



**HAL**  
open science

# Contribución al control geométrico de sistemas de eventos discretos en el álgebra max-plus

Carolina Cardenas Lucena

► **To cite this version:**

Carolina Cardenas Lucena. Contribución al control geométrico de sistemas de eventos discretos en el álgebra max-plus. Automatic. École centrale de Nantes; Universidad de los Andes (Mérida, Venezuela ; 1785-..), 2016. Español. NNT : 2016ECDN0004 . tel-02185328

**HAL Id: tel-02185328**

**<https://theses.hal.science/tel-02185328>**

Submitted on 16 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Carolina CARDENAS LUCENA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes  
du grade de Docteur de l'Université de Los Andes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

**École doctorale** : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

**Discipline** : Automatique, productique

Unité de recherche : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

Soutenue le 23 Novembre 2016

## Contribución al control geométrico de sistemas de eventos discretos en el álgebra max-plus

### JURY

Président :	Edgar CHACON, Professeur, Universidad de los Andes, Venezuela
Rapporteurs :	Basilio DEL MURO CUELLAR, Professeur, Instituto Politécnico Nacional, México Carlos Andrey MAIA, Professeur, Universidad Federal de Minas Gerais, Brasil
Examineurs :	Saïd AMARI, Maître de conférences, Université de Paris 13 Claude MARTINEZ, Maître de conférences, Université de Nantes Miguel Angel INDRIAGO ALVARADO, Professeur, Universidad Politécnica Antonio Jose de Sucre, Venezuela
Directeur de Thèse :	Jean Jacques LOISEAU, Directeur de recherches, CNRS, École Centrale de Nantes
Co-directeur de Thèse :	Juan CARDILLO, Professeur, Universidad de Los Andes, Merida - Venezuela

# Thèse de Doctorat

Carolina CARDENAS LUCENAS

Contribution à la commande géométrique des systèmes à événements discrets dans l'algèbre max-plus  
Contribución al control geométrico de sistemas de eventos discretos en el álgebra max-plus

## Résumé

Le travail présenté s'inscrit dans le contexte de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. La motivation initiale de cette étude a été de contribuer à l'analyse et la commande de systèmes linéaires dans max-plus en utilisant spécifiquement une approche géométrique. La contribution de cette thèse est centrée sur deux problèmes. La première partie est dédiée à l'étude de la relation entre les notions d'invariance contrôlée et d'invariance contrôlée par retour d'état dynamique dans un semi-anneau. Cette relation permet de montrer l'équivalence de ces deux notions. La deuxième partie concerne un problème original dans la théorie des systèmes linéaires dans max-plus, il s'agit de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état, qui permette de satisfaire un ensemble de spécifications exprimées sous la forme de restrictions sur l'état du système, avec une approche géométrique. Il s'agit plus précisément de commander des systèmes à événements discrets décrits par un modèle linéaire dans max-plus. Nous définissons et caractérisons l'ensemble des conditions initiales admissibles, lesquelles sont à l'origine de solutions non décroissantes. Les restrictions temporelles imposées à l'espace d'état du système sont décrites par le semi-module défini par l'image de l'étoile de Kleene de la matrice associée aux restrictions temporelles. Les propriétés géométriques de ce semi-module permettant de garantir que l'évolution du système en boucle fermée satisfasse les restrictions sont étudiées. Des conditions suffisantes concernant l'existence d'une loi de commande causale par retour d'état statique sont présentées. Le calcul des lois de commande causales est également présenté. Pour illustrer l'application de cette approche, deux problèmes de commande sont présentés.

## Mots clés

Systèmes à événements discrets, Algèbre max-plus, Invariance contrôlée, Retour d'état statique, Retour d'état dynamique, Graphe d'événements temporisé, restrictions temporelles.

## Abstract

This work is in the context of the theory of linear Systems in the dioids. The initial motivation of this study was to contribute to the analysis and control of max-plus linear systems, specifically using a geometric approach. The contribution of this thesis focuses on two issues. The first part is dedicated to study of the relationship between the concepts of controlled invariance and dynamic state feedback controlled invariance in a semi-ring. This relationship allows us to show the equivalence of these two concepts. The second part relates to a new problem in the theory of max-plus linear systems, it is the synthesis, with a geometric approach, of a static state feedback control law, in order to satisfy a set of specifications that apply to the state space of the system. This is specifically to control of discrete event systems described by a linear model in max-plus. We define and characterize the set of admissible initial conditions, which are the cause of non-decreasing solutions. Temporal restrictions on the system state space are described by the semi-module defined by the image of the Kleene star of the matrix associated with time restrictions. The geometric properties of this semi-module are studied. Sufficient conditions for the existence of a causal control law by static feedback are presented. Calculating causal control laws is also presented. To illustrate the application of this approach, two control problems are presented.

## Key Words

Discrete event systems, Max-plus algebra, Controlled invariance, Static state feedback, Dynamic state feedback, Timed event graphs, Temporal constraints

Thèse de Doctorat  
École doctorale : Sciences et technologies de  
l'information, et mathématiques

Discipline: Automatique, productique

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'École Centrale de  
Nantes sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

*Soutenue le 23 Novembre 2016*

Carolina CARDENAS LUCENA

**Contribution au Contrôle Géométrique des  
Systèmes à Événements Discrets en Algèbre  
Max Plus**

JURY

Président:

**Edgar CHACON**, Professeur, Universidad de los Andes, Venezuela

Rapporteurs:

**Basilio DEL MURO CUELLAR**, Professeur, Instituto Politécnico Nacional, México  
**Carlos Andrey MAIA**, Professeur, Universidad Federal de Minas Gerais, Brasil

Examineurs:

**Saïd AMARI**, Maître de conférences, Université de Paris 13  
**Claude MARTINEZ**, Maître de conférences, Université de Nantes  
**Miguel Angel INDRIAGO ALVARADO**, Professeur, UNEXPO, Venezuela

Directeur de Thèse:

**Jean Jacques LOISEAU**, Directeur de recherches, CNRS, École Centrale de Nan-  
tes

Co-directeur de Thèse :

**Juan CARDILLO**, Professeur, Universidad de Los Andes, Mérida - Venezuela

*Dedicado a  
mi familia*

# Agradecimientos

Ante todo, agradezco a Dios quién siempre me acompaña.

Agradezco a mi esposo Alejandro por su apoyo incondicional.

Agradezco enormemente al Doctor Jean Jacques Loiseau por haberme permitido trabajar bajo su tutela, por su gran disposición para enseñar, su profesionalismo y dedicación. Muchas gracias por el tiempo invertido en la dirección de este trabajo, y por su gran paciencia y comprensión.

Agradezco al Doctor Claude Martinez por su confianza, por todo el apoyo brindado durante esta travesía, y por contribuir a la finalización de este trabajo.

Agradezco al Doctor Juan Cardillo por su orientación en este trabajo.

Deseo también agradecer a mis padres y todos mis hermanos, que siempre me dieron palabras de aliento para continuar este largo trayecto. Y a mis amigos que de un modo o otro me acompañaron en este esfuerzo.

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>I</b>
<b>Résumé en Français</b>	<b>1</b>
Introduction Générale . . . . .	1
Chapitre 1 . . . . .	2
Chapitre 2 . . . . .	14
Chapitre 3 . . . . .	21
Conclusions générales et Perspectives . . . . .	27
<b>Introducción General</b>	<b>30</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>34</b>
1.1. Algebra de dioides . . . . .	35
1.1.1. Dioides y relación de orden . . . . .	35
1.1.2. Semi-módulos . . . . .	41
1.2. Introducción a la teoría de convexidad max-plus . . . . .	44
1.2.1. Conjuntos convexos max-plus . . . . .	45
1.2.2. Conos max-plus . . . . .	45
1.2.3. Homogenización tropical . . . . .	46
1.2.4. Poliedros y conos poliédricos max-plus . . . . .	48
1.2.5. Teorema de Minkowski-Weyl . . . . .	50

1.2.6.	Homogenización de poliedros max-plus . . . . .	51
1.2.7.	Método de doble descripción tropical . . . . .	53
1.3.	Grafos de eventos temporizados modelados como sistemas max-plus lineales . . . . .	55
1.3.1.	Sistemas max-plus lineales . . . . .	56
1.3.2.	Grafos de eventos temporizados, GET . . . . .	59
1.3.2.1.	Las redes de Petri . . . . .	59
1.3.2.2.	Grafos de eventos temporizados, GET . . . . .	62
1.3.3.	Propiedades de los grafos de eventos . . . . .	64
1.3.4.	Representación de estado de los grafos de eventos temporizados . . . . .	68
1.3.4.1.	Ecuación de estado de un GET en el dioide $\mathbb{R}_{\max}$ . . . . .	68
1.3.5.	Condiciones iniciales admisibles para GETs . . . . .	72
1.4.	Semi-módulos A-invariantes . . . . .	74
1.4.1.	Sistemas autónomos max-plus lineales . . . . .	75
1.4.2.	Casos particulares de semi-módulos A-invariantes . . . . .	80
1.5.	Conclusión . . . . .	85
<b>2.</b>	<b>Control geométrico de sistemas max-plus lineales</b>	<b>87</b>
2.1.	Introducción . . . . .	87
2.2.	Generalidades sobre la $(A, B)$ -invarianza . . . . .	88
2.3.	Cálculo del máximo semi-módulo $(A, B)$ -invariante . . . . .	95
2.4.	Semi-módulos $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación estática . . . . .	104
2.5.	Semi-módulos $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación dinámica . . . . .	109
2.5.1.	Retroalimentación dinámica de estado . . . . .	109
2.5.2.	Invarianza por retroalimentación dinámica . . . . .	111
2.6.	Conclusión . . . . .	118
<b>3.</b>	<b>Control geométrico de SMPL sujetos a restricciones temporales</b>	<b>120</b>

---

3.1. Restricciones temporales . . . . .	122
3.2. Formulación del problema . . . . .	124
3.3. Aplicación a casos de estudio . . . . .	130
3.3.1. Primer caso . . . . .	130
3.3.2. Control de robots en cluster-tools . . . . .	135
3.4. Conclusiones . . . . .	142
<b>4. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>144</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>146</b>

# Índice de figuras

1.	Restriction Temporelle . . . . .	22
1.1.	Red ferroviaria . . . . .	57
1.2.	RdP: comportamiento de un sistema de recursos compartidos. . . . .	61
1.3.	(a). Sincronización en la consumación. (b). Sincronización en la producción. . . . .	63
1.4.	GET de la red ferroviaria simple. . . . .	66
1.5.	Marcación inicial ( $t=-\infty$ ). . . . .	67
1.6.	Marcación en el instante inicial de observación ( $t=0$ ). . . . .	68
1.7.	Un grafo de eventos temporizado. . . . .	72
3.1.	Restricción Temporal . . . . .	123
3.2.	GET con dos restricciones temporales en $p_1$ y $p_2$ . . . . .	131
3.3.	GET controlado resultante: las restricciones temporales en $p_1$ y $p_2$ son satisfechas por los lugares agregados entre las transiciones $t_3$ y $t_1^u$ , $t_4$ y $t_1^u$ y las transiciones $t_5$ y $t_1^u$ . . . . .	135
3.4.	GET con 4 restricciones temporales en $p_2$ , $p_5$ , $p_8$ y $p_{11}$ . . . . .	137
3.5.	GET controlado resultante: las restricciones temporales en $p_2$ , $p_5$ , $p_8$ y $p_{11}$ son satisfechas por los lugares agregados entre las transiciones $x_4$ y $x_1^u$ , $x_4$ y $x_2^u$ , $x_4$ y $x_3^u$ , $x_7$ y $x_1^u$ , y $x_7$ y $x_3^u$ . . . . .	141

# Résumé en Français

## Introduction Générale

La classe des Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SED) qui nous intéresse dans ce travail correspond aux systèmes dans lesquels apparaissent des phénomènes de synchronisation et de retard. Pour un processus de cette classe, il est possible d'obtenir un modèle mathématique d'évolution de l'état du processus, sous forme d'équations récurrentes utilisant les opérateurs "max" et "+", où l'opérateur "max" est lié à la synchronisation dans la consommation des ressources et l'opérateur "+" est lié à la durée d'activité des différentes tâches du processus modélisé. Ces équations ne sont effectivement pas linéaires dans la théorie classique, en revanche elles sont linéaires dans l'algèbre max-plus.

Cette classe de systèmes est appelée classe des systèmes linéaires dans max-plus (SMPL). L'algèbre max-plus est un outil mathématique utilisé conjointement avec les graphes d'événements temporisés (GET) pour la modélisation de cette classe de systèmes. Les GETs forment une classe particulière des réseaux de Petri [Murata, 1989], [Cohen, 2001].

La commande des processus de cette classe de SED a fait l'objet d'études, considérant des résultats de la théorie de la commande classique en les transposant dans une version analogue dans l'algèbre max-plus. Les premiers résultats concernant la commande des GET, obtenus en utilisant max-plus apparaissent dans [Cohen et al., 1989b]. Dans [Katz, 2003] et [Katz, 2007], l'approche géométrique proposée dans [Wonham, 1985] et [Basile et Marro, 1992] a été adaptée pour les semi-anneaux idempotents comme max-plus. Ainsi, dans [Katz, 2007], la formulation et la solution des problèmes de commande sont exprimées à l'aide de semi-modules invariants, comme c'est le cas dans l'approche géométrique en commande classique qui utilise des espaces invariants.

Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans le contexte de la théorie des systèmes linéaires dans max-plus que l'on appelle aussi la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. La motivation initiale de cette étude a été de contribuer à l'analyse et la commande de systèmes linéaires dans max-plus en utilisant spécifiquement une approche géométrique dérivée des travaux de Katz [Katz, 2007].

La contribution de cette thèse est centrée sur deux problèmes.

- La première partie est dédiée à l'étude de la relation entre les notions de  $(A, B)$ -invariance et de  $(A, B)$ -invariance par retour d'état dynamique dans un semi-anneau. Cette relation permet de montrer l'équivalence de ces deux notions. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une communication dans [Cárdenas et al., 2015].
- La deuxième partie concerne un problème original dans la théorie des systèmes linéaires dans max-plus, il s'agit de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état, qui permette de satisfaire un ensemble de spécifications exprimées sous la forme de restrictions sur l'état du système, avec une approche géométrique. Il s'agit plus précisément de commander des systèmes à événements discrets décrits par un modèle linéaire dans max-plus. Nous définissons et caractérisons l'ensemble des conditions initiales admissibles, lesquelles sont à l'origine de solutions non décroissantes. Les restrictions temporelles imposées à l'espace d'état du système sont décrites par le semi-module défini par l'image de l'étoile de Kleene de la matrice associée aux restrictions temporelles. Les propriétés géométriques de ce semi-module permettant de garantir que l'évolution du système en boucle fermée satisfasse les restrictions sont étudiées. Des conditions suffisantes concernant l'existence d'une loi de commande causale par retour d'état statique sont présentées. Le calcul des lois de commande causales est également présenté. Les résultats de cette partie ont été acceptés pour publication dans le journal "Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, RIAI". [Cárdenas et al., 2016].

## Chapitre 1

### Préliminaires

Ce premier chapitre est dédié au rappel des principales définitions et outils algébriques clefs de la théorie de l'algèbre des dioïdes [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001],

qui seront utilisés dans la suite du manuscrit. Certains éléments de la théorie de convexité dans max-plus, les *cônes max-plus*, sont ensuite présentés, étant d'un intérêt majeur et jouant un rôle essentiel dans notre étude. Les *cônes max-plus* ont été étudié sous le nom de *semi-modules* dans [Katz, 2007]. En comparaison avec les résultats établis dans [Cohen, 2001], nous présentons les équations qui modélisent le comportement d'un GET en prenant en compte le problème des conditions initiales non canoniques, et la monotonie des variables d'état. Dans ce chapitre, nous introduisons également une contribution théorique sur le problème des conditions initiales admissibles qui conduisent à des solutions non décroissantes du système. Ce chapitre se termine par une introduction à la commande géométrique des systèmes linéaires dans max-plus, on y introduit la notion d'A-invariance et quelques propriétés élémentaires des semi-modules A-invariants.

## Algèbre de dioïdes

Un monoïde est un ensemble  $\mathcal{S}$ , muni d'une loi de composition interne, notée  $\oplus$ , associative et possédant un élément neutre, noté  $\epsilon$ . Lorsque  $\oplus$  est commutative, le monoïde est dit commutatif. Un semi-anneau est un monoïde commutatif, muni d'une loi de composition interne, notée  $\otimes$ , associative, distributive, et possédant un élément neutre, noté  $e$ , et admet l'élément nul comme élément absorbant :  $\forall a \in \mathcal{S}, a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = \epsilon$ . Un dioïde est un semi-anneau muni d'une loi interne idempotente :  $\forall a \in \mathcal{S}, a \oplus a = a$ . On dit qu'un dioïde est commutatif dès que la loi multiplicative est commutative. L'algèbre max-plus et l'algèbre min-plus sont des exemples classiques de dioïdes. L'algèbre max-plus est un semi-anneau idempotent ou dioïde, noté  $\mathbb{R}_{\max}$ , et défini comme l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , muni du max, noté  $\oplus$  :  $x \oplus y := \max(x, y)$ , et de l'addition usuelle, notée  $\otimes$  :  $x \otimes y := x + y$ . L'algèbre min-plus est un semi-anneau idempotent ou dioïde, noté  $\mathbb{R}_{\min}$ , et défini comme l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , muni du min :  $x \oplus y := \min(x, y)$  et de l'addition usuelle, notée  $\otimes$  :  $x \otimes y := x + y$ .

L'idempotence de la loi  $\oplus$  induit un ordre dans le dioïde  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , qui est compatible avec les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ . La relation  $\preceq$  est définie par :  $\forall x, y \in \mathcal{S}, x \preceq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ , [Baccelli et al., 1992].

Un dioïde  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi  $\otimes$  distribue (à gauche et à droite) sur les sommes infinies.

Les notations  $\oplus$  y  $\otimes$  sont étendues aux vecteurs et matrices, comme d'habitude. Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , noté  $\mathcal{S}^{n \times m}$  l'ensemble des matrices de dimension  $n \times m$  avec des

coefficients dans le semi-anneau  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\mathcal{S}$  un dioïde complet. Etant donné une matrice  $C \in \mathcal{S}^{n \times n}$ , son étoile de Kleene est définie par

$$C^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C^k.$$

Lorsque le dioïde est non complet, l'étoile de Kleene n'existe pas nécessairement.

Les analogues des espaces vectoriels ou modules, obtenus en remplaçant le corps, ou l'anneau des scalaires, par un semi-anneau idempotent, sont appelés semi-modules, (nous renvoyons le lecteur à [Gaubert, 1998] pour plus de détail sur les semi-modules). Nous ne considérons ici que les soussemi-modules du produit Cartésien  $\mathcal{S}^n$ . Si  $C$  est une matrice de  $\mathcal{S}^{n \times m}$ , nous noterons  $\text{Im } C$  le soussemi-module de  $\mathcal{S}^n$  généré par les colonnes de la matrice  $C$ . Si un soussemi-module  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{S}^n$ , peut être exprimé comme  $\mathcal{C} = \text{Im } C$ , nous dirons que  $\mathcal{C}$  est un semi-module finiment généré.

**Proposition 1 [Libeaut et al., 1995].** Soient  $\mathcal{S}$  un dioïde complet,  $C \in \mathcal{S}^{n \times n}$  et  $x \in \mathcal{S}^n$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $C \otimes x \leq x$ ,
- (ii)  $x = C^* \otimes x$ ,
- (iii)  $x \in \text{Im } C^*$ .

**Corollaire 1.** Soit  $\mathcal{S}$  un dioïde complet. Etant donné une matrice  $C \in \mathcal{S}^{n \times n}$ , l'ensemble des vecteurs qui vérifient l'inégalité  $Cx \preceq x$ , forme un semi-module qui coïncide exactement avec le semi-module  $\text{Im } C^*$ , c'est-à-dire:

$$\text{Im } C^* = \{x \in \mathcal{S}^n \mid C \otimes x \preceq x\}. \quad (1)$$

Cette variété de semi-modules sera d'un grand intérêt au Chapitre 3.

## Introduction à la théorie de la convexité max-plus

Étant donné que l'un des objectifs de ce travail est de résoudre un problème de commande pour lequel il est nécessaire de calculer les générateurs d'ensembles, donnés sous la forme  $Mx \leq Nx$ , en utilisant un algorithme d'élimination général (méthode de double description tropicale, [Allamigeon, 2010]), nous introduisons ci-après les notions générales et concepts principaux de la théorie de convexité dans

max-plus, tels que les polyèdres et cônes polyédriques max-plus; et nous décrivons une relation entre ces ensembles qui est basée sur la technique d'homogénéisation.

**Définition 1 [Cônes max-plus].** Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  est un cône max-plus, s'il est stable par les combinaisons linéaires dans max-plus, c'est-à-dire

$$\lambda u \oplus \mu v \in \mathcal{C},$$

pour tout  $u, v \in \mathcal{C}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\max}$ .

**Observation 1.** Ces cônes ont été étudiés sous les noms d'espaces idempotent dans [Litvinov et al., 2001] ou semi-modules dans [Cohen et al., 2004], et [Katz, 2007]. Tout au long de ce manuscrit, les deux termes seront utilisés : cônes max-plus ou semi-modules.

## Polyèdres et cônes polyédriques max-plus

**Définition 2.** Les polyèdres max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  sont définis par:

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \oplus r \leq Nx \oplus s \},$$

où  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{\max}^n$  et  $p > 0$ .

**Définition 3.** Les cônes polyédriques max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  sont définis par:

$$\mathcal{C} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \leq Nx \},$$

où  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ , et  $p > 0$ .

Étant donné un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ , l'enveloppe convexe dans max-plus de  $S$ , noté  $co(S)$ , est définie comme l'ensemble des combinaisons convexes max-plus  $\alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_p x_p$  où,  $p \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_p \in S$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_{\max}$  et  $\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_p = e$ .

Pour un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ , le cône max-plus engendré par  $S$ , noté  $cone(S)$ , est l'ensemble des combinaisons linéaires dans max-plus  $\alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_p x_p$  où,  $p \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_p \in S$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_{\max}$ .

Gaubert et Katz ont établi un analogue max-plus du théorème de Minkowski-Weyl dans les travaux [Gaubert et Katz, 2007] et [Gaubert et Katz, 2009], où ils démontrent les théorèmes suivants.

**Théorème 1.** Les polyèdres max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  sont précisément les ensembles de la forme  $co(P) \oplus cone(R)$ , où  $P$  et  $R$  sont sous-ensembles finis de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

**Théorème 2.** Les cônes polyédriques max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  sont précisément les ensembles de la forme  $\text{cone}(G)$  où  $G$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

Les sous-ensembles  $P$  et  $R$  forment un système de générateurs de  $\mathcal{P}$ ,  $(P, R)$  est appelée représentation génératrice de  $\mathcal{P}$ , et l'ensemble  $G$  forme un système de générateurs de  $\mathcal{C}$ .

Un polyèdre max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  peut être représenté comme un cône polyédrique max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^{n+1}$ , en ajoutant une dimension supplémentaire à ce dernier pour représenter la composante affine du polyèdre max-plus. Dans le sens classique, cette méthode est connue sous le nom d'*homogénéisation*. Dans le sens max-plus, elle a été traduite par [Gaubert et Katz, 2007].

**Définition 4.** Soit  $\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \oplus r \leq Nx \oplus s \}$  un polyèdre max-plus non vide ( $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{\max}^p$ ). Le cône homogénéisé  $\widehat{\mathcal{P}}$  est le cône polyédrique max-plus donné par:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{ z \in \mathbb{R}_{\max}^{n+1} \mid (M \ r)z \leq (N \ s)z \}.$$

Lorsque  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ , l'élément  $(x, \alpha)$  se réfère au vecteur de  $\mathbb{R}_{\max}^{n+1}$  où les  $n$  premières composantes coïncident avec  $x$ , et la dernière composante est égale à  $\alpha$ . Il existe une relation entre la représentation génératrice du polyèdres max-plus et le cône homogénéisé, [Allamigeon et al., 2012]. Si  $G$  est un système générateur du cône polyédrique max-plus  $\widehat{\mathcal{P}}$ , nous avons que  $\widehat{\mathcal{P}} = \text{cone}(G)$ . Après avoir multiplié, dans le sens max-plus, chaque élément de  $G$  par un élément non nul, on peut supposer que la dernière coordonnées de chaque élément de  $G$  est  $e$  ou  $\epsilon$ . Définissons  $P = \{x \mid (x, e) \in G\}$  et  $R = \{x \mid (x, \epsilon) \in G\}$ , nous pouvons montrer que  $(P, R)$  forme une représentation génératrice de  $\mathcal{P}$ , et donc  $\mathcal{P} = \text{co}(P) \oplus \text{cone}(R)$ .

Pour trouver un système générateur du cône homogénéisé  $\widehat{\mathcal{P}}$ , nous pouvons utiliser la Méthode de la double description tropicale, [Allamigeon, 2010]. Cette méthode est incrémentale, elle est basée sur une élimination successive des inégalités.

## Graphes d'événement temporisés modélisés comme des systèmes linéaires

Les graphes d'événements définissent une sous-classe des réseaux de Petri, où chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Une propriété importante des graphes d'événements est que, pour tout circuit, le nombre de jetons est constant, par conséquent, si tous les circuits ne sont pas vides, le

graphe d'événement est vivant, [Murata, 1989].

Un graphe d'événements temporisé (GET) est obtenu en associant des temporisations aux places ou aux transitions d'un graphe d'événements donné. Le poids des arcs est égal à 1. Une transition est activée si chaque place d'entrée de la transition a au moins un jeton. Sans perte de généralité, supposons que les temporisations sont uniquement associées aux places, et les tirs des transitions sont instantanés après que celles-ci aient été activées. Les temporisations à chaque place signifient que les jetons doivent attendre au moins ce temps dans la place avant de contribuer à habilitier le tir de la transition de sortie.

Nous montrons que le comportement d'un GET, dont le mode d'évolution considéré est le franchissement au plus tôt, voir [Cohen, 2001], coïncide exactement avec les solutions non-négatives et non décroissantes d'un système max-plus linéaire. Ceci devra être pris en considération dans les conditions initiales admissibles. L'approche que nous présentons est une alternative aux arguments présentés dans [Baccelli et al., 1992].

Dans [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001], on montre que les systèmes à événements discrets peuvent être décrits par un modèle linéaires dans max-plus de la forme

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad (2)$$

$$y(k) = C \otimes x(k). \quad (3)$$

avec  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  et  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ , où  $n$  est le nombre de composantes du vecteur d'état,  $q$  est le nombre d'entrées et  $p$  est le nombre de sorties.

### L'équation d'état d'un GET sur le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$

Nous considérons  $\mathcal{G}$  un GET avec  $\mathcal{L}$  l'ensemble des places et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des transitions. Nous considérons  $t_1^u, \dots, t_q^u$  les transitions qui ne possèdent pas de place d'entrée associée, ces transitions sont appelées transitions sources. Soient  $t_1, \dots, t_n$  les transitions qui ont au moins une place d'entrée, des transitions internes. Ici nous considérons que les places qui suivent une transition source ne possèdent initialement pas de jetons. Pour  $t_i, t_j \in \mathcal{T}$ , la seule place entre  $t_j$  et  $t_i$ , si elle existe, est  $p_{ij}$ , la temporisation correspondante est désignée par  $\tau_{ij}$  et le marquage initial est désigné par  $m_{ij}$ . Un chemin  $\alpha$  de la transition  $t_s$  à la transition  $t_i$  est une séquence de transitions et de places, de la forme  $t_s, p_{k_1 s}, t_{k_1}, \dots, p_{i k_l}, t_i$ , où  $p_{k_1 s}, \dots, p_{i k_l}$  sont des places de  $\mathcal{L}$  et  $t_s, t_{k_1}, \dots, t_{k_l}, t_i$  sont des transitions de  $\mathcal{T}$ . Nous désignons par

$m_\alpha$ , la somme des jetons le long du chemin  $\alpha$ , c'est-à-dire :  $m_\alpha = m_{k_1 s} \otimes \cdots \otimes m_{i k_l}$ . Une transition  $t_j$  est commandable s'il existe un chemin depuis une transition  $t_s^u$  jusqu'à la transition  $t_j$ . Supposons que les jetons présents initialement dans la place  $p_{ij}$  sont disponibles au temps  $\omega_j(k)$ ,  $\omega_j(k) \geq 0$ , ces temps initiaux ne peuvent pas dépasser le temps d'attente  $\tau_{ij}$  associé à la place  $p_{ij}$  :  $\omega_j(k) \leq \tau_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ ,  $1 \leq k \leq m_{ij}$ . Il se peut que les jetons du marquage initial soient prêts à être utilisés depuis le temps  $-\infty$ , dans ce cas, les conditions initiales sont appelées conditions initiales canoniques [Bacelli et al., 1992], [Cohen, 2001]). Notons  $\bullet t_i$  l'ensemble des places immédiatement en amont de la transition  $t_i$ , et  $\bullet p_{ij}$  l'ensemble des transitions d'entrée de  $p_{ij}$ , qui est un ensemble unitaire.

Pour représenter le comportement dynamique de  $\mathcal{G}$ , nous définissons les dates associés à chaque transition :  $u_j(k)$ ,  $k \geq 1$ , celle-ci est interprété comme le moment que se produira le  $k$ -ème tir de la transition  $t_j^u$ , ce franchissement est dû à une action extérieure, pour  $j = 1, \dots, q$ . La variable d'état  $z_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ , avec  $k \geq 1$  représente l'instant auquel la transition  $t_i$  est déclenchée pour la  $k$ -ème fois. Depuis le début de l'évolution du GET, les tirs successifs d'une transition sont numérotés de façon séquentielle, à partir d'une source universelle, généralement nulle, bien qu'elle puisse être négative. Ensuite, la fonction  $k \rightarrow z_i(k)$  est non décroissante, parce que plusieurs tirs peuvent se produire simultanément, voir [Cohen, 2001].

En raison de la dynamique du GET, le  $k$ -ème tir,  $k \geq 1$ , de la transition  $t_i$  se produit lorsque, pour toutes les places  $j$  tel que  $p_{ij} \in \bullet t_i$ , le  $k$ -ème jeton de  $p_{ij}$  contribue à activer  $t_i$ .

Pour  $k > m_{ij}$ , ce  $k$ -ème jeton est produit par le  $(k - m_{ij})$  tir de la transition  $t_j$ , avec  $t_j \in \bullet p_{ij}$ , notons que  $t_j$  peut être une transition de commande,  $t_j^u$ , donc l'instant où ce jeton contribue à activer  $t_i$  est,  $\tau_{ij} \otimes z_j(k - m_{ij})$  où  $\tau_{ij} \otimes u_j(k)$ . Par conséquent,

$$z_i(k) = \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i \vee t_j^u \in \bullet p_{ij}} (\tau_{ij} + z_j(k - m_{ij}), \tau_{ij} + u_j(k)), \quad (4)$$

pour

$$k \geq (\max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i} m_{ij}) + 1.$$

Pour  $k \leq m_{ij}$ , cet événement a lieu au moment  $\omega_j(k)$ , qui correspond au moment où le  $k$ -ème jeton initial de la place  $p_{ij}$  contribue à activer la transition  $t_i$ , comme dans le cas précédent, nous avons la date  $z_i(k)$  satisfait l'équation d'évolution suivante :

$$z_i(k) = \max_{\substack{j | p_{ij} \in \bullet t_i \vee t_j^u \in \bullet p_{ij} \\ m_{ij} < k}} (\tau_{ij} + z_j(k - m_{ij}), \tau_{ij} + u_j(k)) \\ \oplus \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i, m_{ij} \geq k} (\omega_j(k)), \quad (5)$$

pour

$$1 \leq k \leq \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i} m_{ij}.$$

**Proposition 2.** Si un GET est vivant, et les temps initiaux  $\omega_j(k)$  sont non décroissants et non négatifs pour  $j = 1, \dots, |\mathcal{L}|$  et  $1 \leq k \leq m_{ij}$ , alors  $z_i(k)$ , avec  $k \geq 1$  est non décroissant et non négatif pour toutes les entrées de commande  $u(k)$  non décroissantes et non négatives.

À partir des équations (4) et (5) nous pouvons exprimer le comportement dynamique du GET sous forme matricielle comme suit :

$$z(k) = \bigoplus_{m \geq 0}^M [\bar{A}_m \otimes z(k-m) \oplus \bar{B} \otimes u(k)] \oplus v(k), \quad (6)$$

avec

$$M = \max_{p_{ij} \in \mathcal{L}} m_{ij},$$

et

$$v_j(k) = \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i, m_{ij} \geq k} (\omega_j(k)), \quad (7)$$

où  $v_j(k)$  est défini pour  $k = 1, \dots, M$  et il est égal à  $\epsilon$  dans tout autre cas. La séquence  $z_i(k) = \epsilon$  et  $u_j(k) = \epsilon$  pour tous  $k \leq 0$ . La matrice  $\bar{A}_m \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ , sa composante  $A_{m_{ij}}$  est égale à  $\tau_{ij}$ , s'il y a une place  $p_{ij}$  contenant  $m_{ij}$  jetons, sinon  $A_{m_{ij}}$  est égale à  $\epsilon$ . De la même façon  $\bar{B} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  correspond aux temporisations des places suivant les transitions sources.

Pour la transformation de cette équation sous une forme canonique, la première étape vise à l'élimination de la partie implicite  $\bar{A}_0 \otimes z(k)$ . Par définition de  $\bar{A}_0$ , il existe un certain nombre de transitions internes de telle sorte que  $\bar{A}_0$  peut être écrite sous forme triangulaire inférieure, et assure que  $\bar{A}_0^*$  est bien définie,  $(\bar{A}_0^*)_{ij} < +\infty$ . Ensuite, (6) est exprimée avec l'équation explicite suivante :

$$z(k) = \bigoplus_{m > 0}^M [\bar{A}_0^* \bar{A}_m \otimes z(k-m) \oplus \bar{A}_0^* \bar{B} \otimes u(k)] \oplus \bar{A}_0^* v(k), \quad (8)$$

La prochaine étape dans le traitement de cette équation vise à obtenir la forme de la matrice canonique, celle-ci est obtenue par l'extension de la dimension du vecteur d'état. Cette étape est classique dans la théorie des systèmes et nous ne décrivons pas les détails ici, voir [Cohen et al., 1999]. Nous utilisons une nouvelle notation pour le vecteur d'état étendu, celui-ci est noté  $x$ .

**Théorème 3.** Le comportement dynamique du GET, en considérant le franchissement au têt, est donné par le modèle linéaire :

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad k \geq 2, \quad (9)$$

avec pour condition initiale

$$x(1) = B \otimes u(1) \oplus w,$$

où  $w$  est un vecteur qui dépend du temps  $\omega_i(k)$  de l'évolution des jetons initiaux, (voir (6)).  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est le vecteur d'état,  $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  est le vecteur d'entrée de commande, les deux vecteurs sont définis pour  $k \geq 1$ .

### Conditions initiales admissibles pour GETs

Le comportement d'un GET, dont le mode d'évolution est le franchissement au plus têt correspond aux trajectoires non décroissante d'un système linéaire dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ , de la forme (2)-(3). Cependant l'ensemble des trajectoires définies par le système (2)-(3), ne correspond pas à toutes les évolutions possibles d'un GET, nous nous limitons à des solutions non décroissantes, et pour cela, nous définissons et caractérisons l'ensemble des conditions initiales qui conduisent à des solutions non décroissantes pour toutes les entrées non décroissantes. Ces conditions initiales seront utilisées dans le Chapitre 3 pour introduire l'initialisation d'une loi de commande.

**Définition 5.** Étant donné le système (9) sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , nous disons que la condition initiale  $w$  est admissible si pour chaque séquence d'entrée non décroissante  $u$ , l'état  $x$  est également non décroissant.

Le théorème suivant caractérise l'ensemble des conditions initiales admissibles. Noter que le semi-module  $\mathcal{W}$  est donné en termes de la matrice  $A$  du système.

**Théorème 4.** Étant donné le système (9) sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , l'ensemble des conditions initiales admissibles est le semi-module  $\mathcal{W}$  défini par

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}_{\max}^{+n} \mid Aw \geq w\}, \quad (10)$$

où  $\mathbb{R}_{\max}^{+n} := \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ .

Les évolutions possibles d'un GET correspondent exactement avec les trajectoires du système (2) dans  $\mathbb{R}_{\max}$  lorsque l'ensemble des conditions initiales est limité à celles qui satisfont la condition  $w \in \mathcal{W}$ . Cette caractérisation sera prise en compte dans le Chapitre 3.

## Semi-modules A-invariants

Comme le concept fondamental de l'approche géométrique est la notion d'invariance d'un espace par rapport à une transformation linéaire, nous introduisons l'extension d'un sous-espace A-invariant pour les semi-anneaux. Nous donnons une interprétation dynamique à partir d'un système autonome.

**Définition 6.** Un système autonome avec des coefficients dans le semi-anneau  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , est un système dont l'évolution est déterminée par l'ensemble des équations de la forme:

$$x(k) = Ax(k-1), \quad k \geq 1, \quad (11)$$

où  $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  est une application linéaire, et  $x(k)$  est la séquence de l'état dans  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}^n$ .

Dans cette famille les systèmes linéaires dans max-plus ont la particularité de ne pas avoir d'entrée de commande,  $u(k) = \epsilon$  pour  $k \geq 1$ . L'évolution du système est déterminé uniquement à partir des conditions initiales et de la matrice d'évolution.

Nous voulons analyser le comportement dynamique du système autonome linéaire dans max-plus (11), à travers l'étude des trajectoires de l'état obtenu en effectuant des itérations successives de la relation (11), à partir d'une condition initiale quelconque, étant donné que, à travers des caractéristiques géométriques des trajectoires d'état, nous pouvons montrer si elles évoluent de manière adéquate dans un semi-module défini. Plus précisément, nous allons étudier la question de savoir si une trajectoire d'état qui commence dans un soussemi-module donné, reste toujours complètement dans celui-ci.

À cette fin, nous introduisons la notion d'invariance de semi-modules.

**Définition 7.** Soit un semi-anneau  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  et une application  $A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , alors l'ensemble  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$  est appelé A-invariant, si pour chaque élément  $x_0 \in \mathcal{X}$ , nous avons que  $Ax_0 \in \mathcal{X}$ , ceci est équivalent à:

$$A\mathcal{X} \subset \mathcal{X}, \quad \text{où } A\mathcal{X} = \{Ax \mid x \in \mathcal{X}\}. \quad (12)$$

**Exemple 1.** Le semi-module  $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}_{\max}^+ \mid Aw \geq w\}$  est A-invariant.

Cet exemple, qui montre l'invariance de l'ensemble des conditions initiales admissibles définies dans (10), est important pour notre étude au Chapitre 3. En outre, en raison de ce fait, il est naturel de constater que de l'admissibilité des conditions initiales, est une propriété des systèmes autonomes.

La proposition suivante établit la connexion entre la notion d'invariance et les systèmes dynamiques max-plus, puisqu'elle donne une interprétation de cette notion d'invariance en termes de condition initiale du système (11).

**Proposition 3 [Interprétation Dynamique].** Tout semi-module  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  est A-invariant si et seulement si toute trajectoire du système (11) qui commence en  $\mathcal{X}$  est contenue dans  $\mathcal{X}$ . C'est à dire, étant donné  $x(0) \in \mathcal{X}$ , l'expression  $x(k) \in \mathcal{X}$  est vrai pour tout  $k \geq 0$ .

Cette proposition permet, dans des cas pratiques, par exemple pour un système de production, analyser le comportement de celui-ci. Étant donné un semi-module appartenant à l'espace d'état, qui décrit le comportement souhaité ou attendu du système, l'invariance de ce semi-module assure qu'à partir de tout état initial inclus dans ce semi-module, l'évolution du système conserve toujours le comportement souhaité.

Malheureusement, dans un grand nombre de cas, le semi-module décrivant le comportement souhaité pour le système n'est pas A-invariant. Par conséquent, nous avons la nécessité de remettre en question l'existence et le calcul du plus grand semi-module A-invariant contenu dans un semi-module donné. Ce point sera abordé dans le Théorème 5.

L'ensemble de tous les semi-modules A-invariants contenu dans un semi-module donné  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ , noté  $\mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ , est un demi-treillis supérieur en ce qui concerne l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ , et l'opération d'addition max-plus  $\oplus$ , par conséquent, il admet un borne supérieure: le plus grand A-invariant contenu dans  $\mathcal{K}$ , noté  $\max\mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . En outre, l'ensemble des semi-modules invariants contenant un semi-module donné  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^n$ , noté  $\mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ , est un demi-treillis inférieur en ce qui concerne l'ordre d'inclusion  $\subseteq$ , et l'opération d'intersection  $\cap$ , par conséquent, il admet un borne inférieure: le plus petit A-invariant contenant  $\mathcal{B}$ , noté  $\min\mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ . Les algorithmes pour le calcul de  $\max\mathcal{V}(A, \mathcal{K})$  et  $\min\mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ , seront présentés dans les Théorèmes 5 et 6 respectivement.

**Théorème 5.** Soit  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$  un semi-module arbitraire. Soit, de plus, la séquence  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  définie récursivement par:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{V}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

celle-ci est décroissante, c'est-à-dire,  $\mathcal{V}_{i+1} \subset \mathcal{V}_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . En outre, si nous définissons  $\mathcal{V}_\omega = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ , alors  $\mathcal{V}_\omega$  coïncide avec le plus grand A-invariant contenu dans  $\mathcal{K}$ . c'est-à-dire:

$$\mathcal{V}_\omega = \max\mathcal{V}(A, \mathcal{K}). \quad (14)$$

**Théorème 6.** Soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^n$  un semi-module arbitraire. Soit, de plus, la séquence  $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  définie récursivement par:

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{B}, \quad \mathcal{S}_{i+1} = A\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{B}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

celle-ci est croissante, c'est-à-dire,  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . En outre, si nous définissons  $\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ , alors  $\mathcal{S}_\infty$  est le plus petit A-invariant contenant  $\mathcal{B}$ . C'est-à-dire:

$$\mathcal{S}_\infty = \min \mathcal{S}(A, \mathcal{B}). \quad (16)$$

## Cas particulier de semi-module A-invariant

### Ensemble de conditions initiales d'un système linéaire dans max-plus

Étant donnée une spécification pour l'espace d'état du système autonome (11), nous supposons que celle-ci est donnée par le semi-module  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . Nous définissons le plus grand ensemble d'états initiaux  $\mathcal{K}^*$ , pour lesquels l'état du système (11) reste en  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire  $x(k) \in \mathcal{K}$  pour tout  $k \geq 0$ . Formellement:

$$\mathcal{K}^* = \{x(0) \in \mathcal{K} \mid x(k) \in \mathcal{K}, k \geq 0\}. \quad (17)$$

Ce semi-module par sa définition, a la propriété d'être A-invariant, comme illustré ci-dessous.

**Propriété.** Étant donné un semi-module  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . Le semi-module  $\mathcal{K}^*$  est A-invariant.

**Proposition 4.** Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$  est un semi-module, alors  $\mathcal{K}^*$  coïncide avec le plus grand A-invariant contenu dans  $\mathcal{K}$ . Celui-ci est

$$\mathcal{K}^* = \max \mathcal{V}(A, \mathcal{K}). \quad (18)$$

## Chapitre 2

### Commande géométrique des systèmes linéaires dans max-plus

L'approche géométrique dans la théorie des systèmes dynamiques linéaires a fourni des solutions à de nombreux problèmes de commande [Wonham, 1985], cela a conduit à la tentative d'étendre l'approche géométrique et en particulier le concept de sous-espace  $(A, B)$ -invariant dans la théorie des systèmes dynamiques linéaires sur le semi-anneau max-plus, [Katz, 2007].

**Définition 8.** Considérons le système décrit par (2).

- (a) Un semi-module  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  est  $(A, B)$ -invariant ou invariant contrôlé si  $A\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \oplus \text{Im } B$ , où  $\mathcal{X} \oplus \text{Im } B = \{x \in \mathcal{S}^n \mid \exists b \in \text{Im } B, x \oplus b \in \mathcal{X}\}$ .
- (b) Un semi-module  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  est invariant par retour d'état, s'il existe une matrice  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  telle que, le semi-module  $\mathcal{X}$  est invariant par l'opérateur  $A \oplus BF$ :  $(A \oplus BF)\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ .

Evidemment, tout semi-module invariant par retour d'état est particulièrement  $(A, B)$ -invariant. Cette propriété est une conséquence directe de la définition.

La proposition suivante établit la connexion entre les notions d'invariance et de systèmes dynamiques max-plus linéaires, car elle donne une interprétation de ces notions d'invariance en termes de condition initiale du système (2).

**Proposition 5.** Considérons le système décrit par l'équation (2) et  $\mathcal{X}$  un semi-module de  $\mathcal{S}^n$ . Alors,

- (a) tout semi-module  $\mathcal{X}$  est  $(A, B)$ -invariant ou invariant contrôlé si et seulement si pour chaque état initial  $x(0) \in \mathcal{X}$ , il existe une loi de commande  $u(k)$ , définie pour  $k \geq 1$ , de manière que l'état reste en  $\mathcal{X}$  pour l'ensemble de l'évolution du système:  $x(k) \in \mathcal{X}$ , pour  $k \geq 0$ .
- (b) tout semi-module  $\mathcal{X}$  est  $(A, B)$ -invariant par retour d'état, si et seulement s'il existe une matrice  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  de manière que pour chaque état initial  $x(0) \in \mathcal{X}$ , la séquence de vecteurs de commande  $u(k)$  définie par  $u(k) = Fx(k-1)$ , assure que  $x(k) = (A \oplus FB)x(k-1) \in \mathcal{X}$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Une caractérisation algébrique utile en pratique pour vérifier les notions d'invariance d'un semi-module finiment généré est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 6.** Étant donné le système décrit par (2) et  $\mathcal{M}$  un semi-module de  $\mathcal{S}^n$ , finiment généré, défini par  $\mathcal{M} = \text{Im } M$  avec  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ .

- (a)  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant si et seulement si il existe des matrices  $X \in \mathcal{S}^{q \times p}$ ,  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  de manière que l'égalité suivante est vraie:

$$A \otimes M \oplus B \otimes X = M \otimes Y . \quad (19)$$

- (b)  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant par retour d'état si et seulement si il existe des matrices  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  et  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$ , de manière que l'égalité suivante est vraie:

$$(A \oplus B \otimes F) \otimes M = M \otimes Y . \quad (20)$$

La synthèse d'une loi de commande au sein de l'approche géométrique de la théorie des systèmes dynamiques linéaires a deux étapes fondamentales: trouver le plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant contenu dans une spécification donnée sur l'espace d'état, et une matrice de commande  $F$ .

