, since from the equation v' cannot change sign unless the right hand side be zero. Since v goes to zero at ∞, for $x > M$, $v < \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p^\star - 1}}$, hence there exists a last point $\bar{x}$ on which v has the value $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p^\star - 1}}$, and on the intervall $[\bar{x}, \infty[$, v' does not change sign (it is then < 0). Since

$$\frac{v'}{(c_1 v - c_2 v^{p^\star})^{\frac{1}{p}}} = -1$$

using the change of variable $v(x) = y$, integrating between $\bar{x}$ and $+\infty$ one gets

$$+\infty = \int_0^{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p^\star - 1}}} \frac{dy}{(c_1 y - c_2 y^{p^\star})^{\frac{1}{p}}}$$

But one can easily see that the integral on the right hand side is convergent when $p > 1$.

Chapitre 9

Utilisation du lemme du col pour un problème anisotrope sous critique

Considérons à nouveau $\Omega =]0,1[^N$

Soit $p^+ < q < p^\star$. On cherche des solutions positives dans $X^b(\Omega)$ de l'équation

$$-\mathrm{div}_1\left(\frac{\nabla_1 u}{|\nabla_1 u|}\right) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = u^{q-1}, \tag{9.1}$$

Plus précisément, nous dirons que $u \in X^b(\Omega)$ est solution de (9.1) si il existe $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$ tel que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i(|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u) = u^{q-1}, \text{ sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 u = |\nabla_1 u|, \text{ au sens des mesures sur } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ sur } \Omega, \\ |\sigma^1|_\infty \leq 1, \\ \sigma^1 \cdot \vec{n} u = -u, \text{ presque partout sur } \partial\Omega^v, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega^h. \end{cases}$$

9.1 Problème approché

On note pour $\epsilon > 0$, $X_0^\epsilon(\Omega) = \{u \in X^\epsilon(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, et

$$|u|_{\vec{p_\epsilon}} = |\nabla_1 u|_{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i}.$$

On pose également

$$|u|_{\vec{p}} = \int_\Omega |\nabla_1 u| + \sum_{i=N_1+1}^{N} |\partial_i u|_{p_i}.$$

Notons que l'inégalité de Poincaré nous permet de montrer que $|u|_{\vec{p_\epsilon}}$ est une norme sur $X_0^\epsilon(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle, et que $|u|_{\vec{p}}$ est une norme sur $X_0(\Omega)$, et sur $X_0^b(\Omega)$.

On introduit pour $u \in X_0^\epsilon(\Omega)$

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q,$$

et

$$I_\epsilon(u) = J_\epsilon(u) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega|.$$

On suppose ϵ suffisamment proche de 0 pour que $\epsilon + 1 < p^+$. Remarquons que I_ϵ et J_ϵ sont différentiable sur $X_0^\epsilon(\Omega)$, avec

$$\langle DI_\epsilon u, v\rangle = \langle DJ_\epsilon u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla_1 u|^{\epsilon-1}\nabla_1 u \cdot \nabla_1 v + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \partial_i v - \int_\Omega |u|^{q-2}uv.$$

Dans cette section, nous montrons l'existence d'un point critique de I_ϵ. Notons que I_ϵ et J_ϵ ont les mêmes points critiques.

Définition 9.1.1. Soit $(V, ||\cdot||)$ un espace de Banach, et $E \in \mathcal{C}^1(V)$. On dit que E satisfait les conditions de Palais-Smale lorsque toute suite de Palais Smale pour E converge fortement dans V, pour une sous suite, au sens de la norme. Autrement dit, pour toute suite $(u_n)_n$ de V telle que

1. $E(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$,
2. $DE(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ dans V',

alors u_n converge fortement pour une sous suite vers un élément de V.

Rappelons le Lemme du col [52]

Théorème 9.1.2 (Lemme du col)**.** *Soit V un espace de Banach, et $E \in \mathcal{C}^1(V)$. Supposons que E satisfait les conditions de Palais-Smale, et que E possède une "géométrie de la montagne". C'est à dire :*

1. $E(0) = 0$,
2. $\exists \rho > 0, \alpha > 0,\ ||u|| = \rho \Rightarrow E(u) \geq \alpha$,
3. $\exists u_1 \in V; ||u_1|| \geq \rho$ *et* $E(u_1) < \alpha$.

   On définit

   $$P = \{p \in \mathcal{C}^0([0,1]; V);\ P(0) = 0,\ P(1) = u_1\}.$$

   Alors

   $$\beta = \inf_{p\in P}\sup_{u\in p} E(u) \geq \alpha$$

   est une valeur critique.

Proposition 9.1.3. *I_ϵ satisfait la condition de Palais-Smale : Soit u_n une suite de $X_0^\epsilon(\Omega)$ telle que*

1. $I_\epsilon(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, *pour un* $c \in \mathbb{R}$,
2. $DI_\epsilon(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dans* $(X_0^\epsilon(\Omega))'$,

Alors u_n converge fortement dans $X^\epsilon(\Omega)$ pour une sous suite vers un élément $u \in X_0^\epsilon(\Omega)$.

