



Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé : utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts

Benoît Lé

► To cite this version:

Benoît Lé. Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé : utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts. Génie civil. École centrale de Nantes, 2016. Français. NNT : 2016ECDN0003 . tel-02193722

HAL Id: tel-02193722

<https://theses.hal.science/tel-02193722>

Submitted on 24 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Benoît LÉ

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Discipline : Mécanique des solides, des matériaux des structures et des surfaces
Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Soutenue le 15 novembre 2016

Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé utilisation : de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts

JURY

Président : **Stéphane GRANGE**, Professeur des Universités, INSA de Lyon

Rapporteurs : **Alain SELLIER**, Professeur des Universités, Université de Toulouse
Ludovic JASON, Ingénieur Chercheur HDR, CEA Saclay

Examineurs : **Cédric GIRY**, Maître de Conférences, Ecole Normale Supérieure de Cachan
Frédéric GRONDIN, Professeur des Universités, École Centrale de Nantes

Directeur de thèse : **Nicolas MOËS**, Professeur des Universités, École Centrale de Nantes

Co-encadrant de thèse : **Grégory LEGRAIN**, Maître de Conférences, École Centrale de Nantes

Remerciements

Je remercie tout d'abord Stéphane Grange d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie ensuite les rapporteurs, Alain Sellier et Ludovic Jason, d'avoir relu mon manuscrit et rédigé des rapports détaillés. Je remercie également les examinateurs de ma thèse Frédéric Grondin et Cédric Giry d'avoir évalué mon travail. D'une façon générale, je remercie les membres de mon jury de thèse pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail aux travers de leurs (très) nombreuses questions, toutes plus pertinentes les unes que les autres.

Je remercie mon directeur de thèse, Nicolas Moës, pour m'avoir donné l'opportunité d'intégrer son équipe pendant ces trois années. À l'issue de mes études d'ingénieur à l'École Centrale de Nantes, la recherche ne faisait pas particulièrement partie de mes projets de carrière, il a néanmoins su déceler mon intérêt pour la simulation numérique, me donnant ainsi l'occasion de découvrir le monde de la recherche. J'ai énormément appris à son contact.

Merci à Grégory Legrain, co-encadrant de ma thèse, pour m'avoir expliqué le fonctionnement du code, les formalités administratives, LaTeX, gmsh, Linux, le code, inkscape, python, le fonctionnement du serveur de calcul, Kile, le code et j'en oublie. Sans sa disponibilité, cette thèse n'aurait probablement jamais abouti.

Parmi les membres de l'équipe Modélisation et Simulation, je tiens particulièrement à remercier Alexis Salzman, notamment pour ses explications sur le code et le serveur de calcul (encore une fois). Hormis mes encadrants "officiels", il s'agit de la personne de l'équipe avec j'ai le plus discuté, notamment au cours de longues discussions sur les TP de programmation du master SMA que j'ai contribué à encadrer. Parmi les membres de l'"équipe TLS", je remercie également mes prédécesseurs, Andrés Parrilla Gómez et Kévin Moreau dont j'ai beaucoup utilisé les travaux, et qui ont toujours répondu à mes nombreuses questions.

Merci à mes collègues de bureau, notamment Quentin et Romain dont la présence aura rendu plus supportable la longue et laborieuse étape de rédaction de ce manuscrit, et également à tous les autres : Prashant, Alina, Cyril, Mathieu, Matthieu, Simon, Qian, Olivier, Ophélie, Deepika, Rohit, Oleg, Daria, Adrien, Zoltan, Abdullah, Jihed, Kajetan, et tous ceux que j'oublie.

Merci également aux informaticiens Éric Manceau et Pierre-Emmanuel Guérin, ainsi qu'aux secrétaires du labo Mélissa Freslon et Cynthia Nozay.

Merci enfin à ma famille et à mes proches de m'avoir soutenu durant ces trois années.

Table des matières

Introduction	9
1. Modélisation de la dégradation des matériaux quasi-fragiles	11
1.1. Introduction	12
1.2. Formulation du problème mécanique	13
1.3. Mécanique de la rupture	15
1.3.1. Modèle de Griffith	15
1.3.2. Modèles cohésifs	16
1.3.3. Introduction de discontinuités dans la solution	19
1.4. Mécanique de l'endommagement	20
1.4.1. Modèles locaux	20
1.4.2. Problème de localisation	23
1.4.3. Méthodes de régularisation des modèles locaux	23
1.5. Transition endommagement-rupture	27
2. L'approche Thick Level Set	29
2.1. Introduction	30
2.1.1. Équations du modèle local	30
2.1.2. Régularisation par la méthode TLS	32
2.1.3. Résolution explicite	33
2.2. Version simplifiée	34
2.2.1. Calcul des champs moyens	35
2.2.2. Pilotage et propagation du front	38
2.2.3. Initiation	40
2.2.4. Enrichissement	40
2.2.5. Double-découpe	42
2.2.6. Récapitulatif	42
2.3. Version complète	42
2.3.1. Calcul des champs moyens	44
2.3.2. Pilotage et propagation du front	47
2.3.3. Enrichissement	49
2.3.4. Récapitulatif	50
2.4. Comparaison des approches simplifiée et complète	50

2.5.	Choix de la fonction d'adoucissement	51
2.5.1.	Équivalence avec les modèles cohésifs	51
2.5.2.	Paramètres matériaux du modèle TLS	53
2.6.	Conclusion	54
3.	Extraction d'ouvertures de fissures avec l'approche TLS	57
3.1.	Extraction d'ouvertures de fissures avec des modèles d'endommagement	58
3.2.	Essai brésilien	58
3.2.1.	Description du cas test	59
3.2.2.	Discussion sur les modèles d'endommagement considérés	59
3.2.3.	Résultats numériques	63
3.3.	Poutre en flexion 3 points	67
3.3.1.	Description du cas test	67
3.3.2.	Poutre non entaillée	68
3.3.3.	Poutre entaillée	72
3.4.	Conclusion	75
4.	Application de la méthode TLS à l'étude de structures en béton armé	79
4.1.	Introduction	80
4.1.1.	Rôle des armatures	80
4.1.2.	Influence et modélisation de la liaison acier-béton	81
4.2.	Simulation d'un essai de tirant	83
4.2.1.	Principe de l'essai de tirant	83
4.2.2.	Caractéristiques du tirant étudié	84
4.2.3.	Résultats numériques	87
4.3.	Poutre en béton armé (benchmark CEOS.FR)	89
4.3.1.	Description du cas test	89
4.3.2.	Premier calcul	93
4.3.3.	Problèmes de réinitialisation	96
4.3.4.	Résultats numériques	102
4.4.	Conclusion	104
5.	Modélisation multi-dimensionnelle des armatures	109
5.1.	Introduction	110
5.2.	Modélisation volumique des armatures	111
5.2.1.	Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)	111
5.2.2.	Aspects numériques	113
5.2.3.	Limitations de l'approche 3D	114
5.3.	Liaison entre éléments barres et éléments 3D	116
5.4.	Modélisation multi-dimensionnelle	117
5.4.1.	Correction	117
5.4.2.	Algorithme de résolution	119

5.5. Simulations numériques	120
5.5.1. Cas tests linéaires	121
5.5.2. Cas tests élastoplastiques	126
5.6. Conclusion	134
Conclusion et perspectives	137
Liste des figures	141
Liste des tableaux	147
Bibliographie	147
Annexes	157
Annexe A. Calcul de la loi cohésive équivalente à une fonction d'adoucissement constante	
$h(d) = 1$	159
Annexe B. Modèle élasto-plastique linéaire 1D	161

Introduction

Le béton est l'un des matériaux les plus utilisés en génie civil. Peu coûteux, facile à produire et à mettre en forme, il possède également de bonnes propriétés mécaniques en compression. Sa résistance à la traction est en revanche assez faible (environ 10 fois inférieure à sa résistance à la compression). Afin de pallier cette faiblesse, des armatures en acier qui elles, sont résistantes à la traction, sont placées dans les zones soumises à des efforts de traction, formant ainsi le béton armé.

Le dimensionnement des structures en béton armé obéit à des règles strictes définies par des codes (Eurocodes, BAEL, ...). Ces règles permettent de déterminer les caractéristiques des structures, comme la composition du béton, le diamètre ou l'espacement des armatures, ou encore les longueurs d'ancrage et d'enrobage, par rapport à deux états limites que sont l'état limite de service (ELS) et l'état limite ultime (ELU). L'ELS correspond à un état de la structure au-delà duquel celle-ci ne peut plus assurer la fonction qu'elle est censée remplir, tandis que l'ELU correspond à la ruine de la structure. Les règles de calcul des codes de dimensionnement sont des formules semi-empiriques, basées sur la résistance des matériaux et des approches semi-probabilistes. Ces règles suffisent à la conception des structures vis-à-vis des états limites, définis du point de vue de leur résistance globale par rapport aux différentes actions auxquelles elles sont soumises au cours de leur cycle de vie. Cependant, la complexité et l'importance croissantes des structures (telles que les enceintes de confinement des centrales nucléaires, les barrages, les ponts, ...) font que le dimensionnement aux états limites des structures en béton armé ne suffit plus à leur conception. En particulier, la connaissance de l'état de fissuration est indispensable, son influence étant primordiale vis-à-vis de certains phénomènes comme l'étanchéité des structures ou la corrosion des armatures. La prévision de la fissuration nécessite de passer par la modélisation et la simulation numérique. Pour cela la méthode des éléments finis reste la méthode la plus utilisée (bien que l'on trouve dans la littérature certains modèles basés sur des méthodes particulières, en particulier en dynamique), mais se heurte à deux difficultés :

- Tout d'abord, qu'il soit armé ou non, le béton est un matériau au comportement complexe, dont la modélisation a fait l'objet de nombreuses publications. Il s'agit en effet d'un matériau hétérogène, constitué de pâte de ciment et de gravier, ce qui pose la question de l'échelle de modélisation. Au vue des moyens de calculs qui seraient nécessaires à une modélisation à l'échelle microscopique, la plupart des modèles de la littérature ont été développés à l'échelle macroscopique. Malheureusement, très peu d'entre eux sont capables de prédire l'intégralité du processus de dégradation du béton, depuis l'apparition d'endommagement diffus, jusqu'à l'initiation et la propagation de macro-fissures. À cela vient s'ajouter une difficulté supplémentaire dans le cas du béton armé qui est le nombre important de macro-fissures induites par la présence des armatures.
- La deuxième difficulté est d'ordre géométrique. En effet, le diamètre des armatures métalliques

est généralement faible devant les dimensions caractéristiques des structures qu'elles servent à renforcer (au moins un ordre de grandeur d'écart). Du point de vue de la méthode des éléments finis, cela nécessite des maillages particulièrement fins afin de représenter correctement l'interface entre l'acier et le béton, entraînant ainsi des coûts de calcul prohibitifs pour l'étude de structures industrielles. À cela il faut ajouter le nombre généralement important des armatures et leurs trajectoires éventuellement complexes qui peuvent rendre le processus de maillage laborieux.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ERC XLS n^o 291102, qui a pour objet l'utilisation de fonction de niveau, ou en anglais *level sets*, pour l'étude de problèmes complexes. On propose donc dans cette thèse d'utiliser ces level sets afin de répondre aux deux problèmes mentionnés ci-dessus :

- La méthode TLS, pour *Thick Level Set*, développée au sein du projet XLS, est appliquée à la modélisation du béton. Cette approche, basée sur l'utilisation d'une fonction de niveau pour la représentation du champ d'endommagement présente l'avantage de permettre l'extraction directe des ouvertures de fissures sans aucune méthode de post-traitement particulière.
- Une approche permettant de combiner représentation volumique et linéique des armatures est proposée. L'idée de cette approche repose sur le fait que, dans tout calcul par éléments finis, il est possible d'identifier des zones d'intérêts que l'on maille finement tandis que le reste de la structure est maillé plus grossièrement. Dans le cadre de cette nouvelle approche, les armatures sont modélisées volumiquement par la méthode X-FEM (basée sur l'utilisation de level sets) dans la zone d'intérêt afin d'obtenir des résultats précis. Dans le reste de la structure, des éléments barres 1D sont utilisés afin de diminuer les coûts de calcul. La méthode de transition proposée permet d'assurer que, dans la zone d'intérêt, les résultats obtenus sont quasiment identiques à ceux qui seraient obtenus avec une représentation volumique des armatures dans toute la structure.

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres. Dans le chapitre 1, un état de l'art non-exhaustif des modèles permettant d'étudier la dégradation des matériaux quasi-fragiles dont fait partie le béton est présenté. Les avantages et inconvénients de chaque modèle seront mis en évidence, afin d'introduire dans le chapitre 2 la méthode TLS. Les deux versions de la méthode y sont présentées et comparées. Le chapitre 3 illustre l'extraction d'ouvertures de fissures avec la méthode TLS sur des cas tests simples en béton non-armé, tandis que le chapitre 4 est consacré à l'étude de cas plus complexes sur des structures en béton armé. Enfin, le chapitre 5 présente la nouvelle approche de modélisation volumique et linéique des armatures, et son application sur différents cas tests illustratifs, en linéaire et en non-linéaire.

1. Modélisation de la dégradation des matériaux quasi-fragiles

Sommaire

1.1. Introduction	12
1.2. Formulation du problème mécanique	13
1.3. Mécanique de la rupture	15
1.3.1. Modèle de Griffith	15
1.3.2. Modèles cohésifs	16
1.3.3. Introduction de discontinuités dans la solution	19
1.4. Mécanique de l'endommagement	20
1.4.1. Modèles locaux	20
1.4.2. Problème de localisation	23
1.4.3. Méthodes de régularisation des modèles locaux	23
1.5. Transition endommagement-rupture	27

1.1. Introduction

Le béton est un matériau hétérogène, obtenu à partir d'un mélange d'eau, de ciment et de granulats. L'eau et le ciment forment un mélange fluide, que l'on peut facilement mettre en forme, avant de se solidifier. Ceci, associé au coût assez faible de ses différents composants, en fait un des matériaux les plus employés en génie civil. Une des principales caractéristiques du béton est sa tendance à se fissurer en réponse à un chargement. Par exemple, lorsqu'il est soumis à un chargement statique, le béton commence à se déformer élastiquement. Puis des micro-fissures commencent à apparaître, dues entre autres à la décohéation entre la pâte de ciment et les granulats. Les déformations se localisent progressivement dans certaines zones. Enfin, les micro-fissures coalescent jusqu'à l'apparition de macro-fissures. On cherche généralement à éviter ces fissures qui peuvent s'avérer gênantes, par exemple pour l'aspect esthétique, voire dangereuses pour l'intégrité des structures. Savoir si ces fissures vont se propager n'est pas suffisant, il est également nécessaire de pouvoir prédire leur trajectoire et leur ouverture, qui peuvent avoir une influence sur l'étanchéité comme dans le cas des enceintes de confinement en béton armé des centrales nucléaires. Des règles existent (EN, 2005) afin de calculer les dimensions des structures permettant d'assurer leur tenue en service, mais elles ne permettent pas de connaître précisément l'état de fissuration du béton. Il est nécessaire pour cela de passer par la modélisation et le calcul numérique.

Comme évoqué plus haut, le béton peut-être considéré comme un matériau constitué de deux phases, la pâte de ciment et les granulats. Cela pose la question de l'échelle de modélisation. L'approche la plus directe consisterait à étudier le béton à l'échelle microscopique, ce qui n'est évidemment pas possible au vu des moyens de calcul actuels. Des travaux ont certes tenté de modéliser le béton à une échelle mésoscopique, c'est-à-dire en ne prenant en compte que les plus gros granulats, mais sur des structures de petites dimensions comme par exemple dans (Laborderie *et al.*, 2007). Ces modèles permettent d'obtenir une représentation de la micro-fissuration, mais posent la question de la forme géométrique des inclusions (généralement idéalisées en sphères ou en polyèdres réguliers). Ces approches demeurent également coûteuses en ressources de calculs. La plupart des modèles utilisés dans la littérature considèrent donc le béton à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire comme un matériau homogène.

Les premiers travaux sur la modélisation des fissures ont été réalisés par Griffith (1920), et s'appliquaient à la propagation de macro fissures dans un matériau élastique linéaire, ce qui en pratique est rarement le cas. En particulier, la pointe de la fissure, que l'on appelle zone d'élaboration, ou *Fracture Process Zone* (FPZ) en anglais, est souvent sujette à des non-linéarités (Bažant et Planas, 1997). Cette zone peut être divisée en une zone adoucissante et une zone durcissante. Lorsque la zone durcissante est de taille non négligeable par rapport à la taille de la structure alors que la zone adoucissante est petite, le matériau est dit ductile (c'est par exemple le cas des métaux). Lorsque la zone adoucissante est de taille non négligeable par rapport à la taille de la structure alors que la zone durcissante est petite, le matériau est dit quasi-fragile. Enfin, si la zone d'élaboration est de taille négligeable par rapport à la taille de la structure, le matériau est dit fragile (dans ce cas là le modèle de Griffith

peut-être utilisé). On remarque que la notion de zone d'élaboration nécessite de connaître la taille caractéristique de la structure étudiée, ce qui en ferait davantage une caractéristique structurelle que matérielle. On insistera sur les dimensions caractéristiques de cette zone d'élaboration par rapport à celle des structures étudiées, qui interviennent notamment dans l'effet d'échelle (Bazant, 1976), c'est-à-dire la dépendance de la contrainte nominale d'une structure à sa dimension caractéristique.

En ce qui concerne le béton, les dimensions caractéristiques des structures étudiées sont de l'ordre de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres, et la zone d'élaboration est de l'ordre de quelques centimètres. La zone d'élaboration a un comportement adoucissant dû à l'apparition des micro-fissures, on considère donc le béton comme un matériau quasi-fragile.

Pour terminer cette section, on précise que de nombreux phénomènes physiques intervenant au cours de la durée de vie d'une structure en béton ne sont pas pris en compte dans ce mémoire, notamment :

- La contraction de retrait due aux réactions chimiques entre ses différents constituants et éventuellement son milieu environnant
- La déformation de fluage, c'est-à-dire la déformation différée qui vient s'ajouter à la déformation élastique lorsque le béton est soumis à un chargement
- Les phénomènes liés à la thermique ou au transport d'éléments à travers le béton
- Les effets liés à la porosité

On se restreindra aux déformations immédiates des structures sous un chargement mécanique quasi-statique et monotone.

1.2. Formulation du problème mécanique

On précise dans cette section les principales équations et hypothèses considérées dans ce mémoire. On considère un domaine d'étude Ω , de frontière $\partial\Omega$ (cf. figure 1.1). En se restreignant à des problèmes quasi-statiques, l'équilibre de Ω soumis à des efforts volumiques $\mathbf{f}$ s'écrit :

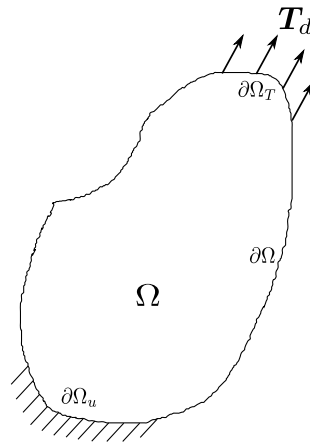


FIGURE 1.1. – Définition du problème mécanique

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. Des efforts $\mathbf{T}_d$ sont imposés sur $\partial\Omega_T$:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_T \quad (1.2)$$

et la solution du problème en déplacements $\mathbf{u}$ vérifie :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (1.3)$$

où

$$\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_u = \emptyset \quad (1.4)$$

On se place dans le cadre des petites perturbations (HPP), ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top) \quad (1.5)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations linéaires.

On note $\mathcal{C}$ l'espace des champs cinématiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant la condition aux limites (1.3) :

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u\} \quad (1.6)$$

et $\mathcal{C}_0$ l'espace l'ensemble des champs cinématiquement admissibles à zéro :

$$\mathcal{C}_0 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_u\} \quad (1.7)$$

De façon équivalente on peut reformuler le problème mécanique en écrivant le Principe des Travaux Virtuels : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ tel que pour tout champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0$ on a :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (1.8)$$

$$W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \quad (1.9)$$

$$W_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_d \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (1.10)$$

où W_{int} représente le travail virtuel des efforts internes et W_{ext} le travail virtuel des efforts externes.

Il restera à préciser la relation liant $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ et certaines conditions aux limites spécifiques aux différents types de modèles que l'on présentera dans les sections suivantes.

1.3. Mécanique de la rupture

1.3.1. Modèle de Griffith

Une première catégorie de modèles utilisés pour étudier la fissuration des matériaux, basée sur les travaux de Griffith (1920), porte le nom de mécanique linéaire de la rupture. Les fissures sont représentées par des surfaces de discontinuités de dimensions $n - 1$, n étant la dimension du problème étudié : point ($n = 1$), ligne ($n = 2$) ou surface ($n = 3$). Trois modes de rupture peuvent être distingués : le mode I, ou mode d'ouverture, le mode II, mode de cisaillement dans le plan de la fissure, et le mode III, mode de cisaillement hors-plan. On peut montrer pour un problème fissuré 2D, dans le système de coordonnées (r, θ) centré sur la pointe de la fissure, (cf. figure 1.2) en élasticité linéaire plane, que le tenseur des contraintes peut s'écrire comme la somme d'une partie régulière et d'une partie singulière σ^S au voisinage de la fissure (Irwin, 1957) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^S &= K_I \sigma_{rr}^I + K_{II} \sigma_{rr}^{II} \\ \sigma_{r\theta}^S &= K_I \sigma_{r\theta}^I + K_{II} \sigma_{r\theta}^{II} \\ \sigma_{\theta\theta}^S &= K_I \sigma_{\theta\theta}^I + K_{II} \sigma_{\theta\theta}^{II} \end{cases} \quad (1.11)$$

où K_I et K_{II} sont des termes dépendants de la géométrie du problème et du chargement, appelés facteurs d'intensité des contraintes.

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{r\theta}^I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{II} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{r\theta}^{II} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{II} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.13)$$

Pour un problème 3D l'expression de σ^S est similaire, des termes associés aux modes III ainsi qu'un facteur d'intensité des contraintes venant s'ajouter à ceux correspondants aux modes I et II. La présence d'un terme en $r^{-1/2}$, a pour conséquence la divergence de σ^S en pointe : un critère en contrainte ne peut donc pas être utilisé pour savoir si la fissure va se propager. En revanche, il est possible d'identifier des valeurs critiques des facteurs d'intensité des contraintes, appelés ténacités, au-delà desquelles on sait qu'il y aura propagation. Les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes ont été calculées (analytiquement ou empiriquement) pour de nombreuses configurations (Tada *et al.*, 1973; Murakami Yukitaka, 1987), et peuvent donc servir de critère pour savoir si une fissure va se propager.

Griffith propose une autre approche utilisant le critère en énergie suivant : la fissure ne se propage que si la variation d'énergie potentielle W nécessaire pour augmenter l'aire de la fissure de A est égale à une valeur critique G_c appelée taux de restitution d'énergie critique. Ainsi, en définissant :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial A} \quad (1.14)$$

on considère que la fissure se propage si $G = G_c$.

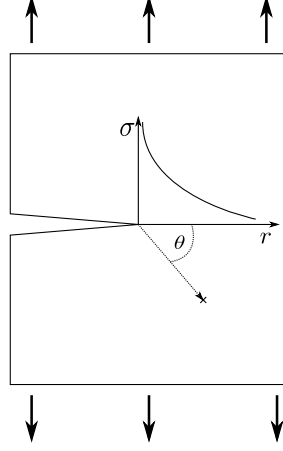


FIGURE 1.2. – Evolution de la contrainte en pointe de fissure

Une méthode permettant de calculer ce taux de restitution d'énergie G a été proposée par Rice (1968). Elle consiste à calculer l'intégrale de Rice J , indépendante du contour Γ (cf. figure 1.3) sur laquelle elle est calculée :

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \quad (1.15)$$

où W est l'énergie de déformation et $\mathbf{n}$ la normale unitaire à Γ . En élasticité linéaire, $G = J$. On précise que les lèvres de la fissure $\partial\Omega_c^+$ et $\partial\Omega_c^-$ (cf. figure 1.3) sont libres : aux équations données dans la section 1.2, doivent être ajoutées les conditions aux limites suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^- = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^+ = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

où $\mathbf{n}_c^-$ et $\mathbf{n}_c^+$ sont les normales aux lèvres $\partial\Omega_c^-$ et Ω_c^+ respectivement (sous l'hypothèse des petites perturbations, on a $\mathbf{n}_c^- = -\mathbf{n}_c^+$).

Enfin, les facteurs d'intensité des contraintes introduits par Irwin et le taux de restitution d'énergie introduit par Griffith sont liés par la relation suivante :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.17)$$

La mécanique de la rupture linéaire constitue donc un outil permettant de savoir si une fissure va se propager. Elle reste cependant limitée au domaine de l'élasticité, et ne s'applique qu'à des fissures déjà existantes, elle ne permet donc pas de prévoir comment de nouvelles fissures vont s'initier.

1.3.2. Modèles cohésifs

Le modèle présenté dans la section 1.3.1 n'est plus valable dès lors que la taille de la zone d'élaboration ne peut plus être considérée comme négligeable. Ainsi, des modèles dits cohésifs, également appelés

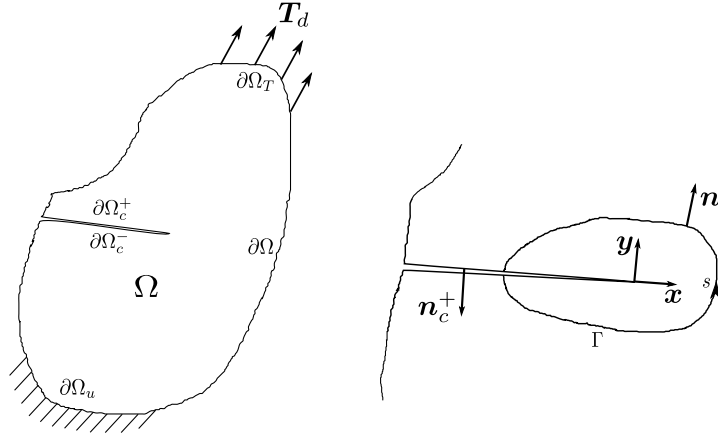


FIGURE 1.3. – Définition du problème mécanique fissuré

modèles de fissures fictives (*fictitious crack* en anglais), ont été proposés afin de prendre en compte les non-linéarités de cette zone d'élaboration, pour les matériaux ductiles (Dugdale, 1960) comme pour les matériaux quasi-fragiles (Baranblatt, 1961). L'idée est de garder une représentation des fissures par des surfaces de discontinuités de dimension $n - 1$, mais de concentrer les effets dissipatifs de la zone d'élaboration sur une certaine portion de ces discontinuités (cf. figure 1.4). Sur la base de ces travaux Hillerborg *et al.* (1976) propose de remplacer la condition aux limites (1.16) par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^- = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^+ = -\sigma(w)\mathbf{n}_c^+ \quad (1.18)$$

où $\sigma(w)$ est une fonction, paramètre du matériau considéré, w étant l'ouverture de la fissure (cf. exemple de la figure 1.5). Un des exemples les plus utilisés dans le cas du béton est la loi bilinéaire (Petersson, 1981), à laquelle on s'intéressera plus en détails dans la section 2.5.1. L'introduction de (1.18) permet de diviser la fissure en deux parties : une partie libre où aucune contrainte n'est transmise entre les deux lèvres, et une zone cohésive en pointe où des efforts transitent malgré l'ouverture de la fissure. On remarquera que l'introduction d'une zone cohésive permet d'éviter le caractère non borné du champ de contraintes en pointe de fissure. Le reste du matériau demeure élastique linéaire. D'autre part, contrairement au modèle de Griffith, le modèle de fissure cohésive permet de gérer l'initiation des fissures, en introduisant celles-ci dans la structure lorsque l'une des contraintes principales atteint la valeur maximale de $\sigma(w)$ (σ_c dans l'exemple de la figure 1.5).

La propagation de fissures cohésives n'est cependant pas triviale du point de vue numérique. Par exemple, Hillerborg *et al.* (1976) considère sur un essai de flexion 3 points (cf. figure 1.6) que la fissure se propage dès que σ_{xx} atteint σ_c : dans ce cas, la condition de symétrie sur u_x est remplacée par un effort cohésif $\sigma(w)$. L'inconvénient est qu'il est nécessaire de connaître le trajet de propagation de la fissure a priori, afin d'y positionner des nœuds du maillage éléments finis. Lorsque ce n'est pas le cas, il est nécessaire de modifier le maillage au fur et à mesure de la propagation (on verra dans la section 1.3.3 que des méthodes particulières ont été développées afin de résoudre ce problème). Se pose également

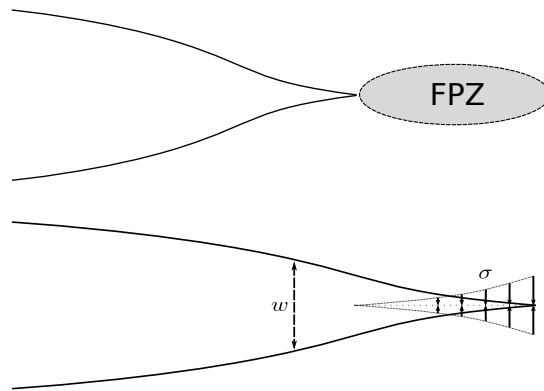


FIGURE 1.4. – Fissure cohésive équivalente

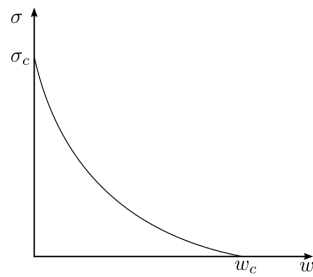


FIGURE 1.5. – Exemple de loi cohésive $\sigma(w)$

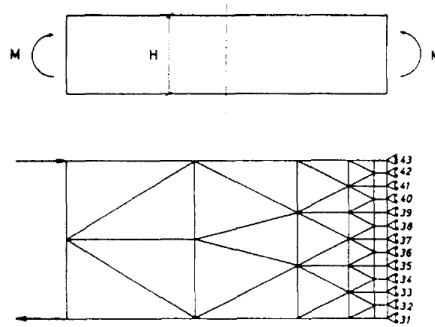


FIGURE 1.6. – Propagation d’une fissure cohésive dans une poutre en flexion 3 points (Hillerborg *et al.*, 1976).

la question de la direction de propagation ; les critères en contraintes sont numériquement difficiles à évaluer car ils nécessitent des maillages fins en pointe de fissure, mais des critères énergétiques existent (voir par exemple (Erdogan et Sih, 1963)). Enfin, ces modèles ne s’appliquent qu’à des macro-fissures, et ne permettent pas d’étudier le phénomène d’endommagement diffus dû à l’apparition de micro-fissures.

On peut également citer les travaux de Bazant et Oh (1983) sur le modèle de “bande fissurée”

(*crack band model*), où les micro-fissures de la zone d'élaboration sont supposées être à l'origine d'une déformation de fissuration ϵ_f . Cette déformation est prise en compte dans la matrice de compliance d'une bande d'éléments de largeur l_b , par le biais d'une loi adoucissante $\sigma(\epsilon_f)$. L'un des principaux inconvénients de cette méthode est que le trajet de fissuration est lié à l'orientation des éléments du maillage. On peut montrer que cette méthode est équivalente au modèle cohésif, qui peut être vu comme la limite du modèle de bande fissurée quand l_b tend vers zéro.

1.3.3. Introduction de discontinuités dans la solution

Numériquement, l'introduction dans un maillage éléments finis de surfaces de discontinuités de dimension $n - 1$ pose problème ; les fonctions d'interpolation éléments finis étant continues, la fissure ne peut traverser les éléments. Les nœuds des éléments doivent donc coïncider avec les bords de la fissure, qu'elle soit cohésive (cf. section 1.3.2) ou non (cf. section 1.3.1). Cela rend l'étude de la propagation de fissures laborieuse, une étape de remaillage étant nécessaire à chaque pas de propagation. Afin de résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été développées, comme par exemple l'approche des discontinuités fortes (J. Oliver, 1996a,b), dans laquelle l'approximation du champ de déplacement est écrite comme la somme de deux termes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

où H est la fonction de Heaviside valant 0 d'un côté de la fissure et 1 de l'autre. $\bar{\mathbf{u}}$ correspond à la partie régulière du saut de déplacement et $[[\mathbf{u}]]$ au saut de déplacement.

Plus récemment, la méthode des éléments finis étendus, plus couramment appelée X-FEM (*eXtended Finite Element Method*) (Moës *et al.*, 1999) suppose une approximation de la solution en déplacements de la forme :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in K} N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{b}_k^l F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (1.20)$$

où $N_{i,j,k}$ sont les fonctions d'interpolation éléments finis classiques, I l'ensemble des nœuds du maillage et $\mathbf{u}_i$ les déplacements nodaux associés. J désigne l'ensemble des nœuds du maillage coupés par la fissure, la discontinuité du champ de déplacement est prise en compte via la fonction d'enrichissement de Heaviside H , les $\mathbf{a}_j$ étant les inconnus nodales associées à cet enrichissement. K désigne les nœuds des éléments situés en pointe de fissures, qui sont enrichis à l'aide de fonctions spécifiques permettant de prendre en compte la singularité du champ des contraintes, les $\mathbf{b}_k^l$ étant les inconnues nodales associées. La position de la fissure est déterminée via l'utilisation de fonctions de niveau (ou *level-sets* en anglais). Cette approche a tout d'abord été développée dans le cadre du modèle de Griffith, mais a rapidement été étendue aux fissures cohésives (Moës et Belytschko, 2002). Elle permet de représenter plus finement la fissure qu'avec l'approche des discontinuités fortes, pour laquelle la position de la discontinuité peut être discontinue entre les éléments. En particulier, l'approche des discontinuités forte ne permet pas de localiser précisément la pointe de la fissure. La gestion de la multi-fissuration (Daux *et al.*, 2000; Budyn *et al.*, 2004), et en particulier du branchement et de la coalescence des fissures, reste néanmoins difficile au niveau de la prise en compte des enrichissements.

1.4. Mécanique de l'endommagement

1.4.1. Modèles locaux

La mécanique de l'endommagement remonte aux travaux de Kachanov (1958); Chaboche et Lemaitre (1988). L'effet adoucissant des micro-fissures est pris en compte en introduisant une variable d'endommagement d , qui va diminuer progressivement la rigidité du matériau. En supposant que le seul phénomène dissipatif mis en jeu est l'endommagement (on ne considère pas par exemple les effets thermiques ou la plasticité par exemple), la densité d'énergie libre du matériau s'écrit :

$$\Psi(\epsilon, d) = \frac{1}{2}(1 - d)\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon \quad (1.21)$$

où $\mathbb{C}$ est le tenseur de Hooke du matériau non-endommagé. Physiquement, d peut être considérée comme la densité de micro-défauts : d est ainsi comprise entre 0 pour un matériau sain et 1 pour un matériau totalement endommagé. On considère dans ce qui suit que d est un scalaire, ce qui implique qu'on suppose le matériau isotrope, mais cette variable peut également être tensorielle dans le cas de l'endommagement anisotrope.

Les loi d'états se déduisent de l'expression du potentiel Ψ :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \epsilon \quad (1.22)$$

$$Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2}\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon \quad (1.23)$$

σ est le tenseur des contraintes de Cauchy, et Y le taux de restitution d'énergie élastique. Ce taux de restitution d'énergie permet de décrire l'évolution de la variable d'endommagement à l'aide des équations de propagation :

$$f \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad f\dot{d} = 0 \quad (1.24)$$

f est une fonction critère, qui dépend du modèle considéré.

Modèle de Mazars Parmi les modèles employés pour modéliser le comportement du béton, on citera par exemple le modèle de Mazars (1986), qui a l'avantage de distinguer les endommagements en traction et en compression. On introduit la déformation équivalente :

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \epsilon_i \rangle_+^2} \quad (1.25)$$

avec ϵ_i les déformations principales du tenseur des déformations et $\langle . \rangle_+$ l'opérateur de Macaulay :

$$\begin{cases} \langle \epsilon_i \rangle_+ &= \epsilon_i & \text{si } \epsilon_i \geq 0 \\ \langle \epsilon_i \rangle_+ &= 0 & \text{si } \epsilon_i < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

La fonction seuil s'écrit alors :

$$f(d) = \tilde{\epsilon} - K(d) \leq 0 \quad (1.27)$$

avec $K(0) = \epsilon_{d_0}$, la valeur initiale de la déformation pour laquelle l'endommagement commence à apparaître.

L'endommagement s'écrit alors comme une combinaison linéaire d'un endommagement d_t en traction et d'un endommagement d_c en compression :

$$d = \alpha_t^\beta d_t + \alpha_c^\beta d_c \quad (1.28)$$

où β est un coefficient qui a été introduit (Pijaudier-cabot *et al.*, 1991) afin de limiter l'endommagement en cisaillement. α_t et α_c sont calculés de la façon suivante :

$$\alpha_{t,c} = \sum_{i=1}^3 \frac{\epsilon_i^{t,c} \langle \epsilon_i \rangle_+}{\tilde{\epsilon}} \quad (1.29)$$

où $\epsilon_i^{t,c}$ sont les valeurs propres des déformations créées par les contraintes positives et négatives, pour l'indice t et c respectivement :

$$\begin{cases} \epsilon_t &= \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\langle \sigma \rangle_+) \\ \epsilon_c &= \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_- - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\langle \sigma \rangle_-) \end{cases} \quad (1.30)$$

On remarque que $\alpha_t = 1$ et $\alpha_c = 0$ pour une sollicitation de traction pure, et $\alpha_t = 0$ et $\alpha_c = 1$ pour une sollicitation de compression pure. Enfin, les endommagements en traction et en compression s'écrivent :

$$d_{t,c} = 1 - \frac{\epsilon_{d_0}(1 - A_{t,c})}{\tilde{\epsilon}} - A_{t,c} e^{(-B_{t,c}(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d_0}))} \quad (1.31)$$

Ce modèle est l'un des plus utilisés, pour sa robustesse et sa simplicité, mais ne permet pas de bien représenter le comportement du béton en cisaillement. La présence de l'opérateur de Macaulay, non dérivable en zéro, empêche le calcul de la matrice tangente. La matrice sécante est en pratique utilisée, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme de résolution non-linéaire utilisé. De plus il ne permet pas de prendre en compte la récupération de raideur lors de la fermeture des fissures.

Autres modèles d'endommagement Parmi les modèles d'endommagement anisotropes existants, on peut citer par exemple celui de Desmorat *et al.* (2007) qui utilise une variable d'endommagement tensorielle $\mathbf{D}$, où la contrainte effective s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \left[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1/2} \right]^D + \frac{1}{3} \left[\frac{\langle \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_+}{1 - \text{tr}(\mathbf{D})} - \langle \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_- \mathbf{I} \right] \quad (1.32)$$

où $(.)^D = (.) - \frac{1}{3} \text{tr}(.) \mathbf{I}$. L'utilisation d'une variable tensorielle permet de mieux prendre en compte la dissymétrie du comportement en traction et compression. En effet, les micro-fissures ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de chargement pour un chargement en traction, et parallèlement à la direction de chargement pour un chargement en compression. Pour une variable d'endommagement tensorielle, on aura alors :

$$\mathbf{D} \simeq \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

pour un chargement en traction suivant la direction 1, et

$$\mathbf{D} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

pour un chargement en compression suivant la direction 1.

Ce type de modèles s'avère particulièrement intéressant lorsque les structures étudiées sont soumises à des chargements multiaxiaux (tension-cisaillement par exemple) ou non radiaux. Ils sont en revanche plus complexes à implémenter, et ne sont pas nécessaires pour les cas de chargements considérés dans la plupart des études.

Il peut éventuellement être nécessaire de prendre en compte les déformations anélastiques dues à l'ouverture des micro-fissures. La Borderie (1991) propose ainsi l'expression suivante de la déformation élastique $\boldsymbol{\epsilon}^e$ et de la déformation anélastique $\boldsymbol{\epsilon}^{an}$:

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{E(1 - d_t)} + \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{E(1 - d_c)} + \frac{\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}) \quad (1.35)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{an} = \frac{\beta_t d_t}{E(1 - d_t)} F(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\beta_c d_c}{E(1 - d_c)} \mathbf{I} \quad (1.36)$$

où β_t et β_c sont des paramètres du modèle, et F une fonction de refermeture de fissure. Il est également possible de prendre en compte les déformations anélastiques en utilisant un couplage avec la théorie de la plasticité, comme avec le modèle de Jason *et al.* (2006). Ce type de modèle est utilisé notamment pour étudier des structures sous sollicitation cyclique, comme un chargement sismique par exemple. Enfin, des modèles permettent de tenir compte à la fois de l'anisotropie induite par la fissuration, des chargements non radiaux, de l'effet unilatéral et des déformations anélastiques (Fichant *et al.*, 1999; Sellier *et al.*, 1999).

1.4.2. Problème de localisation

L'inconvénient de ce type de modèle est d'entraîner dépendance pathologique au maillage des résultats obtenus (Bažant, 1976), ce que l'on illustre sur l'exemple de la figure 1.7 (a). Une barre de longueur L est encastree à l'une de ses extrémités, et soumise à un chargement à son autre extrémité. Cette barre est constituée d'un matériau adoucissant, dont la relation $\sigma = f(\epsilon)$ est donnée sur la figure 1.7 (b). Cette barre est maillée avec deux éléments finis, numérotés 1 et 2. L'équilibre statique de la barre impose une contrainte constante σ_0 le long de celle-ci.

Lorsqu'on applique le chargement sur la barre, tant que la déformation reste inférieure à la déformation au pic ϵ_p , la déformation est identique dans les éléments 1 et 2 et vaut $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$. Le problème d'unicité intervient lorsque la déformation commence à dépasser ϵ_0 dans un ou deux des éléments. Plusieurs cas sont possibles :

1. Si la déformation est parfaitement homogène, les deux éléments vont entrer dans la partie adoucissante de la courbe, la déformation sera donc homogène dans la barre et égale à une valeur $\epsilon_1 > \epsilon_p$ (cf. figure 1.7 (b))
2. En pratique, une barre n'est jamais totalement homogène. Numériquement, on peut être confronté à des instabilités ou des erreurs d'arrondis numériques. Ainsi la déformation seuil ϵ_p est généralement atteinte en premier dans un élément, par exemple dans l'élément 1, qui entre donc dans la phase adoucissante ($\epsilon_1 > \epsilon_p$). L'élément 2 quant à lui, n'est pas encore entré dans la phase adoucissante : la contrainte étant constante, le seul état de déformation possible est $\epsilon_2 < \epsilon_p$ (cf. figure 1.7 (b)), ce qui correspond à une décharge élastique

Cet exemple est généralisable pour un nombre N d'éléments finis. Là encore, la situation 2 est la plus probable (adoucissement d'un élément et décharge élastique de tous les autres). Cet exemple illustre bien la non-objectivité des résultats numériques par rapport au maillage : en effet, en faisant tendre la taille des éléments du maillage vers zéro, la zone dans laquelle ont lieu les phénomènes dissipatifs (adoucissement) tend vers zéro, entraînant une dissipation nulle, ce qui n'est physiquement pas acceptable.

Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire d'introduire numériquement une longueur caractéristique, afin que les phénomènes dissipatifs se localisent dans une zone de dimension non nulle. Quelques-unes des méthodes développées dans la littérature dans ce but sont présentées dans les paragraphes suivants.

1.4.3. Méthodes de régularisation des modèles locaux

Modèles à second gradient

Les modèles à second gradient (Cosserat et Cosserat, 1909) consistent à faire intervenir le second gradient du champ de déplacement, là où la plupart des modèles ne font intervenir que le premier gradient (cf. équation 1.5). Pour cela, on introduit un terme supplémentaire (Chambon *et al.*, 1998) dans l'expression du travail des efforts internes (1.9) :

$$W_{int} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) + \boldsymbol{\Sigma} : \nabla \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega \quad (1.37)$$

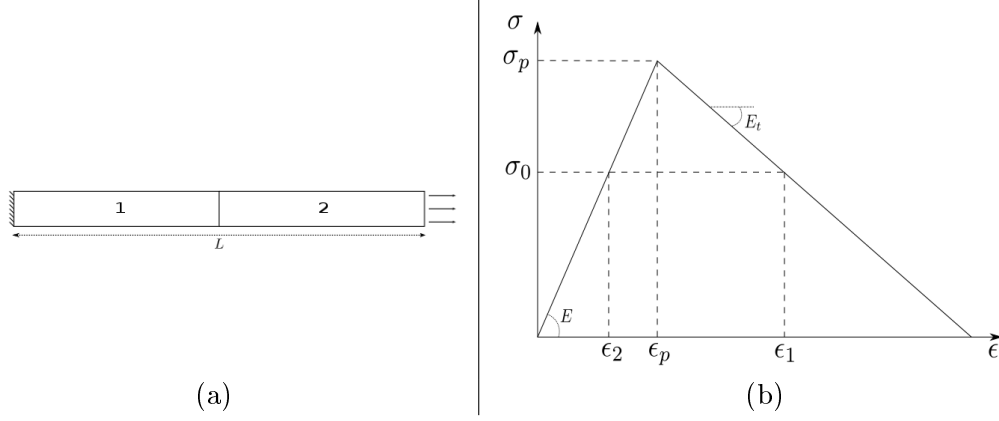


FIGURE 1.7. – Illustration du problème d'unicité pour les modèles adoucissants. (a) Barre de longueur L maillée avec deux éléments finis. (b) Loi de comportement adoucissante $\sigma = f(\epsilon)$ considérée

où Σ est un tenseur de double contrainte d'ordre 3, lié au terme $\nabla \nabla \delta \mathbf{u}$ par une relation de comportement de second gradient (cf. figure 1.8). Le travail des efforts externes (1.10) doit également être modifié afin d'introduire une condition aux limites de double force $\mathbf{F}_d$:

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}_d \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_d \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Gamma \quad (1.38)$$

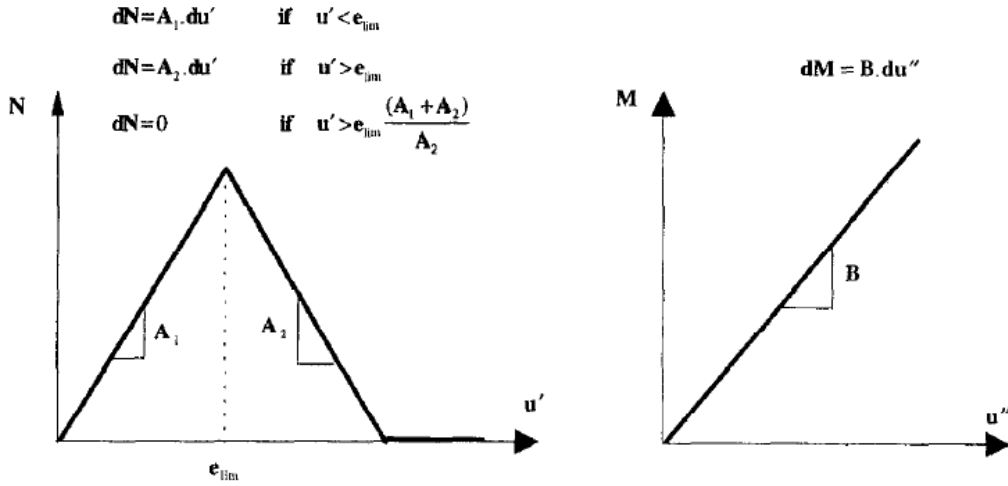


FIGURE 1.8. – Exemple de loi de comportement de type second gradient en 1D (Chambon *et al.*, 1998) (N : contrainte classique. M : double contrainte). À gauche : loi de comportement adoucissante pour le premier gradient. À droite : loi de comportement linéaire élastique pour le second gradient.

L'approche second gradient est couplée au modèle d'endommagement de Mazars (Mazars, 1986) par Kotronis *et al.* (2005), qui met en évidence la présence d'une longueur caractéristique dans le modèle, ce qui permet de garantir l'objectivité des résultats par rapport à la discrétisation éléments finis. En

revanche, l'unicité de la solution n'est pas assurée.

Régularisation de variables internes

Les méthodes de régularisation de variables internes supposent que la valeur de la variable régularisée en un point donné est influencée par les valeurs de cette variable dans le voisinage de ce point. Ces méthodes permettent de retranscrire à l'échelle macroscopique les phénomènes ayant lieu à l'échelle microscopique. Dans le cas du béton, ces phénomènes sont dus d'une part au caractère hétérogène du matériau, d'autre part aux interactions entre les micro-fissures (Bažant, 1991).

Modèle non-local intégral L'une des solutions pour résoudre le problème de localisation des modèles d'endommagement locaux a été proposé par Pijaudier-Cabot et Bažant (1987). Étant donnée une grandeur X , on définit sa valeur moyennée $\bar{X}$ de la façon suivante :

$$\bar{X}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Omega} X(\mathbf{s}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\Omega}{\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (1.39)$$

où ℓ_c est une longueur caractéristique du matériau considéré et ϕ est une fonction poids :

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (1.40)$$

Plusieurs choix sont possibles pour ϕ_0 , le plus courant étant une fonction gaussienne :

$$\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \exp\left(-\frac{4\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{\ell_c^2}\right) \quad (1.41)$$

Dans l'expression (1.40), ϕ_0 est normée afin de pouvoir représenter un champ uniforme, c'est-à-dire $X = \bar{X}$ si X est uniforme sur Ω . On remplace ensuite dans les équations du modèle local une des variables internes X par sa valeur moyennée $\bar{X}$. Différents choix sont possibles pour la quantité à moyenner, par exemple : dans le cas du modèle de Mazars, on peut moyenner la déformation équivalente (cf. équation (1.25)), dans le cas plus général défini par le potentiel (1.21), on choisira de moyenner le taux de restitution d'énergie Y (Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987) (cf. équation (1.23)), etc. Le choix de la quantité à moyenner doit cependant s'effectuer avec précaution afin d'éviter des problèmes de *locking* (Jirásek, 1998), c'est-à-dire une contrainte non-nulle lorsque $d = 1$. On remarquera que le fait de normer ϕ_0 rend ϕ non-symétrique par rapport à ses arguments, entraînant une non-symétrie de l'opérateur tangent (Jirásek et Patzák, 2002). La valeur de $\bar{X}$ en un point donné $\mathbf{x}$ dépend ainsi des valeurs de X sur un sous-domaine de rayon de l'ordre de $2\ell_c$ ($\phi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ étant quasiment nul si $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| > \ell_c$). Dans le cas du béton, Bažant et Pijaudier-Cabot (1989) montrent expérimentalement que $\ell_c \simeq 2.7d_a$, où d_a est la taille du plus gros granulat.

Cette méthode a pour inconvénient d'être coûteuse en ressources informatiques, le calcul des quantités moyennes par l'équation (1.39) devant être effectué sur tout le domaine. De plus, le fait de moyenner introduit des couplages entre degrés de libertés distants de ℓ_c qui n'existent pas pour des modèles purement locaux, ce qui augmente la largeur de bande de la matrice tangente. Des effets de

bords peuvent être observés aux frontières du domaine Ω (Krayani *et al.*, 2009) si le support de la fonction poids (1.40) n'est pas tronqué. Giry (2011) met également en évidence d'autres problèmes liés à l'amorçage en présence de singularités géométriques, ainsi que des erreurs de calcul des valeurs moyennées proches des bords ou de la rupture, et propose une amélioration consistant à remplacer la longueur caractéristique constante ℓ_c par une longueur caractéristique évolutive dépendant de l'état de contrainte local.

Modèle non-local à gradients Les modèles à gradients ont été proposés par Lasry et Belytschko (1988), et consistent à régulariser la déformation ϵ (en 1D) en écrivant un développement de Taylor où sont négligés les termes d'ordre supérieurs à 2 :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon + c^2 \nabla^2 \epsilon \quad (1.42)$$

où c est homogène à une longueur. Cette expression de $\bar{\epsilon}$ est cependant peu adaptée dans le cadre d'un calcul numérique : le terme en $\nabla^2 \epsilon$ nécessite en effet d'utiliser des fonctions d'interpolation au moins de classe $\mathcal{C}^1$. Peerlings *et al.* (1996) proposent donc une expression implicite de $\bar{\epsilon}_{eq}$:

$$\bar{\epsilon} - c^2 \nabla^2 \bar{\epsilon} = \epsilon \quad (1.43)$$

$\bar{\epsilon}$ devient ainsi solution d'une équation différentielle du second degré, dans laquelle n'intervient qu'un terme en ϵ , ce qui ne nécessite qu'une continuité $\mathcal{C}^0$ des fonctions d'interpolation. Pour résoudre l'équation (1.43) il faut imposer des conditions aux limites :

$$\nabla \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.44)$$

Cette condition n'a pas de réelle signification physique, ce qui pose la question de la qualité des résultats au niveau des bords du domaine. Peerlings *et al.* (2001) montrent que la régularisation non-locale intégrale et le modèle à gradient implicite (1.43) sont qualitativement équivalents. Il est possible de montrer que la déformation moyenne calculée par (1.43) peut s'exprimer sous la forme (1.39), avec une fonction poids particulière. Ils illustrent également sur des exemples de propagation d'ondes et d'analyse de champs de déformation en pointe de fissure que la formulation explicite (1.42) aboutit à des résultats non-physiques, comme par exemple une déformation qui n'est pas maximale en pointe de fissure, ce qui constitue un argument supplémentaire en faveur de la formulation implicite. On notera enfin que tout comme pour les modèles non-locaux intégraux, il est possible de régulariser d'autres variables que la déformation.

Champs de phase

L'approche par champs de phase (en anglais *phase field*), initialement développée pour l'étude des changements de phase en physique, a été adaptée à l'étude de la propagation dynamique des fissures en mode III par Karma *et al.* (2001). Elle est ensuite reprise (Miehe *et al.*, 2010) dans le cadre de la propagation quasi-statique des fissures. Cette approche s'inscrit dans le cadre de la formulation variationnelle de la rupture (Francfort et Marigo, 1998), initialement motivée par les faiblesses de

la mécanique de la rupture (initiation, propagation de fissures complexes avec branchement et/ou coalescence), mais se rapproche davantage de la mécanique de l'endommagement dans son formalisme (pas de discontinuité).

Un champ auxiliaire α , qui joue un rôle équivalent à celui du champ d'endommagement d en mécanique de l'endommagement, est introduit. Une des particularités de l'approche phase field du point de vue numérique est que ce champ auxiliaire est une variable nodale et doit donc être discrétisé, contrairement à la mécanique de l'endommagement où d est une variable interne. Le champ α satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha - \ell_c^2 \nabla^2 \alpha = 0 & \text{dans } \Omega \\ \alpha = 1 & \text{sur } \Gamma \\ \nabla \alpha \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.45) \\ (1.46) \\ (1.47) \end{matrix}$$

α peut être considéré comme un lissage de la fonction indicatrice de la position de la fissure Γ , c'est-à-dire la fonction valant 1 sur la fissure et 0 partout ailleurs (cf. figure 1.9). Pour une poutre 1D de longueur infinie et fissurée en $x = 0$, α a pour expression (Miehe *et al.*, 2010) :

$$\alpha(x) = e^{-\frac{|x|}{\ell_c}} \quad (1.48)$$

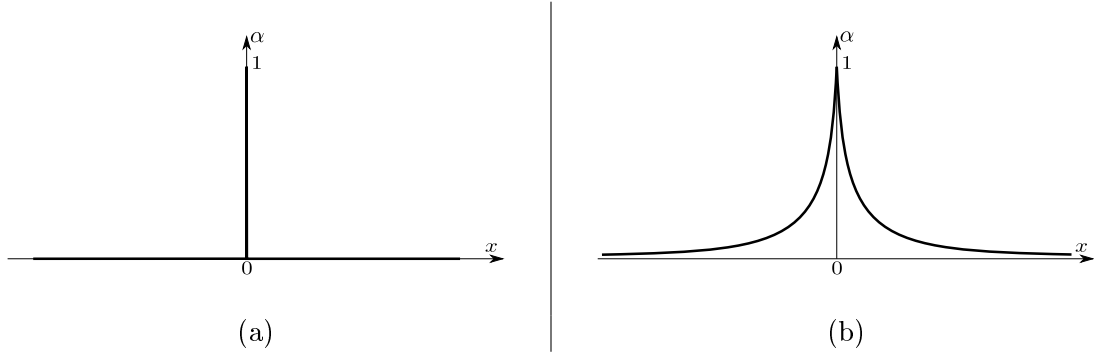


FIGURE 1.9. – Champ auxiliaire α pour une fissure en $x = 0$. (a) Champ idéalisé. (b) Champ lissé.

