THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université Sorbonne Paris Cité
Préparée à l'Université Paris Diderot
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche

Comptage des systèmes locaux ℓ-adiques sur une courbe

Hongjie Yu

Thèse de doctorat de mathématiques
Dirigée par **Pierre-Henri Chaudouard**

Présentée et soutenue publiquement à Paris le 10 juillet 2018 devant le jury composé de :

M^{me} **Anne-Marie Aubert**, Directrice de Recherche, CNRS, Présidente
M. **Philip Boalch**, Directeur de Recherche, CNRS, Examinateur
M. **Pierre-Henri Chaudouard** , Professeur, Université Paris-Diderot, Directeur
M. **Gaëtan Chenevier**, Directeur de Recherche, CNRS, Examinateur
M. **Bertrand Lemaire**, Chargé de Recherche, CNRS, Rapporteur
M. **Emmanuel Letellier**, Professeur, Université Paris-Diderot, Examinateur

Rapporteur non présent à la soutenance :

M. **Wee Teck Gan** Professeur Distingué Université nationale de Singapour

Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche. UMR 7586
UP7D - Campus des Grands Moulins
Bâtiment Sophie Germain
Boite Courrier 7012
75 205 Paris cedex 13

Université Paris-Diderot
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre
Bâtiment Sophie Germain
Case courrier 7012
8 place Aurélie Nemours
75 205 PARIS Cedex 13

Résumé

Soit X_1 une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^n$ éléments où p est un nombre premier. Soit X le changement de base de X_1 à une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Nous donnons une formule pour le nombre des systèmes locaux ℓ-adiques ($\ell \neq p$) irréductibles de rang donné sur X fixé par l'endomorphisme de Frobenius. Nous montrons que ce nombre est semblable à une formule de point fixe de Lefschetz pour une variété sur $\mathbb{F}_q$, ce qui généralise un résultat de Drinfeld en rang 2 et prouve une conjecture de Deligne. Pour ce faire, nous passerons du côté automorphe, utiliserons la formule des traces d'Arthur non-invariante, et relierons le nombre cherché avec le nombre $\mathbb{F}_q$-points de l'espace des modules des fibrés de Higgs stables.

Mots-Clefs : systèmes locaux ℓ-adiques, représentations automorphes cuspidales, formule des traces d'Arthur-Selberg, fibrés de Higgs stables.

Abstract

Let X_1 be a projective, smooth and geometrically connected curve over $\mathbb{F}_q$ with $q = p^n$ elements where p is a prime number, and let X be its base change to an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$. We give a formula for the number of irreducible ℓ-adic local systems ($\ell \neq p$) with a fixed rank over X fixed by the Frobenius endomorphism. We prove that this number behaves like a Lefschetz fixed point formula for a variety over $\mathbb{F}_q$, which generalises a result of Drinfeld in rank 2 and proves a conjecture of Deligne. To do this, we pass to the automorphic side by Langlands correspondence, then use Arthur's non-invariant trace formula and link this number to the number of $\mathbb{F}_q$-points of the moduli space of stable Higgs bundles.

Key words : ℓ-adic local systems, cuspidal automorphic representations, Arthur-Selberg trace formula, stable Higgs bundles.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, Pierre-Henri Chaudouard. Tout au long de ce travail, il a su m'apporter un soutien constant. Il m'a proposé le sujet de cette thèse qui m'ouvre la porte d'un domaine mathématique très riche et bel. Pendant la thèse, il écoutait mon progrès régulièrement et répondait mes questions sans délai ; il même m'a aidé à résoudre des questions quand j'étais bloqué ; il m'a aussi aidé à corriger très soigneusement beaucoup de coquilles, imprécisions et des erreurs de ce manuscrit... Sans sa gentillesse et responsabilité, je n'aurais jamais eu ma vie comme un doctorant aussi bien passée. Pour tout cela, je le remercie très sincèrement.

Je suis très honoré que Professeurs Wee Teck Gan et Bertrand Lemaire aient accepté de rapporter ce manuscrit. Je remercie chaleureusement Wee Teck Gan pour sa liste des corrections qui me permet d'améliorer le manuscrit. Je remercie également Bertrand Lemaire de venir faire partie du jury.

Par la même occasion je souhaite remercier chaleureusement Professeurs Anne-Marie Aubert, Philip Boalch, Gaëtan Chennevier et Emmanuel Letellier pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Un merci spécial est à Anne-Marie Aubert, pour avoir accepté de me fournir des références et m'avoir invité à ses expositions de peinture, et à Emmanuel Letellier pour les discussions et le groupe de travail qu'il a organisé.

Pendant la préparation de cette thèse, il y ait toujours soit un article, soit un livre qui m'aidait beaucoup. Je voudrais remercier les mathématiciens qui les ont écrits, notamment James Arthur, Günter Harder, Gérard Laumon, Freydoon Shahidi et tous les auteurs de "Corvallis 1979 proceedings".

Je voudrais remercier Professeurs Wen-Wei Li, Olivier Schiffmann et Wei Zhang pour m'avoir exprimé leur intérêt pour mon travail.

Je voudrais remercier Professeurs Antoine Chambert-Loir, Laurent Clozel et Guy Henniart pour leur cours à Orsay. Durant la préparation de cette thèse, j'ai bénéficié toujours de leur cours.

Je voudrais aussi remercier à la fondation Hadamard, pour m'avoir offert la chance de faire mes études en France, et l'IMJ-PRG, surtout l'équipe formes automorphes pour m'avoir offert l'environment de travail aussi libre et agréable.

Je n'oublie pas de remercier mes professeurs en licence : Qibin Fan, pour m'avoir donné beaucoup d'aide après j'ai changé la spécialité passant de l'informatique à mathématiques, Alano Aconna et Quanhua Xu, pour m'avoir encouragé à poursuivre mes études en France, et surtout Gengsheng Wang, ses encouragements sont précieux pour moi et m'ont donné la confiance.

Je remercie vivement à Yongqi Liang, pour m'avoir donné beaucoup d'aide pour mes études et ma vie en France.

Je remercie mes camarades dans mon bureau : Pierre-Marie Boulvard, Macarena Flores, Jorge Gaona, Seledad Lopez et Juan Pablo Vigneaux. C'est très agréable de partager le bureau avec eux. J'ai eu de nombreuses discussions agréables et fructueuses avec Jiaming Chen, Huajie Li, Zhenkun Li, Jie Lin, Zicheng Qian, Daxin Xu et Cong Xue. Je les remercie pour le temps inoubliable que nous avons passé ensemble. Je tiens également à remercier mes amis avec qui j'ai partagé bons moments : Xiaohua Ai, Yang Cao, Kai Jiang, Shizhang Li, Chunhui Liu, Linyuan Liu, Shinan Liu, Long Mai, Yi Pan, Jinbo Ren, Anna Szumowicz, Hua Wang, Zhengfang Wang, Xiaozong Wang et Lizao Ye. Je remercie aussi à tous mes camarades à Paris, notamment Matthieu Ballandras, Reda Chaneb, Jesua Chavez, Wille Liu, Arnaud Mayeux, Yu Min, Cheng Shu et Justin Trias.

Ma reconnaissance toute particulière s'adresse à ma mère, mon père et mon frère, pour leur soutien constant. Enfin, merci à Peiyi, pour avoir partagé les joies et peines, mathématiques et la vie.

HONGJIE YU

Table des matières

Chapitre I

Introduction in english (introduction en anglais)

I.1 Main results

Let Σ be a compact Riemann surface of genus g with fundamental group $\pi_1(\Sigma, x)$ where $x \in \Sigma$. Let $\mathbf{M}_B(\Sigma, n)$ be the GL_n character variety of the fundamental group of Σ. It is the categorical quotient $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma, x), GL_n(\mathbb{C}))//GL_n(\mathbb{C})$ whose existence is guaranteed by geometric invariant theory. The stable points of $\mathbf{M}_B(\Sigma, n)$ forms an open sub-variety which is smooth of dimension $2n^2(g-1)+2$, denoted by U_n. It turns out that U_n can be constructed as a variety over $\mathbb{Z}$. For any finite fields $\mathbb{F}_q$, the set $U_n(\mathbb{F}_q)$ parametrizes absolutely irreducible local systems in $\mathbb{F}_q$ vector spaces of dimension n, here absolutely irreducible means that tensor product with an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$ is irreducible. The variety U_n depends only on the topology of Σ, and by non-abelian Hodge theory, it is diffeomorphic to the moduli space of degree 0 and rank n stable Higgs bundles.

Now we fix a finite field $\mathbb{F}_q$ of characteristic p. We fix an algebraic closure $\mathbb{F}$ of $\mathbb{F}_q$. Let X_1 be a projective, smooth and geometrically connected curve of genus $g \geqslant 2$ over $\mathbb{F}_q$. Let $X = X_1 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ be the base change of X_1 to $\mathbb{F}$. Suppose $\overline{x}$ is a geometric point of X. The étale fundamental group $\pi_1(X, \overline{x})$ is a profinite topological group whose maximal prime-to-p quotient depends only on the genus g. However, $\pi_1(X, \overline{x})$ depends on the curve itself. Let ℓ be a prime number different from p and $E_n^{(\ell)}$ be the set of isomorphism classes of irreducible $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-local systems over X of rank n. The set $E_n^{(\ell)}$ corresponds to irreducible continuous ℓ-adic representations of $\pi_1(X, \overline{x})$ of rank n. Recall that a q-Weil number α of weight $i \in \mathbb{N}$ is an algebraic integer such that for any embedding $\varsigma : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$, the absolute value $|\varsigma(\alpha)|$ is equal to $q^{\frac{i}{2}}$. Drinfeld has found an interesting result : The Frobenius endomorphism Frob_X induces a permutation of $E_2^{(\ell)}$ by pullback, if we note the fixed points by k-iterated Frobenius endomorphism as $(E_2^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}$ then there is a finite number of q-Weil numbers α_i and integers m_i such that

$$|(E_2^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}| = q^{(4g-3)k} + \sum_i m_i \alpha_i^k \quad \forall k \geqslant 1$$

which looks like the number of points of a variety over $\mathbb{F}_q$. Moreover, by Langlands correspondence, we already know that the number $|(E_2^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}|$ should be independent of $\ell \neq p$, but this doesn't help to understand the formula of Drinfeld.

Our results give a faithful generalization of those of Drinfeld. Suppose that $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g_X}$ are q Weil numbers of the curve X_1, i.e. the eigenvalues of Frob_X acting on $H^1(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. By Poincaré duality, we can index these numbers so that $\sigma_i\sigma_{i+g_X} = q$ for all $g_X \geqslant i \geqslant 1$.

Théorème I.1.1. *1. For any $g \geqslant 2$ and $n \geqslant 1$, there is a Laurent polynomial $P_{g,n}(q, z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{Z}[q, z_1^{\pm 1}, \dots, z_g^{\pm 1}]$ (necessarily unique) which depends only on g and n and which is symmetric in z_i pour $1 \leqslant i \leqslant g$ and invariant by substitution $z_i \mapsto qz_i^{-1}$ such that for any $k \geqslant 1$, any prime power q, every projective, smooth and geometrically connected curve X_1 defined over $\mathbb{F}_q$ of genus $g_X \geqslant 2$, any prime number $\ell \nmid q$*

$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}| = P_{g_X,n}(q^k, \sigma_1^k, \dots, \sigma_{g_X}^k).$$

Moreover, for every monomial $q^m z_1^{n_1} \cdots z_g^{n_g}$ appearing in $P_{g,n}$, we have

$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{n_i, 0\} \geqslant 0.$$

The term with dominant weight in $P_{g,n}$ is $q^{(g-1)n^2+1}$. It means that if we set $\deg q = 2$ and $\deg z_i = 1$, then $\deg P_{g,n} = 2((g-1)n^2 + 1)$ and $\deg(P_{g,n} - q^{(g-1)n^2+1}) < 2((g-1)n^2 + 1)$.

2. There exist a finite number of Weil numbers α_i and integers m_i such that

$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}| = |\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|(\sum_i m_i\alpha_i^k), \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

In particular, for all $k \geqslant 1$, $|(E_n^{(\ell)})^{\mathrm{Frob}_X^{*k}}|$ is divisible by $|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|$. Moreover, we have

$$\sum_i m_i = \sum_{l|n} \mu(l)\mu(n/l) l^{2g_X-3},$$

where $\mu(\cdot)$ is the Möbius function.

This theorem responds positively the conjecture 2.15 of [De15], and the conjecture 6.3 of *loc. cit.* in everywhere unramified case. As for the conjecture 6.7 of *loc. cit.*, we mention that when $n = 2$, Deligne has verified his conjecture using Drinfeld's results during his course at l'IHES in 2013 (cf. [De13]). In fact, Deligne has shown that there is a finite number of integers m_i ($i \geqslant 0$) such that

$$|U_2(\mathbb{F}_{q^k})| = (q^k - 1)\sum_{i \geqslant 0} m_i q^{ik} \quad \forall k \geqslant 1$$

With explicit calculations, he showed that $\sum_{i\geqslant 0} m_i = -(2^{2g-3} + 1)$. However, it is desirable to generalize this result to higher rank to completely solve the conjecture 6.7 of *loc. cit.*.

Let $X_k = X_1 \otimes \mathbb{F}_{q^k}$. Let's call an irreducible cuspidal automorphic representation of $GL_n(\mathbb{A})$ absolutely cuspidal if it remains cuspidal under base change, in the sense of functoriality of Langlands, to all $F \otimes \mathbb{F}_{q^d}$ $(d \geqslant 1)$. We write $C_m(X_k)$ for the number of irreducible absolutely cuspidal automorphic representations of $GL(m)$ which are everywhere unramified over the function field of X_k, we define a formal series :

$$\mathrm{aut}_{X_1}(z) = \exp(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} \frac{mC_m(X_k)}{k} z^{mk})$$

We use $\mathrm{aut}_{X_1}(z)^s$ $(s \in \mathbb{C})$ for $\exp(s \sum_{m \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} \frac{mC_m(X_k)}{k} z^{mk})$ and aut_{X_l} for the expression replacing X_k by X_{kl} in the above formula. Moreover for $v \geqslant 1$, and a formal power series $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, we denote the coefficient of z^v in $f(z)$ by $[z^v]f(z)$. Let $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$ be the coarse moduli space of stable Higgs bundles of rank n and of degree e over X_1 (cf. paragraph IV.3.2) which is a smooth, quasi-projective variety over $\mathbb{F}_q$ of dimension $2(g_X - 1)n^2 + 2$. We have the following formula between the numbers $C_m(X_k)$ and the number of $\mathbb{F}_q$-points of $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$.

Théorème I.1.2. *For $(e, n) = 1$, and $g \geqslant 2$ the following identity holds*

$$q^{-1-(g-1)n^2} |\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| = \sum_{l|n} \frac{\mu(l)}{n(2g-2)} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{\sum_j a_j} \prod_{j \geqslant 1} [z^{a_j}] aut_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g-2)S_i(\lambda)}{l}} \tag{I.1}$$

where the sum $\lambda \vdash n$ takes over all partitions $(1^{a_1}, \ldots, j^{a_j}, \ldots)$ of n, and $S_i(\lambda) := \sum_j a_j \min\{i, j\}$.

This formula is obtained by equating both side of trace formula. Thanks to the work of Schiffmann [Sc16] and Mellit [Me17], we have a closed formula for $|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$. So inductively, we can determine a closed formula for $P_{g,n}$. Besides being a generalisation of Drinfeld's result, we see that the geometry behind this phenomena is probably related to the moduli space of stable Higgs bundles. While for the moment, we don't have any theory of "non-abelian Hodge correspondence" for ℓ-adic local systems.

In addition to the principal theorems above, we also give a new proof in the appendix of the following result concerning a conjecture about Higgs moduli spaces. The interesting part of this proof is that it uses only the trace formula.

We call a vector bundle $\mathcal{E}$ isocline, if for any decomposition $\mathcal{E} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, we have $\frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rg}(\mathcal{F})} = \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rg}(\mathcal{E})}$. We call a vector bundle geometrically indecomposable, if its restriction to X is indecomposable. Let $\mathcal{P}^e_n(X_1)$ (resp. $A_{n,e}(X_1)$) be the number of isomorphism classes of isocline (resp. geometrically indecomposable) vector bundles of degree e and rank n over X_1. Remark that when $(n, e) = 1$ we have $\mathcal{P}^e_n(X_1) = A_{n,e}(X_1)$ (cf. the proof of corollary IV.4.2.4).

Théorème I.1.3. *The number $\mathcal{P}^e_n(X_1)$ depends only on the order of e in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. If $(e, n) = 1$, then the number of $\mathbb{F}_q$-points $|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(\mathbb{F}_q)|$ satisfies*

$$A_{n,e}(X_1) = q^{-n^2(g-1)-1} |\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$$

and does not depend on degree e.

The proof is in the appendices A and B, the interest in this new proof is that it relies on a new application of the trace formula. Our proof of independence of degrees relies on the informations of L-functions (functional equations and the knowledge on their poles) and some purely combinatorial theorems.

I.2 A brief presentation on the proofs

I.2.1 Reduction of the problem. Our strategy is the same as that of Drinfeld. Using the Langlands correspondence proved by L. Lafforgue, we firstly reduce the problem from geometry to a question in automorphic forms.

Choosing a geometric point $\overline{\eta}$ lying over the generic point of the curve X_1 gives a separable closure $\overline{F}$ of the function field of the curve X_1. The étale fundamental group $\pi_1(X_1, \overline{\eta})$ is then a quotient of the absolute Galois group $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$. We may then use Langlands correspondence to translate the problem. Langlands correspondence tells us that we have an uniquely determined (once an isomorphism between $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ and $\mathbb{C}$ is fixed) bijection between the set of isomorphism classes of ℓ-adic irreducible Galois representations and isomorphism classes of cuspidal automorphic representations. Under this correspondence, an irreducible ℓ-adic Galois representation $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}|F) \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ which factors through $\pi_1(X_1, \overline{\eta})$ correspond to an everywhere unramified, irreducible, cuspidal, automorphic representation.

We denote by $\mathbb{A}$ the ring of adèles of the function field $\mathbb{F}_q(X_1)$ and by $\mathcal{O}$ the ring of integral adèles. By some discussions which have already been indicated by Deligne, an ℓ-adic local system over X which is fixed by the Frobenius endomorphism corresponds to an everywhere unramified, irreducible, absolutely cuspidal, automorphic representation of GL_n modulo inertial twist.

In the section III.2, we give a detailed proof of this together with a study of numerical relations among numbers of ℓ-adic local systems which are irreducible over X_1 but not necessarily irreducible over X (cf. proposition III.2.4.2 and theorem III.2.4.3). This will be needed in the later calculations.

Then we pass to the automorphic side.

I.2.2 Geometric part of trace formula. We write $G = GL_n$ in the following. The reason that this problem is solvable in the context of automorphic forms is that all cuspidal automorphic representations live in, after a twist, a common space : $L^2(G(F)A_G\backslash G(\mathbb{A}))$ where A_G is a group generated by a degree 1 idèle in $Z_G(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}^\times$, the center of $G(\mathbb{A})$.

The Arthur-Selberg trace formula for function fields is established by L. Lafforgue following the strategy of Arthur. We use the characteristic function $\mathbb{1}_K$ of the maximal compact subgroup $K = G(\mathcal{O})$ of $G(\mathbb{A})$ as the test function.

Let B be the Borel subgroup of G defined over F of upper triangular matrices. Let P be a standard parabolic subgroup of G defined over F. Let $X^*(P) := \mathrm{Hom}_F(P, \mathbb{G}_m)$, and $\mathfrak{a}_P := X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Let $\widehat{\tau}_P$ be the characteristic function of $H \in \mathfrak{a}_B$ whose projections to $\mathfrak{a}_P$ are in the obtuse cone associated to P (cf. paragraph IV.1.4). Let $H_B : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_B$ the Harish-Chandra morphism (cf. paragraph IV.1.5). We fix the Haar measure $\mathrm{d}g$ on $G(\mathbb{A})$ normalized such that $\mathrm{vol}(K) = 1$. The trace formula is then given by spectral decomposition of the following integral :

$$J^T := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} \sum_P \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P - \dim \mathfrak{a}_G} \widehat{\tau}_P(H_B(\delta g) - T) k_P(\delta g, \delta g) \mathrm{d}g$$

where $T \in \mathfrak{a}_B$, the sum $\sum_P$ runs through all standard parabolic sub-groups defined over F and

$$k_P(g,g) = \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n g)\mathrm{d}n.$$

where $\mathrm{d}n$ is the Haar measure normalized so that $\mathrm{vol}(N_P(\mathcal{O})) = 1$.

We will not decompose J^T further as a sum of weighted orbital integrals, but use the dependence on T. We identify $\mathfrak{a}_B$ with $\mathbb{R}^n$ using the basis given by ($1 \leqslant i \leqslant n$)

$$\begin{aligned} \chi_i : \mathrm{T} \cong \mathbb{G}_m^n &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ (m_1, \cdots, m_n) &\longmapsto m_i \end{aligned}$$

where T is the diagonal torus of GL_n. For $T \in (T_1, \ldots, T_n) \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{a}_B$, we define a vector bundle $\mathcal{E}$ to be T-semi-stable if for every sub-bundle $\mathcal{F}$ of $\mathcal{E}$ with rank r we have

$$\mu(\mathcal{F}) - \frac{T_1 + \cdots + T_r}{r} \leqslant \mu(\mathcal{E}) - \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n}.$$

We define $F(\mathcal{E}, T)$ to be 1 if $\mathcal{E}$ is T-semi-stable, otherwise we put $F(\mathcal{E}, T) = 0$. Using Weil's dictionary between vector bundles and elements in $G(\mathbb{A})/K$, one can view $F(\cdot, T)$ as a characteristic function on $G(\mathbb{A})/K$. L. Lafforgue has proved that, if $T_i - T_{i+1}$ is large enough for every $1 \leqslant i \leqslant n-1$, then (cf. theorem IV.4.1.4)

$$J^T = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} F(g,T) k_G(g,g)\mathrm{d}g$$

Let $G(\mathbb{A})^e$ be the subset of $G(\mathbb{A})$ whose degree of determinant is e, then

$$J^T = \sum_{e=0}^{n-1} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} F(g,T) k_G(g,g)\mathrm{d}g := \sum_{e=0}^{n-1} J_e^T \tag{I.2}$$

Still using Weil's dictionary, we can show that for such a T, we have (cf. equation (IV.13) in the proof of theorem IV.4.2.3) :

J_e^T = # isomorphism classes of T-semi-stable vector bundles of degree e and rank n.

Now every vector bundle can be decomposed uniquely, up to isomorphism, into a direct sum of indecomposable vector bundles. We give a criterion to express T-semi-stability in terms of this decomposition when the différences $T_i - T_{i+1}$ are large enough (cf. proposition IV.3.1.9), which makes it possible for such T to express the number of isomorphism classes of T-semi-stable vector bundles in terms of those of indecomposable bundles (cf. equation (IV.14) of theorem IV.4.2.3). This expression turns out to be a polynomial in T when restricted to $N\mathbb{Z}^n$ for N divisible enough (for its behaviour over $\mathbb{Z}^n$, see the lemma IV.2.1.8) :

Théorème I.2.1 (Arthur). *The integral J^T is a polynomial in T for $T \in N\mathbb{Z}^n$ with N divisible enough.*

So, even though the expression we obtain for J_e^T in terms of indecomposable vector bundles is for $T_i - T_{i+1}$ large enough, we can extend it to $T = 0$ by polynomiality. This then gives an explicit expression for $J_e^{T=0}$ for $e \in \mathbb{Z}$:

Théorème I.2.2. *Let $\mathcal{P}_n^e(X_1)$ be the number of isomorphism classes of vector bundles of degree e and rank n over X_1 such that for any decomposition $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ we have $\frac{\deg \mathcal{F}}{\mathrm{rank} \mathcal{F}} = \frac{e}{n}$. Then $J_e^{T=0} = \mathcal{P}_n^e(X_1)$.*

Let's emphasize that when $(n,e) = 1$, $J_e^{T=0}$ thus equals to $A_n^e(X_1)$ the number of isomorphism classes of absolutely indecomposable vector bundles over X_1. Now the first part of theorem I.1.3 is deduced by this theorem and some similar results in [Ch15] (cf. theorem 6.1.1 and corollary 6.1.2 of *loc. cit.*) which relate the number $q^{-n^2(g-1)-1}|\mathrm{Higgs}_{n,e}^{st}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$ with an analogue of Arthur's truncated trace for Lie algebra.

I.2.3 Spectral part of trace formula. The geometric side is relatively easy compared to the spectral side. The spectral side provides us with a decomposition :

$$J^T = \sum_{(P,\pi)} J^T_{(P,\pi)}$$

where the right-hand side runs through inertial equivalent classes of so-called discrete pairs (P,π) (cf. definition III.3.4.2), i.e. P is a standard parabolic subgroup of G and π is a discrete automorphic representation of the standard Levi subgroup of P. Hence except for $P = G$, other pairs come from representations of lower rank. The chosen test function $\mathbb{1}_K$ acts as the projection to K-fixed subspace, so we can only consider everywhere unramified automorphic representations. In the text, every cuspidal function is assumed to be unramified, because of which we use the point of view of Hecke-modules instead of representations. For spectral side, it's enough to fix $T = 0$.

The first problem one must face is some extra difficulties which do not exist for number fields. It is caused by the fact that the valuation on the idèle group $\mathbb{A}^\times$ is discrete for a function field, so that some problems of calculating volumes in affine spaces become problems of counting lattice points. The difficulty is eliminated by restricting the truncated kernel to $G(\mathbb{A})^e$ for $(e,n) = 1$. In fact, we consider the truncated trace twisted by a character

$\eta : G(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg\circ\det} \mathbb{Z} \xrightarrow{k\mapsto\zeta^k} \mathbb{C}^\times$ for a primitive n^{th}-root of unity :

$$J_\eta^T := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} \eta(g)k^T(g,g)\mathrm{d}g = \sum_{e=1}^{n} \zeta^e J_e^T \ ,$$

(see equation (I.2) above for J_e^T). The decomposition of J_η^T is given by Lafforgue's formula. Then we use a linear combination of $J_{\eta^k}^T$ to obtain a decomposition of J_e^T. The result is the following (cf. theorem V.4.1.2) :

Théorème I.2.3 (L. Lafforgue)**.** *For $e \in \mathbb{Z}$, $J_e^{T=0}$ is equal to the sum over all inertially equivalent classes of everywhere unramified discrete pairs (P,π) of the following expressions :*

$$\text{(I.3)}\quad J^e_{(P,\pi)} = \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\pi)|} \sum_{(w,\lambda_\pi)\in\mathfrak{stab}(P,\pi)} \int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}} \frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|} \sum_{\substack{\lambda_{\pi L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_\pi\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \\ \lambda_\pi=\lambda^{L^w}_\pi\lambda_{\pi L^w}}} \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_\pi}}$$
$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde\pi}}(\lim_{\mu\to1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu\lambda_{\pi L^w})\mathcal{M}_Q(\lambda\lambda_w,P;\mu\lambda_{\pi L^w})\circ\mathbf{M}(w,w^{-1}(\lambda_w))\circ\lambda_\pi)\mathrm{d}\lambda..$$

In the formula, M_P is the standard Levi subgroup of P. For two Levi sub-groups $M \subseteq L$ we denote by X^L_M the group of inertial complex characters on $M(\mathbb{A})$ trivial on the center $Z_L(\mathbb{A})$ of $L(\mathbb{A})$ (cf. paragraph III.1.6), and $\mathrm{Im}X^L_M$ the sub-group of unitary inertial characters. The function $\widehat{\mathbb{1}}^e_Q$ is a rational function similar to Arthur's θ_Q^{-1} but defined for functions fields (cf. paragraph V.1.7). The group $\mathfrak{stab}(P,\pi)$, defined in page 38, consists of pairs of an element w in the Weyl group and λ_π in $X^G_{M_P}$ such that $w(\pi\otimes\lambda_\pi)\cong\pi$. The sum

$$\sum_{\substack{\lambda_{\pi L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_\pi\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \\ \lambda_\pi=\lambda^{L^w}_\pi\lambda_{\pi L^w}}} \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_\pi}}$$

does not exist in number field case. After careful calculations (cf. section V.5), it will not be a main difficulty for us, so let's ignore it. The operator $\mathbf{M}(w,\lambda)$ is the intertwining operator defined in the paragraph V.3.2, and $\mathcal{M}_Q(\lambda,P;\mu)$ is the composition of two intertwining operators, cf. paragraph V.3.4. For an everywhere unramified discrete representation π, the space $\mathcal{A}_{P,\pi}$ is the induced space of π from $M_P(\mathbb{A})$ to $G(\mathbb{A})$ (defined in the beginning of paragraph V.3.2) hence of dimension one. So all the intertwining operators act as scalars. These scalars can be expressed in terms of L-functions of pairs of representations (cf. paragraph V.3.3).

The most technically difficult part is the limit in the formula. The sum $\sum_{\mathcal{P}(L^w)}$ is taken over all parabolic subgroups defined over F with Levi sub-group $L^w \supseteq M_P$, where L^w is the smallest Levi subgroup which contains an representative of w in $G(F)$. We have defined the notion of (G,M)-family for any Levi subgroup M following Arthur in the paragraph V.2.3 to treat this sum. The key is the theorem V.2.3.1 which is firstly proved by Arthur for number fields (cf. page 1317 [Ar82]). In general, the results given by the limit should be different in function fields but when we choose e to be coprime to n, they essentially remain the same (see Appendix A for the proof, in the main text we deal only with $e = -1$). Take GL_2 for example, when $e = 0$, the limit under consideration is of the form

$$\lim_{(\lambda_1,\lambda_2)\to(1,1)}\Big(\frac{f(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}+\frac{g(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}\Big)=f'(1)+g'(1)-g(1) \tag{I.4}$$

for two holomorphic functions f and g over $\mathbb{C}$ such that $f(1) = g(1)$. For $e = 1$, the limit under consideration is

$$\lim_{(\lambda_1,\lambda_2)\to(1,1)}\Big(\lambda_1\frac{f(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}+\lambda_2\frac{g(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}\Big)=f'(1)+g'(1) \tag{I.5}$$

The extra term $-g(1)$ in equation (I.4) is not desired. For higher rank as shown in the theorem V.2.3.1, only first order derivatives are enrolled for (G, M)-families showing up in the spectral decomposition.

After Arthur's simplification, by residue theorem, the integral over $\mathrm{Im}X^G_{L^w}$ of the limit can be expressed as a sum involving the number of poles and zeros of L-functions (cf. corollary V.2.3.3 and lemma V.5.1.1). Typically, given n unitary discrete automorphic representations $\pi_1, \ldots, \pi_n$, let n_{ij} be the number of zeros minus number of poles of the L-function $L(\pi_i \times \pi_j^\vee, z)$ in the region $|z| < 1$. We mention that the pole of L-functions are relatively easy to understand while the information of zeros can be deduced by functional equations and generalized Riemann hypothesis solved by L. Lafforgue (cf. theorem V.3.1.1 and corollary V.3.1.3). The sum one needs to consider is

$$\sum_F \prod_{(i,j)\in F} n_{ij}$$

where the sum over F runs through all subsets of cardinality $n-1$ of $\{(i, j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ such that the family $(e_i - e_j)_{(i,j)\in F}$ is linearly independent in the vector space $\mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. For low ranks, this is an easy task as we can calculate them by brute force. Nevertheless, for general rank, direct calculations do not work. To deal with it, we establish a bijection between the set of such F and the set of spanning trees of the complete graph with vertex set $\{1, \ldots, n\}$ (cf. lemma VI.1.3.1). Then the matrix tree theorem (cf. theorem VI.1.1.3) is used to express the sum as a determinant cf. theorem VI.1.3.2 and theorem VI.2.2.1. Still it is not easy to calculate this determinant as n_{ij} depends on whether π_i and π_j are isomorphic up to an inertial twist or not and that in general π_i can be non-cuspidal. But it is much more maniable with a determinant rather than an artificial sum. The main trick (cf. lemma VI.1.2.1) is to "deform" the matrix into a form of which the eigenvalues are calculable. The result of this calculation is in the theorem VI.2.2.1.

With the help of this calculation and some combinatorial simplifications, we get the theorem VI.2.2.3. Next step is to sum up contributions over all discrete pairs. We use Moeglin-Waldspurger's classification of residual spectrum of GL_n to reduce the calculation to cuspidal pairs (cf. section VI.3). Then the rest of the calculation is relatively easy. The result gives us the theorem I.1.2.

The final step to achieve the goal is to use the inductive formula (I.1). As a matter of fact, the left-hand side of formula (I.1) is a very nice object with already lots of research on it. The right-hand side contains only the term $C_n(X_1)$ with rank n, all other terms are of lower ranks. We can thus easily deduce the existence of a polynomial $P_{g,n}$ with all property desired except the integrality of its coefficients (see the first part of paragraph VI.4.1). Its coefficients are sums of some combinatorial numbers (see the following theorem) which we prove to be integers.

Théorème I.2.4. *Suppose that $a_1, \dots, a_m$ are some non-zero natural numbers, and $(k^i_{j,s})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i\\ s\in K_i}}$ are some natural numbers satisfying*

$$\sum_{j\in J_i, s\in K_i} s k^i_{j,s} = a_i$$

where J_i, K_i are finite subsets of $\mathbb{N}$. Let $\nu_1, \cdots, \nu_m$ be some integers, and we define $S_i = \sum_{j<i} \nu_j a_j + \nu_i \sum_{j\geqslant i} a_j$, $i = 1, \cdots, m$. Set $\varepsilon_{i,j,s} \in \{\pm 1\}$ for $1 \leqslant i \leqslant m$, $j \in J_i$ and $s \in K_i$. Then the following number

$$\sum_{\substack{l \mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})\\ i,j,s}} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s} \binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l}$$

is divisible by $\chi S_m \sum_j a_j$, où $\chi \in 2\mathbb{N}$, where we denote $\binom{x}{n}$ for the binomial number $\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

The simplest case is the following :

$$\sum_{l\mid a} \mu(l)(-1)^{\frac{a}{l}} \binom{2\nu a/l}{a/l} \in 2\nu a^2\mathbb{Z} \quad \forall \nu, a \in \mathbb{Z}$$

This has been done in [Re11] and [LZ16] (the key fact $(*)$ in the page 117 that we used are taken from them), where it seems that these kinds of combinatorial numbers admit geometric interpretations. To prove theorem I.2.4, we verify the divisibility for every prime number p. First of all, one can write the sum as in the equation (VI.33) using the following equation :

$$\sum_{l\mid n} \mu(l) a_l = \sum_{\{l\in\mathbb{N} \mid\ p\mid l\mid n\}} \mu(l) a_l + \sum_{\{l\in\mathbb{N} \mid\ l\mid n; p\nmid l\}} \mu(l) a_l = \sum_{\{l\in\mathbb{N} \mid\ l\mid n; p\nmid l\}} \mu(l)(a_l - a_{pl})$$

Then we check the order of p in the prime decomposition of $a_l - a_{pl}$. This is done by lemma VI.4.1.6 and the fact $(*)$ in the page 117. After proving this theorem, we obtain the first part of our theorem I.1.1, the second part follows from the theorem I.1.2 and the first part of theorem I.1.1.

Chapitre II

Introduction

II.1 Principaux résultats

II.1.1 Résultats géométriques. Soit X_1 une courbe définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, qui est projective, lisse et géométriquement connexe de genre g_X. Soient $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et X le produit fibré de X_1 avec $\mathbb{F}$. L'endomorphisme de X_1 qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent, et $f \mapsto f^q$ sur le faisceau structural, est un endomorphisme de $\mathbb{F}_q$-schéma. Nous noterons $\mathbf{F}_X$ l'endomorphisme du $\mathbb{F}$-schéma X qui s'en déduit par extension des scalaires. C'est l'endomorphisme de Frobenius qu'on utilisera. Fixons un nombre premier $\ell \nmid q$, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$, et soit $E_n^{(\ell)}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux irréductibles de rang n sur X.

L'image inverse par $\mathbf{F}_X$ induit une permutation de $E_n^{(\ell)}$, notée par $\mathbf{F}_X^*$. Notons qu'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local irréductible sur X fixé par $\mathbf{F}_X^{*k}$ se descend à un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local irréductible sur $X_k = X_1 \otimes \mathbb{F}_{q^k}$. Drinfeld [Dr81] a montré à l'aide de la correspondance de Langlands prouvée par lui-même et la formule des traces pour GL_2 établie par Jacquet-Langlands [JL70], que l'on a, quand le genre $g_X \geqslant 2$,

$$|(E_2^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = q^{k(4g_X-3)} + \sum_{i=1}^{u} m_i \alpha_i^k \quad \forall\, k \geqslant 1 \tag{II.1}$$

où les α_i sont des q-nombres de Weil de poids strictement inférieurs à $8g_X - 6$ et $(E_2^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}$ désigne l'ensemble des éléments de E_2^ℓ fixés par le puissance $k^{\text{ième}}$ de $\mathbf{F}_X^*$. Rappelons qu'un q-nombre de Weil α de poids $i \in \mathbb{N}$ est un entier algébrique tel que pour tout plongement $\varsigma : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$, la valeur absolue $|\varsigma(\alpha)|$ est égale à $q^{\frac{i}{2}}$. Par la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, le théorème d'intégralité et le théorème de pureté de Deligne (cf. théorème 5.2.2 [De73] et théorème 1 [De80]), pour toute variété V (un schéma séparé de type fini) sur $\mathbb{F}_q$, il existe des q-nombres de Weil α_i (unique à permutation près) qui sont des valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius sur les cohomologies ℓ-adiques à support compact et des entiers m_i tels que

$$|V(\mathbb{F}_{q^k})| = \sum_i m_i \alpha_i^k, \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Dans l'article [Ko09] de Kontsevich et [De15] de Deligne, les auteurs ont fait des observations sur le résultat de Drinfeld et ont suggéré de le généraliser aux cas de rang supérieur. En particulier, Deligne a donné des conjectures précises (cf. conjecture 2.15, conjecture 2.18, conjecture 6.3 et conjecture 6.7 de [De15]). Concernant ces conjectures, dans l'article [DF13], Deligne et Flicker se consacrent au cas où toutes les monodromies locales sont unipotentes avec un seul bloc de Jordan et ces monodromies sont fixées en un ensemble fini S de points de X au dessus d'au moins 2 places de X_1. Eux aussi passent du côté automorphe et les conditions posées leur permettent de passer en plus au groupe multiplicatif d'une algèbre à division où la formule des traces est agréable à utiliser. En rang 2, Flicker [Fl15] a calculé le nombre désiré quand la monodromie apparaît en une place de X_1 avec un seul bloc de Jordan. Arinkin a obtenu aussi des résultats intéressants quand les monodromies sont des sommes directes de caractères modérées de position générale (cf. section 3 [De15]). Pour tous ces cas, des résultats similaires à ceux de Drinfeld sont montrés. Mais il manque encore une généralisation fidèle du résultat de Drinfeld quand le rang est supérieur à 2. Le but de cet article est de donner une preuve des résultats parallèles à ceux de Drinfeld en rang supérieur.

Voici le théorème principal :

Soit $g_X \geqslant 2$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g_X}$ les q-nombres de Weil de la courbe X_1, c'est-à-dire les valeurs propres de $\mathbf{F}_X$ agissant sur $H^1(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Par la dualité de Poincaré, on peut les indexer de telle façon que $\sigma_i\sigma_{i+g_X} = q$ pour tout $g_X \geqslant i \geqslant 1$.

Théorème II.1.1 (cf. théorème VI.4.1.1 et théorème VI.5.1.1). *1. Pour tous entiers $g \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, il existe un polynôme de Laurent $P_{g,n}(q, z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{Z}[q, z_1^{\pm 1}, \ldots, z_g^{\pm 1}]$ (nécessairement unique) symétrique en les z_i et invariant par la substitution $z_i \mapsto qz_i^{-1}$ tel que pour tout $k \geqslant 1$, tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, toute courbe X_1 projective lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ de genre $g_X \geqslant 2$ et tout nombre premier $\ell \nmid q$, on ait*

$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = P_{g_X,n}(q^k, \sigma_1^k, \ldots, \sigma_{g_X}^k).$$

De plus, chaque monôme $q^m z_1^{n_1} \cdots z_g^{n_g}$ qui apparaît dans $P_{g,n}$ vérifie

$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{n_i, 0\} \geqslant 0.$$

Le terme de poids dominant de $P_{g,n}$ est $q^{(g-1)n^2+1}$. C'est-à-dire si on pose $\deg q = 2$ *et* $\deg z_i = 1$, *alors* $\deg P_{g,n} = 2((g-1)n^2+1)$ *et* $\deg(P_{g,n} - q^{(g-1)n^2+1}) < 2((g-1)n^2+1)$.

2. *Il existe un nombre fini de nombres de Weil α_i et des entiers m_i tels que*

$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = |\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|(\sum_i m_i\alpha_i^k), \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, $|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|$ divise $|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|$. De plus, on a

$$\sum_i m_i = \sum_{l|n} \mu(l)\mu(n/l)l^{2g_X-3},$$

où μ est la fonction de Möbius.

Remarque. Le groupe fondamental étale de l'espace projectif sur $\mathbb{F}$ est trivial et celui d'une courbe elliptique sur $\mathbb{F}$ est abélien, donc il n'existe pas des systèmes locaux irréductibles de rang $\geqslant 2$ pour les courbes de genre 0 et 1.

Ce théorème répond positivement à la conjecture 2.15 de [De15], et la conjecture 6.3 de *loc. cit.* dans le cas partout non-ramifié. Pour la conjecture 6.7 de *loc. cit.*, on attend encore le calcul des nombres des systèmes locaux géométriquement irréductibles en $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de rang n sur une surface de Riemann de genre g. On mentionne que quand $n = 2$, Deligne a vérifié sa conjecture en utilisant le résultat de Drinfeld pendant son cours à l'IHES en 2013 (cf. [De13]). Précisément, on sait que le schéma des modules grossier des systèmes locaux en $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de rang n qui sont géométriquement irréductibles sur une surface de Riemann de genre $g \geqslant 2$ existe ; on le notera U_n . C'est une partie ouverte de la variété des caractères sur $\mathbb{F}_q$ d'une surface de Riemann de genre g, donc U_n est une variété de dimension $2n^2(g-1)+2$. Deligne a montré qu'il existe un nombre fini d'entiers m_i ($i \geqslant 0$) tels que

$$|U_2(\mathbb{F}_{q^k})| = (q^k-1)\sum_{i\geqslant 0} m_i q^{ik} \quad \forall k \geqslant 1$$

et par des calculs explicites, il a vérifié que $\sum_{i\geqslant 0} m_i = -(2^{2g-3}+1)$. On mentionne aussi que le nombre des homomorphismes du groupe fondamental d'une surface de Riemann dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est calculé par Hausel et Rodriguez-Villegas (cf. théorème 3.8.1 de [HR08]). Dans cet article, les auteurs montrent que la caractéristique d'Euler d'une variété de PGL_n-caractère tordue pour une surface de Riemann de genre g est $\mu(n)n^{2g-3}$.

On montre le théorème ci-dessus en suivant la stratégie de Drinfeld, en utilisant la correspondance de Langlands établie par Drinfeld et L. Lafforgue et en calculant à l'aide de la formule des traces d'Arthur-Lafforgue. Les résultats se déduisent d'une égalité (l'équation (II.3) ci-dessous) donnée par la formule des traces pour une fonction test "simple". Cette égalité est elle-même un résultat géométrique intéressant (cf. II.1.2 pour la discussion de ce résultat).

En outre, on obtient des résultats annexes. Soient $A_{n,e}(X_1)$ le nombre des fibrés vectoriels géométriquement indécomposables de degré e et de rang n sur X_1, et $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$ le schéma de modules des fibrés de Higgs stables de rang n et de degré e (cf. paragraphe IV.3.2). On montre :

Théorème II.1.2. *Quand* $(n,e)=1$, $A_{n,e}(X_1)$ *ne dépend pas de e et dans ce cas*

$$A_{n,e}(X_1) = q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|.$$

La première partie du théorème concernant l'indépendance des degrés est montrée par Groechenig, Wyss et Ziegler [GWZ17]. Indépendamment, Mellit [Me17] a montré l'indépendance des degrés sans supposer $(n,e)=1$ en utilisant le résultat de Schiffmann [Sc16]. La deuxième partie du théorème ci-dessus est montrée par Mozgovoy et Schiffmann (cf. [Sc16] [MS14]). Nous donnons une nouvelle preuve dans les appendices A et B, l'intérêt de cette preuve est qu'elle repose sur une nouvelle application de la formule des traces. On remarque que par la formule des traces, la preuve des l'indépendance des degrés repose sur l'information des fonctions-L (les équations fonctionnelles et l'information de ses pôles) et de certaines théorèmes purement combinatoires.

II.1.2 Résultats automorphes.

Nous noterons le cardinal de $|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}^{*k}_X}|$ par $C_n(X_k)$:

$$C_n(X_k) := |(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}^{*k}_X}| \tag{II.2}$$

Soit $F=\mathbb{F}_q(X_1)$ le corps de fonctions de la courbe X_1. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $\mathcal{O}$ le sous-anneau égal au produit sur tous les places $x\in|X_1|$ des anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ qui sont les complétés des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X_1,x}$ du faisceau structural.

Une représentation automorphe cuspidale irréductible π de $GL_n(\mathbb{A})$ est appelée absolument cuspidale si π reste cuspidale après changement de base, au sens de la fonctorialité de Langlands, de F à $F\otimes\mathbb{F}_{q^k}$ $\forall\, k\geqslant 1$. Par la correspondance de Langlands, $C_n(X_1)$ est égal au nombre des classes d'équivalence inertielle des représentations automorphes, irréductibles, absolument cuspidales et partout non-ramifiées de $GL_n(\mathbb{A})$, cf. section III.3.

Soit e un entier. Soit

$$J_e^T := \int_{GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})^e} k^T(g,g)\mathrm{d}g$$

où $k^T(g,h)$ est le noyau tronqué d'Arthur (cf. paragraphe IV.4.1) pour la fonction test $\mathbb{1}_{GL_n(\mathcal{O})}$, la fonction caractéristique de $GL_n(\mathcal{O})$, et $GL_n(\mathbb{A})^e$ les adèles dans $GL_n(\mathbb{A})$ dont le déterminant est de degré e. Alors J_e^T contient l'information des $C_m(X_k)$ pour tout $m\leqslant n$. Soit $J_e^{T=0}$ la quantité J_e^T en posant $T=0$.