Démonstration. On peut supposer que $\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{1}{q} > 0$. On calcule :

$$I_\epsilon(u_n) - \frac{1}{q}\langle DI_\epsilon u_n, u_n\rangle = \left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega|,$$

et par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que pour n grand

$$I_\epsilon(u_n) - \frac{1}{q}\langle DI_\epsilon u_n, u_n\rangle \leq C,$$

et donc, comme $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} > 0$ pour tout $i > N_1$, la suite u_n est bornée dans $X_0^\epsilon(\Omega)$. On peut en extraire une sous suite qui converge faiblement vers $u \in X^\epsilon(\Omega)$, et fortement dans $L^q(\Omega)$ par la compacité de l'injection de $X^\epsilon(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. Par continuité de la trace pour la topologie faible sur X^ϵ, $u \in X_0^\epsilon(\Omega)$.

D'autre part, $|\nabla_1 u_n|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_n$ est bornée dans $L^{\frac{\epsilon+1}{\epsilon}}$, et $|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n$ est bornée dans $L^{p_i'}(\Omega)$. Il existe donc $\sigma^1 \in L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, et une sous suite de $|\nabla_1 u_n|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_n$ qui converge faiblement vers σ^1 dans $L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)$, et il existe $\sigma_i \in L^{p_i'}(\Omega)$, telle que pour une sous suite $|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n \rightharpoonup \sigma_i$ faiblement dans $L^{p_i'}(\Omega)$.

Par ailleurs, puisque u_n converge fortement vers u dans L^q (et en particulier presque partout), on a $\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n u \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega |u|^q$, et donc en utilisant $\langle DI_\epsilon u_n, u\rangle \to 0$,

$$\int |\nabla_1 u_n|^{\epsilon-1}\nabla_1 u_n \cdot \nabla_1 u + \sum_{i>N_1}\int |\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n \partial_i u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |u|^q = \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u + \sum_{i>N_1}\int \sigma_i \partial_i u.$$

De plus, en utilisant $\langle DI_\epsilon u_n, u_n\rangle \to 0$, et $\int_\Omega |u_n|^q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |u|^q$, on obtient

$$\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1}\int |\partial_i u_n|^{p_i} \underset{n\to\infty}{\to} \int |u|^q,$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} - \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u\right) + \sum_{i>N_1}\left(\int |\partial_i u_n|^{p_i} - \int \sigma_i \partial_i u\right) = 0.$$

Or, par semi continuité inférieure pour la topologie faible, et l'inégalité de Hölder

$$\left|\int \sigma_i \partial_i u\right| \leq |\sigma_i|_{p_i'}|\partial_i u|_{p_i} \leq \varliminf_{n\to\infty} |\partial_i u_n|_{p_i}^{p_i},$$

et

$$\left|\int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u\right| \leq |\sigma^1|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon} \leq \varliminf_{n\to\infty} |\nabla_1 u_n|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon},$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} - \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u\Big) + \sum_{i>N_1}\Big(\int |\partial_i u_n|^{p_i} - \int \sigma_i \partial_i u\Big) \\
&\geq \varliminf_{n\to\infty}\Big(\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} - \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u\Big) + \varliminf_{n\to\infty}\sum_{i>N_1}\Big(\int |\partial_i u_n|^{p_i} - \int \sigma_i \partial_i u\Big) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\varliminf_{n\to\infty}\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} = \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u, \text{ et pour tout } i > N_1,\ \varliminf_{n\to\infty}\int |\partial_i u_n|^{p_i} = \int \sigma_i \partial_i u.
$$

On a donc pour une sous suite $\lim\limits_{n\to\infty}\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} = \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u$ ce qui entraine puisqu'on a

$\lim\limits_{n\to\infty}\int |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon} = \int \sigma^1 \cdot \nabla_1 u \leq (\lim |\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon})^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} |\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{\frac{1}{1+\epsilon}}$, en divisant par $(\lim\limits_{n\to\infty}|\nabla_1 u_n|^{1+\epsilon})^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}$ que $|\nabla_1 u_n|_{1+\epsilon} \to |\nabla_1 u|_{1+\epsilon}$ et donc la convergence forte de $\nabla_1 u_n$ vers $\nabla_1 u$ dans $L^{1+\epsilon}$ par le lemme 5.1.11. En particulier $\sigma^1 = |\nabla_1 u|^{\epsilon-1}\nabla_1 u$. Par le même raisonnement, on obtient également $|\partial_i u_n - \partial_i u|_{p_i} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et $\sigma_i = |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u$.

□

Nous allons maintenant montrer que I_ϵ a une "géométrie de la montagne".

Proposition 9.1.4. *Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\phi \neq 0$, Il existe t assez grand ne dépendant pas de ϵ tel que*

$I_\epsilon(t\phi) := I_\epsilon(e) < 0$.

Démonstration. On écrit, puisque $1+\epsilon < p^+$, et $p_i < p^+$ pour tout i, pour $t > 1$:

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon(t\phi) &= t^{1+\epsilon}\frac{1}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 \phi|^{1+\epsilon} + \sum_{N_1+1}^{N} t^{p_i}\frac{1}{p_i}\int |\partial_i \phi|^{p_i} - \frac{1}{q}t^q \int |\phi|^q + \frac{1}{1+\epsilon}|\Omega| \\
&\leq t^{p^+}C_1 - t^q C_2 + C_3,
\end{aligned}
$$

avec C_1, C_2, C_3 constantes positives ne dépendant pas de ϵ. Ainsi, puisque $p^+ < q$, il existe t suffisamment grand tel que $I_\epsilon(t\phi) < 0$. On note $e = t\phi$.