L'approche phase field a été comparée à la méthode TLS, utilisée dans ce mémoire et présentée plus en détails dans le chapitre 2 par Cazes et Moës (2015). Un profil d'endommagement TLS est déduit de (1.48) afin d'obtenir une énergie de fracture équivalente. Cette comparaison sur un cas 1D permet de mettre en évidence que la condition aux limites (1.47) a tendance à causer des effets de bords. Ces effets sont présents aussi avec la méthode TLS mais de façon amoindrie et dus au calcul des variables régularisées plutôt qu'à une condition aux limites.

1.5. Transition endommagement-rupture

Les deux approches présentées dans les sections 1.3 et 1.4 sont différentes mais néanmoins équivalentes. Ainsi Mazars et Pijaudier-cabot (1996) établit un lien entre les deux approches, basée sur l'égalité des

incréments d'énergie dissipée :

$$dA = \frac{\int_{\Omega} (-Yd)d\Omega}{G_c} \quad (1.49)$$

où l'aire de la fissure A et le taux de restitution d'énergie critique G_c , qui sont des grandeurs caractéristiques de la mécanique de la rupture linéaire, sont mis en relation avec le taux de restitution d'énergie élastique Y et la variable d'endommagement d , qui sont des grandeurs caractéristiques de la mécanique de l'endommagement. Cela permet de déduire une zone endommagée équivalente à une fissure, et inversement. Cazes *et al.* (2009, 2010) utilise ce principe avec un modèle de fissure cohésive en exploitant le fait que G_c est égal à l'aire sous la courbe d'adoucissement $\sigma = f(w)$. La courbe $\sigma = f(w)$ est ainsi obtenue à partir d'un modèle d'endommagement non-local. Planas *et al.* (1993) montrent analytiquement sur un cas 1D qu'un modèle cohésif peut-être solution d'un problème traité à l'aide d'un modèle non-local. Ainsi modèles non-locaux et cohésifs semblent toujours équivalents lors de la phase de localisation, et pour des problèmes sans endommagement diffus les deux approches donneront des résultats similaires. En revanche, aucune des deux utilisée séparément ne peut modéliser l'intégralité du processus de dégradation des structures, depuis l'initiation de l'endommagement diffus, jusqu'à l'ouverture des macro-fissures.

Des méthodes permettant la transition entre endommagement et rupture ont été proposées, par exemple par Peerlings *et al.* (2000) dans le cas de la fatigue. La méthode développée est motivée par certains problèmes de la mécanique de l'endommagement apparaissant lorsque d tend vers 1. Numériquement, cela peut rendre le problème à résoudre singulier puisque la raideur de tels éléments devient nulle, entraînant des problèmes de conditionnement. Généralement, la valeur de d est bornée à une valeur strictement inférieure à 1, ce qui permet de résoudre le problème. En revanche, un autre problème apparaît, spécifique aux modèles non-locaux ; en effet, les interactions non-locales de part et d'autres des lèvres de la "fissure" (zone où d est proche de 1) ont tendance à causer une croissance non-physique de la zone endommagée. La solution proposée par Peerlings *et al.* (2000) consiste donc simplement à supprimer du calcul les éléments pour lesquels l'endommagement est proche de 1. L'inconvénient de cette approche est que la taille de la fissure dépend de la taille des éléments du maillage. L'approche proposée par Simone *et al.* (2003), motivée par les problèmes de croissance non-réaliste de la zone endommagée, utilise un modèle d'endommagement à gradients associé à la méthode des discontinuités fortes (cf. section 1.3.3) afin d'introduire une fissure libre lorsque la valeur de l'endommagement est proche de 1. Cela permet de supprimer les interactions non-locales superflues. Partant d'un modèle d'endommagement non-local, Comi *et al.* (2007) déduit une valeur critique l'endommagement D_{cr} au delà de laquelle une fissure cohésive est introduite. D_{cr} est un paramètre numérique dépendant de la taille des éléments du modèle, en fonction de la précision désirée. La forme de la loi cohésive est déterminée de façon à ce que la fissure dissipe l'énergie qu'aurait dissipé l'endommagement s'il n'avait pas été borné à D_{cr} .

2. L'approche Thick Level Set

Sommaire

2.1. Introduction	30
2.1.1. Équations du modèle local	30
2.1.2. Régularisation par la méthode TLS	32
2.1.3. Résolution explicite	33
2.2. Version simplifiée	34
2.2.1. Calcul des champs moyens	35
2.2.2. Pilotage et propagation du front	38
2.2.3. Initiation	40
2.2.4. Enrichissement	40
2.2.5. Double-découpe	42
2.2.6. Récapitulatif	42
2.3. Version complète	42
2.3.1. Calcul des champs moyens	44
2.3.2. Pilotage et propagation du front	47
2.3.3. Enrichissement	49
2.3.4. Récapitulatif	50
2.4. Comparaison des approches simplifiée et complète	50
2.5. Choix de la fonction d'adoucissement	51
2.5.1. Équivalence avec les modèles cohésifs	51
2.5.2. Paramètres matériaux du modèle TLS	53
2.6. Conclusion	54

2.1. Introduction

On a vu dans les sections 1.3 et 1.4 que les modèles permettant d'étudier le comportement des matériaux quasi-fragiles peuvent être classés en deux catégories :

La mécanique de la rupture , présentée dans la section 1.3. Les macro-fissures sont introduites sous la forme de discontinuités du champ de déplacements. Les modèles cohésifs 1.3.2 en particulier permettent de s'assurer que la dissipation d'énergie induite par la zone d'élaboration est bien reproduite. L'ouverture des fissures peut ainsi être extraite, en revanche la gestion de l'endommagement diffus ne peut être prise en compte avec ce type de modèles.

La mécanique de l'endommagement , présentée dans la section 1.4. L'influence de la micro-fissuration est représentée par une diminution des propriétés mécaniques du matériau, via des lois de comportement adoucissantes, qui posent des problèmes de perte d'unicité de la solution. Des méthodes de régularisation (cf. section 1.4.3) permettent cependant d'y répondre. Ces approches étant continues, il n'est en revanche pas possible de modéliser l'apparition de macro-fissures.

Quelques exemples de méthodes permettant de combiner les avantages des deux types de modèles ont été donnés dans la section 1.5. L'approche *Thick Level Set*, souvent abrégée "TLS", initialement proposée par Moës *et al.* (2011), fait partie de cette catégorie. Il s'agit d'une méthode de régularisation des modèles d'endommagement locaux (cf. section 1.4.3) dont l'un des principaux avantages (Bernard *et al.*, 2012; Moreau *et al.*, 2016), comme on va le voir dans ce chapitre, est d'introduire de façon naturelle des discontinuités du champ de déplacement par la méthode X-FEM. Initialement, la méthode TLS ne permettait de traiter que des problèmes où l'endommagement était localisé, mais a rapidement été étendue au cas de l'endommagement diffus (Moës *et al.*, 2014). La méthode TLS est également applicable en dynamique (Moreau, 2014). Des méthodes de résolution efficaces pour traiter des calculs 3D sont présentées dans (Salzman *et al.*, 2016). Enfin, l'approche TLS a été appliquée à l'étude des matériaux composites stratifiés par Gorris (2012), qui s'est intéressé notamment au processus de fissuration transverse et au délaminage, et par van der Meer et Sluys (2015) pour l'étude de la délamination en mode II.

Les concepts généraux de la méthode TLS sont tout d'abord rappelés dans la suite de cette section. Une présentation unifiée des deux versions de la méthode qui ont été proposées jusqu'à maintenant (Moës *et al.*, 2011, 2014) est ensuite développée dans les sections 2.2 et 2.3. Les différences entre les deux méthodes y sont mises en évidence, et récapitulées dans la section 2.4. Le choix des paramètres de la méthode TLS est discuté dans la section 2.5. En particulier, leur influence sur le comportement local aux points de Gauss est étudié. La méthode utilisée dans cette thèse pour caler les différents paramètres y est également expliquée.

2.1.1. Équations du modèle local

La méthode TLS est ici introduite à partir du modèle local défini à partir de l'énergie libre suivante :

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \frac{1}{2}(1 - d)\boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

où ϵ est le tenseur des déformations, $\mathbb{C}$ le tenseur de Hooke et d la variable (scalaire) d'endommagement. Le potentiel (2.1) a été choisi pour sa simplicité, mais on notera que l'approche TLS ne dépend pas de l'expression de $\psi(\epsilon, d)$.

Les équations d'état s'en déduisent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \epsilon \\ Y = -\frac{\partial \psi}{\partial d} = \frac{1}{2}\epsilon : \mathbb{C} : \epsilon \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy et Y le taux de restitution d'énergie élastique. Afin d'introduire une dissymétrie du comportement entre la traction et la compression, le potentiel (2.1) est modifié (Lemaitre et Desmorat, 2005) :

$$\psi(\epsilon, d) = \mu(1 - \alpha_i d)\epsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \alpha d)\text{tr}(\epsilon)^2 \quad (2.4)$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé, ϵ_i les valeurs propres du tenseur des déformations et

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta & \text{si } \epsilon_i < 0 \\ & 1 & \text{si } \epsilon_i \geq 0 \\ \alpha = \beta & \text{si } \text{tr}(\epsilon) < 0 \\ & 1 & \text{si } \text{tr}(\epsilon) \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Les lois d'état sont modifiées en conséquence :

$$\begin{cases} \sigma_i = 2\mu(1 - \alpha_i d)\epsilon_i + \lambda(1 - \alpha d)\text{tr}(\epsilon) \\ Y = -\mu\alpha_i\epsilon_i^2 - \alpha\frac{\lambda}{2}\text{tr}(\epsilon)^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

avec $0 \leq \beta \leq 1$. Si $\beta = 1$, on retrouve le potentiel linéaire (2.1). Si $\beta = 0$, l'endommagement n'agit plus sur la partie compression du potentiel, le matériau récupère sa raideur en compression et ne peut s'endommager qu'en traction.

La propagation de l'endommagement est alors gouvernée par l'équation

$$f(Y, d) \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad f(Y, d)\dot{d} = 0 \quad (2.8)$$

où

$$f(Y, d) = Y - Y_c(d) = Y - Y_c^0 h(d) \quad (2.9)$$

est une fonction seuil. Y_c^0 est une constante, paramètre du modèle, et h est une fonction également paramètre du modèle appelée fonction d'adoucissement. Dans les premières versions de la méthode TLS (Moës *et al.*, 2011; Bernard *et al.*, 2012) la fonction constante $h(d) = 1$ était considéré. Ce cas correspond aux matériaux purement fragiles. Une fonction h croissante et adimensionnée, telle que $h(0) = 1$, a été introduite plus tardivement (Moës *et al.*, 2014; Parrilla Gómez, 2015) afin d'étudier les matériaux quasi-fragiles. Le choix de cette fonction sera discuté dans la section 2.5.

2.1.2. Régularisation par la méthode TLS

Principe

Lors d'un calcul par éléments finis avec un modèle local tel que celui défini par (2.4), l'endommagement a tendance à se localiser dans une bande dont la largeur est celle d'un élément fini (cf. section 1.4.2). Autrement dit, dans cette zone le gradient de la variable d'endommagement d devient infini. L'idée de la méthode TLS est de conserver un gradient d'endommagement fini :

$$\|\nabla d\| \leq g(d) \quad (2.10)$$

où g est une fonction bornée. Pour cela on introduit une longueur caractéristique ℓ_c en écrivant la variable d'endommagement d comme fonction d'une level set ϕ , $d = d(\phi)$ qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d(\phi) &= 0 & \text{si} & & \phi &\leq 0 \\ 0 < d(\phi) < 1 & \text{si} & 0 < \phi \leq \ell_c & \text{et} & d'(\phi) > 0 \\ d(\phi) &= 1 & \text{si} & & \ell_c < \phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le profil d'endommagement $d(\phi)$, défini par l'utilisateur, peut être considéré comme une propriété du matériau considéré. Un exemple de profil d'endommagement quadratique $d(\hat{\phi}) = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2$ (exprimé en fonction de la variable adimensionnée $\hat{\phi} = \phi/\ell_c$) est donné sur la figure 2.1. Du point de vue de la discrétisation, l'approximation ϕ^h de ϕ s'écrit :

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \phi_i L_i(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

où N est l'ensemble des noeuds du maillage, et L_i sont les fonctions d'interpolation éléments finis linéaires.

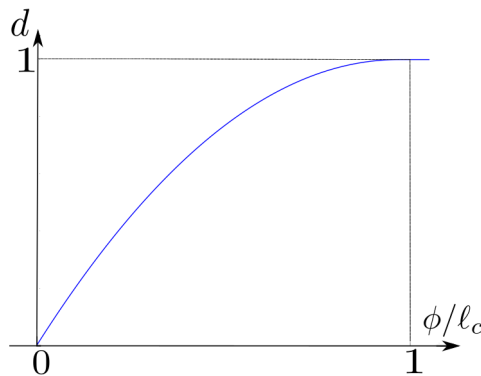


FIGURE 2.1. – Exemple de profil d'endommagement

La condition (2.10) peut s'écrire en fonction de ϕ

$$\|\nabla \phi\| \leq 1 \quad (2.13)$$

La fonction g de (2.10) étant alors égale à $g(d) = d'(\phi(d))$. Le taux d'endommagement s'écrit alors :

$$\dot{d} = d'(\phi)\dot{\phi} \quad (2.14)$$

Version simplifiée et version complète

Jusqu'à présent, deux versions de la méthode ont été proposées, qui dépendent de la façon dont la contrainte (2.13) est imposée :

- $\|\nabla\phi\| = 1$: Dans cette version de la méthode, qui est historiquement la première (Moës *et al.*, 2011), la valeur du gradient de ϕ est fixée à 1. L'équation (2.13) est bien respectée, mais cette contrainte un peu plus forte fait que l'on ne peut modéliser que des problèmes où l'endommagement est localisé. Cette version de la méthode sera qualifiée de **simplifiée**.
- $\|\nabla\phi\| \leq 1$: Dans cette seconde version de la méthode (Moës *et al.*, 2014), le gradient de ϕ peut évoluer, mais est contraint de rester inférieur ou égal à 1, ce qui permet de modéliser l'endommagement diffus qui apparaît avant le phénomène de localisation. Cette version de la méthode sera qualifiée de **complète**.

Certaines étapes de la méthode TLS sont communes aux deux versions, d'autres sont spécifiques à l'une ou à l'autre. Certaines fonctionnalités pourraient être utilisées dans les deux versions, mais ne sont implémentées que dans l'une ou l'autre. Les calculs réalisés au cours de cette thèse l'ont été avec l'une ou l'autre des méthodes, en fonction des spécificités des différents cas tests et des résultats recherchés. On donne dans la section 2.1.3 l'algorithme de résolution général d'un problème mécanique par la méthode TLS. On détaille ensuite dans les sections 2.2 et 2.3 les spécificités des deux versions de la méthode, telles qu'elles sont implémentées. Un récapitulatif sur les deux versions de la méthode sera fait dans la section 2.4.

2.1.3. Résolution explicite

Quelle que soit la version de la méthode TLS considérée, le problème est résolu de façon explicite, c'est-à-dire que le champ de déplacement $\mathbf{u}$ et la level set ϕ sont calculés successivement. De plus, le chargement F (qui peut être un effort aussi bien qu'une condition aux limites en déplacements) est considéré comme étant une inconnue du problème : on l'écrit sous la forme :

$$F = \mu F_{ref} \quad (2.15)$$

où F_{ref} désigne un chargement de référence (par exemple, le déplacement ou l'effort maximal que l'on souhaite imposer à la structure étudiée). Le facteur de charge μ est une inconnue du problème, que l'on va calculer à chaque itération du calcul de façon à obtenir une certaine propagation du champ ϕ . Cela permet entre autres de traiter les problèmes de *snap-back* couramment rencontrés lorsque l'on utilise des modèles adoucissants.

En tenant compte de la loi de comportement (2.2), et en négligeant les efforts volumiques, le problème mécanique (1.8) présenté dans la section 1.2, pour le chargement de référence F_{ref} peut se réécrire sous la forme suivante : trouver $\mathbf{u}_{ref} \in \mathcal{C}_{ref}$ tel que :

$$\int_{\Omega} (1-d) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{ref}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_{d,ref} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0 \quad (2.16)$$

où :

$$\mathcal{C}_{ref} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_{d,ref} \text{ sur } \partial\Omega_u\} \quad (2.17)$$

et $\mathbf{u}_d = \mu \mathbf{u}_{d,ref}$, $\mathbf{T}_d = \mu \mathbf{T}_{d,ref}$.

Tout calcul par la méthode TLS (peu importe la version considérée) suit les étapes de calcul présentées dans l'algorithme 1.

Connaissant $(\mathbf{u}^n, \phi^n, \mu^n)$ au pas n :

1. Une solution de référence $\mathbf{u}_{ref}^{n+1}$ est calculé à partir de ϕ^n . ϕ^n étant connu, d^n aussi (équation (2.2)), le problème (2.16) devient linéaire, on peut donc calculer $\mathbf{u}_{ref}^{n+1}$, solution de (2.16) pour le chargement F_{ref} . On remarque que si la relation de comportement asymétrique (2.6) est utilisée, le problème (2.16) devient non-linéaire par rapport à $\mathbf{u}$, on le résout donc avec un algorithme de Newton-Raphson.
2. On calcule le nouveau facteur de charge μ^{n+1} , on a alors $\mathbf{u}^{n+1} = \mu^{n+1} \mathbf{u}_{ref}^{n+1}$ (cf. équation (2.44) section 2.2 pour la version simplifiée et équation (2.67) section 2.3 pour la version complète).
3. À partir du champ $\mathbf{u}_{ref}^{n+1}$ et de μ^{n+1} , on calcule ϕ^{n+1} (cf. section 2.2 pour la version simplifiée et section 2.3 pour la version complète).

Algorithme 1 : Algorithme explicite de résolution d'un calcul par la méthode TLS

2.2. Version simplifiée

On présente dans cette section la méthode TLS présentée dans (Bernard *et al.*, 2012), basée sur les concepts introduits dans (Moës *et al.*, 2011), pour le cas où on impose :

$$\|\nabla \phi\| = 1 \quad (2.18)$$

On définit les domaines et interfaces suivants :

$$\Omega_- = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \phi(\mathbf{x}) < 0\} \quad (2.19)$$

$$\Omega_+ = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < \phi(\mathbf{x}) < \ell_c\} \quad (2.20)$$

$$\Omega_c = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \phi(\mathbf{x}) > \ell_c\} \quad (2.21)$$

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \phi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.22)$$

$$\Gamma_c = \{\mathbf{x} \in \Omega, \quad \phi(\mathbf{x}) = \ell_c\} \quad (2.23)$$

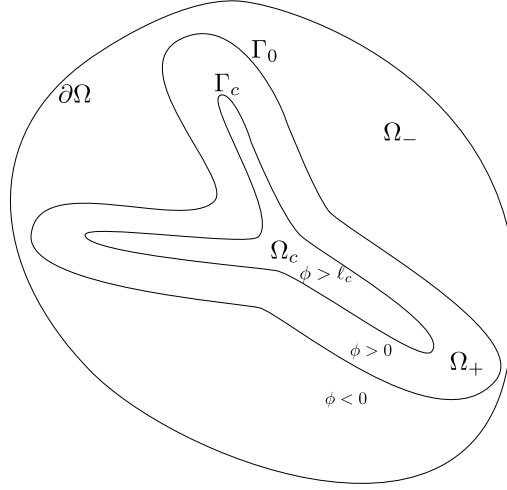


FIGURE 2.2. – Définition des différents domaines.

Dans ces conditions (cf. figure 2.2), et en prenant en compte les propriétés du profil d'endommagement $d(\phi)$ (2.11) :

- Ω_- est le sous-domaine de Ω non-endommagé, qu'on appellera aussi “matériau sain”
- Ω_+ est le sous-domaine de Ω partiellement endommagé, où “matériau endommagé”
- Ω_c est le sous-domaine de Ω totalement endommagé, où encore “zone morte”
- Γ_0 est la frontière entre le matériau sain et le matériau endommagé, qu'on appellera “front d'endommagement”
- Γ_c est la frontière entre le matériau endommagé et la zone morte. On remarque que Γ_c correspond à la position des fissures macroscopiques

On insiste sur le fait que la condition (2.18) est vérifiée sur Ω tout entier, ce qui ne sera pas le cas dans la section 2.3.

Un choix possible pour ϕ permettant de vérifier (2.18) est une fonction distance signée, c'est-à-dire telle que pour tout point $\mathbf{x}$ de Ω :

$$\phi(\mathbf{x}) = \pm \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.24)$$

le signe de $\phi(\mathbf{x})$ étant positif si $\mathbf{x} \in \Omega_+$ et négatif si $\mathbf{x} \in \Omega_-$.

2.2.1. Calcul des champs moyens

Définition

En tenant compte de (2.14), la dissipation s'écrit :

$$D = - \int_{\Omega_+} Y d'(\phi) \dot{\phi} d\Omega \quad (2.25)$$

Afin de respecter (2.18), le taux de la fonction level set $\dot{\phi}$ doit vérifier :

$$\nabla \dot{\phi} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.26)$$

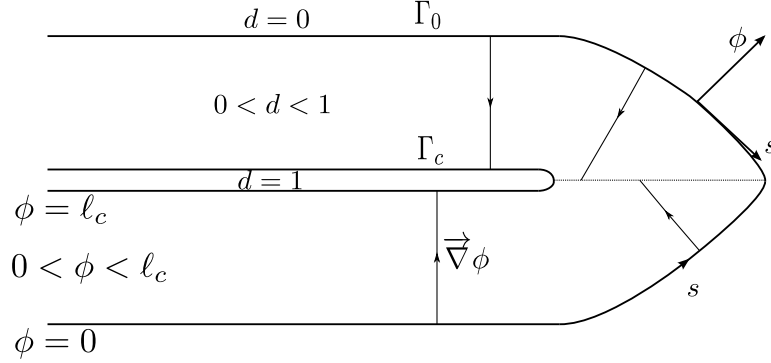


FIGURE 2.3. – Définition de la zone endommagée

Ce qui signifie que $\dot{\phi}$ est uniforme le long de segments parallèles à $\nabla \phi$ (cf. figure 2.3). Autrement dit, connaître la façon dont ϕ se propage le long de Γ_0 suffit à savoir comment se propage ϕ dans l'ensemble du domaine. On peut ainsi définir un système de coordonnées locales (ϕ, s) , tel que s est tangent aux iso-valeurs de ϕ .

On écrit alors (2.25) dans le système de coordonnées (ϕ, s) (Moës *et al.*, 2011) :

$$D = - \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^{\ell(s)} Y(\phi, s) d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi \right) \dot{\phi} ds \quad (2.27)$$

où $\rho(s)$ est le rayon de courbure de Γ_0 et $\ell(s)$ la largeur de la zone endommagée. Comme $\dot{\phi}$ est indépendant de ϕ , la force thermodynamique associée $\bar{Y}$ doit l'être aussi ; on cherche donc $\bar{Y}$ tel que :

$$\int_0^{\ell(s)} Y(\phi, s) d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi = \int_0^{\ell(s)} \bar{Y}(s) d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi = \bar{Y}(s) \int_0^{\ell(s)} d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi \quad (2.28)$$

Ce qui amène à définir, pour une grandeur donnée X , sa valeur non-locale $\bar{X}(s)$ le long de Γ_0 :

$$\bar{X}(s) = \frac{\int_0^{\ell(s)} X(\phi, s) d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi}{\int_0^{\ell(s)} d'(\phi) \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)} \right) d\phi} \quad (2.29)$$

La grandeur $\bar{X}(s)$ est constante le long du gradient de ϕ , et ne dépend que de la position le long du front d'endommagement Γ_0 . On choisit ici de régulariser le critère f : $\bar{f} = \bar{Y} - \bar{Y}_c$. L'équation (2.8) est alors remplacée par sa version non-locale, définie le long de Γ_0 :

$$\bar{f} \leq 0, \quad a \geq 0, \quad \bar{f}a = 0 \quad (2.30)$$

où $a = \dot{\phi}$ est l'avancée du front d'endommagement. Cette équation permet de déduire l'avancée du

front Γ_0 pour chaque valeur de l'abscisse curviligne s .

Méthode Lagrangienne

L'équation (2.30) nécessite de calculer les valeurs moyennées $\bar{Y}$ et $\bar{Y}_c$, qui appartiennent à l'espace suivant :

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{y \in L^2(\Omega_+), \quad \nabla y \cdot \nabla \phi = 0\} \quad (2.31)$$

Or l'utilisation de (2.29) fait intervenir le rayon de courbure $\rho(s)$, qui peut s'avérer compliqué à calculer en pratique. On préfère donc calculer $\bar{Y}$ (la démarche est la même pour $\bar{Y}_c$) en résolvant la formulation variationnelle suivante : trouver $\bar{Y} \in \bar{\mathcal{Y}}$ tel que :

$$\int_{\Omega_+} \bar{Y} \bar{Y}^* d'(\phi) d\Omega = \int_{\Omega_+} Y \bar{Y}^* d'(\phi) d\Omega, \quad \forall \bar{Y}^* \in \bar{\mathcal{Y}} \quad (2.32)$$

On impose ainsi de façon forte que $\bar{Y}$ doit être constant le long du gradient de ϕ . La construction de l'espace $\bar{\mathcal{Y}}$ étant complexe, on choisit plutôt d'imposer faiblement la contrainte $\nabla y \cdot \nabla \phi = 0$ en modifiant la formulation variationnelle (2.32). On définit les espaces $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}_0$ comme étant :

$$\mathcal{Y} = \{y \in L^2(\Omega_+)\} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{Y}_0 = \{y \in L^2(\Omega_+), \quad y = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \quad (2.34)$$

$\bar{Y}$ est alors calculé en résolvant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_+} (\bar{Y} \bar{Y}^* d'(\phi) + \frac{h^2}{\ell_c} \nabla \bar{Y} \cdot \nabla \bar{Y}^*) d\Omega + \int_{\Omega_+} \ell_c (\nabla \lambda \cdot \nabla \phi) (\nabla \bar{Y}^* \cdot \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega_+} Y \bar{Y}^* d'(\phi) d\Omega, \quad \forall \bar{Y}^* \in \mathcal{Y} \\ \int_{\Omega_+} \ell_c (\nabla \lambda^* \cdot \nabla \phi) (\nabla \bar{Y} \cdot \nabla \phi) d\Omega = 0, \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{Y}_0 \end{cases} \quad (2.35)$$

λ est un multiplicateur de Lagrange qui permet d'imposer la condition $\nabla y \cdot \nabla \phi = 0$. Le terme en $\frac{h^2}{\ell_c} \nabla \bar{Y} \cdot \nabla \bar{Y}^*$, où h est la taille caractéristique des éléments du maillage, est un terme de diffusion qui permet de limiter les oscillations de $\bar{Y}$. $\bar{Y}$ et λ sont ensuite discrétisés en utilisant les fonctions d'interpolation éléments finis classiques des éléments de Ω_+ :

$$\bar{Y}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_+} \bar{Y}_i N_i(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

$$\lambda^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_+} \lambda_i N_i(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

où N_i désigne la fonction d'interpolation éléments finis du nœud i appartenant à N_+ , ensemble des nœuds du maillage appartenant à Ω_+ . La condition de Dirichlet sur λ (cf. équation 2.34) est imposée

en fixant à 0 les valeurs des degrés de liberté des éléments coupés par Γ_0 . En injectant (2.36) et (2.37) dans (2.35), on obtient le problème matriciel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

où $\overline{\mathbf{Y}}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont les vecteurs contenant les degrés de libertés $\overline{Y}_i$ et λ_i et :

$$K_{ij} = \int_{\Omega_+} \left(d'N_i N_j + \frac{h^2}{\ell_c} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right) d\Omega \quad (2.39)$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega_+} \ell_c \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^h}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^h}{\partial x_k} \right) d\Omega \quad (2.40)$$

$$M_i = \int_{\Omega_+} N_i d'Y d\Omega \quad (2.41)$$

On obtient un problème éléments finis relativement simple à résoudre, et d'autant plus rapide que sa résolution est limitée à la zone endommagée Ω_+ .

Quelques remarques :

- On peut montrer que lorsque la largeur de la zone endommagée $\ell(s)$ tend vers 0, la quantité non-locale $\overline{X}$ tend vers la quantité locale X .
- La largeur de la zone endommagée $\ell(s)$ évolue au cours du calcul. Lorsque l'endommagement commence à se développer, $\ell(s) < \ell_c$. Lorsque $\ell(s) > \ell_c$, comme $d'(\phi) = 0$ pour $\phi > \ell_c$, l'intégrande de (2.29) devient nulle, le calcul des valeurs moyennées se fait donc sur des segments de longueur au plus ℓ_c .
- On notera que la condition (2.34) peut elle aussi être imposée à l'aide d'un second multiplicateur de Lagrange (cf. (Salzman *et al.*, 2016)).

2.2.2. Pilotage et propagation du front

On suppose connue la valeur du champ ϕ à un instant donné n du calcul (l'exposant $.^h$ est omis pour simplifier les notations). Un calcul pour le chargement de référence permet d'obtenir un champ de déformations ϵ_{ref}^{n+1} (algorithme 1, étape 1). On en déduit les champs moyens $\overline{Y}_{ref}^{n+1}$ et $\overline{Y}_c^{n+1}$ (cf. section précédente). Ces champs sont ensuite utilisés pour obtenir le nouveau facteur de charge μ^{n+1} (algorithme 1, étape 2) et le champ ϕ^{n+1} (algorithme 1, étape 3) à l'instant $n + 1$.

Tout d'abord, en utilisant l'expression de Y issue de (2.3) (la conclusion est identique en utilisant le potentiel assymétrique (2.7)), on a :

$$Y^{n+1} = \frac{1}{2} \epsilon^{n+1} : \mathbb{C} : \epsilon^{n+1} = \frac{1}{2} (\mu^{n+1} \epsilon_{ref}^{n+1}) : \mathbb{C} : (\mu^{n+1} \epsilon_{ref}^{n+1}) = (\mu^{n+1})^2 Y_{ref}^{n+1} \quad (2.42)$$

En injectant (2.42) dans la partie critère de l'équation de propagation (2.30), on obtient :

$$(\mu^{n+1})^2 \overline{Y}_{ref}^{n+1} - \overline{Y}_c^{n+1} \leq 0 \quad (2.43)$$

où $\overline{Y}_{ref}^{n+1}$ et $\overline{Y}_c^{n+1}$ sont calculés par l'équation (2.35).

μ^{n+1} est alors déterminé de façon à ce qu'au moins un point du front d'endommagement Γ_0 se propage, autrement dit, que l'inégalité (2.43) soit une égalité en au moins un nœud du front Γ_0^h discrétisé :

$$\mu^{n+1} = \sqrt{\min_{i \in \Gamma_0^h} \frac{\bar{Y}_{ci}^{n+1}}{\bar{Y}_{ref_i}^{n+1}}} \quad (2.44)$$

On calcule alors l'avancée du front $a^{n+1} = \phi^{n+1} - \phi^n$. La valeur $\mu^{n+1} + |\Delta\mu|$ est choisie comme prédiction du facteur de charge, chaque nœud du front Γ_0^h est alors avancé en fonction du rapport $(\mu^{n+1} + |\Delta\mu|)^2 \left(\frac{\bar{Y}_{ref_i}^{n+1}}{\bar{Y}_{ci}^{n+1}} \right)$ (ce qui est quasiment équivalent à avoir une avancée du front proportionnelle à $\langle \bar{Y} - \bar{Y}_c \rangle_+$) :

$$a_i^{n+1} = k \left\langle (\mu^{n+1} + |\Delta\mu|)^2 \left(\frac{\bar{Y}_{ref_i}^{n+1}}{\bar{Y}_{ci}^{n+1}} \right) - 1 \right\rangle_+ \quad (2.45)$$

où $\Delta\mu = \mu^{n+1} - \mu^n$ et

$$k = \frac{a_{max}}{\left(1 + \frac{|\Delta\mu|}{\mu^{n+1}}\right)^2 - 1} \quad (2.46)$$

Ce qui permet de calculer $\phi^{n+1} = \phi^n + a^n$ le long du front Γ_0^h . a_{max} est un paramètre numérique qui représente l'avancée maximale du front, l'expression de k permet de s'assurer que le maximum de a_i^{n+1} soit égal à a_{max} . Le choix de $\mu^{n+1} + |\Delta\mu|$ comme prédicteur est arbitraire mais permet de retrouver des taux de convergence cohérents en fonction du paramètre a_{max} (voir (Bernard *et al.*, 2012) pour une discussion plus détaillée sur les paramètres de l'algorithme). Il reste ensuite à déterminer le champ ϕ^{n+1} sur tout le domaine, cf. par exemple (Sethian, 1999).

Il reste une dernière étape de "réinitialisation" afin de vérifier que la condition $\|\nabla\phi^{n+1}\| = 1$ est bien respectée dans tout le domaine; pour cela on calcule pour chaque nœud du maillage i situé en $\mathbf{x}_i$ (cf. figure 2.4) :

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}_i) = \pm \min_{\mathbf{y} \in \Gamma_0^h} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\| \quad (2.47)$$

L'algorithme de propagation du front présenté dans cette section a été proposé dans Bernard *et al.* (2012), où une fonction d'adoucissement constante $h(d) = 1$ était considérée. On notera que dans le cas particulier où la fonction d'adoucissement h a été choisie de façon à avoir un comportement équivalent à un modèle cohésif (cf. section 2.5.1), une méthode de pilotage et de propagation du front différente a été proposée par Parrilla Gómez (2015). Cette méthode est basée sur des arguments mathématiques plus solides, mais nécessite de diviser par la dérivée de $\bar{Y}_c$ par rapport à d , ce qui n'est pas possible lorsque h est constante. On verra en fait que cette méthode est proche de celle utilisée dans la version complète de la méthode TLS (cf. section 2.5.1). Néanmoins, celle de Bernard *et al.* (2012) étant utilisée pour un cas test de cette thèse (cf. section 3.2), il a été choisi de la présenter dans cette section.

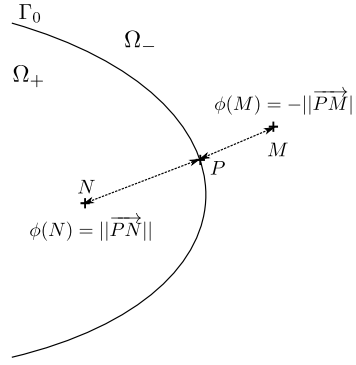


FIGURE 2.4. – Réinitialisation de ϕ

2.2.3. Initiation

Après chaque calcul de $\mathbf{u}_n$, le taux de restitution d'énergie local associé Y_n est calculé. S'il existe au moins un point $\mathbf{x}_c$ de Ω_- tel que $Y_n(\mathbf{x}_c) > Y_c^0$, on initie un défaut centré sur le point où Y_n est maximal, en forçant ϕ_n à prendre des valeurs positives. Ce défaut prend la forme d'une petite sphère de faible rayon, de l'ordre d'une certaine fraction de la taille des éléments du maillage. Dans les cas où l'on sait à l'avance qu'une seule fissure ne se formera, il peut être intéressant de n'initier un défaut qu'au début du calcul, puis de désactiver l'initiation de nouveaux défauts. En effet, dans ces cas-là, les nouveaux défauts ont tendance à s'initier très près du front d'endommagement, rendant ainsi la propagation du front moins nette. De plus, cela permet d'économiser le coût du calcul de Y_n et de la recherche du maximum.

On rappelle que ϕ est connu sur tout Ω dès lors que l'on connaît son iso-zéro. Il est donc possible en début de calcul de charger la valeur de ϕ , l'état d'endommagement initial étant donc non nul. Cela permet par exemple d'étudier des problèmes sur des structures comportant des défauts initiaux.

2.2.4. Enrichissement

La méthode TLS permet de régulariser les modèles d'endommagement, qui sont des modèles continus. Ces modèles font intervenir une variable d'endommagement variant de 0 à 1 qui représente l'influence des micro-dégradations sur les propriétés mécaniques du matériau, en revanche ces modèles ne permettent pas de modéliser l'apparition de macro-fissures. Il pourrait éventuellement être envisagé d'introduire une discontinuité du champ de déplacement lorsque l'endommagement atteint 1, ce qui est difficile en pratique d'une part parce que pour des raisons numériques il est souvent préférable de limiter la valeur de la variable d'endommagement à $1 - \epsilon$ pour éviter des problèmes de conditionnement, d'autre part il est difficile de localiser exactement l'iso-valeur $d = 1$ d'une variable dont la valeur maximale est 1.

L'un des principaux avantages de la méthode TLS est justement de "remplacer" la variable d'endommagement d dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, par une variable ϕ dont les valeurs ne

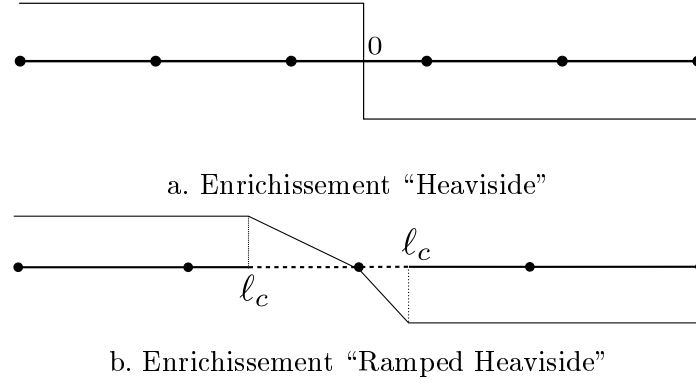


FIGURE 2.5. – Enrichissement par la méthode X-FEM en 1D. a. Fissure 0D en mécanique de la rupture, située en $\phi = 0$. b. Fissure TLS, positionnée en $\phi = \ell_c$ (la zone endommagée Ω_c est en pointillés).

sont pas bornées (cf équation (2.11)). Cela permet de localiser précisément l'iso- ℓ_c de ϕ , c'est-à-dire la position de la fissure, cf. figure 2.3. Afin d'introduire une discontinuité du champ de déplacement, il est nécessaire d'enrichir l'approximation de la solution du problème $\mathbf{u}^h$. En mécanique de la rupture, les fissures sont des lignes (en 2D) ou des surfaces (en 3D), qui sont représentées par l'iso-zéro d'une fonction level set : les éléments coupés par cette iso-zéro sont enrichis par la fonction de Heaviside (cf. figure 2.5 a.). Dans le cas de la méthode TLS, la fissure est représentée par le sous-domaine Ω_c (cf. figure 2.2). Cela permet d'éviter les problèmes de conditionnement lorsque $d = 1$, en n'intégrant pas dans Ω_c . En revanche, dans le cas d'un nœud dont le support est coupé deux fois par l'iso- ℓ_c de ϕ (cf. figure 2.6), il est nécessaire d'enrichir avec une version modifiée de la fonction de Heaviside, appelée fonction "Ramped Heaviside", afin d'assurer la discontinuité du champ de déplacement sur Ω_c (cf. figure 2.5 b.)

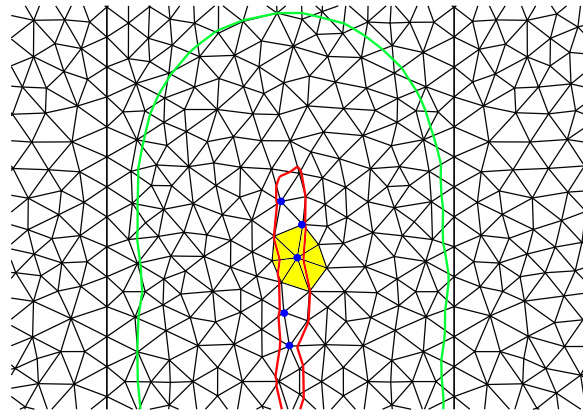


FIGURE 2.6. – Exemple de nœuds (en bleu) à enrichir, dont le support est coupé deux fois par l'iso- ℓ_c (en rouge) de ϕ

On remarque que cette fonction n'est pas discontinue, mais continue par morceaux. Cependant, la

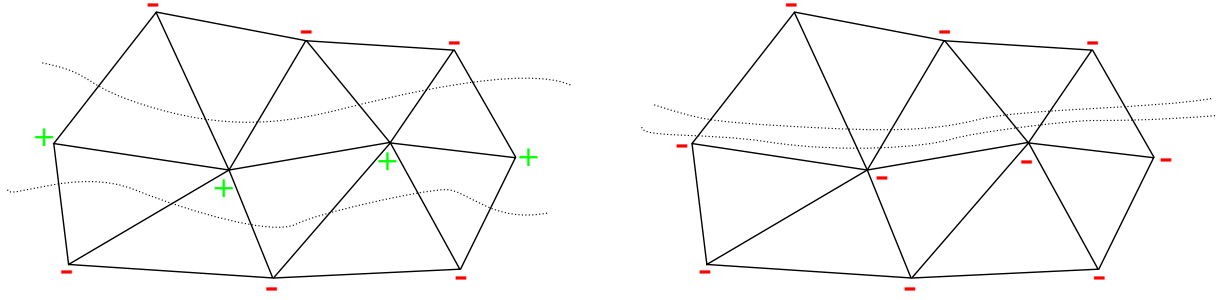


FIGURE 2.7. – Approximation de Γ_c (ligne pointillée).

rigidité du matériau étant nulle dans la zone morte (zone complètement endommagée), on obtient bien un champ de déplacement discontinu. Dans le cas où choisit d'avoir un matériau qui ne s'endommage pas en compression ($\beta = 0$ dans l'équation (2.5)), le fait d'avoir un enrichissement continu permet de gérer automatiquement le contact en compression. On peut également observer sur le cas 1D de la figure 2.5 b. que la fonction “Ramped Heaviside” n'est pas linéaire entre les deux points où $\phi = \ell_c$, mais linéaire par morceaux, et s'annule au niveau du nœud dont le support est coupé deux fois par l'iso- ℓ_c de ϕ . La fonction “Ramped Heaviside” est en effet plus simple à construire de cette manière en dimension 2 ou 3.

2.2.5. Double-découpe

On s'intéresse ici à la question de la représentation de Γ_c . Pour simplifier, on introduit la level set $\phi_c = \phi - \ell_c$. Γ_c est alors l'iso-zéro de ϕ_c . La discrétisation de Γ_c nécessite de calculer la position des intersections entre Γ_c et les arrêtes du maillage éléments finis. L'approche la plus directe consiste à utiliser la version discrétisée de ϕ_c^h , comme illustré sur la figure 2.7 (gauche). ϕ_c^h étant linéaire (cf. équation (2.12)), les intersections entre Γ_c et les arrêtes du maillage éléments finis sont localisées sur des arrêtes AB où ϕ_c^h change de signe (c'est-à-dire $\phi_c^h(A)\phi_c^h(B) < 0$). Cela peut poser problème lorsque des éléments sont coupés deux fois par Γ_c , comme sur la figure 2.7 (droite); ϕ_c^h ne change pas de signe sur ces éléments, on ne peut donc pas localiser son iso-zéro. Une solution, appelée “double-découpe”, permet de prendre en compte ce cas de figure. L'utilité de cette double-découpe est illustrée sur la figure 2.8. Cette méthode est présentée en détails dans (Salzman *et al.*, 2016).

2.2.6. Récapitulatif

L'algorithme 2 récapitule les différentes étapes de calcul présentées dans cette section.

2.3. Version complète

La version de la méthode TLS présentée dans la section 2.2 ne permet de traiter que le cas de l'endommagement localisé. C'est pourquoi une seconde version de la méthode a été développée dans

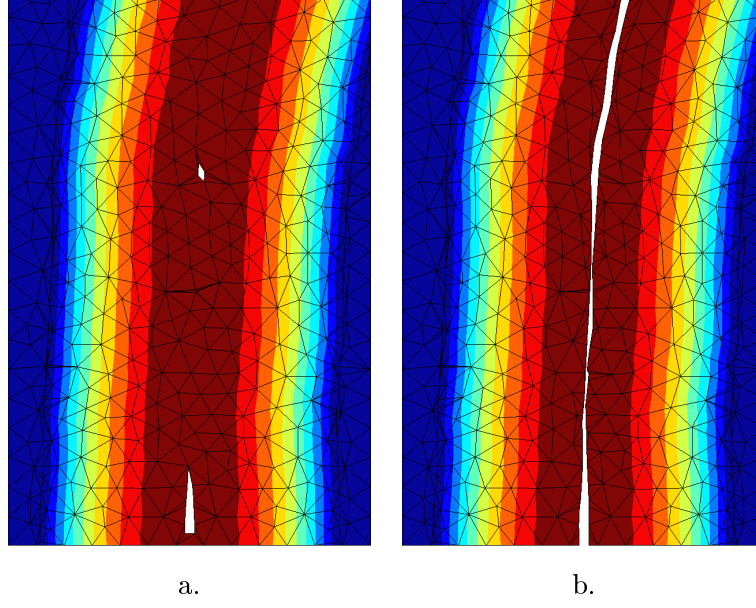


FIGURE 2.8. – Exemple de fissure obtenue : a : sans double découpe. b : avec double découpe.

```

Étant donné  $\phi^0$ 
Calcul de  $\mathbf{u}_{ref}$  pour un chargement  $F_{ref}$ 
Calcul de  $Y^0$ 
si  $\exists \mathbf{x}_c \in \Omega_-, Y^0(\mathbf{x}_c) > Y_c^0(\mathbf{x}_c)$  alors
    | Initier un défaut centré sur  $\mathbf{x}_c^{max} = \arg \max_{\mathbf{x}} Y^0(\mathbf{x})$  en forçant  $\phi^0$  à prendre des valeurs
    | positives sur une petite sphère
fin
pour  $n = 1 \dots N_{step}$  faire
    | Calcul de  $\mathbf{u}_{ref}$  pour un chargement  $F_{ref}$ 
    | Calcul de  $\bar{Y}^n$  et  $\bar{Y}_c^n$ 
    | Calcul du facteur de charge  $\mu^n$ 
    | Propagation du front  $\Gamma_0$ 
    | Extension de  $\phi^n$  sur tout le domaine
    | Réinitialisation de  $\phi^n$  pour respecter la condition  $\|\nabla \phi^n\| = 1$ 
    | si  $\exists \mathbf{x}_c \in \Omega_-, Y^n(\mathbf{x}_c) > Y_c^n(\mathbf{x}_c)$  alors
    | | Initier un défaut centré sur  $\mathbf{x}_c^{max} = \arg \max_{\mathbf{x}} Y^n(\mathbf{x})$  en forçant  $\phi^n$  à prendre des valeurs
    | | positives sur une petite sphère
    | fin
fin

```

Algorithme 2 : Calcul TLS non-local

(Moës *et al.*, 2014) afin de pouvoir modéliser l'apparition d'endommagement diffus. La condition (2.18) est ainsi remplacée par :

$$\|\nabla\phi\| \leq 1 \quad (2.48)$$

On définit les domaines et interfaces suivants (cf. figure 2.9) :

$$\Omega_L = \{\mathbf{x} \in \Omega, \|\nabla\phi\| < 1\} \quad (2.49)$$

$$\Omega_{NL} = \{\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_c, \|\nabla\phi\| = 1\} \quad (2.50)$$

$$\Gamma = \partial\Omega_L \cap \partial\Omega_{NL} \quad (2.51)$$

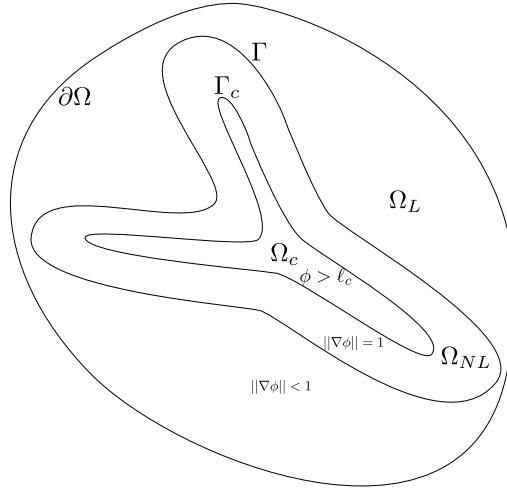


FIGURE 2.9. – Définition des différents domaines.

Les définitions de Ω_c et Γ_c sont inchangées. Avec cette version de la méthode, la norme du gradient de ϕ est autorisée à évoluer. On suppose que l'on part d'un état d'endommagement nul sur tout le domaine Ω . Lorsque l'endommagement commence à apparaître, on a $\|\nabla\phi\| < 1$, l'endommagement est diffus (ou local). Puis $\|\nabla\phi\|$ augmente progressivement jusqu'à atteindre 1, l'endommagement devient localisé (ou non-local). On fait l'hypothèse que la zone endommagée est toujours entourée d'une zone non-localisée (c'est-à-dire que $\partial\Omega_L \cap \Gamma_c = \emptyset$). L'implémentation de la méthode, que l'on détaille dans ce qui suit, a été réalisée par Moreau *et al.* (2016).

2.3.1. Calcul des champs moyens

Principe

Avec la nouvelle condition (2.48) on remarque que la condition $\nabla\dot{\phi} \cdot \nabla\phi = 0$ (équation (2.26)) n'est plus valable que dans Ω_{NL} . Ainsi les variables pilotant l'évolution de ϕ n'ont besoin d'être constantes le long du gradient de ϕ que dans Ω_{NL} . On définit donc l'espace suivant :

$$\mathcal{Y}_{LNL} = \{y \in L^2(\Omega \setminus \Omega_c), \quad \nabla y \cdot \nabla \phi = 0 \text{ dans } \Omega_{NL}\} \quad (2.52)$$

Pour toute grandeur X , on calcule sa valeur moyennée $\bar{X} \in \mathcal{Y}_{LNL}$ en résolvant l'équation :

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_c} \bar{X} \bar{X}^* d'(\phi) d\Omega = \int_{\Omega \setminus \Omega_c} X \bar{X}^* d'(\phi) d\Omega, \quad \forall \bar{X}^* \in \mathcal{Y}_{LNL} \quad (2.53)$$

Dans la section 2.2.1, les champs moyens étaient discrétisés en les projetant sur la base des $(L_i)_{i \in I}$, en assurant de façon faible leur appartenance à l'espace (2.31). Ici on choisit de construire une base de fonction $(M_i)_{i \in M}$ de $\mathcal{Y}_{LNL}$ sur laquelle on va projeter le champ X que l'on souhaite moyenner. Le champ $\bar{X}$ est ainsi discrétisé de la façon suivante :

$$\bar{X}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in M} \bar{X}_i M_i(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

où M désigne l'ensemble des modes. Les coefficients $\bar{X}_i$ sont alors calculés en injectant (2.54) dans (2.53) :

$$\bar{X}_i = \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} X d'(\phi^h) M_i d\Omega}{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} d'(\phi^h) M_i d\Omega}, \quad \forall i \in M \quad (2.55)$$

(l'équation (2.55) devrait en théorie faire intervenir une matrice, que l'on a condensée sur sa diagonale, d'où l'expression de $\bar{X}_i$ qui ne dépend que d'un seul indice i).

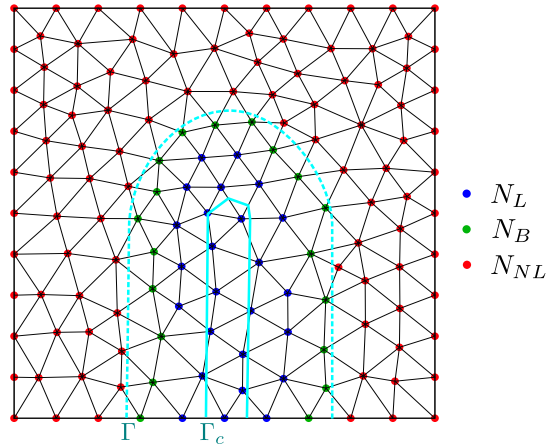


FIGURE 2.10. – Définition des différents domaines discrétisés.

La construction des modes M_i nécessite une classification des nœuds du maillage éléments finis considéré. On appelle E l'ensemble des éléments du maillage de Ω . L'ensemble non-local E_{NL} est défini comme l'ensemble des éléments pour lesquels $\|\nabla \phi^h\| = 1$. L'ensemble local E_L est alors égal à $E \setminus E_{NL}$. L'ensemble des nœuds N_B de la frontière entre E_L et E_{NL} est constitué des nœuds appartenant à la fois à au moins un élément de E_L et de E_{NL} . L'ensemble des nœuds locaux N_L et des nœuds non-locaux N_{NL} contiennent tout les nœuds des éléments de E_L (respectivement E_{NL}) qui ne

sont pas dans N_B (cf. figure 2.10). L'ensemble des modes M est alors défini comme $M = N_{NL} \cup N_B$. Les modes M_i sont alors calculés pour vérifier :

$$M_i = L_i, \quad \forall i \in N_L \quad (2.56)$$

$$\nabla M_i \cdot \nabla \phi^h = 0, \quad \forall i \in N_B \quad (2.57)$$

où, on le rappelle, les L_i sont les fonctions d'interpolation linéaires utilisées pour discrétiser ϕ , (cf. équation (2.12)). Cela permet d'assurer que tout champ $\bar{X}$ discrétisé sur la base des M_i appartient bien à $\mathcal{Y}_{LNL}$. On remarque que $\dot{\phi} \in \mathcal{Y}_{LNL}$, ce qui permet d'écrire :

$$\dot{\phi}^h = \sum_{i \in M} \dot{\phi}_i M_i(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

Les modes M_i sont discrétisés sur la base des L_i :

$$M_i(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N} M_{ij} L_j(\mathbf{x}), \quad \forall i \in M \quad (2.59)$$

Une fois que les M_{ij} sont connus, les coefficients $\bar{X}_i$ sont calculés par un produit matriciel ; en notant $\{\bar{\mathbf{X}}\} = (\bar{X}_i)_{i \in M}$ et $[\mathbf{M}] = (M_{ij})_{\substack{i \in M \\ j \in N}}$, on a :

$$\{\bar{\mathbf{X}}\} = ([\mathbf{M}]\{\mathbf{A}\}) ./ ([\mathbf{M}]\{\mathbf{B}\}) \quad (2.60)$$

où $./$ désigne la division terme à terme, avec

$$A_i = \int_{\Omega \setminus \Omega_c} X L_i d(\phi^h) d\Omega, \quad \forall i \in N \quad (2.61)$$

$$B_i = \int_{\Omega \setminus \Omega_c} L_i d(\phi^h) d\Omega, \quad \forall i \in N \quad (2.62)$$

Le calcul des champs moyens est donc particulièrement rapide puisqu'aucune inversion de matrice n'est nécessaire. De plus la matrice $\mathbf{M}$ peut-être réutilisée pour calculer tout champ non-local $\bar{X}$.

Calcul des modes

Le calcul des modes M_i nécessite de connaître la matrice $\mathbf{M}$, appelée matrice de délocalisation. En organisant les indices de façon appropriée, $\mathbf{M}$ peut s'écrire par bloc :

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_B & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

où $\mathbf{I}_L$ et $\mathbf{I}_B$ sont les matrices identités de taille $\text{card}(N_L)$ et $\text{card}(N_B)$, et $\mathbf{C}$ est une matrice rectangulaire de taille $\text{card}(N_L) \times \text{card}(N_B)$:

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{\substack{i \in N_B \\ j \in N_{NL}}} \quad (2.64)$$

Avec cette définition, (2.56) est directement vérifiée. Il reste à calculer la matrice $\mathbf{C}$ de telle sorte que la condition (2.57) soit respectée. Pour cela la méthode *Fast Marching*, qui ne sera pas détaillée ici mais est expliquée par exemple par Sethian (1996); Adalsteinsson et Sethian (1999), est utilisée afin de résoudre le problème suivant : pour chaque mode $i \in N_B$:

$$\nabla M_i \cdot \nabla \phi^h = 0, \text{ dans } \Omega_{NL}^h \quad (2.65)$$

$$M_i = N_i, \text{ sur } \Gamma_{NL}^h \quad (2.66)$$

où Γ^h est l'interface Γ discrétisée et Ω_{NL}^h le domaine Ω_{NL} discrétisé. Des exemples de modes pour $i \in N_L$ et $i \in N_B$ sont donnés sur la figure 2.11.

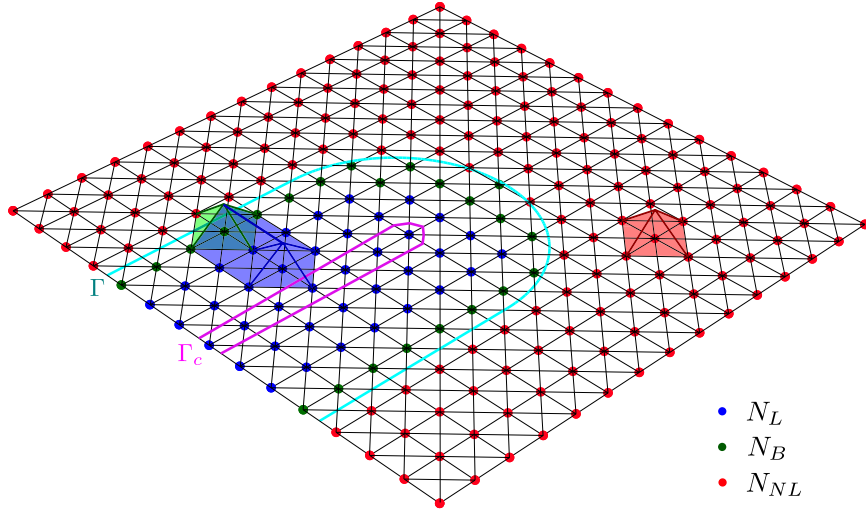


FIGURE 2.11. – Calcul des modes.

