



Etude expérimentale de l'atomisation de structures ligamentaires viscoélastiques.

Christophe Tirel

► To cite this version:

Christophe Tirel. Etude expérimentale de l'atomisation de structures ligamentaires viscoélastiques.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Normandie Université, 2019. Français. NNT : 2019NORMR014 . tel-02163339

HAL Id: tel-02163339

<https://theses.hal.science/tel-02163339>

Submitted on 24 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Énergétique

Préparée au sein de l'Université de Rouen Normandie

Étude expérimentale de l'atomisation de structures ligamentaires viscoélastiques

Présentée et soutenue par
Christophe TIREL

Thèse soutenue publiquement le 2 Avril 2019
devant le jury composé de

M. Yannick BAILLY	Professeur, Université de Franche-Comté	Rapporteur
M. Jean-Bernard BLAISOT	Maître de Conférences HDR, Université de Rouen Normandie	Directeur de thèse
M. Günter BRENN	Professeur, Université Technologique de Graz, Autriche	Rapporteur
M. Christophe DUMOUCHEL	Directeur de Recherche CNRS, UMR 6614 CORIA	Directeur de thèse
M. Innocent MUTABAZI	Professeur, Université le Havre Normandie	Examinateur
Mme. Marie-Charlotte RENOULT	Maître de Conférences, INSA de Rouen	Examinateuse
M. Jean-Pierre SONGBE	Expert I&D, ALBEA-Group	Examinateur
Mme. Audrey STEINBERGER	Chargé de Recherche CNRS, École Nationale Supérieure Lyon	Examinateuse

Thèse dirigée par Jean-Bernard BLAISOT et Christophe DUMOUCHEL, laboratoire UMR 6614 CORIA

Remerciements

Je remercie l'ensemble des membres de mon jury : Yannick Bailly, Günter Brenn, Innocent Mutabazi, Jean-Pierre Songbe et Audrey Steinberger, qui ont acceptés de lire ce manuscrit et d'assister à ma soutenance de thèse. J'ai apprécié les échanges que nous avons eus durant ma présentation et j'espère qu'ils vous auront apportés autant qu'à moi.

Je remercie chaleureusement Christophe Dumouchel et Jean-Bernard Blaisot, mes directeurs de thèse, pour leurs nombreux conseils partagés ainsi que l'expérience que m'a fait vivre cette thèse. Pour les mêmes raisons, je remercie particulièrement Marie-Charlotte Renoult, arrivée en cours de route dans l'équipe, ainsi que pour ton dynamisme. Je remercie grandement Denis Lisiecki pour la formation sur le banc de manipulation et toute son aide apportée autour des manipulations et mesures, je te souhaite une bonne retraite. Merci aussi à Fabien Thiesset, arrivé tout récemment dans l'équipe pour la bonne ambiance et les discussions durant les repas.

Je remercie également Nathalie Vallée, Antonio Ficuciello et Trung Thanh Vu, pour leurs conseils et bonne humeur quand je suis arrivé en thèse et jusqu'à leurs soutenances. Mes remerciements aussi à Louise Cottier, Fakhry Abuzahra, Rafael Alejandro Herrera Leclerc et Dilip Sanadi, arrivés après moi et à qui je souhaite de réussir leur thèse. Fakhry, attention je ne serais plus là pour surveiller tes repas. Louise, ne m'en veut pas trop pour tes prochaines défaites au Monopoly (ou n'importe quel autre jeu d'ailleurs).

Je remercie tous les membres de l'atelier et de l'équipe métrologie pour les petits soucis et modifications apportées au banc expérimental. Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire ainsi que celles et ceux croisés durant cette thèse pour leur accueil qui, de prêt ou de loin, m'ont aidé à m'intégrer ici.

Enfin, le plus important, remerciements très spéciaux à mes parents et à ma sœur, Colette, Rémi et Carine, ainsi qu'à ma famille qui m'ont soutenu durant ces années de thèse et à qui je souhaite le meilleur. Les mêmes remerciements pour Mickaël Jacquot qui m'a beaucoup soutenu au laboratoire et en dehors. Accroche-toi pour finir ta thèse, elle est amplement méritée avec le nombre incalculable et indécent de difficultés que tu as surmontées. Remerciement aussi à l'ensemble de mes amis qui ne m'ont pas beaucoup vu et entendu pendant ces années, j'ai hâte de vous retrouver autour d'une table garnie des plats venant du livre de recettes que vous m'avez offert ainsi que les jeux que vous m'avez fait découvrir.

Table des matières



1. Introduction.....	9
2. Description multi-échelles	19
2.1. Introduction	21
2.2. Distributions de diamètres et distributions d'échelles.....	21
2.2.1. Distribution de diamètres.....	21
2.2.2. Distribution d'échelles	22
2.3. Applications de référence.....	23
2.3.1. Ensembles de sphères.....	23
2.3.2. Ensembles de cylindres	26
2.4. Application : perle sur une ficelle	30
2.4.1. Sphère et cylindre sans raccordement	30
2.4.2. Sphère et cylindre avec raccordement	31
2.5. Ensemble de cylindres s'amincissants.....	34
2.6. Conclusion	40
3. Traitement d'images et analyse sub-pixel.....	43
3.1. Introduction	45
3.2. Traitement d'images	46
3.2.1. Techniques de seuillages.....	46
3.2.2. Normalisation des images	47
3.2.3. Localisation des objets liquides	48
3.2.4. Segmentation locale des objets de l'image	51
3.3. Approches sub-pixel	51
3.3.1. Calcul du contour sub-pixel (CORIA)	52
3.3.2. Sub-pixel : level-set.....	53
3.3.3. Sur-résolution : méthode bi-cubique	55
3.3.4. Sur-résolution : méthode A+	56
3.3.5. Comparatif des méthodes	57
3.4. Mesure de la distribution d'échelle 3D	62

3.4.1. Détermination du squelette d'un objet.....	62
3.4.2. Mesure du volume et de la surface d'un objet à partir de son squelette.....	63
3.4.3. Mesure de la distribution d'échelle à partir des informations du squelette	65
3.5. Validation du calcul multi-échelles via la méthode de Monte-Carlo	66
3.5.1. Cas synthétiques	67
3.5.2. Influence de la densité de points sur les dérivées successives de $e_3(d)$	69
3.5.3. Cas réel axisymétrique	73
3.6. Analyse de structures ligamentaires issues d'une nappe liquide turbulente	76
3.6.1. Dispositif expérimental.....	76
3.6.2. Résultats	78
3.7. Conclusion	82
 4. Atomisation de jets libres viscoélastiques.....	85
4.1. Introduction	88
4.2. Dispositif expérimental	88
4.2.1. Système d'injection	88
4.2.2. Liquides	89
4.2.3. Points de fonctionnement	90
4.2.4. Système d'imagerie	92
4.3. Mesures préliminaires	95
4.3.1. Diamètre et vitesse du jet.....	95
4.3.2. Longueurs d'ondes de perturbation du jet	96
4.3.3. Longueurs de rupture du jet.....	97
4.4. Mesure des distributions d'échelles 3D	98
4.4.1. Protocole de mesure.....	98
4.4.2. Influence de la hauteur de fenêtre d'analyse sur la distribution d'échelles	100
4.4.3. Influence du nombre d'images sur la distribution d'échelles	100
4.4.4. Volume moyen du jet dans la fenêtre d'analyse	101
4.5. Analyse multi-échelle.....	102
4.5.1. Surface spécifique	103
4.5.2. Mesure des échelles caractéristiques d_1 et d_4	104
4.5.3. Identification des régimes ligamentaires	105
4.6. Résultats.....	109
4.6.1. Temps de relaxation.....	109

4.6.2. Taux de déformation du régime élasto-capillaire	110
4.6.3. Viscosité élongationnelle terminale	112
4.6.4. Estimation de la longueur de ligament	112
5. Conclusion.....	115
Bibliographie.....	121
Annexes.....	129

1. Introduction



L'atomisation permet de fragmenter un volume de liquide en plusieurs volumes. La fragmentation peut être provoquée par diverses forces : mécaniques, aérodynamiques, ultrasoniques, électrostatiques, etc. Cette diversité a abouti à plusieurs concepts d'atomiseurs (Lefebvre 1989).

L'atomisation produit un écoulement diphasique dispersé nommé spray. Celui-ci intervient dans de nombreuses applications industrielles (injection automobile et aéronautique, irrigation, peinture, production de poudre alimentaire, ...) et domestiques (produits ménagers, parfums, inhalateurs médicaux, ...). L'optimisation de ces applications nécessite de maîtriser les caractéristiques du spray produit. Cette maîtrise implique une compréhension fine des processus d'atomisation mis en œuvre.

L'atomisation se déroule en plusieurs étapes successives et débute dès la sortie de l'atomiseur. Celui-ci produit un écoulement liquide libre. Une première étape, appelée atomisation primaire, voit des ligaments se former et se détacher de cet écoulement. Cette étape est influencée par les conditions d'injection, la nature du liquide à atomiser, la turbulence, etc... (Dumouchel 2008). Les ligaments liquides produits peuvent ensuite se réarranger en coalesçant ou se briser à nouveau pendant la phase d'atomisation secondaire. Cette phase prend fin lorsque les forces de tension de surface sont suffisamment importantes pour empêcher de nouvelles fragmentations, stabilisant le spray. Les gouttes du spray vont alors évoluer vers une forme sphérique.

Les ligaments font donc le lien entre l'écoulement libre produit par l'injecteur et le spray (Chigier (2005)). Grâce à une connaissance fine des mécanismes de production et de rupture de ces ligaments, le spray final peut être prédit. Toute la difficulté des recherches en atomisation et spray est d'obtenir cette connaissance, car l'atomisation résulte du couplage entre plusieurs phénomènes physiques. Parmi les principaux paramètres influents sur l'atomisation, on distingue la géométrie de l'atomiseur, la cinématique et les propriétés rhéologiques du fluide à atomiser.

La géométrie de l'atomiseur influe sur l'écoulement liquide libre produit, modifiant ainsi la production des ligaments et donc du spray. La figure 1 illustre l'influence de deux types d'atomiseurs, un injecteur cylindrique et un injecteur triple disque (Dumouchel et al. (2015)), sur un écoulement d'eau pour une pression d'injection identique. Avec l'injecteur cylindrique, l'écoulement formé est un jet qui va se déstabiliser sous l'effet des forces capillaires et produire des filaments puis des gouttes. Avec l'injecteur triple disque, l'écoulement formé est une nappe qui va se déstabiliser sous l'effet des perturbations internes au liquide et produire des ligaments puis des gouttes.

La cinématique de l'écoulement joue également un rôle important, car le mécanisme de rupture secondaire dépend directement de l'énergie cinétique initiale donnée au fluide (Dumouchel (2008)). La figure 2 présente deux situations d'atomisation pour un même injecteur triple disque à deux pressions d'injection différentes. Une plus grande pression d'injection augmente le niveau de turbulence dans le liquide, qui se traduit par la formation et le détachement d'un plus grand nombre de ligaments.

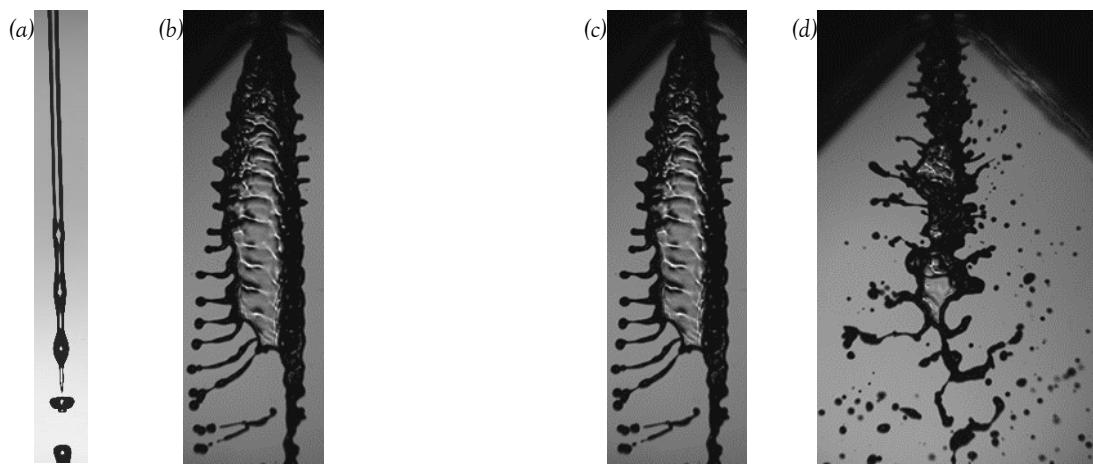


Figure 1. Ecoulement d'eau, pression d'injection 0,5 bar.
(a) injecteur cylindrique (b) injecteur triple disque

Figure 2. Ecoulement d'eau pour différentes pressions d'injections,
injecteur triple disque. (a) 0,5 bar (b) 1 bar.

Enfin, les propriétés rhéologiques du fluide vont influer sur les trois étapes de production du spray. La figure 3 montre deux séries d'expériences d'atomisation réalisées dans les mêmes conditions cinématiques, et avec le même injecteur mais avec deux fluides différents : un fluide Newtonien et un fluide non-Newtonien. Le fluide Newtonien est une solution aqueuse. Le fluide non-Newtonien se compose du fluide Newtonien, avec ajout d'une très faible concentration d'un polymère flexible de grand poids moléculaire, ce qui lui confère des propriétés viscoélastiques. Les effets sur l'atomisation sont remarquables. Dans le cas viscoélastique les structures ligamentaires sont plus nombreuses et plus persistantes. Les gouttes formées dans le spray final sont de plus grandes tailles (Christanti et Walker (2002), Tirtaatmadja et al. (2006), Mun et al. (1998), Goldin et al. (1972), Gordon et al. (1973)) (cette caractéristique n'est pas visible sur les images du cas viscoélastique montrées ici).

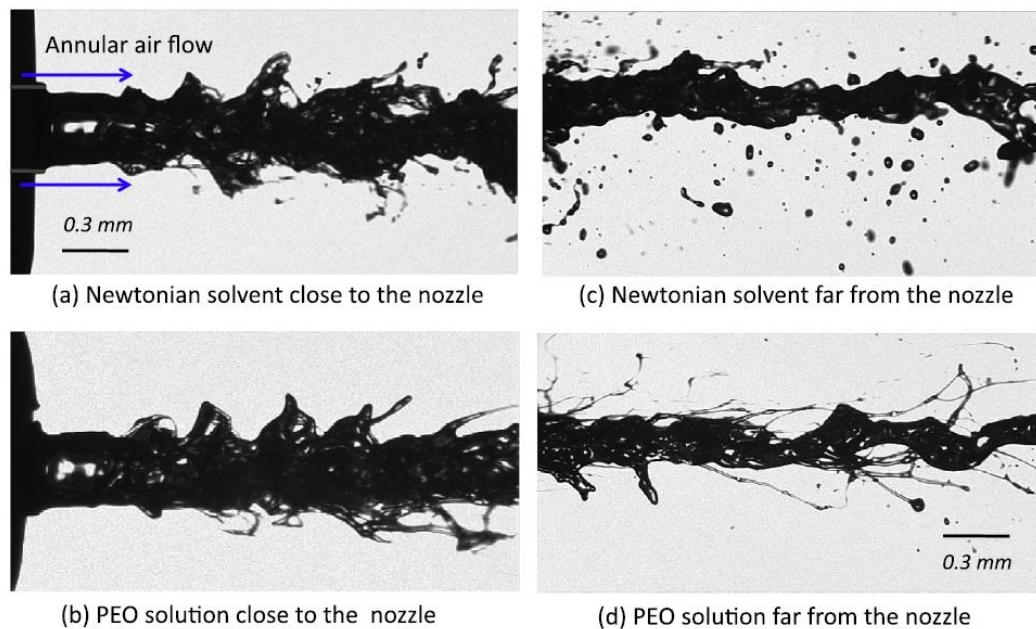


Figure 3. Visualisations d'un écoulement issus d'un injecteur coaxial (a) Solvant Newtonien proche de l'injecteur (b) Liquide viscoélastique (PEO 300 kg/mol, concentration massique 0,01% dans le solvant) proche de l'injecteur (c) Solvant Newtonien à 5 mm de l'injecteur (d) Liquide viscoélastique à 5 mm de l'injecteur. Keshavarz et al. (2015)

Dans le cas de jets soumis à l'instabilité capillaire, les expériences montrent le développement d'une déformation sinusoïdale qui va croître dans le temps, formant un ligament qui va ensuite se rompre pour former des gouttes, comme illustré en figure 4(a) pour un cas Newtonien. Dans le cas

viscoélastique (figure 4(b)), le développement de la déformation sinusoïdale produit un ligament cylindrique entre des structures sphériques, formant le motif de perles sur une ficelle typique pour ces liquides. Le ligament va s'amincir jusqu'à la rupture présentant une grande durée de vie comparée au cas Newtonien.

L'injection, à travers un injecteur cylindrique, donne une direction privilégiée à l'écoulement et à l'atomisation propre des ligaments, ce qui facilite leur étude. Ces ligaments sont observés dans le jet, car celui-ci est sujet à un écoulement élongationnel, dont une des causes est la capillarité qui draine le liquide du ligament vers les structures sphériques.

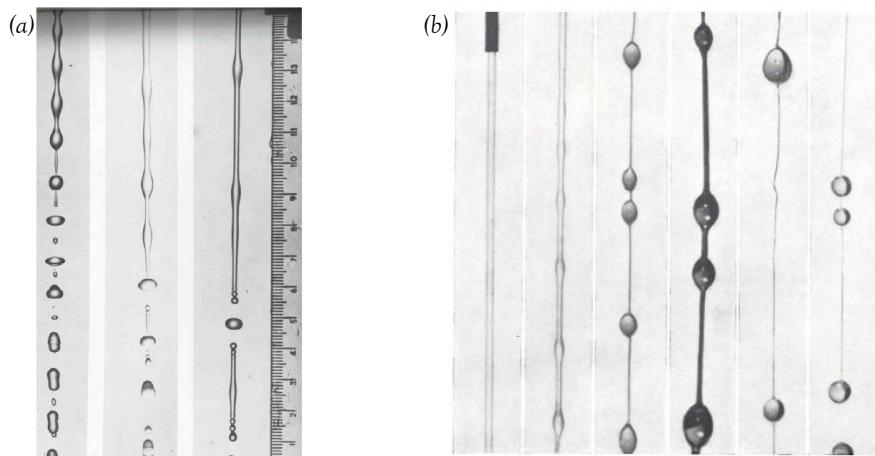


Figure 4. Jets cylindriques soumis à l'instabilité capillaire. (a) Liquide Newtonien, Rutland et Jameson (1971)
(b) Liquide viscoélastique, Goldin et al. (1969).

La dynamique d'amincissement des ligaments a été étudiée dans plusieurs situations d'écoulement élongationnel contrôlé (McKinley (2005), Ashgriz et al. (2011), Clasen et al. (2012)). Ces situations sont l'étirement d'un pont liquide entre deux plaques (Stelter et al. (2000), Stelter et al. (2002a), Clasen et al. (2012)), le détachement d'une goutte à la base d'un capillaire (Tirtaatmadja et al. (2006)) et le jet forcé (Schümmeter et al. (1983), Keshavarz et al. (2015)).

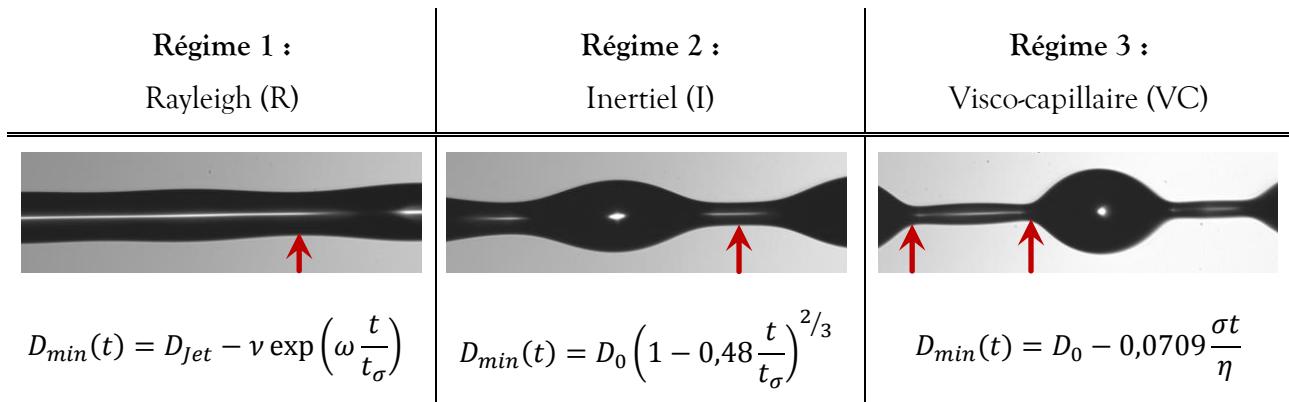


Figure 5. Régime d'amincissement du ligament pour un jet libre d'un liquide Newtonien. D_0 correspond à la plus petite valeur de diamètre mesurée sur le jet au début des régimes 2 et 3, $D_{min}(t)$ correspond à la plus petite valeur de diamètre mesurée sur le jet à un instant t , ω correspond au taux de croissance adimensionné de la perturbation, ν à l'amplitude initiale de la perturbation ($\nu \ll D_{jet}$).

La flèche rouge indique la position de D_{min} .

Dans le cas Newtonien, la dynamique d'amincissement des jets suit trois régimes : un premier régime inertio-capillaire (Rayleigh (1878)), suivi d'un second régime inertiel puis d'un régime visco-capillaire

(Clasen et al. (2012)). Le drainage du liquide vers les structures sphériques est contrôlé par l'inertie pour les deux premiers régimes, puis par la viscosité pour le troisième régime.

Le premier régime correspond au régime linéaire de l'instabilité de Rayleigh (Rayleigh (1878), pour lequel la croissance de la déformation de l'interface est exponentielle. Le temps caractéristique associé à ce régime est le temps capillaire $t_\sigma = (\rho D_{jet}^3 / (8\sigma))^{1/2}$ avec D_{jet} le diamètre du jet, ρ la densité volumique du liquide et σ la tension de surface. Le second régime inertiel est dû, à la croissance des modes non-linéaires. Il est lui aussi associé au temps capillaire du liquide et voit la dynamique d'amincissement s'accélérer. Le diamètre du ligament suit une loi de puissance d'exposant $2/3$. Le troisième régime voit la formation de pincements à la jonction entre le ligament et les structures sphériques. Dans ce cas, la dynamique d'amincissement de ces pincements est linéaire (Clasen et al. (2012)). Le temps caractéristique associé est le temps visqueux $t_\eta = \eta D_0 / \sigma$ défini à partir de la viscosité de cisaillement η . Ces trois régimes sont illustrés en figure 5.

Les études sur les jets viscoélastiques ont mis en évidence la formation d'une structure particulière dite de perles sur une ficelle. Il s'agit d'une structure à rapport de forme élevée où des gouttes (perles) sont reliées entre elles par un filament cylindrique (ficelle) (Goldin et al. (1969), Bhat et al. (2010)). Cette morphologie se forme à la fin du régime de croissance exponentielle de l'amplitude des déformations présentes sur le jet et capillairement instables (Charpentier et al. (2017)). Elle est associée à la phase de saturation de l'amplitude des déformations dûe à la croissance des modes non-linéaires.

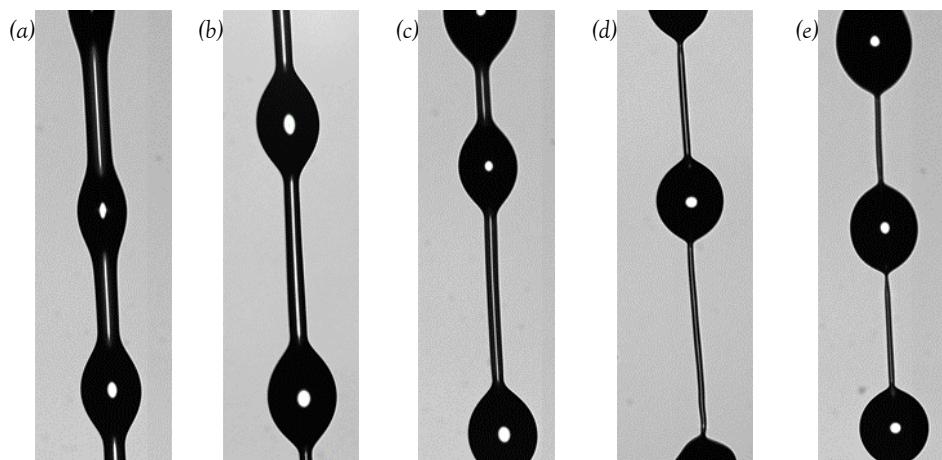


Figure 6. Evolution temporelle du motif de perles sur une ficelle visible sur un jet de liquide (a) 5,5 ms (b) 6,5 ms (c) 7,5 ms (d) 8,5 ms (e) 9,5 ms.

La figure 6 présente une structure de perles sur une ficelle observée sur un jet de solution viscoélastique à différents temps avant la rupture du jet. Cette structure évolue le long du jet : au départ les perles sont de forme ellipsoïdale et la ficelle est de diamètre comparable au diamètre initial du jet ; à la fin, les perles sont de forme sphérique et la ficelle présente un diamètre d'un ordre de grandeur inférieur. On notera que la définition propre de la structure de perles sur une ficelle est assez confuse dans la littérature et, on désignera par perles sur une ficelle, aussi bien la structure initiale que la structure finale, ou l'ensemble des structures intermédiaires observées sur le jet depuis sa déformation jusqu'à sa rupture.

Dans le cas du jet, les résultats ont montré que la dynamique d'amincissement de la ficelle suit trois régimes (Middleman (1965), Bousfield et al. (1986), Stelter et al. (2000)) : un régime inertio-capillaire,

un régime élasto-capillaire et un régime visco-capillaire. Pour ces trois régimes, c'est respectivement l'inertie, l'élasticité et la viscosité qui contrôle le drainage du liquide de la ficelle vers les perles.

Le premier régime correspond au régime linéaire de l'instabilité de Rayleigh (Middleman (1965), Bousfield et al. (1986)) et est identique à celui observé pour les liquides Newtoniens. Dans le deuxième régime, les molécules de polymère imposent leur dynamique élastique sous l'effet de l'étirement pour retrouver leur configuration initiale en forme de pelote (Stelter et al. (2000)). Le temps caractéristique de ce régime est le temps de relaxation t_r du liquide viscoélastique étiré. La dynamique d'amincissement est également exponentielle (Stelter et al. (2000), Entov et al. (1997)) et est différente du cas Newtonien. Quand les polymères ne peuvent plus être étirés, le fluide se comporte comme un fluide Newtonien avec une viscosité dite élongationnelle η_E . Cette viscosité caractérise la résistance du fluide à une élongation. Dans ce cas, la dynamique d'amincissement est linéaire (Stelter et al. (2000)). Le temps caractéristique associé est le temps visqueux $t_{\eta_E} = \eta_E D_0 / \sigma$ défini à partir de la viscosité élongationnelle. Ces trois régimes sont illustrés en figure 7.