Soit $\mathcal{P}_n^e(X_1)$ le nombre de classes d'isomorphie de fibrés vectoriels isoclines de degré e et de rang n comme définis dans la définition IV.4.2.1. Par le côté géométrique de la formule des traces, on a le résultat suivant :

Théorème II.1.3 (cf. théorème IV.4.2.3 et l'appendice A)**.** *Soit* $e\in\mathbb{Z}$, *on a*

$$J_e^{T=0} = \mathcal{P}_n^e(X_1)$$

De plus $J_e^{T=0}$ ne dépend que d'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En particulier, quand $(n,e)=1$, on a

$$J_e^{T=0} = A_{n,e}(X_1) = q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| .$$

Nous définissons une série formelle

$$\mathrm{aut}_{X_1}(z) = \exp(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{mC_m(X_k)}{k}z^{mk}) .$$

On utilise $\mathrm{aut}_{X_1}(z)^s$ ($s\in\mathbb{C}$) pour $\exp(s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{mC_m(X_k)}{k}z^{mk})$ et aut_{X_l} pour l'expression obtenue en replaçant X_k par X_{kl} dans la formule ci-dessus. De plus pour tout $v\geqslant 1$, et $f(z)\in\mathbb{C}[[z]]$ une série formelle, on désigne par $[z^v]f(z)$ le coefficient de z^v de $f(z)$. Par le développement spectral de la formule des traces, on obtient le résultat suivant :

Théorème II.1.4 (cf. théorème VI.3.3.1)**.** *Soient $g_X\neq 1$, $e\in\mathbb{Z}$ tel que $(e,n)=1$, on a*

$$J_e^{T=0} = \sum_{l|n}\frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{\sum_j a_j}\prod_{j\geqslant 1}[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}$$

où $\sum_{\lambda\vdash n}$ portant sur les partitions non-ordonnées $\lambda=(1^{a_1},2^{a_2},\ldots)$ de n et $S_j(\lambda):=\sum_{\nu\geqslant 1}a_\nu\min\{\nu,j\}$. Notons que si $l\nmid a_j$, on a $[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}=0$.

Combinant le théorème II.1.3 avec le théorème II.1.4, on a une identité dont le membre à gauche est relié aux fibrés des Higgs sur la courbe X_1, et celui de droite est relié aux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux :

$$q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| = \sum_{l|n}\frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{\sum_j a_j}\prod_{j\geqslant 1}[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_i(\lambda)}{l}} . \tag{II.3}$$

II.2 Organisation du texte

Pour faciliter la lecture, on a ajouté en fin de texte un index des symboles qui renvoie le lecteur à la page où un symbole est défini. Mais nous essayons quand même de rappeler les définitions des notions ou symboles chaque fois que nécessaire. Le texte est organisé comme suit.

Dans la section III, on énonce explicitement la question parallèle du côté automorphe. Précisément, dans la section III.2, on prépare des préliminaires sur les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux (ceux qu'on appelle systèmes locaux ℓ-adiques). On étudie attentivement les notions différentes d'irréductibilité de systèmes locaux (l'irréductibilité soit sur X_k ($k\geqslant 1$), soit sur X) en donnant leur relation numérique au nombre total. Les résultats sont sûrement bien connus des experts, mais nous donnerons les preuves complètes par manque de références précises. Dans la section III.3, on prépare des préliminaires sur les formes automorphes de GL_n. On se restreint aux formes automorphes partout non-ramifiées.

Dans la section IV, nous traitons le côté géométrique de la formule des traces pour une fonction test très simple. Au contraire de ce qu'on fait avec la formule des traces dans la littérature, nous traitons le côté géométrique comme un tout et non pas comme une somme des intégrales orbitales.

Dans la section V, nous effectuons les calculs explicites de tous les termes spectraux de la formule des traces établie par L. Lafforgue [Laf02] suivant les résultats d'Arthur (cf. [Ar82]) sur les corps de nombres. Mais dans un corps des fonctions la situation est même plus compliquée, car pour une paire discrète $(P, \tilde{\pi})$ (cf. définition III.3.4.1), l'espace des paires discrètes équivalentes inertiellement à $(P, \tilde{\pi})$ n'est plus un espace affine comme dans un corps de nombres. C'est à cause du fait que le morphisme de Harish-Chandra $H_P : GL_n(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ (cf. paragraphe IV.1.5) n'est pas surjectif. On minimise cette difficulté en ne considérant que la partie de degré e de $GL_n(\mathbb{A})$ avec $(n, e) = 1$.

Dans la section VI, on démontre les conjectures de Deligne. L'idée est simple, il faut simplifier la formule donnée par les calculs de la section V pour qu'elle fournisse une expression qui puisse être traitée inductivement. Une nouveauté, qui est essentielle pour le calcul, est qu'on paramètre les bases de $\mathfrak{a}_P^G$ formées de racines par les arbres couvrants d'un graphe complet. Après des calculs un peu longs, on donne la formule dans la section VI.3. En utilisant cette formule, on montre la conjecture dans la section VI.4. Il s'agit d'établir que certains nombres obtenus combinatoirement sont entiers. Il est intéressant de souligner que les cas plus simples sont dans des articles sur des sujets différents (cf. par exemple [Re11] et [LZ16]). Dans la section VI.5, on montre que le nombre $|(E_n^{(\ell)})^{\mathrm{F}_X^*}|$ est divisible par le cardinal de $\mathrm{Pic}_{X_1}^0(\mathbb{F}_q)$.

Chapitre III

Réduction du problème

III.1 Notations générales

III.1.1 Les valuations discrètes normalisées de F s'identifient aux points fermés de X_1. Soit $|X_1|$ leur ensemble. Soit $|\cdot|_{\mathbb{A}^\times}$ la "valeur absolue" adélique normalisée de $\mathbb{A}^\times$. Soit F_x le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$. On définit pour $g = (g_x)_{x\in|X_1|} \in \mathbb{A}^\times$:

$$\deg g := \frac{1}{\log q}\log|g|_{\mathbb{A}^\times} = -\sum_{x\in|X_1|}[\kappa(x):\mathbb{F}_q]x(g_x)$$

où $\kappa(x)$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ et $x(g_x)$ est la valuation normalisée de g_x.

Pour la suite $G = GL_n$ le groupe linéaire général de rang n défini sur $\mathbb{Z}$. On fixe aussi le sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures défini sur $\mathbb{Z}$. Un sous-groupe parabolique qui contient B est appelé standard. Soit T le sous-tore maximal déployé sur $\mathbb{Z}$ de G formé des matrices diagonales.

De plus soit $K_x := G(\mathcal{O}_x)$ pour $x \in |X_1|$, et $K = G(\mathcal{O}) = \prod_{x\in|X_1|} K_x$. Le groupe K est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$, on a la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A})K$.

III.1.2 On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques semi-standard (c'est-à-dire ceux qui contiennent T) définis sur F de G, et $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}$ le sous-ensemble des sous-groupes paraboliques standard. On va dire simplement un sous-groupe parabolique pour un sous-groupe parabolique semi-standard. Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, soit N_P le radical unipotent de P. Il existe un unique sous-groupe de Levi M_P de P qui contient T. On ne considère que des sous-groupe de Levi contenant T. Soit M un sous-groupe de Levi de G, on désigne par $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Levi contenant M. Pour deux sous-groupes de Levi $M \subseteq L$, on désigne par $\mathcal{P}^L(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques Q de L tels que $M_Q = M$. Quand $L = G$ on note simplement $\mathcal{P}(M)$.

Pour GL_n, les sous-groupes de Levi standard sont des matrices diagonales par blocs, donc ils sont isomorphes au produit de groupes généraux linéaires. Donc ils sont en bijection avec les partitions ordonnées de n. Ici, une partition (ordonnée) est une suite de nombres entiers positifs $(n_1, \dots, n_k)$ telle que $n = n_1 + \cdots + n_k$. On aura aussi besoin des partitions non-ordonnées. on note $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots) \vdash n$ ou brièvement $(j^{a_j}) \vdash n$ pour une partition non-ordonnée $(\underbrace{1, \dots, 1}_{a_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2}, \dots)$ de n, c'est-à-dire $(a_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de nombres naturels et $\sum_{j=1}^{\infty} ja_j = n$.

Soit $M \cong \prod_{i=1}^{r} GL_{k_i}$ un sous-groupe de Levi, on note Z_M pour le centre de M, alors $Z_M \cong \mathbb{G}_m^r$ est un tore déployé de rang r.

III.1.3 Soit M un sous-groupe de Levi. Soit $X^*(M)$ le groupe des caractères rationnels de M définis sur F. Soit

$$M(\mathbb{A})^0 = \bigcap_{\chi \in X^*(M)} \ker |\chi|$$

où $|\chi|(g) := |\chi(g)|_{\mathbb{A}^\times}$ pour tout $g \in M(\mathbb{A})$. Alors $M_P(\mathbb{A})^0$ est un sous-groupe distingué de $M_P(\mathbb{A})$. On va utiliser aussi la notation :

$$G(\mathbb{A})^e = \{g \in G(\mathbb{A}) | \deg \det g = e\} \quad e \in \mathbb{Z}.$$

III.1.4 On fixe un idèle a de degré 1. Soit M un sous-groupe de Levi dont le centre s'identifie avec $\mathbb{G}_m^r$. On définit un sous-groupe discret A_M dans $Z_M(\mathbb{A})$ tel que tout élément de A_M est de la forme $(a^{j_1}, \dots, a^{j_r}) \in \mathbb{G}_m^r(\mathbb{A}) \cong Z_M(\mathbb{A})$ $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}$. On sait que le groupe $Z_M(\mathbb{A})/A_M Z_M(F)$ est compact.

III.1.5 Soit P un sous-groupe parabolique avec sous-groupe de Levi M_P et le radical nilpotent N_P. Des mesures de Haar (unimodulaires) sont fixées de telle sorte que les mesures sur $A_M, M_P(F), N_P(F)$ et $G(F)$ soient les mesures de comptage, les mesures sur $M(\mathbb{A})$ $N_P(\mathbb{A})$ et $G(\mathbb{A})$ satisfaisaient $\mathrm{vol}(M(\mathcal{O})) = \mathrm{vol}(N_P(\mathcal{O})) = \mathrm{vol}(G(\mathcal{O})) = 1$.

Soient M un sous-groupe de Levi de G et $x \in |X_1|$. L'espace $C_c^\infty(M(\mathcal{O}_x)\backslash M(F_x)/M(\mathcal{O}_x))$ des fonctions sur $M(F_x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ localement constantes, à support compacts, et $M(\mathcal{O}_x)$ bi-invariantes muni d'une multiplication définie comme convolution des fonctions. La fonction caractéristique de $\mathbb{1}_{M(\mathcal{O}_x)}$ est l'élément neutre. On l'appelle algèbre de Hecke sphérique local en x, noté par $(\mathcal{H}_{M,x})_{x\in|X_1|}$. Le produit tensoriel restreint des $\mathcal{H}_{M,x}$ est appelé algèbre de Hecke sphérique global, noté par $\mathcal{H}_M$.

III.1.6 Pour tout sous-groupe de Levi M, soit X_M le groupe des homomorphismes de groupe $M(\mathbb{A})$ vers $\mathbb{C}^\times$ triviaux sur $M(\mathbb{A})^0$. Dans le texte, on dit c'est le groupe de caractères inertiels de $M(\mathbb{A})$. Pour tous $M \subseteq L$ sous-groupes de Levi, soit X_M^L le groupe des homomorphismes de groupe $M(\mathbb{A})$ vers $\mathbb{C}^\times$ triviaux sur $Z_L(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^0$. Notamment, comme l'idèle a est de degré 1, on a $Z_L(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^0 = A_L M(\mathbb{A})^0$, donc

$$X_M^L = \mathrm{Hom}(M(\mathbb{A})^0\backslash M(\mathbb{A})/A_L, \mathbb{C}^\times)$$

Soit $P \in \mathcal{P}$. Par la décomposition d'Iwasawa et de Levi $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K = N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{A})K$ on a une projection

$$G(\mathbb{A})/K \to M_P(\mathbb{A})^0\backslash M_P(\mathbb{A})/A_G.$$

On va aussi voir un élément de $X_{M_P}^G$ comme une application de $G(\mathbb{A})/K$ ou de $G(\mathbb{A})$ vers $\mathbb{C}^\times$. Notons que cela dépend de P lui-même, et pas seulement que son sous-groupe de Levi. Donc on note X_P^G au lieu de $X_{M_P}^G$ quand on veut voir $X_{M_P}^G$ comme un ensemble d'applications de $G(\mathbb{A})/K$.

La décomposition $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times \{z \in \mathbb{C}^\times | \, |z| = 1\}$ donne une décomposition $X_M^L = \mathrm{Re}X_M^L \oplus \mathrm{Im}X_M^L$. Le groupe X_M^L a une structure de groupe de Lie complexe commutatif induit par celle de $\mathbb{C}^\times$. La mesure de Haar sur ce groupe est normalisée de telle sorte que

$$\mathrm{vol}(\mathrm{Im}X_M^L) = 1$$

Soient $M \subseteq L$ deux sous-groupes de Levi de G. Alors, X_M^L est un sous-groupe de X_M^G. On voit aussi X_L^G comme un sous-groupe de X_M^G par le morphisme injectif dual du morphisme canonique

$$M(\mathbb{A})^0\backslash M(\mathbb{A})/A_G \to L(\mathbb{A})^0\backslash L(\mathbb{A})/A_G$$

induit par l'inclusion $M(\mathbb{A}) \subseteq L(\mathbb{A})$.

III.1.7 Pour tout sous-groupe de Levi M, soit

$$W^M = \mathrm{Norm}_{M(F)}(T(F))/\,\mathrm{Cent}_{M(F)}(T(F))$$

le groupe de Weyl de M. On peut choisir pour toute classe $w \in W^M$ la matrice de permutation dans $M(F)$ comme son représentant. Ces représentants forment un sous-groupe de $M(F)$ qu'on l'identifie avec W^M. Le groupe W^M s'identifie canoniquement au groupe de Weyl du système de racines de M. Quand $M = G$, on note simplement W au lieu de W^G. Pour un sous-groupe parabolique, on note aussi W^P pour W^{M_P}.

III.1.8 $|\cdot|$ **:** Pour un ensemble fini E, on notera $|E|$ le cardinal de E. Pour un sous-groupe de Levi L de G, on notera $|L|$ le nombre de facteur de L. Pour $w \in \mathfrak{S}_r$ une permutation, on notera $|w|$ le produit des longueurs des orbites de w.

III.1.9 Pour des nombres entiers k_i soit p.g.c.d.(k_i) le plus grand commun diviseur de tous les k_i. Pour des nombres entiers avec plusieurs indices, par exemple $k_{i,j}$, on utilise $\underset{j}{\text{p.g.c.d.}}(k_{i_0,j})$ pour le plus grand commun diviseur de tous les $k_{i,j}$ tels que $i = i_0$. Soient n, m deux nombres entiers, on note $(n, m) = \text{p.g.c.d.}(n, m)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $[x]$ la partie entière de x, i.e. $[x]$ est le plus grand nombre entier qui est inférieur ou égal à x.

Soit $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{x}{n}$ pour le nombre binomial :

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

Par convention, $\binom{x}{0} = 1$.

III.2 Systèmes locaux ℓ-adiques

III.2.1 Soit $\overline{F}$ une cloture séparée de F. On fixe un point géométrique $o : \mathrm{spec}(\overline{F}) \to X$ au-dessus le point générique de X. Par abus de notation, on notera encore o tout le composé $\mathrm{spec}(\overline{F}) \to X \to X_d$ pour $d \geqslant 1$.

Comme dans l'introduction, les objets principaux étudiés par notre article est l'ensemble $(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}$. Pour tout $n \geqslant 1$, c'est en effet un ensemble fini. Cela résulte de la correspondence de Langlands (cf. théorème III.3.3.1) et un lemme de Harder (cf. théorème 1.2.1 [Ha74] ou lemme I.2.16.(2) de [MW94]).

III.2.2 Rappel pour les systèmes locaux. Soient $\pi_1(X, o)$ (resp. $\pi_1(X_1, o)$) le groupe fondamental de X (resp. X_1) en o. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \pi_1(X, o) \longrightarrow \pi_1(X_1, o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q) \longrightarrow 0$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ est topologiquement engendré par l'élément de Frobenius arithmétique qui envoie un élement x sur x^q. Soit $W(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ engendré algébriquement par cet élément. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme qui envoie l'inverse de l'élément de Frobenius arithmétique, appelé élément de Frobenius géométrique, à 1. L'image inverse de $W(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ par le morphisme $\pi_1(X_1, o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ est appelé le groupe de Weil, qu'on note $W(X_1, o)$. On a $W(X_1, o) \cong \pi_1(X, o) \rtimes \mathbb{Z}$. On munit $W(X_1, o)$ de la topologie produit de $\pi_1(X, o)$ et $\mathbb{Z}$, , où la topologie sur $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète. Alors $W(X_1, o)$ est localement profini. Rappelons qu'une représentation ℓ-adique d'un groupe localement profini G est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace linéaire de dimension finie avec une action linéaire continue de G. Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations ℓ-adiques de $\pi_1(X, o)$ (resp. $\pi_1(X_1, o)$) et l'ensemble des classes d'isomorphie des systèmes locaux ℓ-adiques de rang fini sur X (resp. sur X_1). Précisément, cette équivalence vient des équivalences entre les catégories

$$\left\{\begin{matrix}\text{faisceaux localement constants de type fini}\\ \text{de } \Lambda\text{-modules sur le site } X_{\acute{e}tale}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\Lambda[\pi_1(X, o)]\text{-modules finis}\right\}$$

pour des anneaux Λ qui sont de type fini sur $\mathbb{Z}/\ell^d\mathbb{Z}$ ($d \in \mathbb{N}$), où on associe un faisceau $\mathscr{F}$ l'ensemble $\mathscr{F}_o$ le fibre de $\mathscr{F}$ en o.

Pour tout $v \in |X_1|$, on a un point $\mathrm{Spec}(\kappa(v)) \to X_1$, où $\kappa(v)$ est le corps résiduel de v. Ceci induit une classe de conjugaison de morphismes

$$\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}|\kappa(v)) = \pi_1(\mathrm{Spec}(\kappa(v)), \mathrm{Spec}(\overline{\kappa(v)})) \to \pi_1(X_1, \mathrm{Spec}(\overline{\kappa(v)})) \cong \pi_1(X_1, o)$$

où $\overline{\kappa(v)}$ est une clôture algébrique de $\kappa(v)$. On notera $\mathbf{F}_v$ l'image du Frobenius géométrique par une quelconque de ces morphismes. C'est en fait un élément dans le groupe de Weil $W(X_1, o)$ car son image dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$ est l'inverse de $x \mapsto x^{q^{\deg v}}$. Pour une représentation ℓ-adique σ de $W(X_1, o)$, on notera $c_v(\sigma)$ le n-uplet des valeurs propres de $\sigma(\mathbf{F}_v)$.

Nous noterons $\mathcal{G}_n(X_1)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations irréductibles ℓ-adiques de $W(X_1, o)$.

III.2.3 On fixe une section $j : \mathbb{Z} \to W(X_1, o)$. Soit σ la représentation ℓ-adique de $\pi_1(X, o)$. On définit une représentation $\sigma^{j(1)}$ qui agit sur l'espace sous-jacent de σ par

$$\sigma^{j(1)}(g) = \sigma(j(1)gj(1)^{-1}) \quad \forall g \in \pi(X, o)$$

clairement $\sigma^{j(1)}$ ne dépend pas de la section choisie.

Lemme III.2.3.1. *La conjugaison par $j(1)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations ℓ-adiques de $\pi_1(X, o)$ coïncide avec l'action de $\mathbf{F}_X^*$ sur $E_n^{(\ell)}$.*

Démonstration. cf. lemme 1.3 de [DF13]. □

Un caractère ℓ-adique est une représentation ℓ-adique de dimension 1. On dit qu'un caractère ℓ-adique de $W(X_1, o)$ est inertiel s'il se factorise à travers $W(\mathbb{F}|\mathbb{F}_q)$. Les caractères ℓ-adiques inertiels forment un groupe abélien. Pour une représentation $\sigma \in \mathcal{G}_n(X_1)$, on note $\mathrm{Fix}(\sigma)$ le sous-groupe formé par des caractères ℓ-adiques inertiels λ tels que

$$\sigma \otimes \lambda \cong \sigma$$

On observe que le groupe $\mathrm{Fix}(\sigma)$ est cyclique et son ordre divise n. On peut le prouver en prenant déterminant. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{G}_n(X_1)$:

Définition III.2.3.2. *Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}_n(X_1)$, on dit que σ_1 et σ_2 sont inertiellement équivalentes s'il existe un caractère ℓ-adique inertiel λ tel que $\sigma_1 \otimes \lambda \cong \sigma_2$.*

Lemme III.2.3.3. *Soit σ une représentation ℓ-adique irréductible de dimension n de $\pi_1(X, o)$. Elle peut s'étendre à une représentation de $W(X_1, o)$ si et seulement si la représentation $\sigma^{j(1)}$ est isomorphe à σ. Toutes les extensions sont inertiellement équivalentes.*

Démonstration. La nécessité est clair. Le dernier énoncé se déduit par le lemme de Schur. Pour la suffisance, on identifie les espaces sous-jacents de σ et $\sigma^{j(1)}$ avec $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$, alors il existe une matrice $A \in GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ telle que

$$\sigma(j(1)xj(1)^{-1}) = A\sigma(x)A^{-1} \quad \forall\, x \in \pi_1(X, o)$$

Notons que $W(X_1, o) = \pi_1(X, o) \rtimes \mathbb{Z}$ algébriquement et topologiquement. Pour $x \in \pi_1(X_1, o)$ et $d \in \mathbb{Z}$, on définit $\sigma'(xj(d)) = \sigma(x)A^d$ alors

$$\sigma'(xj(d)yj(m)) = \sigma'(x\ j(d)yj(-d)\ j(d+m)) = \sigma(x)\sigma\Big(j(d)yj(-d)\Big)A^{d+m} = \sigma(x)A^d\sigma(y)A^m$$

Ceci montre que σ' est une représentation et donc une extension de σ à $W(X_1, o)$. □

III.2.4 On dit qu'une représentation ℓ-adique de $W(X_1, o)$ est absolument irréductible si sa restriction à $\pi_1(X, o)$ est irréductible.

Lemme III.2.4.1. *Soit $\sigma : W(X_1, o) \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ une représentation ℓ-adique irréductible. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = 1$
2. *Les restrictions de σ à $W(X_d, o)$ pour $d \geqslant 1$ sont irréductibles.*
3. *σ est absolument irréductible.*

Démonstration. (2. $\implies$ 3.) Soit $G_{géom}$ le groupe de monodromie géométrique, c'est-à-dire la clôture de Zariski de $\sigma(\pi_1(X, o))$ dans $GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Comme σ est irréductible, sa restriction à $\pi_1(X, o)$ est semi-simple. Cela montre que $G_{géom}$ est un groupe réductif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. De plus, l'élément $\sigma(j(1))$ normalise $G_{géom}$. On utilise un théorème de Grothendieck (cf. théorème 3.3(2) de [KW01]) selon lequel il existe un élément $u \in G_{géom}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et un entier $d_0 \geqslant 1$ tel que $u\sigma(j(d_0))$ commute avec $G_{géom}$ et $\sigma(j(1))$.

Supposons que σ est $W(X_{d_0}, o)$-irréductible. L'action de $u\sigma(j(d_0))$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$ commute avec $W(X_{d_0}, o)$ donc induit un $W(X_{d_0}, o)$-isomorphisme de σ. Par le lemme de Schur, $u\sigma(j(d_0))$ est un scalaire. Cela implique alors que tout sous-espace de σ qui est $G_{géom}$ stable est aussi $W(X_{d_0}, o)$ stable. Donc la restriction de σ à $\pi_1(X, o)$ est irréductible.

(1. $\implies$ 2.) Comme σ est irréductible, pour tout $d \geqslant 1$, $\sigma|_{W(X_d,o)}$ est semi-simple, donc on peut supposer

$$\sigma|_{W(X_{d_0},o)} = \bigoplus \sigma_i$$

où les représentations σ_i de $W(X_d, o)$ sont irréductibles. Par la réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}(\sigma_i, \sigma|_{W(X_{d_0},o)}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_{W(X_{d_0},o)}^{W(X_1,o)}(\sigma_i), \sigma)$$

Donc σ est un quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{W(X_{d_0},o)}^{W(X_1,o)}(\sigma_i)$. De même pour tout caractère inertiel χ, on a que $\sigma \otimes \chi$ est un quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{W(X_{d_0},o)}^{W(X_1,o)}(\sigma_i \otimes \chi)$, et si on prend χ trivial sur $W(X_{d_0}, o)$ alors $\sigma \otimes \chi$ est un quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{W(X_{d_0},o)}^{W(X_1,o)}(\sigma_i)$. Notons que par l'hypothèse $\sigma \otimes \chi \not\cong \sigma$ pour tout caractère inertiel. Il y a d_0 caractères inertiels qui sont triviaux sur $W(X_d, o)$. Donc la dimension de $\mathrm{Ind}_{W(X_{d_0},o)}^{W(X_1,o)}(\sigma_i)$, qui est égale à $d_0 \dim \sigma_i$, est supérieure à $d_0 \dim \sigma$. Mais ce n'est possible que si $\sigma_i = \sigma$.

(3. $\implies$ 1.) Soit χ un caractère inertiel tel que $\chi \otimes \sigma \cong \sigma$. Alors il existe une matrice $\Psi \in GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ telle que

$$\sigma(g)\chi(g) = \Psi^{-1}\sigma(g)\Psi \quad \forall\, g \in W(X_1, o).$$

On considère la restriction à $\pi_1(X, o)$. Notons que $\chi|_{\pi_1(X,o)}$ est trivial, donc

$$\sigma(g) = \Psi^{-1}\sigma(g)\Psi \quad \forall\, g \in \pi_1(X, o).$$

Par le lemme de Schur, la matrice Ψ est un scalaire. Donc χ est trivial. □

Proposition III.2.4.2. *Soit $\sigma : W(X_1, o) \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ une représentation ℓ-adique de dimension n et $d \mid n$. Alors on a l'équivalence entre :*

1. *σ est irréductible et $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = d$.*
2. *Il existe une représentation ℓ-adique irréductible σ' de $W(X_d, o)$ de rang n/d telle que $|\mathrm{Fix}(\sigma')| = 1$ et $\sigma \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma')$. De plus, les conjugués de $\sigma'|_{\pi_1(X,o)}$ par $j(0), j(1), \ldots, j(d-1)$ sont deux à deux non-isomorphes.*

Les représentations σ' satisfaisant la condition 2 se déduisent des unes des autres par conjugaison par $j(i)$ $i \in \mathbb{Z}$. Il y en a exactement d.

Démonstration. (1. $\implies$ 2.) Pusique $\mathrm{Fix}(\sigma)$ est cyclique, il existe un caractère inertiel d'ordre d tel que $\sigma \otimes \chi \cong \sigma$. C'est-à-dire qu'il existe une matrice $\Psi \in GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ telle que

$$\chi(g)\sigma(g)\Psi = \Psi\sigma(g) \quad \forall\, g \in W(X_1, o)$$

Soit $\Lambda(\Psi)$ l'ensemble des valeurs propres de Ψ. Pour $\lambda \in \Lambda(\Psi)$, soit $V_\lambda \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$ l'espace propre de λ. On définit un sou-espace

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\Psi)} V_\lambda$$

Si $v \in V_\lambda$, alors pour tout $g \in W(X_1, o)$ on a que $\Psi(\sigma(g)v) = \chi(g)\sigma(g)\lambda v$. Donc $\sigma(g)v \in V_{\chi(g)\lambda}$ et W est $W(X_1, o)$-stable. Cela implique $W = \overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$.

Comme χ est d'ordre d, il est trivial sur $W(X_d, o)$ et l'espace V_λ est $W(X_d, o)$-stable. Ceci donne une représentation $\sigma' := (V_\lambda, \sigma|_{W(X_d,o)})$. L'espace $\oplus_{i=0}^{d-1}\sigma(j(i))V_\lambda = \oplus_{i=0}^{d-1}V_{\chi(j(i))\lambda}$ est $W(X_1, o)$-stable donc il est égal à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$. Il s'ensuit que $\dim V_\lambda = n/d$ et on a

$$\sigma \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma')$$

Cela implique aussi que σ' est irréductible.

Pour tout $\chi_0 \in \mathrm{Fix}(\sigma')$ un caractère inertiel de $W(X_d, o)$, on peut le prolonger en un caractère $\tilde{\chi}$ de $W(X_1, o)$ qui est d'ordre plus grand que ou égal à d. On a

$$\sigma \otimes \tilde{\chi} \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma' \otimes \chi_0) \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma') = \sigma$$

Donc $\tilde{\chi}$ fixe σ'. Par l'hypothèse, l'ordre de $\tilde{\chi}$ est inférieur à d donc $\tilde{\chi}$ est d'ordre d et χ_0 est trivial. On a alors $|\mathrm{Fix}(\sigma')| = 1$.

Si pour un entier $1 \leqslant d_0 \leqslant d-1$, $\sigma'^{j(d_0)}|_{\pi_1(X,o)} \cong \sigma'|_{\pi_1(X,o)}$, alors par le lemme III.2.3.3 on peut supposer qu'il existe un caractère inertiel χ_0 non-trivial de $W(X_d, o)$ tel que

$$\sigma'^{j(d_0)} \cong \sigma' \otimes \chi_0$$

On le prolonge en un caractère $\tilde{\chi}$ de $W(X_1, o)$ qui est d'ordre strictement plus grand que d et similairement

$$\sigma \otimes \tilde{\chi} \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma' \otimes \chi_0) \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma'^{j(d_0)}) \cong \sigma$$

Cela implique $\tilde{\chi} \in \mathrm{Fix}(\sigma)$ donc d'ordre inférieur à d mais c'est une contradiction. Donc les conjugués de σ' par $j(i)$, $i = 0, 1, \ldots, d-1$, sont deux à deux non-isomorphes.

(2. $\Longrightarrow$ 1.) Montrons tout d'abord que σ est irréductible.

Soit $\tilde{\sigma}$ un quotient irréductible non-nulle de σ. Par la réciprocité de Frobenius, $\tilde{\sigma}|_{W(X_n,o)}$ admet σ' comme sous-représentation. Mais on a $\mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma') \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma'^{j(i)})$ pour $0 \leqslant i \leqslant d-1$. Comme $(\sigma'^{j(i)})_{0 \leqslant i \leqslant d-1}$ sont non-isomorphes, leur somme directe est une sous-représentation de $\tilde{\sigma}$. On conclut en raison de dimension que $\tilde{\sigma} \cong \sigma$, donc σ est irréductible.

Soit $r = |\mathrm{Fix}(\sigma)|$. Notons que pour tout caractère inertiel χ de $W(X_1, o)$ trivial sur $W(X_d, o)$, on a

$$\mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma') \otimes \chi \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma' \otimes \chi|_{W(X_d,o)}) \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma')$$

Donc $d \mid r$. Par ce qu'on a montré, il existe une représentation σ'' de $W(X_r, o)$ telle que

$$\sigma \cong \mathrm{Ind}_{W(X_r,o)}^{W(X_1,o)}(\sigma'') \cong \mathrm{Ind}_{W(X_d,o)}^{W(X_1,o)}\left(\mathrm{Ind}_{W(X_r,o)}^{W(X_d,o)}(\sigma'')\right)$$

Par la formule de Mackey, $\mathrm{Ind}_{W(X_r,o)}^{W(X_d,o)}(\sigma'')$ et σ' sont conjugués par un élément $j(i)$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Donc

$$1 = |\mathrm{Fix}(\sigma')| = |\mathrm{Fix}(\mathrm{Ind}_{W(X_r,o)}^{W(X_d,o)}(\sigma''))|$$

On obtient alors $W(X_r, o) = W(X_d, o)$ forcément $r = d$.

Le dernier énoncé se déduit par la formule de Mackey. □

Soit $D_n(d)$ le nombre des classes d'équivalence inertielle de représentations ℓ-adiques irréductibles σ de $W(X_1, o)$ de rang n et telles que $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = d$. On a $D_n(1) = C_n(X_1)$ par la proposition précédentes, et en général :

Théorème III.2.4.3. *On a*

$$D_n(d) = \sum_{l \mid d} \mu(l) C_{n/d}(X_{d/l}) \frac{1}{d}$$

où μ est la fonction de Möbius.

Démonstration. Le groupe $(\mathbf{F}_X^*)^{\mathbb{Z}}$ agit sur $E_n^{(\ell)}$, soit $O_n(d)$ le nombre des orbites de cardinal d.

Par le lemme III.2.4.1 et la proposition III.2.4.2, l'ensemble des représentations ℓ-adiques σ irréductibles de rang n de $W(X_1, o)$ tels que $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = d$ est en bijection avec l'ensemble des orbites de cardinal d dans $E_{n/d}$ sous l'action de $(\mathbf{F}_X^*)^{\mathbb{Z}}$, donc

$$O_{n/d}(d) = D_n(d)$$

On a aussi que

$$C_r(X_d) = |(E_r^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*d}}| = \sum_{l|d} lO_r(l)$$

Donc par la formule d'inversion de Möbius des fonctions arithmétiques, on a

$$D_n(d) = O_{n/d}(d) = \frac{1}{d}\sum_{l|d}\mu(l)C_{n/d}(X_{d/l})$$

□

III.3 Passage au côté automorphe

Dans cette section, on va traduire la question de comptage des systèmes locaux ℓ-adiques en une question automorphe à l'aide de la correspondance de Langlands. On fixe un isomorphisme ι de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $\mathbb{C}$.

III.3.1 On dit qu'une fonction φ définie sur $G(\mathbb{A})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est cuspidale partout non-ramifiée si elle est invariante par translation à gauche de $G(F)$ et invariante par translation à droite par K et pour tout sous-groupe parabolique standard $P \in \mathcal{P}(B)$, on a

$$\varphi_P(g) = \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(ng)\mathrm{d}n = 0 \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A})/K.$$

Soit

$$\xi \in \mathrm{Hom}(Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})/Z_G(\mathcal{O}), \mathbb{C}^\times)$$

un caractère de $Z_G(F)\backslash Z_{G(\mathbb{A})}/Z_G(\mathcal{O})$. Soit $\mathcal{A}_{G,\xi,cusp}$ l'espace des fonctions cuspidales (à valeur dans $\mathbb{C}$) partout non-ramifiées avec caractère central ξ, c'est-à-dire

$$\varphi(zg) = \xi(z)\varphi(g) \quad \forall\, z \in Z_G(\mathbb{A}), g \in G(\mathbb{A}).$$

L'espace $\mathcal{A}_{G,\xi,cusp}$ est un $\mathcal{H}_G$-module semi-simple. De plus, le théorème de multiplicité un indique que ces facteurs simples sont deux à deux non-isomorphes. Pour tout caractère ξ, un sous-$\mathcal{H}_G$-module simple de $\mathcal{A}_{G,\xi,cusp}$ est appelé une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée de $G(\mathbb{A})$.

Pour tout $x \in |X_1|$, on a la transformation de Satake pour l'algèbre de Hecke locale en x (cf. section 4. [Lau96])

$$\mathrm{Sat}_G : \mathcal{H}_{G,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n}$$

qui est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre, où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe de symétrique d'ordre $n!$. En particulier l'algèbre $\mathcal{H}_{G,x}$ est commutative et donc tout $\mathcal{H}_{G,x}$-module simple est de dimension 1. Pour toute représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée π de $G(\mathbb{A})$. On a une décomposition $\pi \cong \otimes'_{x\in|X_1|}\pi_x$ de π en produit tensoriel restreint des $\mathcal{H}_{G,x}$-module π_x pour x parcourant toute la place de F. Comme π_x est de dimension 1, il définit un morphisme λ_{π_x} par le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{G,x} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Sat}_G"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\pi_x) \arrow[d, "\sim"'] \\ \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} \arrow[r, "\lambda_{\pi_x}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

On notera $c_x(\pi)$, appelé valeurs propres de Hecke en x, le n-uplet non-ordonné $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $\lambda_{\pi_x}(f) = f(c_x(\pi))$, où $f(c_x(\pi))$ est l'évaluation de f en $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour tout $f \in \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n}$. La famille $(c_x(\pi))_{x\in|X_1|}$ détermine π uniquement.

Soit π une représentation cuspidale partout-non-ramifiée avec caractère central ξ. En utilisant l'isomorphisme naturel $\mathbb{G}_m \cong Z_G$, on considère ξ aussi comme un caractère de $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$. On dit que π est unitaire si son caractère central ξ l'est au sens que l'image de ξ reste dans le cercle unitaire $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$.

III.3.2 Soit $\mathcal{A}_n(X_1)$ l'ensemble des représentations cuspidales irréductibles partout non-ramifiées de $G(\mathbb{A})$.

Théorème III.3.2.1 (Correspondance de Langlands)**.** *[Laf02] Il existe une unique bijection entre $\mathcal{A}_n(X_1)$ et $\mathcal{G}_n(X_1)$, caractérisée par l'identité*

$$c_v(\pi) = \iota(c_v(\sigma)) \tag{III.1}$$

pour toute place v de F. Le caractère central de π correspond au déterminant de σ par la théorie de du corps de classe à l'aide de l'isomorphisme ι.

Remarque III.3.2.2. La correspondance de Langlands prouvée par L.Lafforgue concerne les système locaux sur X_1 dont les déterminants sont d'ordre fini et les représentations automorphes cuspidales dont les caractères centraux sont d'ordre fini. On renvoie au chapitre 4 de [HL11] expliquant comment passer de notre cas.

Un caractère $\lambda : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ est inertiel s'il se factorise à travers le morphisme $g \mapsto \deg\det g$ de $G(\mathbb{A})$ sur $\mathbb{Z}$. Les caractères inertiels forment un groupe abélien. Pour une représentation $\pi \in \mathcal{A}_n(X_1)$, on note $\mathrm{Fix}(\pi)$ le sous-groupe formé par des caractères inertiels λ tels que

$$\pi \otimes \lambda \cong \pi$$

On observe que le groupe $\mathrm{Fix}(\pi)$ est cyclique et son ordre divise n. On peut le prouver en passant au caractère central. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}_n(X_1)$:

Définition III.3.2.3. *Soient $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{A}_n(X_1)$. On dit que π_1 et π_2 sont inertiellement équivalentes s'il existe un caractère inertiel λ tel que $\pi_1 \otimes \lambda \cong \pi_2$.*

Remarque III.3.2.4. La relation d'équivalence inertielle entre les représentation cuspidales irréductibles de $G(\mathbb{A})$ et celle entre les classes d'isomorphie des représentations ℓ-adiques irréductibles de rang n de $W(X_1, o)$ sont compatibles à la correspondance de Langlands.

III.3.3 Réduction du problème.

Nous énonçons maintenant comment passer du côté automorphe :

Théorème III.3.3.1. *L'ensemble $(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence inertielles de représentations cuspidales de $G(\mathbb{A}_{F\otimes\mathbb{F}_{q^k}})$ qui contiennent un représentant π tel que $|\mathrm{Fix}(\pi)| = 1$. Cette propriété est alors vraie de tout représentant.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $k = 1$. Par le lemme III.2.3.1, le lemme III.2.3.3 et la correspondance de Langlands, on a des bijections

$$\begin{aligned}(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^*} &\longleftrightarrow \{\sigma \in \mathcal{G}_n(X_1) \| \mathrm{Fix}(\sigma)| = 1\}/\sim_{inertielle}\\ &\longleftrightarrow \{\pi \in \mathcal{A}_n(X_1) \| \mathrm{Fix}(\pi)| = 1\}/\sim_{inertielle}\end{aligned}$$

d'où le théorème. □

III.3.4 Reformuler la question en utilisant les paires discrètes.

Soit $P \in \mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de G.

Soit ξ un caractère de $Z_{M_P}(F)\backslash Z_{M_P}(\mathbb{A})$. On considère l'espace des fonctions φ définies sur $M_P(\mathbb{A})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont invariantes par translation à droite par $M_P(\mathcal{O}) = M_P(\mathbb{A}) \cap K$ et par translation à gauche par $M_P(F)$, telles que :
(1) $\varphi(zm) = \xi(z)\varphi(m)$, $\forall\, z \in Z_{M_P}(\mathbb{A})$ et $m \in M_P(\mathbb{A})$;
(2) pour $|\xi| : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}_+^\times$ l'unique caractère continu qui prolonge le module de ξ,

$$\int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/Z_{M_P}(\mathbb{A})} \frac{|\varphi(m)|^2}{|\xi(m)|^2}\mathrm{d}m < \infty$$

On désigne par $L^2(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))_\xi^K$ cet espace. C'est un $\mathcal{H}_{M_P}$-module.

Définition III.3.4.1. *Soit P un sous-groupe parabolique, et ξ un caractère central de $Z_{M_P}(\mathbb{A})$. Un sous-$\mathcal{H}_{M_P}$-module simple de $L^2(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))_\xi^K$ est appelé une représentation discrète irréductible partout non-ramifiée de $M_P(\mathbb{A})$.*

Soient P, P' deux sous-groupes paraboliques. Soit $w \in W$ tel que $wM_Pw^{-1} = M_{P'}$, et $\tilde{\pi}$ une représentation discrète irréductible partout non-ramifiée de $M_P(\mathbb{A})$. On définit $w(\pi)$ par

$$w(\pi) = \{\varphi(w^{-1}[\cdot]w) | \, \varphi \in \pi\}$$

alors $w(\pi)$ est un sous-$\mathcal{H}(M_{P'}(\mathbb{A}), K)$-module simple de $L^2(M_{P'}(F)\backslash M_{P'}(\mathbb{A}))^K_{w(\xi)}$. Notons que $w(\pi)$ ne dépend que de la double classe représentée par w dans $W^{P'}\backslash W/W^P$

Définition III.3.4.2. *Une paire discrète partout non-ramifiée $(P, \tilde{\pi})$ est la donnée d'un sous-groupe parabolique standard $P \in \mathcal{P}(B)$, et une représentation discrète irréductible partout non-ramifiée $\tilde{\pi}$ dont le caractère central $\chi_{\tilde{\pi}}$ est trivial sur A_G. On dit que deux paires discrètes $(P, \tilde{\pi})$ et $(P', \tilde{\pi}')$ sont inertiellement équivalentes s'il existe $w \in W$ tel que $wM_Pw^{-1} = M_{P'}$ et $\lambda \in X_P^G$ tels que*

$$\pi' = w(\pi \otimes \lambda)$$

Proposition III.3.4.3. *Soit π une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée de $G(\mathbb{A})$. Alors il existe $\lambda \in X_G$ tel que $(G, \pi \otimes \lambda)$ est une paire discrète.*

Démonstration. Par le lemme de Schur, π admet un caractère central χ. Il existe $\lambda \in X_G$ telle que la de restriction λ à A_G coincide avec $\chi|_{A_G}$, donc le caractère central de $\pi \otimes \lambda^{-1}$ est invariant par A_G. De plus par le lemme de Harder (cf. lemme I.2.16.(2) de [MW94]), tout le fonction dans $\pi \otimes \lambda^{-1}$ est à support compact modulo $Z_G(\mathbb{A})$ donc carré intégrable. Cela montre que $(G, \pi \otimes \lambda^{-1})$ est une paire discrète. □

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation discrète partout non-ramifiée de $M(\mathbb{A})$. On désigne par $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$ le sous-groupe de X_M des $\lambda \in X_M$ tels que $\tilde{\pi} \otimes \lambda = \tilde{\pi}$. Le groupe $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$ est fini car il est un sous-groupe de X_M^M. On le voit en comparant les caractères centraux de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi} \otimes \lambda$. Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète. On désigne par $\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})$ le groupe formé des couples (w, λ) telles que w appartient dans $W^P\backslash W/W^P$ et $\lambda \in X_P^G$ pour lesquels $wM_Pw^{-1} = M_P$ et $w(\tilde{\pi} \otimes \lambda) = \tilde{\pi}$. Notons que le cardinal de $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$ et celui de $\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de $(P, \tilde{\pi})$.

D'après le théorème III.3.3.1 et la proposition III.3.4.3, on a :

Proposition III.3.4.4. *Le nombre $C_n(X_1)$ est égal au nombre des classes d'équivalence inertielle des paires discrètes partout non-ramifiée (G, π) tel que π soit cuspidale et* $\mathrm{Fix}(\pi)$ *soit trivial.*

Soient P un sous-groupe parabolique standard de G dont le sous-groupe de Levi s'identifie $M_P \cong GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$ et $x \in |X_1|$. Pour tout $f \in \mathcal{H}_{G,x}$, soit $t_P(f)$ le terme constant de f le long P qui est défini par

$$t_P(f)(m) = \rho_P(H_P(m)) \int_{N_P(F_x)} f(mn)\mathrm{d}n$$

pour tout $m \in M_P(F_x)$, où ρ_P est la moitié de la somme des racines positives de P et H_P est le morphisme de Harish-Chandra (cf. paragraph IV.1.5). Alors $f^P \in \mathcal{H}_{M_P,x}$. Cela définit en effet un morphisme d'algèbres $t_P : \mathcal{H}_{G,x} \to \mathcal{H}_{M_P,x}$, qui fournit $\mathcal{H}_{M_P,x}$ la structure de $\mathcal{H}_{G,x}$ algèbre. Le morphisme est compatible avec le morphisme de Satake au sens que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{G,x} \arrow[r, "Sat_G", "\sim"'] \arrow[d, "t_P"'] & \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} \arrow[d] \\ \mathcal{H}_{M_P,x} \arrow[r, "Sat_M", "\sim"'] & \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_{n_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{n_r}} \end{tikzcd} \tag{III.2}$$

où le morphisme vertical à droite est l'inclusion.

Soit $|\cdot| : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ le caractère défini par $|g| = |\det g|_{\mathbb{A}^\times}$. C'est un élément de X_G. Le théorème suivant caractérise toute représentation discrète irréductible partout non-ramifiée en terme de représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée.

Théorème III.3.4.5 (Moeglin-Waldspurger [MW89])**.** *Soit Π une représentation discrète irréductible partout non-ramifiée de $GL_n(\mathbb{A})$. Alors il existe un entier $d|n$, un sous-groupe parabolique standard P de type $(d, \dots, d)$ de GL_n et une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée π de $GL_d(\mathbb{A})$. tels que si on note $\tilde{\pi} = \pi|\cdot|^{\frac{n/d-1}{2}} \otimes \pi|\cdot|^{\frac{n/d-3}{2}} \cdots \otimes \pi|\cdot|^{-\frac{n/d-1}{2}}$ la représentation cuspidale irréductible de $M_P(\mathbb{A})$, on a*

$$\Pi \cong \tilde{\pi}$$

comme $\mathcal{H}_G$-module via le morphisme t_P du diagramme (III.2). De plus la donnée $(\pi, \frac{n}{d})$ associée à Π est unique.

Vice-versa, si π est une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée de $GL_d(\mathbb{A})$, ν un entier positif alors la représentation cuspidale irréductible de $M_P(\mathbb{A})$

$$\pi|\cdot|^{\frac{\nu-1}{2}} \cdots \otimes \pi|\cdot|^{-\frac{\nu-1}{2}}$$

vue comme $\mathcal{H}_G$-module est isomorphe au $\mathcal{H}_G$-module sous-jacent d'une représentation discrète irréductible de partout non-ramifiée de $GL_{\nu d}(\mathbb{A})$.

Soit π une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée de $GL_d(\mathbb{A})$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$. D'après ce théorème, on va noter la représentation discrète de $GL_{d\nu}(\mathbb{A})$ déterminée par la paire (π, ν) comme $\pi \boxtimes \nu$. On notera $\mathrm{r}(\pi) = d$ et $\mathrm{r}(\pi \boxtimes \nu) = d\nu$.