Du point de vue pratique, il est intéressant de calculer le plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant contenu dans une spécification donnée sur l'espace d'état du système qui est modélisé par l'équation (2). Due au fait que la spécification donnée décrit le comportement souhaité du système ou le comportement attendu, et le plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant qui décrit l'ensemble des états initiaux de l'espace d'état du système, pour ce qui peut assurer l'existence d'une commande, de manière que cette commandee assure que l'état du système reste dans ce semi-module. Ceci résout bien le problème de la première étape de la synthèse de comande.

Afin de calculer le plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant contenu dans une spécification donnée  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ , l'algorithme de point fixe classique proposé par Wonham dans [Wonham, 1985] pour calculer le plus grand sous-espace  $(A, B)$ -invariant contenu dans un sous-espace de l'espace d'état donné, est modifié.

Le problème du calcul du plus grand  $(A, B)$ -invariant contenu dans un semi-module donné présente comme difficulté principale que l'analogie de cet algorithme classique n'est pas nécessairement convergent en un nombre fini d'étapes. Cependant, comme le montre Katz dans [Katz, 2007], sous certaines conditions de finitude du

semi-module de départ considéré, l'adaptation de l'algorithme classique de point fixe à l'algèbre max-plus converge en un nombre fini d'étapes, et par conséquent, cela donne le plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant contenu dans un semi-module donné pour une classe importante de semi-modules.

## Retour d'état dynamique

Dans cette section, nous présentons notre première contribution sur l'extension de l'approche géométrique des systèmes max-plus linéaires, nous introduisons la notion de retour d'état dynamique sur les semi-anneaux, et montrons qu'un semi-module  $(A, B)$ -invariant sur un semi-anneaux commutatif peut être invariant pour le système en boucle fermée par un retour d'état dynamique.

Étant donné le système linéaire dans max-plus décrit par;

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1), \quad (21)$$

où  $x(k) \in \mathcal{S}^n$ ,  $u(k) \in \mathcal{S}^q$ ,  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées. Rappelons une méthode bien connue et utilisée pour modifier la commande d'un système est le retour d'état statique défini par:

$$u(k+1) = Ex(k+1) \oplus Fz(k+1), \quad (22)$$

où  $z \in \mathcal{S}^n$  est une entrée externe et  $E, F$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Motivé par le développement de l'approche géométrique des systèmes linéaires dans max-plus, nous introduisons une nouvelle notion de retour d'état dynamique pour les systèmes sur un semi-anneau  $\mathcal{S}$ .

**Retour d'état dynamique.** Un retour d'état dynamique est une loi de commande de la forme

$$u(k) = Ex(k) \oplus Fz(k), \quad (23)$$

pour  $k \geq 1$ , où  $E$  et  $F$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées, et  $z(k) \in \mathcal{S}^q$  est une variable interne du contrôleur, dont l'évolution est dirigé par

$$z(k+1) = Gx(k) \oplus Hz(k), \quad (24)$$

avec des matrices  $G$  et  $H$  de dimensions appropriées.

On notera que pour définir la loi de commande de manière unique à l'équation (24) nous avons besoin d'une initialisation. Cette inquiétude sera reprise plus tard, lorsqu'il sera présenté la méthode de la conception de la commande.

Considérons le système étendu (21), défini comme suit:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1), \\ z(k+1) &= w(k+1). \end{aligned} \quad (25)$$

Dans sa forme matricielle, cela est exprimé par :

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \oplus B_e \begin{pmatrix} u(k+1) \\ w(k+1) \end{pmatrix},$$

où

$$A_e = \begin{pmatrix} A & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} B & \epsilon \\ \epsilon & I_p \end{pmatrix},$$

**Retour d'état statique étendu** Un retour d'état statique étendu est défini par

$$\begin{pmatrix} u(k+1) \\ w(k+1) \end{pmatrix} = F_e \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

avec

$$F_e = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Noter que ce retour d'état statique appliqué au système étendu, conduit à un retour d'état dynamique pour le système d'origine (21).

La retour d'état dynamique défini par (23)-(24) appliqué au système, ce retour d'état génère le système en boucle fermée suivant:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \oplus BE & BF \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix},$$

qui coïncide avec le système en boucle fermée obtenu en appliquant la retour d'état statique étendu.

## Invariance par retour d'état dynamique

Afin de montrer l'invariance de retour d'état d'un semi-module  $(A, B)$ -invariant, nous introduisons le concept de semi-module étendu d'un semi-module finiment généré.

**Définition 9.** Étant donné un semi-module  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ , généré par la matrice  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , l'extension de  $\mathcal{M}$ , notée  $\mathcal{M}_e$ , est le semi-module de  $\mathcal{S}^{n+p}$  généré par la matrice concaténée  $M_e$  définie par

$$M_e = \begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix} .$$

Maintenant, nous établissons notre résultat principal

**Théorème 7.** Étant donné le système (21), et  $\mathcal{M}$  un semi-module finiment généré dans  $\mathcal{S}^n$ , les déclarations suivantes sont équivalentes.

- (i)  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant.
- (ii)  $\mathcal{M}_e$  est  $(A_e, B_e)$ -invariant.
- (iii)  $\mathcal{M}_e$  est  $(A_e, B_e)$ -invariant par retour d'état.
- (iv) Il existe les matrices  $E, F, G, H$  de manière que pour chaque valeur initiale  $x(0)$ , l'état du système en boucle fermée formée par l'interconnexion de (21) et du retour d'état dynamique de la forme (23)-(24), avec  $q = p$  et la valeur initiale  $z(0)$  choisie de façon que  $x(0) = Mz(0)$ , assurer que  $x(k) \in \mathcal{M}$ , pour chaque  $k \geq 0$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{M}$  est un semi-module finiment généré, il existe une matrice  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , pour un  $p \in \mathbb{N}$ , de manière que  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ . Premièrement, nous montrons que (i) implique (ii) et (iii). On suppose que  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant. Il résulte par (19), qu'il existe des matrices  $X \in \mathcal{S}^{n \times p}$  et  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  de manière que l'égalité  $AM \oplus BX = MY$  est vérifiée.

Ensuite, nous pouvons voir que l'égalité matricielle suivante est également vraie,

$$\begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix} Y = (A_e \oplus B_e F_e) \begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix} , \quad (28)$$

dans l'équation (27) considérant  $E = \epsilon$ ,  $F = X$ ,  $G = \epsilon$ , et  $H = Y$ , nous avons

$$F_e = \begin{pmatrix} \epsilon & X \\ \epsilon & Y \end{pmatrix} . \quad (29)$$

Ceci montre que l'image de la matrice concaténée  $(M^T, I_p)^T$  est un  $(A_e, B_e)$ -invariant par retour d'état pour le système en boucle fermée. Ceci établit que (i) implique (iii). Il est clair que (iii) implique (ii). Inversement, on peut montrer que (ii) implique (iii). Pour cela, dans un premier temps, rappelons nous que la déclaration (ii) implique qu'il existe des matrices  $X_e = (X^T, Y^T)^T$ , et  $Y_e$ , de manière que l'égalité suivante est vérifiée,

$$A_e M_e \oplus B_e X_e = M_e Y_e .$$

En outre, par définition de  $M_e$ , Nous pouvons factoriser  $X_e$  dans la forme  $X_e = F_e M_e$ , considérant  $F_e$  défini par (29). Enfin, nous notons que  $(A_e \oplus B_e F_e) M_e = M_e Y_e$ , qui établit l'implication. Reste à montrer que (iii) implique (i). Ceci est obtenu en écrivant que, s'il existe  $F_e$  (pas nécessairement sous la forme (27)) et  $Y_e$  de manière que l'égalité  $(A_e \oplus B_e F_e) M_e = M_e Y_e$  est vérifiée, alors nous avons que  $AM \oplus BX = MY$ , considérant  $Y = Y_e$  et  $X = EM \oplus F$ , où les matrices  $E$  et  $F$  sont obtenus expriment  $F_e$  sous la forme (27).

Pour prouver que (iv) implique (i), souvenons-nous que comme  $\mathcal{M}$  est généré par les colonnes de  $M$ , pour chaque vecteur  $x(0) \in \mathcal{M}$ , existe un vecteur  $v \in \mathcal{S}^p$  tel que  $x(0) = Mv$ .

De plus, on observe que l'affirmation (iv) implique que les matrices  $E$  et  $F$  existent, et pour chaque  $x(0) \in \mathcal{M}$ , les vecteurs  $v$  satisfont  $x(0) = Mv$  et  $x(1) \in \mathcal{M}$ , tel que  $(A \oplus BE)x(0) \oplus BFv$ . En prenant successivement les différentes colonnes de  $M$  pour la condition initiale  $x(0)$ , on définit les matrices  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  et  $V \in \mathcal{S}^{p \times p}$ , formées par les valeurs successives obtenues pour  $v$  et  $x(1)$ , qui satisfont  $MY = (A \oplus BE)M \oplus BFV$ . En prenant finalement  $X = EM \oplus FV$ , on obtient que (2.7) est satisfaite, ce qui montre que  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant.

Pour compléter la démonstration, nous montrerons que (i) implique (iv). Dans cette partie de la démonstration est abordée pour la première fois l'initialisation de la boucle de rétroalimentation dynamique, qui est importante pour l'implémentation réelle de la loi de commande. Nous pouvons noter que l'existence des matrices  $X$  et  $Y$  satisfaisant (19) conduit à la définition de la rétroalimentation étendue  $F_e$  comme dans (29), de telle manière que  $(A_e \oplus B_e F_e) M_e = M_e Y$ . Ceci implique en fait que  $(A_e \oplus B_e F_e)^k M_e = M_e Y^k$ , pour  $k \geq 1$ , ainsi pour chaque vecteur  $v \in \mathcal{S}^p$ , on obtient  $(A_e \oplus B_e F_e)^k M_e v = M_e Y^k v$ , pour  $k \geq 1$ . Comme  $M_e = (M^T, I_p)^T$  et la solution du système en boucle fermée par l'action de la rétroalimentation dynamique qui correspond à  $F_e$  est donnée par  $(x^T(k), z^T(k))^T = (A_e \oplus B_e F_e)^k M_e (x^T(0), z^T(0))^T$ , on vérifie qu'en prenant  $z(0) = v$ , avec  $Mv = x(0)$ , l'égalité  $x(k) = MY^k v$  est obtenue, et pour autant  $x(k) \in \mathcal{M}$ , pour  $k \geq 1$ . Ceci complète la preuve. ■

**Observation 2.** Comme nous l'avons rappelé dans la Proposition 3, la  $(A, B)$ -invariance d'un semi-module signifie que les trajectoires du système peuvent être forcées par la commande à rester dans le semi-module au cours de leur évolution. Le Théorème 7 montre que dans le cas d'un semi-module finiment généré, une commande qui force les trajectoires à rester dans le semi-module donné peut être réalisée en utilisant un retour d'état dynamique. Cette loi de commande est causale, ce qui permet sa mise en œuvre en temps réel. La formulation suivante résume la méthode de synthèse suggérée dans la démonstration du Théorème 7.

**Corollaire 2.** Étant donné un semi-module  $(A, B)$ -invariant  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ . Si la condition initiale  $x(0)$  est déjà dans  $\mathcal{M}$ , une loi de commande qui oblige  $x(k)$  pour rester dans  $\mathcal{M}$ ,  $\forall k \geq 0$ , est fournie par

$$u(k+1) = Xz(k) , \quad (30)$$

pour  $k \geq 0$ , où  $z(k)$  est définie par

$$z(k+1) = Yz(k) , \quad (31)$$

pour  $k \geq 0$ , et

$$z(0) = v , \quad (32)$$

les matrices  $X$  et  $Y$  sont des solutions de l'équation

$$MY = AM \oplus BX , \quad (33)$$

et  $v$  est solution de

$$x(0) = Mv . \quad (34)$$

Les éléments constituant la loi de commande sont déterminés en connaissance d'une matrice génératrice  $M$ , du modèle de système  $(A, B)$ , et de l'état initial  $x(0)$ . La solution des équations (33) y (34) est la clé pour le calcul des paramètres de la loi de commande. Les identités (30) et (31) sont mises en œuvre en ligne pour le calcul de la commande, et (32) est utilisée pour initialiser la commande.

## Chapitre 3

### Approche géométrique pour la commande de SMPL sujets à restrictions temporelles

Ce chapitre aborde le problème de commande des systèmes linéaires dans max-plus soumis à des contraintes ou restrictions temporelles afin que celles-ci soient respectées. À partir des travaux de [Amari et al., 2012] et [Katz, 2007], nous présentons une formulation alternative de notre problème de commande en utilisant l'approche géométrique. La solution proposée utilise les notions d'invariance contrôlée [Katz, 2007]. Les restrictions temporelles sont imposées à l'espace d'état du système, elles sont décrites par un semi-module défini par l'image de l'étoile de Kleene de la matrice associée aux restrictions temporelles. Ce semi-module résulte être  $(A, B)$ -invariant et l'on évite ainsi le calcul du plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant inclus dans le semi-module qui définit les spécifications.

Nous présentons, comme contribution originale, la description de conditions suffisantes d'invariance et d'existence d'une loi de commande par retour d'état statique permettant d'obtenir un système commandé qui respecte les contraintes, c'est-à-dire dont l'état évolue dans le semi-module désiré des restrictions imposées. L'approche présentée prend en compte le problème des conditions initiales, l'initialisation de la loi de commande, et la réalisation de la loi de commande dans le processus.

#### Restrictions temporelles.

D'accord avec la définition des graphes d'événements temporisés, les temporisations associées à chaque place correspondent à un délai minimum d'attente des jetons dans les places. Les jetons peuvent séjourner plus longtemps que ce délai minimum dans une place. En ce qui concerne les places sujettes à une restriction temporelle, on définit un temps de séjour maximum qu'un jeton ne doit pas dépasser dans la dite place. Cette contrainte de durée maximum du temps de séjour apparaît comme une restriction additionnelle qui doit être respectée. Ainsi, un intervalle de temps  $[\tau_z, \tau_z^{max}]$  est associé à la place, la borne inférieure  $\tau_z$  est la durée de séjour minimum des jetons et la borne supérieure  $\tau_z^{max}$  est la durée maximum autorisée, (voir Figure 1).

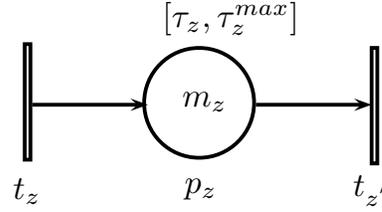


Figure 1: Restriction Temporelle

Cette restriction temporelle s'exprime avec l'inégalité suivante:

$$x_{z'}(k) \leq \tau_z^{max} \otimes x_z(k - m_z), \quad \forall k > m_z. \quad (35)$$

La définition qui suit permettra de construire le semi-module qui décrit les restrictions imposées à un système donné. Ces restrictions sont utilisées pour définir l'objectif de la commande à mettre en œuvre. Pour cela, considérons le système linéaire dans max-plus suivant :

$$\begin{aligned} x(k) &= A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad k \geq 2, \\ x(1) &= B \otimes u(1) \oplus w, \end{aligned} \quad (36)$$

où  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est le vecteur d'état,  $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  est le vecteur des entrées de commande, tous deux définis pour  $k \geq 1$ , et  $w$  est un vecteur qui dépend des instants d'évolution des jetons contenus initialement dans les places. Faisons l'hypothèse que les conditions initiales sont admissibles, c'est-à-dire que  $w \in \mathcal{W}$ , où  $\mathcal{W}$  est le semi-module défini par (10).

**Définition 10.** Étant donné un GET modélisé par le système linéaire en max-plus (36), et sujet à un ensemble de restrictions temporelles, on définit la matrice  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  associée à ces restrictions par :

$$C_{zz'} = \begin{cases} -\tau_z^{max} & \text{si il y a une restriction temporelle entre } t_z \text{ et } t_{z'}, \\ \epsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (37)$$

En prenant en compte la Proposition 1, le corollaire suivant est établi.

**Corollaire 3.** L'ensemble des vecteurs d'état qui satisfont les restrictions temporelles avec  $m_z = 0$ , est le semi-module défini par l'image de l'étoile de Kleene de la matrice  $C$ ,  $\text{Im } C^*$ , quand  $C^*$  existe. C'est ensemble est :

$$\text{Im } C^* = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid C \otimes x \leq x\}. \quad (38)$$

### Formulation du problème.

Étant donné un GET modélisé par le système d'équations linéaires dans max-plus (36), n'ayant pas de circuits sans jetons, avec  $q$  transitions sources, que nous notons  $t_i^u$ ,  $i = 1, \dots, q$ , ( $q \geq 1$ ) et avec  $Z$  places soumises à une restriction temporelle. Ces places sont notées  $p_{z_i}$ , pour  $i = 1, \dots, Z$ . Pour chaque place  $p_{z_i}$ , nous notons respectivement  $m_{z_i}$ ,  $\tau_{z_i}$  y  $\tau_{z_i}^{max}$ , le marquage initial, la temporisation et la durée de séjour maximale. De plus,  $t_{z_i}$  y  $t_{z_i}'$  denotent respectivement la transition d'entrée et la transition de sortie de la place  $p_{z_i}$ , pour  $i = 1, \dots, Z$ . Soient  $x_{z_i}$  et  $x_{z_i}'$  les instants de franchissement, correspondant à la transition d'entré et à la transition de sortie de la place soumise à restriction, et soit  $m_{\alpha_i}$  le marquage cumulé le long du chemin  $\alpha_i$ , défini depuis une transition d'entrée du GET jusqu'à la transition  $t_{z_i}$ .

Supposons que toutes les places soumises à une restriction temporelle ont un marquage initial égal a zéro, c'està dire,  $m_{z_i} = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, Z$ . Ainsi, les restrictions temporelles seront exprimées comme suit,

$$x_{z_i}'(k) \leq \tau_{z_i}^{max} \otimes x_{z_i}(k), \quad k \geq 1. \quad (39)$$

L'hypothèse considérée ici,  $m_z = 0$ , est satisfaite quand il s'agit d'unités de production. Elle signifie qu'à l'état initial il n'y a pas de produit sur les machines, ce qui n'est pas limitatif en pratique.

Le semi-module suivant sera particulièrement important pour exprimer et établir nos conditions suffisantes pour l'existence d'une loi de commande par retour d'état statique donnant une solution au problème traité.

**Definition 11.** Pour le système (36) et la matrice donnée par l'expression (37), définissons le semi-module suivant

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathbb{R}_{\max}^q \mid CBv \leq Bv\}. \quad (40)$$

Notons que l'ensemble  $\mathcal{D}$  est non vide, puisqu'il contient au moins la solution triviale.

Avec les conditions antérieures, notre problème de commande se définit comme suit.

**Problème:** Étant donné le système linéaire dans max-plus (36), et un ensemble de restrictions temporelles de la forme (39), nous recherchons une stratégie de commande qui assure que l'état du système évolue tout en respectant la condition  $C \otimes x(k) \leq x(k)$  pour  $k \geq 1$ , ce qui équivaut à montrer, par le Corollaire 1, que  $x(k) \in \text{Im } C^*$ ,  $k \geq 1$ .

Notre problème consiste ainsi en la recherche, en termes d'une matrice  $F$ , d'une loi de commande définie par la relation  $u(k) = Fx(k-1)$  pour  $k \geq 2$ , et pour  $k = 1$ , au contraire des systèmes sur un corps, cette relation doit être complétée par la définition d'une valeur initiale de la loi de commande,  $u(1)$ , telle que soit garanti que  $x(k) \in \text{Im } C^*$  pour  $k \geq 1$ .

Avec cette commande, utilisant l'équation (36), le système en boucle fermée s'exprime comme:

$$x(k) = (A \oplus B \otimes F) \otimes x(k-1), \quad \forall k \geq 2, \quad (41)$$

avec  $x(1) = B \otimes u(1) \oplus w$ .

Pour aborder notre problème nous requerrons les éléments fondamentaux suivants.

**Proposition 7.** Étant donné deux matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ , et un cône max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , défini par l'image d'une matrice  $K$ . Les déclarations suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\text{Im } A \subset \text{Im } K \ominus \text{Im } B$ ,
- (ii) Existe  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tel que  $\text{Im } (A \oplus BF) \subset \text{Im } K$ ,
- (iii) Existe  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tel que  $M \otimes (A \oplus BF) \leq N(A \oplus BF)$ , où  $M, N$  sont des matrices de dimensions appropriées, de façon que  $\text{Im } K = \{x \mid Mx \leq Nx\}$ .

La proposition précédente permet pour les semi-modules défini par l'image Kleene étoilés d'une matrice  $C$ , étudier les propriétés géométriques impliquant des propriétés de la  $(A, B)$ -invariance et  $(A, B)$ -invariance par retour d'état. Ce type particulier de semi-modules, apparaît comme la spécification donnée pour l'espace d'état d'un système de la forme (36), et si ces semi-modules répondent aux propriétés équivalentes de la proposition précédente, puis, à partir du point de vue dynamique, il doit être de tout état du système, il est possible de trouver une loi

de commande par retour d'état statique pour garantir que la trajectoire dans un système en boucle fermée reste incluse dans le semi-module, ce qui est utile dans de nombreux problèmes pratiques.

Ensuite, une solution à notre problème de commande existe si et seulement si l'inégalité est vraie pour  $k \geq 1$  :

$$C(A \oplus BF)x(k) \leq (A \oplus BF)x(k), \quad (42)$$

c'est-à-dire  $Cx(k+1) \leq x(k+1)$ ; il faut aussi que la condition initiale  $x(1)$  soit dans  $\text{Im } C^*$ . Par conséquent, nous pouvons obtenir des conditions qui garantissent l'existence et le calcul d'une solution si l'inégalité  $C \otimes (A \oplus BF) \leq A \oplus BF$  est satisfaite et la condition initiale est également satisfaite :  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . Pour résoudre ce problème, il est commode de faire la définition suivante.

**Définition 12.** Nous dirons que les restrictions temporelles sont admissibles au contrôle si toutes rangée nulle de la matrice  $B$  signifie que la ligne correspondante de la matrice  $C$  est nul.

Cette définition signifie que pour chaque restriction temporelle  $i = 1, \dots, Z$ , il existe un  $l_i \in \bar{q}$  tel que  $B_{z_i l_i} \neq \epsilon$ .

Le lemme suivant nous permettra de prouver notre résultat principal.

**Lemme 1.** Si les restrictions temporelles sont admissibles au contrôle, il est toujours possible de trouver une matrice  $F$  telle que  $CA \leq BF$  est vérifié.

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions de l'existence d'une loi de commande par retour d'état statique qui assure la satisfaction des restrictions temporelles définies par (39).

**Théorème 8.** Étant donné le semi-module  $\mathcal{D}$  défini par (40). Si les restrictions temporelles sont admissibles au contrôle et il existe un vecteur  $v \in \mathcal{D}$  tel que  $\text{sup}(v) = \bar{q}$ , alors, il existe une matrice  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tel que  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset \text{Im } C^*$ .

*Démonstration.* Pour prouver le théorème, en raison de la Proposition 7, il est suffisant de montrer qu'il existe une matrice  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  telle que les inégalités suivantes sont remplies,

$$CA \leq BF \quad \text{y} \quad CBF \leq BF. \quad (43)$$

En effet, notons tout d'abord que s'il existe  $v$  en  $\mathcal{D}$ , suit que l'inégalité  $CBv \leq Bv$  est satisfaite.

D'autre part, en raison du Lemme 1, il est possible de trouver une matrice  $F$  telle que  $CA \leq BF$ , avec  $F_{l_i r} \geq A'_{z_i r} - \tau_{z_i}^{max} - B_{z_i l_i}$ . En outre, comme tous les éléments

de la solution, le vecteur  $v$ , sont non nuls, en particulier  $v_{l_i}$  est non null, nous avons qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\alpha + v_{l_i} \geq A_{z_i'r} - \tau_{z_i}^{max} - B_{z_i l_i}$ . Ensuite, nous pouvons choisir  $F_{kr} = \alpha_r + v_k$  avec  $\alpha_{l_i} \geq A_{z_i'r} - \tau_{z_i}^{max} - B_{z_i l_i} - v_{l_i}$ , tel que les inégalités exprimées (43) sont remplies, ceci complète la preuve. ■

**Observation 3.** Notons que la preuve précédente est utilisé pour construire une matrice de commande  $F$  non nulle telle que ses vecteurs colonnes vérifient:

$$\begin{pmatrix} B_{z_1'} \\ \vdots \\ B_{z_Z'} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} F_{1r} \\ \vdots \\ F_{qr} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A_{z_1'r} \\ \vdots \\ A_{z_Z'r} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tau_{z_1}^{max} \otimes B_{z_1} \\ \vdots \\ \tau_{z_Z}^{max} \otimes B_{z_Z} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} F_{1r} \\ \vdots \\ F_{qr} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

La matrice  $F$  peut contenir des colonnes nulles, puisque le vecteur nul satisfait également (44). Cela peut se produire par exemple lorsque  $A_{z_i'r} = \epsilon$ , pour tous  $i = 1, \dots, Z$ , alors  $F_r = \epsilon$ .

La condition  $C(A \oplus BF) \leq A \oplus BF$  permet de constater qu'un retour d'état statique approprié pour que  $x(k)$  soit maintenu dans  $\text{Im } C^*$ , pour  $k \geq 2$  peut être tel qu'il satisfait (44), évidemment la solution  $F$  est pas nécessairement unique, parce que (44) définit un polyèdre max-plus. Un système de générateurs pour cet ensemble solutions peut être explicitement calculé, voir [Allamigeon, 2010], et donc il est toujours possible de connaître toutes les lois de commande qui peuvent être appliquées pour répondre aux restrictions temporelle pour  $k \geq 2$ .

En outre, s'il est vrai que la solution particulière  $F$  trouvée dans le Théorème 8 n'est pas optimale du point de vue pratique, puisque la matrice  $F$  a des colonnes avec toutes les entrées non nulles, il est possible, à partir d'un système générateur (44), de construire des solutions plus simples pour synthétiser la loi de commande tenant compte de critères supplémentaires. Une solution peut-être plus simple à réaliser si elle est de telle sorte que chaque colonne,  $F_r$ , a au plus une entrée non nulle, ce fait est possible, si pour les  $i$  de façon que  $A_{z_i'r} \neq \epsilon$ , les lignes de la matrice  $B$  associée à des transitions d'entrée des restrictions  $i$ , vérifient que la composante  $B_{z_i l}$  est non nulle, alors nous aurions que  $F_{lr} \neq \epsilon$  et  $F_{kr} = \epsilon$  dans tout autre cas. Une propriété très importante pour les applications est la causalité de la loi de commande, ce qui permet sa mise en œuvre en ligne.

**Corollaire 4.** Dans les conditions du Théorème 8, nous pouvons choisir la matrice  $F$  dans l'ensemble des matrices de causalité telle que  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset \text{Im } C^*$  est satisfaite.

D'un autre côté, nous pouvons voir que les conditions du Théorème 8, sont suffi-

santes pour l'existence d'une commande qui assure la satisfaction des contraintes exprimées dans (39), pour  $k \geq 2$ . Cependant, pour le tir initial,  $k = 1$ , il faut de plus que la loi de commande fasse que la condition initiale  $x(1)$  soit dans  $\text{Im } C^*$ .

La proposition suivante montre l'existence d'une loi de commande de manière que la condition initiale  $x(1)$  est en el semi-module  $\text{Im } C^*$ , indépendamment du vecteur  $w$  pris sur l'ensemble des conditions initiales admissible définies dans (10).

**Proposition 8.** Si les hypothèses du Théorème 8 sont satisfaites et aussi les conditions initiales sont admissibles, alors  $x(1) \in \text{Im } C^*$ .

*Démonstration.* En effet, supposons que les hypothèses du Théorème 8 sont réunies, alors il existe une matrice  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  telle que (43) est satisfaite, donc il découle de (3.9) que pour tout vecteur  $w$ ,  $CAw \leq BFw$  et  $CBFw \leq BFw$ , considérant  $u(1) = Fw$  nous avons que  $CAw \leq Bu(1)$  et  $CBu(1) \leq Bu(1)$ . En outre, étant donné que les conditions initiales sont admissibles, à savoir  $Aw \geq w$ , nous avons que  $Cw \leq CAw \leq Bu(1)$ . On en conclut que  $Cx(1) = C(Bu(1) \oplus w) = Cw \oplus CBu(1) \leq Bu(1) \leq Bu(1) \oplus w = x(1)$ , et donc  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . ■

**Observation 4.** Notons que l'existence d'une loi de commande de la forme  $u(k) = Fx(k-1)$  pour  $k \geq 2$  et  $u(1) = Fw$ , définit une commande causale et admissible dans le sens que la loi de commande correspondante est non décroissante, c'est-à-dire  $u(k) \leq u(k+1)$  pour  $k \geq 1$ . Si  $k = 1$ ,  $u(1) = Fw \leq Fw \oplus FBu(1) = Fx(1) = u(2)$ , et cela implique que  $x(1) = Bu(1) \oplus w \leq Bu(2) \oplus Aw \leq x(2)$ , où  $w \in \mathcal{W}$ , et alors  $u(2) = Fx(1) \leq Fx(2) = u(3)$ . Par conséquent, en itérant cette relation, on peut conclure que  $x(k)$  et  $u(k)$  sont non décroissante.

En conclusion, la Proposition 8 complète le Théorème 8 et nous fournit une solution complète du problème d'invariance qui vient des restrictions temporelles imposées à un système dynamique linéaire dans max-plus.

**Corollaire 5.** Si les hypothèses du Théorème 8 sont satisfaites et aussi les conditions initiales sont admissibles, alors il existe un retour d'état défini par  $u(k) = Fx(k-1)$ ,  $k \geq 2$ , et  $u(1) = Fw$ , de manière que l'état du système en boucle fermée satisfait aux restrictions,  $x(k) \in \text{Im } C^*$ , pour  $k \geq 1$ .

## Conclusions générales et Perspectives

Ce manuscrit porte sur la commande géométrique des systèmes linéaires dans max-plus.

L'originalité de notre première contribution est la mise en place d'une nouvelle notion d'invariance comme est l'invariance par retour d'état dynamique, celle qui permet de montrer que la  $(A, B)$ -invariance par retour d'état dynamique est équivalente à la  $(A, B)$ -invariance. Nous montrons que dans le cas des semi-modules finement générés, que une loi de commande qui oblige les trajectoires d'un système linéaire dans max-plus à rester dans un semi-module donné, celle-ci peut être réalisée en utilisant un retour d'état dynamique; une telle loi de commande est causale, ce qui permet sa mise en œuvre en ligne. Le résultat obtenu pourrait résoudre certains problèmes de base qui ont été trouvés dans l'étude de divers problèmes de commande des systèmes sur semi-anneaux. De plus, comme un anneau peut être considéré comme un cas particulier de la notion de semi-anneau, le résultat généralise également les résultats qui ont été décrits pour les systèmes sur les anneaux. L'existence d'un retour d'état dynamique qui fait invariant à un module  $(A, B)$ -invariant a en effet été prouvée dans le cas des systèmes sur un domaine d'idéal principal [Conte et Perdon, 1995], et pour les systèmes sur un anneau Noetherien [Ito et Inaba, 1998]. Notre contribution, une loi de commande par un retour d'état dynamique, est en fait basée sur les commentaires suggérés dans [Di Loreto et al., 2007], qui portaient sur des systèmes définis sur un anneau commutatif.

Notre deuxième contribution originale est la description des conditions suffisantes d'invariance et d'existence d'un retour d'état statique, dans le cas des systèmes linéaires dans max-plus modélisés par graphes des événements temporisés soumis à des restrictions temporelles. Les restrictions temporelles, imposées sur le système dans l'espace d'état, ont été décrites dans le semi-module défini par l'image de l'étoile de Kleene de la matrice associée à ces restrictions. Le problème de la détermination d'une commande qui force la satisfaction aux restrictions temporelles, est formulé en termes de l'invariance de ce semi-module. Par conséquent, ces conditions peuvent être interprétées en fonction de l'identification d'une famille de semi-modules  $(A, B)$ -invariants, ce qui évite le problème du calcul du plus grand semi-module  $(A, B)$ -invariant inclus dans une spécification donnée. Notre proposition permet la conception de lois de commande statiques qui sont faciles à mettre en œuvre. En outre, la solution présentée prend en compte deux aspects originaux tels que l'initialisation de la loi de commande, et sa causalité, aspect important pour la mise en œuvre.

Les perspectives de ce travail sont les suivantes.

Une première direction est d'utiliser les résultats sur le retour d'état dynamique pour résoudre les problèmes de commande, par exemple le problème des res-

---

trictions de temps pour systèmes linéaires dans max-plus linéaire, discuté dans le Chapitre 3, et dans des cas particuliers [Katz, 2007], [Maia et al., 2011] et [Amari et al., 2012]. Ceci est utile dans la gestion de la production. Pour mettre en œuvre la loi de commande proposée il est nécessaire d'avoir connaissance du vecteur d'état  $x(k)$ , y compris sa valeur initiale  $x(0)$ . Si l'état n'est pas directement mesuré, sa reconstruction peut être nécessaire.

Une deuxième direction dans l'approche géométrique, pour donner une continuité logique au Chapitre 2, est l'analyse de la notion d'invariance conditionnelle, ce qui est utile à des fins d'observation afin de reconstruire l'état en ligne. Une première discussion à ce sujet sur des anneaux est donnée dans [Di Loreto et al., 2007], et pour les semi-anneaux [Di Loreto et al., 2010].

# Introducción General

Los Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos (SED), designan los sistemas generales de la concepción humana, y su evolución obedece a la ocurrencia de eventos que tienen lugar en tiempo discreto. Los sistemas de producción, las redes de transporte y los sistemas informáticos, son ejemplos de procesos que por su forma de evolución, pueden ser considerados como sistemas de eventos discretos.

La clase de SED de nuestro interés, es aquella que involucra fenómenos de sincronización y retardo. Para un proceso de esta clase de sistemas se puede obtener un modelo matemático de la evolución del estado, bajo la forma de ecuaciones en recurrencia utilizando los operadores “máx” y “+”, donde el operador del “máx” está relacionado con la sincronización en el consumo de los recursos y el operador “+” con el tiempo de procesamiento de las diversas tareas del proceso modelado. Estas ecuaciones efectivamente no son lineales en la teoría clásica, pero representadas sobre el álgebra max-plus, esta representación es lineal. El álgebra max-plus pertenece a una estructura algebraica denominada dioide, en realidad, es un semi-anillo idempotente (no posee elemento inverso aditivo y  $a \oplus a = a$ , ya que  $\text{máx}(a, a) = a$ , ver [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001]). Esta clase de sistemas es llamada sistemas de eventos discretos max-plus lineales. El álgebra max-plus es una herramienta matemática utilizada en conjunto con los grafos de eventos temporizados (GET), para el modelaje de esta variedad de sistemas. Los GET conforman una clase particular de las redes de Petri, [Murata, 1989], [Cohen, 2001]. Por medio de los GETs se puede comprender el comportamiento dinámico de los sistemas en relación a los diferentes disparos de las transiciones que pueden ocurrir. Conocer el comportamiento temporal de cada transición, es decir, su trayectoria, permite establecer el comportamiento global del sistema, permitiendo determinar su comportamiento futuro en vista de los objetivos marcados para el mismo.

En el dominio de los SED un objetivo deseado considerado, es el control de procesos. Como en la automática clásica, se entiende por control de un SED, el pivotaje

---

de sus entradas en vista de obtener un comportamiento específico del sistema.

Los primeros resultados concernientes al control de GET, obtenidos para el enfoque max-plus, aparecen en [Cohen et al., 1989b].

La teoría de control geométrico en particular fue propuesta con la dirección futura para sistemas max-plus lineales en [Cohen et al., 1999]. Esta teoría tiene como base la noción de  $(A, B)$ -invarianza o también llamada invarianza controlada, esta fue introducida independientemente en [Wonham et Morse, 1970] y [Basile et Marro, 1969]. Este enfoque ha proporcionado soluciones a muchos problemas de control, entre los cuales están, el problema de rechazo de perturbaciones. Muchos resultados de la teoría de control clásico tienen su versión análoga en el álgebra max-plus. En [Katz, 2003] y [Katz, 2007] el abordaje geométrico propuesto en [Wonham, 1985] fué adaptado para los semi-anillos max-plus. Así como la formulación y solución de problemas de control es realizada a través de los espacios invariantes en la teoría clásica, en [Katz, 2007] se formula el problema de control de SED a través de semi-módulos.

El trabajo presentado en este manuscrito se inscribe en el contexto de la teoría de los sistemas max-plus lineales igualmente llamada teoría de los sistemas lineales en los dioides. La motivación inicial de este estudio ha sido específicamente, contribuir al estudio, análisis y control de los sistemas de eventos discretos max-plus lineales, usando un enfoque geométrico, derivado de los trabajos de [Katz, 2007].

La contribución de esta tesis se centra en dos problemas.

- La primera parte, ha sido orientada al estudio de la relación de las nociones de  $(A, B)$ -invarianza y la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación dinámica sobre semi-anillos. Esta relación permite mostrar la equivalencia de estas dos nociones. Los resultados de esta parte han sido objeto de una publicación en [Cárdenas et al., 2015].
- La segunda parte, concierne un problema original en la teoría de sistemas max-plus lineales como lo es el diseño de una ley de control por retroalimentación de estados, que permita satisfacer las especificaciones expresadas bajo la forma de restricciones sobre el estado del sistema, dentro del enfoque geométrico. Específicamente, se trata el control de sistemas de eventos discretos modelados por grafos de eventos temporizados y sujetos a restricciones de tiempo. Las restricciones temporales impuestas al espacio de estado del sistema, son descritas en el semi-módulo definido por la imagen de la estrella de Kleene de la matriz asociada a las restricciones temporales. Propiedades

geométricas de este semi-módulo, para garantizar que la evolución del sistema en lazo cerrado satisfice las restricciones, son estudiadas. Condiciones suficientes concernientes a la existencia y cálculo de una ley de retroalimentación de estado que resulta causal son presentadas. Para el diseño de la ley de control se toma en cuenta dos aspectos importantes como los son la inicialización de la ley de control, y su causalidad. Los resultados de esta parte han sido aceptados para publicación en la Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, [Cárdenas et al., 2016].

Este manuscrito esta estructurada en cuatro capítulos organizados de la siguiente manera:

En el primer capítulo algunos conceptos y teoremas de base de la teoría de dioides, que serán útiles a lo largo de esta tesis son recordados. Seguido una introducción a la teoría de convexidad tropical es realizada, particularmente insistiremos en los conos max-plus, los cuales juegan un rol importante en nuestro estudio. Presentaremos ecuaciones para GET adaptadas a la modelización de SED considerados aquí. A partir de estas ecuaciones, una representación de estados lineales es obtenida. El problema de las condiciones iniciales es abordado. Además, se presenta una contribución teórica sobre las condiciones iniciales admisibles que conducen a soluciones no decrecientes del sistema. Al final del capítulo se introduce la noción de un semi-módulos  $A$ -invariantes.

El segundo capítulo, en la primera parte se muestra una revisión bibliográfica sobre las nociones de  $(A, B)$ -invarianza, para proporcionar una visión general del control geométrico de sistemas descritos en los dioides. Se presenta el algoritmo de punto fijo extendido sobre semi-anillos, el cual es usado para calcular el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en una especificación dada, diversos ejemplos son presentados. Luego, una definición de retroalimentación dinámica de estado es propuesta. Establecemos en la teoría de semi-anillos la equivalencia entre la  $(A, B)$ -invarianza y la  $(A, B)$ -invarianza de tipo retroalimentación dinámica. Dos ejemplos para ilustrar los resultados obtenidos son presentados.

El tercer capítulo es dedicado a nuestra contribución al control de sistemas max-plus lineales modelados por grafos de eventos temporizados y sujetos a restricciones temporales, usando un enfoque geométrico. Consideraremos un conjunto de restricciones sobre el estado del sistema que constituyen un nuevo objetivo de control a lograr. Condiciones suficientes concernientes a la existencia y cálculo de la ley de control serán presentadas. Al final del capítulo, para ilustrar la aplicación del enfoque geométrico, dos problemas de control son discutidos.

Finalmente, en el cuarto capítulo, las conclusiones de este trabajo y algunas perspectivas de investigaciones futuras son presentadas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este primer capítulo está dedicado a recordar las principales definiciones y herramientas algebraicas claves, que serán utilizadas en lo sucesivo. Sin ser exhaustivos, se presenta, en la primera parte, un conjunto de definiciones, notaciones y los resultados clásicos del álgebra de dioides [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001]. Un dioide es una estructura algebraica que presenta todas las propiedades de un anillo excepto la del elemento inverso aditivo. Además, la adición es idempotente, es decir  $a \oplus a = a$ , para todos los elementos que pertenecen al dioide. Por esta razón, los dioides son caracterizados algebraicamente como *semi-anillos idempotentes*. En la segunda parte se presentan algunos elementos relacionados con la teoría de convexidad max-plus, siendo de mayor interés los *conos max-plus*, los cuales pueden ser considerados como los análogos de los espacios vectoriales o módulos cuando el campo o el anillo es remplazado por el semi-anillo max-plus. Estos han sido estudiados bajo el nombre de *semi-módulos* en [Katz, 2007]. Seguido presentamos una clase particular de las redes de Petri, como lo son los *grafos de eventos temporizados* (GETs), los cuales ofrecen una representación gráfica pertinente de los sistemas considerados en este estudio. Se obtiene una ecuación de los GET que conduce a modelos lineales en el dioide álgebra max-plus. Las condiciones iniciales admisibles que conducen a soluciones no decrecientes del sistema es presentado. Este capítulo termina con una introducción a la noción de A-invarianza y algunas propiedades básicas de semi-módulos A-invariantes.

## 1.1. Algebra de dioides

En esta sección, tomando en cuenta nuestro interés de obtener modelos “ lineales ” para una clase de sistemas, a continuación se muestran ciertas propiedades específicas de la estructura algebraica de un dioide. Para una revisión más completa, se remite al lector a los trabajos de [Cohen, 2001], [Baccelli et al., 1992], y [Gaubert, 1992].

### 1.1.1. Dioides y relación de orden

**Definición 1.1.1 (Semi-anillo)** Un semi-anillo es un conjunto  $\mathcal{S}$  dotado con dos leyes de composición interna binarias  $\oplus$  y  $\otimes$ , tales que  $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$ :

- la ley aditiva  $\oplus$  es:
  - Asociatividad :  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ ,
  - Conmutatividad :  $x \oplus y = y \oplus x$ ,
  - Existe un elemento nulo, denotado por  $\epsilon$  :  $x \oplus \epsilon = x$ ,

- la ley multiplicativa es :

- Asociatividad :  $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ ,
- Distributiva con respecto a la suma:

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \\ (y \oplus z) \otimes x &= (y \otimes x) \oplus (z \otimes x) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{S}; \end{aligned}$$

es decir, la multiplicación es distributiva con respecto a la suma tanto a derecha como a izquierda (notemos que una afirmación no implica a la otra porque la multiplicación no es necesariamente conmutativa);

- Existe un elemento unidad, denotado por  $e$ :  $x \otimes e = e \otimes x = x$ ,
- El elemento nulo es absorbente:  $\epsilon \otimes x = x \otimes \epsilon = \epsilon$ ,

Representaremos generalmente un semi-anillo por la tripla  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ . Diremos que un semi-anillo es conmutativo si la operación  $\otimes$  es conmutativa en  $\mathcal{S}$ . Lo que diferencia a un semi-anillo de un anillo es la ausencia de un elemento inverso aditivo, ver [Cohen, 2001], [Baccelli et al., 1992].

**Definición 1.1.2 (Dioide)** Sea  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  un semi-anillo. Si la ley  $\oplus$  es idempotente, esto es,  $x \oplus x = x$ ,  $\forall x \in \mathcal{S}$ , entonces  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  será llamado dioide (o semi-anillo idempotente).

**Ejemplo 1.1.1** El conjunto  $\{0, 1\}$  con las operaciones  $\oplus = \text{máx}$  y  $\otimes = \text{mín}$  es un semi-anillo idempotente y conmutativo que recibe el nombre de dioide Booleano.

Ejemplos de dioides comunicativos son el álgebra max-plus y min-plus. Aquí estaremos principalmente interesados en el semi-anillo max-plus.

**Ejemplo 1.1.2 (Dioide  $\mathbb{R}_{\text{max}}$ )** El conjunto  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  equipado con las operaciones básicas como la maximización y la adición usual, las cuales son representadas por  $\oplus$  y  $\otimes$  respectivamente:

$$x \oplus y = \text{máx}(x, y) \quad \text{y} \quad x \otimes y = x + y,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , es un semi-anillo idempotente y conmutativo. Esta estructura es llamada álgebra max-plus, y denotada por el símbolo  $\mathbb{R}_{\text{max}}$ .

Así,  $\mathbb{R}_{\text{max}} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$  es un dioide conmutativo.

**Ejemplo 1.1.3 (Dioide  $\mathbb{R}_{\text{min}}$ )** El conjunto  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  equipado con siguientes operaciones

$$x \oplus y = \text{mín}(x, y) \quad \text{y} \quad x \otimes y = x + y,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , es un semi-anillo idempotente y conmutativo. Esta estructura es llamada álgebra min-plus, y denotada por el símbolo  $\mathbb{R}_{\text{min}}$ .

**Ejemplo 1.1.4** El conjunto de los números reales no negativos  $\mathbb{R}^+$  equipado con la suma y la multiplicación habitual, forma un semi-anillo conmutativo que no es idempotente. En este semi-anillo  $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ , tenemos que  $\epsilon = 0$  y  $e = 1$ . Notemos además que todo elemento no nulo de  $(\mathbb{R}^+, +, \times)$  tiene inverso multiplicativo. Si consideramos el mismo conjunto  $\mathbb{R}^+$  con las operaciones  $\oplus = \text{máx}$  y  $\otimes = \times$ , forma el semi-anillo idempotente y conmutativo  $(\mathbb{R}^+, \text{máx}, \times)$ , el cual tiene los mismos elementos neutros de  $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ .

**Notación.** Como en el caso de las estructuras algebraicas usuales, el signo de multiplicación,  $\otimes$ , será generalmente omitido en las expresiones analíticas para los

elementos de un dioide.