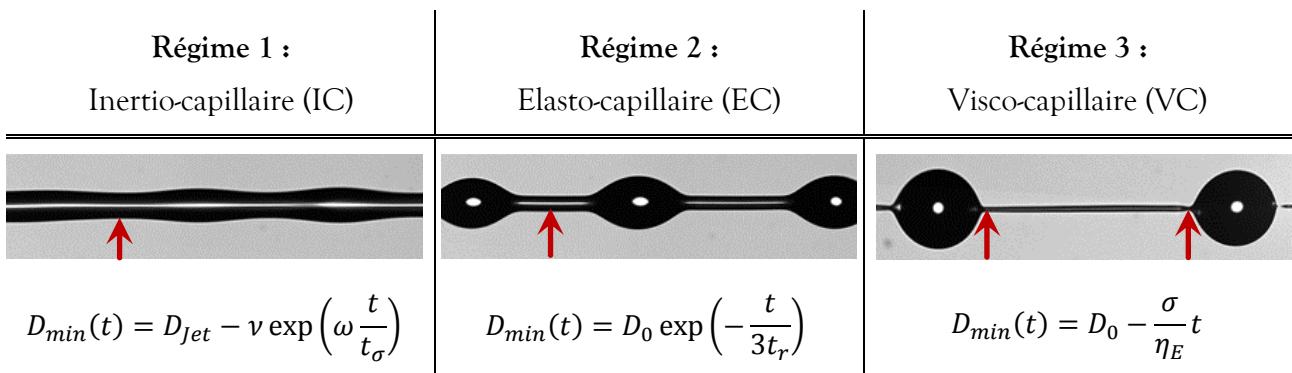


Figure 7. Régime d'amincissement de la ficelle pour un jet libre d'un liquide viscoélastique. D_0 correspond à la plus petite valeur de diamètre mesurée sur le jet au début des régimes 2 et 3, $D_{min}(t)$ correspond à la plus petite valeur de diamètre mesurée sur le jet à un instant t , ω correspond au taux de croissance adimensionné de la perturbation, v à l'amplitude initiale de la perturbation ($v \ll D_{jet}$).

La flèche rouge indique la position de D_{min} .

Le temps de relaxation t_r est une propriété physique constante du liquide viscoélastique. Il peut être estimé à partir du modèle de Zimm pour une solution de polymères diluée dans un bon solvant (Doi et al. (1986), Larson (2005)) :

$$t_r \sim \frac{\eta \eta_r M_v}{R T} \quad (1)$$

Avec η_r la viscosité intrinsèque du solvant, M_v la masse molaire du polymère, T la température absolue de la solution et R la constante des gaz parfaits. Un bon solvant indique qu'il y a attraction entre les chaînes de polymères et le solvant composant le liquide viscoélastique (Chevallier (2009)).

Expérimentalement, t_r peut être mesuré à l'aide d'un rhéomètre extensionnel basé sur la rupture d'un pont liquide entre deux plaques de type CaBER (Capillary Breakup Extensional Rheometry) (Stelter et al. (2000)). Il est obtenu en déterminant le temps caractéristique de l'évolution temporelle du diamètre mesuré au centre du filament formé entre les deux plaques dans le régime élasto-capillaire. Cette méthode s'appuie sur une mesure locale du diamètre réalisée par imagerie ou signal laser. Elle est applicable pour des solutions ayant une viscosité au moins supérieure à 10 fois celle de l'eau. Pour les solutions plus mobiles, la méthode n'est pas fiable du fait de contraintes mécaniques (limite de vitesse

d'étirement des plateaux et présence d'oscillations parasites) et physiques (temps de relaxation faible) (Rodd et al. (2004), Clasen et al. (2012)). Les limites d'utilisation du CaBER ont été repoussées à l'aide d'une méthode de rétraction lente «slow retraction method» (Campo-Deano et al. (2010)), qui consiste à étirer lentement le pont liquide en deçà de son point de rupture capillaire puis à laisser le filament se relaxer avant de poursuivre l'étirement pour déstabiliser le filament. Cette modification du protocole de mesure permet de réduire les oscillations d'origine inertielle.

Pour les solutions très mobiles (viscosités proches de l'eau), une méthode basée sur la rupture d'un jet forcé a été développée. Il s'agit du Rayleigh Ohnesorge Jetting Extensional Rheometry (ROJER) (Keshavarz et al. (2015)). La perturbation imposée au jet permet un suivi temporel de la dynamique d'amincissement de la ficelle par imagerie haute définition et, comme dans le CaBER, d'identifier le régime élasto-capillaire à partir duquel le temps de relaxation peut être déterminé. Cette méthode s'inscrit dans la continuité des travaux pionniers de Schümmer et Tebel (1983) qui ont développé la première version de ce rhéomètre. La production et l'étude d'un jet forcé nécessite un soin particulier pour synchroniser le diagnostic optique avec la perturbation imposée (Keshavarz et al. (2015)). La perturbation est produite soit de manière mécanique, acoustique ou électromagnétique. Une seule image par position est suffisante pour obtenir une mesure du diamètre à un instant donné. Dans les travaux de Schümmer et Tebel (1983), il a été observé une dépendance du temps de relaxation aux conditions d'injection ; cette dépendance n'ayant pas été observée par les auteurs du ROJER (Keshavarz et al. (2015)).

L'utilisation des jets impose une phase d'injection. Cette phase d'injection présente un écoulement élongationnel dans lequel les polymères peuvent se fracturer si le taux d'étirement de la solution dépasse une valeur critique (Nguyen et al. (1988), Keller et al. (1985), Merrill et al. (1980)). Au-delà de cette valeur critique, les polymères ne sont pas tous fracturés : le taux de fracture des polymères augmente avec l'augmentation du taux d'étirement. Il a également été montré que le taux d'étirement critique dépend de la masse molaire du polymère : il diminue lorsque la masse molaire est augmentée. Cette dégradation mécanique provoque une modification de la distribution de masse molaire du polymère qui modifie les propriétés rhéologiques du liquide viscoélastique.

Les images présentées dans cette introduction montrent le caractère multi-formes et multi-échelles des processus d'atomisation. Cette diversité de formes et d'échelles nécessite des outils spécifiques d'analyse pour étudier ces mécanismes dans leur ensemble, c'est-à-dire depuis l'écoulement éjecté jusqu'au spray. Habituellement, les grandeurs mesurées dans l'écoulement sont : l'angle d'ouverture à la sortie de l'injecteur et la vitesse locale ; et dans le spray : les distributions de tailles et de vitesses de gouttes (Dumouchel (2008)). Pour décrire le processus d'atomisation de manière globale, un outil d'analyse multi-échelles a récemment été développé (Dumouchel (2017)).

La description multi-échelles s'applique à un système liquide composé d'un ou plusieurs éléments sujets à déformation. Ce système est généré à partir d'expériences, de simulations numériques ou de simulations théoriques.

La description repose sur la notion d'échelle (Dumouchel et al. (2008), Dumouchel (2017)). L'échelle correspond au champ de vision du système depuis l'interface. Cette échelle d'observation est augmentée jusqu'à couvrir tout le système étudié. Cette procédure permet de mesurer une distribution d'échelles

normalisée correspondant à la fraction du champ de vision total pour chaque classe d'échelles. Son analyse consiste à étudier la dynamique de cette distribution d'échelles (Dumouchel et al. (2008)).

L'analyse multi-échelles a été utilisée pour étudier plusieurs situations expérimentales (nappes turbulentes issues d'injecteur triple disque, jets essences turbulents (Dumouchel et al. (2015), Vu et al. (2018)) et numériques (instabilité capillaire d'un liquide Newtonien, jets diesel turbulents) (Dumouchel et al. (2016), Dumouchel (2017)). Les résultats montrent que les mécanismes physiques intervenant lors de l'atomisation sont identifiables via l'étude de la distribution d'échelles (Dumouchel et al. (2017)).

Appliquée à l'étude numérique d'un ligament liquide Newtonien soumis à l'instabilité capillaire, deux échelles particulières ont été identifiées (Dumouchel et al. (2016), Dumouchel et al. (2017)). Ces échelles sont caractéristiques des deux structures principales présentes sur le ligament liquide : la structure sphérique et la structure ligamentaire. L'échelle représentative de la structure ligamentaire suit trois régimes successifs d'amincissement en accord avec la littérature (Ashgriz et al. (2011)) : deux régimes inertio-capillaires (comportement exponentiel et comportement en loi de puissance), suivis d'un régime visco-capillaire (comportement linéaire). Ces régimes ont été observés expérimentalement pour des écoulements élongationnels contrôlés en mesurant l'évolution temporelle du diamètre au centre du ligament.

Ces résultats permettent d'affirmer que la dynamique de l'échelle représentative de la structure ligamentaire est caractéristique de la dynamique d'amincissement du ligament.

La présente thèse propose d'étudier expérimentalement l'atomisation de jets libres de solutions viscoélastiques mobiles pouvant être sujets à de la dégradation. Ces jets sont visualisés par imagerie haute définition et analysés à l'aide de la description multi-échelles. L'objectif est double : technique et scientifique. L'objectif technique consiste à développer l'analyse multi-échelle au cas 3D qui donne accès à la surface spécifique (Evers (1994)) d'un système liquide ; une mesure fondamentale pour caractériser un processus d'atomisation. L'objectif scientifique est d'identifier les régimes d'amincissement de la ficelle dans les structures de perles sur une ficelle observées sur le jet et de mesurer le temps de relaxation de la solution viscoélastique mobile.

Le défi principal de ce travail est la mise en place d'un protocole expérimental pour étudier un jet libre via la description multi-échelles qui, du fait des fluctuations du jet libre, nécessite un traitement statistique. En effet, bien que la production d'un jet libre ne requière pas de matériel particulier par rapport aux jets forcés, un nombre suffisant d'images est nécessaire par position afin d'obtenir une représentation statistique du jet à cette position et être ainsi en mesure de déterminer la dynamique d'évolution de la ficelle.

Le manuscrit est organisé en trois parties.

La première partie présente la définition des distributions d'échelles d'un système liquide. Cette définition est appliquée analytiquement à plusieurs systèmes de référence (des ensembles de sphères et des ensembles de cylindres), ce qui permet d'introduire la notion de systèmes équivalents. Deux modèles du motif de perles sur une ficelle sont présentés, qui diffèrent au niveau du raccordement entre la perle et la ficelle et pour lesquels les distributions d'échelles sont calculées. Enfin, l'évolution

temporelle d'un ensemble de ficelles s'amincissant est étudiée. Cette partie constitue la base théorique de l'analyse multi-échelles pour étudier la dynamique de structures de perles sur une ficelle.

La seconde partie présente et compare plusieurs méthodes de détections sub-pixels d'interface à partir d'images faiblement résolues spatialement. Une technique basée sur la méthode de Monte-Carlo (Metropolis et al. (1949)) est proposée pour calculer la distribution d'échelles 3D sur des images segmentées. Les deux précédents développements sont ensuite appliqués à l'analyse de ligaments issus de nappes turbulentes. Cette étape sert de validation au protocole mis en place pour des situations d'atomisation plus complexes et où la résolution des images est limitante. Cette partie fait le lien entre la description continue théorique de l'outil multi-échelles et son application discrète sur des images.

La dernière partie présente l'étude expérimentale de jets libres de liquides viscoélastiques par imagerie haute définition et son analyse multi-échelles. Le dispositif expérimental ainsi que les liquides viscoélastiques utilisés sont présentés en détail. Les paramètres variés dans cette étude sont : la concentration en polymère, la vitesse d'injection et les dimensions de l'injecteur. Les images de jets obtenues sont segmentées et des mesures préliminaires sur le jet sont réalisées : diamètre de jets, vitesse débitante, distribution de longueur d'onde de perturbation et distribution de longueur de rupture. La méthode d'analyse multi-échelle est ensuite appliquée à ce cas d'étude. Un protocole d'identification des régimes d'amincissements de la ficelle est défini permettant d'extraire les propriétés élongationnelles de la solution. L'évolution de ces propriétés en fonction des variables est discutée. Cette partie permet d'appliquer l'outil de description multi-échelle à un cas d'atomisation non contrôlé et de démontrer l'intérêt de cette technique pour améliorer la compréhension physique de l'atomisation.

2. Description multi-échelles



Nomenclature

Grandeur	Unité	Signification
C_n^i	[-]	Coefficient binomial
D	[m]	Diamètre d'un objet
D_{ab}	[m]	Diamètre moyen d'ordre $a+b$ de la distribution f_0
D_c	[m]	Diamètre d'un cylindre
D_M	[m]	Diamètre du plus grand objet d'un ensemble de cylindres
D_{max}	[m]	Diamètre du plus grand objet d'un ensemble de m objets
D_s	[m]	Diamètre d'une sphère
D_{10}	[m]	Diamètre moyen de la distribution f_0
e_2	[m ⁻¹]	Distribution d'échelles 2D
e_3	[m ⁻¹]	Distribution d'échelles 3D
$F_n(D)$	[-]	Distribution cumulative de diamètres d'ordre n
$f_n(D)$	[m ⁻¹]	Distribution de diamètres d'ordre n
f_{0c}	[m ⁻¹]	Distribution de diamètres de cylindres équivalente
$H(D)$	[-]	Distribution de Heaviside en D
$L(d)$	[m]	Périmètre d'un objet après érosion à l'échelle d
L_c	[m]	Longueur d'un cylindre
m	[-]	Nombre d'objets
m_D	[-]	Nombre d'objets de diamètre inférieur ou égal à D
R_1	[m]	Rayon de la perle du modèle de perles sur une ficelle avec raccordement (2D)
R_2	[m]	Rayon du raccordement du modèle de perles sur une ficelle avec raccordement (2D)
$S(d)$	[m ²]	Surface d'un objet après érosion à l'échelle d (2D)
$S_i(d)$	[m ²]	Surface d'un objet parmi m après érosion à l'échelle d (2D)
S_c	[m ²]	Surface totale du cylindre du modèle de perles sur une ficelle (2D)
S_s	[m ²]	Surface totale de la sphère du modèle de perles sur une ficelle (2D)
S_T	[m ²]	Surface totale d'un objet (2D)
S_{T_i}	[m ²]	Surface totale d'un objet parmi m (2D)
$S_{3D}(d)$	[m ²]	Surface d'un objet après érosion à l'échelle d (3D)
$S_1(d)$	[m]	Surface de la perle du modèle de perles sur une ficelle avec raccordement après érosion à l'échelle d (2D)
$S_2(d)$	[m]	Surface du raccordement du modèle de perles sur une ficelle avec raccordement après érosion à l'échelle d (2D)
$S_3(d)$	[m]	Surface du cylindre du modèle de perles sur une ficelle avec raccordement après érosion à l'échelle d (2D)
t	[s]	Temps
t_r	[s]	Temps de relaxation d'une solution polymérique
$V(d)$	[m ³]	Volume d'un objet après érosion à l'échelle d
V_c	[m ³]	Volume total du cylindre du modèle de perles sur une ficelle
V_s	[m ³]	Volume total de la sphère du modèle de perles sur une ficelle
V_T	[m ³]	Volume total d'un objet
α_c	[-]	Fraction volumique du cylindre du modèle de perles sur une ficelle
β_c	[-]	Fraction surfacique du cylindre du modèle de perles sur une ficelle
β_i	[-]	Fraction surfacique d'un objet parmi m
Γ	[-]	Fonction gamma
$\delta(D)$	[-]	Distribution de Dirac en D
$\dot{\varepsilon}$	[s ⁻¹]	Taux de déformation d'un cylindre

2.1. Introduction

Cette partie présente les outils théoriques issus de la description multi-échelle ainsi que leurs interprétations. Les définitions des distributions de diamètres et des distributions d'échelles, reprises de Ngo (2013), sont présentées et appliquées à plusieurs systèmes accessibles analytiquement. Parmi ces systèmes, les ensembles de sphères et les ensembles de cylindres sont étudiés. Ensuite, deux modélisations du motif de perles sur une ficelle sont présentées : un premier système composé d'une sphère et d'un cylindre non raccordés, puis un second avec la sphère et le cylindre raccordés entre eux. Enfin, l'évolution temporelle d'un ensemble de cylindres amincissant est étudiée : on détermine le taux d'amincisement et des échelles caractéristiques à partir de la distribution d'échelles de cet ensemble.

2.2. Distributions de diamètres et distributions d'échelles

Les définitions présentées dans cette partie sont détaillées dans Ngo (2013).

2.2.1. Distribution de diamètres

Soit un ensemble de m objets dont chacun est caractérisé par une longueur caractéristique appelée diamètre et notée D . L'ensemble de ces diamètres est représenté par une distribution cumulative F_0 : $F_0(D)$ représente la fraction numérique m_D/m où m_D est le nombre des objets dont le diamètre est inférieur ou égal à D . $F_0(D)$ est une distribution monotone croissante évoluant de 0 et 1 et sans dimension. On définit également la distribution numérique de diamètre notée $f_0(D)$ par les relations suivantes :

$$f_0(D) = \frac{dF_0(D)}{dD} \Leftrightarrow F_0(D) = \int_{x=0}^{x=D} f_0(x)dx \quad (2)$$

$f_0(D)$ a pour dimension l'inverse d'une longueur et est une distribution normalisée : $\int_{x=0}^{x=+\infty} f_0(x)dx = 1$. $f_0(D)$ est une PDF (Probability Density Function), ce qui implique $\int_{x=D_1}^{x=D_2} f_0(x)dx$ est la probabilité que le diamètre d'un objet soit égal au nombre relatif d'objets dont le diamètre appartient à l'intervalle $[D_1 ; D_2]$.

L'ensemble d'objets est caractérisé par des diamètres moyens D_{ab} , où la somme des indices $a+b$ est appelée ordre du diamètre moyen (Mugele et al. (1951)). Ces diamètres sont des rapports de moments de différents ordres de la distribution f_0 :

$$(D_{ab})^{a-b} = \frac{\int_{x=0}^{x=+\infty} f_0(x)x^a dx}{\int_{x=0}^{x=+\infty} f_0(x)x^b dx} \quad (3)$$

Le diamètre D_{10} correspond au diamètre moyen de la distribution numérique f_0 .

2.2.2. Distribution d'échelles

La description multi-échelles est basée sur la mesure de la distribution d'échelles cumulative $E_n(d)$ où la variable d est l'échelle d'observation et n indique la dimension des objets étudiés (Dumouchel (2017)). Pour un système liquide donné, $E_n(d)$ mesure la portion de ce système qui a été érodée à l'échelle d . $E_n(d)$ est une distribution normalisée, impliquant qu'elle croît de façon monotone de 0 à 1.

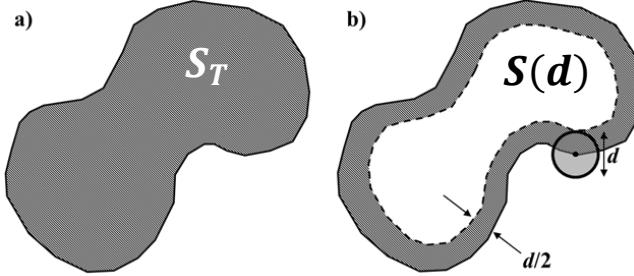


Figure 8. Illustration du mécanisme d'érosion. (a) Image 2D d'un système liquide de surface totale S_T (b) Système 2D érodé à l'échelle d .

Considérons le système 2D ($n = 2$) illustré en figure 8(a). Ce système est défini par sa surface totale S_T . L'érosion consiste à glisser le long de sa frontière un disque de diamètre d et à retirer la surface ayant été couverte durant le déplacement (surface grise de la figure 8(b)). La surface blanche restante, notée $S(d)$, correspond à la surface du système après érosion. Le diamètre d du disque est varié de 0 à l'infini, permettant de définir la distribution d'échelles cumulative surfacique $E_2(d)$:

$$E_2(d) = \frac{S_T - S(d)}{S_T} \quad (4)$$

La généralisation de l'Eq.(4) pour un système 3D ($n = 3$) est immédiate : il est caractérisé par son volume total V_T et l'érosion est effectuée avec une sphère de diamètre d (Dumouchel (2017)). On note $V(d)$ le volume du système érodé et la distribution d'échelles cumulative volumique $E_3(d)$ est définie par :

$$E_3(d) = \frac{V_T - V(d)}{V_T} \quad (5)$$

L'analyse fait usage de la dérivée première de $E_n(d)$ par rapport à l'échelle d , introduisant la distribution d'échelles $e_n(d)$:

$$e_2(d) = \frac{dE_2(d)}{dd} = \frac{L(d)}{2S_T} \quad (6)$$

$$e_3(d) = \frac{dE_3(d)}{dd} = \frac{S_{3D}(d)}{2V_T} \quad (7)$$

Les distributions d'échelles $e_n(d)$ sont des fonctions normalisées ($\int_0^\infty e_n(d)dd = 1$) et présentent une décroissance monotone. Les distributions d'échelles ont pour dimension l'inverse d'une longueur (Dumouchel (2017)). $e_2(d)$ est égale au rapport du périmètre $L(d)$ du système après érosion à l'échelle d (ligne pointillée en figure 8(b)) sur deux fois S_T (Eq.(6)). Pour $d = 0$, $e_2(d)$ est maximum et est proportionnelle à la longueur d'interface par unité de surface, appelée longueur spécifique. De même, $e_3(d)$ est égale au rapport de la surface $S_{3D}(d)$ du système après érosion à l'échelle d sur deux fois V_T .

(Eq.(7)). Pour $d = 0$, $e_3(d)$ est maximum et est proportionnelle à la surface par unité de volume, appelée surface spécifique Evers (1994).

Pour un système composé de m objets, chacun étant défini par sa surface totale S_{T_i} et sa surface $S_i(d)$ après érosion à l'échelle d , $E_2(d)$ s'écrit :

$$E_2(d) = \frac{S_T - S(d)}{S_T} = \frac{\sum_{i=1}^m S_{T_i} - \sum_{i=1}^m S_i(d)}{\sum_{i=1}^m S_{T_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{S_{T_i} - S_i(d)}{\sum_{j=1}^m S_{T_j}} = \sum_{i=1}^m \frac{S_{T_i}}{\sum_{j=1}^m S_{T_j}} \frac{S_{T_i} - S_i(d)}{S_{T_i}} \quad (8)$$

En posant $\beta_i = S_{T_i} / \sum_{j=1}^m S_{T_j}$ la fraction surfacique du $i^{\text{ème}}$ objet par rapport à la surface S_T du système, la distribution cumulative d'échelles $E_2(d)$ s'écrit :

$$E_2(d) = \sum_{i=1}^m \beta_i E_{2i}(d) \quad (9)$$

Avec $E_{2i}(d)$ la distribution d'échelles cumulative du $i^{\text{ème}}$ objet. Le calcul de la distribution d'échelles surfacique $e_2(d)$ du système donne :

$$e_2(d) = \frac{dE_2(d)}{dd} = \frac{d}{dd} \left(\sum_{i=1}^m \beta_i E_{2i}(d) \right) = \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{dE_{2i}(d)}{dd} = \sum_{i=1}^m \beta_i e_{2i}(d) \quad (10)$$

En 2D, la distribution d'échelles s'écrit comme la somme des distributions d'échelles individuelles de chacun des objets pondérées par la fraction surfacique de chacun d'eux. Dans le cas 3D, les distributions d'échelles s'écrivent sous la même forme avec la fraction volumique comme coefficient pondérateur.

2.3. Applications de référence

2.3.1. Ensembles de sphères

Cas général

On considère un ensemble de sphères dont le diamètre D est distribué suivant $f_0(D)$. Est associée à $f_0(D)$ la distribution cumulative $F_0(D)$ telle que donnée par l'Eq.(2) et correspondant à la fraction numérique des sphères dont le diamètre est inférieur ou égal à D . On définit également les distributions $f_n(D)$ ($n = 1, 2, 3$) à partir de $f_0(D)$ pondérée par une grandeur caractéristique (Ngo (2013)). Pour $n=1$, cette grandeur est le diamètre des sphères ($\propto D^1$), pour $n=2$ il s'agit de la surface des sphères ($\propto D^2$) et pour $n=3$ c'est le volume des sphères ($\propto D^3$). Avec la définition des diamètres moyens donnée par l'Eq.(3), les relations entre les différentes distributions $f_n(D)$ ont été établies (Ngo (2013)) :

$$f_n(D) = \left(\frac{D}{D_{n,k}} \right)^{n-k} f_k(D), \quad n \text{ et } k = 0, 1, 2, 3 \quad (11)$$

Comme $f_0(D)$, ces distributions $f_n(D)$ sont normalisées : $\int_{x=0}^{x=+\infty} f_n(x) dx = 1$, et ont pour dimension l'inverse d'une longueur. On définit les distributions cumulatives $F_n(D)$ à partir de $f_n(D)$ en utilisant l'Eq.(2) :

$$f_n(D) = \frac{dF_n(D)}{dD} \Leftrightarrow F_n(D) = \int_{x=0}^{x=D} f_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (12)$$

$F_n(D)$ sont des distributions monotones croissantes évoluant de 0 et 1 et sans dimension. Les distributions $F_1(D)$, $F_2(D)$ et $F_3(D)$ représentent respectivement les fractions linéique, surfacique et volumique des sphères dont le diamètre est inférieur ou égal à D .

Les distributions d'échelles d'un ensemble de sphères s'écrivent en fonction des distributions cumulatives $F_n(D)$ (Ngo (2013)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n(d) = F_n(d) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i \left(\frac{d}{D_{n,n-i}} \right)^i (1 - F_{n-i}(d)) \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_n(d) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i \frac{i d^{i-1}}{D_{n,n-i}^i} (1 - F_{n-i}(d)) \end{array} \right. \quad (14)$$

Avec C_n^i le coefficient binomial : $C_n^i = n!/(i!(n-i)!)$. La distribution cumulative d'échelles $E_n(d)$ présente deux parties : la première ($F_n(d)$) correspond à la contribution des sphères dont le diamètre D est inférieur ou égal à d ; la seconde correspond à la contribution des sphères dont le diamètre D est supérieur à d . A partir de l'Eq.(14), on écrit la distribution surfacique d'échelles d'un ensemble de sphères :

$$e_2(d) = \frac{2}{D_{21}} (1 - F_1(d)) - \frac{2d}{D_{20}^2} (1 - F_0(d)) \quad (15)$$

En utilisant les Eqs.(3), (11) et (15), on exprime les dérivées successives de $e_2(d)$ par rapport à l'échelle d :

$$e'_2(d) = \frac{de_2(d)}{dd} = -\frac{2}{D_{20}^2} (1 - F_0(d)) \quad (16)$$

$$e''_2(d) = \frac{de'_2(d)}{dd} = \frac{2}{D_{20}^2} f_0(d) \quad (17)$$

On remarque que $e''_2(d)$ est proportionnelle à $f_0(d)$. De même en 3D, on peut exprimer la distribution d'échelles volumique et ses dérivées successives :

$$e_3(d) = \frac{3}{D_{32}} (1 - F_2(d)) - \frac{6d}{D_{31}^2} (1 - F_1(d)) + \frac{3d^2}{D_{30}^3} (1 - F_0(d)) \quad (18)$$

$$e'_3(d) = -\frac{6}{D_{31}^2} (1 - F_1(d)) + \frac{6d}{D_{30}^3} (1 - F_0(d)) \quad (19)$$

$$e''_3(d) = \frac{6}{D_{30}^3} (1 - F_0(d)) \quad (20)$$

$$e'''_3(d) = -\frac{6}{D_{30}^3} f_0(d) \quad (21)$$

On remarque que $e'''_3(d)$ est proportionnelle à $f_0(d)$.