Soient $\nu, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $\nu d = n$. Soit M le sous-groupe de Levi standard de G correspondant à la partition $(\underbrace{d, \dots, d}_{\nu \text{ fois}})$. Le morphisme $(m_1, \cdots, m_\nu) \mapsto m_1 \cdots m_\nu$ induit une inclusion $X_{GL_d}^{GL_d} \hookrightarrow X_M^M \subseteq X_M^G$ qui nous permet d'identifier $X_{GL_d}^{GL_d}$ avec un sous-groupe de X_M^G. En effet, $X_{GL_d}^{GL_d}$ est contenu dans le sous-groupe X_G^G de X_M^G.

Proposition III.3.4.6. *Soit $\pi \boxtimes \nu$ une représentation discrète partout non-ramifiée de $GL_n(\mathbb{A})$. Avec l'identification $X_{GL_d}^{GL_d} \subseteq X_G^G$ ci-dessus, on a*

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \mathrm{Fix}(\pi \boxtimes \nu)$$

et $(G, \pi \boxtimes \nu)$ est inertiellement équivalente à $(G, \pi' \boxtimes \nu')$ si et seulement si $\nu = \nu'$ et si π et π' sont inertiellement équivalentes.

Démonstration. Clairement, l'inclusion $X_{GL_d}^{GL_d} \subseteq X_G^G$ induit une inclusion $\mathrm{Fix}(\pi) \subseteq \mathrm{Fix}(\pi \boxtimes \nu)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Fix}(\pi \boxtimes \nu)$, on a $\lambda \in X_G^G$. Par l'inclusion $X_G^G \subseteq X_M^G$ il définit un caractère de $M(\mathbb{A})$. Par la partie d'unicité du théorème III.3.4.5, on a l'autre inclusion et le dernier énoncé. □

Soient $\nu, d \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $R_{d,\nu}(X_k)$ le nombre des classes d'équivalence des représentations discrètes de $GL_{d\nu}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{F}_{q^k})$ qui sont de la forme $\pi \boxtimes \nu$ avec π une représentation cuspidale irréductible partout non-ramifiée de $GL_d(\mathbb{A} \otimes \mathbb{F}_{q^k})$ et de fixateur trivial.

Corollaire III.3.4.7. *Avec ces notations, pour tout $\nu \geqslant 1$, on a*

$$R_{d,\nu}(X_k) = C_d(X_k)$$

Démonstration. En effet, cela se déduit par le théorème III.3.4.5 et la proposition III.3.4.6. □

Chapitre IV

La partie géométrique de la formule des traces

IV.1 Notations

IV.1.1 Soit M un sous-groupe de Levi de G. Soit $\Phi(Z_M, G)$ l'ensemble des racines de G relatives à Z_M. Tout sous-groupe $P \in \mathcal{P}(M)$ détermine un sous-ensemble Φ_P et un ensemble de racines simples Δ_P (cf. lemme 2.2 [Lan76]), il est caractérisé par le fait que la famille Δ_P est libre et tout élément de Φ_P est une combinaison à coefficients entiers positifs de racines simples Δ_P. Pour les sous-groupes paraboliques $P \subseteq Q$, on dispose de l'ensemble $\Delta_P^Q \subseteq \Delta_P$ où $\Delta_P^Q = \Delta_P \cap \Phi(Z_{M_P}, M_Q)$. On a $\Delta_P^G = \Delta_P$ et $|\Delta_P^Q| = |M| - |M_Q|$.

Soit $\mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{a}_M$ son espace dual. Pour un sous-groupe parabolique P, on utilise souvent $\mathfrak{a}_P$ (resp. $\mathfrak{a}_P^*$) au lieu de $\mathfrak{a}_{M_P}$ (resp. $\mathfrak{a}_{M_P}^*$). L'application de restriction de M à Z_M donne un morphisme de $X^*(M)$ à $X^*(Z_M)$ dont le noyau est trivial et le conoyau est fini. Donc cela fournit un isomorphisme $\mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong X^*(Z_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on peut voir $\Phi(Z_M, G)$ comme un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_M^*$. Pour deux sous-groupes paraboliques $P \subseteq Q$, on a un morphisme $X^*(Z_{M_P}) \to X^*(Z_{M_Q})$ induit par l'inclusion $Z_{M_Q} \subseteq Z_{M_P}$ et un morphisme $X^*(M_Q) \to X^*(M_P)$ induit par l'inclusion $M_P \subseteq M_Q$. Ils induisent une surjection $\mathfrak{a}_P^* \to \mathfrak{a}_Q^*$ et une section $\mathfrak{a}_Q^* \to \mathfrak{a}_P^*$ de la surjection. Cela permet d'identifier $\mathfrak{a}_Q^*$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_P^*$ et on a une décomposition

$$\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_Q^* \oplus \mathfrak{a}_P^{Q,*}$$

où $\mathfrak{a}_P^{Q,*}$ est le noyau de la projection de $\mathfrak{a}_P^* \to \mathfrak{a}_Q^*$. Dualement, on a une décomposition

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_P^Q$$

Pour tout $H_P \in \mathfrak{a}_P$, on utilise souvent $(H_P)_Q$ pour l'élément dans $\mathfrak{a}_Q$ qui est l'image de H_P par la projection $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$. L'accouplement entre $\mathfrak{a}_P^Q$ et $\mathfrak{a}_P^{Q,*}$ est induit par celui entre $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_P^*$. On vérifie aisément que Δ_P est une base de $\mathfrak{a}_P^{G,*}$, et Δ_Q est la restriction de $\Delta_P - \Delta_P^Q$ à $\mathfrak{a}_Q$ (ou la projection de $\Delta_P - \Delta_P^Q$ sur $\mathfrak{a}_Q^*$).

IV.1.2 Pour fixer des systèmes de coordonnées, soit P un sous-groupe parabolique standard $M_P \cong GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$, les caractères

$$\begin{aligned} \det_{M_P,i} : \quad M_P &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ (m_1, \ldots, m_r) &\longmapsto \det m_i \end{aligned}$$

forment une base de $X^*(M_P)$ donc de $\mathfrak{a}_P^*$. Les éléments de $\Phi(Z_{M_P}, G)$ sont des morphismes

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} : \quad Z_{M_P} &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ (t_1, \ldots, t_r) &\longmapsto t_i t_j^{-1} \end{aligned}$$

pour $i \neq j$, ces éléments peuvent s'écrire dans la base $(\det_{M_P,i})$ comme

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{n_i}\det_{M_P,i} - \frac{1}{n_j}\det_{M_P,j}$$

On utilise les $\det_{M_P,i}$ pour identifier $\mathfrak{a}_P^*$ avec $\mathbb{R}^r$, et on munit $\mathfrak{a}_P$ de la base duale que nous noterons $\psi_{M_P,i}$.

On sait que $(X^*(T), \Phi(T,G))$ est un système de racine. Il y a une dualité canonique à valeurs dans $\mathbb{Z}$ entre le groupe des caractères rationnels de T et celui du groupe à un paramètre $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Cela nous permet d'identifier $\mathfrak{a}_B$ avec $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, les coracines s'écrivent donc

$$\alpha_{ij}^\vee = \psi_{T,i} - \psi_{T,j}$$

pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $i \neq j$. On dispose alors de la base des coracines $(\Delta_{B'}^P)^\vee$ dans $\mathfrak{a}_{B'}^P$ pour tout sous-groupe de Borel B' et tout sous-groupe parabolique P tels que $B' \subseteq P$. Quand $P = G$ on omet parfois l'exposant G. Pour deux paraboliques $P \subseteq Q$ soit $(\Delta_P^Q)^\vee$ la projection de $(\Delta_{B'}^Q)^\vee - (\Delta_{B'}^P)^\vee$ sur $\mathfrak{a}_P^Q$ pour un sous-groupe de Borel $B' \subseteq P$, cela ne dépend pas de B'. On pose $\widehat{\Delta}_P^Q$ pour la base de $\mathfrak{a}_P^{Q,*}$ qui est duale de $(\Delta_P^Q)^\vee$, et $(\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee$ pour la base de $\mathfrak{a}_P^Q$ qui est duale de Δ_P^Q.

On munit $\mathfrak{a}_B^{G,*}$ et $\mathfrak{a}_B^G$ de produits scalaires invariants sous l'action du groupe de Weyl des systèmes de racines $(X^*(T), \Phi(T,G))$ et son dual tels qu'un (co)racine simple a pour norme $\sqrt{2}$. Les sous-espaces $\mathfrak{a}_P^Q$ sont munis des produits scalaires déduits par la restriction. Notons que sous ces produits scalaires $(\det_{M_P,i})$ et $(\psi_{M_P,i})$ sont des bases orthogonales de $\mathfrak{a}_P^*$ et $\mathfrak{a}_P$ mais

$$\|\det_{M_P,i}\|^2 = n_i$$

et

$$\|\psi_{M_P,i}\|^2 = \frac{1}{n_i}$$

De plus, l'espace $\mathfrak{a}_P^Q$ est orthogonal à l'espace $\mathfrak{a}_Q^G$.

IV.1.3 Pour la commodité des calculs, on explicite certaines constructions avec des coordonnées : Soit P un sous-groupe parabolique dont le sous-groupe de Levi $M_P \cong GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$. La projection $\mathfrak{a}_B^* \longrightarrow \mathfrak{a}_P^*$ est donnée par

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\frac{x_1 + \cdots + x_{n_1}}{n_1}, \ldots, \frac{x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} + \cdots + x_n}{n_r})$$

la projection $\mathfrak{a}_B \longrightarrow \mathfrak{a}_P$ est donnée par

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 + \cdots + x_{n_1}, \ldots, x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} + \cdots + x_n)$$

L'inclusion $\mathfrak{a}_P^* \to \mathfrak{a}_B^*$ est

$$(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1 \text{fois}}, \underbrace{x_2, \ldots}_{n_2 \text{fois}}, \ldots, \underbrace{\ldots, x_r}_{n_r \text{fois}})$$

et l'inclusion $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_B$ est

$$(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto (\underbrace{\frac{x_1}{n_1}, \ldots, \frac{x_1}{n_1}}_{n_1 \text{fois}}, \underbrace{\frac{x_2}{n_2}, \ldots}_{n_2 \text{fois}}, \ldots, \underbrace{\ldots, \frac{x_r}{n_r}}_{n_r \text{fois}})$$

Pour l'espaces $\mathfrak{a}_P^{G,*}$ et $\mathfrak{a}_P^G$, on a

$$\mathfrak{a}_P^{G,*} = \{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{a}_P^* | \, n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r = 0\}$$

$$\mathfrak{a}_P^G = \{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{a}_P | \, x_1 + \cdots + x_r = 0\}$$

On a aussi

$$\Delta_P^\vee = \{\alpha_i^\vee = \psi_{M_P,i} - \psi_{M_P,i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1\}$$

et

$$\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_i = \frac{n_{i+1} + \cdots + n_r}{n}(\det_{M_P,1} + \cdots + \det_{M_P,i}) - \frac{n_1 + \cdots + n_i}{n}(\det_{M_P,i+1} + \cdots + \det_{M_P,r}) | 1 \leqslant i \leqslant r-1\}$$

IV.1.4 Soit $\mathfrak{a}_B^+$ le cone dans $\mathfrak{a}_B$ défini par $\{H \in \mathfrak{a}_B | \, \alpha(H) > 0, \ \forall \, \alpha \in \Delta_B\}$. Soit $\overline{\mathfrak{a}_B^+}$ l'adhérence du cône positif $\mathfrak{a}_B^+$.

Pour $P \subseteq Q$, soit τ_P^Q et $\widehat{\tau}_P^Q$ les fonctions caractéristiques respectives des cônes

$$\{H \in \mathfrak{a}_B \mid \alpha(H) > 0, \ \forall \, \alpha \in \Delta_P^Q\}$$

et

$$\{H \in \mathfrak{a}_B \mid \varpi(H) > 0, \ \forall \, \varpi \in \widehat{\Delta}_P^Q\}.$$

IV.1.5 Pour tout sous-groupe parabolique P de G, on dispose de l'application d'Harish-Chandra
$$H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$$
qui vérifie
$$\chi(H_P(g)) = \frac{1}{\log q} \log |\chi|(p)$$
pour tout $g \in pK$, $p \in P(\mathbb{A})$ et $\chi \in X^*(P)$.

On dispose de plus de deux réseaux
$$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M_P), \mathbb{Z})$$
et
$$\tilde{\mathfrak{a}}_{P,\mathbb{Z}} = H_P(A_P) \subseteq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$$
Ces réseaux satisfont
$$\tilde{\mathfrak{a}}_{Q,\mathbb{Z}} \subseteq \tilde{\mathfrak{a}}_{P,\mathbb{Z}} \subseteq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$$
et l'application d'Harish-Chandra est une surjection de $G(\mathbb{A})$ sur $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ et $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ est en effet engendré par la base $(\psi_{M_P,i})$.

IV.1.6 Soit $P \in \mathcal{P}(B)$ un sous-groupe parabolique standard. Soit $T \in \mathfrak{a}_B$. Soit $F^P(\cdot, T)$ la fonction définie pour $g \in N_P(\mathbb{A})M_P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$ par
$$F^P(g, T) = \sum_{\{Q|B\subseteq Q\subseteq P\}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^P} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash P(F)} \widehat{\tau}_Q^P(H_Q(\delta g) - T)$$
par le lemme 5.1. de [Ar78], la somme est toujours finie, donc $F^P(g, T)$ est bien définie.

IV.2 Des lemmes combinatoires de Langlands

IV.2.1 Nous avons besoin de préparation combinatoire. Les lemmes dans cette section ont été essentiellement découverts par Langlands et Arthur.

Lemme IV.2.1.1. *Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+}$, on a $F^G(g, T) = 1$ si et seulement si pour tout sous-groupe parabolique standard P et $\forall\, \delta \in P(F)\backslash G(F)$*
$$\widehat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T) = 0.$$

Démonstration. cf. proposition 3. page 221 de [Laf97]. □

Lemme IV.2.1.2. *Soient $P \subseteq Q$ deux sous-groupes paraboliques. On a $\forall\, H \in \mathfrak{a}_B$*
$$\sum_{\{R|P\subseteq R\subseteq Q\}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^R} \tau_P^R(H)\widehat{\tau}_R^Q(H) = \begin{cases} 1 & si\ P = Q; \\ 0 & si\ P \neq Q. \end{cases}$$

Démonstration. cf. proposition1.7.2 [LW13]. □

Corollaire IV.2.1.3. *Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, $T \in \mathfrak{a}_B$, et $P \in \mathcal{P}(B)$ on a*

$$1 = \sum_{\{Q|B\subseteq Q\subseteq P\}} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash P(F)} \tau_Q^P(H_P(\delta g) - T)F^Q(g,T) \tag{IV.1}$$

Démonstration. Ce résulte d'un calcul direct par la définition de $F^P(g,T)$ et le lemme IV.2.1.2. □

Soit P un sous-groupe parabolique de G, suivant Arthur, on pose, pour tout H et T dans $\mathfrak{a}_B$, une fonction

$$\Gamma'_P(H,T) = \sum_{\{Q|\ Q\supseteq P\}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^G} \tau_P^Q(H)\widehat{\tau}_Q(H-T)$$

où la somme porte sur tous sous-groupes paraboliques Q de G contenant P. On a la relation d'inversion (cf. lemme 1.8.2 de [LW13]) :

$$\widehat{\tau}_P(H-T) = \sum_{\{Q|\ Q\subseteq P\}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^G} \Gamma'_Q(H,T)\widehat{\tau}_P^Q(H)$$

Lemme IV.2.1.4. *Pour tout T dans un ensemble compact fixé de $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_G$, le support de la fonction*

$$H \mapsto \Gamma'_P(H,T), \quad H \in \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_G$$

est contenu dans un ensemble compact fixé, qui ne dépend pas de T.

Démonstration. cf. lemme 2.1. de [Ar81]. □

Nous introduirons aussi une fonction de la variable $H \in \mathfrak{a}_P$:

$$\Gamma_P(H,T)$$

qui est la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_P$ vérifiant
$-\langle\alpha,H\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^P$;
$-\langle\varpi,H\rangle \leqslant \langle\varpi,T\rangle$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_P$.

Remarque IV.2.1.5. Lorsque $P = G$, $\Gamma_P(\cdot,T)$ est la fonction constante égale à 1. Si $T = 0$, $\Gamma_P(\cdot,0) = 0$ pour tout $P \subsetneq G$.

Lemme IV.2.1.6. *Pour tout $H \in \mathfrak{a}_P$ et $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+}$, on a l'égalité*

$$\Gamma'_P(H,T) = \Gamma_P(H,T)$$

Démonstration. cf. lemme 4.5.2 de [Ch15]. □

Pour toute partie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$, telle que le composé $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_G$ est injective, on forme la série de Fourier

$$\widehat{\Gamma}'_{P,\mathfrak{h}}(\lambda, T) = \sum_{H \in \mathfrak{h}} \Gamma'_P(H, T)\lambda^{-H} \quad (\text{resp. } \widehat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}}(\lambda, T) = \sum_{H \in \mathfrak{h}} \Gamma_P(H, T)\lambda^{-H})$$

où $\lambda \in X_P^G$. En vertu de la compacité du support de $\Gamma'_P(H, T)$ (resp. $\Gamma_P(H, T)$) à $\mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_G$, la somme est en effet une somme finie et la fonction $\lambda \mapsto \widehat{\Gamma}'_{P,\mathfrak{h}}(\lambda, T)$(resp. $\lambda \mapsto \widehat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}}(\lambda, T)$) est une combinaison linéaires de λ^{-H}.

La définition ainsi que le lemme suivantes sont dû à Chaudouard [Ch15].

Définition IV.2.1.7. *Soit $\Phi : \mathfrak{a}_{B,\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que cette application est quasi-polynomiale s'il existe un ensemble fini $\mathfrak{f}$ des caractères d'ordre fini de $\mathfrak{a}_{B,\mathbb{Z}}$:*

$$\mathfrak{f} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}_{B,\mathbb{Z}}, \mu_\infty(\mathbb{C}))$$

où $\mu_\infty(\mathbb{C})$ est le sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ des racines de l'unité, et pour tout $\nu \in \mathfrak{f}$ un polynôme p_ν tels que pour tout $T \in \mathfrak{a}_{B,\mathbb{Z}}$ on ait l'égalité

$$\Phi(T) = \sum_{\nu \in \mathfrak{f}} p_\nu(T)\nu(T)$$

Lemme IV.2.1.8. *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G dont on identifie le sous-groupe de Levi à $GL(n_1) \times \cdots \times GL(n_r)$. On fixe un degré $e \in \mathbb{Z}$ et des éléments $e_i \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. On associe à ces données l'ensemble $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^r$ défini par*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^e_{(e_i)} = \{(d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{Z}^r | \, d_1 + \cdots + d_r = e \quad et \quad d_i \equiv e_i \bmod n_i\}$$

Alors $\widehat{\Gamma}'_{P,\mathfrak{h}}(1, T)$ est quasi-polynomiale en T.

Démonstration. cf. proposition 4.5.5. de [Ch15]. En effet, la série de Fourier défini dans *loc. cit*. est pour la fonction Γ_P au lieu de Γ'_P, mais la preuve de *loc. cit*. montre premièrement que $\widehat{\Gamma}'_{P,\mathfrak{h}}(1, T)$ est quasi-polynomiale. □

IV.3 Sur les fibrés vectoriels

Nous rappelons rapidement le lien entre les fibrés vectoriels et les adèles. Pour nous, un fibré vectoriel sur X_1 est un $\mathcal{O}_{X_1}$-module localement libre de rang fini. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel, on note $\deg(\mathcal{E})$ pour le degré de $\mathcal{E}$, $\mathrm{rg}\mathcal{E}$ pour le rang et $\mu(\mathcal{E})$ pour la pente

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rg}\mathcal{E}} \quad \text{si } \mathcal{E} \neq 0.$$

De plus on désignera par $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{E}$.

IV.3.1 On a une équivalence (cf. Appendix E [Lau97]) entre $\mathrm{Bun}_n(\mathbb{F}_q)$ le groupoïde des fibrés vectoriels sur X_1 et le groupoïde quotient

$$[G(F)\backslash(G(\mathbb{A})/K)]$$

Précisément, un élément $g \in G(\mathbb{A})$ donne naissance à un fibré vectoriel $\mathcal{E}^g$ muni d'une trivialisation générique de $\mathcal{E}^g_o \to F^n$. Sous cet équivalence, beaucoup de constructions passent d'un côté à l'autre, on réfère à la page 233 de [Ch15] pour un joli tableau que nous utiliserons (prenons garde que notre définition de degré d'un adèle diffère que celle de *loc. cit.* par un signe). Un fibré est indécomposable s'il ne peut pas être écrit comme une somme directe de deux sous-fibrés vectoriels, alors on a le résultat suivant :

Lemme IV.3.1.1. *Tout le fibré vectoriel est une somme directe de fibrés indécomposables, et cette décomposition est unique à isomorphisme près. Un fibré vectoriel indécomposable de degré e premier à son rang n est géométriquement indécomposable au sens que son produit tensoriel avec $\mathbb{F}$ est indécomposable comme fibré vectoriel sur X.*

Démonstration. On peut voir la preuve du lemme 2.6 de [Sc16]. □

Dans la suite, on va introduire la notion de T-stabilité et donner des résultats dont nous aurons besoin. Soulignons que les fibrés T-stables seront ceux dont le polygone de Harder-Narasimhan est majoré par un polygone qui dépend de T (cf. proposition 4.4.2 [Ch15]), mais la T-stabilité est une notion commode pour comparer avec la formule des traces.

Soit $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$d(T) := \min_{i=1,\dots,n-1}\{T_i - T_{i+1}\}$$

Définition IV.3.1.2. *Soit $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(T) \geqslant 0$. On dit qu'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est T-semi-stable si pour tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ on a*

$$\mu(\mathcal{F}) - \frac{T_1 + \cdots + T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}} \leqslant \mu(\mathcal{E}) - \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n}$$

Remarque IV.3.1.3. Dans la langage des adèles, les fibrés T-semi-stables correspondent aux éléments $g \in G(\mathbb{A})$ tels que $\widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T) = 0$ pour tout $\delta \in P(F)\backslash G(F)$ et $P \in \mathcal{P}(B)$. Clairement, si $T, T' \in \mathbb{R}^n$ satisfont $d(T - T') \geqslant 0$ alors la T'-semi-stablité implique la T-semi-stablité, en particulier un fibré vectoriel semi-stable est T-semi-stable pour tout T tel que $d(T) \geqslant 0$.

Lemme IV.3.1.4. *Soient $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+} \cong \mathbb{R}^n$ et $g \in G(\mathbb{A})$. Le fibré vectoriel $\mathcal{E}^g$ associé à g est T-semi-stable si et seulement si $F^G(g, T) = 1$.*

Démonstration. On le prouve en comparant la définition de la T-semi-stabilité et le lemme IV.2.1.1. □

Proposition IV.3.1.5 (Harder-Narasimhan). *Soit $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(T) \geqslant 0$. Pour tout $\mathcal{E} \neq 0$, il existe une unique filtration, appelée T-filtration de Harder-Narasimhan, de sous-fibrés $0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$ de rangs notés $n_i = r(\mathcal{F}_i)$ telle que*
1. pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, les quotients $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ sont $(T_{n_i+1}, \cdots, T_{n_{i+1}})$-semi-stables ;
2. On a les inégalités parmi les pentes des quotients successifs :

$$\mu(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) - \frac{T_1 + \cdots + T_{n_1}}{n_1} > \cdots > \mu(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}) - \frac{T_{n_{r-1}+1} + \cdots + T_n}{n_r - n_{r-1}}$$

Démonstration. Le preuve marche parallèlement comme dans le cas $T = 0$ où T-semi-stabilité coincide avec semi-stabilité définit par Harder-Narasimhan. Notamment $\mathcal{F}_1$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$ caractérisé par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mu(\mathcal{F}_1) - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} = \max_{\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}}\left(\mu(\mathcal{F}) - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}}\right) \\ \\ \mu(\mathcal{F}_1) - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} = \mu(\mathcal{F}_2) - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_2}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_2} \implies \mathrm{rg}\mathcal{F}_1 > \mathrm{rg}\mathcal{F}_2 \text{ ou } \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \end{cases}$$

On omet donc le preuve. □

Lemme IV.3.1.6. *Soit g_X le genre de la courbe X, si $d(T) \geqslant \max\{2g_X - 2, 0\}$, la T-filtration de Harder-Narasimhan est scindée.*

Démonstration. cf. lemme 4.2.1 [Ch15]. □

Corollaire IV.3.1.7. *Un fibré indécomposable est T-semi-stable pour tout T tel que $d(T) \geqslant \max\{2g_X - 2, 0\}$.*

Proposition IV.3.1.8. *Supposons $T, T' \in \mathbb{R}^n$ satisfont $d(T) \geqslant 0$, $d(T') \geqslant 0$, et $d(T - T') \geqslant 0$, alors la T'-filtration de Harder-Narasimhan est plus fine que la T-filtration de Harder-Narasimhan. C'est-à-dire tous les fibrés intervenant dans T-filtration de Harder-Narasimhan interviennent dans la T'-filtration de Harder-Narasimhan aussi.*

Démonstration. Soient $T = (T_1, \cdots, T_n)$ et $T' = (T'_1, \cdots, T'_n)$. Soit $0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$ la T-filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$. On insère dans $\mathcal{F}_i \subsetneq \mathcal{F}_{i+1}$ la $(T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_i+1}, \dots, T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_{i+1}})$-filtration de Harder-Narasimhan. Donc on obtient une filtration

$$0 \subsetneq \mathcal{F}_1^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_1^{i_1} \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}_2^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

Par l'unicité de T'-filtration de Harder-Narasimhan, il suffit de montrer que cela est une T'-filtration de Harder-Narasimhan. Pour ça, il est suffit que si pour $k = 1, \dots, r-1$, on ait

$$\mu(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_k^{i_k}) - \frac{T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_k^{i_k}+1} + \cdots + T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_k}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_k^{i_k}} > \mu(\mathcal{F}_{k+1}^1/\mathcal{F}_k) - \frac{T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_k+1} + \cdots + T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_{k+1}^1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_{k+1}^1/\mathcal{F}_k}. \tag{IV.2}$$

Supposons que $\mathcal{G}$ est un sous-fibré propre de $\mathcal{F}_1$, et $\mathcal{H}$ satisfait $\mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{F}_2$. Par l'indication dans la preuve de la proposition IV.3.1.5, on déduit

$$\begin{cases} \frac{\deg \mathcal{F}_1}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} > \frac{\deg \mathcal{H}}{\mathrm{rg}\mathcal{H}} - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{H}}}{\mathrm{rg}\mathcal{H}} \\ \frac{\deg \mathcal{F}_1}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1} \geqslant \frac{\deg \mathcal{G}}{\mathrm{rg}\mathcal{G}} - \frac{T_1+\cdots+T_{\mathrm{rg}\mathcal{G}}}{\mathrm{rg}\mathcal{G}} \end{cases}$$

La premier inequalité $\times \frac{\mathrm{rg}\mathcal{H}}{\mathrm{rg}\mathcal{H}-\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}$ + la second inequalité $\times \frac{\mathrm{rg}\mathcal{G}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1-\mathrm{rg}\mathcal{G}}$:

$$\mu(\mathcal{F}_1/\mathcal{G}) - \frac{T_{\mathrm{rg}\mathcal{G}+1} + \cdots + T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1/\mathcal{G}} > \mu(\mathcal{H}/\mathcal{F}_1) - \frac{T_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1+1} + \cdots + T_{\mathrm{rg}\mathcal{H}}}{\mathrm{rg}\mathcal{H}/\mathcal{F}_1}$$

Comme $d(T - T') \geqslant 0$, on en déduit donc

$$\mu(\mathcal{F}_1/\mathcal{G}) - \frac{T'_{\mathrm{rg}\mathcal{G}+1} + \cdots + T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1}}{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1/\mathcal{G}} > \mu(\mathcal{H}/\mathcal{F}_1) - \frac{T'_{\mathrm{rg}\mathcal{F}_1+1} + \cdots + T'_{\mathrm{rg}\mathcal{H}}}{\mathrm{rg}\mathcal{H}/\mathcal{F}_1}$$

Cela prouve l'equation(IV.2) pour $k = 1$. En remplaçant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$ et faire le récurrence, on finit alors la preuve. $\square$

Proposition IV.3.1.9. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n donné par :*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathcal{I}_{i,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{i,s_i})$$

où $\mathcal{I}_{i,j}$ sont des fibrés indécomposables de pentes μ_i tels que $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. Soit n_i le rang de $\mathcal{I}_{i,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{i,s_i}$. Soit $T \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(T) \geqslant \max\{2g_X - 2, 0\}$. Pour que $\mathcal{E}$ soit T-semi-stable, il faut et suffit qu'on ait

$$\frac{n_1\mu_1 + \cdots + n_i\mu_i}{n_1 + \cdots + n_i} - \mu(\mathcal{E}) \leqslant \frac{T_1 + \cdots + T_{n_1+\cdots+n_i}}{n_1 + \cdots + n_i} - \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n}$$

pour $i = 1, \ldots, k-1$.

Démonstration. La nécessité est claire par la définition de la T-semi-stablité.
Réciproquement, posons $H_1 = \cdots = H_{n_1} = \mu_1, \ldots, H_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} = \cdots = H_n = \mu_k$, notons qu'on a $H_1 \geqslant H_2 \cdots \geqslant H_n$. Par simplicité, on définit les formes linéaires pour $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} \varpi_i : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (T_1, \ldots, T_n) & \longmapsto \frac{(n-i)}{n}(T_1 + \cdots + T_i) - \frac{i}{n}(T_{i+1} + \cdots + T_n) \end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned} \alpha_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (T_1, \ldots, T_n) &\longmapsto T_i - T_{i+1} \end{aligned}$$

On note $H = (H_1, \ldots, H_n) \in \mathbb{R}^n$.

On montre tout d'abord que la condition implique

$$\frac{H_1 + \cdots + H_l}{l} - \mu(\mathcal{E}) \leqslant \frac{T_1 + \cdots + T_l}{l} - \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n} \tag{IV.3}$$

pour tout $1 \leqslant l \leqslant n$. En effet, soit $N_i := n_1 + \cdots + n_i \leqslant l \leqslant n_1 + \cdots + n_{i+1} - 1 := N_{i+1} - 1$, la condition implique l'inégalité numérique suivante :

$$\varpi_{N_i}(H - T) \leqslant 0$$

$$\varpi_{N_{i+1}}(H - T) \leqslant 0$$

Considérons le combinaison linéaire :

$$(N_i - l)\varpi_{N_i}(H - T) + (l - N_i)\varpi_{N_{i+1}}(H - T) - n_{i+1}\varpi_l(H - T)$$

d'après un calcul direct, on trouve

$$(N_{i+1} - l)\varpi_{N_i} + (l - N_i)\varpi_{N_{i+1}} - n_{i+1}\varpi_l = -(N_{i+1} - l)\sum_{t=1}^{l-N_i} t\alpha_{N_i+t-1} - (l - N_i)\sum_{t=1}^{N_{i+1}-l} t\alpha_{N_{i+1}-t}$$

Mais par la définition $\alpha_t(H) = 0$ pour $N_{i+1} - 1 \geqslant t \geqslant N_i$, et $\alpha_t(T) \geqslant 0$ pour tout t. Donc

$$0 \geqslant (N_i - l)\varpi_{N_i}(H - T) + (l - N_i)\varpi_{N_{i+1}}(H - T) \geqslant n_{i+1}\varpi_l(H - T)$$

Ceci implique l'inégalité (IV.3).

Maintenant soit J un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ et on désigne par $|J|$ son cardinal, on a

$$\frac{\sum_{i \in J} H_i}{|J|} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{|J|} H_i}{|J|} \leqslant \mu(\mathcal{E}) + \frac{T_1 + \cdots + T_l}{l} - \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n} \tag{IV.4}$$

Pour voir que $\mathcal{E}$ est T-semi-stable, on observe que s'il existe une filtration T-filtration de Harder-Narasimhan non-trivial $0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$, et $\mathcal{F}_1$ est T-déstabilisant. Puisque $d(T) \geqslant g_X - 1$, cette filtration est scindée par le lemme IV.3.1.6 et donc $\mathcal{F}_1$ est isomorphe à certaine somme de $\mathcal{I}_{i,j}$ en vertu du lemme IV.3.1.1. Mais cela contredit l'inégalité (IV.4). □

IV.3.2 Rappel pour les fibrés de Higgs. Soit $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ le $\mathbb{F}_q$-champ algébrique des fibrés de Higgs sur X_1, il paramètre les couples $(\mathcal{E}, \theta)$ tels que

$-\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X_1 de rang n de degré e ;
$-\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \omega_{X_1}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{X_1}$-module, où ω_{X_1} est le fibré en droite canonique. On sait que $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ est localement de type fini. Un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ est appelé stable, si tout le θ-stable sous-fibré $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ (i.e. $\theta(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F} \otimes \omega_{X_1}$) de $\mathcal{E}$ satisfait

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$$

Soit $\mathbf{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$ le sous-champ de $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ des fibrés de Higgs stables. Le schéma des modules grossiers des fibrés de Higgs stables existe, on le note par $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$. On sait que $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$ est un schéma lisse, quasi-projectif et de dimension $2(g_X - 1)n^2 + 2$ (cf. proposition 7.4. [Ni91]).

Rappelons que $A_{n,e}(X_1)$ est le nombre des fibrés vectoriels géométriquement indécomposables de degré e et de rang n sur X_1, et $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g_X}$ sont les q-nombres de Weil de la courbe X_1 indexés de telle façon que $\sigma_i \sigma_{i+g_X} = q$ pour tout $g_X \geqslant i \geqslant 1$.

Théorème IV.3.2.1 (Schiffmann, Mellit)**.** *Soit e un nombre premier à n, on a*

$$A_{n,e}(X_1) = q^{-1-(g_X-1)n^2} |\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| \tag{IV.5}$$

De plus il existe un polynôme de Laurent $H_{g,n}$ dans $\mathbb{Z}[q, z_1^{\pm 1}, \ldots, z_g^{\pm 1}]$ qui ne dépend que des nombres g, n tel que

$$A_{n,e}(X_1) = H_{g_X,n}(q, \sigma_1, \cdots, \sigma_{g_X})$$

En effet, pour chaque monôme $q^m z_1^{a_1} \cdots z_g^{a_g}$ dans $H_{g,n}$ on a

$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{a_i, 0\} \geqslant 0$$

L'égalité (9) ci-dessus est montrée par Mozgovoy et Schiffmann (cf. [Sc16] [MS14]). On donnera une autre preuve de cette égalité basée sur la formule des traces dans l'appendice *B*.

Concernant le polynôme de Laurent $H_{g,n}$, on peut consulter le théorème 1.1 de [Me17]. Notons que l'existence d'une fraction rationnelle qui joue le même rôle est déjà connue par les travaux de Garcia-Prada, Heinloth et Schmitt (cf. corollaire 2.2 [GPHS14] et le théorème B [GPH13]).

Le dernier énoncé peut se déduire de la formule de Mellit. En effet, en utilisant la formulation de Mellit, on vérifie aisément que, a priori, il existe un polynôme de Laurent $L_{g,n}$ dans $\mathbb{Q}[q, z_1^{\pm 1}, \ldots, z_g^{\pm 1}]$ satisfaisant que pour chaque monôme $q^m z_1^{a_1} \cdots z_g^{a_g}$ dans $L_{g,n}$ on a

$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{a_i, 0\} \geqslant 0$$

et un polynôme $R(q) \in \mathbb{Q}[q]$ tels que

$$H_{g,n}(q, z_1, \ldots, z_g) = \frac{L_{g,n}(q, z_1, \ldots, z_g)}{1 + qR(q)}$$

Si $H_{g,n}$ ne satisfaisait pas l'hypothèse, on obtiendrait une contradiction en examinant les termes dans $H_{g,n}$ de plus bas degré en q qui ne vérifient pas l'hypothèse.

A priori, le nombre $A_{n,e}(X_1)$ et donc le polynôme dans le théorème précédent doivent dépendre de degré e. Il se trouve qu'ils n'en dépendent pas. C'est montré par Mellit [Me17], et indépendamment par Groechenig, Wyss et Ziegler [GWZ17] quand le degré est premier au rang. Nous donnerons une autre preuve pour le cas où le degré est premier au rang dans l'appendice A basée sur notre calcul de la formule des traces et un résultat sur (G, M)-famille.

IV.4 Une interprétation géométrique de la trace tronquée d'Arthur

IV.4.1 Soit P un sous-groupe parabolique standard. L'espace $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/A_G K)$ est un $\mathcal{H}_G$-module. Dans cet article, on s'intéresse à l'action de $\mathbb{1}_K \in \mathcal{H}_G$ qui agit comme identité mais cette action est aussi un opérateur intégral de noyau

$$k_P(g, h) = \sum_{a \in A_G} \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} \mathbb{1}_K(h^{-1}\gamma n g a) \mathrm{d}n.$$

Par restriction sur la diagonale, seulement $a = 1$ contribue, donc on a

$$k_P(g, g) = \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n g) \mathrm{d}n.$$

Arthur a défini un noyau tronqué, pour $g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G K$, par

$$k^T(g, g) = \sum_{P \in \mathcal{P}(B)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \widehat{\tau}_P(H_B(\delta g) - T) k_P(\delta g, \delta g). \tag{IV.6}$$

Dans cette section, on reprouvera le compacité du support de sa restriction à $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ de la fonction $g \mapsto k^T(g, g)$, et on va montrer aussi comment l'intégrale de cette fonction sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ dépend de T. On donnera une interprétation géométrique de son intégrale.

Lemme IV.4.1.1. *Supposons que $g = nmk$ avec $n \in N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathbb{A})$ et $k \in K$, alors*

$$\int_{N_Q(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in M_Q(F)} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n_Q g) \mathrm{d}n_Q = \sum_{\gamma \in M_Q(F)} \mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m) q^{(g_X - 1)\dim N_Q} q^{2\rho_Q(H_Q(m))}.$$

Démonstration. Un groupe unipotent est unimodulaire. Par le changement de variable $n_Q \mapsto$

$(\gamma^{-1}n^{-1}\gamma)^{-1}n_Q n^{-1}$, on a

$$\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}n^{-1}\gamma n_Q n m)\mathrm{d}n_Q=\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K((m^{-1}\gamma m)(m^{-1}n_Q m))\mathrm{d}n_Q.$$

Comme $(m^{-1}\gamma m)(m^{-1}n_Q m)\in K$ si et seulement si $m^{-1}\gamma m\in K$ et $m^{-1}n_Q m\in K$, on en déduit que la valeur de cette intégrale est égale à

$$\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m)\mathbb{1}_K(m^{-1}n_Q m)\mathrm{d}n_Q=\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m)q^{(g_X-1)\dim N_Q}q^{2\rho_Q(H_Q(m))}$$

où on a utilisé le fait que $\mathrm{vol}(N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A}))=q^{(g_X-1)\dim N_Q}=\mathrm{vol}(F\backslash\mathbb{A})^{\dim N_Q}$ et le lemme suivant :

Lemme IV.4.1.2. *Avec notre normalisation des mesures, le volume de $\mathbb{A}/F$ satisfait*

$$\mathrm{vol}(\mathbb{A}/F)=q^{g_X-1}$$

Preuve du lemme. C'est bien connu, mais pour la commodité du lecteur, on en donne une démonstration. On a par la proposition 3 II.5 de [Se88]) et la dualité de Serre que

$$\mathbb{A}/(F+\mathcal{O})\cong H^1(X_1,\mathcal{O}_{X_1})\cong H^0(X_1,\omega_{X_1})^\vee$$

où ω_{X_1} est le faisceau canonique et $H^0(X_1,\omega_{X_1})^\vee$ est le groupe dual de $H^0(X_1,\omega_{X_1})$. On a $F\cap\mathcal{O}=\mathbb{F}_q$ et $\dim_{\mathbb{F}_q}H^0(X_1,\omega_{X_1})=g_X$, donc

$$\mathrm{vol}(\mathbb{A}/F)=q^{g_X}\mathrm{vol}((F+\mathcal{O})/F)=q^{g_X}\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{O})}{|F\cap\mathcal{O})|}=q^{g_X-1}.$$

□

Cela finit le calcul. □

Lemme IV.4.1.3. *Soit $T\in\mathfrak{a}_B$, tel que $d(T)\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$ $i=1,\dots,n-1$. Soit $g\in G(\mathbb{A})$ satisfaisant*

$$F^Q(g,T)\tau_Q^P(H_Q(g)-T)=1\ ,$$

pour un couple des sous-groupes paraboliques standard $Q\subseteq P$. On a l'identité suivante :

$$\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n_Q g)\mathrm{d}n_Q=\int_{N_P(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_P(F)}\mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n_P g)\mathrm{d}n_P.$$

Démonstration. Si $F^Q(g,T)\tau_Q^P(H_Q(g)-T)=1$, par le lemme 4.2.3 de [Ch15], on sait

$$\sum_{\gamma\in M_P(F)} \mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m) = q^{(g_X-1)\dim N_Q^P} q^{\rho_Q^P(H_Q(m))} \sum_{\gamma\in M_Q(F)} \mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m),$$

où N_Q^P est le radical unipotent de $Q\cap M_P$, et $2\rho_Q^P$ est la somme des racines positives de $Q\cap M_P$. On pose $\rho_P=\rho_P^G$. Remarquons que $\rho_Q-\rho_Q^P=\rho_P$ et $\dim N_Q-\dim N_Q^P=\dim N_P$, donc par le lemme IV.4.1.1

$$\text{(IV.7)}\quad \int_{N_Q(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M_Q(F)} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n_Q g)\mathrm{d}n_Q$$
$$= \sum_{\gamma\in M_P(F)} \mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m) q^{(g_X-1)\dim N_P} q^{2\rho_P(H_P(m))}$$
$$= \int_{N_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M_P(F)} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma n_P g)\mathrm{d}n_P.$$

□

Le théorème suivant est dû à L. Lafforgue (cf. proposition 11, page 227, de [Laf97]).

Théorème IV.4.1.4. *La fonction $x\mapsto k^T(x,x)$ définie par l'expression (IV.6) est de support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$ pour tout $T\in\mathfrak{a}_B$. Quand $T\in\mathfrak{a}_B$ satisfait $d(T)\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$, elle est égale à*

$$x\mapsto F^G(x,T)\sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x).$$

Démonstration. Soit $T'\in\mathfrak{a}_B\cong\mathbb{R}^n$ tel que $d(T')\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$. Insérons l'identité (IV.1) du corollaire IV.2.1.3 à l'expression de $k^T(x,x)$ et regroupons la somme :

$$\sum_{\{P,Q|Q\subseteq P\}} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} (-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\widehat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T)\tau_Q^P(H_P(\delta x)-T')F^Q(\delta x,T')$$
$$\int_{N_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M_P(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\delta^{-1}\gamma n\delta x)\mathrm{d}n.$$

Par le lemme IV.4.1.3, il est égal à

$$\text{(IV.8)}\quad \sum_{Q\in\mathcal{P}} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} \Big(\sum_{\{P|P\supseteq Q\}} (-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\widehat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T)\tau_Q^P(H_P(\delta x)-T')\Big)$$
$$F^Q(\delta x,T')\int_{N_Q(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M_Q(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\delta^{-1}\gamma n\delta x)\mathrm{d}n.$$

Utilisons la définition de Γ'_{Q}, on l'écrit comme

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}}\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}\Gamma'_Q(H_Q(\delta x)-T',T-T')F^Q(\delta x,T')\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(x^{-1}\delta^{-1}\gamma n\delta x)\mathrm{d}n. \tag{IV.9}$$

Cela finit la preuve du support compact modulo le centre pour tout $T\in\mathfrak{a}_B$ en vertu du lemme IV.2.1.4.

Quand $d(T)\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$, on prend $T'=T$ dans (IV.8), par le lemme IV.2.1.2, on obtient

$$k^T(x,x)=F^G(x,T)\sum_{\gamma\in G(F)}\mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x).$$

□

D'après le théorème IV.4.1.4, il est loisible de considérer l'intégrale de la fonction $x\mapsto k^T(x,x)$ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$. On définit

$$J_e^T:=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}k^T(x,x)\mathrm{d}x \tag{IV.10}$$

Le théorème suivant est démontré par Arthur sur un corps de nombre (cf. théorème 9.1 de [Ar05]). La même méthode marche pour un corps des fonctions aussi (cf. théorème 5.2.1 de [Ch15] pour une variante). On donne une preuve pour complétude.

Théorème IV.4.1.5. *Comme une fonction en $T\in\mathfrak{a}_B$, l'application $T\mapsto J_e^T$ est quasi-polynomiale au sens de la définition IV.2.1.7.*

Démonstration. On utilise l'expression (IV.9) de $k^T(x,x)$:

$$J_e^T=\sum_{Q\in\mathcal{P}}\int_{Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}\Gamma'_Q(H_Q(x)-T',T-T')F^Q(x,T')\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma nx)\mathrm{d}n\mathrm{d}x.$$

Soit $M(\mathbb{A})^e=M(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^e$. En utilisant la décomposition d'Iwasawa, on en déduit que

$$\begin{aligned}J_e^T=\sum_{Q\in\mathcal{P}}\int_{N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A})}\int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^e}&q^{(g_X-1)\dim N_Q}q^{-2\rho_Q(H_Q(m))}\\ &\Gamma'_Q(H_Q(m)-T',T-T')F^Q(m,T')\int_{N_Q(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}n^{-1}\gamma n_Q nm)\mathrm{d}n_Q\mathrm{d}n\mathrm{d}m.\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Par le lemme IV.4.1.1, on peut conclure que J_e^T a pour l'expression suivante

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{P}(B)}\int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^e}\Gamma'_Q(H_Q(m)-T',T-T')F^Q(m,T')\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m)\mathrm{d}m\\
=&\sum_{Q\in\mathcal{P}(B)}\sum_{\substack{H\in\mathfrak{a}_Q\\ \deg H=e}}\Gamma'_Q(H-T',T-T')\int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^H}F^Q(m,T')\sum_{\gamma\in M_Q(F)}\mathbb{1}_K(m^{-1}\gamma m)\mathrm{d}m\\
=&\sum_{Q\in\mathcal{P}(B)}\sum_{\substack{H\in\mathfrak{a}_Q\\ \deg H=e}}\Gamma'_Q(H-T',T-T')J^{T'}_{M_Q,H}
\end{aligned}$$

où $M_Q(\mathbb{A})^H = H_Q^{-1}(H)$ est l'image inverse de H par le morphisme de Harish-Chandra. On observe que la valeur $J_{M_Q}^{H,T_1}$ ne dépend que de e et (e_i) tels que $H\in\mathfrak{h}^e_{(e_i)}$, donc cela nous permet de poser $J^{T'}_{M_Q,e,(e_i)} = J^{T'}_{M_Q,H}$ et alors

$$J_e^T = \sum_{Q\in\mathcal{P}}\sum_{(e_i)}\Big(\sum_{H\in\mathfrak{h}^e_{(e_i)}}\Gamma'_Q(H-T_1,T-T')\Big)J^{T_1}_{M_Q,e,(e_i)} = \sum_{Q\in\mathcal{P}}\sum_{(e_i)}\widehat{\Gamma}'_{Q,\mathfrak{h}^e_{(e_i)}}(1,T)J^{T'}_{M_Q,e,(e_i)}. \tag{IV.12}$$

Par le lemme IV.2.1.8 cela prouve que J_e^T est quasi-polynomiale en T. □

IV.4.2 Exprimer la trace d'Arthur en terme de nombre de fibrés indécomposables. Dans ce paragraphe nous donnons une interprétation pour J_e^T en terme de fibrés vectoriels indécomposables. Quand $(e,n)=1$, on obtient une interprétation en terme de fibrés de Higgs stables.