La idempotencia de la ley aditiva  $\oplus$  induce naturalmente una relación de orden en el dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , que es compatible con las leyes  $\oplus$  y  $\otimes$ . El siguiente teorema muestra la existencia de este orden.

**Teorema 1.1.1** En el dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , la relación  $\preceq$  definida por

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, x \preceq y \Leftrightarrow x \oplus y = y, \quad (1.1)$$

es una relación de orden compatible con las leyes del dioide, es decir:

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Rightarrow x \oplus z \preceq y \oplus z \text{ para todo } z \in \mathcal{S}, \\ x \preceq y &\Rightarrow x \otimes z \preceq y \otimes z \text{ para todo } z \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

*Demostración.* En primer lugar veamos que la relación  $\preceq$  es una relación de orden. Para mostrar que  $\preceq$  es una relación de orden es necesario probar que esta es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En efecto, como la adición es idempotente, tenemos que  $x = x \oplus x \preceq x$ , lo cual verifica la reflexividad de la relación. La antisimetría es probada por la conmutatividad de la ley aditiva: si  $x \preceq y$  y  $y \preceq x$  entonces  $y = x \oplus y$  y  $x = y \oplus x = x \oplus y$ , y se deduce directamente que  $x = y$ . La transitividad es generada por la asociatividad de la ley  $\oplus$ : si  $x \preceq y$  y  $y \preceq z$  entonces  $y = x \oplus y$  y  $z = y \oplus z$  de donde  $z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus z$ , así  $x \preceq z$ , y por tanto  $\preceq$  es una relación de orden. Verifiquemos ahora que la relación de orden es compatible con las leyes  $\oplus$  y  $\otimes$ . Sean  $x, y, z \in \mathcal{S}$  tales que  $x \preceq y$ , esto es  $y = x \oplus y$ , luego, tenemos que  $y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z = (x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$ , así  $x \oplus z \preceq y \oplus z$ , por tanto la relación de orden es compatible con la ley  $\oplus$ . Por último, veamos la compatibilidad de la ley  $\otimes$ : Sean  $x, y \in \mathcal{S}$  tal que  $x \preceq y$  y sea  $z \in \mathcal{S}$ , tenemos que  $y \otimes z = (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ , de donde  $x \otimes z \preceq y \otimes z$  (similarmemente para la multiplicación a la izquierda). ■

Notemos que  $\epsilon \preceq x$ , para todo  $x \in \mathcal{S}$ , de donde podemos afirmar que todos los elementos de un semi-anillo idempotente  $\mathcal{S}$  son de alguna manera “positivos”.

En el semi-anillo idempotente  $\mathbb{R}_{\max}$  la relación de orden  $\preceq$ , corresponde al orden habitual  $\leq$ ,

$$x \preceq y \Leftrightarrow y = \max(x, y) \Leftrightarrow x \leq y. \quad (1.2)$$

Entre tanto, en el semi-anillo idempotente  $\mathbb{R}_{\min}$  la relación de orden  $\preceq$ , corresponde al orden  $\geq$ ,

$$x \preceq y \Leftrightarrow y = \min(x, y) \Leftrightarrow x \geq y. \quad (1.3)$$

**Definición 1.1.3 (Subsemi-anillo)** Sea  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  un semi-anillo y  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ . Se dice que  $(\mathcal{S}', \oplus, \otimes)$  es un subsemi-anillo de  $\mathcal{S}$  si

- $\epsilon \in \mathcal{S}'$  y  $e \in \mathcal{S}'$ ,
- $\mathcal{S}'$  es cerrado para las leyes  $\oplus$  y  $\otimes$ .

Si  $\mathcal{S}$  es un semi-anillo idempotente (dioide),  $\mathcal{S}'$  es llamado sub-dioide de  $\mathcal{S}$ .

**Ejemplo 1.1.5** En la literatura podemos encontrar varios subsemi-anillos de ínteres del semi-anillo  $\mathbb{R}_{\max}$ . Entre ellos,  $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \text{máx}, +)$  y  $\mathbb{Q}_{\max} = (\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}, \text{máx}, +)$ . También podemos encontrar para el semi-anillo  $\mathbb{R}_{\min}$ , el subsemi-anillo  $\mathbb{N}_{\min} = (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \text{mín}, +)$ , el cual es conocido como *semi-anillo tropical*, ver [Baccelli et al., 1992].

En un semi-anillo idempotente  $\mathcal{S}$  existe una forma muy simple de definir la suma de un número infinito de elementos. En efecto, si  $X \subset \mathcal{S}$  es un conjunto infinito arbitrario, entonces resulta natural definir  $\bigoplus_{x \in X} x$  como la menor cota superior del conjunto  $X$  con respecto al orden natural en aquellos casos en que dicha cota superior exista. Esta definición esta motivada por el hecho de que  $x \oplus y$  es la menor cota superior del conjunto  $\{x, y\}$ .

**Definición 1.1.4 (Dioide completo)** Un dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  es completo si es cerrado para las sumas infinitas y la ley  $\otimes$  es distributiva con respecto a sumas infinitas, es decir, para todo  $c \in \mathcal{S}$  y todo subconjunto  $X \subset \mathcal{S}$ ,

$$c \otimes \left( \bigoplus_{x \in X} x \right) = \bigoplus_{x \in X} c \otimes x \quad \text{y} \quad \left( \bigoplus_{x \in X} x \right) \otimes c = \bigoplus_{x \in X} (x \otimes c).$$

Un dioide completo admite un elemento máximo  $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} x$ , que será denotado por  $T$ . Este elemento resulta absorbente para la adición, es decir,  $\forall x \in \mathcal{S}, T \oplus x = T$ .

De la definición de un dioide, note que, el elemento nulo  $\epsilon$  es absorbente para la multiplicación para todo elemento de  $\mathcal{S}$ , también se tiene:  $T \otimes \epsilon = \epsilon \otimes T = \epsilon$ .

Una operación muy importante definida en cualquier dioide completo es la siguiente.

**Definición 1.1.5 (Estrella de Kleene)**  $\mathcal{S}$  es un dioide completo. La aplicación estrella de Kleene, definida sobre  $\mathcal{S}$ , será denotada por  $\mathbf{K}$  y definida como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ x &\mapsto x^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x^i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $x^i = x \otimes x^{i-1}$  y  $x^0 = e$ . Se define igualmente la aplicación “+” derivada de la estrella,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ x &\mapsto x^+ = \bigoplus_{i \geq 1} x^i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Estas aplicaciones satisfacen:  $a^* = e \oplus a^+$ , donde  $a^+ = a \oplus a^*$ .

Cuando el dioide no es completo, la estrella de Kleene no existe necesariamente. Por ejemplo, en el semi-anillo  $\mathbb{R}_{\min}$ , se tiene que  $a^*$  existe solamente para los reales no negativos, y siempre vemos que  $a^* = 0$ .

**Ejemplo 1.1.6** Se verifica fácilmente que los siguientes dioides son completos:

- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$  con  $\epsilon = +\infty$ ,  $e = 0$  y  $T = -\infty$  es un dioide completo, denotado por  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$ . Se tiene en  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$  la siguiente regla:

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty).$$

- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$  con  $\epsilon = -\infty$ ,  $e = 0$  y  $T = +\infty$  es un dioide completo, denotado por  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$ . Se tiene en  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$  la siguiente regla:

$$(-\infty) + (+\infty) = (-\infty).$$

Note que, el semi-anillo max-plus  $\mathbb{R}_{\max}$  no es completo puesto que por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{N}$  no tiene cotas superiores. Observe que en  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$  y  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$  el valor de  $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$ , está determinado por la regla  $\epsilon \otimes x = x \otimes \epsilon$  (propiedad de la Definición 1.1.1).

**Ejemplo 1.1.7** El semi-anillo tropical  $\mathbb{N}_{\min}$  es completo.

**Observación 1.1.1** Notemos que un subsemi-anillo de un semi-anillo completo no es necesariamente completo. por ejemplo, considere  $\mathbb{Q}_{\max} = (\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}, \text{máx}, +)$  es un subsemi-anillo de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$  que no es completo.

**Ejemplo 1.1.8 (Dioide Matricial)** El conjunto de las matrices de orden  $n \times m$ , con coeficientes en el dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , es un dioide matricial, denotado por  $(\mathcal{S}^{n \times m}, \oplus, \otimes)$ , donde las operaciones son definidas, a partir de las operaciones del dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  de manera análoga al álgebra clásica como se muestra a continuación :

- Para  $A, B \in \mathcal{S}^{n \times m}$  se define la suma,  $A \oplus B$  como

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \text{máx}(a_{ij}, b_{ij}).$$

- Para  $A \in \mathcal{S}^{n \times k}$  y  $B \in \mathcal{S}^{k \times m}$ , se define el producto,  $A \otimes B$  como

$$(A \otimes B)_{il} = \bigoplus_{j=1}^k (a_{ij} \otimes b_{jl}) = \text{máx}_{j \in \{1, \dots, k\}} (a_{ij} + b_{jl}).$$

El elemento identidad de  $\mathcal{S}^{n \times m}$  es la matriz, compuesta en la diagonal por  $e$  (el elemento neutro de la multiplicación de  $\mathcal{S}$ ) y fuera de la diagonal por  $\epsilon$  (el elemento neutro de la suma de  $\mathcal{S}$ ). Esto es,

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } i = j \\ \epsilon & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La matriz identidad de orden  $n \times n$ , será representada por  $\mathbb{I}_n$ . Se usará simplemente  $\mathbb{I}$  cuando la dimensión sea clara.

El elemento neutro de la suma en  $\mathcal{S}^{n \times m}$  es la matriz con todas sus componentes iguales a  $\epsilon$ , la cual también será representada por  $\epsilon$ .

Como en el álgebra convencional escribimos una matriz  $A \in \mathcal{S}^{n \times m}$  como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La entrada en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna es denota por  $a_{ij}$  o algunas veces como  $(A)_{ij}$ .

1. La traspuesta de una matriz  $A$  es denotada por  $A^T$  y es definida como en el álgebra convencional  $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ .
2. Para una matriz cuadrada y un entero positivo  $k$ , la  $k$ -ésima potencia de  $A$  es denotada por  $A^{\otimes k} = A^k = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ veces}}$ .
3. Para cualquier matriz  $A \in \mathcal{S}^{n \times m}$  y cualquier escalar  $\alpha \in \mathcal{S}$ ,  $\alpha \otimes A$  es definida como

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes (A)_{ij}.$$

### 1.1.2. Semi-módulos

En esta sección introduciremos los semi-módulos, ya que serán uno de los conceptos principales de estudio en los capítulos siguientes.

**Definición 1.1.6** Un semi-módulo  $\mathcal{M}$  sobre un semi-anillo idempotente  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  con elemento cero  $\epsilon_{\mathcal{S}}$  y elemento identidad  $e_{\mathcal{S}}$ , es un conjunto equipado con una ley interna denotada por  $\hat{\oplus}$  con elemento cero denotado por  $\epsilon_{\mathcal{M}}$ , y una ley de composición externa  $\mathcal{S} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda.x$ , las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

- $\hat{\oplus}$  es asociativa y conmutativa,
- $\lambda.(x \hat{\oplus} y) = \lambda x \hat{\oplus} \lambda y$ ,
- $(\lambda \oplus \beta).x = \lambda.x \hat{\oplus} \beta.x$ ,
- $\lambda.(\beta.x) = (\alpha \otimes \beta).x$ ,
- $\epsilon_{\mathcal{S}}.x = \epsilon_{\mathcal{M}}$ ,
- $\lambda.\epsilon_{\mathcal{M}} = \epsilon_{\mathcal{M}}$ ,
- $e_{\mathcal{S}}.x = x$ ,

para todo  $x, y \in \mathcal{M}$  y  $\lambda, \beta \in \mathcal{S}$ .

**Definición 1.1.7** Un subsemi-módulo de un semi-módulo  $\mathcal{M}$  es un subconjunto  $\mathcal{M}'$  de  $\mathcal{M}$ , tal que es cerrado con respecto a la operación interna de  $\mathcal{M}$ , y es cerrado con respecto a su operación externa, es decir, que satisface la propiedad:  $\lambda.x \in \mathcal{M}'$ , para todo  $\lambda \in \mathcal{M}$  y  $x \in \mathcal{M}'$ .

Los elementos de un semi-módulo reciben habitualmente el nombre de vectores y la operación externa el nombre de multiplicación por escalares. De aquí en adelante, si no existe riesgo de confusión, utilizaremos el símbolo  $\epsilon$  para representar tanto el cero  $\epsilon_{\mathcal{S}}$  del semi-anillo  $\mathcal{S}$  como al elemento cero  $\epsilon_{\mathcal{M}}$  del semi-módulo  $\mathcal{M}$ . También utilizaremos la notación  $\lambda x$  para representar al vector  $\lambda.x$ .

**Ejemplo 1.1.9** Sea  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  un semi-anillo arbitrario. Consideremos el conjunto  $\mathcal{S}^n$  formado por las  $n$ -úplas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de elementos de  $\mathcal{S}$  equipado con la suma componente a componente como ley interna. Si definimos  $\lambda x = (\lambda \otimes x_1, \dots, \lambda \otimes x_n)$ , para todo  $x \in \mathcal{S}^n$  y  $\lambda \in \mathcal{S}$ , entonces  $\mathcal{S}^n$  es un semi-módulo sobre  $\mathcal{S}$  equipado con esta ley externa.

**Ejemplo 1.1.10**  $(\mathbb{R}_{\max})^n$  es un semi-módulo sobre  $\mathbb{R}_{\max}$ . Su elemento cero es dado por  $(\epsilon, \dots, \epsilon)^T$ .

**Notación.** Denotemos por  $e^k \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , el  $k$ -ésimo vector unidad, es decir, el vector definido por  $(e^k)_k := e$  y  $(e^k)_h := \epsilon$  si  $h \neq k$ . Denotemos el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  por  $\bar{n}$ , y definamos para todo vector  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , el soporte de  $x$  por  $\text{sup}(x) = \{i \in \bar{n} \mid x_i \neq \epsilon\}$ . Diremos que  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  tiene soporte pleno si  $\text{sup}(x) = \bar{n}$ .

**Propiedad 1.1.1** Si  $\mathcal{M}$  es un semi-módulo sobre el dioide  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , entonces la operación interna  $\hat{\oplus}$  de  $\mathcal{M}$  es idempotente. En efecto, como la suma de  $\mathcal{S}$  es idempotente, tenemos que  $e \oplus e = e$ . Luego,  $x \hat{\oplus} x = ex \hat{\oplus} ex = (e \oplus e)x = ex = x$ .

Una familia generadora de un semi-módulo  $(\mathcal{M}, \hat{\oplus})$  sobre el semi-anillo  $\mathcal{S}$  es una familia  $\{x_i\}_{i \in I}$  de elementos de  $\mathcal{M}$  que verifican la siguiente propiedad: para todo  $x \in \mathcal{M}$  existe una familia generadora  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  de elementos de  $\mathcal{S}$ , con a lo sumo un número finito de elementos no nulos (esto es, el conjunto  $\{i \in I \mid \lambda_i \neq \epsilon\}$  finito), tal que  $x = \hat{\bigoplus}_{i \in I} \lambda_i x_i$ .

**Definición 1.1.8 (Semi-módulo finitamente generado)** Un semi-módulo se llama finitamente generado si tiene una familia generadora finita.

**Ejemplo 1.1.11** El semi-módulo  $\mathcal{S}^n$  del Ejemplo 1.1.9 es finitamente generado. Por ejemplo, el conjunto de vectores  $\{(e, \epsilon, \dots, \epsilon, \epsilon), (\epsilon, e, \dots, \epsilon, \epsilon), \dots, (\epsilon, \epsilon, \dots, e, \epsilon), (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon, e)\}$  es una familia generadora finita de  $\mathcal{S}^n$ .

Veremos en la Sección 1.4.2-b que existen semi-módulos que no son finitamente generados.

**Ecuación implícita**  $x = ax \oplus b$ .

La ecuación implícita  $x = ax \oplus b$  aparece con frecuencia en muchos problemas que involucran los grafos de eventos temporizados. Para más detalles ver [Cohen, 2001], [Baccelli et al., 1992].

**Teorema 1.1.2** Sea  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  un dioide completo, la ecuación implícita

$$x = ax \oplus b, \quad (1.6)$$

en  $\mathcal{S}$  tiene a  $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$  como la menor solución, siendo “ $\star$ ” el operador de la estrella de Kleene.

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $x = a^*b$  es solución de (1.13). En efecto,

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots)b = a^*b.$$

Luego, si  $x$  es solución de (1.13),  $x = ax \oplus b$ , así por definición del orden  $\preceq$  en  $\mathcal{S}$ , se cumple

$$ax \preceq x \text{ y } b \preceq x.$$

Por propiedad del producto, tenemos

$$ax \preceq x \Rightarrow a^k x \preceq \dots \preceq a^2 x \preceq ax \preceq x,$$

y así,  $\bigoplus_{k \geq 0} a^k x = a^*x \preceq x$ . Finalmente,

$$a^*x \preceq x \text{ y } b \preceq x \Rightarrow a^*b \preceq a^*x \preceq x.$$

Por tanto, toda solución de (1.13) es más grande que la solución  $a^*b$ . ■

**Proposición 1.1.1 (Libeaut et al., 1995)** Sea  $\mathcal{S}$  un dioide completo. Dada una matriz  $C \in \mathcal{S}^{n \times n}$  y un vector  $x \in \mathcal{S}^n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $C \otimes x \leq x$ ,
- (ii)  $x = C^* \otimes x$ ,
- (iii)  $x \in \text{Im } C^*$ .

*Demostración.* Dado  $x \in \mathcal{S}^n$ , supongamos que (i) se satisface, luego por recurrencia, se cumple  $C^2x \preceq Cx \preceq x$ , y más generalmente,  $C^kx \preceq x$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Por tanto

$$C^*x = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C^kx \preceq x.$$

Además, por definición de  $C^*$ , tenemos que  $x \preceq C^*x$ . Por tanto tenemos que (i) implica (ii). Claramente (ii) implica (iii). Finalmente, para todo  $x \in \text{Im } C^*$ , existe un  $v \in \mathcal{S}^n$  tal que  $x = C^*v$ . Como  $C^* = \mathbb{I} \oplus CC^*$ , tenemos que  $CC^*v \preceq x$ , y por tanto  $Cx \preceq x$ , con lo cual termina la prueba. ■

**Corolario 1.1.1** Sea  $\mathcal{S}$  un dioide completo. Dada una matriz  $C \in \mathcal{S}^{n \times n}$ . El conjunto de vectores que verifican la desigualdad  $Cx \preceq x$  forman un semi-módulo que coincide exactamente con el semi-módulo  $\text{Im } C^*$ , esto es:

$$\text{Im } C^* = \{x \in \mathcal{S}^n \mid C \otimes x \preceq x\}. \quad (1.7)$$

Como veremos en la próxima sección, esta variedad de semi-módulos finitamente generados será de gran interés en el Capítulo 3.

## 1.2. Introducción a la teoría de convexidad max-plus

Debido al interés de este trabajo, será necesario mostrar el cálculo de sistemas generadores de conos max-plus de la forma  $Mx \leq Nx$  usando un algoritmo de eliminación general (Método de doble descripción tropical), [Allamigeon, 2010]. A continuación se introducen nociones generales y conceptos principales de la teoría de convexidad max-plus, tal como poliedros y conos poliédricos max-plus; y se describe una relación entre estos conjuntos basados en la técnica de homogenización.

### 1.2.1. Conjuntos convexos max-plus

**Definición 1.2.1** Un conjunto  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  se dice ser un conjunto convexo max-plus si para todo  $u, v \in \mathcal{C}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\max}$ , tal que  $\lambda \oplus \mu = e$ , se tiene:

$$\lambda u \oplus \mu v \in \mathcal{C}.$$

Los conjuntos convexos max-plus son definidos como los análogos de los conjuntos convexos clásicos. Sin embargo, observe que la condición que  $\lambda, \mu$  son no negativos es omitida. Esto debido a que en el contexto max-plus, todos los escalares son no negativos, ya que  $\epsilon = -\infty \leq \lambda$  se cumple para todo  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ .

**Definición 1.2.2** Dado un subconjunto no vacío  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ , el *hull* convexo max-plus de  $S$ , denotado  $co(S)$ , es definido como el conjunto de las combinaciones convexas max-plus  $\alpha_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_p x_p$ , donde  $p \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_p \in S$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_{\max}$  y  $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_p = e$ .

Un conjunto convexo max-plus es finitamente generado si es de la forma  $co(S)$  para algún subconjunto finito  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ .

### 1.2.2. Conos max-plus

**Definición 1.2.3** Un subconjunto no vacío  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  es un cono max-plus si es estable por las combinaciones max-plus lineales, esto es

$$\lambda u \oplus \mu v \in \mathcal{C},$$

para todo  $u, v \in \mathcal{C}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\max}$ .

Los conos max-plus pueden ser considerados como los análogos de los espacios vectoriales o módulos cuando el campo o el anillo es remplazado por el semi-anillo max-plus.

**Observación 1.2.1** Estos conos han sido estudiados bajo los nombres de espacios idempotentes en [Litvinov et al., 2001] o semi-módulos en [Katz, 2007], y [Cohen et al., 2004]. A lo largo de este manuscrito, serán utilizados ambos términos: conos max-plus o semi-módulos.

Dado un subconjunto no vacío  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ , el cono max-plus generado por  $S$ , denotado por  $\text{cone}(S)$ , es el conjunto de las combinaciones max-plus lineales  $\alpha_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_p x_p$ , donde  $p \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_p \in S$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_{\max}$ . El  $\text{cone}(S)$  es el cono más pequeño conteniendo a  $S$ . Un cono max-plus  $\mathcal{C}$  se dice ser finitamente generado si existe un subconjunto finito  $S \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  tal que  $\mathcal{C} = \text{cone}(S)$ , lo cual equivale a decir que  $\mathcal{C} = \{Cw \mid w \in \mathbb{R}_{\max}^t\}$  para alguna matriz  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times t}$ .

Un ejemplo de cono max-plus son los subconjuntos de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  de la forma  $\langle x \rangle = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\max}\}$ , donde  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  es un elemento dado no nulo, los cuales son llamados rayas.

Nosotros asumimos que  $\mathbb{R}_{\max}^n$  es equipado con la topología usual, definida por la métrica  $(x \ y) \rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |e^{x_i} - e^{y_i}|$ . La operación de clausura es denotada por  $cl(\cdot)$ . Note que si  $\mathcal{C}$  es un conjunto convexo tropical (respectivamente para cono max-plus),  $cl(\mathcal{C})$  es también un conjunto convexo max-plus (respectivamente para un cono max-plus) por continuidad de la adición tropical y la multiplicación por un escalar.

**Proposición 1.2.1 (P. Butkovic et al., 2007)** Todo cono max-plus finitamente generado es cerrado.

**Definición 1.2.4** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un conjunto convexo cerrado. El cono recesión  $\text{rec}(\mathcal{C})$  es definido como el conjunto

$$\{v \mid x \oplus \lambda v \in \mathcal{C} \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}_{\max}\},$$

donde  $x$  es un elemento arbitrario de  $\mathcal{C}$ .

### 1.2.3. Homogenización tropical

En esta sección, se presenta una técnica conocida en el sentido clásico, como *homogenización*. En el sentido max-plus esta fue introducida en [Gaubert et Katz, 2007]. Esta técnica permite representar un conjunto convexo max-plus cerrado por un cono max-plus, la cuál consiste en agregar una dimensión a éste último para representar las componentes afines del conjunto convexo.

La Homogenización tropical depende de la siguiente propiedad:

**Proposición 1.2.2** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un conjunto convexo max-plus cerrado. Entonces el conjunto  $\widehat{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}_{\max}^{n+1}$  definido por

$$\widehat{\mathcal{C}} = cl(\{(\alpha x, \alpha) \mid x \in \mathcal{C}, \alpha \in \mathbb{R}_{\max}\}), \quad (1.8)$$

es un cono max-plus cerrado. Además, la siguiente relación se cumple:

$$\mathcal{C} = \{x \mid (x, e) \in \widehat{\mathcal{C}}\}, \quad (1.9)$$

$$rec(\mathcal{C}) = \{x \mid (x, \epsilon) \in \widehat{\mathcal{C}}\}. \quad (1.10)$$

*Demostración.* Primero, mostremos que el conjunto definido por  $\mathcal{D} = \{(\alpha x, \alpha) \mid x \in \mathcal{C}, \alpha \in \mathbb{R}_{\max}\}$  es un cono max-plus. Consideremos  $u = (\alpha x, \alpha)$  y  $v = (\beta y, \beta)$  elementos en  $\mathcal{D}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\max}$ , y veamos que  $\lambda u \oplus \mu v \in \mathcal{D}$ . Claramente, cuando  $\alpha, \beta, \lambda$ , o  $\mu$  es igual a  $\epsilon$ , es obvio que  $\lambda u \oplus \mu v \in \mathcal{D}$ . De lo contrario, consideremos  $k = \alpha\lambda \oplus \beta\mu$  y  $k$  estrictamente más grande que  $\epsilon$ . Si  $k^{-1} = (-k)$  es su inverso multiplicativo, entonces  $(\alpha\lambda k^{-1}) \oplus (\beta\mu k^{-1}) = e$ , y usando que  $x, y \in \mathcal{C}$ , tenemos que  $(\alpha\lambda k^{-1})x \oplus (\beta\mu k^{-1})y$  es un elemento de  $\mathcal{C}$ . Luego, se sigue que  $\lambda u \oplus \mu v = (k(\alpha\lambda k^{-1})x \oplus (\beta\mu k^{-1})y, k) \in \mathcal{D}$ . Así,  $\mathcal{D}$  es un cono max-plus, y por tanto  $\widehat{\mathcal{C}}$  es también un cono max-plus, por ser la clausura de  $\mathcal{D}$ .

La relación  $\mathcal{C} \subset \{x \mid (x, e) \in \widehat{\mathcal{C}}\}$  es trivial. Recíprocamente, consideremos  $(x, e) \in \widehat{\mathcal{C}}$ , y sea  $(\alpha_n x^n, \alpha_n)$  una secuencia convergente a  $(x, e)$ , con  $x^n \in \mathcal{C}$  y  $\alpha_n \in \mathbb{R}_{\max}$  para cada  $n$ . Luego  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$ , y así que  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ . Como  $\mathcal{C}$  es cerrado, el elemento  $x$  pertenece a  $\mathcal{C}$ . Esto muestra (1.9).

Ahora, consideremos  $v \in rec(\mathcal{C})$ . Si  $x \in \mathcal{C}$ , entonces  $x \oplus (nv) \in \mathcal{C}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La secuencia  $(n^{-1}(x \oplus (nv)), n^{-1})$  de elementos de  $\widehat{\mathcal{C}}$ , obviamente converge a el elemento  $(v, \epsilon)$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , lo cual muestra que este último pertenece a  $\widehat{\mathcal{C}}$ . Recíprocamente, consideremos  $(v, \epsilon) \in \widehat{\mathcal{C}}$ , y  $x \in \mathcal{C}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ . Nosotros queremos mostrar que  $x \oplus \lambda v$  pertenece a  $\mathcal{C}$ . Si  $\lambda = \epsilon$ , esto es obvio. De lo contrario, consideremos una secuencia  $(\alpha_n x^n, \alpha_n)$  tal que  $x^n \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{R}_{\max}$ , y la cual converge a  $(u, \epsilon)$ . Naturalmente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \epsilon$ , así que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\alpha_n \leq \lambda^{-1}$  para cada  $n$ . Se sigue que,  $e \oplus \alpha_n \lambda = e$ , por tanto  $x \oplus \lambda(\alpha_n x^n)$  pertenece a  $\mathcal{C}$  para cada  $n$ . Como  $\mathcal{C}$  es cerrado, tomando el límite cuando  $n \rightarrow +\infty$ , se tiene que  $x \oplus \lambda u \in \mathcal{C}$ . Esto prueba (1.10). ■

### 1.2.4. Poliedros y conos poliédricos max-plus

**Definición 1.2.5** Un semi-espacio afín max-plus es un conjunto que contiene elementos  $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  verificando una desigualdad de la forma:

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} m_i x_i \oplus m_0 \leq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} n_i x_i \oplus n_0, \quad (1.11)$$

donde  $m_i, n_i \in \mathbb{R}_{\max}$  para todo  $i = 0, \dots, n$ .

**Definición 1.2.6** Un semi-espacio max-plus es un conjunto que contiene elementos  $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  verificando una desigualdad de la forma:

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} m_i x_i \leq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} n_i x_i, \quad (1.12)$$

donde  $m_i, n_i \in \mathbb{R}_{\max}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Definición 1.2.7** Un poliedro max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  es definido como la intersección de un número finito de semi-espacios afines max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

**Definición 1.2.8** Un cono poliédrico max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  es definido como la intersección de un número finito de semi-espacios max-plus de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

Equivalentemente, los poliedros y los conos poliédricos max-plus pueden ser expresados como conjunto solución de sistemas de desigualdades de restricciones. Esto es:

Un poliedro max-plus  $\mathcal{P}$  se expresa como:

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \oplus r \leq Nx \oplus s \}, \quad (1.13)$$

donde  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{\max}^n$  y  $p > 0$ .

Un cono poliédrico max-plus  $\mathcal{C}$  se expresa como:

$$\mathcal{C} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \leq Nx \}, \quad (1.14)$$

donde  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ , y  $p > 0$ .

**Observación 1.2.2** Es importante para nuestro estudio resaltar el hecho que, los conos poliédricos max-plus son precisamente los conos max-plus finitamente generados, tal como lo establece el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.1 (S. Gaubert - R. Katz, 2010)** Un cono max-plus es finitamente generado si y sólo si, es la intersección de un número finito de semi-espacios max-plus.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  la intersección de  $p$  semi-espacios. Veamos que  $\mathcal{V}$  es finitamente generado por inducción en  $p$ .

Cuando  $p = 1$ , podemos decir que  $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \bigoplus_{1 \leq i \leq n} a_i x_i \leq \bigoplus_{1 \leq j \leq n} b_j x_j\} = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \mathcal{V}_j$ , donde

$$\mathcal{V}_j = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid a_i x_i \leq b_j x_j \forall i = 1, \dots, n\},$$

para probar que  $\mathcal{V}$  es finitamente generado es suficiente mostrar que los conos  $\mathcal{V}_j$  son finitamente generado. Si  $b_j \neq \epsilon$  y  $a_j \leq b_j$ , entonces se puede mostrar que  $\mathcal{V}_j = \text{cone}(\mathcal{X}_j)$ , donde  $\mathcal{X}_j = \{b_j e^i \oplus a_i e^i \mid i = 1, \dots, n\}$ . Si  $b_j = \epsilon$  o  $a_j > b_j$ , entonces  $\mathcal{V}_j = \text{cone}(\mathcal{X}_j)$ , donde  $\mathcal{X}_j = \{e^i \mid a_i = \epsilon\}$ .

Ahora, supongamos que la intersección de  $p$  semi-espacios es finitamente generada y consideremos

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Ax \leq Bx\} \cap \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid ax \leq bx\},$$

donde  $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  y  $a, b \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times n}$ , es la intersección de  $p + 1$  semi-espacios.

Luego, sabemos que existe una matriz  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times t}$ , para algún  $t \in \mathbb{N}$ , tal que  $\{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Ax \leq Bx\} = \{Cw \mid w \in \mathbb{R}_{\max}^t\}$ . Consideremos el semi-espacio definido por  $\mathcal{H} = \{w \in \mathbb{R}_{\max}^t \mid aCw \leq bCw\}$ , luego existe otra matriz  $D \in \mathbb{R}_{\max}^{t \times r}$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $\mathcal{H} = \{Du \mid u \in \mathbb{R}_{\max}^r\}$ . Por tanto,  $\mathcal{V} = \{Cw \mid aCw \leq bCw\} = \{CDu \mid u \in \mathbb{R}_{\max}^r\}$  es finitamente generado.

Recíprocamente, sea  $\mathcal{V} = \{Cw \mid w \in \mathbb{R}_{\max}^t\}$ , donde  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times t}$ , un cono finitamente generado. Luego, como los conos finitamente generados son cerrados (ver [Butkovic et al., 2007], Cor. 27), se sigue del teorema de separación para conos cerrados (ver [K. Zimmermann, 1977]) que  $\mathcal{V}$  es la intersección de semi-espacios de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  en el cual esta contenido. Note que un semi-espacio  $\{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid ax \leq bx\}$  contiene a  $\mathcal{V}$  si, y sólo si, los vectores filas  $a$  y  $b$  satisfacen  $aC \leq bC$ . Ya que  $\{(a, b) \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times 2n} \mid aC \leq bC\}$  es una intersección finita de semi-espacios, nosotros sabemos por la primera parte de la demostración que que existen matrices  $A$  y  $B$

tales que  $(a, b)$  es una combinación max-plus lineal de las filas de la matriz  $(A, B)$ . Por tanto,  $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Ax \leq Bx\}$ , es decir,  $\mathcal{V}$  es una intersección finita de semi-espacios. ■

**Proposición 1.2.3** Sea  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \oplus r \leq Nx \oplus s\}$  un poliedro max-plus no vacío,  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{\max}^p$ . Entonces la siguiente relación se cumple:

$$\text{rec}(\mathcal{P}) = \{y \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid My \leq Ny\}. \quad (1.15)$$

*Desmostración.* Para probar la proposición, consideremos  $x \in \mathcal{P}$  y  $\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid My \leq Ny\}$ , y veamos que el cono recesión  $\text{rec}(\mathcal{P})$ , definido por el conjunto  $\{v \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid x \oplus \lambda v \in \mathcal{P}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\max}\}$  (ver Definición 1.2.4), coincide con el conjunto  $\mathcal{D}$ . En efecto, sea  $y \in \text{rec}(\mathcal{P})$ , como  $x \in \mathcal{P}$  se cumple para  $i \in \{1, \dots, p\}$  que  $M_i x \oplus r_i \leq N_i x \oplus s_i$ , donde  $M_i$  y  $N_i$  son respectivamente la  $i$ -ésima fila de  $M$  y  $N$ . Por definición de  $\text{rec}(\mathcal{P})$ , tenemos que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , se cumple que  $M_i x \oplus \lambda M_i y \in \mathcal{P}$ , y por tanto  $M_i x \oplus r_i \oplus \lambda(M_i y) \leq N_i x \oplus s_i \oplus \lambda(N_i y)$ . Si  $M_i y = \epsilon$ , entonces  $M_i y \leq N_i y$ . De lo contrario, para valores grandes de  $\lambda$ , tenemos que  $\lambda(M_i y) > N_i x \oplus s_i$ , lo cual implica que  $M_i y \leq N_i y$  (en particular  $\lambda > \epsilon$ ), luego  $y \in \mathcal{D}$ . Recíprocamente, supongamos que  $y \in \mathcal{D}$ , luego  $M_i y \leq N_i y$  para cada  $i$ , así para todo  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , se tiene que  $\lambda M_i y \leq \lambda N_i y$ , y usando que  $x \in \mathcal{P}$ , tenemos que  $(M_i x \oplus r_i) \oplus \lambda M_i y \leq (N_i x \oplus s_i) \oplus \lambda(N_i y)$ , luego  $M_i(x \oplus \lambda y) \oplus r_i \leq N_i(x \oplus \lambda y) \oplus s_i$ , así  $x \oplus \lambda y \in \mathcal{P}$ , y por tanto  $y \in \text{rec}(\mathcal{P})$ , con lo cual concluye la prueba. ■

### 1.2.5. Teorema de Minkowski-Weyl

Un análogo max-plus del teorema de Minkowski-Weyl ha sido establecido en varios trabajos, ver por ejemplo [Gaubert et Katz, 2007] y [Gaubert et Katz, 2009], donde se demuestran lo siguiente.

**Teorema 1.2.2** Los poliedros max-plus,  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  son precisamente los conjuntos de la forma  $\text{co}(P) \oplus \text{cone}(R)$ , donde  $P$  y  $R$  son subconjuntos finitos de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

**Teorema 1.2.3** Los conos poliédricos max-plus,  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  son precisamente los conjuntos de la forma  $\text{cone}(G)$  donde  $G$  es un subconjunto finito de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

Los subconjuntos  $P$  y  $R$  constituyen un sistema de generadores de  $\mathcal{P}$ ,  $(P, R)$  es llamada una representación generadora de  $\mathcal{P}$ , y el conjunto  $G$  constituye un sistema de generadores de  $\mathcal{C}$ .

**Lema 1.2.1 (Allamigeon, 2009)** Los poliedros y conos poliédricos max-plus son conjuntos cerrados.

*Demostración.* Solamente daremos los detalles de la demostración para conos poliédricos max-plus, el caso de poliedros es muy similar.

Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un cono poliédrico max-plus, y sea  $G = (g^i)_{1 \leq i \leq p}$  un conjunto generador. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $g^i \neq \epsilon$  para cada  $i$ . Consideremos una secuencia  $(x^n)_n \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ , la cual converge a un elemento  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , y veamos que  $x \in \mathcal{C}$ . Luego, para cada  $n$ , existen  $\lambda_1^n \cdots \lambda_p^n \in \mathbb{R}_{\max}$  tal que  $x^n = \bigoplus_{i=1}^p \lambda_i^n g^i$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , sea  $j$  tal que  $g_j^i \neq \epsilon$ . La secuencia  $(\lambda_i^n)$  es acotada, ya que  $\lambda_i^n \leq (g_j^i)^{-1} x_j^n$  y  $(x_j^n)_n$  es también acotada (ya que converge a  $x_j$ ). Se sigue del Teorema de Bolzano-Weierstrass que, una secuencia  $(\lambda_i^n)_n$  también converge también a el límite  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$ . Por tanto,  $x = \bigoplus_{i=1}^p \lambda_i g^i$ , la cual prueba que  $x$  pertenece a  $\mathcal{C}$ . ■

### 1.2.6. Homogenización de poliedros max-plus

Ahora, expresaremos la homogenización para poliedros max-plus. En lo que sigue, la concatenación de 2 matrices será denotada  $(M, N)$ ,  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ .

**Proposición 1.2.4** Sea  $\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \oplus r \leq Nx \oplus s \}$  un poliedro max-plus no vacío ( $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}_{\max}^p$ ). El cono homogenizado  $\widehat{\mathcal{P}}$  es el cono poliédrico max-plus dado por:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{ z \in \mathbb{R}_{\max}^{n+1} \mid (M \ r)z \leq (N \ s)z \}.$$

*Demostración.* Por Lema 1.2.1,  $\mathcal{P}$  es cerrado, así que aplicando la Proposición 1.2.2 se tiene que

$$\mathcal{P} = \{(\alpha x, \alpha) \mid x \in \mathcal{C}, \alpha \in \mathbb{R}_{\max}\} \cup \{(y, \epsilon) \mid y \in \text{rec}(\mathcal{P})\}.$$

Luego, usando la Proposición 1.2.3, claramente tenemos que  $(M \ r)z \leq (N \ s)z$  para todo  $z \in \mathcal{C}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $(M \ r)z \leq (N \ s)z$ . Si  $z = (y, \epsilon)$ , entonces  $My \leq Ny$ , así que  $y \in \text{rec}(\mathcal{P})$  (aplicando la Proposición 1.2.3 a  $\mathcal{P}$ , el cual es no vacío) y  $z \in \widehat{\mathcal{P}}$  (Proposición 1.2.2). De lo contrario,  $z = (x, \alpha)$  con  $\alpha > \epsilon$ , así que definiendo  $x' = \alpha^{-1}x$  satisface  $Mx' \oplus r \leq Nx' \oplus s$ . Se sigue por (1.8) que  $z = (\alpha x', \alpha)$  pertenece a  $\widehat{\mathcal{P}}$ . ■

Cuando  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ , el elemento  $(x, \alpha)$  se refiere al vector de  $\mathbb{R}_{\max}^{n+1}$  cuyas  $n$  primeras coordenadas coinciden con  $x$ , y la última coordenada es igual a  $\alpha$ . Existe una relación entre las representaciones generadoras de los poliedros max-plus y su cono homogenizado, ver [Allamigeon et al., 2012] para más detalles. Si  $G$  es un sistema de generadores del cono poliédrico  $\widehat{\mathcal{P}}$ , tenemos que  $\widehat{\mathcal{P}} = \text{cone}(G)$ . Después de multiplicar (en el sentido max-plus) cada elemento de  $G$  por un escalar no nulo, podemos asumir que la última coordenada de cada elemento de  $G$  es  $e$  o  $\epsilon$ . Definiendo  $P = \{x \mid (x, e) \in G\}$  y  $R = \{x \mid (x, \epsilon) \in G\}$ , se puede mostrar que  $(P, R)$  forma una representación generadora de  $\mathcal{P}$ , y por tanto  $\mathcal{P} = \text{co}(P) \oplus \text{cone}(R)$ .

Para encontrar un sistema de generadores del cono homogeneizado  $\widehat{\mathcal{P}}$  puede ser usado el Método de doble descripción tropical, [Allamigeon, 2010]. Este método será discutido en la siguiente sección.

Ahora mostraremos un ejemplo que ilustra el cálculo de un conjunto generador de un poliedro max-plus usando su cono homogenizado asociado.

**Ejemplo 1.2.1** Consideremos el poliedro max-plus  $\mathcal{P}$ , definido por:

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Por la Proposición 1.2.4, el cono homogenizado asociado a  $\mathcal{P}$ , denotado por  $\widehat{\mathcal{P}}$  es definido como el conjunto solución de,

$$\begin{pmatrix} 1 & e & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon \\ 2 & 1 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Resolviendo la primera desigualdad del sistema homogéneo (1.17), un sistema de generadores que la satisfaga, es el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\}.$$

Multiplicando a la derecha y a la izquierda la segunda desigualdad por la matriz  $G$  ( $G$  es la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema  $G$ ), obtenemos la desigualdad  $(2 \ 2 \ 3)y \leq (2 \ 2 \ 3)y$ , la cual tiene como un sistema de generadores a  $H = \{e^1, e^2, e^3\}$ . Los vectores  $Gh^1$ ,  $Gh^2$  y  $Gh^3$  forman un sistema de generadores del conjunto solución del sistema homogéneo. Luego el poliedro max-plus es

$$\mathcal{P} = \text{co} \left( \left\{ \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus \text{cone} \left( \left\{ \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

### 1.2.7. Método de doble descripción tropical

El método de doble descripción tropical es una técnica incremental basada en una sucesiva eliminación de inecuaciones. Dado un cono poliédrico max-plus  $\mathcal{C}$  definido por un sistema de  $n$  restricciones, calculamos por inducción en  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) un conjunto generador  $G_k$  del cono intermedio definido por las primeras  $k$  restricciones. Entonces  $G_n$  forma un conjunto generador del cono  $\mathcal{C}$ .

Pasando desde el conjunto  $G_k$  a el conjunto  $G_{k+1}$  basados en un resultado, el cuál, da un cono poliédrico max-plus  $\mathcal{K}$  y un semi-espacio max-plus  $\mathcal{H} = \{x \mid mx \leq bx\}$ , permite construir un conjunto generador  $G'$  de  $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}$  desde un conjunto generador  $G$  de  $\mathcal{K}$ . Esto es referido como la etapa elemental del método:

**Teorema 1.2.4 (Etapa elemental del método doble descripción tropical)** . Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un cono poliédrico max-plus generado por un conjunto  $G$  de elementos en  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , y sea  $\mathcal{H}$  un semi-espacio max-plus  $\{x \mid ax \leq bx\}$  donde  $a, b \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times n}$ .

Entonces el cono  $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$  es generado por:

$$\{g \in G \mid ag \leq bg\} \cup \{(ah)g \oplus (bg)h \mid g, h \in G, ag \leq bg \wedge ah > bh\}. \quad (1.18)$$

Este resultado también se cumple para cualquier cono max-plus, y no solamente para conos poliédricos max-plus.

*Demostración.* sea  $G'$  el conjunto dada en (1.18). La relación  $\text{cone}(G') \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$  es obvia.

Ahora, consideremos  $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ . Usando el Teorema de Minkowski para conos max-plus cerrados de [Gaubert et Katz, 2007],  $x$  puede ser expresada como una combinación lineal de al menos  $n + 1$  elementos de  $G$ , es decir,  $x = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \lambda_i g^i$  donde  $g^i \in G$  y  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$  para todo  $i$ . Observe que  $ax \leq bx$  implica:

$$\bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i (ag^i) \oplus \bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j (ag^j) \leq \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i (bg^i) \oplus \bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j (bg^j). \quad (1.19)$$

Supongamos que  $\bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j (bg^j) > \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i (bg^i)$ . Luego, existe  $k$  tal que  $\lambda_k (bg^k) = \bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j (bg^j)$ , y necesariamente  $\lambda_k \geq \epsilon$ . Pero (1.19) conduce a  $\lambda_k (bg^k) \geq \lambda_k (ag^k)$

mientras  $ag^k > bg^k$ , lo cual es una contradicción. Se sigue que  $\bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j(bg^j) \leq \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i(bg^i)$ , así que, por (1.19),

$$\bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j(ag^j) \leq \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i(bg^i). \quad (1.20)$$

Sea  $k$  el miembro de la derecha de (1.20). Si  $k > \epsilon$ , entonces

$$\begin{aligned} x &= \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i g^i \oplus \bigoplus_{ag^j < bg^j} \lambda_j g^j, \\ &= \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i g^i \oplus k^{-1} \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \left[ \bigoplus_{ag^j > bg^j} \lambda_j(ag^j) \right] \lambda_i g^i \\ &\quad \oplus k^{-1} \bigoplus_{ag^j > bg^j} \left[ \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i(bg^i) \right] \lambda_j g^j, \\ &= \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i g^i \oplus k^{-1} \bigoplus_{\substack{ag^i \leq bg^i \\ ag^j > bg^j}} \lambda_i \lambda_j [(ag^j)g^i \oplus (bg^i)g^j], \end{aligned} \quad (1.21)$$

lo cual muestra que  $x \in \text{cone}(G')$ . De lo contrario,  $k = \epsilon$ , por (1.20),  $\lambda_j(ag^j) = \epsilon$  para cada  $j$  tal que  $ag^j > bg^j$ , por tanto  $\lambda_j = \epsilon$ . Se sigue que  $x = \bigoplus_{ag^i \leq bg^i} \lambda_i g^i$ , por tanto  $x \in \text{cone}(G')$ . ■

El conjunto generado (1.18) es formado por los elementos  $g$  los cuales pertenecen a el semi-espacio  $\mathcal{H}$ , y sus combinaciones pares con elementos  $h$ , los cuales no están localizados en  $\mathcal{H}$ . Observe que estas combinaciones no solo satisfacen  $ax \leq bx$ , también la saturan.