Sphère unique

Une sphère seule est caractérisée par son diamètre D_s , comme présenté en figure 9. La distribution de diamètre $f_0(D)$ est égale à une distribution de Dirac δ : $f_0(D) = \delta(D - D_s)$. Dans ce cas tous les diamètres moyens $D_{a,b}$ sont égaux au diamètre de la sphère. Il en résulte que les différentes distributions de diamètres $f_n(D)$ sont toutes égales à $f_0(D)$, impliquant que $F_n(D) = F_0(D) = H(D - D_s)$ où H est la distribution Heaviside (pour $D = D_s$, $H = 1$). A partir de ces propriétés, l'Eq.(14) devient :

$$e_n(d) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i \frac{i d^{i-1}}{D_s^i} (1 - F_0(d)) = (1 - F_0(d)) \frac{n}{D_s} \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} \left(-\frac{d}{D_s}\right)^{i-1}$$

$$\Leftrightarrow e_n(d) = (1 - F_0(d)) \frac{n}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right)^{n-1} \quad (22)$$

Ce qui donne finalement :

$$\text{Pour } d \leq D_s, \quad e_n(d) = \frac{n}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right)^{n-1}, \quad n = 2, 3 \quad (23)$$

$$\text{Pour } d > D_s, \quad e_n(d) = 0 \quad (24)$$

Les distributions d'échelles $e_n(d)$ pour une sphère sont illustrées en figure 10. $e_2(d)$ est linéaire, comme décrit par l'Eq.(23), et la longueur spécifique est inversement proportionnelle à son diamètre : $e_2(0) = 2/D_s$. $e_3(d)$ est quant à elle quadratique et la surface spécifique $e_3(0)$ est égale à $3/D_s$.

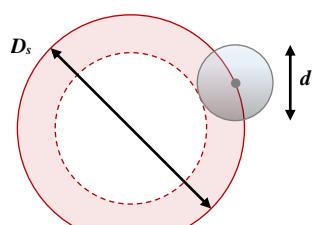


Figure 9. Erosion d'une sphère de diamètre D_s .

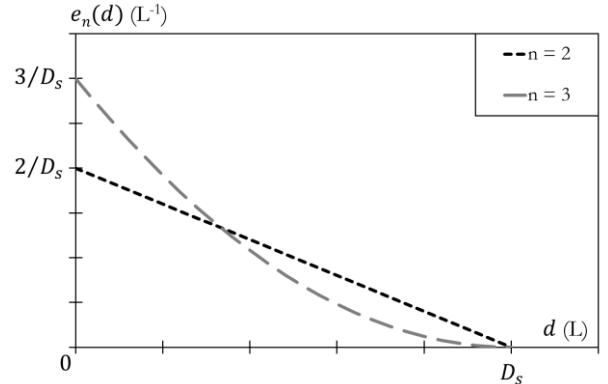


Figure 10. Distribution d'échelles pour une sphère seule.

Ensemble équiprobable de sphères

Soit un ensemble de sphères présentant une distribution de diamètre $f_0(D)$ équiprobable avec un diamètre maximum D_{max} , comme illustré en figure 11(a). Dans ce cas, en utilisant l'Eq.(3), les diamètres moyens $D_{a,b}$ s'écrivent : $D_{a,b}^{a-b} = (b+1)D_{a,b}^{a-b}/(a+1)$. Pour $D < D_{max}$ et en utilisant le résultat de l'Eq. (11), il en résulte que les différentes distributions de diamètres $f_n(D)$ s'écrivent : $f_n(D) = (n+1)D^n/D_{max}^{n+1}$, impliquant que $F_n(D) = (D/D_{max})^{n+1}$. A partir de ces expressions, l'Eq.(14) devient pour $d < D_{max}$:

$$\begin{aligned}
 e_n(d) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} C_n^i \frac{i d^{i-1}}{D_{max}^i} \frac{n+1}{n-i+1} \left(1 - \left(\frac{d}{D_{max}} \right)^{n-i+1} \right) \\
 &= \frac{n+1}{D_{max}} \sum_{i=1}^n C_n^{i-1} \left(\frac{-d}{D_s} \right)^{i-1} \left(1 - \left(\frac{d}{D_{max}} \right)^{n-i+1} \right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Ce qui donne (Ngo (2013)) :

$$e_n(d) = \frac{n+1}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}} \right)^n, \quad n = 2, 3 \tag{26}$$

La figure 11(b) présente les distributions d'échelles $e_n(d)$ correspondant à l'Eq.(26). En comparant avec la figure 10, on note que $e_2(d)$ de l'ensemble équiprobable de sphères est égale à $e_3(d)$ d'une seule sphère si le diamètre de la plus grande sphère de l'ensemble équiprobable est égal à D_s .

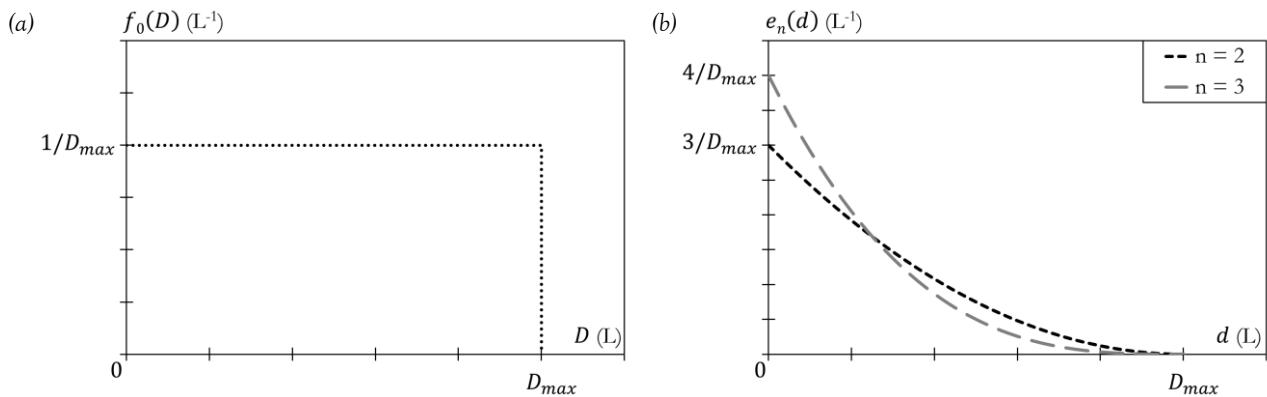


Figure 11. Ensemble équiprobable de sphères. (a) Distribution de diamètres $f_0(D)$ (b) Distributions d'échelles correspondantes.

2.3.2. Ensembles de cylindres

Cas général

On considère ici un ensemble de cylindres. Le cylindre est de hauteur unitaire et défini par un diamètre D . Notre intérêt se porte sur le volume délimité par cette forme ainsi que sur sa seule surface latérale (Ngo (2013)), définissant le cylindre comme un système non-fermé. Ce système non-fermé sert à représenter les structures ligamentaires présentes dans les processus d'atomisation. Pour un tel cylindre, l'opération d'érosion s'effectue (uniquement sur la surface latérale) comme illustré en figure 12.

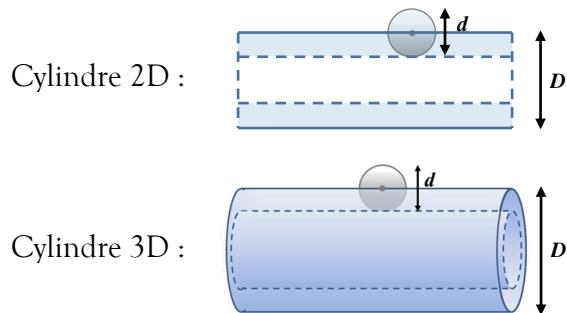


Figure 12. Erosion d'un cylindre de hauteur unitaire et de diamètre D .

Soit un ensemble de cylindres dont le diamètre D est distribué suivant $f_0(D)$. Comme pour l'ensemble de sphères, on associe à $f_0(D)$ la distribution cumulative $F_0(D)$ telle que donnée par l'Eq.(2) ainsi que les distributions cumulatives $F_n(D)$. Contrairement à l'ensemble de sphères, la surface des cylindres est proportionnelle à D et le volume à D^2 , impliquant que $F_1(D) = F_2(D)$. On définit également les distributions $f_n(D)$ à partir des cumulatives $F_n(D)$ en utilisant l'Eq.(2) :

$$f_n(D) = \frac{dF_n(D)}{dD} \Leftrightarrow F_n(D) = \int_{x=0}^{x=D} f_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (27)$$

Ces distributions $f_n(D)$ sont normalisées : $\int_{x=0}^{x=+\infty} f_n(x)dx = 1$, et ont pour dimension l'inverse d'une longueur. Avec la définition des diamètres moyens donnée par l'Eq.(3), les relations entre les différentes distributions $f_n(D)$ ont été établies (Ngo (2013)) :

$$\begin{cases} f_n(D) = \left(\frac{D}{D_{n,0}}\right)^n f_0(D), & n = 0, 1 \\ f_n(D) = \left(\frac{D}{D_{n-1,0}}\right)^{n-1} f_0(D), & n = 2, 3 \end{cases} \quad (28)$$

$$f_2(D) = f_1(D)$$

Les distributions d'échelles d'un ensemble de cylindres s'écrivent en fonction des distributions cumulatives $F_n(D)$ (Ngo (2013)) :

$$E_n(d) = F_n(d) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} C_{n-1}^i \left(\frac{d}{D_{n-1,n-1-i}}\right)^i (1 - F_{n-1-i}(d)) \quad (29)$$

$$e_n(d) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} C_{n-1}^i \frac{id^{i-1}}{D_{n-1,n-1-i}^i} (1 - F_{n-1-i}(d)) \quad (30)$$

La distribution cumulative d'échelles $E_n(d)$ présente deux parties : la première ($F_n(d)$) correspond à la contribution des cylindres dont le diamètre D est inférieur ou égal à d ; la seconde correspond à la contribution des cylindres dont le diamètre D est supérieur à d . A partir de l'Eq.(30), on écrit la distribution d'échelles surfaciques d'un ensemble de cylindres :

$$e_2(d) = \frac{1}{D_{10}} (1 - F_0(d)) \quad (31)$$

A partir des Eqs.(3), (28) et (31), on détermine les dérivées successives de $e_2(d)$ par rapport à l'échelle d :

$$e'_2(d) = -\frac{1}{D_{10}} f_0(d) \quad (32)$$

On remarque que $e'_2(d)$ est proportionnelle à $f_0(d)$. En 3D, la distribution d'échelles volumique ainsi que ses dérivées successives s'écrivent :

$$e_3(d) = \frac{2}{D_{21}} (1 - F_1(d)) - \frac{2d}{D_{20}^2} (1 - F_0(d)) \quad (33)$$

$$e'_3(d) = -\frac{2}{D_{20}^2} (1 - F_0(d)) \quad (34)$$

$$e''_3(d) = \frac{2}{D_{20}^2} f_0(d) \quad (35)$$

On remarque que $e''_3(d)$ est proportionnelle à $f_0(d)$.

Cylindre unique

Un cylindre seul est caractérisé par son diamètre D_c . La distribution de diamètre $f_0(D)$ est égale à une distribution de Dirac δ : $f_0(D) = \delta(D - D_c)$ et tous les diamètres moyens $D_{a,b}$ sont égaux au diamètre du cylindre. Il en résulte que les distributions de diamètres $f_n(D)$ sont toutes égales à $f_0(D)$, impliquant que $F_n(D) = F_0(D) = H(D - D_c)$ où H est la distribution Heaviside (pour $D = D_c$, $H = 1$). A partir de ces propriétés, l'Eq.(30) devient :

$$\begin{aligned} e_n(d) &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} C_{n-1}^i \frac{i d^{i-1}}{D_c^i} (1 - F_0(d)) = (1 - F_0(d)) \frac{n-1}{D_c} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} \left(-\frac{d}{D_c}\right)^{i-1} \\ \Leftrightarrow e_n(d) &= (1 - F_0(d)) \frac{n-1}{D_c} \left(1 - \frac{d}{D_c}\right)^{n-2} \end{aligned} \quad (36)$$

Ce qui donne Ngo (2013) :

$$\text{Pour } d \leq D_c, \quad e_n(d) = \frac{n-1}{D_c} \left(1 - \frac{d}{D_c}\right)^{n-2} \quad (37)$$

$$\text{Pour } d > D_c, \quad e_n(d) = 0 \quad (38)$$

Les distributions d'échelles $e_n(d)$ pour un cylindre sont illustrées en figure 13. $e_2(d)$ est constante, comme décrit par l'Eq.(37), et la longueur spécifique est inversement proportionnelle à son diamètre : $e_2(0) = 1/D_c$. $e_3(d)$ est quant à elle linéaire et la surface spécifique $e_3(0)$ est égale à $2/D_c$.

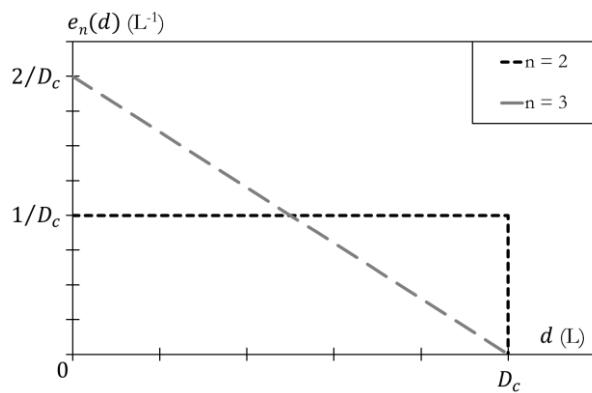


Figure 13. Distribution d'échelle pour un cylindre.

Ensemble équiprobable de cylindres

Soit un ensemble de cylindres présentant une distribution de diamètre $f_0(D)$ équiprobable et de diamètre maximum D_{max} , comme illustré en figure 14(a). En utilisant l'Eq.(3), les diamètres moyens

$D_{a,b}$ s'écrivent : $D_{a,b}^{a-b} = (b+1)D_{a,b}^{a-b}/(a+1)$. Pour $D < D_{max}$ et en utilisant le résultat de l'Eq. (28), il en résulte que les distributions de diamètres $f_n(D)$ s'écrivent $f_0(D) = 1/D_{max}$ et $f_n(D) = nD^{n-1}/D_{max}^n$ pour $n \geq 2$. Ce qui implique que $F_0(D) = D/D_{max}$ et pour $n \geq 2$ que $F_n(D) = (D/D_{max})^n$. A partir de ces expressions, l'Eq.(30) devient pour $d < D_{max}$:

$$\begin{aligned} e_n(d) &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} C_{n-1}^i \frac{id^{i-1}}{D_{max}^i} \frac{n}{n-i} \left(1 - \left(\frac{d}{D_{max}}\right)^{n-i}\right) \\ &= \frac{n}{D_{max}} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} \left(\frac{-d}{D_s}\right)^{i-1} \left(1 - \left(\frac{d}{D_{max}}\right)^{n-i}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

Ce qui donne finalement Ngo (2013) :

$$e_n(d) = \frac{n}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}}\right)^{n-1}, \quad n = 2, 3 \quad (40)$$

La figure 14(b) présente les distributions d'échelles $e_n(d)$ correspondant à l'Eq.(40). Comme pour les sphères, on note que la distribution surfacique d'échelles de l'ensemble équiprobable de cylindres est égale à la distribution volumique d'échelles d'un seul cylindre dont le diamètre D_c est égal à D_{max} .

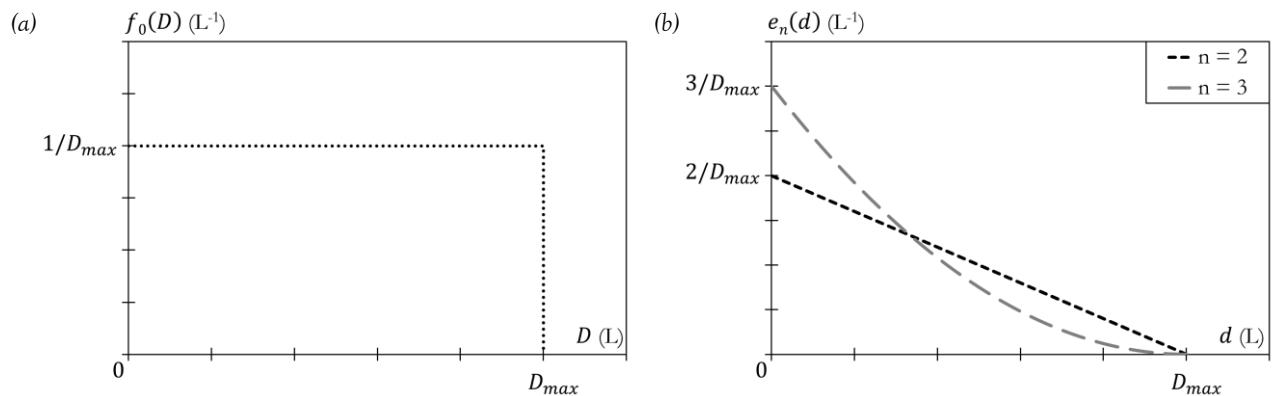


Figure 14. Ensemble équiprobable de cylindres. (a) Distribution de diamètres $f_0(D)$ (b) Distributions d'échelles correspondantes.

Pour les ensembles d'objets présentés ci-dessus, on note que l'ensemble équiprobable de cylindres ramène les mêmes distributions d'échelles qu'une sphère unique de diamètre D_s dans la mesure où le diamètre D_c du plus grand cylindre est égal à D_s (voir Eqs.(40) et (23)). Ceci montre que deux systèmes d'objets différents peuvent avoir les mêmes distributions d'échelles. Cette observation invite à introduire la notion de systèmes équivalents (Ngo (2013)) : on définit comme système équivalent tout système produisant des distributions d'échelles identiques. Ce concept a déjà été utilisé pour modéliser des ensembles de gouttes produites par des ligaments liquides issus de nappes turbulentes (Dumouchel et al. (2015), Vu et al. (2018)). Pour un ensemble d'objets décrit par ses distributions d'échelles $e_n(d)$, on détermine son ensemble équivalent de cylindres décrit par la distribution numérique de diamètre $f_{0c}(D)$: en 2D, l'Eq.(32) indique que $e'_2(d)$ est directement proportionnel à la distribution de cylindres tandis qu'en 3D, c'est $e''_3(d)$ qui est directement proportionnel à la distribution de cylindres (voir Eq. (35)). En combinant ces résultats aux Eqs.(31) (cas 2D) et (34) (cas 3D), on détermine la distribution numérique de diamètre $f_{0c}(D)$ en fonction des $e_n(d)$ de l'ensemble d'objets que l'on veut représenter par son ensemble équivalent de cylindres :

$$f_{0c}(d) = -\frac{e'_2(d)}{e'_2(0)} \quad \text{et} \quad f_{0c} = -\frac{e''_3(d)}{e''_3(0)} \quad (41)$$

2.4. Application : perle sur une ficelle

En utilisant les définitions et applications précédentes issues de la littérature, on cherche maintenant à modéliser un motif de perles sur une ficelle visible lors de l'atomisation de jets viscoélastiques laminaires et d'écrire analytiquement la distribution d'échelles du modèle. Deux modèles sont ici présentés : un système composé d'une sphère et d'un cylindre sans raccordement puis avec raccordement.

2.4.1. Sphère et cylindre sans raccordement

Soit une sphère de diamètre D_s et un cylindre de longueur L_c et de diamètre D_c tel que $D_c < D_s$, comme illustré en figure 15 :

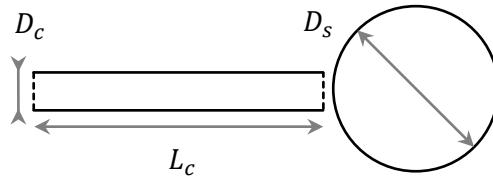


Figure 15. Système composé d'un cylindre et d'une sphère

A partir des Eqs.(10), (23) et (37) et en les appliquant au système cylindre + sphère, $e_2(d)$ donne :

$$\text{Pour } d \leq D_c, \quad e_2(d) = \beta_c \frac{1}{D_c} + (1 - \beta_c) \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) \quad (42)$$

$$\text{Pour } D_c < d \leq D_s, \quad e_2(d) = (1 - \beta_c) \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) \quad (43)$$

$$\text{Avec : } \beta_c = \frac{S_c}{S_c + S_s} = \frac{L_c D_c}{L_c D_c + \frac{\pi D_s^2}{4}} \quad (44)$$

Avec β_c la fraction surfacique du cylindre où S_s est la surface totale de la sphère et S_c la surface totale du cylindre. En 3D, $e_3(d)$ donne :

$$\text{Pour } d \leq D_c, \quad e_3(d) = \alpha_c \frac{2}{D_c} \left(1 - \frac{d}{D_c}\right) + (1 - \alpha_c) \frac{3}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right)^2 \quad (45)$$

$$\text{Pour } D_c < d \leq D_s, \quad e_3(d) = (1 - \alpha_c) \frac{3}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right)^2 \quad (46)$$

$$\text{Avec : } \alpha_c = \frac{V_c}{V_c + V_s} = \frac{\frac{\pi L_c D_c^2}{4}}{\frac{\pi L_c D_c^2}{4} + \frac{\pi D_s^3}{6}} \quad (47)$$

Avec α_c la fraction volumique du cylindre où V_s est le volume de la sphère et V_c celui du cylindre.

La figure 16(a) présente $e_2(d)$ du système étudié avec $D_s = 35$, $L_c = 60$ et $D_c = 15$ ($\beta_c = 0,48$). Deux parties sont visibles autour de la singularité en $d = D_c$. Aux grandes échelles ($D_c < d \leq D_s$), $e_2(d)$ est linéairement dépendant de d , ce qui correspond à la contribution de la structure sphérique comme le montre la courbe pour la sphère seule (ligne pointillée gris foncé en figure 16(a)). Aux petites échelles ($d \leq D_c$), la dépendance à l'échelle reste portée par la grande structure. Le cylindre n'amène pas de dépendance à l'échelle mais augmente le montant de surface $S(d)$ quand $d \leq D_c$. Les pentes aux petites

et grandes échelles sont identiques et dépendent de β_c . On remarque que la courbe de $e_2(d)$ du système étudié est située entre celle de la sphère et celle du cylindre, ce qui est attendu car les distributions d'échelles sont des distributions normalisées. Il en va de même pour $e_2(0)$ qui dépend de la fraction surfacique β_c . La figure 16(b) illustre le cas 3D qui présente des particularités identiques au cas 2D : présence d'une singularité en $d = D_c$ découpant la distribution d'échelles en deux parties, la courbe présente une forme polynomiale d'ordre 2 pour ces deux parties traduisant l'influence de la structure sphérique à toutes les échelles. Contrairement au cas 2D, le cylindre ajoute une dépendance linéaire à l'échelle quand $d \leq D_c$, modifiant la forme polynomiale d'ordre 2 entre les petites et les grandes échelles.

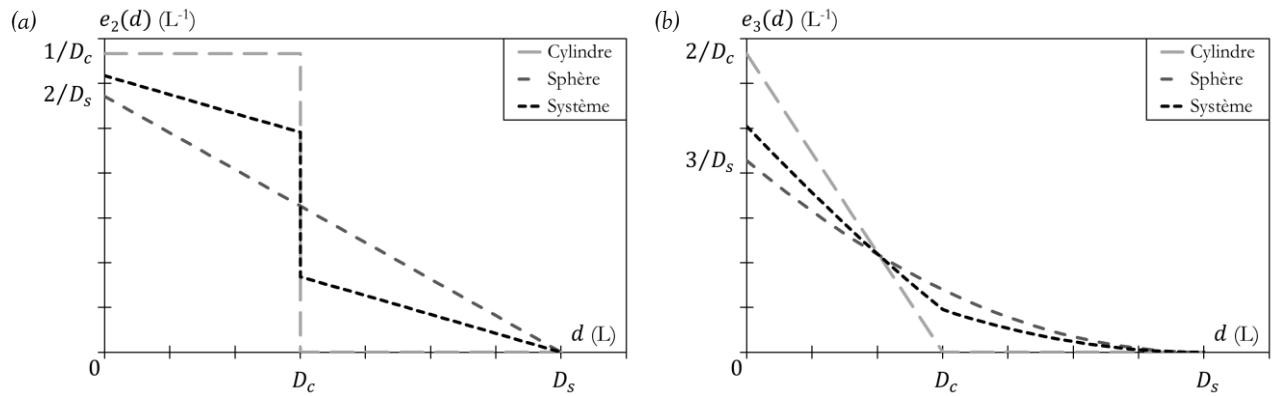


Figure 16. Distribution d'échelle du système cylindre et sphère (a) Cas 2D (b) Cas 3D.

Pour ce modèle, la distribution d'échelles permet d'identifier les diamètres du cylindre et de la sphère. De plus, on peut déterminer la fraction surfacique (ou volumique en 3D) du ligament à partir des diamètres du cylindre et de la sphère ainsi que de la valeur de la distribution d'échelles à $d = 0$. Cependant, la distribution observée aux petites échelles n'est pas représentative du cylindre uniquement, mais est influencée par la présence de la grande structure sphérique.

2.4.2. Sphère et cylindre avec raccordement

Une description plus raffinée du modèle précédent est proposée en figure 17 qui présente un système cylindre et sphère axisymétrique avec un raccordement plus physique. Ce raccordement est ici modélisé par un arc de cercle comme le montre la figure 17.

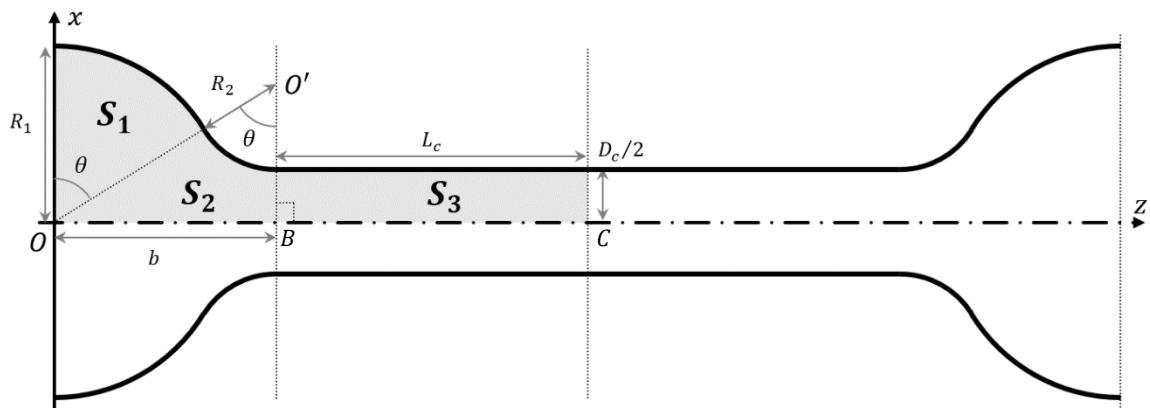


Figure 17. Schéma du système perle sur une ficelle.