□

Lemme 9.1.5. *Soit c la constante d'injection suivante de $X_0(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$:*

$$
\frac{1}{c} = \inf_{u\in X_0(\Omega), |u|_q=1} |u|_{\vec{p}},
$$

et soit c_ϵ la constante d'injection suivante de $X_0^\epsilon(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$:

$$
\frac{1}{c_\epsilon} = \inf_{u\in X_0^\epsilon(\Omega), |u|_q=1} |u|_{\vec{p_\epsilon}}
$$

Alors

$$
\frac{1}{c} = \inf_{u\in X^b(\Omega), u=0 \text{ sur } \partial\Omega^h, |u|_q=1} |u|_{\vec{p}} + \int_{\partial\Omega^v} |u|,
$$

et $c_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} c$.

Démonstration. Par inclusion d'ensembles, on a

$$\frac{1}{c} \geq \inf_{u \in X^b(\Omega), u=0 \text{ sur } \partial\Omega^h, |u|_q=1} |u|_{\vec{p}} + \int_{\partial\Omega^v} |u|.$$

Pour l'autre inégalité, d'après le corollaire 4.3.4, pour $\delta > 0$ donné il existe $u_\delta \in X_0(\Omega)$, tel que $|u_\delta|_q = 1$, et $|u_\delta|_{\vec{p}} \leq \frac{1}{c} + \delta$. Par le Théorème 2.4.15, il existe $v_\delta \in X_0(\Omega) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tel que

$$|u_\delta - v_\delta|_{\vec{p}} \leq \delta.$$

En particulier, $v_\delta \in X_0^\epsilon(\Omega)$. Or, $|\nabla_1 v_\delta|^{\epsilon+1}$ converge partout vers $|\nabla_1 v_\delta|$ lorsque ϵ tend vers 0, et pour une constante $\epsilon_0 > 0$, on a pour tout $\epsilon < \epsilon_0$

$$|\nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon} \leq \sup\{1, |\nabla_1 v_\delta|^{1+\epsilon_0}\},$$

donc par le Théorème de Convergence Dominée :

$$|v_\delta|_{\vec{p_\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} |v_\delta|_{\vec{p}}.$$

quitte à diviser par $|v_\delta|_{\vec{p_\epsilon}}$, on peut donc supposer que $|v_\delta|_{\vec{p_\epsilon}} = 1$.

Enfin, on a $\frac{1}{c_\epsilon} \leq |v_\delta|_{\vec{p_\epsilon}}$, on obtient donc

$$\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \frac{1}{c_\epsilon} \leq \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} |v_\delta|_{\vec{p_\epsilon}} = |v_\delta|_{\vec{p}} \leq |u_\delta|_{\vec{p}} + \delta \leq \frac{1}{c} + 2\delta,$$

et donc $\overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \frac{1}{c_\epsilon} \leq \frac{1}{c}$ puisque δ est arbitraire.

Pour l'inégalité inverse, soit $u_\epsilon \in X_0^\epsilon(\Omega)$ qui réalise $|u_\epsilon|_q = 1$, et $\frac{1}{c_\epsilon} = |u_\epsilon|_{\vec{p_\epsilon}}$. Par ce qui précède, u_ϵ est bornée dans $X^b(\Omega)$ indépendamment de ϵ. On en extrait une sous suite qui converge faiblement dans $X^b(\Omega)$ et fortement dans $L^q(\Omega)$ par la compacité de l'injection de X^b dans L^q puisque $q < p^*$. Par continuité de la trace, $u = 0$ sur $\partial\Omega^h$, et donc par semi continuité inférieure pour la topologie faible dans $L^{p_i}(\Omega)$, et en utilisant comme dans les sections précédentes

$$\int_\Omega |\nabla_1 u| + \int_{\partial\Omega^v} |u| \leq \underline{\lim} |\nabla_1 u_\epsilon|_{1+\epsilon}$$

on obtient

$$\frac{1}{c} \leq |u|_{\vec{p}} + \int_{\partial\Omega^v} |u| \leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} |u_\epsilon|_{\vec{p_\epsilon}} = \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \frac{1}{c_\epsilon}.$$

□

Proposition 9.1.6. *Il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ indépendantes de ϵ telle que pour tout $v \in X_0^\epsilon(\Omega)$, $|u|_{\vec{p}} = \beta$ entraine $I_\epsilon(v) \geq \alpha$.*

Démonstration. Supposons que $|u|_{\vec{p}} \geq 1$ Alors pour tout $i > N_1$ on a $|\partial_i u|_{p_i} \leq 1$, $|\nabla_1 u|_1 \leq 1$, et donc

$$|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} \geq |\partial_i u|_{p_i}^{p^+}, \text{ et } |\nabla_1 u|_1 \geq |\nabla_1 u|_1^{p^+}.$$

Soit c la constante d'injection de $X_0(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