**Teorema 1.2.5 (Método de doble descripción tropical)** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un cono poliédrico definido como el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Mx \leq Nx\}$ , donde  $M, N \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  (con  $p \geq 0$ ). Sea  $G_0, \dots, G_p$  la secuencia de subconjuntos finitos de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  definida como

$$\begin{cases} G_0 = (\epsilon^i)_{1 \leq i \leq n}, \\ G_i = \{g \in G_{i-1} \mid M_i g \leq N_i g\} \\ \quad \cup \{(M_i h)g \oplus (N_i g)h \mid g, h \in G_{i-1}, M_i g \leq N_i g \text{ y } M_i h > N_i h\}, \end{cases}$$

para todo  $1 \leq i \leq p$ , donde  $M_i$  y  $N_i$  son la  $i$ -ésima fila de  $M$  y  $N$ .

Entonces  $\mathcal{C}$  es generado por el conjunto finito  $G_p$ .

*Demostración.* Usando el Teorema 1.2.4, podemos fácilmente mostrar que cada  $G_i$  forma un conjunto generador del cono poliédrico max-plus dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid M_j x \leq N_j x, \text{ para todo } j = 1, \dots, i\}.$$

■

### 1.3. Grafos de eventos temporizados modelados como sistemas max-plus lineales

En la literatura, numerosas clases de modelos son propuestas para el estudio de sistemas dinámicos. La escogencia de un tipo de modelo es en función de los objetivos de investigación y de la naturaleza del sistema considerado. En el caso de sistemas de eventos discretos, varios conceptos de modelización han sido elaborados, por ejemplo, las cadenas de Markov [Baynat, 2000], las Redes de Petri [Murata, 1989], entre otros.

Es de nuestro interés la clase de sistemas de eventos discretos que presentan fenómenos de sincronización y retardos. El modelo dinámico de estos sistemas admite una representación lineal en la estructura álgebra max-plus, ver por ejemplo [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001], la cual tiene la maximización y la adición como operaciones básicas. Esta representación es bien adaptada para abordar, por ejemplo, los problemas de control o evolución del desempeño del sistema. Estos sistemas son llamados sistemas de eventos discretos max-plus lineales (SEDMPL) o sistemas max-plus lineales (SMPL). Los SMPL pueden ser modelados por grafos de eventos temporizados (GETs).

Los grafos de eventos temporizados (GETs), constituyen una subclase de las redes de Petri, en las cuales cada lugar tiene una única transición de entrada y una única transición de salida [Murata, 1989]. Es bien conocido, que el comportamiento tiempo/evento de un GET, bajo la regla de tiempo más rápido de funcionamiento, es decir una transición es disparada tan pronto como es habilitada, puede ser modelado por relaciones lineales sobre dioides [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001], [De Schutter, 1996].

El objetivo de esta sección es proporcionar una visión general del modelado de SMPL dentro de una estructura de dioide. Veremos que un semi-anillo idempoten-

te  $(\mathcal{S}, \text{máx}, +)$ , la sincronización de tareas puede ser modelada usando las operaciones de maximización, esto es, una nueva operación comienza tan pronto como todas las operaciones precedentes han sido finalizadas, y la operación de la adición corresponde a la duración de las actividades, esto es, el tiempo de finalización de una operación es igual al tiempo de inicio de la operación mas el tiempo de duración de la misma.

Seguido, mostraremos que el comportamiento de un GET, cuyo modo de evolución considerado es, el tiempo más rápido de funcionamiento, coincide exactamente con las soluciones no negativas y no decrecientes de un sistema max-plus lineal. Para ello será necesario tomar en cuenta las condiciones iniciales admisibles. El enfoque presentado, constituye una forma alternativa a lo expuesto por [Baccelli et al., 1992].

### 1.3.1. Sistemas max-plus lineales

Los sistemas max-plus lineales han sido estudiados por al menos tres décadas. Sin embargo una teoría bien establecida en tales sistemas específicos sigue siendo una investigación en curso. Algunos ejemplos de esta variedad de sistemas se encuentran regularmente en los sistemas de producción [Cohen et al., 1983], los sistemas de transporte [Braker, 1993], [Lotito et al., 2005] y los sistemas informáticos [Boudec et Thiran., 2001].

En [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001], se muestra que los sistemas de eventos discretos max-plus lineales pueden ser descrito por un modelo de la forma

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad (1.22)$$

$$y(k) = C \otimes x(k), \quad (1.23)$$

con  $A \in \mathbb{R}_{\text{max}}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\text{max}}^{n \times q}$  y  $C \in \mathbb{R}_{\text{max}}^{p \times n}$ , donde  $n$  es el número de estados,  $q$  es el número de entradas y  $p$  es el número de salidas. Las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  usualmente consisten de sumas o maximizaciones de tiempos de procesos internos, tiempos de transporte, entre otros, y son llamadas las matrices del sistema. Las componentes del estado  $x(k)$  son los instantes de tiempo en los cuales los eventos internos ocurren para el  $k$ -ésimo instante, las componentes de la entrada  $u(k)$  son los instantes de tiempo en los cuales los eventos de entrada ocurren para el  $k$ -ésimo instante, y las componentes de la salida  $y(k)$  son los instantes de tiempo en los cuales los eventos de salida ocurren para el  $k$ -ésimo instante.

A continuación se presenta un ejemplo tomado de [Heidergott et al., 2006], el cual

es basado en un pequeño sistema de trenes, bastante útil para mostrar un sistema dinámico max-plus lineal, donde el álgebra max-plus puede ser introducida de manera natural.

**Ejemplo 1.3.1 (Red ferroviaria simple)** Consideremos una red de trenes simple entre dos ciudades, cada una con una estación. Las estaciones de tren son denotadas por  $E_1$  y  $E_2$ , y son conectadas a través de 2 vías férreas, que constituyen tres circuitos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , como ilustra la Figura 1.1.

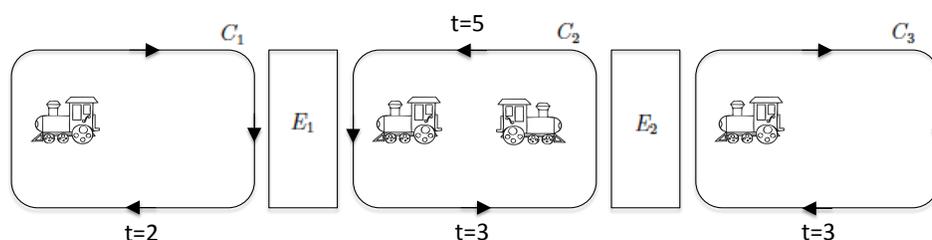


Figura 1.1: Red ferroviaria

Una vía toma el sentido  $E_1 \rightarrow E_2$  y el tiempo de viaje del tren es 3 unidades de tiempo (UT). La otra vía,  $E_2 \rightarrow E_1$  toma el sentido inverso y el tiempo de viaje es 5 UT. En conjunto estas dos vías forman el circuito  $C_2$ . Los trenes que proceden de  $E_1$  y llegan a  $E_2$ , deben retornar a  $E_1$  a través de otra vía, y los trenes que inician en  $E_2$ , podrán después de visitar a  $E_1$ , regresar a  $E_2$ . Además de estas dos vías, existen otras vías. Los circuitos  $C_2$  y  $C_3$  representan las vías que conectan los trenes entre las afueras de las ciudades con las estaciones principales  $E_1$  y  $E_2$ . Un viaje a través del circuito  $C_1$  de las afueras de la ciudad asociada a  $E_1$ , tarda 2 UT y un viaje en las afueras de la ciudad asociada a  $E_2$ , circuito  $C_3$ , tarda 3 UT.

Las estaciones localizadas en las afueras de las ciudades no son modeladas. Deseamos una escala de horario de los trenes sujeto a los siguientes criterios, restricciones e hipótesis de funcionamiento:

- Los tiempo de viaje son fijos y dados,
- La frecuencia de los trenes debe ser la más alta posible, es decir el número de salidas por unidad de tiempo,

- Los trenes que llegan a una estación deben esperar por otro tren, para permitir el intercambio de pasajeros,
- Los trenes deben partir de la estación tan pronto sea posible.

Supongamos que existen 4 trenes en el modelo, uno para cada circuito externo,  $C_1$  y  $C_3$ , y dos para el circuito interno,  $C_2$ . Los eventos del modelo son las salidas de los trenes, donde la variable  $x_1$  indica el tiempo de salida de los dos trenes que parten de la estación  $E_1$ , uno en la dirección de  $E_2$  y otro en la dirección del circuito  $C_1$ , y estos parten al mismo tiempo debido al intercambio de pasajeros. La variable  $x_2$  representa en forma similar, el tiempo de salida de los trenes de la estación  $E_2$ . Los instantes de salida son expresados como un vector  $x \in \mathbb{R}^2$ , donde la primera salida de trenes del día es dada por  $x(0)$ . El  $k$ -ésimo instante de salida de los trenes es indicado por  $x(k)$ .

Tomando en cuenta que los instantes de salida de los trenes deben respetar los criterios definidos para el sistema, tenemos lo siguiente:

1. La  $k$ -ésima salida de los trenes de la estación  $E_1$ , va a depender de la  $(k-1)$ -ésima salida de los trenes de la estación  $E_1$  y la  $k$ -ésima salida del tren de la estación  $E_2$  en dirección de  $E_1$ , y de los tiempos de viaje entre las estaciones. Podemos expresar los instantes de salida de  $x_1$  a través de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} x_1(k) &\geq x_1(k-1) + 2, \\ x_1(k) &\geq x_2(k-1) + 5. \end{aligned}$$

2. Similarmente definimos las desigualdades para los instantes de salida  $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_2(k) &\geq x_1(k-1) + 3, \\ x_2(k) &\geq x_2(k-1) + 3. \end{aligned}$$

Para que la salida de un tren se lleve a cabo, las dos condiciones deben ser respetadas, es decir, los trenes partirán en el instante de tiempo más tarde entre las dos desigualdades (operación del  $\text{máx}$ ). Además de esto, se desea que la frecuencia sea la más alta posible y los trenes partan tan pronto como sea posible, entonces es posible escribir las siguientes ecuaciones;

$$x_1(k) = \text{máx}\{x_1(k-1) + 2, x_2(k) + 5\}, \quad (1.24)$$

$$x_2(k) = \text{máx}\{x_1(k-1) + 3, x_2(k) + 3\}. \quad (1.25)$$

En este caso, el instante inicial de salida es conocido, y todos los instantes futuros son positivos.

Si se utiliza la notación del contexto max-plus, las ecuaciones (1.24) y (1.24) se expresan como:

$$x_1(k) = 2 \otimes x_1(k-1) \oplus 5 \otimes x_2(k-1), \quad (1.26)$$

$$x_2(k) = 3 \otimes x_1(k-1) \oplus 3 \otimes x_2(k-1). \quad (1.27)$$

Luego (1.26) y (1.26) se expresan en forma matricial como:

$$x(k) = A \otimes x(k-1) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix},$$

donde las entradas de la matriz  $A$ , digamos  $a_{ij}$  corresponden a los tiempos de viaje de la estación  $j$  a la estación  $i$ .

Además de describir el comportamiento del sistema por medio de ecuaciones, es posible describir el comportamiento dinámico de esta variedad de sistemas a través de formalismos con representación gráfica, como lo son los GET, como se verá más adelante.

## 1.3.2. Grafos de eventos temporizados, GET

### 1.3.2.1. Las redes de Petri

Las Redes de Petri (RdP) constituyen un formalismo gráfico propio para el modelado de los sistemas de eventos discretos, introducidas en 1962 por Carl Adam Petri en [Petri, 1962]. Estas son particularmente adecuadas para el estudio de procesos complejos que involucran propiedades de sincronización y el intercambio de recursos. Su soporte matemático ha permitido establecer numerosos resultados analíticos. El lector interesado puede encontrar una descripción bibliográfica ampliada de modelos de redes de Petri y sus análisis en [Murata, 1989]. Para el estudio de los sistemas de eventos discretos en el álgebra de dioide, las RdP son utilizadas generalmente como una herramienta de modelización intermedia. El enfoque consiste en efecto, en modelar el sistema estudiado en primer lugar por una red de Petri, y luego establecer, a partir del grafo obtenido las ecuaciones en el dioide apropiado para el análisis de este sistema.

**Definición 1.3.1** Una red de Petri es un grafo bipartito constituido por dos tipos de nodos: lugares (representados por un círculo) y transiciones (representadas por una barra). Los arcos orientados conectan ciertos lugares a ciertas transiciones, o ciertas transiciones conectan a ciertos lugares. A cada arco es asociado un peso (entero positivo). El número de lugares es finito y no vacío. Cada lugar puede contener una o varias marcas (representadas por puntos), las cuales modelan la dinámica del sistema.

De forma más formal, una red de Petri es una 5-tupla  $\{\mathcal{L}, \mathcal{T}, F, W, M_0\}$  donde:

- $\mathcal{L} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  es un conjunto no vacío y finito de lugares,
- $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  es un conjunto no vacío y finito de transiciones,
- $F \subset (\mathcal{L} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{L})$  es un conjunto no vacío de arcos,
- $W : F \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  es una función peso,
- $M_0 : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  es la marcación inicial,
- $\mathcal{L} \cap \mathcal{T} = \emptyset$  y  $\mathcal{L} \cup \mathcal{T} \neq \emptyset$ .

Una estructura de red de Petri  $\mathcal{R} = \{\mathcal{L}, \mathcal{T}, F, W\}$  sin marcación inicial específica, es denotada por  $\mathcal{R}$ . Una red de Petri con una marcación inicial dada, es denotada por  $(\mathcal{R}, M_0)$ . El número de marcas presentes en un lugar  $p_i$ , en un instante  $t$ , es llamado marcación del lugar  $p_i$ , y denotado por  $m(p_i)$  o  $m_i$ . La marcación  $M$  de la red, es el vector constituido por la marcación de cada lugar,  $M = (m_1, m_2, \dots, m_m)$ . La marcación inicial  $M_0$  corresponde al número de marcas presentes en la red en el instante inicial.

Las transiciones que no poseen lugares anteriores reciben el nombre de *transiciones de entrada o fuentes*. Los disparos de las mismas se deben a decisiones externas (son “controladas” desde el exterior). Las transiciones que no poseen lugares posteriores se llaman *transiciones de salida o sumideros*. Los disparos de las mismas nos indican cuando se producen marcas desde la red hacia el exterior. La Figura 1.2 representa una RdP *ordinaria* (todos sus pesos son unitarios), los lugares son representados por círculos y las transiciones por barras.

**Ejemplo 1.3.2** La RdP de la Figura 1.2, representa un sistema, por ejemplo informático, donde dos tareas requieren el mismo recurso renovable.

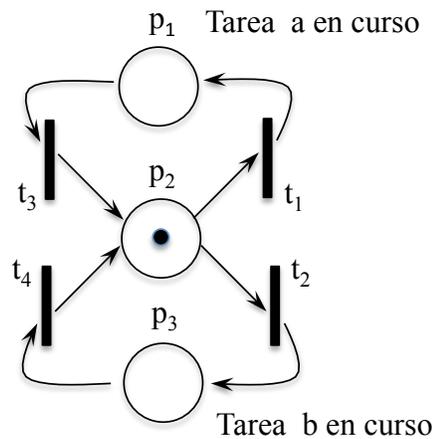


Figura 1.2: RdP: comportamiento de un sistema de recursos compartidos.

La marcación de una red de Petri evoluciona de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Una transición  $t_i$  es habilitada, si todos los lugares  $p_i$  que preceden a la transición  $t_i$  contienen al menos tantas marcas como el peso del arco que los une.
2. Una transición  $t_i$  habilitada, puede ser ó no, disparada, según la ocurrencia ó no del evento asociado a la transición  $t_i$ .
3. Cuando una transición  $t_i$  habilitada, es disparada se elimina de cada lugar anterior a dicha transición tantas marcas como el peso del arco que los une, y agrega a cada lugar posterior de la transición  $t_i$  tantas marcas como el peso del arco que los une.

**Definición 1.3.2** Sea  $(\mathcal{R}, M_0)$  una red de Petri. Una marcación  $M$  se dice alcanzable desde la marcación inicial  $M_0$  si existe una secuencia de transiciones  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_l}$  habilitadas, tal que la marcación obtenida después de los disparos de estas transiciones es  $M$ .

**Definición 1.3.3 (Acotación)** Un lugar  $p_i$  se dice ser acotado, si existe un número  $k$  tal que para toda marcación alcanzable  $M_0$ , se cumple que  $m_i \leq k$ . En el caso contrario se dice que el lugar  $p_i$  es no acotado.

Una red de Petri es acotada si todos sus lugares son acotados.

*Cuando las RdP modelan un sistema de manufactura, ciertos lugares representan los transportadores o bien zonas de almacenamiento intermedias. La acotación del marcaje del modelo es entonces sinónimo de limitación de la talla de los almacenes intermedios del sistema. La acotación de una RdP refleja de alguna manera una característica de estabilidad del sistema de producción.*

**Definición 1.3.4 (Vivacidad)** Una transición  $t_i$  se dice viva, cuando desde cualquier marcación alcanzable desde la marcación inicial, existe una secuencia de disparos factibles que conduce a una marcación en la cual la transición  $t_i$  está habilitada para dispararse.

Una red de Petri se dice viva si todas sus transiciones son vivas.

Diremos que una red de Petri no es viva si posee al menos una transición no viva. Estas transiciones que no son nunca habilitadas después de un número finito de disparos en la red, son llamadas transiciones muertas.

**Observación 1.3.1** *(El interés del estudio de la vivacidad de un modelo)* La evolución del marcaje de una RdP se hace por el disparo de transiciones. Cuando en el curso de su evolución, ciertas transiciones jamás son disparadas, esto indica que el evento asociado a esta transición no se produce y que el marcaje de una parte de la RdP no evoluciona, esto significa que el sub-sistema modelado para esta parte no funcionará. Entoces, existe un problema en el nivel de concepción del sistema. La idea es poder ser capaces de detectar sistemáticamente este fenómeno por el análisis de propiedades del modelo RdP, con el fin de disponer de ayuda en la concepción de los sistemas.

### 1.3.2.2. Grafos de eventos temporizados, GET

Después de haber presentado las nociones de base sobre las redes de Petri, el interés se centra en una estructura particular de las redes de Petri, como lo son los grafos de eventos temporizados. El estudio del comportamiento en el curso del tiempo de los sistemas dinámicos, incluyendo la evaluación de su rendimiento, ha conducido a asociar la noción de tiempo en los modelos de tipo RdP. Los GET permiten modelar sistemas donde intervienen los fenómenos de sincronización y retardos, los fenómenos de conflictos se suponen resueltos de antemano. En esta sección, definimos formalmente esta sub-clase de RdP y también algunas de sus

propiedades. En lo que sigue consideraremos redes de Petri ordinarias, las cuales son aquellas donde todos los arcos tienen peso igual a 1.

**Definición 1.3.5 (Grafo de evento)** Un grafo de evento es una red de Petri donde cada lugar tiene exactamente una transición de entrada y una transición de salida.

Una única transición de salida significa que todos los conflictos en el uso de recursos, fueron previamente resueltos por alguna política de sincronización. Una única transición de entrada significa que no hay concurrencia en el consumo o suministro de un recurso en el grafo de evento. En consecuencia a esta particularidad, los grafos de eventos son llamados modelos determinísticos. Esta sub-clase de las redes de Petri resulta interesante para modelar aplicaciones que presentan restricciones de sincronización entre múltiples procesos. Las restricciones de sincronización pueden ser observadas en la Figura 1.3. La Figura 1.3(a), describe la sincronización en el consumo: unión en una transición. La transición no es habilitada hasta que ambos lugares contengan al menos una marca. La Figura 1.3(b) describe la sincronización en la provisión: bifurcación en una transición. El aporte de una marca en los dos lugares es sincronizado por el disparo de la transición. Por ejemplo, este caso se presentaría cuando la transición representa a una operación en la cual una pieza compleja es dividida en varias partes más elementales.

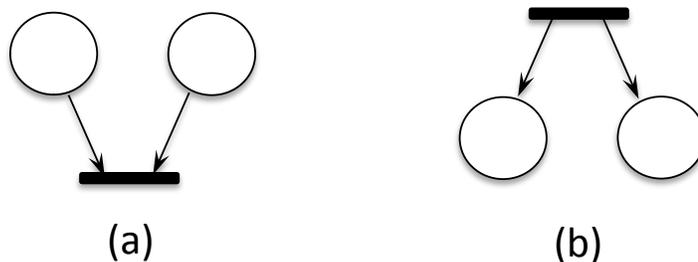


Figura 1.3: (a). Sincronización en la consumación. (b). Sincronización en la producción.

---

### 1.3.3. Propiedades de los grafos de eventos

Recordemos brevemente algunas características de los grafos de eventos a través de las siguientes proposiciones.

**Proposición 1.3.1** En un grafo de evento, el número de marcas en un circuito es constante.

*Demostración.* Recordemos que un circuito elemental es un camino que comienza y termina en la misma transición ó lugar. Supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos un circuito elemental de la forma:

$$t_1, p_1, t_2, p_2, \dots, p_{s-1}, t_s = t_1, \text{ con } s > 1 \text{ y } p_{s-1} = p_0.$$

Si una transición  $t_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$  del circuito está habilitada, su disparo remueve una marca del lugar  $p_{i-1}$  (esta puede remover marcas desde otros lugares de entrada a la transición  $t_i$ , pero estos no pertenecerían al circuito) y la agrega inmediatamente en el lugar  $p_i$  del circuito (esta puede agregar marcas a otros lugares de salida de la transición  $t_i$  pero estos no pertenecerían al circuito). Así la operación de habilitar una transición del circuito, hace invariante el número de marcas en el circuito. ■

**Proposición 1.3.2** Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de evento y  $M_0$  su marcación inicial. Entonces,  $(\mathcal{G}, M_0)$  es vivo si y sólo si, todo circuito elemental contiene un lugar marcado inicialmente.

*Demostración.* Supongamos que un circuito elemental de un grafo de eventos no contiene marcas, en referencia a la proposición 1.3.1, este circuito no contendrá jamás marcas, así todas sus transiciones permanecen no habilitadas, por tanto el grafo de eventos no es vivo. Recíprocamente, supongamos que el grafo de eventos no es vivo, luego posee por lo menos una transición que nunca será disparada (muerta) por cualquier secuencia de disparos, y esta posee obligatoriamente al menos una transición precedente igualmente muerta, y así sucesivamente, lo que conduce inevitablemente a una transición que aparece en un circuito que necesariamente no posee marcas. ■

Los modelos de SED estudiados serán temporizados. La introducción de un nuevo parámetro en los grafos de eventos, como lo es el tiempo (temporizaciones), permite definir los grafos de eventos temporizados (GET). Dos enfoques son posible:

1. Se puede asociar a cada transición un tiempo mínimo de tiro, que representa el tiempo de reservación de una marca en un lugar precedente, antes de estar disponible de nuevo, en un lugar situado posterior a la transición.
2. Se puede asociar a cada lugar un tiempo mínimo, que corresponda a un tiempo de indisponibilidad de una marca después de llegar a este lugar, antes de ser útil para un nuevo disparo.

En lo que sigue, se consideraran temporizaciones asociadas a los lugares para estar en concordancia con el contexto max-plus.

Una temporización en un grafo de evento es importante cuando se desea validar el desempeño de un SED como, por ejemplo, calcular una tasa de producción del sistema o verificar si el tiempo en el que un producto es producido está acorde con las especificaciones dadas.

**Definición 1.3.6 (Grafo de Eventos Temporizado - GET)** Un grafo de evento temporizado es un grafo de evento donde a cada lugar tiene asociado un tiempo de espera o retardo.

**Definición 1.3.7 (Tiempo más rápido de funcionamiento de un GET)** Se llama tiempo más rápido de funcionamiento de un GET, el modo de funcionamiento siguiente. Todas las transiciones internas y de salida son disparadas tan pronto como sea posible, es decir, en el primer instante en el cual resultan disponibles todas las marcas que son necesarias para llevar a cabo el disparo (es decir que han estado en el lugar correspondiente por lo menos el tiempo de espera de dicho lugar). Las transiciones fuentes están permanentemente habilitadas, pero no son disparadas hasta la ocurrencia de eventos asociados a estas transiciones.

En el contexto de la modelización de SED, consideraremos que una transición de un GET corresponde a un evento y que el disparo de ésta es la ocurrencia de dicho evento. Los tiempos de espera o retardos en cada lugar significan que las marcas deben esperar al menos este tiempo en el lugar antes de contribuir a habilitar el disparo de la transición de salida. La Figura 1.4 representa un GET para el ejemplo de los trenes. El conjunto  $\mathcal{L} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  modela los lugares de la red, indicando los estados que el sistema puede tener, y el conjunto  $\mathcal{T} = \{x_1, x_2\}$  de transiciones entre los lugares. Asociamos a cada lugar las marcas que definen la marcación de la red y los tiempos de espera mínimos que el sistema debe permanecer en este estado. A través del GET es posible realizar la sincronización de los trenes para

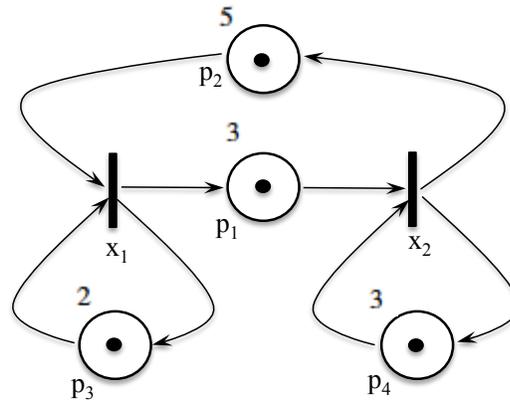


Figura 1.4: GET de la red ferroviaria simple.

calcular la tabla de los horarios.

Observemos que las transiciones que representan las variables  $x_1$  y  $x_2$  pueden ser disparadas luego de que se hayan respetados los tiempos de viaje de los trenes relacionados a los lugares de la red.

En el ejemplo descrito no se considera la existencia de acciones de control, es decir, el sistema es modelado como un sistema autónomo (estos sistemas serán discutidos en la siguiente sección). Sin embargo, en el caso más general, como los sistemas descritos en el presente documento pueden ser representados por las ecuaciones de la forma (1.22).

**Definición 1.3.8 (Condiciones iniciales canónicas)** Se dice que las condiciones iniciales de un GET son canónicas si todas las marcas de la marcación inicial son consideradas disponibles desde el instante  $-\infty$ .

Considerar las condiciones iniciales canónicas, implica tomar por hipótesis que la marcación inicial del grafo no es necesariamente igual a la marcación en el instante inicial de observación (igual a 0 por convención). En efecto, si las marcas iniciales se suponen disponibles desde  $-\infty$ . Ellas son susceptibles a ser validadas y habilitar el disparo de las transiciones igualmente en  $-\infty$ , también la marcación puede haber evolucionado antes del instante inicial de observación.

**Ejemplo 1.3.3** La Figura 1.5 representa un GET. Si se considera las condiciones iniciales canónicas, la marcación en el instante inicial de observación difiere de

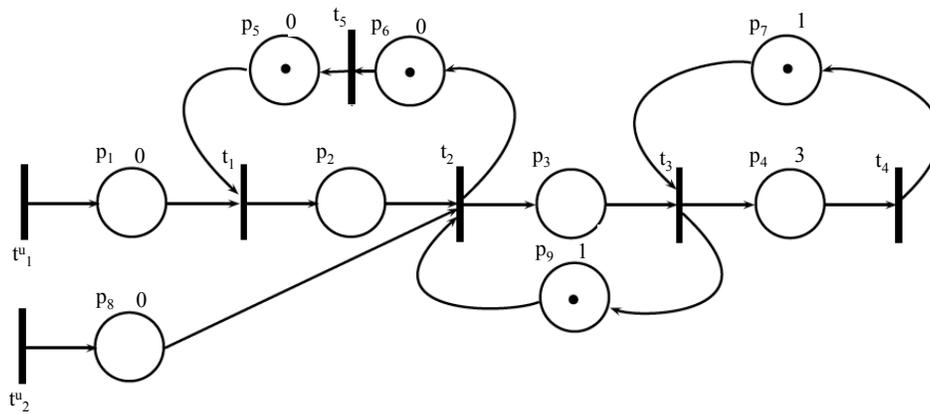


Figura 1.5: Marcación inicial ( $t = -\infty$ ).

la marcación inicial del grafo. En efecto, la marca contenida en el lugar  $p_7$  tiene validez y habilita el disparo de la transición  $t_3$  en el instante  $t = -\infty$ . Una marca es entonces agregada a los lugares  $p_4$  y  $p_9$ . Finalmente la marcación, luego de que esta ha evolucionado libremente desde el instante  $t = -\infty$ , el instante de observación es el que se muestra en la Figura 1.6.

Los GET son una herramienta de modelización gráfica que constituye una primera etapa. La segunda etapa es plasmar en ecuaciones el modelo gráfico, es decir, la definición de una representación analítica del sistema. El comportamiento de un grafo de evento temporizado puede ser descrito por un modelo lineal en el álgebra max-plus, este modelo conduce a manipular las variables discretas que corresponden a las fechas de activación de las transiciones del GET. En la siguiente sección se presentará el modelo algebraico de un GET.

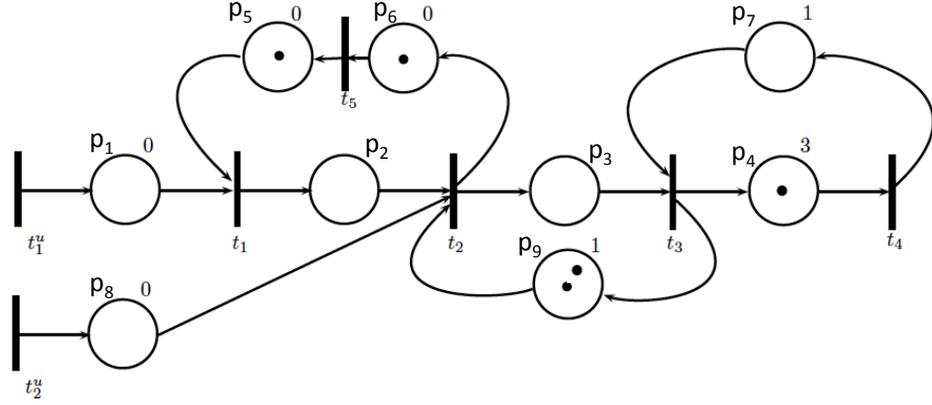


Figura 1.6: Marcación en el instante inicial de observación ( $t=0$ ).

### 1.3.4. Representación de estado de los grafos de eventos temporizados

#### 1.3.4.1. Ecuación de estado de un GET en el dioide $\mathbb{R}_{\max}$

Consideremos  $\mathcal{G}$  un GET con  $\mathcal{L}$  el conjunto de lugares y  $\mathcal{T}$  el conjunto de transiciones. Sean  $t_1^u, \dots, t_q^u$  las transiciones que no tienen algún lugar de entrada asociado, estas transiciones son llamadas transiciones fuente. Sean  $t_1, \dots, t_n$  las transiciones que tienen al menos un lugar de entrada, transiciones internas. Aquí, consideraremos que los lugares que siguen de una transición fuente no poseen marcas iniciales. Para  $t_i, t_j \in \mathcal{T}$ , el único lugar entre  $t_j$  y  $t_i$  es  $p_{ij}$ , si existe, su retraso correspondiente es denotado por  $\tau_{ij}$  y su marcación inicial es denotada por  $m_{ij}$ . Un camino  $\alpha$  desde la transición  $t_s$  a la transición  $t_i$  es una secuencia de transiciones y lugares, de la forma  $t_s, p_{k_1 s}, t_{k_1}, \dots, p_{i k_l}, t_i$ , donde  $p_{k_1 s}, \dots, p_{i k_l}$  son lugares de  $\mathcal{L}$  y  $t_s, t_{k_1}, \dots, t_{k_l}, t_i$  son transiciones de  $\mathcal{T}$ . Denotamos por  $m_\alpha$ , la suma de las marcas a lo largo del camino  $\alpha$ , esto es:  $m_\alpha = m_{k_1 s} \otimes \dots \otimes m_{i k_l}$ . Una transición  $t_j$  se dice que es controlable si existe un camino desde una transición  $t_s^u$  a la transición  $t_j$ . Supongamos que las marcas iniciales del lugar  $p_{ij}$  están disponibles en un tiempo  $\omega_j(k)$ ,  $\omega_j(k) \geq 0$ , estos tiempos iniciales no pueden exceder el tiempo de espera  $\tau_{ij}$  asociado al lugar  $p_{ij}$ :  $\omega_j(k) \leq \tau_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ ,  $1 \leq k \leq m_{ij}$ . (Puede ocurrir que las marcas del marca-

do inicial estén listas para usar en tiempo  $-\infty$ , en este caso se habla entonces de condiciones iniciales canónicas [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 2001]). Denotamos por  $\bullet t_i$  el conjunto de los lugares de entrada a la transición  $t_i$ , y  $\bullet p_{ij}$  el conjunto de transiciones de entrada al lugar  $p_{ij}$ , el cual es un conjunto unitario.

Para representar el comportamiento dinámico de  $\mathcal{G}$ , definamos los tiempos asociados con cada transición:  $u_j(k)$ ,  $k \geq 1$ , se interpreta como el instante en el cual ocurrirá el  $k$ -ésimo disparo de la transición  $t_j^u$ , debido a alguna acción externa, para  $j = 1, \dots, q$ . Las variables de estado  $z_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ , con  $k \geq 1$  representan el instante en el cual la transición  $t_i$  es disparada para el  $k$ -ésimo tiempo. Desde el inicio de la evolución del GET, los disparos sucesivos de una transición son numerados de manera secuencial, a partir de un origen universal, generalmente cero, aunque podría ser negativo. Luego, la función  $k \rightarrow z_i(k)$  es no decreciente, debido a que varios disparos pueden ocurrir simultáneamente, ver [Cohen, 2001].

Debido a la dinámica del GET, el  $k$ -ésimo disparo,  $k \geq 1$ , de la transición  $t_i$  ocurre cuando, para todo  $j$  tal que  $p_{ij} \in \bullet t_i$ , la  $k$ -ésima marca de  $p_{ij}$  contribuya a habilitar  $t_i$ .

Para  $k > m_{ij}$ , esta  $k$ -ésima marca es producida por el  $(k - m_{ij})$  disparo de la transición  $t_j$ , con  $t_j \in \bullet p_{ij}$ , note que  $t_j$  puede ser una transición de control,  $t_j^u$ , así que el instante cuando esta marca contribuye a habilitar  $t_i$  es,  $\tau_{ij} \otimes z_j(k - m_{ij})$  o  $\tau_{ij} \otimes u_j(k)$ . Por lo tanto;

$$z_i(k) = \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i \vee t_j^u \in \bullet p_{ij}} (\tau_{ij} + z_j(k - m_{ij}), \tau_{ij} + u_j(k)), \quad (1.28)$$

para

$$k \geq \left( \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i} m_{ij} \right) + 1.$$

Para  $k \leq m_{ij}$ , este evento toma lugar en el instante  $\omega_j(k)$ , que corresponde al instante cuando la  $k$ -ésima marca inicial del lugar  $p_{ij}$  contribuye a habilitar la transición  $t_i$ , similarmente al caso anterior, tenemos que los tiempos  $z_i(k)$  satisfacen las ecuaciones de evolución siguientes:

$$z_i(k) = \max_{\substack{j | p_{ij} \in \bullet t_i \vee t_j^u \in \bullet p_{ij}, \\ m_{ij} < k}} (\tau_{ij} + z_j(k - m_{ij}), \tau_{ij} + u_j(k)) \\ \oplus \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i, m_{ij} \geq k} (\omega_j(k)), \quad (1.29)$$

para

$$1 \leq k \leq \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i} m_{ij}.$$

**Proposición 1.3.3** Si un GET es vivo, y los tiempos iniciales  $\omega_j(k)$  son no decrecientes y no negativos para  $j = 1, \dots, |\mathcal{L}|$  y  $1 \leq k \leq m_{ij}$ , entonces  $z_i(k)$ , con  $k \geq 1$  es no decreciente y no negativa para toda entrada de control  $u(k)$  no decreciente y no negativa.

*Demostración.* Es claro de (1.28) y (1.29) que si los tiempos  $\omega_j(k)$  en los cuales las marcas iniciales del lugar  $p_{ij}$  están disponibles, son ordenados en forma no decreciente para  $j$  tal que  $m_{ij} \geq 1$ , esto es:  $\omega_j(1) \leq \omega_j(2) \leq \dots \leq \omega_j(m_{ij})$  y además no exceden el tiempo de espera  $\tau_{ij}$  asociado al lugar  $p_{ij}$ :  $\omega_j(k) \leq \tau_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, |\mathcal{L}|$ ,  $1 \leq k \leq m_{ij}$ , y  $\omega_j(1) \geq 0$ , entonces podemos garantizar que la secuencia  $z_i(k)$  es no decreciente para toda entrada  $u$  no decreciente y no negativa:  $u(k+1) \geq u(k)$ ,  $u(k) \geq 0$ , para todo  $k \geq 1$ .

Por otro lado, veamos cuando  $z_i(k)$  es no negativa para  $k \geq 1$ . Tomando en cuenta que la secuencia  $z_i(k)$  es no decreciente, basta ver que  $z_i(1) \geq 0$ . Si existe al menos una marca en algún lugar de entrada de la transición considerada  $t_i$ , digamos  $p_{ij}$ , entonces de (1.29), deducimos que  $z_i(1) \geq \omega_j(1) \geq 0$ , luego los  $z_i(k)$  toman valores no negativos. En caso contrario, como no hay marcas en los lugares de entrada a la transición  $t_i$ , podemos afirmar a partir de (1.28):

$$z_i(1) \geq \tau_{ij} + z_j(1) \quad \text{ó} \quad z_i(1) \geq \tau_{ij} + u_j(1), \quad (1.30)$$

para cada lugar de entrada  $p_{ij}$  a la transición  $t_i$ , y cada transición de entrada  $t_j$  al lugar  $p_{ij}$ . Luego iterando (1.30), deducimos que  $z_i(1)$  es no negativo, si existe un camino en el grafo desde una transición de control o un camino desde la transición de entrada de un lugar marcado hasta la transición  $t_i$ , esto debido a que  $z_i(1)$  resulta ser mayor o igual a la suma de todos los retardos presentes en dicho camino.

Por tanto si  $j$  es asociado a una transición de control o a la transición de entrada a un lugar marcado, de donde sale un camino hasta  $t_i$ , tenemos que  $z_i(1) \geq u_j(1)$  ó  $z_i(1) \geq \omega_j(1)$ , y en consecuencia la secuencia  $z_i(k)$  es no negativa para  $k \geq 1$ . ■

De las ecuaciones (1.28) y (1.29) podemos expresar el comportamiento dinámico del GET en forma matricial como sigue:

$$z(k) = \bigoplus_{m \geq 0}^M [\bar{A}_m \otimes z(k-m) \oplus \bar{B} \otimes u(k)] \oplus v(k), \quad (1.31)$$

con

$$M = \max_{p_{ij} \in \mathcal{L}} m_{ij},$$

y

$$v_j(k) = \max_{j | p_{ij} \in \bullet t_i, m_{ij} \geq k} (\omega_j(k)), \quad (1.32)$$

donde  $v_j(k)$  es definido para  $k = 1, \dots, M$  y es igual a  $\epsilon$  en cualquier otro caso. La secuencia  $z_i(k) = \epsilon$  y  $u_j(k) = \epsilon$  para toda  $k \leq 0$ . La matriz  $\bar{A}_m \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ , su entrada  $A_{m_{ij}}$  es igual a  $\tau_{ij}$ , si existe un lugar  $p_{ij}$  conteniendo  $m_{ij}$  marcas, de lo contrario  $A_{m_{ij}}$  es igual a  $\epsilon$ . Similarmente  $\bar{B} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  corresponde a los retrasos de los lugares seguidos de las transiciones fuentes.

Para la transformación de esta ecuación en una forma canónica, la primera etapa tiene como objetivo la eliminación de la parte implícita  $\bar{A}_0 \otimes z(k)$ . Por definición de  $\bar{A}_0$ , hay un número de transiciones internas tal que  $\bar{A}_0$  puede ser escrita en forma triangular inferior, y se garantiza que  $\bar{A}_0^*$  esta bien definida,  $(\bar{A}_0^*)_{ij} < +\infty$ . Luego (1.31) se expresa como siguiente ecuación explícita:

$$z(k) = \bigoplus_{m>0}^M [\bar{A}_0^* \bar{A}_m \otimes z(k-m) \oplus \bar{A}_0^* \bar{B} \otimes u(k)] \oplus \bar{A}_0^* v(k), \quad (1.33)$$

La siguiente etapa en la manipulación de esta ecuación tiene como objetivo la obtención de la forma matricial canónica, la cual es obtenida extendiendo la dimensión del vector de estado. Esta etapa es clásica en la teoría de sistemas y no será necesario describir los detalles aquí, ver [Cohen et al., 1999]. No introducimos una nueva notación para la dimensión del vector de estado extendido, denotado por  $x$ .

**Teorema 1.3.1** El comportamiento dinámico del GET con tiempo más rápido de funcionamiento es dado por el modelo lineal:

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad k \geq 2, \quad (1.34)$$

con condición inicial

$$x(1) = B \otimes u(1) \oplus w,$$

donde  $w$  es un vector que depende de los tiempos  $\omega_i(k)$  de evolución de las marcas iniciales, (ver (1.31)). Las matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  es el vector de estado,  $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  es el vector de entrada de control, ambos definidos para  $k \geq 1$ .

### 1.3.5. Condiciones iniciales admisibles para GETs

En la sección precedente hemos mostrado que el comportamiento de un GET, cuyo modo de evolución es el tiempo más rápido de funcionamiento, corresponde a las trayectorias no decreciente de un sistema lineal en el dioide  $\mathbb{R}_{\max}$ , de la forma (1.22)-(1.23). Sin embargo el conjunto de trayectorias definidas por este sistema, no coincide con todas las evoluciones posibles de un GET, debemos limitarnos a soluciones no decrecientes, y para ello, definiremos y caracterizaremos el conjunto de condiciones iniciales que conduzcan a soluciones no decrecientes para toda entrada no decreciente. Estas condiciones iniciales serán usadas en el Capítulo 3 para introducir la inicialización de una ley de control.

Como lo muestra el ejemplo siguiente, para ciertas condiciones iniciales, dada una entrada no decreciente no implica siempre que la secuencia del estado sea no decreciente también.

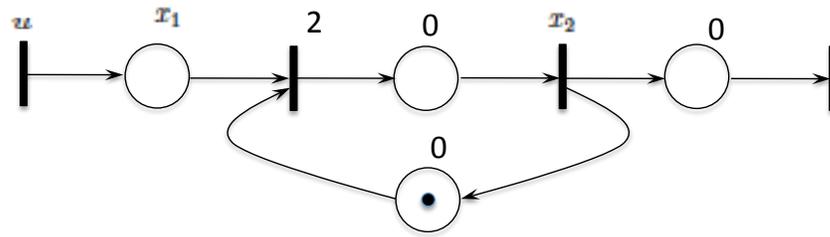


Figura 1.7: Un grafo de eventos temporizado.

**Ejemplo 1.3.4** Consideremos el grafo de la Figura 1.7. El cual es descrito por el sistema lineal:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix} \otimes x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \otimes u(k). \quad (1.35)$$

Dada una entrada de control  $u$  no decreciente, definida por  $u(k) = e$  para toda  $k \geq 1$ . Tomando la condición inicial  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  tenemos que la solución asociada al sistema es

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots$$

la cual es no decreciente. Si embargo tomando la condición inicial  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , obtenemos

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots,$$

la cual no es una secuencia no decreciente. Esta solución no corresponde a una evolución posible del grafo de evento asociado.

Así, considerando el hecho de que cada evolución posible de un GET satisface el sistema lineal (1.34), pero la inversa no es necesariamente cierta. Para asegurar que el comportamiento dinámico del GET coincida con las soluciones no decrecientes del sistema (1.22), nosotros proponemos una caracterización geométrica de las condiciones iniciales apropiadas para alcanzar tal fin.

**Definición 1.3.9** Dado el sistema (1.34) sobre  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , diremos que la condición inicial  $w$  es admisible, si para toda secuencia de entrada no decreciente  $u$ , el estado  $x$  es no decreciente también.

El teorema siguiente caracteriza el conjunto de condiciones iniciales admisibles. Note que el semi-módulo  $\mathcal{W}$  es dado en términos de la matriz  $A$  del sistema.

**Teorema 1.3.2** Dado el sistema (1.34) sobre  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , el conjunto de condiciones iniciales admisibles es el semi-módulo  $\mathcal{W}$  definido por

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}_{\max}^{+n} \mid Aw \geq w\}, \quad (1.36)$$

donde  $\mathbb{R}_{\max}^{+n} := \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ .

*Demostración.* Queremos caracterizar el conjunto de condiciones iniciales  $w$ , las cuales conduzcan a soluciones no decrecientes, esto es,  $x(k+1) \geq x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$ , para  $k \geq 1$  y toda entrada de control  $u$  no decreciente.

Supongamos que  $w$  es una condición inicial admisible, luego en particular se cumple que la solución correspondiente a la entrada de control  $u(k) = -\infty$ , es no decreciente y esta solución se escribe  $x(1) = w, x(2) = Ax(1) = Aw, \cdots$ , y como  $x(k+1) \geq x(k)$  para  $k \geq 1$ , se tiene que  $x(2) = Aw \geq x(1) = w$ , por tanto  $Aw \geq w$ .