Le calcul analytique de $E_2(d)$ se résume à celui de la surface grisée de la figure 17, correspondant aux trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 . S_1 est un secteur de disque de rayon R_1 , d'angle θ et de centre O . S_2 est un triangle rectangle (OBO') de base $b = (R_1 + R_2) \sin \theta$ et de hauteur $(R_2 + D_c/2)$, tronqué par un secteur de disque de rayon R_2 , d'angle θ et de centre O' . S_3 est un rectangle de hauteur $D_c/2$ et de longueur L_c . Par définition, R_1 est strictement supérieur à $D_c/2$ et $\cos \theta = (R_2 + D_c/2)/(R_1 + R_2)$ pour ce système. Les surfaces S_1 , S_2 et S_3 s'écrivent :

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\theta}{2} R_1^2 \\ S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{D_c}{2} + R_2 \right) (R_1 + R_2) \sin \theta - \frac{\theta}{2} R_2^2 \\ S_3 = \frac{L_c}{2} D_c \end{cases} \quad (48)$$

L'érosion des trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 à l'échelle d donne les surfaces $S_1(d)$, $S_2(d)$ et $S_3(d)$, surfaces blanches de la figure 18 délimitées par les lignes pointillées noires.

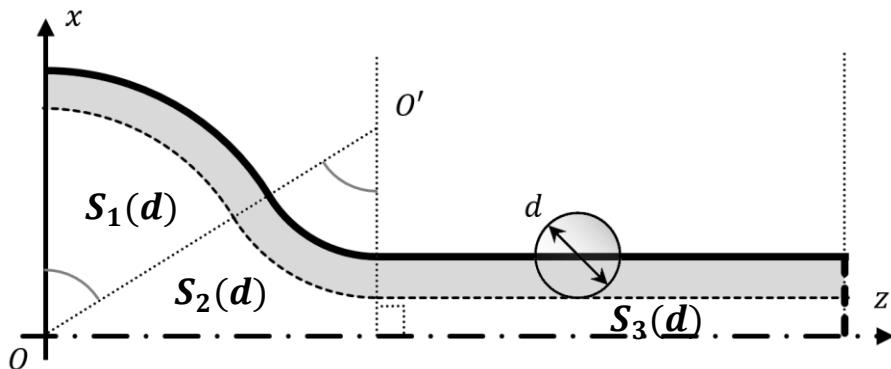


Figure 18. Erosion du système perle sur une ficelle pour $d \leq D_c$.

Cas $d \leq D_c$:

Dans ce cas, les surfaces $S_1(d)$, $S_2(d)$ et $S_3(d)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} S_1(d) = \frac{\theta}{2} \left(R_1 - \frac{d}{2} \right)^2 \\ S_2(d) = \frac{1}{2} \left(\frac{D_c}{2} + R_2 \right) (R_1 + R_2) \sin \theta - \frac{\theta}{2} \left(R_2 + \frac{d}{2} \right)^2 \\ S_3(d) = \frac{L_c}{2} (D_c - d) \end{cases} \quad (49)$$

Les distributions $E_2(d)$ et $e_2(d)$ valent alors :

$$E_2(d) = \frac{S_1 - S_1(d) + S_2 - S_2(d) + S_3 - S_3(d)}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{d}{2S_T} (\theta(R_1 + R_2) + L_c) \quad (50)$$

$$e_2(d) = \frac{\theta(R_1 + R_2) + L_c}{2S_T} \quad (51)$$

Avec $S_T = (S_1 + S_2 + S_3)$. $E_2(d)$ est linéairement dépendant de l'échelle d , impliquant que $e_2(d)$ est indépendant de d .

Cas $2R_1 \geq d > D_c$:

Dans ce cas, la surface S_3 est totalement érodée pour toute échelle d , ce qui donne $S_3(d) = 0$. La surface $S_1(d)$ ne voit pas de changement d'expression par rapport à l'Eq.(49). La surface $S_2(d)$ change de forme par rapport à la situation précédente, comme le montre la figure 19. $S_2(d)$ correspond au triangle de base b_2 et de hauteur $(R_2 + D_c/2)$, tronqué par un secteur de disque de rayon R_2 , d'angle θ_2 et de centre O' .

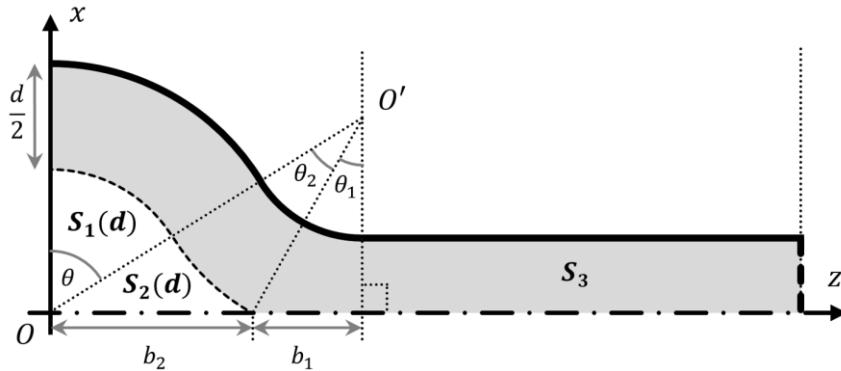


Figure 19. Erosion du système perle sur une ficelle pour $2R_1 \geq d \geq D_c$.

A partir de la figure 19, les relations suivantes sont établies :

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta - \theta_1 \\ \theta_1 = \arccos\left(\frac{R_2 + \frac{D_c}{2}}{R_2 + \frac{d}{2}}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_2 = b - b_1 \\ b_1 = \left(R_2 + \frac{d}{2}\right) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (52)$$

Où θ_1 est fonction de l'échelle d . Ces relations permettent d'écrire $S_2(d)$:

$$\begin{aligned} S_2(d) &= \frac{1}{2}(b - b_1)\left(R_2 + \frac{D_c}{2}\right) - \frac{\theta_2}{2}\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow S_2(d) &= \frac{1}{2}\left(\left(R_1 + R_2\right) \sin \theta - \left(R_2 + \frac{d}{2}\right) \sin \theta_1\right)\left(R_2 + \frac{D_c}{2}\right) - \frac{\theta - \theta_1}{2}\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Les distributions $E_2(d)$ et $e_2(d)$ s'écrivent alors :

$$E_2(d) = \frac{1}{2S_T}\left(\theta d(R_1 + R_2) + D_c L_c + \left(\frac{D_c}{2} + R_2\right)\left(R_2 + \frac{d}{2}\right) \sin \theta_1 - \theta_1\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)^2\right) \quad (54)$$

$$e_2(d) = \frac{\theta(R_1 + R_2) + \left(\frac{D_c}{2} + R_2\right)\left(\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)\theta'_1 \cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_1}{2}\right) - \theta'_1\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)^2 - \theta_1\left(R_2 + \frac{d}{2}\right)}{2S_T} \quad (55)$$

Avec θ'_1 la dérivée de θ_1 par rapport à l'échelle d . La distribution $e_2(d)$ est de forme quadratique en d , ce qui diffère à nouveau du système cylindre et sphère pour lequel $e_2(d)$ présentait une dépendance linéaire avec d . Grâce aux résultats des Eqs.(51) et (55), l'expression analytique de $e_2(d)$ s'écrit :

$$\text{Pour } d \leq D_c, \quad e_2(d) = \frac{\theta(R_1 + R_2) + L_c}{2S_T} \quad (56)$$

$$\text{Pour } D_c < d \leq 2R_1, \quad e_2(d) = \frac{1}{2S_T} \left((R_1 + R_2) - \theta'_1 \left(R_2 + \frac{d}{2} \right)^2 - \theta_1 \left(R_2 + \frac{d}{2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{D_c}{2} + R_2 \right) \left(\left(R_2 + \frac{d}{2} \right) \theta'_1 \cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_1}{2} \right) \right) \quad (57)$$

La figure 20 présente $e_2(d)$ du modèle raffiné pour $D_s = 35$, $L_c = 60$ et $D_c = 15$ (identique au système cylindre + sphère), et avec $R_1 = D_s/2$, et $R_2 = D_s/4$. $e_2(d)$ présente une singularité pour $d = D_c$. Cette singularité est attendue et correspond au changement d'expression entre les Eqs.(56) et (57). Pour $d < D_c$, $e_2(d)$ est constant tandis que pour $D_c \leq d \leq D_s$, $e_2(d)$ est décroissant. Cette différence de comportement entre les petites et grandes échelles montre l'influence du raccordement.

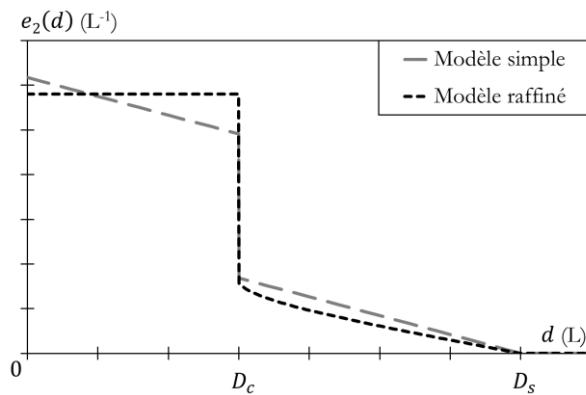


Figure 20. Comparaison des distributions d'échelle des systèmes perle sur une ficelle et cylindre + sphère.

En comparant les $e_2(d)$ des deux modèles de perles sur une ficelle (figure 20), on remarque aux petites échelles que l'influence de la grande structure est effacée en raison du raccordement : le modèle raffiné rapporte un comportement identique à un cylindre aux petites échelles. Aux grandes échelles, la différence de comportement entre les deux systèmes est moins marquée, le système raffiné présentant une décroissance principalement linéaire. Pour d proche de D_c , on note la partie non linéaire induite par le raccordement.

2.5. Ensemble de cylindres s'aminçissants

Dans cette étude, on s'intéresse à des systèmes qui vont évoluer dans le temps, notamment le motif de perles sur une ficelle. La partie ligamentaire de ce motif voit son diamètre décroître et on va étudier l'influence de cette décroissance sur la distribution d'échelles. La modélisation raffinée du motif de perles sur une ficelle a montré que les petites échelles décrivaient un comportement de type cylindre uniquement, l'influence des perles étant effacée. Il est alors suffisant d'étudier des ensembles de cylindres pour déterminer l'influence aux petites échelles de la dynamique d'aminçissement. L'objectif est ici de déterminer des échelles caractérisées qui observeront une dynamique d'aminçissement identique à celle imposée aux cylindres.

Cylindre unique :

Pour un système évoluant dans le temps, sa distribution d'échelles $e_n(d, t)$ est définie à chaque instant t . Prenons un système composé d'un cylindre seul et voyant son diamètre $D_c(t)$ diminuer avec le temps (Dumouchel (2017)). Le volume V_T de ce cylindre est conservé dans le temps. L'évolution temporelle de $e_3(d, t)$, calculée à partir de l'Eq.(37), est illustrée en figure 21 et présente une succession de droites. L'augmentation de $e_3(0, t)$ indique une augmentation de la surface spécifique de ce système.

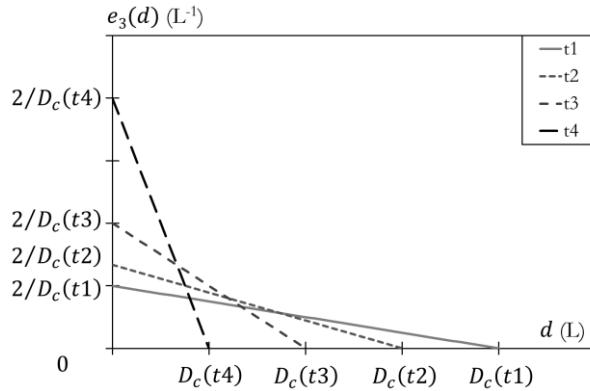


Figure 21. Evolution temporelle de la distribution d'échelle 3D d'un cylindre qui s'amincit.

Ce cylindre amincissant abrite un écoulement élongationnel pour lequel l'équation de continuité montre que le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ est (Stelter et al. (2000)) :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{-2}{D_{c(t)}} \frac{dD_{c(t)}}{dt} \quad (58)$$

Avec v_z la vitesse longitudinale, supposée constante dans la direction radiale du cylindre. En utilisant l'Eq.(37), on exprime ce taux d'étirement en fonction des distributions d'échelles (Dumouchel (2017)) :

$$\begin{cases} e_2(d, t) = \frac{1}{D_c(t)} \\ \dot{e}_2(d, t) = \frac{de_2(d, t)}{dt} = \frac{-1}{D_c(t)^2} \frac{dD_c(t)}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e'_3(d, t) = \frac{-2}{D_c(t)^2} \\ \dot{e}'_3(d, t) = \frac{de'_3(d, t)}{dt} = \frac{-4}{D_c(t)^3} \frac{dD_c(t)}{dt} \end{cases} \quad (59)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{-2}{D_c(t)} \frac{dD_c(t)}{dt} = 2 \frac{\dot{e}_2(d, t)}{e_2(d, t)} = \frac{\dot{e}'_3(d, t)}{e'_3(d, t)} \quad (60)$$

Si le cylindre est soumis à une dynamique d'amincissement exponentielle : $D_c(t) = D_c(0) \exp(-t/(3t_r))$ avec t_r le temps de relaxation, $\dot{\varepsilon}$ est constant et vaut $2/3t_r$. Dans l'expression de $\dot{\varepsilon}$, ce sont $\dot{e}_2(d, t)$ et $\dot{e}'_3(d, t)$ qui portent l'information de la dérivée temporelle de $D_c(t)$ et qui sont intéressants à analyser.

Comme indiqué en section 2.3.2 pour un cylindre unique, la distribution de diamètre $f_0(D, t)$ correspondante est égale à une distribution de Dirac δ : $f_0(D, t) = \delta(D - D_c(t))$, et implique que $F_0(D, t) = H(D - D_c(t))$. La distribution d'échelle volumique est donnée par l'Eq.(36) pour toutes valeurs de d positive ou nulle :

$$e_3(d, t) = (1 - F_0(d, t)) \frac{2}{D_c(t)} \left(1 - \frac{d}{D_c(t)}\right) = \frac{2}{D_c(t)} \left(1 - \frac{d}{D_c(t)}\right) H(D_c(t) - d) \quad (61)$$

La distribution $\dot{e}_3'(d, t)$ s'écrit :

$$\dot{e}_3'(d, t) = \frac{4\dot{D}_c(t)}{D_c(t)^3} H(D_c(t) - d) - \frac{2\dot{D}_c(t)}{D_c(t)^2} \delta(D_c(t) - d) \quad (62)$$

Ce cylindre est soumis à la dynamique d'amincissement exponentielle décrite ci-dessus, ce qui implique qu'à un instant t , $\dot{e}_3'(d, t)$ est constante et négative pour $d < D_c(t)$ et, pour $d = D_c(t)$, $\dot{e}_3'(d, t)$ est un pic de Dirac positif. Ce pic traduit l'évolution temporelle du diamètre du cylindre.

Ensemble de cylindres :

On s'intéresse à un ensemble de cylindres présentant une distribution de diamètre $f_0(D, t)$ et de diamètre maximum $D_M(t)$, comme illustré en figure 22. $f_0(D, t)$ a une forme de cloche impliquant que $f_0(D, t)$ est nulle pour $D = 0$ et $D \geq D_M(t)$. On suppose que tous les ligaments s'amincissent avec la même dynamique: $D_c(t) = D_c(0) \exp(-t/(3t_r))$. La figure 22 montre l'influence de cette dynamique sur la distribution au cours du temps. On peut écrire :

$$\frac{D(t)}{D_M(t)} = \frac{D(0) \exp\left(-\frac{t}{3t_r}\right)}{D_M(0) \exp\left(-\frac{t}{3t_r}\right)} = \frac{D(0)}{D_M(0)} \quad (63)$$

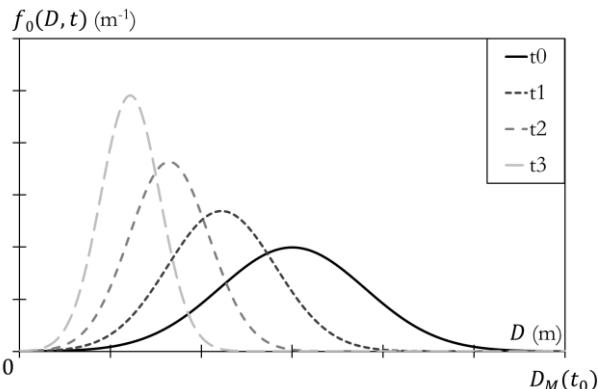


Figure 22. Illustration de $f_0(D, t)$ et de son évolution temporelle avec $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

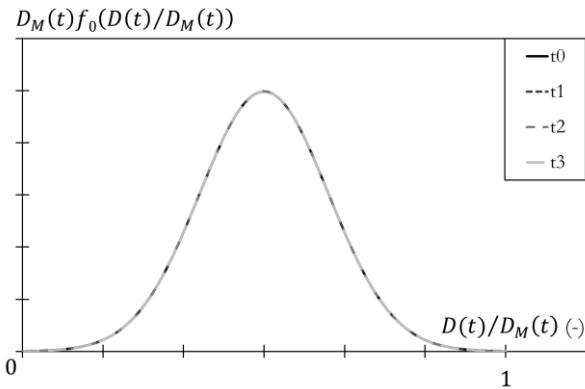


Figure 23. Distribution adimensionnée pour une dynamique d'amincissement exponentielle identique. $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

En effectuant un changement de variable, la distribution $f_0(D)$ est réécrite $D_M f_0(D/D_M)$ à chaque instant. Cette nouvelle distribution est adimensionnée et ne varie pas dans le temps, comme illustré en figure 23. On peut définir la cumulative normalisée $F_0(D/D_M)$:

$$F_0\left(\frac{D}{D_M}\right) = \int_{x=0}^{x=D/D_M} D_M f_0(x) dx \quad (64)$$

On veut déterminer la dynamique observée par les diamètres moyens $D_{a,b}^{a-b}$. En reprenant l'Eq.(3), on peut écrire $D_{a,b}^{a-b} = D_{a,0}^a / D_{b,0}^b$, le diamètre $D_{a,0}^a$ s'écrivant :

$$\begin{aligned}
D_{a,0}^a(t) &= \left(D_{a,0}(t)\right)^a = \int_{D=0}^{D=+\infty} f_0(D, t) D(t)^a dD = D_M^a(t) \int_{D=0}^{D=+\infty} f_0(D, t) \left(\frac{D(t)}{D_M(t)}\right)^a dD \\
\Leftrightarrow D_{a,0}^a(t) &= D(t)_M^a \int_{D/D_M=0}^{D/D_M=+\infty} D_M(t) f_0\left(\frac{D(t)}{D_M(t)}\right) \left(\frac{D(t)}{D_M(t)}\right)^a d\left(\frac{D}{D_M}\right)
\end{aligned} \tag{65}$$

Or, on a montré que le rapport D/D_M ne varie pas dans le temps, impliquant que la distribution normalisée $D_M f_0(D/D_M)$ ne varie pas dans le temps. On déduit de l'Eq.(65) que le rapport $D_{a,0}/D_M$, et plus généralement $D_{a,b}/D_M$, est lui aussi indépendant du temps. On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{D_{a,b}}{D_M} \right) = \frac{D_{a,b} \dot{D}_M}{D_M} - \frac{D_{a,b} D_M \dot{D}}{D_M^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D_{a,b} \dot{D}_M}{D_{a,b}} = \frac{\dot{D}_M}{D_M} = \frac{\dot{D}}{D} = -\frac{1}{3t_r}
\tag{66}$$

Ce qui implique que les diamètres moyens $D_{a,b}^{a-b}$ ont la même dynamique d'amincisement observée par les cylindres.

Puisque la dynamique d'amincisement d'un cylindre unique est porté par $\dot{e}_3'(d, t)$, on va calculer et étudier $\dot{e}_3'(d, t)$ pour l'ensemble de cylindres amincissant. En reprenant l'Eq.(34), la distribution $e_3'(d, t)$ d'un ensemble de cylindre s'écrit :

$$e_3'(d, t) = -\frac{2}{D_{20}^2(t)} (1 - F_0(d, t))
\tag{67}$$

En dérivant cette dernière par rapport au temps, on calcule la distribution $\dot{e}_3'(d, t)$ du système :

$$\dot{e}_3'(d, t) = \frac{2}{D_{20}^2(t)} \dot{F}_0(d, t) + \frac{4D_{20} \dot{D}_{20}(t)}{D_{20}^3(t)} (1 - F_0(d, t))
\tag{68}$$

On détermine $\dot{F}_0(D)$ avec la relation entre la dérivée totale et les dérivées partielles :

$$\dot{F}_0(D, t) = \frac{dF_0(D, t)}{dt} = -f_0(D, t) \dot{D}(t) = \frac{f_0(D, t) D(t)}{3t_r}
\tag{69}$$

$\dot{F}_0(D, t)$ est positive, ce qui est attendu car, pour une valeur de diamètre D , on constate que $F_0(D, t)$ augmente au cours du temps en raison de l'amincisement des cylindres, comme illustré en figure 24.

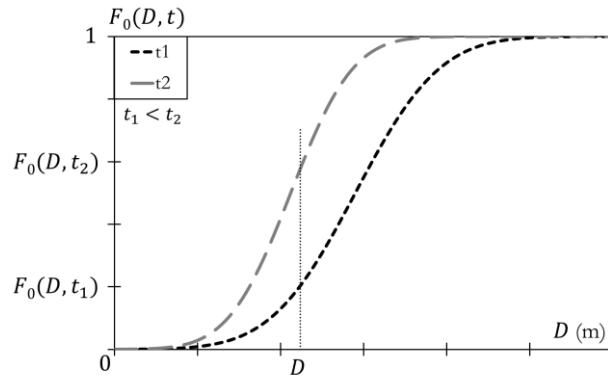


Figure 24. Evolution temporelle de $F_0(D, t)$.

En utilisant les résultats des Eqs.(66) et (69), $\dot{e}_3'(d, t)$ s'écrit :

$$\dot{e}_3'(d, t) = \frac{2}{D_{20}^2(t)} \left(\frac{f_0(d, t)d}{3t_r} - \frac{2}{3t_r} (1 - F_0(d, t)) \right) = \frac{2}{3t_r D_{20}^2(t)} (df_0(d, t) - 2(1 - F_0(d, t))) \quad (70)$$

On va étudier la fonction $\dot{e}_3'(d, t)$ en s'intéressant d'abord aux échelles pour lesquelles $\dot{e}_3'(d, t) = 0$. D'après le résultat de l'Eq.(70), il faut résoudre :

$$df_0(d, t) - 2(1 - F_0(d, t)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{2(1 - F_0(d, t))}{f_0(d, t)} \quad (71)$$

L'Eq.(71) présente une solution évidente et attendue : $d > D_M(t)$, qui correspond à $f_0(d, t) = 0$ et $F_0(d, t) = 1$. Pour $d < D_M(t)$, une autre échelle est solution de l'Eq.(71) et est appelée échelle $d_1(t)$.

On cherche ensuite les extrema de $\dot{e}_3'(d, t)$, pour cela il faut résoudre l'équation $\dot{e}_3''(d, t) = 0$:

$$\dot{e}_3''(d, t) = \frac{2}{3t_r D_{20}^2(t)} (df_0'(d, t) + 3f_0(d, t)) \quad (72)$$

$$\dot{e}_3''(d, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{3f_0(d, t)}{f_0'(d, t)} \quad (73)$$

L'Eq.(73) présente deux solutions évidentes et attendues : $d = 0$ et $d > D_M(t)$, qui correspondent à $f_0(d, t) = 0$. Pour $0 < d < D_M(t)$, une autre solution existe et on l'appelle $d_4(t)$. On peut montrer que $d_4(t)$ correspond au pic de la distribution $f_4(d)$ définie par la seconde expression de l'Eq.(28) :

$$f_4(D) = \left(\frac{D}{D_{30}} \right)^3 f_0(D) \quad (74)$$

Preuve : en dérivant $f_4(d)$ par rapport au diamètre d on obtient :

$$f_4'(D, t) = \frac{df_4(D, t)}{dD} = \frac{d^3}{D_{30}^3} f_0'(D, t) + \frac{3d^2}{D_{30}^3} f_0(D, t) \quad (75)$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{30}^3}{D^2(t)} f_4'(D, t) = D(t) f_0'(D, t) + 3f_0(D, t) \quad (76)$$

$$\Rightarrow \dot{e}_3''(d, t) = \frac{2}{3t_r D_{20}^2} \frac{D_{30}^3}{d^2} f_4'(d) \quad (77)$$

Comme la distribution $f_0(D)$, $f_4(D)$ s'adimensionne et donne une distribution qui ne varie pas dans le temps. Ceci implique que $d_4(t)/D_M(t)$ ne varie pas dans le temps, comme l'indique l'Eq.(63), et que $d_4(t)$ présente la même dynamique d'amincissement observée par les cylindres, comme l'indique l'Eq.(66). L'analyse de $d_4(t)$ ramène la dynamique souhaitée.

L'étude du signe de $\dot{e}_3''(d, t)$, présenté en tableau 1, revient à étudier le signe de $f_4'(D)$ d'après l'Eq.(77). Comme l'indique l'Eq.(74), $f_4(D)$ va présenter une croissance puis une décroissance. $f_4(D)$ est nulle pour $D = 0$ et $D > D_M(t)$ et possède un maximum appelé $d_4(t)$.

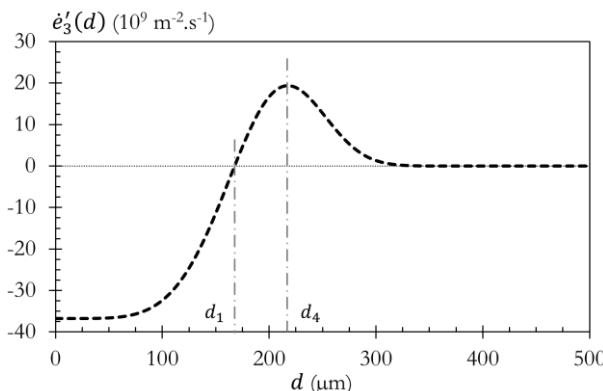
d	0	$d_1(t)$	$d_4(t)$	$D_M(t)$
$e_3''(d, t)$	0	+	0	-
$e_3'(d, t)$	$\frac{-4}{3t_r D_{20}^2}$	0		0

Tableau 1. Tableau de variation de $e_3'(d, t)$.

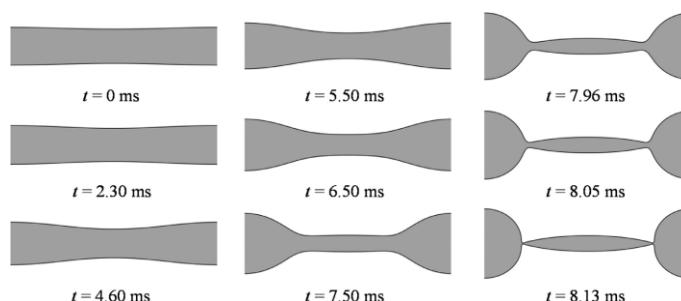
La figure 25 présente un exemple de $e_3'(d, t)$ pour un ensemble de cylindres dont le diamètre D est distribué suivant une distribution gamma généralisée à trois paramètres (q, α, D_{q0}) :

$$f_0(D) = \frac{q}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\alpha/q} \frac{D^{\alpha-1}}{D_{q0}^\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{q} \left(\frac{D}{D_{q0}}\right)^q\right) \quad (78)$$

Avec $q = 4$, $\alpha = 5$ et $D_{q0} = 200 \mu\text{m}$, impliquant que $D_{20} = 190,5 \mu\text{m}$ et $D_M = 400 \mu\text{m}$. Le temps de relaxation t_r est lui fixé à 1 ms. On retrouve le comportement de $e_3'(d, t)$ décrit dans le tableau 1.