2.3.2. Pilotage et propagation du front

On suppose connus à un instant donné n le champ de déplacement $\mathbf{u}_{ref}^n$ calculé pour le chargement de référence (algorithme 1, étape 1). Comme dans la version simplifiée de la méthode TLS, on utilise alors les champs moyens $\bar{Y}_{ref}^n$ et $\bar{Y}_c^n$ calculés dans la section précédente afin d'obtenir le nouveau facteur de charge μ^{n+1} (algorithme 1, étape 2) et le champ ϕ^{n+1} (algorithme 1, étape 3) à l'instant $n+1$. Le calcul du facteur de charge est similaire à celui de la version simplifiée de la méthode TLS, en raisonnant sur les modes plutôt que sur les nœuds du front d'endommagement : on calcule le facteur de charge μ_n de telle sorte que le critère $\bar{f}^n = 0$ soit atteint pour au moins un mode, on obtient alors :

$$\mu^n = \sqrt{\min_{i \in M} \frac{\bar{Y}_{ci}^n}{\bar{Y}_{ref_i}^n}} \quad (2.67)$$

Pour obtenir le champ ϕ^{n+1} (les exposant $.^h$ sont omis pour alléger les notations), on réalise une étape dite de "prédiction" ; pour cela on cherche une variation du facteur de charge $\delta\mu = \mu^{pred} - \mu^n$

telle que :

$$\bar{f}_i(\mathbf{u}^{pred}, \phi^{pred}) \leq 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.68)$$

$$\delta\phi_i \geq 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.69)$$

$$(\bar{f}_i(\mathbf{u}^{pred}, \phi^{pred}))\delta\phi_i = 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.70)$$

$$\max_{i \in M^n} \delta\phi_i = \Delta\phi_{max} \quad (2.71)$$

avec $\delta\phi = \phi^{pred} - \phi^n$, et $\Delta\phi_{max}$ l'avancée maximale de ϕ , qui est un paramètre numérique fixé par l'utilisateur (en général on choisit $\Delta\phi_{max}$ égal à une fraction de la taille des éléments du maillage). Pour cela on fait une prédiction du critère $\bar{f}$ en le linéarisant :

$$\bar{f}_i(\mathbf{u}^{pred}, \phi^{pred}) = \bar{f}_i(\mathbf{u}^n, \phi^n) + \delta\phi_i \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi}(\mathbf{u}^n, \phi^n) \right)_i + \delta\mathbf{u}_i \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^n, \phi^n) \right)_i, \quad \forall i \in M^n \quad (2.72)$$

où $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{pred} - \mathbf{u}^n$. En écrivant $\delta\mathbf{u} = \delta\mu\mathbf{u}_{ref}^n$, on obtient le problème à résoudre suivant :

$$\bar{f}_i(\mathbf{u}^n, \phi^n) + \bar{\alpha}_i^n \delta\phi_i + \delta\mu \bar{\beta}_i^n(\mathbf{u}_{ref}^n) \leq 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.73)$$

$$\delta\phi_i \geq 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.74)$$

$$(\bar{f}_i(\mathbf{u}^n, \phi^n) + \bar{\alpha}_i^n \delta\phi_i + \delta\mu \bar{\beta}_i^n(\mathbf{u}_{ref}^n))\delta\phi_i = 0, \quad \forall i \in M^n \quad (2.75)$$

$$\max_{i \in M^n} \delta\phi_i = \Delta\phi_{max} \quad (2.76)$$

avec :

$$\bar{\alpha}_i^n = -\frac{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} Y_c h'(\phi^n) d'(\phi^n) M_i d\Omega}{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} d'(\phi^n) M_i d\Omega}, \quad \forall i \in M^n \quad (2.77)$$

$$\bar{\beta}_i^n = \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{ref}^n) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^n) d'(\phi^n) M_i d\Omega}{\int_{\Omega \setminus \Omega_c} d'(\phi^n) M_i d\Omega}, \quad \forall i \in M^n \quad (2.78)$$

et dont la solution est :

$$\delta\mu = \min_{i \in M^n} \left(\frac{-\bar{\alpha}_i^n \Delta\phi_{max} - \bar{f}_i(\mathbf{u}^n, \phi^n)}{\bar{\beta}_i^n(\mathbf{u}_{ref}^n)} \right) \quad (2.79)$$

$$\delta\phi_i = \left\langle -\frac{\bar{f}_i(\mathbf{u}^n, \phi^n) + \delta\mu \bar{\beta}_i^n(\mathbf{u}_{ref}^n)}{\bar{\alpha}_i^n(\mathbf{u}_{ref}^n)} \right\rangle_+, \quad \forall i \in M^n \quad (2.80)$$

ϕ est ensuite mis à jour en écrivant $\phi^{n+1} = \phi^{pred}$:

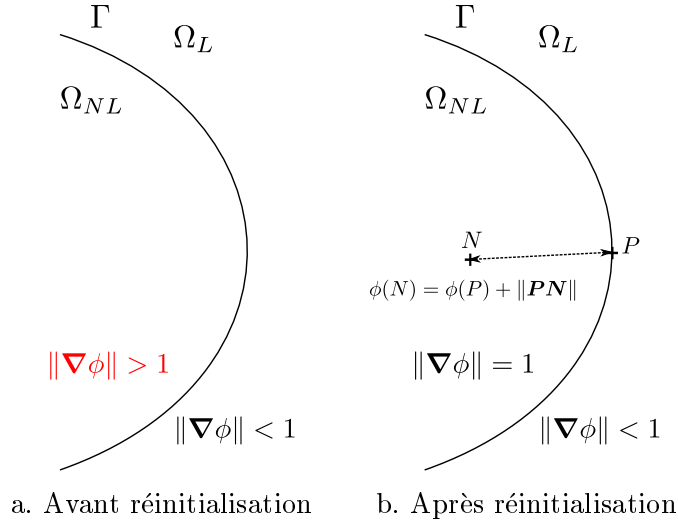


FIGURE 2.12. – Réinitialisation de ϕ

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \delta\phi_i, \quad \forall i \in M^n \quad (2.81)$$

Une fois ϕ mis à jour, il est possible que $\|\nabla\phi^{n+1}\| > 1$, une étape de réinitialisation est donc nécessaire. Là encore, on utilise la méthode Fast-Marching, afin de corriger les valeur de ϕ^{n+1} de façon à ce que $\|\nabla\phi^{n+1}\| = 1$ dans Ω_{NL} (cf. figure 2.12).

Il est important de noter que l'on n'a pas $\mu^{n+1} = \mu^{pred}$; μ^{n+1} est recalculé au pas de temps $n + 1$ à partir de l'équation (2.67).

2.3.3. Enrichissement

La méthode d'enrichissement choisie par Moreau *et al.* (2016) est inspirée des travaux de Casey L. *et al.* (2011). La représentation de la discontinuité due à la fissure nécessite des degrés de liberté supplémentaires dans l'approximation du champ de déplacement. Plutôt que d'utiliser une fonction d'enrichissement afin d'introduire ces degrés de libertés supplémentaires, on choisit ici d'utiliser des nœuds virtuels : l'approximation du champ de déplacements s'écrit :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in U} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) \quad (2.82)$$

où U est l'ensemble des nœuds des éléments du maillage non coupés par l'iso- ℓ_c de ϕ et des nœuds virtuels.

Cette approche, illustrée sur un exemple 1D figure 2.13, où l'enrichissement par la méthode Ramped Heaviside présenté dans la section 2.2.4 est également rappelé, utilise deux maillages :

- Un maillage de calcul, dans lequel les nœuds situés dans Ω_c sont dédoublés
- Un maillage d'intégration, qui correspond au découpage des éléments du maillage de calcul en sous-cellules. Cette procédure est utilisée dans le cadre de la méthode X-FEM classique (Moës *et al.*, 1999). L'intégration numérique est ainsi réalisée en utilisant les points d'intégration des

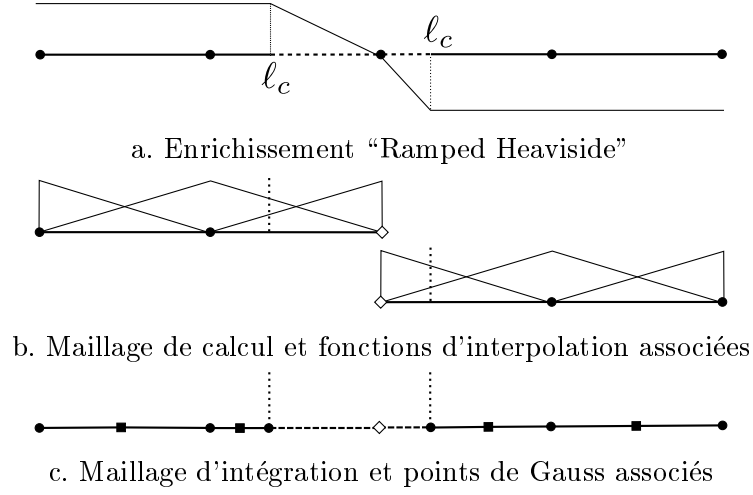


FIGURE 2.13. – Enrichissement par ajout de nœuds virtuels. Cercles noirs : nœuds du maillage d'origine. Losanges blancs : nœuds virtuels. Carrés noirs : points de Gauss.

sous-cellules pour lesquelles $\phi < \ell_c$. Ce maillage n'est utilisé que pour l'intégration numérique, aucun degré de liberté supplémentaire n'y est associé.

Des explications détaillées sur la création des maillages de calcul et d'intégration pourront être trouvées dans (Moreau *et al.*, 2016).

2.3.4. Récapitulatif

L'algorithme 3 récapitule les différentes étapes d'un calcul avec la version complète de la méthode TLS.

2.4. Comparaison des approches simplifiée et complète

Les deux versions de la méthode TLS ont été présentées dans les sections 2.2 et 2.3. On propose ici de récapituler leurs caractéristiques et leurs différences, tant au niveau de la physique modélisée que de l'implémentation.

Historiquement, la version simplifiée de la méthode TLS est la plus ancienne, et dispose donc de davantage de fonctionnalités, comme la double-découpe. De plus la version complète de la méthode n'a pour le moment été implémentée que pour des problèmes 2D. La version simplifiée, en plus de pouvoir traiter des cas 3D, est également optimisée en termes de performances, (parallélisme par exemple, cf. (Salzman *et al.*, 2016)). En revanche, du point de vue des phénomènes physiques modélisés, la version complète est plus générale. Ainsi on choisira d'utiliser la première version du code pour obtenir une représentation la plus exacte possible de Γ_c , afin d'extraire des ouvertures par exemple, ce qui sera le cas dans le chapitre 3, ou pour étudier des problèmes 3D. En revanche, pour des problèmes où l'endommagement diffus est particulièrement important, on préférera la seconde version. Les différences essentielles par rapport à la version simplifiée étant que l'on sera limité à des problèmes 2D, avec une représentation par simple découpe de Γ_c . Les caractéristiques des implémentations des deux versions

État initial : $\phi^0 = 0$, $N_L^0 = N$, $N_{NL}^0 = \emptyset$, $N_B^0 = \emptyset$, $\mathbf{M}^0 = (\delta_{ij})_{\substack{i \in N \\ j \in N}}$

```

pour  $n = 1 \dots N_{step}$  faire
    Calcul de  $\mathbf{u}_{ref}$  pour un chargement  $F_{ref}$ 
    Calcul de  $\bar{Y}^n$  et  $\bar{Y}_c^n$ 
    Calcul du facteur de charge  $\mu^n$ 
    Calcul de  $\bar{\alpha}^n$  et  $\bar{\beta}^n$ 
    Calcul de la variation du facteur de charge  $\delta\phi$ 
    Mise à jour de  $\phi^n$ 
    Classification des nœuds pour constituer les ensembles  $N_L^n$ ,  $N_{NL}^n$ ,  $N_B^n$ ,  $M^n$ 
    si  $N_{NL}^n \neq \emptyset$  alors
        Réinitialisation de  $\phi^n$  pour respecter la condition  $\|\nabla\phi^n\| = 1$  dans  $\Omega_{NL}$ 
        Calcul de la matrice de délocalisation  $\mathbf{M}^n$ 
    fin
fin

```

Algorithme 3 : Calcul TLS local/non-local

de la méthode sont résumées dans le tableau 2.14.

On remarque enfin que les différentes étapes de calcul (calcul des champs moyens, enrichissement, etc) expliquées dans les sections 2.2 et 2.3 ont été présentées telles qu'elles sont implémentées dans chaque version du code, mais peuvent toutes être utilisées dans l'une ou l'autre. Par exemple, on pourrait utiliser des modes pour calculer les champs moyens dans Ω_+ dans le cadre d'un calcul non-local ou utiliser la fonction Ramped Heaviside pour enrichir l'iso- ℓ_c de ϕ dans la version complète. La seule différence est la façon dont est traitée la condition $\|\nabla\phi\| \leq 1$.

2.5. Choix de la fonction d'adoucissement

2.5.1. Équivalence avec les modèles cohésifs

Les deux versions de la méthode TLS ont été présentées en détails dans les sections précédentes. En revanche, jusqu'à présent, deux éléments essentiels de la méthode n'ont pas encore été discutés :

- Le profil d'endommagement $d(\phi)$ (cf. équation (2.11))
- La fonction d'adoucissement h , qui intervient dans le critère pilotant l'évolution de l'endommagement (cf. équation (2.9))

Concernant le profil d'endommagement, pour tous les calculs réalisés dans cette thèse, un profil d'endommagement parabolique est utilisé :

$$d(\hat{\phi}) = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2 \quad (2.83)$$

	Implémentation de la version simplifiée	Implémentation de la version complète
Endommagement modélisé	Localisé	Diffus, puis localisé
Calcul des champs moyens	Méthode Lagrangienne	Calcul de modes par Fast-Marching
Réinitialisation	Calcul de distance	Fast-Marching
Enrichissement	Ramped Heaviside	Nœuds virtuels
Représentation de Γ_c	Simple ou double-découpe	Simple découpe

FIGURE 2.14. – Comparaison des implémentations des deux versions de la méthode TLS.

où $\hat{\phi} = \phi/\ell_c$ est la valeur adimensionnée de la level set. Le choix d'un tel profil expliqué dans (Parrilla Gómez, 2015), est justifié par une comparaison avec des distributions d'endommagement obtenues par des simulations utilisant des modèles mésoscopiques. Il reste à définir la fonction d'adoucissement $h(d)$. Parrilla Gómez (2015), a montré qu'il était possible de choisir h de façon à obtenir un comportement équivalent à un modèle de type cohésif (Hillerborg *et al.*, 1976). Pour cela, un problème 1D de barre en traction est étudié, avec un modèle cohésif et avec la méthode TLS. La fonction h est alors calculée analytiquement afin d'avoir le même déplacement, la même énergie et la même dissipation pour les deux approches. On remarquera que Lorentz *et al.* (2011) a utilisé un raisonnement analogue pour établir une équivalence entre un modèle à gradient d'endommagement et un modèle cohésif. Concernant le choix de la loi cohésive, il a été montré par Hoover et Bazant (2014) sur des essais de poutres en flexion trois points que dans le cas du béton, une loi bilinéaire (Petersson, 1981) permet de retrouver des résultats numériques proches des résultats expérimentaux (en particulier en ce qui concerne l'effet d'échelle). On choisit donc d'utiliser cette loi pour déterminer l'expression de h . La relation contrainte-ouverture est représentée sur la figure 2.15.

La loi cohésive bilinéaire dépend de 6 paramètres σ_f , w_f , σ_k , w_k , σ_2 et w_1 . En réalité, étant donnée la loi cohésive bilinéaire choisie, seuls 4 paramètres indépendants sont nécessaires. En introduisant les quantités adimensionnées suivantes :

$$\hat{w}_1 = w_1/w_f, \quad \hat{w}_k = w_k/w_f, \quad \hat{\sigma}_k = \sigma_k/\sigma_f, \quad \lambda = \frac{2\sigma_f\ell_c}{Ew_f} \quad (2.84)$$

on obtient l'expression de la fonction H telle que $h(d) = H'(d)$:

$$H(\hat{\phi}) = \begin{cases} \frac{2\hat{\phi}-\hat{\phi}^2}{(1-\hat{\phi}+(\lambda/\hat{w}_1)\hat{\phi}^2)^2} & \text{si } \hat{\phi} < \hat{\phi}_k \\ (\frac{\hat{\sigma}_k}{1-\hat{w}_k})^2 \frac{2\hat{\phi}-\hat{\phi}^2}{(1-\hat{\phi}+(\frac{\lambda\hat{\sigma}_k}{1-\hat{w}_k})\hat{\phi}^2)^2} & \text{si } \hat{\phi} > \hat{\phi}_k \end{cases} \quad (2.85)$$

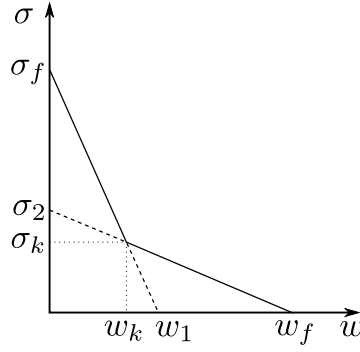


FIGURE 2.15. – Loi cohésive bilinéaire.

où :

$$\hat{\phi}_k = \frac{a}{2}(\sqrt{1 + 4/a} - 1) \quad (2.86)$$

avec $a = \frac{\hat{w}_k}{\lambda \hat{\sigma}_k}$. σ_f correspond à la valeur de la contrainte σ à partir de laquelle l'endommagement commence à apparaître : lorsque le critère (2.9) s'annule, on doit avoir $Y(\sigma_f) - Y_c^0 h(0) = 0$. On en déduit l'expression de Y_c^0 :

$$Y_c^0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_f^2}{E} \quad (2.87)$$

On remarquera que lorsqu'on utilise une telle fonction d'adoucissement avec la version simplifiée de la méthode TLS, une méthode de pilotage et de propagation du front différente de celle qui a été introduite dans la section 2.2.2 a été mise en place par Parrilla Gómez (2015). Cette méthode est en fait très proche de celle qui est utilisé dans la version complète présentée dans la section 2.3.2, mais appliquée seulement à la propagation du front d'endommagement.

2.5.2. Paramètres matériaux du modèle TLS

On donne ici quelques indications quant au choix des paramètres cohésifs et de la longueur caractéristique ℓ_c . ℓ_c a été calibré pour chaque cas test de la façon suivante :

- Plusieurs cas tests reproduits dans cette thèse ont été étudiés numériquement par leurs auteurs respectifs. Un des modèles les plus utilisés est le modèle d'endommagement non-local intégral (cf. section 1.4.3). Lorsque c'est le cas, on utilise comme longueur caractéristique de la méthode TLS la longueur caractéristique de la méthode non-locale intégrale.
- Si le test n'a pas été reproduit numériquement, on utilise $\ell_c \simeq 2,7d_a$ où d_a est le diamètre du plus gros granulat (cf. (Bazant et Pijaudier-Cabot, 1989)).
- Si aucune de ces deux informations n'est disponible, on choisit ℓ_c arbitrairement. Parrilla Gómez (2015) montre que plus ℓ_c est faible est plus le comportement de la méthode TLS se rapproche de celui du modèle cohésif. Il faut également prendre en considération les ressources de calcul. En effet, pour avoir une précision correcte sur le calcul des champs moyens, on doit avoir une taille h des éléments du maillage de l'ordre de $l \simeq \ell_c/5$. On choisit donc de prendre ℓ_c faible tout

en conservant des temps de calcul raisonnables.

Une fois que ℓ_c est fixée, il reste à choisir la valeur des paramètres cohésifs. On choisit comme paramètres indépendants σ_f , w_f , σ_k , et w_1 . Tout d'abord, afin de garantir la croissance de h , ces paramètres doivent respecter les conditions suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{2\sigma_f \ell_c}{E w_1} \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sigma_k \ell_c}{E(w_f - w_k)} \leq \frac{1}{2} \quad (2.88)$$

On donne sur la figure 2.16 l'influence de chaque paramètre (les trois autres étant fixés) sur le comportement $\sigma(\epsilon)$ en un point de Gauss :

- σ_f contrôle la hauteur du pic
- w_f influence la valeur de la contrainte lorsque $\epsilon \rightarrow \infty$. On notera que $h(d)$ a été calculée de sorte que $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \sigma(\epsilon) = 0$, mais cette limite est atteinte plus ou moins rapidement en fonction de la valeur de w_f
- σ_k contrôle la valeur atteinte par σ avant discontinuité
- w_1 détermine la largeur du pic
- On notera que la longueur caractéristique ℓ_c a également une influence non-négligeable sur la forme du comportement aux points de Gauss ; lorsque ℓ_c augmente, l'aire sous la courbe $\sigma(\epsilon)$ diminue. Cela doit être pris en compte si, pour une raison ou pour une autre, ℓ_c est modifiée, tous les autres paramètres étant fixés.

La valeur de σ_f est prise égale à f_t , résistance à la traction du béton considéré, paramètre généralement facilement accessible. Il reste donc 3 paramètres à déterminer. Une autre grandeur importante lorsque l'on étudie la fissuration du béton est l'énergie de fracturation totale G_F , qui est égale à l'aire sous la courbe $\sigma(w)$: dans le cas de la loi bilinéaire, on a :

$$G_F = \frac{1}{2}(\sigma_f w_k + \sigma_k w_f) = \frac{1}{2}(\sigma_f w_1 + \sigma_k(w_f - w_1)) \quad (2.89)$$

Comme la résistance à la traction du béton, l'énergie de fracturation est une grandeur mesurable expérimentalement (RILEM, 1985; Hillerborg, 1985) ; lorsque c'est possible, on utilisera donc G_F et la formule (2.89). Il ne reste donc plus que deux paramètres à déterminer. On constate que la forme du pic est contrôlée essentiellement par σ_k et w_1 (cf. figure 2.16), on utilisera donc ces deux paramètres pour caler la forme du pic, w_f étant ensuite déterminé à partir de la valeur de G_F et de l'équation (2.89). Par exemple, pour certains des calculs présentés dans cette thèse, les résultats obtenus par la méthode TLS sont comparés à des résultats numériques, pour lesquels on dispose du comportement aux points de Gauss. On utilise alors σ_f ($= f_t$ donnée dans le calcul de référence la plupart du temps) et w_1 pour reproduire la forme du pic. σ_k est choisie de façon à ce que la fin du pic (point de rupture de pente) soit la plus proche possible de la courbe de référence. w_f est ensuite fixé par (2.89) afin d'assurer la bonne valeur de l'énergie de fracturation.

2.6. Conclusion

Les concepts généraux de la méthode TLS ont été présentés dans la section 2.1. En particulier, l'algorithme de résolution explicite a été présenté. Les spécificités propres à chaque version sont détaillées

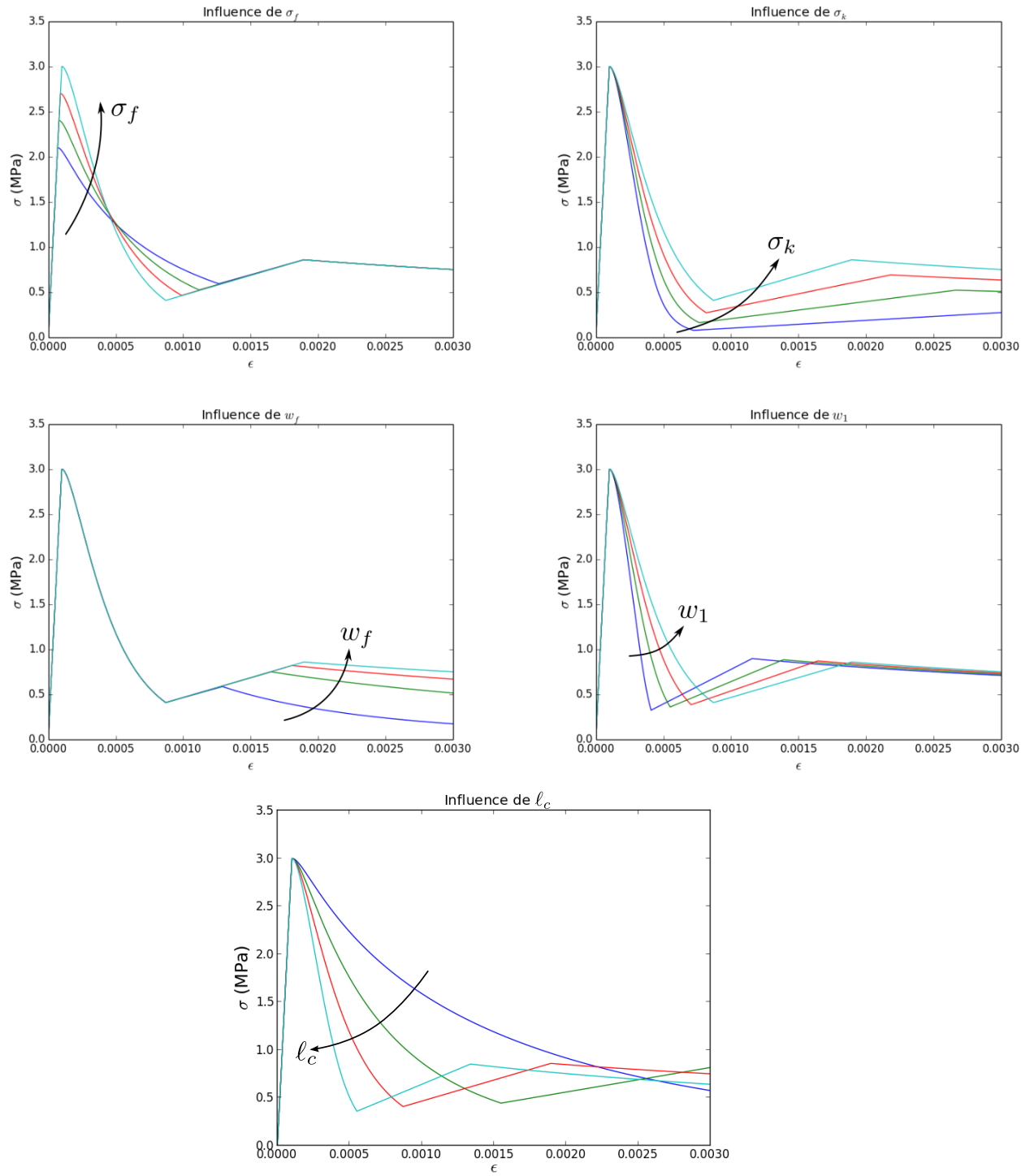


FIGURE 2.16. – Influence des différents paramètres du modèle cohésif et de la longueur caractéristique sur le comportement aux points de Gauss.

dans les sections 2.2 et 2.3. Leurs différences ont été synthétisées dans la section 2.4. Historiquement, la version simplifiée est la première à avoir été développée, selon les concepts introduits par Moës *et al.* (2011). La version complète a été introduite plus récemment Moës *et al.* (2014). Plus générale au niveau de la physique représentée, elle dispose de moins de fonctionnalités que la première version. Certaines d'entre elles, notamment la double découpe présentée dans la section 2.2.5, sont indispensables à l'extraction d'ouvertures de fissure, c'est pourquoi il peut parfois être préférable d'utiliser la version simplifiée. Les deux méthodes seront comparées sur des exemples numériques dans le chapitre 3. Enfin, la fonction d'adoucissement est choisie dans la section 2.5 d'après les travaux de Parrilla Gómez (2015) de façon à avoir un comportement de la méthode TLS équivalent à un modèle cohésif sur un cas 1D. Les modèles cohésifs sont connus pour reproduire efficacement les résultats d'essais expérimentaux, ce qui devrait donc permettre d'avoir un modèle TLS le permettant aussi. Une étude sur l'influence des différents paramètres a été réalisée, et une méthode pour les recalculer a été proposée.

3. Extraction d'ouvertures de fissures avec l'approche TLS

Sommaire

3.1. Extraction d'ouvertures de fissures avec des modèles d'endommagement	58
3.2. Essai brésilien	58
3.2.1. Description du cas test	59
3.2.2. Discussion sur les modèles d'endommagement considérés	59
3.2.3. Résultats numériques	63
3.3. Poutre en flexion 3 points	67
3.3.1. Description du cas test	67
3.3.2. Poutre non entaillée	68
3.3.3. Poutre entaillée	72
3.4. Conclusion	75

3.1. Extraction d'ouvertures de fissures avec des modèles d'endommagement

Les deux principales catégories de modèles utilisés pour étudier la dégradation du béton ont été passées en revue dans le chapitre 1. La mécanique de la rupture (section 1.3) introduit des discontinuités du champ de déplacement, et permet donc d'obtenir directement les ouvertures de fissures. En revanche, la mécanique de l'endommagement (section 1.4) est formulée dans un cadre continu et, de ce fait, ne permet pas de modéliser l'apparition de macro-fissures. Les ouvertures ne sont donc pas directement accessibles. En revanche, des méthodes permettant d'extraire les ouvertures de fissures à partir de calculs effectués avec des modèles d'endommagement ont été développées. Ainsi, Dufour *et al.* (2008) compare sur un cas 1D les champs de déformation non-locaux obtenus dans le cas continu, et dans le cas où la fissure est modélisée par une discontinuité forte. Une expression du saut de déplacement $[U]$ en est déduite. Cette approche est étendue en 2D (Dufour *et al.*, 2012) en la couplant à un algorithme permettant de retracer le trajet de fissuration. On se ramène alors au cas 1D en considérant des lignes orthogonales aux fissures afin d'utiliser l'expression de $[U]$ déduite dans (Dufour *et al.*, 2008). Matallah *et al.* (2010) suppose une partition la déformation en une déformation élastique et une déformation de fissuration. L'ouverture de fissure est alors calculée comme l'intégrale sur la largeur d'un élément fini de la déformation de fissuration. Oliver-Leblond (2014) propose une méthode d'analyse globale/locale, basée sur le couplage entre zone d'intérêt (autour des fissures) et reste de la structure. À l'échelle globale, un modèle d'endommagement non-local est utilisé. Le champ de déplacement obtenu est appliqué comme conditions aux limites sur la frontière de la zone d'intérêt, modélisée à l'aide d'éléments discrets, chacun de ces éléments étant un élément poutre doté d'un critère de rupture. L'utilisation de ce type d'éléments permet d'obtenir les ouvertures de fissures. Ces approches sont efficaces mais nécessitent une étape de post-traitement supplémentaire.

La méthode TLS présentée dans le chapitre 2 est une technique de régularisation des modèles d'endommagement locaux, mais présente l'avantage d'introduire naturellement des discontinuités du champ de déplacement via un enrichissement par la méthode X-FEM (cf. sections 2.2.4 et 2.3.3). Par conséquent, tout comme en mécanique de la rupture, les ouvertures de fissures sont directement accessibles, sans post-traitement particulier. On propose donc dans ce chapitre de montrer l'aptitude de la méthode TLS à extraire ces ouvertures. Le premier exemple étudié dans la section 3.2 est un essai brésilien. Les résultats d'ouverture de fissure obtenus sur ce cas test sont essentiellement illustratifs. Dans la section 3.3, on s'intéresse à un essai de flexion trois points. Les résultats en termes d'ouverture seront cette fois-ci comparés à des résultats expérimentaux.

3.2. Essai brésilien

L'essai brésilien, aussi appelé essai de fendage, a été mis au point par Carneiro et Barcellos (1953) afin d'étudier la résistance à la traction des matériaux rocheux, des bétons et des géomatériaux. Il consiste à comprimer une éprouvette cylindrique selon deux génératrices diamétralement opposées au moyen de deux plateaux en acier. Les efforts appliqués entraînent des contraintes de traction qui provoquent l'apparition d'une fissure verticale.

3.2.1. Description du cas test

L'essai étudié dans cette section est modélisé en 2D, sous l'hypothèse des déformations planes. En utilisant la symétrie du problème selon l'axe des x , seule la moitié du problème est modélisée (cf. figure 3.1). On pourrait également utiliser la symétrie selon l'axe des y afin de n'étudier qu'un quart du problème, ce que l'on ne fait pas ici afin de pouvoir étudier l'ouverture de la fissure de la façon la plus réaliste possible (c'est-à-dire en calculant la différence des déplacements entre les deux lèvres de la fissure). Le rayon de l'éprouvette est $R = 0,4$ m, la largeur des plateaux $B = 0,012$ m et leur épaisseur $e = 0,006$ m. Trois tailles de maille différentes seront testées dans le centre de l'éprouvette : $h = \ell_c/5$ (maillage grossier), $h = \ell_c/10$ (maillage modéré) et $h = \ell_c/15$ (maillage fin).

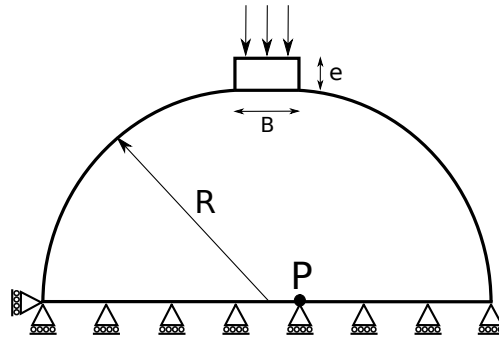


FIGURE 3.1. – Essai brésilien : géométrie et conditions aux limites.

3.2.2. Discussion sur les modèles d'endommagement considérés

On s'intéresse ici principalement aux ouvertures de fissures, les simulations sont donc réalisées à l'aide de la méthode TLS simplifiée (cf. section 2.2), afin de pouvoir utiliser la double-découpe (cf. section 2.2.5). On teste ici deux modèles d'endommagement :

- Un premier modèle correspondant à une fonction d'adoucissement constante $h(d) = 1$. Ce modèle correspond à un comportement purement fragile, avec une chute de la contrainte lorsque la déformation atteint la valeur critique $\sqrt{\frac{2Y_c^0}{E}}$ (cf. figure 3.3). On qualifiera par la suite ce modèle de “modèle d'endommagement à adoucissement brutal” (ou, pour simplifier, de modèle brutal)
- Un second modèle correspondant à une fonction d'adoucissement calculée de façon à avoir un comportement de la méthode TLS équivalent à un modèle cohésif bilinéaire, comme expliqué dans la section 2.5. Ici la contrainte tend progressivement vers zéro après que la déformation a atteint la valeur critique $\sqrt{\frac{2Y_c^0}{E}}$. Ce modèle sera qualifié de “modèle d'endommagement à adoucissement progressif” (ou, pour simplifier, de modèle progressif)

Les paramètres matériaux utilisés pour le modèle progressif sont donnés dans le tableau 3.2. Ces caractéristiques ont été recalées par rapport au comportement local aux points de Gauss d'un modèle de Mazars (cf. section 1.4.1), dont on a choisi les paramètres de façon à être représentatif du comportement d'un béton standard. Pour le modèle brutal, le seul paramètre est Y_c^0 , dont la valeur est la même que

Modèle de Mazars	A_t	1,0
	B_t	15600
	ϵ_{d0}	$1,0.e^{-4}$
	β	1,0
	E (MPa)	37700
	ν	0,24
Paramètres TLS	ℓ_c (mm)	5
	Y_c^0 (Pa)	188,5
	σ_f (MPa)	3,77
	σ_k (MPa)	0,57
	w_f (mm)	0,04
	w_1 (mm)	0,002

FIGURE 3.2. – Paramètres matériaux de l'essai brésilien.

pour le modèle progressif (calculée par la formule (2.87)). Le comportement local aux points de Gauss des trois modèles est donné sur la figure 3.3.

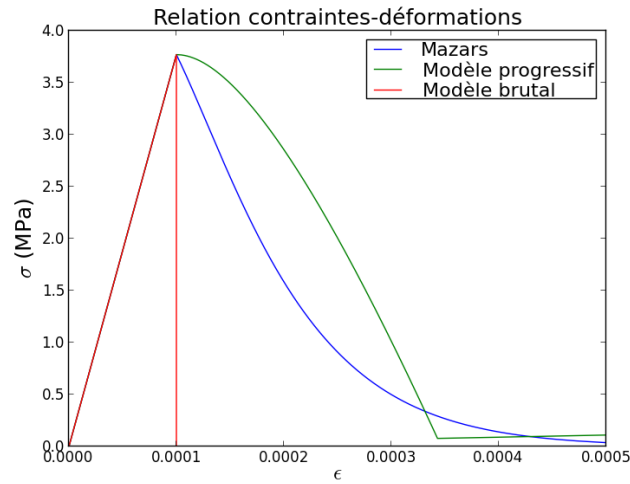


FIGURE 3.3. – Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai brésilien.

Il est clair que le modèle brutal ne peut pas être utilisé pour recalculer le comportement local aux points de Gauss d'un autre modèle. On peut néanmoins se demander si les résultats obtenus avec ce modèle seront comparables à ceux obtenus par le modèle progressif. En effet, on peut montrer (cf. détails des calculs en annexe A) qu'à partir de la fonction d'adoucissement $h(d) = 1$ du modèle brutal, il est possible de déduire une loi cohésive équivalente (exprimée en fonction des variables adimensionnées

$\hat{w} = \frac{w}{w_f}$ et $\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_f}$) en suivant un raisonnement analogue à celui de Parrilla Gómez (2015) :

$$\hat{\sigma} = 1 - \sqrt{\hat{w}} \quad (3.1)$$

où la valeur de w_f est imposée par la condition $\hat{w} = 1$ lorsque $\hat{\sigma} = 0$:

$$w_f = \frac{2\sigma_f \ell_c}{E} \quad (3.2)$$

L'énergie de fissuration pour la loi cohésive équivalente au modèle brutal s'écrit alors :

$$G_F^{bru} = \frac{2\sigma_f^2 \ell_c}{3E} \quad (3.3)$$

La loi $\hat{\sigma} = F(\hat{w})$ est représentée sur la figure 3.4. On observe qu'elle présente des caractéristiques similaires à celles de la loi cohésive bilinéaire, avec en particulier une première phase de décroissance assez forte, suivie d'une phase où la pente devient moins importante. Il serait donc légitime de penser que deux modèles provenant de lois cohésives semblables puissent donner des résultats similaires. Les lois cohésives correspondant aux modèles progressif et brutal, pour les paramètres matériaux donnés dans le tableau 3.2, sont tracées sur la figure 3.5 (traits pleins verts et rouges respectivement).

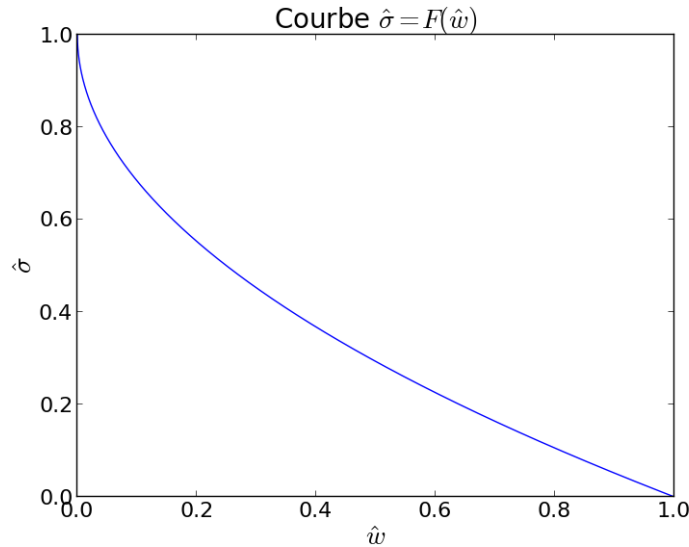


FIGURE 3.4. – Loi cohésive adimensionnée équivalente à un modèle TLS avec une fonction d'adoucissement $h(d) = 1$.

Les deux lois cohésives obtenues sont très différentes. En particulier on observe que l'énergie de fracturation $G_F^{bru} = 1.25 \text{ N.m}^{-1}$ (correspondant à l'aire sous la courbe $\sigma(w)$) pour le modèle brutal est nettement moins élevée que l'énergie de fracturation $G_F^{pro} = 14.6 \text{ N.m}^{-1}$ (calculée par l'équation (2.89)) pour le modèle progressif. Cette valeur étant primordiale pour l'étude de la fissuration d'un béton, on pourrait chercher à la recaler : σ_f étant fixé comme étant la résistance à la traction du béton, le seul paramètre sur lequel on peut influencer est ℓ_c (équation (3.3)). On en déduit la valeur de la longueur caractéristique $\ell_c^{rec} = 58 \text{ mm}$ qui serait nécessaire afin d'obtenir un modèle brutal ayant

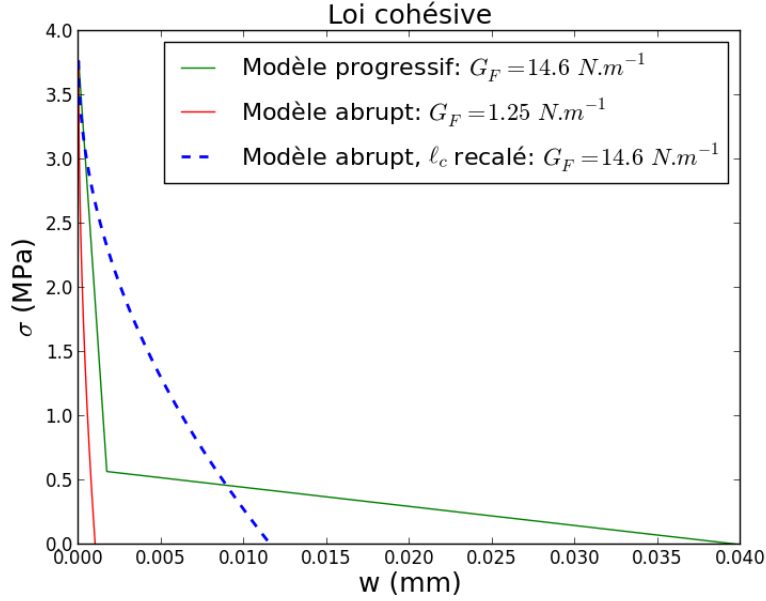


FIGURE 3.5. – Lois cohésives équivalentes aux modèles brutal et progressif pour l’essai brésilien.

une énergie de fracturation identique au modèle progressif défini par les paramètres donnés dans le tableau 3.2. La loi cohésive pour le modèle brutale obtenue en recalant la valeur de ℓ_c est tracée sur la figure 3.5 (traits pointillés bleus).

On peut tirer de cette discussion les conclusions suivantes :

- Il est éventuellement possible d’avoir un modèle brutal possédant une énergie de fracturation égale à celle d’un modèle progressif, mais le seul paramètre que l’on puisse modifier pour cela est la longueur caractéristique ℓ_c . Or on a vu que le choix de ℓ_c est en général imposé soit pour des raisons physiques, soit pour des raisons numériques (cf. section 2.5.2). Notons également que, dans l’exemple considéré dans cette section, la longueur caractéristique recalée ℓ_c^{rec} est de l’ordre de 10 fois la longueur caractéristique du modèle progressif, lequel possédait une énergie de fracturation $G_F^{pro} = 14.6 \text{ N.m}^{-1}$. En pratique, il n’est pas rare d’avoir des bétons pour lesquels l’énergie de fracturation est de l’ordre de 100 - 200 N.m^{-1} , ce qui nécessiterait des longueurs caractéristiques de l’ordre de 50 cm avec le modèle brutal, ce qui est inacceptable, la longueur caractéristique devant rester assez faible par rapport aux dimensions caractéristiques des structures étudiées.
- De plus, à énergie de fissuration égale, le modèle progressif dispose de davantage de paramètres, ce qui permet d’obtenir plusieurs comportements différents en jouant sur les différents paramètres, tandis qu’avec le modèle brutal, on ne dispose que de deux paramètres, σ_f et w_f (que l’on peut éventuellement exprimer en fonction de Y_c^0 et ℓ_c), sans aucun moyen d’action sur la décroissance de la courbe $\sigma(w)$. Le modèle brutal n’est donc pas adapté au recalage d’essais expérimentaux.

On verra néanmoins que pour ce cas test à vocation purement illustrative, le modèle brutal permet de mieux apprécier l’ouverture des fissures que le modèle progressif, tout en mettant en évidence certaines difficultés liées à ce dernier.

3.2.3. Résultats numériques

Comportement global On donne sur la figure 3.6 les courbes force-CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) obtenues pour les modèles brutal et progressif et pour chaque taille de mailles. Le CMOD est ici défini comme la différence entre les déplacements verticaux de deux points situés en $x = \pm \frac{B}{2}$ (point P et son symétrique par rapport à l'axe y sur la figure 3.1).

Une première remarque concerne la hauteur des pics, notamment avec le maillage le plus grossier, qui semble plus élevée avec le modèle progressif qu'avec le modèle brutal, pour lequel on observe un pic de force aux alentours de 300 kN. En théorie, Y_c^0 étant le même pour les deux modèles, et le pic correspondant au point où l'endommagement s'initie, l'effort maximal devrait être le même dans les deux cas. La différence observée peut s'expliquer par les algorithmes de propagation utilisés. Dans le cas du modèle brutal, l'algorithme utilisé est celui qui a été présenté dans la section 2.2.2. En particulier, le facteur de charge est calculé par l'équation (2.44). Comme expliqué dans la section 2.5.1, un algorithme différent (Parrilla Gómez, 2015) est utilisé avec le modèle progressif. Cet algorithme, similaire à l'algorithme gouvernant l'évolution de ϕ dans la version complète de la méthode TLS (cf. section 2.3.2), comporte également une étape de prédiction, suivie d'une correction qui aboutit à un facteur de charge μ différent de celui donné par l'équation (2.44). Cette différence est accentuée par le fait qu'avec le modèle progressif, on observe une légère augmentation de la force au début de la courbe avant que celle-ci ne commence à diminuer alors qu'avec le modèle brutal, la force commence à diminuer dès l'apparition de l'endommagement. On remarque également que lorsque l'on raffine le maillage, la hauteur du pic diminue avec le modèle progressif, alors qu'elle reste relativement stable d'un maillage à l'autre avec le modèle brutal. Cela pourrait s'expliquer par une imprécision du calcul du champ $\overline{Y}_c$. En effet, la fonction d'adoucissement du modèle progressif est une fonction rationnelle (cf. équation 2.85), qui tend vers l'infini lorsque d tend vers 1. La quadrature de Gauss classique utilisée pour calculer $\overline{Y}_c$ ne permet donc pas d'avoir des résultats suffisamment précis dans le cas des maillages grossiers. Au contraire, avec le modèle brutal, $\overline{Y}_c$ est calculé exactement. Néanmoins lorsque l'on raffine le maillage, la hauteur du pic calculée avec le modèle progressif tend à converger vers celle obtenue avec le modèle brutal.

Après le pic, on observe une décroissance de la force et du déplacement (snap-back) correspondant au développement de la fissure verticale (point A sur la figure 3.6). Une fois que la fissure a atteint le milieu de l'éprouvette (point B), le chargement augmente (points C et D), à cause du travail en compression des deux moitiés de disque. Le snap-back observé avec le modèle brutal est nettement plus prononcé qu'avec le modèle progressif, ce qui était prévisible, la fonction d'adoucissement constante correspondant à un comportement purement fragile.

Champ d'endommagement Le champ d'endommagement dans le centre de l'éprouvette pour un CMOD environ égal à 7 microns, pour les modèles testés et pour chaque maillage est donné sur la figure 3.7. Tout d'abord, on vérifie bien que quelle que soit la taille des mailles considérée, l'endommagement est réparti dans une bande de largeur $2\ell_c$. Ensuite, avec le modèle brutal, la fissure semble mieux définie, tandis qu'avec le modèle progressif, la fissure ne semble pas complètement ouverte. On remarque également qu'avec le modèle progressif, pour le maillage le plus grossier, la hauteur de la fissure

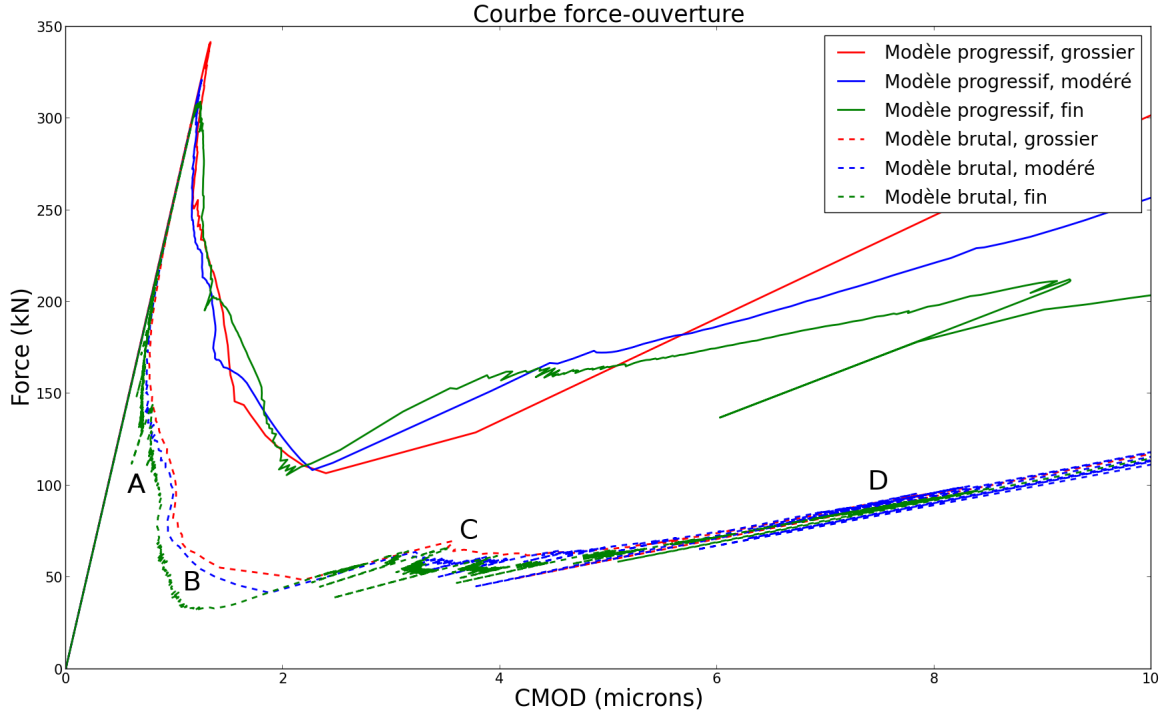


FIGURE 3.6. – Courbes force-CMOD

semble moins élevée que pour les maillages modéré et fin, tandis que la hauteur de la fissure est la même avec les trois maillages pour le modèle brutal. Ceci semble confirmer que dans le cas du modèle progressif on commet une certaine imprécision sur le calcul de $\bar{Y}_c$, qui diminue lorsque le maillage est raffiné.

Ouverture de fissure Dans ce paragraphe on illustre l'extraction des ouvertures de fissures. On donne tout d'abord sur la figure 3.8 la déformée de la structure obtenue avec le maillage grossier, à différents instants du calcul correspondants aux points A,B,C et D de la courbe force-CMOD (figure 3.6). On choisit ici de montrer les résultats issus du modèle brutal; en effet on a montré dans la section précédente que la fissure était mieux définie qu'avec le modèle progressif. L'enrichissement via la méthode X-FEM (cf. section 2.2.4) couplé à l'utilisation de la double-découpe (cf. section 2.2.5) permet d'éliminer du calcul la zone où $d = 1$ et de modéliser la discontinuité du champ de déplacement. On a ainsi une représentation directe de la macro-fissure, contrairement aux modèles d'endommagement classiques où la "fissure" correspond en général à une bande d'éléments où la déformation est très importante.

L'ouverture de la fissure le long de celle-ci peut donc être directement extraite en calculant la différence de déplacement horizontal entre deux points situés de part et d'autre des lèvres de la fissure, pour une valeur de y donnée. On donne sur la figure 3.9 l'ouverture de la fissure pour différentes valeurs du CMOD comprises entre 3.82 et 7.61 microns (états C et D de la figure 3.8). Pour chaque valeur du CMOD, l'ouverture de la fissure a été extraite pour 20 valeurs de y .

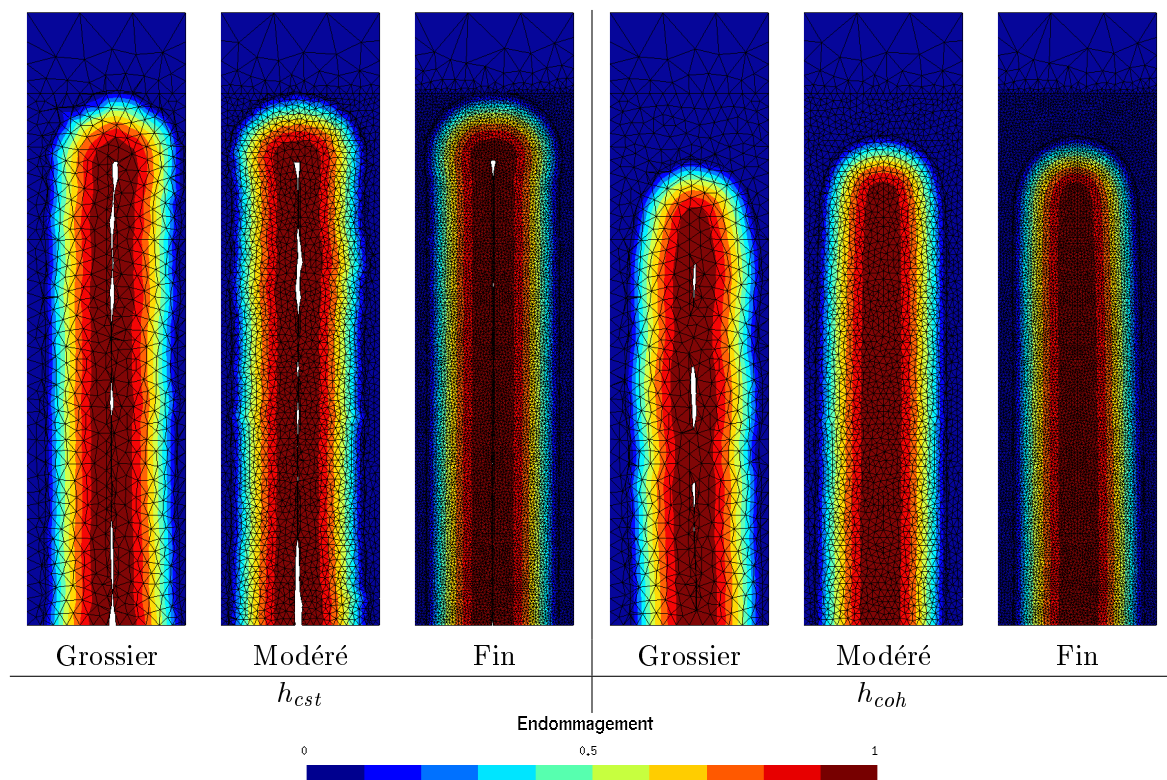


FIGURE 3.7. – Exemple de champ d'endommagement, pour une valeur de CMOD environ égale à 7 microns.