Recíprocamente, sea  $w \in \mathcal{W}$ , luego  $Aw \geq w$ , y en consecuencia para toda entrada de control  $u$  no decreciente se cumple en particular que  $u(2) \geq u(1)$ , así  $Bu(2) \geq$

$Bu(1)$ , y por tanto  $x(2) = Ax(1) \oplus Bu(2) = A(Bu(1) \oplus w) \oplus Bu(2) = ABu(1) \oplus Aw \oplus Bu(2) \geq Aw \oplus Bu(2) \geq w \oplus Bu(1) = x(1)$ , en forma más general tenemos:

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1) = A^k w \oplus \bigoplus_{i=1}^{k+1} A^{k+1-i} Bu(i),$$

como  $Aw \geq w$ , se tiene que  $A^k w \geq A^{k-1} w$ , y por tanto para toda entrada de control  $u$  no decreciente se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(k+1) &\geq A^{k-1} w \oplus \bigoplus_{i=1}^{k+1} A^{k+1-i} Bu(i), \\ &\geq A^{k-1} w \oplus \bigoplus_{i=2}^{k+1} A^{k+1-i} Bu(i), \\ &\geq A^{k-1} w \oplus \bigoplus_{i=2}^{k+1} A^{k-i} Bu(i-1), \quad u(i) \geq u(i-1) \\ &= A^{k-1} w \oplus \bigoplus_{i=1}^k A^{k-i} Bu(i), \\ &= x(k). \end{aligned}$$

■

Por tanto, las evoluciones posibles de un GET coinciden exactamente con las trayectorias del sistema (1.22) en  $\mathbb{R}_{\max}$  cuando el conjunto de condiciones iniciales es limitado a satisfacer la condición  $w \in \mathcal{W}$ . Esta caracterización será tomada en cuenta en el Capítulo 3.

## 1.4. Semi-módulos A-invariantes

Debido a que el concepto fundamental del enfoque geométrico es la noción de invarianza de un espacio con respecto a una transformación lineal, en esta sección introduciremos la extensión de un subespacio A-invariante para semi-anillos, daremos su interpretación dinámica a partir de un sistema autónomo.

### 1.4.1. Sistemas autónomos max-plus lineales

**Definición 1.4.1** Un sistema autónomo con coeficientes en el semianillo  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ , es un sistema cuya evolución es determinada por el conjunto de ecuaciones de la forma:

$$x(k) = Ax(k-1), \quad k \geq 1, \quad (1.37)$$

donde  $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  es una aplicación lineal, y  $x(k)$  es la secuencia de estado en  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}^n$ .

Esta variedad de sistemas max-plus lineales presentan la particularidad de no poseer entrada de control,  $u(k) = \epsilon$  para  $k \geq 1$ . Su evolución es únicamente determinada a partir de las condiciones iniciales y de la matriz de evolución.

Nos interesa analizar el comportamiento dinámico del sistema autónomo max-plus lineal (1.37), a través del estudio de las trayectorias de estado obtenidas efectuando las iteraciones sucesivas de la relación (1.37), a partir de una condición inicial cualquiera, ya que, por medio de las características geométricas de las trayectorias de estado, se puede mostrar si estas evolucionan adecuadamente en un semi-módulo definido. Específicamente, estudiaremos el problema de si cualquier trayectoria de estado que inicia en un subsemi-módulo dado del espacio de estado, siempre permanece completamente en él.

Para tal fin, introducimos el concepto de trayectoria de estado, dando su representación geométrica, y la noción de invarianza de semi-módulos.

**Definición 1.4.2** Sea  $x(0)$  un elemento cualquiera del espacio de estado del sistema autónomo (1.37). Se define la trayectoria del sistema asociada a la condición inicial  $x(0)$  como el conjunto

$$\mathcal{X}(x(0)) = \{x(k) \in \mathcal{S}^n \mid x(k) = A^k x(0), k \geq 1\}.$$

Esta definición equivale a decir, que la trayectoria de estado  $\mathcal{X}(x(0))$ , está determinada por la secuencia de vectores:

$$x(0), Ax(0), \dots, A^k x(0), \dots, \quad (1.38)$$

**Definición 1.4.3** Consideremos un semi-anillo  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  y una aplicación  $A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , entonces el conjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$  se dice A-invariante, si para cada elemento  $x_0 \in \mathcal{X}$ , tenemos que  $Ax_0 \in \mathcal{X}$ , esto equivale a:

$$A\mathcal{X} \subset \mathcal{X}, \quad \text{donde } A\mathcal{X} = \{Ax \mid x \in \mathcal{X}\}. \quad (1.39)$$

**Ejemplo 1.4.1** El semi-módulo  $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}_{\max}^{+n} \mid Aw \geq w\}$  es A-invariante. Claramente se cumple que para cualquier  $w \in \mathcal{W}$ , tenemos que  $Aw \geq w$ , lo que implica que  $A(Aw) \geq Aw$ . Por tanto,  $Aw \in \mathcal{W}$ .

Este ejemplo, muestra la A-invarianza del conjunto de condiciones iniciales admisibles definido en (1.36), el cual resulta importante para nuestro estudio en el Capítulo 3. Además, como una consecuencia de este hecho, es natural ver que la admisibilidad de las condiciones iniciales, es una propiedad del sistema autónomo. El hecho que las trayectorias son no decrecientes, para cualquier control no decreciente, claramente no dependen del control, y esto implica que la trayectoria autónoma, que corresponde a condiciones iniciales canónicas, es no decreciente.

La siguiente proposición establece la conexión entre la A-invarianza y los sistemas dinámicos max-plus, ya que da una interpretación de esta noción de invarianza en términos de condición inicial del sistema (1.37).

**Proposición 1.4.1 (Interpretación Dinámica)** Cualquier semi-módulo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es A-invariante si y sólo si cualquier trayectoria del sistema (1.37) que inicia en  $\mathcal{X}$  esta contenida en  $\mathcal{X}$ . Esto es; dado  $x(0) \in \mathcal{X}$ , se cumple que  $x(k) \in \mathcal{X}$  para toda  $k \geq 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es A-invariante, y veamos que la trayectoria del sistema (1.37), expresada como  $x(k) = A^k x(0)$ , con  $k \geq 1$  y condición inicial  $x(0)$ , está completamente contenida en el semi-módulo  $\mathcal{X}$ . En efecto, para  $x \in \mathcal{X}$ , le corresponde un estado del sistema:  $Ax$  que pertenece a  $\mathcal{X}$ , considerando la condición inicial  $x(0) = x$ , tenemos que, si  $A^k x(0) \in \mathcal{X}$ , entonces  $A(A^k x(0)) = A^{k+1} x(0) \in \mathcal{X}$ . Para mostrar la suficiencia de la proposición, basta tomar un elemento arbitrario  $x$  en  $\mathcal{X}$ , y considerar la trayectoria  $x(0), x(1), x(2) \dots$  del sistema (1.37), asociada a la condición inicial  $x(0) = x$ , luego  $Ax = Ax(0) = x(1) \in \mathcal{X}$ . ■

Esta proposición plantea, para propósitos prácticos, por ejemplo, el análisis del comportamiento de un sistema de producción. Dado un semi-módulo del espacio de estado, el cual describe el comportamiento deseado o esperado del sistema, la invarianza de este semi-módulo garantizaría que a partir de cualquier estado inicial incluido en este semi-módulo, la evolución del sistema siempre cumple el comportamiento deseado.

Desafortunadamente, en un gran número de casos, el semi-módulo que describe el comportamiento deseado para el sistema, no resulta A-invariante. En consecuencia,

surge la necesidad de preguntarse por la existencia y cálculo de un semi-módulo maximal A-invariante contenido en un semi-módulo dado. Esto será discutido en el Teorema 1.4.1.

El ejemplo siguiente muestra como dada una especificación para el espacio de estados del sistema, no siempre es posible garantizar que a partir de cualquier estado inicial contenido en la especificación, la evolución del sistema sea la deseada, es decir, que la trayectoria asociada a dicho estado, permanezca en el semi-módulo dado.

**Ejemplo 1.4.2** Consideremos el sistema de producción. Este sistema esta constituido de 3 unidades de producción, y es descrito por un modelo autónomo, esto significa que, supondremos que se parte de una situación en la cual algunos almacenes internos y todas las entradas de los almacenes son no vacios en el comienzo y después la materia prima es alimentada al sistema a una velocidad tal que los almacenes de entrada nunca se conviertan en vacío. El funcionamiento deseado del sistema viene dado por un conjunto de especificaciones operacionales, definido por:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^3 \mid x_3(k) \leq x_1(k) \otimes 16\}. \quad (1.40)$$

Note que, para la condición inicial  $x(0) = (e, e, e)^T \in \mathcal{K}$ , la trayectoria obtenida en este caso es:

$$x(0) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}, x(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}, x(3) = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix}, x(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 42 \end{pmatrix}, \dots$$

Es claro que la trayectoria no se mantiene en la especificación  $\mathcal{K}$ , ya que por ejemplo  $x(4) \notin \mathcal{K}$ .

Por tanto, dada una especificación para el espacio de estados del sistema, no siempre es posible garantizar que a partir de cualquier estado inicial contenido en la especificación, la evolución del sistema sea la deseada, es decir, que las trayectorias que inicien en este semi-módulo, permanezca en el semi-módulo considerado como la especificación.

A continuación, veamos que la familia de todos los semi-módulos A-invariantes contenidos en un semi-módulo dado, es cerrada bajo la operación  $\oplus$ , y la familia de todos los semi-módulos A-invariantes conteniendo un semi-módulo dado, es cerrada bajo la operación  $\cap$ .

**Propiedad 1.4.1** La suma max-plus de dos semi-módulos A-invariantes es un semi-módulo A-invariante.

*Demostración.* De (1.39) es claro que si  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  son dos semi-módulos de  $\mathcal{S}^n$ , A-invariantes, entonces

$$\begin{aligned} A(\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2) &= A\mathcal{X}_1 \oplus A\mathcal{X}_2, \\ &\subset \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2. \end{aligned}$$

Por tanto, el semi-módulo  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  es A-invariante. ■

**Propiedad 1.4.2** La intersección de dos semi-módulos A-invariantes es un semi-módulo A-invariante.

*Demostración.* De (1.39) es claro que si  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  son dos semi-módulos de  $\mathcal{S}^n$ , A-invariantes, entonces

$$\begin{aligned} A(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2) &\subset A\mathcal{X}_1 \cap A\mathcal{X}_2, \\ &\subset \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2. \end{aligned}$$

Por tanto, el semi-módulo  $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$  es A-invariante. ■

Como consecuencia de la Propiedad 1.4.1, el conjunto de todos los semi-módulos A-invariantes contenidos en un semi-módulo dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ , denotado por  $\mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ , es un semi-retículo superior con respecto al orden de la inclusión  $\subseteq$ , y la operación de la adición max-plus  $\oplus$ , por tanto admite un supremo: el máximo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , el cual será denotado por  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . Similarmente, la Propiedad 1.4.2 implica que el conjunto de todos los semi-módulos A-invariantes conteniendo a un semi-módulo dado  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^n$ , denotado por  $\mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ , es un semi-retículo inferior con respecto a al orden de la inclusión  $\subseteq$ , y la operación de intersección  $\cap$ , por tanto admite un infimo: el mínimo A-invariante conteniendo a  $\mathcal{B}$ , el cual será denotado por  $\text{mín } \mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ . Los algoritmos para calcular  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$  y  $\text{mín } \mathcal{S}(A, \mathcal{B})$ , serán presentados en los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2 respectivamente.

Una pregunta natural es si las Propiedades 1.4.1 y 1.4.2 pueden ser extendidas a sumas e intersecciones infinitas. En efecto, consideremos una familia de semi-módulos A-invariantes  $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{S}^n$ . El lector puede notar que, si se considera un elemento  $x$  que pertenece a todos los conjuntos  $\mathcal{X}_i$ , como los conjuntos son A-invariantes, entonces la imagen  $Ax$  pertenece a cada imagen  $A\mathcal{X}_i$ , y a la intersección de estas imágenes:  $A(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A\mathcal{X}_i)$ . Debido a la hipótesis de

A-invarianza de los conjuntos, se tiene finalmente que  $A(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_i$ , lo que demuestra que la Propiedad 1.4.2, es válida para intersecciones infinitas. De la misma manera, se puede estudiar si la propiedad de A-invarianza se conserva a través de sumas infinitas, considerando un elemento  $x$  que se escribe como una suma infinita  $x = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i$ , donde  $x_i \in \mathcal{X}_i$ . Se asume que la suma infinita es bien definida. Por eso se utiliza en general un enfoque topológico o el de retículos. En los dos casos, la extensión de las Propiedades 1.4.1 y 1.4.2 a sumas o intersecciones infinitas se expresan en términos de la continuidad del operador lineal A.

**Teorema 1.4.1** Sea  $\mathcal{K} \subset S^n$  un semi-módulo arbitrario. Entonces, la secuencia  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  definida recursivamente por:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{V}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (1.41)$$

es decreciente, es decir,  $\mathcal{V}_{i+1} \subset \mathcal{V}_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Además, si definimos  $\mathcal{V}_\omega = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ , entonces  $\mathcal{V}_\omega$  coincide con el máximo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ . Esto es:

$$\mathcal{V}_\omega = \text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K}). \quad (1.42)$$

*Demostración.* En primer lugar veamos que la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es decreciente. En efecto,  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{K} \subset \mathcal{K} = \mathcal{V}_0$ , y si  $\mathcal{V}_{i+1} \subset \mathcal{V}_i$ , entonces  $\mathcal{V}_{i+2} = \mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{V}_{i+1} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i+1}$ .

Para probar la segunda parte del teorema, consideremos  $\mathcal{V} \subset \mathcal{K}$  un semi-módulo A-invariante arbitrario, y mostremos por inducción sobre  $i$  que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_i$  para todo entero  $i$ , y por tanto, que  $\mathcal{V} \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_\omega$ . Sabemos que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{K} = \mathcal{V}_0$ . Ahora, supongamos que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_i$ , luego tenemos que  $A^{-1}\mathcal{V} \subset A^{-1}\mathcal{V}_i$ , como  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ , se sigue que,  $\mathcal{V} \subset A^{-1}\mathcal{V} \subset A^{-1}\mathcal{V}_i$ , por tanto  $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap \mathcal{K} \subset A^{-1}\mathcal{V}_i \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}_{i+1}$ . Así,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_i$  para todo entero  $i$ , y en consecuencia  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_\omega$ . En particular se sigue que  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K}) \subset \mathcal{V}_\omega$ .

Por otro lado, la conservación de la Propiedad 1.4.2 para intersecciones infinitas, permite mostrar que  $\mathcal{V}_\omega$  es un semi-módulo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ . En efecto, si  $v \in \mathcal{K}$  y  $Av \in \mathcal{V}_i$ , para todo entero  $i$ , entonces  $Av \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ , y claramente  $v \in \mathcal{K} \cap A^{-1}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i)$ , luego  $Av \in \mathcal{V}_\omega$ , con lo que se concluye que,  $\mathcal{V}_\omega \subset \text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . Por tanto,  $\mathcal{V}_\omega = \text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . ■

**Teorema 1.4.2** Sea  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^n$  un semi-módulo arbitrario. Entonces, la secuencia  $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  definida recursivamente por:

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{B}, \quad \mathcal{S}_{i+1} = A\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{B}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (1.43)$$

es creciente, es decir,  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Además, si definimos  $\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ , entonces  $\mathcal{S}_\infty$  es el mínimo A-invariante conteniendo al semi-módulo  $\mathcal{B}$ . Esto es:

$$\mathcal{S}_\infty = \text{mín } \mathcal{S}(A, \mathcal{B}). \quad (1.44)$$

*Demostración.* En primer lugar veamos que la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es creciente. En efecto,  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{B} \subset A\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{B} = \mathcal{S}_1$ , y si  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_{i+1}$ , entonces  $\mathcal{S}_{i+1} = A\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{B} \subset A\mathcal{S}_{i+1} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{S}_{i+2}$ . Ahora, mostremos que (1.44) se cumple. Para ello consideremos  $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}^n$  un semi-módulo A-invariante arbitrario conteniendo a  $\mathcal{B}$ , y veamos que  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{V}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , y por tanto  $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{V}$ . Primero note que  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ . Supongamos ahora que  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{V}$ . Entonces, como  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ , se sigue que  $\mathcal{S}_{i+1} = A\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{B} \subset A\mathcal{V} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{V}$ . La recurrencia demuestra que  $\mathcal{S}_\infty$  es incluido en  $\mathcal{V}$ . Puesto que  $\mathcal{V}$  es arbitrario, deducimos que  $\mathcal{S}_\infty$  es actualmente incluido en  $\text{mín } \mathcal{S}(A, \mathcal{K})$ .

Para probar la igualdad (1.44), resta probar solamente que  $\mathcal{S}_\infty$  es A-invariante.

$$A\mathcal{S}_\infty = A\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A\mathcal{S}_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{B}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{S}_\infty,$$

se sigue que  $\mathcal{S}_\infty$  es A-invariante conteniendo a  $\mathcal{B}$ . ■

## 1.4.2. Casos particulares de semi-módulos A-invariantes

### a.- Conjunto de condiciones iniciales de un sistema max-plus lineal

Dada una cierta especificación para el espacio de estado del sistema autónomo (1.37), la cual supondremos es dada por el semi-módulo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . Definimos el máximo conjunto de estados iniciales  $\mathcal{K}^*$  para los cuales se cumple que el estado del sistema (1.37) permanece en  $\mathcal{K}$ , esto es, tal que  $x(k) \in \mathcal{K}$  para todo  $k \geq 0$ . Formalmente:

$$\mathcal{K}^* = \{x(0) \in \mathcal{K} \mid x(k) \in \mathcal{K}, k \geq 0\}. \quad (1.45)$$

Este semi-módulo posee por su definición la propiedad de ser A-invariante, tal como se muestra a continuación.

**Propiedad 1.4.3** Dado un semi-módulo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . El semi-módulo  $\mathcal{K}^*$  es A-invariante.

*Demostración.* Sea  $x$  un elemento cualquiera en  $\mathcal{K}^*$ , veamos que  $x(1) = Ax$  pertenece a  $\mathcal{K}^*$ . En efecto, sabemos que la trayectoria  $x(0), x(1), x(2), \dots$ , del sistema (1.37), asociada a la condición inicial  $x(0) = x$ , esta completamente contenida en  $\mathcal{K}$ . Por tanto,  $x(1) \in \mathcal{K}^*$ , ya que el estado del sistema siempre permanece en  $\mathcal{K}$  cuando su estado inicial es  $x(1)$ . ■

**Proposición 1.4.2** Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$  es un semi-módulo, entonces  $\mathcal{K}^*$  coincide con el máximo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ . Esto es,

$$\mathcal{K}^* = \text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K}). \quad (1.46)$$

*Demostración.* Por la Propiedad 1.4.3 tenemos que el semi-módulo  $\mathcal{K}^*$  es un semi-módulo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , así que  $\mathcal{K}^* \subset \text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . Para probar la proposición resta mostrar que  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K}) \subset \mathcal{K}^*$ . En efecto, recordemos de la Proposición 1.4.1, que un semi-módulo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es A-invariante si y sólo, si para cada  $x \in \mathcal{X}$ , la trayectoria del sistema dinámico (1.37), asociada a la condición inicial  $x(0) = x$ , está completamente contenida en  $\mathcal{X}$ . Por tanto cualquier A-invariante contenido en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , está también contenido en  $\mathcal{K}^*$ , en particular el máximo A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , por tanto,  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K}) \subset \mathcal{K}^*$ , con lo cual se concluye la prueba. ■

En la práctica resulta de gran utilidad identificar el conjunto de condiciones iniciales  $\mathcal{K}^*$  contenido en un semi-módulo dado, como el  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ . Ya que, muchos problemas de control automático pueden ser formulados en términos de semi-módulos invariantes. Por ejemplo, si las especificaciones de desempeño de un sistema se proporcionan descritas en un semi-módulo, y si dicho semi-módulo no resulta invariante, el cálculo del  $\text{máx } \mathcal{V}(A, \mathcal{K})$ , determina a partir de que condiciones iniciales se puede arrancar el sistema dado, sin que su evolución viole las especificaciones impuestas.

### b.- Espacios Alcanzables de un sistema max-plus lineal

Consideremos el sistema max-plus:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (1.47)$$

donde  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$ . Llamaremos *espacio alcanzable* en tiempo  $k$ , y denotado por  $\mathcal{R}_k$ , el conjunto de estados  $x(k)$  alcanzables desde el estado inicial  $x(0) = \epsilon$ .

También definimos el *espacio alcanzable* en tiempo arbitrario,  $\mathcal{R}_\omega$ , el cual es la unión de los  $\mathcal{R}_k$ . Introducimos las *matrices de alcanzabilidad*:

$$R_k = (B, AB, \dots, A^{k-1}B), \quad R_\omega = (B, AB, A^2B, \dots). \quad (1.48)$$

El semi-módulo  $\mathcal{R}_k$  (respectivamente  $\mathcal{R}_\omega$ ) se puede caracterizar como el semi-módulo generado por las columnas de la matriz  $R_k$  (resp.  $R_\omega$ ). La identificación de las matrices con los operadores, es expresada como:  $\mathcal{R}_k = \text{Im } R_k$ , y  $\mathcal{R}_\omega = \text{Im } R_\omega$ .

**Propiedad 1.4.4** El espacio alcanzable  $\mathcal{R}_\omega$  es un semi-módulo  $A$ -invariante, y coincide con el  $\min \mathcal{S}(A, \text{Im } B)$ .

*Demostración.* Note en primer lugar que, por definición de espacio alcanzable en tiempo arbitrario, sabemos que el semi-módulo  $\mathcal{R}_\omega$  es la unión de los espacios alcanzables  $\mathcal{R}_k$ , con  $k \geq 1$ . Esto es:

$$\mathcal{R}_\omega = \text{Im } B \oplus A \text{Im } B \oplus \dots \oplus A^k \text{Im } B \oplus \dots$$

Así, en particular  $\mathcal{R}_1 = \text{Im } B \subset \mathcal{R}_\omega$ . Ahora, veamos que  $\mathcal{R}_\omega$  es  $A$ -invariante, para ello consideremos  $x$  un estado arbitrario en  $\mathcal{R}_\omega$ , y mostremos que  $Ax \in \mathcal{R}_\omega$ . En efecto, si  $x \in \mathcal{R}_\omega$ , existe un  $k$  tal que  $x \in \mathcal{R}_k$ , luego  $x \in \text{Im } B \oplus A \text{Im } B \oplus \dots \oplus A^{k-1} \text{Im } B$ , así que  $x = \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i u_i$ , para algún  $u_i \in \text{Im } B$ , con  $i = 0, \dots, k-1$ . En consecuencia  $Ax = \bigoplus_{i=0}^k A^i u_i$ , lo que implica que  $x \in \text{Im } B \oplus A \text{Im } B \oplus \dots \oplus A^k \text{Im } B$ , es decir  $x \in \mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}_\omega$ . Por tanto,  $A\mathcal{R}_\omega \subset \mathcal{R}_\omega$ , con lo cual se concluye que  $\mathcal{R}_\omega$  es  $A$ -invariante. Para finalizar la prueba, como todas las columnas de la matriz  $R_\omega$  claramente pertenecen a todos los otros  $A$ -invariantes conteniendo a  $\text{Im } B$ ,  $\text{Im } R_\omega$  coincide con el  $\min \mathcal{S}(A, \text{Im } B)$ . ■

**Observación 1.4.1** Los espacios alcanzables no son necesariamente semi-módulos finitamente generados. Incluso, en  $\mathbb{Z}_{\max}^n$ , el espacio alcanzable  $\mathcal{R}_\omega$  es un semi-módulo racional, con  $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times p}$ , es decir que  $\mathcal{R}_\omega$  posee una familia generadora, la cual es un conjunto racional, (ver [Gaubert et Katz, 2007]). Esto, muestra un ejemplo de que existen semi-módulos  $A$ -invariante que no son finitamente generados.

Considere los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.4.3 (Gaubert, S. et al., 2004)** Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 2 \\ 5 & 2 & \epsilon \\ \epsilon & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}.$$

Luego,  $\mathcal{R}_\omega = \text{Im } R_\omega$  donde

$$R_\omega = \begin{pmatrix} e & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \epsilon & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & \cdots \\ \epsilon & \epsilon & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & \cdots \end{pmatrix}.$$

El semi-módulo  $\mathcal{R}_\omega$  es el mínimo A-invariante conteniendo a  $\text{Im } B$ , el cual resulta ser un semi-módulo infinitamente generado, ya que

$$\mathcal{R}_\omega = \text{Spa}(U \cup (\{v\} + \{w\}^*)), \quad (1.49)$$

con

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La fórmula (1.49) es racional, en el sentido que se expresa en términos de un número finito de operaciones de suma, productos o estrellas. Por eso, se dice que  $\mathcal{R}_\omega$  es racional (ver [Gaubert et Katz, 2007], donde el concepto es introducido y estudiado en detalle).

En la búsqueda del mín  $\mathcal{S}(A, B)$ , puede ocurrir que al aplicar el algoritmo dado en el Teorema 1.4.2 para tal fin, el límite de esta sucesión no resulte un semi-módulo racional, aunque pueda ser descrito, esto debido al hecho, que la imagen de un semi-módulo racional no necesariamente es un semi-módulo racional, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.4.4 (Gaubert, S. et al., 2004)** Sea  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$  y  $\alpha$  un número irracional positivo. Consideremos lo siguiente.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ e \end{pmatrix}, \quad v = -\alpha^{-1}u \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} \\ 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

$$R = \{u, v\}^* \setminus \{e\}, \quad A = - \begin{pmatrix} e & e & -\infty \\ -\infty & -\infty & e \end{pmatrix},$$

y definamos el semi-módulo  $\mathcal{X} = \text{Span } R$ , el cual es racional. Veamos que la imagen del semi-módulo  $\mathcal{X}$  por la aplicación lineal A, es un semi-módulo que no es racional. En efecto, note que, el semi-módulo  $A(\mathcal{X}) = \text{Span } A(R)$  es expandido por los vectores

$$\begin{pmatrix} \text{máx}(h_1 - \alpha^{-1}h_2, h_2 - \alpha h_1) \\ e \end{pmatrix}, \quad \text{para } h_1, h_2 \in \mathbb{N}, h_1 + h_2 \geq 1.$$

Para hacer más explícito  $A(\mathcal{X})$ , observemos que para todo número real  $\gamma, \delta$ ,

$$\text{Span} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ e & e \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \min(\gamma, \delta) + x_2 \leq x_1 \leq x_2 + \max(\gamma, \delta) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.50)$$

Se sigue de (1.50) que

$$A(\mathcal{X}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.51)$$

Luego,  $A(\mathcal{X})$  no es un semi-módulo racional. Ya que si  $A(\mathcal{X})$  fuese un semi-módulo generado por un conjunto racional, la cantidad  $x_1 - x_2$  alcanzaría su ínfimo cuando  $x \in A(\mathcal{X}) \cap \mathbb{R}^2$ , mientras (1.51), muestra que el ínfimo, el cual es igual a 0, no es alcanzado.

Por tanto, cuando  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ , la imagen de un semi-módulo racional por una aplicación lineal no necesariamente es racional.

Este ejemplo muestra que la clase de los semi-módulos racionales no poseen buenas propiedades de clausura cuando  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ .

### c.- Autoespacios de un sistema autónomo max-plus lineal

Consideremos el sistema autónomo max-plus lineal (1.37), con  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ . Si la matriz  $A$  es irreducible, existe un único autovalor  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , y un número finito de autovectores asociados a  $\lambda$ , digamos  $V = \{v_1, \dots, v_r\}$  en  $\mathbb{R}_{\max}^n - \{\epsilon\}$ , los cuales verifican:

$$Av_i = \lambda v_i, \quad (1.52)$$

para todo entero  $i$ , ver [Gaubert, 1999] para más detalles.

Definamos el semi-módulo generado por el conjunto de autovectores asociados a  $\lambda$ :

$$\Gamma(A) = \text{Span}(V). \quad (1.53)$$

**Propiedad 1.4.5** El semi-módulo  $\Gamma(A)$  es un semi-módulo  $A$ -invariante.

*Demostración.* Sea  $v$  un elemento arbitrario en  $\Gamma(A)$ , luego, existen  $\alpha_i$  en  $\mathbb{R}_{\max}$ , para  $i = 1, \dots, r$  tal que  $v = \bigoplus_{i=1}^r \alpha_i v_i$ . Así, tenemos que  $Av = A(\bigoplus_{i=1}^r \alpha_i v_i) = \bigoplus_{i=1}^r \alpha_i Av_i$ , en consecuencia, se sigue de la definición de autovector (1.52), que  $Av = \bigoplus_{i=1}^r \alpha_i \lambda v_i = \lambda \bigoplus_{i=1}^r \alpha_i v_i = \lambda v$ . Por tanto  $\Gamma(A)$  es  $A$ -invariante. ■

La siguiente proposición da una condición suficiente en términos de autovectores para garantizar que, dada una especificación para el espacio de estado del sistema autónomo (1.37), se cumpla que cualquier trayectoria de estado que inicie en este semi-módulo, permanezca en él.

**Proposición 1.4.3** Dado un sistema autónomo con  $A$  irreducible y autovalor  $\lambda$ , y una especificación  $\mathcal{K}$  para el espacio de estado.

$$x(0) \in \mathcal{K} \cap \Gamma(A) \implies \mathcal{X}(x(0)) \subset \mathcal{K}. \quad (1.54)$$

*Demostración.* Sea  $x = x(0)$  un elemento arbitrario en  $\mathcal{K} \cap \Gamma(A)$ , luego como  $x = x(0)$  pertenece a  $\Gamma(A)$ , se sigue de la Propiedad 1.4.5 que  $Ax = Ax(0)$  también está en  $\Gamma(A)$ , en consecuencia  $A^k x = A^k x(0) = \lambda^k x(0)$ , también está en  $\Gamma(A)$ . Luego, como  $x = x(0)$  también está en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , se tiene que  $x(k) = A^k x(0) = \lambda^k x$ , también está en  $\mathcal{K}$  para  $k \geq 1$ , por definición de semi-módulo. Por tanto, la trayectoria asociada a la condición inicial  $x = x(0)$  está contenida en  $\mathcal{K}$ . ■

## 1.5. Conclusión

En este primer capítulo, hemos presentado las principales herramientas y conceptos de base para lo que sigue. Después de un breve repaso sobre la estructura algebraica de los dioides, una introducción a la teoría de convexidad max-plus ha sido presentada. Esta teoría permite mostrar el cálculo de sistemas generadores de un semi-módulo finitamente generado (conos poliédricos max-plus), usando el algoritmo del Método de doble descripción tropical [Allamigeon, 2010], lo cual será utilizado en el Capítulo 3 para mostrar la existencia y cálculo de una ley de control para sistemas de eventos discretos modelados por grafos de eventos temporizados, sujetos a restricciones temporales.

Los grafos de eventos temporizados (GET) son una herramienta gráfica apropiada para la descripción de sistemas de eventos discretos que presentan fenómenos de sincronización de tareas. Los procesos modelados por estos GET pueden ser representados por un sistema lineal sobre el dioide max-plus. Inspirados por lo establecido en [Cohen, 2001], obtuvimos las ecuaciones de estado de los GET, tomando en cuenta el problema de las condiciones iniciales no canónicas, y la monotonía de las variables de estado. Definimos y caracterizamos el conjunto de condiciones iniciales admisibles, las cuales generan soluciones no decrecientes del sistema max-plus lineal considerado. Estas soluciones coinciden con la posible evolución del GET

asociado. Estas condiciones iniciales admisibles serán usadas en el Capítulo 3 para definir las condiciones iniciales del sistema, de manera implícita, las cuales generan trayectorias no decrecientes, y permitirán inicializar la ley de control, lo que es un aspecto no considerado en la literatura sobre los sistemas max-plus lineales y su control, más aún, estas permitirán definir el control de manera causal y admisible.

Estas particularidades de los sistemas max-plus lineales modelados por GET, no son tomadas en cuenta generalmente en la literatura existente, es por ello que esta contribución resulta muy importante desde el punto de vista de la ingeniería.

Tomando en cuenta que, la motivación inicial de este estudio ha sido específicamente contribuir al desarrollo del enfoque geométrico de los sistemas max-plus lineales, al final de este capítulo, hemos introducido la noción de A-invarianza y propiedades básicas de semi-módulos A-invariantes.

## Capítulo 2

# Control geométrico de sistemas max-plus lineales

### 2.1. Introducción

El concepto de  $(A, B)$ -invarianza, también llamada invarianza controlada, fue introducido independientemente en los trabajos de [Wonham et Morse, 1970] y [Basile et Marro, 1969]. Este constituye la piedra de base del enfoque geométrico para la teoría de control de sistemas dinámicos lineales, que ha proporcionado soluciones a muchos problemas de control. Esto ha motivado a muchos autores a considerar la extensión de este enfoque a la teoría de sistemas dinámicos lineales sobre anillos [Hautus, 1982], [Conte et Perdon, 1995] y semi-anillos [Katz, 2007].

Para los sistemas de nuestro interés, como son los sistemas max-plus lineales, diversos problemas de control pueden formularse en términos de semi-módulos invariantes, tal como la existencia y cálculo de una ley de control, es por ello que en la primera parte de este capítulo, estudiaremos algunas características de los semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes para sistemas max-plus lineales, introducidos por Katz en [Katz, 2007]. Analizaremos el problema del cálculo del máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en un semi-módulo dado. Para semi-módulos finitamente generados discutiremos la existencia de una ley de control no lineal, derivada de la representación matricial de la  $(A, B)$ -invarianza, la cual resulta útil en la práctica, ya que puede ser implementada en línea.

Seguido, introduciremos la noción de retroalimentación estática, y damos una ca-

racterización algebraica para decidir si un semi-módulo finitamente generado es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado. Como es bien conocido para sistemas dinámicos lineales con coeficientes en un campo, la  $(A, B)$ -invarianza de un subespacio es equivalente a su invarianza para el sistema en lazo cerrado, obtenido por la acción de una retroalimentación de estado, (ver [Wonham, 1985], [Basile et Marro, 1992]). Esta propiedad hace los espacios  $(A, B)$ -invariantes muy útiles en la teoría clásica. Desafortunadamente, esta característica tan importante es generalmente perdida en el marco de los sistemas lineales con coeficientes en un anillo o semi-anillo. Aunque la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estado siempre implica la  $(A, B)$ -invarianza, el recíproco no se cumple en general.

En la búsqueda de establecer una equivalencia entre estas nociones de invarianza, al final de este capítulo, inspirados por la teoría de los sistemas sobre anillos, proponemos una nueva noción de retroalimentación dinámica para sistemas sobre semi-anillos, la cual es ausente en la literatura sobre sistemas max-plus lineales. Luego, probaremos que la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estados es equivalente a la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación dinámica. Para tal fin, mostraremos que para el caso de semi-módulos finitamente generados, una ley de control que fuerce las trayectorias a permanecer en el semi-módulo dado, puede ser realizada usando una retroalimentación dinámica, tal ley de control resulta causal, lo cual permite su implementación en línea. Este resultado puede ser útil para resolver problemas de diseño de control y extender el enfoque geométrico para sistemas sobre semi-anillos.

## 2.2. Generalidades sobre la $(A, B)$ -invarianza

Consideremos un semi-anillo  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ . De acuerdo con la ecuación (1.34), en forma general, la evolución del estado de un sistema max-plus lineal con coeficientes en  $\mathcal{S}$  puede ser descrita por el siguiente sistema:

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \text{ para } k \geq 1, \quad (2.1)$$

donde el vector  $x(k)$  es la secuencia de estado en  $\mathcal{S}^{n \times 1}$  y el vector  $u(k) \in \mathcal{S}^{q \times 1}$ , es la secuencia de control. Las matrices  $A$  y  $B$  pertenecen a  $\mathcal{S}^{n \times n}$  y  $\mathcal{S}^{n \times q}$  respectivamente.

Como hemos observado al final del capítulo previo, en el caso de la ausencia de una acción de control, es decir cuando  $u(k) = \epsilon$  para todo  $k \geq 1$ , un semi-módulo del espacio de estado  $\mathcal{X}$ , es  $A$ -invariante si y sólo si, a partir de una condición inicial

contenida en este, la trayectoria generada también está contenida en dicho semi-módulo. La extensión de esta propiedad para el caso en que el control está presente, y es adecuadamente usado para conducir al estado del sistema a lo largo de una trayectoria conveniente, conduce al concepto de  $(A, B)$ -invarianza o invarianza controlada.

**Definición 2.2.1 (Invarianza Controlada)** Un semi-módulo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es  $(A, B)$ -invariante o invariante controlable si

$$A\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \oplus \text{Im } B, \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{X} \oplus \text{Im } B = \{x \in \mathcal{S}^n \mid \exists b \in \text{Im } B, x \oplus b \in \mathcal{X}\}$ .

Note que cualquier semi-módulo  $(A, B)$ -invariante es también  $A$ -invariante para cualquier semi-módulo  $\mathcal{B} = \text{Im } B$ .

La siguiente proposición establece la conexión entre la  $(A, B)$ -invarianza y los sistemas dinámicos max-plus lineales, ya que da una interpretación de esta noción de invarianza en términos de condición inicial del sistema (2.1).

**Proposición 2.2.1 (Interpretación dinámica)** Consideremos el sistema descrito por la ecuación (2.1) y  $\mathcal{X}$  un semi-módulo de  $\mathcal{S}^n$ . Entonces, cualquier semi-módulo  $\mathcal{X}$  es  $(A, B)$ -invariante o invariante controlable si y sólo si para cada condición inicial  $x(0) \in \mathcal{X}$ , existe una ley de control  $u(k)$ , definida para  $k \geq 1$ , tal que el estado permanece en  $\mathcal{X}$  para toda evolución del sistema:  $x(k) \in \mathcal{X}$ , para  $k \geq 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{X}$  es  $(A, B)$ -invariante, luego para cada elemento arbitrario  $x \in \mathcal{X}$ , existe un elemento  $u$  en  $\mathcal{S}^n$  tal que  $Ax \oplus Bu \in \mathcal{X}$ , haciendo  $x(0) = x$ ,  $u(1) = u$  y  $x(1) = Ax(0) \oplus Bu(1)$ , se cumple que  $x(1) \in \mathcal{X}$ . Ahora, como  $x(1) \in \mathcal{X}$ , existe  $u(2)$  en  $\mathcal{S}^n$  tal que  $x(2) = Ax(1) \oplus Bu(2) \in \mathcal{X}$ , luego para  $x(k) \in \mathcal{X}$ , existe  $u(k)$  en  $\mathcal{S}^n$  tal que  $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \in \mathcal{X}$ . Por tanto, la trayectoria  $x(0), x(1), x(2), \dots$  del sistema (2.1), asociada con la secuencia de control  $u(1), u(2), \dots$  y la condición inicial  $x(0) = x$ , está completamente contenida en  $\mathcal{X}$ . Para mostrar la suficiencia de la proposición, basta tomar un elemento arbitrario  $x$  en  $\mathcal{X}$ , y considerar la trayectoria  $x(0), x(1), x(2) \dots$  del sistema (2.1), asociada con la secuencia de control  $u(1), u(2), \dots$  y la condición inicial  $x(0) = x$ , luego  $Ax \oplus Bu = Ax(0) \oplus Bu(1) \in \mathcal{X}$ . ■

Para ilustrar el concepto de  $(A, B)$ -invarianza presentamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.1 (Katz, 2007)** Sea  $\mathcal{S} = \mathbb{N}_{\min}$ . Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 1 & e \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y el semi-módulo  $\mathcal{K} = \{(x \ y)^T \in \mathbb{N}_{\min}^2 \mid x \leq y, 1 \leq y\}$ .

Veamos que el semi-módulo  $\mathcal{K}$  es  $(A, B)$ -invariante. En efecto, dado cualquier estado inicial  $x(0) = (x \ y)^T \in \mathcal{K}$ , cada trayectoria del sistema dado, asociada a la secuencia de vectores de control constante  $u(k) = e$ , para  $k \geq 1$ , satisface lo siguiente:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 & +\infty \\ 1 & e \end{pmatrix} \otimes x(0) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes u(1) = \begin{pmatrix} 1 \otimes x \oplus 1 \\ 1 \otimes x \oplus y \oplus 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ya que  $1 \leq y$ ,  $0 \leq x$ ;

$$x(2) = \begin{pmatrix} 1 & +\infty \\ 1 & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes u(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

así sucesivamente, tenemos que  $x(k) = (1 \ 1)^T$ , para  $k \geq 1$ .

Por tanto, la trayectoria del sistema asociada a la condición inicial  $x(0) = (x \ y)^T \in \mathcal{K}$ , y a la secuencia de vectores de control  $u(k) = e$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , permanece continuamente en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , esto es:  $x(k) \in \mathcal{K}$ , para  $k \geq 1$ , siempre que  $x(0) \in \mathcal{K}$ . Así, el semi-módulo  $\mathcal{K}$  es  $(A, B)$ -invariante.

Un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, esencial para nuestro estudio es dado a continuación. Este nos permitirá demostrar la existencia de un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante máximo contenido en un semi-módulo dado.

**Definición 2.2.2** Dada una cierta especificación para el espacio de estado del sistema (2.1), la cual supondremos es dada por el semi-módulo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . Definimos el conjunto de estados iniciales  $\mathcal{K}^*$  para los cuales existe una secuencia de vectores de control, tal que, se cumple que el estado del sistema (2.1) permanece en  $\mathcal{K}$ , esto es, tal que  $x(k) \in \mathcal{K}$  para todo  $k \geq 0$ . Formalmente:

$$\mathcal{K}^* = \{x(0) \in \mathcal{K} \mid \exists u \in \mathcal{S}^n : x(k) \in \mathcal{K}, k \geq 1\}. \quad (2.3)$$

Este semi-módulo posee por su definición la propiedad de ser  $(A, B)$ -invariante, tal como se muestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2** Dado un semi-módulo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . El semi-módulo  $\mathcal{K}^*$  es  $(A, B)$ -invariante.

*Demostración.* Sea  $x$  un elemento cualquiera en  $\mathcal{K}^*$ , veamos que existe un control  $u(1) \in \mathcal{S}^n$  tal que  $x(1) = Ax \oplus Bu(1)$  pertenece a  $\mathcal{K}^*$ . En efecto, ya que  $x \in \mathcal{K}^*$ , sabemos que existe una secuencia de vectores de control  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tal que la trayectoria  $x(0), x(1), x(2), \dots$ , del sistema (2.1), asociada con esta secuencia de control y la condición inicial  $x(0) = x$ , esta completamente contenida en  $\mathcal{K}$ . Por tanto,  $x(1) \in \mathcal{K}^*$ , ya que existe una secuencia de vectores de control  $(u'(k) = u(k+1))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , la cual hace que el estado del sistema (2.1) siempre permanece en  $\mathcal{K}$  cuando su estado inicial es  $x(1)$ . ■

La  $(A, B)$ -invarianza del semi-módulo  $\mathcal{K}^*$  garantiza para cualquier estado inicial en  $\mathcal{K}^*$ , la existencia de una ley de control tal que asegura que el estado del sistema evoluciona sin violar las especificaciones predefinidas. Se puede deducir que  $\mathcal{K}^*$  es el máximo  $(A, B)$ -invariante incluido en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , lo que será demostrado en la Sección 2.3 (Proposición 2.3.2).

El siguiente ejemplo, muestra un caso típico de semi-módulos  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ , que aparece con frecuencia en las aplicaciones. El semi-módulo dado es finitamente generado, definido por la imagen de la estrella de Kleene de una matriz  $C$  con entradas en  $\mathbb{R}_{\max}$ . Se buscará mostrar que este semi-módulo es  $(A, B)$ -invariante. Este ejemplo de interés, será tratado en la Sección 3.3.

**Ejemplo 2.2.2** Sea  $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ . Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & e \\ \epsilon & \epsilon & 1 & \epsilon & 1 \\ \epsilon & \epsilon & 2 & 1 & 2 \\ \epsilon & \epsilon & 5 & 4 & 5 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ 1 & e \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

y el semi-módulo  $\mathcal{K} = \text{Im } C^*$ , donde la matriz  $C$  es como sigue:

$$C = \begin{pmatrix} \epsilon & -1 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & -1 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

En primer lugar, se tiene por Proposición 1.1.1 que el semi-módulo dado, se puede expresar como  $\mathcal{K} = \text{Im } C^* = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Cx \leq x\}$ . Luego, dado  $\bar{x} = (x \ y \ z \ v \ w)^T \in \mathbb{R}_{\max}^5$ , tenemos que  $\bar{x} \in \text{Im } C^*$  si y sólo si  $-1 \otimes y \leq x$  y también  $-1 \otimes z \leq y$ , por tanto,

$$\text{Im } C^* = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_{\max}^5 \mid y \leq 1 \otimes x \wedge z \leq 1 \otimes y\}.$$

Ahora, para verificar que  $\text{Im } C^*$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, se debe verificar que  $A\text{Im } C^* \subset \text{Im } C^* \oplus \text{Im } B$ . Es decir, dado  $\bar{x} \in \text{Im } C^*$ , se debe cumplir que  $A\bar{x} \in \text{Im } C^* \oplus \text{Im } B$ , esto es,

$$\begin{aligned} A\bar{x} \in \text{Im } C^* \oplus \text{Im } B &\Leftrightarrow \text{existe } b \in \text{Im } B \text{ tal que } A\bar{x} \oplus b \in \text{Im } C^*, \\ &\Leftrightarrow \text{existe } u \in \mathbb{R}_{\max}^2 \text{ tal que } A\bar{x} \oplus Bu \in \text{Im } C^*, \quad (2.6) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } u \in \mathbb{R}_{\max}^2 \text{ tal que } C(A\bar{x} \oplus Bu) \leq A\bar{x} \oplus Bu. \end{aligned}$$

En efecto, para mostrar la existencia de un vector  $u = (u_1 \ u_2)^T \in \mathbb{R}_{\max}^2$  tal que (2.6) se cumple, tenemos que las matrices involucradas  $CA$  y  $CB$  son como sigue,

$$CA = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & e & \epsilon & e \\ \epsilon & \epsilon & 1 & e & 1 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad CB = \begin{pmatrix} e & -1 \\ 1 & e \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} CA\bar{x} \oplus CBu &= \begin{pmatrix} z \oplus w \oplus u_1 \oplus -1 \otimes u_2 \\ 1 \otimes z \oplus v \oplus 1 \otimes w \oplus 1 \otimes u_1 \oplus u_2 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}, \\ A\bar{x} \oplus Bu &= \begin{pmatrix} w \oplus u_1 \\ 1 \otimes z \oplus 1 \otimes w \oplus 1 \otimes u_1 \oplus u_2 \\ 2 \otimes u_1 \oplus 1 \otimes u_2 \\ 5 \otimes u_1 \oplus 4 \otimes u_2 \\ \epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando  $u_1 = 2 \otimes x \oplus v$  y  $u_2 = 2 \otimes y$  y considerando que  $\bar{x} \in \text{Im } C^*$ , tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} z \leq 1 \otimes y = -1 \otimes 2 \otimes y = -1 \otimes u_2 = 1 \otimes y, \\ y \leq 1 \otimes x \Rightarrow 1 \otimes y \leq 2 \otimes x \leq 2 \otimes x \oplus v = u_1, \end{cases}$$

en consecuencia  $z \oplus w \oplus u_1 \oplus -1 \otimes u_2 \leq w \oplus u_1$ . Además, es claro por definición de  $u_1$ , que  $1 \otimes z \oplus v \oplus 1 \otimes w \oplus 1 \otimes u_1 \oplus u_2 \leq 1 \otimes z \oplus 1 \otimes w \oplus 1 \otimes u_1 \oplus u_2$ .