Figure 25. Illustration de $e_3'(d, 0)$.

La figure 25 n'est pas sans rappeler un travail sur l'analyse multi-échelles 3D d'un ligament Newtonien soumis à l'instabilité capillaire (Dumouchel et al. (2017)). De nature numérique, cette étude permettait le suivi temporel d'un ligament unique comme illustré sur la figure 26. La première colonne présente les temps pour lesquels la perturbation est de forme sinusoïdale, la seconde colonne présente la formation au centre du ligament d'un pont liquide avec le développement de deux cols, la dernière colonne montre l'amincissement des cols jusqu'à la rupture.

Figure 26. Evolution temporelle du ligament, $k = 0,55$ Dumouchel et al. (2017).

Pour $t = 6,54$ ms, la fonction $e_3'(d, t)$ du ligament présenté en figure 26 est tracé en figure 27 (points rouge). Le début de cette courbe est identique à la figure 25 et les échelles d_1 et d_4 y sont identifiées. La figure 28 compare ces deux échelles et montre que leurs dynamiques sont égales. Ce suivi temporel simulé nous permet en outre de comparer ces échelles avec le diamètre du col. Cette comparaison est proposée en figure 28 où on peut lire que l'échelle d_4 est exactement égale au diamètre du col.

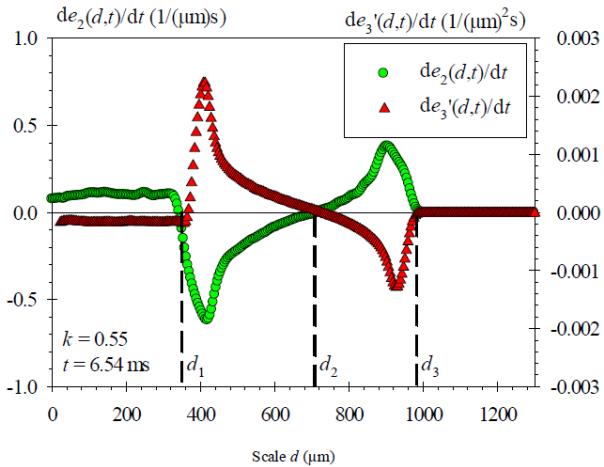


Figure 27. Introduction aux échelles caractéristiques d_1 , d_2 et d_3 .
Ligament Newtonien Dumouchel et al. (2017).

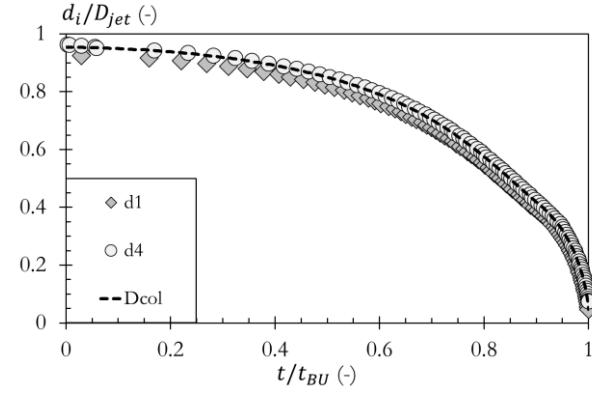


Figure 28. Simulation de l'instabilité capillaire pour un liquide Newtonien, $k = 0,69$.

Ces observations suggèrent deux remarques :

- Les deux échelles d_1 et d_4 vont suivre les mêmes dynamiques et elles peuvent sans doute être utilisées, l'une comme l'autre, pour étudier la dynamique d'amincissement des ligaments.
- L'échelle d_4 issue du comportement d'un ensemble de ligaments est probablement liée à la dynamique des cols de ces ligaments.

2.6. Conclusion

Ce chapitre a introduit les définitions et concepts qui seront utilisés dans ce travail. Les distributions de diamètres des ensembles dispersés et de distributions d'échelles des ensembles quelconques sont présentées de façon générale puis appliquées à plusieurs cas particuliers.

Appliquées à des ensembles de cylindres et à des ensembles de sphères, les distributions de diamètres permettent de calculer analytiquement les distributions d'échelles de ces systèmes. La notion de systèmes équivalents a été introduite, permettant de définir un ensemble de cylindres dont la distribution d'échelles est identique à celle du système étudié.

Le cylindre et la sphère correspondent aux deux formes couramment observées en atomisation, en particulier sur l'instabilité capillaire de jets viscoélastiques où le motif de perles sur une ficelle se développe. Deux modélisations du motif de perle sur une ficelle ont été présentées : un système simple composé d'un cylindre et d'une sphère, et une version raffinée. Le calcul analytique des distributions d'échelles montre l'influence à toutes les échelles de la sphère pour le premier modèle. Cette influence aux petites échelles est absente pour le modèle raffiné, qui présente un comportement de cylindre aux petites échelles et un comportement de sphère aux grandes échelles. Pour l'évolution temporelle du

système raffiné, on peut raisonnablement penser que la dynamique du ligament peut être mesurée à partir du comportement observé aux petites échelles.

L'évolution temporelle des distributions d'échelles permet d'introduire les échelles caractéristiques qui servent à l'étude des processus d'atomisation. Appliquée à un ensemble de cylindres s'aminçant, on définit l'échelle caractéristique d_4 et on montre qu'elle observe la même dynamique que les cylindres. En reprenant les résultats issus de la simulation de l'instabilité capillaire pour un ligament Newtonien, on montre que d_4 est égale au diamètre du col de ligament. Pour l'étude des jets viscoélastiques, la mesure de cette échelle caractéristique doit directement renseigner sur la dynamique les ligaments.

3. Traitement d'images et analyse sub-pixel



Nomenclature

Grandeur	Unité	Signification
b	[$-$]	Image de biais pour la méthode level-set
C	[$-$]	Contour d'un objet
c_1	[$-$]	Intensité moyenne du fond
c_2	[$-$]	Intensité moyenne des objets
d	[m]	Echelles
D_{max}	[m]	Diamètre du plus grand objet d'un ensemble
D_{10}	[m]	Diamètre moyen de la distribution f_0
E_3	[$-$]	Distribution d'échelles cumulative en 3 dimensions (3D)
e_2	[m^{-1}]	Distribution d'échelles 2D
e_3	[m^{-1}]	Distribution d'échelles 3D
F^{CV}	[$-$]	Fonctionnelle à minimiser pour trouver ϕ
$f_0(D)$	[m^{-1}]	Distribution de diamètres D des sphères
F_{0c}	[$-$]	Distribution de diamètres de cylindres équivalente cumulative
f_{0c} ou f_{0cyl}	[m^{-1}]	Distribution de diamètres de cylindres équivalente
H	[$-$]	Distribution de Heaviside
$I(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image
$I_b(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image du bruit de capteur
$I_f(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image du fond lumineux
I_{max}	[$-$]	Intensité maximale de l'image
$I_n(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image normalisée
I_{Seuil}	[$-$]	Intensité du seuil normalisé
$I'(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image segmentée
$I_0(x, y)$	[$-$]	Intensité du pixel (x, y) de l'image de test
N	[$-$]	Nombre de points utilisés dans la méthode de Monte-Carlo (MC)
N_i	[$-$]	Nombre de points manquant dans l'objet après érosion à l'échelle d (MC)
N_{max}	[$-$]	Niveau de gris maximal de l'image à segmenter
N_{min}	[$-$]	Niveau de gris minimal de l'image à segmenter
N_{objet}	[$-$]	Nombre de points total dans l'objet (MC)
N_{Seuil}	[$-$]	Niveau de gris correspondant au seuil normalisé
PSNR	[$-$]	Ratio signal maximal sur bruit
S_{trunc}	[m^{-2}]	Surface latérale d'un tronc de cône
S_δ	[m^2]	Somme des moindres carrés entre deux distributions d'échelles
$S_{3D}(d)$	[m^2]	Surface d'un objet après érosion à l'échelle d (3D)
t	[s]	Temps
V_T	[m^3]	Volume total d'un objet
V_{trunc}	[m^3]	Volume d'un tronc de cône
$We(t_i)$	[$-$]	Nombre de Weber
\mathbf{x}	[m]	Coordonnées d'un pixel
$\Gamma(x)$	[$-$]	Fonction gamma
$\Gamma(x, y)$	[$-$]	Fonction gamma incomplète supérieure
ε	[$-$]	Fonctionnelle à minimiser pour trouver ϕ
$\dot{\varepsilon}(d, t)$	[s^{-1}]	Taux de déformation d'un cylindre
η	[Pa.s]	Viscosité dynamique de cisaillement
σ	[$N.m^{-1}$]	Tension de surface
ρ	[$kg.m^{-3}$]	Masse volumique d'un fluide
ϕ	[$-$]	Fonction level-set
φ	[$-$]	Facteur de correction d'intensité lumineuse
χ	[$-$]	Fonction du contour level-set à minimiser pour trouver ϕ
$\psi(r)$	[m^2]	Valeur de l'ondelette du « chapeau mexicain » à une distance r de son centre
ψ_p	[$-$]	Fonction du contour level-set à minimiser pour trouver ϕ
Ω	[$-$]	Domaine de l'image

3.1. Introduction

L'utilisation de l'imagerie comme diagnostic pour l'investigation expérimentale des processus d'atomisation permet d'accéder aux informations sur la courbure des interfaces mais présente deux contraintes principales pour l'application qui nous intéresse. La première provient du résultat de la projection d'un objet tridimensionnel sur un plan 2D. Cette projection peut occasionner des pertes d'informations sur le système liquide s'il présente des structures se superposant sur l'image (exemple de sprays denses, jets turbulents, ...). La seconde est liée à la résolution du dispositif optique lui-même qui limite l'analyse pour les plus petites échelles. La réponse impulsionnelle du montage optique génère ainsi un effet de flou sur les interfaces. De plus l'image numérique donne une représentation spatiale discrète de l'image optique, les interfaces d'un système liquide seront donc retranscrites avec une résolution spatiale liée à cette représentation discrète. La principale difficulté rencontrée lors du traitement d'images est de détecter le bon contour des objets observés sur ces images. Cette détection peut être améliorée en choisissant des optiques présentant une réponse impulsionnelle étroite (limitant l'effet de flou) et/ou en utilisant une caméra avec une meilleure résolution spatiale. Si le dispositif optique ne pas/plus être amélioré en amont, alors les méthodes de détections de contours sub-pixels peuvent venir apporter une description plus fine des contours recherchés (Steger (1998)). Les analyses effectuées ensuite à partir de ces contours, notamment l'analyse multi-échelles, bénéficient fortement de la qualité et de la forte résolution des contours issus de la phase de traitement d'images. L'amélioration des outils de détections de contours présente alors un fort intérêt si l'on souhaite améliorer la qualité des analyses.

Seule la version à deux dimensions de l'analyse multi-échelles a pour le moment été utilisée dans l'investigation expérimentale des processus d'atomisation (Dumouchel (2017)), les analyses s'étant basées sur des images 2D des structures liquides observées. La projection 2D peut conduire à une perte d'information qu'il est donc impossible de retrouver. Cependant, dans le cas d'objets de géométries simples il est possible d'extrapoler une information 3D à partir d'une image 2D. C'est ce qui sera fait ici pour pouvoir conduire une analyse multi-échelles 3D.

Dans le but d'améliorer les outils de diagnostic et les analyses développées au laboratoire, cette partie présente en premier lieu un comparatif de méthodes de segmentation sub-pixel d'images. Puis des méthodes de calcul de la distribution d'échelle 3D seront présentées qui se basent sur l'utilisation du squelette pondéré de l'objet étudié. L'une d'entre elles, utilisant une méthode dite de Monte-Carlo sera détaillée et testée. Enfin, le traitement sub-pixel et l'analyse multi-échelles 3D seront combinés afin de revisiter des résultats expérimentaux précédemment publiés sur l'atomisation de ligaments liquides issues de nappes 2D turbulentes.

3.2. Traitement d'images

3.2.1. Techniques de seuillages

La technique d'imagerie par transmission permet de visualiser la projection 2D des objets. Pour étudier les différents objets présents sur une image, il convient de les séparer. Cette séparation est réalisée aux travers de méthodes de segmentation. Despotović et al. (2015) a récemment publié une revue d'articles listant les principales méthodes de segmentations utilisées pour analyser les images IRM du cerveau humain. Bien que le domaine d'application soit éloigné du sujet présenté ici, la classification des méthodes de segmentation qui y est faite n'en reste pas moins transposable à n'importe quel autre champ de recherche. Cette classification peut être résumée comme suit :

- Méthodes basées sur l'intensité des pixels.
- Méthodes basées sur la surface des objets.
- Méthodes de segmentations hybrides.
- Méthodes basées sur des atlas.

Les méthodes basées sur l'intensité des pixels cherchent à classifier chaque pixel en se basant sur son intensité lumineuse. La plupart de ces méthodes font appel à l'histogramme de niveau de gris de l'image pour la segmenter en différentes régions associées à des modes de l'histogramme, comme illustré en figure 29. D'autres basées sur la croissance de régions connexes ont pour principe de regrouper en 1 seule région tous les pixels adjacents d'intensité similaire (nécessitant un point de départ) ; ou encore celles basées sur des méthodes de classification qui identifient les différents objets d'une image en comparant l'image à segmenter à des images déjà segmentées issues d'une base de données. Ces méthodes identifient les zones de même intensité et/ou texture sur les images pour réaliser la segmentation.

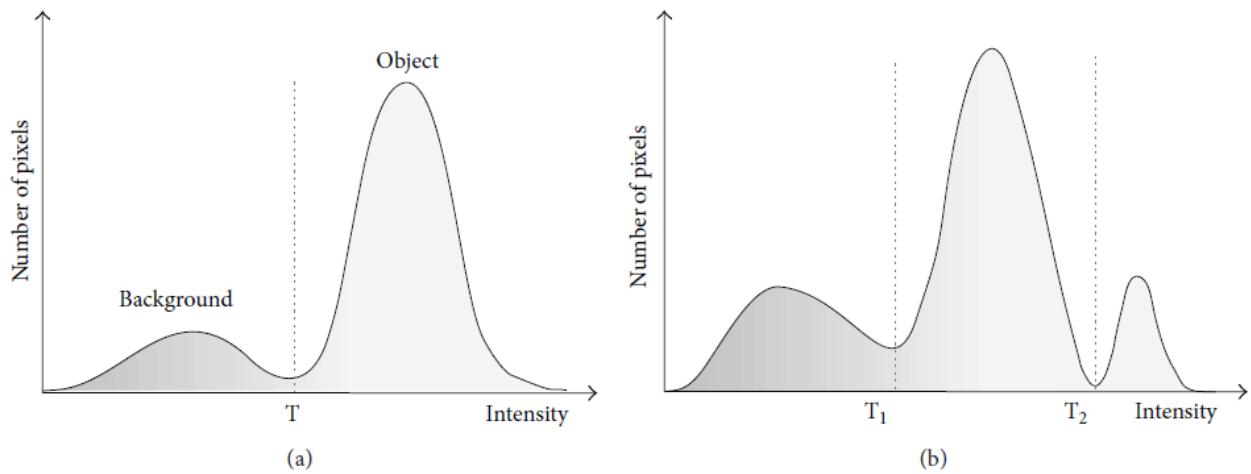


Figure 29. Segmentation d'histogramme de niveaux de gris d'une image. (a) Segmentation à un seul niveau (b) Segmentation multi-niveaux, Despotović et al. (2015).

Les méthodes basées sur la surface des objets comprennent toutes les méthodes utilisant les contours et surfaces actives (déformables) ainsi que les méthodes Level-Set (Chan et al. (2001), Yushkevisch et al. (2006), Kass et al. (1988), Li et al. (2010)). Dans ces méthodes, chaque objet se voit préalablement attribué une description qui lui est propre (intensité, texture, région de l'espace, géométrie, ...). Ensuite,

un ensemble de courbes est superposé à l'image pour la segmenter et toutes les zones identifiées sont comparées aux descriptions des objets. Pour les zones ne respectant pas les descriptions, leurs contours sont alors déformés itérativement pour chercher la surface qui correspondra le plus aux descriptions recherchées. Les contours utilisés sont des courbes (ou surfaces en 3 dimensions) paramétriques qui sont déformées sous l'action de forces internes et externes à la zone de l'image considérée pour respecter les descriptions des objets. Les objets de l'image et leurs contours sont considérés comme des fonctions que l'on cherche à minimiser, cette minimisation traduit la meilleure approximation réalisée sur l'image à partir des descriptions des objets données initialement. L'image est segmentée lorsqu'un critère de minimisation de ces fonctions est atteint.

Les méthodes basées sur des atlas consistent à comparer l'image étudiée à une banque de données similaires servant de référence afin de segmenter les différentes régions de l'image. Les méthodes de segmentations hybrides combinent plusieurs méthodes de segmentations. L'objectif est d'utiliser les complémentarités de ces méthodes pour contourner les désavantages de chacune et ainsi améliorer la qualité de la segmentation.

La phase de traitement d'images développée au CORIA par Blaisot et al. (1998), Yon (2003), Blaisot et al. (2005), Fdida et al. (2009) et Blaisot (2012) fait partie des méthodes de seuillage basées sur l'intensité des pixels. Elle consiste à extraire les objets liquides en adaptant localement le niveau du seuillage grâce à la prise en compte de la réponse impulsionnelle du système optique ainsi que du défaut de mise au point. Pour cela, un modèle d'imagerie est utilisé pour obtenir des informations de corrections de l'interface et de profondeur de champ à partir d'une configuration de caméra unique. Ce modèle est basé sur le formalisme de Fourier (Goodman (1968)) et utilise le concept de la fonction d'étalement du point (PSF). Il permet de mesurer la taille des gouttes indépendamment de leur position, c'est-à-dire pour les gouttes floues ou non floues, comme montré notamment dans Fdida et al. (2009). Cette phase de traitement d'images se découpe en plusieurs étapes :

- Normalisation des images.
- Localisation des objets liquides.
- Segmentation locale des objets de l'image.

La qualité de ce traitement joue un rôle essentiel sur la qualité des analyses. Ce traitement est facilité pour des images fortement contrastées et présentant une bonne mise au point du système liquide, comme détaillé dans Yon (2003) et Fdida et al. (2009).

3.2.2. Normalisation des images

Le fond lumineux d'une image est souvent inhomogène, présentant des variations d'intensité lumineuse d'une image à l'autre ou d'une partie à l'autre d'une même image. L'étape de normalisation des images consiste à supprimer ces inhomogénéités afin d'obtenir un fond lumineux uniforme. Cette étape nécessite l'utilisation d'une image de fond lumineux de référence (sans objets à analyser) et d'une image du bruit du capteur (image prise dans le noir complet) afin de calculer l'intensité lumineuse normalisée de chaque pixel (x, y) :

$$I_n(x, y) = \varphi \frac{I(x, y) - I_b(x, y)}{I_f(x, y) - I_b(x, y)} N_{fond} \quad (79)$$

Où I_n , I , I_f , I_b sont respectivement les intensités de l'image normalisée, de l'image expérimentale, de l'image de fond lumineux de référence et de l'image du bruit. La grandeur N_{fond} permet de fixer le niveau de l'intensité du fond lumineux lors de la reconversion de l'image normalisée en niveau de gris. Le paramètre φ corrige les éventuelles fluctuations d'intensité lumineuses d'une image à l'autre : sa valeur est obtenue en divisant le niveau de référence de l'image de fond lumineux par celui de l'image expérimentale, le niveau de référence pouvant être le niveau de gris maximum de l'image, le mode principal de l'histogramme de niveau de gris de l'image (niveau de gris le plus peuplé) ou encore le niveau de gris moyen d'une zone de l'image (jamais perturbée par la présence d'objets liquides).

3.2.3. Localisation des objets liquides

La localisation des objets liquides permet de différencier les pixels appartenant au fond lumineux de ceux appartenant aux objets liquides. La méthode de localisation utilisée combine deux techniques de seuillage afin de trouver un maximum d'objets sur l'image :

- Seuillage via la forme de l'histogramme.
- Seuillage par transformée en Ondelette.

Le seuillage d'une image consiste à transformer une image en niveau de gris en une image segmentée où chaque classe d'objets possède sa propre valeur de niveau de gris. Dans le cas où seules deux classes existent (fond d'un côté et objets de l'autre), on parle de « binarisation » d'image.

3.2.3.1. Seuillage via la forme de l'histogramme

C'est la méthode la plus simple de seuillage d'image. Elle est basée sur l'étude de l'histogramme de niveau de gris de l'image. Cette étude consiste à rechercher les valeurs de niveaux de gris, appelés seuils, qui séparent les classes d'objets désirées. Dans le cas d'un seuillage simple global (1 seul seuil pour toute l'image), la segmentation d'une image $I(x, y)$ est définie comme :

$$I'(x, y) = \begin{cases} 0, & I(x, y) < N_{Seuil} \\ 1, & I(x, y) \geq N_{Seuil} \end{cases} \quad (80)$$

$$N_{Seuil} = I_{Seuil}(N_{max} - N_{min}) + N_{min} \quad (81)$$

Où I' est l'image segmentée avec deux niveaux (1 pour le fond lumineux et 0 pour les objets), I_{Seuil} le seuil normalisé ($0 < I_{Seuil} < 1$) déterminant le seuil de niveau de gris N_{Seuil} dépendant des niveaux de gris maximum N_{max} et minimum N_{min} de l'image à segmenter. L'utilisation d'une valeur de seuil plus élevée augmente le nombre d'objets détectés mais augmente également la sensibilité de la segmentation au bruit de fond l'image. Ceci peut se traduire par le regroupement de deux objets proches en 1 seul ou encore par l'apparition de taches dans le fond lumineux, comme l'illustre la figure 30.

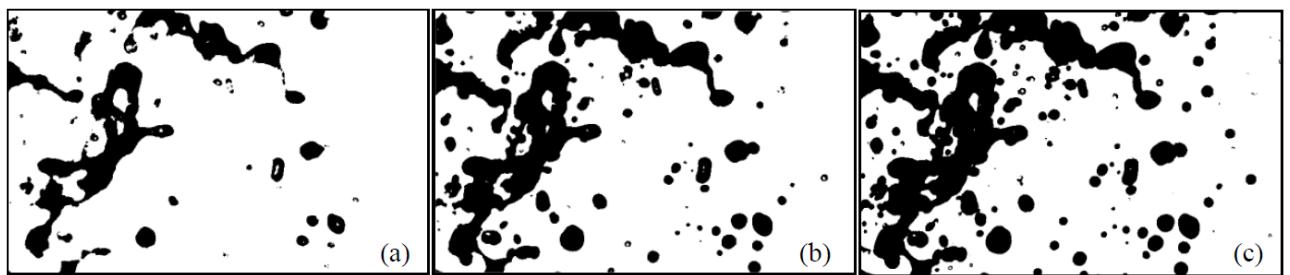


Figure 30. Seuillage d'une image normalisée - Image binaire par seuil classique (a) $I_{\text{Seuil}} = 0,2$ et (b) $I_{\text{Seuil}} = 0,5$ et (c) $I_{\text{Seuil}} = 0,7$, Ngo (2013).

Cette technique n'est pas la mieux adaptée à la détection de petits objets ou ceux en défaut de mise au point qui ne sont pas assez contrastés et dont les valeurs de niveau de gris sont supérieures à I_{Seuil} . Pour résoudre ce problème, une segmentation basée sur le gradient de niveau de gris entre les objets et le fond lumineux est utilisée.

3.2.3.2. Seuillage par transformée en Ondelette (TO)

Cette méthode a été implémentée par Yon (2003). Cette segmentation est basée sur le fait que les contours d'éléments liquides sont caractérisés par la présence d'une concavité dans le profil de niveau de gris dans le voisinage de l'interface. La segmentation détecte la courbure locale du niveau gris en étudiant la dérivée seconde de ce celui-ci en appliquant une transformée en ondelette par l'ondelette « chapeau mexicain », cette ondelette correspondant à la dérivée seconde d'une gaussienne. La convolution de l'image étudiée avec cette ondelette revient donc à calculer la dérivée seconde d'une image filtrée par une gaussienne, ce qui permet de détecter ces concavités. L'ondelette « chapeau mexicain » est définie par l'équation (82) et illustrée en figure 31.

$$\psi(r) = (1 - r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (82)$$

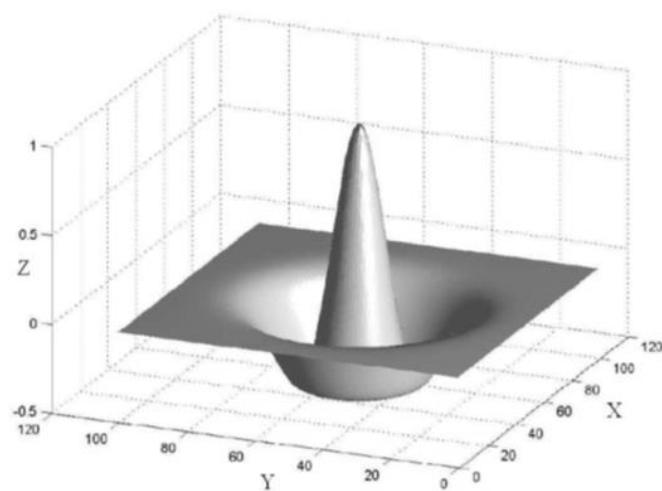


Figure 31. Forme de l'ondelette en « chapeau mexicain », Yon (2013).

Le résultat de cette convolution, illustré en figure 32(b), donne une image où les concavités et les convexités du profil de niveaux de gris sont visibles. Un seuillage par intensité lumineuse est ensuite

appliquée à l'image résultante de la transformée en ondelette, dont le seuil est choisi de manière à conserver uniquement le contour intérieur des objets détectés (exemple en figure 32(d)).

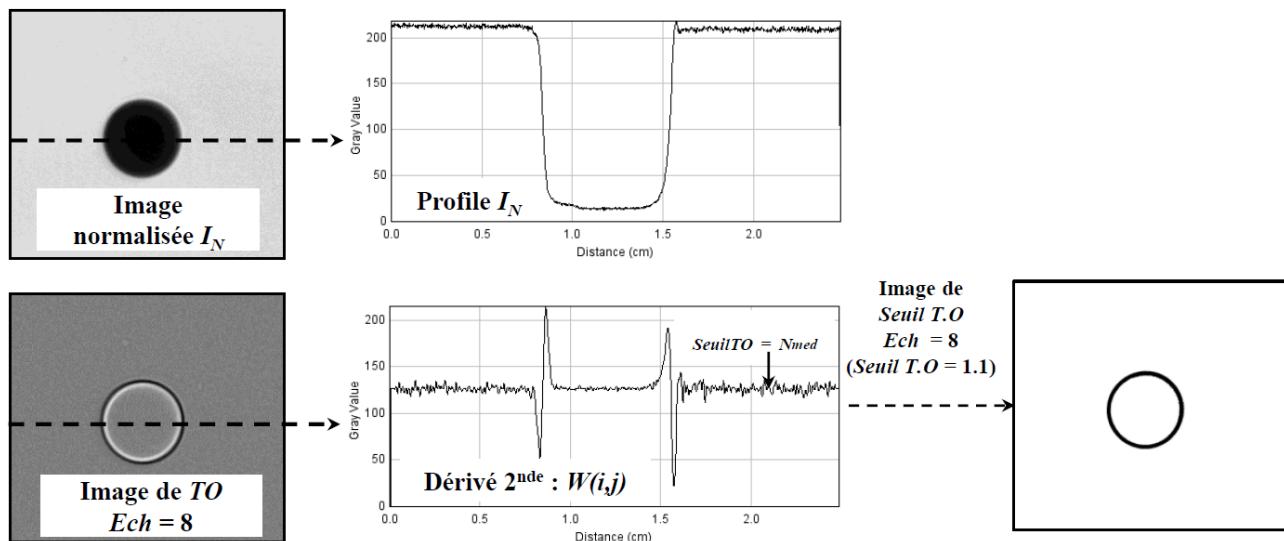


Figure 32. Détection des gouttes par seuil TO. (a) Image normalisée, (b) Image de T.O, (c) Histogramme niveau du gris d'image de TO, (d) Image de seuil T.O, Ngo (2013).