On a

$$\int_\Omega |\nabla_1 u| \leq \left(\int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |\Omega|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \leq \frac{1}{1+\epsilon}\int_\Omega |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(u) &= \frac{1}{1+\epsilon}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega| + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}|\partial_i u|_{p_i}^{p_i} - \frac{1}{q}|u|_q^q \\
&\geq \frac{1}{p^+}\left(|\nabla_1 u|_1 + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i}^{p^i}\right) - \frac{c^q}{q}|u|_{\vec{p}}^q \\
&\geq \frac{1}{p^+}\left(|\nabla_1 u|_1^{p^+} + \sum_{i>N_1} |\partial_i u|_{p_i}^{p^+}\right) - \frac{c^q}{q}|u|_{\vec{p}}^q \\
&\geq \frac{(N-N_1+1)^{1-p^+}}{p^+}|u|_{\vec{p}}^{p^+} - \frac{c^q}{q}|u|_{\vec{p}}^q,
\end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que pour $a_1, \cdots, a_k$ des réels positifs,

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{p^+} \leq k^{p^+-1}\sum_{i=1}^k a_i^{p^+}.$$

Il existe donc deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ indépendantes de ϵ telles que

$$I_\epsilon(u) \geq c_1|u|_{\vec{p}}^{p^+} - c_2|u|_{\vec{p}}^q.$$

Pour $|u|_{\vec{p}} = \beta := \left(\frac{c_1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{q-p^+}}$, on trouve (remarquons qu'on peut choisir c_2 suffisamment grand de sorte que $\beta < 1$)

$$I_\epsilon(u) \geq c_1^{\frac{q}{q-p^+}} c_2^{\frac{-p^+}{q-p^+}} \left((\frac{1}{2})^{\frac{p^+}{q-p^+}} - (\frac{1}{2})^{\frac{q}{q-p^+}}\right) := \alpha > 0$$

□

Remarque 9.1.1. *Notons que $I_\epsilon(0) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega|$, et donc dans la proposition précédente, pour ϵ suffisamment petit, $I_\epsilon(0) \leq \alpha$.*

Théorème 9.1.7. *Il existe $w_\epsilon \in X_0^\epsilon(\Omega)$, $w_\epsilon \geq 0$ un point critique de I_ϵ. De plus, en définissant*

$$\Gamma_\epsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X_0^\epsilon(\Omega)), \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\},$$

$$I_\epsilon(w_\epsilon) = \inf_{\gamma\in\Gamma_\epsilon} \max_{0<t<1} I_\epsilon(\gamma(t)).$$

Démonstration. C'est une simple application du lemme du Col ([52]). Notons que l'on peut supposer w_ϵ positif puisque $I_\epsilon(w_\epsilon) = I_\epsilon(|w_\epsilon|)$. □

9.2 Convergence du problème approché

Proposition 9.2.1. *$\epsilon \mapsto I_\epsilon$ est croissante en ϵ.*

Démonstration. Soit $\epsilon < \epsilon'$, et $u \in X_0^\epsilon(\Omega)$. Par les inégalités de Hölder et Young :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 u|^{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega| &\leq \frac{1}{1+\epsilon}\left(\int |\nabla_1 u|^{1+\epsilon'}\right)^{\frac{1+\epsilon}{1+\epsilon'}} |\Omega|^{1-\frac{1+\epsilon}{1+\epsilon'}} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega| \\
&\leq \frac{1}{1+\epsilon}\left(\frac{1+\epsilon}{1+\epsilon'}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon'}^{1+\epsilon'} + \frac{\epsilon'-\epsilon}{1+\epsilon'}|\Omega|\right) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega| \\
&= \frac{1}{1+\epsilon'}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon'}^{1+\epsilon'} + \left(\frac{1}{1+\epsilon}\frac{\epsilon'-\epsilon}{1+\epsilon'} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right)|\Omega| \\
&= \frac{1}{1+\epsilon'}|\nabla_1 u|_{1+\epsilon'}^{1+\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}|\Omega|,
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

□

Proposition 9.2.2. *Soit w_ϵ donné par le Théorème 9.1.7. On a $I_\epsilon(w_\epsilon) \leq I_{\epsilon'}(w_{\epsilon'})$ pour tout $\epsilon < \epsilon'$. En particulier w_ϵ est bornée dans $X_0(\Omega)$.*

Démonstration. Rappelons que

$$\Gamma_\epsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X_0^\epsilon(\Omega)), \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Soit $\epsilon < \epsilon'$. On a alors $X_0^{\epsilon'}(\Omega) \subset X_0^\epsilon(\Omega)$, ce qui entraine $\Gamma_{\epsilon'} \subset \Gamma_\epsilon$. Ceci couplé à la proposition précédente entraine

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(w_\epsilon) &= \inf_{\gamma\in\Gamma_\epsilon} \max_{0<t<1} I_\epsilon(\gamma(t)) \\
&\leq \inf_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon'}} \max_{0<t<1} I_\epsilon(\gamma(t)) \\
&\leq \inf_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon'}} \max_{0<t<1} I_{\epsilon'}(\gamma(t)) \\
&= I_{\epsilon'}(w_{\epsilon'}).
\end{aligned}$$

Soit donc $\epsilon_0 > 0$. Pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, on a