Por tanto, existe  $u = (u_1 \ u_2)^T \in \mathbb{R}_{\max}^2$ , tal que  $C(A\bar{x} \oplus Bu) \leq A\bar{x} \oplus Bu$ .

Así,  $\text{Im } C^*$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante.

Desde un punto de vista dinámico, se tiene que las trayectorias del sistema (2.1) pueden ser controladas en el semi-módulo  $\text{Im } C^*$  con una escogencia adecuada del control.

**Observación 2.2.1** Una caracterización matricial de utilidad en la práctica para verificar la  $(A, B)$ -invarianza de un semi-módulo finitamente generado es dada en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3** Dado el sistema descrito por (2.1) y  $\mathcal{M}$  un semi-módulo de  $\mathcal{S}^n$ . Un semi-módulo finitamente generado  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ , definido por  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ , con  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , es  $(A, B)$ -invariante si y sólo si existen matrices  $X \in \mathcal{S}^{q \times p}$ ,  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  tal que la siguiente igualdad se cumple:

$$A \otimes M \oplus B \otimes X = M \otimes Y . \quad (2.7)$$

*Demostración.* Supongamos que el semi-módulo  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante. Sea  $M_j$  la  $j$ -ésima columna de la matriz  $M$ , con  $j = 1, \dots, p$ , luego el vector  $M_j \in \mathcal{M}$ , como  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante, se sigue que  $AM_j \in \mathcal{M} \ominus \text{Im } B$ , por tanto existe  $x_j \in \mathcal{S}^q$ , tal que  $AM_j \otimes Bx_j \in \mathcal{M}$ , para  $j = 1, \dots, p$ . Como  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ , existe un vector columna  $y_j \in \mathcal{S}^p$ , tal que  $My_j = AM_j \otimes Bx_j \in \mathcal{M}$ , para  $j = 1, \dots, p$ . Luego, concatenando las matrices de la forma:

$$A[M_1 \ M_2 \ \dots \ M_p] \oplus B[x_1 \ \dots \ x_p] = M[y_1 \ \dots \ y_p] ,$$

tenemos que, existen dos matrices  $X = [x_1 \ \dots \ x_p] \in \mathcal{S}^{q \times p}$  y  $Y = [y_1 \ \dots \ y_p] \in \mathcal{S}^{p \times p}$  tal que la igualdad  $A \otimes M \oplus B \otimes X = M \otimes Y$  se verifica.

Para mostrar la suficiencia, consideremos un elemento arbitrario  $x$  en  $\mathcal{M}$ , luego existe  $y \in \mathcal{S}^p$  tal que  $x = My$ . De la igualdad (2.7), tenemos que  $AMy \oplus BXY = MYy \in \mathcal{M}$ . Por tanto, existe un vector  $Xy \in \mathcal{S}^q$  tal que  $AMy \oplus BXY \in \mathcal{M}$ , de lo cual se sigue que  $Ax = AMy \in \mathcal{M} \ominus \text{Im } B$ , con lo cual concluye la prueba. ■

Se puede observar en la demostración de la proposición previa, la descripción de un algoritmo fácil de implementar, que a su vez nos permite encontrar el control

en línea. En efecto, primero verificamos si existe o no una solución, calculando las matrices  $X$  y  $Y$  tales que  $AM \oplus BX = MY$ , usando el método de doble descripción por cada columna de la matriz  $M$ . Además de calcular las matrices  $X$  e  $Y$  tales que  $AM \oplus BX = MY$ , calculamos una solución  $v(0)$  a la ecuación  $x(0) = Mv(0)$ . Ya que, el control  $u(k) = Xv(k)$ , con  $v(k) = Yv(k-1)$ , para  $k \geq 1$ , teóricamente realiza la invarianza, tenemos que  $x(k+1) = Ax(k) \oplus Bv(k+1) = AMv(k) \oplus BXv(k) = MYv(k) = Mv(k+1)$ , y pues  $x(k) = Mv(k)$ , para  $k \geq 1$ . Esto es un control en lazo abierto, que utiliza solamente el conocimiento de la condición inicial, y el hecho de la invarianza del semi-módulo  $\mathcal{M}$ . Así, podemos verificar las variables de control en tiempo real, ya que se va actualizando por cada iteración realizada. En la siguiente sección ( ver Proposición 2.4.2) veremos que, si podemos calcular una función  $F$  tal que  $MF(x) = x$  si  $x \in \mathcal{M}$ , podemos implementar este control en lazo cerrado, utilizando la ley de control  $u(k) = F(x(k))$ , para  $k \geq 0$ . Esto es una retroalimentación estática de estado. Esta ley es no lineal, en general.

El siguiente ejemplo ilustra la  $(A, B)$ -invarianza de un semi-módulo finitamente generado, aplicando la proposición previa.

**Ejemplo 2.2.3** Consideremos el ejemplo de Maia et al. tratado en su trabajo [Maia et al., 2011]. Este ejemplo describe un taller con tres máquinas ( $M_1, M_2$  y  $M_3$ ), donde las matrices del sistema son como sigue.

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & e & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 10 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 35 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 12 & \epsilon & 35 & \epsilon & e \\ \epsilon & 62 & \epsilon & 85 & \epsilon & 50 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & \epsilon \\ 16 & \epsilon \\ \epsilon & 12 \\ \epsilon & 47 \\ 18 & 47 \\ 62 & 97 \end{pmatrix}.$$

El problema consiste en satisfacer un conjunto de restricciones de sincronización descritas en el semi-módulo  $\mathcal{D} = \text{Im } D$ , donde

$$D = \begin{pmatrix} \epsilon & e & \epsilon & \epsilon & \epsilon & -65 \\ 10 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & e & \epsilon & -90 \\ \epsilon & e & 35 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 2 & \epsilon & 2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & 50 & \epsilon \end{pmatrix},$$

Ya que el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es finitamente generado, tomando en cuenta el Teorema 2.2.3, el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es  $(A, B)$ -invariante si existen matrices  $X \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 6}$  y  $Y \in \mathbb{R}_{\max}^{6 \times 6}$  tal que la igualdad  $AD \oplus BX = DY$ , se cumple.

En efecto, considere las matrices  $X$  y  $Y$  como siguen:

$$X = \begin{pmatrix} 31 & 31 & 54 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ e & e & 23 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \quad y \quad Y = \begin{pmatrix} 37 & 37 & 60 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 47 & 47 & 70 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 48 & \epsilon & \epsilon \\ 43 & 47 & 70 & 50 & \epsilon & \epsilon \\ 102 & 102 & 125 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}.$$

La existencia de las matrices  $X$  y  $Y$  verificando la igualdad  $AD \oplus BX = DY$ , aseguran que el estado del sistema evoluciona sin violar las restricciones de sincronización predefinidas en el semi-módulo  $\mathcal{D}$ .

## 2.3. Cálculo del máximo semi-módulo $(A, B)$ -invariante

El problema del cálculo del máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en un semi-módulo dado, presenta como principal dificultad el hecho de que el análogo del algoritmo clásico para calcular el máximo subespacio  $(A, B)$ -invariante contenido en un subespacio dado, (ver [Wonham, 1985]) es un algoritmo que no converge necesariamente en un número finito de pasos. Sin embargo, tal como lo muestra Katz en [Katz, 2007], veremos que bajo ciertas condiciones de finitud, la adaptación del algoritmo clásico de punto fijo al álgebra max-plus converge en un número finito de pasos para una clase importante de semi-módulos, y en consecuencia nos proporciona el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en un semi-módulo dado.

Comencemos por mostrar que la familia de todos los semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes contenidos en un semi-módulo dado, es cerrada bajo la operación de la adición max-plus  $\oplus$ .

**Proposición 2.3.1** La suma max-plus de dos semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes es también un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante.

*Demostración.* De (2.2) es claro que si  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  son dos semi-módulos de  $\mathcal{S}^n$ ,  $(A, B)$ -invariantes, entonces

$$\begin{aligned} A(\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2) &= A\mathcal{X}_1 \oplus A\mathcal{X}_2, \\ &\subset (\mathcal{X}_1 \ominus \text{Im } B) \oplus (\mathcal{X}_2 \ominus \text{Im } B), \\ &= (\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2) \ominus \text{Im } B. \end{aligned}$$

Por tanto, el semi-módulo  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  es  $(A, B)$ -invariante. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.3.1, el conjunto de todos los semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes contenidos en un semi-módulo dado  $\mathcal{K}$  del espacio de estado del sistema, es un semi-retículo superior con respecto al orden de la inclusión  $\subset$ , y la operación de la adición max-plus  $\oplus$ . Por tanto, admite un elemento más grande, el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , el cual será denotado por  $\text{máx } \mathcal{V}(A, B, \mathcal{K})$ .

**Observación 2.3.1** La familia de semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes conteniendo a un semi-módulo dado, no es cerrada bajo la operación de intersección  $\cap$ , es decir, puede ocurrir que dado dos semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes, su intersección no resulte un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante. Desde el punto de vista físico, este hecho se debe a que, para cada condición inicial contenida en un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, digamos  $\mathcal{X}_1$ , existe un control  $u_1$  tal que la trayectoria se queda en este semi-módulo, similarmente ocurre para un semi-módulo  $\mathcal{X}_2$   $(A, B)$ -invariante, pero como estos controles no son obtenidos de manera única, no siempre podemos definir un control que obligue a las trayectorias que inicien en la intersección de los semi-módulos a permanecer en esta. En consecuencia, no siempre existe el mínimo  $(A, B)$ -invariante conteniendo un semi-módulo dado. A diferencia de la familia de semi-módulos  $A$ -invariantes conteniendo a un semi-módulo dado, que es cerrada bajo la operación de intersección  $\cap$ , y en la cual siempre existe el  $\text{min} \mathcal{S}(A, B)$ , que coincide con el espacio alcanzable  $\mathcal{R}_\omega$  (ver Propiedad 1.4.4).

A partir de la Propiedad 2.2.2, y del hecho inmediato de que todo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$  está contenido en  $\mathcal{K}^*$ , obtenemos que  $\mathcal{K}^*$  es el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , tal como lo establece la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.2** Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$  es un semi-módulo, entonces  $\mathcal{K}^*$  coincide con el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ . Esto es,

$$\mathcal{K}^* = \text{máx } \mathcal{V}(A, B, \mathcal{K}). \quad (2.8)$$

*Demostración.* Por la Propiedad 2.2.2 tenemos que  $\mathcal{K}^*$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , así que  $\mathcal{K}^* \subset \text{máx } \mathcal{V}(A, B, \mathcal{K})$ . Para probar la proposición resta mostrar que  $\text{máx } \mathcal{V}(A, B, \mathcal{K}) \subset \mathcal{K}^*$ . En efecto, recordemos de la Proposición 2.2.1, que un semi-módulo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es  $(A, B)$ -invariante si y sólo, si para

cada  $x \in \mathcal{X}$ , existe una secuencia de vectores de control tal que la trayectoria del sistema dinámico (2.1), asociada con esta secuencia de control y la condición inicial  $x(0) = x$ , está completamente contenida en  $\mathcal{X}$ . Por tanto cualquier semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , está también contenido en  $\mathcal{K}^*$ , en particular el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , por tanto,  $\max \mathcal{V}(A, B, \mathcal{K}) \subset \mathcal{K}^*$ , con lo cual se concluye la prueba. ■

Desde el punto de vista práctico, resulta de interés el cálculo del máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en una especificación dada para el espacio de estado del sistema, modelado por la ecuación (2.1), debido al hecho que la especificación dada, describe el comportamiento deseado o esperado del sistema, y el máximo  $(A, B)$ -invariante describe el conjunto de estados iniciales del espacio de estado del sistema para los cuales se puede garantizar la existencia de un control, el cual haga que el estado del sistema permanezca en dicho semi-módulo, resolviendo así, el problema de la primera etapa de la síntesis de control.

Con el objetivo de calcular el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{K}^*$  contenido en una especificación dada  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ , es modificado el algoritmo clásico de punto fijo, propuesto por Wonham en [Wonham, 1985] para calcular el máximo subespacio  $(A, B)$ -invariante contenido en un subespacio dado del espacio de estado, se considera la función  $\varphi$  del conjunto de semi-módulos definida por

$$\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \cap A^{-1}(\mathcal{X} \ominus \mathcal{B}), \quad (2.9)$$

y se define la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  como

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{X}_{k+1} = \varphi(\mathcal{X}_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

donde  $A^{-1}(\mathcal{Y}) = \{u \in \mathcal{S}^n \mid Au \in \mathcal{Y}\}$  y  $\mathcal{Z} \ominus \mathcal{Y} = \{u \in \mathcal{S}^n \mid \exists y \in \mathcal{Y}, u \oplus y \in \mathcal{Z}\}$  para todo  $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{S}^n$ .

**Observación 2.3.2** Se sigue de la Definición 2.2.1 que los semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes son justamente los puntos fijos de la función  $\varphi$ , definida por (2.9).

El siguiente lema muestra la monotonía de la secuencia (2.10), y establece que el límite de esta secuencia contiene a cualquier semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ .

**Lema 2.3.1 (Katz, 2007)** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$  un semi-módulo arbitrario. Entonces la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definida por (2.10) es decreciente, es decir,

$\mathcal{X}_{k+1} \subset \mathcal{X}_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, si definimos el semi-módulo  $\mathcal{X}^\infty$  como el límite de la secuencia  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , esto es  $\mathcal{X}^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_k$ . Cualquier semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$  está también contenido en  $\mathcal{X}^\infty$ . En particular,  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{X}^\infty$

*Demostración.* Veamos que la secuencia de semi-módulos,  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es decreciente. Este hecho es consecuencia inmediata de la definición de la función  $\varphi$ . En efecto,

$$\mathcal{X}_{k+1} = \varphi(\mathcal{X}_k) = \mathcal{X}_k \cap A^{-1}(\mathcal{X}_k \ominus \mathcal{B}) \subset \mathcal{X}_k,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Para probar la segunda parte del Lema, primero es conveniente notar que la función  $\varphi$  satisface la siguiente propiedad:

$$\forall \mathcal{Z}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{S}^n, \mathcal{Z} \subset \mathcal{Y} \Rightarrow \varphi(\mathcal{Z}) \subset \varphi(\mathcal{Y}),$$

esto es  $\varphi$  es monótona cuando el conjunto de semi-módulos de  $\mathcal{S}^n$  es equipado con el orden:  $\mathcal{Z} \leq \mathcal{Y}$  si y sólo si  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ . Ahora sea  $\mathcal{X}$  un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ . Probemos por inducción sobre  $k$ , que  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y por tanto  $\mathcal{X} \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_k = \mathcal{X}^\infty$ . Primero note que  $\mathcal{X} \subset \mathcal{K} = \mathcal{X}_1$ . Supongamos ahora que  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_k$ , luego como  $\mathcal{X}$  es  $(A, B)$ -invariante se tiene que  $A\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \ominus \mathcal{B}$ , y además como  $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}$ , se sigue que  $\mathcal{X} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{X} \ominus \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{X}) \subset \varphi(\mathcal{X}_k) \subset \mathcal{X}_{k+1}$ . Por tanto,  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . ■

Note que, podemos decir que existe una solución al problema del cálculo del máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en la especificación  $\mathcal{K}$ , si la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge en número finito de pasos, esto es, si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k$ . Ya que, si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k$ , tendremos en primer lugar que  $\mathcal{X}_k = \mathcal{X}^\infty$ , y en consecuencia  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{X}_k$ . Además, el semi-módulo  $\mathcal{X}_k$  resulta ser un punto fijo de la función  $\varphi$ , esto es,  $\varphi(\mathcal{X}_k) = \mathcal{X}_k$ , luego se sigue de la Observación 2.3.2 que,  $\mathcal{X}_k$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, pero como  $\mathcal{K}^*$  es el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en la especificación  $\mathcal{K}$ , (ver Proposición 2.3.2), se tiene que  $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{K}^*$ , y por tanto,  $\mathcal{X}_k = \mathcal{K}^*$ . Así, tendríamos una solución a la primera etapa de la síntesis del control.

El siguiente ejemplo ilustra un caso donde la secuencia para calcular el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, según la secuencia (2.10), se estabiliza en un número finito de pasos.

**Ejemplo 2.3.1** Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon & 3 & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & 3 \\ \epsilon & 7 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 6 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ 3 \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix},$$

y el semi-módulo  $\mathcal{K} = \text{Ker } C$ , donde la matriz  $C$  es:

$$C = (\epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon).$$

Note que el  $\text{Ker } C$  es un semi-módulo generado por lo vectores básicos  $e_1, e_2, e_3$  y  $e_4$  de  $\mathbb{R}_{\max}^5$ , ya que  $x = (a \ b \ c \ d \ e)^T \in \text{Ker } C$  si y sólo si  $e = \epsilon$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\max}$ . Por tanto  $\text{Ker } C = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ .

Ahora, se verificará que  $\text{Ker } C$  no es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, es decir, no es posible encontrar un control tal que partiendo de un estado inicial  $x(0) \in \text{Ker } C$ , la trayectoria resultante este completamente contenida en el  $\text{Ker } C$ . En efecto, consideremos  $x(0) = (\epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon)^T \in \text{Ker } C$  y sea  $u(k) = u$  cualquier control aplicado, luego

$$x(1) = Ax(0) \oplus Bu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \otimes u \\ 6 \end{pmatrix} \notin \text{Ker } C.$$

En este caso particular, se puede calcular el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en el  $\text{Ker } C$ , usando el algoritmo descrito en la ecuación (2.10). Luego,

$$\mathcal{X}_1 = \text{Ker } C, \quad \mathcal{X}_k = \varphi(\mathcal{X}_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5)^T \in \mathbb{R}_{\max}^5$ , note que, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  tal que  $b = (\epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ 3\lambda \ \epsilon)^T \in \text{Im } B$  y así  $u \oplus b \in \mathcal{X}_1$  si y sólo si  $u_5 = \epsilon$ , luego  $\mathcal{X}_1 \ominus \text{Im } B = \mathcal{X}_1$ . Por tanto

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathcal{X}_1 \ominus \text{Im } B) &= A^{-1}(\mathcal{X}_1), \\ &= \{u \in \mathbb{R}_{\max}^5 \mid Au \in \mathcal{X}_1\}, \\ &= \{u \in \mathbb{R}_{\max}^5 \mid u_3 = \epsilon\}, \\ &= \text{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2 &= \mathcal{X}_1 \cap A^{-1}(\mathcal{X}_1 \ominus \text{Im } B), \\ &= \text{Span}\{e_1, e_2, e_4\}.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2 \cap A^{-1}(\mathcal{X}_2 \ominus \text{Im } B),$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2 \ominus \text{Im } B &= \{u \in \mathbb{R}_{\max}^5 \mid \text{existe } b \in \text{Im } B, u \oplus b \in \mathcal{X}_2\}, \\ &= \{u \in \mathbb{R}_{\max}^5 \mid u_3 = u_5 = \epsilon\}, \\ &= \mathcal{X}'_2,\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_3 &= \mathcal{X}_2 \cap A^{-1}(\mathcal{X}_2), \\ &= \mathcal{X}_2 \cap \text{Span}\{e_2, e_4\}, \\ &= \text{Span}\{e_2, e_4\}.\end{aligned}$$

De forma similar se concluye que

$$\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_3.$$

Efectivamente, la secuencia de semi-módulos se estabiliza en un número finito de pasos, y en consecuencia, el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en el semi-módulo  $\text{Ker } C$  es

$$\mathcal{K}^* = \text{Span}\{e_2, e_4\}.$$

En el caso de la teoría de sistemas dinámicos sobre campos, la secuencia  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  siempre converge en al menos  $n$  pasos, ya que es una secuencia decreciente de subespacios de un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Sin embargo, uno de los problemas en el caso max-plus, el cual es similar a las dificultades encontradas en la teoría sobre sistemas dinámicos sobre anillos (ver por ejemplo [Assan et al., 1999]), es que la secuencia  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  puede no converger en número finito de pasos. Esta dificultad es consecuencia de que el semi-anillo  $\mathbb{R}_{\max}^n$  no es Artiniano, esto es, existen secuencia decrecientes infinitas en  $\mathbb{R}_{\max}^n$ . En el caso de sistemas dinámicos lineales sobre anillos, la convergencia de la secuencia  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en un número finito de

pasos, tampoco es garantizada, aunque existe un procedimiento para encontrar el máximo  $(A, B)$ -invariante,  $\mathcal{K}^*$ , cuando  $\mathcal{S}$  sea un dominio ideal principal (ver [Conte et Perdon, 1994]), en general el cálculo de  $\mathcal{K}^*$  sigue siendo un problema difícil.

El siguiente ejemplo muestra una secuencia de semi-módulos que no se estabiliza en un número finito de pasos, sin embargo, es posible encontrar el límite de la secuencia  $\mathcal{X}^\infty$ , el cual resulta ser un semi-módulo  $A$ -invariante, más aún un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, y por tanto, tendremos que  $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{K}^*$ .

**Ejemplo 2.3.2 (Katz,2007)** . Sea  $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_{\max}$ . Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ \epsilon & e \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix},$$

y el semi-módulo  $\mathcal{K} = \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max} \mid y \leq x - 1\}$ . Note que  $\mathcal{K} = \text{Im } K$ , donde

$$K = \begin{pmatrix} e & e \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

En este caso, la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , definida por (2.10) es dada por

$$\mathcal{X}_k = \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - k\} = \text{Im} \begin{pmatrix} e & e \\ -k & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . En efecto, procedamos por inducción sobre  $k$ . Note en primer lugar, que (2.11) se satisface por definición cuando  $k = 1$ . Supongamos ahora que (2.11) se cumple para  $k = r$ , esto es

$$\mathcal{X}_r = \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - r\} = \text{Im} \begin{pmatrix} e & e \\ -r & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Note que  $\mathcal{X}_r \ominus \mathcal{B}$ , ya que existe  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\max}$  tal que  $\text{máx}(y, \lambda) \leq \text{máx}(x, \lambda) - r$  (esto es, existe  $(\lambda \ \lambda)^T \in \mathcal{B}$  tal que  $(x \ y)^T \oplus (\lambda \ \lambda)^T \in \mathcal{X}_r$ ) si y sólo si  $y \leq x - r$  (esto es,  $(x \ y)^T \in \mathcal{X}_r$ ). Por tanto,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathcal{X}_r \ominus \mathcal{B}) &= A^{-1}(\mathcal{X}_r), \\ &= \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid A(x \ y)^T \in \mathcal{X}_r\}, \\ &= \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid (x - 1 \ y)^T \in \mathcal{X}_r\}, \\ &= \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - 1 - r\}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{r+1} &= \mathcal{X}_r \cap A^{-1}(\mathcal{X}_r \ominus \mathcal{B}) = A^{-1}(\mathcal{X}_r), \\
&= \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - r\} \cap \\
&\quad \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - 1 - r\}, \\
&= \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y \leq x - (1 + r)\},
\end{aligned}$$

lo cual muestra que (2.11) se cumple para todo  $r \in \mathbb{N}$ .

Podemos ver que la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es estrictamente decreciente y, por lo tanto no se estabiliza. Finalmente note que, el semi-módulo  $\mathcal{X}^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_k = \{(x \ y)^T \in \mathbb{Z}_{\max}^2 \mid y = \epsilon\}$  es  $A$ -invariante, esto es,  $A\mathcal{X}^\infty \subset \mathcal{X}^\infty$ . Además,  $\mathcal{X}^\infty$  es  $(A, B)$ -invariante, y por tanto, tendremos que  $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{K}^*$ .

El hecho de que  $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{K}^*$  siempre se cumpla, es un problema abierto. Ya que, en general, no se puede garantizar que el límite del algoritmo (2.10) resulte ser un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, y en consecuencia solo podríamos decir que  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{X}^\infty$ , pero sin poder calcular el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ .

Condiciones suficientes para la estabilización de la secuencia  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , definida por (2.10), y por tanto para que la igualdad  $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{K}^*$  se cumpla, fueron introducidas por Katz en [Katz, 2007], para una clase importante de semi-módulos en  $\mathbb{Z}_{\max}^n$ . Katz introduce la noción de volumen de un semi-módulo  $\mathbb{Z}_{\max}^n$  con sus propiedades, y muestra que bajo ciertas condiciones de finitud sobre la especificación  $\mathcal{K}$ , la adaptación del algoritmo clásico al álgebra max-plus proporciona el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en un semi-módulo dado, [Katz, 2007].

A continuación presentamos estos resultados.

**Definición 2.3.1** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$  un semi-módulo. Se define el volumen de  $\mathcal{K}$ , representado por  $\text{vol}(\mathcal{K})$ , el cardinal del conjunto  $\{x \in \mathcal{K} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\}$ , esto es,  $\text{vol}(\mathcal{K}) = \text{card}(\{x \in \mathcal{K} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\})$ . También, si  $K \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times p}$ , representaremos por  $\text{vol}(K)$  el volumen del semi-módulo  $\mathcal{K} = \text{Im } K$ , esto es,  $\text{vol}(K) = \text{vol}(\text{Im } K)$ .

Antes de enunciar los resultados siguientes, los cuales proveen algunas propiedades de volumen, es conveniente introducir la siguiente notación: Si  $\mathcal{X} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$ , entonces se define  $\tilde{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\}$ .

**Lema 2.3.2** Sean  $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$  dos semi-módulos:

$$1. \quad \mathcal{Y} \subset \mathcal{Z} \Rightarrow \text{vol}(\mathcal{Y}) \leq \text{vol}(\mathcal{Z}), \quad (2.13)$$

$$2. \quad \text{si } \text{vol}(\mathcal{Y}) < \infty, \text{ entonces } \mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{Z} \Rightarrow \text{vol}(\mathcal{Y}) \leq \text{vol}(\mathcal{Z}). \quad (2.14)$$

*Demostración.*

1. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición del volumen de un semi-módulo:

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z} \Rightarrow \{x \in \mathcal{Y} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\} \subset \{x \in \mathcal{Z} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\} \Rightarrow \\ \text{vol}(\mathcal{Y}) = \text{card}(\{x \in \mathcal{Y} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\}) \leq \text{card}(\{x \in \mathcal{Z} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\}) = \text{vol}(\mathcal{Z}).$$

2. En primer lugar veamos que para todo par de semi-módulos  $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$  se verifica la siguiente propiedad:

$$\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{Z} \Rightarrow \{x \in \mathcal{Y} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\} \subsetneq \{x \in \mathcal{Z} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\}. \quad (2.15)$$

En efecto, sea  $x \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Y}$  (este elemento existe pues por hipótesis  $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{Z}$ ). Entonces, tenemos que  $x \neq (\epsilon \epsilon \cdots \epsilon)^T$ , y por tanto, podemos definir el vector  $\bar{x} = (x_1 \oplus \cdots \oplus x_n)^{-1} x$  (esto es,  $\bar{x}_i = x_i - \text{máx}\{x_1, \dots, x_n\}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , con la notación habitual). Notemos entonces que:

$$\bar{x} \in \{x \in \mathcal{Z} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\} \setminus \{x \in \mathcal{Y} \mid x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = e\},$$

con lo cual queda demostrado la propiedad 2.15. ■

El teorema siguiente nos proporciona una condición sobre la especificación  $\mathcal{K}$  que garantiza la estabilización de la sucesión  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en un número finito de pasos.

**Teorema 2.3.1 (Katz, 2007)** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$  un semi-módulo con volumen finito. Entonces, para toda  $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times p}$ , el máximo  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{K}^*$  contenido en  $\mathcal{K}$  es finitamente generado. Además, si definimos la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  por (2.10), entonces  $\mathcal{K}^* = \mathcal{X}_k$  para algún  $k \leq \text{vol}(\mathcal{K}) + 1$ .

*Demostración.* Notemos en primer lugar que todo semi-módulo  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}_{\max}^n$  de volumen finito es necesariamente finitamente generado. En efecto, esta propiedad es consecuencia directa de que  $\mathcal{Y} = \text{Span}(Y)$ , en donde  $Y = \{y \in \mathcal{Y} \mid y_1 \oplus \cdots \oplus y_n = e\}$ . Ahora bien, como  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$ , se sigue que  $\tilde{\mathcal{K}}^* \subset \tilde{\mathcal{K}}$ , lo que implica que  $\text{card}(\tilde{\mathcal{K}}^*) \leq$

$\text{card}(\tilde{\mathcal{K}})$ , y por tanto,  $\text{vol}(\mathcal{K}^*) \leq \text{vol}(\mathcal{K}) < \infty$ , de donde obtenemos que  $\mathcal{K}^*$  es un semi-módulo finitamente generado.

Ahora veamos que la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definida por (2.10) se estabiliza a lo sumo en  $\text{vol}(\mathcal{K}) + 1$  pasos. Efectivamente, por el Lema 2.3.1 sabemos que la secuencia de semi-módulos  $\{\mathcal{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es decreciente. Luego, como  $\text{vol}(\mathcal{X}_1) \leq \text{vol}(\mathcal{K}) < \infty$ , se sigue que  $\{\text{vol}(\mathcal{X}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente de números enteros no negativos. Por tanto, sabemos que existe  $k \leq \text{vol}(\mathcal{X}_1) + 1 = \text{vol}(\mathcal{K}) + 1$  tal que  $\text{vol}(\mathcal{X}_{k+1}) = \text{vol}(\mathcal{X}_k) \leq \text{vol}(\mathcal{K})$ . Finalmente, como  $\mathcal{X}_{k+1} \subset \mathcal{X}_k \subset \mathcal{K}$  por Lema 2.3.1, tenemos que  $\text{vol}(\mathcal{X}_{k+1}) = \text{vol}(\mathcal{X}_k) \leq \text{vol}(\mathcal{K}) < \infty$  (por la Propiedad 2.13). Entonces, aplicando la Propiedad 2.14 a los semi-módulos  $\mathcal{X}_{k+1}$  y  $\mathcal{X}_k$ , obtenemos que necesariamente  $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k$ , con lo cual  $\mathcal{K}^* = \mathcal{X}_k$ , como queríamos demostrar. ■

El Teorema 2.3.1 resulta útil en muchos problemas prácticos, debido a que en estos problemas las especificaciones  $\mathcal{K}$  pueden ser definidas en términos de semi-módulos definidos por la imagen de una matriz con entradas en el semi-anillo  $\mathbb{Z}_{\max}$ , los cuales tengan volumen finito. Por ejemplo, el caso cuando  $\mathcal{K}$  describe ciertos requerimientos de estabilidad.

En la Capítulo 3, presentaremos el problema de satisfacer restricciones temporales, las cuales se formulan en términos de una especificación que es un semi-módulo contenido en  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , definida por la imagen de la estrella de Kleene de una matriz  $C$ , que tiene entradas en  $\mathbb{R}_{\max}$ . Dicha especificación resulta ser un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, evitándonos la dificultad que se presenta en la primera etapa de la síntesis de una ley de control, como lo es el cálculo del máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en la especificación dada.

## 2.4. Semi-módulos $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación estática

Esta sección trata con otro problema fundamental en el enfoque geométrico para la teoría de los sistemas dinámicos lineales, como lo es, la existencia y el cálculo de una retroalimentación de estado lineal. Consideremos nuevamente el sistema dinámico max-plus (2.1). Supongamos que conocemos el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{K}^*$  contenido en una especificación dada  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^n$ . Desde el punto de vista dinámico, esto significa que las trayectorias que inician en  $\mathcal{K}^*$  se mantienen en  $\mathcal{K}^*$  por una escogencia adecuada del control. Nuestro nuevo problema es

determinar si este control puede ser generado usando una retroalimentación de estado. En otras palabras, queremos determinar si existe una retroalimentación lineal de la forma  $u(k) = Fx(k-1)$ , donde  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$ , la cual haga a  $\mathcal{K}^*$  invariante con respecto al sistema en lazo cerrado resultante

$$x(k) = (A \oplus BF)x(k-1), \quad (2.16)$$

esto es, cada trayectoria del sistema en lazo cerrado (2.16) está completamente contenida en  $\mathcal{K}^*$  cuando su estado inicial este en  $\mathcal{K}^*$ . Si una retroalimentación con esta propiedad existe, diremos que  $\mathcal{K}^*$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado. La  $(A, B)$ -invarianza es muy importante en conexión con la síntesis de problemas de control, debido a sus propiedades de retroalimentación, en efecto, un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación puede ser transformado en un invariante simple por medio de una retroalimentación adecuada. Es por ello que, algunos autores llaman esta noción  $(A + BF)$ -invariante, ver [Assan, 1999].

**Definición 2.4.1** Un semi-módulo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}^n$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado o invariante controlado por retroalimentación de estado, si existe una matriz  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  tal que

$$(A \oplus BF)\mathcal{X} \subset \mathcal{X}. \quad (2.17)$$

El siguiente ejemplo ilustra un semi-módulo  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estado.

**Ejemplo 2.4.1** Consideremos el semi-módulo encontrado en el Ejemplo 2.3.1, donde el máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en el semi-módulo  $\text{Ker } C$  es

$$\mathcal{K}^* = \text{Span}\{e_2, e_4\}.$$

El semi-módulo  $\mathcal{K}^*$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado. En efecto, consideremos  $F = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5) \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times 5}$  y sea  $x = (\epsilon \ x_2 \ , \ : \ \epsilon \ x_4 \ \epsilon)^T \in \mathcal{K}^*$ . Luego

$$BF = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 3f_1 & 3f_2 & 3f_3 & 3f_4 & 3f_5 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ y } A \oplus BF = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon & 3 & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & 3 \\ 3f_1 & 7 \oplus 3f_2 & 3f_3 & 3f_4 & 3f_5 \\ \epsilon & \epsilon & 6 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Luego

$$(A \oplus BF)x = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 3x_4 \\ \epsilon \\ 7 \oplus 3f_2 \oplus 3f_4x_4 \\ \epsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^*,$$

para cualquier matriz  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times 5}$ .

La siguiente afirmación es una propiedad de comportamiento que ayuda a comprender el significado real de la invarianza, ya que da una interpretación teórica del sistema sobre las nociones de invarianza, en términos de la condición inicial del sistema (2.1).

**Proposición 2.4.1 (Interpretación dinámica)** Dado el sistema descrito por (2.1) y  $\mathcal{X}$  un semi-módulo de  $\mathcal{S}^n$ . Entonces, cualquier semi-módulo  $\mathcal{X}$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estados, si y sólo si existe una matriz  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  tal que para cada condición inicial  $x(0) \in \mathcal{X}$ , la secuencia de vectores de control  $u(k)$  definida por  $u(k) = Fx(k-1)$  garantiza que  $x(k) = (A \oplus FB)x(k-1) \in \mathcal{X}$ , para todo  $k \geq 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{X}$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estados, luego, existe una matriz  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  tal que  $(A \oplus BF)\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ . Entonces, para cada elemento arbitrario  $x \in \mathcal{X}$ , se cumple que  $(A \oplus BF)x$  pertenece a  $\mathcal{X}$ , haciendo  $x(0) = x$ , y  $x(1) = (A \oplus BF)x(0)$ , se cumple que  $x(1)$  pertenece a  $\mathcal{X}$ . Ahora, como  $x(1) \in \mathcal{X}$ , se sigue que  $x(2) = (A \oplus BF)x(1)$ , también pertenece a  $\mathcal{X}$ , luego  $x(k-1) \in \mathcal{X}$ , se cumple que, existe  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$ , tal que  $x(k) = (A \oplus BF)x(k-1) \in \mathcal{X}$ . Por tanto, la trayectoria  $x(0), x(1), x(2), \dots$  del sistema (2.16), asociada con la matriz de control  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  y la condición inicial  $x(0) = x$ , está completamente contenida en  $\mathcal{X}$ . Para mostrar la suficiencia de la proposición, basta tomar un elemento arbitrario  $x$  en  $\mathcal{X}$ , y considerar la trayectoria  $x(0), x(1), x(2) \dots$  del sistema (2.16), asociada con la matriz de control  $F$  y la condición inicial  $x(0) = x$ , luego  $(A \oplus BF)x = (A \oplus BF)x(0) \in \mathcal{X}$ . ■

En consecuencia, podemos decir que cuando un semi-módulo es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado, existe una ley de control (secuencia),  $u(k)$  con  $k \geq 1$ , definida por  $u(k) = Fx(k-1)$  tal que la trayectoria en lazo cerrado, se queda en el semi-módulo.

**Observación 2.4.1** Notemos que todo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado es en particular  $(A, B)$ -invariante. Esta propiedad es consecuencia directa de la definición. Desafortunadamente, el recíproco no siempre es cierto en general para sistemas sobre semi-anillos, lo cual difiere de la teoría de control clásico, donde la clase de sub-espacios  $(A, B)$ -invariantes coincide con la clase de sub-espacios  $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación de estado, ver [Wonham, 1985]. El siguiente ejemplo ilustra el hecho que existen semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes que no son  $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación de estado.

**Ejemplo 2.4.2** Consideremos nuevamente el semi-módulo  $\mathcal{K}$  definido en el Ejemplo 2.2.1.

Como mostramos previamente  $\mathcal{K} = \{(x \ y)^T \in \mathbb{N}_{\min}^2 \mid x \leq y, 1 \leq y\}$  es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, ahora veamos que  $\mathcal{K}$  no es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado. Esto es, veamos que no existe una matriz  $F \in \mathbb{N}_{\min}^{1 \times 2}$  tal que la trayectoria en lazo cerrado del sistema dado este completamente contenida en  $\mathcal{K}$ . En efecto, para ello mostraremos que una trayectoria que inicia en punto  $(1 \ 1)^T \in \mathcal{K}$  no se mantiene dentro de  $\mathcal{K}$ , cuando una retroalimentación de estado es aplicada. Sea  $F = (f_1 \ f_2) \in \mathbb{N}_{\min}^{1 \times 2}$  una retroalimentación de estado arbitraria. Luego, como  $F(1 \ 1)^T \geq 1$ , tenemos que

$$BF(1 \ 1)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (f_1 \ f_2) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \otimes f_1 \oplus 2 \otimes f_2 \\ 2 \otimes f_1 \oplus 2 \otimes f_2 \end{pmatrix},$$

haciendo  $\alpha = 2 \otimes f_1 \oplus 2 \otimes f_2$ , se cumple que  $\alpha \geq 2$ . Por tanto,

$$(A \oplus BF) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{K}.$$

En consecuencia, tenemos que existen trayectorias del sistemas que inician en el semi-módulo  $\mathcal{K}$ , para las cuales no existe una secuencia de vectores de control definidos por una retroalimentación tal que la trayectoria se pueda mantener continuamente en dicho semi-módulo.

Lo cual muestra que  $\mathcal{K}$  no es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado.

Con el fin de obtener una equivalencia entre la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estado y la  $(A, B)$ -invarianza en la teoría sobre semi-anillos, en la siguiente sección será introducida la noción de invarianza por retroalimentación dinámica de estado.

La propiedad siguiente da una caracterización algebraica, que resulta útil en práctica para verificar la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estados de semi-módulos finitamente generados.

**Proposición 2.4.2** Dado el sistema descrito por (2.1) y  $\mathcal{M}$  un semi-módulo de  $\mathcal{S}^n$ . Un semi-módulo finitamente generado  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ , definido por  $\mathcal{M} = \text{Im } M$  con  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado si y sólo si existen matrices  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  y  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$ , tales que la siguiente igualdad se cumple:

$$(A \oplus B \otimes F) \otimes M = M \otimes Y. \quad (2.18)$$

*Demostración.* Supongamos que el semi-módulo  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado. Sea  $M_j$  la  $j$ -ésima columna de la matriz  $M$ , con  $j = 1, \dots, p$ , luego el vector  $M_j \in \mathcal{M}$ , como  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado, existe  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  tal que  $(A \oplus BF)M_j \in \mathcal{M}$ , así que, existe  $y_j \in \mathcal{S}^p$ , tal que  $(A \oplus BF)M_j = My_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ . Luego, concatenando las matrices de la forma:

$$(A \oplus BF)[M_1 \ M_2 \ \dots \ M_p] = M[y_1 \ \dots \ y_p],$$

tenemos que, existen dos matrices  $F \in \mathcal{S}^{q \times n}$  y  $Y = [y_1 \ \dots \ y_p] \in \mathcal{S}^{p \times p}$  tal que la igualdad  $(A \oplus B \otimes F) \otimes M = M \otimes Y$ , se verifica.

Para mostrar la suficiencia, consideremos un elemento arbitrario  $x$  en  $\mathcal{M}$ , luego existe  $y \in \mathcal{S}^p$  tal que  $x = My$ . De la igualdad (2.18), tenemos que  $(A \oplus BF)My = MYy \in \mathcal{M}$ . Por tanto, existe un vector  $Yy \in \mathcal{S}^p$  tal que  $(A \oplus BF)My = (A \oplus BF)x \in \mathcal{M}$ , con lo cual concluye la prueba. ■

El siguiente ejemplo ilustra la proposición previa.

**Ejemplo 2.4.3** Consideremos el Ejemplo 2.2.3. Como vimos previamente el semi-módulo  $\mathcal{D} = \text{Im } D$ , es  $(A, B)$ -invariante. También podemos observar que el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado, ya que existen matrices  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 6}$  y  $Y \in \mathbb{R}_{\max}^{6 \times 6}$ , tales que la igualdad  $(A \oplus B \otimes F) \otimes M = M \otimes Y$  se cumple. En efecto, considere las matrices  $F$  y  $Y$  como siguen:

$$F = \begin{pmatrix} 38 & 34 & 37 & 37 & 34 & 31 \\ 7 & 3 & 6 & 6 & 3 & e \end{pmatrix}, \quad y \quad Y = \begin{pmatrix} 50 & 43 & 78 & 42 & 87 & \epsilon \\ 47 & 47 & 70 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 48 & \epsilon & \epsilon \\ 43 & 47 & 70 & 50 & \epsilon & \epsilon \\ 102 & 102 & 125 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}.$$

**Observación 2.4.2** Como la ecuación (2.18) es un sistema de ecuaciones max-plus lineales no homogéneo, el conjunto de soluciones  $(F, Y)$  puede ser calculado utilizando métodos generales de eliminación [Gaubert, 1992]. Sin embargo, para mostrar que  $\mathcal{M} = \text{Im } M$  es  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado es suficiente saber que el sistema  $(A \oplus BF)M = MY$  tiene al menos una solución, [Katz, 2007], y existen en la literatura métodos que permiten encontrar dicha solución, [Butkovic et Hegedus, 1984], [Gaubert, 1992], [Gaubert, 1998].

En muchos problemas, se puede mostrar la existencia de un máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante de cualquier semi-módulo, pero en general no se puede calcular una retroalimentación de estado estática  $F$  que haga este semi-módulo invariante para el sistema en lazo cerrado, incluso en el caso de semi-módulos finitamente generados. Esto viene del hecho que  $X$  no puede ser factorizado en la forma  $X = FM$ , en general. En la misma forma, no existe el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación de estado incluido en un semi-módulo dado, en general, lo cual, junto con el hecho que la caracterización (2.18) es no lineal, hacen difícil el cálculo de una ley de control que mantenga las trayectorias del sistema en el semi-módulo dado. El concepto de retroalimentación dinámica resolverá este problema.

## 2.5. Semi-módulos $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación dinámica

En esta sección, presentamos nuestra primera contribución sobre la extensión del enfoque geométrico para los sistemas max-plus lineales, introducimos la noción de una retroalimentación dinámica sobre semi-anillos, y mostraremos que un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante sobre un semi-anillo conmutativo puede ser hecho invariante para el sistema en lazo cerrado por una retroalimentación dinámica.

### 2.5.1. Retroalimentación dinámica de estado

Sea el sistema max-plus lineal descrito por;

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1), \quad (2.19)$$

donde  $x(k) \in S^n$ ,  $u(k) \in S^q$ ,  $A$  y  $B$  son matrices de dimensiones apropiadas. Recordemos que un esquema de control bien conocido y utilizado para modificar el

sistema (2.19) es la retroalimentación estática de estado definida por:

$$u(k+1) = Ex(k+1) \oplus Fz(k+1), \quad (2.20)$$

donde  $z \in \mathcal{S}^n$  es una entrada externa y  $E, F$  son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

Motivados por el desarrollo del enfoque geométrico para los sistemas max-plus lineales, introducimos una nueva noción de retroalimentación dinámica para sistemas sobre un semi-anillos  $\mathcal{S}$ .

**Definición 2.5.1 (Retroalimentación Dinámica)** Una retroalimentación dinámica es una ley de control de la forma

$$u(k) = Ex(k) \oplus Fz(k), \quad (2.21)$$

para  $k \geq 1$ , donde  $E$  and  $F$  son matrices de dimensiones adecuadas, y  $z(k) \in \mathcal{S}^q$  es una variable interna del controlador, cuya evolución es dirigida por

$$z(k+1) = Gx(k) \oplus Hz(k), \quad (2.22)$$

con matrices  $G$  y  $H$  dimensiones adecuadas.

Note que para definir la ley de control de forma única, la ecuación (2.22) necesita una inicialización. Esta inquietud será retomada más adelante, cuando sea presentado el método del diseño de control.

Consideremos el sistema extendido de (2.19), definido como sigue:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1), \\ z(k+1) &= w(k+1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

En su forma matricial, se expresa:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \oplus B_e \begin{pmatrix} u(k+1) \\ w(k+1) \end{pmatrix},$$

donde

$$A_e = \begin{pmatrix} A & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} B & \epsilon \\ \epsilon & I_p \end{pmatrix},$$

**Definición 2.5.2** Una retroalimentación estática de estado extendida es definida por:

$$\begin{pmatrix} u(k+1) \\ w(k+1) \end{pmatrix} = F_e \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

con

$$F_e = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Note que, aplicando esta retroalimentación estática al sistema extendido (2.23), resulta una retroalimentación dinámica relativa al sistema original (2.19).

La retroalimentación dinámica definida por (2.21)-(2.22) aplicada al sistema da origen al sistema en lazo cerrado siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \oplus BE & BF \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix},$$

que coincide con el sistema en lazo cerrado obtenido aplicando la retroalimentación estática de estado extendida.