Définition IV.4.2.1. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X_1. On dit que $\mathcal{E}$ est isocline si pour toute décomposition $\mathcal{E}\cong\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$, on a $\mu(\mathcal{F})=\mu(\mathcal{E})$.*

Remarque IV.4.2.2. *Il s'ensuit par la définition que tout le fibré vectoriel se décompose, uniquement à isomorphisme près, comme une somme directe de fibrés isoclines de pente différente.*

Soit $\mathcal{P}^e_n(X_1)$ le nombre de classes d'isomorphie de fibrés vectoriels isoclines de rang n et de degré e. Par la proposition IV.3.1.9, un fibré vectoriel isocline est T-semi-stable quand $d(T)\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$. Comme le nombre des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels T-semi-stables de rang n et de degré e est fini, on sait donc $\mathcal{P}^e_n(X_1)$ est un nombre fini.

Théorème IV.4.2.3. *Soit $e\in\mathbb{Z}$, on a*

$$J_e^{T=0} = \mathcal{P}^e_n(X_1).$$

Démonstration. Pour tout $T\in\mathfrak{a}_B\cong\mathbb{R}^n$, tels que $d(T)\geqslant\max\{2g_X-2,0\}$, d'après le théorème IV.4.1.4

$$J_e^T = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}F^G(x,T)\sum_{\gamma\in G(F)}\mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} F^G(x,T) \sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x \\ = \sum_{x\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e/K} \int_{K\cap x^{-1}G(F)x\backslash K} F^G(xk,T) \sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}_K(k^{-1}x^{-1}\gamma xk)\mathrm{d}k \\ = \sum_{x\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e/K} \mathrm{vol}(\frac{K}{K\cap x^{-1}G(F)x}) F^G(x,T) \sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x).\end{aligned}$$

En utilisant la traduction de Weil entre les fibrés et les adèles, on voit que $\gamma \in G(F)$ satisfaisait $\gamma x \in xK$ si et seulement si γ induit un automorphisme de $\mathcal{E}^x$. Donc on a

$$\begin{cases}\mathrm{vol}(\frac{K}{K\cap x^{-1}G(F)x}) = |\mathrm{Aut}(\mathcal{E}^x)|^{-1}; \\ \sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}_K(x^{-1}\gamma x) = |\mathrm{Aut}(\mathcal{E}^x)|.\end{cases}$$

Après le lemme IV.3.1.4, on obtient alors

$$\begin{aligned}J_e^T &= \sum_{\mathcal{E}\ T\text{-semi-stable de degré } e} \frac{|Aut(\mathcal{E})|}{|Aut(\mathcal{E})|} \\ &= \#\text{classes d'isomorphie de fibrés } T\text{-semi-stables de degré } e.\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Soit $I = (n_1, \dots, n_k)$ (le paragraphe III.1.2) une partition de n. On lui associe le sous-groupe parabolique standard P_I de G dont le sous-groupe de Levi s'identifie à $GL_{n_1} \times \cdots GL_{n_k}$. On définit la fonction caractéristique sur $\mathfrak{a}_P$ par $\Gamma_I(H,T) = \Gamma_{P_I}(H,T)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}_P$ (cf. paragraphe IV.2.1).

Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang n, on a une décomposition à isomorphisme près

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathcal{I}_{i,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{i,s_i})$$

où $\mathcal{I}_{i,j}$ sont des fibrés indécomposables de pentes μ_i telles que $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. Soit n_i le rang de $\mathcal{I}_{i,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{i,s_i}$. Soit $I_{\mathcal{E}} = (n_1, \dots, n_k)$. On a

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Donc $I_{\mathcal{E}}$ est une partition de n qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\mathcal{E}$. Soit $H_{\mathcal{E}} = (n_1\mu_1, \dots, n_k\mu_k)$, par la proposition IV.3.1.9 quand $d(T) \geqslant \max\{2g_X - 2, 0\}$ le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est T-semi-stable si et seulement si $\Gamma_{I_{\mathcal{E}}}(H_{\mathcal{E}}, T) = 1$.

En vertu du fait que la tensorisation par un fibré en droites de degré 1 donne une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés indécomposables de degré e et de rang

n et celles de degré $e+n$ et de rang n, le nombre $\mathcal{P}_n^e(X_1)$ ne dépend que de la classe de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc on a le droit d'écrire $\mathcal{P}_n^e(X_1)$ pour $e \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On conclut que quand $d(T) \geqslant \max\{2g_X - 2, 0\}$:

$$\begin{aligned} J_e^T &= \sum_{\mathcal{E} \text{ fibrés vectoriels de degré } e} \Gamma_{I_\mathcal{E}}(H_\mathcal{E}, T) \\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \sum_{\substack{\frac{e_1}{n_1}>\cdots>\frac{e_m}{n_m} \\ e_1+\cdots+e_m=e}} \Gamma_{(n_1,\ldots,n_m)}((e_1,\ldots,e_m),T) \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_{n_i}^{e_i}(X_1) \\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \sum_{e_1+\cdots+e_m=e} \Gamma_{(n_1,\ldots,n_m)}((e_1,\ldots,e_m),T) \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_{n_i}^{e_i}(X_1). \end{aligned}$$

On utilise les notations définies dans le lemme IV.2.1.8, alors on a de plus

$$\text{(IV.14)} \qquad \begin{aligned} J_e^T &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \sum_{\substack{e_i \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \\ i=1,\ldots,m}} \sum_{H \in \mathfrak{h}^e_{(e_i)}} \Gamma_{(n_1,\ldots,n_m)}(H,T) \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_{n_i}^{e_i}(X_1) \\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \sum_{\substack{e_i \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \\ i=1,\ldots,m}} \widehat{\Gamma}_{(n_1,\ldots,n_m),\mathfrak{h}^e_{(e_i)}}(1,T) \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_{n_i}^{e_i}(X_1). \end{aligned}$$

Les deux côtés de cette égalité sont quasi-polynomiales en T quand $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+}$ par le lemme IV.2.1.8, le lemme IV.2.1.6 et le théorème IV.4.1.5, donc c'est une égalité pour tout $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+}$. Posons $T=0$, comme $\widehat{\Gamma}_{(n_1,\ldots,n_m),\mathfrak{h}^e_{(e_i)}}(0,0) = 0$ sauf $(n_1,\ldots,n_m) = (n)$, on obtient donc

$$J_e^{T=0} = \mathcal{P}_n^e(X_1).$$

□

En particulier, on a

Corollaire IV.4.2.4. *Quand $(e,n)=1$, $\mathcal{P}_n^e(X_1) = A_{n,e}(X_1)$ le nombre des fibrés vectoriels géométriquement indécomposables. Donc dans ce cas*

$$J_e^{T=0} = A_{n,e}(X_1) = q^{-1-(g_X-1)n^2} |\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$$

Démonstration. Quand $(e,n)=1$, tout fibré vectoriel isocline de rang n et de degré e est indécomposable. Mais tout le fibré indécomposable de rang n et de degré e est géométriquement indécomposable (cf. lemme IV.3.1.1 et preuve du lemme 2.6. de [Sc16]). On obtient ce corollaire par le théorème IV.3.2.1 et le théorème IV.4.2.3. □

Chapitre V

La partie spectrale de la formule des traces

V.1 Notations et lemmes

V.1.1 Soit $P, Q \in \mathcal{P}(B)$ deux sous-groupes paraboliques standard. Soit $W(\mathfrak{a}_P, Q)$ (resp. $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$) l'ensemble des doubles classes dans $W^Q\backslash W^G/W^P = W^{M_Q}\backslash W^G/W^{M_P}$ formées d'éléments $s \in W$ tels que $s(\mathfrak{a}_P) \supseteq \mathfrak{a}_Q$ (resp. $s(\mathfrak{a}_P) = \mathfrak{a}_Q$).

Soit M un sous-groupe de Levi et $s \in W$. On notera $s(M)$ pour sMs^{-1}. On a $s(\mathfrak{a}_M) = \mathfrak{a}_{s(M)}$. Chaque $s \in W$ induit un isomorphisme

$$s : X_M^G \to X_{s(M)}^G$$

qui est défini par $s(\lambda)(m) := \lambda(s^{-1}ms)$, $\forall\, \lambda \in X_M^G$ et $m \in s(M)(\mathbb{A})$.

Soit M un sous-groupe de Levi, et $w \in W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)$. Il existe un sous-groupe de Levi minimal L^w dans $\mathcal{L}(M)$ tel que tout représentant de w dans W est contenu dans W^{L^w}. Ce sous-groupe de Levi est caractérisé par le fait que $\mathfrak{a}_{L^w} = \ker(w - id)$. Donc w agit comme identité sur $X_{L^w}^G$.

Chaque composante connexe du complémentaire de l'union des hyperplans $\{H \in \mathfrak{a}_M^G | \, \alpha(H) = 0\}$ pour $\alpha \in \Phi(Z_M, G)$ dans $\mathfrak{a}_M^G$ est appelé une chambre. L'ensemble des chambres dans $\mathfrak{a}_M^G$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(M)$ de telle façon que tout $P \in \mathcal{P}(M)$ détermine une chambre par

$$\{H \in \mathfrak{a}_M^G | \, \alpha(H) > 0, \ \forall\, \alpha \in \Delta_P\}$$

Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Il existe donc un unique sous-groupe parabolique $\overline{P} \in \mathcal{P}(M)$ tel qu'on ait $\Phi_{\overline{P}} = -\Phi_P$.

V.1.2 Soit L un sous-groupe de Levi. Afin d'énoncer des résultats facilement, on fixe une fois pour toutes, un $\rho_L \in \mathfrak{a}_T^G$ de position générale (i.e. $\alpha(\rho_L) \neq 0$, $\forall\, \alpha \in \Phi(T, G)$) pour lequel il existe un couple (nécessairement unique) d'un sous-groupe parabolique $Q_L \in \mathcal{P}(L)$ et un sous-groupe de Borel semi-standard $B_L \subseteq Q_L$ tel que

$$\alpha(\rho_L) > 0 \quad \forall\, \alpha \in \Delta_{B_L}.$$

Pour ne pas contredire les notations déjà fixées, on suppose que $\rho_L = \rho_Q$ si L est le sous-groupe de Levi du sous-groupe parabolique standard Q. Alors dans ce cas, $B_L = B$ et $Q_L = Q$.

Soit

$$W(\mathfrak{a}_L) := \coprod_{Q \in \mathcal{P}(B_L)} W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_Q).$$

On va identifier l'ensemble des doubles classes dans $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_Q)$ avec l'ensemble de ses représentants dans W de longueur minimale.

V.1.3 Le choix de ρ_L donne un ordre pour l'ensemble des facteurs de L : on peut faire une identification $L \cong^{\rho_L} GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$(où on a précisé dans la notation ρ_L pour indiquer la dépendance du choix). Comme on a fait pour les sous-groupes de Levi standard dans le paragraphe IV.1.2, on a $\mathfrak{a}_L^* \cong^{\rho_L} \mathbb{R}^r$ par la base $(\det_{L,i})_{i=1,\dots,r}$:

$$\begin{aligned} \det_{L,i} : \quad L \quad &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ (m_1, \dots, m_r) &\longmapsto \det m_i \end{aligned}$$

L'espace $\mathfrak{a}_L$ s'identifie avec $\mathbb{R}^n$ par la base duale de $(\det_{L,i})_{i=1,\dots,r}$, que nous noterons $(\psi_{L,i})_{i=1,\dots,r}$.

Alors toute racine dans $\Phi(Z_L, G)$ est de la forme

$$\frac{1}{n_i}\det_{L,i} - \frac{1}{n_j}\det_{L,j}$$

pour $i \neq j$ si et seulement si $i < j$, $\frac{1}{n_i}\det_{L,i} - \frac{1}{n_j}\det_{L,j}$ appartient à Φ_{Q_L}. Dans ce cas, un élément $s \in W(\mathfrak{a}_L)$ permute les facteurs de L. On a un isomorphisme $W(\mathfrak{a}_L) \cong^{\rho_L} \mathfrak{S}_r$, qui est caractérisé par le fait que $\forall\, s \in W(\mathfrak{a}_L)$, il existe un unique élément dans $\mathfrak{S}_r$ qu'on note encore s tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a}_L \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\cong^{\rho_L}"'] & \mathfrak{a}_{s(L)} \arrow[d, "\cong^{\rho_L}"] \\ \mathbb{R}^r \arrow[r, "s"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

où pour $(H_1, \cdots, H_r) \in \mathbb{R}^r$

$$s(H_1, \cdots, H_r) = (H_{s^{-1}(1)}, \cdots, H_{s^{-1}(r)}).$$

V.1.4 On a un plongement $X_L \hookrightarrow \mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}} := \mathfrak{a}_L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ donné par l'application

$$\lambda \in X_L^G \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda^{\psi_{L,i}} \det_{L,i}$$

Utilisons le système des coordonnées de $\mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$, X_L^G s'identifie avec

$$\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r \cong \mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}} \mid \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \cdots \lambda_r^{n_r} = 1\}$$

Cela fournit un système de coordonnées sur X_L. Sous ces identifications, $\mathrm{Im} X_L^G$ est égal à

$$\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r \cong \mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}} \mid |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_r| = 1; \quad \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \cdots \lambda_r^{n_r} = 1\}.$$

En général, ce groupe n'est pas connexe, mais nous ne considérons que des fonctions qui sont des restrictions à X_L^G de fonctions sur $\mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$. Nous dirons qu'une fonction $\lambda \mapsto \theta(\lambda)$ sur X_L^G est rationnelle s'il existe une fonction rationnelle Θ sur $\mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$ telle que $\theta = \Theta|_{X_L^G}$.

L'accouplement multiplicatif sur $X_L \times \mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$, noté par $(\lambda, H) \mapsto \lambda^H$, est défini comme

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^{(H_1, \cdots, H_r)} = \lambda_1^{H_1} \cdots \lambda_r^{H_r}.$$

Il ne dépend pas du choix de ρ_L car il est déterminé par les relations $\lambda^{H_Q(g)} := \lambda(g)$ pour $Q \in \mathcal{P}(L)$, $\forall\, g \in G(\mathbb{A})$ et $\lambda \in X_Q^G$ (cf. paragraphe III.1.6).

Le plongement $X_L \hookrightarrow \mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$ fournit un autre accouplement sur $X_L \times \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, noté par $(\lambda, H) \mapsto \langle \lambda, H \rangle$, qui est induit par l'accouplement naturel

$$\mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}} \times \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

Sous le système des coordonnées fixées, on a

$$\langle (\lambda_1, \ldots, \lambda_r), (H_1, \cdots, H_r) \rangle = \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_r H_r$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in X_L$ et $H = (H_1, \cdots, H_r) \in \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$. Cela ne dépend pas du choix de ρ_L.

V.1.5 Soit $s \in W(\mathfrak{a}_L)$. Alors $s(L)$ est le sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique contenant B_L que nous noterons R_s. Soit R^s le sous-groupe parabolique contenant B_L dont le sous-groupe de Levi admet comme racines simples les $\alpha \in \Delta_{B_L}$ tels que $s^{-1}(\alpha)(\rho_L) > 0$. On pose

$$Q_s = s^{-1}(R_s) \quad \text{et} \quad Q^s = s^{-1}(R^s).$$

L'association $s \to Q_s$ donne une bijection entre $W(\mathfrak{a}_L)$ et $\mathcal{P}(L)$ (cf. lemme 1.4.1 de [LW13]).

V.1.6 On dit que deux sous-groupes paraboliques $P, Q \in \mathcal{P}(L)$ sont adjacents si les chambres associées sont adjacents, i.e. on a $|\Phi_{\overline{P}} \cap \Phi_Q| = 1$. Cela équivaut qu'il existe un unique $\alpha \in \Delta_P$ tel que $-\alpha \in \Delta_Q$ et les restrictions de Δ_P et Δ_Q sur la facette commune définie par $\{H \in \mathfrak{a}_L |\, \alpha(H) = 0\}$ coïncident. Cela implique de nouveau que pour tout $\beta \in \Delta_P$, il existe un unique $\beta' \in \Delta_Q$ tel qu'on ait $\lambda^{\beta^\vee} = \lambda^{\beta'^\vee}$, $\forall\, \lambda \in X_L^G$ avec $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$.

V.1.7 Soit $Q \in \mathcal{P}(L)$. Soit ϕ_Q la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_T$ tels que

$$\varpi_\alpha(H) \leqslant 0 \quad \text{si } \alpha(\rho_L) > 0$$

et

$$\varpi_\alpha(H) > 0 \quad \text{si } \alpha(\rho_L) < 0$$

où les α parcourent Δ_Q et $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Delta_Q} = \widehat{\Delta}_Q$ est la base duale de $\Delta_Q^\vee$ (cf. paragraphe IV.1.2). Soit $\epsilon(Q)$ le nombre des $\alpha \in \Delta_Q$ avec $\alpha(\rho_L) < 0$. Suivant L. Lafforgue, on définit la fonction rationnelle $\widehat{\mathbb{1}}_Q$ sur X_L^G. Pour $\lambda \in X_L^G$ dans la région définie par

$$|\lambda^{\alpha^\vee}| < 1, \quad \forall\, \alpha \in \Phi(T, L)\ \alpha(\rho_L) > 0$$

elle est donnée par la série convergente suivante :

$$\widehat{\mathbb{1}}_Q(\lambda) = (-1)^{\epsilon(Q)} \sum_{H \in \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{Z}}/\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbb{Z}}} \frac{\phi_Q(H)}{\lambda^H}.$$

Notons qu'on a des bijections

$$\mathfrak{a}_{Q,\mathbb{Z}}/\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^r/(n_1, \ldots, n_r)\mathbb{Z} \cong \coprod_{e=0}^{n-1} \{(H_1, \ldots, H_r) \in \mathbb{Z}^r |\, H_1 + \cdots + H_r = e\}.$$

On peut définir aussi

$$\widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\lambda) = (-1)^{\epsilon(Q)} \sum_{\substack{H \in \mathbb{Z}^r \\ H_1 + \cdots + H_r = e}} \frac{\phi_Q(H)}{\lambda^H}.$$

On a alors

$$\widehat{\mathbb{1}}_Q(\lambda) = \sum_{e=0}^{n-1} \widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\lambda).$$

Proposition V.1.7.1. *Soit $Q \in \mathcal{P}(L)$ associé à $s \in W(\mathfrak{a}_L)$, c'est-à-dire $Q = Q_s$. On a*

$$\widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\lambda) = \lambda^{\widetilde{\mathrm{H}}_Q^e} \prod_{\alpha \in \Delta_Q} \frac{1}{1 - \lambda^{\alpha^\vee}} \tag{V.1}$$

où

$$\widetilde{\mathrm{H}}_Q^e = s^{-1}([\frac{e}{n}r^0_{s(L)}] - [\frac{e}{n}r^1_{s(L)}], \ldots, [\frac{e}{n}r^{r-1}_{s(L)}] - [\frac{e}{n}r^r_{s(L)}]) \in s^{-1}(\mathfrak{a}^G_{s(L)}) = \mathfrak{a}^G_L \,, \tag{V.2}$$

ici, on a noté $r^i_{s(L)} = n_{s^{-1}(1)} + \cdots + n_{s^{-1}(i)}$ *si* $L \cong^{\rho_L} GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$.

Démonstration. Utilisons la base $\Delta_Q^\vee$ de $\mathfrak{a}_L^G$ qui est duale de Δ_Q, chaque $H \in \mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}$ peut s'écrire uniquement

$$H = s^{-1}(e, 0, \ldots, 0) + \sum_{\alpha \in \Delta_Q} m_\alpha \alpha^\vee$$

pour $(e, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{a}_{s(L),\mathbb{Z}}$. De plus, on a $\forall\ \alpha \in \Delta_{Q_s}$

$$s(\alpha)(\rho_L) > 0$$

et la base des poids $\{\varpi_\alpha |\ \alpha \in \Phi(Z_{s(L)}, G); \alpha(\rho_L) > 0\}$ de $\mathfrak{a}_{s(L)}$ est précisément $\{\varpi_i |\ i = 1, \cdots, r-1\}$ où

$$\varpi_i(H) = \frac{n_{s^{-1}(i+1)} + \cdots + n_{s^{-1}(r)}}{n}(H_1 + \cdots + H_i) - \frac{n_{s^{-1}(1)} + \cdots + n_{s^{-1}(i)}}{n}(H_{i+1} + \cdots + H_r)$$

pour $H \in \mathfrak{a}_{s(L)}$. Le calcul restant est direct. □

On définit des fonctions pour $Q \in \mathcal{P}(L)$ et $\lambda \in X_L^G$:

$$\theta_Q(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_Q} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle.$$

On a également pour tout $s \in W(\mathfrak{a}_L)$:

$$\widehat{\mathbb{1}}^e_{Q_s}(\lambda) = (-1)^{\dim \mathfrak{a}_L^G} \lambda^{\mathrm{H}^e_{Q_s}} \prod_{\alpha \in \Delta_{Q_s}} \frac{1}{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle} = (-1)^{\dim \mathfrak{a}_L^G} \lambda^{\mathrm{H}^e_{Q_s}} \theta_{Q_s}(\lambda)^{-1} \tag{V.3}$$

ici $\mathrm{H}^e_{Q_s} = \widetilde{\mathrm{H}}^e_{Q_s} + s^{-1}(0, 1, 1 \ldots, 1)$ où $(0, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{|L|} \cong^{\rho_L} \mathfrak{a}_{s(L)}$ (l'identification est donnée par ρ_L non pas par $\rho_{s(L)}$). En particulier, $[\frac{-1}{n} r^i_{s(L)}] = -1$ pour $r \geqslant i \geqslant 1$. Donc pour tout $Q \in \mathcal{P}(M)$, on prend $e = -1$ et on a

$$\widehat{\mathbb{1}}^{-1}_Q(\lambda) = \left((-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^G} \prod_{i=1}^r \lambda_i \right) \theta_Q(\lambda)^{-1}. \tag{V.4}$$

Lemme V.1.7.2. *Soit ζ une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on définit un caractère $\eta \in X_G^G$ par*

$$\eta(g) = \zeta^{\deg \det g} \quad g \in G(\mathbb{A})$$

Alors pour tout $e \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \zeta^k \widehat{\mathbb{1}}_Q(\lambda\eta^{ek}) = \widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\lambda).$$

Démonstration. Observons que l'égalité est vraie sur la région définie par

$$|\lambda^{\alpha^\vee}| < 1, \quad \forall\, \alpha \in \Phi(T,L)\ \alpha(\rho_L) > 0$$

en vérifiant les séries de définitions. □

V.2 (G,M)-familles d'Arthur

V.2.1 (G,M)-familles. Nous introduisons la notion de (G,M)-familles. Comme les séries d'Eisenstein sont des fonctions rationnelles sur X_M^G, les (G,M)-familles dont nous avons besoin diffèrent légèrement de celles qu'Arthur a définies.

Définition V.2.1.1 (p.36, [Ar81]). *Soit $\Omega \subseteq X_M^G$ un domaine. Soit $(c_P(\lambda))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une famille de fonctions holomorphes sur Ω. On dit que c'est une (G,M)-famille si $c_P(\lambda) = c_{P'}(\lambda)$ pour toute paire de sous-groupes paraboliques adjacents $P,P' \in \mathcal{P}(M)$, et pour tout $\lambda \in \Omega$ tel que $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$ où α est l'unique racine $\Phi_P \cap \Phi_{\overline{P}'}$.*

Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille des sur $\Omega \subseteq X_M^G$, on définit une fonction sur Ω par

$$c_M(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} c_Q(\lambda)\theta_Q(\lambda)^{-1}. \tag{V.5}$$

Théorème V.2.1.2 (lemme 6.2, [Ar81]). *Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une famille des fonctions méromorphes sur X_M^G. Si c'est une (G,M)-famille sur un voisinage de $\lambda_0 \in X_M^G$, alors*

$$c_M(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} c_Q(\lambda)\theta_Q(\lambda)^{-1}$$

est une fonction holomorphe en λ_0.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$\Sigma = \{\alpha \in \Phi(Z_M, G) | \lambda_0^{\alpha^\vee} = 1\}$$

Les seuls singularités possibles sont sur les hypersurfaces définies par $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$, $\alpha \in \Sigma$. Soit $\alpha \in \Sigma$, les paraboliques $Q \in \mathcal{P}(M)$ pour qui θ_Q^{-1} n'est pas régulière sur l'hypersurface $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$ peuvent se regrouper en deux parties : une partie consiste de ceux qui contiennent α comme une racine et autre partie consiste de ceux qui contiennent $-\alpha$. On observe que la relation adjacence donne une bijection entre les deux parties, et si Q et Q' sont adjacents, l'hypersurface $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$ n'est pas singulière pour la somme

$$\theta_Q(\lambda)^{-1}c_Q(\lambda) + \theta_{Q'}(\lambda)^{-1}c_{Q'}(\lambda)$$

par le théorème de Taylor. □

V.2.2 Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille sur $\Omega \subseteq X_M^G$ qui contient $1 \in X_M^G$. On notera c_M pour la valeur $c_M(1)$, i.e.

$$c_M = \lim_{\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} c_Q(\lambda)\theta_Q(\lambda)^{-1} \tag{V.6}$$

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. On va associer une nouvelle (G,L)-famille et des nouvelles (L,M)-familles. On choisit un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}(L)$. Pour tout $R \in \mathcal{P}^L(M)$, on pose

$$c_R^Q(\lambda) = c_{Q(R)}(\lambda) \quad \forall\, \lambda \in X_M^L \subseteq X_M^G \tag{V.7}$$

où $Q(R)$ est l'unique sous-groupe parabolique dans $\mathcal{P}(M)$ qui est contenu dans Q dont l'intersection avec L est R. Remarquons que ce groupe n'est autre que RN_Q. Nous obtenons d'après cette procédure une (L,M)-famille dont la construction dépend du choix de Q. De plus, pour tout $Q \in \mathcal{P}(L)$, et $\lambda \in X_L^G \subseteq X_M^G$ nous prenons

$$c_Q(\lambda) = c_P(\lambda) \tag{V.8}$$

pour n'importe quel groupe $P \subseteq Q$, cette construction ne dépend pas du choix de groupe P car $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille. La nouvelle famille de fonctions est une (G,L)-famille.

Théorème V.2.2.1 (Corollary 6.5, [Ar81])**.** *Soient $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ et $(d_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ deux (G,M)-familles sur un voisinage de* 1 *telles que les valeurs c_M^Q soient indépendants de $Q \in \mathcal{P}(L)$, on notera c_M^L cette valeur. Nous avons la formule de scindage du produit de deux (G,M)-familles*

$$(cd)_M = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} c_M^L d_L.$$

Démonstration. Rappelons qu'on a un plongement $X_M^G \hookrightarrow \mathbb{C}^r \cong \mathfrak{a}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (cf. paragraphe V.1.4). Notons que la restriction d'une (G,M)-famille définie par Arthur est une (G,M)-famille à notre sens. Soient $P \subseteq Q$ deux sous-groupes paraboliques. Comme le volume $\mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee)$ ne dépend que des sous-groupes de Levi M_P et M_Q, on note

$$v_{M_P}^{M_Q} := \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\Delta_P^Q)^\vee).$$

Par le Corollary 6.5 de [Ar81], on a

$$(cd)_M = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} \frac{v_M^L v_L^G}{v_M^G} c_M^L d_L.$$

Pour tout $P \subseteq Q$, l'espace $\mathfrak{a}_P^Q$ est orthogonal à l'espace $\mathfrak{a}_Q^G$, et l'ensemble $\Delta_Q^\vee$ est la projection de $\Delta_P^\vee - (\Delta_P^Q)^\vee$ en $\mathfrak{a}_Q^G$, on obtient alors $v_M^L v_L^G = v_M^G$, et donc

$$(cd)_M = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} c_M^L d_L.$$

□

V.2.3 Des théorèmes pour des (G,M)-familles spéciales.

Théorème V.2.3.1 (p.1317, [Ar82]). *Soit $(c_\beta)_{\beta\in\Phi(Z_M,G)}$ une famille des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^\times$ indexées par les racines avec $c_\beta(1)=1$. Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ la famille de fonctions définies par :*

$$c_Q(\lambda) = \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}).$$

Alors $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille sur le domaine où tout les c_Q soient holomorphe (en particulier, il contient 1). On a

$$c_M = \lim_{\mu\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \theta_Q(\mu)^{-1} c_Q(\mu) = \sum_F \prod_{\beta\in F} c'_\beta(1)$$

où dans la première somme, F parcourt tous les parties de $\Phi(Z_M,G)$ qui forment des bases de $\mathfrak{a}_P^{G*}$ et c'_β est la dérivée de c_β.

Démonstration. Tout d'abord, on montre que $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille sur un domaine contenant 1.

Soient Q et Q' deux sous-groupes paraboliques adjacents dans $\mathcal{P}(M)$. Alors il existe un et seulement un élément α dans $\Phi_Q \cap \Phi_{\overline{Q}'}$, tel que pour tout $\lambda \in X_M^G$ avec $\lambda^{\alpha^\vee}=1$, on ait

$$\begin{aligned} c_Q(\lambda) &= \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \\ &= c_\alpha(1) \prod_{\beta\in\Phi_Q\cap\Phi_{Q'}} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \\ &= \prod_{\beta\in\Phi_Q\cap\Phi_{Q'}} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \\ &= c_{Q'}(\lambda) \end{aligned}$$

Maintenant on calcule c_M. On suit la méthode d'Arthur (cf. page 37 [Ar81] et page 1317 [Ar82]). On pose $\mu = 1+\xi t$, avec $\xi \in X_P^G \subseteq (\mathbb{C}^\times)^{\dim \mathfrak{a}_P}$. Quand $t\in\mathbb{R}$ est assez petit, par le développement de Taylor on a :

$$c_M(1+\xi t) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \theta_P(\xi)^{-1} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\Big((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^k \prod_{\beta\in\Sigma_P} c_\beta((1+\xi t)^{\beta^\vee})|_{t=0}\Big) t^{k-m} ,$$

où $m = \dim \mathfrak{a}_M^G$. Comme $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}M}$ est une (G,M)-famille, c_M est lisse donc

$$\text{(V.9)} \qquad \begin{cases} 0 = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \theta_P(\xi)^{-1}\frac{1}{k!}\Big((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^k \prod_{\beta\in\Sigma_P} c_\beta((1+\xi t)^{\beta^\vee})|_{t=0}\Big), \quad 1\leqslant k\leqslant m-1 \\ \\ c_M = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \theta_P(\xi)^{-1}\frac{1}{m!}\Big((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m \prod_{\beta\in\Sigma_P} c_\beta((1+\xi t)^{\beta^\vee})|_{t=0}\Big) \end{cases}$$

Il s'ensuit que c_M ne dépend que des valeurs $c_\beta^{(j)}(1)$ pour tout $\beta\in\Phi(Z_M,G)$, $1\leqslant j\leqslant m$ et ne dépend pas de ξ. On observe de plus que si on suppose

$$c_\beta(z) = 1 + \sum_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{X_{\beta,j}}{j!}(z-1)^j \in \mathbb{C}[z, X_{\beta,1},\ldots,X_{\beta,m}]$$

alors c_M sera un polynôme bien défini dans $\mathbb{C}[X_{\beta,j} : 1\leqslant j\leqslant m, \beta\in\Phi(Z_M,G)]$ et si on évalue ce polynôme en posant $X_{\beta,j} = c_\beta^{(j)}(1)$, on retrouvera la valeur désirée. Nous travaillerons donc avec ces polynômes dans la suite de la démonstration.

Si β est une racine telle que $\beta^\vee = \psi_{M,u} - \psi_{M,v} \in \mathfrak{a}_M$, $1\leqslant u\neq v\leqslant \dim\mathfrak{a}_M$ (cf. paragraphe IV.1.2 pour les notations) :

$$\text{(V.10)} \qquad \begin{aligned} c_\beta((1+\xi t)^{\beta^\vee}) &= 1 + \sum_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{X_{\beta,j}}{j!}(\frac{1+\xi_u t}{1+\xi_v t}-1)^j \\ &= 1 + \sum_{m\geqslant j\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{X_{\beta,j}}{j!}(\xi_u-\xi_v)^j\binom{-j}{n}\xi_v^n t^{n+j} \\ &= 1 + \sum_{N\geqslant 1}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant\min\{m,N\}}\frac{X_{\beta,j}}{j!}\binom{N-1}{j-1}(-1)^{N-j}(\xi_u-\xi_v)^j\xi_v^{N-j}\right)t^N. \end{aligned}$$

Notons que pour le polynôme c_M, il n'existe que des monômes dont chaque variable est de degré au plus 1. Soient $\beta_1,\ldots,\beta_k\in\Phi(Z_M,G)$ et $m\geqslant j_1,\ldots,j_k\geqslant 1$. Considérons le coefficient de monôme $X_{\beta_1,j_1}\cdots X_{\beta_k,j_k}$ dans c_M, pour lequel on peut supposer que $\beta_i\neq\beta_j$ si $i\neq j$.

Supposons tout d'abord qu'il existe un i tel que $j_i\geqslant 2$ par exemple c'est $j_1\geqslant 2$. Posons

$$\xi = z\beta_1 + \xi_1$$

avec β_1 orthogonale à ξ_1. Nous pouvons certainement choisir ξ_1 tel que

$$\{\alpha\in\Phi(Z_M,G)|\langle\alpha^\vee,\xi_1\rangle = 0\} = \{\beta_1,-\beta_1\}.$$

Observons que le coefficient de X_{β_1,j_1} est d'ordre j_1 en z quand z approche 0, i.e. est égal à

$O(z^{j_1})$. D'autre part, on sait que

$$\theta_Q(z\beta_1 + \xi_1) = O(z^{-1})$$

pour tout sous-groupe parabolique Q. Donc le coefficient considéré approche 0 quand z approche 0, mais ce nombre *a priori* ne dépend pas de z, ça implique alors que les coefficients de $X_{\beta_1,j_1} \cdots X_{\beta_k,j_k}$ s'annulent dès qu'il existe un i tel que $j_i \geqslant 2$. On conclut que c_M est indépendant de $X_{\beta,j}$ pour $j \geqslant 2$.

Donc on peut supposer que $X_{\beta,j} = 0$ pour $j \geqslant 2$, et par simplicité on note $X_{\beta,1} = X_\beta$, i.e. $c_\beta(z) = 1 + X_\beta(z-1)$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Phi(Z_M, G)$ deux-à-deux distincts. Considérons le coefficient de monôme $X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_k}$ dans c_M. Il est égal à

$$(\sum_Q{}' \theta_Q(\xi)^{-1}) \prod_{j=1}^k \langle \xi, \beta_j^\vee \rangle (\sum_{\{a_j \geqslant 0 | \sum a_j + k = m\}} (-1)^{m-k} \prod_{j=1}^k \xi_{t(\beta_j)}^{a_j})$$

où la somme porte sur tous $Q \in \mathcal{P}(M)$ tels que $\Sigma_Q \supseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ et on suppose $\beta^\vee = \psi_{M,s(\beta)} - \psi_{M,t(\beta)}$ (cf. paragraphe V.1.3).

Si $k > m$, le coefficient est donc 0.

Si $m > k$. On considère le coefficient du monôme $X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_k}$ dans la première équation de (V.9) qui est zéro mais peut s'écrire aussi comme

$$(\sum_Q{}' \theta_Q(\xi)^{-1}) \prod_{j=1}^k \langle \xi, \beta_j^\vee \rangle$$

où la somme porte sur tous $Q \in \mathcal{P}(M)$ tels que $\Sigma_Q \supseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$. Donc on a

$$0 = (\sum_Q{}' \theta_Q(\xi)^{-1}) \prod_{j=1}^k \langle \xi, \beta_j^\vee \rangle (\sum_{\{a_j \geqslant 0 | \sum a_j + k = m\}} (-1)^{m-k} \prod_{j=1}^k \xi_{t(\beta_j)}^{a_j}).$$

Il ne reste qu'à considérer le cas où $k = m$. Dans ce cas le coefficient de $X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_m}$ est égal à

$$(\sum_Q{}' \theta_Q(\xi)^{-1}) \prod_{j=1}^k \langle \xi, \beta_j^\vee \rangle$$

où la somme porte sur tous $Q \in \mathcal{P}(M)$ tels que $\Sigma_Q \supseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$. Cela a été considéré par Arthur dans [Ar82] (p.1319-p.1320), où il a montré que ce coefficient est égal à 0 si les β_i sont linéairement dépendants, et est égal à 1 si les β_i forment une base.

En conclusion,

$$c_M = \sum_F \prod_{\beta \in F} X_\beta$$

où $F \subseteq \Phi(M, G)$ parcourt les bases de $\mathfrak{a}_P^{G*}$. La preuve est complète si l'on pose $X_\beta = c'_\beta(1)$. □

Lemme V.2.3.2. *Notons $\mathbb{S}^1$ le cercle dans $\mathbb{C}^\times$ orienté dans le sens antihoraire et* $\mathrm{d}z$ *la mesure complexe usuelle. Pour des fonctions f_β intégrables et F une base de $\mathfrak{a}_M^G$*

$$\int_{\mathrm{Im}X_M^G}\prod_{\beta\in F}f_\beta(\lambda^{\beta^\vee})\lambda^{\beta^\vee}\mathrm{d}\lambda=\prod_{\beta\in F}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^1}f_\beta(z)\mathrm{d}z$$

Démonstration. Soit $m=\dim\mathfrak{a}_M^G$. Considérons le morphisme défini par

$$\begin{aligned}u_F:\mathrm{Im}X_M^G&\longrightarrow(\mathbb{S}^1)^m\\ \lambda&\longmapsto(\lambda^{\beta^\vee})_{\beta\in F}\end{aligned}$$

u_F est surjectif et a pour noyau X_G^G, donc $(\mathbb{S}^1)^m$ est un quotient de $\mathrm{Im}X_M^G$. De plus, on observe que la fonction

$$\lambda\mapsto\prod_{\beta\in F}f_\beta(\lambda^{\beta^\vee})\lambda^{\beta^\vee}$$

est invariante sous l'action de X_G^G. Donc soit $\widetilde{\mathrm{d}z}$ la mesure de Haar de $\mathbb{S}^1$ tel que le volume de $\mathbb{S}^1$ vaut 1, on a

$$\int_{\mathrm{Im}X_M^G}\prod_{\beta\in F}f_\beta(\lambda^{\beta^\vee})\lambda^{\beta^\vee}\mathrm{d}\lambda=\prod_{\beta\in F}\int_{\mathbb{S}^1}f_\beta(z)z\widetilde{\mathrm{d}z}.$$

Soit $\mathrm{d}z$ la mesure complexe sur $\mathbb{C}$, alors sur $\mathbb{S}^1$ on a $\mathrm{d}z=2\pi iz\widetilde{\mathrm{d}z}$. Cela implique le lemme. □

Corollaire V.2.3.3. *Soient $(c_\beta)_{\beta\in\Phi(Z_M,G)}$ une famille de fonctions holomorphes non-nulles sur un voisinage de $\{z\in\mathbb{C}^\times\mid |z|=1\}$. Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une famille des fonctions définies par*

$$c_Q(\lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_Q}c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}).$$

Alors

$$\int_{\mathrm{Im}X_M^G}\lim_{\mu\to1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M)}\theta_Q(\mu)^{-1}\frac{c_Q(\lambda\mu)}{c_Q(\lambda)}\mathrm{d}\lambda=\sum_F\prod_{\beta\in F}(\mathrm{N}(c_\beta)-\mathrm{P}(c_\beta))$$

où dans la somme, F parcourt les parties de $\Phi(Z_M,G)$ qui forment des bases de $\mathfrak{a}_P^{G*}$. Rappelons que $\mathrm{N}(c_\beta)$ *(resp.* $\mathrm{P}(c_\beta)$*) désigne le nombre de zéros (resp. de pôles) de c_β dans le disque $|z|<1$.*

Démonstration. La famille des fonctions

$$(\mu\mapsto\frac{c_Q(\lambda\mu)}{c_Q(\lambda)})_{Q\in\mathcal{P}(M)}$$

satisfait la condition du théorème V.2.3.1, donc c'est une (G,M)-famille et on a

$$\lim_{\mu\to1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M)}\theta_Q(\mu)^{-1}\frac{c_Q(\lambda\mu)}{c_Q(\lambda)}=\sum_F\prod_{\beta\in F}\frac{c'_\beta(\lambda^{\beta^\vee})\lambda^{\beta^\vee}}{c_\beta(\lambda^{\beta^\vee})}$$

Donc par le lemme V.2.3.2 et le théorème des résidus, on obtient le résultat. □

Lemme V.2.3.4. *Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille comme dans le théorème V.2.3.1. Alors pour tout sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}(M)$, les valeurs c_M^R sont indépendantes de sous-groupes paraboliques $R \in \mathcal{P}(L)$, on notera cette valeur par c_M^L.*

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{P}(L)$, soit $R = N_R M_R$ sa décomposition de Levi. On désigne par $\mathcal{P}^R(M)$ l'ensemble des sous-groupe parabolique avec le sous-groupe de Levi M et contenus dans R. On a une bijection entre $\mathcal{P}^R(M)$ et $\mathcal{P}^L(M)$ donnée par l'application

$$Q \mapsto Q \cap L$$

d'inverse $Q' \mapsto Q'N_R$. Pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}^L(M)$ on a

$$c_Q^R(\lambda) = c_{QN_R}(\lambda) = \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \prod_{\beta\in\Phi_{N_R}} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}).$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\in X_M^L,\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}^R(L)} \theta_Q^L(\lambda) c_Q^R(\lambda) &= \lim_{\lambda\in X_M^L,\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}^R(L)} \theta_Q^L(\lambda) \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \prod_{\beta\in\Phi_{N_R}} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \\ &= \left(\lim_{\lambda\in X_M^L,\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}^R(L)} \theta_Q^L(\lambda) \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \right)\left(\lim_{\lambda\in X_M^L,\lambda\to 1} \prod_{\beta\in\Phi_{N_R}} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee}) \right) \\ &= \lim_{\lambda\in X_M^L,\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}^R(L)} \theta_Q^L(\lambda) \prod_{\beta\in\Phi_Q} c_\beta(\lambda^{\beta^\vee})\end{aligned}$$

qui est indépendante de $R \in \mathcal{P}(L)$. □

Théorème V.2.3.5. *Soit $\mu_0 \in X_M^G$. Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille sur un domaine contenant $\mu_0^{\mathbb{Z}}$ telle que c_M^Q sont indépendants de $Q \in \mathcal{P}(L)$, qu'on le note c_M^L. Supposons que $c_Q(\lambda\mu_0) = c_Q(\lambda)$ pour tout $\lambda \in X_M^G$. Alors*

$$\lim_{\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \theta_Q(\lambda\mu_0)^{-1} c_Q(\lambda\mu_0)$$

s'annule sauf si $\mu_0 \in X_G^G$ et dans ce cas la limite est égale à $\mu_{01}^{-\dim \mathfrak{a}_M^G} c_M$, où μ_{01} est la première coordonné de μ_0 cf. V.1.3.

Démonstration. Tout d'abord, la limite existe car $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille.

Supposons

$$d_Q(\lambda^{\beta^\vee}) := \theta_Q(\lambda)\theta_Q(\lambda\mu_0)^{-1}$$

nous montrerons que $(d_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille sur un voisinage de 1. En effet

$$d_Q(\lambda) = \prod_{\beta\in\Delta_Q} d_\beta(\lambda^{\beta^\vee})$$

pour $d_\beta(\lambda) = \frac{\langle\lambda,\beta^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0,\beta^\vee\rangle}$ qui est holomorphe en $\lambda = 1$.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(M)$ deux sous-groupes paraboliques adjacents. Le mur commun dans X_M^G est définie par $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$ pour un $\alpha \in \Delta_{Q_1}$ tel que $-\alpha \in \Delta_{Q_2}$. On a deux choses l'une :
– Soit $\mu_0^{\alpha^\vee} \neq 1$. Pour tout λ tel que $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$, on a $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle = 0$ et $\langle\lambda\mu_0, \alpha^\vee\rangle \neq 0$, donc

$$\frac{\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0, \alpha^\vee\rangle} = 0.$$

Dans ce cas, sur le mur $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$ on a $d_{Q_1}(\lambda) = d_{Q_2}(\lambda) = 0$ puisque $\alpha \in \Delta_{Q_1}$ et $-\alpha \in \Delta_{Q_2}$.
– Soit $\mu_0^{\alpha^\vee} = 1$. Soit $\beta_1 \in \Delta_{Q_1} - \{\alpha\}$, alors il existe un unique $\beta_2 \in \Delta_{Q_2} - \{-\alpha\}$ tel que pour tout $\lambda \in X_M^G$ satisfaisant $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$, on a $\lambda^{\beta_1^\vee} = \lambda^{\beta_2^\vee}$, donc $\langle\lambda, \beta_1^\vee\rangle = \langle\lambda, \beta_2^\vee\rangle$. Notons que dans ce cas, on a $(\lambda\mu_0)^{\alpha^\vee} = 1$ aussi. Cela implique

$$\frac{\langle\lambda, \beta_1^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0, \beta_1^\vee\rangle} = \frac{\langle\lambda, \beta_2^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0, \beta_2^\vee\rangle}.$$

De plus si $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$, soit $\alpha^\vee = \psi_{M,u} - \psi_{M,v}$ (cf. paragraphe V.1.3)

$$\frac{\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0, \alpha^\vee\rangle} = \frac{1}{\mu_{0u}} = \frac{\langle\lambda, -\alpha^\vee\rangle}{\langle\lambda\mu_0, -\alpha^\vee\rangle}$$

Cela finit la preuve que $(d_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G, M)-famille sur un domaine contenant 1.

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$, on considère la valeur d_L. Il y a deux cas :
– Soit il existe $\alpha \in \Phi(Z_M, L)$ tel que $\mu_0^{\alpha^\vee} \neq 1$, alors pour tout $\lambda \in X_L^G$ (en particulier $\lambda^{\alpha^\vee} = 1$), on a par la définition de d_Q pour $Q \in \mathcal{P}(L)$ (cf. paragraphe V.2.2) :

$$d_Q(\lambda) = 0 \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}(L)$$

car il existe toujours un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}^L(M)$ tel que $\alpha \in \Delta_P$.
– Soit $\mu_0^{\alpha^\vee} = 1$ pour $\forall\, \alpha \in \Phi(Z_M, L)$, alors $\mu_0 \in X_L^G$ et

$$d_Q(\lambda) = \theta_Q(\lambda)\theta_Q(\lambda\mu_0)^{-1} \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}(L)$$

D'où quand $L \neq G$

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \theta_Q(\lambda)^{-1} d_Q(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \theta_Q(\lambda\mu_0)^{-1} \equiv 0 \quad \forall\, \lambda \in X_L^G$$

Quand $L = G$, c'est-à-dire $\mu_0 \in X_G^G$. On a $\theta_G(1) = 1$ et $d_G(1) = \mu_{01}^{-\dim \mathfrak{a}_P^G}$ (où μ_{01} est le premier coordonnée de μ_0 par le plongement $X_M^G \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^{\dim \mathfrak{a}_M}$).