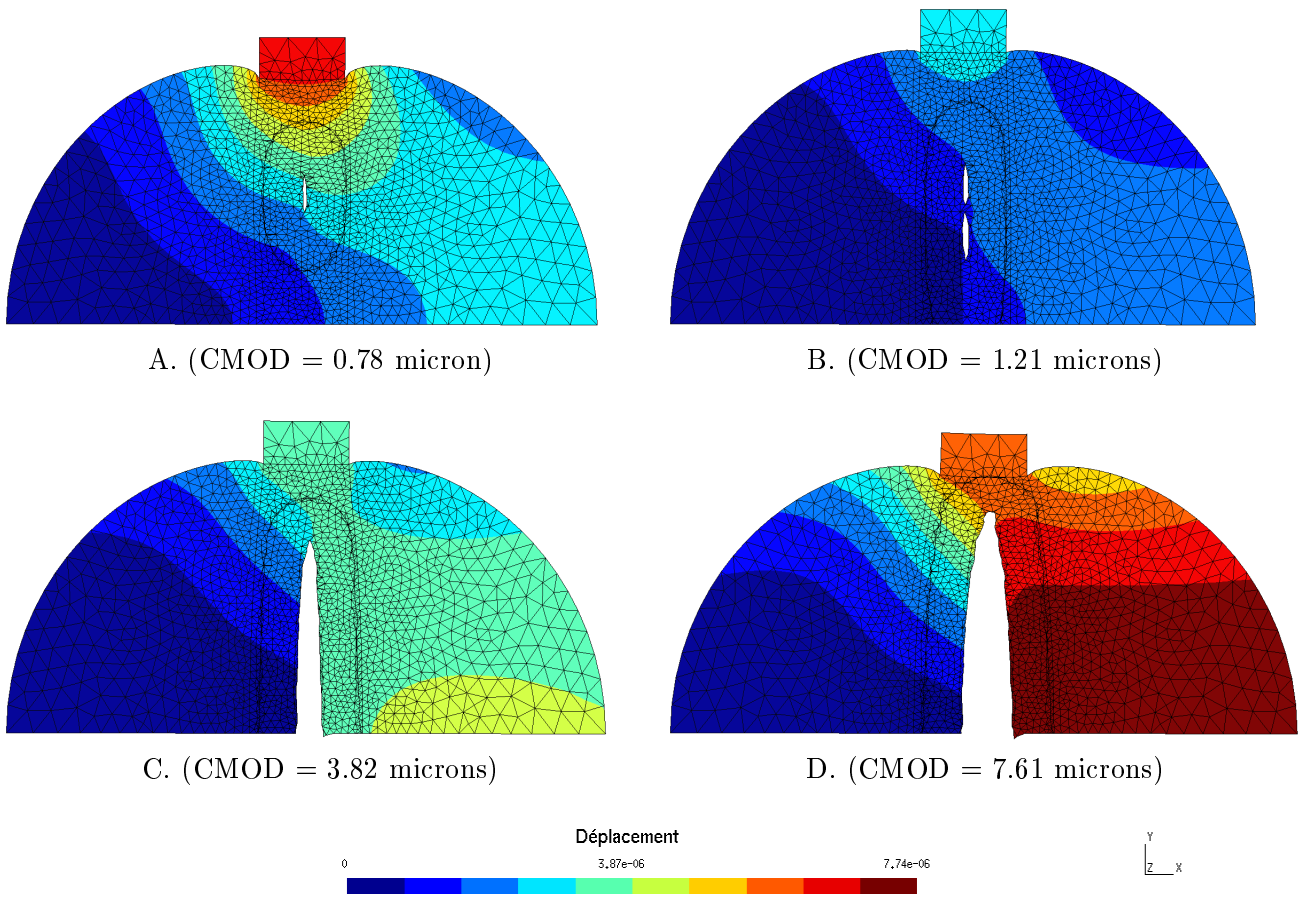


FIGURE 3.8. – Déformée de l'éprouvette.

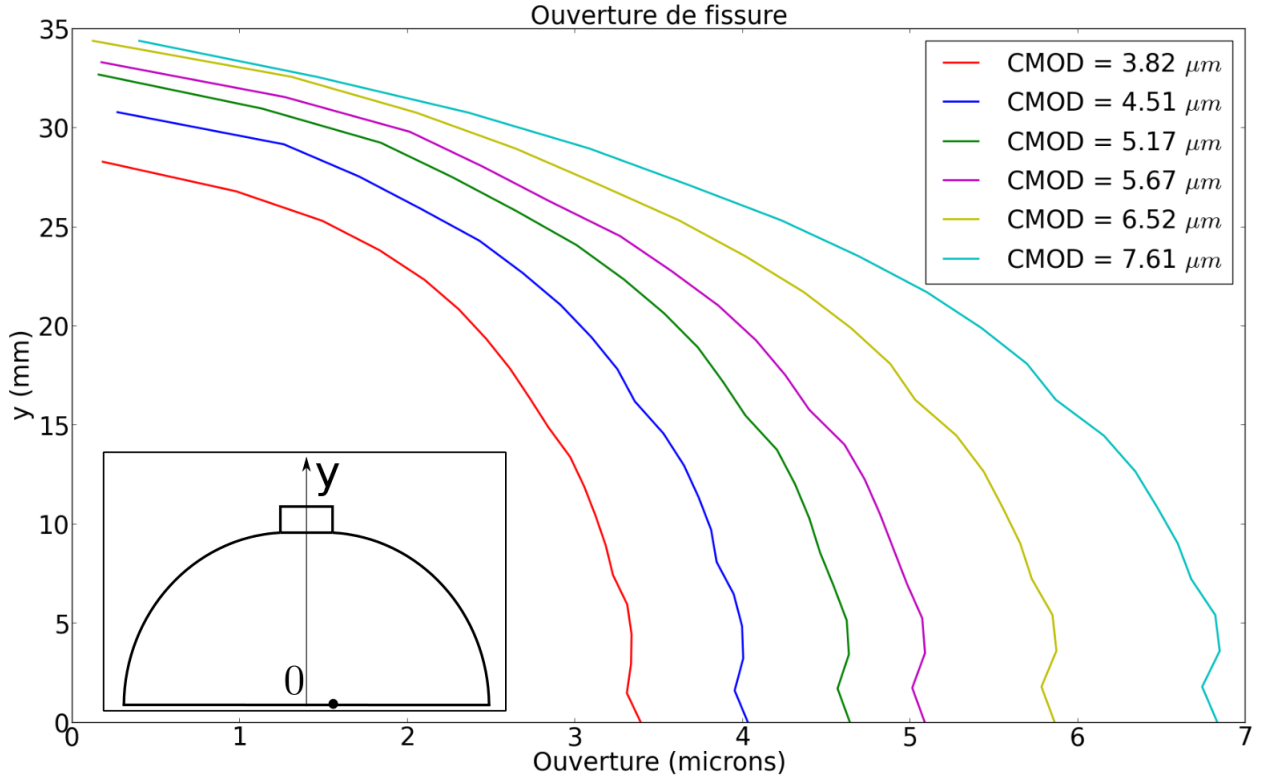


FIGURE 3.9. – Ouverture de fissure le long de la fissure obtenue avec le modèle brutal pour différentes valeurs du CMOD, maillage grossier.

3.3. Poutre en flexion 3 points

3.3.1. Description du cas test

Géométrie et conditions aux limites On s'intéresse dans cette section à l'étude d'un essai de flexion trois points. Les caractéristiques de cet essai sont celles de la poutre entaillée étudiée par Dufour *et al.* (2012). Les dimensions de la poutre sont : longueur $L = 500$ mm, distance entre appuis $D = 400$ mm, hauteur $h = 100$ mm, épaisseur $e = 50$ mm, profondeur d'entaille $t = 20$ mm (cf. figure 3.10). Néanmoins on s'intéressera aussi au cas où la poutre n'est pas entaillée, ce qui permettra de comparer les deux versions de la méthode TLS.

On choisit comme longueur caractéristique $\ell_c = 8$ mm, utilisée par Dufour *et al.* (2012) avec une régularisation non-locale intégrale (cf. section 1.4.3). Deux tailles de mailles seront testées dans le centre de la poutre : $h = \ell_c/5$ et $h = \ell_c/10$. Afin d'éviter un endommagement non physique autour des conditions aux limites, comme il n'est pas possible avec l'implémentation actuelle du code d'avoir un matériau élastique dans un sous-domaine du maillage, un matériau endommageable doté d'un Y_c^0 très élevé a été utilisé autour des appuis (zones en vert sur la figure 3.11). Le même matériau a été utilisé dans la partie supérieure sous le chargement. On remarquera qu'avec la version simplifiée du code, cela n'est pas nécessaire. En effet, l'initiation de l'endommagement se fait en insérant un petit défaut au début du calcul, là où la valeur du taux de restitution d'énergie local est maximale (cf. section

2.2.3); il suffit donc de restreindre le domaine où l'initiation est possible à une petite zone dans la partie inférieure au centre de la poutre (ou au niveau de l'entaille pour le cas de la poutre entaillée). La recherche de défauts est ensuite désactivée.

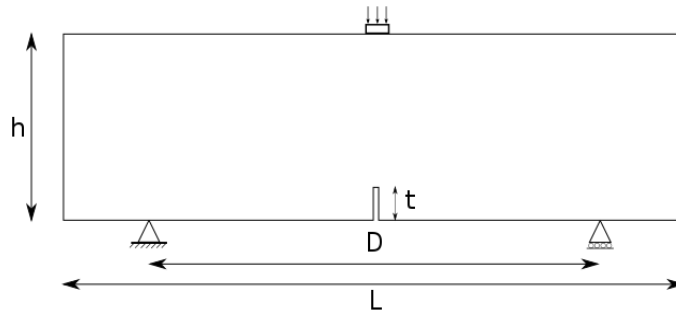


FIGURE 3.10. – Flexion trois points sur poutre entaillée : géométrie et conditions aux limites.

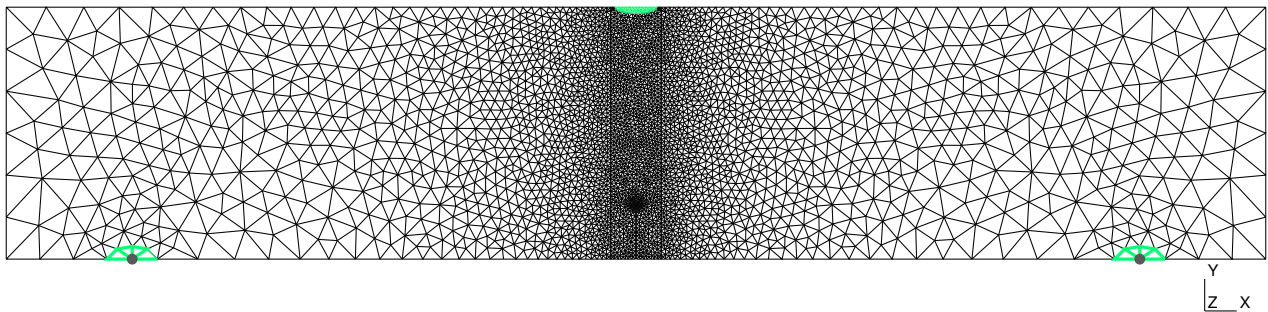


FIGURE 3.11. – Maillage grossier ($h = \ell_c/5$) de la poutre entaillée

Paramètres matériaux Les paramètres matériaux de la méthode TLS utilisés pour ce cas test sont donnés dans le tableau 3.12, ainsi que les paramètres du modèle de Mazars utilisé par Dufour *et al.* (2012) (seul un endommagement en traction était considéré, d'où l'absence des paramètres A_c et B_c). Ces paramètres ont été obtenus en recalant la courbe force-CMOD obtenue par la méthode TLS simplifiée avec les résultats expérimentaux de Dufour *et al.* (2012) (cf. figure 3.21). Le comportement aux points de Gauss pour le modèle de Mazars utilisé par Dufour *et al.* (2012) et pour la méthode TLS est donné sur la figure 3.12. On constate que le comportement du modèle de Mazars de référence montre une première phase croissante après la phase élastique. Cette phase ne peut pas être reproduite avec la méthode TLS et l'équivalence avec les modèles cohésifs ; en effet, la fonction d'adoucissement h (cf. section 2.5.1) a été calculée de façon à avoir une pente nulle pour $d = 0$, ce qui explique la différence entre les deux comportements.

3.3.2. Poutre non entaillée

On considère tout d'abord le cas où la poutre ne comporte pas d'entaille. On donne sur la figure 3.14 un exemple de champ d'endommagement obtenu pour les deux maillages testés, avec les deux

Modèle de Mazars (Dufour <i>et al.</i> , 2012)	A_t	0,9
	B_t	4000
	ϵ_{d_0}	$4,0.e^{-5}$
	β	1,0
	E (MPa)	30000
	ν	0,24
Paramètres TLS	ℓ_c (mm)	8
	σ_f (MPa)	4
	σ_k (MPa)	0,26
	w_f (mm)	0,031
	w_1 (mm)	0,021

FIGURE 3.12. – Paramètres matériaux de l’essai de poutre en flexion trois points.

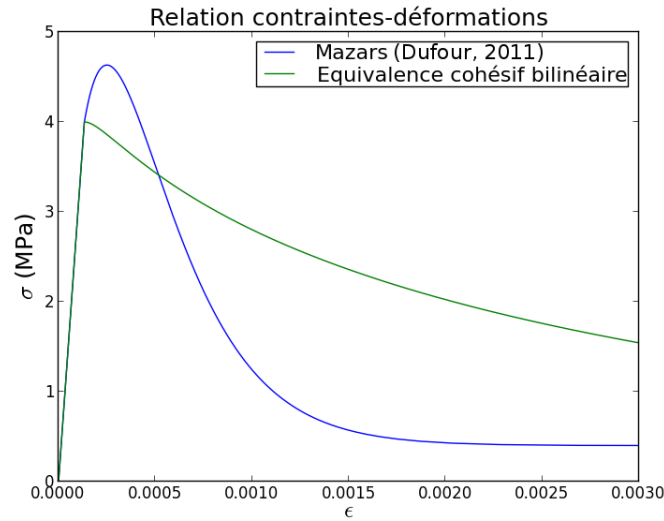


FIGURE 3.13. – Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l’essai de poutre en flexion trois points.

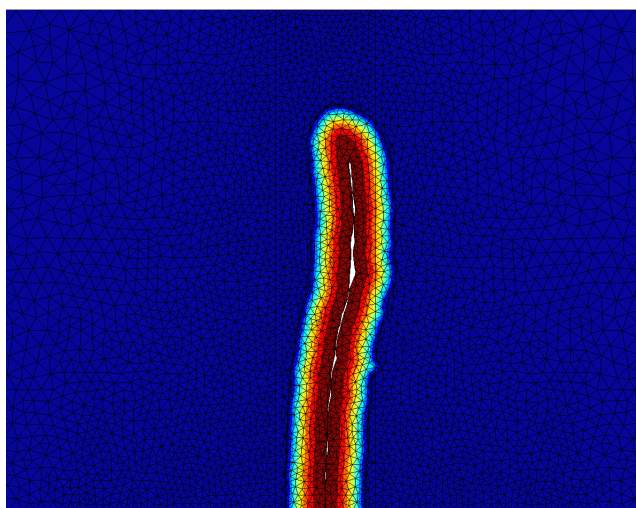
versions différentes de la méthode TLS. Les résultats obtenus sont qualitativement très différents ; avec la version complète, une large zone d’endommagement diffus peut être observée, tandis qu’on observe seulement une bande de largeur $2\ell_c$ avec la version simplifiée. En effet, avec cette version, la contrainte $\|\nabla\phi\| = 1$ fait qu’on ne peut avoir (dans des cas avec une seule fissure) des zones endommagées de largeur au plus $2\ell_c$. Le champ d’endommagement (cf. figure 3.14) est également peu dépendant de la taille des éléments. En revanche, pour le maillage le plus grossier, les bords de la zone endommagée présentent des ondulations, qui ont tendance à disparaître lorsque l’on raffine le maillage. On remarque également qu’avec la version simplifiée, la trajectoire n’est pas tout à fait verticale. Là encore il pour-

rait s'agir d'un problème de précision, lié à l'intégration de la fonction d'adoucissement d'une part comme mis en évidence dans la section 3.2.3, et du calcul des champs moyens d'autre part. En effet, les champs moyens $\bar{X}$ sont calculés par une méthode Lagrangienne dans la version simplifiée (cf. section 2.2.1), et par des modes dans la version 2.3.1. Or Moreau (2014) a montré que le calcul par mode était plus précis, ce qui peut expliquer que la fissure dévie légèrement avec la méthode simplifiée. Lorsqu'on raffine le maillage, la fissure redevient droite, ce qui tend à confirmer qu'un degré de précision suffisant a été atteint.

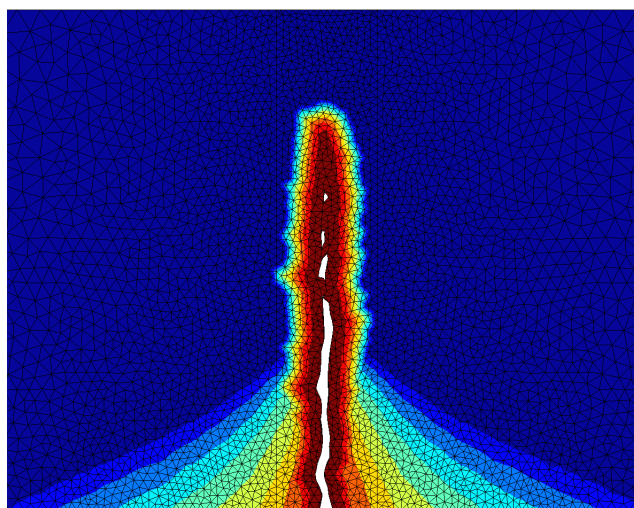
Ces différences de comportement au niveau local ont évidemment une influence non-négligeable sur le comportement global de la structure, comme on peut le voir sur la figure 3.15, où est tracé l'effort imposé en fonction du déplacement vertical pour ($h = \ell_c/5$). Avec la méthode simplifiée, on obtient un comportement beaucoup plus fragile qu'avec la version complète. On remarquera également la présence de fortes oscillations, que ce soit avec la version complète où la version simplifiée de la méthode. Ces oscillations sont liées au caractère explicite de l'algorithme de propagation utilisé. En effet, à chaque pas de temps le facteur de charge est calculé de façon à ce qu'en au moins un nœud du maillage la level set ϕ progresse d'une valeur $\Delta\phi_{max}$. Le chargement en un instant n donné dépend donc uniquement de l'état mécanique en un point P^n . Il serait logique de supposer que ce point ne se déplace que peu d'un pas de temps à un autre, autrement dit, qu'à l'instant $n + 1$ le point P^{n+1} déterminant le chargement se trouve au voisinage de P^n . L'état mécanique de ce point P^{n+1} étant proche de celui de P^n , le chargement évolue peu entre les instants n et $n + 1$. En pratique, les imprécisions numériques font que la position de ce point peut varier fortement d'un instant à l'autre, d'où les oscillations, l'état mécanique en un point P^{n+1} n'ayant a priori aucune raison d'être proche de l'état mécanique en un point P^n si P^{n+1} est loin de P^n .

Dans le cas d'une fonction d'adoucissement choisie pour avoir une méthode TLS équivalente à un modèle cohésif, ces oscillations sont amplifiées par le problème d'intégration numérique dû à la singularité en $d = 1$. On remarque ainsi que l'amplitude de ces oscillations reste modérée au début du calcul, lorsque d est encore éloigné de 1, et qu'elle devient de plus en plus importante au fur et à mesure du calcul, c'est-à-dire lorsque la taille de la zone endommagée augmente. Néanmoins, on remarquera que le facteur de charge est défini comme un minimum (équations (2.44) et (2.67)), les oscillations ont donc tendance à sous-estimer le chargement. Dans les cas tests comparés à des résultats expérimentaux, on se focalisera donc sur l'enveloppe supérieure de la courbe force-déplacement. Enfin, on remarquera que ces oscillations diminuent lorsque l'on raffine le maillage (cf. équation (3.15)).

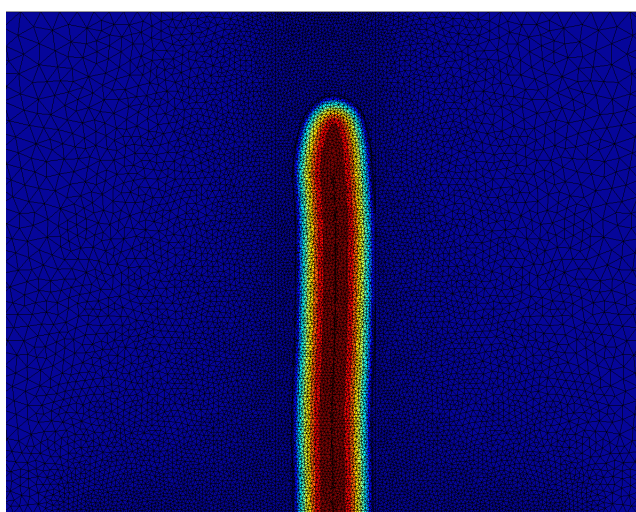
Dans le cas de la version simplifiée, on pourrait se demander s'il est légitime de n'activer la recherche de défaut qu'au premier pas de temps, comme expliqué dans la section 3.3.1. Le champ d'endommagement obtenu pour la version simplifiée, pour $h = \ell_c/5$ et en laissant cette fois-ci la recherche de défaut active, est donné sur la figure 3.17. On constate qu'une première fissure semble d'initier au centre de la poutre, mais rapidement celle-ci finit par s'élargir et former une large zone morte au lieu de s'allonger. Au bout d'un certain temps on constate même que deux autres fissures semblent apparaître, et finissent par s'élargir comme la première. Cela peut s'expliquer en observant les résultats obtenus avec la version complète (cf. figure 3.14). On observe sur la face inférieure de la poutre une large zone d'endommagement diffus, qui indique que le critère de propagation local (2.9) a été atteint



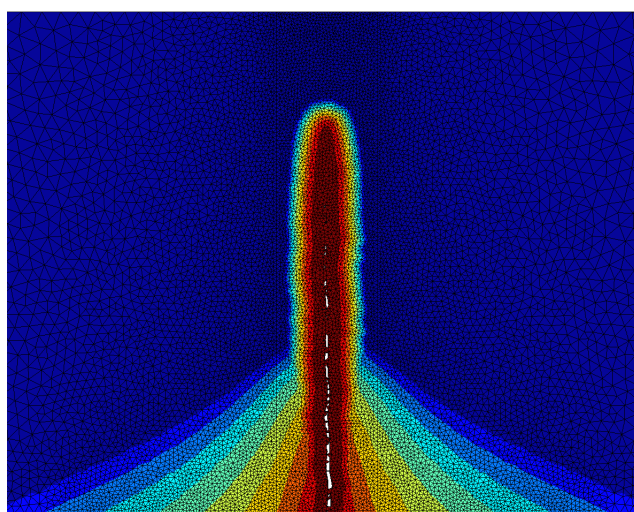
$h = \ell_c/5$, version simplifiée.



$h = \ell_c/5$, version complète.



$h = \ell_c/10$, version simplifiée.



$h = \ell_c/10$, version complète.

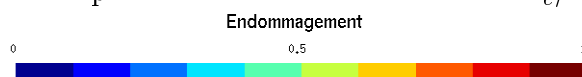


FIGURE 3.14. – Champ d'endommagement pour la poutre non-entailée, pour différentes tailles de maille et pour les deux versions de la méthode TLS.

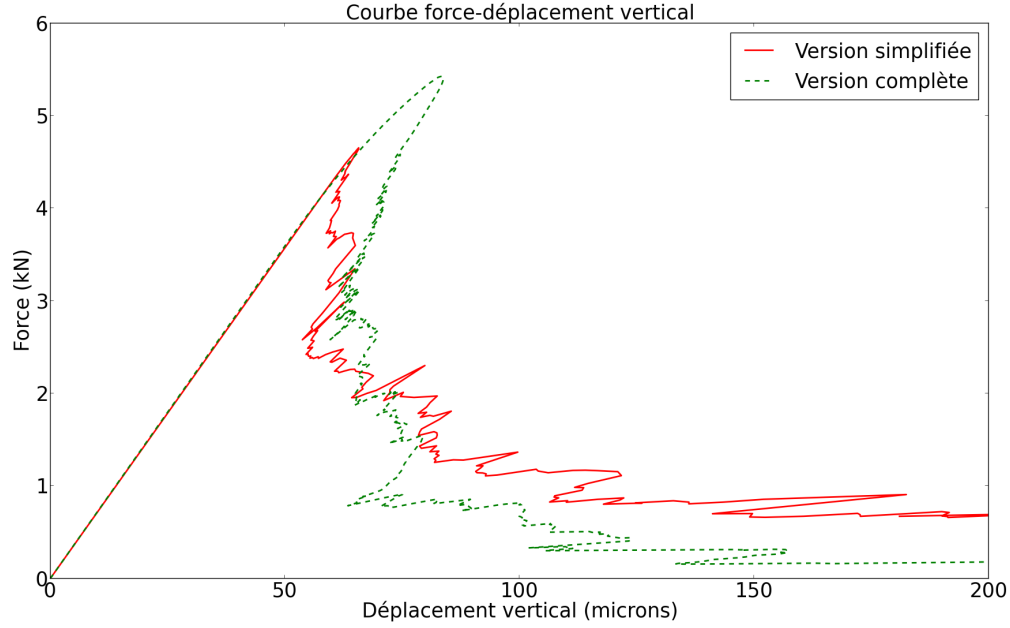


FIGURE 3.15. – Courbes force en fonction du déplacement imposé ($h = \ell_c/5$) pour la poutre non-entaillée.

dans toute cette zone. Avec la version simplifiée, un défaut est initié dès que ce critère est atteint. Le problème vient du fait que la propagation de ces défauts est ensuite réalisée de façon à vérifier la condition (2.18), y compris là où ce n'est pas nécessaire (zone en pointillés verts sur la figure 3.17 a.). On obtient ainsi un champ d'endommagement erroné.

3.3.3. Poutre entaillée

Une étude identique est réalisée dans le cas de la poutre entaillée. Ici, la présence de l'entaille entraîne une singularité du champ de déformation en pointe, forçant ainsi la localisation de l'endommagement (cf. figure 3.18) dès le début du calcul. Par conséquent, dans le cas de la version complète de la méthode TLS, la zone endommagée est quasiment confondue avec la zone non-locale, ce qui explique que l'on obtienne avec les deux versions de la méthode des résultats qualitativement identiques, c'est-à-dire une bande endommagée de largeur $2\ell_c$. Mis à part la localisation très rapide de l'endommagement, les mêmes conclusions que pour la poutre non entaillée peuvent être tirées (bords de la zone endommagée, oscillations de la courbe force-déplacement, comportement en fonction de la taille des éléments du maillage). On notera néanmoins une sensibilité du pic (cf. figure 3.20) à la taille des mailles plus importante que dans le cas de la poutre non-entaillée, ce qui est lié à la singularité du champ de déformation au niveau de la pointe de l'entaille.

Ouvertures de fissure On compare sur la figure 3.21 les courbes force-CMOD obtenues par les versions simplifiée et complète de la TLS à la courbe obtenue expérimentalement par Dufour *et al.* (2012). On rappelle que les paramètres matériaux donnés dans le tableau 3.12 ont été recalés de façon à ce que la courbe obtenue par la méthode simplifiée soit la plus proche possible des résultats expérimentaux.

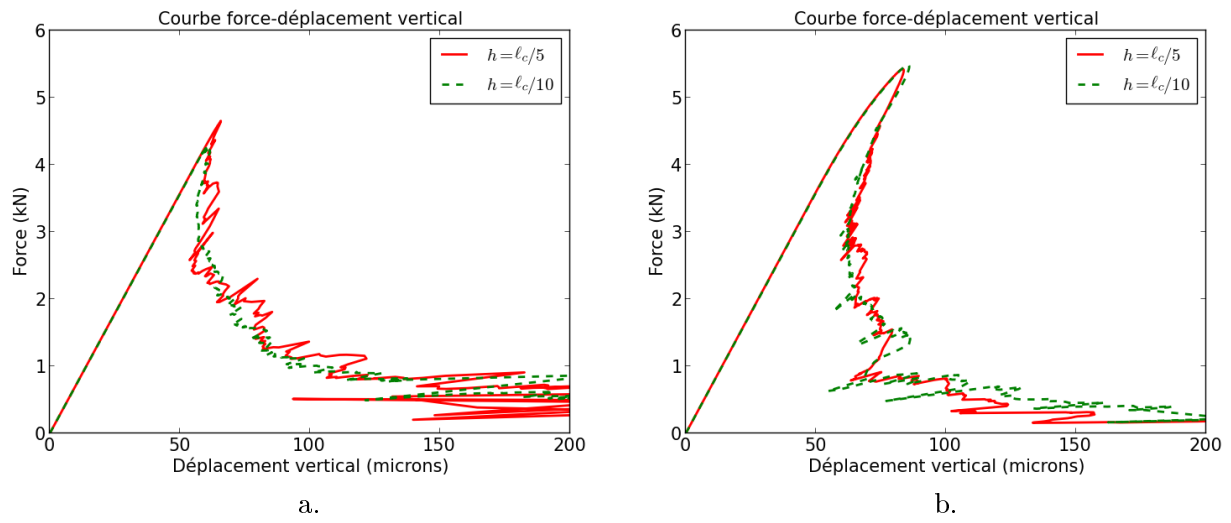


FIGURE 3.16. – Courbes force en fonction du déplacement imposé pour la poutre non-entailée, pour différentes tailles de mailles : a. version simplifiée. b. version complète .

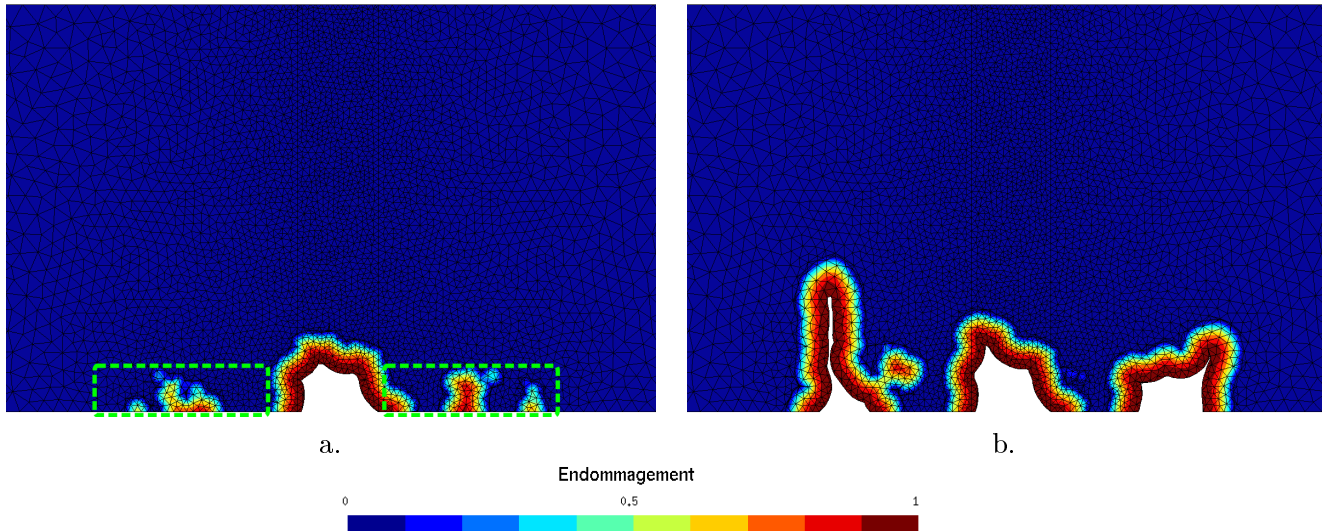
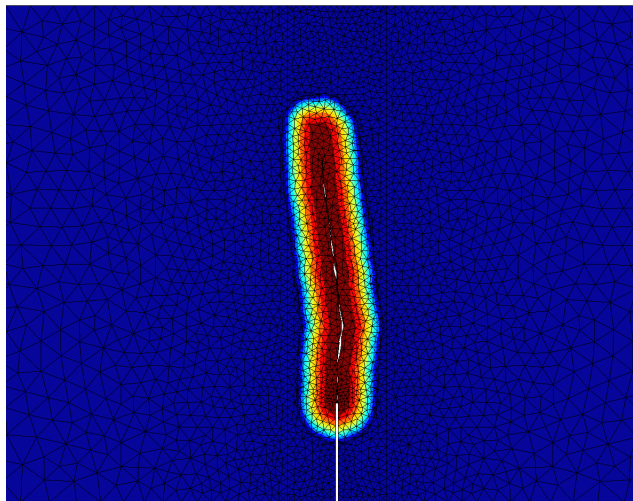
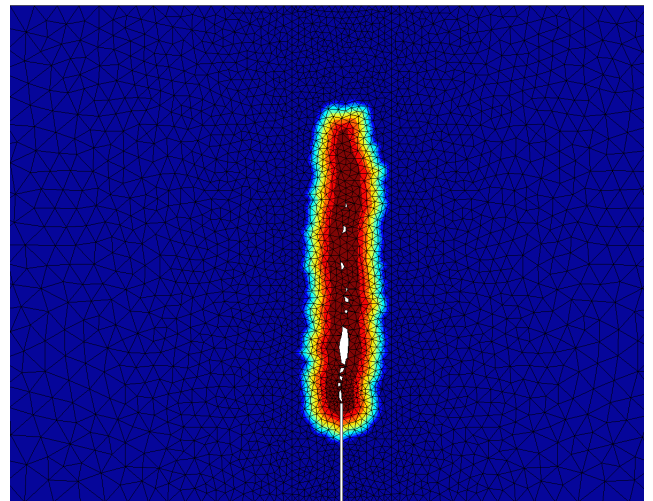


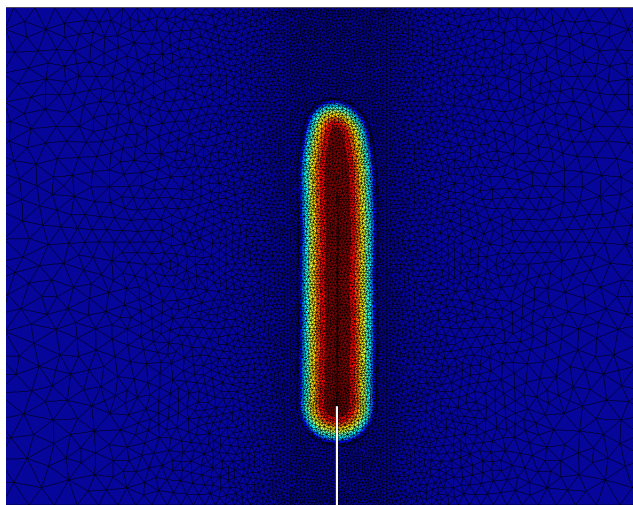
FIGURE 3.17. – Champ d'endommagement obtenu pour la poutre non-entailée avec la version simplifiée, en laissant active la recherche de défauts à chaque pas de temps.



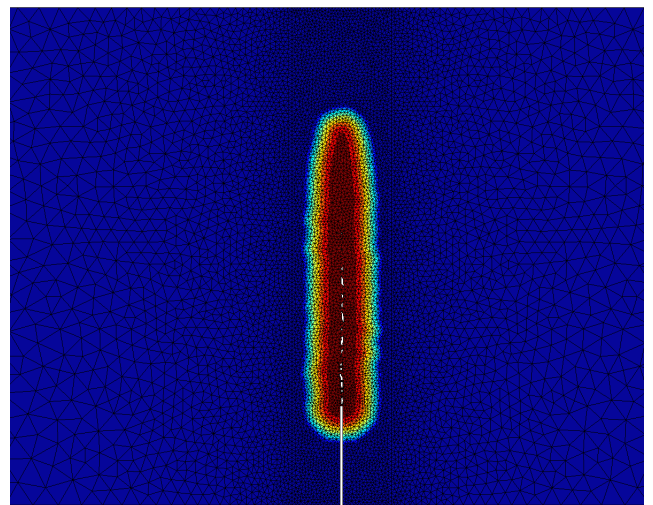
$h = \ell_c/5$, version simplifiée.



$h = \ell_c/5$, version complète.



$h = \ell_c/10$, version simplifiée.



$h = \ell_c/10$, version complète.



FIGURE 3.18. – Champ d'endommagement pour la poutre entaillée, pour différentes tailles de maille et pour les deux versions de la méthode TLS.

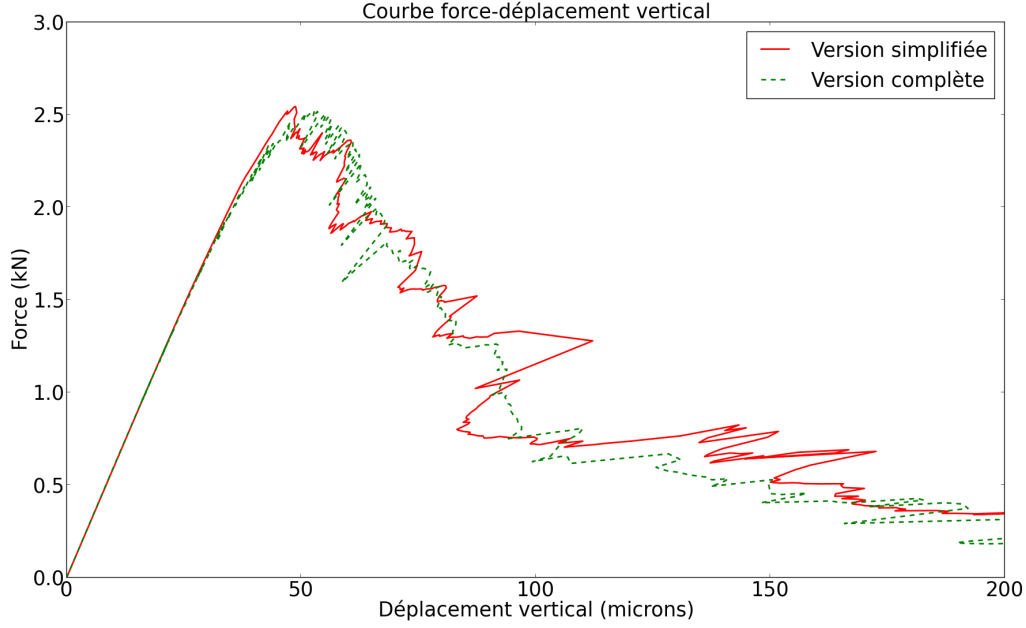


FIGURE 3.19. – Courbes force en fonction du déplacement imposé ($h = \ell_c/5$) pour la poutre entaillée.

En utilisant ces paramètres avec la version complète, on retrouve bien le même comportement.

L'ouverture de fissure le long de la fissure pour un CMOD égal à 200 microns est donnée sur la figure 3.22. Cette ouverture a été extraite du calcul TLS avec la méthode simplifiée, en calculant la différence de déplacement horizontal entre deux points situés de part et d'autre des lèvres de la fissure, pour 10 valeurs de y différentes. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus par corrélation d'image, et aux résultats numériques obtenus par Dufour *et al.* (2012) en reconstruisant le trajet de fissuration à partir d'un modèle d'endommagement non-local et en post-traitant le champ de déformation.

Les résultats numériques obtenus en termes d'ouverture sont très proches des résultats expérimentaux, bien qu'ils les sous-estiment légèrement. D'après Dufour *et al.* (2012), cela s'explique par le fait que les ouvertures de fissures expérimentales ont été obtenues par corrélation d'image, mesurées sur la face extérieure de la poutre. Or les ouvertures de fissures sont plus importantes à l'extérieur de la poutre. Les résultats expérimentaux donnent donc un maximum, tandis que les simulations numériques, en 2D, fournissent une moyenne. Néanmoins les résultats obtenus semblent très corrects au vu du coût en post-traitement, négligeable avec la méthode TLS. Le raffinement du maillage n'a pas une influence importante sur les résultats. On notera qu'avec les fortes oscillations, la valeur du CMOD de 200 microns est atteinte plusieurs fois. L'extraction des ouvertures de fissures a été réalisée pour le premier champ de déplacement pour lequel cette valeur a été atteinte.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, l'extraction d'ouvertures de fissure par la méthode TLS a été illustrée sur deux exemples, un essai brésilien et un essai de poutre en flexion trois points. Le premier a été traité

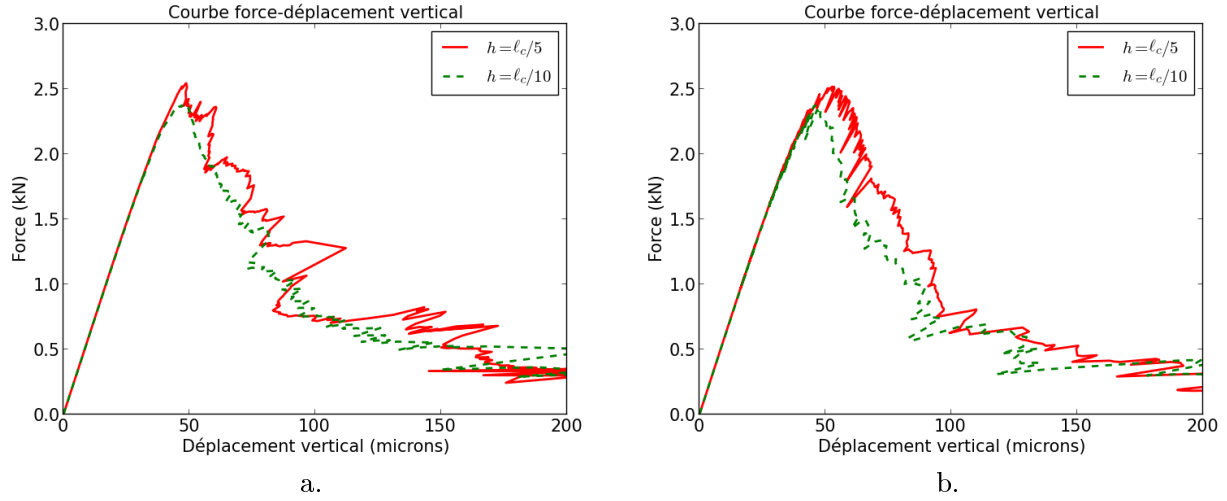


FIGURE 3.20. – Courbes force en fonction du déplacement imposé pour la poutre entaillée, pour différentes tailles de mailles : a. version simplifiée. b. version complète.

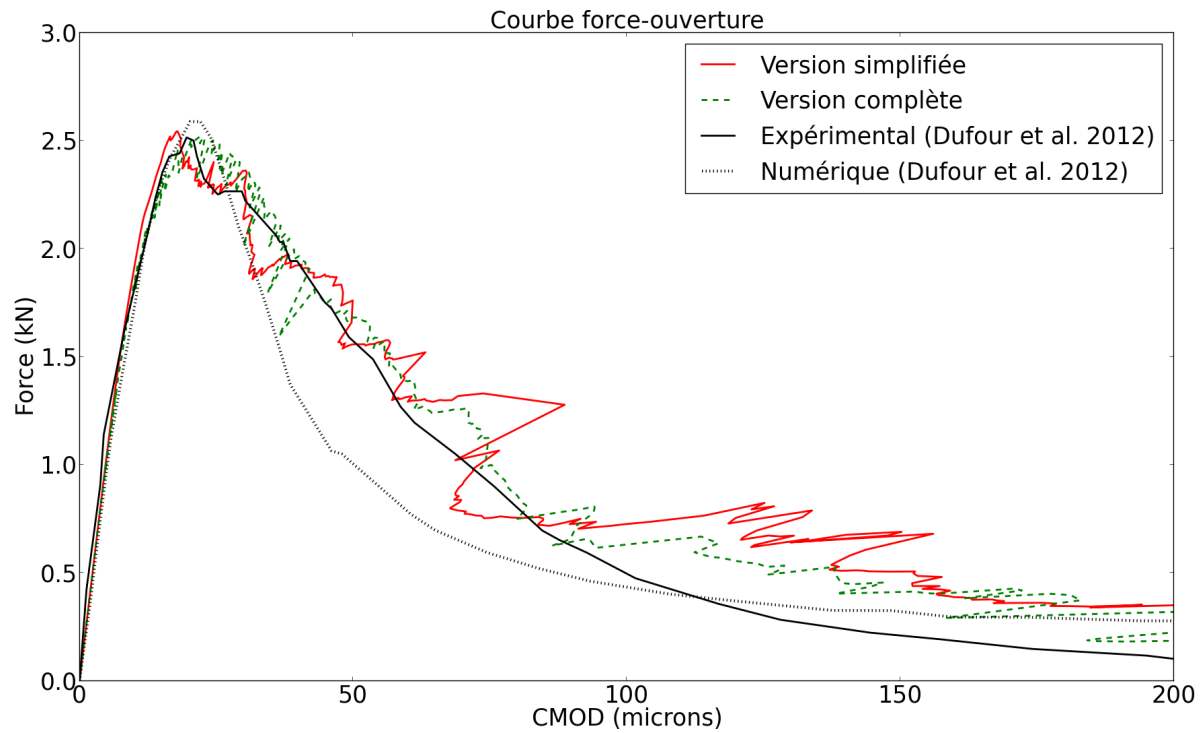


FIGURE 3.21. – Courbes force-CMOD pour la poutre entaillée, comparaison entre résultats TLS obtenus avec la version simplifiée ($h = \ell_c/5$) et résultats expérimentaux tirés de (Dufour *et al.*, 2012).

avec deux modèles d'endommagement : un premier modèle, qualifié de “brutal”, correspondant à une fonction d'adoucissement constante, et un second, qualifié de “progressif”, calculé de façon à avoir un comportement équivalent à une loi cohésive bilinéaire (cf. section 2.5). Une discussion sur ces deux modèles a été réalisée, de laquelle il a été déduit que le modèle brutal ne semble pas pertinent

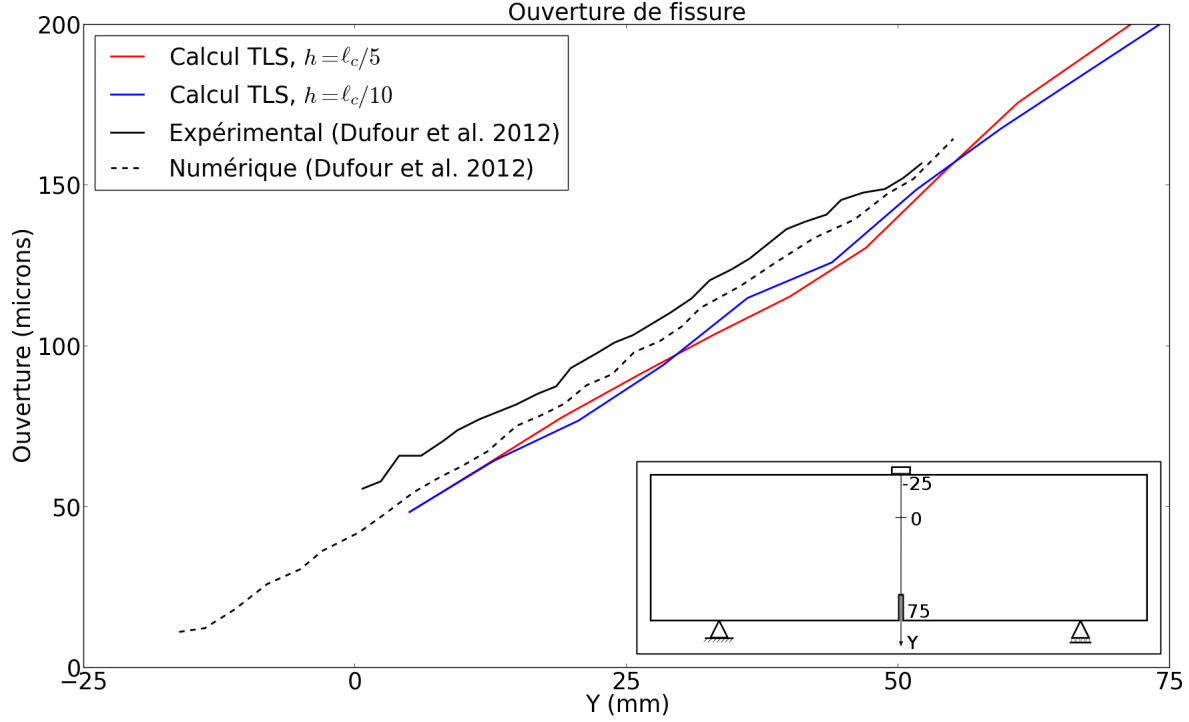


FIGURE 3.22. – Ouverture de fissure le long de la fissure pour la poutre entaillée, comparaison entre résultats TLS, résultats expérimentaux et résultats numériques tirés de (Dufour *et al.*, 2012), pour une valeur du CMOD égale à 200 microns.

pour recaler des résultats expérimentaux. Néanmoins, celui-ci permet de mettre en évidence certaines difficultés liées au modèle progressif, c'est pourquoi il a été utilisé dans ce cas test, purement illustratif.

Grâce à l'enrichissement par la méthode X-FEM du champ de déplacement, l'extraction d'ouvertures de fissure se fait sans technique de post-traitement particulière, en calculant simplement la différence de déplacement entre deux points situés de part et d'autre des lèvres de la fissure. Cela nécessite néanmoins la fonction de double-découpe (cf. section 2.2.5), qui n'est actuellement implémentée que dans la version simplifiée de la méthode. Cela ne pose pas de problème pour des cas tests où l'endommagement est uniquement localisé, comme dans le cas de la poutre entaillée (section 3.3.3). En revanche pour des cas où de l'endommagement diffus est attendu, la version simplifiée donne des résultats différents de la version complète qui, on le rappelle, est plus générale au niveau des phénomènes physiques modélisés (cf. section 2.4). Les résultats obtenus avec la version simplifiée dans ce cas doivent donc être considérés avec précaution.

De plus, un problème propre au pilotage explicite du chargement a été mis en évidence, à savoir de fortes oscillations sur la courbe force-déplacement. En plus de la méthode de pilotage du chargement, des difficultés d'intégration numérique dues à la forme particulière de la fonction d'adoucissement ont été mises en évidence, notamment sur le cas de l'essai brésilien où un maillage assez fin est nécessaire pour retrouver la bonne valeur du pic (cf. figure 3.6). L'amplitude de ces oscillations semble diminuer lorsque l'on raffine le maillage, mais nécessite des tailles de mailles assez faibles (de l'ordre de $\ell_c/10$). Cela reste envisageable sur des cas simples, par exemple avec une seule fissure comme ceux présentés

dans ce chapitre, où l'on peut se permettre de raffiner localement le maillage sur le trajet de la fissure. En revanche pour des cas plus complexes, notamment avec plusieurs fissures comme ceux qui seront développés dans le chapitre 4, une telle finesse de maillage peut s'avérer nécessaire dans une bonne partie de la structure, ce qui peut être rédhibitoire.

Mis à part les difficultés numériques de la méthode TLS liées à la propagation de la level set et à la représentation de la fissure (double-découpe), le coût en post-traitement négligeable pour extraire les ouvertures de fissures en fait un outil particulièrement intéressant par rapport aux méthodes de post-traitement existantes (cf. section 3.1). L'approche demanderait néanmoins à être validée avec d'autres résultats expérimentaux afin de mieux en estimer la précision.

4. Application de la méthode TLS à l'étude de structures en béton armé

Sommaire

4.1. Introduction	80
4.1.1. Rôle des armatures	80
4.1.2. Influence et modélisation de la liaison acier-béton	81
4.2. Simulation d'un essai de tirant	83
4.2.1. Principe de l'essai de tirant	83
4.2.2. Caractéristiques du tirant étudié	84
4.2.3. Résultats numériques	87
4.3. Poutre en béton armé (benchmark CEOS.FR)	89
4.3.1. Description du cas test	89
4.3.2. Premier calcul	93
4.3.3. Problèmes de réinitialisation	96
4.3.4. Résultats numériques	102
4.4. Conclusion	104

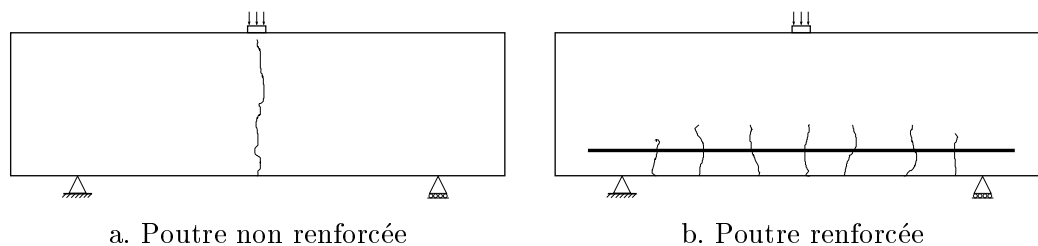


FIGURE 4.1. – Illustration du procédé de fissuration dans une poutre en béton sur un essai de flexion trois points.

4.1. Introduction

4.1.1. Rôle des armatures

Le chapitre 3 a permis de valider la capacité de la méthode TLS à extraire des ouvertures de fissures à partir d'un modèle formulé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, et ce sans méthode de post-traitement particulière. Les cas tests étudiés dans ce chapitre ne s'intéressaient qu'à des structures en béton non armé, pour lesquels une seule fissure apparaissait. En pratique, comme il a été expliqué dans l'introduction de ce manuscrit, la faible résistance à la traction du béton nécessite de l'associer à des armatures métalliques afin d'empêcher la ruine des structures. On considère par exemple le cas d'une poutre en béton en flexion trois points (cf. figure 4.1). Si la poutre n'est pas renforcée, une seule fissure va s'initier au centre, là où le moment de flexion est le plus important, puis se propager jusqu'à provoquer la ruine de la poutre. En revanche, si l'on place une armature dans la partie inférieure de la poutre, c'est-à-dire la partie en traction, plusieurs fissures vont s'initier et se propager. Dans ce cas, la résistance de la poutre sera nettement plus élevée que celle de la poutre non-armée. On remarquera que l'armature n'empêche pas totalement la fissuration du béton ; en revanche, sa présence induit une redistribution des déformations qui provoque l'apparition de plusieurs fissures au lieu d'une seule, ce qui permet à la structure de dissiper davantage d'énergie, et donc d'avoir une résistance plus importante. Un autre effet des armatures est de limiter l'ouverture des fissures, voire de les refermer par retour élastique de l'acier. Or la connaissance de l'état de fissuration peut s'avérer crucial pour certaines structures, comme par exemple les enceintes de confinement des centrales nucléaires, pour lesquelles cet état de fissuration a un impact direct sur leur étanchéité. Tout l'enjeu des études numériques est donc de prévoir comment ces fissures, inévitables, vont s'initier, se propager et s'ouvrir.

Dans le cas du béton armé, la nécessité de pouvoir représenter l'endommagement diffus (Bazant, 1986) impose le choix de la version complète de la méthode TLS. Sans double-découpe (cf. section 2.4), il n'est pas possible d'évaluer précisément les ouvertures de fissures, mais ce point a déjà été abordé dans le chapitre 3. En revanche la simple découpe permet d'obtenir les espacements, ce que l'on va chercher à caractériser ici.

4.1.2. Influence et modélisation de la liaison acier-béton

Description du comportement de la liaison acier-béton

Toute l'influence des armatures sur les structures en béton armé provient de la transmission des efforts de l'acier vers le béton. Il est donc logique de penser que l'interface acier entre l'acier et le béton occupe une place prépondérante dans ce processus. Cette interface n'est pas parfaite et se détériore lorsque le chargement augmente. Cette détérioration a une influence importante sur le transfert des efforts entre les deux matériaux. Trois phénomènes sont mis en jeu au cours de la dégradation de l'interface acier-béton (Lutz et Gergely, 1967) :

- L'adhérence chimique entre les deux matériaux
- Les interactions mécaniques entre acier et béton, dues notamment à la présence de nervures le long des barres d'acier. Ces interactions n'existent que pour des armatures à "haute adhérence" (HA). Pour des barres lisses celles-ci sont absentes
- Le phénomène de frottement entre les deux surfaces de contact

Le mécanisme de dégradation de la liaison acier-béton se divise en trois phases, décrites par exemple par Casanova (2012) :

Phase initiale (cf. figure 4.2) : La liaison peut-être considérée comme quasi-parfaite ; un très léger glissement peut-être observé, dû à la déformation élastique du béton (phase AB sur la figure 4.2 b.). Le béton à proximité du renfort reste sain.

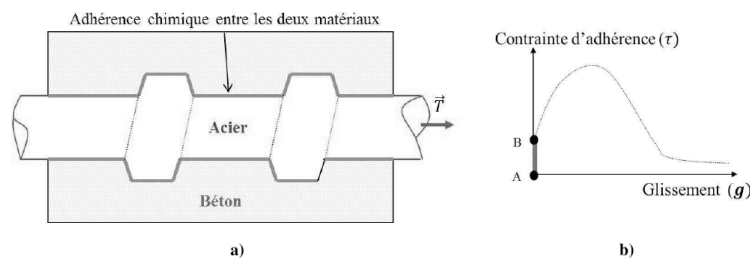


FIGURE 4.2. – (Casanova, 2012) Phase initiale. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée

Fissuration (cf. figure 4.3) : Dès que l'adhérence chimique est rompue, l'acier commence à glisser dans le béton. Dans le cas d'un renfort lisse, les phénomènes observés sont semblables à du frottement à l'interface entre les deux matériaux (augmentation du glissement et diminution de la contrainte d'adhérence). En présence de nervures, le béton se comprime pour s'opposer au glissement du tirant, ce qui provoque une augmentation de la contrainte d'adhérence (phase BC sur la figure 4.3 b.). Des microfissures commencent à apparaître dans le béton, ce qui entraîne un adoucissement (phase CD sur la figure 4.3 b.).

Rupture (cf. figure 4.4) : Le béton autour de la barre d'acier est presque complètement dégradé et n'oppose quasiment plus de résistance au glissement. La barre peut être considérée comme lisse, le seul phénomène s'opposant encore au glissement est le frottement acier-béton (à partir du point D sur la figure 4.4 b.).