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(w_\epsilon) &= \frac{1}{1+\epsilon}\int |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i=N_1+1}^{N} \frac{1}{p_i}\int |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} - \frac{1}{q}\int |w_\epsilon|^q \\
&\leq I_{\epsilon_0}(w_{\epsilon_0}) - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}|\Omega| \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive indépendante de ϵ. Par ailleurs, w_ϵ est un point critique de J_ϵ, donc

$$0 = \langle DJ_\epsilon w_\epsilon, w_\epsilon\rangle = \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} \int_\Omega |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} - \int_\Omega |w_\epsilon|^q,$$

et

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(w_\epsilon) &= J_\epsilon(w_\epsilon) - \frac{1}{q}\langle DJ_\epsilon w_\epsilon, w_\epsilon\rangle \\
&= \left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Or $p^+ < q$ et $1+\epsilon < q$ donc la relation précédente entraine que w_ϵ est bornée dans $X_0(\Omega)$ indépendamment de ϵ.

□

Proposition 9.2.3. *Soit w_ϵ donné par le Théorème 9.1.7. On pose $\sigma_\epsilon^1 := |\nabla_1 w_\epsilon|^{\epsilon-1}\nabla_1 w_\epsilon$, et pour $i > N_1$, $(\sigma_\epsilon)_i := \partial_i w_\epsilon |\partial_i w_\epsilon|^{p_i-2}$. Alors*

1. *Pour tout $i > N_1$, $(\sigma_\epsilon)_i$ converge faiblement pour une sous suite dans $L^{p_i'}(\Omega)$ vers un élément $\sigma_i \in L^{p_i'}(\Omega)$.*
2. *σ_ϵ^1 converge faiblement pour une sous suite dans tous les $L^r(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, $r > 1$ vers un élément $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, tel que $|\sigma^1|_\infty \leq 1$.*
3. *w_ϵ converge faiblement pour une sous suite dans $X^b(\Omega)$ et fortement dans $L^q(\Omega)$ vers un élément $w \in X^b(\Omega)$. De plus, $w = 0$ sur $\partial\Omega^h$.*

Démonstration. Pour montrer 1. il suffit de remarquer que

$$|(\sigma_\epsilon)_i|_{L^{p_i'}(\Omega)} = |\partial_i w_\epsilon|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i-1} \leq C$$

d'après la Proposition 9.2.2. Ainsi $(\sigma_\epsilon)_i$ est bornée dans $L^{p_i'}(\Omega)$ indépendamment de ϵ, donc on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement vers un élément $\sigma_i \in L^{p_i'}(\Omega)$.

Montrons 2. Par la Proposition 9.2.2, on a pour $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
|\sigma_\epsilon^1|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} &= |\nabla_1 w_\epsilon|_{1+\epsilon}^\epsilon \\
&\leq 1 + |\nabla_1 w_\epsilon|_{1+\epsilon} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

où C est indépendant de ϵ. Soit maintenant $r > 1$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $r < \frac{(1+\epsilon_0)}{\epsilon_0}$. Or $\epsilon \to \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$ est décroissante, on a alors pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ par l'inégalité de Hölder,

$$\left(\int_\Omega |\sigma_\epsilon^1|^r\right) \leq \left(\int_\Omega |\sigma_\epsilon^1|^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right)^{\frac{r\epsilon}{1+\epsilon}} |\Omega|^{1-\frac{r\epsilon}{1+\epsilon}},$$

et donc

$$|\sigma_\epsilon^1|_{L^r(\Omega)} \leq |\sigma_\epsilon^1|_{L^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \leq C(|\Omega| + 1).$$

Ainsi, σ_ϵ^1 est bornée dans tous les $L^r(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$, donc on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement dans tous les $L^r(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$ vers un élément σ^1, et par semi continuité inférieure pour la topologie faible,

$$|\sigma^1|_{L^r(\Omega)} \leq C(|\Omega| + 1), \ \forall r > 1,$$

et donc $\sigma^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N_1})$

Enfin, w_ϵ est bornée dans $X^b(\Omega)$, donc pour ϵ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |\sigma^1|_\infty &\leq \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} |\sigma_\epsilon^1|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} = \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} |\nabla_1 w_\epsilon|_{1+\epsilon}^\epsilon = \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \exp(\epsilon \log(|\nabla_1 w_\epsilon|_{1+\epsilon})) \\ &\leq \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \exp(\epsilon \log(1 + C)), = 1 \end{aligned}$$

Pour montrer 3. Il suffit de remarquer que par la Proposition 9.2.2 la suite w_ϵ est bornée dans $X^b(\Omega)$, donc converge faiblement pour une sous suite dans $X^b(\Omega)$ vers un élément w de $X^b(\Omega)$. La compacité de l'injection de $X^b(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ ainsi que la continuité faible de la trace sur $\partial\Omega^h$ entraine le résultat.