Les résultats des deux méthodes de seuillage sont ensuite combinées pour former l'image résultante de la localisation. Une opération supplémentaire est ensuite effectuée qui consiste à labéliser chacun des objets trouvés sur l'image : un objet trouvé, défini par un ensemble de pixels connexes, se voit alors attribué une valeur de niveau de gris, cette valeur étant différente d'un objet à l'autre. L'ensemble de toutes les étapes conduisant à la localisation des objets liquides est présenté en figure 33.

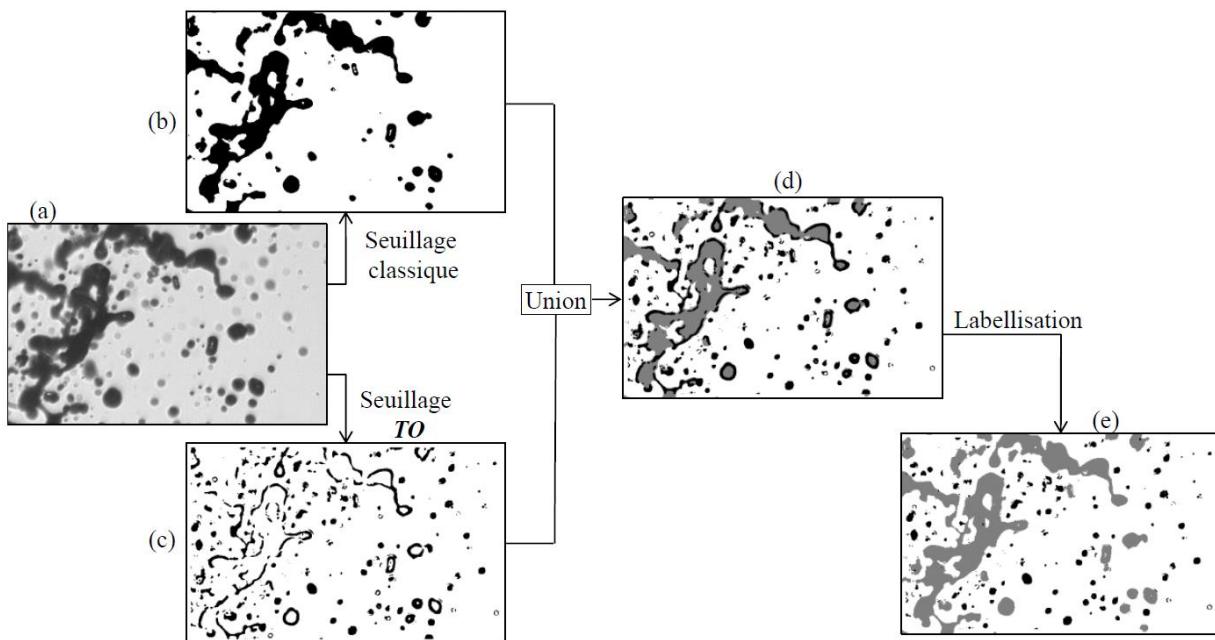


Figure 33. Labellisation d'image, Ngo (2013).

3.2.4. Segmentation locale des objets de l'image

L'intérêt d'une image labélisée est qu'elle autorise l'analyse séparée de chacun des objets liquides identifiés : l'image labélisée va alors servir de masque pour isoler une portion de l'image contenant un objet liquide de l'image normalisée avec son environnement proche (Yon (2003)). A partir de cette portion d'image, on peut choisir de calculer le contour à un niveau pixel de cet objet ou le contour à un niveau sub-pixel. Le choix d'utiliser ou non l'information sub-pixel du contour des objets dépend de la résolution de ces objets ainsi que des analyses qui en seront faites par la suite.

La détermination du contour pixel peut être suffisante pour les images issues de caméra à haute résolution. La particularité de la méthode développée au CORIA est que le seuil de niveau de gris N_{Seuil} utilisé dans l'équation (81) sera ici déterminé localement pour chacun des objets labélisés étudiés. Ce seuil dépendra des niveaux N_{max} et N_{min} locaux à la portion d'image correspondant à cet objet et une correction est appliquée en fonction du défaut de mise au point de l'objet (Fdida et al. (2009)). Cette segmentation est calibrée pour placer le contour des objets au plus près de la position de l'interface.

3.3. Approches sub-pixel

L'intérêt des méthodes de segmentations sub-pixel est de permettre une description plus fine des interfaces par rapport aux segmentations classiques au niveau pixel. Le « gain » d'informations résulte de l'interpolation du contour à un niveau sub-pixel à partir des informations de l'image initiale. On peut distinguer deux grandes approches de ce problème :

- Segmentation directe de l'image au niveau sub-pixel.
- Reconstruction sur-résolue de l'image complète, puis segmentation classique.

La segmentation directe au niveau sub-pixel va chercher à interpoler un contour sub-pixel local et retourner une image segmentée sub-pixel. La plupart des méthodes sont basées sur les modèles itératifs à contours déformables, dit « snake ». Ils ont été introduit par Kass et al. (1988) pour le cas d'images 2D avant d'être rapidement généralisé en 3D (Li et al. (2010), Terzopoulos et al. (1988)). Ces méthodes sont basées sur la déformation d'une ligne spline (appelée level-set) qui respecte un critère de minimisation d'énergie (force interne au contour) et se déplace dans l'image jusqu'aux contours en fonctions des attributs (gradients de niveaux de gris, textures, ...) de l'image (force externe au contour). Initialement, ces méthodes level-set se sont avérées sensibles à la position initiale du contour et au bruit de l'image. Ensuite, elles ont été améliorées afin d'utiliser les informations venant des surfaces des objets à détecter dans l'image (Mumford et al. (1989), Chan et al. (2001)). Deux grandes familles de méthodes level-set découlent de ces évolutions :

- Modèles de contours : ils utilisent les gradients d'intensité des contours de l'image pour guider la déformation des contours (Caselles et al. (1997), Kimmel et al. (1995), Malladi et al. (1995)). Elles sont sensibles au bruit et nécessite de fort gradient de niveau de gris aux interfaces.
- Modèles de régions : ils cherchent des régions homogènes pour guider la déformation des contours (Ronfard (1994), Vese et al. (2002)). Elles sont sensibles aux inhomogénéités de l'image.

De manière générale, les méthodes de segmentation par level-set, itératives par natures, sont gourmandes en ressources de calcul.

La reconstruction sur-résolue d'une image à faible résolution consiste à créer une image à une résolution plus élevée à partir d'une ou plusieurs images à faible résolution (Ziwei et al. (2014)). En règle générale, l'image sur-résolue obtenue est directement utilisée à d'autres fins (imagerie satellite par exemple) qu'une simple segmentation comme nous allons le faire ici. Le développement de ces techniques a débuté avec Harris (1964) et Goodman (1968) avec l'utilisation d'une seule image. Elles ont été améliorées par Tsai et al. (1984) grâce à l'utilisation de séquences d'images d'une même scène décalées spatialement. Le début des années 2000 voit le développement de techniques de sur-résolution utilisant des méthodes d'apprentissages (Freeman (2000), Chang et al. (2004)) comme les chaînes de Markov. Ces dernières sont utilisées dans des domaines plus spécifiques (reconnaissance faciale) où elles peuvent bénéficier d'une banque de données pour l'apprentissage.

A partir de cette brève littérature, les méthodes choisies pour la comparaison sub-pixel sont les suivantes :

- La méthode développée au CORIA (Blaisot et al. (2005), Blaisot (2012), Fdida et al. (2009)).
- Une méthode level-set de Li et al. (2010) qui est peu sensible au choix du contour initial et aux inhomogénéités de niveaux de gris présentes sur l'image. Cette méthode converge rapidement (pour une level-set) et est précise jusqu'au quart de pixel avec un bon jeu de paramètres.
- Une méthode de sur-résolution bi-cubique. Elle est utilisée comme référence (Timofte et al. (2014), Zhang et al. (2016)) pour les comparaisons des techniques de sur-résolution et présente les avantages d'être simple, très rapide et déjà implémentée dans la plupart des logiciels de traitement d'images (ImageJ, Gimp, Photoshop).
- Une méthode de sur-résolution de Timofte et al. (2014) utilisant une méthode d'apprentissage. C'est une méthode rapide (pour une méthode d'apprentissage) et présentant le plus fort PSNR (ratio signal maximal sur bruit) des méthodes de ce type.

3.3.1. Calcul du contour sub-pixel (CORIA)

La méthode de calcul du contour sub-pixel utilisée au CORIA a été développée par Blaisot et al. (2005) et Blaisot (2012) et utilise comme information de départ le contour pixel local défini pour chacun des objets labélisés. Pour chaque pixel du contour, les pixels adjacents (8-connexe) sont inspectés et ceux appartenant au fond de l'image sont identifiés. Pour chaque couple de pixels « contour - fond » est définie une interpolation linéaire entre les deux niveaux de gris de l'image normalisée pour ces deux pixels. A partir de cette interpolation, les coordonnées sub-pixel du contour sont déterminées au point où la valeur de niveau de gris interpolée est égale à la valeur du seuil local de segmentation, comme illustré en figure 34. Une fois les contours sub-pixel calculés pour chacun des objets trouvés lors de l'étape de localisation, une image à résolution sub-pixel est générée.

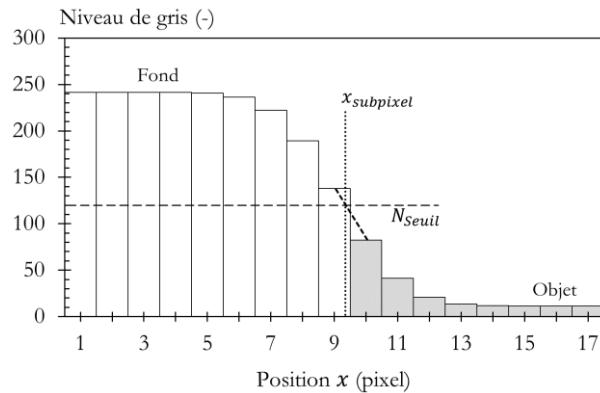


Figure 34. Détermination de coordonnées sub-pixel.

3.3.2. Sub-pixel : level-set

La méthode de segmentation level set sub-pixel est basée sur celle proposée par Li et al. (2010). On note Ω le domaine sur lequel est défini l'image I , prise comme une application de Ω dans \mathbb{R} et qui donne le niveau de gris de l'image. Le contour C est recherché à travers la détermination d'une fonction level-set ϕ qui vaut zéro sur le contour. Le contour sub-pixel est obtenu par interpolation de la fonction level-set qui est estimée au niveau de chaque pixel. La méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle $\varepsilon(\phi)$ comportant trois termes : un terme visant à minimiser la longueur du contour, un autre visant à minimiser la surface à l'intérieur du contour et un troisième de régularisation pour maintenir la propriété de fonction distance signée dans le voisinage du contour pour ϕ , sans nécessiter de réinitialisation périodique de ϕ . Dans cette méthode, les termes de minimisation de la longueur et de la surface à l'intérieur du contour sont basés sur une fonction indicatrice de bord qui est minimum dans les zones de forts gradients associées aux bords des objets :

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla I|^2} \quad (83)$$

Avec ∇I l'opérateur gradient appliqué à l'image.

C'est une version dérivée de cette méthode et développée pour les applications aux images par résonance magnétique utilisées en médecine qui a été employée ici (Li et al. (2010)). Un exemple de recherche de contour d'objets avec cette méthode est donné en figure 35. Cette méthode de segmentation, reprend pour base le modèle level-set de Chan et al. (2001), dit « piecewise constant » (PC) model. L'hypothèse formulée ici consiste à associer l'intérieur contour C à une intensité moyenne c_1 et l'extérieur de C à une intensité moyenne c_2 . Le terme de minimisation de la surface est ici remplacé par deux termes visant à minimiser l'écart entre les niveaux de gris moyen à l'intérieur et à l'extérieur du contour C et ces deux constantes c_1 et c_2 . La fonctionnelle à minimiser, $F^{CV}(\phi, c_1, c_2)$ (énergie), est alors définie par l'Eq.(84) Li et al. (2010).

$$\begin{aligned} F^{CV}(\phi, c_1, c_2) = & \int_{\Omega} |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |I(\mathbf{x}) - c_2|^2 (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \\ & + \nu \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p(|\nabla \phi|) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (84)$$

Où H est la fonction Heaviside qui définit l'appartenance d'un pixel à l'intérieur ou à l'extérieur du contour, et la fonction level set ϕ vaut zéro sur le contour C , positive à l'intérieur et négative à l'extérieur. Les deux premiers termes de l'équation (84) représentent les deux domaines recherchés d'intensité moyenne c_1 et c_2 , le troisième terme est le terme permettant de minimiser la longueur du contour, avec v un coefficient de pondération positif et le quatrième terme est le terme de régularisation de la distance. La fonction p intervenant dans ce quatrième terme doit vérifier $p(s) \geq p(1)$ et $p: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, impliquant que ce terme soit minimal pour $|\nabla\phi| = 1$ (propriété de la fonction level set dans le voisinage du contour). La recherche de la fonction level set ϕ et des constantes c_1 et c_2 pour lesquelles l'énergie F^{CV} est minimale aboutie à la segmentation de l'image en deux domaines Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 = \{\mathbf{x}: \phi(\mathbf{x}) > 0\}$ et $\Omega_2 = \{\mathbf{x}: \phi(\mathbf{x}) < 0\}$. De façon plus globale, cette modélisation revient à approximer l'intensité lumineuse de l'image par deux domaines différents où l'intensité y est constante (soit c_1 soit c_2) et pour laquelle le contour est itérativement déformé afin de minimiser son énergie.

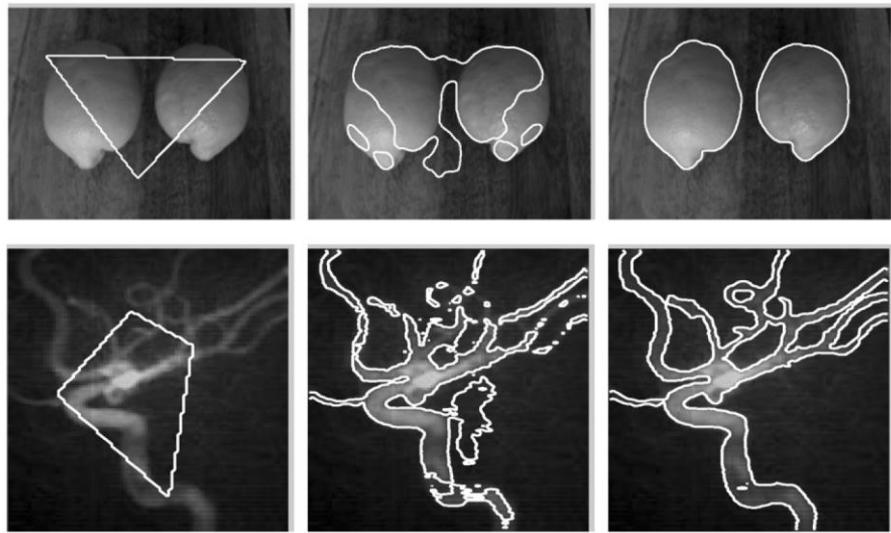


Figure 35. Segmentation d'une image de citron et d'un vaisseau sanguin. De gauche à droite : contour initial, contour intermédiaire, contour final Li et al. (2010).

Le contour obtenu par la méthode piecewise constant (PC) dépend fortement du contour initial prédéfini : en ne tenant pas compte des inhomogénéités de l'image dans le calcul, la méthode ne converge pas nécessairement vers le contour désiré et génère des aberrations. Ce problème peut être contourné par une opération de normalisation de l'image initiale si l'on dispose d'une image de fond lumineux de référence, référence absente dans le cas d'images IRM. A partir de cette méthode piecewise constant (PC), Li et al. (2010) ont ajouté des degrés de libertés afin de pallier aux défauts de cette dernière. La nouvelle formulation de la fonctionnelle proposée par Li et al. (2010) est :

$$F(\phi, \mathbf{c}, b) = \varepsilon(\phi, \mathbf{c}, b) + v \chi(\phi, \mathbf{c}, b) + \mu \psi_p(\phi, \mathbf{c}, b) \quad (85)$$

Avec :

$$\varepsilon(\phi, \mathbf{c}, b) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega_i} K(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |I(\mathbf{x}) - b(\mathbf{y}) c_i|^2 d\mathbf{y} \right) M_i(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (86)$$

$$\chi(\phi, \mathbf{c}, b) = \int_{\Omega} |\nabla H(\phi)| d\mathbf{x} \quad (87)$$

$$\psi_p(\phi, \mathbf{c}, b) = \int_{\Omega} p(|\nabla \phi|) d\mathbf{x} \quad (88)$$

Où N est le nombre de domaines différents recherchés ($N = 2$ si seuillage simple), c_i l'intensité constante du domaine i et M_i la fonction d'appartenance à ce domaine i (si $N = 2$, $M_1 = H$ et $M_2 = 1 - H$). La fonction ε représente l'énergie des domaines recherchés où b tient compte des inhomogénéités de l'image en variant faiblement dans celle-ci. K est une fonction décrivant la distribution d'intensités dans le domaine i autour de l'intensité de référence c_i et vérifiant $K(\mathbf{u}) = 0$ en dehors du domaine Ω_i et $\int K(\mathbf{u}) = 1$. K permet de tenir compte des inhomogénéités au sein du domaine Ω_i . La fonction χ minimise la longueur du contour recherché et la fonction ψ_p est la fonction de régularisation de la distance. De façon plus globale, les deux premiers termes de l'équation (84) sont regroupés dans la fonction $\varepsilon(\phi, \mathbf{c}, b)$ qui tient maintenant compte des variations de niveaux de gris du fond lumineux et de celles des objets recherchés, les fonctions $\chi(\phi, \mathbf{c}, b)$ et $\psi_p(\phi, \mathbf{c}, b)$ servant à minimiser l'énergie des contours des objets recherchés. Pour l'implémentation de leur méthode, les auteurs ont utilisé les fonctions suivantes :

$$K(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{|\mathbf{u}|^2}{2\sigma_{Li}^2}\right), & \text{pour } \mathbf{u} \leq \rho_{Li} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (89)$$

$$p(s) = 0,5(s - 1)^2 \quad (90)$$

Où σ_{Li} traduit la dispersion des valeurs de niveau de gris pour tenir compte des inhomogénéités du fond lumineux. Ils montrent que la précision de leur méthode augmente avec la diminution de σ_{Li} . Ils ont obtenus leurs meilleurs résultats avec le paramètre $\sigma_{Li} = 4$ qui est la plus petite valeur testée dans leur étude (Li et al. (2010)), leur résultats laissant penser qu'il existe une précision maximale limite atteinte pour $\sigma_{Li} = 4$. Leur méthode de segmentation retourne la liste des points des contours interpolés avec des coordonnées sub-pixels. Ils montrent qu'avec leurs images IRM ils ont une précision égale au quart de pixels. Ces fonctions et paramètres seront conservés pour notre comparaison des méthodes de segmentation.

3.3.3. Sur-résolution : méthode bi-cubique

Keys (1981) a présenté la technique d'interpolation cubique par convolution. Dans le cas à 1 dimension, correspondant à une ligne de pixel, il définit le noyau d'interpolation cubique et ses propriétés. Le noyau de l'interpolation cubique est de classe $C^1(\mathbb{R})$, donc dérivable et à dérivée continue. Ceci implique que l'interpolation cubique cherchera à conserver la dérivée du gradient de niveau de gris de l'image. Si on considère s la position relative de x dans l'intervalle $[x_k ; x_{k+1}]$ tel que $s = (x - x_k)/h$ où h est le pas d'échantillonnage de l'image et x_k la position du pixel k dans la ligne considérée, l'intensité interpolée I en x vaut alors Van Reeth (2011):

$$\begin{aligned} I(x) = & -s^3 [a(I(x_{k+2}) - I(x_{k-1})) + (a+2)(I(x_{k+1}) - I(x_k))] \\ & + s^2 [2a(I(x_{k+1}) - I(x_{k-1})) + 3(I(x_{k+1}) - I(x_k)) + a(I(x_{k+2}) - I(x_k))] \\ & - as (I(x_{k+1}) - I(x_{k-1})) + I(x_k) \end{aligned} \quad (91)$$

Où a est le paramètre de réglage de l'interpolation cubique. Keys (1981) montre que pour $a = -0,5$ l'erreur d'interpolation est alors minimale et décroît proportionnellement à une fonction cubique en $\sigma(h^3)$. En 1 dimension, il faut 4 points pour réaliser la convolution, il en faut alors 16 dans le cas d'une image à 2 dimensions.

La méthode bi-cubique de sur-résolution est par nature une méthode d'interpolation. Son faible temps de calcul et sa simplicité en fond une méthode de référence pour les comparaisons entre les différentes méthodes de sur-résolution.

3.3.4. Sur-résolution : méthode A+

Les méthodes de sur-résolution ont pour objectif de construire une image de plus grande définition à partir d'une image de base. Elles ont pour principal défaut de créer une image au rendu « flou » : les gradients entre deux zones présentant une forte différence de couleurs sont peu prononcés, comme montré en figure 36 pour différentes méthodes. L'objectif de ces méthodes est alors d'augmenter les valeurs de ces gradients pour rendre les images produites plus « nettes ». La méthode de sur-résolution A+ (Timofte et al. (2014)) est une amélioration de la méthode initiale « anchored neighborhood regression » (ANR) des mêmes auteurs (Timofte et al. (2013)). Cette méthode reconstruit une image sur-résolue à partir de l'image de base en utilisant les informations contenues dans un dictionnaire. Ce dictionnaire est créé à partir d'une banque d'images à faible et haute résolution afin d'établir un lien statistique entre les détails d'une image à faible résolution et sa version à haute résolution d'une scène donnée, constituant ici la partie d'apprentissage de la méthode de sur-résolution. L'intérêt de l'utilisation d'un tel dictionnaire est de reproduire le plus naturellement possible les contours et textures d'une image. De plus, cela permet de réduire significativement le temps de calcul de l'image sur-résolue en transférant dans la partie de création du dictionnaire le calcul nécessaire à l'apprentissage.

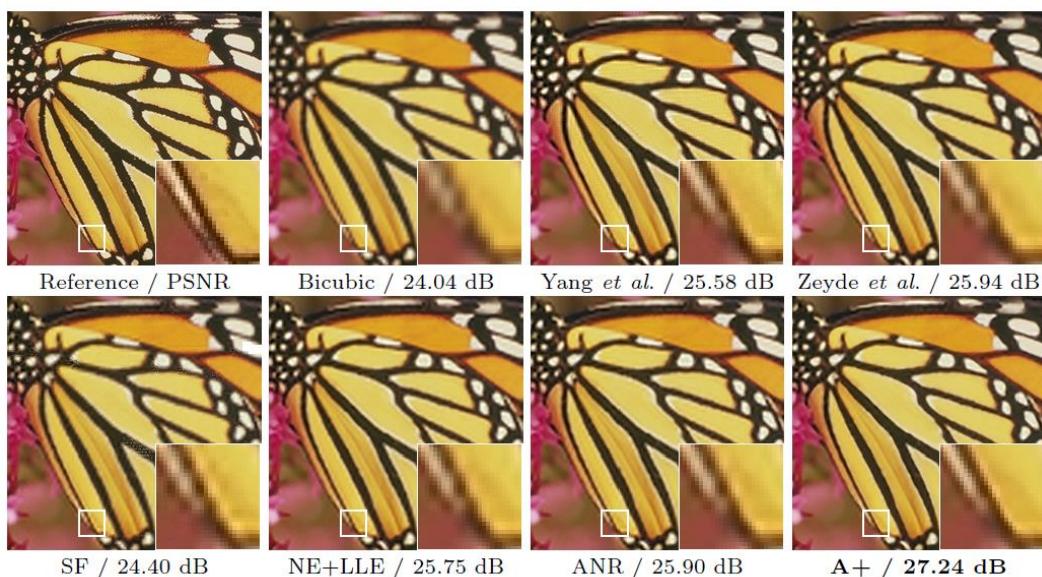


Figure 36. Image de Monarque avec un facteur d'agrandissement de 3 : Nom de la méthode/auteurs, mesure du PSNR, Timofte et al. (2014).

L'intérêt de cette méthode pour notre comparatif est de proposer une image sur-résolue à partir d'une seule image initiale et présentant des gradients de niveaux de gris prononcés aux interfaces. Ces forts gradients limiteront l'impact de la valeur du seuil lors de l'opération de segmentation.

3.3.5. Comparatif des méthodes

Les comparaisons entre les différentes approches sub-pixels seront faites sur une image de test disposant d'objets et de structures élémentaires de différentes tailles en plus d'une image expérimentale de nappe liquide turbulente faiblement résolue (640*352 pixels) : c'est sur ce type d'images que l'on souhaite améliorer la qualité de l'analyse. La comparaison est d'ordre quantitatif pour l'image de test et qualitatif pour l'image de nappe : étant donné que l'on ne connaît pas la position exacte du contour des objets pour les images expérimentales, c'est la convergence vers un même contour des différentes méthodes qui va être regardée.

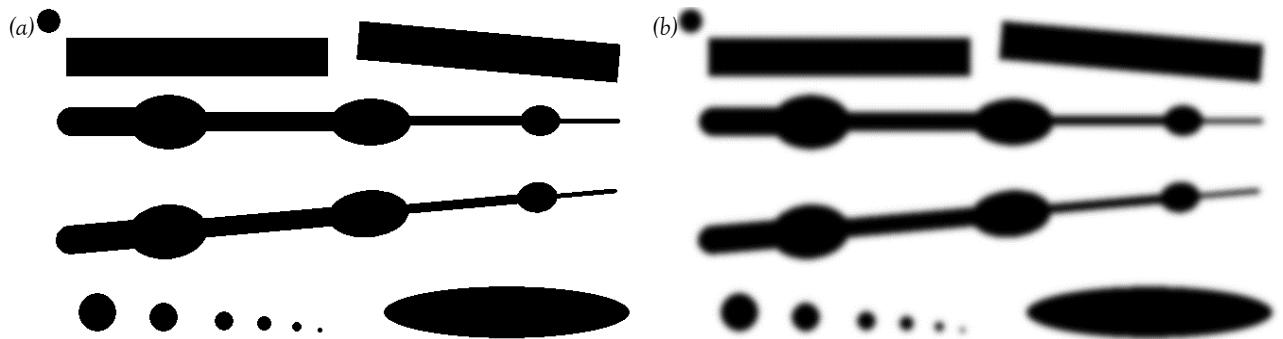


Figure 37. Image test (a) initiale (b) floutée avec un filtre gaussien de 20 pixels de largeur totale.