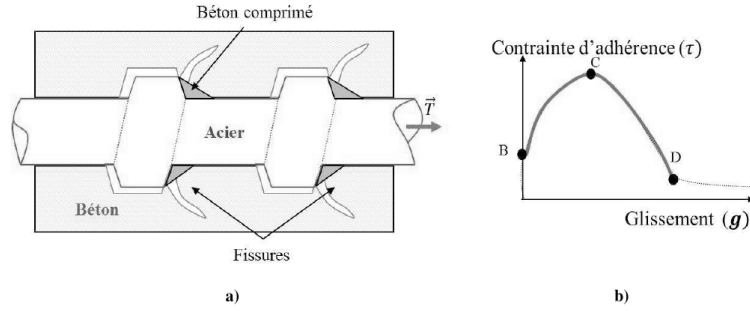


FIGURE 4.3. – (Casanova, 2012) Phase de fissuration. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée

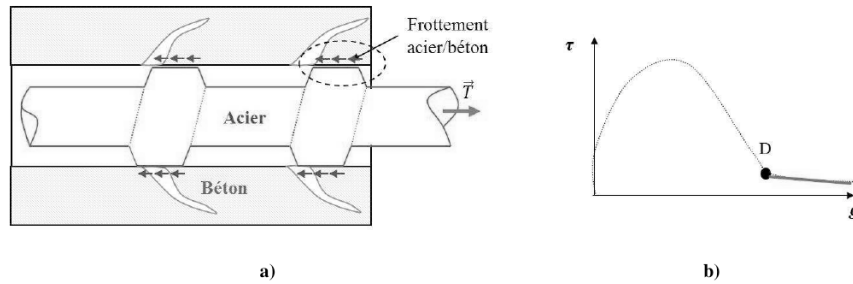


FIGURE 4.4. – (Casanova, 2012) Phase de rupture. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée

Modélisation numérique de la liaison acier-béton

On se place ici dans le cas où les armatures sont modélisées par des éléments volumiques, sans tenir compte des nervures. La question de leur représentation géométrique sera discutée plus en détails dans le chapitre 5. De nombreuses méthodes ont été proposées afin de prendre en compte le comportement de l'interface acier-béton. Un des premiers modèles a été proposé par Ngo et Scordelis (1967) : il consiste simplement à ajouter des ressorts entre les nœuds d'acier et les nœuds béton. Des modèles plus élaborés ont ensuite vu le jour, tel que celui proposé par Reinhardt *et al.* (1984), qui suppose que le béton autour de l'acier a un comportement différent du béton loin des armatures. L'interface acier-béton est alors modélisée par une couche d'éléments élastoplastiques (cf. figure 4.5 a.). Avec ce type de modèles, le déplacement est continu à l'interface, ce qui limite leur application au cas des petites glissements. D'autres modèles tels que celui de Richard *et al.* (2010) utilisent un comportement élastoplastique endommageable, permettant également de prendre en compte les effets de la corrosion. Une discontinuité du déplacement à l'interface peut être introduite en utilisant une loi contrainte/glissement. Un exemple assez simple est la loi trilineaire de Daoud (2003), divisée en trois parties distinctes (cf. figure 4.5 c.) : une première partie avec une pente K_{s1} élevée permettant de représenter la quasi-continuité du déplacement lorsque la liaison n'est pas encore endommagée, une seconde partie avec une pente K_{s2} représentant la dégradation progressive de la liaison, et une dernière partie de pente nulle lorsque la liaison est complètement endommagée, permettant de représenter le frottement entre les deux matériaux. On trouve également des modèles utilisant des éléments dégénérés d'épaisseur nulle tel que celui proposé par Dominguez (2005) (cf. figure 4.5 b.). Ces éléments possèdent

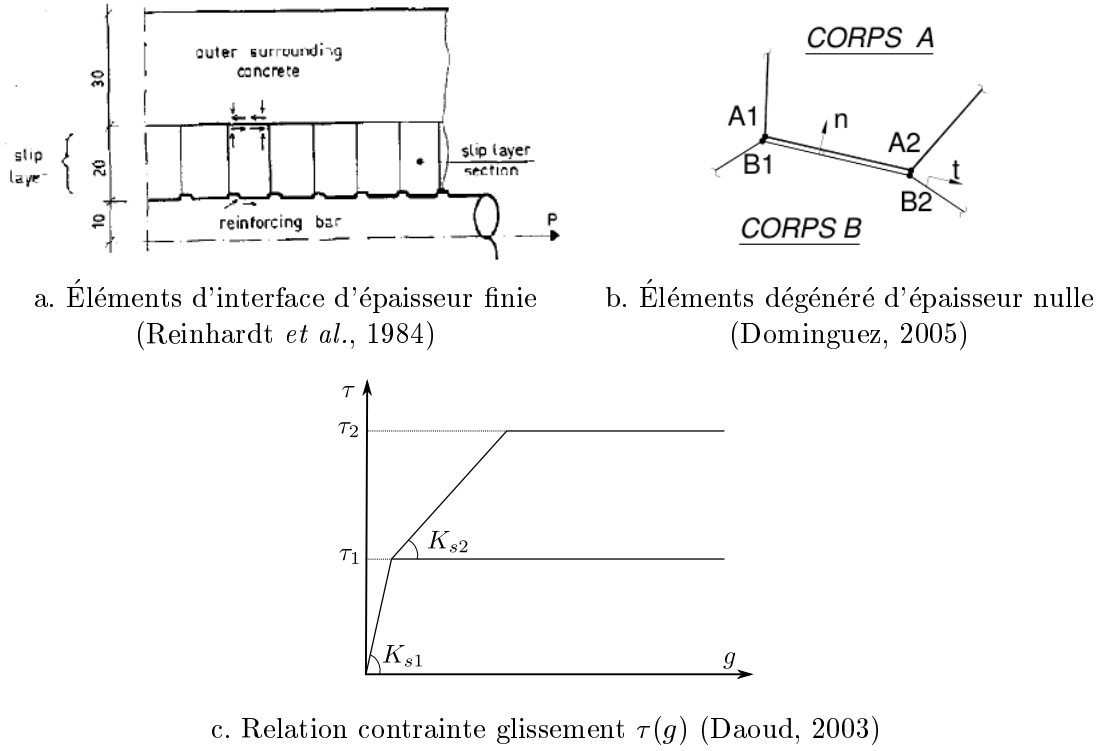


FIGURE 4.5. – Exemples de modélisations numériques de l'interface acier-béton.

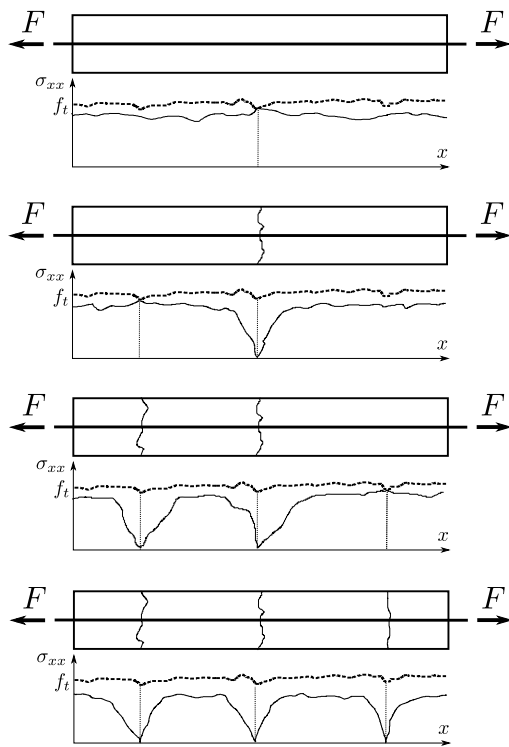
leur propre loi de comportement, permettant de modéliser les interactions entre les deux matériaux. Enfin, d'autres modèles tels que celui de Raous et Karray (2009) utilisent la mécanique du contact.

Dans le cadre de cette thèse, on considèrera l'interface entre l'acier et le béton parfaite. La prise en compte de la liaison n'est en effet pas encore possible dans le code utilisé. Autant que possible, les cas tests étudiés dans ce chapitre ont été choisis de telle sorte que l'influence de la liaison acier-béton puisse être considérée comme négligeable, tout en conservant un regard critique sur les résultats obtenus.

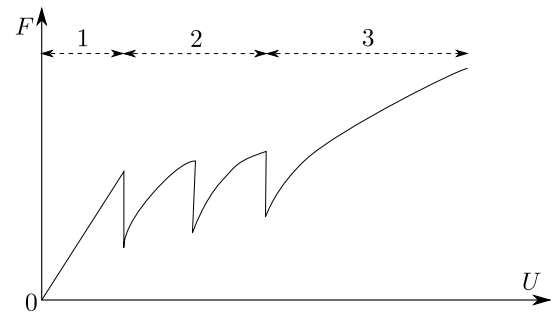
4.2. Simulation d'un essai de tirant

4.2.1. Principe de l'essai de tirant

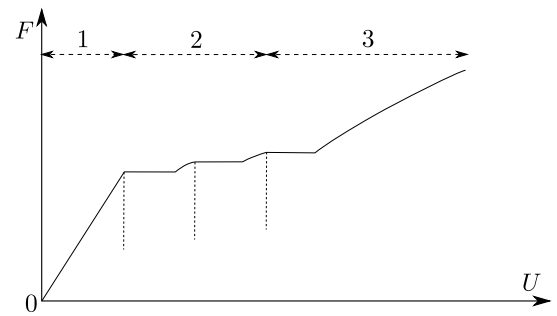
L'essai de tirant consiste à appliquer un effort de traction aux deux extrémités d'une barre d'acier plongée dans une éprouvette en béton prismatique (cf. figure 4.6). La déformation de la barre va entraîner l'apparition d'efforts de traction σ_{xx} dans le béton. Si le béton était parfaitement homogène, σ_{xx} ainsi que la résistance à la traction f_t seraient uniformes. En pratique, le béton étant un matériau hétérogène, σ_{xx} atteint f_t en un point particulier avant le reste de la structure (cf. figure 4.6 a.), ce qui provoque la création d'une première fissure. La contrainte σ_{xx} s'annule au droit de cette première fissure et devient plus importante au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Lorsque le chargement augmente, σ_{xx} atteint f_t en un deuxième point, une deuxième fissure s'initie, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'espacement entre les fissures soit compris entre ℓ_r et $2\ell_r$ où ℓ_r est appelée longueur de transfert. ℓ_r est la distance minimale entre deux fissures. En ce qui concerne le comportement global (cf. figure



a. Apparition des fissures



b. Courbe force-déplacement (déplacement imposé)



c. Courbe force-déplacement (effort imposé)

FIGURE 4.6. – Mécanisme de fissuration d'un tirant en béton.

4.6 b. et c.), caractérisé par la courbe force appliquée à la barre d'acier en fonction du déplacement, celui-ci peut-être décomposé en trois phases :

1. Une première phase élastique.
2. Une phase de fissuration du béton. En fonction de la méthode employée pour piloter l'essai, on observe des chutes d'effort (figure 4.6 b.) pour un essai piloté en déplacement, et des plateaux pour un essai piloté en effort (figure 4.6 c.). Néanmoins, les enveloppes supérieures des courbes sont identiques (Maurel, 1999).
3. Une troisième phase où le réseau de fissuration n'évolue quasiment plus, et où la déformation du tirant n'est due qu'à celle de l'acier. Cette phase sera qualifiée dans ce qui suit de phase de "fissuration stabilisée"

4.2.2. Caractéristiques du tirant étudié

Le tirant de référence considéré dans cette section a été étudié expérimentalement et numériquement par Daoud (2003). Ce cas test est intéressant pour deux raisons :

- Les tirants testés par Daoud (2003) étaient suffisamment longs pour que l'on puisse observer la formation de plusieurs fissures (de l'ordre de 4 ou 5). Leur espacement a été relevé, ce qui va permettre de voir si la méthode TLS est capable de retrouver les mêmes espacements.

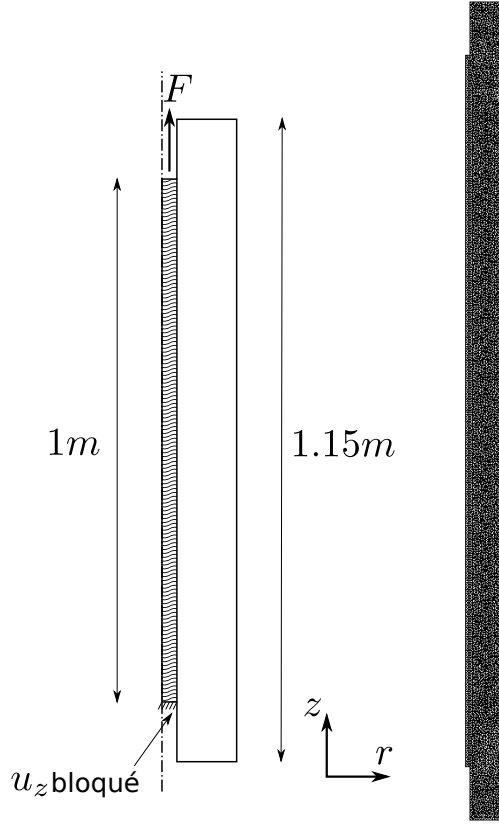


FIGURE 4.7. – Maillage et conditions aux limites de l'essai de tirant.

- Les simulations numériques de référence ont été effectuées avec et sans modèle de liaison acier-béton (contact parfait). Dans le cas d'une barre haute adhérence, Daoud (2003) a montré que la prise en compte de l'interface acier-béton a une influence moindre, ce qui permettra d'avoir des résultats comparables à ceux obtenus avec la méthode TLS et une interface parfaite.

Géométrie et conditions aux limites Chaque éprouvette est constituée d'un bloc prismatique de section carrée de dimensions $10 \times 10 \times 115$ cm. Une barre d'acier est plongée au centre de l'éprouvette. Plusieurs diamètres et types de barres, haute adhérence (HA) et lisses, ont été testées. Dans cette section, on considèrera le cas d'une barre haute adhérence de diamètre 12 mm, pour lequel Daoud (2003) fournit de nombreux résultats expérimentaux et numériques.

Tout comme l'a fait Daoud (2003), le tirant a donc été modélisé en 2D avec des conditions axisymétriques. Une géométrie cylindrique est considérée, dont le rayon est calculé de façon à avoir la même section que l'éprouvette prismatique modélisée. Les conditions aux limites utilisées sont représentées sur la figure 4.7. Une longueur caractéristique $\ell_c = 20$ mm a été choisie, de façon à avoir $\ell_c \simeq r/2$, où r est le rayon du tirant, qui a été maillé avec des éléments triangulaires de taille $\ell_c/5$, pour un total de 5713 nœuds.

Modèle de Fichant (Daoud, 2003)	f_t (MPa)	3
	G_F (Nm/m ²)	100
	h (mm)	9,4
	E	30000
	ν	0,2
Paramètres TLS	ℓ_c (mm)	20
	σ_f (MPa)	3
	σ_k (MPa)	0,5
	w_f (mm)	0,045
	w_1 (mm)	0,175

TABLE 4.1. – Paramètres matériaux de l’essai de tirant.

Paramètres matériaux Numériquement, l’essai a été modélisé par Daoud (2003) en utilisant une version simplifiée du modèle d’endommagement de Fichant *et al.* (1999), similaire au modèle de Mazars (1986) présenté dans la section 1.4. Afin d’obtenir une dissipation non dépendante de la taille h des éléments du maillage, une dépendance à h est introduite dans la loi d’évolution de l’endommagement :

$$d = 1 - \frac{\epsilon_{d_0}}{\tilde{\epsilon} \exp(B_t(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d_0}))} \quad (4.1)$$

Où $B_t = \frac{hf_t}{G_F}$, $\epsilon_{d_0} = \frac{f_t}{E}$, $G_F = \frac{hf_t^2}{E}$. Les paramètres matériaux utilisés par Daoud (2003) pour le modèle de Fichant sont rappelés dans le tableau 4.1. Les paramètres TLS recalés à partir de la méthode expliquée dans la section 2.5.2, en utilisant notamment la même valeur de G_F , y sont également donnés. La valeur de h utilisée afin de pouvoir tracer le comportement du modèle de Fichant au point de Gauss est celle de la taille des éléments du maillage utilisé par Daoud (2003) dans ses simulations. Le comportement au point de Gauss pour les deux modèles est donné sur la figure 4.8. En ce qui concerne l’acier, celui-ci est modélisé à l’aide d’un matériau endommageable de module d’Young 200 000 MPa, de coefficient de Poisson 0.2, et une valeur de Y_c^0 très élevée.

Daoud (2003) a constaté qu’en utilisant une répartition homogène des caractéristiques matériaux, il est difficile d’obtenir un champ d’endommagement où des fissures sont distinguables. Une répartition aléatoire du module d’Young suivant une loi normale d’écart type 10% a donc été utilisée, forçant ainsi la localisation de l’endommagement. Avec la méthode TLS, le champ d’endommagement obtenu pour une répartition homogène des caractéristiques matériaux est représenté sur la figure 4.9. L’endommagement s’initie au niveau des extrémités de la barre d’acier, au niveau des coins rentrants, puis se propage progressivement vers le milieu de l’éprouvette. Deux fissures s’initient à une certaine distance proche des extrémités de l’éprouvette. Lorsque l’endommagement s’est suffisamment propagé, la déformation, et donc l’endommagement, devient homogène dans la partie centrale de l’éprouvette.

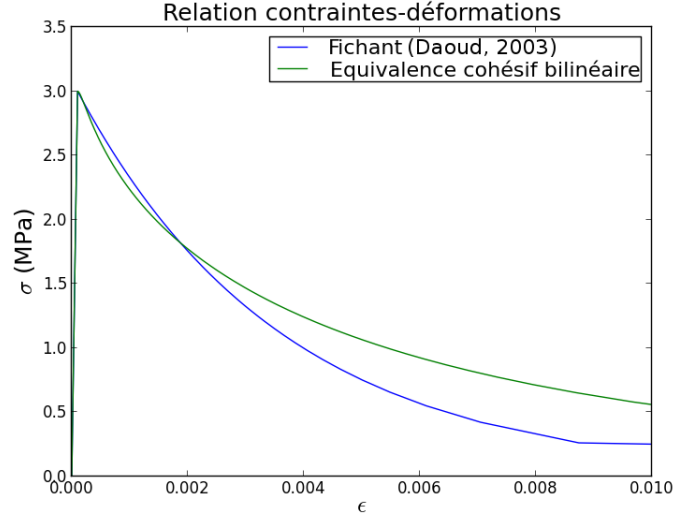


FIGURE 4.8. – Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l’essai de tirant

Enfin, l’endommagement évolue uniformément dans la partie centrale jusqu’à atteindre 1, sans apparition de fissure. Tout comme Daoud (2003), on choisit donc d’utiliser une répartition aléatoire du module d’Young afin de forcer la localisation de l’endommagement.

4.2.3. Résultats numériques

Comportement global On donne sur la figure 4.10 les courbes contrainte-déformation moyennes dans l’acier, obtenues expérimentalement et numériquement par Daoud (2003) et par la méthode TLS pour une première répartition aléatoire du module d’Young. On précise que la contrainte moyenne est calculée en divisant l’effort appliqué aux extrémités de la barre d’acier par sa section, et la déformation moyenne en divisant la variation de longueur de l’armature par sa longueur initiale. Qualitativement, la courbe obtenue par la méthode TLS est différente des courbes de référence : des chutes de contraintes sont observées à chaque fois qu’une fissure apparaît, tandis que les courbes obtenues par Daoud (2003) sont monotones croissantes. Cela est dû au pilotage en effort des essais expérimentaux (cf. section 4.2.1). Comme dans la plupart des cas tests présentés dans le chapitre 3, des oscillations peuvent être observées. L’amplitude de ces oscillations augmente au fur et à mesure du calcul, ce qui peut s’expliquer par la taille de la zone endommagée, nettement plus importante que pour les cas tests avec une seule fissure présentés dans le chapitre 3. En effet, plus la zone endommagée est grande, et plus le nombre de points susceptibles de piloter l’évolution du chargement augmente, d’où une augmentation progressive de l’amplitude des oscillations (cf. explications de la section 3.3.2 sur l’origine des oscillations observées). En revanche, l’enveloppe supérieure de la courbe obtenue avec la méthode TLS coïncide bien avec les résultats de référence.

Une deuxième remarque concerne la phase de fissuration stabilisée (cf. figure 4.6 c.). La dernière partie de la courbe est due normalement à la déformation des aciers, le réseau de fissures n’évoluant plus. Cette partie de la courbe ne peut pas être appréhendée avec l’implémentation actuelle de la méthode TLS ; en effet, l’algorithme de propagation utilisé (cf. section 2.3.2) impose une avancée de

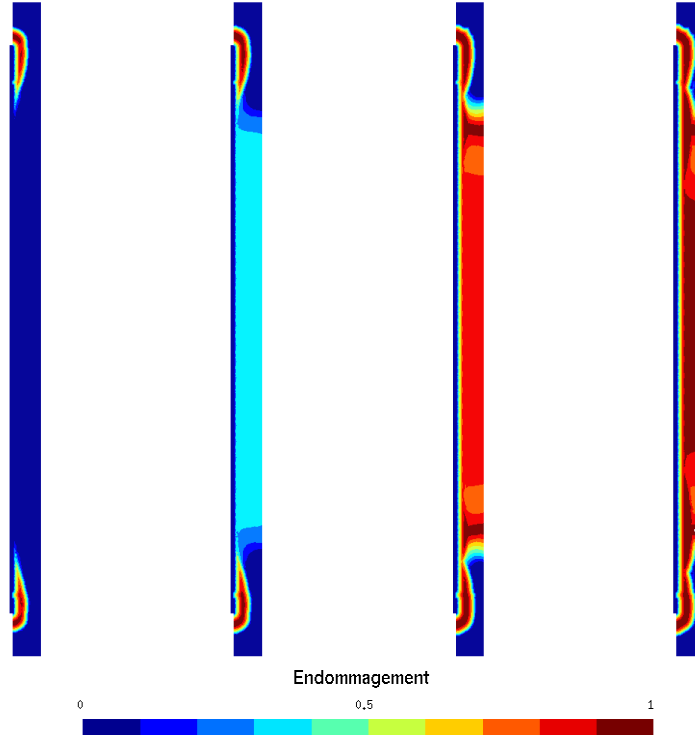


FIGURE 4.9. – Champs d'endommagement obtenus sans distribution aléatoire du module d'Young, à différents instants du calcul au cours de l'essai de tirant.

l'endommagement à chaque itération via la variable ϕ . À chaque pas de temps, le facteur de charge est calculé de façon à ce que ϕ progresse de $\Delta\phi_{max}$ en au moins un point, même si le chargement réel est tel que l'endommagement n'est pas censé évoluer. Autrement dit il est possible d'obtenir un champ d'endommagement non physique. L'étude de la phase de fissurations stabilisée n'est donc pas possible avec l'algorithme de pilotage du chargement utilisé. On se limite donc à étudier la phase de fissuration.

Caractérisation de la fissuration Le champ d'endommagement à différentes étapes du calcul est donné sur la figure 4.11. Comme dans le cas d'une répartition homogène du module d'Young, l'endommagement commence à apparaître au niveau des extrémités de la barre d'acier, puis se propage progressivement vers le centre de l'éprouvette. En revanche, l'introduction d'hétérogénéités permet d'éviter une évolution uniforme de l'endommagement dans la partie centrale, ce qui permet d'avoir une apparition progressive de 5 fissures.

Afin d'étudier l'influence de la répartition aléatoire du module d'Young, deux autres distributions (en plus de celle utilisée pour obtenir les résultats des figures 4.10 et 4.11) ont été testées. Le champ d'endommagement en fin de phase de fissuration pour chaque distribution est donné sur la figure 4.12. Les réseaux de fissuration obtenus sont qualitativement similaires, avec 5 fissures pour les distributions 1 et 3, et seulement 4 pour la distribution 2. La position des fissures varie également d'une distribution à l'autre.

Les espacements entre fissures issus de Daoud (2003) et ceux obtenus par la méthode TLS sont

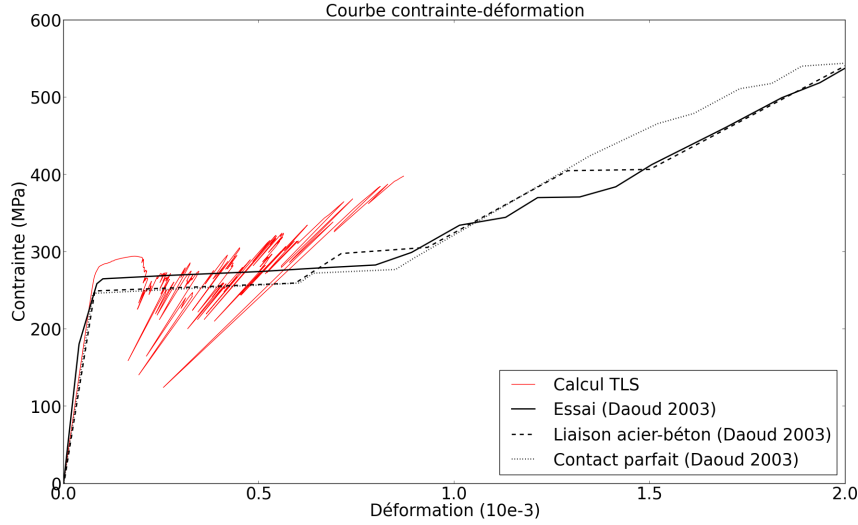


FIGURE 4.10. – Courbes contraintes/déformation dans l'acier pour l'essai de tirant.

donnés dans le tableau 4.2. Les espacements obtenus par la méthode TLS sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus expérimentalement. Numériquement, Daoud (2003) avait observé que l'utilisation d'un modèle de liaison permettait d'obtenir des espacements plus proches de l'expérience, on peut supposer que ce serait le cas avec la méthode TLS.

4.3. Poutre en béton armé (benchmark CEOS.FR)

Cette section est consacrée à l'étude d'un essai de flexion trois points d'une poutre en béton armé, similaire à celle étudiée dans le cadre du benchmark MECA d'EDF (Ghavamian *et al.*, 2003), issu du benchmark CEOS.FR (Comportement et Évaluation des Ouvrages Spéciaux - Fissuration et Retrait). Les résultats ont été synthétisés par Jason (2009).

4.3.1. Description du cas test

Géométrie et conditions aux limites Les dimensions et le plan de ferrailage sont donnés sur la figure 4.3.1. La longueur de la poutre est 5.4 m, et la distance entre appuis 5 m.

La poutre a été modélisée en 2D, sous l'hypothèse des contraintes planes. Les armatures longitudinales et transversales sont modélisées par des éléments barres 1D élastoplastiques à écrouissage isotrope (cf. section 5.3 pour plus de détails sur les éléments barres 1D, et annexe B pour les équations du modèle élastoplastique). Le contact est supposé parfait entre l'acier et le béton. Cette hypothèse, retenue par tous les participants du benchmark (Jason, 2009) semble justifiée dans la mesure où la poutre est fortement armée. Certains auteurs ont montré que l'interface acier-béton pouvait alors être considérée comme parfaite (Adelaïde *et al.*, 2013; Oliver-Leblond *et al.*, 2015).

La poutre est maillée avec des éléments triangulaires de taille $h = \ell_c/5$ (cf. figure 4.14), soit un total de 32691 nœuds. La longueur des éléments barres 1D est égale à $h/3$, de façon à avoir au moins deux nœuds barres dans chaque élément de béton, conformément aux recommandations de Jason (2008).

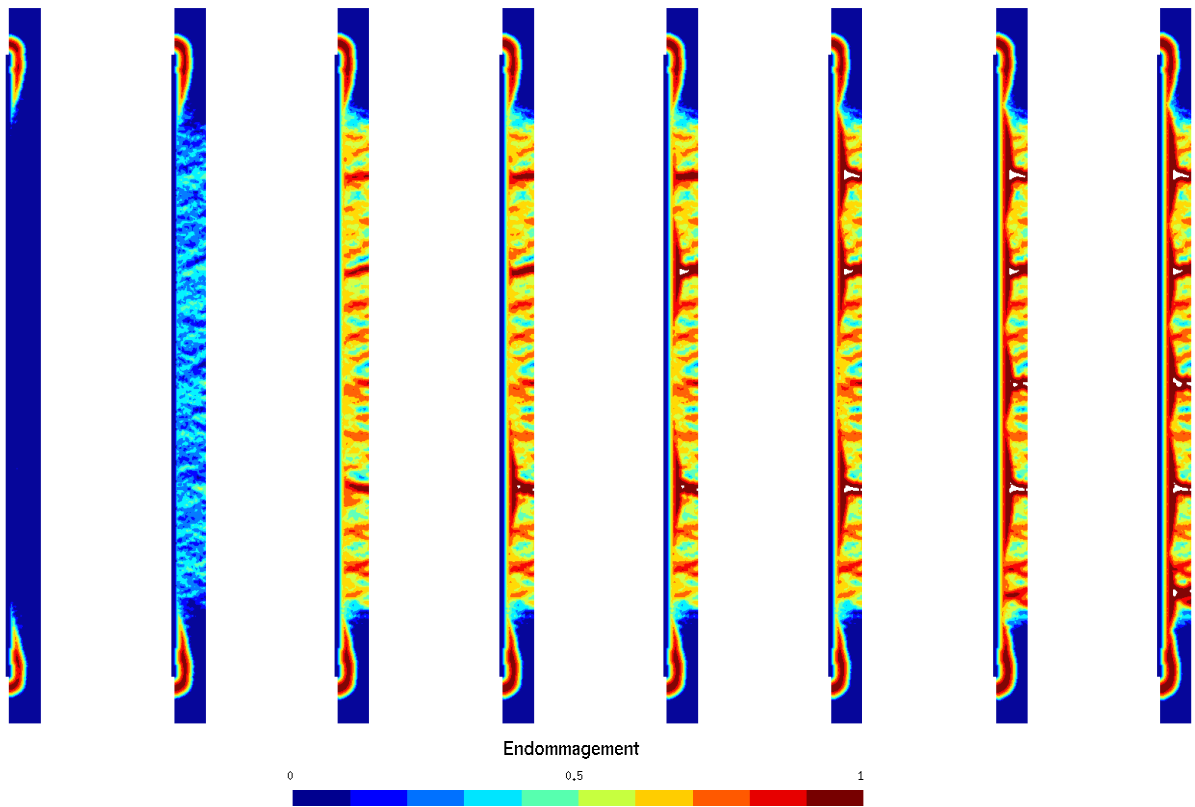


FIGURE 4.11. – Champs d'endommagement pour la répartition aléatoire n°1, à différents instants du calcul au cours de l'essai de tirant.

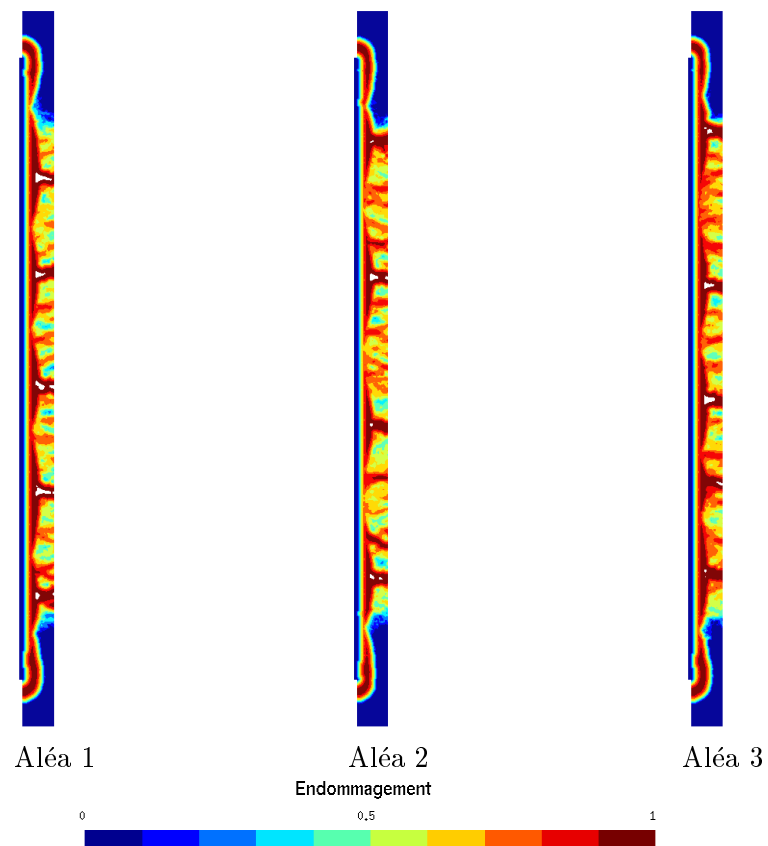


FIGURE 4.12. – Champs d'endommagement en fin de phase de fissuration pour chaque répartition aléatoire pour l'essai de tirant.

		Espacement minimal (cm)	Espacement moyen (cm)	Espacement maximal (cm)
Expérience (Daoud, 2003)	Essai 1	14,0	17,0	19,0
	Essai 2	12,5	15,8	21,0
Liaison AB (Daoud, 2003)	Aléa 1	5	15,5	27,7
	Aléa 2	6,7	17,3	25,0
	Aléa 3	5	15,0	18,3
Contact parfait (Daoud, 2003)	Aléa 1	15	17,8	21,7
	Aléa 2	18,3	20,5	25
	Aléa 3	7,5	19,2	25
Calcul TLS	Aléa 1	15	16,6	18,2
	Aléa 2	22,1	23,5	24,5
	Aléa 3	13,4	17,8	25

TABLE 4.2. – Espacements des fissures obtenus pour l'essai de tirant.

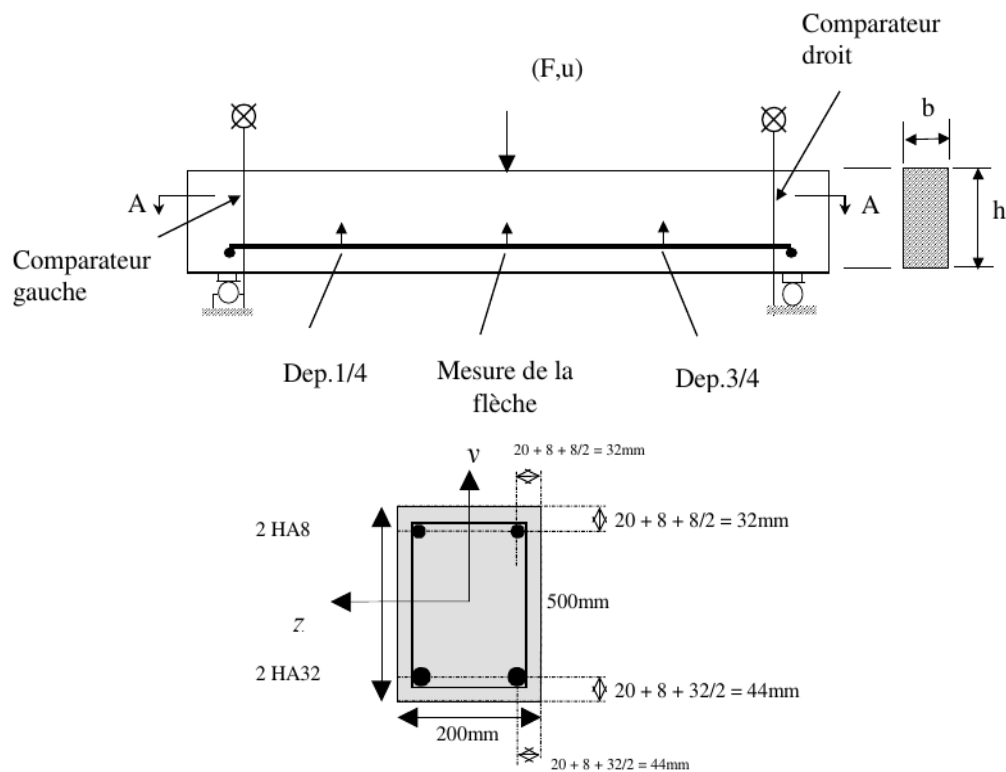


FIGURE 4.13. – Géométrie et plan de ferrailage de l'essai CEOS.FR (Jason, 2009).

Le déplacement du nœud A est bloqué suivant x et y , et le déplacement du nœud B suivant y . Le chargement est appliqué au centre de la poutre. Afin d'éviter un endommagement non physique au niveau des conditions aux limites, un matériau doté d'un Y_c^0 très élevé a été utilisé autour des appuis (zones en vert sur la figure 4.14). On notera qu'en théorie, au-delà d'une certaine valeur du chargement, la poutre est censée s'endommager en compression sous le chargement (Jason, 2009). Or le modèle utilisé ici défini par le potentiel (2.4) ne permet pas de modéliser l'endommagement en compression. Sans prise en compte de la compression, on observe avec la méthode TLS un endommagement de la partie supérieure de la poutre dû à la traction suivant y . Cet endommagement se développe sur une zone beaucoup plus large que si l'on avait pris en compte l'endommagement en compression (par comparaison aux résultats obtenus par les autres participants du benchmark par exemple), ce qui aboutit à l'arrêt du calcul. Le même matériau que celui qui entoure les appuis a donc été utilisé dans la partie supérieure sous le chargement.

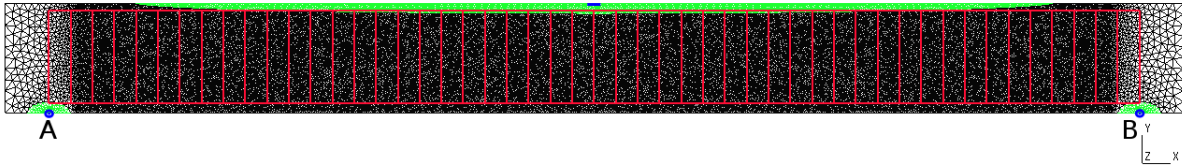


FIGURE 4.14. – Maillage de la poutre de l'essai CEOS.FR.

Paramètres matériaux Les paramètres matériaux, donnés dans le tableau 4.3, ont été recalés à partir du modèle de Mazars utilisé par un des participants du benchmark (Jason, 2008). Aux paramètres de ce modèle, également donnés dans le tableau 4.3, vient s'ajouter la valeur de l'énergie de fissuration : $G_F = 200 \text{ N.m}^{-1}$, paramètre du modèle Drucker-Prager (Jason et Durand, 2007) également utilisé par Jason (2008) pour étudier cet essai. Cette énergie a été utilisée pour caler les paramètres TLS, selon la méthode expliquée dans la section 2.5.2. La longueur caractéristique ℓ_c est la même que celle de la régularisation non-locale intégrale utilisée par Jason (2008) (cf. section 1.4.3). Le comportement aux points de Gauss, pour le modèle de Mazars utilisé par Jason (2008) et pour la méthode TLS, est donné sur la figure 4.15. On notera que seule la partie traction a été recalée, le modèle asymétrique (cf. équation (2.4) $\beta = 0$, donc pas d'endommagement en compression) étant utilisé.

4.3.2. Premier calcul

On donne sur la figure 4.16 la courbe force-déplacement vertical obtenue pour un premier calcul. On constate que la phase élastique et le début de la phase de fissuration sont correctement reproduits (entre les points A et D sur la courbe). En revanche, lorsque l'on arrive environ à la moitié du chargement maximal observé expérimentalement, la force calculée par la méthode TLS diminue au lieu de continuer à augmenter (points E et F sur la courbe).

Cette décroissance de l'effort calculée provient d'un problème de "disparition de matière", mis en évidence sur la figure 4.17. Le champ d'endommagement à différents instants du calcul est représenté à

Modèle de Mazars (Jason, 2008)	A_c	1,2
	B_c	1700
	A_t	0,8
	B_t	10000
	ϵ_{d_0}	$9,5.e^{-5}$
	f_t (MPa)	3.5
	β	1,06
	E (MPa)	37200
	ν	0,2
Acier (Jason, 2008)	E (MPa)	195 000
	ν	0.3
	Limite élastique (MPa)	466
	Module tangent (MPa)	3245
Paramètres TLS	ℓ_c (mm)	50
	σ_f (MPa)	3.5
	σ_k (MPa)	0.8
	w_f (mm)	0.42
	w_1 (mm)	0.025

TABLE 4.3. – Paramètres matériaux pour l'essai CEOS.FR.

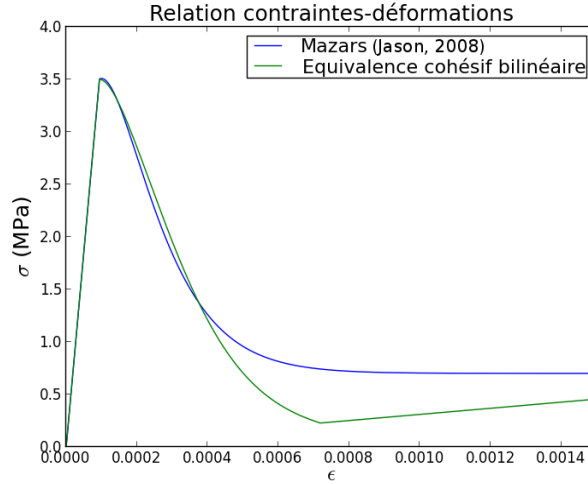


FIGURE 4.15. – Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai CEOS.FR.

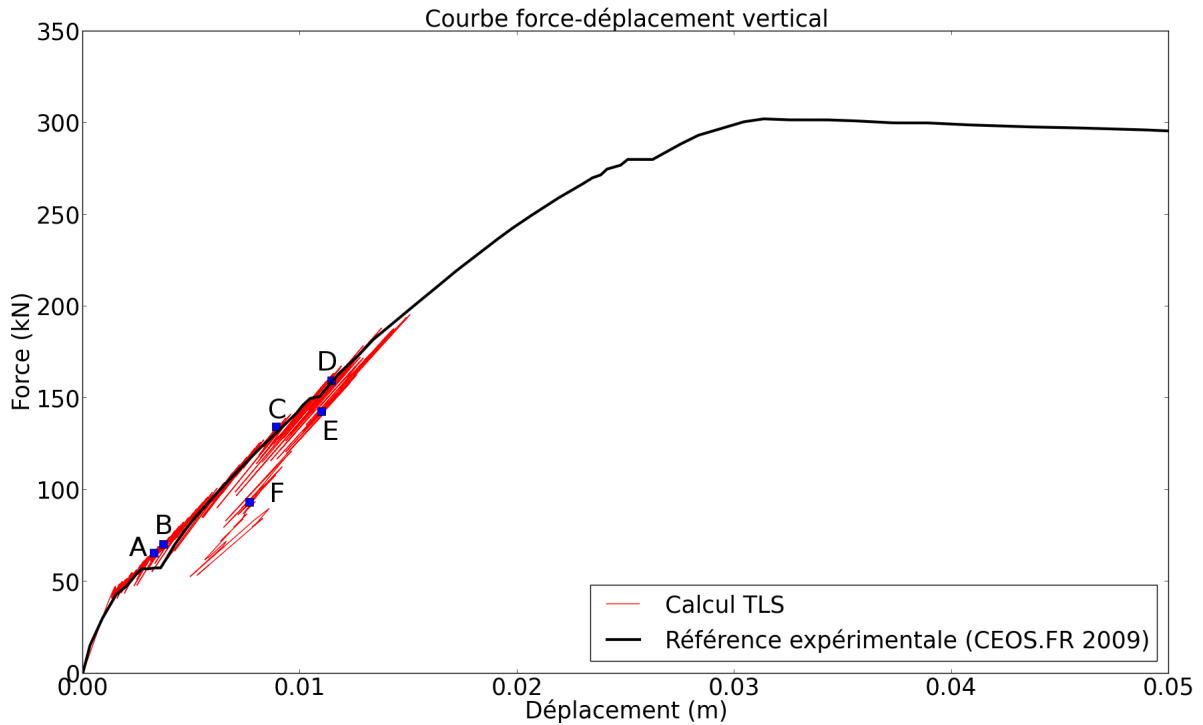


FIGURE 4.16. – Courbe force-déplacement vertical en cas de disparition de matière pour l'essai CEOS.FR.

gauche et le champ de déformation longitudinale ϵ_{xx} à droite. Afin d'améliorer la lisibilité des résultats, la déformation a été représentée suivant une échelle logarithmique, pour des valeurs supérieures à $1e^{-12}$ uniquement. L'idée est de mettre en évidence les zones de la structure où ϵ_{xx} devient négatif et ne contribue donc plus à l'évolution de l'endommagement, un potentiel asymétrique étant utilisé. Cela suppose que ϵ_{xx} est la principale contribution à l'ouverture des fissures, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, les fissures n'étant pas totalement verticales, mais permet d'illustrer le problème considéré. Les

champs représentés sur la figure 4.17 correspondent aux points A,B,C,D,E et F sur la courbe force-déplacement de la figure 4.16. On remarque donc que des îlots de matières ont tendance à disparaître (zones encadrées en rouge sur les champs d'endommagement B., D. et F.). Cela entraîne une décharge de la structure (zones encadrées en bleu sur les figures 4.17 D. et F.). La fissure repérée par le cadre vert se propage brutalement tandis que la propagation des fissures alentours ralentit, ce qui entraîne la ruine de la structure de façon anticipée.

Ce phénomène de disparition d'îlots de matière est expliqué dans la section suivante.

4.3.3. Problèmes de réinitialisation

La principale difficulté de ce cas test réside dans la complexité des faciès de fissuration obtenus. Un exemple est donné sur la figure 4.18. En particulier, la forme de la zone endommagée possède une géométrie complexe due notamment :

- Au nombre élevé de fissures
- Au fait que les fissures sont parfois très proches
- À la présence des armatures, qui ont tendance à attirer l'endommagement

Cette géométrie complexe influence fortement l'étape de réinitialisation de la level set, expliquée dans la section 2.3.2, figure 2.12. On présente dans ce qui suit deux situations où cette étape pose problème.

Disparition de matière

La présence des armatures, en particulier l'armature longitudinale inférieure, a tendance à entraîner la formation d'îlots de matière, comme on peut le voir sur la figure 4.19. On notera que, par soucis de clarté, ces îlots ont été représentés comme complètement détachés du reste de la structure, ce qui entraînerait en théorie l'apparition de mouvement de corps rigides et donc l'arrêt des calculs. En pratique ces îlots sont rarement complètement isolés comme on peut le voir sur la figure 4.18.

À un instant n , le calcul de ϕ permet de diviser le domaine de calcul en une zone locale Ω_L et une zone non-locale Ω_{NL} , selon les notations introduites dans la section 2.3 (cf. figure 4.19 a.). S'ensuit une étape de réinitialisation, permettant d'assurer que $\|\nabla\phi\| = 1$ dans Ω_{NL} . La frontière de la zone endommagée Γ_c est ensuite calculée à partir de la frontière Γ entre Ω_L et Ω_{NL} (cf. figure 4.19 b.). Les îlots de matière que l'on peut observer sous l'armature longitudinale inférieure sont dus à de petites zones locales, constitués de seulement quelques éléments, parfois même un seul, comme pour l'élément en rouge en bas à gauche sur la figure 4.19 c.

Ces îlots d'éléments peuvent disparaître à cause du processus de réinitialisation de ϕ . En effet, il peut arriver au cours du calcul, par exemple, au pas de temps $n+1$, que le gradient de ϕ évolue jusqu'à dépasser 1 dans un ou plusieurs de ces éléments (cf. figure 4.19 d.). Ces éléments passent alors dans la zone non-locale. La portion de Γ qui délimitait la frontière entre ces éléments et la zone non-locale disparaît. L'élément en rouge passe dans la zone morte Ω_c à l'issue de l'étape de réinitialisation, ce qui explique la disparition de cet îlot de matière. (cf. figure 4.19 e. et f.). On a vu dans la section 4.3.2 que ce phénomène s'avère critique pour l'aboutissement du calcul, en particulier lorsque plusieurs de ces îlots disparaissent, ce qui peut entraîner la ruine de la structure de façon anticipée.

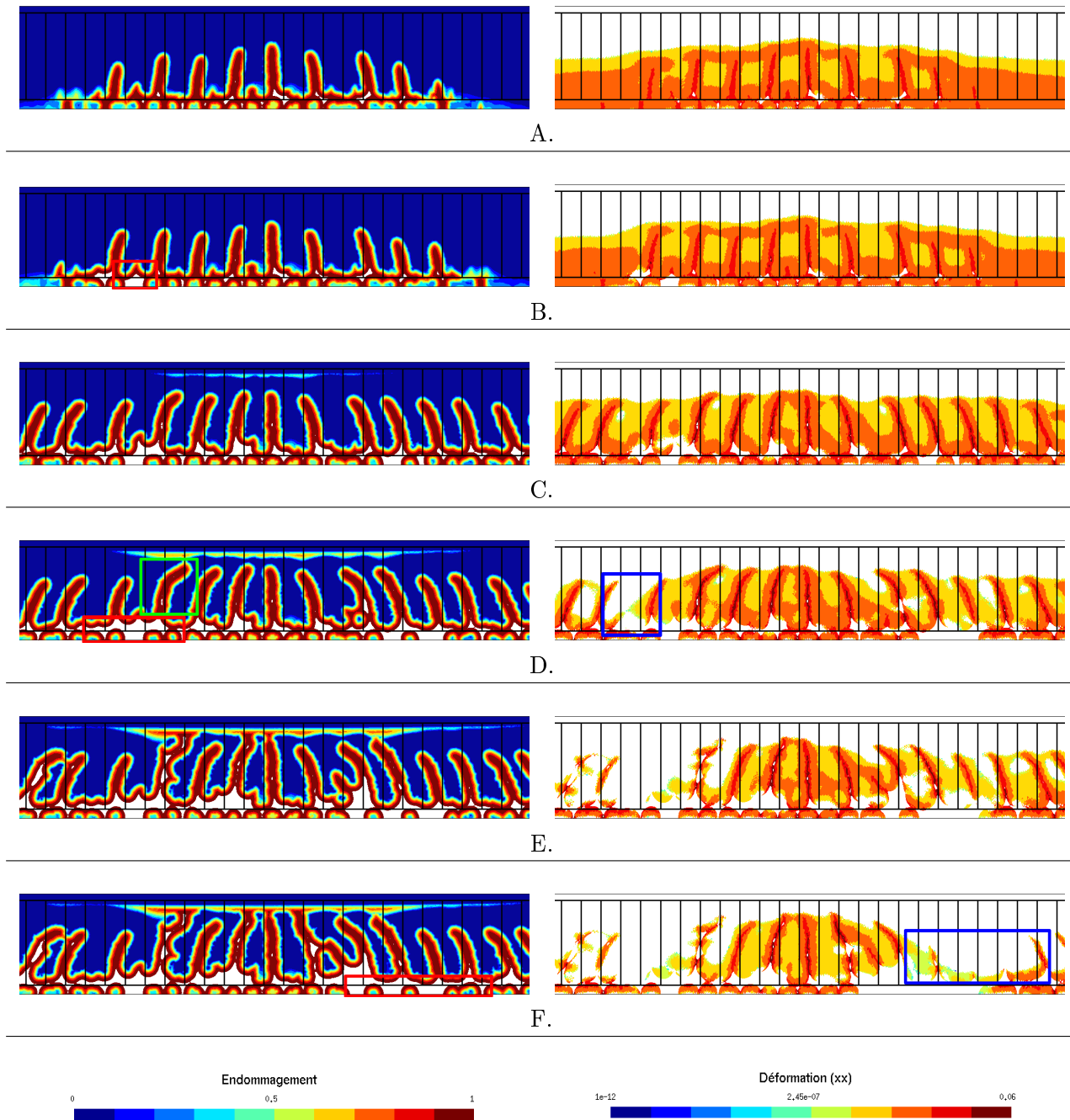


FIGURE 4.17. – Disparition de matière sous l'armature longitudinale inférieure au cours de l'essai CEOS.FR : champ d'endommagement (à gauche) et déformation longitudinale ϵ_{xx} (à droite). Pour la déformation ϵ_{xx} , une échelle logarithmique avec un minimum de ϵ_{xx} à $1e^{-12}$ a été utilisé pour améliorer la lisibilité des résultats.

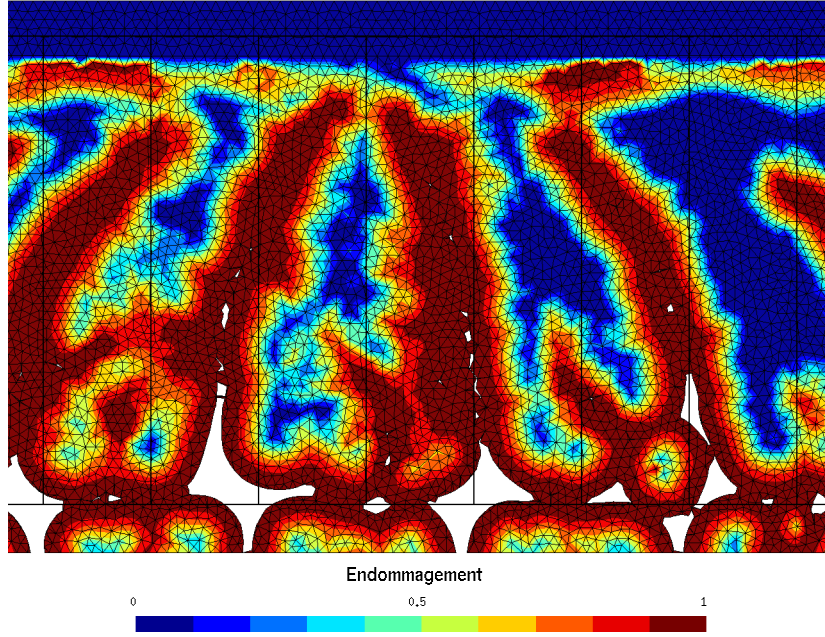


FIGURE 4.18. – Exemple de champ d'endommagement obtenu pour l'essai CEOS.FR (zoom sur le centre de la poutre)

La solution proposée, illustrée sur la figure 4.20, consiste simplement à rétablir dans le calcul toute partie connexe de Γ qui aurait éventuellement disparu (cf. exemple en vert sur la figure 4.20). On notera qu'il ne s'agit que d'une solution temporaire, qui n'est pas rigoureusement juste du point de vue de la théorie puisque qu'on obtient une portion de Γ qui n'est pas la frontière entre une portion de Ω_L et une autre de Ω_{NL} , mais qui se trouve entièrement dans la zone non-locale. Néanmoins cela permet d'assurer qu'il reste suffisamment de matière afin que l'armature longitudinale inférieure continue à entraver l'ouverture des fissures, évitant ainsi le problème de propagation brutale d'une seule fissure évoqué précédemment.