## 2.5.2. Invarianza por retroalimentación dinámica

En aras de mostrar la invarianza por retroalimentación de estados de un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante, introducimos el concepto de semi-módulo extendido de un semi-módulo finitamente generado.

**Definición 2.5.3** Dado un semi-módulo  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ , generado por la matriz  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , la extensión de  $\mathcal{M}$ , denotada  $\mathcal{M}_e$ , es el semi-módulo de  $\mathcal{S}^{n+p}$  generado por la matriz concatenada  $M_e$  definida por

$$M_e = \begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix}.$$

Ahora, estableceremos nuestro resultado principal

**Teorema 2.5.1** Dado el sistema (2.19), y  $\mathcal{M}$  un semi-módulo finitamente generado de  $\mathcal{S}^n$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i)  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante.

(ii)  $\mathcal{M}_e$  es  $(A_e, B_e)$ -invariante.

(iii)  $\mathcal{M}_e$  es  $(A_e, B_e)$ -invariante por retroalimentación de estado.

(iv) Existen matrices  $E, F, G, H$  tal que, para cada valor inicial  $x(0)$ , el estado del sistema en lazo cerrado formado por la interconexión de (2.19) y de la retroalimentación dinámica de estado de la forma (2.21)-(2.22), con  $q = p$  y el valor inicial  $z(0)$  escogido de manera tal que  $x(0) = Mz(0)$ , satisfaga que  $x(k) \in \mathcal{M}$ , para cada  $k \geq 0$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{M}$  es un semi-módulo finitamente generado, existe una matriz  $M \in \mathcal{S}^{n \times p}$ , para algún  $p \in \mathbb{N}$ , tal que  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ . Primero, probaremos que (i) implica (ii) y (iii). Supongamos que  $\mathcal{M}$  es invariante controlado. Se sigue, por (2.7), que existen matrices  $X \in \mathcal{S}^{n \times p}$  y  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  tal que la igualdad  $AM \oplus BX = MY$  se cumple.

Luego, podemos ver que la siguiente igualdad matricial también se cumple,

$$\begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix} Y = (A_e \oplus B_e F_e) \begin{pmatrix} M \\ I_p \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

tomando en (2.25)  $E = \epsilon$ ,  $F = X$ ,  $G = \epsilon$ , y  $H = Y$ , tenemos que

$$F_e = \begin{pmatrix} \epsilon & X \\ \epsilon & Y \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Esto muestra que la imagen de la matriz concatenada  $(M^T, I_p)^T$  es un  $(A_e, B_e)$ -invariante por retroalimentación de estado para el sistema en lazo cerrado. Esto establece que (i) implica (iii). De la afirmación (iii) del Teorema 2.2.3, es claro que (iii) a su vez implica (ii). Recíprocamente, se puede mostrar que (ii) implica (iii). Para ello, primero recordemos que la afirmación (ii) implica que existen matrices  $X_e = (X^T, Y^T)^T$ , y  $Y_e$ , tal que la siguiente igualdad se cumple,

$$A_e M_e \oplus B_e X_e = M_e Y_e.$$

Además, de la definición de  $M_e$ , se puede factorizar  $X_e$  en la forma  $X_e = F_e M_e$ , tomando  $F_e$  definido por (2.27). Finalmente, se observa que  $(A_e \oplus B_e F_e) M_e = M_e Y_e$ , lo cual establece la implicación. Resta mostrar que (iii) implica (i). Esto es obtenido escribiendo que si existe  $F_e$  (no necesariamente en la forma (2.25)) y  $Y_e$  tal que la igualdad  $(A_e \oplus B_e F_e) M_e = M_e Y_e$  se cumple, entonces se tiene que  $AM \oplus BX = MY$ , tomando  $Y = Y_e$  y  $X = EM \oplus F$ , donde las matrices  $E$  y  $F$  son obtenidas particionando  $F_e$  en la forma (2.25).

Para probar que (iv) implica (i), primero recordemos que como  $\mathcal{M}$  es generado por las columnas de  $M$ , para cada vector  $x(0) \in \mathcal{M}$ , existe un vector  $v \in \mathcal{S}^p$  tal que  $x(0) = Mv$ . Además, se observa que la afirmación (iv) implica que existen matrices  $E$  y  $F$ , y para cada  $x(0) \in \mathcal{M}$ , los vectores  $v$  satisfacen  $x(0) = Mv$  y  $x(1) \in \mathcal{M}$ , tal que  $(A \oplus BE)x(0) \oplus BFv$ . Tomando sucesivamente las diferentes columnas de  $M$  para la condición inicial  $x(0)$ , se definen las matrices  $Y \in \mathcal{S}^{p \times p}$  y  $V \in \mathcal{S}^{p \times p}$ , formadas por los valores sucesivos obtenidos para  $v$  y  $x(1)$ , que satisface  $MY = (A \oplus BE)M \oplus BFV$ . Tomando finalmente  $X = EM \oplus FV$ , se tiene que (2.7) es satisfecha, lo que muestra que  $\mathcal{M}$  es  $(A, B)$ -invariante.

Para completar la demostración, mostraremos que (i) implica (iv). En esta parte de la demostración es discutida para el primer tiempo la inicialización de la retroalimentación dinámica, que es importante para la implementación real de dicha ley de control. Podemos notar que la existencia de matrices  $X$  y  $Y$  satisfaciendo (2.7) conducen a la definición de la retroalimentación extendida  $F_e$  como en (2.27), que es tal que  $(A_e \oplus B_e F_e)M_e = M_e Y$ . Esto actualmente implica  $(A_e \oplus B_e F_e)^k M_e = M_e Y^k$ , para  $k \geq 1$ , así para cada vector  $v \in \mathcal{S}^p$ , se obtiene  $(A_e \oplus B_e F_e)^k M_e v = M_e Y^k v$ , para  $k \geq 1$ . Como  $M_e = (M^T, I_p)^T$  y la solución del sistema en lazo cerrado por la acción de la retroalimentación dinámica que corresponde a  $F_e$  es dada por  $(x^T(k), z^T(k))^T = (A_e \oplus B_e F_e)^k M_e (x^T(0), z^T(0))^T$ , se verifica que tomando  $z(0) = v$ , donde  $Mv = x(0)$ , la igualdad  $x(k) = MY^k v$  se cumple, y por tanto  $x(k) \in \mathcal{M}$ , para  $k \geq 1$ . Esto completa la prueba. ■

**Observación 2.5.1** Como se recuerda en la Proposición 2.2.3, la  $(A, B)$ -invarianza de un semi-módulo significa que las trayectorias del sistema pueden ser forzadas por el control a permanecer en el semi-módulo durante la evolución. El Teorema 2.5.1 muestra que en el caso de un semi-módulo finitamente generado, un control que fuerce las trayectorias a permanecer en el semi-módulo dado puede ser realizado usando una retroalimentación dinámica. Tal ley de control es causal, lo cual permite su implementación en tiempo real. La siguiente formulación resume el diseño del método sugerido en la demostración del Teorema 2.5.1.

**Corolario 2.5.1** Dado un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}^n$ . Si la condición inicial  $x(0)$  ya está  $\mathcal{M}$ , una ley de control que fuerza  $x(k)$  a permanecer en  $\mathcal{M}$ ,  $\forall k \geq 0$ , es proporcionada por

$$u(k+1) = Xz(k), \quad (2.28)$$

para  $k \geq 0$ , donde  $z(k)$  es definida por

$$z(k+1) = Yz(k), \quad (2.29)$$

para  $k \geq 0$ , y

$$z(0) = v , \quad (2.30)$$

las matrices  $X$  y  $Y$  siendo soluciones de la ecuación

$$MY = AM \oplus BX , \quad (2.31)$$

y  $v$  solución de

$$x(0) = Mv . \quad (2.32)$$

La inicialización de las entradas del diseño del control son, por lo tanto derivadas del conocimiento de una matriz generadora  $M$ , del modelo del sistema  $(A, B)$ , y del estado inicial  $x(0)$ . La solución de las ecuaciones (2.31) y (2.32) es la clave para calcular los parámetros de la ley de control. Las identidades (3.13) y (2.29) son implementadas para realizar el cálculo del control en línea, y (2.30) es usada para en el tiempo inicial para inicializar el control.

El método propuesto es efectivo para anillos y semi-anillos, para los cuales algoritmos para resolver ecuaciones de la forma (2.31) y (2.32) han sido descritos. Tales algoritmos son discutidos en varias publicaciones. La implementación en tiempo real de este diseño será el objetivo de futuros trabajos.

**Ejemplo 2.5.1** Consideremos un sistema de la forma

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1) ,$$

sobre el semi-anillo  $\mathcal{D} = \{\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes\}$ , donde  $\oplus$  denota la operación min, y  $\otimes$  la adición usual, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +\infty \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

El semi-módulo  $\mathcal{K}$  es definido como  $\mathcal{K} = \{(x^T \ y^T)^T \in \mathcal{D}^2 \mid x \leq y\}$ . Este ejemplo es propuesto por Katz en [Katz, 2007], quien muestra que el máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante incluido en  $\mathcal{K}$  es bien definido y dado por:

$$\mathcal{K}^* = \{(x^T \ y^T)^T \in \mathcal{D}^2 \mid x \leq y \text{ and } 1 \leq y\} .$$

El autor resalta que  $\mathcal{K}^*$  no es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación. De acuerdo a esta observación, no existe una matriz  $F$  sobre  $\mathcal{D}$  tal que  $\mathcal{K}^*$  sea

$(A + BF)$ -invariante. Katz también resalta para este ejemplo que el control constante  $u(k) = 0$  hace que el estado  $x(k)$  se mantenga en  $\mathcal{K}^*$  si su valor inicial  $x(0)$  está en este semi-módulo.

De acuerdo con los resultados anteriores, existe también una retroalimentación dinámica que fuerza la trayectoria  $x(k)$  a permanecer en  $\mathcal{K}^*$ . Se puede calcular esta ley de control usando la fórmula dada, en la forma  $u(k + 1) = X \otimes z(k)$ , donde  $z(k)$  es definida por la recurrencia  $z(k + 1) = Y \otimes z(k)$ , inicializada para cualquier valor  $z(0)$  satisfaciendo  $Mz(0) = x(0)$ , y donde  $X$  y  $Y$  son soluciones de  $A \otimes M \oplus B \otimes X = M \otimes Y$ , y  $M$  es una matriz generadora del semi-módulo  $\mathcal{K}^*$ . Por un instante, tomemos

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & +\infty \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \max\{x_1 - 1, x_2 - 1\} \\ x_1 \end{pmatrix},$$

donde  $x_1$  and  $x_2$  son las componentes del estado inicial, digamos  $x(0) = (x_1^T \ x_2^T)$ , y

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.5.2** Consideremos el ejemplo de Maia et al tratado en [Maia et al., 2011],

$$x(k + 1) = Ax(k) \oplus Bu(k + 1), \quad (2.33)$$

sobre el semi-anillo max-plus.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 5 & -\infty \\ 10 & 0 & 15 & 7 \\ 4 & -\infty & 9 & -\infty \\ 15 & 5 & 20 & 12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10 & 0 & -\infty & -\infty \\ 4 & -\infty & 0 & -\infty \\ 15 & 5 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo es un modelo de *a simple traffic light*. El problema consiste en satisfacer las restricciones de tiempo en la sincronización descritas por el semi-módulo  $\mathcal{D} = \text{Im } D$ , donde

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -15 & -30 \\ 10 & 0 & -5 & -15 \\ 6 & -11 & 0 & -26 \\ 15 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un problema similar de restricciones de tiempo puede ser encontrado en el trabajo [Katz, 2007], donde el objetivo es mantener la trayectoria del sistema dentro de un semi-módulo dado, el cual expresa las restricciones de tiempo de sincronización de las salidas de los trenes.

Ya que, el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es finitamente generado, tomando en cuenta el Teorema 2.2.3, el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es  $(A, B)$ -invariante si existen matrices  $X, Y \in \mathbb{R}_{\max}^{4 \times 4}$  tal que la igualdad  $AM \oplus BX = MY$ , se cumpla.

En efecto, consideremos  $X$  y  $Y$  como siguen,

$$X = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 17 & 6 & 11 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 5 & 0 \\ 22 & 12 & -\infty & -\infty \\ 15 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 19 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Ahora, veamos que  $\mathcal{D}$  no es un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante por retroalimentación. Con esto, podemos observar que la trayectoria que comienza en el valor inicial  $x_0 = (-15 \ -5 \ 0 \ 0)^T \in \mathcal{D}$  no se mantiene dentro del semi-módulo  $\mathcal{D}$  cuando una retroalimentación de estado es aplicada. Sea  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{4 \times 4}$  una retroalimentación de estado arbitraria,

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}.$$

luego

$$(A \oplus BF)x_0 = \begin{pmatrix} 5 \oplus F_1 \\ 15 \oplus 10 \otimes F_1 \oplus F_2 \\ 9 \oplus 4 \otimes F_1 \oplus F_3 \\ 20 \oplus 15 \otimes F_1 \oplus 5 \otimes F_2 \oplus F_4 \end{pmatrix},$$

donde  $(F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4)^T = BFx_0$ ,

Note que

$$(A \oplus BF)x_0 \in cl \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \\ \epsilon \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

y es claro que los vectores que forman la combinación lineal de  $(A \oplus BF)x_0$  no están en  $\mathcal{D}$ , por tanto  $(A \oplus BF)x_0 \notin \mathcal{D}$ . Luego, no es posible aplicar una ley de control

por retroalimentación estática de estado tal que la trayectoria  $x(k)$  del sistema, satisfaga las restricciones impuestas.

Ahora, de acuerdo al Corolario 2.5.1, existe una retroalimentación dinámica que fuerza la trayectoria  $x(k)$  a permanecer en  $\mathcal{D}$ .

Consideremos la evolución del sistema (2.33) cuando el estado inicial es  $x(0) = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \in \mathcal{D}$ , y la ley de control definida como sigue, es aplicada.

$$u(k+1) = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 17 & 6 & 11 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \otimes z(k),$$

para  $k \geq 0$ , donde  $z(k)$  es definida por

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 5 & 0 \\ 22 & 12 & -\infty & -\infty \\ 15 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 19 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \otimes z(k),$$

para  $k \geq 0$ .

Consideremos

$$z(0) = \begin{pmatrix} \min\{x_4 - 15, x_3 - 6, x_2 - 10, x_1\} \\ \min\{x_4 - 5, x_3 + 11, x_2, x_1 + 15\} \\ x_4 \\ \min\{x_4, x_3 + 26, x_2 + 15, x_1 + 30\} \end{pmatrix},$$

Consideremos por ejemplo, el estado inicial  $x(0) = (-15 \ -5 \ 0 \ 0)^T \in \mathcal{D}$ , luego  $z(0) = x(0)$  en este caso, y se obtiene la siguiente trayectoria  $x(k)$  del sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \\ 22 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 39 \\ 33 \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 \\ 51 \\ 45 \\ 56 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

para la secuencia de vectores de control

$$u(1) = Xz(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 11 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad z(1) = Yz(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
u(2) = Xz(1) &= \begin{pmatrix} 7 \\ \epsilon \\ 22 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad z(2) = Yz(1) = \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}, \\
u(3) = Xz(2) &= \begin{pmatrix} 27 \\ \epsilon \\ 33 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad z(3) = Yz(2) = \begin{pmatrix} 27 \\ 39 \\ 31 \\ 35 \end{pmatrix}, \\
u(4) = Xz(3) &= \begin{pmatrix} 39 \\ \epsilon \\ 45 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \dots,
\end{aligned}$$

Claramente, la trayectoria  $x(k)$  del sistema satisface las restricciones impuestas, cuando una ley de control dinámica es aplicada.

## 2.6. Conclusión

En este capítulo hemos presentado las nociones de invarianza introducidas por Katz en [Katz, 2007] para sistemas dinámicos lineales sobre semi-anillos. Estudiamos el problema del cálculo del máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en un semi-módulo dado. Revisamos la convergencia del algoritmo de punto fijo en un número finito de pasos para una clase importante de semi-módulos. En consecuencia, el diseño del control puede ser generado del cálculo del máximo  $(A, B)$ -invariante contenido en una especificación dada.

El concepto de semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes por retroalimentación dinámica de sistemas sobre el semi-anillo, fue presentado. Se mostró que la invarianza en lazo cerrado bajo una retroalimentación dinámica es equivalente a la invarianza controlable. Esto cierra una pregunta abierta, sobre la realización causal de una ley de control para un semi-módulo  $(A, B)$ -invariante finitamente generado sobre un semi-anillo conmutativo.

Ya que un anillo puede ser considerado como una instancia particular del concepto de semi-anillo, el resultado obtenido también generaliza los resultados que han sido descritos para sistemas sobre anillos. La existencia de una retroalimentación

dinámica tal que hace invariante un módulo  $(A, B)$ -invariante, ha sido probada en el caso de sistemas sobre un dominio de ideales principales [Conte et Perdon, 1995], y de sistemas sobre un anillo noetheriano [Ito et Inaba, 1998]. Nuestra construcción de la ley de control por retroalimentación dinámica es actualmente basada en lo sugerido en [Di Loreto et al., 2007], la cual fue propuesta para sistemas sobre un anillo conmutativo. En la presente contribución, es enfatizado la interpretación en términos de control causal de esta construcción.

En el caso de sistemas sobre un semi-anillo, la pregunta fue un punto tratado por Katz en [Katz, 2007]. Es interesante señalar que en los ejemplos de este artículo, fué considerado la retroalimentación dinámica y causal para resolver el problema de invarianza. En el ejemplo de su Sección VI, una retroalimentación dinámica es usada. En este caso, su calculo es hecho usando el teorema principal del documento, que es un método de diseño para una retroalimentación de estado estática, en el caso particular de semi-módulos con volumen finito. La retroalimentación de estado estática realmente viene de una retroalimentación dinámica, ya que la especificación de control es expresada en términos de restricciones de tiempo, que incluyen términos de retraso, esto es visto como una restricción estática en el espacio de estado extendido. En el mismo artículo, Ejemplo 4 (que es discutido en nuestra Sección 2.4) muestra un semi-módulo que es  $(A, B)$ -invariante pero no es invariante por retroalimentación dinámica. El autor sin embargo, menciona la existencia de un control constante que hace invariante al semi-módulo para el sistema controlado. Nosotros hemos mostrado que tal ley de control no es lineal, pero es causal. En este sentido, nuestros resultados generalizan estas premisas.

## Capítulo 3

# Control geométrico por retroalimentación estática de estado de sistemas max-plus lineales sujetos a restricciones temporales.

La clase de sistemas de eventos discretos que consideraremos aquí, es la clase de los sistemas max-plus lineales, que son obtenidos de la modelización de GET. Estos modelos tienen particularidades que no fueron tomadas en cuenta en el Capítulo 2. Una primera característica es que las trayectorias deben ser no decrecientes, por definición de las variables que son utilizadas. Una segunda característica es que la condición inicial no es necesariamente canónica, esta no es caracterizada sencillamente como el valor que tiene el estado  $x$  al tiempo inicial, si no en términos de un vector  $w$  que expresa la fecha de salida de las marcas iniciales. A este nivel, utilizaremos los conceptos introducidos en la Sección 1.3.5, y particularmente el concepto de condición inicial admisible, para tomar en cuenta explícitamente estas características.

Uno de los objetivos de esta tesis es resolver el problema de control para sistemas max-plus lineales, modelados por GETs y sujetos a restricciones de tiempo que deben ser respetadas. Este trabajo propone un nuevo abordaje de este problema de control dentro de la teoría del control geométrico. La solución propuesta utiliza las nociones de  $(A, B)$ -invarianza [Katz, 2007], nosotros presentamos como una contribución original, la descripción de condiciones suficientes de invarianza y de existencia de una retroalimentación estática, para obtener un sistema controlado

por esta retroalimentación estática de estado que, asegura que el sistema evoluciona sin violar el conjunto de restricciones impuestas.

Este tipo de problemas se encuentra en algunos sistemas de producción donde la duración de tareas particulares dentro de un proceso están sujetas a limitaciones de tiempo. Por ejemplo, en [Atto et al., 2011] los autores consideran una planta industrial especializada en la fabricación de tubos de caucho para la industria automotriz. Las restricciones de tiempo son impuestas en la zona de calentamiento, para evitar la pérdida de piezas. Para ello, modifican la ecuación de estados max-plus lineal del sistema en la forma de una ecuación de estados restrictiva, para obtener un supervisor que respete las restricciones. También, problemas de restricciones temporales se encuentran en la producción de obleas de silicio en la industria de semiconductores [N. Wu et al., 2008], [Kim et Lee, 2003]), y otros sistemas de producción, ver por ejemplo [Spacek et al., 1999].

En contraste al enfoque presentado en esta contribución, el cual es basado en el control geométrico, [Amari et al., 2012] proponen un enfoque algebraico para tratar la síntesis de una ley de control causal para GETs sujetos a restricciones de tiempo. La verificación de las restricciones de tiempo es formulado en términos de un problema de control, asumiendo que algunas entradas del proceso pueden ser controladas. El comportamiento de la planta es modelado por ecuaciones max-plus, y las restricciones temporales por desigualdades lineales. El autor propone un método para la síntesis de la ley de control que permite satisfacer un determinado conjunto de restricciones de tiempo. La ley de control resultante, es definida como un conjunto de ecuaciones lineales en max-plus, que implican un número finito de retrasos. Esta ley de control es causal y puede ser implementada en línea, para un conjunto conocido de estados del sistema. Tal ecuación corresponde a un sistema de retroalimentación, que es representado por un GET. La existencia y cálculo de la ley de control se muestra bajo la hipótesis de condiciones iniciales canónicas.

Apoiados en los trabajos de [Amari et al., 2012] y [Katz, 2007], presentamos una formulación alternativa de nuestro problema de control en términos de la  $(A, B)$ -invarianza e  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estados, derivadas de propiedades geométricas, y consideramos la inicialización de la ley de control. El problema de las restricciones temporales es introducido por medio de una matriz  $C$  sobre el semi-anillo max-plus. Resumimos estas restricciones en el semi-módulo definido por la imagen de la estrella de Kleene  $C^*$ . Este semi-módulo resulta ser  $(A, B)$ -invariante en si mismo, evitando así el cálculo del máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante incluido en una especificación dada. El procedimiento para este cálculo puede resultar difícil pues depende de la convergencia del algoritmo de punto fijo

extendido en el contexto max-plus, [Katz, 2007]. El diseño del control viene del estudio de una condición geométrica. La matriz de control es construida a partir del cálculo de sistemas de generadores de poliedros max-plus [Allamigeon, 2010] y [Allamigeon et al., 2012] que involucran componentes de las matrices del sistema asociadas con lugares del GET donde se han impuesto restricciones temporales.

Este capítulo es organizado como sigue. La sección 3.1, se inicia con la definición de restricciones temporales, se define el semi-módulo  $Cx(k) \leq x(k)$ , donde  $C$  es la matriz que resume las restricciones temporales, luego, en la Sección 3.2, el problema de encontrar una ley de control por retroalimentación estática de estados, que satisfaga las restricciones de tiempo impuestas al sistema es formulado y algunos resultados teóricos sobre la existencia de una matriz de control son presentados. En la Sección 3.3, son desarrollados dos ejemplos ilustrativos, y por último las conclusiones son dadas en la Sección 3.4.

### 3.1. Restricciones temporales

Las restricciones de tiempo son frecuentes en procesos industriales, debido a que en algunos sistemas de producción la duración de tareas particulares, esta sujeta a restricciones de tiempo. Por un instante, podemos considerar por ejemplo, un proceso de producción con horno para realizar tratamiento térmico. La duración de cualquier tratamiento en el horno es fijo o se define en un intervalo de tiempo, para evitar la pérdida de unidades, ver [Atto et al., 2011]. Así que necesitamos controlar el sistema para poder cumplir con estas restricciones o especificaciones.

De acuerdo con la definición de grafos de eventos temporizados, las temporizaciones asociadas a cada lugar corresponden a un tiempo mínimo de espera de las marcas en cada lugar. Sin embargo, las marcas pueden permanecer más del tiempo mínimo en el lugar. Para un lugar con restricción de tiempo, un tiempo de estadía máximo es fijado. Esta limitación de un tiempo máximo de estadía aparece como una restricción adicional que debe ser respetada. Por tanto, un intervalo de tiempo  $[\tau_z, \tau_z^{max}]$  es asociado a este lugar, donde  $\tau_z$  es el tiempo mínimo de estadía y  $\tau_z^{max}$  es el tiempo máximo, (ver Figura 3.1).

Esta restricción de tiempo es expresada por la siguiente desigualdad:

$$x_z'(k) \leq \tau_z^{max} \otimes x_z(k - m_z), \quad \forall k > m_z. \quad (3.1)$$

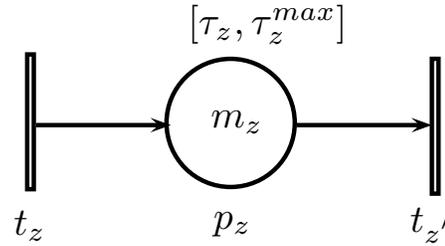


Figura 3.1: Restricción Temporal

La siguiente definición permitirá la construcción del semi-módulo que describa las restricciones impuestas a un sistema dado. Estas restricciones son usadas para definir el objetivo de control. Para ello, consideremos el sistema max-plus lineal siguiente.

$$\begin{aligned} x(k) &= A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad k \geq 2, \\ x(1) &= B \otimes u(1) \oplus w, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  es el vector de estado,  $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  es el vector de entrada de control, ambos definidos para  $k \geq 1$ , y  $w$  es un vector que depende de los tiempos de evolución de las marcas iniciales. Asumimos que las condiciones iniciales son admisibles, esto es  $w \in \mathcal{W}$ , donde  $\mathcal{W}$  es el semi-módulo definido por (1.36).

**Definición 3.1.1** Dado un GET modelado por el sistema max-plus lineal (3.2), y sujeto a un conjunto de restricciones temporales, se define la matriz  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  asociada a estas restricciones por:

$$C_{zz'} = \begin{cases} -\tau_z^{max} & \text{si hay una restricción temporal entre } t_z \text{ y } t_{z'}, \\ \epsilon & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Tomando en cuenta la Proposición 1.1.1, se cumple el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.1** El conjunto de vectores de estados que satisfacen las restricciones temporales con  $m_z = 0$ , es igual al semi-módulo definido por la imagen de la

estrella de Kleene de la matriz  $C$ ,  $\text{Im } C^*$ , cuando  $C^*$  exista. Esto es,

$$\text{Im } C^* = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid C \otimes x \leq x\}. \quad (3.4)$$

Deseamos determinar una estrategia de control  $u(k)$  para garantizar el respeto de una clase de restricciones para sistemas max-plus lineales, como veremos en la Sección 3.2. El esquema de control de interés, es un sistema de control en lazo cerrado. Además, ya que se trata con el problema de la síntesis de una ley de control, se debe garantizar que la ley de control encontrada sea realizable. Una ley de control por retroalimentación de estado es realizable si la matriz de retroalimentación de estado es causal. En este sentido, la siguiente definición es útil.

**Definición 3.1.2 (Matriz causal)** Una matriz  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  se dice ser causal si sus entradas son tales que  $M_{ij} = \epsilon$  o  $M_{ij} = e$ . Esto es  $M \in (\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\})^{q \times n}$ .

Una matriz causal corresponde a una ley que puede ser realizada causalmente.

## 3.2. Formulación del problema

En esta sección el problema de control es presentado, y condiciones suficientes para la existencia de una ley de control por retroalimentación de estado son dadas. Tomando en cuenta que los problemas de restricciones de tiempo se encuentran a menudo en procesos industriales que engloban una clase importante de sistemas que pueden ser descritos por un modelo max-plus lineal, las restricciones de tiempo son usadas para definir nuestro objetivo de control, el cual se centra en la búsqueda de una ley de control por retroalimentación de estado que asegure que el estado del sistema evoluciona sin violar un conjunto de restricciones temporales impuestas al sistema. El enfoque presentado toma en cuenta el problema de condiciones iniciales y la realización de la ley de control en el proceso de diseño. Consideremos lo siguiente.

Dado un GET modelo por el sistema max-plus lineal dado en las ecuaciones (3.2), sin circuitos sin marcas iniciales, con  $q$  transiciones fuentes, denotados  $t_i^u$ ,  $i = 1, \dots, q$ , ( $q \geq 1$ ) y con  $Z$  lugares con restricciones temporales. Estos lugares son denotados por  $p_{z_i}$ , para  $i = 1, \dots, Z$ . Para cada lugar  $p_{z_i}$ , denotemos  $m_{z_i}$ ,  $\tau_{z_i}$  y  $\tau_{z_i}^{max}$ , la marcación inicial y los retardos mínimo y máximo, respectivamente. Además  $t_{z_i}$  y  $t'_{z_i}$  denotan respectivamente la transición de entrada y la transición de salida del

lugar  $p_{z_i}$ , para  $i = 1, \dots, Z$ . Sean  $x_{z_i}$  y  $x_{z'_i}$  los tiempos de disparo correspondientes a las transiciones  $t_{z_i}$  y  $t_{z'_i}$  respectivamente, y sea  $m_{\alpha_i}$  la marcación acumulada a lo largo del camino  $\alpha_i$ , definido desde alguna transición de entrada hasta la transición  $t_{z_i}$ .

Supongamos que todos los lugares con restricciones temporales tienen marcación inicial igual a cero, esto es,  $m_{z_i} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, Z$ . Luego las restricciones temporales serán expresadas como sigue;

$$x_{z'_i}(k) \leq \tau_{z_i}^{max} \otimes x_{z_i}(k), \quad k \geq 1. \quad (3.5)$$

La hipótesis considerada acá,  $m_z = 0$ , se cumple en general para plantas de producción. Significa que en el estado inicial, no hay productos en la planta, lo cual no es restrictivo en la práctica.

El siguiente semi-módulo será crucial para establecer nuestras condiciones de suficiencia para la existencia de una ley control por retroalimentación estática para dar solución al problema de control tratado.

**Definición 3.2.1** Para el sistema (3.2) y la matriz dada por la expresión (3.3), definimos el siguiente semi-módulo

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathbb{R}_{\max}^q \mid CBv \leq Bv\}. \quad (3.6)$$

Note que el semi-módulo  $\mathcal{D}$  es no vacío, ya que contiene al menos la solución trivial.

Bajo las condiciones anteriores, nuestro problema de control se define como sigue.

**Problema:** Dado el sistema max-plus lineal (3.2), y un conjunto de restricciones temporales de la forma (3.5), buscamos una estrategia de control que asegure que el estado del sistema evoluciona satisfaciendo la condición  $C \otimes x(k) \leq x(k)$  para  $k \geq 1$ , esto equivale a mostrar que  $x(k) \in \text{Im } C^*$ ,  $k \geq 1$ , por Corolario 3.1.1.

Inspirados por el caso de sistemas sobre cuerpos, y siguiendo la literatura sobre sistemas sobre semi-anillos, el enfoque propuesto consiste en buscar una ley de control por retroalimentación de estado, definida en términos de una matriz  $F$  con la relación  $u(k) = Fx(k-1)$  para  $k \geq 2$ , y para  $k = 1$ , al contrario de sistemas sobre un cuerpo, esta relación debe ser completada para definir el valor inicial del control,  $u(1)$ , tal que garantice que  $x(k) \in \text{Im } C^*$  para  $k \geq 1$ .

Con este control, usando la ecuación (3.2), el sistema en lazo cerrado se expresa como:

$$x(k) = (A \oplus B \otimes F) \otimes x(k-1), \quad \forall k \geq 2, \quad (3.7)$$

con  $x(1) = B \otimes u(1) \oplus w$ .

Para abordar nuestro problema requerimos de los siguientes fundamentos.

**Proposición 3.2.1** Dadas dos matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ , y un semi-módulo de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , definido por la imagen de una matriz  $K$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $\text{Im } A \subset \text{Im } K \ominus \text{Im } B$ ,
- (ii) Existe  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tal que  $\text{Im } (A \oplus BF) \subset \text{Im } K$ ,
- (iii) Existe  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tal que  $M \otimes (A \oplus BF) \leq N(A \oplus BF)$ , donde  $M, N$  son matrices de dimensiones adecuadas, tales que  $\text{Im } K = \{x \mid Mx \leq Nx\}$ .

*Demostración.* Sea  $\{e^1, \dots, e^n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  y  $K \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  la matriz que define al semi-módulo  $\mathcal{K} = \text{Im } K$ . Veamos inicialmente que (i) implica (ii). Para ello, supongamos que  $\text{Im } A \subset \text{Im } K \ominus \text{Im } B$ , luego  $Ae^i \in \text{Im } K \ominus \text{Im } B$ , por lo que existe  $b \in \text{Im } B$  tal que  $Ae^i \oplus b \in \text{Im } K$ , lo que significa que para  $i = 1, \dots, n$ , existen vectores  $u^i \in \mathbb{R}_{\max}^q$  tal que  $Ae^i \oplus Bu^i \in \text{Im } K$ . Luego definiendo una retroalimentación de estado  $F$  por  $F \otimes e^i = u^i$ , se tiene  $Ae^i \oplus BF e^i \in \text{Im } K$ , y por tanto  $\text{Im } (A \oplus BF) \subset \text{Im } K$ . Claramente (ii) implica (iii) por Proposición 1.1.1. Finalmente si existe  $F$  tal que  $C \otimes (A \oplus BF)e^i \leq (A \oplus BF)e^i$ , se sigue que existe  $b = BF e^i$  tal que  $Ae^i \oplus b \in \text{Im } K$ , y en consecuencia  $Ae^i \in \text{Im } K \ominus \text{Im } B$ , con lo cual se concluye la prueba. ■

La Proposición 3.2.1 permite, para los semi-módulos definidos por la imagen de la estrella de Kleene de una matriz  $C$ , estudiar propiedades geométricas que implican las propiedades de  $(A, B)$ -invarianza y  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación de estado. Esta clase particular de semi-módulos, aparece como la especificación dada para el espacio de estado de un sistema de la forma (3.2), y si estos semi-módulos satisfacen las propiedades equivalentes de la Proposición 3.2.1, entonces, desde el punto de vista dinámico se tiene que a partir de cualquier estado del sistema, es posible encontrar una ley de control por retroalimentación estática de estado que garantice que la trayectoria en lazo cerrado del sistema se mantenga incluida en el semi-módulo, lo cual resulta útil en muchos problemas prácticos.

Entonces una solución a nuestro problema de control existe si y sólo si la desigualdad:

$$C(A \oplus BF)x(k) \leq (A \oplus BF)x(k), \quad (3.8)$$

se satisface para  $k \geq 1$ , esto es  $Cx(k+1) \leq x(k+1)$ ; y además la condición inicial  $x(1)$  esta en  $\text{Im } C^*$ . Por tanto, podemos obtener condiciones que aseguren la existencia y el cálculo de una solución si la desigualdad  $C \otimes (A \oplus BF) \leq A \oplus BF$  se cumple y la condición inicial satisface:  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . Para tratar este problema es conveniente hacer la siguiente definición.

**Definición 3.2.2** Diremos que las restricciones temporales son admisibles al control si toda fila nula de la matriz  $B$ , implica que la fila correspondiente de la matriz  $C$  es nula.

Esta definición equivale a decir que para cada restricción temporal  $i = 1, \dots, Z$ , existe un  $l_i \in \bar{q}$  tal que  $B_{z_i l_i} \neq \epsilon$ .

El lema siguiente nos permitirá demostrar nuestro resultado principal.

**Lema 3.2.1** Si las restricciones temporales son admisibles al control, siempre es posible encontrar una matriz  $F$  tal que se cumpla  $CA \leq BF$ .

*Demostración.* Esta propiedad se debe al hecho de que si las restricciones temporales son admisibles al control, existe para cada  $i = 1, \dots, Z$ , un  $l_i \in \bar{q}$  tal que  $B_{z_i l_i} \neq \epsilon$ , y por tanto se puede escoger  $F_{l_i r} \geq A_{z_i' r} - \tau_{z_i}^{max} - B_{z_i l_i}$  tal que  $(CA)_{z_i r} \leq (BF)_{z_i r}$ . En efecto:

$$\begin{aligned} (BF)_{z_i r} &\geq \bigoplus_{k=1}^q B_{z_i k} F_{kr} \geq B_{z_i l_i} F_{l_i r}, \\ &\geq B_{z_i l_i} + A_{z_i' r} - \tau_{z_i}^{max} - B_{z_i l_i} = A_{z_i' r} - \tau_{z_i}^{max}, \\ &= (CA)_{z_i r}. \end{aligned}$$

■

En el siguiente teorema damos condiciones para la existencia de una ley de control por retroalimentación de estado que asegura la satisfacción de las restricciones temporales definidas por (3.5).

**Teorema 3.2.1** Dado el semi-módulo  $\mathcal{D}$  definido por (3.6). Si las restricciones temporales son admisibles al control y existe  $v \in \mathcal{D}$  tal que  $\sup(v) = \bar{q}$ , entonces, existe una matriz  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tal que  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset \text{Im} C^*$ .

*Demostración.* Para probar el teorema, debido a la Proposición 3.2.1, es suficiente mostrar que existe una matriz  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tal que las siguientes desigualdades se cumplen,

$$CA \leq BF \quad \text{y} \quad CBF \leq BF. \quad (3.9)$$

En efecto, note en primer lugar que si existe  $v$  en  $\mathcal{D}$ , se sigue que la desigualdad  $CBv \leq Bv$  se satisface.

Por otro lado, debido al Lema 3.2.1, es posible encontrar una matriz  $F$  tal que  $CA \leq BF$ , con  $F_{l_i r} \geq A_{z'_i r} - \tau_{z_i}^{\max} - B_{z_i l_i}$ . Además, como todos los elementos del vector solución  $v$  son no nulos, en particular  $v_{l_i}$  es no nulo, tenemos que existe  $\alpha$  tal que  $\alpha + v_{l_i} \geq A_{z'_i r} - \tau_{z_i}^{\max} - B_{z_i l_i}$ . Luego, podemos escoger  $F_{kr} = \alpha_r + v_k$  con  $\alpha_{l_i} \geq A_{z'_i r} - \tau_{z_i}^{\max} - B_{z_i l_i} - v_{l_i}$ , tal que las desigualdades expresadas en (3.9) se cumplan, con lo cual concluye la prueba. ■

**Observación 3.2.1** Note que la prueba que precede es usada para construir una matriz de control  $F$  no nula tal que sus vectores columnas verifiquen:

$$\begin{pmatrix} B_{z'_1} \\ \vdots \\ B_{z'_Z} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} F_{1r} \\ \vdots \\ F_{qr} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A_{z'_1 r} \\ \vdots \\ A_{z'_Z r} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tau_{z_1}^{\max} \otimes B_{z_1} \\ \vdots \\ \tau_{z_Z}^{\max} \otimes B_{z_Z} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} F_{1r} \\ \vdots \\ F_{qr} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

La matriz  $F$  puede contener algunas columnas nulas, ya que el vector nulo, también satisface (3.10). Este hecho se puede presentar por ejemplo, cuando  $A_{z'_i r} = \epsilon$ , para toda  $i = 1, \dots, Z$ , luego  $F_r = \epsilon$ .

La condición  $C(A \oplus BF) \leq A \oplus BF$  permite constatar que una retroalimentación estática de estado adecuado para que  $x(k)$  se mantenga en  $\text{Im} C^*$ , para  $k \geq 2$  puede ser tal que satisfaga (3.10), evidentemente la solución  $F$  no es necesariamente única, debido a que (3.10) define un poliedro max-plus. Un sistema de generadores para este conjunto solución, puede ser explícitamente calculado usando el procedimiento descrito en la Sección 1.2, debido a [Allamigeon, 2010], y en consecuencia siempre es posible conocer todas las leyes de control que pueden ser aplicadas para satisfacer las restricciones temporales para  $k \geq 2$ .

Además, si bien es cierto que la solución particular  $F$  encontrada en el Teorema 3.2.1, no es óptima desde el punto de vista práctico, puesto que la matriz  $F$  posee columnas con todas las entradas no nulas, es posible a partir de un sistema generador de (3.10), construir otras soluciones más sencillas que permitan sintetizar la ley de control considerando criterios adicionales. Una solución posiblemente más sencilla a realizar es tal que cada columna  $F_r$  tenga a lo más una entrada no nula, este hecho es posible, si para los  $i$  tales que  $A_{z_i r} \neq \epsilon$ , las filas de la matriz  $B$  asociadas a las transiciones de entrada de las restricciones  $i$ , satisfacen que la componente  $B_{z_i l}$  es no nula, luego se tendría que  $F_{lr} \neq \epsilon$  y  $F_{kr} = \epsilon$  en cualquier otro caso. Una propiedad muy importante en aplicaciones es la causalidad de la ley de control, que permite su implementación en línea.

**Corolario 3.2.1** Bajo las condiciones del Teorema 3.2.1, se puede escoger la matriz  $F$  en el conjunto de matrices causales tal que  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset \text{Im } C^*$  se cumpla.

Por otro lado, se puede ver que las condiciones del Teorema 3.2.1, son suficientes para la existencia de un control que garantice la satisfacción de las restricciones expresadas en (3.5), para  $k \geq 2$ . Para el disparo inicial,  $k = 1$ , se debe completar la ley de control de tal que la condición inicial  $x(1)$  este en  $\text{Im } C^*$ , considerando un vector  $u(1)$  que satisfaga (3.11)-(3.12), esto es;

$$\bigoplus_{k=1}^q B_{z_i k} u_k(1) \leq \bigoplus_{k=1}^q \tau_{z_i}^{max} \otimes B_{z_i k} u_k(1), \quad (3.11)$$

$$w_{z_i} \leq \bigoplus_{k=1}^q \tau_{z_i}^{max} \otimes B_{z_i k} u_k(1). \quad (3.12)$$

La existencia de esta ley de control viene en parte de las hipótesis del Teorema 3.2.1 como veremos en la siguiente proposición, y además se muestra que la condición inicial  $x(1)$  esta en el cono max-plus  $\text{Im } C^*$ , independientemente del vector  $w$  tomado en el conjunto de condiciones iniciales admisibles definido en (1.36).

**Proposición 3.2.2** Si las hipótesis del Teorema 3.2.1 son satisfechas y además las condiciones iniciales son admisibles, entonces  $x(1) \in \text{Im } C^*$ .

*Demostración.* En efecto, supongamos que las hipótesis del Teorema 3.2.1 se cumplen, luego existe una matriz  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  tal que (3.9) se satisface, así para cualquier vector  $w$  se cumple desde (3.9) que  $CAw \leq BFw$  y  $CBFw \leq BFw$ , tomando  $u(1) = Fw$  tenemos  $CAw \leq Bu(1)$  y  $CBu(1) \leq Bu(1)$ . Además, considerando que las condiciones iniciales son admisibles, esto es  $Aw \geq w$ , se tiene que

$Cw \leq CAw \leq Bu(1)$ . Así se concluye que  $Cx(1) = C(Bu(1) \oplus w) = Cw \oplus CBu(1) \leq Bu(1) \leq Bu(1) \oplus w = x(1)$ , y por tanto  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . ■

**Observación 3.2.2** Note que la existencia de una ley de control de la forma  $u(k) = Fx(k-1)$  para  $k \geq 2$  y  $u(1) = Fw$ , define un control de manera causal y admisible en el sentido que el control correspondiente es no decreciente, esto es,  $u(k) \leq u(k+1)$  para  $k \geq 1$ . Puesto que si  $k = 1$ ,  $u(1) = Fw \leq Fw \oplus FBu(1) = Fx(1) = u(2)$ , y esto implica que  $x(1) = Bu(1) \oplus w \leq Bu(2) \oplus Aw \leq x(2)$ , donde  $w \in \mathcal{W}$ , y luego  $u(2) = Fx(1) \leq Fx(2) = u(3)$ . Por tanto, iterando esta relación, se puede concluir que  $x(k)$  y  $u(k)$  son no decrecientes.

En conclusión, la Proposición 3.2.2 complementa el Teorema 3.2.1, y hemos llegado a una solución completa del problema de invarianza que procede de las restricciones temporales impuestas a un sistema dinámico max-plus lineal.

**Corolario 3.2.2** Si las hipótesis del Teorema 3.2.1 son satisfechas y además las condiciones iniciales son admisibles, entonces existe una retroalimentación de estado definida por  $u(k) = Fx(k-1)$ ,  $k \geq 2$ , y  $u(1) = Fw$ , tal que el estado del sistema en lazo cerrado satisface las restricciones,  $x(k) \in \text{Im } C^*$ , para  $k \geq 1$ .

### 3.3. Aplicación a casos de estudio

Para ilustrar una aplicación del enfoque propuesto en este capítulo, presentamos dos casos de estudio. El primer caso de corte académico para describir el método y un segundo donde el método propuesto es aplicado a un proceso de la industria de semiconductores.