L'image de test, illustrée en figure 37, comporte 2 rectangles de 400*40 pixels, dont le second est incliné de 5°, des disques dont les diamètres sont compris entre 5 et 40 pixels, d'une ellipse et de deux structures de perles sur une ficelle avec un diamètre variable de la structure ligamentaire variant entre 5 et 30 pixels, dont le second est incliné de 5°. Cette image est ensuite floutée par convolution avec un filtre gaussien de 20 pixels de largeur totale. Ce filtrage sert à simuler la réponse impulsionnelle du dispositif optique de formation d'image, comme illustré en figure 38.

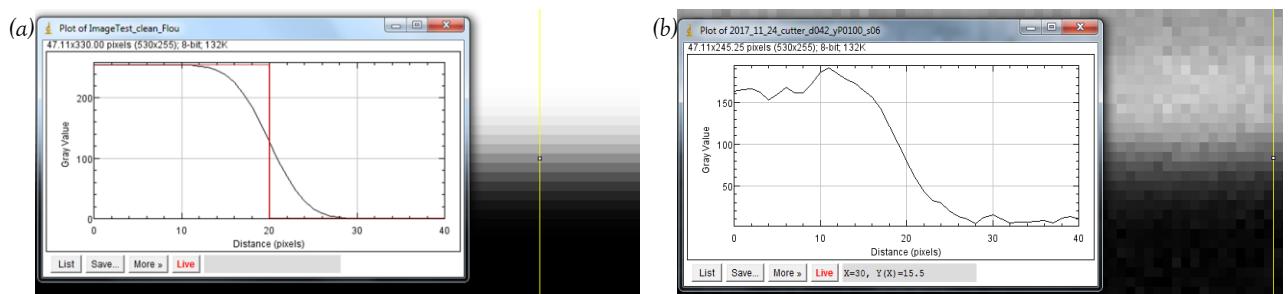


Figure 38. Profil de niveau de gris sur une ligne normale (jaune) à un contour local (a) image test avant filtrage (rouge) et après (noir) (b) Exemple de réponse optique pour une caméra haute résolution (voir descriptif en Ch.4).

Sur cette image test floutée, quatre contours sont calculés :

- Interpolation sub-pixel avec les programmes du CORIA (bleu).
- Interpolation sub-pixel par level-set Li et al. (2010) (violet).
- Sur-résolution bi-cubique x4 puis segmentation pixel avec les programmes du CORIA (vert).

- Sur-résolution A+ x4 puis segmentation pixel avec les programmes du CORIA (rouge).

Pour l'interpolation sub-pixel par level-set, le contour est déterminé par la level-set dans les zones où le gradient de niveau gris est maximum à l'aide de la fonction « contour » de MATLAB. Pour les trois autres méthodes, on utilise les outils développés au CORIA qui déterminent les niveaux de gris N_{max} et N_{min} pour chaque objet détecté sur l'image, un seuil est ensuite appliqué pour segmenter les images (voir Eq.(81)). Le niveau de seuil choisi est $N_{seuil} = 0,5$ car il correspond à la position de l'interface pour l'image de test (voir figure 38(a)).

Pour chacun des contours obtenus, une image segmentée est produite. Ces images ont une résolution égale à un quart de pixel dans les deux directions vis-à-vis de l'image originale, correspondant à la précision maximale de la méthode level set. Un sub-pixel a une surface égale à $1/16^{\text{ème}}$ de la surface du pixel de l'image originale. Les images segmentées sont ensuite comparées à l'image originale (figure 37(a)) en mesurant le PSNR pour chaque objet présent sur l'image. Cette grandeur traduit la proximité entre deux images. Le PSNR s'écrit :

$$PSNR = 10 \log \left(\frac{I_{max}^2}{\frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (I_0(i,j) - I(i,j))^2} \right) \quad (92)$$

Où I_{max} est le niveau de gris maximal de l'image, m et n sont les deux dimensions de l'image, $I_0(i,j)$ et $I(i,j)$ sont l'intensité du pixel (i,j) respectivement sur l'image originale (figure 37(a)) et l'image obtenue après segmentation sub-pixel de l'image floutée (figure 37(b)). Les images sub-pixels étant 4 fois plus grande que l'image originale, cette dernière est agrandie avec un facteur 4 sans interpolation pour pouvoir calculer le PSNR. Les mesures de PSNR sont présentées en tableau 2, les ensembles « 4 gouttes » et « 5 gouttes » correspondent aux 4 ou 5 plus grande disques situés en bas à gauche de l'image originale. Dans le tableau 2, la colonne intitulée « Référence dilatée » correspond à l'image originale dont l'interface des objets a été dilatée d'un quart de pixel. La valeur de PSNR correspondante traduit alors un écart global d'un quart de pixel par rapport aux contours de l'image originale. Une augmentation de PSNR indique qu'il y a en proportion moins de pixels présentant des intensités différentes entre les deux images, indiquant que le contour sub-pixel obtenu se rapproche du contour original.

PSNR (dB)	Référence dilatée	Bi-cubique	A+	Level Set	CORIA	Level Set dilatée
Ellipse	21,6	19,3	19,3	23,7	20,3	19,9
5 gouttes	21,6	22,4	22,3	23,1	20,4	20,7
4 gouttes	21,4	22,7	22,5	24,0	22,3	20,6
Grande goutte	20,7	21,6	21,4	23,0	21,7	19,3
Ligament	21,0	18,9	18,8	23,2	19,7	19,3
Ligament incliné	22,9	20,7	20,9	23,5	21,5	20,6
Rectangle	19,8	16,8	16,8	26,8	18,0	19,3
Rectangle incliné	21,4	18,9	18,9	22,5	19,7	19,3
Image totale	21,3	20,2	20,1	23,7	20,4	19,9

Tableau 2. Mesure du PSNR pour les différents objets de l'image de test.

Pour chaque objet présent sur l'image test, c'est la méthode level set qui présente les meilleures valeurs de PSNR avec une augmentation de 3 dB sur l'ensemble de l'image comparée aux trois autres méthodes. Dans le détail, cette différence entre la méthode level set et les autres est moins marquée pour les gouttes, par rapport aux objets pris individuellement. En comparant les méthodes avec la référence dilatée, les valeurs de PSNR obtenue sont supérieures pour la méthode level set, indiquant que la distance globale séparant les contours obtenus par cette méthode par rapport aux contours de référence est inférieure au sub-pixel. Pour les autres méthodes, les valeurs de PNSR inférieures indiquent que la distance moyenne entre les contours obtenus et les contours de référence est supérieure à 1 sub-pixel. La différence de PSNR avoisine 3 dB pour les objets autres que les gouttes, indiquant que cette distance moyenne est deux fois plus grande par rapport à la référence dilatée. On en déduit que les contours obtenus sont globalement éloignés de 2 sub-pixels pour ces méthodes. Pour cette image de test, la méthode level set permet d'obtenir les contours les plus proches de ceux de l'image originale. La figure 39 présente les différents contours obtenus pour plusieurs objets de l'image de test.

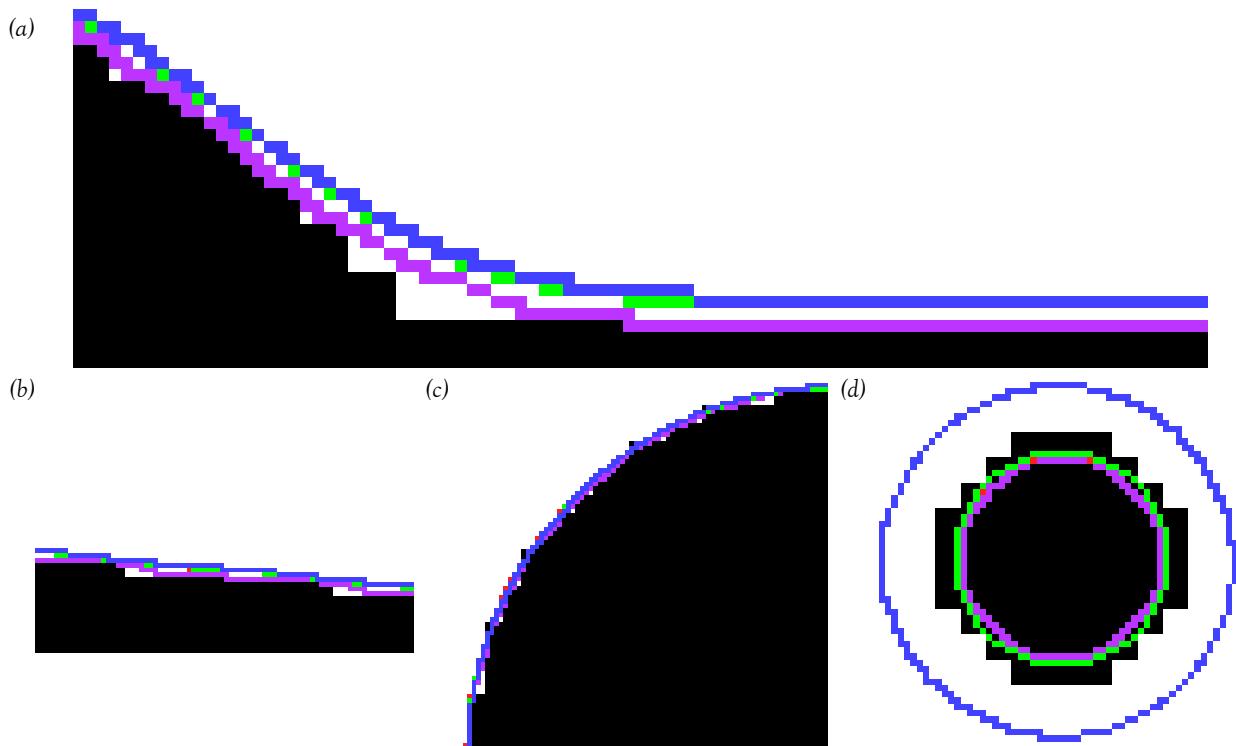


Figure 39. Contours obtenus par les différentes méthodes pour l'image test. (a) Portion de ligament (b) Rectangle incliné (c) Portion du disque de diamètre 40 pixels (d) Disque de diamètre 15 pixels.

La méthode level set fournit un contour « interne » aux objets : la majorité des sub-pixels des contours obtenus sont inclus dans les objets, comme le montre notamment la ligne violette en figure 39(a) et (b). Ces images montrent que les autres méthodes fournissent un contour « externe » : la majorité des sub-pixels des contours obtenus sont en-dehors des objets. On observe que les contours fournis par les autres méthodes sont majoritairement confondus, notamment les méthodes bi-cubiques et A+ pour lesquelles les valeurs de PSNR mesurées sont égales. Pour les images en figure 39(a) et (b), on note la présence d'une ligne sub-pixels vide séparant les contours des autres méthodes par rapport à l'image originale, indiquant que les contours obtenus par les autres méthodes sont éloignés de 2 sub-pixels, confirmant l'interprétation des mesures de PSNR.

La figure 39(c) montre un quart de la grande goutte de 40 pixels de diamètre. La méthode level set fournit à nouveau un contour « interne » pour cet objet. On note ici que les contours obtenus avec les

autres méthodes se sont rapproché du résultat donné par la méthode level set : la ligne de pixel vide observé précédemment n'est plus présente. Les valeurs de PNSR plus resserrées pour ces méthodes illustrent cette observation.

La figure 39(c) montre les résultats pour le disque de 15 pixels de diamètre. Ce disque est présent dans l'ensemble « 5 gouttes » et absent de l'ensemble « 4 gouttes ». Ce disque permet de tester les méthodes pour un objet dont la taille caractéristique est proche de la largeur du filtre gaussien utilisé pour flouter l'image. On note ici que le contour obtenu avec la méthode développée au CORIA est nettement plus grand que ceux obtenus par les autres méthodes. La goutte obtenue présente un diamètre supérieur à la taille initiale de l'objet. La goutte est ici considérée comme étant en défaut de mise au point par la méthode, augmentant le diamètre associé à cet objet. Les autres méthodes présentent aussi leurs limites : elles sous-estiment le diamètre de la goutte d'au moins 4 sub-pixels.

La méthode level set est la seule parmi les méthodes testées à présenter un contour interne, ce qui influence grandement les valeurs de PNSR. On va dilater d'un sub-pixel l'image segmentée obtenue avec cette méthode pour déterminer les contours externes des objets, permettant de les comparer avec les contours externes obtenus avec les autres méthodes. Les mesures de PSNR pour l'image level set dilatée sont données en tableau 2. On remarque que le PSNR de l'image totale a diminué de 3,8 dB, indiquant que le nombre de pixels en-dehors des objets a doublé, ce qui est attendu. Cette diminution du PSNR est observée pour tous les objets testés et vaut globalement 3 dB sauf pour le rectangle qui voit une diminution double. Le contour du rectangle a très bien été retrouvé par la méthode level set initialement, générant très peu de pixels présentant des intensités différentes entre l'image segmenté level set et l'image originale, comme l'indique la haute valeur de PSNR. La dilatation du contour a donc eu pour cet objet un impact plus important sur la mesure de PSNR. En comparant les résultats obtenus avec la méthode level set dilatée aux autres, on constate que les valeurs de PSNR sont équivalentes avec les autres méthodes pour tous les objets de l'image de test. La comparaison des contours externes montre que les méthodes présentées ici produisent des contours voisins et fidèles aux objets tant que leur dimension caractéristique n'est pas inférieure à la largeur de la réponse du système optique utilisé. De plus, les contours définis ont une précision d'un quart de pixel.

Le temps mis par chacune de ces méthodes a été mesuré pour l'image test. La méthode développée au CORIA et la sur-résolution bi-cubiques ont donné un résultat en 5 secondes, 12 secondes pour la sur-résolution A+ et 40 pour la méthode level set.

La figure 40 présente des parties d'une image de nappe liquide. Les contours sub-pixels ont été calculés avec les quatre méthodes de segmentations. Comme pour l'image de test, les contours obtenus sont voisins, cependant ils ne sont plus aussi bien hiérarchisés par rapport au cas test : les contours se croisent et se chevauchent régulièrement, comme visible en figure 40(a), (b) et (c). A un endroit donné sur une interface liquide-gaz de la nappe, on remarque que la distance séparant le contour le plus interne à la nappe du contour le plus externe est au plus de deux sub-pixels. Ce résultat confirme les observations faites sur l'image de test et valide l'utilisation de ces méthodes pour faire une détection de contours sub-pixels.

La figure 40(d) montre que les méthodes de sur-résolution trouvent plus de contours correspondant à des zones de réfractions de lumière dans le liquide, la méthode A+ semblant les découper plus finement

que la méthode bi-cubique. La méthode level set trouve la plupart de ces zones de réfractions à conditions qu'elles soient suffisamment grandes et d'intensité lumineuse suffisamment élevée. La méthode développée au CORIA permet d'éliminer ces zones incluses dans les objets liquides : seules celles touchant le bord de l'image sont conservées, comme le montre la figure 40(d). La figure 40(b) montre les contours trouvés pour un fin ligament liquide. Les différentes méthodes trouvent des contours de forme similaire mais l'écart entre ces contours est plus grand, on notera que c'est le contour obtenu avec la méthode développée au CORIA qui présente une plus grande différence par rapport aux 3 autres, comme pour la goutte de 15 pixels de diamètre étudiée pour l'image test. Enfin, la figure 40(c) présente des gouttes séparées et proches les unes des autres. Dans cette situation, la méthode développée au CORIA présente quelques difficultés à séparer les contours de ces objets contrairement aux autres méthodes, illustrant les problèmes de détection d'interface.

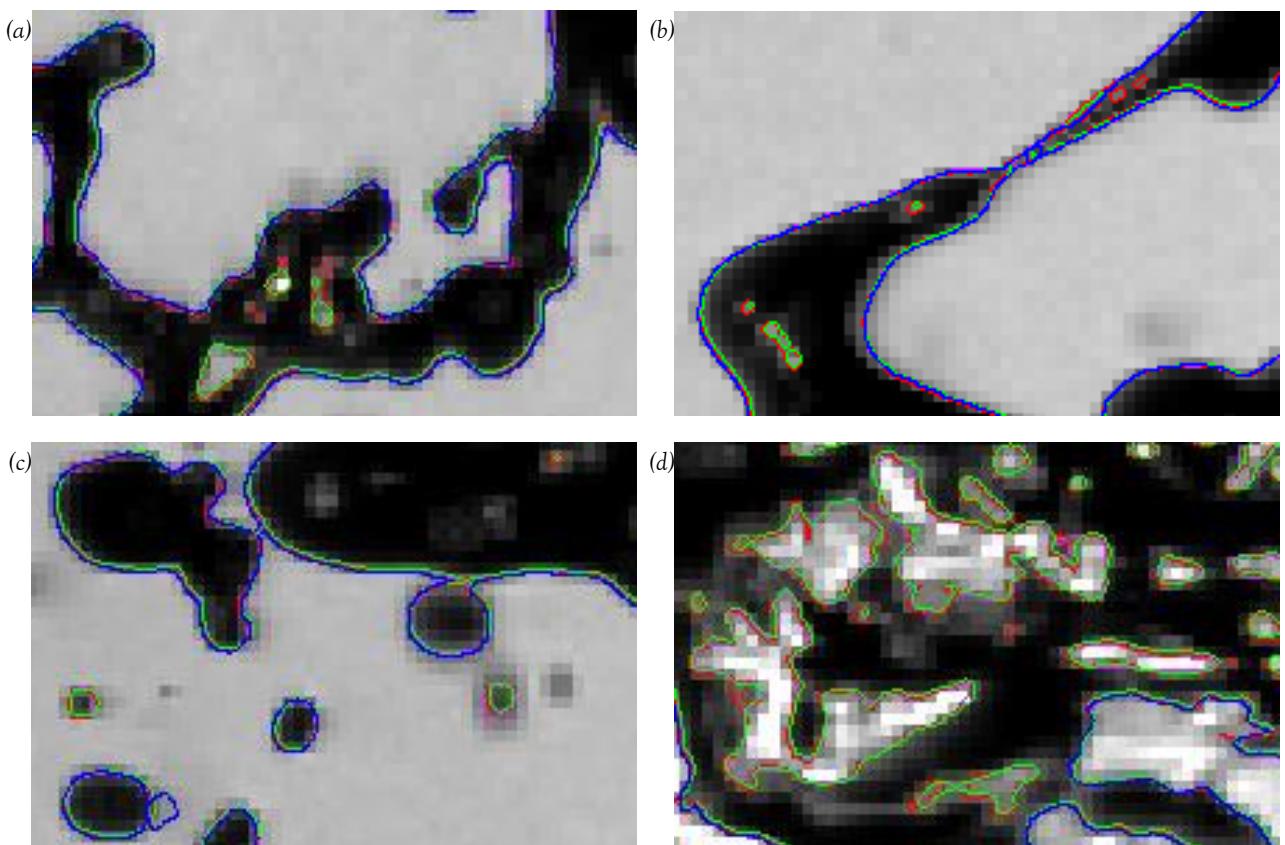


Figure 40. Contours trouvés par les différentes méthodes pour une image réelle : triple disque eau 2bars (a) Structures ligamentaires fortement déformées (b) Fin ligament (c) Ensembles de gouttes (d) Portion de nappe liquide turbulente.

Les temps de calculs des 4 méthodes sont similaires à ceux trouvés lors de la segmentation de l'image test (les 2 images ayant la même taille initiale). Aux vues de ces résultats, le choix d'une méthode de segmentation aura peu d'influence sur le contour détecté, à quelques cas très particuliers présentés ci-dessus, ce qui permet de valider la procédure de segmentation sub-pixel de la méthode développée au CORIA. La principale différence entre ces méthodes de segmentations provient du temps de calcul nécessaire à leur exécution. Comme on pouvait s'y attendre, la méthode level set itérative est la plus lente à fournir le résultat, 10 fois plus lente que la méthode la plus rapide : méthode de sur-résolution bi-cubique. En plus d'être aussi rapide que la méthode de sur-résolution bi-cubique, la méthode développée au CORIA permet l'utilisation d'outils d'analyses morphologiques complémentaires à la segmentation Blaisot (2012) (mesures et dispersion de tailles de gouttes notamment). Elle sera par conséquent conservée pour le traitement sub-pixel d'images expérimentales.

3.4. Mesure de la distribution d'échelle 3D

L'analyse multi-échelles permet d'analyser la forme des structures liquides et leur évolution dans le temps. Dans le cas expérimental, seul des analyses 2D issues de la projection de systèmes liquides sur une image (Dumouchel (2017)) ont été réalisées. Le développement de l'analyse multi-échelle 3D permet d'analyser les propriétés tridimensionnelles des objets quand elles sont disponibles et complètes ainsi l'analyse 2D. Dans le cas d'objets liquides de forme a priori connue (goutte sphérique, ligament cylindrique...), il est envisageable d'accéder à l'information 3D à partir de l'image lorsque la plus petite dimension de l'objet est dans la direction perpendiculaire au plan de l'image. On utilise des procédures basées sur la détermination du squelette d'un objet pour accéder à ces informations 3D pour pouvoir mener une analyse multi-échelle 3D.

3.4.1. Détermination du squelette d'un objet

Le squelette d'un objet est l'ensemble des centres de ses sphères maximales. Une sphère incluse dans un objet est dite maximale s'il n'existe aucune autre sphère incluse dans l'objet la contenant entièrement (Calabi (1965)). La version pondérée du squelette consiste à également connaître le rayon de la sphère maximale associé à chaque point du squelette. La figure 41 montre le squelette d'un objet pris sous différents angles de vue. On note que le squelette évolue en fonction de la prise de vue. En effet, la projection d'un objet 3D sur un plan image peut provoquer une perte d'informations dans la direction de la projection. Il existe cependant une situation pour laquelle le squelette pondéré d'un objet 3D est conservé lors de la projection de l'objet sur une image. Il a été montré (Durix et al. (2015)) que les conditions nécessaires à celle équivalence sont les suivantes :

- Non auto-occultation de l'objet lors de sa projection : si une partie de l'objet est masqué par lui-même, cette partie sera absente sur la projection, il y a alors perte d'informations lors de la projection.
- Le squelette de l'objet 3D se réduit à un ensemble de lignes et non de surfaces (cas général pour le squelette d'un objet 3D). Cette condition implique que l'objet appartienne à la famille des surfaces canal : une surface canal est définie comme une enveloppe continue de sphères Peternell et al. (1997). En effet, si le squelette d'un objet 3D est un ensemble de lignes, sa projection sera aussi un ensemble de lignes (cas général du squelette d'un objet 2D).
- Dans le cas d'une projection orthographique (par exemple un montage optique par transmission qui ne présente pas de variations du grandissement le long de l'axe optique), s'il existe au moins 2 points distincts P et P' appartenant à la surface de l'objet 3D et à la même sphère de centre $C(t)$, tels que $\overrightarrow{PC(t)}$ et $\overrightarrow{P'C(t)}$ soient orthogonaux à la direction de la projection (voir figure 42 et Durix et al. (2015) pour plus de détails).

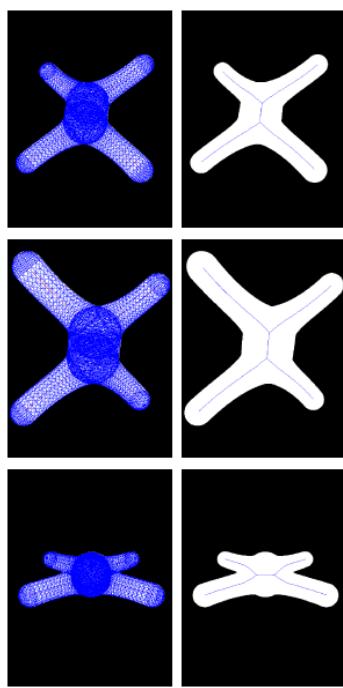


Figure 41. Prises de vues différentes d'un même objet et squelettes associés, Durix et al. (2016).

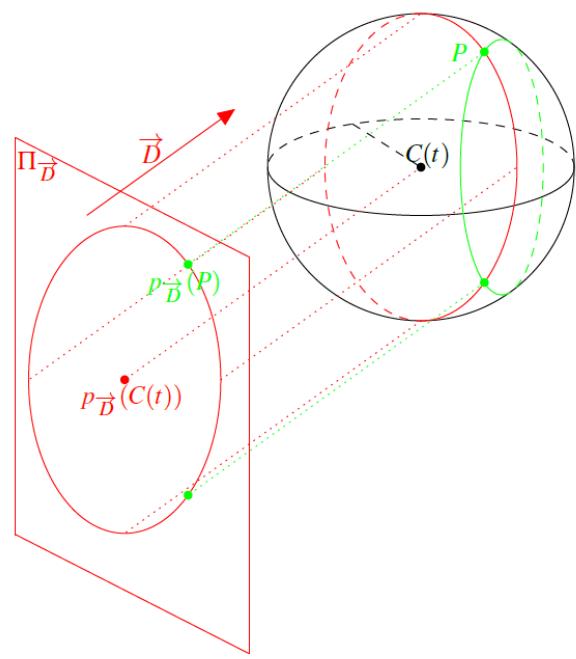


Figure 42. Projection de 2 points P d'une surface canal, Durix et al. (2015).

Ces conditions sont suffisantes pour réaliser la reconstruction du squelette pondéré 3D d'un objet à partir d'au moins deux projections différentes de celui-ci (Durix et al. (2015) et Durix et al. (2016)). En effet, la reconstruction du squelette compense alors les pertes éventuelles dû aux différentes projections (figure 41). Dans le cas où une seule projection est disponible, pour que le squelette pondéré projeté soit identique au squelette pondéré curviligne de l'objet 3D, il faut rajouter une condition supplémentaire. Il faut que le squelette curviligne de l'objet 3D appartienne à un plan orthogonal à la direction de projection dans le cas d'une projection orthographique. Dans cette situation, le squelette pondéré est intégralement projeté sur le plan de l'image sans déformation. Dans notre situation, nous disposons d'une seule vue des objets à étudier, cette dernière condition sur le squelette constituera alors notre principale hypothèse de travail pour la suite.

3.4.2. Mesure du volume et de la surface d'un objet à partir de son squelette

Le lien entre le squelette pondéré d'un objet 3D et sa projection 2D étant posé, il faut relier les informations du squelette pondéré d'un objet à son volume et sa surface afin de pouvoir appliquer un calcul multi-échelles 3D sur celui-ci. En reprenant la définition du squelette pondéré à partir des sphères maximales incluses dans l'objet, on considère que le calcul du volume et de la surface de cet objet revient à calculer ces grandeurs pour un ensemble de sphères imbriquées. Le calcul exact a été résolu pour un ensemble quelconque de sphères (Petitjean (1994), Petitjean (2013)). L'auteur a d'ailleurs mis à disposition un programme permettant ce calcul à partir des coordonnées spatiales des points du squelette et des valeurs des rayons de sphères associées. Son implémentation numérique pose encore toutefois problème : le calcul du volume et de la surface d'un ensemble de sphère diverge si trop de points du squelette sont coplanaires. Dans notre situation, tous les squelettes que nous avons issus

de projection 2D, impliquant que tous les points de ces squelettes sont coplanaires. Il a donc fallu trouver une alternative à ce calcul exact.