Du point de vue de l'implémentation, l'étape de réinitialisation est réalisée à partir de l'ensemble de nœuds N_B^n qui, on le rappelle, sont les nœuds des éléments du maillage éléments finis à la frontière entre éléments locaux et éléments non-locaux, à l'instant n . On va donc chercher à éviter la disparition de parties connexes de N_B^n . On note $N_{B,k}^n$ l'ensemble des parties connexes de N_B^n , de sorte que :

$$N_B^n = \bigcup_k N_{B,k}^n, \quad N_{B,k_1}^n \cap N_{B,k_2}^n = \emptyset, \forall k_1 \neq k_2 \quad (4.2)$$

À chaque pas de temps n , pour chaque partie connexe $N_{B,k}^{n-1}$ à l'instant $n-1$:

1. Afin d'éviter des temps de calculs trop lourds, on ne boucle que sur les parties connexes telles que $\text{card}(N_{B,k}^{n-1})$ est inférieur à une certaine limite (on a choisi $\text{card}(N_{B,k}^{n-1}) < 30$ pour cette thèse). On suppose en effet que les $N_{B,k}^{n-1}$ susceptibles de disparaître sont relativement petits.
2. Une fois que les ensembles N_L^n , N_{NL}^n , N_B^n ont été mis à jour, on regarde si $N_{B,k}^{n-1}$ a disparu. Pour cela, on boucle sur les nœuds de $N_{B,k}^{n-1}$; on considère que $N_{B,k}^{n-1}$ a disparu si aucun nœud de

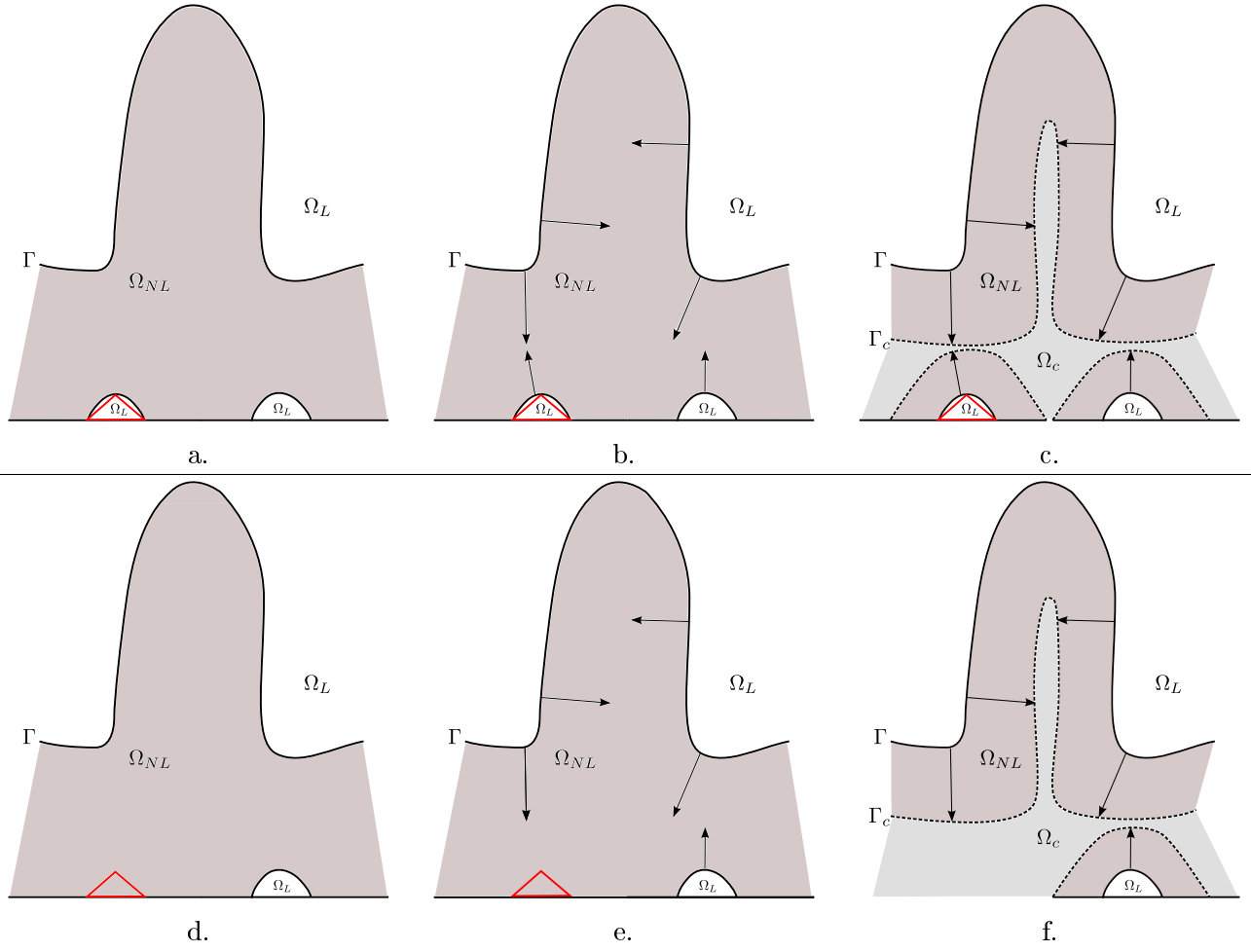


FIGURE 4.19. – Illustration du problème de réinitialisation de la level set. a. Début du pas de temps n . b. et c. Reconstruction de Γ_c à partir de Γ . d. L'élément en rouge passe dans Ω_{NL} . e. La partie connexe de Γ correspondant à cet élément disparaît. f. Le calcul de Γ_c à partir de Γ fait “disparaître” l'îlot de matière correspondant à l'élément rouge.

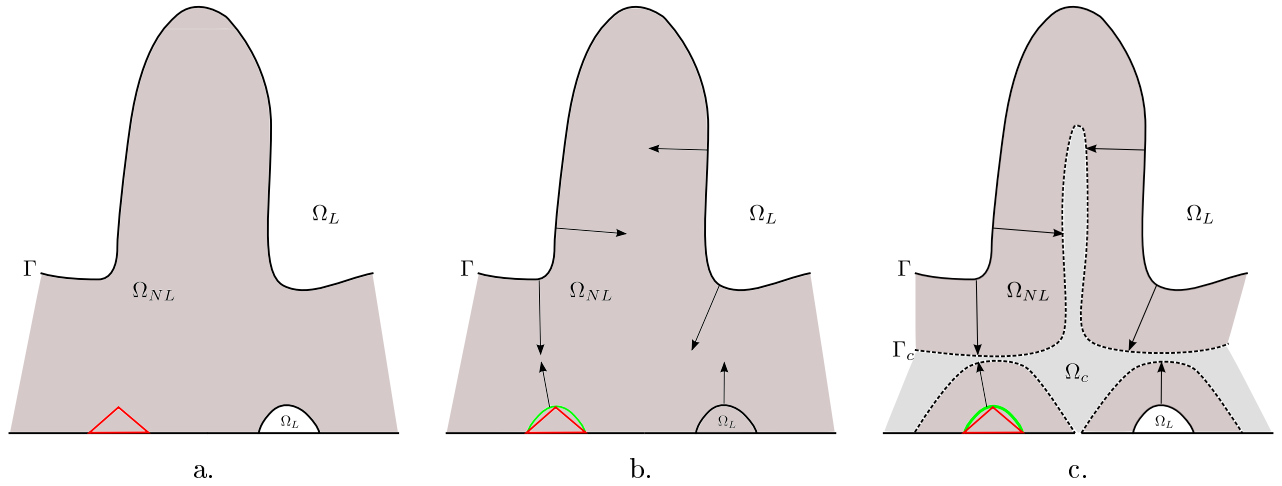


FIGURE 4.20. – Solution proposée au problème de “disparition de matière”. a. Début du pas de temps $n + 1$, la partie connexe de Γ correspondant à l’élément rouge a disparu. b. Cette dernière est rajoutée dans Γ . c. L’îlot de matière correspondant à cette partie connexe de Γ ne disparaît plus.

$N_{B,k}^{n-1}$ n’est dans N_B^n . Cela suppose que chaque partie connexe de N_B^n n’évolue pas de façon trop brutale, c’est-à-dire qu’à chaque pas de temps, seuls quelques nœuds de $N_{B,k}^{n-1}$ se sont déplacés, ce qui se vérifie en pratique, l’avancée maximale de ϕ étant choisie inférieure à la taille d’un élément du maillage (cf. section 2.3.2). Si $N_{B,k}^{n-1}$ a disparu, on met à jour N_{NL}^n et N_B^n en ajoutant $N_{B,k}^{n-1}$ à N_B^n et en enlevant $N_{B,k}^{n-1}$ de N_{NL}^n .

3. Après la phase de réinitialisation de ϕ^n , il est éventuellement possible que des nœuds de $N_{B,k}^{n-1}$ se retrouvent dans la zone $\phi^n > \ell_c$. Ces nœuds sont retirés de N_B^n . En effet, en appliquant la correction présentée dans le point précédent, une fois qu’une partie connexe est détectée comme ayant disparu, celle-ci est conservée jusqu’à la fin du calcul. En toute logique il faut donc retirer les nœuds qui pourraient éventuellement se retrouver dans la zone complètement endommagée.

La version modifiée de l’algorithme 3 d’un calcul TLS avec la version complète, prenant en compte la disparition des parties connexes de N_B , est rappelée ci-dessous (algorithme 4).

Fissures tangentes

Un deuxième problème dû à la phase de réinitialisation peut arriver lorsque deux fissures sont tangentes (cf. figure 4.21 a.). Tant qu’une zone locale sépare les deux fissures, celles-ci sont bien définies. En revanche, il est possible que certains éléments séparant ces deux fissures passent dans la zone non-locale (élément en rouge sur la figure 4.21) ; dans ces conditions la frontière Γ est modifiée, provoquant ainsi une coalescence des deux fissures. Cela ne pose pas de problème tant que la longueur de la zone de coalescence n’est pas trop élevée ; au delà d’une certaine longueur, de l’ordre de $2\ell_c$, il est possible qu’une troisième fissure, perpendiculaire aux deux autres, apparaisse, entraînant ainsi la création d’un îlot de matière (cf. figure 4.21 c.). En pratique, soit la zone de coalescence reste de taille modérée, soit il est possible que cette zone devienne trop grande, ce qui est généralement dû à un choix

État initial : $\phi^0 = 0$, $N_L^0 = N$, $N_{NL}^0 = \emptyset$, $N_B^0 = \emptyset$, $\mathbf{M}^0 = (\delta_{ij})_{\substack{i \in N \\ j \in N}}$

```

pour  $n = 1 \dots N_{step}$  faire
    Calcul de  $\mathbf{u}_{ref}$  pour un chargement  $F_{ref}$ 
    Calcul de  $\bar{Y}^n$  et  $\bar{Y}_c^n$ 
    Calcul du facteur de charge  $\mu^n$ 
    Calcul de  $\bar{\alpha}^n$  et  $\bar{\beta}^n$ 
    Calcul de la variation du facteur de charge  $\delta\phi$ 
    Mise à jour de  $\phi^n$ 
    Classification des nœuds pour constituer les ensembles  $N_L^n$ ,  $N_{NL}^n$ ,  $N_B^n$ ,  $M^n$ 
    pour  $N_{B,k}^{n-1}$  dans  $N_B^{n-1}$  faire
        si  $N_{B,k}^{n-1}$  a disparu et  $\text{card}(N_{B,k}^{n-1}) < 30$  alors
            Rajouter  $N_{B,k}^{n-1}$  dans  $N_B^n$ 
            Enlever  $N_{B,k}^{n-1}$  de  $N_{NL}^n$ 
        fin
    fin
    si  $N_{NL}^n \neq \emptyset$  alors
        Réinitialisation de  $\phi^n$  pour respecter la condition  $\|\nabla\phi^n\| = 1$  dans  $\Omega_{NL}$ 
        pour  $N_{B,k}^{n-1}$  dans  $N_B^{n-1}$  faire
            pour  $i$  dans  $N_{B,k}^{n-1}$  faire
                si  $\phi^n(x_i) > \ell_c$  alors
                    Enlever  $i$  de  $N_B^n$ 
                    Rajouter  $i$  dans  $N_{NL}^n$ 
                fin
            fin
        fin
        Constituer les parties connexes  $N_{B,k}^n$ 
        Calcul de la matrice de délocalisation  $\mathbf{M}^n$ 
    fin
fin

```

Algorithme 4 : Calcul modifié avec la version complète de la méthode TLS (les différences avec l'algorithme 3 sont en rouge)

de $\Delta\phi_{max}$ trop élevé. Dans tous les cas, ce problème n'étant pas handicapant pour l'aboutissement du calcul (comme la disparition d'îlots de matière évoquée dans la section précédente), aucune solution particulière n'a été développée, on le mentionne toutefois pour expliquer certains résultats de la section 4.3.4.

4.3.4. Résultats numériques

Comportement global On donne sur la figure 4.22 la courbe force-déplacement vertical mesurés au centre de la poutre. Le comportement global de la poutre est correctement reproduit par la méthode TLS (enveloppe supérieure), avec trois phases : une première phase élastique, puis une phase de fissuration progressive, et enfin un plateau qui correspond à la plastification de l'armature inférieure. Là encore les oscillations mentionnées dans les précédents cas tests sont particulièrement importantes, la zone endommagée étant particulièrement grande par rapport aux dimensions de la structure.

Sur la figure 4.23 on donne les courbes force-déformations moyennes de jauges de déformations placées le long de l'armature inférieure. Pour la jauge la plus éloignée du centre de la poutre (jauge 1), la courbe obtenue est relativement éloignée de la courbe expérimentale, en revanche, plus on se rapproche du centre de la poutre et meilleures sont les courbes obtenues. Cette tendance est également observée par les autres participants du benchmark (Jason, 2009). En particulier, pour la jauge 4 située au centre de la poutre, la seule pour laquelle la limite élastique est censée être dépassée, la phase de plastification de l'armature est particulièrement bien reproduite.

Caractérisation de la fissuration Le champ d'endommagement à différents instants du calcul est donné sur la figure 4.24. La partie inférieure de la poutre commence par s'endommager de façon diffuse, puis l'endommagement se localise progressivement jusqu'à former des fissures. Ce processus se répète pour chaque fissure : apparition d'une zone d'endommagement diffus, puis localisation progressive. On constate également qu'une fois que l'endommagement s'est propagé au delà de l'armature inférieure, la zone endommagée est quasiment confondue avec la zone non-locale. Les fissures peuvent clairement être distinguées, bien que certaines semblent parfois coalescer. La raison en a été expliquée dans la section 4.3.3. Les îlots de matières évoqués dans la section 4.3.3 peuvent également être observés sous l'armature longitudinale inférieure, mais la solution proposée au problème de disparition de matière permet d'éviter que la zone morte croisse de façon trop importante. En théorie, au-delà d'une certaine valeur du chargement, la poutre s'endommage sous l'appui, les efforts de compression devenant suffisamment important pour dépasser la résistance à la compression du béton. Ici cet endommagement n'est pas reproduit, à cause du potentiel asymétrique (2.4) n'autorisant pas d'endommagement en compression. On peut supposer qu'avec un modèle permettant de gérer l'endommagement en compression, les résultats en terme de courbe force-déplacement (figure 4.22) pourraient encore être améliorés.

Concernant l'espacement des fissures, la plupart des participants au benchmark ont obtenu un espacement de l'ordre de l'ordre de 20 cm (Jason, 2009), c'est-à-dire environ un cadre sur deux, alors que l'espacement observé expérimentalement était plutôt de l'ordre de 10 cm. On retrouve ici la même tendance avec formation d'une fissure tous les deux cadres environ.

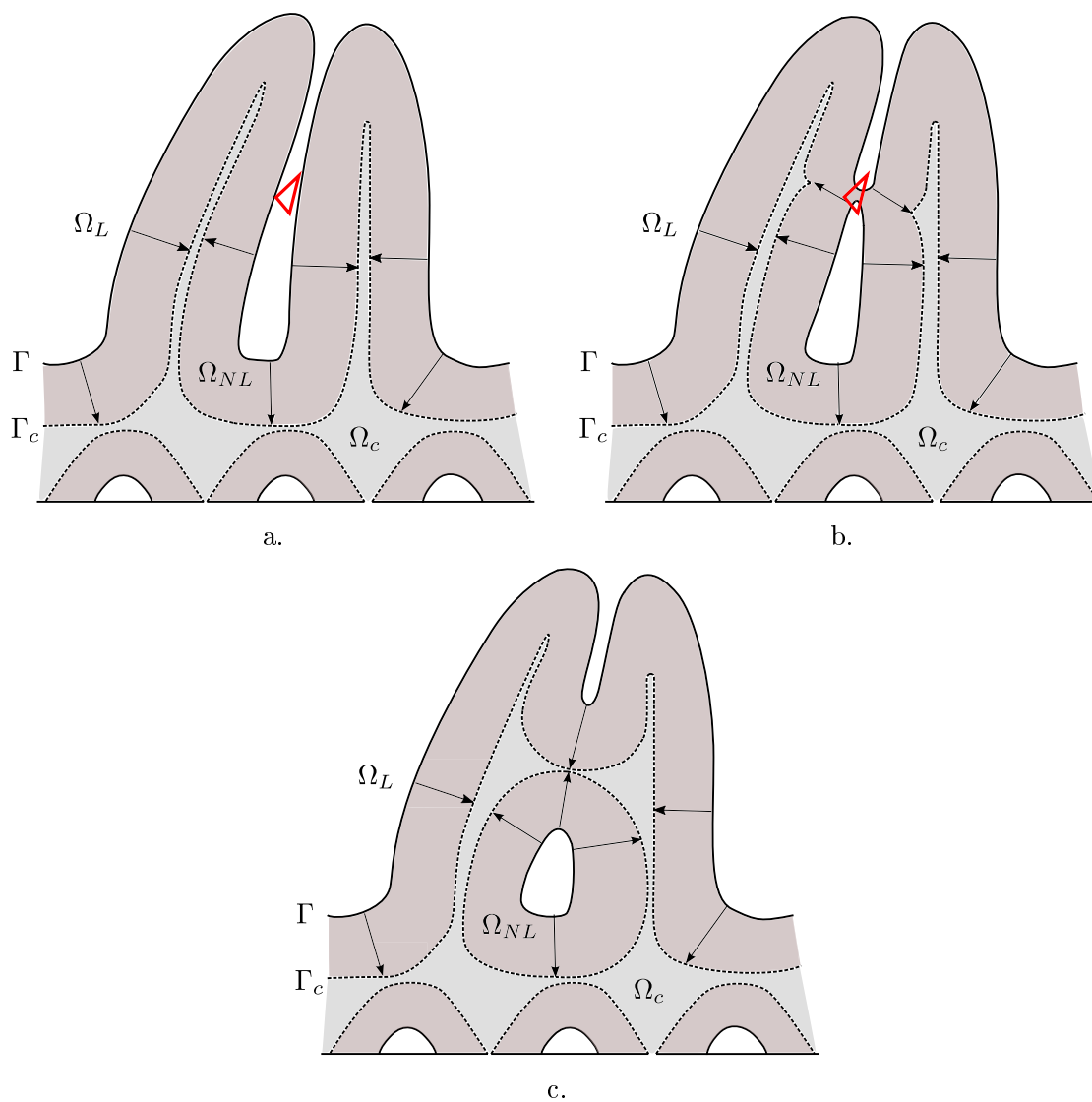


FIGURE 4.21. – Fissures tangentes. a. Deux bandes endommagées bien définies. b. Les deux bandes endommagées coalescent sur une petite longueur. c. La longueur de la zone de coalescence s'élargit jusqu'à former une fissure orthogonale aux deux premières.

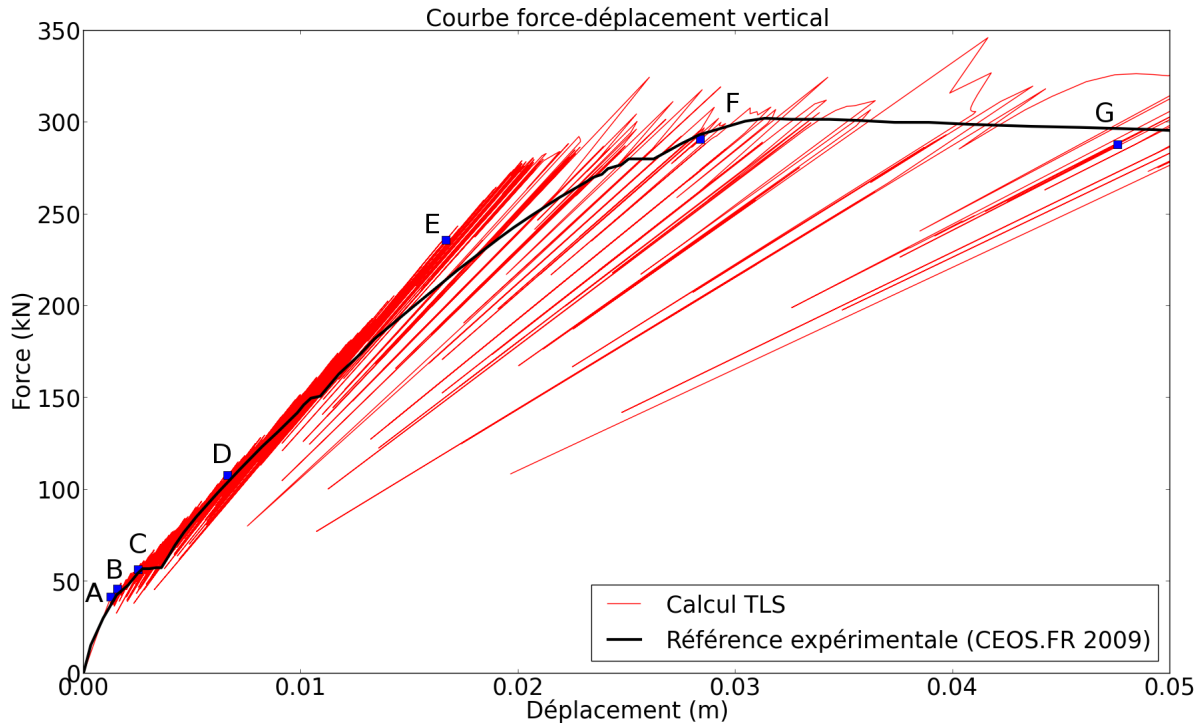


FIGURE 4.22. – Courbe force - déplacement vertical pour l'essai CEOS.FR

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode TLS a été appliquée à l'étude de deux cas tests de structures en béton armé, que sont l'essai de tirant et l'essai de poutre en flexion trois points. La modélisation de l'endommagement diffus caractéristique de ce type de cas tests nécessite l'utilisation de la version complète de la méthode TLS, présentée dans la section 2.3. À l'heure actuelle, la double découpe n'étant pas implémentée dans cette version, l'extraction d'ouvertures de fissures n'est pas possible. Cet aspect a fait l'objet d'une validation sur des cas plus simples dans le chapitre 3. Ici, dans le chapitre 4, l'aptitude de la méthode TLS à représenter la multi-fissuration et en particulier les espacements entre fissures a été testée. Le comportement global des structures est bien reproduit, malgré les oscillations déjà observées dans le chapitre 3. L'amplitude de ces oscillations est accentuée par la taille de la zone endommagée, d'autant plus importante dans le cas des structures en béton armé pour lesquelles plusieurs fissures sont attendues. Néanmoins l'enveloppe supérieure des courbes forces-déplacement est en général proche des résultats expérimentaux. La multi-fissuration est correctement reproduite tant que les fissures ne sont pas trop proches, par exemple dans le cas du tirant. Les espacements obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux, bien que la prise en compte de la liaison acier-béton permettrait sûrement d'améliorer ces résultats. Pour le cas test du tirant considéré dans la section 4.2, son influence pouvait être considérée comme négligeable, mais il faut garder à l'esprit que dans le cas général, la non prise en compte de l'interface acier-béton peut entraîner des espacements de fissures très différents de la réalité. Le cas test plus complexe de la poutre en béton armé de la section 4.3, pour lequel un grand nombre de fissures proches les unes des autres est attendu, met en

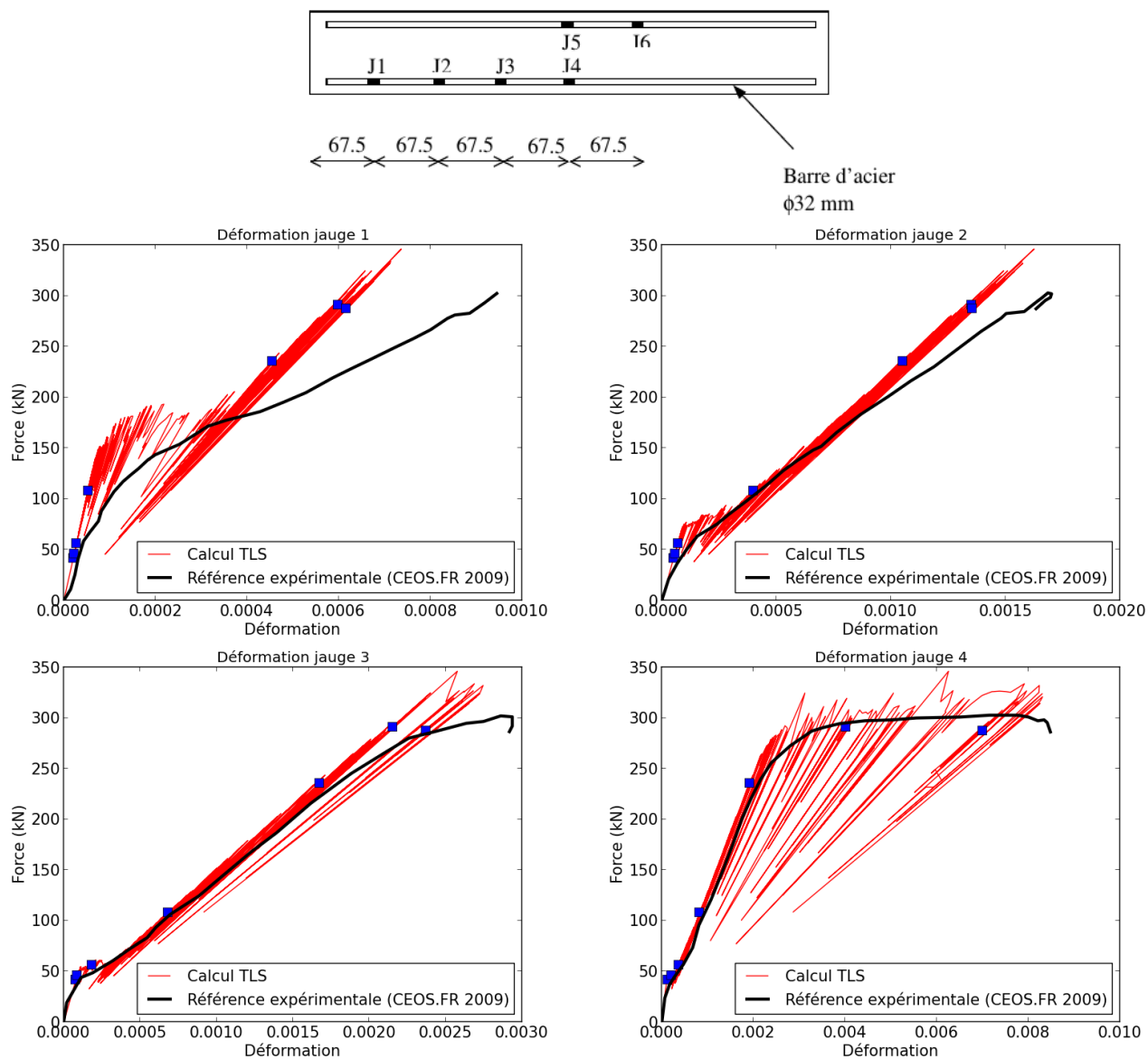


FIGURE 4.23. – Courbes force - déformations moyennes des jauges J1 à J4 pour l'essai CEOS.FR.

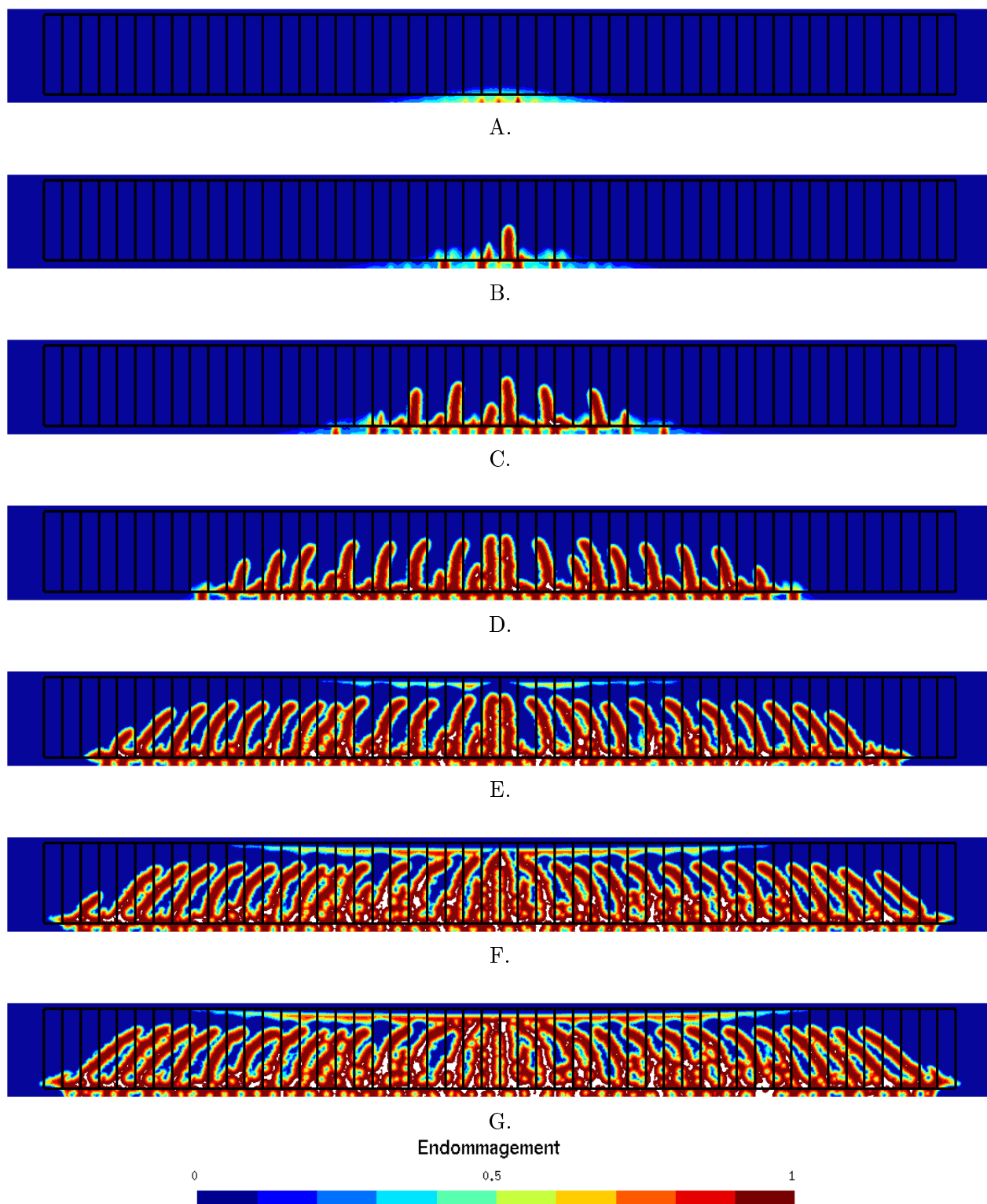


FIGURE 4.24. – Champ d'endommagement à différents instants du calcul pour l'essai CEOS.FR.

évidence une limite de la méthode TLS due à l'étape de réinitialisation de la level set, entraînant des problèmes de représentation de la zone endommagée. Ces problèmes peuvent s'avérer critiques pour l'aboutissement des calculs (cf. section 4.3.3). Une solution temporaire, spécifique à ce cas test, a été proposée, mais ne repose sur aucun fondement théorique rigoureux. On notera que dans le cas particulier de l'essai CEOS.FR modélisé en 2D, la formation d'îlots de matière est dû à la présence de l'armature longitudinale, qui a tendance à attirer l'endommagement. La solution la plus évidente, mais impossible à mettre en œuvre étant donnée l'implémentation actuelle de la version complète de la méthode TLS (cf. section 2.4), serait de réaliser le calcul en 3D. Néanmoins, les résultats obtenus, notamment par rapport aux autres participants du benchmark, sont satisfaisants.

5. Modélisation multi-dimensionnelle des armatures

Sommaire

5.1. Introduction	110
5.2. Modélisation volumique des armatures	111
5.2.1. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)	111
5.2.2. Aspects numériques	113
5.2.3. Limitations de l'approche 3D	114
5.3. Liaison entre éléments barres et éléments 3D	116
5.4. Modélisation multi-dimensionnelle	117
5.4.1. Correction	117
5.4.2. Algorithme de résolution	119
5.5. Simulations numériques	120
5.5.1. Cas tests linéaires	121
5.5.2. Cas tests élastoplastiques	126
5.6. Conclusion	134

5.1. Introduction

Les précédents chapitres de ce manuscrit se sont principalement intéressés à la modélisation de la fissuration du béton, qui est l’une des principales difficultés lorsque l’on cherche à analyser les structures en béton armé. Un deuxième aspect tout aussi technique que l’on se propose d’étudier dans ce chapitre est la modélisation des armatures métalliques. Comme expliqué dans la section 4.1.1, leur rôle est de compenser la faible résistance en traction du béton. Ces armatures peuvent être lisses ou nervurées (armatures haute adhérence, cf. section 4.1.2). Du point de vue de la modélisation, plusieurs échelles peuvent être considérées :

- L’échelle la plus fine, qu’on pourrait qualifier de “microscopique”, consiste à modéliser toute la géométrie des armatures, jusqu’aux nervures des barres haute adhérence. Cette échelle, qui est la plus proche de la réalité, permet d’étudier de façon détaillée la liaison acier-béton sur des petites structures, (Daoud *et al.*, 2013; Phan *et al.*, 2015). Elle est néanmoins inenvisageable pour l’étude d’un cas industriel étant donné le niveau de finesse des maillages éléments finis qui seraient nécessaires à la modélisation des nervures.
- L’échelle “mésoscopique”, où l’on considère la géométrie globale de l’armature (généralement cylindrique), sans modéliser les nervures. Leur influence est généralement prise en compte par des lois d’interface (cf. section 4.1.2). Le coût en calcul d’une simulation à cette échelle demeure cependant élevé en raison du diamètre généralement faible des armatures par rapport aux structures étudiées (au moins un ordre de grandeur d’écart), nécessitant des maillages fins pour pouvoir représenter leur courbure (bien que le niveau de finesse requis soit moins fin qu’à l’échelle microscopique).
- L’échelle “macroscopique” où la géométrie des armatures est remplacée par un modèle équivalent. On peut par exemple homogénéiser l’influence des armatures en ajoutant leur raideur à celle des éléments béton les contenant, induisant ainsi un comportement orthotrope dépendant de l’orientation des armatures (Suidan et Schnobrich, 1973). Plus récemment, David (2012) a développé un modèle de membrane dédié à l’étude de nappes d’armatures, basé sur des développements asymptotiques. Ce modèle est plus précis que les éléments homogénéisés et permet de prendre en compte l’influence de l’interface acier-béton. Le modèle discret consiste à ajouter des éléments barres 1D le long des arrêtes des éléments volumiques. L’avantage est que la trajectoire des armatures peut-être quelconque, à condition que le maillage volumique s’y conforme. Cette contrainte a été levée avec l’apparition de modèles “*embedded*” (Hartl *et al.*, 2000; Gomes et Awruch, 2001). Ces approches permettent d’obtenir de bons résultats à l’échelle globale pour des coûts en ressources de calcul raisonnables, mais ne permettent pas d’avoir une représentation correcte des champs mécaniques localement autour des armatures.

Pour résumer, en mettant de côté l’échelle microscopique, inexploitable dans la plupart des cas, deux méthodes permettent de modéliser les armatures : utiliser un maillage volumique, permettant d’avoir des résultats précis à l’échelle locale comme par exemple l’état d’endommagement autour des armatures, mais nécessitant des moyens de calculs importants, ou utiliser une représentation plus globale pour obtenir des coûts de calcul raisonnables, au détriment de la précision autour des armatures.

L'approche proposée dans ce chapitre repose sur l'idée que dans la plupart des calculs par éléments finis, il est possible d'identifier des zones d'intérêt dans lesquelles on souhaite obtenir des résultats précis (par exemple, à cause de gradients élevés, où parce qu'il s'agit de zones critiques pour l'intégrité de la structure). Habituellement, ces zones sont maillées finement, tandis que le reste de la structure est maillé plus grossièrement afin de diminuer les coûts de calcul. En appliquant cette idée aux structures en béton armé, on propose ici une approche permettant de combiner modélisation volumique des armatures dans les zones d'intérêt et modélisation linéique dans le reste de la structure. La représentation volumique associée à un maillage fin dans les zones d'intérêt permettra d'obtenir des résultats précis autour des armatures, tandis que la représentation linéique dans le reste de la structure permettra d'utiliser des maillages plus grossiers afin de réduire les temps de calcul. La transition entre les deux basée sur un raisonnement géométrique pragmatique sera réalisée de façon ce que dans la zone d'intérêt les résultats soient proches des résultats obtenus avec une modélisation volumique des armatures dans toute la structure.

On notera que des méthodes existent pour combiner modélisation 1D (ou 2D) et 3D dans un même calcul, par exemple pour coupler des modèles de poutre ou de plaque à des modèles 3D (Monaghan *et al.*, 1998; Mccune *et al.*, 2000), en écrivant l'égalité du travail des efforts internes à l'interface entre les deux modèles, ce qui permet d'obtenir des relations entre degrés de liberté 1D/2D et 3D. Nguyen *et al.* (2013) applique la méthode de Nitsche (Hansbo, 2005) au couplage poutre/solide et plaque/solide. La principale difficulté de ces méthodes vient de la nécessité d'assurer la compatibilité entre les cinématiques de poutre/plaque et volumique. En général dans le cas du béton le diamètre des armatures est supposé être assez faible pour pouvoir supposer qu'elles ne travaillent qu'en traction/compression. Cependant, l'extension au cas où la flexion est prise en compte (Sadek et Shahrour, 2004) ne devrait poser aucun problème particulier.

5.2. Modélisation volumique des armatures

L'approche la plus directe pour modéliser les armatures consiste à les mailler avec des éléments volumiques, ce qui peut s'avérer compliqué, étant donné leur faible diamètre, leur nombre, et leur trajectoire éventuellement complexe (intersections d'armatures, trajectoires courbes, etc.). Une solution permettant de simplifier cette procédure de maillage consiste à utiliser la méthode X-FEM. Initialement développée dans le cadre de la mécanique de la rupture (cf. section 1.3.3), cette méthode a été étendue à l'étude des trous et des inclusions par Sukumar *et al.* (2001). La stratégie d'enrichissement proposée par Moës *et al.* (2003) pour l'analyse des inclusions est appliquée à la modélisation de la partie volumique des armatures.

5.2.1. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

On considère le problème bidimensionnel d'une inclusion circulaire constituée d'un matériau A, dans une plaque carrée constituée d'un matériau B, représenté sur la figure 5.1. On appelle Γ l'interface

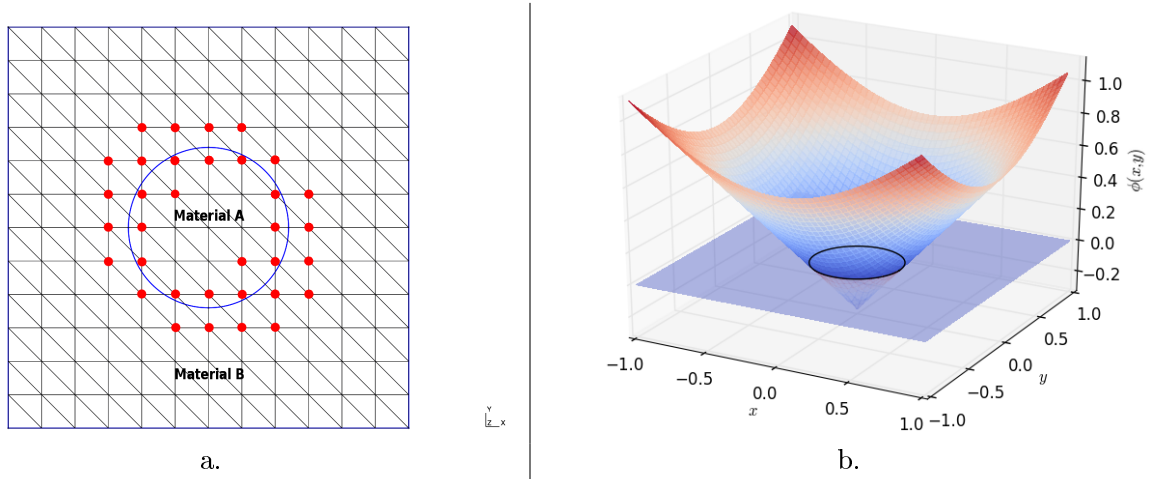


FIGURE 5.1. – Modélisation d'une inclusion circulaire dans une plaque carrée par la méthode X-FEM.
a. Définition des nœuds enrichis. b. Localisation de l'interface par une fonction level set.

entre les deux matériaux.

La plaque est maillée par des éléments dont les nœuds ne coïncident pas avec l'interface entre les deux matériaux. On appelle I l'ensemble des nœuds du maillage, et J l'ensemble des nœuds appartenant aux éléments coupés par Γ . L'approximation par la méthode X-FEM consiste à écrire l'approximation du champ de déplacement sous la forme :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j \quad \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2 \quad (5.1)$$

où $(N_k)_{k=i,j}$ sont les fonctions d'approximation éléments finis classiques du nœud k , $\mathbf{u}_i$ les degrés de liberté associés, $\mathbf{a}_i$ sont les degrés de liberté enrichis et F la fonction d'enrichissement. Dans ce chapitre on considère l'interface entre les deux matériaux parfaits : le déplacement doit donc être continu sur l'ensemble du domaine. En revanche, à cause du changement de matériaux, la déformation doit être discontinue à l'interface. Cette propriété est conférée à $\mathbf{u}^h$ en choisissant F continue, mais avec une dérivée discontinue sur Γ .

Pour définir F , la position de l'interface Γ doit être déterminée. Une fonction level set ϕ est introduite afin de localiser l'interface entre A et B, de telle que :

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \phi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (5.2)$$

$\phi(\mathbf{x})$ est choisie positive si $\mathbf{x}$ est à l'extérieur de Γ (matériau B), négative si $\mathbf{x}$ est à l'intérieur de Γ , et égale à zéro si $\mathbf{x}$ est sur Γ . Un exemple de fonction level set définissant l'inclusion de la figure 5.1 a. est donné sur la figure 5.1 b.

L'exemple de fonction level set le plus connu est la fonction distance signée à l'interface, déjà évoquée dans la section 2.2 dans le cadre de la méthode TLS (équation (2.24)). On en rappelle ici la définition :

$$\phi(\mathbf{x}) = \pm \min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| \quad (5.3)$$

Dans le cas particulier d'un renfort cylindrique, on utilise la fonction suivante :

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}_\Lambda \in \Lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Lambda\| - r \quad (5.4)$$

où r est le rayon de l'armature et Λ sa ligne médiane (la courbe 1D passant par le centre de l'armature et définissant sa trajectoire).

Du point de vue numérique, ϕ est discrétisée en utilisant les fonctions de formes linéaires N_i :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \phi_i \quad (5.5)$$

où ϕ_i sont les valeurs nodales de la level set.

La position de l'interface Γ étant connue, la fonction d'enrichissement peut être définie. On considère la fonction de Ridge introduite par Moës *et al.* (2003) :

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) |\phi_i| - \left| \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \phi_i \right| \quad (5.6)$$

F est donnée dans le cas 1D sur la figure 5.2.

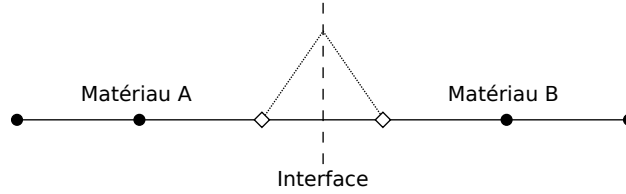


FIGURE 5.2. – Fonction d'enrichissement de Ridge en 1D. Les nœuds losanges sont les nœuds enrichis.

5.2.2. Aspects numériques

Une première remarque sur l'utilisation de level sets pour représenter implicitement des interfaces est le fait que celles-ci sont interpolées linéairement (cf. figure 5.3) ; la valeur de ϕ_i est connue à chaque nœud du maillage i . Si i est à l'intérieur de Γ , $\phi_i < 0$, et si i est à l'extérieur de Γ , $\phi_i > 0$. L'intersection de Γ avec les arêtes du maillage peut ensuite être calculée en utilisant l'interpolation linéaire de ϕ sur chaque élément (cf. équation (5.5)). Ceci implique que la qualité de la géométrie discrétisée avec une fonction level set dépend de la courbure, tout autant que si on l'avait maillée avec des éléments linéaires.

Une seconde remarque concerne l'intégration numérique. Étant donné que la dérivée de $\mathbf{u}^h$ est discontinue à l'intérieur des éléments coupés par Γ , les quadratures de Gauss classiques ne suffisent plus à obtenir une précision correcte. Afin de retrouver des résultats optimaux, les éléments coupés

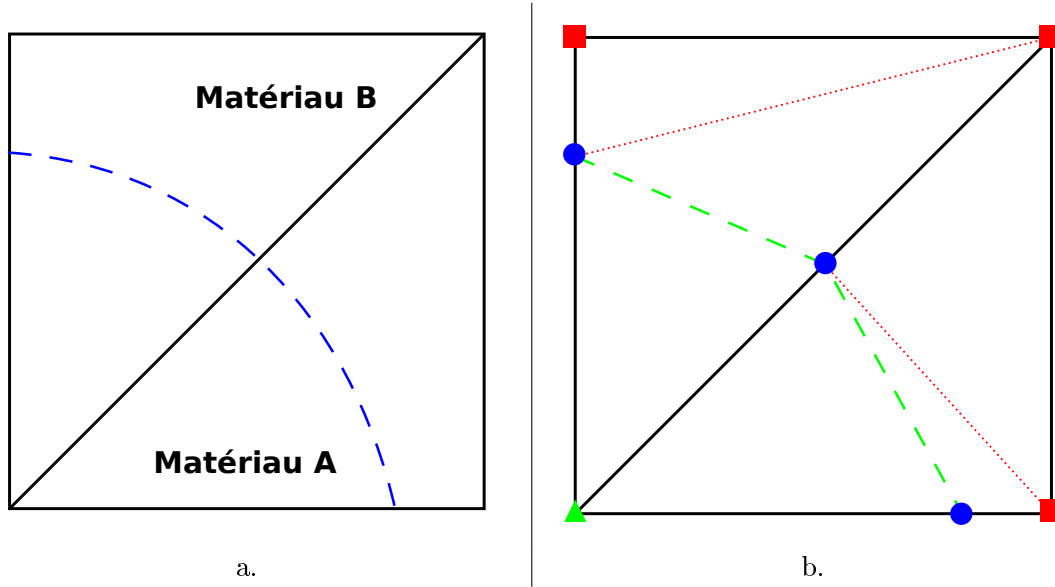


FIGURE 5.3. – Représentation d’une interface sur un maillage en utilisant une fonction level set. Traits pleins noirs : arrêtes du maillage. a. Traits pointillés bleu : interface réelle. b. Nœuds triangles verts : $\phi(\mathbf{x}) < 0$. Nœuds carrés rouges : $\phi(\mathbf{x}) > 0$. Nœuds circulaires bleus : $\phi(\mathbf{x}) = 0$. Traits pointillés verts : géométrie approchée par la level set. L’intégration numérique est réalisée sur chaque sous-cellule triangulaire de la figure b.

par Γ sont divisés en sous-cellules coïncidant avec Γ (cf. figure 5.3). L’intégration numérique est ensuite réalisée en appliquant une quadrature de Gauss en utilisant les points d’intégration de chaque sous-cellule. On remarquera que les nœuds de ces sous-cellules n’apportent pas de degrés de liberté supplémentaires au calcul. Il aurait été possible de se passer de ce sous-découpage en augmentant le nombre de points d’intégration des éléments de calcul, mais l’utilisation de sous-cellules présente l’avantage de permettre d’obtenir un degré de précision optimal avec un nombre peu élevé de points de Gauss.

5.2.3. Limitations de l’approche 3D

On considère maintenant le cas 2D d’une plaque rectangulaire, renforcée avec une unique armature (cf. figure 5.4). En considérant l’interface parfaite entre les deux matériaux, l’armature peut être assimilée à une inclusion et modélisée avec la méthode X-FEM telle que présentée ci-dessus. La level set est définie par l’équation (5.4). En suivant l’idée présentée en introduction, deux maillages sont considérés : un maillage fin, et un maillage dont la taille des éléments est identique dans la partie de gauche (supposée être la “zone d’intérêt”) et plus grossier dans la partie de droite. L’approximation de la géométrie de l’armature obtenue avec X-FEM sur chaque maillage est donnée sur la figure 5.4. Avec le maillage fin, l’armature est parfaitement représentée (en 2D, il s’agit d’un rectangle élancé de largeur le diamètre de l’armature). Avec le second maillage, des erreurs géométriques importantes peuvent être observées, l’armature pouvant aller jusqu’à disparaître là où le maillage est le plus grossier. Un calcul par éléments finis avec une telle géométrie donnera évidemment des résultats faux, tant localement

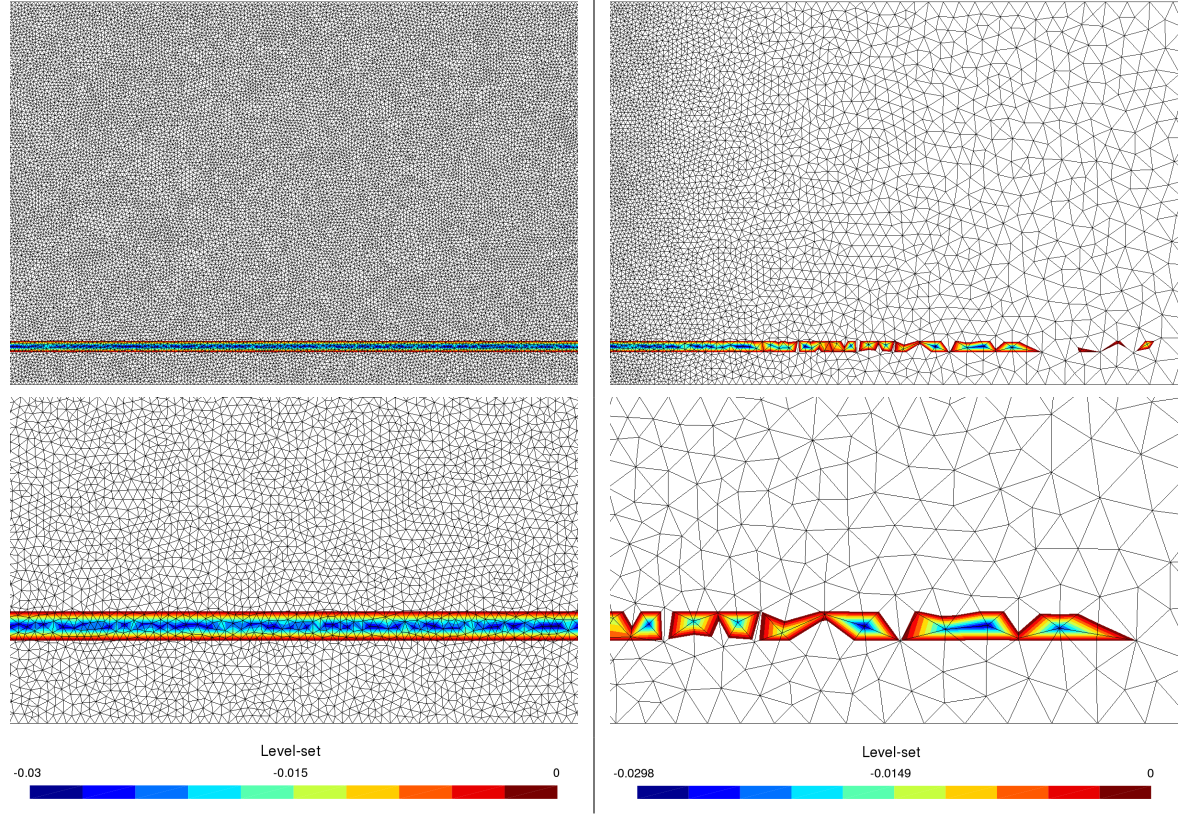


FIGURE 5.4. – Représentation d’armatures avec une level set. Gauche : maillage fin dans toute la structure. Droite : maillage grossier dans une partie de la structure. Haut : vue d’ensemble. Bas : Zoom sur la zone de transition entre maillage fin et maillage grossier.

que globalement.

Les îlots de matière que l’on peut observer sur la figure 5.4 sont dus aux nœuds dont le support (ensemble des éléments reliés à un nœud) est coupé deux fois par Γ , comme illustré sur la figure 5.5. Le support du nœud A est coupé deux fois par Γ . On s’intéresse ici plus particulièrement à l’intersection entre Γ et les arêtes AB et AC. D’après l’équation (5.4), la valeur de ϕ_A est égale à la distance entre A et la partie inférieure de Γ , qui est plus proche de A que la partie supérieure. L’intersection entre Γ et AB est donc correctement calculée, en revanche, comme la distance entre A et la partie supérieure de Γ est sous-estimée, l’intersection entre Γ et AC est plus proche de A qu’elle n’aurait dû l’être. Il est important de noter que cette définition de Γ assure que le volume des armatures représentées avec des level set sera toujours sous-estimé (de la matière peut être “enlevée” mais pas ajoutée). Enfin, les éléments 2D où l’armature semble disparaître sont dus au fait qu’il n’y a aucun nœud à l’intérieur de Γ ; par conséquent le signe de ϕ ne change pas, ce qui ne permet pas de localiser l’intérieur de Γ . On remarque que ce problème est similaire à celui de la double-découpe présentée dans la version simplifiée de la méthode TLS dans la section 2.2.5. La double-découpe n’est pas utilisée ici pour deux raisons :

- La double découpe pourrait suffire à représenter en 2D une armature droite, en revanche la précision de cette méthode est limitée en 3D en raison de la courbure due à la géométrie cylin-

drique des armatures.

- Cette méthode ne permet pas de traiter plusieurs niveaux de découpe (c'est-à-dire la découpe par plusieurs iso-valeurs), ce qui est nécessaire dans le cadre de l'approche présentée dans la section 5.4.1.

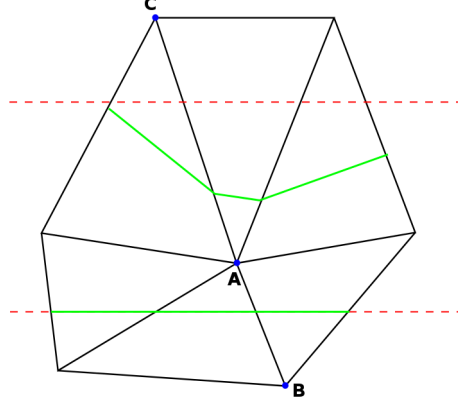


FIGURE 5.5. — Zoom sur un nœud dont le support est coupé deux fois par Γ . Traits pointillés rouges : géométrie réelle de Γ . Traits pleins verts : géométrie interpolée de Γ

5.3. Liaison entre éléments barres et éléments 3D

Parmi les possibilités citées en introduction (cf. section 5.1), un autre moyen de modéliser les armatures sans utiliser un maillage 3D est d'utiliser des éléments barres. Les armatures sont maillées avec des éléments linéiques, dont les nœuds n'ont pas nécessairement besoin de coïncider avec les nœuds du maillage volumique, comme illustré sur la figure 5.6. Un nœud barre a est situé dans un élément cubique dont les nœuds sont notés $(b_i)_{i=1,\dots,8}$. La position de a dans l'élément volumique est $\mathbf{x}_a$. En considérant la liaison parfaite entre les deux matériaux, les degrés de liberté 1D sont liés aux degrés de liberté volumique via les fonctions d'interpolation $(N_i)_{i=1,\dots,8}$ de l'élément volumique :

$$\mathbf{u}_a = \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}_a) \mathbf{u}_{b_i} \quad (5.7)$$

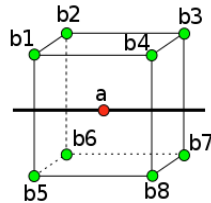


FIGURE 5.6. — Nœud bar à l'intérieur d'un élément volumique.

Dans la section 5.4.1 on verra que les éléments barres seront utilisés avec la méthode X-FEM dans le même calcul. Par conséquent, lorsqu'un nœud barre est situé dans un élément enrichi par X-FEM,

l'équation (5.7) devient :

$$\mathbf{u}_a = \sum_{i=1}^8 (N_i(\mathbf{x}_a) \mathbf{u}_{bi} + N_i(\mathbf{x}_a) F(\mathbf{x}_a) \mathbf{a}_{bi}) \quad (5.8)$$

Les degrés de liberté des éléments barres sont éliminés du calcul via l'équation (5.7) (ou l'équation (5.8) pour les nœuds barres situés dans des éléments enrichis), ce qui revient à considérer que la raideur des éléments barres est redistribuée dans les éléments volumiques environnants (éléments en vert sur la figure 5.7 b.). Les éléments barres présentent donc l'avantage de permettre l'utilisation de maillages moins fins autour des armatures. La procédure de maillage est également simplifiée, les éléments linéiques et volumiques étant géométriquement indépendants. Cette méthode permet de retrouver des résultats corrects à l'échelle globale (courbes forces-déplacement par exemple) ou loin des armatures, mais n'est évidemment pas aussi précise que la modélisation volumique comme l'a montré Jason *et al.* (2010). En particulier, deux inconvénients peuvent être mentionnés :

- La raideur globale de la structure est surestimée. On considère l'exemple de la figure 5.7 a. Un renfort, occupant le volume $\Omega_{inclusion}$, est inclus dans une matrice dont le volume est noté $\Omega_{matrice}$. La structure est maillée avec des éléments 2D, ne prenant pas en compte la frontière entre $\Omega_{inclusion}$ et $\Omega_{matrice}$, tandis que l'armature est modélisée par des éléments barres (cf. figure 5.7 b.). Le domaine correspondant à l'armature $\Omega_{inclusion}$ étant maillé avec des éléments 2D, la raideur discrétisée de $\Omega_{inclusion}$ est égale à la somme de la raideur de la matrice provenant des éléments 2D et de la raideur de l'inclusion provenant des éléments 1D. Par conséquent la raideur de $\Omega_{inclusion}$ est surestimée. Néanmoins, les armatures étant plus raides que la matrice et leur diamètre étant faible, l'influence de cette raideur superflue peut être considérée comme faible dans la plupart des cas.
- On peut voir sur la figure 5.7 b. qu'en raffinant le maillage 2D, l'épaisseur de la zone dans laquelle est redistribuée la raideur des éléments barres tend vers zéro. Le problème discret tend donc vers le problème d'une inclusion de diamètre nul, entraînant des concentrations de contraintes (comme on le verra dans la section 5.5.2).