□

9.3 EDP vérifiée par une solution limite

Proposition 9.3.1. *Soient w et σ, donnés par la Proposition 9.2.3. On a sur $\mathcal{D}'(\Omega)$*

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i > N_1} \partial_i(\sigma_i) = w^{q-1}.$$

Démonstration. Rappelons que w_ϵ étant point critique positif de J_ϵ, donc

$$0 = \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{\epsilon-1} \nabla_1 w_\epsilon \cdot \nabla_1 \varphi + \sum_{i=N_1+1}^N \int_\Omega |\partial_i w_\epsilon|^{p_i - 2} \partial_i w_\epsilon \partial_i \varphi - \int_\Omega w_\epsilon^q \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, soit

$$-\mathrm{div}(\sigma_\epsilon^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(\sigma_\epsilon)_i = w_\epsilon^{q-1} \tag{9.2}$$

sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par ailleurs, par la compacité de l'injection de $\mathcal{D}^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r < p^*$, w_ϵ converge fortement vers w dans $L^{q-1}(\Omega)$. Par la Proposition 9.2.3, on obtient par passage à la limite dans (9.2)

$$-\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(\sigma_i) = w^{q-1}.$$

□

Remarque 9.3.1. *Notons qu'en multipliant l'équation par w ou encore en utilisant la formule de Green démontrée du lemme 3.4.1, on a puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega^h$*

$$\int \sigma^1 \cdot \nabla_1 w + \int_{\partial\Omega^v} (-\sigma \cdot \vec{n} w) + \sum_{i=N_1+1}^{N} \int \sigma_i \partial_i w = \int w^q$$

Proposition 9.3.2. *Soient w et σ donnés par la Proposition 9.2.3. Alors*

1. *Pour tout $i > N_1$, $\sigma_i = |\partial_i w|^{p_i - 2} \partial_i w$ sur Ω,*
2. *$|\nabla_1 w| = \sigma^1 \cdot \nabla_1 w$ au sens des mesures sur Ω,*
3. *$\sigma^1 \cdot \vec{n} w = -w$ sur $\partial\Omega^v$.*

Démonstration. Remarquons que w_ϵ est un point critique de J_ϵ, donc w_ϵ vérifie

$$\int_\Omega \sigma_\epsilon^1 \cdot \nabla_1 w_\epsilon + \sum_{i>N_1} \int_\Omega (\sigma_\epsilon)_i \partial_i w_\epsilon := \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} \int_\Omega |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} = \int_\Omega |w_\epsilon|^q,$$

Soit $\Omega' = \mathbb{R}^{N_1} \times]0,1[^{N-N_1}$. En utilisant le procédé utilisé dans la Proposition 5.1.10, c'est à dire en prolongeant w_ϵ par zéro sur Ω' , on a par semi continuité inférieure pour la topologie vague : $\int_\Omega |\nabla_1 w| + \int_{\partial\Omega^v} |w| \leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|$, et donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma^1 \cdot \nabla_1 w + \int_{\partial\Omega^v} \sigma \cdot \vec{n}(-w) &\leq |\sigma^1|_\infty \int_{\Omega \cup \partial\Omega^v} |\nabla_1 w| \\
&\leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon| \\
&\leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \left(\int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |\Omega|^{1 - \frac{1}{1+\epsilon}} \qquad (9.3) \\
&= \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la Proposition 9.3.1 et la compacité de l'injection de $X^b(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r < p^*$, entraine

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \sigma_\epsilon^1 \cdot \nabla_1 w_\epsilon + \sum_{i>N_1} \int_\Omega (\sigma_\epsilon)_i \partial_i w_\epsilon &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |w_\epsilon|^q \\
&= \int_\Omega |w|^q \\
&= \int_\Omega \sigma^1 \cdot \nabla_1 w + \int_{\partial\Omega^v} \sigma \cdot n(-w) + \sum_{i>N_1} \int_\Omega \sigma_i \partial_i w \\
&\leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \sum_{i>N_1} |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} \\
&\leq \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} (\int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} + \sum_{i>N_1} |\partial_i w_\epsilon|^{p_i}) \\
&\leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \sigma_\epsilon^1 \cdot \nabla_1 w_\epsilon + \sum_{i>N_1} \int_\Omega (\sigma_\epsilon)_i \partial_i w_\epsilon
\end{aligned}$$

(où on a utilisé $|\sigma_i|_{p_i} \leq \underline{\lim}|\partial_i w_\epsilon|_{p_i}^{p_i-1}$ et $|\partial_i w|_{p_i} \leq \underline{\lim}|\partial_i w_\epsilon|_{p_i}$).

On extrait à nouveau de w_ϵ une sous suite $w_{\phi(\epsilon)}$ telle que

$$\underline{\lim}_{\epsilon\to 0} \sum_{i>N_1} |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i>N_1} |\partial_i w_{\phi(\epsilon)}|^{p_i},$$

et

$$\underline{\lim}_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_\epsilon|^{1+\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla_1 w_{\phi(\epsilon)}|^{1+\epsilon},$$

et on notera toujours cette suite w_ϵ. On en déduit qu'on a des égalités au lieu d'inégalités partout où on les a utilisées, soit encore

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \sigma_\epsilon^1 \cdot \nabla_1 w_\epsilon = \int_\Omega \sigma^1 \cdot \nabla_1 w + \int_{\partial\Omega^v} \sigma \cdot n(-w)$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i>N_1} |\partial_i w_\epsilon|^{p_i} = \sum_{i>N_1} \int_\Omega \sigma_i \partial_i w.$$