Pour conclure, il suffit d'appliquer la formule de produit (le théorème V.2.2.1) au produit de la (G, M)-famille

$$\lambda \longmapsto c_Q(\lambda\mu_0)d_Q(\lambda) = c_Q(\lambda)d_Q(\lambda).$$

□

V.3 Fonctions L et opérateurs d'entrelacement

V.3.1 Fonctions L. Nous rappelons la définition des fonctions L en nous restreignant au cas dont nous avons besoin. Pour tout système local ℓ-adique $\mathscr{F}$ sur X_1, la fonction L de $\mathscr{F}$ est définie par le produit eulérien formel :

$$\mathrm{L}(\mathscr{F}, z) = \prod_{v \in |X_1|} \det(1 - z^{\deg v} \mathbf{F}_v \mid \mathscr{F})^{-1}$$

où $\mathbf{F}_v$ est l'élément de Frobenius local. Cette série converge quand $|z|$ est assez petit. On sait par le calcul de la dérivée logarithmétique et par la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz :

$$\mathrm{L}(\mathscr{F}, z) = \frac{\det(1 - z\mathbf{F}_X^* | H_c^1(X, \mathscr{F}))}{\det(1 - z\mathbf{F}_X^* | H_c^0(X, \mathscr{F}))\det(1 - z\mathbf{F}_X^* | H_c^2(X, \mathscr{F}))}$$

En particulier, $\mathrm{L}(\mathscr{F}, z)$ est une fonction rationnelle.

Maintenant, si on considère deux systèmes locaux ℓ-adiques irréductibles $\mathscr{F}_1$ de rang n_1 et $\mathscr{F}_2$ de rang n_2 sur X_1, on obtiendra un nouveau système local $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee$ de rang $n_1 n_2$, où $\mathscr{F}_2^\vee$ est le faisceau dual de $\mathscr{F}_2$. Il existe un nombre complexe $\varepsilon(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee)$ et un entier $\chi(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee)$ tels qu'on a l'équation fonctionnelle :

$$\mathrm{L}(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee, z) = \varepsilon(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee) z^{-\chi(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee)} \mathrm{L}(\mathscr{F}_1^\vee \otimes \mathscr{F}_2, \frac{1}{qz}) \tag{V.11}$$

Dans notre cas, les facteurs ε et χ sont très simples (voir [Lau84] et [Ra95]) :

$$\varepsilon(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee, z) = q^{(1-g_X)n_1 n_2}$$

et

$$\chi(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee) = (2 - 2g_X) n_1 n_2.$$

Par la correspondance de Langlands, on peut associer à $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux représentations automorphes cuspidales irréductibles π_1 et π_2 de $GL_{n_1}(\mathbb{A})$ et $GL_{n_2}(\mathbb{A})$. D'après L. Lafforgue [Laf02], on a :

$$\mathrm{L}(\pi_1 \times \pi_2^\vee, z) = \mathrm{L}(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2^\vee, z)$$

où la fonction L à gauche est la fonction L de paire (aussi appelée de Rankin-Selberg) qui est définie dans [JPSS83] comme produit eulérien de facteurs locaux en $x \in |X_1|$:

$$\frac{1}{\prod_{i,j}(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_j} z^{\deg x})}$$

où α_i (resp. β_j) sont les valeurs propres de Hecke de π_1 (resp. de π_2). Cette fonction $\mathrm{L}(\pi_1 \times \pi_2^\vee, \cdot)$

est donc une fonction rationnelle aussi. On sait situer ses pôles et ses zéros. En effet, un $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ est un pôle de $\mathrm{L}(\pi_1 \times \pi_2^\vee, \cdot)$ si et seulement si $\lambda \otimes \pi_1 \cong \pi_2$, en particulier cela implique $n_1 = n_2$. (Ici on considère λ comme un caractère de $GL_{n_1}(\mathbb{A})$ défini comme le composé

$$GL_{n_1}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}^\times \xrightarrow{h \mapsto \lambda^{\deg h}} \mathbb{C}^\times)$$

Si π_1 et π_2 sont cuspidales, tous les pôles possibles sont simples.

Théorème V.3.1.1 (Lafforgue). *Soit (π_1, π_2) un couple de représentations cuspidales partout non-ramifiées de $GL(n_1)$ et $GL(n_2)$. Soit $\mathrm{L}(\pi_1 \times \pi_2^\vee, z)$ la fonction L de paire associée. C'est une fonction rationnelle en z, donc nous pouvons supposer que $\mathrm{L}(\pi_1 \times \pi_2^\vee, z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P(z), Q(z)$ deux polynômes premiers entre eux.*
Quand $n_1 \neq n_2$ ou quand $n_1 = n_2$ et qu'il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\pi_1 \cong \pi_2 \otimes \lambda$, on a

$$\deg P(z) = (2g_X - 2)n_1 n_2$$

et

$$Q(z) = 1$$

Pour le cas restant, supposons sans perdre grand chose que $\pi_1 = \pi_2$, alors

$$Q(z) = (z^{|\mathrm{Fix}(\pi_1)|} - 1)((qz)^{|\mathrm{Fix}(\pi_1)|} - 1)$$

et

$$\deg P(z) = (2g_X - 2)n_1^2 + 2|\mathrm{Fix}(\pi_1)|$$

En tout cas, l'hypothèse de Riemann généralisée est un théorème, c'est-à-dire les zéros de $P(z)$ satisfont $|z| = q^{-1/2}$.

Remarque V.3.1.2. L'hypothèse de Riemann généralisée est prouvée par L. Lafforgue comme conséquence de la correspondance de Langlands. Le nombre de zéros de fonction L s'en est déduit par l'équation fonctionnelle et le nombre de pôles.

Corollaire V.3.1.3. *Soit $\Pi_1 = \pi_1 \boxtimes \nu_1$ et $\Pi_2 = \pi_2 \boxtimes \nu_2$ deux représentations discrètes partout non-ramifiées de $GL_{n_1\nu_1}$ et $GL_{n_2\nu_2}$ respectivement . Soit $\nu_1 \geqslant \nu_2$. Pour toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{N}(f)$ le nombre des zéros de f dans le région $|z| < 1$ et $\mathrm{P}(f)$ pour ce des pôles, on a*

(V.12)
$$\mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{L}(\Pi_1 \times \Pi_2^\vee, z)}{\mathrm{L}(\Pi_1 \times \Pi_2^\vee, q^{-1}z)}\right) - \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{L}(\Pi_1 \times \Pi_2^\vee, z)}{\mathrm{L}(\Pi_1 \times \Pi_2^\vee, q^{-1}z)}\right) = \begin{cases} \nu_2(2g_X - 2)n_1 n_2 & si\ \Pi_1 \nsim \Pi_2 \\ \nu_2(2g_X - 2)n_1 n_2 + |\mathrm{Fix}(\pi_1)| & si\ \Pi_1 = \Pi_2 \end{cases}$$

Démonstration. Rappelons le lemme bien connu ci-dessous :

Lemme V.3.1.4. *Soit $\Pi = \pi \boxtimes \nu$ une représentation discrète irréductible. Alors pour toute représen-*

tation discrète Π'*, on a*

$$\mathrm{L}(\Pi\times\Pi'^{\vee},z)=\prod_{i=1}^{\nu}\mathrm{L}(\pi\times\Pi'^{\vee},q^{\frac{\nu+1}{2}-i}z)$$

Preuve du lemme. Par le théorème III.3.4.5 et le produit eulérien de fonction L. □

D'après ce lemme, soit $\nu_1\geqslant\nu_2$, on a alors

$$\frac{\mathrm{L}(\Pi_1\times\Pi_2^{\vee},z)}{\mathrm{L}(\Pi_1\times\Pi_2{}^{\vee},q^{-1}z)}=\frac{\prod_{i=1}^{\nu_2}\mathrm{L}(\pi_1\times\pi_2^{\vee},q^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-i}z)}{\prod_{i=1}^{\nu_2}\mathrm{L}(\pi_1\times\pi_2^{\vee},q^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+i-1}z)}$$

On considère respectivement les zéros et les pôles du numérateurs et du dénominateur :
− Par l'hypothèse de Riemann généralisée, tous les zéros de numérateur sont dans la région $|z|<1$, et aucun zéro de dénominateur n'est dans cette région.
− Utilisons le théorème V.3.1.1. Si $\pi_1\nsim\pi_2$, il n'y a pas de pôles pour les fonctions L. Si $\pi_1=\pi_2$ on sait que quand $\nu_1\neq\nu_2$ tous les pôles de numérateur sont dans la région $|z|<1$ et aucun pôle de dénominateur n'est dans cette région ; mais quand $\nu_1=\nu_2$ les pôles sur $|z|=1$ se compensent. Notons que $\Pi_1\sim\Pi_2$ si et seulement si $\nu_1=\nu_2$ et $\pi_1\sim\pi_2$, ce corollaire s'en résulte. □

V.3.2 Opérateurs d'entrelacement. Soit $P\in\mathcal{P}(B)$ un sous-groupe parabolique standard. On note $\mathcal{A}_P$ pour l'espace des fonctions sur $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/KA_G$. Soit $(P,\tilde{\pi})$ une paire discrète. Soit $\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ l'induite de $\tilde{\pi}$ dans $\mathcal{A}_P$. C'est-à-dire l'espace sous-jacent de $\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ est formé des fonctions $\phi\in\mathcal{A}_P$ invariantes à droite par K telles que la fonction

$$m\in M(\mathbb{A})\mapsto\rho_P(m)^{-1}\phi(m)$$

est dans l'espace de $\tilde{\pi}$. L'espace $\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ est isomorphe à $\tilde{\pi}$ comme $\mathcal{H}_G$-module par le morphisme constant le long P. En effet, d'une part, la $\mathcal{H}_G$-module structure de $\tilde{\pi}$ est fournie par le morphisme de constant le long P, $t_P:\mathcal{H}_G\to\mathcal{H}_{M_P}$. D'autre part, pour tout $\phi\in\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ et $x\in G(\mathbb{A})$, soient $\varphi\in\tilde{\pi}$ défini par $\varphi(m)=\rho_P(m)^{-1}\phi(m)$ et $x=n_xm_xk_x$ avec $n_x\in N_P(\mathbb{A})$, $m_x\in M_P(\mathbb{A})$ et $k_x\in K$, on a

$$\int_{G(\mathbb{A})}h(g)\phi(xg)\mathrm{d}g=\int_{M_P(\mathbb{A})}t_P(h)(m)\varphi(m_xm)\mathrm{d}m\quad\forall\,h\in\mathcal{H}_G$$

Soient $(P,\tilde{\pi})$ une paire discrète, P' un sous-groupe parabolique standard, $w\in W$ tel que $w(M_P)=M_{P'}$ et $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$. Pour tout $\lambda\in X_P^G$, $g\in G(\mathbb{A})$ tel que l'intégrale ci-dessous soit convergente, on pose

$$(\mathrm{V.13})\qquad(\mathbf{M}(w,\lambda)\varphi)(g):=(w(\lambda)(g))^{-1}\int_{wN_P(\mathbb{A})w^{-1}\cap N_{P'}(\mathbb{A})\backslash N_{P'}(\mathbb{A})}(\varphi\lambda)(w^{-1}ng)\mathrm{d}n$$

Clairement, la définition ne dépend que de la double classe de w dans $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$. Le théorème suivant est dû à Langlands pour les corps de nombres ([Lan76]) et Morris pour les corps de fonctions ([Mo82]) :

Théorème V.3.2.1. *Soient $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète, P' un sous-groupe parabolique standard, $w \in W$ tel que $w(M_P) = M_{P'}$ et $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$. Il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale (V.13) converge dans l'ouvert*

$$|\lambda^{\alpha^\vee}| > C \quad \forall \alpha \in \Delta_P$$

et il ne dépend que de la classe double de w dans W. De plus la fonction $\lambda \mapsto \mathbf{M}(w, \lambda)(\varphi)$ admette une prolongement analytique à X_P^G tout entier. Elle prend ses valeurs dans $\mathcal{A}_{P,w(\tilde{\pi})}$. On a l'équation fonctionnelle : soient P, Q, R trois sous-groupes paraboliques standard, $w \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ et $w' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$ on a :

$$\mathbf{M}(w', w(\lambda)) \circ \mathbf{M}(w, \lambda) = \mathbf{M}(w' \circ w, \lambda) \quad \forall\, \lambda \in X_P^G$$

Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée. Pour tout sous-groupe parabolique Q contenant P, $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$, $g \in G(\mathbb{A})$ et $\lambda \in X_P^G$ tel que la série si-dessous soit convergente, on définit la série d'Eisenstein par

$$\mathbf{E}^Q(\varphi, \lambda)(g) := \sum_{\delta \in P(F)\backslash Q(F)} (\varphi\lambda)(\delta g) \tag{V.14}$$

Le théorème ci-dessous où le dernier est dû encore à Langlands pour les corps de nombres ([Lan76]) et Morris pour les corps de fonctions ([Mo82]), voir aussi [MW94] :

Théorème V.3.2.2. *Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée de caractère central ξ. Soit $|\xi|$ l'unique caractère continu qui prolonge le module de ξ qu'il s'agit d'un élément de $\mathrm{Re}X_P^G$. Pour tout sous-groupe parabolique Q contenant P, $\lambda \in X_P^G$ tel que $|\lambda^{\alpha^\vee}| > \rho_P^{\alpha^\vee}/|\xi|^{\alpha^\vee}$, $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$, et tout $g \in G(\mathbb{A})$, la série d'Eisenstein (V.14) converge. De plus la fonction $\lambda \mapsto \mathbf{E}^Q(\varphi, \lambda)$ admette une prolongement analytique à X_P^G tout entier. Pour tout $w \in W^Q$, on a l'equation fonctionnelle :*

$$\mathbf{E}^Q(\mathbf{M}(w, \lambda)\varphi, w(\lambda)) = \mathbf{E}^Q(\varphi, \lambda).$$

Pour tout $\sigma \in W(\mathfrak{a}_P, Q)$ avec un représentant $w \in W$, soit

$$\mathbf{E}_\sigma^Q(\varphi, \lambda) := \mathbf{E}^Q(M(w, \lambda)\varphi, w(\lambda)). \tag{V.15}$$

Cela ne dépend pas du choix d'un représentant w de σ par le théorème V.3.2.1 et le théorème V.3.2.2.

V.3.3 Calculs explicites d'opérateurs d'entrelacement. Soit P un sous-groupe parabolique standard dont le sous-groupe de Levi $M_P \cong^{\rho_{M_P}} GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$. Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète. Soit $\tilde{\pi} \cong \otimes'_{v \in |X_1|} \pi_v$ comme produit restreint avec π_v un $\mathcal{H}_{M_P,v}$-module. Soit $v \in |X_1|$. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}), \cdots, (\alpha_{n+1-n_r}, \cdots, \alpha_n)$ les valeurs propres de Hecke des facteurs de π_v. Soit

χ_v le caractère de $T(F_v)$ défini par $\chi_v(t) = \alpha_1^{v(t_1)} \cdots \alpha_n^{v(t_n)}$ (il dépend du choix d'un ordre sur les valeurs propres de Hecke). On définit une fonction $f_{\chi_v,v}$ sur $G(F_v)$ par

$$f_{\chi_v,v}(g) := \rho_B(t)\chi_v(t)$$

pour $g = ntk$ où $n \in N_B(F_v)$, $t \in T(F_v)$ et $k \in K_v$. Comme l'espace $(\mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{G(F_v)}\chi_v)^{K_v}$ est de dimension 1 engendré par $f_{\chi_v,v}$, on a

$$\int_{G(F_v)} h(g) f_{\chi_v,v}(xg)\mathrm{d}g = \left(\int_{G(F_v)} h(g) f_{\chi_v,v}(g)\mathrm{d}g\right) f_{\chi_v,v}(x) \quad \forall\, x \in G(F_v), \forall\, h \in \mathcal{H}_{G,v}.$$

Donc l'espace vectoriel $\mathbb{C}f_{\chi_v,v}$ est un $\mathcal{H}_{G,v}$-module dont l'action de $\mathcal{H}_{G,v}$ est donnée par l'intégrale ci-dessus. Par la définition de la transformation de Satake, il est en effet isomorphe à π_v vu comme $\mathcal{H}_{G,v}$-modules.

Soient P' un parabolique standard, $w \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ et $\lambda \in X_P^G$. On définit un opérateur $A(w,\lambda)$ comme le produit eulérien d'opérateurs $A_v(w,\lambda) : \mathbb{C}f_{\chi_v,v} \to \mathbb{C}f_{w(\chi_v),v}$ définis par

$$(A_v(w,\lambda)f_{\chi_v,v})(g) = (w(\lambda)(g))^{-1} \int_{wN_P(F_v)w^{-1}\cap N_{P'}(F_v)\backslash N_{P'}(F_v)} (f_{\chi_v,v}\lambda)(w^{-1}ng)\mathrm{d}n$$

où on utilise le morphisme naturel $G(F_v) \hookrightarrow G(\mathbb{A})$ pour identifier $\lambda \in X_P^G$ à une application de $G(F_v)$ dans $\mathbb{C}$. En utilisant l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{G,v}$-modules entre π_v et $\mathbb{C}f_{\chi_v,v}$, on obtient un isomorphisme entre $\otimes'_{v\in|X_1|}\mathbb{C}f_{\chi_v,v}$ et $\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$, alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}} \arrow[r, "\mathbf{M}(w,\lambda)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{A}_{P,w(\tilde{\pi})} \arrow[r, "\mathbf{M}(w,\mu)^{-1}"] & \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}} \arrow[d, "\wr"'] \\
\otimes'_{v\in|X_1|}\mathbb{C}f_{\chi_v,v} \arrow[r, "A(w,\lambda)"] & \otimes'_{v\in|X_1|}\mathbb{C}f_{w(\chi_v),v} \arrow[r, "A(w,\mu)^{-1}"] & \otimes'_{v\in|X_1|}\mathbb{C}f_{\chi_v,v}
\end{tikzcd}$$

En effet, le diagramme est commutatif car les opérateurs d'entrelacement ne dépendent que de la structure de $\tilde{\pi}$ comme un $\mathcal{H}_{M_P}$-module et ne dépendent pas d'un modèle de $\tilde{\pi}$.

On a besoin de la formule explicite suivante dû à Gindikin-Karpelevich :

Proposition V.3.3.1. *Soient P, P' deux sous-groupes paraboliques standard et $w \in W$ tel que $w(M_P) = M_{P'}$. Soit χ_v un caractère non-ramifié de $T(F_v)$ et $\lambda \in X_P^G$ tels que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \cong X_T^G$, $\alpha_i = \chi_v(diag(1, \ldots, \underset{i}{\varpi_x}, \ldots, 1))$ pour une uniformisante ϖ_x de $\mathcal{O}_v$. Alors on a*

$$A_v(w,\lambda)f_{\chi_v,v} = \prod_{i<j, w(i)>w(j)} \frac{1 - q^{-\deg v}(\lambda_i^{\deg v}\alpha_i)/(\lambda_j^{\deg v}\alpha_j)}{1 - (\lambda_i^{\deg v}\alpha_i)/(\lambda_j^{\deg v}\alpha_j)} f_{w(\chi_v),v}.$$

Démonstration. Par l'équation fonctionnelle, on peut décomposer l'intégrale comme compositions d'opérateurs d'entrelacement des permutations simples et donc les calculs se réduisent à ceux sur $SL_2(F_v)$. On réfère au lemme 4.3.2 de [Sha10] pour ce calcul. □

Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée avec $M_P \cong^{\rho_P} GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$. Supposons que $\tilde{\pi} = \Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_r$ où Π_i est une représentation discrète de $GL_{n_i}(\mathbb{A})$. Soit $\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G)$ tel que $\beta^\vee = \psi_{M_P,i} - \psi_{M_P,j}$. On notera pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$n_\beta(\tilde{\pi}, z) = q^{(1-g_X)n_i n_j} \frac{\mathrm{L}(\Pi_i \times \Pi_j^\vee, z)}{\mathrm{L}(\Pi_i \times \Pi_j^\vee, q^{-1}z)}. \tag{V.16}$$

De plus soient $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée, $(w, 1) \in \mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})$ et $\lambda \in X^G_{M_P}$, on pose

$$n_{\tilde{\pi}}(w, \lambda) = \prod_{\substack{\beta \in \Phi(Z_M, G) \\ \beta > 0; w(\beta) < 0}} n_\beta(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^\vee}). \tag{V.17}$$

Corollaire V.3.3.2. *Soient $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée, $\varphi \in \tilde{\pi}$, $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P})$ et $\lambda, \mu \in X^G_{M_P}$, alors*

$$(\mathbf{M}(w, \mu)^{-1} \circ \mathbf{M}(w, \lambda))\varphi = (\prod_{\substack{\beta \in \Phi(Z_M, G) \\ \beta > 0; w(\beta) < 0}} \frac{n_\beta(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^\vee})}{n_\beta(\tilde{\pi}, \mu^{\beta^\vee})})\varphi.$$

Si $(w, 1) \in \mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})$, alors

$$\mathbf{M}(w, \lambda)\varphi = \prod_{\substack{\beta \in \Phi(Z_M, G) \\ \beta > 0; w(\beta) < 0}} n_\beta(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^\vee}))\varphi = n_{\tilde{\pi}}(w, \lambda)\varphi.$$

V.3.4 Il est aussi commode d'utiliser les notations d'Arthur.

Soit P un sous-groupe parabolique standard avec le sous-groupe de Levi M. Soit $Q \in \mathcal{P}(M)$. On peut définir l'espace $\mathcal{A}_{Q,\tilde{\pi}}$ de façon évidente. Pour tout $w \in W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)$, et $\lambda \in X^G_M$ il existe un opérateur d'entrelacement $\mathbf{M}_{P|Q}(w, \lambda) : \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}} \to \mathcal{A}_{Q,\tilde{\pi}}$ qui est défini par prolongement analytique de l'intégrale parallèle de (V.13) où l'on remplace P' par Q. On omet w dans la notation si $w = 1$. L'équation fonctionnelle peut s'écrire :

$$\mathbf{M}_{Q|R}(\lambda) \circ \mathbf{M}_{R|P}(\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda).$$

Pour tous $\lambda, \mu \in X^G_M$, on définit

$$\mathcal{M}_Q(\lambda, P; \mu) := \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda)^{-1} \circ \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda/\mu) \tag{V.18}$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Im} X^G_M$, la famille des opérateurs

$$(\mu \mapsto \mathcal{M}_Q(\lambda, P; \mu))_{Q \in \mathcal{P}(M)}$$

est une (G,M)-famille sur une région contenant $\mathrm{Im}X_M^G$ au sens que ses traces forment une (G,M)-famille (cf. corollaire 5.3.2. de [LW13]). Soit $L \in \mathcal{L}(M)$ et $R \in \mathcal{P}(L)$. Pour tous $\lambda \in X_M^G$ et $\mu \in X_L^G$, donc l'opérateur $\mathcal{M}_Q(\lambda, P; \mu)$ ne dépend pas de Q pour tout $Q \in \mathcal{P}^R(M)$. On le notera dans ce cas $\mathcal{M}_R(\lambda, P; \mu)$.

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Pour tous $P, Q \in \mathcal{P}(L)$ et $\lambda \in X_M^G$, notons

$$n_{Q|P}(\tilde{\pi}, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Phi_Q \cap \Phi_{\overline{P}}} \prod_{\{\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G) \mid \beta|_{\mathfrak{a}_L^G} = \alpha\}} n_\beta(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^\vee}). \tag{V.19}$$

Pour tout $\alpha \in \Phi(Z_L, G)$ et $z \in \mathbb{C}$, soit

$$n_\alpha(\tilde{\pi}, z) = \prod_{\{\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G) \mid \beta|_{\mathfrak{a}_L^G} = \alpha\}} n_\beta(\tilde{\pi}, z). \tag{V.20}$$

Donc si $\lambda \in X_L^G$, on a $n_{Q|P}(\tilde{\pi}, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Phi_Q \cap \Phi_{\overline{P}}} n_\alpha(\tilde{\pi}, \lambda^{\alpha^\vee})$.

Lemme V.3.4.1. *Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée. Soit $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}, \mathfrak{a}_{M_P})$. Pour tous $Q, R \in \mathcal{P}(L^w)$ et $\lambda \in X_{M_P}^G$, on a*

$$n_{Q|R}(\tilde{\pi}, \lambda) = n_{Q|R}(\tilde{\pi}, w(\lambda)).$$

Démonstration. C'est parce que pour tout $\alpha \in \Phi(Z_L, G)$ la famille des nombres $(\lambda^{\beta^\vee})_{\{\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G) \mid \beta|_{\mathfrak{a}_L^G} = \alpha\}}$ coincide avec $(w(\lambda)^{\beta^\vee})_{\{\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G) \mid \beta|_{\mathfrak{a}_L^G} = \alpha\}}$. □

Par l'équation fonctionnelle et le corollaire V.3.3.2, on obtient :

Corollaire V.3.4.2. *Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée et $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$. Soit $L \in \mathcal{L}(M_P)$, et $Q, R \in \mathcal{P}(L)$. Alors, pour tous $R(P) \in \mathcal{P}^R(M_P)$, $\mu \in X_L^G$ et $\lambda \in X_{M_P}^G$, on a*

$$\mathcal{M}_Q(\lambda, P; \mu)\varphi = \frac{n_{Q|R}(\tilde{\pi}, \lambda/\mu)}{n_{Q|R}(\tilde{\pi}, \lambda)} \frac{n_{R(P)|P}(\tilde{\pi}, \lambda/\mu)}{n_{R(P)|P}(\tilde{\pi}, \lambda)}\varphi; \tag{V.21}$$

V.4 Un développement spectral de la trace tronquée d'Arthur

V.4.1 Le côté spectral de la formule des traces. Soit ζ une racine $n^{ième}$ primitive de l'unité. Soit η un caractère

$$G(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg \circ \det} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

tel que $\eta(g) = \zeta^{\deg \det g}$. C'est un élément de X_G^G. Par la théorie des séries d'Eisenstein de Langlands, on sait que le noyau $k_Q(g, g)$ pour $g \in G(\mathbb{A})/K$ admet une écriture spectrale :

$$k_Q(g, g) = \sum_{(P, \tilde{\pi})} \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})|} \sum_{\sigma \in W(\mathfrak{a}_P, Q)} \int_{\mathrm{Im}X_P^G} \mathbf{E}_\sigma^Q(\varphi_{\tilde{\pi}}, \lambda)(g)\overline{\mathbf{E}_\sigma^Q(\varphi_{\tilde{\pi}}, \lambda)(g)}\mathrm{d}\lambda$$

où $\mathbf{E}_{\sigma}^{Q}(\cdot, \lambda)$ est défini au paragraphe V.3.2, $(P, \tilde{\pi})$ décrit un ensemble des représentants d'équivalence inertielle des paires discrètes partout non-ramifiées avec $\tilde{\pi}$ unitaire (au sens que son caractère central est unitaire) et $\varphi_{\tilde{\pi}} \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ satisfaisant

$$\frac{1}{n_1 \cdots n_r} \int_{M(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/A_M} \rho_P(m)^{-2} |\varphi_{\tilde{\pi}}(m)|^2 \mathrm{d}m = 1.$$

où $n_1 \cdots n_r$ est le produit des rangs des facteurs du sous-groupe de Levi M_P. On va considérer l'intégrale de la fonction $g \mapsto \eta(g) k^T(g, g)$ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G$:

$$J_{\eta}^{T} := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/A_G} \eta(g) k^T(g, g) \mathrm{d}g = \sum_{e=1}^{n} \zeta^e J_e^T \,, \tag{V.22}$$

voir l'expression (IV.10) pour la définition de J_e^T.

L. Lafforgue a donné une expression spectrale pour J_{η}^{T} quand η est trivial. Le changement nécessaire quand η n'est pas trivial est minimal. On ajoute ce paragraphe pour corriger les petits erreurs dans le théorème 11, page 307, de [Laf97] et reformuler la formule de Lafforgue dans une forme convenable pour nous.

Théorème V.4.1.1 (L. Lafforgue)**.** *La trace tronquée tordue $J_{\eta}^{T=0}$ est égale à la somme portant sur les classes d'équivalence inertielle des paires discrètes $(P, \tilde{\pi})$ partout non-ramifiées de l'expression suivante :*

$$\frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P, \tilde{\pi})|} \sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}}) \in \mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})} \int_{\mathrm{Im} X_{L^w}^{G}} \frac{1}{|w||X_{L^w}^{L^w}|} \sum_{\substack{\lambda_{\tilde{\pi}L} \in \mathrm{Im} X_{L^w}^{G}, \lambda_{\tilde{\pi}}^{L} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^{L^w})^{\circ} \\ \lambda_{\tilde{\pi}} = \lambda_{\tilde{\pi}}^{L} \lambda_{\tilde{\pi}L}}} \sum_{\substack{\lambda_w \in \mathrm{Im} X_{M_P}^{L^w} \\ \lambda_w / w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}}^{L}}} \tag{V.23}$$
$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}} (\lim_{\mu \to 1} \sum_{Q \in \mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}_Q(\mu \lambda_{\tilde{\pi}L^w} \eta^{-1}) \mathcal{M}_Q(\lambda \lambda_w, P; \mu \lambda_{\tilde{\pi}L^w}) \circ \mathbf{M}(w, w^{-1}(\lambda_w)) \circ \lambda_{\tilde{\pi}}) \mathrm{d}\lambda.$$

où L^w est défini au paragraphe V.1.1, $|w|$ est le produit des longueurs des orbites de w et les opérateurs d'entrelacement sont définis au paragraphe V.3.4.

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$J_{\eta^k}^{T} = \sum_{e=1}^{n} \zeta^{ek} J_e^T \,,$$

cela implique

$$J_e^T = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \zeta^{-ek} J_{\eta^k}^{T}.$$

Théorème V.4.1.2 (L. Lafforgue)**.** *Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, $J_e^{T=0}$ est égal à la somme portant sur les classes* *d'équivalence inertielle des paires discrètes partout non-ramifiées $(P,\tilde{\pi})$ de l'expression suivante :*

$$\text{(V.24)}\quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\tilde{\pi})|}\sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})}\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|}\sum_{\substack{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ\\ \lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}}\ \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}\\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}}$$
$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}}(\lim_{\mu\to1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)}\widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})\mathcal{M}_Q(\lambda\lambda_w,P;\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})\circ\mathbf{M}(w,w^{-1}(\lambda_w))\circ\lambda_{\tilde{\pi}})\mathrm{d}\lambda.$$

Démonstration. Par le lemme 9 p. 306 de *loc. cit.*, on sait que $J^{T=0}_\eta$ est égal à la somme portant sur un ensemble de représentants des classes d'équivalences inertielles des paires discrètes partout non-ramifiées et l'ensemble des caractères continus χ de $\mathrm{Im}X^G_{M_P}$ de l'expression

$$\text{(V.25)}\quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})|}\sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})}\lim_{\substack{\mu_0\in X^G_{L^w}\\ \mu_0\to1}}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)}\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\int_{\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}}$$
$$\widehat{\mathbb{1}}_Q(\mu\mu_0\eta^{-1})\chi(\frac{\lambda'}{w(\lambda')}w(\lambda_{\tilde{\pi}})\mu_0\mu)\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}}(\mathcal{M}_Q(\lambda\lambda',P;\mu\mu_0)\circ\mathbf{M}(w^{-1},w(\lambda'))\circ w(\lambda_{\tilde{\pi}})^{-1})\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu$$

où on a utilisé la décomposition $\mathrm{Im}X^G_{M_P}=\mathrm{Im}X^G_{L^w}\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$ et

$$\int_{\mathrm{Im}X^G_{M_P}}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\int_{\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}}f(\lambda\lambda')\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\lambda'\ .$$

On change $(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})$ par son inverse : $(w^{-1},w(\lambda_{\tilde{\pi}})^{-1})$, alors on a

$$\text{(V.26)}\quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})|}\sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})}\lim_{\substack{\mu_0\in X^G_{L^w}\\ \mu_0\to1}}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)}\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}}\int_{\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}}$$
$$\widehat{\mathbb{1}}_Q(\mu\mu_0\eta^{-1})\chi(\frac{\lambda'}{w^{-1}(\lambda')\lambda_{\tilde{\pi}}}\mu_0\mu)\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}}(\mathcal{M}_Q(\lambda\lambda',P;\mu\mu_0)\circ\mathbf{M}(w,w^{-1}(\lambda'))\circ\lambda_{\tilde{\pi}})\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu.$$

On considère la suite exacte :

$$0\to\ker\mu_w\to\mathrm{Im}X^G_{L^w}\oplus\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}\xrightarrow{\mu_w}\mathrm{Im}X^G_{M_P}\to0$$

où μ_w est le morphisme qui envoie $(\mu,\lambda')\in\mathrm{Im}X^G_{L^w}\oplus\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$ sur $\lambda'\mu/w^{-1}(\lambda')\in\mathrm{Im}X^G_{M_P}$. D'après cette suite exacte, les caractères de $\mathrm{Im}X^G_{M_P}$ sont les caractères de $\mathrm{Im}X^G_{L^w}\oplus\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$ qui sont triviaux sur $\ker\mu_w$. On utilisera alors la formule suivante pour déduire la résultat :

$$\sum_\chi\int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}\oplus\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}}\chi(\frac{\mu_w(\lambda)}{\lambda_{\tilde{\pi}}})f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{|\ker\mu_w|}\sum_{\lambda_0\in\mu_w^{-1}(\lambda_{\tilde{\pi}})}f(\lambda_0)$$

pour une fonction f lisse sur $\mathrm{Im}X^G_{L^w}\oplus\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$, où la somme $\sum_\chi$ porte sur les caractères continues de $\mathrm{Im}X^{G}_{M_P}$ et $\mathrm{d}\lambda$ est la mesure de produit.

Pour le noyau $\ker \mu_w$, observons que le groupe $\mathrm{Im}X^{L^w}_{L^w}$ rencontre chaque composante connexe de $\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$, et $w(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Im}X^{L^w}_{L^w}$. Soit $(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ$ la composante neutre de $\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$, on a alors un morphisme bien défini

$$\lambda' \longmapsto \frac{\lambda'}{w^{-1}(\lambda')}, \quad \mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \longrightarrow (\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ.$$

En fait, c'est un revêtement (non-connexe en général) de degré $|\mathrm{Im}X^{L^w}_{L^w}| = |X^{L^w}_{L^w}|$ et μ_w se factorise par

$$\mathrm{Im}X^{G}_{L^w} \oplus \mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus(\lambda\mapsto\lambda w^{-1}(\lambda)^{-1})} \mathrm{Im}X^{G}_{L^w} \oplus (\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \xrightarrow{(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto\lambda_1\lambda_2} \mathrm{Im}X^{G}_{M_P}$$

L'intersection $(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \cap \mathrm{Im}X^{G}_{L^w}$ a pour cardinal $|w|$, le produit des longueurs des orbites de w comme un élément de $\mathfrak{S}_{|M_P|}$.

La somme portant sur tous caractères χ de $\mathrm{Im}X^{G}_{M_P}$ est donc égale à

$$\text{(V.27)}\quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\tilde{\pi})|} \sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})} \int_{\mathrm{Im}X^{G}_{L^w}} \frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|} \sum_{\lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}} \sum_{\lambda_w:\lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}$$
$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}}(\lim_{\mu\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\eta^{-1})\mathcal{M}_Q(\lambda\lambda_w, P; \mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w}) \circ \mathbf{M}(w, w^{-1}(\lambda_w)) \circ \lambda_{\tilde{\pi}})\mathrm{d}\lambda$$

où la somme sur $\sum_{\lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}$ porte sur toute écriture tel que $\lambda_{\tilde{\pi}L^w} \in \mathrm{Im}X^{G}_{L^w}$ et $\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}} \in (\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ$ et la somme $\sum_{\lambda_w:\lambda_w/w(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}$ porte sur tout $\lambda_w \in \mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P}$ tel que $\lambda_w/w^{-1}(\lambda_w) = \lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}$.

□

V.4.2 On donne une première simplification dans ce paragraphe. On a le résultat suivant :

Proposition V.4.2.1. *Considérons une représentation automorphe cuspidale partout non-ramifiée π de $G(\mathbb{A})/A_G$, et $\varphi \in \pi$, alors il existe un élément g de degré 0 dans $G(\mathbb{A})$ tel que $\varphi(g) \neq 0$.*

Démonstration. Soit $D = \sum_{x\in|X_1|} n_x x$ un diviseur canonique. On sait que

$$\deg D = \sum_{x\in|X_1|} n_x \deg x = 2g_X - 2.$$

Choisissons et fixons une uniformisante en chaque place $x \in |X_1|$, on la note ϖ_x. On définit un idèle $u = (\varpi_x^{-n_x})_{x\in|X_1|} \in \mathbb{A}^\times$, alors par la dualité de Serre et par le fait que X_1 est géométriquement connexe, on a (cf. proposition 3 II.5 de [Se88])

$$\mathbb{A}/(F + u\mathcal{O}) \cong H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(D)) \cong H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^\vee \cong \mathbb{F}_q$$

où $H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^\vee$ est le groupe dual de $H^0(X_1, \mathcal{O}_X)$. Donc un choix d'un caractère non-trivial de $\mathbb{F}_q$ définit un caractère non-trivial ψ de $\mathbb{A}/(F+u\mathcal{O})$ en utilisant l'isomorphisme ci-dessus. On a une décomposition $\psi = \otimes'_x \psi_x$.

On voit que le conducteur de ψ_x à la place $x \in |X_1|$ est exactement n_x. En effet, il est clair que ψ est trivial sur $\varpi_x^{-n_x}\mathcal{O}_x$. De plus, posons $n'_x = n_x$ pour $x \neq x_0$ et $n'_x = n_x + 1$, et notons le faisceau inversible associé au diviseur x_0 par $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\{x_0\})$. Alors

$$\mathbb{A}/(F + (\varpi_x^{-n'_x})\mathcal{O}) \cong H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(D) \otimes \mathcal{L}) \cong H^0(X_1, \mathcal{L}^{-1})^\vee = \{0\}$$

car $\deg \mathcal{L}^{-1} < 0$. Comme ψ n'est pas trivial, il ne se factorise pas par un caractère de $\mathbb{A}/(F + (\varpi_x^{-n'_x})\mathcal{O})$. Donc ψ_{x_0} n'est pas trivial sur $\varpi_{x_0}^{-n'_{x_0}}\mathcal{O}_{x_0}$. Cela implique que le caractère de F_x défini par $a \mapsto \psi_x(\varpi_x^{-n_x}a)$ est de conducteur 0, on le notera par $\varpi_x^{-n_x}\psi_x$.

On définit un caractère de $N_B(\mathbb{A})$ (resp. $N_B(F_x)$) qu'on notera encore par ψ (resp. ψ_x) par

$$\psi(n) := \psi(\sum_{i=1}^{n-1} n_{i,i+1}),$$

pour $n = (n_{ij})_{n\times n} \in N_B(\mathbb{A})$ (resp. $n = (n_{ij})_{n\times n} \in N_B(F_x)$). Soit $\mathcal{W}(\psi_x)$ (resp. $\mathcal{W}(\psi)$) l'espace des fonctions

$$W : G(F_x)/K_x \to \mathbb{C}$$

$$(\text{resp. } W : G(\mathbb{A})/K \to \mathbb{C})$$

telles que

$$W(ng) = \psi(n)W(g)$$

pour tout $n \in N_B(F_x)$ et $g \in G(F_x)/K_x$ (resp. $n \in N_B(\mathbb{A})$ et $g \in G(\mathbb{A})/K$). C'est un $\mathcal{H}(G(F_x), K_x)$-module à droite (resp. $\mathcal{H}_G$-module à droite). Comme π est une représentation cuspidale irréductible, on sait que π_x est générique. Par le théorème de multiplicité un local, il existe un unique sous-$\mathcal{H}(G(F_x), K_x)$-module de $\mathcal{W}(\psi_x)$ qui est isomorphe à π_x. Ce sous-module est appelé le modèle de Whittaker de π_x, qu'on notera $\mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$. Comme π_x est de dimension 1, $\mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ l'est aussi. En remplaçant ψ_x par $\varpi_x^{-n_x}\psi_x$, on obtient le modèle de Whittaker $\mathcal{W}(\pi_x, \varpi_x^{-n_x}\psi_x)$ par rapport à $\varpi_x^{-n_x}\psi_x$.

Pour $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, soit

$$\varpi_x^J = \begin{pmatrix} \varpi_x^{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi_x^{j_n} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$J_x = \Big(-(n-1)n_x, -(n-2)n_x, \dots, 0 \Big).$$

Alors on a un isomorphisme de $\mathcal{H}(G(F_x), K_x)$-module

$$\mathcal{W}(\pi_x, \psi_x) \cong \mathcal{W}(\pi_x, \varpi_x^{-n_x}\psi_x)$$
$$(g \mapsto W(g)) \leftrightarrow (g \mapsto W(\varpi_x^{J_x} g))$$

Comme π_x est non-ramifiée et $\varpi_x^{J_x}\psi_x$ est de conducteur 0. On a d'après la formule de Shintani (cf. page 116 de [Co08]) que pour une fonction non-nulle $W' \in \mathcal{W}(\pi_x, \varpi_x^{-n_x}\psi_x)$ on a

$$W'(1) \neq 0$$

Donc si $W \in \mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ est non-nulle, cela implique que

$$W(\varpi_x^{J_x}) \neq 0$$

Soit $W_x^o \in \mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ normalisé telle que

$$W_x^o(\varpi_x^{J_x}) = 1$$

Alors $W(g) := \prod_{x\in|X_1|} W_x^o(g_x)$ définit une fonction dans $\mathcal{W}(\psi)$ qui engendre un sous-module isomorphe à π. Par l'unicité globale du modèle de Whittaker, c'est le sous-module unique de $\mathcal{W}(\psi)$ isomorphe à π. Soit $\varphi \in \pi$ non-nulle, on sait que la fonction

$$W_\varphi(g) = \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} \varphi(ng)\psi^{-1}(n)\mathrm{d}n$$

appartient à $\mathcal{W}(\psi)$ et engendre aussi un sous-module isomorphe à π. Donc il existe une constante C non-nulle, telle que

$$W_\varphi(g) = C \prod_{x\in|X_1|} W_x^o(g_x) \quad \forall\, g = (g_x)_{x\in|X_1|} \in G(\mathbb{A}).$$

Soit $g_0 = (\varpi_x^{J_x})_{x\in|X_1|} \in GL_n(\mathbb{A})$. Alors

$$\deg g_0 = -\sum_{x\in|X_1|} \frac{n(n-1)}{2} n_x \deg x = -n(n-1)(g_X - 1)$$

et $W_\varphi(g_0) = C \neq 0$. De plus comme φ est invariante par A_G, la fonction W_φ l'est aussi. Donc

$$W_\varphi(g_0 a^{(n-1)(g_X-1)}) \neq 0$$

et $\deg g_0 a^{(n-1)(g_X-1)} = 0$ cela prouve la proposition. □

Corollaire V.4.2.2. *Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\tilde{\pi}}$ (cf. paragraphe V.3.2 pour la notation). Alors $\varphi\lambda_{\tilde{\pi}} = \varphi$ pour tout $\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $P = G$. Si $\tilde{\pi}$ est cuspidale, soit $\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$, on a $\lambda_{\tilde{\pi}}\tilde{\pi} = \tilde{\pi}$ par le théorème de multiplicité un. Donc $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_{G,\tilde{\pi}}$, il existe une constante c tel que $c\varphi = \varphi\lambda_{\tilde{\pi}}$ parce que $\dim \tilde{\pi} = 1$. Par la proposition V.4.2.1, il existe $g_0 \in G(\mathbb{A})$ un point de degré 0 tel que φ est non-nulle. Alors

$$c\varphi(g_0) = \varphi(g_0)\lambda_{\tilde{\pi}}(g_0)$$

implique $c = 1$, c'est-à-dire $\varphi = \varphi\lambda_{\tilde{\pi}}$.

Si $\tilde{\pi}$ n'est pas cuspidale, d'après Langlands, $\forall\ \varphi \in \tilde{\pi}$, il existe une paire discrète $(P', \tilde{\pi}')$ telle que tout le facteur de $\tilde{\pi}'$ est cuspidale, une fonction cuspidale $\varphi' \in \mathcal{A}_{P',\tilde{\pi}'}$ et un point $\lambda' \in X_{P'}^G$ tels que

$$\varphi(g) = \mathrm{Res}_{\lambda'}\mathbf{E}(\varphi', \cdot)(g) \quad \forall\ g \in G(\mathbb{A})$$

où Res est un opérateur de résidus et $\mathbf{E}(\varphi', \lambda)(g)$ pour $\lambda \in X_{P'}^G$, $g \in G(\mathbb{A})$ est la série d'Eisenstein définie associée à φ'(cf. II.1.5. [MW94]).

On a $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \subseteq \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}')$ par l'inclusion $X_G^G \subseteq X_{P'}^G$. Donc $\forall\ \lambda_0 \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$, on peut réduire le problème au cas cuspidal :

$$\begin{aligned}\varphi(g)\lambda_0(g) &= \mathrm{Res}_{\lambda'}\mathbf{E}(\varphi', \cdot)(g)\lambda_0(g)\\ &= \mathrm{Res}_{\lambda'}\mathbf{E}(\varphi'\lambda_0, \cdot)(g)\\ &= \mathrm{Res}_{\lambda'}\mathbf{E}(\varphi', \cdot)(g)\end{aligned}$$

□

Avec les notations du théorème V.4.1.2, pour tout $\lambda \in \mathrm{Im}X_{L^w}^G$, on a

$$w^{-1}\left(\frac{\lambda_w\lambda}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}\right) = \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}}}$$

Donc par le lemme V.3.4.1, pour tout sous-groupe parabolique $S \in \mathcal{P}^{Q_{L^w}}(M)$ on a

$$\frac{n_{S|P}(\tilde{\pi}, \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}})}{n_{S|P}(\tilde{\pi}, \lambda\lambda_w)} = 1$$

rappelons que Q_{L^w} est un sous-groupe parabolique dans $\mathcal{P}(L^w)$ qu'on a fixé. Après le corollaire V.4.2.2 et le corollaire V.3.4.2 concernant les traces d'opérateurs entrelacement, $J_e^{T=0}$ est égal à la somme portant sur les classes d'équivalence des paires discrètes partout non-ramifiées

$(P, \tilde{\pi})$ de l'expression suivante :

$$\text{(V.28)} \quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\tilde{\pi})|} \sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})} \int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}} \frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|} \sum_{\substack{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \\ \lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}} \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}}$$

$$\lim_{\mu\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w}) \frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi}, \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w))\mathrm{d}\lambda.$$

V.5 Calculs des contributions spectrales

V.5.1 Nous traiterons l'expression (V.28). Par simplicité, on va fixer pour chacune des paires discrètes un représentant. Notons que dans toute la paire discrète, il existe un représentant $(P, \tilde{\pi})$ tel que comme $\mathcal{H}_{M_P}$-module

$$\tilde{\pi} = \underbrace{\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_1}_{m_{\Pi_1}} \otimes \underbrace{\Pi_2 \otimes \cdots \otimes \Pi_2}_{m_{\Pi_2}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\Pi_k \otimes \cdots \otimes \Pi_k}_{m_{\Pi_k}}$$

et Π_i sont deux-à-deux non-équivalentes inertielles. On appelle un tel représentant un bon représentant. Pour tout bon représentant $(P, \tilde{\pi})$, on a $(w, \lambda_{\tilde{\pi}}) \in \mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})$ si et seulement si $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}, \mathfrak{a}_{M_P})$, $w(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}$ et $\lambda_{\tilde{\pi}} \in |\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})|$.