Il est également possible de prendre en compte le cas où la liaison entre l'armature et la matrice n'est pas parfaite en autorisant un glissement entre les nœuds barres et volumiques (Casanova, 2012), mais dans le cadre de cette thèse on se restreint au cas où l'interface est parfaite.

5.4. Modélisation multi-dimensionnelle

5.4.1. Correction

Il a été montré dans la section 5.2 que la méthode X-FEM pouvait être utilisée afin d'obtenir une représentation volumique des armatures avec un maillage n'ayant pas besoin de coïncider avec leur frontière. Cependant, des erreurs géométriques importantes peuvent apparaître lorsque les maillages utilisés sont trop grossiers. La solution proposée dans cette section consiste à conserver la géométrie des armatures approchée par X-FEM, aussi imprécise soit-elle là où le maillage est le plus grossier, et à utiliser simultanément une version modifiée des éléments barres tels que présentés dans la section

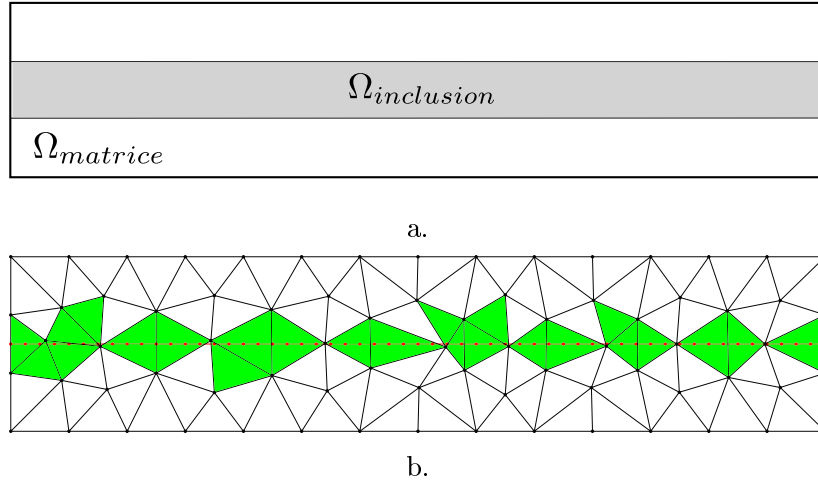


FIGURE 5.7. – Redistribution de la raideur des éléments barres dans les éléments volumiques. a. Définitions des différents domaines. b. Maillage de la structure et maillage 1D.

5.3. On considère l'exemple de la figure 5.8. Une armature est modélisée en utilisant X-FEM et des éléments barres simultanément. Sur cette figure, le maillage est suffisamment grossier pour que certains nœuds aient leur support coupé deux fois par Γ . La partie volumique et la partie linéique sont toutes les deux assemblées dans la matrice raideur globale du problème ; la modification apportée consiste simplement à modifier la matrice raideur élémentaires des éléments barres par un coefficient α_e . En considérant que chaque élément barre délimite un tronçon d'armature (lignes pointillées rouges sur la figure 5.8), le volume réel de ce tronçon peut être calculé par :

$$\Omega_e^{rel} = S l_e \quad (5.9)$$

où S est la section de l'armature et l_e la longueur de l'élément barre. Le coefficient α_e est alors défini comme :

$$\alpha_e = 1 - \frac{\Omega_e^{num}}{\Omega_e^{rel}} \quad (5.10)$$

où Ω_e^{num} est le volume du tronçon d'armature que la méthode X-FEM est parvenue à représenter (partie colorée et grisée à l'intérieur des pointillés rouges sur la figure 5.8). Ω_e^{num} est calculé de la façon suivante :

1. Les éléments volumiques autour de l'élément barre sont divisés en sous-cellules en utilisant la level set ϕ , comme expliqué dans la section 5.2.2.
2. Les sous-cellules proches des extrémités de l'élément sont redécoupées par deux plans normaux à l'élément barre, passant par ses deux nœuds (on remarque que c'est cette étape qui empêche l'utilisation de la double-découpe, comme mentionné dans la section 5.2.3).
3. Ω_e^{num} est alors égal à la somme des volumes des sous-cellules résultant des étapes 1 et 2 qui sont à l'intérieur de Ω_e^{rel} . Ces éléments peuvent être trouvés facilement, il s'agit des éléments pour

lesquels ϕ est inférieur ou égal à zéro en chacun de leurs nœuds

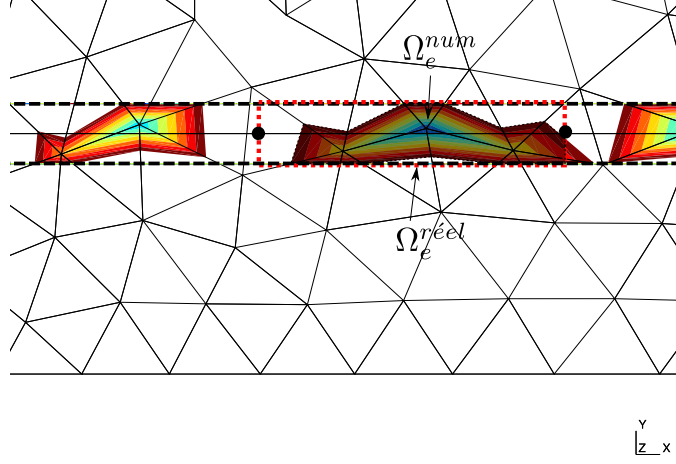


FIGURE 5.8. – Calcul de α_e

Pour résumer, les éléments barres peuvent être vus comme une correction des erreurs de discrétisation de la méthode X-FEM (cf. figure 5.2.3), en apportant à la structure la raideur perdue, par l'intermédiaire du coefficient α_e calculé par la formule (5.10) :

- $\alpha_e = 0$ si $\Omega_e^{num} = \Omega_e^{real}$: le tronçon d'armature est parfaitement représenté par X-FEM, aucune correction n'est nécessaire, l'élément barre n'est donc pas pris en compte.
- $\alpha_e = 1$ si $\Omega_e^{num} = 0$: le maillage est particulièrement grossier, aucun nœud ne se trouve à l'intérieur de l'armature qui “disparaît” localement : un élément barre classique est assemblé.
- $\alpha_e \in]0; 1[$ si $0 < \Omega_e^{num} < \Omega_e^{real}$: l'armature est seulement partiellement représentée par X-FEM, la correction apportée par l'élément barre est active.

On insiste sur le fait que localement ces éléments barres modifiés ne résolvent pas les problèmes mis en évidence dans la section 5.2.3 : dans la zone grossière, les résultats autour des armatures seront toujours imprécis. Cependant, d'un point de vue global, la raideur de la structure dans la zone grossière sera suffisamment bien approchée pour que les résultats locaux dans la zone d'intérêt soient quasiment identiques à ceux qui auraient été obtenus avec une représentation volumique des armatures dans toute la structure. On remarquera également que la raideur superflue autour des éléments barres mentionnée dans la section 5.3 est maintenant égale à $\alpha_e k_e^{matrice}$, où $k_e^{matrice}$ est la raideur de Ω_e^{real} en supposant que Ω_e^{real} soit occupé par la matrice au lieu de l'inclusion. Comme α_e est plus petit que 1, cette raideur superflue est plus faible que lorsqu'on utilise uniquement des éléments barres, la raideur globale de la structure est donc mieux estimée. Ces propos seront illustrés sur des exemples numériques dans la section 5.5.

5.4.2. Algorithme de résolution

On donne ici l'algorithme de résolution générale d'un calcul par éléments finis d'une structure renforcée, sous les hypothèses de l'élasticité linéaire et de l'interface parfaite entre les deux matériaux,

	Matrice	Armatures
Module d'Young (Pa)	10^{11}	$2,175 \cdot 10^{11}$
Coefficient de Poisson	0.27	0.3
Limite élastique (Pa)	$1,5 \cdot 10^8$	-
Module tangent (Pa)	10^8	-

TABLE 5.1. – Propriétés matériaux

en utilisant l'approche présentée dans cette section :

1. Mailler la structure avec des éléments volumiques (sans prendre en compte les armatures).
2. Mailler les armatures avec des éléments 1D.
3. Calculer la valeur de la level set ϕ en utilisant l'équation (5.4). On remarquera que la ligne médiane des armatures Λ peut être remplacée par le maillage 1D des armatures, à condition que ce maillage comporte suffisamment de nœuds, en particulier pour les armatures ayant une trajectoire courbe.
4. Assembler la raideur provenant de la partie volumique, en suivant la procédure donnée dans la section 5.2.2.
5. Assembler la raideur provenant de la partie linéique des armatures, en multipliant la raideur élémentaire de chaque élément barre par le coefficient α_e et en prenant en compte l'équation (5.7).
6. Résoudre le système linéaire.

5.5. Simulations numériques

L'approche proposée dans la section 5.4 est appliquée à plusieurs exemples. Pour illustrer l'intérêt de la méthode, on considère des renforts plus raides que la matrice environnante. L'interface entre les deux matériaux est considérée parfaite. Dans la section 5.5.1 la matrice et les armatures sont élastiques linéaires. Dans la section 5.5.2 on cherche à illustrer l'intérêt de la méthode sur des cas tests non-linéaires. Les résultats présentés ici étant purement qualitatifs, il a été choisi de considérer une matrice élastoplastique (plasticité J_2 , Simo et Hughes (1998)). Le choix de l'élastoplasticité se justifie par la simplicité de l'implémentation (pas de problème de localisation en l'absence d'adoucissement par exemple), et n'est en aucun cas représentatif d'une quelconque physique. Les propriétés matériaux de la matrice et des armatures sont résumées dans le tableau 5.1.

Pour chaque exemple, une zone d'intérêt est identifiée. Cette zone est maillée avec des éléments suffisamment fins pour représenter correctement les armatures en 3D. Le reste de la structure est maillé avec des éléments plus grossiers. Ce maillage sera appelé "maillage de calcul". La méthode présentée dans la section 5.4 sera appelée "méthode mixte" dans ce qui suit. Sauf mention contraire,

les résultats obtenus avec la méthode mixte seront comparés avec les résultats obtenus avec deux autres méthodes :

- Une simulation réalisée sur le maillage de calcul, en utilisant des éléments barres uniquement. Cette méthode sera appelée “méthode barre”.
- Un calcul réalisé avec un maillage fin dans toute la structure, dont la taille des éléments est identique à la taille des éléments dans la zone d’intérêt du maillage de calcul. Ce maillage sera appelé “maillage de référence”. Les armatures seront modélisées par la méthode X-FEM en 3D (dans toute la structure, le maillage étant suffisamment fin). Les résultats obtenus par cette méthode, qu’on appellera “méthode volumique”, seront donc utilisés comme références.

Enfin, tous les maillages utilisés sont constitués d’éléments linéaires.

5.5.1. Cas tests linéaires

Poutre 2D élastique en flexion 3 points

Géométrie et conditions aux limites On considère une poutre 2D en flexion trois points, modélisée sous l’hypothèse des déformations planes. Les dimensions et conditions aux limites sont précisées sur la figure 5.9 : longueur $L = 5.1$ m, hauteur $h = 0.8$ m, épaisseur $t = 1$ m. La poutre est renforcée avec deux armatures de rayon 0.016 m dans la partie supérieure et 0.02 m dans la partie inférieure. La zone d’intérêt, de largeur D , est supposée être au centre de la poutre.

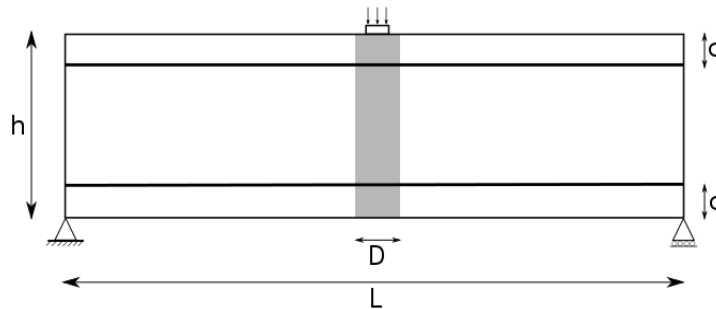


FIGURE 5.9. – Dimensions et conditions aux limites de l’essai de poutre 2D en flexion trois points.

Maillage La poutre est maillée avec des éléments dont la taille dans la zone d’intérêt est 0.005 m, et 0.05 m en dehors (cf. figure 5.10). La largeur de la zone d’intérêt est $D = 0.06$ m. Dans la zone d’intérêt, le maillage est constitué de carrés coupés en triangles. Cela permet d’assurer que dans cette zone, les éléments sont exactement superposés dans le maillage de calcul et dans le maillage de référence. Cette contrainte est nécessaire au post-traitement des résultats (cf. equation (5.14)).

La géométrie approchée par X-FEM des armatures est donnée sur la figure 5.11, et le coefficient α_e sur la figure 5.12.

Comportement global Le déplacement vertical v et la contrainte normale σ le long de l’armature supérieure sont tracés sur la figure 5.13, ainsi que les erreurs relatives correspondantes (méthodes barre

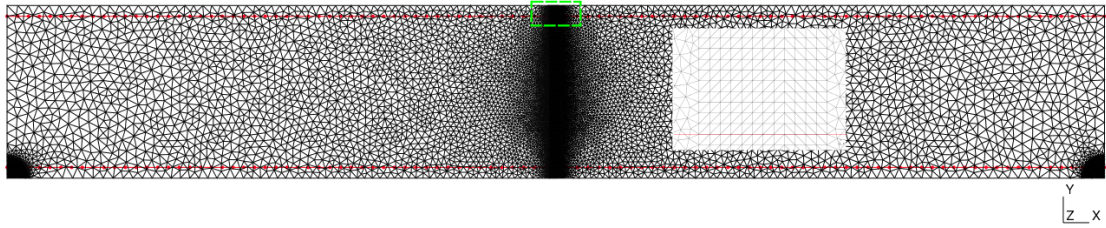


FIGURE 5.10. – Maillage utilisé pour le cas test 2D de flexion trois points en élasticité. Dans la zone d'intérêt, les éléments du maillage de calcul et du maillage de référence sont exactement superposés.

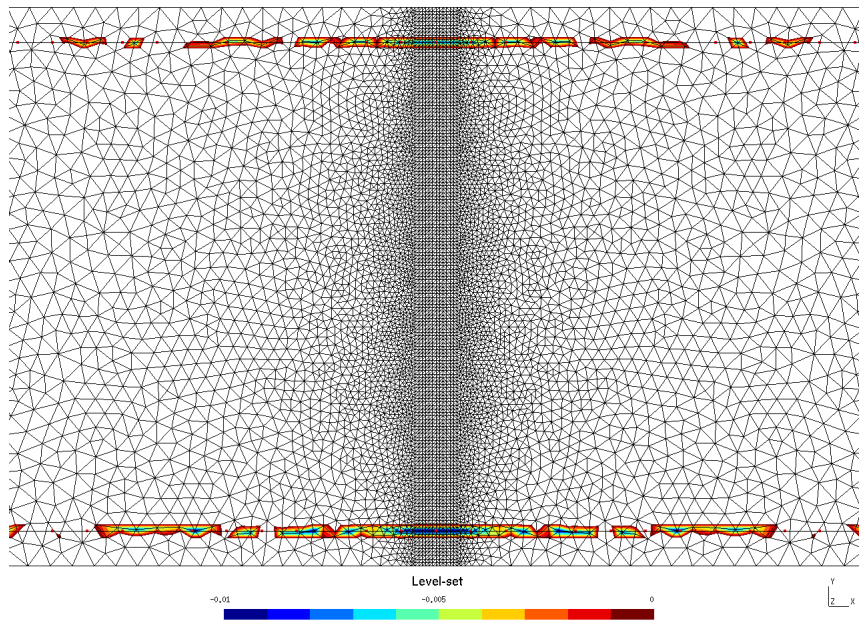


FIGURE 5.11. – Géométrie approchée des armatures pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points (zoom dans le centre de la poutre).

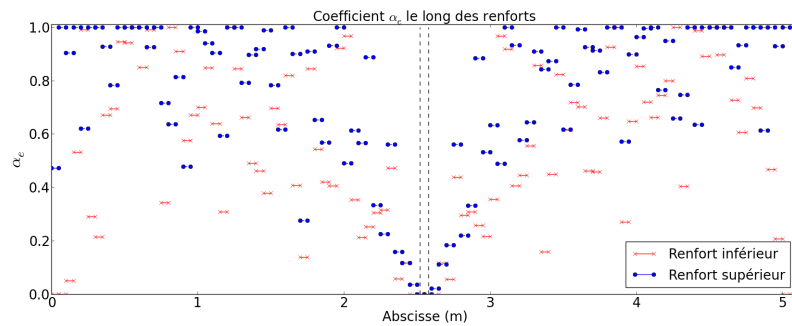


FIGURE 5.12. – Coefficient α_e le long des armatures pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points.

et mixte par rapport à la méthode volumique). On rappelle l'expression de la contrainte normale pour un élément barre :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{l_e} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{v} \quad (5.11)$$

où $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_j$ sont les déplacements des nœuds de l'élément, $\mathbf{v}$ le vecteur unitaire orientant l'élément du nœud i au nœud j . La même expression est utilisée pour les méthodes volumique et mixte (dans le cas de la méthode volumique, on utilise également un maillage 1D avec des éléments de raideur nulle. Ces éléments ne sont utilisés que pour calculer (5.11)). Les erreurs relatives en déplacement et en contrainte sont alors calculées par :

$$\eta_v^{bar/mix} = \frac{|v_i^{vol} - v_i^{bar/mix}|}{|v_i^{vol}|} \quad (5.12)$$

pour l'erreur en déplacement, calculé en chaque nœud i , où les exposants $bar/mix/vol$ font référence à la méthode barre, mixte et volumique respectivement, et

$$\eta_\sigma^{bar/mix} = \frac{|\sigma_{ij}^{vol} - \sigma_{ij}^{bar/mix}|}{|\sigma_{ij}^{vol}|} \quad (5.13)$$

pour l'erreur en contrainte, calculée pour chaque élément barre défini par les nœuds i et j .

Les trois méthodes donnent des résultats similaires. L'effet de contrainte superflue mentionné dans la section 5.3 peut être observé, avec une structure globalement plus raide, et donc un déplacement plus faible avec la méthode barre qu'avec la méthode volumique. Les erreurs calculées sont plus faibles avec la méthode mixte qu'avec la méthode barre, même si elles restent acceptables dans les deux cas (inférieure à 10%).

Comportement local Pour obtenir des informations localement sur la qualité des résultats autour des armatures dans la zone d'intérêt, on définit l'erreur volumique par élément e :

$$\eta_e^{bar/mix} = \sqrt{\frac{|\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{bar/mix} - \mathbf{u}_{vol}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{bar/mix} - \mathbf{u}_{vol})|}{|\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{vol}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{vol})|}} \quad (5.14)$$

$\eta_e^{bar/mix}$ est calculée sur le maillage de référence, en projetant les champs de contrainte et de déformation obtenus avec les méthodes barre et mixte. On insiste sur le fait que cette quantité n'a pas réellement de sens pour comparer des résultats obtenus sur deux maillages différents, les champs de contrainte et de déformation étant discontinus à la frontière entre les éléments. C'est pour cela que dans la zone d'intérêt, les maillages de calcul et de référence ont été choisis identiques, comme précisé dans la description de ce cas test. Cela permet d'assurer que l'erreur (5.14) est pertinente, au moins dans cette zone. Les erreurs obtenues sont représentées sur la figure 5.14.

L'observation la plus intéressante est que l'erreur dans toute la zone d'intérêt est très faible avec la méthode mixte (inférieure à 2.4%). Pour la méthode barre, cette erreur est évidemment élevée autour des armatures, mais peut également atteindre jusqu'à 10% y compris dans le centre de la poutre.

En dehors de la zone d'intérêt, l'erreur semble plus faible dans le centre de la poutre avec la méthode

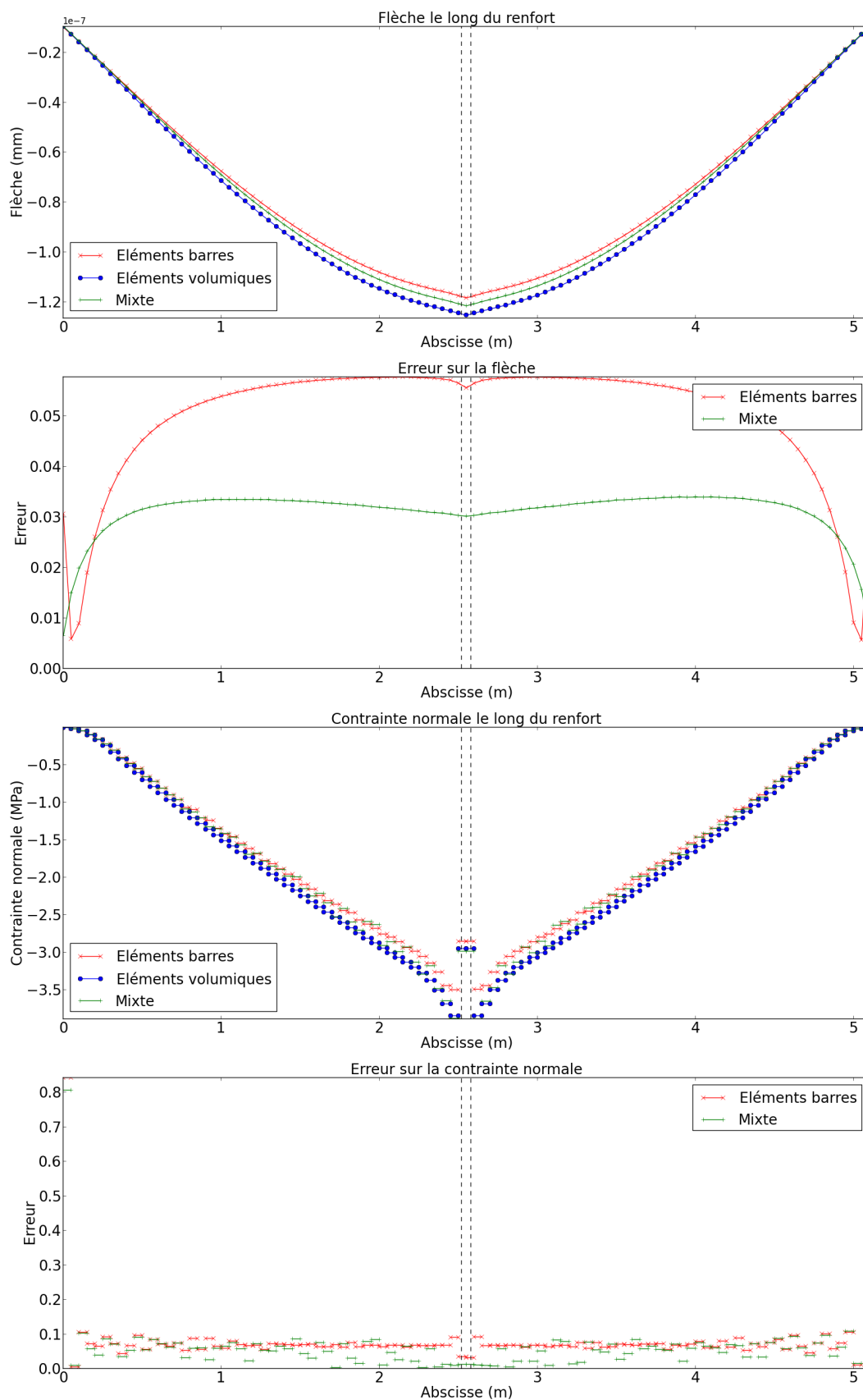


FIGURE 5.13. – Déplacements, efforts normaux et erreurs relativement dans l'armature supérieure pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points. Les lignes pointillées noires marquent les limites de la zone d'intérêt.

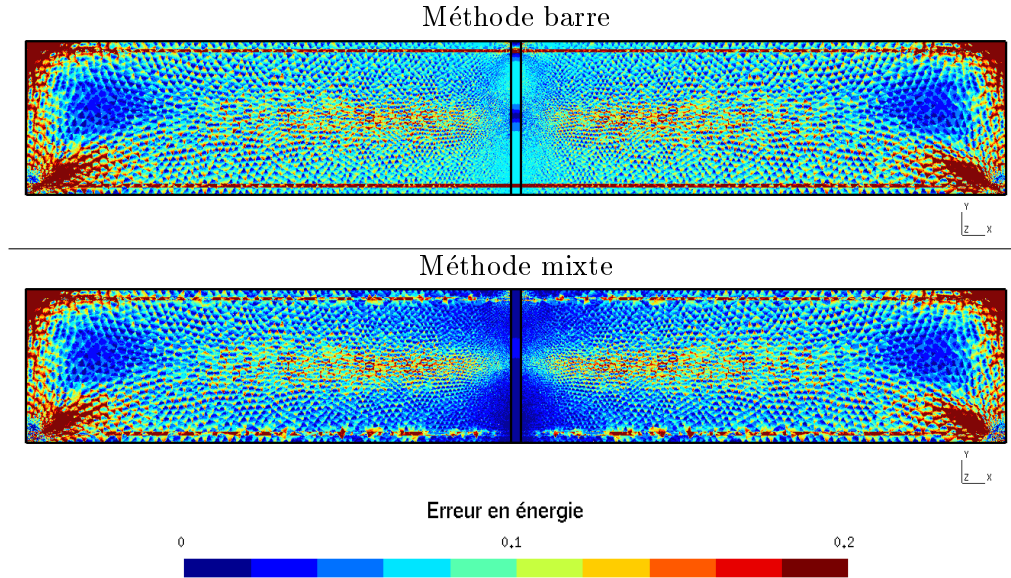


FIGURE 5.14. – Erreur en énergie pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points, tracée pour un maximum égal à 0.2 pour améliorer la lisibilité : les zones en rouge correspondent à des erreurs supérieures à 0.2.

mixte qu'avec la méthode barre, même si dans cette zone les conclusions tirées doivent être considérées avec précaution étant donnés que les maillages comparés ne sont pas les mêmes ; en particulier des artefacts numériques rendent difficiles l'interprétation des résultats. Dans les deux cas l'erreur est particulièrement élevée autour des armatures, à cause du tenseur de Hooke $\mathbb{C}$, différent d'une méthode à l'autre.

Les résultats de ce premier cas test sont prometteurs ; dans la zone d'intérêt la méthode mixte donne des résultats très proches de la méthode volumique. L'importance de la modélisation volumique par rapport à la modélisation linéique a également été mise en évidence. Comme on pouvait s'y attendre, dans le reste de la structure les résultats obtenus avec la méthode mixte ne sont pas aussi précis qu'avec la méthode volumique, même si une légère amélioration semble être observée par rapport à la méthode barre.

Flexion d'un poteau 3D

Cet exemple illustre la capacité de la méthode mixte à gérer de nombreuses armatures avec des géométries complexes. On considère un poteau étudié cette fois-ci en 3D. Le maillage utilisé, le maillage 1D des armatures et la géométrie des armatures approchée par X-FEM sont représentés sur la figure 5.15. On rappelle que seul le maillage 1D des armatures et leur rayon est nécessaire pour les représenter avec la méthode mixte, ce qui est particulièrement intéressant sur un cas test de cette complexité. Le nombre de degrés de liberté de ce calcul étant particulièrement important, il n'y aura pas de calcul de référence.

La surface inférieure du poteau est encastree, tandis qu'un chargement de cisaillement est appliqué à son extrémité supérieure. La zone d'intérêt est supposée être à la base du poteau, là où l'on s'attend à ce

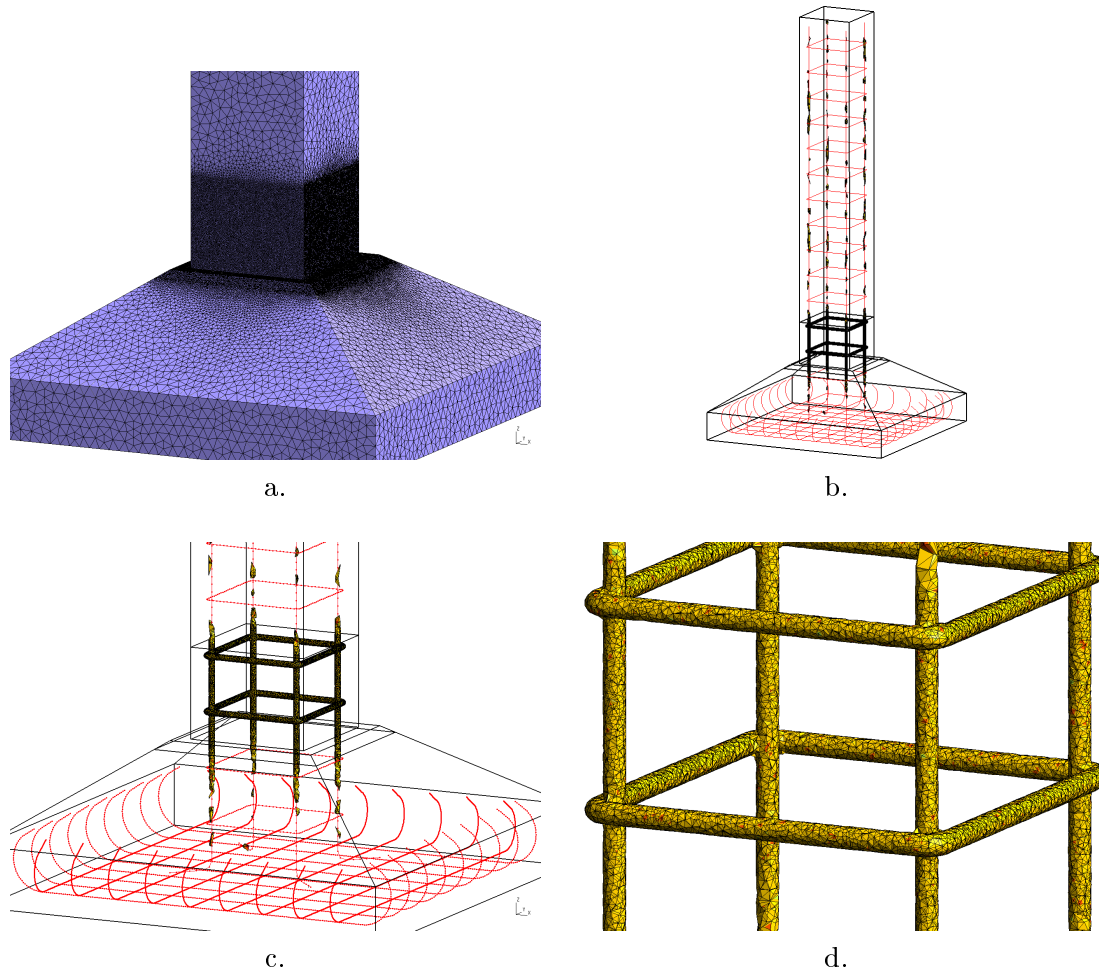


FIGURE 5.15. – a. Maillage 3D du poteau. b. Vu d'ensemble du maillage 1D, et géométrie approchée des armatures par la méthode X-FEM. c. Zoom autour de la zone d'intérêt. d. Zoom autour de la zone d'intérêt, proche de la partie 3D des armatures.

que les contraintes soient les plus élevées. Pour simplifier le calcul, seules les armatures longitudinales et les deux cadres horizontaux inclus dans la zone d'intérêt ont été modélisées par la méthode mixte. Les autres armatures ont été modélisées par la méthode barre. La contrainte de Von Mises dans la zone d'intérêt dans différentes sections planes du poteau, est donnée sur la figure 5.16. Loin des armatures, la méthode barre et la méthode mixte donnent des résultats similaires. En revanche, la méthode mixte permet de mieux représenter la diminution de la contrainte de Von Mises au voisinage des armatures.

5.5.2. Cas tests élastoplastiques

Dans cette section la méthode mixte est testée sur des cas tests non-linéaires. La matrice est constituée d'un matériau élastoplastique à écrouissage isotrope. Pour éviter la plastification autour des armatures là où celles-ci ne sont que partiellement représentées par la level set, la plasticité est restreinte à la zone d'intérêt tandis que le reste de la structure est élastique linéaire. Les renforts sont supposés plus résistants que la matrice, n'atteignant leur limite d'élasticité que pour des chargements

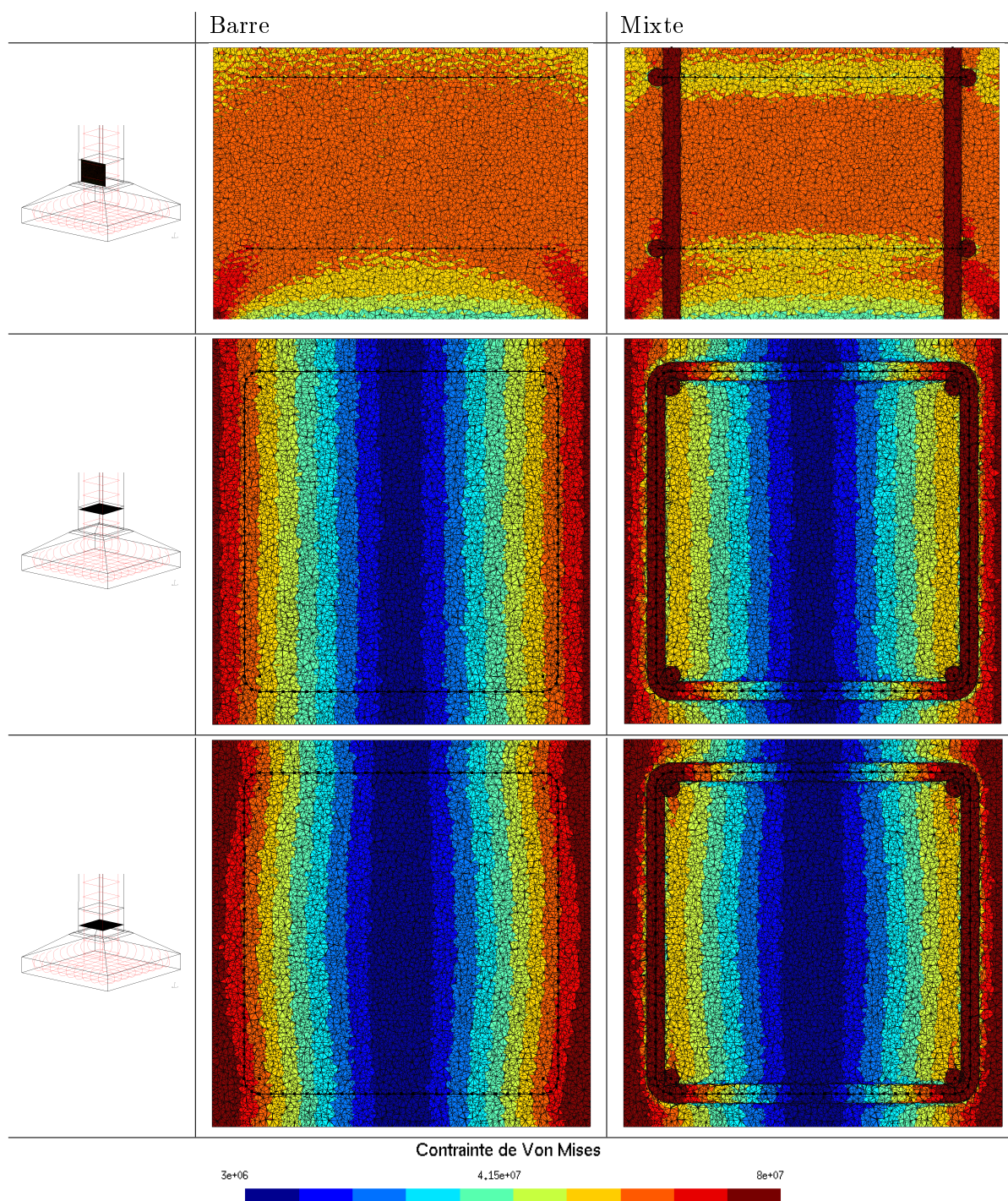


FIGURE 5.16. – Contrainte de Von Mises dans plusieurs sections planes du poteau 3D.

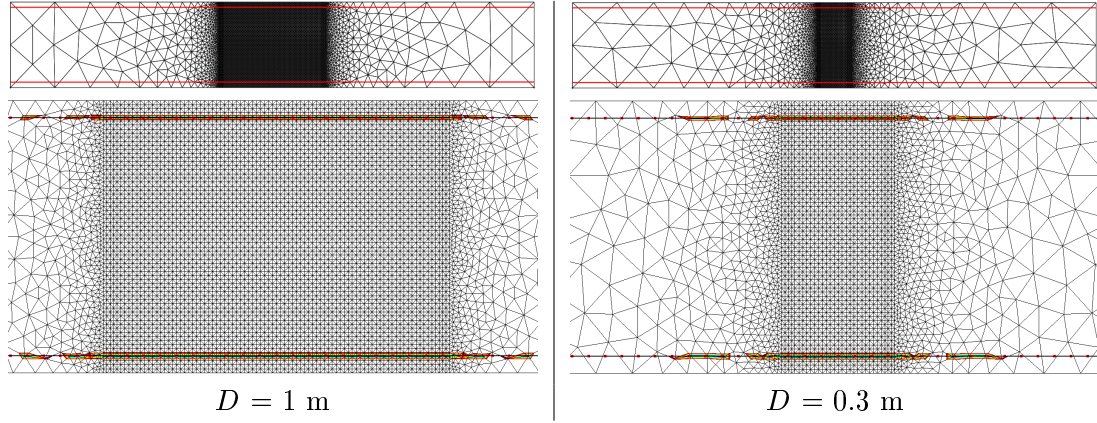


FIGURE 5.17. – Haut : maillages utilisés pour la poutre élastoplastique en flexion trois points. Bas ; géométrie des armatures approchée par X-FEM

élevés ; par conséquent ils seront considérés élastiques linéaires dans ce qui suit.

Poutre 2D élastoplastique en flexion 3 points

On considère à nouveau la poutre en flexion trois points de la section 5.5.1, avec cette fois-ci une matrice élastoplastique dans la zone d'intérêt. Deux valeurs sont testées pour la largeur de celle-ci : $D = 1$ m et $D = 0.3$ m. La taille des éléments dans la zone d'intérêt est de 0.012 m. Les maillages correspondants et la géométrie des armatures représentées par X-FEM sont donnés sur la figure 5.17. La contrainte plastique à la fin de chaque calcul pour les différents maillages est donnée sur la figure 5.18.

Pour chaque calcul, la contrainte plastique commence par se développer sous le chargement, puis à la base de la poutre. En revanche, avec la méthode barre, la zone plastifiée s'étend jusqu'au centre de la poutre, alors qu'avec la méthode volumique la plasticité est davantage localisée autour des armatures. La contrainte plastique obtenue avec la méthode mixte dans la zone d'intérêt est très proche de celle obtenue par la méthode volumique. Il semblerait que la zone élastique due à la partie volumique des armatures avec ces deux méthodes entrave le développement de la zone plastique, contrairement à la modélisation barre.

Poutre 3D en flexion quatre points

L'exemple suivant est une poutre 3D en flexion quatre points. Les dimensions de la poutre sont les suivantes : longueur $L = 5$ m, hauteur $h = 1$ m, épaisseur $t = 0.5$ m. La poutre est renforcée par 4 armatures (cf. figure 5.19) de rayon $r = \frac{2}{9}t$, placée à une distance $c_v = 0.25$ m des faces supérieures et inférieures, et $c_h = 0.125$ m des faces latérales. La distance entre les centres des zones de chargement est $b = 0.75$ m et la largeur de la zone d'intérêt $D = 1$ m.

En utilisant les diverses symétries du problème, seul un quart de la poutre est modélisé ; le déplacement selon x de la face située en $x = 0$ est bloqué, ainsi que le déplacement suivant z de la face située en $z = L/2$. La taille des éléments est de 0.05 m dans la zone d'intérêt et de 0.05 m dans le reste de

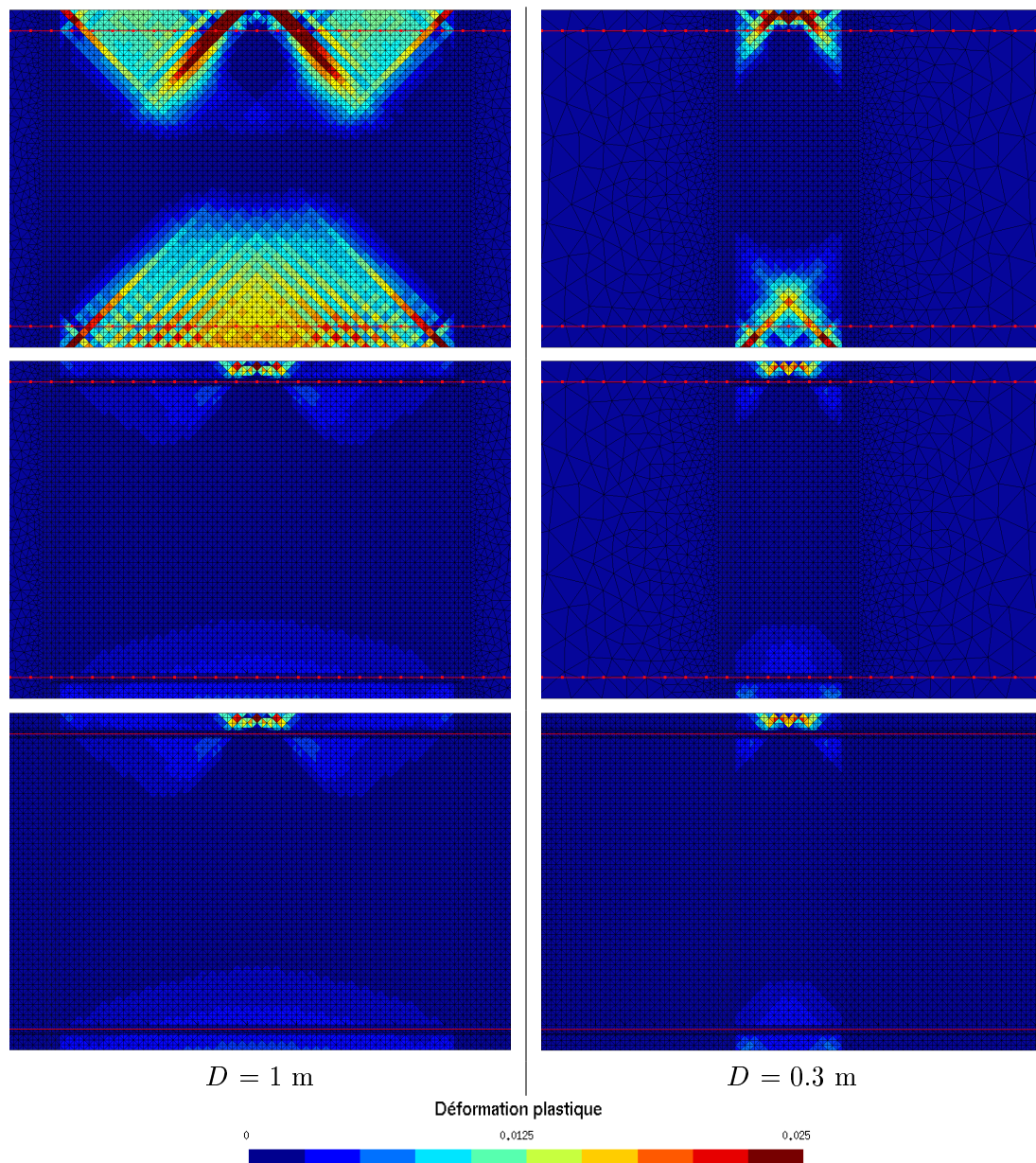


FIGURE 5.18. – Contrainte plastique à la fin de chaque calcul pour la poutre élastoplastique en flexion trois points.. Haut : Méthode barre. Milieu : méthode mixte. Bas : Méthode volumique.

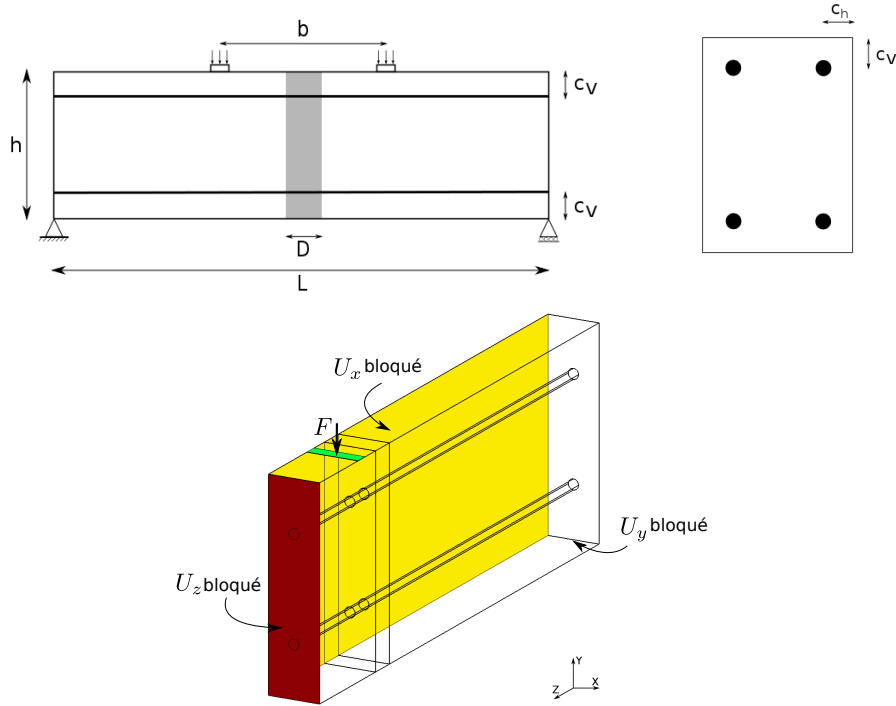


FIGURE 5.19. – Géométrie et conditions aux limites de l’essai de poutre en flexion quatre points.

la poutre. Pour le maillage de référence, la taille des éléments est réduite à 0.005 m au voisinage des armatures afin de pouvoir les représenter volumiquement. Pour le maillage de calcul, ce raffinement local autour des armatures n’est effectif que dans la zone d’intérêt (cf. figure 5.20).

La géométrie des armatures approchée par la méthode X-FEM est représentée sur la figure 5.21. La contrainte plastique dans la zone d’intérêt dans différentes sections planes de la poutre passant par le centre des armatures sont données sur la figure 5.22. On peut observer avec la méthode barre une forte concentration de la contrainte plastique autour des éléments 1D. Ce phénomène n’était pas observé dans l’exemple 2D de la section 5.5.2. En effet, en 2D des éléments finis dont la taille est de l’ordre de grandeur du diamètre des armatures suffisent à les représenter correctement. En 3D, la courbure due à leur géométrie cylindrique nécessite des maillages beaucoup plus fins (dans l’exemple de cette section le rapport entre la taille des éléments autour des armatures et leur rayon est de l’ordre de $\frac{1}{20}$). Ceci explique ce phénomène de concentration de contrainte évoqué dans la section 5.3.

Même loin des armatures, la contrainte plastique obtenue avec la méthode barre est très différente de celle obtenue avec la méthode volumique. En effet dans le cas de la méthode barre la raideur des armatures est concentrée dans une zone de rayon de l’ordre de la taille des éléments du maillage (cf. section 5.3.), ce qui donne des champs mécaniques locaux très différents de la méthode volumique. Avec la méthode mixte on parvient à retrouver une contrainte plastique quasi-identique à la méthode volumique dans la zone d’intérêt.

Pour finir, afin de quantifier le gain en coûts de calcul, un calcul élastique a été réalisé avec chacune des trois méthodes. Le nombre de degrés de liberté et les temps de calculs de certaines des étapes du calcul sont données dans le tableau 5.2. L’étape de “Pré-traitement” inclut notamment la définition

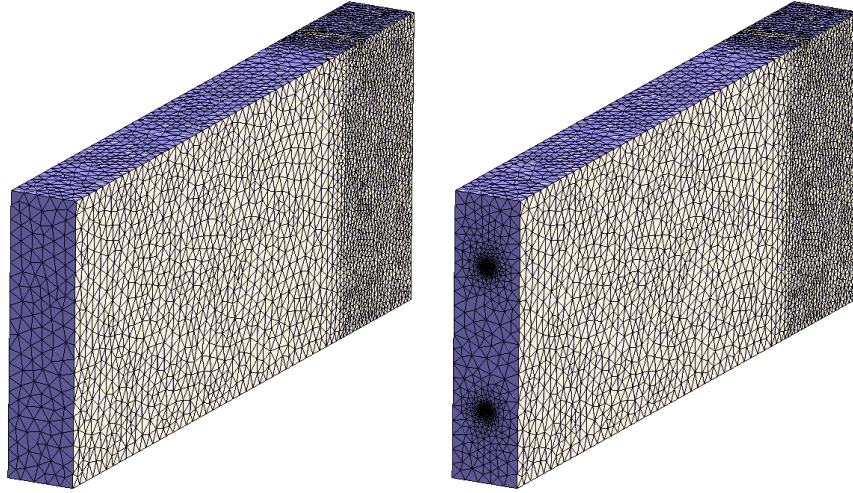


FIGURE 5.20. — Maillages utilisés pour l'essai de poutre en flexion quatre points. À gauche : maillage de calcul. À droite : maillage de référence.

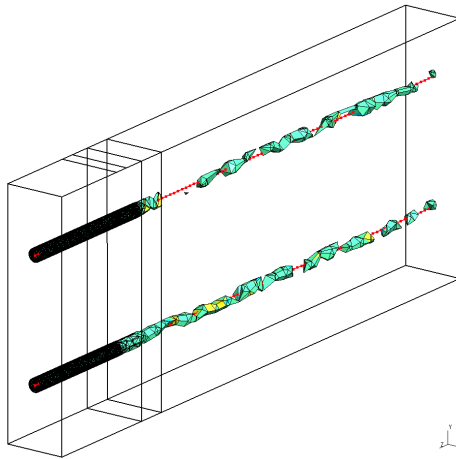


FIGURE 5.21. — Géométrie approchée des armatures par la méthode X-FEM pour l'essai de flexion quatre points.

des enrichissements X-FEM et le calcul du coefficient α_e .

Le coût additionnel de la méthode mixte est relativement bas comparé à la méthode barre. Le calcul des coefficients α_e notamment ne semble pas entraîner un surcoût trop important. Cela est particulièrement intéressant compte tenu du fait que dans la zone d'intérêt les résultats obtenus sont quasiment identiques à ceux obtenus avec la méthode volumique.

Poinçonnement d'une dalle en 3D

Le dernier exemple est une dalle en 3D, renforcée avec deux nappes d'armatures régulièrement espacées de rayon 0.015 m. Chaque nappe est constituée de 21 armatures dans la direction x et 21 armatures dans la direction y , pour un total de 84 armatures. La nappe supérieure est située à 0.032

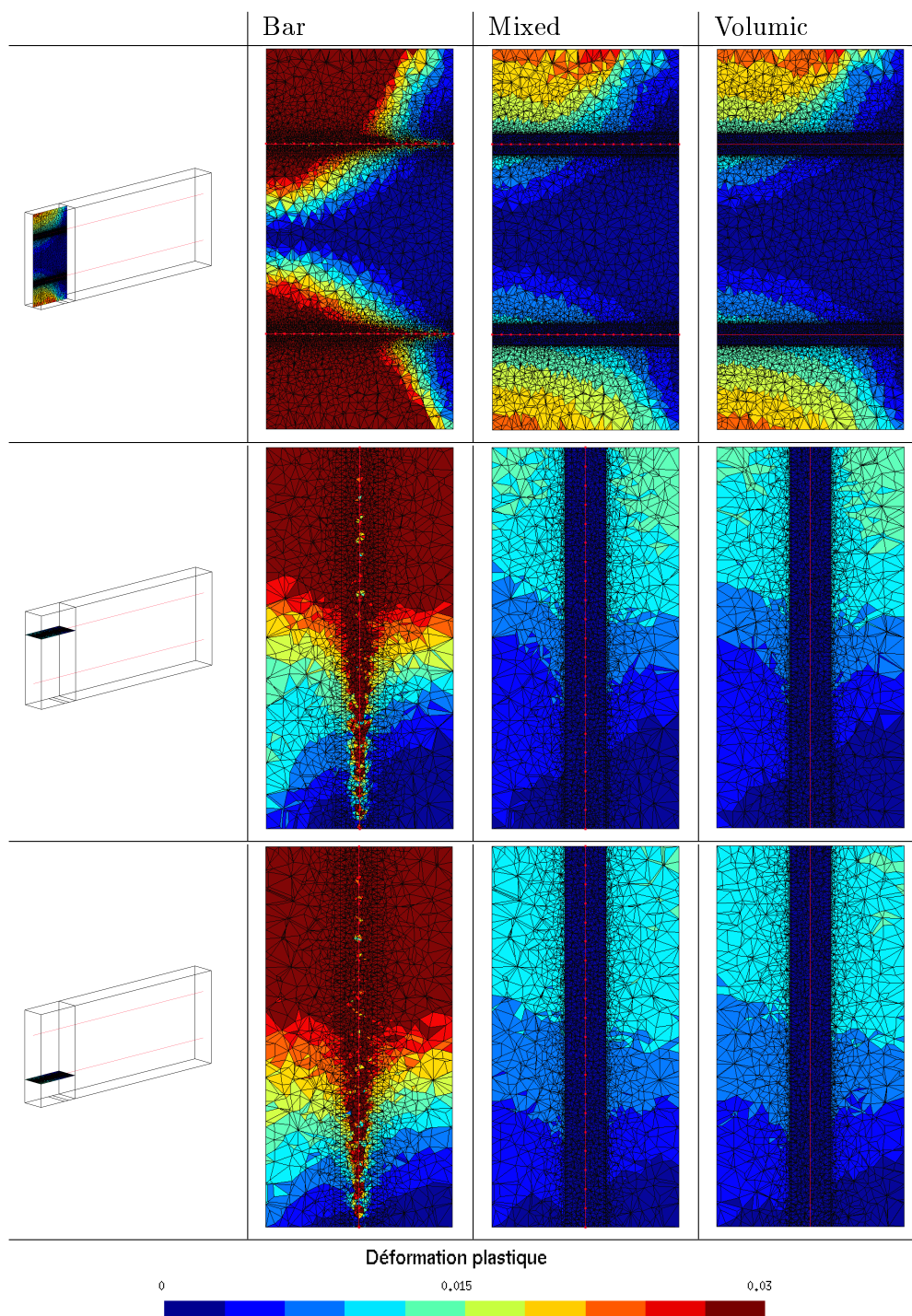


FIGURE 5.22. – Contrainte plastique pour la poutre en flexion quatre points à la fin de chaque calcul dans différentes sections planes.

	Nombre de degrés de liberté	Pré-traitement	Assemblage	Résolution
Barre	117909	2.68 s	14.63 s	11.06 s
Mixte	155190	36.96 s	141.90 s	36.96 s
Volumique	482677	142.01 s	262.57 s	50.97 s

TABLE 5.2. – Nombre de degrés de liberté et temps de calcul pour le calcul de la poutre en flexion quatre points.

m de la face supérieure de la dalle (distance mesurée à partir de la ligne médiane des armatures), et la nappe inférieure à une distance de 0.04 m de la face inférieure (cf. figure 5.23). Les dimensions de la dalle sont $3 \times 3 \times 0.25$ m. La zone d'intérêt est un parallélépipède de dimensions $0.3 \times 0.3 \times 0.25$ m situé au centre de la dalle, sous la zone de chargement. La taille des éléments est de 0.01 m dans la zone d'intérêt et 0.15 m dans le reste de la dalle.

Pour simplifier la prise en compte des level set et enrichissements, seules les armatures traversant la zone d'intérêt sont modélisées avec la méthode mixte (c'est-à-dire trois armatures par couche et par direction), tandis que les autres sont représentées par des éléments barres uniquement. La géométrie des armatures approchées par X-FEM est donnée sur la figure 5.24. Une représentation volumique des armatures serait trop coûteuse, il n'y a donc pas de calcul de référence pour ce cas test. Enfin, les faces latérales de la dalle sont encastées et un chargement vertical est appliqué au centre sur une surface carrée de dimensions 0.15×0.15 m.