#### 3.3.1. Primer caso

Consideremos el GET de la Figura 3.2, tomado de [Amari et al., 2012]. Este grafo contiene dos transiciones fuentes modelando los controles  $u_1(k)$  y  $u_2(k)$  respectivamente. Dos restricciones temporales adicionales son asignadas a los lugares  $p_1$  y  $p_2$  de este grafo, y son expresadas respectivamente por las desigualdades  $x_2(k) \leq 1 \otimes x_1(k)$  y  $x_3(k) \leq 1 \otimes x_2(k)$ . Estamos interesados en calcular una matriz de control  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 5}$  tal que garantice que los estados del sistema en lazo cerrado

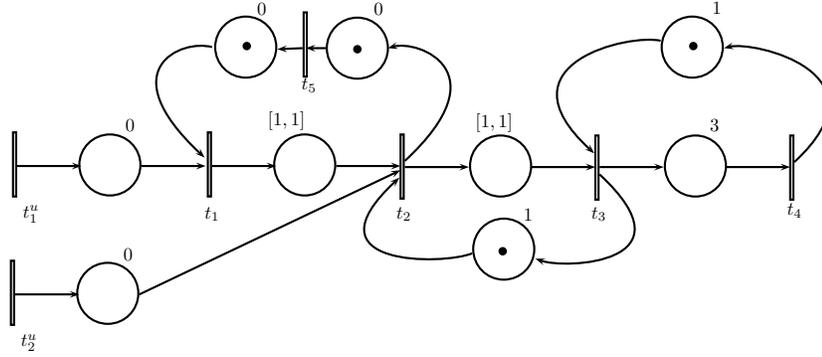


Figura 3.2: GET con dos restricciones temporales en  $p_1$  y  $p_2$ .

evolucionan satisfaciendo el conjunto de restricciones temporales resumidas en el semi-módulo  $\text{Im } C^*$ , esto es  $x(k) \in \text{Im } C^*$ , para  $k \geq 2$ , y además, describir el conjunto de condiciones iniciales admisibles tal que  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . La matriz  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{5 \times 5}$  es la matriz asociada a las restricciones temporales satisfaciendo que  $C_{12} = C_{23} = -1$  y  $C_{ji} = \epsilon$  en cualquier otro caso, y la ecuación de estado asociada con este GET es:

$$x(k) = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & e \\ \epsilon & \epsilon & 1 & \epsilon & 1 \\ \epsilon & \epsilon & 2 & 1 & 2 \\ \epsilon & \epsilon & 5 & 4 & 5 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \otimes x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ 1 & e \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \otimes u(k). \quad (3.13)$$

Note que las restricciones temporales son admisibles al control, ya que existen  $B_{1r} \neq \epsilon$  y  $B_{2r} \neq \epsilon$ , ver Definición 3.2.2, luego debido al Teorema 3.2.1, la existencia de una matriz  $F$  tal que la propiedad deseada  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset \text{Im } C^*$  se satisfaga, si además, el semi-módulo  $\mathcal{D}$ , definido a continuación posee una solución  $u$  tal que  $\text{sup}(u) = \bar{2}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes v \leq \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes v. \quad (3.14)$$

En efecto, aplicando el Método de doble descripción tropical [Allamigeon, 2010], obtenemos para el semi-módulo  $\mathcal{D}$  el sistema generador  $G = \{e^1, (e \ 1)^T\}$ , así todo

elemento de  $\mathcal{D}$  es generado por los elementos de  $G$  y por tanto existe por lo menos  $u = (e \ 1)^T$  en  $\mathcal{D}$  tal que  $\sup(u) = \bar{2}$ . Por tanto, existe  $F$  tal que la propiedad deseada se cumple, y cada columna de la matriz  $F$  satisface:

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1r} \\ F_{2r} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A_{2r} \\ A_{3r} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1r} \\ F_{2r} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Para calcular  $F$ , primero para cada  $r$ , construimos el semi-módulo  $\mathcal{P}_r$  definido como el conjunto solución de (3.15), luego, podemos representar  $\mathcal{P}_r$  como proyecciones de semi-módulos de  $\mathbb{R}_{\max}^{2+1}$ , debido a la Proposición 1.2.4. El cono homogenizado asociado a  $\mathcal{P}_r$ , es denotado por  $\widehat{\mathcal{P}}_r$  y definido como el conjunto solución de:

$$\begin{pmatrix} 1 & e & A_{2r} \\ 2 & 1 & A_{3r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon \\ 2 & 1 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Para construir la matriz  $F$  si bien es cierto que basta con conocer por lo menos un elemento de cada  $\mathcal{P}_r$ , nosotros seremos algo más generales, y para ello buscaremos un sistema de generadores del cono poliédrico max-plus  $\widehat{\mathcal{P}}_r$ , ya que a partir de este sistema podemos encontrar un sistema de generadores del poliedro max-plus  $\mathcal{P}_r$ , y en consecuencia podemos conocer todas las posibles leyes de control que pueden ser aplicadas para satisfacer las restricciones temporales.

Note que las componentes  $A_{i1}$  y  $A_{i2}$  son todas nulas para  $i = 2, 3$ , luego basta tomar las columnas  $F_1 = F_2 = \epsilon$ , ver Observación 3.2.1. Para  $r = 3$ , (ver Ejemplo 1.2.1), tenemos:

$$\mathcal{P}_3 = co\left(\left\{\begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}\right\}\right) \oplus cone\left(\left\{\begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

luego podemos tomar  $F_3 = (e \ \epsilon)^T$ .

Para  $r = 4$ , consideremos el sistema (3.15) y el sistema homogéneo asociado, donde  $A_{24} = \epsilon$  y  $A_{34} = 1$ . Resolviendo la primera desigualdad del sistema homogéneo, un sistema de generadores para este es  $G = \{(e \ \epsilon \ \epsilon)^T, (\epsilon \ \epsilon \ e)^T, (e \ 1 \ \epsilon)^T\}$ . Multiplicando a la derecha y a la izquierda la segunda desigualdad por la matriz  $G$  ( $G$  es la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema  $G$ ), obtenemos la desigualdad  $(2 \ 1 \ 2)y \leq (2 \ \epsilon \ 2)y$ , la cual tiene como un sistema de generadores a  $H = \{e^1, e^3, (1 \ 2 \ \epsilon)^T, (\epsilon \ 2 \ 1)^T\}$ . Los vectores  $Gh^1$ ,  $Gh^2$  y  $Gh^3$  forman un sistema de generadores del conjunto solución del sistema homogéneo,  $\{e^1, (e \ 1 \ \epsilon)^T, (1 \ \epsilon \ 2)^T, (1 \ 2 \ 2)^T\}$ .

Por tanto,

$$\mathcal{P}_4 = \text{co}\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ e \end{pmatrix}\right\}\right) \oplus \text{cone}\left(\left\{\begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Un criterio que se puede tomar en cuenta para la elección de un elemento de  $\mathcal{P}_4$ , es que la matriz  $F$  sea causal, ver Corolario 3.2.1.

Así que tomaremos  $F_4 = (e \ \epsilon)^T \oplus (-1 \ \epsilon)^T = (e \ \epsilon)^T$ . (Otras opciones simples pueden ser  $F_4 = (e \ \epsilon)^T \oplus (-1 \ e)^T = (e \ e)^T$  o  $F_4 = (e \ 1)^T \oplus (-1 \ \epsilon)^T = (e \ 1)^T$ ), la elección dependerá de los criterios adicionales considerados para sintetizar la ley de control.

Para  $r = 5$ , se procede como antes y se tiene que:

$$\mathcal{P}_5 = \text{co}\left(\left\{\begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}\right\}\right) \oplus \text{cone}\left(\left\{\begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

luego podemos tomar  $F_5 = (e \ \epsilon)^T$ .

Por tanto, una matriz de control  $F$  que satisfaga que la trayectoria del sistema en lazo cerrado se mantenga en  $\text{Im } C^*$  para  $k \geq 2$  es dada por:

$$F = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & e & e & e \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Falta ahora encontrar una ley de control  $u(1)$  tal que  $x(1) \in \text{Im } C^*$ , para ello debido al Proposición 3.2.2, es necesario que  $x(1) = Bu(1) \oplus w$  satisfaga la condición  $w \leq Aw$ . Aplicando nuevamente el Método de doble descripción tropical al sistema  $\mathbb{I}w \leq Aw$ , encontramos que un sistema generador para este, es  $G = \{e^3, e^4, (\epsilon 1 e \epsilon \epsilon)^T\}$ . Luego,

$$\mathcal{W} = \{w \mid w \leq Aw\} = \text{cone}(G) \cap \mathbb{R}_{\max}^{+5}.$$

Note que  $e^4 \notin \text{Im } C^*$ .

Para que la condición inicial  $x(1)$  este en  $\text{Im } C^*$ , basta tomar  $u(1) = Fw$ , con  $w \in \mathcal{W}$ , ver demostración de Proposición 3.2.2, luego el control obtenido usando  $w = e^4$  es  $u(1) = e^1$ , y en este caso la condición inicial es  $x(1) = (e \ 1 \ 2 \ 5 \ \epsilon)^T$ , y por tanto  $x(1) \in \text{Im } C^*$ .

Por un instante, consideremos la evolución del sistema cuando la condición inicial  $x(1) \in \text{Im } C^*$  con  $u(1) = e^1$ , es dada por  $(e \ 1 \ 2 \ 5 \ \epsilon)^T$ , y el control  $F$  es aplicado. La

trayectoria  $x(k)$  del sistema obtenida en este caso es:

$$\begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 15 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 20 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \dots$$

la cual, claramente satisface las restricciones impuestas al sistema, para la secuencia de control siguiente:

$$e^1, \begin{pmatrix} 5 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ 10 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ 15 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \dots$$

Si un control no es aplicado, tenemos la siguiente trayectoria del sistema comenzando en el mismo estado inicial:  $(e \ 1 \ 2 \ 5 \ \epsilon)^T$ ,

$$\begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon \\ 6 \\ 10 \\ 13 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \dots$$

la cual no satisface las restricciones impuestas al sistema, por ejemplo la restricción 2 jamás puede ser satisfecha.

La retroalimentación encontrada puede ser interpretada por 3 lugares de control conectados al GET para garantizar el respeto de las restricciones temporales. El grafo controlado es dado en la Figura 3.3.

**Observación 3.3.1** La retroalimentación de estado obtenida bajo este enfoque difiere de la matriz de control encontrada en [Amari et al., 2012] para este mismo ejemplo, la cual es:

$$F = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & e & e & e \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & e & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Desde el punto de vista práctico podría resultar más sencillo implementar el control obtenido en nuestros resultados, ya que tiene menos elementos no nulos.

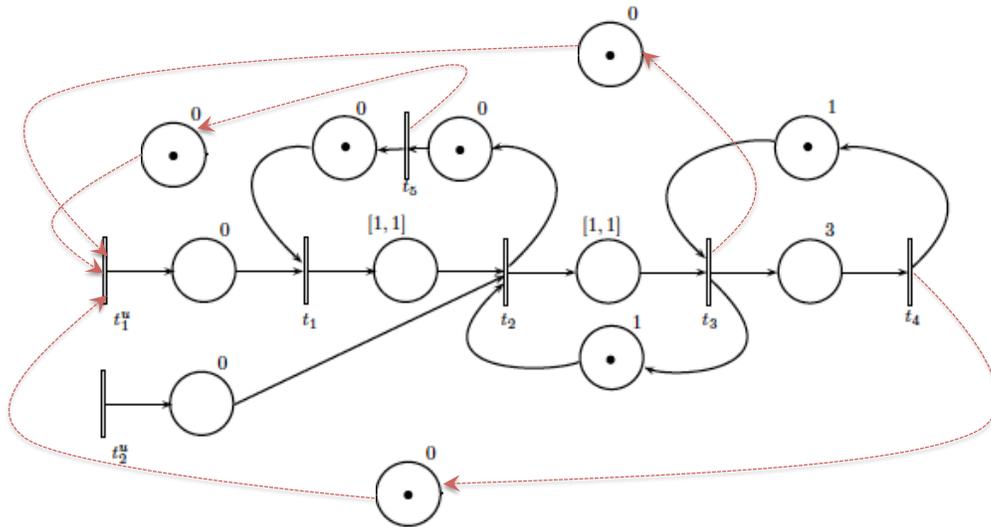


Figura 3.3: GET controlado resultante: las restricciones temporales en  $p_1$  y  $p_2$  son satisfechas por los lugares agregados entre las transiciones  $t_3$  y  $t_1^u$ ,  $t_4$  y  $t_1^u$  y las transiciones  $t_5$  y  $t_1^u$ .

### 3.3.2. Control de robots en cluster-tools

Consideremos el GET de la Figura 3.4, el cual es una variación del ejemplo tratado en [Atto et al., 2011]. Este GET representa el comportamiento de un cluster tool equipado con un brazo único, herramienta de uso frecuente en la industria de semiconductores. El cluster tool es un dispositivo integrado de procesamiento de obleas de silicio, que consiste de varios módulos de procesamiento, un robot de manipulación, y un almacén para la carga y descarga de obleas de silicio. En este ejemplo, las obleas de silicio son procesadas en dos etapas, el cluster tool tiene tres módulos de producción (PMs), dos son dedicados a la primera etapa y el tercero a la segunda etapa, ver [N. Wu et al., 2008]. El cluster tool tiene restricciones estrictas sobre el tiempo de residencia que una oblea de silicio puede permanecer en una PM. Después que una oblea de silicio es procesada, esta debería ser descargada con un tiempo limitado. De lo contrario, su superficie sufre severos problemas de calidad.

El comportamiento dinámico del GET es dado por la ecuación de estados (3.2), donde  $x(k) = (x_1(k), \dots, x_{12}(k))^T$  es el vector de estado,  $u(k) = (u_1(k), \dots, u_4(k))^T$

es el vector de control, las matrices  $A$  y  $B$  son como sigue,

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & 28 & \epsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & 28 & \cdot & \cdot & \epsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 228 & \cdot & \cdot & 254 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 250 & \cdot & \cdot & 276 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \epsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 79 & \cdot & \cdot & \epsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 153 & \cdot & \cdot & 179 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 103 & \cdot & \cdot & 129 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 125 & \cdot & \cdot & 151 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 125 & \cdot & \cdot & 151 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 204 & \epsilon & \epsilon & 230 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ e & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 129 & 228 & 254 & 103 \\ 151 & 250 & 276 & 125 \\ \epsilon & e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 79 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 153 & 179 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & 103 & 129 & \epsilon \\ \epsilon & 125 & 151 & \epsilon \\ \epsilon & 125 & 151 & e \\ \epsilon & 204 & 230 & 79 \end{pmatrix}.$$

Cuatro restricciones temporales adicionales son asignadas a los lugares  $p_2$ ,  $p_5$ ,  $p_8$  y  $p_{11}$  de este grafo. En el lugar  $p_i$  con  $i = 2, 8$ , una oblea de silicio comienza a ser procesada (etapa 1) y espera. El tiempo de permanencia en la PM no puede superar  $\tau_1^{max}$ . En el lugar  $p_i$  con  $i = 5, 11$ , se lleva a cabo la etapa 2, la cual no puede superar el tiempo  $\tau_2^{max}$ . Estas restricciones son expresadas respectivamente por la siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} i = 1: \text{ es asociada a la restricción } x_3(k) \leq \tau_1^{max} \otimes x_2(k), \\ i = 2: \text{ es asociada a la restricción } x_6(k) \leq \tau_2^{max} \otimes x_5(k), \\ i = 3: \text{ es asociada a la restricción } x_9(k) \leq \tau_3^{max} \otimes x_8(k), \\ i = 4: \text{ es asociada a la restricción } x_{12}(k) \leq \tau_4^{max} \otimes x_{11}(k), \end{cases} \quad (3.18)$$

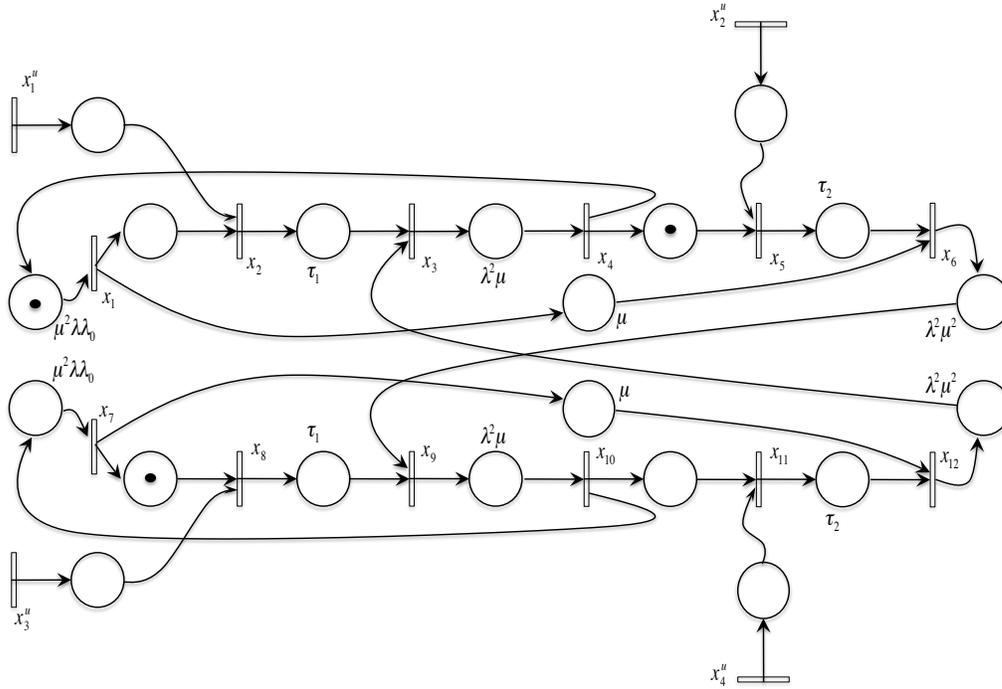


Figura 3.4: GET con 4 restricciones temporales en  $p_2$ ,  $p_5$ ,  $p_8$  y  $p_{11}$ .

donde  $\tau_1^{max} = \tau_3^{max} = 149$  y  $\tau_2^{max} = \tau_4^{max} = 94$ .

Note que las restricciones temporales son admisibles al control, ver Definición 3.2.2. Así como en el caso anterior, nuestro interés es calcular una matriz de control  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{4 \times 12}$  tal que garantice que los estados del sistema en lazo cerrado evolucionen satisfaciendo las restricciones (3.18), resumidas en el semi-módulo  $\text{Im } C^*$ , esto es  $x(k) \in \text{Im } C^*$ , para  $k \geq 2$ , y además, describir el conjunto de condiciones iniciales admisibles tal que satisfagan que  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . La matriz  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{12 \times 12}$  es la matriz asociada a las restricciones temporales satisfaciendo que  $C_{23} = C_{89} = -149$ ,  $C_{56} = C_{11,12} = -94$  y  $C_{ji} = \epsilon$  en cualquier otro caso.

La existencia de una matriz  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{4 \times 12}$  tal que la propiedad deseada  $\text{Im}(A \oplus BF) \subset$

Im  $C^*$  se verifique, se debe, a que además el semi-módulo  $\mathcal{D}$ , definido por:

$$\begin{pmatrix} 129 & 228 & 254 & 103 \\ \epsilon & 79 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 103 & 129 & \epsilon \\ \epsilon & 204 & 230 & 79 \end{pmatrix} \otimes v \leq \begin{pmatrix} 149 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 94 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 149 & \epsilon \\ \epsilon & 219 & 245 & 94 \end{pmatrix} \otimes v,$$

posee una solución  $v$  tal que  $\sup(v) = \bar{4}$ . En efecto, aplicando el Método de doble descripción tropical [Allamigeon, 2010], un sistema generador para el conjunto solución  $\mathcal{D}$  es:

$$\{e^1, (254 \ \epsilon \ 149; \ \epsilon)^T, (103 \ \epsilon \ \epsilon \ 149)^T, (506 \ 298 \ 401 \ \epsilon)^T\},$$

luego, existe por ejemplo  $v = (506 \ 298 \ 401 \ 149)^T$  en  $\mathcal{D}$  tal que  $\sup(v) = \bar{4}$ .

Así, existe  $F$  tal que la propiedad deseada se cumple y cada columna de  $F$  satisface lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 129 & 228 & 254 & 103 \\ \epsilon & 79 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 103 & 129 & \epsilon \\ \epsilon & 204 & 230 & 79 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1r} \\ F_{2r} \\ F_{3r} \\ F_{4r} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A_{3r} \\ A_{6r} \\ A_{9r} \\ A_{12,r} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 149 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 94 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 149 & \epsilon \\ \epsilon & 219 & 245 & 94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1r} \\ F_{2r} \\ F_{3r} \\ F_{4r} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Para calcular  $F$ , primero para cada  $r$ , consideraremos el poliedro max-plus  $\mathcal{P}_r$  definido como el conjunto solución de (3.19), luego, podemos representar  $\mathcal{P}_r$  como proyecciones de semi-módulos de  $\mathbb{R}_{\max}^{4+1}$ , debido a la Proposición 1.2.4. Luego, el cono homogenizado asociado a  $\mathcal{P}_r$ , es denotado por  $\widehat{\mathcal{P}}_r$  y definido como el conjunto solución de (3.20).

Como vimos antes, si encontramos un sistema de generadores del semi-módulo  $\widehat{\mathcal{P}}_r$ , podemos encontrar un sistema de generadores del poliedro max-plus  $\mathcal{P}_r$ , y en consecuencia podemos conocer todas las posibles leyes de control que pueden ser

aplicadas para satisfacer que la condición  $x(k) \in \text{Im } C^*$ , para  $k \geq 2$ .

$$\begin{pmatrix} 129 & 228 & 254 & 103 & A_{3r} \\ \epsilon & 79 & \epsilon & \epsilon & A_{6r} \\ \epsilon & 103 & 129 & \epsilon & A_{9r} \\ \epsilon & 204 & 230 & 79 & A_{12,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 149 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 94 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 149 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 219 & 245 & 94 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Note que en la columna  $r$ ,  $r = 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12$ , las componentes  $A_{ir}$  son nulas para  $i = 1, \dots, 4$ , así que basta tomar  $F_r = \epsilon$  es estos casos, ver Observación 3.2.1.

Para  $r = 4$ , consideremos el sistema de desigualdades (3.20) y el sistema homogéneo asociado, donde  $A_{34} = 228$ ,  $A_{64} = 79$ ,  $A_{94} = 103$  y  $A_{12,4} = 204$ . Un sistema de generadores del conjunto solución del sistema homogéneo es:

$$\left\{ e^1, \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ -105 \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -46 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -79 \\ -125 \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -94 \\ -125 \\ \epsilon \\ -79 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{P}_4 = co \left( \left\{ \begin{pmatrix} 79 \\ -15 \\ -46 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus cone \left( \left\{ e^1, \begin{pmatrix} -46 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ -105 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -79 \\ -125 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Considerando como criterio adicional que la matriz  $F$  sea causal, podemos tomar  $F_4 = (79 \ -15 \ -46 \ \epsilon)^T \oplus 125 \otimes (e \ -79 \ -125 \ \epsilon)^T = (125 \ 46 \ e \ \epsilon)^T$ .

Para  $r = 7$ , se procede como antes y se tiene que

$$\mathcal{P}_7 = co \left( \left\{ \begin{pmatrix} 105 \\ \epsilon \\ -15 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 105 \\ \epsilon \\ -20 \\ 136 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 105 \\ 11 \\ -15 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus cone \left( \left\{ e^1, \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ -105 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -46 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -79 \\ -125 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Luego, podemos tomar  $F_7 = (105 \ \epsilon \ e \ \epsilon)^T$ .

Por tanto, una matriz de control  $F$  que satisfaga las restricciones temporales para  $k \geq 2$  es dada por:

$$F = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & 125 & \epsilon & \epsilon & 105 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & 46 & \cdot & \cdot & \epsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

La retroalimentación encontrada puede ser interpretada por 6 lugares de control conectados al GET para garantizar el respeto de las restricciones temporales. El grafo controlado es dado en la Figura 3.5.

Ahora encontremos el conjunto de condiciones iniciales admisibles tal que  $x(1) \in \text{Im } C^*$ . Como la condición inicial  $x(1)$  está en  $\text{Im } C^*$  independientemente del  $w$  elegido, siempre que  $w$  satisfaga:  $w \leq Aw$  y  $w \in \mathbb{R}_{\max}^{+12}$ , tomaremos  $w$  con todas sus entradas iguales a  $e$ . (Aplicando nuevamente el Método de doble descripción tropical, podemos encontrar un conjunto generador para el sistema  $\mathbb{I} w \leq Aw$ ). Luego, una ley de control  $u(1) \in \mathbb{R}_{\max}^4$  tal que la condición inicial este en  $\text{Im } C^*$  es  $u(1) = Fw = (125 \ 46 \ e \ \epsilon)^T$ , en este caso  $x(1) = (e \ 125 \ 274 \ 296 \ 46 \ 125 \ 199 \ e \ 149 \ 171 \ 171 \ 250)^T$ , la cual satisface las restricciones temporales, y por tanto esta en  $\text{Im } C^*$ .

Por un instante, consideremos la evolución del sistema cuando la condición inicial  $x(1) = Bu(1) \oplus w \in \text{Im } C^*$  tomando el control inicial  $u(1) = (125 \ 46 \ e \ e)^T$ , la cual es  $x(1) = (e \ 125 \ 274 \ 296 \ 46 \ 125 \ 199 \ e \ 149 \ 171 \ 171 \ 250)^T$ .

Luego, si el control  $F$  definido por (3.21) es aplicado. La trayectoria  $x(k)$  del sistema asociada a esta condición inicial y a la secuencia de controles no decreciente:

$$\begin{pmatrix} 125 \\ 46 \\ e \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 421 \\ 342 \\ 396 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 717 \\ 638 \\ 592 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1013 \\ 934 \\ 888 \\ \epsilon \end{pmatrix}, \dots,$$

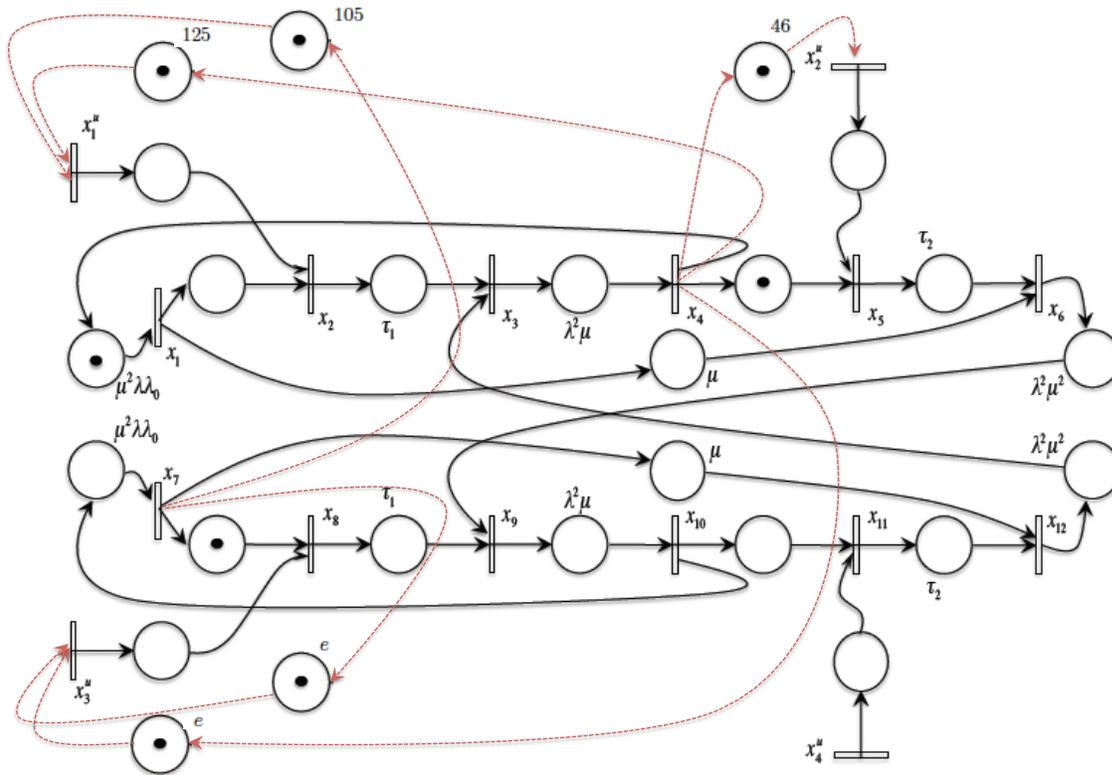


Figura 3.5: GET controlado resultante: las restricciones temporales en  $p_2$ ,  $p_5$ ,  $p_8$  y  $p_{11}$  son satisfechas por los lugares agregados entre las transiciones  $x_4$  y  $x_1^u$ ,  $x_4$  y  $x_2^u$ ,  $x_4$  y  $x_3^u$ ,  $x_7$  y  $x_1^u$ , y  $x_7$  y  $x_3^u$ .

obtenida en este caso es:

$$\begin{pmatrix} e \\ 125 \\ 274 \\ 296 \\ 46 \\ 125 \\ 199 \\ e \\ 149 \\ 171 \\ 171 \\ 250 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 324 \\ 421 \\ 570 \\ 592 \\ 342 \\ 421 \\ 495 \\ 296 \\ 445 \\ 467 \\ 467 \\ 546 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 620 \\ 717 \\ 866 \\ 888 \\ 638 \\ 717 \\ 791 \\ 592 \\ 741 \\ 763 \\ 763 \\ 842 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 916 \\ 1013 \\ 1162 \\ 1184 \\ 934 \\ 1013 \\ 1087 \\ 888 \\ 1037 \\ 1059 \\ 1059 \\ 1138 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1212 \\ 1309 \\ 1458 \\ 1480 \\ 1230 \\ 1309 \\ 1383 \\ 1184 \\ 1333 \\ 1355 \\ 1355 \\ 1434 \end{pmatrix}, \dots$$

la cual claramente satisface las restricciones (3.18) impuestas al sistema, para la secuencia de control no decreciente.

Si un control no es aplicado, comenzando en el mismo estado inicial, tenemos la siguiente trayectoria:

$$\begin{pmatrix} e \\ 125 \\ 274 \\ 296 \\ 46 \\ 125 \\ 199 \\ e \\ 149 \\ 171 \\ 171 \\ 250 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 324 \\ 324 \\ 524 \\ 546 \\ 296 \\ 375 \\ 449 \\ 219 \\ 399 \\ 421 \\ 421 \\ 500 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 574 \\ 574 \\ 754 \\ 796 \\ 546 \\ 625 \\ 699 \\ 449 \\ 649 \\ 671 \\ 671 \\ 750 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 824 \\ 824 \\ 1024 \\ 1046 \\ 796 \\ 875 \\ 949 \\ 699 \\ 899 \\ 921 \\ 921 \\ 1000 \end{pmatrix}, \dots$$

Note que a partir de la misma condición inicial tomada en el cono max-plus  $\text{Im } C^*$ , se tiene que al evolucionar el sistema sin un control, la trayectoria del mismo, no se mantiene dentro del cono max-plus que resume las restricciones temporales dados por (3.18), por ejemplo la restricción 1 no se satisface.

### 3.4. Conclusiones

El problema de control de grafos de eventos temporizados sujeto a restricciones temporales, fue tratado usando un enfoque geométrico. Las restricciones temporales impuestas al espacio de estado del sistema, se describieron en el semi-módulo definido por la imagen de la estrella de Kleene de la matriz asociada a estas restricciones. En consecuencia, el problema de determinar un control que fuerza la satisfacción de las restricciones temporales, se formula en términos de la invarianza de este semi-módulo. Establecimos condiciones suficientes para la existencia de una solución a este problema. Nuestra propuesta permite el diseño de un control satisfactorio, de la forma de una retroalimentación estática de estado. Estas condiciones pueden ser interpretadas en términos de la identificación de una familia de semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes, que evitan el problema del cálculo del máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en una especificación dada. Esto resulta

---

de gran interés, ya que las condiciones reportadas en la literatura para caracterizar semi-módulos  $(A, B)$ -invariantes se limita a la familia de semi-módulos con volumen finito presentados por Katz en [Katz, 2007]. Podemos subrayar que nuestra solución toma en cuenta dos aspectos que son la inicialización de la ley de control, y su causalidad, importantes para su implementación. Para ilustrar la aplicación de este enfoque, dos problemas de control fueron presentados.

## Capítulo 4

# Conclusiones y Perspectivas

Este manuscrito trata sobre el control geométrico de los sistemas max-plus lineales.

La originalidad de nuestra primera contribución radica en el establecimiento de una nueva noción de invarianza tal como lo es la invarianza por retroalimentación dinámica, la cual permite mostrar que la  $(A, B)$ -invarianza por retroalimentación dinámica es equivalente a la  $(A, B)$ -invarianza. Mostramos que en el caso de semi-módulos finitamente generados, una ley de control que fuerce las trayectorias de un sistema max-plus lineal a permanecer en un semi-módulo dado, puede ser realizada usando una retroalimentación dinámica; tal ley de control es causal, lo cual permite su implementación en línea. El resultado obtenido podría resolver algunos problemas básicos que han sido encontrados en el estudio de varios problemas de control para sistemas sobre semi-anillos. Más aún, como un anillo puede ser visto como un caso particular del concepto de semi-anillo, el resultado también generaliza los resultados que ha sido descritos para sistemas sobre anillos. La existencia de una retroalimentación dinámica que hace invariante a un módulo  $(A, B)$ -invariante ha sido probada en el caso de sistemas sobre un dominio de ideales principales [Conte et Perdon, 1995], y para sistemas sobre un anillo Noetheriano [Ito et Inaba, 1998]. Nuestra contribución de una ley de control por retroalimentación dinámica es actualmente basada en lo sugerido en [Di Loreto et al., 2007], que era para sistemas sobre un anillo conmutativo.

Nuestra segunda contribución original es la descripción de condiciones suficientes de invarianza y de existencia de una retroalimentación de estado estática, para el caso de sistemas max-plus lineales modelados por grafos de eventos temporizados sujeto a restricciones temporales. Las restricciones temporales impuestas al espacio

de estado del sistema, se describieron en el semi-módulo definido por la imagen de la estrella de Kleene de la matriz asociada a estas restricciones. El problema de determinar un control que fuerza la satisfacción de las restricciones temporales, se formula en términos de la invarianza de este semi-módulo. En consecuencia, estas condiciones pueden ser interpretadas en términos de la identificación de una familia de semi-modulos  $(A, B)$ -invariantes, que evitan el problema del cálculo del máximo semi-módulo  $(A, B)$ -invariante contenido en una especificación dada. Nuestra propuesta permite el diseño de leyes de control estáticas que resultan fáciles de implementar. Además, la solución presentada toma en cuenta dos aspectos originales como son la inicialización de la ley de control, y su causalidad, importantes para su implementación.

Las perspectivas de este trabajos son las siguientes.

Una primera dirección consiste en usar los resultados sobre retroalimentación dinámica para resolver problemas de control, por ejemplo el problema de las restricciones de tiempo para sistemas max-plus lineales, el cual fue tratado en el Capítulo 3, y en casos particulares en [Katz, 2007], [Maia et al., 2011] y [Amari et al., 2012]. Esto resulta útil en gestión de producción. Para implementar la ley de control propuesta es requerido el conocimiento del vector de estado  $x(k)$ , incluyendo su valor inicial  $x(0)$ . Si el estado no es directamente medido, su reconstrucción puede ser necesitada.

Una segunda dirección dentro del enfoque geométrico, para dar continuidad lógica al Capítulo 2, es el análisis de la noción de invarianza condicional, la cual es útil para propósitos de observación para reconstruir el estado en línea, una primera discusión sobre anillos es dada en [Di Loreto et al., 2007], y para semi-anillos en [Di Loreto et al., 2010].

## Bibliografía

- [Allamigeon, 2010] X. Allamigeon, S. Gaubert, and É. Goubault. “*The tropical double description method*”, in Proc. Symp. Theor. Aspects Comp. Sci., Nancy, 2010. France, pp. 47-58.
- [Allamigeon et al., 2012] X. Allamigeon, S. Gaubert, and É. Goubault. *Computing the vertices of tropical polyhedra using directed hypergraphs*. Discrete Comput. Geom. 2012
- [Amari et al., 2012] S. Amari, I. Demongodin, J. J. Loiseau, and C. Martinez, *Max-plus control design for temporal constraints meeting in timed event graphs*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 57, 2012, pp. 462-467.
- [Assan, 1999] J. Assan. *Analyse et synthese de l’approche géométrique pour les systèmes linéaires sur un anneau*, These de Doctorat, Université de Nantes, Nantes, Oct. 1999.
- [Assan et al., 1999] J. Assan, J. F. Lafay, and A. M. Perdon. *On feedback invariance properties for systems over a principal ideal domain*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 44, no. 8, pp. 1624-1628, Aug. 1999.
- [Atto et al., 2011] A. Atto, C. Martinez, and S. Amari. *Control of discrete event systems with respect to strict duration: supervision of an industrial manufacturing plant*. Comput Inf Syst 61(4):1149-1159. 2011.
- [Baccelli et al., 1992] F. Baccelli, G. Cohen, G.-J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. John Wiley & Sons, New York. 1992.
- [Basile et Marro, 1969] G. Basile and G. Marro, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, No. 5, pp. 306-315, 1969.

- [Basile et Marro, 1992] G. Basile, and G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariant in Linear System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.
- [Baynat, 2000] B. Baynat. *Théorie des files d'attentes : des chaines de Markov aux réseaux a forme produit*. Ed Hermès. 2000.
- [Boudec et Thiran., 2001] J. Y. Le Boudec, and P. Thiran. *Network Calculus*. Springer Verlag LNCS 2050. pages 33. 2001.
- [Braker, 1993)] H. Braker. *Algorithms and applications in timed discrete event systems*. PhD thesis, Delft University of Technology. pages 33, 98, 101, 102, 103. 1993.
- [Braker et Olsder, 1993] J. Braker, and G. Olsder. *The power algorithm in max algebra*, Linear Algebra and its Applications, vol. 182, pp. 67-89. 1993.
- [Butkovic et Hegedus, 1984] P. Butkovic and G. Hegedus, *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekonomicko-Matematicky Obzor, vol. 20, no. 2, pp. 203-215, 1984.
- [Butkovic et al., 2007] P. Butkovic, H. Schneider, and Sergeev, S. *Generators, extremals and bases of max cones*. Linear Algebra Appl. 421(2-3), 394-406, 2007.
- [Cárdenas et al., 2015] C. Cárdenas, and JJ. Loiseau, and C. Martinez. *Controlled Invariance and Dynamic Feedback for Systems over Semirings*. SIAM conference on control and its applications, Jul 2015, Paris, France. 2015, SIAM Conference on Control and its Applications, Maison de la Mutualité Paris, France, CT 205. <<http://www.siam.org/meetings/ct15/>>. <10.1137/1.9781611974072.1>. <hal-01363544 >.
- [Cárdenas et al., 2016] C. Cárdenas, J Cardillo, J.J. Loiseau, C Martinez. *Control de Modelos Max Plus Lineales con Restricciones Temporales*. Article accepté pour une publication dans Revista Iberoamericana de Automática e Informática Ind.. 2016. <hal-01364596>.
- [Cochet et al., 1998] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, and S. Gaubert, M. McGettrick, and J. Quadrat. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in Proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control (SSC 98), Nantes, France, Jul. 1998, pp. 699-706.

- [Cohen et al., 1983] G. Cohen, D. Dubois, J.-P. Quadrat, and M. Viot. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des diodes*. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France. pages 17, 33. 1983.
- [Cochet et al., 1999] J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, and J. Gunawardena, *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, Dyna. Stab. Syst., vol. 14, no. 4, pp. 407-433, 1999.
- [Cohen et al., 1985b] France. 1985b.
- [Cohen et al., 1989b] G. Cohe, P. Moller, J. Quadrat, and M. Viot. *Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems*. IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems, 77(1):39-58, 1989b.
- [Cohen et al., 1999] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. "Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now," *Annu. Rev. Control*, vol. 23, pp. 207-219. 1999.
- [Cohen et al., 2004] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. *Duality and separation theorem in idempotent semimodules*. *Linear Algebra and Appl.* 379, 395-422, 2004.
- [Cohen, 2001] G. Cohen. *Análisis y Control de sistemas de eventos discretos: De redes de Petri temporizadas al álgebra*. Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi. 2001.
- [Conte et Perdon, 1982] G. Conte and A. M. Perdon. *Systems over a principal ideal domain: a polynomial model approach*, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 20:112-124, 1982.
- [Conte et Perdon, 1994] G. Conte and A. M. Perdon. *Problems and results in a geometric approach to the theory of systems over rings*, in *Linear Algebra for Control Theory*, IMA Vol. Math. Appl. 62, Springer, New York, 1994, pp. 61-74.
- [Conte et Perdon, 1995] G. Conte, and A. M. Perdon, *The disturbance decoupling problem for systems over ring*, *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 33, 1995, pp. 750-764.
- [Conte et Perdon, 2000] G. Conte and A. M. Perdon. *Systems over ring geometric theory and applications*, *Ann. Rev. in Contr.*, 24:113-124, 2000.

- 
- [De Schutter, 1996] B. De Schutter. *Max-algebraic system theory for discrete event systems*, Ph.D. dissertation, Faculty of Applied Sciences, K.U.Leuven, Leuven, Belgium, Feb. 1996.
- [De Schutter et T. Van , 2008] B. De Schutter, and T. van den Boom. *Max-plus algebra and max-plus linear discrete event systems: An introduction*, Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES 08), Goteborg, Sweden, pp. 36-42, May 2008.
- [Di Loreto et al., 2007] M. Di Loreto, J.-F. Lafay, and J. J. Loiseau. *Some Remarks on Duality over a Commutative Ring*, Math. and Computers in Simulation, Vol. 76, 2007, pp. 375-387.
- [Di Loreto et al., 2010] M. Di Loreto, S. Gaubert, R. D. Katz, and J. J. Loiseau. *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, SIAM J. Control Optim., Vol. 48, 2010, pp. 5606-5628.
- [Gaubert, 1998] S. Gaubert. *Exotic semirings: Examples and general results*, in support de cours de la 26ième École de Printemps d'Informatique Théorique, Noirmoutier, 1998.
- [Gaubert et Gunawardena , 1998] S. Gaubert and J. Gunawardena, *The duality theorem for min-max functions*, C.R. Acad. Sci., vol. 326, no. 1, pp. 43-48, 1998.
- [Gaubert, 1992] S. Gaubert. *Théorie des Systèmes lineaires dans les Dioides*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 1992.
- [Gaubert, 1999] S. Gaubert. *Introduction aux Systèmes Dynamiques à Événements Discrets*. INRIA Rocquencourt. Francia, 1999.
- [Gaubert et Katz, 2007] S. Gaubert, and R. Katz. *Rational semimódules over the max-plus semiring and geometric approach to discrete event systems*. Kybernetika, Vol. 40, No. 2, [153]-180. 2004.
- [Gaubert et Katz, 2007] S. Gaubert, and R. Katz. *The Minkowski theorem for max-plus convex sets*. Linear Algebra and Appl., 421:356-369. 2007.
- [Gaubert et Katz, 2009] S. Gaubert, and R. Katz. *The tropical analogue of polar cones*. Linear Algebra and Appl., 431:608-625. 2009.

- [Gaubert et Katz, 2011] S. Gaubert, and R. Katz. *Minimal half-spaces and external representation of tropical polyhedra*, Journal of Algebraic Combinatorics 33, no. 3, 325348. 2011.
- [Hardouin et al., 2011] L. Hardouin, M. Lhommeau, and Y. Shang. *Towards Geometric Control of Max-Plus Linear Systems with Applications to Manufacturing Systems*. In IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 1149-1154. Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.
- [Hautus, 1982] M. L. J. Hautus. *Controlled invariance in systems over ring*, in: D. Hinrichsen, and A. Isidori (Eds.), *Proceeding of the Joint Workshop on Feedback and Synthesis of Linear and Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Control and information Sci., vol 39, Springer, New York, 1982, pp. 107-122.
- [Heidergott et al., 2006] B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. Van der Woude. *Max Plus at Work*. Princeton University Press. 2006.
- [Ito et Inaba, 1998] N. Ito, and H. Inaba. *Dynamic feedback (A,B)-invariance of submodules for linear systems over commutative Noetherian domains*, Lin. Algebra Appl. 282, 1998, pp. 123-129.
- [Katz, 2003] R. Katz. *Problemas de Alcanzabilidad e Invariancia en el Algebra Max-plus*. PhD thesis, National University of Rosario, 2003.
- [Katz, 2007] R. Katz. *Max-plus (A,B)-invariant spaces and control of timed discrete-event systems*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 52, No. 2, pp. 229-241, 2007.
- [Kim et Lee, 2003]] J. H. Kim, and T.E. Lee. *Schedule stabilization and robust timing control for time-constrained cluster tools*. In IEEE international conference on robotics and automation, pp. 1039-1044. Taipei, Taiwan. 2003.
- [Lhommeau, 2003 ]] M. Lhommeau. *Étude de systemes a événements discrets dans l'algebre (max,+)*, Ph.D. thesis, ISTIA, Université d'Angers, Angers, France, 2003.
- [Lhommeau et al., 2003 ]] M. Lhommeau, L. Hardouin, and B. Cottenceau. *Optimal control for (max,+)-linear systems in the presence of disturbances*, in Proceedings of POSTA'03, L. Benvenuti, A. De Santis, and L. Farina, eds., Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 294, Springer, Berlin, 2003, pp. 47-54.

- 
- [Litvinov y Sergeev, 2014] G. L. Litvinov, and S. N. Sergeev (Eds), *Tropical and idempotent mathematics and applications*, Series Contemporary Mathematics, Vol. 616, AMS, 2014.
- [Litvinov et al., 2001] G. Litvinov, V. Maslov, and G. Shpiz. *Idempotent functional analysis: an algebraical approach*. Math. Notes 69(5), 696-729, 2001.
- [Libeaut et Loiseau, 1995] L. Libeaut, and J.J. Loiseau. *Admissible initial conditions and control of timed event graphs*, 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, Louisiana. 1995.
- [Lotito et al., 2005] P. Lotito, E. Mancinelli, and J.-P. Quadrat. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*. IEEE Trans. on Automatic Control, 50(5):699-705. pages 33. 2005.
- [Maia et al., 2011] C. Maia, C. Andrade, and L. Hardouin. *On the control of max plus linear system subject to state restriction*. Automatica 47(5): 988-992. 2011.
- [Murata, 1989] T. Murata. *Petri nets: Properties, analysis and applications*. IEEE, Proc 77(4), 541-580. 1989.
- [Petri, 1962] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. Thèse, Institut Fur Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany, 1962.
- [Sontag, 1976] E. D. Sontag. *Linear systems over commutative rings: A survey*. Recherche di Automatica, 7(1):1 34,1976.
- [Wonham, 1985)] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag. 1985.
- [Wu et al., 2008] N. Wu, C. Chu, F. Chu, and M. Zhou. *A Petri net method for schedulability and scheduling problems in single-arm cluster tools with wafer residency time constraints*, IEEE Trans. Semiconduct. Manuf., vol. 21, pp. 224-237. 2008.
- [Spacek et al., 1999] P. Spacek, M.A. Manier, and A.E. Moudni. *Control of an electroplating line in the max and min algebras*. International Journal of Systems Science, 30(7), 759-778. 1999.
- [Wonham, 1985] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag. 1995.

- [Wonham et Morse, 1970] W. M. Wonham, and A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach*, SIAM J. Control , Vol. 8, 1970, pp. 1-18.
- [N. Wu et al., 2008] N. Wu, C. Chu, F. Chu, and M. Zhou. *A Petri net method for schedulability and scheduling problems in single-arm cluster tools with wafer residency time constraints*, IEEE Trans. Semiconduct. Manuf., vol. 21, pp. 224-237. 2008
- [K. Zimmermann, 1977] K. Zimmermann. A general separation theorem in extremal algebras. *Ekonomicko-matematicky Obzor*, 13(2):179-201, 1977.