Dans cette section, on va calculer $J^{T=0}_{-1}$ qui est relativement plus facile à traiter. Dans l'appendice, on montre que $J^{T=0}_e$ est indépendant de $e \in \mathbb{Z}$ si e est premier à n. En utilisant l'égalité (V.4), on sait $J^{T=0}_{-1}$ est égal à la somme portant sur les classes d'équivalence de paires discrètes partout non-ramifiées $(P, \tilde{\pi})$ avec un représentant comme ci-dessus de l'expression suivante :

$$\text{(V.29)} \quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\tilde{\pi})|} \sum_{\substack{w\in W(\mathfrak{a}_{M_P},\mathfrak{a}_{M_P}) \\ w(\tilde{\pi})=\tilde{\pi}}} \sum_{\lambda_{\tilde{\pi}}\in|\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})|} \int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}} \frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|} \sum_{\substack{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \\ \lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}} \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}}$$

$$(-1)^{\dim\mathfrak{a}^G_{L^w}} \lim_{\substack{\mu\in X^G_{L^w} \\ \mu\to 1}} \Big(\prod_{i=1}^{\dim\mathfrak{a}_Q} (\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_i\mu_i\Big) \sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \theta_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})^{-1} \frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi}, \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w))\mathrm{d}\lambda$$

où μ_i (resp. $(\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_i$) est l'$i^{\text{ième}}$ coordonnée de $\mu \in X^G_{L^w}$ (resp. $\lambda_{\tilde{\pi}L^w} \in X^G_{L^w}$) cf. paragraphe V.1.4.

Lemme V.5.1.1. *Avec les notations ci-dessus, l'intégrale*

$$(-1)^{\dim\mathfrak{a}^G_{L^w}} \int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}} \lim_{\mu\to 1}\Big(\prod_{i=1}^{\dim\mathfrak{a}_{L^w}} (\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_i\mu_i\Big) \sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \theta_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})^{-1} \frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi}, \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)}\mathrm{d}\lambda$$

est bien définie, et elle est indépendante de $\lambda_w \in \mathrm{Im}X_{M_P}^{L^w}$ quand $\lambda_w/w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}}^{L^w}$. De plus, elle s'annule sauf si $\lambda_{\tilde{\pi}L^w} \in X_G^G$. En effet, quand $\lambda_{\tilde{\pi}L^w} \in X_G^G$, l'intégrale vaut

$$(\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_1 \sum_F \prod_{\beta\in F} (\mathrm{N}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot)) - \mathrm{P}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot)))$$

où la première somme porte sur toute la partie F de $-\Phi_{Q_{L^w}}$ telle que F forme une base de $\mathfrak{a}_{L^w}^{G*}$. Rappelons que N *et* P *donnent respectivement le nombre de zéros et de pôles dans la région $|z| < 1$.*

Démonstration. L'intégrale est bien définie car pour tout $\lambda \in \mathrm{Im}X_{L^w}^G$, la famille

$$\left(c_Q(\mu) = \frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi}, \frac{\lambda\lambda_w}{\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi}, \lambda\lambda_w)}\right)_{Q\in\mathcal{P}(L^w)}$$

est une (G, L^w)-famille sur un voisinage de 1 (cf. paragraphe V.3.4).

Nous vérifions que la (G, L^w)-famille satisfait la condition du théorème V.2.3.5 avec $\mu_0 = \lambda_{\tilde{\pi}L^w}$. En effet, clairement on a $c_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}}) = c_Q(\mu)$ pour tout $\mu \in X_{L^w}^G$. Pour tous $\lambda, \mu \in X_{L^w}^G$ on a

$$w^{-1}\left(\frac{\lambda_w\lambda}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu}\right) = \frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}}\mu}$$

Donc par le lemme V.3.4.1, on a $c_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w}) = c_Q(\mu)$ pour tout $\mu \in X_{L^w}^G$. Donc on peut utiliser le théorème V.2.3.5, et on conclut que $\lambda_{L^w\tilde{\pi}} \in X_{L^w}^G - X_G^G$ la limite s'annule.

Quand $\lambda_{\tilde{\pi}L^w} \in X_G^G$, notons que dans ce cas $(\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_1 = \cdots = (\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_{\dim \mathfrak{a}_Q}$. Par la définition des fonctions $n_{Q_{L^w}|Q}(\tilde{\pi}, \lambda)$, le théorème est d'un résultat du théorème V.2.3.5 et du corollaire V.2.3.3.. □

Par ce lemme, il faut que $\lambda_{\tilde{\pi}L^w}$ soit dans X_G^G, pour que la somme correspondante soit non-nulle. Soit $(P, \tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée, et $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}, \mathfrak{a}_{M_P})$ tel que $w(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}$. On note

(V.30)
$$\Delta(\tilde{\pi}, w) := \sum_{\widetilde{\lambda_{L^w}}\in X_G^G} \widetilde{\lambda_{L^w}}_1 \sum_{\{\lambda_{\tilde{\pi}}\in\mathrm{Fix}(\tilde{\pi})|\ \lambda_{\tilde{\pi}}\widetilde{\lambda_{L^w}}^{-1}\in(\mathrm{Im}X_{M_P}^{L^w})^\circ\}} \sum_{\{\lambda_w\in\mathrm{Im}X_{M_P}^{L^w}|\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda_{\tilde{\pi}}\widetilde{\lambda_{L^w}}^{-1}\}} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w))$$

où $\widetilde{\lambda_{L^w}}_1$ est l'$1^{ième}$ coordonnée de $\widetilde{\lambda_{L^w}} \in X_G^G$ cf. paragraphe V.1.4. Alors par le lemme V.5.1.1 et un changement d'ordre de sommation, on a :

Proposition V.5.1.2. *$J_{-1}^{T=0}$ est égale à la somme portant sur les classes d'équivalence des paires discrètes partout non-ramifiées avec un bon représentant $(P, \tilde{\pi})$ et les $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}, \mathfrak{a}_{M_P})$ tel que $w(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi}$, de l'expression suivante :*

$$\frac{1}{|\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})|}\Delta(\tilde{\pi}, w)\frac{1}{|w||X_{L^w}^{L^w}|}\sum_F \prod_{\beta\in F}\Big(\mathrm{N}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot)) - \mathrm{P}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot))\Big)$$

V.5.2 Le but de ce paragraphe est de calculer $\Delta(\tilde{\pi}, w)$.

On note simplement L pour L^w dans ce paragraphe. Soit $L \cong^{\rho_L} GL_{l_1 d_1} \times \cdots \times GL_{l_{|L|} d_{|L|}}$. Après réindexation, on identifie M_P avec

$$\underbrace{GL_{d_1} \times \cdots \times GL_{d_1}}_{l_1} \times \underbrace{GL_{d_2} \times \cdots \times GL_{d_2}}_{l_2} \times \cdots \times \underbrace{GL_{d_{|L|}} \times \cdots \times GL_{d_{|L|}}}_{l_{|L|}})$$

tel que w permute cycliquement les facteurs de M_P contenus dans un même facteur de L. Soit Π_i une représentation de GL_{d_i} qui est un des facteurs de $\tilde{\pi}$.

Lemme V.5.2.1. *Soit d le plus grand commun diviseur des $|\mathrm{Fix}(\Pi_i)| l_i$ pour $i = 1, \ldots, |L|$. Nécessairement c'est un diviseur de n. Soit $\widetilde{\Lambda}_L$ le sous-groupe d'ordre d de X_G^G. Soit $\widetilde{\lambda_L} \in X_G^G$. Si $\widetilde{\lambda_L} \notin \widetilde{\Lambda}_L$, alors l'ensemble*

$$\{\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) |\ \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ\}$$

est vide. Si $\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda}_L$, alors l'ensemble

$$\{\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) |\ \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ\}$$

est un espace principal homogène sous l'action de $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \cap (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ$.

Démonstration. Il suffit de prouver que l'ensemble $\{\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) |\ \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ\}$ est non-vide si et seulement si $\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda}_L$.

On peut écrire $\widetilde{\lambda_L} = (\widetilde{\lambda_{L1}}, \ldots, \widetilde{\lambda_{L1}})$ en utilisant l'inclusion $X_G^G \subseteq X_L^G$. S'il existe $\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \subseteq X_M^M$ tel que

$$\lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ \cong \{(z_{1,1}, \ldots, z_{1,l_1}, z_{2,1}, \ldots, z_{|L|, l_{|L|}}) \in (\mathbb{C}^\times)^r |\ z_{j,1} z_{j,2} \cdots z_{j,l_j} = 1;\ j = 1, \ldots, |L|\}$$

Nécessairement

$$(\widetilde{\lambda_{L1}}^{l_j})^{|\mathrm{Fix}(\Pi_i)|} = 1; \quad j = 1, \ldots, |L|$$

donc

$$\widetilde{\lambda_{L1}}^{\text{p.g.c.d.}(l_j |\mathrm{Fix}(\Pi_i)|)} = \widetilde{\lambda_{L1}}^d = 1$$

C'est-à-dire $\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda}_L$.

Inversement, supposons que $\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda}_L$. On a

$$\widetilde{\lambda_{L1}}^{l_j} \in \mathrm{Fix}(\Pi_j) \quad j = 1, \ldots, |L|$$

car le groupe $\mathrm{Fix}(\Pi_j)$ est cyclique et $\widetilde{\lambda_{L1}}^{l_j |\mathrm{Fix}(\Pi_j)|} = 1$. Dans ce cas, on pose $z_{j,1} = \widetilde{\lambda_{L1}}^{l_j}$ et $z_{j,i} = 1$ pour $i \neq 1$ et $j = 1, \ldots, |L|$, alors

$$\lambda_{\tilde{\pi}} = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,l_1}, z_{2,1}, \ldots, z_{|L|, l_{|L|}}) \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \subseteq X_M^M$$

et

$$\lambda_{\tilde{\pi}}\widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im}X^{L}_{M_P})^{\circ}.$$

□

Tout d'abord, on considère le cas où $L = G$, $r = |M_P|$ et $n = dr$. Donc les facteurs de la paire discrète $(P, \tilde{\pi})$ sont égaux, soit $\tilde{\pi} = \pi \boxtimes \nu \otimes \cdots \otimes \pi \boxtimes \nu$ (cf. théorème III.3.4.5). On peut supposer simplement que w est la permutation cyclique $(1, 2, \ldots, r)$. Dans ce cas $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \cong \mathrm{Fix}(\pi)^r$ (cf. proposition III.3.4.6).

Soit $\widetilde{\lambda_G} \in \widetilde{\Lambda_G}$ où $\widetilde{\Lambda_G}$ est le groupe défini dans V.5.2.1. Soit $\lambda_{\tilde{\pi}} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi})$ tel que $\lambda_{\tilde{\pi}}\widetilde{\lambda_G}^{-1} \in (X^G_M)^{\circ}$. L'ensemble des $\lambda_w \in \mathrm{Im}X^G_M$ satisfaisant $\lambda_w/w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}}\widetilde{\lambda_G}^{-1}$ est

$$\{\lambda_w = \zeta^l\lambda(1 = \frac{\lambda_1\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_G}^r}, \frac{\lambda_2\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}^{r-1}}, \ldots, \frac{\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}})|\, l = 1, \ldots, n\}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ est un nombre tel que $\lambda(\frac{\lambda_1\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_G}^r}, \frac{\lambda_2\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}^{r-1}}, \ldots, \frac{\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}}) := (\lambda\frac{\lambda_1\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_G}^r}, \lambda\frac{\lambda_2\cdots\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}^{r-1}}, \ldots, \lambda\frac{\lambda_r}{\widetilde{\lambda_{G1}}}) \in \mathrm{Im}X^G_M$ et ζ une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. Maintenant, on peut faire le calcul :

Soit $\Pi = \pi \boxtimes \nu$. Soit $L(\pi \times \pi^{\vee}, z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ pour P et Q deux polynômes premiers entre eux. On a d'après l'équation fonctionnelle de la fonction L et le théorème V.3.1.1

$$\text{(V.31)} \qquad P(z) = q^{(g_X-1)\mathrm{r}(\pi)^2+|\mathrm{Fix}(\pi)|}z^{(2g_X-2)\mathrm{r}(\pi)^2+2|\mathrm{Fix}(\pi)|}P(\frac{1}{qz})$$

Par le lemme V.3.1.4, soit $\beta \in \Phi(Z_{M_P}, G)$ et $\lambda \in X^G_{M_P}$

$$n_{\beta}(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^{\vee}}) = q^{(1-g_X)d^2}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{P(q^{i-1}\lambda^{\beta^{\vee}})}{P(q^{-i}\lambda^{\beta^{\vee}})}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{1-(q^{-i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}{1-(q^{i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}\prod_{i=1}^{\nu-1}\frac{1-(q^{-i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}{1-(q^{i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}.$$

Utilisons l'équation (V.31), on a

$$\text{(V.32)} \quad n_{\beta}(\tilde{\pi}, \lambda^{\beta^{\vee}}) = -(\lambda^{\beta^{\vee}})^{((2g_X-2)\mathrm{r}(\pi)^2+4|\mathrm{Fix}(\pi)|)\nu-|\mathrm{Fix}(\pi)|}$$
$$\prod_{i=1}^{\nu}\frac{P(q^{-i}\frac{1}{\lambda^{\beta^{\vee}}})}{P(q^{-i}\lambda^{\beta^{\vee}})}\prod_{i=1}^{\nu}\frac{1-(q^{i}\frac{1}{\lambda^{\beta^{\vee}}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}{1-(q^{i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}\prod_{i=1}^{\nu-1}\frac{1-(q^{i}\frac{1}{\lambda^{\beta^{\vee}}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}{1-(q^{i}\lambda^{\beta^{\vee}})^{|\mathrm{Fix}(\pi)|}}.$$

Comme $\lambda_i \in \mathrm{Fix}(\pi)$, il s'ensuit que la somme considérée est égale à

$$\text{(V.33)} \qquad \sum_{\substack{\lambda_w \in \mathrm{Im}X_{M_P^G} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^G_{\tilde{\pi}}}} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w)) = \sum_{l=1}^{n}\prod_{s=2}^{r} n_{\beta}(\tilde{\pi}, \widetilde{\lambda_{G1}}^{s-1})$$
$$= n\prod_{s=2}^{r} n_{\beta}(\tilde{\pi}, \widetilde{\lambda_{G1}}^{s-1}).$$

D'après l'égalité (V.32), la somme (V.33) est égale à

$$(-1)^{r-1} n \widetilde{\lambda_{G1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi)|\frac{r(r-1)}{2}} \widetilde{\lambda_{G1}}^{\nu\left((2g_X-2)\mathrm{r}(\pi)^2+4|\mathrm{Fix}(\pi)|\right)\frac{r(r-1)}{2}}.$$

Notons que

$$\widetilde{\lambda_{G1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi)|\frac{r(r-1)}{2}} \widetilde{\lambda_{G1}}^{\nu\left((2g_X-2)\mathrm{r}(\pi)^2+4|\mathrm{Fix}(\pi)|\right)\frac{r(r-1)}{2}} = \widetilde{\lambda_{G1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi)|\frac{r(r-1)}{2}}.$$

On peut conclure :

$$\sum_{\substack{\lambda_w \in \mathrm{Im} X_{M_P^G} \\ \lambda_w / w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}}^G}} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w)) = (-1)^{r-1} n \widetilde{\lambda_{G1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi)|\frac{r(r-1)}{2}}.$$

Notons que cela ne dépend pas de $\lambda_{\tilde{\pi}}$, et $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \cap (\mathrm{Im} X_{M_P}^G)^\circ$ a pour cardinal $|\mathrm{Fix}(\pi)|^{r-1}$. Donc

$$\sum_{\{\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) |\ \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_G}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^G)^\circ\}} \ \sum_{\{\lambda_w \in \mathrm{Im} X_{M_P}^G |\ \lambda_w / w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_{G1}}^{-1}\}} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w))$$
$$= |X_G^G| (-1)^{r-1} |\mathrm{Fix}(\pi)|^{r-1} \widetilde{\lambda_{G1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi)|\frac{r(r-1)}{2}}.$$

Pour le cas général, $\mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) \cap (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ$ a pour cardinal $\prod_{i=1}^{|L|} |\mathrm{Fix}(\pi_i)|^{l_i - 1}$. Soit $\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda}_L$. En utilisant les notations qu'au début de ce paragraphe, on a de même

$$\sum_{\{\lambda_{\tilde{\pi}} \in \mathrm{Fix}(\tilde{\pi}) |\ \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_L}^{-1} \in (\mathrm{Im} X_{M_P}^L)^\circ\}} \ \sum_{\{\lambda_w |\ \lambda_w / w^{-1}(\lambda_w) = \lambda_{\tilde{\pi}} \widetilde{\lambda_{L1}}^{-1}\}} n_{\tilde{\pi}}(w, w^{-1}(\lambda_w))$$
$$= |X_L^L| \prod_{i=1}^{|L|} \left((-1)^{l_i - 1} |\mathrm{Fix}(\pi_i)|^{l_i - 1} \widetilde{\lambda_{L1}}^{-|\mathrm{Fix}(\pi_i)|\frac{l_i(l_i-1)}{2}} \right).$$

On définit une somme

$$\delta(\tilde{\pi}, L) := \sum_{\widetilde{\lambda_L} \in \widetilde{\Lambda_L}} \widetilde{\lambda_{L1}}^{-\left(\sum_i \frac{l_i(l_i-1)}{2} |\mathrm{Fix}(\pi_i)|\right)+1}.$$

Alors

$$\Delta(\tilde{\pi}, w) = |X_L^L| \prod_{j=1}^{|L|} \left((-1)^{l_j - 1} |\mathrm{Fix}(\pi_j)|^{l_j - 1} \right) \delta(\tilde{\pi}, L). \tag{V.34}$$

Il y a une expression pour $\delta(\tilde{\pi}, L)$:

Lemme V.5.2.2.
$$\delta(\tilde{\pi}, L) = \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l)(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\text{Fix}(\pi_j)|)})}$$

où $(l, |\text{Fix}(\pi_j)|)$ *désigne le plus grand commun diviseur de l et* $|\text{Fix}(\pi_j)|$.

Démonstration. On voit que

$$\chi : \widetilde{\lambda_L} \mapsto \widetilde{\lambda_{L1}}^{-(\sum \frac{l_i(l_i-1)}{2}|\text{Fix}(\pi_i)|)+1}$$

est un caractère de $\widetilde{\Lambda}_L$ vers $\mathbb{C}^\times$ que nous noterons χ, il s'ensuit que $\delta(\tilde{\pi}, L)$ s'annule sauf si ce caractère est trivial.

Cependant, on voit que
$$\chi^2(\widetilde{\lambda_L}) = \widetilde{\lambda_{L1}}^2$$
puisque l'ordre de $\widetilde{\Lambda_L}$ divise $l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$. Donc si χ est trivial, nécessairement le plus grand commun diviseur des $l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$ est égal à 2 ou 1 et respectivement $\widetilde{\Lambda_L} = \{\pm 1\}$ ou $\widetilde{\Lambda_L} = \{1\}$. Si le plus grand commun diviseur des $l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$ est égal à 1, alors $\delta(\tilde{\pi}, L) = 1$, et la somme à droite dans le lemme est égale à 1 aussi.

On considère donc le cas où le plus grand commun diviseur des $l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$ est plus grand que 1. Dans ce cas $\delta(\tilde{\pi}, L)$ est égal à soit 2 soit 0.

Pour que $\delta(\tilde{\pi}, L)$ soit égal à 2, on a besoin que le plus grand commun diviseur des $l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$ est égal à 2 et $-\sum \frac{l_i(l_i-1)}{2}|\text{Fix}(\pi_i)| - 1$ est un nombre pair. Regardons $\frac{l_i(l_i-1)}{2}|\text{Fix}(\pi_i)|$ suivant la valeur de l_i *mod* 4. La seule possibilité que la valeur $2 \nmid \frac{l_i(l_i-1)}{2}|\text{Fix}(\pi_i)|$ et $2 \mid l_i|\text{Fix}(\pi_i)|$ est quand $l_i \equiv 2$ *mod* 4 et $|\text{Fix}(\pi_i)|$ est un nombre impair. Il faut et suffit qu'on ait un nombre impair des indices i qui vérifient la condition précédente pour que $\delta(\tilde{\pi}, L)$ soit égale à 2. Dans tout les autres cas, $\delta(\tilde{\pi}, L)$ est nul.

Maintenant, on précise la somme à droite de ce lemme.

Notons que $l/(l, |\text{Fix}(\pi_j)|)$ est un entier qui divise l_j pour tout j. Si p.g.c.d.$(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)$ est un nombre impair, alors les l apparaissant dans la somme sont impairs. Donc $(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\text{Fix}(\pi_j)|)})} =$ 1, et
$$\sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l)(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\text{Fix}(\pi_j)|)})} = \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l) = 0$$
cela est égale à $\delta(\pi, w)$.

Si p.g.c.d.$(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)$ est un nombre pair, alors soit $4 \mid$ p.g.c.d.$(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)$, soit $4 \nmid$ p.g.c.d.$(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)$ mais $2 \mid$ p.g.c.d.$(l_i|\text{Fix}(\pi_i)|)$.

Dans le premier cas. Considérons les l apparaissant dans la somme tels que $\mu(l) \neq 0$. Par la définition de la fonction Möbius, on a $4 \nmid l$. Il y a trois sous-cas pour les nombres l_j et $|\text{Fix}(\pi_j)|$:

1. $2 \nmid l_j$, on a $2 \mid l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\text{Fix}(\pi_j)|)}$ car "1 + 1 = 2".

2. $4 \mid l_j$, on a $2 \mid \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$ donc $2 \mid l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$.

3. $2 \parallel l_j$ (i.e. $2 \mid l_j$ mais $4 \nmid l_j$), on a $2 \mid l_j$ et $2 \mid |\mathrm{Fix}(\pi_j)|$, alors $2 \nmid \frac{l}{(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$ et donc $2 \mid l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$.

En tout cas

$$\sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l)(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)})} = \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l) = 0$$

Dans l'autre cas. Si $2 \mid |\mathrm{Fix}(\pi_j)|$ pour un j, on a $2 \nmid \frac{l}{(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$ et donc $2 \mid l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$ parce que l_j et $\frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$ sont de même parité. Si $2 \nmid \ |\mathrm{Fix}(\pi_j)|$, forcément $2|l_j$. Si $4|l_j$, on a $2|l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}$. Si $2\|l_j$, alors

$$(-1)^{l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)}} = \begin{cases} 1, & \text{si } 2 \nmid l \\ -1, & \text{si } 2|l \end{cases}$$

Donc s'il y a un nombre pair de j pour lesquels $2 \parallel l_j$ et $|\mathrm{Fix}(\pi_j)|$ est impair, on a

$$\sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l)(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)})} = \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l) = 0$$

S'il y a un nombre impair de j pour lesquels $2 \parallel l_j$ et $|\mathrm{Fix}(\pi_j)|$ est impair, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)} \mu(l)(-1)^{\sum_j (l_j + \frac{l_j}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\pi_j)|)})} \\ =& \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|);\ 2\nmid l} \mu(l) - \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|);\ 2|l} \mu(l) \\ =&2 \sum_{l|\frac{\text{p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)}{2}} \mu(l) \\ =&\begin{cases} 2, & \text{si p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|) = 2 \\ 0, & \text{si p.g.c.d.}(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|) > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

cela est exactement $\delta(\tilde{\pi}, L)$! □

V.5.3 En utilisant les calculs du paragraphe précédent, on prouve dans l'appendice que le trace tronquée $J_e^{T=0}$ ne dépend pas de e si e est premier au rang n. On a alors le théorème suivant :

Théorème V.5.3.1. *Soit $e \in \mathbb{Z}$ premier au rang n. La trace tronquée d'Arthur $J_e^{T=0}$ est égale à*

$$\sum_{l|n} \sum_{(P,\tilde{\pi})} \frac{\mu(l)}{|\,\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})|} \sum_{\substack{w \in W(\mathfrak{a}_{M_P},\mathfrak{a}_{M_P}) \\ w(\tilde{\pi})=\tilde{\pi} \\ l|\mathrm{p.g.c.d.}_{i,j}(l_j^{\Pi_i}|\mathrm{Fix}(\Pi_i)|)}} \frac{(-1)^{\sum_{i,j}(\frac{l_j^{\Pi_i}}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\Pi_j)|)}-1)}}{|w|} \Big(\prod_{i,j} |\mathrm{Fix}(\Pi_i)|^{l_j^{\Pi_i}-1}\Big) \sum_F \prod_{\beta \in F} \Big(\mathrm{N}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot)) - \mathrm{P}(n_\beta(\tilde{\pi},\cdot))\Big) \tag{V.35}$$

où la somme $\sum_F$ porte sur toute partie F de $-\Phi_{Q_{L^w}}$ (cf. V.1.1 et V.1.2 pour les notations) telle que F forme une base de $\mathfrak{a}_{L^w}^{G*}$ et la somme $\sum_{(P,\tilde{\pi})}$ porte sur les classes d'équivalence inertielle de paires discrètes partout-non-ramifiées dont on prend un représentant $\tilde{\pi} \cong \Pi_1^{m_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_k^{m_k}$ tel que les Π_i sont deux-à-deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$, les $l_j^{\Pi_i}$ sont les longueurs des orbites de facteur de w qui agit sur $\Pi_i^{m_i}$, vu comme un élément de $\mathfrak{S}_{m_i}$ (donc par définition $|w| = \prod_{i=1}^k \prod_j l_j^{\Pi_i}$).

Dans la section suivante, on donnera une formule simplifiée plus agréable.

Chapitre VI

Analyse du nombre des systèmes locaux ℓ-adiques

VI.1 Petite préparation de la théorie des graphes

VI.1.1 on rappelle la définition des graphes et des arbres :

Définition VI.1.1.1. *1. Un graphe G est un couple (V, E) où V est un ensemble fini, appelé l'ensemble des sommets de G, $|V|$ est appelé le nombre de sommets, et $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ est un ensemble de paires d'éléments de V appelé l'ensemble des arêtes de G. (Ici $\mathcal{P}_2(V)$ désigne l'ensemble des parties de cardinal 2 de V.)*

2. Un arbre est un graphe qui est connexe et sans cycle : c'est-à-dire pour n'importe quel $\{s, t\} \subseteq V$, il existe $e_1, \ldots, e_k \in E$ tel que $s \in e_1$, $t \in e_k$ et $e_i \cap e_{i+1}$ contient exactement un élément pour $1 \leqslant i \leqslant k$; et de plus si les e_i sont deux à deux distincts, ils sont uniquement déterminés par la paire (s, t).

Le lemme simple ci-dessous est bien connu depuis L. Euler :

Lemme VI.1.1.2. *Un graphe à n sommets est un arbre si et seulement s'il est connexe et s'il a exactement $n - 1$ arêtes.*

Démonstration. cf. théorème I.35. et le théorème I.37. [Tu84]. □

Soit T un graphe. Introduisons des variables $x_{ij} = x_{ji}$ correspondant aux arêtes, et associons à chaque graphe un monôme :

$$x^T = \prod_{\{i,j\} \in A(T)} x_{ij}$$

où $A(T)$ est l'ensemble des arêtes de T. Rappelons que pour une matrice de taille $n \times n$, le $i^{\text{ème}}$ cofacteur principal est le déterminant de la matrice qui s'en déduit par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne.

Soit E un graphe, il est complet si deux sommets quelconques sont connectés par un arête. Un arbre T, dont les sommets coïncident avec ceux de G et l'ensemble des arêtes est un sous-ensemble de ce de E, est appelé un arbre couvrant de E.

Théorème VI.1.1.3 (Le théorème de "Matrix-Tree"/ Kirchhoff)**.** *Soit E un graphe complet d'ensemble de sommets $\{1, \ldots, n\}$, le polynôme générateur (appelé aussi le polynôme de Kirchhoff)*

$$\sum_T x^T$$

de tous les arbres couvrants de E, est égal au $i^{\text{ième}}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) cofacteur principal de la matrice (appelé la matrice de Kirchhoff) suivante (en particulier, ces cofacteurs principaux sont égaux entre eux.)

$$\begin{pmatrix} x_{12} + \cdots + x_{1n} & -x_{12} & \cdots & -x_{1n} \\ -x_{21} & x_{21} + x_{23} + \cdots + x_{2n} & \cdots & -x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration. cf. théorème VI.29 [Tu84]. □

VI.1.2 Notons qu'une caractéristique importante de la matrice de Kirchhoff est que les sommes des coefficients de chaque ligne et chaque colonne sont nulles. Le lemme suivant nous permet de calculer les cofacteurs d'une telle matrice d'une autre façon :

Pour une matrice A complexe de taille $n \times n$ de rang $< n$, on voit que $\det(A + \lambda\, \mathrm{Id})$ est un polynôme de terme constant 0, et on définit

$$\kappa(A) = \frac{1}{n} \frac{\det(A + \lambda\, \mathrm{Id})}{\lambda}|_{\lambda=0}. \tag{VI.1}$$

Notons que $\kappa(A)$ est invariant par conjugaison.

Lemme VI.1.2.1. *Soit A une matrice carrée complexe de taille $n \times n$ de rang $< n$, les valeurs suivantes sont égales :*

a. $\kappa(A)$

b. le produit des valeurs propres non-nulles avec multiplicités divisé par n si la matrice A est de rang $n-1$, nulle si la matrice A est de rang $< n-1$

c. la moyenne des cofacteurs principaux de A

Si la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice A est nulle, alors $\kappa(A)$ est égal à

d.

$$\frac{1}{n \sum_{i=1}^n u_i} \det(A + J_n \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n))$$

où J_n est une matrice de taille $n \times n$ dont tous les éléments sont 1 et $\sum_{i=1}^n u_i \neq 0$.

Si de plus, la somme des coefficients de chaque colonne de A est nulle aussi, les cofacteurs principaux de A sont égaux, et $\kappa(A)$ est égal à la valeur suivante :

e.

$$\frac{1}{(\sum_{i=1}^n u_i)(\sum_{j=1}^n v_j)}\det(A+(u_iv_j)_{i,j})$$

où $\sum_{i=1}^n u_i \neq 0$ *et* $\sum_{j=1}^n v_j \neq 0$.

Démonstration. On voit que l'égalité entre les quantités dans (a.) et (b.) est claire. Pour montrer que $\kappa(A)$ est égal à la moyenne des cofacteurs principaux, on observe que

$$\kappa(A)=\frac{1}{n}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\det(A+\lambda\,\mathrm{Id})}{\lambda}=\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det(A+\lambda\,\mathrm{Id})|_{\lambda=0}$$

et on utilise l'identité suivante pour $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det(A+\lambda\,\mathrm{Id})$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det((a_{ij}(\lambda))_{n\times n})=\sum_{i=1}^n\det\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a'_{i1}(\lambda) & \vdots & a'_{in}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda)\end{pmatrix}$$

où $(a_{ij}(\lambda))_{n\times n}=A+\lambda\,\mathrm{Id}$. L'égalité résulte de ce que chaque membre dans la somme est un cofacteur principal.

Maintenant on vérifie $\kappa(A)$ est égal à la valeur dans (d.) quand la somme des coefficients de chaque la ligne de la matrice A est nulle. Soit

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&0\\ \vdots&&&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}\quad\text{d'inverse}\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\ \vdots&&&\cdots&0\\-1&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

On voit que la première colonne de la matrice $P^{-1}AP$ est nulle donc tout le cofacteur principal est nul sauf le premier. Si on note $(P^{-1}AP)_1$ le premier cofacteur principal de $P^{-1}AP$, on a

$$\kappa(A)=\kappa(P^{-1}AP)=\frac{1}{n}(P^{-1}AP)_1.$$

Cependant, on vérifie aussi que

$$P^{-1}J_n\mathrm{diag}(u_1,\dots,u_n)P=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n u_i & u_2 & \cdots & u_n\\ 0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\cdots&\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

est une matrice concentrée sur la première ligne dont le premier élément est $\sum_{i=1}^n u_i$, donc

$$\det(A + J_n \mathrm{diag}(u_1, \dots, u_n)) = (\sum_{i=1}^n u_i)(P^{-1}AP)_1 = n\kappa(A) \sum_{i=1}^n u_i.$$

Quand la somme des coefficients de chaque colone de la matrice A est nulle aussi, soit $A = (a_{ij})$. On peut calculer $\det(A + (u_i v_j)_{i,j})$ comme ça : ajouter chaque ligne de $A + (u_i v_j)_{i,j}$ à la première ligne, ensuite ajouter chaque colonne à la première colonne. On voit que $A + (u_i v_j)_{i,j}$ est transformée en une matrice qui est de la forme

$$\begin{pmatrix} (\sum_{i=1}^n u_i)(\sum_{j=1}^n v_j) & v_2(\sum_{i=1}^n u_i) & v_3(\sum_{i=1}^n u_i) & \cdots & v_n(\sum_{i=1}^n u_i) \\ u_2(\sum_{j=1}^n v_j) & a_{22} + u_2 v_2 & a_{23} + u_2 v_3 & \vdots & a_{2n} + u_2 v_n \\ u_3(\sum_{j=1}^n v_j) & a_{32} + u_3 v_2 & a_{33} + u_3 v_3 & \vdots & a_{3n} + u_3 v_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ u_n(\sum_{j=1}^n v_j) & a_{n2} + u_n v_2 & a_{n3} + u_n v_3 & \cdots & a_{nn} + u_n v_n \end{pmatrix}.$$

On peut soustraire $i^{\text{ième}}$ ligne $\frac{u_i}{\sum_{i=1}^n u_i}$ fois la première ligne (pour tout $i \geqslant 2$). D'après ces opérations, il se trouve que

$$\det(A + (u_i v_j)_{i,j}) = (\sum_{i=1}^n u_i)(\sum_{j=1}^n v_j) A_1,$$

où A_1 est le premier cofacteur principal de A. Comme l'indice 1 n'est pas particulier dans la preuve, on en déduit que les cofacteurs de A sont égaux et cela finit la démonstration du lemme. □

VI.1.3 Soit $L \cong^{\rho_L} GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$ un sous-groupe de Levi (voir le paragraphe V.1.3 pour la notation et la convention). Soit E le graphe complet avec l'ensemble des sommets $\{\frac{1}{n_1}\det_{L,1}, \dots, \frac{1}{n_r}\det_{L,r}\}$.

Lemme VI.1.3.1. *Sous la bijection entre l'ensemble des arêtes de E et $-\Phi_{Q_L}$ qui envoie l'arête reliant $\{\frac{1}{n_1}\det_{L,i}, \frac{1}{n_1}\det_{L,j}\}$ $(i > j)$ sur l'unique racine $\frac{1}{n_1}\det_{L,i} - \frac{1}{n_1}\det_{L,j}$ dans $-\Phi_{Q_L}$, les arbres couvrants de E et les bases de $\mathfrak{a}_L^{G*}$ formées de racines dans $-\Phi_{Q_L}$ sont en bijection.*

Démonstration. Notons que le nombre d'arêtes d'un arbre et le nombre de vecteurs d'une base sont égaux à $r - 1$.

Si $F \subseteq -\Phi_{Q_L}$ est une base, le graphe T associé n'aura pas de cycle. Car un cycle $e_{i_1} \to e_{i_2} \to \cdots \to e_{i_k} = e_{i_1}$ donnera une relation linéaire avec coefficients ± 1 pour les vecteurs de F :

$$\sum_{j=1}^{k-1} (e_{i_j} - e_{i_{j+1}}) = 0.$$

Par le lemme VI.1.1.2, T est un arbre.

Réciproquent si T un arbre couvrant de E, l'ensemble des arêtes associé F engendra $\mathfrak{a}_L^{G*}$. Car un chemin $e_i = e_{i_1} \to e_{i_2} \to \cdots \to e_{i_k} = e_{i+1}$ donnera une expression de vecteur $e_i - e_{i+1}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de F :

$$\sum_{j=1}^{k-1}(e_{i_j} - e_{i_{j+1}}) = e_i - e_{i+1},$$

et $\mathfrak{a}_L^{G*}$ est engendré par les $e_i - e_{i+1}$. Donc F est une base. $\square$

D'après ce lemme le théorème VI.1.1.3, on a

Théorème VI.1.3.2. *Soit $(y_\beta)_{\beta\in-\Phi_{Q_L}}$ une famille de nombres complexes, et A la matrice symétrique dont l'élément indexé par (i,j) $i<j$ est égal à $y_\beta \in \mathbb{C}$, pour $\{i,j\}$ correspondant à β au sens de la bijection du lemme précédent ; on prend les éléments diagonaux de A de sorte que la somme de chaque ligne soit nulle. Alors*

$$\sum_F \prod_{\beta\in F} y_\beta = \kappa(A)$$

où la somme porte sur toute partie F de $-\Phi_{Q_L}$ qui forme une base de $\mathfrak{a}_L^{G*}$.

VI.2 Dernier calcul pour la contribution d'une paire discrète

VI.2.1 Soit $(P,\tilde{\pi})$ une paire discrète partout non-ramifiée. Rappelons qu'on a choisi un bon représentant, c'est-à-dire

$$\tilde{\pi} = \underbrace{\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_1}_{m_{\Pi_1}} \otimes \underbrace{\Pi_2 \otimes \cdots \otimes \Pi_2}_{m_{\Pi_2}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\Pi_k \otimes \cdots \otimes \Pi_k}_{m_{\Pi_k}}$$

et Π_i sont irréductibles deux-à-deux non inertiellement équivalentes. Soit $I_{\tilde{\pi}}$ l'ensemble des représentations distincts Π_i ; on a $|I_{\tilde{\pi}}| = k$. On a deux applications de $I_{\tilde{\pi}}$ vers l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations automorphes cuspidales et $\mathbb{N}^*$ envoyant respectivement une représentation discrète $\Pi = \pi \boxtimes \nu$ sur π et ν :

$$p_1(\Pi) = p_1(\pi \boxtimes \nu) = \pi;$$

$$p_2(\Pi) = p_2(\pi \boxtimes \nu) = \nu.$$

Pour une représentation cuspidale irréductible π et un nombre $\nu \in \mathbb{N}$, on note I_π pour la fibre de la première application p_1 en π et I_ν celle de p_2 en ν. Alors les I_π et I_ν sont sous-ensembles de $I_{\tilde{\pi}}$. On dispose aussi d'un ensemble

$$N_{\tilde{\pi}} := \{\nu \in \mathbb{N}^* | \, I_\nu \neq \varnothing\}.$$

Soit $w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}, \mathfrak{a}_{M_P})$ stabilise $\tilde{\pi}$. Nécessairement w laisse chaque $\Pi_i^{m_{\Pi_i}}$ fixé et permute ses facteurs donc il s'identifie à un élément de

$$\prod_{\Pi \in I_{\tilde{\pi}}} \mathfrak{S}_{m_\Pi}$$

Soit $\Pi \in I_{\tilde{\pi}}$. Soit $(l_j^\Pi)_{j=1,\dots,\alpha_\Pi}$ les longueurs des cycles (orbites) du facteur de w dans $\mathfrak{S}_{m_\Pi}$ et on note $d_\Pi = d_{\pi \boxtimes \nu} = \mathrm{r}(\pi)$ qui donc ne dépend que de $p_1(\Pi)$. Notons qu'on a

$$\sum_{j=1}^{\alpha_\Pi} l_j^\Pi = m_\Pi.$$

On note

$$a_\nu := \sum_{\Pi \in I_\nu} m_\Pi d_\Pi$$

Prenons garde qu'on a

$$n = \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \nu.$$

VI.2.2 On retourne à une somme apparaissant dans l'expression (V.35).

Théorème VI.2.2.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\sum_F \prod_{\beta \in F} \Big(\mathrm{N}(n_\beta(\tilde{\pi}, \cdot)) - \mathrm{P}(n_\beta(\tilde{\pi}, \cdot)) \Big) = \tag{VI.2}$$
$$\frac{|w| (\prod_{\Pi \in I} d_\Pi) |N_{\tilde{\pi}}| (2g_X - 2)^{|I_{\tilde{\pi}}|-1} \prod_{\mu \in N_{\tilde{\pi}}} (\sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{\mu, \nu\})^{|I_\mu|}}{n \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu}$$
$$\prod_{\Pi \in I_{\tilde{\pi}}} (|\mathrm{Fix}(\Pi)| m_\Pi + (2g_X - 2) d_\Pi \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{p_2(\Pi), \nu\})^{\alpha_\Pi - 1}$$

où la première somme à gauche porte sur les bases de $\mathfrak{a}_{L^w}^{G*}$ formées de racines dans $-\Phi_{Q_{L^w}}$. Rappelons que $|w|$ est le produit des longueurs des orbits de w, les opérateurs N *et* P *donnent respectivement le nombre de zéros et de pôles dans la région $|z| < 1$.*

Démonstration. On va utiliser le théorème VI.1.3.2 en posant $y_\beta = \mathrm{N}(n_\beta(\tilde{\pi}, \cdot)) - \mathrm{P}(n_\beta(\tilde{\pi}, \cdot))$ pour construire une matrice $\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w}$ telle que $\kappa(\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w})$ (cf. VI.1.2 pour la notation) soit égale au membre à gauche de l'expression (VI.2).

Par le corollaire V.3.1.3 et l'équation (V.20) du paragraphe V.3.3, le nombre des zéros et de pôles de $n_\beta(\tilde{\pi}, \cdot)$ dépend de si les deux facteurs de Π correspondant à β sont égaux ou non. Il faut décrire $\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w}$ comme une matrice par blocs. On utilise $I_{\tilde{\pi}}$ pour indexer les blocs de $\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w}$. Pour chaque bloc associé à $\Pi \in I_{\tilde{\pi}}$, on utilise $1 \leqslant s \leqslant \alpha_\Pi$ pour indexer les éléments dans le bloc. Pour simplifier l'écriture, on utilise s_Π ou t_Π pour un nombre variant de 1 à α_Π. L'écriture $(a_{\Pi_i,\Pi_j}(s_{\Pi_i}, t_{\Pi_j}))_{s_{\Pi_i},t_{\Pi_j}}$ doit être comprise comme la matrice par blocs (A_{Π_i,Π_j}) où chaque bloc est donnée par

$$A_{\Pi_i,\Pi_j} = \Big(a_{\Pi_i,\Pi_j}(s,t)\Big)_{\substack{1\leqslant s\leqslant m_{\Pi_i}\\ 1\leqslant t\leqslant m_{\Pi_j}}}.$$

La matrice $\mathrm{M}_{\tilde\pi,w}$ peut alors s'écrire

$$\mathrm{M}_{\tilde\pi,w} = \mathrm{diag}(y_\Pi(s_\Pi))_{s_\Pi} - (x_{\Pi_i,\Pi_j}(s_{\Pi_i},t_{\Pi_j}))_{s_{\Pi_i},t_{\Pi_j}}$$

où

$$x_{\Pi_i,\Pi_j}(s_{\Pi_i},t_{\Pi_j}) = \begin{cases} -l^{\Pi_i}_{s_{\Pi_i}} l^{\Pi_j}_{t_{\Pi_j}}(2g_X-2)d_{\Pi_i}d_{\Pi_j}\min\{p_2(\Pi_i),p_2(\Pi_j)\}, & \text{si } \Pi_i\neq\Pi_j\,; \\ \\ -l^{\Pi_i}_{s_{\Pi_i}} l^{\Pi_j}_{t_{\Pi_j}}\Big((2g_X-2)d_{\Pi_i}d_{\Pi_j}\min\{p_2(\Pi_i),p_2(\Pi_j)\}+|\mathrm{Fix}(\Pi_i)|\Big), & \text{si } \Pi_i=\Pi_j. \end{cases}$$

et les diagonaux :

$$y_\Pi(s_\Pi) = l^\Pi_{s_\Pi}|\mathrm{Fix}(\Pi)|m_\Pi + (2g_X-2)l^\Pi_{s_\Pi}d_\Pi\sum_{\Pi'\in I_{\tilde\pi}} d_{\Pi'}m_{\Pi'}\min\{p_2(\Pi'),p_2(\Pi)\}$$

On note

$$y_\Pi = |\mathrm{Fix}(\Pi)|m_\Pi + (2g_X-2)d_\Pi\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu\min\{p_2(\Pi),\nu\}$$

alors on a

$$y_\Pi(s_\Pi) = y_\Pi l^\Pi_{s_\Pi}$$

On note aussi $x_{\Pi_i,\Pi_j} = (2g_X-2)d_{\Pi_i}d_{\Pi_j}\min\{p_2(\Pi_i),p_2(\Pi_j)\} + \delta_{\Pi_i,\Pi_j}|\mathrm{Fix}(\Pi_i)|$ où δ_{Π_i,Π_j} est le symbole de Kronecker, on a donc

$$x_{\Pi_i,\Pi_j}(s_{\Pi_i},s_{\Pi_j}) = l^{\Pi_i}_{s_{\Pi_i}}l^{\Pi_j}_{s_{\Pi_j}}x_{\Pi_i,\Pi_j}.$$

On a besoin d'un lemme qui nous permet de descendre le rang de la matrice pour calculer le déterminant :

Lemme VI.2.2.2. *Soit $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ une famille de nombres complexes. On se donne pour tout $1\leqslant i\leqslant k$ un vecteur complexe $U_i = {}^t(u^i_1,\dots,u^i_{n_i})$ de taille $n_i\times 1$. Soient $N=\sum_{i=1}^k n_i$, et $J_{n_i\times n_j}$ la matrice de taille $n_i\times n_j$ dont tous les éléments sont 1, alors on a l'égalité :*

$$\det(\mathrm{Id}_N - (a_{ij}J_{n_i\times n_j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\mathrm{diag}(u^1_1,\dots,u^1_{n_1},u^2_1,\dots,u^k_{n_k})) = \det(\mathrm{Id}_k - (a_{ij}\sum_{l=1}^{n_j}u^j_l)_{1\leqslant i,j\leqslant k})$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que les valeurs propres de la matrice $(a_{ij}\sum_{l=1}^{n_j}u^j_l)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ sont deux-à-deux distincts et non-nuls, en particulier la matrice est diagonalisable.

Soient $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ des vecteurs de taille $n_i\times 1$, tels que ${}^tU_iV_i=0$ pour tout $1\leqslant i\leqslant k$, alors le vecteur $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 0 de

$$(a_{ij}J_{n_i\times n_j})_{N\times N}\mathrm{diag}(u_1^1, \ldots, u_{n_1}^1, u_1^2, \ldots, u_{n_k}^k)$$

Les vecteurs de cette type appartiennent à un sous-espace de l'espace propre pour la valeur propre 0 de dimension$\geqslant \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = N - k$. Maintenant, soit $V = (v_1, \ldots, v_k)$ un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \neq 0$ de $(a_{ij}\sum_{l=1}^{n_j} u_l^j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$, on vérifie que le vecteur

$${}^t(\underbrace{v_1, \ldots, v_1}_{n_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{v_k, \ldots, v_k}_{n_k \text{ fois}})$$

est un vecteur propre de $(a_{ij}J_{n_i\times n_j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\mathrm{diag}(u_1^1, \ldots, u_{n_1}^1, u_1^2, \ldots, u_{n_k}^k)$ de valeur propre λ aussi. Par notre hypothèse, ces vecteurs forment un espace de dimension k. Donc l'égalité considérée est vraie d'après la comparaison des valeurs propres de deux côtés.