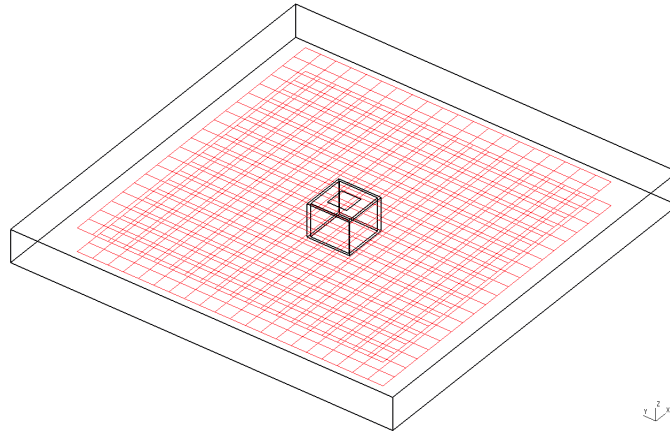


FIGURE 5.23. – Géométrie de la dalle 3D.

La déformation plastique dans différentes sections planes passant par le centre des armatures est donnée sur la figure 5.25, pour la méthode barre et la méthode mixte.

Dans ce cas test la taille des éléments dans la zone d'intérêt et le rayon des armatures sont relativement proches, ce qui explique qu'on n'observe pas de concentration de déformation plastique comme

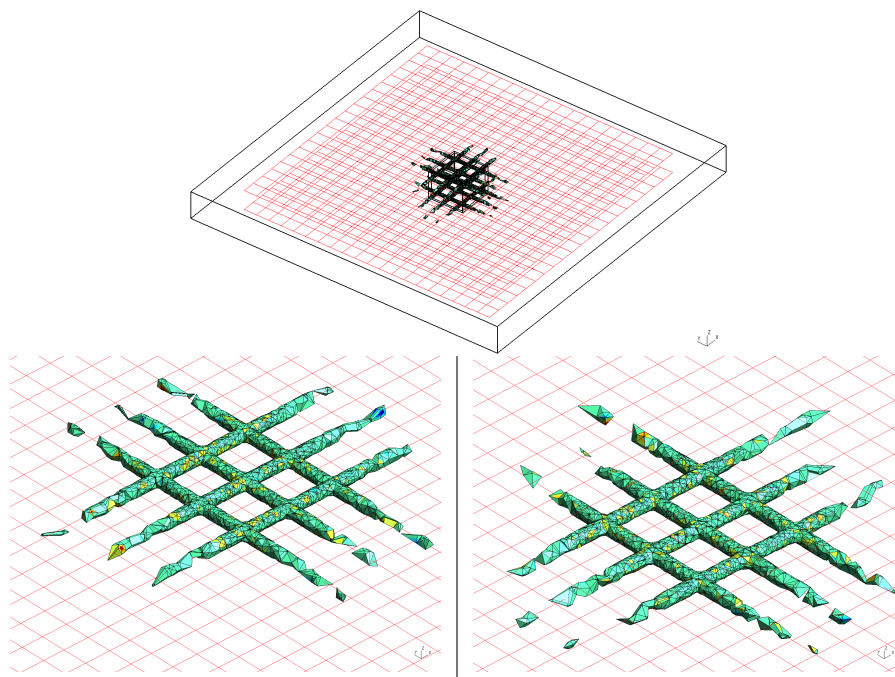


FIGURE 5.24. – Géométrie des armatures de la dalle 3D approchée par X-FEM

dans l'exemple de la section 5.5.2. Néanmoins des différences peuvent être observées entre les résultats obtenus par les deux méthodes, notamment autour des armatures.

5.6. Conclusion

Une nouvelle approche permettant de modéliser les armatures a été proposée dans ce chapitre, reposant sur l'idée que dans tout calcul par éléments finis, des zones d'intérêt peuvent être identifiées. Des maillages fins sont utilisés dans ces zones afin d'obtenir des résultats locaux précis, tandis que des éléments plus grossiers sont utilisés dans le reste de la structure pour diminuer les coûts de calcul. Suivant cette idée, la méthode X-FEM est utilisée pour modéliser les armatures, permettant d'obtenir une représentation volumique précise des armatures dans la zone d'intérêt tout en simplifiant la procédure de maillage. En revanche dans la zone grossière, l'approximation par fonction level set ne permet pas de reconstituer la géométrie des armatures correctement. La solution pragmatique proposée ici consiste à utiliser simultanément des éléments barres 1D en multipliant leur matrice raideur élémentaire par un coefficient tenant compte de l'erreur commise par l'approximation X-FEM. La raideur globale de la structure est ainsi correctement reproduite, assurant ainsi des résultats dans la zone d'intérêt quasiment identiques aux résultats obtenus lorsque les armatures sont modélisées volumiquement dans toute la structure. Cette méthode, validée sur plusieurs cas tests linéaires et non-linéaires, présente également d'autres avantages :

- Elle est relativement facile à implémenter, pour peu que l'on dispose d'une bibliothèque de fonctions permettant de réaliser des opérations X-FEM basiques (enrichissement, utilisation de level set et découpage en sous-cellules). On remarquera que contrairement à la plupart des

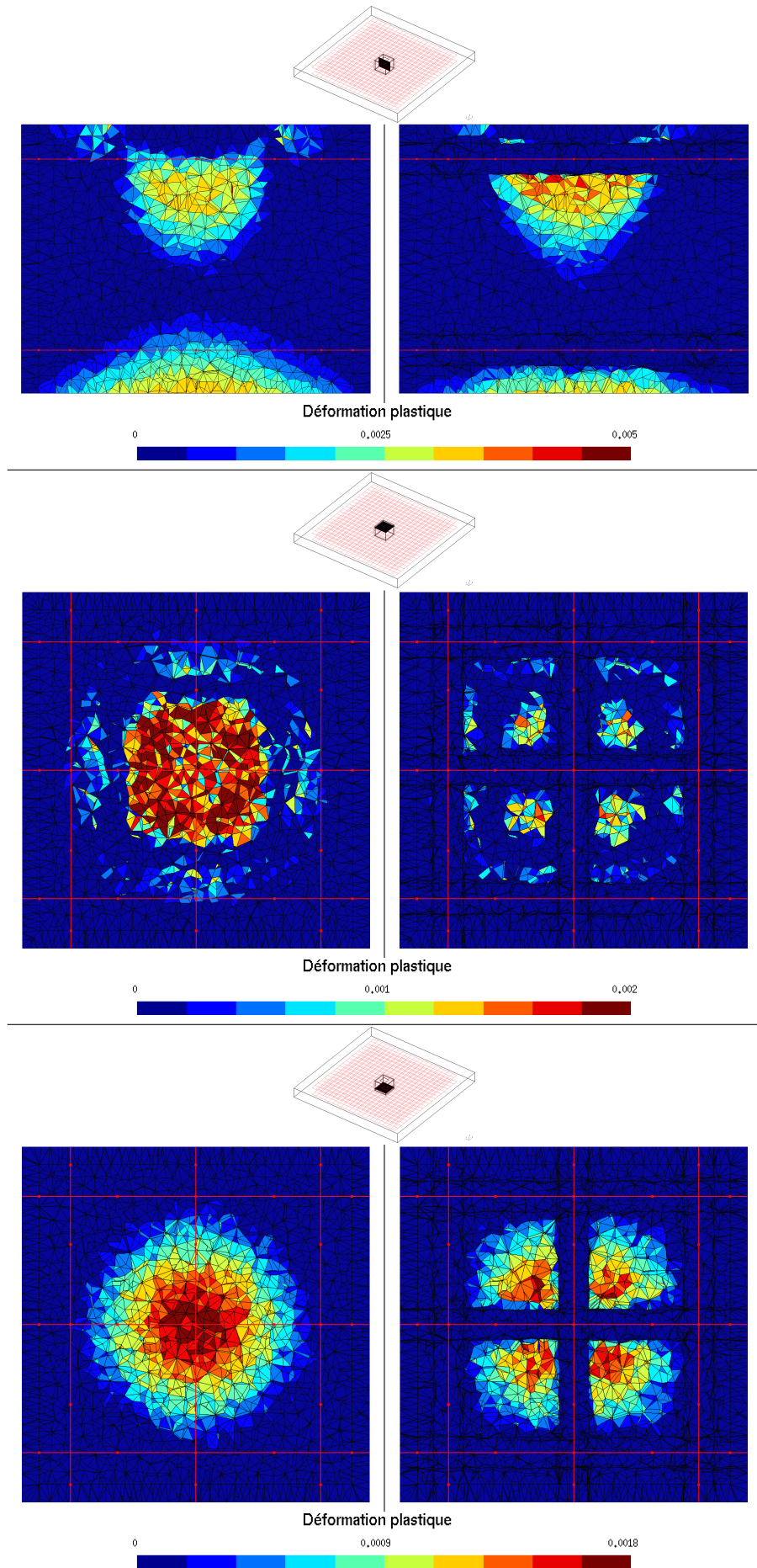


FIGURE 5.25. – Contrainte plastique à la fin de chaque calcul dans différentes sections planes de la dalle 3D.

approches permettant de coupler des modèles 1D/2D à des modèles 3D, il n'est pas nécessaire de connaître exactement l'interface entre les zones 1D et 3D, la transition entre les deux étant assurée par le coefficient α_e .

- Le coût en calcul est faible, y compris en cas d'analyse non-linéaire : le calcul du coefficient α_e ne doit être fait qu'une fois, en début de calcul.
- Elle est très simple à utiliser. Il suffit de connaître la zone d'intérêt, ce qui est une question préalable à tout calcul par éléments finis, et la trajectoire 1D des armatures. La partie 3D est alors représentée par X-FEM, ce qui simplifie les procédures de maillage, tandis que le maillage 1D est totalement indépendant du maillage volumique.

Tout comme pour un calcul par éléments finis standard, on insiste sur le fait que l'efficacité de la méthode mixte dépend fortement du bon sens de l'utilisateur. Par exemple, la finesse du maillage dans la zone d'intérêt doit permettre de représenter correctement les armatures. L'approximation géométrique par des fonctions level sets étant linéaire (cf. section 5.2.2), la taille des mailles doit être choisie comme on choisirait la taille d'éléments linéaires si l'on souhaitait mailler explicitement l'interface avec des éléments volumiques. Au moins un ordre de grandeur d'écart avec le rayon de l'armature semble être un minimum.

Conclusion et perspectives

Les objectifs de cette thèse étaient de répondre à deux problèmes couramment rencontrés lorsque l'on cherche à modéliser les structures en béton armé, à savoir la modélisation du béton et la représentation géométrique des armatures.

Modélisation de la fissuration du béton avec la méthode TLS

Un état de l'art des connaissances sur la modélisation des matériaux quasi-fragiles a été dressé dans le chapitre 1. Il en est ressorti que la plupart des modèles de la littérature permettant de modéliser la dégradation du béton peuvent être classés en deux grandes catégories qui sont la mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement. Chaque type de modèle semble bien adapté pour l'étude d'un aspect précis de ce phénomène, à savoir modélisation de l'endommagement diffus pour la mécanique de l'endommagement, et macro-fissuration pour la mécanique de la rupture. En revanche, aucun n'est capable de représenter l'intégralité du scénario de fissuration du béton.

L'approche TLS présentée dans le chapitre 2 comme méthode de régularisation des modèles d'endommagement non-locaux semble être une alternative intéressante. Cette approche relativement récente (Moës *et al.*, 2011) est basée sur l'utilisation d'une fonction level set ϕ pour représenter l'endommagement de la structure. Dans le cadre de la méthode TLS, le profil d'endommagement d est une fonction supposée connue, définie en fonction de ϕ et d'une longueur caractéristique du matériau ℓ_c . Les fonctions level set étant particulièrement adaptées à la localisation d'interface, la position des macro-fissures peut alors aisément être localisée, il s'agit en effet de l'iso- ℓ_c de ϕ . Un enrichissement par la méthode X-FEM est alors introduit, modélisant ainsi la discontinuité du champ de déplacement correspondant à l'ouverture des fissures. La méthode TLS constitue ainsi une transition naturelle de la mécanique de l'endommagement vers la mécanique de la rupture. La première version de la méthode (Moës *et al.*, 2011; Bernard *et al.*, 2012) permettait de ne modéliser que l'endommagement localisé, et a été rapidement suivie par une deuxième version (Moës *et al.*, 2014) permettant également de modéliser l'endommagement diffus. Cette deuxième version est évidemment plus complète, mais dispose de moins de fonctionnalités que la première, notamment la double-découpe (Salzman *et al.*, 2016), indispensable à l'extraction des ouvertures de fissures. Les deux versions ont donc été présentées et comparées. Concernant le choix des paramètres, il a été montré que les modèles cohésifs sont particulièrement efficaces pour reproduire des résultats expérimentaux, notamment en ce qui concerne les effets d'échelle. Les paramètres matériaux ont donc été choisis afin d'avoir un comportement de la méthode TLS équivalent à un modèle cohésif bilinéaire sur un cas 1D (Parrilla Gómez, 2015).

L'extraction d'ouverture a été illustrée dans le chapitre 3, sur des cas tests en béton non-armé ne présentant qu'une seule fissure. Une discussion a notamment été réalisée sur le modèle d'endommagement pour lequel la fonction d'adoucissement est une fonction constante. Il en a été conclu que ce modèle, qui est historiquement le premier modèle à avoir été utilisé pour illustrer l'approche TLS (Moës *et al.*, 2011; Bernard *et al.*, 2012), n'est pas pertinent pour reproduire des résultats expérimentaux. Ce modèle a cependant permis de souligner certains problèmes du modèle équivalent à un modèle cohésif bilinéaire présenté dans la section 2.5. Les courbes force-déplacement présentent de fortes oscillations dues au pilotage explicite du chargement, et des difficultés d'intégration numérique liées à la forme particulière de la fonction d'adoucissement ont été mises en évidence. Néanmoins, les résultats numériques obtenus avec la méthode TLS permettent de retrouver (aux oscillations près) les résultats expérimentaux. Il existe dans la littérature des méthodes permettant d'obtenir les ouvertures de fissure en post-traitement à partir de modèles d'endommagement non-locaux, mais on insiste sur le fait qu'aucune étape de post-traitement n'est nécessaire avec l'approche TLS. Les deux versions de la méthode ont également été comparées, mettant ainsi en évidence que la version simplifiée de la méthode TLS est suffisante pour des cas où l'endommagement est uniquement localisé, mais n'est plus valide sur des problèmes où de l'endommagement diffus est attendu.

La version complète de la méthode TLS a donc été appliquée à la simulation d'un tirant et d'une poutre en béton armé dans le chapitre 4. Là encore, les résultats globaux en termes de courbes force-déplacement sont, aux oscillations près, proches des résultats expérimentaux. La particularité de ce type de cas test est le nombre élevé de fissures attendu. L'extraction de leur ouverture n'est plus possible sans double-découpe, en revanche les espacements sont correctement reproduits dans le cas du tirant. Pour le cas test de la poutre, issu du benchmark CEOS.FR, les espacements obtenus surestiment les résultats expérimentaux. Cette tendance a été observée par la plupart des autres participants du benchmark, ce qui laisse supposer que les écarts obtenus viennent d'une hypothèse de calcul général (calcul réalisé en 2D, représentation des armatures, ...) plutôt que de la méthode TLS. L'une des principales difficultés rencontrées dans ce type de cas-test est due à la multi-fissuration, qui entraîne des difficultés lors de l'étape de réinitialisation de la level set. Une solution temporaire a été proposée, sans pour autant régler rigoureusement le problème. Néanmoins, aux quelques difficultés numériques près, ce chapitre a permis de valider la capacité de la méthode TLS à reproduire la multi-fissuration.

Représentation multi-dimensionnelle des armatures

Une nouvelle approche de la modélisation géométrique des armatures a été proposée dans le chapitre 5. Cette méthode repose sur l'idée que dans la majorité des simulations par éléments finis, il est possible d'identifier des zones d'intérêt. Ces zones sont maillées finement afin d'avoir des résultats précis, tandis que le maillage est déraffiné dans le reste de la structure, afin de diminuer le nombre de degrés de liberté du calcul. L'approche développée dans ce chapitre permet de superposer modélisation volumique et linéique des armatures. La partie volumique est traitée par la méthode X-FEM, et per-

met d’obtenir des résultats précis dans la zone d’intérêt tout en simplifiant la procédure de maillage. Lorsque le maillage devient trop grossier, la méthode X-FEM ne parvient plus à représenter les armatures avec un degré de précision suffisant. La partie linéique permet alors de corriger la raideur globale de la structure, sous la forme d’éléments barres 1D dont la matrice raideur est multipliée par un coefficient tenant compte de l’erreur commise par l’approximation X-FEM. Cela permet de retrouver dans la zone d’intérêt des résultats proches de ceux que l’on aurait obtenus avec une modélisation volumique des armatures dans toute la structure. Cette approche a été testée et validée sur plusieurs cas tests, en linéaire et en non-linéaire.

Perspectives

Il a été montré dans cette thèse que l’approche TLS est un outil prometteur pour l’analyse de la fissuration des structures en béton armé. Pris séparément, les ouvertures et les espacements de fissures sont correctement reproduits. Cette méthode est cependant récente, et il semble qu’un certain travail d’optimisation soit nécessaire afin de pouvoir l’appliquer à l’étude de cas industriels complexes. Ainsi, comme mentionné dans la section 2.4, deux versions de la méthode sont actuellement implémentées, la version simplifiée, plus restrictive en termes de physique représentée mais disposant de davantage de fonctionnalités, et la version complète, plus générale mais également moins avancée dans son implémentation. Une première étape serait d’ajouter à la version complète les fonctionnalités qui lui manquent. Les plus importantes étant la double-découpe, nécessaire afin d’obtenir une représentation suffisamment précise de l’iso- ℓ_c de la level set afin d’en extraire les ouvertures de fissure, et la possibilité de réaliser des calculs en trois dimensions. Ce deuxième point est d’autant plus important que dans le cas du béton armé, les effets 3D dus à la présence des armatures peuvent difficilement être négligés, contrairement au cas non-armé où des modèles plans peuvent être suffisants. Un autre aspect à améliorer concerne l’étape de réinitialisation de la level set qui, on l’a vu sur le cas test du benchmark CEOS.FR section 4.3, peut poser des problèmes de représentation de la zone morte.

Un travail d’optimisation des performances semble également être indispensable. Le calcul des champs moyennés nécessite en effet d’intégrer numériquement sur une bande de largeur comprise entre 0 et ℓ_c . Afin d’obtenir une précision correcte sur ces champs, un nombre minimum d’éléments finis dans la largeur de cette bande est nécessaire (dans tous les calculs présentés dans cette thèse, au moins 5 éléments finis dans une largeur de bande ℓ_c étaient utilisés). Cette contrainte impose donc des maillages assez fins. Cela ne pose pas de problème pour des cas simples à une seule fissure tels que ceux présentés dans le chapitre 3, où il suffit de raffiner localement le maillage sur la trajectoire de la fissure. En revanche, dans le cas d’une structure en béton armé où de la multi-fissuration est attendue, un tel degré de raffinement est nécessaire dans quasiment toute la structure. Les coûts de calcul peuvent ainsi augmenter rapidement, d’autant plus que, comme mentionné ci-dessus, il est préférable autant que possible de modéliser ces structures en 3D. Des travaux d’optimisation sont en cours, notamment au niveau de la parallélisation des calculs (Salzman *et al.*, 2016). Des stratégies de remaillage (*Octree*, anisotrope) sont également envisagées, qui permettraient de concentrer les degrés de libertés là où il est nécessaire d’avoir des résultats précis, comme par exemple en “pointe” de fis-

sure, et de déraffiner loin de ces zones. On peut ajouter à cela une difficulté supplémentaire qui est la forme particulière de la fonction d'adoucissement permettant d'obtenir un comportement équivalent à un modèle cohésif, qui tend vers l'infini lorsque l'endommagement tend vers 1, ce qui complique d'autant l'intégration numérique pour le calcul des champs moyens. Un enrichissement des champs mécaniques pourrait améliorer la précision des calculs. Une première possibilité serait d'ajouter des enrichissements spécifiques à la pointe de la fissure afin de mieux capter la singularité du champ de déformation, comme cela est déjà fait depuis les débuts de l'application de la méthode X-FEM à la mécanique de la rupture. Une autre consisterait à introduire une fissure cohésive devant la pointe de la fissure représentée géométriquement par l'iso- ℓ_c de la level set, là où l'endommagement est très proche de 1, l'idée étant qu'un saut de déplacement est plus facile à intégrer qu'une fonction d'adoucissement tendant vers l'infini lorsque l'endommagement tend vers 1.

Concernant la méthode de représentation géométrique des armatures présentée dans le chapitre 5, on rappelle que celle-ci a été développée en considérant l'interface entre les armatures et la matrice parfaite, ce qui est en pratique rarement vrai (cf. section 4.1.2). Si les armatures sont modélisées par la méthode X-FEM, une approche similaire à ce qui a été fait par Moës et Belytschko (2002) dans le cadre des fissures cohésives permettrait d'introduire une loi d'interface. La fonction d'enrichissement de Ridge serait remplacée par une fonction d'enrichissement discontinue de Heaviside, pour obtenir un déplacement discontinu à l'interface mais avec des forces "cohésives" représentant la liaison entre les deux matériaux. Pour les armatures représentées par des éléments barres, il est possible d'introduire un glissement entre les nœuds barres et les éléments volumiques afin d'introduire des efforts de liaison (Casanova, 2012). Il reste à traiter le cas où les modélisations volumiques et linéiques sont superposées ($0 < \alpha_e < 1$).

Enfin, il serait intéressant de tester cette approche sur des cas tests plus réalistes que les quelques exemples illustratifs présentés dans ce chapitre. Un couplage avec la méthode TLS serait l'idéal, mais présente néanmoins plusieurs difficultés, tant au niveau de la théorie (prise en compte des enrichissements X-FEM pour l'ouverture de fissure et de l'enrichissement de Ridge) que de l'implémentation (notamment la gestion de deux fonctions level set dans le même calcul).

Liste des figures

1.1. Définition du problème mécanique	13
1.2. Evolution de la contrainte en pointe de fissure	16
1.3. Définition du problème mécanique fissuré	17
1.4. Fissure cohésive équivalente	18
1.5. Exemple de loi cohésive $\sigma(w)$	18
1.6. Propagation d'une fissure cohésive dans une poutre en flexion 3 points (Hillerborg <i>et al.</i> , 1976).	18
1.7. Illustration du problème d'unicité pour les modèles adoucissants. (a) Barre de longueur L maillée avec deux éléments finis. (b) Loi de comportement adoucissante $\sigma = f(\epsilon)$ considérée	24
1.8. Exemple de loi de comportement de type second gradient en 1D (Chambon <i>et al.</i> , 1998) (N : contrainte classique. M : double contrainte). À gauche : loi de comportement adoucissante pour le premier gradient. À droite : loi de comportement linéaire élastique pour le second gradient.	24
1.9. Champ auxiliaire α pour une fissure en $x = 0$. (a) Champ idéalisé. (b) Champ lissé.	27
2.1. Exemple de profil d'endommagement	32
2.2. Définition des différents domaines.	35
2.3. Définition de la zone endommagée	36
2.4. Réinitialisation de ϕ	40
2.5. Enrichissement par la méthode X-FEM en 1D. a. Fissure 0D en mécanique de la rupture, située en $\phi = 0$. b. Fissure TLS, positionnée en $\phi = \ell_c$ (la zone endommagée Ω_c est en pointillés).	41
2.6. Exemple de nœuds (en bleu) à enrichir, dont le support est coupé deux fois par l'iso- ℓ_c (en rouge) de ϕ	41
2.7. Approximation de Γ_c (ligne pointillée).	42
2.8. Exemple de fissure obtenue : a : sans double découpe. b : avec double découpe.	43
2.9. Définition des différents domaines.	44
2.10. Définition des différents domaines discrétisés.	45
2.11. Calcul des modes.	47
2.12. Réinitialisation de ϕ	49
2.13. Enrichissement par ajout de nœuds virtuels. Cercles noirs : nœuds du maillage d'origine. Losanges blancs : nœuds virtuels. Carrés noirs : points de Gauss.	50
2.14. Comparaison des implémentations des deux versions de la méthode TLS.	52

2.15. Loi cohésive bilinéaire.	53
2.16. Influence des différents paramètres du modèle cohésif et de la longueur caractéristique sur le comportement aux points de Gauss.	55
3.1. Essai brésilien : géométrie et conditions aux limites.	59
3.2. Paramètres matériaux de l'essai brésilien.	60
3.3. Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai brésilien.	60
3.4. Loi cohésive adimensionnée équivalente à un modèle TLS avec une fonction d'adoucissement $h(d) = 1$	61
3.5. Lois cohésives équivalentes aux modèles brutal et progressif pour l'essai brésilien.	62
3.6. Courbes force-CMOD	64
3.7. Exemple de champ d'endommagement, pour une valeur de CMOD environ égale à 7 microns.	65
3.8. Déformée de l'éprouvette.	66
3.9. Ouverture de fissure le long de la fissure obtenue avec le modèle brutal pour différentes valeurs du CMOD, maillage grossier.	67
3.10. Flexion trois points sur poutre entaillée : géométrie et conditions aux limites.	68
3.11. Maillage grossier ($h = \ell_c/5$) de la poutre entaillée	68
3.12. Paramètres matériaux de l'essai de poutre en flexion trois points.	69
3.13. Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai de poutre en flexion trois points.	69
3.14. Champ d'endommagement pour la poutre non-entaillée, pour différentes tailles de maille et pour les deux versions de la méthode TLS.	71
3.15. Courbes force en fonction du déplacement imposé ($h = \ell_c/5$) pour la poutre non-entaillée.	72
3.16. Courbes force en fonction du déplacement imposé pour la poutre non-entaillée, pour différentes tailles de mailles : a. version simplifiée. b. version complète	73
3.17. Champ d'endommagement obtenu pour la poutre non-entaillée avec la version simplifiée, en laissant active la recherche de défauts à chaque pas de temps.	73
3.18. Champ d'endommagement pour la poutre entaillée, pour différentes tailles de maille et pour les deux versions de la méthode TLS.	74
3.19. Courbes force en fonction du déplacement imposé ($h = \ell_c/5$) pour la poutre entaillée.	75
3.20. Courbes force en fonction du déplacement imposé pour la poutre entaillée, pour différentes tailles de mailles : a. version simplifiée. b. version complète.	76
3.21. Courbes force-CMOD pour la poutre entaillée, comparaison entre résultats TLS obtenus avec la version simplifiée ($h = \ell_c/5$) et résultats expérimentaux tirés de (Dufour <i>et al.</i> , 2012).	76
3.22. Ouverture de fissure le long de la fissure pour la poutre entaillée, comparaison entre résultats TLS, résultats expérimentaux et résultats numériques tirés de (Dufour <i>et al.</i> , 2012), pour une valeur du CMOD égale à 200 microns.	77
4.1. Illustration du procédé de fissuration dans une poutre en béton sur un essai de flexion trois points.	80

4.2. (Casanova, 2012) Phase initiale. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée	81
4.3. (Casanova, 2012) Phase de fissuration. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée	82
4.4. (Casanova, 2012) Phase de rupture. a. Interface acier-béton b. Partie de la loi d'adhérence associée	82
4.5. Exemples de modélisations numériques de l'interface acier-béton.	83
4.6. Mécanisme de fissuration d'un tirant en béton.	84
4.7. Maillage et conditions aux limites de l'essai de tirant.	85
4.8. Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai de tirant	87
4.9. Champs d'endommagement obtenus sans distribution aléatoire du module d'Young, à différents instants du calcul au cours de l'essai de tirant.	88
4.10. Courbes contraintes/déformation dans l'acier pour l'essai de tirant.	89
4.11. Champs d'endommagement pour la répartition aléatoire n°1, à différents instants du calcul au cours de l'essai de tirant.	90
4.12. Champs d'endommagement en fin de phase de fissuration pour chaque répartition aléatoire pour l'essai de tirant.	91
4.13. Géométrie et plan de ferrailage de l'essai CEOS.FR (Jason, 2009).	92
4.14. Maillage de la poutre de l'essai CEOS.FR.	93
4.15. Comportement $\sigma(\epsilon)$ aux points de Gauss pour l'essai CEOS.FR.	95
4.16. Courbe force-déplacement vertical en cas de disparition de matière pour l'essai CEOS.FR.	95
4.17. Disparition de matière sous l'armature longitudinale inférieure au cours de l'essai CEOS.FR : champ d'endommagement (à gauche) et déformation longitudinale ϵ_{xx} (à droite). Pour la déformation ϵ_{xx} , une échelle logarithmique avec un minimum de ϵ_{xx} à $1e^{-12}$ a été utilisé pour améliorer la lisibilité des résultats.	97
4.18. Exemple de champ d'endommagement obtenu pour l'essai CEOS.FR (zoom sur le centre de la poutre)	98
4.19. Illustration du problème de réinitialisation de la level set. a. Début du pas de temps n . b. et c. Reconstruction de Γ_c à partir de Γ . d. L'élément en rouge passe dans Ω_{NL} . e. La partie connexe de Γ correspondant à cet élément disparaît. f. Le calcul de Γ_c à partir de Γ fait "disparaître" l'îlot de matière correspondant à l'élément rouge.	99
4.20. Solution proposée au problème de "disparition de matière". a. Début du pas de temps $n+1$, la partie connexe de Γ correspondant à l'élément rouge a disparu. b. Cette dernière est rajoutée dans Γ . c. L'îlot de matière correspondant à cette partie connexe de Γ ne disparaît plus.	100
4.21. Fissures tangentes. a. Deux bandes endommagées bien définies. b. Les deux bandes endommagées coalescent sur une petite longueur. c. La longueur de la zone de coalescence s'élargit jusqu'à former une fissure orthogonale aux deux premières.	103
4.22. Courbe force - déplacement vertical pour l'essai CEOS.FR	104
4.23. Courbes force - déformations moyennes des jauges J1 à J4 pour l'essai CEOS.FR.	105
4.24. Champ d'endommagement à différents instants du calcul pour l'essai CEOS.FR.	106

5.1.	Modélisation d'une inclusion circulaire dans une plaque carrée par la méthode X-FEM.	
a.	Définition des nœuds enrichis. b. Localisation de l'interface par une fonction level set.	112
5.2.	Fonction d'enrichissement de Ridge en 1D. Les nœuds losanges sont les nœuds enrichis.	113
5.3.	Représentation d'une interface sur un maillage en utilisant une fonction level set. Traits pleins noirs : arrêtes du maillage. a. Traits pointillés bleu : interface réelle. b. Nœuds triangles verts : $\phi(\mathbf{x}) < 0$. Nœuds carrés rouges : $\phi(\mathbf{x}) > 0$. Nœuds circulaires bleus : $\phi(\mathbf{x}) = 0$. Traits pointillés verts : géométrie approchée par la level set. L'intégration numérique est réalisée sur chaque sous-cellule triangulaire de la figure b.	114
5.4.	Représentation d'armatures avec une level set. Gauche : maillage fin dans toute la structure. Droite : maillage grossier dans une partie de la structure. Haut : vue d'ensemble. Bas : Zoom sur la zone de transition entre maillage fin et maillage grossier.	115
5.5.	Zoom sur un nœud dont le support est coupé deux fois par Γ . Traits pointillés rouges : géométrie réelle de Γ . Traits pleins verts : géométrie interpolée de Γ	116
5.6.	Nœud bar à l'intérieur d'un élément volumique.	116
5.7.	Redistribution de la raideur des éléments barres dans les éléments volumiques. a. Définitions des différents domaines. b. Maillage de la structure et maillage 1D.	118
5.8.	Calcul de α_e	119
5.9.	Dimensions et conditions aux limites de l'essai de poutre 2D en flexion trois points. . .	121
5.10.	Maillage utilisé pour le cas test 2D de flexion trois points en élasticité. Dans la zone d'intérêt, les éléments du maillage de calcul et du maillage de référence sont exactement superposés.	122
5.11.	Géométrie approchée des armatures pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points (zoom dans le centre de la poutre).	122
5.12.	Coefficient α_e le long des armatures pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points. .	122
5.13.	Déplacements, efforts normaux et erreurs relativement dans l'armature supérieure pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points. Les lignes pointillées noires marquent les limites de la zone d'intérêt.	124
5.14.	Erreur en énergie pour l'essai de poutre 2D en flexion trois points, tracée pour un maximum égal à 0.2 pour améliorer la lisibilité : les zones en rouge correspondent à des erreurs supérieures à 0.2.	125
5.15.	a. Maillage 3D du poteau. b. Vu d'ensemble du maillage 1D, et géométrie approchée des armatures par la méthode X-FEM. c. Zoom autour de la zone d'intérêt. d. Zoom autour de la zone d'intérêt, proche de la partie 3D des armatures.	126
5.16.	Contrainte de Von Mises dans plusieurs sections planes du poteau 3D.	127
5.17.	Haut : maillages utilisés pour la poutre élastoplastique en flexion trois points. Bas ; géométrie des armatures approchée par X-FEM	128
5.18.	Contrainte plastique à la fin de chaque calcul pour la poutre élastoplastique en flexion trois points.. Haut : Méthode barre. Milieu : méthode mixte. Bas : Méthode volumique.	129
5.19.	Géométrie et conditions aux limites de l'essai de poutre en flexion quatre points. . . .	130
5.20.	Maillages utilisés pour l'essai de poutre en flexion quatre points. À gauche : maillage de calcul. À droite : maillage de référence.	131

5.21. Géométrie approchée des armatures par la méthode X-FEM pour l'essai de flexion quatre points.	131
5.22. Contrainte plastique pour la poutre en flexion quatre points à la fin de chaque calcul dans différentes sections planes.	132
5.23. Géométrie de la dalle 3D.	133
5.24. Géométrie des armatures de la dalle 3D approchée par X-FEM	134
5.25. Contrainte plastique à la fin de chaque calcul dans différentes sections planes de la dalle 3D.	135
B.1. Comportement aux points de Gauss du modèle élasto-plastique à écrouissage isotrope.	162

Liste des tableaux

4.1. Paramètres matériaux de l'essai de tirant.	86
4.2. Espacements des fissures obtenus pour l'essai de tirant.	92
4.3. Paramètres matériaux pour l'essai CEOS.FR.	94
5.1. Propriétés matériaux	120
5.2. Nombre de degrés de liberté et temps de calcul pour le calcul de la poutre en flexion quatre points.	133

Bibliographie

- ADALSTEINSSON, D. et SETHIAN, J. A. (1999). The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods. *Journal of Computational Physics*, 148(1):2–22.
- ADELAÏDE, L., ROSPARS, C. et RUOCCI, G. (2013). Numerical modelling of large reinforced concrete specimens based on experimental tests from benchmark crack. *VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, pages 1–11.
- BARANBLATT, G. (1961). The mathematical theory of equilibrium cracks formed by brittle fracture. *Zh. Prkl. Mekh. Tekh. Fiz*, (4):3–56.
- BAŽANT, Z. P. (1976). Instability, Ductility and Size-effect in Strain-Softening Concrete. *Journal Of The Engineering Mechanics Division*, 102(2):331–343.
- BAŽANT, Z. P. (1986). Mechanics of distributed cracking. *Applied Mechanics Reviews*, 39(5):675–705.
- BAŽANT, Z. P. (1991). Why continuum damage is nonlocal : micromechanics arguments. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(5):1070–1087.
- BAŽANT, Z. P. et OH, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16:155–177.
- BAŽANT, Z. P. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Measurement of characteristic length of non local continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4).
- BAŽANT, Z. P. et PLANAS, J. (1997). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC press.
- BERNARD, P. É., MOËS, N. et CHEVAUGEON, N. (2012). Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233-236:11–27.
- BUDYN, E., GOANGSEUP, Z., MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2004). A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(10):1741–1770.
- CARNEIRO, F. et BARCELLOS, A. (1953). Concrete tensile strength. *RILEM Bulletin*, 13:97–107.
- CASANOVA, A. (2012). Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul de structures industrielles. *Thèse de Doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.

- CASEY L., R., HEGEMANN, J., SIFAKIS, E., HELLRUNG, J. et JOSEPH M., T. (2011). An XFEM method for modeling geometrically elaborate crack propagation in brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(10):1042–1065.
- CAZES, F., CORET, M., COMBESURE, A. et GRAVOUIL, A. (2009). A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6):1476–1490.
- CAZES, F. et MOËS, N. (2015). Comparison of a phase-field model and of a thick level set model for brittle and quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(February):114–143.
- CAZES, F., SIMATOS, A., CORET, M. et COMBESURE, A. (2010). A cohesive zone model which is energetically equivalent to a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(6):976–989.
- CHABOCHE, J.-L. et LEMAITRE, J. (1988). *Mécanique des matériaux solides*. Paris, dunod édition.
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et EL HASSAN, N. (1998). One-dimensional localisation studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4):637–656.
- COMI, C., MARIANI, S. et PEREGO, U. (2007). An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(2):213–238.
- COSSERAT, E. et COSSERAT, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Herman, Paris.
- DAOUD, A. (2003). *Étude expérimentale de la liaison entre l'acier et le béton autoplaçant-contribution à la modélisation numérique de l'interface*. Thèse de doctorat.
- DAOUD, A., MAUREL, O. et LABORDERIE, C. (2013). 2D mesoscopic modelling of bar-concrete bond. *Engineering Structures*, 49:696–706.
- DAUX, C., MOËS, N. et DOLBOW, J. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(September 1999):1741–1760.
- DAVID, M. (2012). Approche multi-échelle du comportement mécanique des structures en béton armé - Application aux enceintes de confinement des centrales nucléaires. *Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique*.
- DESMORAT, R., GATUINGT, F. et RAGUENEAU, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1539–1560.
- DOMINGUEZ, N. (2005). Etude de la liaison Acier-Béton : De la modélisation du phénomène à la formulation d'un Elément Fini Enrichi " Béton Armé ". *Thèse de Doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*.

- DUFOUR, F., LEGRAIN, G., PIJAUDIER-CABOT, G. et HUERTA, A. (2012). Estimate of crack opening from a 2D continuum-based FE computation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 36(16):1813–1830.
- DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., CHOINSKA, M. et HUERTA, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers & Concrete*, 5(4):375–388.
- DUGDALE, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100–104.
- EN, N. (2005). *EN, N. F. 1-1 :«Eurocode 2 : Calcul des structures en béton-Partie 1-1 : règles générales et règles pour les bâtiments»*.
- ERDOGAN, F. et SIH, G. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering*, 85(4):519–525.
- FICHANT, S., LABORDERIE, C. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1999). A comparative study of isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4(4):339–359.
- FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342.
- GHAVAMIAN, S., CAROL, I. et DELAPLACE, A. (2003). Discussions over MECA project results. *Revue Française de Génie Civil*, 7(5):543–581.
- GIRY, C. (2011). *Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration dans les structures en béton armé*. Thèse de doctorat.
- GOMES, H. M. et AWRUCH, A. M. (2001). Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the finite element method. *Advances in engineering software*, 32(4):257–277.
- GORRIS, T. (2012). *Application de la méthode Thick Level Set à l’étude des composites stratifiés*. Thèse de doctorat.
- GRIFFITH, A. A. (1920). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221:163–198.
- HANSBO, P. (2005). Nitsche’s method for interface problems in computational mechanics. *GAMM-Mitteilungen*, 28(2):183–206.
- HARTL, H., SPAROWITZ, L. et ELGAMAL, A. (2000). The 3D Computational Modeling of Reinforced and Prestressed Concrete Structures. In *3rd International PhD Symposium in Civil Engineering, Vienna*, volume 2, pages 69–79.

- HILLERBORG, A. (1985). The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_f of concrete. *Materials and Structures*, 18(4):291–296.
- HILLERBORG, A., M., M. et PERTERSSON, P.-E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782.
- HOOVER, C. G. et BAŽANT, Z. P. (2014). Cohesive crack, size effect, crack band and work-of-fracture models compared to comprehensive concrete fracture tests. *International Journal of Fracture*, 187(1):133–143.
- IRWIN, G. R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*.
- J. OLIVER (1996a). Modelling Strong Discontinuities In Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1 : Fundamentals. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 39(January):3575–3600.
- J. OLIVER (1996b). Modelling Strong Discontinuities In Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 2 : Numerical Simulation. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 39(January):3601–3623.
- JASON, L. (2008). Réponse au benchmark statique monotone du projet national CEOS.FR. Rapport technique.
- JASON, L. (2009). Rapport de recherche de synthèse du benchmark statique monotone. Projet national CEOS.FR. Rapport technique.
- JASON, L. et DURAND, S. (2007). A two-surface plastic model for concrete behaviour. *Revue Européenne de Génie Civil*, 11(5):579–602.
- JASON, L., GHAVAMIAN, S. et COURTOIS, A. (2010). Truss vs solid modeling of tendons in prestressed concrete structures : Consequences on mechanical capacity of a Representative Structural Volume. *Engineering Structures*, 32(6):1779–1790.
- JASON, L., HUERTA, A., PIJAUDIER-CABOT, G. et GHAVAMIAN, S. (2006). An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7077–7092.
- JIRÁSEK, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31-32):4133–4145.
- JIRÁSEK, M. et PATZÁK, B. (2002). Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. *Computers and Structures*, 80(14-15):1279–1293.
- KACHANOV, L. (1958). Rupture Time Under Creep Conditions. *Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, (8):26–31.

- KARMA, A., KESSLER, D. et LEVINE, H. (2001). Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture. *Physical Review Letters*, 87(4):045501.
- KOTRONIS, P., CHAMBON, R., MAZARS, J. et COLLIN, F. (2005). Local second gradient models and damage mechanics : Application to concrete. In *11th International Conference on Fracture 2005, ICF11*, volume 3, pages 1800–1805.
- KRAYANI, A., PIJAUDIER-CABOT, G. et DUFOUR, F. (2009). Boundary effect on weight function in nonlocal damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(14):2217–2231.
- LA BORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*. Thèse de doctorat.
- LABORDERIE, C., LAWRENCE, C. et SORNIN, G. (2007). Approche mésoscopique du comportement du béton. *Revue Européenne de Génie Civil*, 11(4):407–421.
- LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6):581–597.
- LEMAITRE, J. et DESMORAT, R. (2005). *Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer Science & Business Media.
- LORENTZ, E., CUVILLIEZ, S. et KAZYMYRENKO, K. (2011). Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus - Mécanique*, 339(1):20–26.
- LUTZ, L. A. et GERGELY, P. (1967). Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete. *ACI Journal Proceedings*, 64(11).
- MATALLAH, M., LABORDERIE, C. et MAUREL, O. (2010). A practical method to estimate crack opening in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(15):1615–1633.
- MAUREL, O. (1999). *Contribution à l'étude de la fissuration des membrures tendues en béton armé de hautes performances*. Thèse de doctorat, INSA, Toulouse.
- MAZARS, J. (1986). A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25:729–737.
- MAZARS, J. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1996). From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33(96):3327–3342.
- MCCUNE, R. W., ARMSTRONG, C. G. et ROBINSON, D. J. (2000). Mixed-dimensional coupling in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(6):725–750.
- MIEHE, C., WELSCHINGER, F. et HOFACKER, M. (2010). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10):1273–1311.

- MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833.
- MOËS, N., CLOIREC, M., CARTRAUD, P. et REMACLE, J.-F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28):3163–3177.
- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 150(February):131–150.
- MOËS, N., STOLZ, C., BERNARD, P. É. et CHEVAUGEON, N. (2011). A level set based model for damage growth : the thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(3):358–380.
- MOËS, N., STOLZ, C. et CHEVAUGEON, N. (2014). Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(16):1–21.
- MONAGHAN, D. J., DOHERTY, I. W., MC COURT, D. et ARMSTRONG, C. G. (1998). Coupling 1D Beams to 3D Bodies. In *7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories*, pages 285–293.
- MOREAU, K. (2014). *Simulation numérique par une approche level set épaisse de l’impact à basse vitesse sur matériaux énergétiques*. Thèse de doctorat.
- MOREAU, K., MOËS, N. et CHEVAUGEON, N. (2016). An explicit algorithm for the concurrent development of local and nonlocal damage for quasi-brittle materials with the Thick Level Set approach. (En préparation):1–23.
- MURAKAMI YUKITAKA (1987). Handbook of stress intensity factors. *Two Volumes*.
- NGO, D. et SCORDELIS, A. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal Proceedings*, 64(3):152–163.
- NGUYEN, V. P., KERFRIDEN, P. et CLAUS, S. (2013). Nitsche’s method method for mixed dimensional analysis : conforming and non-conforming continuum-beam and continuum-plate coupling. pages 0–1.
- OLIVER-LEBLOND, C. (2014). *Comportement à rupture des structures : description à deux échelles des mécanismes locaux appliquée aux matériaux fragiles renforcés*. Thèse de doctorat.
- OLIVER-LEBLOND, C., DELAPLACE, A. et RAGUENEAU, F. (2015). Modelling of three-dimensional crack patterns in deep reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, 83:176–186.
- PARRILLA GÓMEZ, A. (2015). *Analyses numérique et analytique couplées d’un modèle d’endommagement gradué*. Thèse de doctorat.

- PEERLINGS, R. H. J., BREKELMANS, W. A. M., BORST, R. D. et GEERS, M. G. D. (2000). Gradient-enhanced damage modelling of high-cycle fatigue. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(12):1547–1569.
- PEERLINGS, R. H. J., DE BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et DE VREE, J. H. P. (1996). Gradient Enhanced Damage for Quasi-Brittle Materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3391–3403.
- PEERLINGS, R. H. J., GEERS, M. G. D., DE BORST, R. et BREKELMANS, W. A. M. (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45):7723–7746.
- PETERSSON, P.-E. (1981). *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. Division, Inst.
- PHAN, T. S., ROSSI, P. et TAILHAN, J.-L. (2015). Numerical modelling of the concrete/rebar bond. *Cement and Concrete Composites*, 59:1–9.
- PIJAUDIER-CABOT, G. et BAŽANT, Z. P. (1987). Non local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533.
- PIJAUDIER-CABOT, G., MAZARS, J. et PULIKOWSKI, J. (1991). Steel-concrete bond analysis with nonlocal continuous damage. *Journal of Structural Engineering*, 117(3):862–882.
- PLANAS, J., ELICES, M. et GUINEA, G. V. (1993). Cohesive cracks versus nonlocal models : Closing the gap. *International Journal of Fracture*, 63(2):173–187.
- RAOUS, M. et KARRAY, M. (2009). Model coupling friction and adhesion for steel- concrete interfaces. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 34(1):41–50.
- REINHARDT, H. W., BLAAUWENDRAAD, J. et VOS, E. (1984). Prediction of bond between steel and concrete by numerical analysis. *Matériaux et Constructions*, 17(4):311–320.
- RICE, J. R. (1968). A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379–386.
- RICHARD, B., RAGUENEAU, F., CREMONA, C., ADELAÏDE, L. et TAILHAN, J.-L. (2010). A three-dimensional steel/concrete interface model including corrosion effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(6):951–973.
- RILEM, D. R. (1985). Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beames. *Materials and Structures*, 18(106):285–290.
- SADEK, M. et SHAHROUR, I. (2004). A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(9): 931–946.

- SALZMAN, A., MOËS, N. et CHEVAUGEON, N. (2016). On use of the Thick Level Set method in 3D quasi-static crack simulation of quasi-brittle material. *International Journal of Fracture*, (Accepté).
- SELLIER, A., CAPRA, B. et MEBARKI, A. (1999). Concrete behavior : a probabilistic damage model. In *8th International Conference on Applications of Statistics and Probability, Sydney*, pages 12–15.
- SETHIAN, J. A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 93(4):1591–1595.
- SETHIAN, J. A. (1999). *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge university press.
- SIMO, J. C. et HUGHES, T. J. (1998). *Computational Inelasticity*. Berlin, springer édition.
- SIMONE, A., WELLS, G. N. et SLUYS, L. J. (2003). From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41-42):4581–4607.
- SUIDAN, M. et SCHNOBRICH, W. C. (1973). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. *Journal of The Structural Division*, 99(10):2109–2122.
- SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:6183–6200.
- TADA, H., PARIS, P. C. et IRWIN, G. R. (1973). The stress analysis of cracks. *Del Research Corp, Hellertown PA*.
- van der MEER, F. et SLUYS, L. J. (2015). The Thick Level Set method : Sliding deformations and damage initiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285:64–82.

Annexes

A. Calcul de la loi cohésive équivalente à une fonction d'adoucissement constante $h(d) = 1$

On propose ici, connaissant les paramètres de la méthode TLS, à savoir :

- Le profil d'endommagement $d(\phi)$
- La longueur caractéristique ℓ_c
- La forme de la fonction d'adoucissement h
- Le taux de restitution d'énergie critique initial Y_c^0

d'en déduire la forme de la loi cohésive $\sigma = f(w)$, où w est l'ouverture de la fissure et σ la contrainte transmise dans la zone cohésive, d'après la méthode proposée par Parrilla Gómez (2015). On rappelle tout d'abord quelques résultats et notations.

Parrilla Gómez (2015) s'intéresse au cas d'une barre 1D en traction. La barre est modélisée par un modèle cohésif et par la méthode TLS. L'égalité des déplacements aux extrémités de la barre, de l'énergie totale et de l'énergie dissipée permet d'écrire :

$$w = \frac{2\sigma}{E} \int_0^l \left(\frac{1}{1-d(\phi)} \right) d\phi \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma = \sqrt{2EY_c^0 H(d) \frac{1-d}{d}} \quad (\text{A.2})$$

Où :

$$H(d) = \int_{\tilde{d}=0}^d h(\tilde{d}) d\tilde{d} \quad (\text{A.3})$$

Parrilla Gómez (2015) montre que :

$$\sigma_f = \sqrt{2EY_c^0} \quad (\text{A.4})$$

On peut alors écrire (A.1) et (A.2)

$$\hat{w} = \lambda I(\hat{\phi}) \hat{\sigma} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\sigma}^2 = H(d) \frac{1-d}{d} \quad (\text{A.6})$$

où $\hat{\phi} = \frac{\phi}{\ell_c}$, $\hat{w} = \frac{w}{w_f}$ et $\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_f}$, et :

$$I(\hat{\phi}) = \int_0^{\hat{\phi}} \frac{d}{1-d} d\hat{\phi} \quad (\text{A.7})$$

On rappelle que λ est défini dans l'équation (2.84). On s'intéresse ici au cas où $h(d) = 1$, ce qui donne $H(d) = d$: on rappelle également que dans cette thèse, un profil d'endommagement quadratique $d(\hat{\phi}) = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2$ a été utilisé. On peut alors écrire :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{1-d} = 1 - \hat{\phi} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{w} = \lambda(1 - \hat{\sigma})^2 \quad (\text{A.9})$$

Or par définition de $\hat{\sigma}$ et $\hat{w}$, on a $\hat{w} = 1$ lorsque $\hat{\sigma} = 0$, ce qui impose $\lambda = 1$. On en déduit la valeur de w_f :

$$w_f = \frac{2\sigma_f \ell_c}{E} \quad (\text{A.10})$$

On détermine alors $\hat{\sigma}$ en fonction de $\hat{w}$:

$$\hat{\sigma} = 1 - \sqrt{\hat{w}} \quad (\text{A.11})$$

L'énergie de fracturation totale G_F est alors égale à :

$$G_F = \int_0^{+\infty} \sigma(w) dw = \frac{1}{3} \sigma_f w_f = \frac{2\sigma_f^2 \ell_c}{3E} \quad (\text{A.12})$$

B. Modèle élasto-plastique linéaire 1D

On rappelle ici les équations en dimension 1 de l'élasto-plasticité à écrouissage isotrope. La contrainte σ s'exprime en fonction de la déformation ϵ :

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p) \quad (\text{B.1})$$

où ϵ_p désigne la déformation plastique, dont l'incrément s'exprime en fonction de la déformation plastique cumulée p , de la partie déviatorique du tenseur des contraintes $\tilde{\sigma}$ et de la contrainte équivalente de Von Mises σ_{eq} :

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \quad (\text{B.2})$$

qui se simplifie en 1D :

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{p} \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (\text{B.3})$$

Les lois d'évolution s'écrivent alors :

$$|\sigma| - R(p) \leq 0, \quad \dot{p} \geq 0, \quad R(p)\dot{p} = 0 \quad (\text{B.4})$$

où :

$$R(p) = \sigma_y + Hp, \quad H = \frac{E/E_T}{E - E_T} \quad (\text{B.5})$$

R est la fonction d'écrouissage du modèle, exprimée en fonction de la limite élastique σ_y et du module tangent E_T , illustrés sur la figure B.1.

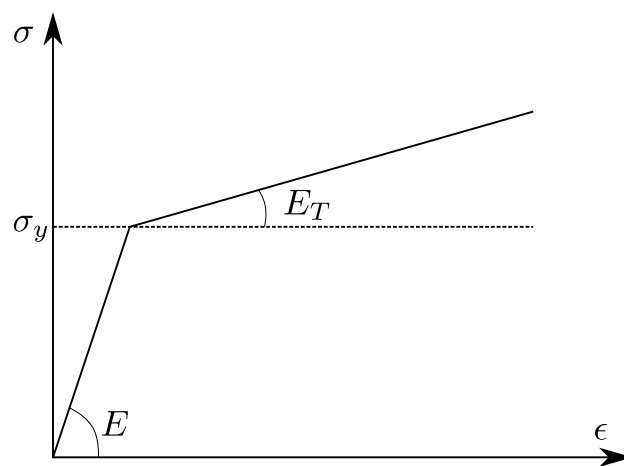


FIGURE B.1. – Comportement aux points de Gauss du modèle élasto-plastique à écrouissage isotrope.

Thèse de Doctorat

Benoît LÉ

Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé: utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts

Contribution to the numerical simulation of reinforced concrete structures: use of level set functions to model cracking and rebars

Résumé

La prédiction de l'état de fissuration est un enjeu crucial pour l'analyse des structures en béton armé, qui nécessite le recours à la modélisation et à la simulation numérique. Le calcul par éléments finis des structures en béton armé pose au moins deux problèmes majeurs : d'une part il existe peu de modèles permettant de traiter à la fois l'initiation, la propagation et l'ouverture des fissures, d'autre part le diamètre généralement faible des armatures métalliques par rapport aux dimensions des structures étudiées nécessite des maillages particulièrement fins. On propose donc des solutions à ces deux problématiques basées sur l'utilisation de fonctions de niveau (level set). L'endommagement et la fissuration du béton sont modélisés à l'aide de l'approche TLS (Thick Level Set). Cette méthode, développée en tant que méthode de régularisation des modèles d'endommagement locaux, utilise une level set afin d'introduire une longueur caractéristique. Cela permet de rendre aisée la localisation de la position des fissures, et donc d'enrichir le champ de déplacement par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) afin de modéliser l'ouverture des macro-fissures. Concernant la modélisation des armatures, une nouvelle approche multidimensionnelle est proposée. Une représentation volumique des armatures par la méthode X-FEM est utilisée dans les zones d'intérêt afin d'obtenir des résultats précis tout en simplifiant la procédure de maillage, tandis qu'une représentation linéique est utilisée dans le reste de la structure afin de réduire le nombre de degrés de liberté du calcul. La méthode de transition développée ici permet d'assurer la cohérence des résultats obtenus

Mots-clés

Béton armé, fonction de niveau, mécanique de l'endommagement, modèle de zone cohésive, level set épaisse, armatures, méthode des éléments finis étendus, approche multidimensionnelle

Abstract

Prediction of cracking is a key point for the analysis of reinforced concrete structures, which requires the use of Modeling and numerical simulation. The analysis of reinforced concrete structures using the finite element method raises two issues: on one hand, few models are able to deal with the initiation, the propagation and the opening of cracks, on the other hand the diameter of the reinforcements which is usually small compared to the dimensions of the structures necessitates very fine meshes. Some solutions to these two problematics are proposed, based on the use of level set functions. Damage and cracking of concrete are modeled using the Thick Level Set (TLS) approach. This method, developed as a mean to regularize local damage models, uses a level set to introduce a characteristic length. It makes the location of the cracks easy, which allows to enrich the displacement field with the eXtended Finite Element Method (X-FEM) in order to model the macro-cracks opening. Concerning the modeling of the reinforcements, a new multidimensionnal approach is proposed. A volumic representation of the reinforcements with the X-FEM method is used in the zones of interest to get accurate results while simplifying the meshing process, whereas a lineic representation is used elsewhere to decrease the number of degrees of freedom. The developed transition method insures the consistency of the results.

Key Words

Reinforced concrete, level set, damage mechanics, cohesive zone model, thick level set, reinforcements, extended finite element method, multidimensionnal approach