En particulier, en reprenant (9.3) avec des égalités, on obtient

$$\sigma^1 \cdot \nabla w = |\nabla_1 w| \text{ sur } \Omega \cup \partial\Omega^v.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder et la semi continuité inférieure pour la topologie faible sur $L^{p_i'}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} |\partial_i w_\epsilon|_{p_i}^{p_i} = \int_\Omega \sigma_i \partial_i w \leq |\partial_i w|_{p_i} \lim_{\epsilon\to 0} |\partial_i w_\epsilon|_{p_i}^{p_i-1},$$

et en divisant l'inégalité précédente par $\lim_{\epsilon\to 0} |\partial_i w_\epsilon|_{p_i}^{p_i-1}$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} |\partial_i w_\epsilon|_{p_i} \leq |\partial_i w|_{p_i},$$

et par semi continuité inférieure pour la topologie faible sur L^{p_i}, on obtient finalement que $|\partial_i w_\epsilon|_{p_i} \to |\partial_i w|_{p_i}$, et le lemme 5.1.11 entraine la convergence forte de $\partial_i w_\epsilon$ vers $\partial_i w$ dans $L^{p_i}(\Omega)$. En particulier,

$\sigma_i = |\partial_i w|^{p_i-2}\partial_i w$.

□

Par la continuité de la trace pour la topologie faible sur $\partial\Omega^h$, on obtient donc d'EDP :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_1(\sigma^1) - \sum_{i=N_1+1}^N \partial_i(|\partial_i w|^{p_i-2}\partial_i w) = w^{q-1}, & \text{sur } \Omega, \\ \sigma^1 \cdot \nabla_1 w = |\nabla_1 w|, & \text{sur } \Omega \cup \partial\Omega^v, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega^h. \end{cases}$$

Proposition 9.3.3. *La solution w est non triviale.*

Démonstration.

D'après les Propositions 9.1.4 et 9.1.6, il existe $e \in \mathcal{D}(\Omega)$, indépendant de ϵ petit, tel que $I_\epsilon(e) < 0$, et il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$, indépendants de ϵ petit tel que $|v|_{\vec{p}} = \beta$ entraine $I_\epsilon(v) \geq \alpha$.

Rappelons que pour

$$\Gamma_\epsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X_0^\epsilon(\Omega)), \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\},$$

on a

$$I_\epsilon(w_\epsilon) = \inf_{\gamma \in \Gamma_\epsilon} \max_{0<t<1} I_\epsilon(\gamma(t)).$$

Il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma_\epsilon$, on a alors

$$\max_{0<t<1} I_\epsilon(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

et donc

$$I_\epsilon(w_\epsilon) > \alpha.$$

En extrayant de w_ϵ une sous suite comme précédemment, on obtient dans la démonstration de la Proposition 9.3.2 que w_ϵ converge étroitement vers w dans $X^b(\Omega)$, et en particulier $I_\epsilon(w_\epsilon)$ converge vers $J(w)$. A la limite on obtient donc $J(w) > \alpha$, et w ne peut être nul. $\square$

Remarque 9.3.2. *En utilisant les arguments du chapitre 8 on peut montrer la regularité L^∞ des solutions .*

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol 65, Academic Press, New York-London, 1975.

[2] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, P.L. Lions, *Convex symmetrization and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 14, 1997, no. 2, 275-293.

[3] G. Anzellotti, *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness,* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 135, 1983, 293-318.

[4] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geometry 11 (4), 1976, 573-598.

[5] M. Bendahmane, M. Langlais, M. Saad, *Existence of solutions for reaction diffusion systems with L1 data,* Adv. Differential Equations 7 (6), 2002, 743-768.

[6] M. Bendahmane, M. Langlais, M. Saad, *On some anisotropic reaction diffusion systems with L^1 data modeling the propagation of an epidemic disease,* Nonlinear Anal. 54 (4), 2003, 617-636.

[7] G.V. Besov, V.P. Il'in, S.M. Nikolskii, *Integral Representations of functions and imbedding theorems*, Vols 1,2, Wiley, 1979.

[8] L. Boccardo, P. Marcellini, C. Sbordone, *L^∞-Regularity for Variational Problems with Sharp Non Standard Growth Conditions,* Bollettino U.M.I. (7) 4-A, 1990, 219-225.

[9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle,* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[10] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88, 1983, 486-490.

[11] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities,* Advances in Mathematics 182, 2004, 307-332.

[12] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27, 1992, no. 1, 1-67.

[13] G. Cupini, P. Marcellini, E. Mascolo, *Regularity under sharp anisotropic general growth conditions*, Discrete and Continuous dynamical systems, Vol 11, Number 1, 2009, 67-86.

[14] F. Demengel, *Some compactness theorems for spaces of functions with bounded deriva tives*, Archiv. for rational mech. anal., vol. 105, 2, 1989, 123-161.

[15] F. Demengel, *On Some Nonlinear Partial Differential Equations involving the "1"-Laplacian and Critical Sobolev Exponent*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol 4, 1999, 667-686.

[16] F. Demengel, *Some Existence's results for non coercive "1-Laplacian" operator*, Asymptotic Analysis 43, 2005, 287-322.

[17] F. Demengel, *Functions locally* 1*-harmonic*, Applicable analysis, 83, 2004, no. 9, 343-366.