Notons que l'ensemble des éléments $((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}, U_1, \ldots, U_k) \in Mat_k(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^k n_j}$ tels que les valeurs propres de la matrice $(a_{ij}\sum_{l=1}^{n_j} u_l^j)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ soient deux-à-deux distincts et non-nuls est un sous-ensemble ouvert non-vide de $Mat_k(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^k n_j}$.L'égalité étant vraie pour un sous-ensemble fermé est donc vrai pour tout $((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}, U_1, \ldots, U_k) \in Mat_k(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^k n_j}$. □

Comme la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne de la matrice $(\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w}$ est nulle, par le lemme VI.1.2.1 (l'égalité entre les quantités a. et e.), on a

$$\kappa(\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w}) = \frac{1}{(\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu)^2}\det(\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w} + (l_{s_{\Pi_i}}^{\Pi_i} l_{s_{\Pi_j}}^{\Pi_j} d_{\Pi_i}d_{\Pi_j})_{s_{\Pi_i},s_{\Pi_j}})$$

Donc par le lemme VI.2.2.2, cette expression est égale à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu)^2}\det(\mathrm{diag}(y_\Pi(s_\Pi))_{s_\Pi} - (x_{\Pi_i,\Pi_j}(s_{\Pi_i}, t_{\Pi_j})_{s_{\Pi_i},t_{\Pi_j}}) + (l_{s_{\Pi_i}}^{\Pi_i} l_{s_{\Pi_j}}^{\Pi_j} d_{\Pi_i}d_{\Pi_j})_{s_{\Pi_i},s_{\Pi_j}})\\ &\quad = \frac{\prod_{\Pi\in I_{\tilde{\pi}}}\left(y_\Pi^{\alpha_\Pi-1}\prod_{s=1}^{\alpha_\Pi} l_s^\Pi\right)}{(\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu)^2}\det\left(\mathrm{diag}(y_\Pi)_\Pi - (x_{\Pi_i,\Pi_j}m_{\Pi_j})_{\Pi_i,\Pi_j} + (d_{\Pi_i}d_{\Pi_j}m_{\Pi_j})_{\Pi_i,\Pi_j}\right)\end{aligned}$$

Écrivons

$$z_\mu = (2g_X - 2)\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{\mu, \nu\}$$

et

$$\omega_{\mu,\nu} = (2g_X - 2)\min\{\mu, \nu\}$$

pour $\mu, \nu \in N_{\tilde{\pi}}$. En utilisant encore le lemme VI.2.2.2, on voit que $\kappa(\mathrm{M}_{\tilde{\pi},w})$ est égal à

$$\frac{\prod_{\Pi\in I}\Big(y_\Pi^{\alpha_\Pi-1}\prod_{s=1}^{\alpha_\Pi} l_s^\Pi\Big)}{(\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu)^2}\det(\mathrm{diag}(z_{p_2(\Pi)}d_\Pi)_\Pi-(\omega_{p_2(\Pi_i),p_2(\Pi_j)}m_{\Pi_j}d_{\Pi_i}d_{\Pi_j})_{\Pi_i,\Pi_j}+(d_{\Pi_i}d_{\Pi_j}m_{\Pi_j})_{\Pi_i,\Pi_j})$$

$$=\frac{(\prod_{\mu\in N_{\tilde{\pi}}} z_\mu^{|I_\mu|-1})\prod_{\Pi\in I_{\tilde{\pi}}}\Big(d_\Pi y_\Pi^{\alpha_\Pi-1}\prod_{s=1}^{\alpha_\Pi} l_s^\Pi\Big)}{(\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu)^2}\det(\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu}+(a_\nu)_{\mu,\nu})$$

De plus, comme la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice $\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu}$ est nulle, par l'égalité entre les valeurs a. et d. du lemme VI.1.2.1, l'expression ci-dessus peut s'écrire comme

$$|N_{\tilde{\pi}}|\frac{(\prod_{\mu\in N_{\tilde{\pi}}} z_\mu^{|I_\mu|-1})\prod_{\Pi\in I_{\tilde{\pi}}}\Big(d_\Pi y_\Pi^{\alpha_\Pi-1}\prod_{s=1}^{\alpha_\Pi} l_s^\Pi\Big)}{\sum_{\nu\in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu}\kappa(\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu})$$

Maintenant pour calculer $\kappa(\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu})$, on va transformer la matrice $\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu}$ en une matrice triangulaire inférieure : On ordonne l'ensemble $N_{\tilde{\pi}}$ de tel sorte que

$$N_{\tilde{\pi}}=\{\nu_1,\ldots,\nu_{|N_{\tilde{\pi}}|}\}$$

et

$$\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_{|N_{\tilde{\pi}}|}$$

Soit P la matrice de taille $|N_{\tilde{\pi}}|\times|N_{\tilde{\pi}}|$, qui est triangulaire inférieure dont tous les éléments sous-diagonaux sont 1 :

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\&&\ddots&&\\1&1&\cdots&&1\end{pmatrix}\text{ d'inverse }P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\0&-1&1&\cdots&0\\&&\ddots&&\\0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}.$$

On considère la matrice :

$$P^{-1}\Big(\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu-(\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu}\Big)P.$$

Après calcul direct, on trouve que c'est une matrice triangulaire supérieure telle que les éléments diagonaux sont $(2g_X-2)$ multiplié par

$$0,\ \nu_1(\sum_{i=1}^{|N_{\tilde{\pi}}|}a_{\nu_i}),\ \nu_1a_{\nu_1}+\nu_2(\sum_{i=2}^{|N_{\tilde{\pi}}|}a_{\nu_i}),\ \ldots,\ (\sum_{i=1}^{|N_{\tilde{\pi}}|-1}\nu_ia_{\nu_i})+\nu_{|N_{\tilde{\pi}}|-1}a_{\nu_{|N_{\tilde{\pi}}|}}.$$

En utilisant encore une fois le lemme VI.1.2.1 (l'égalité entre *a*. et *b*.), on a

$$\kappa(\mathrm{diag}(z_\mu)_\mu - (\omega_{\mu,\nu}a_\nu)_{\mu,\nu}) = \frac{(2g_X-2)^{|N_{\tilde\pi}|-1}\prod_{\mu\in N_{\tilde\pi}}(\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu \min\{\mu,\nu\})}{n|N_{\tilde\pi}|}. \tag{VI.3}$$

On conclut que la valeur cherchée est égale à

$$\frac{|w|(\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}} d_\Pi)(2g_X-2)^{|I_{\tilde\pi}|-1}\prod_{\mu\in N_{\tilde\pi}}(\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu \min\{\mu,\nu\})^{|I_\mu|}}{n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu} \prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}(|\mathrm{Fix}(\Pi)|m_\Pi + (2g_X-2)d_\Pi\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu\min\{p_2(\Pi),\nu\})^{r_\Pi-1} \tag{VI.4}$$

où, par la definition $|w| = \prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}\prod_{s=1}^{\alpha_\Pi} l_s^\Pi$. □

Théorème VI.2.2.3. *Avec les notations du théorème précédent, quand $(e,n)=1$, $J_e^{T=0}$ est égal à*

$$\sum_{l|n}\mu(l)\sum_{\substack{(P,\tilde\pi)\\ \xi_\Pi|m_\Pi,\forall\Pi\in I_{\tilde\pi}}}\frac{1}{|\mathfrak{stab}(P,\tilde\pi)|(2g_X-2)n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu}\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}\binom{S_\Pi/\xi_\Pi}{m_\Pi/\xi_\Pi}|\mathrm{Fix}(\Pi)|^{m_\Pi}(-1)^{\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi}}m_\Pi! \tag{VI.5}$$

où $\xi_\Pi = \frac{l}{(l,|\mathrm{Fix}(\Pi)|)}$, et $S_\Pi = -\frac{(2g_X-2)d_\Pi\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu\min\{p_2(\Pi),\nu\}}{|\mathrm{Fix}(\Pi)|}$ et la somme sur $(P,\tilde\pi)$ parcourt toutes les classes d'équivalence inertielle de paires discrètes partout non-ramifiées tels que $\xi_\Pi \mid m_\Pi$, $\forall\,\Pi\in I_{\tilde\pi}$.

Démonstration. Par le théorème V.5.3.1, $J_e^{T=0}$ est égal à la somme portant sur tout $l \mid n$ et toute la classe d'équivalence inertielle de paires discrètes partout non-ramifiées de $\frac{\mu(l)}{|\mathfrak{stab}(P,\tilde\pi)|}$ fois l'expression :

$$\sum_{\substack{w\in W(\mathfrak{a}_{M_P}),w(\tilde\pi)=\tilde\pi\\ w \text{ a pour longueurs des orbites } (l_j^\Pi)_{j,\Pi}\\ \text{tels que } \sum_j l_j^\Pi=m_\Pi,\forall\Pi\in I_{\tilde\pi}\\ \text{et } l|l_j^\Pi|\mathrm{Fix}(\pi_i)|\ \forall\Pi\in I_{\tilde\pi},\forall j}}\frac{(-1)^{\sum_{j,\Pi}(\frac{l_j^\Pi}{l/(l,|\mathrm{Fix}(\Pi)|)}-1)}}{|w|} \tag{VI.6}$$
$$\frac{|w|(\prod_{\Pi\in I} d_\Pi)|N_{\tilde\pi}|(2g_X-2)^{|I_{\tilde\pi}|-1}\prod_{\mu\in N_{\tilde\pi}}(\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} a_\nu\min\{\mu,\nu\})^{|I_\mu|}}{n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu}\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}(|\mathrm{Fix}(\Pi)|m_\Pi+(2g_X-2)d_\Pi\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu\min\{p_2(\Pi),\nu\})^{r_\Pi-1}.$$

Notons que le facteur

$$\frac{(\prod_{\Pi\in I} d_\Pi)(2g_X-2)^{|I_{\tilde\pi}|-1}\prod_{\mu\in N_{\tilde\pi}}(\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}} S_\nu\min\{\mu,\nu\})^{|I_\mu|}}{n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu}$$

dans l'expression de la somme ne dépend que de $\tilde{\pi}$. Pour tout $\Pi \in I_{\tilde{\pi}}$

$$\prod_{j=1}^{\alpha_\Pi} |\mathrm{Fix}(\Pi)|^{l_j^\Pi - 1} = |\mathrm{Fix}(\Pi)|^{m_\Pi - 1} |\mathrm{Fix}(\Pi)|^{1-\alpha_\Pi}.$$

De même, soit $\xi_\Pi = \frac{l}{(l, |\mathrm{Fix}(\Pi)|)}$ on a

$$(-1)^{\sum_\Pi \sum_j (\frac{l_j^\Pi}{\xi_\Pi} - 1)} = \prod_\Pi (-1)^{(\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi} - 1) - (\alpha_\Pi - 1)}.$$

Donc la somme (VI.6) se simplifie :

$$\text{(VI.7)} \quad \frac{(\prod_{\Pi \in I} d_\Pi)(2g_X - 2)^{|I_{\tilde{\pi}}|-1} \prod_{\mu \in N_{\tilde{\pi}}} (\sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{\mu, \nu\})^{|I_\mu|}}{n \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu} \prod_{\Pi \in I_{\tilde{\pi}}} \Big(|\mathrm{Fix}(\Pi)|^{m_\Pi - 1} (-1)^{\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi}} \Big)$$
$$\sum_{\substack{w \in W(\mathfrak{a}_{M_P}), w(\tilde{\pi}) = \tilde{\pi} \\ w \text{ a pour longueurs des orbites } (l_j^\Pi)_{j,\Pi} \\ \text{tels que } \sum_j l_j^\Pi = m_\Pi, \forall \Pi \in I_{\tilde{\pi}} \\ \text{et } l | l_j^\Pi |\mathrm{Fix}(\pi_i)| \ \forall \Pi \in I_{\tilde{\pi}}, \forall j}} \prod_{\Pi \in I_{\tilde{\pi}}} \Big(-\frac{|\mathrm{Fix}(\Pi)| m_\Pi + (2g_X - 2) d_\Pi \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{p_2(\Pi), \nu\}}{|\mathrm{Fix}(\Pi)|}\Big)^{\alpha_\Pi - 1}.$$

On considère la dernière somme. Notons que les membres dans la somme ne dépend que des longueurs des orbites des facteurs de w dans chaque $\mathfrak{S}_{m_\Pi}$ pour $\Pi \in I_{\tilde{\pi}}$. Soient $\xi, m \in \mathbb{N}^*$. On utilise la notation

$$(j^{c_j}) \vdash_\xi m$$

si (j^{c_j}) est une partition de m telle que $\xi \mid j$ dès que $c_j \neq 0$. Notons que pour une partition $(j^{c_j}) \vdash m_\Pi$ le nombre des permutations dans $\mathfrak{S}_{m_\Pi}$ qui ont pour longueurs d'orbites (j^{c_j}) est $\frac{m_\Pi!}{\prod_j c_j! \prod_j j^{c_j}}$. De plus, pour tout $\Pi \in I_{\tilde{\pi}}$, une partition $(l_1^\Pi, \ldots, l_{r_\Pi}^\Pi)$ de m_Π satisfait $l \mid l_i^\Pi |\mathrm{Fix}(\Pi)|$ $\forall\ i = 1, \ldots, r_\Pi$ si et seulement si $\frac{l}{(l, |\mathrm{Fix}(\Pi)|)} = \xi_\Pi \mid l_i^\Pi$, $i = 1, \ldots, r_\Pi$. Donc la somme dans l'expression (VI.7) est égale à

$$\sum_{\{(j^{c_j^\Pi}) \vdash_{\xi_\Pi} m_\Pi |\ \Pi \in I_{\tilde{\pi}}\}} \frac{m_\Pi!}{\prod_j c_j^\Pi! \prod_j j^{c_j^\Pi}} \prod_{\Pi \in I_{\tilde{\pi}}} \Big(-\frac{|\mathrm{Fix}(\Pi)| m_\Pi + (2g_X - 2) d_\Pi \sum_{\nu \in N_{\tilde{\pi}}} a_\nu \min\{p_2(\Pi), \nu\}}{|\mathrm{Fix}(\Pi)|}\Big)^{\alpha_\Pi - 1}.$$

La condition nécessaire pour que la somme ne soit pas vide est $\xi_\Pi \mid m_\Pi$.

Lemme. *Soit $S \in \mathbb{C}^\times$. Soient ξ, m deux nombres naturels tels que $\xi \mid m$. On a l'identité :*

$$\text{(VI.8)} \qquad m! \sum_{(j^{c_j}) \vdash_\xi m} \frac{1}{\prod_j c_j! \prod_j j^{c_j}} S^{\sum_j c_j - 1} = (m-1)! \binom{\frac{S}{\xi} + \frac{m}{\xi} - 1}{\frac{m}{\xi} - 1}.$$

Preuve du lemme. On va le prouver en considérant la fonction génératrice :

$$\sum_{\{n\in\mathbb{N}|\ \xi|n\}}\sum_{(j^{c_j})\vdash_\xi n}\frac{1}{\prod_{j\geqslant 1}c_j!j^{c_j}}S^{\sum_{j\geqslant 1}c_j}z^n.$$

Cette fonction génératrice est égale à

$$\exp(S\sum_{\xi|v}\frac{z^v}{v})=\exp(-\frac{S}{\xi}\ln(1-z^\xi))=\frac{1}{(1-z^\xi)^{S/\xi}}.$$

On obtient l'identité voulue par une comparaison de coefficients. □

Donc si $\xi_\Pi \mid m_\Pi$, $\forall\ \Pi\in I_{\tilde\pi}$, l'expression (VI.7) est égale à

$$\frac{(\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}d_\Pi)|N_{\tilde\pi}|(2g_X-2)^{|I_{\tilde\pi}|-1}\prod_{\mu\in N_{\tilde\pi}}(\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu\min\{\mu,\nu\})^{|I_\mu|}}{n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu}$$
$$\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}(-1)^{\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi}-1}\binom{-1+\frac{S_\Pi}{\xi_\Pi}}{\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi}-1}|\mathrm{Fix}(\Pi)|^{m_\Pi-1}(m_\Pi-1)!,$$

où $S_\Pi=-\frac{(2g_X-2)d_\Pi\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu\min\{p_2(\Pi),\nu\}}{|\mathrm{Fix}(\Pi)|}$. Cette expression admet une simplification :

$$\frac{1}{(2g_X-2)n\sum_{\nu\in N_{\tilde\pi}}a_\nu}\prod_{\Pi\in I_{\tilde\pi}}\binom{S_\Pi/\xi_\Pi}{m_\Pi/\xi_\Pi}|\mathrm{Fix}(\Pi)|^{m_\Pi}(-1)^{\frac{m_\Pi}{\xi_\Pi}}m_\Pi!\ .$$

Sinon, l'expression (VI.7) est égale à zéro. □

VI.3 La formule

VI.3.1 Maintenant il faut trouver une formule pour la somme portant sur toutes classes d'équivalence inertielle des paires discrètes $(P,\tilde\pi)$ partout non-ramifiées dans le théorème VI.2.2.3. Pour ça, on fixe une partition $\lambda=(j^{a_j})\vdash n$, soit

$$S_i(\lambda):=\sum_{j\geqslant 1}a_j\min\{i,j\}.$$

On va regrouper la somme et mettre ensemble les paires discrètes partout-nonramifiées $(P,\tilde\pi)$ telles que $N_{\tilde\pi}$ soit l'ensemble des j tels que $a_j\neq 0$ et

$$\sum_{\Pi\in I_j}\mathrm{r}(\Pi)m_\Pi=ja_j.$$

rappelons que pour chaque $\Pi\in I_j$, on a $j\mid\mathrm{r}(\Pi)$ (cf. VI.2.1 pour les notations m_Π, $N_{\tilde\pi}$ et I_j et le paragraphe III.3.4 pour $\mathrm{r}(\Pi)$). Soit $(P,\tilde\pi)$ une telle paire discrète. On définit les pairs discrètes $(P_j, \tilde{\pi}_j)$ pour $j \geqslant 1$, de façon que $M_{P_j} = \prod_{\Pi \in I_j} GL(\mathrm{r}(\Pi))^{m_\Pi}$, et $\tilde{\pi}_j = \bigotimes_{\Pi \in I_j} \Pi^{\otimes m_\Pi}$. Notons que la classe d'équivalence inertielle de $(P_j, \tilde{\pi}_j)$ est uniquement déterminée par la classe d'équivalence inertielle de $(P, \tilde{\pi})$. De plus on a

$$\frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})|} = \prod_{j \geqslant 1} \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P_j, \tilde{\pi}_j)|}.$$

On désigne par $(P, \tilde{\pi}) <_{cusp} GL(k)$ une classe d'équivalence inertielle de paire discrète partout-non-ramifiée de $GL(k)$ avec $\tilde{\pi}$ une représentation automorphe cuspidale de $M_P(\mathbb{A})$.

Rappelons le théorème III.3.4.7, l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des représentations discrètes $\pi \boxtimes j$ pour π cuspidale et j fixé est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des représentations cuspidales π. On a $|\mathrm{Fix}(\pi \boxtimes j)| = |\mathrm{Fix}(\pi)|$ par la proposition III.3.4.6. Par le théorème VI.2.2.3, quand $(n, e) = 1$, on obtient alors que $J_e^{T=0}$ est égal à

$$\text{(VI.9)} \quad \sum_{l \mid n} \sum_{\lambda = (j^{a_j}) \vdash n} \frac{\mu(l)}{(2g_X - 2)n \sum_{j \geqslant 1} a_j} \prod_{j \geqslant 1} \Bigg(\sum_{\substack{(P,\tilde{\pi}) <_{cusp} GL(a_j) \\ \xi_\pi \mid m_\pi, \forall \pi \in I_{\tilde{\pi}}}} \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})|} \prod_{\pi \in I_{\tilde{\pi}}} \binom{-(2g_X - 2)\mathrm{r}(\pi) S_j(\lambda)/\xi_\pi |\mathrm{Fix}(\pi)|}{m_\pi / \xi_\pi} |\mathrm{Fix}(\pi)|^{m_\pi} (-1)^{\frac{m_\pi}{\xi_\pi}} m_\pi! \Bigg).$$

VI.3.2 On considère la somme dans la parenthèse de l'expression (VI.9) à savoir pour chaque $l \mid n$, $\lambda \vdash n$ et $j = j_0$:

$$\text{(VI.10)} \quad \sum_{\substack{(P,\tilde{\pi}) <_{cusp} GL(a_{j_0}) \\ \xi_\pi \mid m_\pi, \forall \pi \in I_{\tilde{\pi}}}} \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})|} \prod_{\pi \in I_{\tilde{\pi}}} \binom{-(2g_X - 2)\mathrm{r}(\pi) S_{j_0}(\lambda)/\xi_\pi |\mathrm{Fix}(\pi)|}{m_\pi / \xi_\pi} |\mathrm{Fix}(\pi)|^{m_\pi} (-1)^{\frac{m_\pi}{\xi_\pi}} m_\pi!.$$

Soit $(P, \tilde{\pi}) <_{cusp} GL_{a_{j_0}}$ tel que $M_P = \prod_{j \geqslant 1} GL(j)^{c_j}$. Cela fournit une partition (j^{c_j}) de a_{j_0}. Soit k_d^j le nombre de facteur simple π de $\tilde{\pi}$ tels que $\mathrm{r}(\pi) = j$ et $|\mathrm{Fix}(\pi)| = d$. Nécessairement $d \mid j$ et $\sum_{d \mid j} k_d^j = c_j$, $\forall\, j \geqslant 1$. Pour $i \geqslant 1$, soit $b_{i,j}^d$ le nombre de facteur simple distinct π de $\tilde{\pi}$ tels que $m_\pi = i$, $\mathrm{r}(\pi) = j$ et $|\mathrm{Fix}(\pi)| = d$. Pour chaque d, j, cela donne une partition $(i^{b_{i,j}^d}) \vdash k_j^d$. Avec ces notations

$$\frac{1}{|\,\mathfrak{stab}(P, \tilde{\pi})|} = \prod_{j \geqslant 1} \prod_{d \mid j} \frac{1}{d^{k_d^j} \prod_i (i!)^{b_{i,j}^d}}.$$

Si on se donne une partition $(j^{c_j}) \vdash a_{j_0}$, des entiers positifs k_j^d tels que $\sum_{d \mid j} k_d^j = c_j$ et des partitions $(i^{b_{i,j}^d}) \vdash k_d^j$, le nombre des classes d'équivalence inertielle des paires discrètes partout non-ramifiées $(P, \tilde{\pi})$ de $GL_{a_{j_0}}$ avec $\tilde{\pi}$ cuspidales qui peuvent donner naissance à ces données est égal à

$$\prod_{j\geqslant 1}\prod_{d|j}\frac{D_j(d)(D_j(d)-1)\cdots(D_j(d)+1-\sum_i b^d_{i,j})}{\prod_{i\geqslant 1} b^d_{i,j}!}=\prod_{j\geqslant 1}\prod_{d|j}\binom{D_j(d)}{\sum_i b^d_{i,j}}\binom{\sum_i b^d_{i,j}}{b^d_{1,j},b^d_{2,j},\ldots}$$

(cf. théorème III.2.4.3 pour $D_j(d)$). On a le résultat suivant :

Lemme VI.3.2.1. *Soient $S, D \in \mathbb{C}$, et $\xi, k \in \mathbb{N}$ tels que $\xi \mid k$. On a l'identité :*

$$\sum_{(i^{b_i})\vdash_\xi k}\binom{D}{\sum_i b_i}\binom{\sum_i b_i}{b_1,b_2,\ldots}\prod_i\binom{S}{i/\xi}^{b_i}=\binom{DS}{k/\xi}$$

Démonstration. Tout d'abord, on note que $\binom{\sum_i b_i}{b_1,b_2,\ldots}$ est le nombre des partitions ordonnées dont la partition non-ordonnée associée est égale à (i^{b_i}). Donc la somme à gauche est égale à

$$\sum_{s\geqslant 1}\sum_{\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\in(\xi\mathbb{N}^*)^s|\ \lambda_1+\cdots+\lambda_s=k\}}\binom{D}{s}\prod_{i=1}^{s}\binom{S}{\lambda_i/\xi}.$$

Soit

$$\tilde{S}(z)=\sum_{\{i\geqslant 1|\ \xi|i\}}\binom{S}{i/\xi}z^i=(1+z^\xi)^S-1.$$

Alors la somme considérée est égale au coefficient de z^k de la série formelle

$$\sum_{i\geqslant 0}\binom{D}{i}\tilde{S}(z)^i=(1+S(z))^D=(1+z^\xi)^{SD}.$$

Ce coefficient est égal à $\binom{DS}{k/\xi}$. □

D'après ce lemme, la somme (VI.10) est égale à

$$\text{(VI.11)}\quad \sum_{(j^{c_j})\vdash a_{j_0}}\ \sum_{\substack{\{k^j_d|\ \sum_{d|j}k^j_d=c_j\\ \frac{l}{(l,d)}|k^j_d\ \}}}\prod_{j\geqslant 1}\prod_{d|j}(-1)^{\frac{k^j_d}{l/(l,d)}}\binom{-(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}}{k^j_d/\frac{l}{(l,d)}}$$

$$=\sum_{(j^{c_j})\vdash a_{j_0}}\ \sum_{\{k^j_d|\ \sum_{d|j}k^j_d=\frac{c_j}{l/(l,d)}\}}\prod_{j\geqslant 1}\prod_{d|j}(-1)^{k^j_d}\binom{-(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}}{k^j_d}.$$

Considérons la fonction génératrice

$$T(z)=\prod_{j\geqslant 1}\left(\sum_{\substack{c\geqslant 0\\ \frac{l}{(l,d)}|c}}\sum_{\sum_{d|j}k_d^j=\frac{c}{l/(l,d)}}\left(\prod_{d|j}(-1)^{k_d^j}\binom{-(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}}{k_d^j}\right)z^{jc}\right).$$

La somme (VI.10) est égale au coefficient de $z^{a_{j_0}}$ de la série formelle $T(z)$ (Notons que le terme constant dans le produit est égal à 1, donc le produit infini a un sens). On réécrit la somme en changeant c par $i\frac{l}{(l,d)}$, elle est égale à

$$T(z)=\prod_{j\geqslant 1}\prod_{d|j}\left(\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{-(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}}{i}z^{ij\frac{l}{(l,d)}}\right). \tag{VI.12}$$

Utilisons les fonctions formelles exp et log, on a

$$\begin{aligned} T(z)&=\exp\Big(\sum_{j\geqslant 1}\sum_{d|j}-(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}\log(1-z^{j\frac{l}{(l,d)}})\Big) \\ &=\exp\Big((2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)\sum_{j\geqslant 1}\sum_{d|j}D_j(d)\frac{j}{d\frac{l}{(l,d)}}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{jk\frac{l}{(l,d)}}}{k}\Big). \end{aligned} \tag{VI.13}$$

On utilise le théorème III.2.4.3 :

$$\log T(z)=(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)\sum_{j\geqslant 1}\sum_{d|j}\sum_{m|d}\mu(m)C_{j/d}(X_{d/m})\frac{j}{d^2\frac{l}{(l,d)}}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{jk\frac{l}{(l,d)}}}{k}.$$

On pose $j/d=s$ et $d/m=t$, alors :

$$\log T(z)=(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)\sum_{s\geqslant 1}\sum_{t\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{smtk\frac{l}{(l,mt)}}}{k}\mu(m)C_s(X_t)\frac{smt}{(mt)^2\frac{l}{(l,mt)}}.$$

Il s'ensuit d'après une simplification que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)}\log T(z) &= \sum_{s\geqslant 1}\sum_{t\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{smtk\frac{l}{(l,mt)}}}{k}\mu(m)C_s(X_t)\frac{s}{mt\frac{l}{(l,mt)}}\\ &= \sum_{N\geqslant 1}\left(\sum_{\{s,t,k\geqslant 1|\ stk|N\}}\frac{C_s(X_t)s^2}{N}\sum_{\{m\geqslant 1|\frac{ml}{(l,mt)}=\frac{N}{stk}\}}\mu(m)\right)z^N\\ &= \sum_{N\geqslant 1}\left(\sum_{\{s,t\geqslant 1|\ st|N\}}\frac{C_s(X_t)s^2}{N}\sum_{\{m\geqslant 1|\frac{ml}{(l,mt)}|\frac{N}{st}\}}\mu(m)\right)z^N\end{aligned}$$

Lemme VI.3.2.2. *Soit $t, l, L \in \mathbb{N}^*$ on a l'identité suivante :*

$$\sum_{\{m\in\mathbb{N}^*|\ \frac{ml}{(l,mt)}|L\}}\mu(m) = \begin{cases}1 & si\ L=1\ et\ l\mid t;\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Démonstration. Soient $(p_s)_{s\in I}$ les nombres premiers qui apparaissent comme des facteurs premiers de t, l ou L. Supposons $t=\prod_{s\in I}p_s^{\alpha_s}$, $l=\prod_{s\in I}p_s^{\beta_s}$ et $L=\prod_{s\in I}p_s^{\gamma_s}$ avec $\alpha_s,\beta_s,\gamma_s\geqslant 0$. Si $m\in\mathbb{N}^*$ est tel que $\frac{ml}{(l,mt)}|L$, alors on peut supposer $m=\prod_{s\in I}p_s^{\eta_s}$. On a

$$(l,mt)=\prod_{s\in I}p_s^{\min\{\beta_s,\alpha_s+\eta_s\}}$$

et la condition $\frac{ml}{(l,mt)}\mid L$ se traduit comme :

$$\eta_s+\beta_s-\min\{\beta_s,\alpha_s+\eta_s\}\leqslant\gamma_s,$$

notons que cela équivaut $\gamma_s\geqslant\eta_s+\beta_s-\alpha_s-\eta_s=\beta_s-\alpha_s$ et $\gamma_s\geqslant\eta_s$.

Donc la somme est non-vide si et seulement si $l\mid tL$, et dans ce cas la somme se ramène à la somme $\sum_{m|L}\mu(m)$. □

D'après ce lemme, on conclut que

$$\log T(z)=\frac{(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)}{l}\sum_{N\geqslant 1}\sum_{s|N}\frac{C_s(X_{\frac{Nl}{s}})s^2}{N}z^{Nl}=\frac{(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)}{l}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{C_s(X_{kl})s}{k}z^{skl}.$$

VI.3.3 On définit

$$\mathrm{aut}_{X_1}(z) := \exp\Big(\sum_{s\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{C_s(X_k)s}{k}z^{sk}\Big)=\prod_{s\geqslant 1}\zeta_{s,X_1}(z^s)^s, \tag{VI.14}$$

où

$$\zeta_{s,X_1}(z) = \exp(\sum_{k\geqslant 1} \frac{C_s(X_k)}{k} z^k). \tag{VI.15}$$

Alors la série formelle $T(z)$ peut s'écrire comme

$$T(z) = \mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_{j_0}(\lambda)}{l}}.$$

Rappelons que pour une série formelle $f(z)$, on utilise $[z^v]f(z)$ pour le coefficient de z^v de $f(z)$. Des considérations précédentes, on déduit alors le théorème suivant :

Théorème VI.3.3.1. *Soit $e \in \mathbb{Z}$ tel que $(e,n) = 1$, on a*

$$J_e^{T=0} = \sum_{l|n} \frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)} \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{\sum_j a_j} \prod_{j\geqslant 1} [z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}} \tag{VI.16}$$

où la somme $\sum_{\lambda\vdash n}$ porte sur les partitions non-ordonnées $\lambda = (j^{a_j})_{j\geqslant 1}$ de n et $S_j(\lambda) := \sum_{\nu\geqslant 1} a_\nu \min\{\nu, j\}$. Notons que si $l \nmid a_j$, on a $[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}} = 0$.

Combiné avec le corollaire IV.4.2.4, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire VI.3.3.2. *Quand $(n,e) = 1$, on a*

$$A_{n,e}(X_1) = \sum_{(j^{a_j})\vdash n} \frac{1}{n(2g_X-2)\sum_j a_j} \sum_{l|n} \mu(l) \prod_{j\geqslant 1} [z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}. \tag{VI.17}$$

Exemple VI.3.3.3. On a

$$A_{1,1}(X_1) = C_1(X_1)$$

$$A_{2,1}(X_1) = C_2(X_1) + (g-1)C_1(X_1)^2 + C_1(X_1)$$

et

$$\begin{aligned} A_{3,1}(X_1) = C_3(X_1) + 4(g-1)C_1(X_1)C_2(X_1) + \\ (g-1)C_1(X_1)C_1(X_2) + 2(g-1)^2C_1(X_1)^3 + 2(g-1)C_1(X_1)^2 + C_1(X_1) \end{aligned}$$

VI.4 Preuve de l'intégralité

VI.4.1 Dans cette section, on montre le théorème ci-dessous. Essentiellement il ne reste qu'à prouver l'intégralité des coefficients des polynômes du théorème.

Théorème VI.4.1.1. *Pour tous entiers $g \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, il existe un polynôme de Laurent $P_{g,n}(q, z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{Z}[q, z_1^{\pm 1}, \ldots, z_g^{\pm 1}]$ symétrique en les z_i et invariant par la substitution $z_i \mapsto qz_i^{-1}$ tel que pour tout*

$k \geqslant 1$, tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, toute courbe X_1 projective lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ de genre $g_X \geqslant 2$ et tout nombre premier $\ell \nmid q$, on ait

$$C_n(X_k) = |(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = P_{g_X,n}(q^k, \sigma_1^k, \ldots, \sigma_{g_X}^k).$$

De plus, chaque monôme $q^m z_1^{n_1} \cdots z_g^{n_g}$ qui apparaît dans $P_{g,n}$ vérifie

$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{n_i, 0\} \geqslant 0. \tag{VI.18}$$

Le terme de poids dominant de $P_{g,n}$ est $q^{(g-1)n^2+1}$. C'est-à-dire si on pose $\deg q = 2$ *et* $\deg z_i = 1$, *alors* $\deg P_{g,n} = 2((g-1)n^2+1)$ *et* $\deg(P_{g,n} - q^{(g-1)n^2+1}) < 2((g-1)n^2+1)$.

Remarque VI.4.1.2. *Le polynôme dans le théorème est nécessairement unique par un théorème de densité des q-nombres des Weil, cf. l'appendix B de [Sc16].*

On raisonne par récurrence sur n. Quand $n = 1$, on a

$$C_1(X_k) = q^{-kg_X} |\mathrm{Higgs}^{st}_{1,e}(X_k)(\mathbb{F}_{q^k})| = |\mathrm{Pic}^0_{X_k}(\mathbb{F}_{q^k})|.$$

Notons que $|\mathrm{Pic}^0_{X_k}(\mathbb{F}_{q^k})| = \prod_{i=1}^{g_X}(1-\sigma_i^k)(1-q^k\sigma_i^{-k})$, donc le résultat vaut dans ce cas.

On suppose que pour tout $s \leqslant n-1$ le théorème est vrai, cela équivaut que pour $1 \leqslant s \leqslant n-1$ et $l \in \mathbb{N}^*$

$$\zeta_{s,X_l}(z) = \exp(\sum_{k \geqslant 1} \frac{C_s(X_{kl})}{k} z^k) = \frac{\prod_{j=1}^{l_s}(1 - g_j(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_{g_X})^l z)}{\prod_{j=1}^{m_s}(1 - f_j(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_{g_X})^l z)},$$

pour des monômes f_i et g_i satisfaisant la symétrie désirée et la restriction (VI.18), et les nombres $l_s, m_s \in \mathbb{N}^*$ qui ne dépendent que de g_X et n.

On examine la relation (VI.17), elle montre que le nombre $A_{n,e}(X_1)$ peut s'exprimer comme un polynôme en $C_k(X_t)$ pour $k < n$. Quand $s > n$, $\zeta_{s,X_l}(z^{sl})$ ne contribue pas dans la formule (VI.17). On voit que pour $(n, e) = 1$

$$A_{n,e}(X_1) = C_n(X_1) + \cdots$$

où les termes omis est un polynôme en $C_k(X_t)$ avec $k < n$. D'après ces remarques, on a

$$C_n(X_1) = A_{n,e}(X_1) - \sum_{\lambda=(i^{a_i}) \vdash n} \frac{1}{n \sum_{i \geqslant 1} a_i(2g_X - 2)} \sum_{l|n} \mu(l) \prod_{i \geqslant 1} [z^{a_i}] \Big(\prod_{s=1}^{n-1} \zeta_{s,X_l}(z^{sl})^s \Big)^{\frac{(2g_X-2)S_i(\lambda)}{l}}. \tag{VI.19}$$

Par l'hypothèse de récurrence et le théorème IV.3.2.1, il suffit de montrer que pour tout

$\lambda = (i^{a_i}) \vdash n$ l'expression

$$\text{(VI.20)} \qquad \frac{1}{n\sum_{i\geqslant 1} a_i(2g_X-2)} \sum_{l|n} \mu(l) \prod_{i\geqslant 1} [z^{a_i}] \Big(\prod_{s=1}^{n-1} \zeta_{s,X_l}(z^{sl})^s \Big)^{\frac{(2g_X-2)S_i(\lambda)}{l}}$$

est une combinaison à coefficients entiers des nombres de Weil qui sont des monômes en ceux de la courbe X_1, et les coefficients de cette écriture ne dépend que du g_X. Notons que tous ces énoncés sont clairs sauf l'intégralité de coefficients des nombres de Weil, on se concentre sur sa preuve dans la suite.

Pour tout $s < n$, soient $\alpha_j = f_j(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_{g_X})$ et $\beta_j = g_j(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_{g_X})$ qui sont q-nombres de Weil. On a

$$\zeta_{s,X_l}(z) = \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1} \frac{C_s(X_{kl})}{k} z^k\Big) = \frac{\prod_{j=1}^{l_s}(1-\beta_j^l z)}{\prod_{j=1}^{m_s}(1-\alpha_j^l z)}.$$

Donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta_{s,X_l}(z^{sl})^{\frac{sm}{l}} = \prod_{j=1}^{l_s} \Big(\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{-\frac{ms}{l}}{k} \alpha_j^{kl} z^{ksl}\Big) \prod_{j=1}^{m_s} \Big(\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{\frac{ms}{l}}{k} \beta_j^{kl} z^{ksl}\Big).$$

Soit $\lambda = (\nu^{a_\nu})$ une partition de n, on va regarder les α_i et β_i comme indéterminées ; on pose pour tous $i, l \in \mathbb{N}^*$:

$$\widetilde{g_{i,l}^{\lambda}}(z^l) = \prod_{s=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{l_s+m_s} \Big(\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{\frac{\varepsilon_{j,s}(2g_X-2)sS_i(\lambda)}{l}}{k} (X_{j,s}^i)^{lk} z^{skl}\Big) \right)$$

où

$$\varepsilon_{j,s} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant j \leqslant l_s \\ -1, & l_s+1 \leqslant j \leqslant l_s+m_s \end{cases}$$

et $X_{j,s}^i$ sont des indéterminées à trois indices. On va montrer que

$$\text{(VI.21)} \qquad \frac{1}{n\sum_{i\geqslant 1} a_i(2g_X-2)} \sum_{l|n} \mu(l) \prod_{i\geqslant 1} [z^{a_i}] \widetilde{g_{i,l}^{\lambda}}(z^l) \ \in \ \mathbb{Z}[X_{j,s}^i]_{i,j,s}.$$

En effet, comparant avec l'expression (VI.20), cela est suffisant pour l'intégralité désiré. On a

Lemme VI.4.1.3. *Pour un monôme $\prod_{i,j,s}(X_{j,s}^i)^{k_{j,s}^i}$, si $\sum_{j,s} sk_{j,s}^i = a_i$, $\forall\ i \geqslant 1$, son coefficient dans le polynôme (VI.21) est égal à*

$$\frac{1}{n\sum_i a_i(2g_X-2)} \sum_{l|\text{p.g.c.d.}(k_{j,s}^i)} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{j,s} sk_{j,s}^i}{l}} \prod_{i,j,s} \binom{\varepsilon_{j,s}(2g_X-2)sS_i(\lambda)/l}{k_{j,s}^i/l} ;$$

sinon le coefficient est zéro.

Démonstration. C'est parce qu'on a $\forall\ i \geqslant 1$

$$[z^{a_i}]\widetilde{g^{\lambda}_{i,l}}(z) = \sum_{\{k_{j,s}\in\mathbb{N}^*|\sum_{j,s} sk_{j,s}=a_i;\ l|k_{j,s}\}} \prod_{j,s} \binom{\varepsilon_{j,s}(2g_X-2)sS_i(\lambda)/l}{k_{j,s}/l} (X^i_{j,s})^{k_{j,s}}.$$

De plus si $\sum_{j,s} sk^i_{j,s} = a_i$, $\forall\ i \geqslant 1$ alors p.g.c.d.$(k^i_{j,s}) \mid n$ puisque (i^{a_i}) est une partition de n. □

Nous prouvons que ces coefficients sont des entiers dans le dernier théorème ; avant l'énoncer, nous indiquons le fait :

Lemme VI.4.1.4. *Pour tous nombres entiers non-nuls n, m, on a*

$$\frac{n}{(n,m)} \mid \binom{n}{m}$$

Démonstration. C'est parce que

$$\frac{m}{n}\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} \in \mathbb{Z}$$

donc

$$\frac{m}{(m,n)}\binom{n}{m} \in \frac{n}{(n,m)}\mathbb{Z}$$

Comme $(\frac{m}{(m,n)}, \frac{n}{(m,n)}) = 1$, on a

$$\binom{n}{m} \in \frac{n}{(n,m)}\mathbb{Z}$$

□

Par simplicité, on note $\chi = 2g_X - 2$ dans la suite ; on va utiliser le fait que χ est un nombre pair. Dans la suite, si on ne précise pas, le p.g.c.d. est porté sur tous les indices.

Théorème VI.4.1.5. *Soit $m \geqslant 1$ un entier. Soient $a_1, \ldots, a_m$ des nombres naturels non-nuls, et $(k^i_{j,s})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i\\ s\in K_i}}$ des nombres naturels tels que*

$$\sum_{j\in J_i, s\in K_i} sk^i_{j,s} = a_i$$

où pour tout i J_i, K_i sont sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Soient $\nu_1, \cdots, \nu_m$ des nombres entiers. Soit $S_i = \sum_{j<i} \nu_j a_j + \nu_i \sum_{j\geqslant i} a_j$, $i = 1, \cdots, m$. Soit $\varepsilon_{i,j,s} \in \{\pm 1\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $j \in J_i$ et $s \in K_i$. Le nombre suivant

$$\sum_{l|\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i, s\in K_i}} \binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l}$$

est divisible par $\chi S_m \sum_j a_j$, où $\chi \in 2\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit v_p la valuation p-adique.