[18] F. Demengel, *Regularity properties of viscosity solutions for Fully Nonlinear equations on the model of the anisotropic $\vec{p}$-Laplacian*, To appear in Asymptotic Analysis.

[19] F. Demengel, G. Demengel, *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, 2012.

[20] F. Demengel, R. Temam, *Functions of a measure and its applications* , Indiana Math. Journal, 33 (5), 1984, 673-700.

[21] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse Tome II*, Cahiers Scientifiques, vol. XXXI, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[22] T. Dumas, *Existence de solutions pour des équations apparentées au 1 Laplacien anisotrope,* Thèse d'Université, Université de Cergy, 2018.

[23] I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod, 1974.

[24] A. El Hamidi, J.M. Rakotoson, *Compactness and quasilinear problems with critical exponents*, Differential Integral Equations 18, 2005, 1201-1220.

[25] A. El Hamidi, J.M. Rakotoson, *Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities,* Ann. I.H. Poincaré - AN 24, 2007, 741-756.

[26] L. Esposito, F. Leonetti, G. Mingione, *Higher Integrability for Minimizers of Integral Functionals With (p, q) Growth*, J. Differential equations, vol. 157, 1999, 414-438.

[27] L. Esposito, F. Leonetti, G. Mingione, *Sharp regularity for functionals with (p, q) growth,* J. Differential Equations, vol. 204, 2004, 5-55.

[28] I. Fragalà, F. Gazzola, B. Kawohl, *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations,* Ann. I.H. Poincaré-AN 21, 2004, 715-734.

[29] N. Fusco, C. Sbordone, *Local boundedness of minimizers in a limit case,* Manuscripta math. 69, 1990,19-25.

[30] E. Gagliardo, *Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili*, Ricerche Mat. 7, 1958, 102-137.

[31] M. Giaquinta, *Growth conditions and regularity, a counterexample,* Manuscripta Math., 59, 1987, 245-248.

[32] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.

[33] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Notes de cours rédigées par G.H. Williams, Department of Mathematics Australian National University, Canberra, 1977, et Birkhaüser, 1984.

[34] J. Haškovec, C. Schmeiser, *A note on the anisotropic generalizations of the Sobolev and Morrey embedding theorems,* Monatsh. Math. 158, 2009, 71-79.

[35] H. Ishii, *Viscosity solutions of Nonlinear fully nonlinear equations,* Sugaku Expositions, Vol. 9, No. 2, 1996.

[36] H. Ishii, P.L. Lions, *Viscosity solutions of Fully-Nonlinear Second Order Elliptic Partial Differential Equations*, J. Differential Equations, 83, 1990, 26-78.

[37] S.N. Kruzhkov, J.M. Kolodii, *On the theory of embedding of anisotropic Sobolev spaces*, Communications of the Moscow Mathematical Society, 1982, 188-189.

[38] S.N. Kruzhkov, A.G. Korolev, *On the imbedding theory of anisotropic function spaces,* Soviet Math. Dokl. Vol. 32, No. 3, 1985, 829-832.

[39] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations,* Academic Press, 1968.

[40] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1,* Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1), 1985, 145-201.

[41] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2,* Rev. Mat. Iberoamericana 1 (2), 1985, 45-121.

[42] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals in the calculus of variations with non standard growth conditions,* Arch. Rational Mech. Anal., 105, 1989, 267-284.

[43] P. Marcellini, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with $p-q$ growth conditions*, J. Differential Equations, 90, 1991, 1-30.

[44] P. Marcellini, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions*, J. Differential Equations, 105, 1993, 296-333.

[45] A. Mercaldo, J.D. Rossi, S. Segura de León, C. Trombetti, *Anisotropic p,q-Laplacian equations when p goes to 1*, Nonlinear Analysis, 73, 2010, 3546- 3560.

[46] G. Moscariello, L. Nania, *Hölder continuity of minimizers of functionals with non-standard growth conditions,* Ricerche Mat. 40, 1991, 259- 273.

[47] S.M. Nikolskii, *On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables*, (Russian) Uspehi Mat. Nauk 16 1961 no. 5 (101), 63-114.

[48] J. Rákosník, *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II*, Beiträge zur Analysis 15, 1981, 127-140.

[49] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1997.

[50] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales de l'institut Fourier, tome 15, 1965, 189-257.

[51] G. Strang, R. Temam, *Duality and relaxation in the variational problems of plasticity,* J. Mécanique, 19(3), 1980, 493-527.

[52] M. Struwe, *Variational Methods,* Springer Verlag, 1990.

[53] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110, 1976, 353-372.

[54] R. Temam, *Mathematical problems in plasticity*, Gauthiers Villars, 1993.

[55] M. Troisi, *Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi* (in Italian), Ricerche Mat. 20, 1971, 90-117.

[56] J. Vetois, *Decay estimates and a vanishing phenomenon for the solutions of critical anisotropic equations,* Adv. Math. 284, 2015, 122- 158.

[57] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, European Consortium for Mathematics in Industry, B.G. Teubner, Stuttgart, 1998.

[58] William P. Ziemmer, *Weakly Differentiable functions,* L.N.M. Springer Verlag, Number 120, 1989.