Lemme VI.4.1.6. *Avec les notations de l'énoncé du théorème VI.4.1.5, si* $v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) = 0$ *on a*

$$v_p\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i, s\in K_i}} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}\Big) \geqslant v_p\Big(\chi S_m \sum_j a_j\Big) \tag{VI.22}$$

Preuve du lemme. Soit
$$A = v_p\Big(\sum_j a_j\Big) \geqslant 0$$

Soient
$$\alpha_i = v_p(\chi S_i) \geqslant 0 \quad \forall\, i \geqslant 1$$
$$\beta_i = v_p(\underset{j\in J_i, s\in K_i}{p.g.c.d}\{k^i_{j,s}\}) \geqslant 0 \quad \forall\, i \geqslant 1$$
$$\gamma_i = v_p(a_i) \geqslant 0 \quad \forall\, i \geqslant 1$$

Donc l'hypothèse $v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) = 0$ est équivalente à la condition $\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{\beta_i\} = 0$. C'est toujours vrai que $\beta_i \leqslant \gamma_i$ car tout $1 \leqslant i \leqslant m$

$$\begin{aligned}\gamma_i = v_p(a_i) = v_p\Big(\sum_{j\in J_i, s\in K_i} s k^i_{j,s}\Big)\\ &\geqslant \min_{j\in J_i, s\in K_i}\{v_p(s) + v_p(k^i_{j,s})\}\\ &\geqslant v_p(\underset{j\in J_i, s\in K_i}{\text{p.g.c.d.}}(k^i_{j,s})) = \beta_i.\end{aligned}$$

Notons que pour chaque i, il existe au moins un $(j_0, s_0) \in J_i \times K_i$ tel que

$$v_p(k^i_{j_0,s_0}) = \beta_i$$

On a alors
$$v_p\Big(\frac{\chi s_0 S_i}{(\chi s_0 S_i, k^i_{j_0,s_0})}\Big) \geqslant \max\{v_p\Big(\frac{\chi s_0 S_i}{k^i_{j_0,s_0}}\Big), 0\} \geqslant \max\{\alpha_i - \beta_i + v_p(s_0), 0\}.$$

Soit $1 \leqslant i \leqslant m$, on part de
$$\sum_{j\in J_i, s\in K_i} s k^i_{j,s} = a_i.$$

De deux choses l'une : 1) Soit $v_p(s_0) + \beta_i < \gamma_i$, i.e. $v_p(s_0 k^i_{j_0,s_0}) < v_p(a_i)$, alors il existe un autre $(j_1, s_1) \neq (j_0, s_0) \in J_i \times K_i$ pour lequel

$$v_p(s_1 k^i_{j_1,s_1}) \leqslant v_p(s_0 k^i_{j_0,s_0}) = v_p(s_0) + \beta_i,$$

donc comme s_1 est un entier, on a

$$-v_p(k^i_{j_1,s_1}) \geqslant -v_p(s_0) - \beta_i.$$

Il s'ensuit que

$$v_p(\frac{\chi s_1 S_i}{(\chi s_1 S_i, k^i_{j_1,s_1})}) \geqslant \max\{\alpha_i - \beta_i - v_p(s_0), 0\}.$$

On a

$$v_p(\prod_{j\in J_i, s\in K_i} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) \geqslant \max\{2\alpha_i - 2\beta_i, 0\}.$$

2) Soit $v_p(s_0) + \beta_i \geqslant \gamma_i$, alors

$$v_p(\prod_{j\in J_i, s\in K_i} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) \geqslant \max\{\alpha_i + \gamma_i - 2\beta_i, 0\}.$$

Donc en tout cas pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$

$$\begin{aligned} v_p(\prod_{j\in J_i, s\in K_i} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) &\geqslant \min\{\max\{2\alpha_i - 2\beta_i, 0\}, \max\{\alpha_i + \gamma_i - 2\beta_i, 0\}\} \\ &= \max\{\min\{2\alpha_i - 2\beta_i, \alpha_i + \gamma_i - 2\beta_i\}, 0\}. \end{aligned} \tag{VI.23}$$

Si $m = 1$, on a $S_1 = \nu_1 a_1$ donc $\gamma_1 \leqslant \alpha_1$. L'hypothèse donne $\beta_1 = 0$, l'inégalité (VI.23) implique que

$$v_p(\prod_{j\in J_i, s\in K_i} \frac{\chi s S_1}{(\chi s S_1, k^1_{j,s})}) \geqslant \alpha_1 + \gamma_1 = v_p(\chi a_1 S_1)$$

Si $m > 1$. L'inégalité (VI.23) implique

$$v_p(\prod_{j\in J_i, s\in K_i} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) \geqslant \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\}. \tag{VI.24}$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, on va prouver

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \geqslant A - \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_k\}. \tag{VI.25}$$

Quand $k = 1$, c'est vrai car $\alpha_1 \geqslant A$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour $k-1$. Si $\beta_k > \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i\leqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} &\geqslant \sum_{i\leqslant k-1} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \\ &\geqslant A - \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\} \\ &= A - \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_k\}. \end{aligned}$$

Si $\beta_k \leqslant \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$, comme χS_k est une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\chi \sum_j a_j$ et $a_1, \dots, a_{k-1}$, on a

$$\alpha_k = v_p(\chi S_k) \geqslant \min\{A, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}\} \geqslant \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}. \tag{VI.26}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i \leqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} &\geqslant \alpha_k - \beta_k + A - \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\} \\ &\geqslant A - \beta_k \\ &= A - \min\{A, \beta_1, \dots, \beta_k\}.\end{aligned}$$

Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

De même, on a

$$\sum_{i \geqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \geqslant \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_k, \dots, \beta_m\} \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant m \tag{VI.27}$$

En effet, quand $k = m$, l'inégalité (VI.27) est une égalité. Supposons que l'inégalité (VI.27) soit vraie pour $k + 1$. Alors si $\beta_k > \min\{\alpha_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m\}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} &\geqslant \sum_{i \geqslant k+1} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \\ &\geqslant \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m\} \\ &= \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_k, \dots, \beta_m\}.\end{aligned}$$

Si $\beta_k \leqslant \min\{\alpha_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m\}$. Comme χS_k est une combinaison linéaire à coefficients entiers de χS_m et $a_m, \dots, a_{k+1}$, on a

$$\alpha_k = v_p(\chi S_k) \geqslant \min\{\alpha_m, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m\} \geqslant \min\{\alpha_m, \beta_{k+1}, \dots, \beta_m\} \tag{VI.28}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant k} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} &\geqslant \alpha_k - \beta_k + \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_k, \dots, \beta_m\} \\ &\geqslant \alpha_m - \beta_k \\ &\geqslant \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_k, \dots, \beta_m\}\end{aligned}$$

Par récurrence l'inégalité est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

Soit i_0 le plus petit indice tel que $\beta_{i_0} = 0$ et i_1 le plus grand indice tel que $\beta_{i_1} = 0$. Alors par l'inégalité (VI.25), on prend $k = i_0$

$$\sum_{i\leqslant i_0} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \geqslant A - \min\{A, \beta_1, \ldots, \beta_{i_0}\} = A. \tag{VI.29}$$

De meme, on prend $k = i_1$ dans l'inégalité (VI.27), on obtient :

$$\sum_{i\geqslant i_1} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \geqslant \alpha_m - \min\{\alpha_m, \beta_{i_1}, \cdots, \beta_m\} = \alpha_m. \tag{VI.30}$$

Donc si $i_0 \neq i_1$, on obtient

$$v_p(\prod_{i,j,s} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) \geqslant A + \alpha_m = v_p(\chi S_m \sum_j a_j).$$

Si $i_0 = i_1$, c'est-à-dire que i_0 est le seul indice tel que $\beta_i = 0$. Comme $a_{i_0} = \sum_j a_j - \sum_{j\neq i_0} a_j$, on a

$$\gamma_{i_0} \geqslant \min_{i\neq i_0}\{A, \gamma_i\} \geqslant \min_{i\neq i_0}\{A, \gamma_i, \alpha_m\} \geqslant \min_{i\neq i_0}\{A, \beta_i, \alpha_m\}$$

Par l'inégalité (VI.26) et l'inégalité (VI.28), on a alors

$$\alpha_{i_0} \geqslant \max\{\min_{i<i_0}\{A, \beta_i\}, \min_{i>i_0}\{\alpha_m, \beta_i\}\}$$

Donc

$$\alpha_{i_0} + \gamma_{i_0} \geqslant \min_{i<i_0}\{A, \beta_i\} + \min_{i>i_0}\{\alpha_m, \beta_i\}$$

et clairement

$$2\alpha_{i_0} \geqslant \min_{i<i_0}\{A, \beta_i\} + \min_{i>i_0}\{\alpha_m, \beta_i\}\ .$$

Combinant avec l'inégalité (VI.23), on obtient

$$\begin{aligned} v_p(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ j\in J_i, s\in K_i}} \frac{\chi s S_i}{(\chi s S_i, k^i_{j,s})}) &\geqslant \max\Big\{\min\{2\alpha_{i_0} - 2\beta_{i_0}, \alpha_{i_0} + \gamma_{i_0} - 2\beta_{i_0}\}, 0\Big\} + \sum_{i\neq i_0} \max\{\alpha_i - \beta_i, 0\} \\ &\geqslant (\min_{i<i_0}\{A, \beta_i\} + \min_{i>i_0}\{\alpha_m, \beta_i\}) + (A - \min_{i<i_0}\{A, \beta_i\}) + (\alpha_m - \min_{i>i_0}\{\alpha_m, \beta_i\}) \\ &= A + \alpha_m \end{aligned}$$

Le lemme est prouvé. □

Utilisons ce lemme en remplaçant $k^i_{j,s}$ par $k^i_{j,s}/p^{v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s}))}$ et le lemme VI.4.1.4, on a pour tout nombre $n \mid$ p.g.c.d.$(k^i_{j,s})$:

$$v_p\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i, s\in K_i}} \binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/n}{k^i_{j,s}/n}\Big) \geqslant v_p(\chi\sum_j a_j S_m) - 2v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) \tag{VI.31}$$

Retournons au théorème, il faut montrer que pour tout nombre premier p

$$v_p\left(\sum_{l\mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l}\right) \geqslant v_p(\chi\sum_j a_j S_m) \tag{VI.32}$$

Si p est un nombre premier tel que $p \nmid$ p.g.c.d.$(k^i_{j,s})$, l'inégalité (VI.31) déjà implique le but (VI.32).

Maintenant, soit p un nombre premier qui divise p.g.c.d.$(k^i_{j,s})$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l}\\
&= \sum_{l\mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s});\ p\nmid l} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l} + \sum_{l\mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s});\ p\mid l} \mu(l)(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l}\\
&= \sum_{l\mid \text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s});\ p\nmid l} \mu(l)\left((-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/l}{k^i_{j,s}/l} - (-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{lp}} \prod_{i,j,s}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/lp}{k^i_{j,s}/lp}\right).
\end{aligned} \tag{VI.33}$$

Pour tout nombre premier p et tout nombre entier $n \geqslant 1$, soit

$$f_p(n) := \prod_{i=1, p\nmid i}^{n} i = \frac{n!}{p^{[n/p]}[n/p]!}$$

où $[n/p]$ est la partie entière de n/p. On va invoquer le résultat suivant qui est le lemme 4.6 de [LZ16] :

$(*)$ *Si p est un nombre premier impair et $\alpha \geqslant 1$ un entier ou $p = 2$ et $\alpha \geqslant 2$, on a*

$$p^{2\alpha} \mid f_p(p^\alpha n) - f_p(p^\alpha)^n$$

Quand $p = 2$, on a

$$f_2(2n) \equiv (-1)^{[\frac{n}{2}]} \quad (mod\ 4).$$

Comme

$$\binom{np}{mp} = \binom{n}{m}\frac{f_p(np)}{f_p(mp)f_p((n-m)p)},$$

et

$$\binom{-np}{mp} = (-1)^{m(p-1)}\binom{-n}{m}\frac{f_p(np+mp)}{f_p(mp)f_p(np)}.$$

On discute suivant deux cas :

• 1^{er}-cas. Si $p \neq 2$, ou $p = 2$ et $v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) \geqslant 2$, la différence entre parenthèses dans l'expression (VI.33) est égale à

$$(-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{l}}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i, s\in K_i}} g_{i,j,s} - 1\right)\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ j\in J_i, s\in K_i}}\binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/lp}{k^i_{j,s}/lp}, \tag{VI.34}$$

où

$$g_{i,j,s} = \frac{f_p(\chi s S_i/l)}{f_p(\chi s S_i/l - k^i_{j,s}/l)f_p(k^i_{j,s}/l)}$$

quand $\varepsilon_{i,j,s} = 1$, et

$$g_{i,j,s} = \frac{f_p(\chi s S_i/l + k^i_{j,s}/l)}{f_p(\chi s S_i/l)f_p(k^i_{j,s}/l)}$$

quand $\varepsilon_{i,j,s} = -1$. D'après l'inégalité (VI.31), pour montrer (VI.32), il suffit de montrer que l'expression entre parenthèses dans (VI.34) est divisible par $p^{2\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})}$.

On identifie le corps rationnelle $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Par simplicité, soit $\alpha = v_p(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) > 0$ (dans le cas $\alpha = 0$, il n'y a rien à prouver). Notons que pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ $j \in J_i$ et $s \in K_i$

$$v_p(k^i_{j,s}) \geqslant \alpha;$$

$$v_p(\chi s S_i) \geqslant \alpha.$$

De plus, par définition, $f_p(p^\alpha)$ est une unité dans $\mathbb{Z}_p^\times$, le groupe des éléments de valuation 0 dans $\mathbb{Q}_p$. Soit $u_{i,j,s} = f_p(p^\alpha)^{k^i_{j,s}/lp^\alpha}$. Quand $\varepsilon_{i,j,s} = 1$ (resp. quand $\varepsilon_{i,j,s} = -1$), soit $v_{i,j,s} = f_p(p^\alpha)^{\chi s S_i/lp^\alpha - k^i_{j,s}/lp^\alpha}$ (resp. $v_{i,j,s} = f_p(p^\alpha)^{\chi s S_i/lp^\alpha}$). Par le fait ($*$), il existe $x_{i,j,s}, y_{i,j,s}, z_{i,j,s} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$g_{i,j,s} = \frac{u_{i,j,s}v_{i,j,s} - z_{i,j,s}p^{2\alpha}}{(u_{i,j,s} - x_{i,j,s}p^{2\alpha})(v_{i,j,s} - y_{i,j,s}p^{2\alpha})}.$$

Utilisons l'identité :

$$\frac{1}{u - xp^{2\alpha}} = u^{-1} + \sum_{k\geqslant 1}\frac{x^k}{u^{k+1}}p^{2k\alpha}$$

pour $x = x_{i,j,s} \in \mathbb{Z}_p$ et $u = u_{i,j,s} \in \mathbb{Z}_p^\times$ (resp. $x = y_{i,j,s} \in \mathbb{Z}_p$ et $u = v_{i,j,s} \in \mathbb{Z}_p^\times$), on obtient

$$v_p(\prod_{i,j,s} \frac{u_{i,j,s}v_{i,j,s} - z_{i,j,s}p^{2\alpha}}{(u_{i,j,s} - x_{i,j,s}p^{2\alpha})(v_{i,j,s} - y_{i,j,s}p^{2\alpha})} - 1) \geqslant 2\alpha.$$

Donc on conclut que dans ce cas (VI.32) est vraie.

• 2^{nd}-cas. Il ne reste qu'à prouver le cas où $p = 2$ et $v_2(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) = 1$. La différence entre parenthèses dans l'expression (VI.33) est égale à

$$\prod_{i,j,s} \binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/2l}{k^i_{j,s}/2l} \left(\prod_{i,j,s} g_{i,j,s} - (-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{2l}} \right)$$

où

$$g_{i,j,s} = \prod_{i,j,s} \frac{f_2(\chi s S_i/l)}{f_2(\chi s S_i/l - k^i_{j,s}/l) f_2(k^i_{j,s}/l)}$$

quand $\varepsilon_{i,j,s} = 1$, et

$$g_{i,j,s} = (-1)^{k^i_{j,s}/2l} \prod_{i,j,s} \frac{f_2(\chi s S_i/l + k^i_{j,s}/l)}{f_2(\chi s S_i/l) f_2(k^i_{j,s}/l)}$$

quand $\varepsilon_{i,j,s} = -1$. Dans ce cas, par (VI.31) on a

$$v_2(\prod_{i,j,s} \binom{\varepsilon_{i,j,s}\chi s S_i/2l}{k^i_{j,s}/2l}) \geqslant v_2(\chi \sum_j a_j S_m) - 2.$$

Donc il suffit de montrer que

$$v_2(\prod_{i,j,s} g_{i,j,s} - (-1)^{\frac{\sum_{i,j,s} k^i_{j,s}}{2l}}) \geqslant 2. \tag{VI.35}$$

Par (∗), on a

$$g_{i,j,s} \equiv \begin{cases} (-1)^{([\frac{\chi s S_i}{4l}] - [\frac{k^i_{j,s}}{4l}] - [\frac{\chi s S_i - k^i_{j,s}}{4l}])}, & \text{si } \varepsilon_{i,j,s} = 1 \\ (-1)^{k^i_{j,s}/2l} (-1)^{([\frac{\chi s S_i}{4l} + \frac{k^i_{j,s}}{4l}] - [\frac{k^i_{j,s}}{4l}] - [\frac{\chi s S_i}{4l}])}, & \text{si } \varepsilon_{i,j,s} = -1 \end{cases} \quad (mod\ 4).$$

Cependant χ est un nombre pair et $v_2(S_i) \geqslant v_2(\text{p.g.c.d.}(k^i_{j,s})) = 1$, donc $\frac{\chi s S_i}{4l}$ est un entier. On a

$$[\frac{\chi s S_i}{4l}] - [\frac{k^i_{j,s}}{4l}] - [\frac{\chi s S_i - k^i_{j,s}}{4l}] = -[\frac{k^i_{j,s}}{4l}] - [\frac{-k^i_{j,s}}{4l}] \equiv \frac{k^i_{j,s}}{2l} \quad (mod\ 2).$$

De même

$$[\frac{\chi s S_i}{4l}+\frac{k^i_{j,s}}{4l}]-[\frac{k^i_{j,s}}{4l}]-[\frac{\chi s S_i}{4l}]\equiv 0 \quad (mod\ 2).$$

Donc c'est toujours vrai que

$$g_{i,j,s}\equiv(-1)^{k^i_{j,s}/2l} \quad (mod\ 4).$$

Cela implique (VI.35).

La preuve est complète finalement ! □

VI.5 La caractéristique d'Euler

VI.5.1 Dans l'article [De15], Deligne a conjecturé aussi que le nombre $C_n(X_k)$ est divisible par $|\mathrm{Pic}^0_{X_k}(\mathbb{F}_{q^k})|$, et il a donné des conjectures plus précises (la conjecture 6.3 et la conjecture 6.7 [De15]). Dans cette section, on montre la conjecture 6.3 de *loc. cit.* dans le cas partout non-ramifié et calcule "la caractéristique d'Euler". Rappelons que pour toute variété V de dimension m, sa caractéristique d'Euler est définie par

$$\chi(V):=\sum_{i=1}^{2m}(-1)^i\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\mathrm{H}^i(V\otimes\mathbb{F},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Par un théorème de Laumon ([Lau81]), on peut remplacer dans la définition les cohomologies ℓ-adiques par celles à support compact. Donc par la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, si

$$|V(\mathbb{F}_{q^k})|=\sum_i m_i\alpha_i^k, \quad \forall\, k\geqslant 1.$$

alors $\sum_i m_i$ est la caractéristique d'Euler de V.

Théorème VI.5.1.1. *Il existe un nombre fini des nombres de Weil α_i et des entiers m_i tels que*

$$C_n(X_k)=|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|=|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|(\sum_i m_i\alpha_i^k), \quad \forall\, k\geqslant 1$$

En particulier, pour tout $k\geqslant 1$, $|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|$ divise $|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|$. De plus, on a

$$\sum_i m_i=\sum_{l|n}\mu(l)\mu(n/l)l^{2g_X-3}$$

Démonstration. Le résultat suivant est dû à Hausel, Rodriguez-Villegas et la théorie de Hodge non-abélienne.

Lemme VI.5.1.2. *Il existe des q-nombres de Weil α_i et des entiers m_i tels que*

$$q^{-k(n^2(g_X-1)-1)}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_{q^k})|=|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|(\sum_i m_i\alpha_i^k)$$

pour tout $n \geqslant 1$ *et* $\sum_i m_i = \mu(n)n^{2g-3}$.

Preuve du lemme. Soit $(e,n)=1$. Soit $\mathbf{M}^e(PGL_n)$ le champ des PGL_n-fibres de Higgs de degré e sur X_1, i.e., le champ qui paramètre les couples $(\mathcal{P},\theta)$, où $\mathcal{P}$ est un PGL_n-fibré principal de degré e et $\theta \in H^0(X_1, Ad(\mathcal{P})\otimes\omega_{X_1})$. Le morphisme $GL_n \to PGL_n$ induit un morphisme surjectif $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1) \to \mathbf{M}^e(PGL_n)$, et on désigne par $\mathbf{M}^{e,st}(PGL_n)$ le sous champ de $\mathbf{M}^e(PGL_n)$ qui est défini comme l'image de $\mathbf{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$. Il admet le schéma des modules grossier $M^{e,st}(PGL_n)$. En effet, on a un morphisme de schéma $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1) \to M^{e,st}(PGL_n)$ qui fait $\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)$ un $\mathrm{Pic}^0_{X_1}$-torseur au-dessus de $M^{e,st}(PGL_n)$, d'où l'existence des entiers m_i comme dans l'énoncé du lemme et de plus la somme $\sum_i m_i$ est égale à la caractéristique d'Euler de $M^{e,st}(PGL_n)$. C'est la même pour l'espace des modules des PGL_n-fibrés de Higgs stables de rang n et de degré e sur une surface de Riemann $X_{\mathbb{C}}$ de genre g_X. Par la théorie de Hodge non-abélienne (cf. [Da87], [Hi87], [Co88], [Si92]), $\sum_i m_i$ est égale aussi à la caractéristique d'Euler de la variété de caractère tordu de PGL_n que Hausel et Rodriguez-Villegas (cf. corollaire 1.1.1 [HR08]) ont calculée être égale à $\mu(n)n^{2g-3}$. □

Par la formule (VI.17), le nombre $A_{n,e}(X_1) - C_n(X_1)$ est un polynôme à coefficients rationnels en $C_s(X_k)$ pour $s < n$. Donc par récurrence, il existe des nombres de Weil α_i et des nombres rationnels m_i tels que

$$C_n(X_k) = |\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|(\sum_i m_i\alpha_i^k), \quad \forall\, k \geqslant 1$$

Mais

$$|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})| = \prod_{i=1}^{2g_X}(1-\sigma_i^k) = q^{kg_X} + \cdots, \quad \forall\, k \geqslant 1$$

où les termes omis sont de poids strictement plus bas que $2kg_X$. Donc on obtient l'intégralité de m_i par le théorème VI.4.1.1 en raisonnant par l'absurde et comparant les poids.

Maintenant on calcule $\sum_i m_i$. Soit χ_n la somme correspondant pour $C_n(X_1)$. On utilise encore le fait que $A_{n,e}(X_1)$ est un polynôme à coefficients rationnels en $C_s(X_k)$ pour $s \leqslant n$, alors il suffit de trouver les termes qui sont linéaires en $C_s(X_k)$ de ce polynôme. Par la formule (VI.17), c'est

$$\sum_{d|n}\sum_{l|d}\frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)d}[z^d]\Big(\frac{(2g_X-2)n}{l}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{C_s(X_{kl})s}{k}z^{skl}\Big)$$

qui est égal à

$$\sum_{d|n}\sum_{l|d}\sum_{s|\frac{d}{l}}\frac{\mu(l)s^2}{d^2}C_s(X_{d/s}) = \sum_{d|n}\sum_{s|d}C_s(X_{d/s})(\sum_{l|\frac{d}{s}}\mu(l)) = \sum_{d|n}C_d(X_1).$$

Par la formule (VI.17) et le lemme VI.5.1.2, on obtient alors

$$\mu(n)n^{2g-3} = \sum_{d|n} \chi_d.$$

Par l'inversion de Möbius, on a

$$\chi_n = \sum_{l|n} \mu(l)\mu(n/l)l^{2g-3}.$$

□

Annexe A

Indépendance de degré

Dans cet appendice on montre que $J_e^{T=0}$ ne dépend que de l'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et cela implique que le nombre des classes d'isomorphie des fibrés vectoriels géométriquement indécomposables de degré e de rang n ne dépend pas du degré e quand $(e, n) = 1$.

Lemme A.0.1. *Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, la famille des fonctions $(\lambda \mapsto \lambda^{\mathrm{H}_Q^e})_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ définie au paragraphe V.1.7 est une (G, M)-famille sur X_M^G.*

Démonstration. Il suffit de prouver que la famille des fonctions

$$(\lambda \mapsto \prod_{i=1}^{r-1}(\frac{\lambda_{s^{-1}(i)}}{\lambda_{s^{-1}(i+1)}})^{[\varpi_i^{s(M)}(-e,0,\ldots,0)]})_{Q\in\mathcal{P}(M)}$$

est une (G, M)-famille, où $s \in W(\mathfrak{a}_M)$ est associé à Q (cf. paragraphe V.1.5) et $r = |M|$ le nombre des facteurs de M. Supposons que $s, t \in \mathfrak{S}_r$ sont des permutations tels que st^{-1} soit la transposition w de deux entiers adjacents l et $l+1$, et $\lambda \in X_M^G$ est telle que $\lambda_{s^{-1}(l)} = \lambda_{s^{-1}(l+1)}$. Donc on a $\lambda_{s^{-1}(i)} = \lambda_{t^{-1}(i)}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ et

$$[\varpi_i^{s(M)}(-e, 0, \ldots, 0)] = [\varpi_i^{t(M)}(-e, 0, \ldots, 0)]$$

quand $i \neq l$. Mais quand $i = l$, on a

$$(\frac{\lambda_{s^{-1}(l)}}{\lambda_{s^{-1}(i+1)}})^{[\varpi_l^{s(M)}(-e,0,\ldots,0)]} = 1$$

d'où ce lemme. □

Lemme A.0.2. *Soit $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ une (G, M)-famille sur X_M^G qui sont des polynômes sur X_M^G dont le degré $c_Q(\lambda) < \dim \mathfrak{a}_M^G$, alors*

$$c_M = 0$$

Démonstration. Comme $(c_Q)_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille , la fonction

$$c_M(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \theta_Q(\lambda)^{-1}c_Q(\lambda)$$

est un polynôme sur X_M^G. Mais a priori c'est une fonction rationnelle dont le degré de numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur. Pour que les deux énoncés soient compatibles, il faut que $c_M(\lambda)$ soit identiquement nulle. Donc en particulier, $c_M = 0$. □

Lemme A.0.3. *Supposons que* $\{c_Q\}_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ *est une* (G,M)*-famille sur un voisinage de* 1 *telle que* c_M^P *soit indépendant de* $P\in\mathcal{P}(L)$*, qu'on note* c_M^L*. Alors la limite*

$$\lim_{\mu\to 1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\mu)c_Q(\mu)$$

ne dépend que de l'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*.*

Démonstration. Rappleons que $\widehat{\mathbb{1}}_Q^e(\mu) = \theta_Q(\mu)^{-1}\mu^{\mathrm{H}_Q^e}$. Soit $d_Q^e(\lambda) = \lambda^{\mathrm{H}_Q^e}$, $\forall\ Q\in\mathcal{P}(M)$. Alors par le lemme A.0.1 cela définit une (G,M)-famille sur X_M^G. Par le théorème V.2.2.1, il suffit donc de prouver que d_L^e ne dépend que de l'ordre de e pour tout $L\in\mathcal{L}(M)$.

Soit $M \cong^{\rho_M} GL_{n_1}\times\cdots\times GL_{n_r}$ (cf. paragraphe V.1.3). On a $\mathrm{H}_{Q_s}^e = \widetilde{\mathrm{H}}_{Q_s}^e + s^{-1}(0,1,1,\ldots,1)$ (cf. paragraphe V.1.7) pour $s\in W(\mathfrak{a}_M)$ et $(0,1,\cdots,1)\in\mathfrak{a}_{s(M)}$, où

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{Q_s}^e = s^{-1}([\frac{e}{n}r_{s(M)}^0] - [\frac{e}{n}r_{s(M)}^1)],\ldots,[\frac{e}{n}r_{s(M)}^{r-1}] - [\frac{e}{n}r_{s(M)}^r)]) \tag{A.1}$$

Rappelons que

$$r_{s(M)}^i = n_{s^{-1}(1)} + n_{s^{-1}(2)} + \cdots + n_{s^{-1}(i)}$$

Soit $L\in\mathcal{L}(M)$. Sans perdre grand chose, on peut supposer que M et L sont standard. Par l'inclusion $X_L^G \subseteq X_M^G$, on suppose que

$$X_L^G = \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in X_M^G \mid \lambda_1 = \cdots = \lambda_{i_1}, \lambda_{i_1+1} = \cdots = \lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_{k-1}+1} = \cdots = \lambda_{i_k}\}$$

pour $1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k = r$. Soit $s\in W(\mathfrak{a}_M)$ tel que le sous-groupe parabolique associé soit dans un sous-groupe parabolique de $\mathcal{P}(L)$. Alors sous l'identification $W(\mathfrak{a}_M)\cong\mathfrak{S}_r$, l'élément s transforme l'intervalle $[i_1+\cdots+i_{j-1}+1, i_1+\cdots+i_j]\cap\{1,\cdots,r\}$ en un intervalle. Comme une permutation $s\in W(\mathfrak{a}_M)$ définit aussi un morphisme

$$s : X_M^G \to X_{s(M)}^G$$

tel que pour $H\in\mathfrak{a}_{s(M)}$ et $\lambda\in X_M^G$ on ait $\lambda^{s^{-1}(H)} = s(\lambda)^H$. Donc pour $s\in W(\mathfrak{a}_M)$ et $t\in W(\mathfrak{a}_L)$ tels que $Q_s \subseteq Q_t$, on a $\forall\ \lambda \in X_L^G$:

$$\lambda^{\mathrm{H}^e_{Q_s}} = s(\prod_{l=1}^{r} \lambda_l^{r^l_{s(M)}})s(\prod_{l=2}^{r} \lambda_l) = \lambda_{i_1}{}^{i_1-1}\cdots\lambda_{i_j}{}^{i_j-1}s(\prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}^{\sum_{l=i_j+1}^{i_j} r^l_{s(M)}})s(\prod_{j=2}^{k} \lambda_{i_j})$$

cela est égal à $(\lambda_{i_1}{}^{i_1-1}\cdots\lambda_{i_j}{}^{i_j-1})\lambda^{\mathrm{H}^e_{Q_t}}$ dont le premier facteur ne dépend pas de t, et on obtient donc

$$d_L^e = \lim_{\lambda\to 1} \sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \lambda^{\mathrm{H}^e_Q}\theta_Q(\lambda)^{-1}$$

Soit $\{x\} = x - [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors

$$[x]-[y] = \begin{cases} [x-y], & \text{si } \{x\} \geqslant \{y\} \\ [x-y]+1, & \text{si } \{x\} < \{y\} \end{cases}$$

Soient $L \cong GL_{m_1} \times \cdots GL_{m_k}$ et $t \in W(\mathfrak{a}_L)$. On sait que

$$[\frac{e}{n}r^{i-1}_{t(L)}] - [\frac{e}{n}r^{i}_{t(L)})] = -[\frac{e}{n}m_{t^{-1}(i)}] - \varepsilon_i^{t,e}$$

où

$$\varepsilon_i^{t,e} = \begin{cases} 0, & \text{si } \{\frac{e}{n}r^i_{t(L)})\} \geqslant \{\frac{e}{n}r^{i-1}_{t(L)}\} \\ 1, & \text{si } \{\frac{e}{n}r^i_{t(L)}\} < \{\frac{e}{n}r^{i-1}_{t(L)}\} \end{cases}$$

en particulier, $\varepsilon_1^{t,e} = 0$. Il s'ensuit que

$$\lambda^{\mathrm{H}^e_{Q_t}} = (\prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{-[\frac{e}{n}m_i]})s(\prod_{i=2}^{n} \lambda_i^{1-\varepsilon_i^{t,e}}).$$

Notons que le premier facteur ne dépend pas de $t \in W(\mathfrak{a}_L)$. La fonction $s(\prod_{i=2}^k \lambda_i^{1-\varepsilon_i^{t,e}})$ est un polynôme, et

$$\deg s(\prod_{i=2}^{n} \lambda_i^{1-\varepsilon_i^{t,e}}) = \dim \mathfrak{a}_L^G - \sum_{i=2}^{k} \varepsilon_i^{t,e}$$

Par le lemme A.0.2, on obtient que $d_L^e = 0$ sauf si $\varepsilon_i^{t,e} = 0$ pour tout i et t, cela équivaut que

$$\{\frac{e}{n}r^i_{t(Q)}\} = 0 \quad \forall\ i \geqslant 1$$

i.e. $n \mid e\sum_{l=1}^{i} m_{t^{-1}(l)}$ pour tout $i \geqslant 1$ et $t \in \mathfrak{S}_k$, et donc cela équivaut encore

$$n \mid em_l \quad \forall\ l \geqslant 1$$

Notons que si e, e' ont le même ordre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors

$$(n \mid em_l \quad \forall\, l \geqslant 1) \Longleftrightarrow (n \mid e'm_l \quad \forall\, l \geqslant 1)$$

Donc d_L^e ne dépend que de l'ordre de e et la preuve est complète. $\square$

Théorème A.0.4. *Le nombre $J_e^{T=0}$ ne dépend que de l'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Rappelons que $J_e^{T=0}$ (cf. l'équation (V.28)) est égal à la somme portant sur toutes classes d'équivalence des paires discrètes partout non-ramifiées $(P, \tilde{\pi})$ de l'expression suivante :

$$\text{(A.2)} \quad \frac{1}{|\,\mathfrak{stab}\,(P,\tilde{\pi})|} \sum_{(w,\lambda_{\tilde{\pi}})\in\mathfrak{stab}(P,\tilde{\pi})} \int_{\mathrm{Im}X^G_{L^w}} \frac{1}{|w||X^{L^w}_{L^w}|} \sum_{\substack{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in\mathrm{Im}X^G_{L^w},\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\in(\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P})^\circ \\ \lambda_{\tilde{\pi}}=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}\lambda_{\tilde{\pi}L^w}}} \sum_{\substack{\lambda_w\in\mathrm{Im}X^{L^w}_{M_P} \\ \lambda_w/w^{-1}(\lambda_w)=\lambda^{L^w}_{\tilde{\pi}}}}$$
$$\lim_{\mu\to 1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})\frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)} n_{\tilde{\pi}}(w,w^{-1}(\lambda_w))\mathrm{d}\lambda$$

Par le théorème V.2.3.5 et la preuve du lemme V.5.1.1, et le lemme A.0.1, on sait que la limite

$$\lim_{\mu\to 1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu\lambda_{\tilde{\pi}L^w})\frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\frac{\lambda\lambda_w}{\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)} n_{\tilde{\pi}}(w,w^{-1}(\lambda_w))$$

existe et elle est égale à 1 si $\lambda_{\tilde{\pi}L^w}$ n'est pas dans X^G_G. On peut supposer $\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in X^G_G$, alors la limite ci-dessus est égale à

$$(\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_1^e \lim_{\mu\to 1}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L^w)} \widehat{\mathbb{1}}^e_Q(\mu)\frac{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\frac{\lambda\lambda_w}{\mu})}{n_{Q|Q_{L^w}}(\tilde{\pi},\lambda\lambda_w)} n_{\tilde{\pi}}(w,w^{-1}(\lambda_w)).$$

où $(\lambda_{\tilde{\pi}L^w})_1$ est la $1^{\text{ère}}$ coordonnée de $\lambda_{\tilde{\pi}L^w}\in X^G_{L^w}$ cf. paragraphe V.1.4. Maintenant, d'après A.0.3 la limite ne dépend que d'ordre de e. Par le calcul du paragraphe V.5.2 (auquel on renvoie pour les notations), il suffit de montrer que la valeur

$$\delta_e(\tilde{\pi}, L^w) := \sum_{\widetilde{\lambda_{L^w}}\in\widetilde{\Lambda_{L^w}}} \widetilde{\lambda_{L^w}}_1^{-(\sum\frac{l_i(l_i-1)}{2}|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)+e}$$

ne dépend que de l'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Rappelons que $\widetilde{\Lambda_{L^w}}$ est un sous-groupe de X^G_G et le cardinal de $\widetilde{\Lambda_{L^w}}$ est égal à p.g.c.d.$(l_i|\mathrm{Fix}(\pi_i)|)$. Si e et e' ont le même ordre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$\widetilde{\lambda_{L^w 1}}^{e} = \widetilde{\lambda_{L^w 1}}^{e'}$$

et cela implique

$$\delta_e(\tilde{\pi}, L^w) = \delta_{e'}(\tilde{\pi}, L^w)$$

□

Quand $(n, e) = 1$, on a montré (cf. théorème IV.4.2.3) que $J_e^{T=0}$ est égal au nombre de classes d'isomorphie des fibrés géométriquement indécomposables de degré e, donc cela implique

Corollaire A.0.5. *Quand $(n, e) = 1$, le nombre des classes d'isomorphie des fibrés géométriquement indécomposables $A_{n,e}(X_1)$ ne dépend pas de degré e.*

Annexe B

Lien entre les fibrés vectoriels indécomposables et les fibrés de Higgs

Dans cet appendice, on explique comment extraire de nos résultats et ceux de [Ch15] une preuve du résultat suivant :

$$A_{n,e}(X_1) = q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| \quad \text{quand } (n,e)=1$$

(cf. paragraphe IV.3.2) qui n'utilise que de la formule des traces.

Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G, soit $\mathfrak{m}_P$ (resp. $\mathfrak{n}_P$) l'algèbre de Lie de M_P (resp. de N_P). Soit $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie de G. Soit $\mathbb{1}_{\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$ la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ qui est la fonction caractéristique de $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$. On normalise les mesures tels que $\mathrm{vol}(\mathfrak{n}_P(F)\backslash\mathfrak{n}_P(\mathbb{A}))=1$.

Pour tout $g\in G(\mathbb{A})$ (resp. $X\in\mathfrak{g}(\mathbb{A})$) soit χ_g (resp. χ_X) son polynôme caractéristique. Pour une partie R de $G(\mathbb{A})$ ou $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$, et $p\in\mathbb{A}[X]$ un polynôme unitaire de degré n on note

$$R_p = \{x\in R|\ \chi_p = p\}$$

Si $g\in G(\mathbb{A})$, et $\gamma\in G(F)$ (resp. $\mathfrak{g}(F)$), on a

$$g^{-1}\gamma g\in G(\mathcal{O}) \implies \chi_\gamma\in\mathbb{F}_q[X]$$

$$(\text{resp.}\quad g^{-1}\gamma g\in\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \implies \chi_\gamma\in\mathbb{F}_q[X])$$

Soit $p\in\mathbb{F}_q[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On définit deux fonctions pour tout $g\in G(\mathbb{A})$ et $T\in\mathfrak{a}_B$

$$k_p^T(g,g) = \sum_{P\in\mathcal{P}(B)}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\widehat{\tau}_P(H_P(\delta g)-T)\sum_{\gamma\in M_P(F)_p}\int_{N_P(\mathbb{A})}\mathbb{1}_K(g^{-1}\delta^{-1}\gamma n\delta g)\mathrm{d}n$$

et

$$\tilde{k}_p^T(g,g) = \sum_{P\in\mathcal{P}(B)} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(H_P(\delta g)-T) \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)_p} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathfrak{g}(\mathcal{O})}(g^{-1}(X+U)g)\mathrm{d}U$$

Soient

$$J_{p,e}^T = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} k_p^T(g,g)\mathrm{d}g$$

et

$$\tilde{J}_{p,e}^T = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \tilde{k}_p^T(g,g)\mathrm{d}g$$

Notons que tous nos résultats sur J_e^T marchent aussi pour $J_{p,e}^T$.

Soit $T \in \mathfrak{a}_B \cong \mathbb{R}^n$ tel que $d(T)$ (cf. paragraphe IV.3.1) assez grand. Alors

$$k_p^T(g,g) = F^G(g,T) \sum_{\gamma\in G(F)_p} \mathbb{1}_K(g^{-1}\gamma g)$$

(cf. preuve du théorème IV.4.1.4), et

$$k_p^T(g,g) = F^G(g,T) \sum_{X\in G(F)_p} \mathbb{1}_{X\in\mathfrak{g}(\mathcal{O})}(g^{-1}Xg)$$

(cf. théorème 6.1.1.2. de [Ch15]). Donc par le dictionnaire des fibrés-adèles, on a (cf. preuve de IV.4.2.3)

$$J_{p,e}^T = \sum_{\mathcal{E}\ T\text{-semi-stable de degré } e} \frac{|\{\gamma \in Aut(\mathcal{E}) | \chi_\gamma = p\}|}{|Aut(\mathcal{E})|}$$

$$\tilde{J}_{p,e}^T = \sum_{\mathcal{E}\ T\text{-semi-stable de degré } e} \frac{|\{\gamma \in End(\mathcal{E}) | \chi_\gamma = p\}|}{|Aut(\mathcal{E})|}$$

où la somme porte sur les classes d'isomorphie des fibrés vectoriels T-semi-stables.

Lemme B.0.1. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n. Un endomorphisme γ est un automorphisme si et seulement si le terme constant de son polynôme caractéristique est non-nul.*

Démonstration. Notons que pour un endomorphisme γ de $\mathcal{E}$

$$(\ker(\gamma) = 0) \iff (\mathrm{coker}(\gamma) = 0) \iff (\gamma \text{ est un automorphisme})$$

En effet, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker(\gamma) \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{coker}(\gamma) \longrightarrow 0$$

Donc on a $\deg(\ker(\gamma)) = \deg(\mathrm{coker}(\gamma))$ et $\mathrm{rg}(\ker(\gamma)) = \mathrm{rg}(\mathrm{coker}(\gamma))$. □

On en déduit alors que pour tout T tel que $d(T)$ (cf. paragraphe IV.1.2 et IV.3.1) soit assez grand, si le terme constant de p est non-nul

$$J^T_{p,e} = \tilde{J}^T_{p,e} \tag{B.1}$$

et si le terme constant de p est nul

$$J^T_{p,e} = 0 \tag{B.2}$$

Par le théorème IV.4.1.5 et le théorème 6.1.1(4) de [Ch15], on sait que $J^T_{p,e}$ et $\tilde{J}^T_{p,e}$ sont quasi-polynomiaux donc les équations (B.1) et (B.2) sont vraies pour tout $T \in \mathfrak{a}_B$.

Donc on a

$$J^{T=0}_e = \sum_{p\in\mathbb{F}_q[X]} J^{T=0}_{p,e} = \sum_{p\in\mathbb{F}_q[X],p(0)\neq 0} \tilde{J}^{T=0}_{p,e}$$

Quand $p = X^n$ le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient dominant, on note $\tilde{J}^{T=0}_{nilp,e} = \tilde{J}^{T=0}_{p,e}$. Par le théorème 6.2.1 de [Ch15], comme il y a $q-1$ éléments dans $\mathbb{F}_q^\times$, on obtient quand $(n, e) = 1$

$$J^{T=0}_e = (q-1)\tilde{J}^{T=0}_{nilp,e} = \frac{q-1}{q} \sum_{p\in\mathbb{F}_q[X]} \tilde{J}^{T=0}_{p,e}$$

Par le corollaire 5.2.2 et le corollaire 5.2.3 de [Ch15], on a

$$J^{T=0}_e = \frac{q-1}{q} q^{-n^2(g_X-1)} \mathrm{vol}(\mathbf{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q))$$

où vol est la masse d'un groupoïde. Comme tout fibré de Higgs semi-stable de rang n de degré e pour $(n, e) = 1$ est automatiquement stable, le cardinal de son groupe d'automorphisme est $q-1$. On obtient

$$J^{T=0}_e = q^{-n^2(g_X-1)-1} |\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$$

Cela prouve l'assertion par le théorème IV.4.2.3.

Index des symboles

Bibliographie

[Ar78] Arthur, J. A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in G(Q). Duke Math. J. 45 (1978), no. 4, 911-952.

[Ar80] Arthur, J. A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator. Compositio Math. 40 (1980), no. 1, 87-121.

[Ar81] Arthur, J. The trace formula in invariant form. Ann. of Math. (2) 114 (1981), no. 1, 1-74.

[Ar82] Arthur, J. On a family of distributions obtained from Eisenstein series II. Explicit formulas Amer. J. Math. 104 (1982), no. 6, 1289-1336.

[Ar91] Arthur, J. A local trace formula. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 73 (1991), 5-96.

[Ar05] Arthur, J. An introduction to the trace formula. Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1-263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Ch15] Chaudouard, P.-H. Sur le comptage des fibrés de Hitchin. Astérisque No. 369 (2015), 223-284.

[CL16] Chaudouard, P.-H. ; Laumon, G. Sur le comptage des fibrés de Hitchin nilpotents. J. Inst. Math. Jussieu 15 (2016), no. 1, 91-164.

[Co08] Cogdell, J. W. Notes on L-functions for GLn. School on Automorphic Forms on GL(n), 75-158, ICTP Lect. Notes, 21, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008.

[Co88] Corlette, K. Flat G-bundles with canonical metrics. J. Differential Geom. 28 (1988), no. 3, 361-382.

[Da87] Donaldson, S. K. Twisted harmonic maps and the self-duality equations, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 127-131.

[De73] Deligne, P. Théorème d'intégralité, Appendix to "Le niveau de la cohomologie des intersections complètes" by N. Katz, Exposé XXI in SGA 7, Lecture Notes Math. 340, 384-400, Springer-Verlag, New York, 1973.

[De80] Deligne, P. La conjecture de Weil. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137-252.

[De13] Deligne, P. Cours à l'IHES. `http://www.ihes.fr/~abbes/CAGA/deligne.html`

[De15] Deligne, P. Comptage de faisceaux l-adiques. Astérisque No. 369 (2015), 285-312.

[DF13] Deligne, P. ; Flicker, Y. Z. Counting local systems with principal unipotent local monodromy. Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 3, 921-982.

[Dr81] Drinfel'd, V. G. The number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 4, 75-76.

[Fl14] Flicker, Y. Z. Eisenstein series and the trace formula for GL(2) over a function field. Doc. Math. 19 (2014), 1-62.

[Fl15] Flicker, Y. Z. Counting rank two local systems with at most one, unipotent, monodromy. Amer. J. Math. 137 (2015), no. 3, 739-763.

[GPH13] Garcia-Prada, O. ; Heinloth, J. The y-genus of the moduli space of PGLn-Higgs bundles on a curve (for degree coprime to n). Duke Math. J. 162 (2013), 2731-2749

[GPHS14] Garcia-Prada, O. ; Heinloth, J. ; Schmitt, A. On the motives of moduli of chains and Higgs bundles, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), 2617-2668.

[GWZ17] Groechenig, M. ; Wyss, D. ; Ziegler, P. Mirror symmetry for moduli spaces of Higgs bundles via p-adic integration `https://arxiv.org/abs/1707.06417`

[Hi87] Hitchin, N. J. The self-duality equations on a Riemann surface. Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987), no. 1, 59-126.

[Ha74] Harder, G. Chevalley groups over function fields and automorphic forms. Ann. of Math. (2) 100 (1974), 249-306.

[HR08] Hausel, T. ; Rodriguez-Villegas, F. Mixed Hodge polynomials of character varieties. Invent. Math. 174 (2008), no. 3, 555-624.

[HL11] Henniart, G. ; Lemaire, B. Changement de base et induction automorphe pour GLn en caractéristique non nulle. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 124 (2011), vi+190 pp.

[JL70] Jacquet, H. ; Langlands, R. P. Automorphic forms on GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. vii+548 pp.

[JPSS83] Jacquet, H. ; Piatetskii-Shapiro, I. I. ; Shalika, J. A. Rankin-Selberg convolutions. Amer. J. Math. 105 (1983), no. 2, 367-464.

[KW01] Kiehl, R. ; Weissauer, R. Weil conjectures, perverse sheaves and l'adic Fourier transform. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 42. Springer-Verlag, 2001. xii+375 pp.

[Ko09] Kontsevich, M. Notes on motives in finite characteristic. Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 213-247, Progr. Math., 270, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[LW13] Labesse, J.-P. ; Waldspurger, J.-L. La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar. With a foreword by Robert Langlands CRM Monograph Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. xxvi+234 pp

[Laf97] Lafforgue, L. Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson. Astérisque No. 243 (1997), ii+329 pp.

[Laf02] Lafforgue, L. Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. Invent. Math. 147 (2002), no. 1, 1-241.

[Lan76] Langlands, R. On the functional equations satisfied by Eisenstein series. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337 pp.

[Lau81] Laumon, G. Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie l-adique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 3, 209-212.

[Lau84] Laumon, G. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L sur un corps global de caractéristique positive. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 298 (1984), no. 8, 181-184.

[Lau96] Laumon, G. Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I. Geometry, counting of points and local harmonic analysis. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 41. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. xiv+344 pp.

[Lau97] Laumon, G. Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II. Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence. With an appendix by Jean-Loup Waldspurger. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 56. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xii+366

[LZ16] Luo, W., Zhu, S. Integrality structures in topological strings I : framed unknot `https://arxiv.org/abs/1611.06506`

[MS14] Mozgovoy, S. ; Schiffmann, O. Counting Higgs Bundles `https://arxiv.org/abs/1411.2101`

[Me17] Mellit, A. Poincaré polynomials of moduli spaces of Higgs bundles and character varieties (no punctures) https://arxiv.org/abs/1707.04214

[MW89] Moeglin, C. ; Waldspurger, J.-L. Le spectre résiduel de GL(n). Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989), no. 4, 605-674.

[MW94] Moeglin, C. ; Waldspurger, J.-L. Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'Écriture. Progress in Mathematics, 113. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. xxx+342 pp.

[Mo82] Morris, L. E. Eisenstein series for reductive groups over global function fields. II. The general case. Canad. J. Math. 34 (1982), no. 5, 1112-1182.

[Ni91] Nitsure, N. Moduli space of semistable pairs on a curve. Proc. London Math. Soc. (3) 62 (1991), no. 2, 275-300.

[Ra95] Raynaud, M. Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 286, 129-147, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Re11] Reineke, M. Cohomology of quiver moduli, functional equations, and integrality of Donaldson-Thomas type invariants. Compos. Math. 147 (2011), no. 3, 943-964.

[Sc16] Schiffmann, O. Indecomposable vector bundles and stable Higgs bundles over smooth projective curves. Ann. of Math. (2) 183 (2016), no. 1, 297-362.

[Se88] Serre, J.-P. Algebraic groups and class fields. Translated from the French. Graduate Texts in Mathematics, 117. Springer-Verlag, New York, 1988. x+207

[Sha10] Shahidi, F. Eisenstein series and automorphic L-functions. American Mathematical Society Colloquium Publications, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. vi+210 pp.

[Shi76] Shintani, T. On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GLn over p-adic fields. Proc. Japan Acad. 52 (1976), no. 4, 180-182.

[Si92] Simpson, C.T. Higgs bundles and local systems. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 75 (1992), 5-95.

[Tu84] Tutte, W. T. Graph theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 21. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. xxi+333