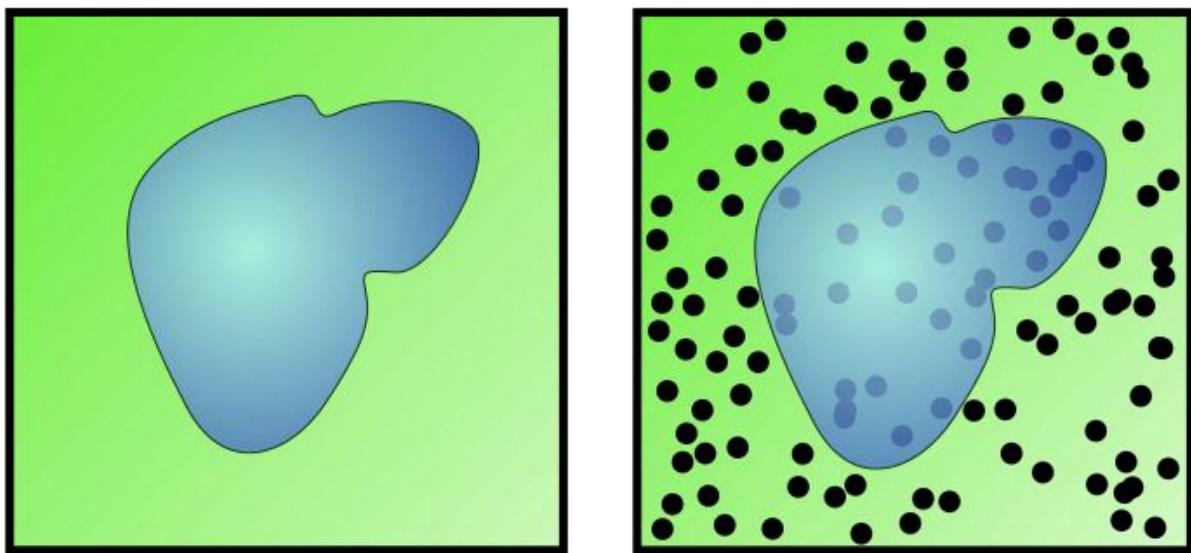


Figure 43. Illustration de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul de volume d'objets (source : commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=383568).

Une méthode de calcul approchée a été choisie : la méthode de Monte-Carlo (Metropolis et al. (1949)). Elle mesure l'espérance mathématique d'une grandeur I à partir de la réalisation de N tirages d'une variable aléatoire indépendante. Dans notre situation et pour la mesure du volume d'un objet, cela consiste à définir une boîte de volume connu dans laquelle l'objet à étudier est inclus. On tire un point de coordonnées aléatoires dans cette boîte et on regarde si ce point appartient ou non à l'objet. Ce tirage est effectué N fois et le volume de l'objet correspond alors à la probabilité de tirer un point dans l'objet multiplié par le volume de la boîte (figure 43). Cette méthode, présentée également à titre de comparaisons par Petitjean (2013) pour son calcul exact de volume et surface d'ensembles de sphères imbriquées, a comme avantage d'être simple à mettre en place, d'être de convergence $N^{-1/2}$ et de temps de calcul $\sigma(N)$ connus. Cela signifie que si on multiplie par 100 le nombre de points tirés dans la boîte, on améliore la convergence du résultat d'un facteur 10 et que le temps de calcul nécessaire est multiplié par 100.

Dans notre situation, lors du tirage d'un point, la distance entre ce dernier et chaque point du squelette est calculée et comparé au rayon de la sphère maximale correspondante pour savoir si le point tiré est inclus ou non dans l'objet. Le temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo va donc être multiplié par le nombre M de points qui compose le squelette étudié ($\sigma(MN)$). Le calcul multi-échelle que l'on souhaite appliquer à cet objet va nécessiter de calculer le volume de celui-ci à chaque érosion. Si on considère qu'il faut éroder K fois l'objet pour obtenir sa distribution d'échelle complète, cela multiplie encore d'autant le temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo ($\sigma(KMN)$). Cela donne un ordre d'idée du temps maximal nécessaire à la méthode de Monte-Carlo pour calculer la distribution d'échelle d'un objet sans optimisation.

3.4.3. Mesure de la distribution d'échelle à partir des informations du squelette

A partir des informations du squelette pondéré, on peut significativement réduire ce temps de calcul. La première amélioration consiste à considérer uniquement les sphères les plus proches du point tiré pour savoir si le point appartient à l'objet. Pour cela on utilise la plus grande valeur de rayon de sphère du squelette pondéré afin de définir une zone d'interaction autour du point tiré. En effet, pour qu'un point tiré puisse appartenir à l'objet, la distance entre ce dernier et les points du squelette ne peut pas être supérieure au plus grand rayon de sphère ayant servi à la construction du squelette pondéré de cet objet, le point tiré est alors en dehors de l'objet. La seconde amélioration consiste à calculer la distance minimale entre le point tiré et l'interface de l'objet, plutôt que de regarder si à chaque érosion le point appartient toujours ou non à l'objet. Bien que le squelette pondéré d'un objet ne contienne pas directement l'information de la position de sa surface, on démontre que la distance minimale entre un point P appartenant à l'objet et sa surface vaut :

$$PB = \max(\{R_i - PC_i\}) \quad (93)$$

Avec PB la distance minimale entre le point tiré P et l'interface de l'objet, C_i le point du squelette avec R_i son rayon associé et pour tous C_i tel que P soit inclus dans la sphère de centre C_i . Cette amélioration permet de s'affranchir de l'étape d'érosion de l'objet, donnant alors directement un vecteur de taille N_{objet} contenant la distance à l'interface de chaque point tiré se trouvant dans l'objet. A partir de ce vecteur des distances, il ne reste plus qu'à déterminer son histogramme dont la largeur de classe correspond au pas d'érosion Δd du calcul multi-échelle. Chaque classe de cet histogramme des distances à l'interface correspond alors à la fraction de volume érodée N_i/N_{objet} entre 2 échelles successives. A partir de cet histogramme, la distribution cumulative d'échelles 3D correspond à la somme cumulative de cet histogramme des distances à l'interface :

$$E_3(d) = \sum_{i=0}^{i=d/\Delta d} \frac{N_i}{N_{objet}} \quad (94)$$

Démonstration de la distance minimale entre un point P appartenant à l'objet et sa surface :

Soit Ω un objet quelconque et Γ_Ω sa frontière (son interface). Soit un point $P \in \Omega$ et un point $B \in \Gamma_\Omega$ tel que PB soit la distance minimale interne à l'objet entre le point P et l'interface Γ_Ω . Soit C_i un point du squelette de Ω , R_i le rayon associé au point du squelette C_i et Γ_{C_i} l'interface de la sphère de centre C_i . Pour tout point C_i du squelette, on définit A_i le point à l'interface Γ_{C_i} tel que $\overrightarrow{C_i P}$ et $\overrightarrow{C_i A_i}$ soient colinéaires et de même sens. Alors PA_i représente la distance à l'interface Γ_{C_i} .

Si $C_i P > R_i$, alors P est extérieur à la sphère de centre C_i , comme montré en figure 44(a). La distance PA_i , distance à l'interface Γ_{C_i} , ne peut pas définir la distance minimale interne PB entre le point P et l'interface Γ_Ω , même si $P \in \Omega$. Il ne reste plus que les cas où $C_i P \leq R_i$ à traiter, cas où P est inclus dans la sphère de centre C_i .

Considérons tous points C_i tels que $BC_i = R_i$, ce qui implique que B appartient à l'interface de la sphère Γ_{C_i} , comme montré en figure 44(b). On a toujours A_i tel que $\overrightarrow{C_iP}$ et $\overrightarrow{C_iA_i}$ soient colinéaires et de même sens. Comme B et $A_i \in \Gamma_{C_i}$, on a alors $PA_i \leq PB$ avec $PA_i = PB$ si et seulement si A_i et B sont confondus. Donc $\forall C_i$ tel que $B \in \Gamma_{C_i}$, la distance $PB = \max(\{PA_i\})$.

Considérons tous points C_i tels que $BC_i > R_i$, ce qui implique que B n'appartient pas à l'interface de la sphère Γ_{C_i} et soit extérieur à celle-ci, comme montré en figure 44(b). A_i et B ne peuvent pas être confondus et on a alors toujours $PB > PA_i$. Ceci combiné au résultat précédent, on a toujours $\forall C_i, PB = \max(\{PA_i\})$.

Le cas où $BC_i < R_i$ n'est pas possible car cela veut dire que $B \notin \Gamma_\Omega$.

Conclusion : $\forall P \in \Omega$ et $\forall C_i$ tel que $C_iP \leq R_i$, la distance minimale entre le point P et l'interface Γ_Ω est donnée par $PB = \max(\{PA_i\})$.

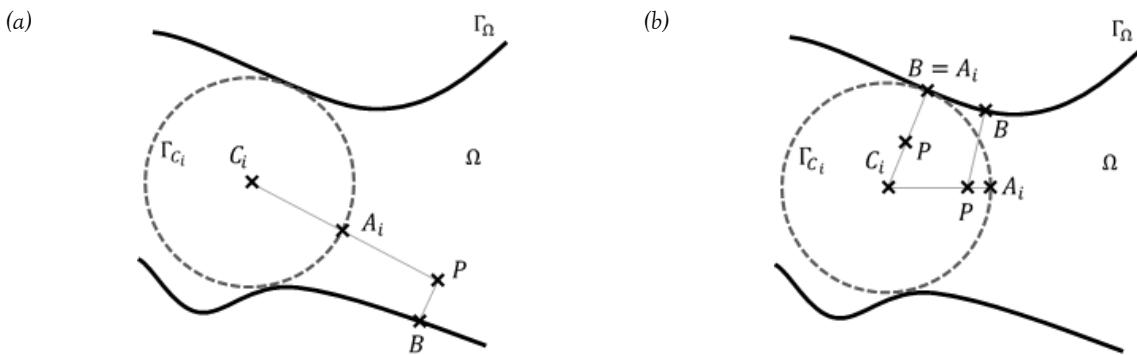


Figure 44. Mesure de la distance à l'interface d'un point appartenant à un objet. (a) P n'est pas inclus dans le cercle délimité par Γ_{C_i} (b) P est inclus dans le cercle délimité par Γ_{C_i} .

3.5. Validation du calcul multi-échelles via la méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo étant une méthode statistique par nature, plusieurs tests ont été réalisés afin de calibrer la méthode. Des objets synthétiques, dont la distribution d'échelles théorique est connue, ont été utilisés pour valider le calcul de distribution d'échelles par la méthode de Monte-Carlo. Pour ces objets synthétiques, le nombre de points utilisés dans la méthode a été varié afin de visualiser l'influence de ce paramètre sur la distribution résultante. Enfin, un ligament expérimental axisymétrique est utilisé à titre de comparaison. Ces calculs ont été réalisés sur un ordinateur de bureau équipé d'un processeur Intel Xeon E5-1603 et de 16 Go de RAM sous machine virtuelle Ubuntu 14.04 LTS. Les langages Python 3 et Fortran ont été utilisé pour programmer et optimiser la méthode de Monte-Carlo.

3.5.1. Cas synthétiques

Les objets synthétiques utilisés sont les suivants :

- Ligament cylindrique de diamètre constant, plusieurs valeurs de diamètres sont testées, longueur fixée à 315 pixels. Le squelette de ces objets comporte 315 points.
- Ensemble de 40 ligaments cylindriques, avec une distribution équiprobable des diamètres des ligaments jusqu'à un diamètre de 80 pixels, longueur fixée à 100 pixels. Le squelette de cet ensemble d'objets comporte 4000 points.
- Sphère, plusieurs valeurs de diamètres sont testées. Le squelette de ces objets comporte 1 point.
- Ensemble de 40 sphères, avec une distribution équiprobable des diamètres des sphères jusqu'à un diamètre de 80 pixels. Le squelette de cet ensemble d'objets comporte 40 points.

Les distributions d'échelles 3D analytique de ces objets synthétiques sont indiquées en Ch.2 et rappelées en tableau 3.

	Ligament cylindrique	Ensemble équiprobable de ligaments	Sphère	Ensemble équiprobable de sphères
Distribution d'échelle 3D $e_3(d)$	$\frac{2}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}}\right)$	$\frac{3}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}}\right)^2$	$\frac{3}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}}\right)^2$	$\frac{4}{D_{max}} \left(1 - \frac{d}{D_{max}}\right)^3$

Tableau 3. Distribution théoriques pour des objets synthétiques.

Afin de pouvoir comparer les distributions d'échelles obtenues en fonction du nombre de points tirés par la méthode, il a été choisi de ramener ce nombre de points à une densité relative moyenne. Cette densité est exprimée en points par voxels (« pixel 3D »), le voxel étant l'élément unitaire qui compose un objet 3D comme le pixel est l'élément unitaire qui compose une image 2D. Cette densité a été variée de 10^3 à 10^2 ou 10^3 points/voxels en fonction des objets, l'ordinateur ne pouvant pas traiter plus de 10^9 points au maximum. La figure 45 présente les résultats de distributions d'échelles 3D pour quelques-uns de ces objets.

Pour tous les objets synthétiques, les distributions d'échelles calculées avec la méthode de Monte-Carlo présentent un bon accord avec leur distribution d'échelles analytique respective, validant la méthode de calcul. Avec une densité de point constante, la taille de l'objet semble influer sur la précision du résultat : plus l'objet est grand, meilleur semble être la distribution d'échelles. Ceci est nettement visible pour les plus faibles densités de points lorsque l'on compare les 2 sphères et les 2 ligaments de la figure 45. Pour affiner cette remarque, la méthode des moindres carrés est utilisée pour regarder la différence entre les distributions d'échelles calculées avec la méthode de Monte-Carlo $e_{3_{MC}}$ et l'expression analytique associée $e_{3_{théo}}$:

$$S_\delta = \sum_{d=0}^{d=+\infty} (e_{3_{MC}}(d) - e_{3_{théo}}(d))^2 \quad (95)$$

Comme le montre la figure 46, augmenter la densité de points dans la méthode de Monte-Carlo permet de diminuer la valeur de S_δ , montrant la convergence de la méthode. De plus, plus le diamètre de l'objet est grand, plus faible est la valeur de S_δ pour une densité donnée. Pour les cylindres, S_δ décroît jusqu'à atteindre un plateau constant aux grandes valeurs de densité de points. La valeur de ce plateau décroît avec l'augmentation du diamètre de l'objet. Il est également constaté que plus le diamètre du cylindre est grand, plus la densité de points nécessaire pour atteindre ce plateau est grande (ce plateau est atteint à partir d'une densité de 10^1 pour tous les ligaments testés). Dans le cas des sphères, bien que le plateau semble être décrit à de plus grandes valeurs de densité de points par rapport aux cylindres de même diamètre, les mêmes évolutions sont constatées.

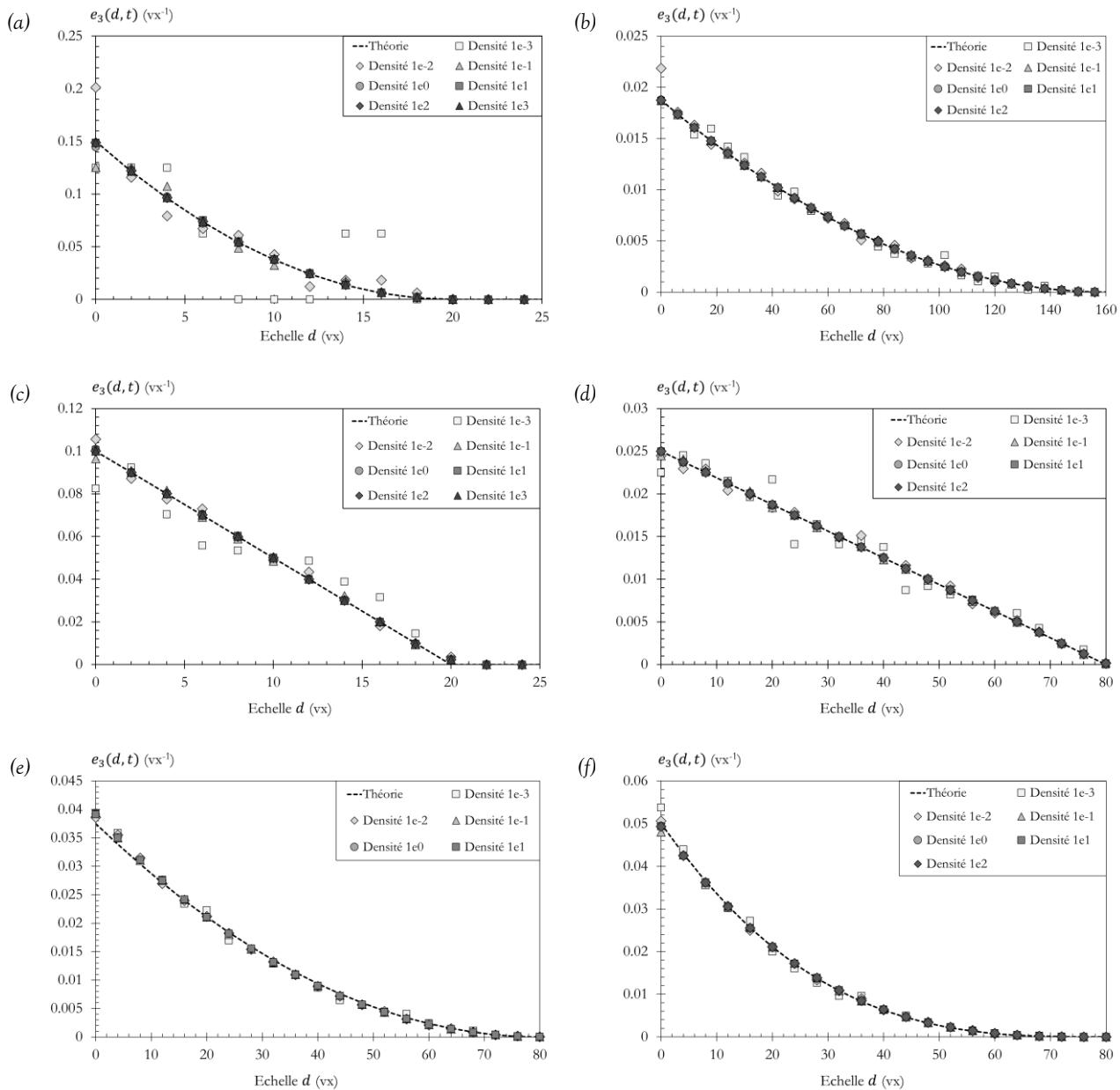


Figure 45. Comparaisons entre la distribution d'échelle 3D théorique et le calcul par Monte-Carlo, densité exprimée en points/voxel (a) Sphère de 20 voxels de diamètre (b) Sphère de 160 voxels de diamètre (c) Cylindre de 20 voxels de diamètre (d) Cylindre de 80 voxels de diamètre (e) Ensemble de sphères (f) Ensemble de cylindres.

De façon globale, l'augmentation de la densité de points permet d'améliorer la précision de la mesure de la distribution d'échelles, et ce, jusqu'à une densité limite à partir de laquelle la résolution de l'objet ne permet pas d'obtenir une meilleure précision.

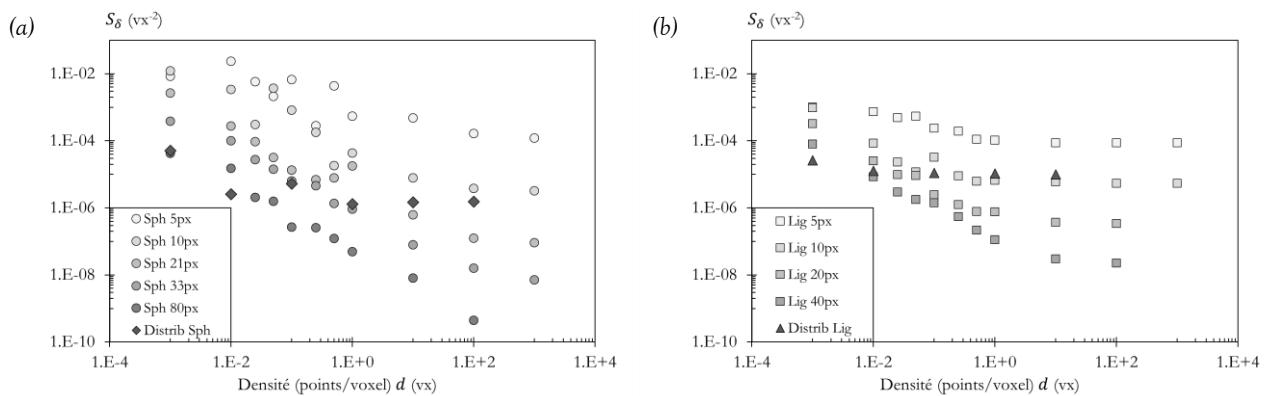


Figure 46. Influence de la densité de points sur la somme des moindres carrés (a) Sphères de différents diamètres et ensemble de sphères
(b) Cylindres de différents diamètres et ensemble de cylindres.

3.5.2. Influence de la densité de points sur les dérivées successives de $e_3(d)$

Bien que la distribution d'échelles $e_3(d)$ donne déjà un certain nombre d'informations, d'autres informations sont accessibles à partir de l'étude des dérivées de cette distribution $e_3(d)$. Il faut donc maintenant étudier comment se comportent ces dérivées en fonction de la densité de points. Pour cela, les dérivées premières par rapport à l'échelle d vont être calculées, ainsi que les distributions équivalentes de cylindres (proportionnelles aux dérivées secondes des distributions d'échelles) de ces objets synthétiques. La figure 47 présente la dérivée première $e'_3(d)$ pour des sphères et des cylindres de différents diamètres. Comme pour la distribution d'échelles $e_3(d)$, le résultat obtenu avec la méthode de Monte-Carlo approxime mieux le calcul analytique en augmentant la densité de points. Si on excepte les valeurs de $e'_3(d)$ aux échelles extrêmes ($d = 0$ et $d = D_{max}$), on constate que les distributions obtenues avec les densités de points inférieures à 10^0 points/voxel présentent des différences significatives par rapport au calcul analytique, contrairement aux densités supérieures à 10^1 points/voxel qui sont quasiment confondues avec la courbe du calcul analytique. Pour l'échelle $d = D_{max}$, la dérivation numérique retourne une valeur lissée pour l'échelle où la discontinuité est présente, tandis que $e'_3(d)$ est mal déterminé à cause de la limite en $d = 0$ du domaine de définition de la distribution d'échelles $e_3(d)$. La figure 48, présentant la distribution équivalente de cylindres de l'objet, confirme encore davantage ces résultats. Dans le cas de la sphère, il est noté en plus que même les plus fortes densités de points présentent des écarts marqués vis-à-vis du calcul analytique.

Le tableau 4 et le tableau 5 présentent respectivement le temps de calcul et le nombre total de points utilisés dans la méthode Monte-Carlo lors du calcul des distributions d'échelles des différents objets en fonction de la densité de points choisie. Pour les faibles densités de points (inférieures à 10^1), le temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo est globalement constant et inférieur au dixième de seconde pour tous les objets. Pour les densités de points supérieures, le temps de calcul augmente jusqu'à logiquement devenir proportionnel au nombre de points à partir d'une densité de 10^1 points/voxel. Le même constat peut être fait lorsqu'on s'intéresse à la variation de la taille de l'objet pour une densité de points équivalente. En effet, le temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo ne dépend pas de la taille de l'objet pour les faibles densités de points contrairement aux grandes densités où un objet plus

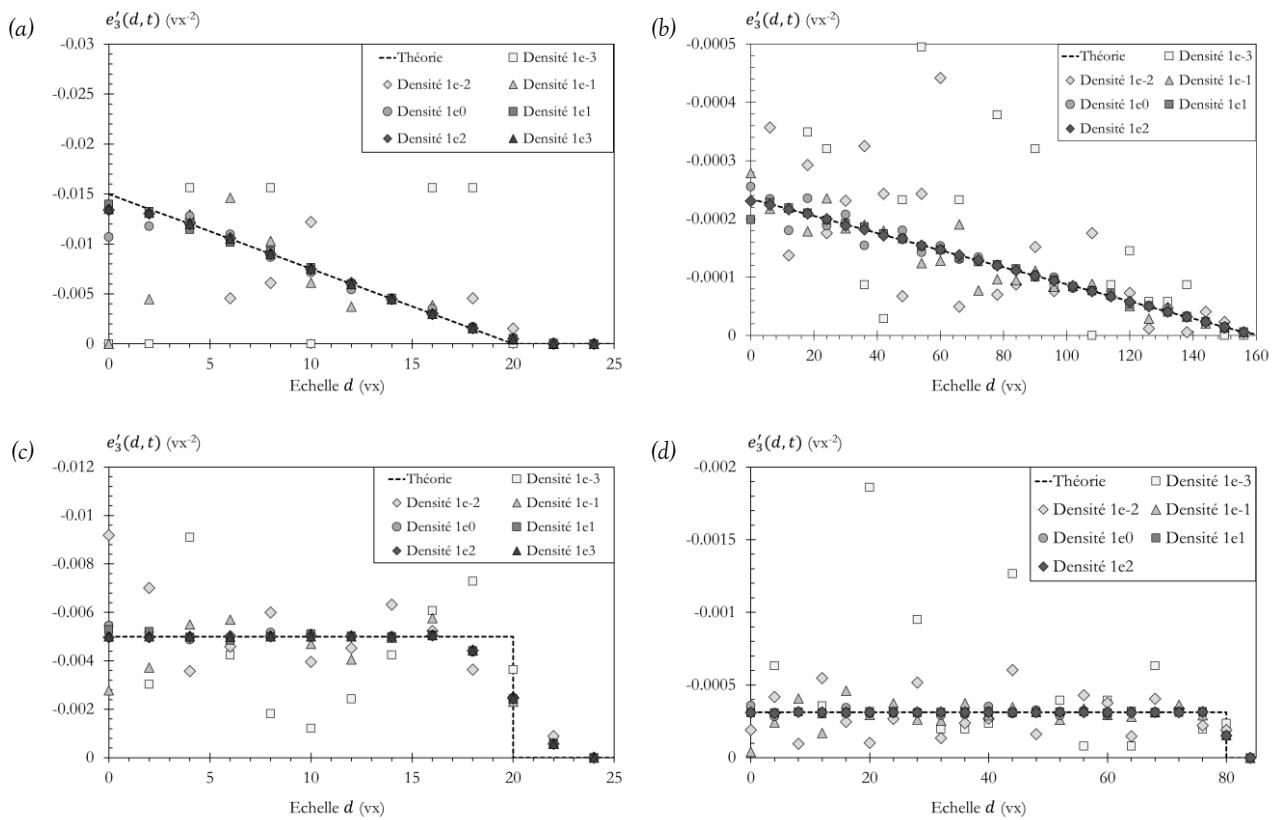


Figure 47. Comparaisons entre la dérivée de distribution d'échelle 3D théorique et le calcul par Monte-Carlo, densité exprimée en points/voxel (a) Sphère de 20 voxels de diamètre (b) Sphère de 160 voxels de diamètre (c) Cylindre de 20 voxels de diamètre (d) Cylindre de 80 voxels de diamètre.

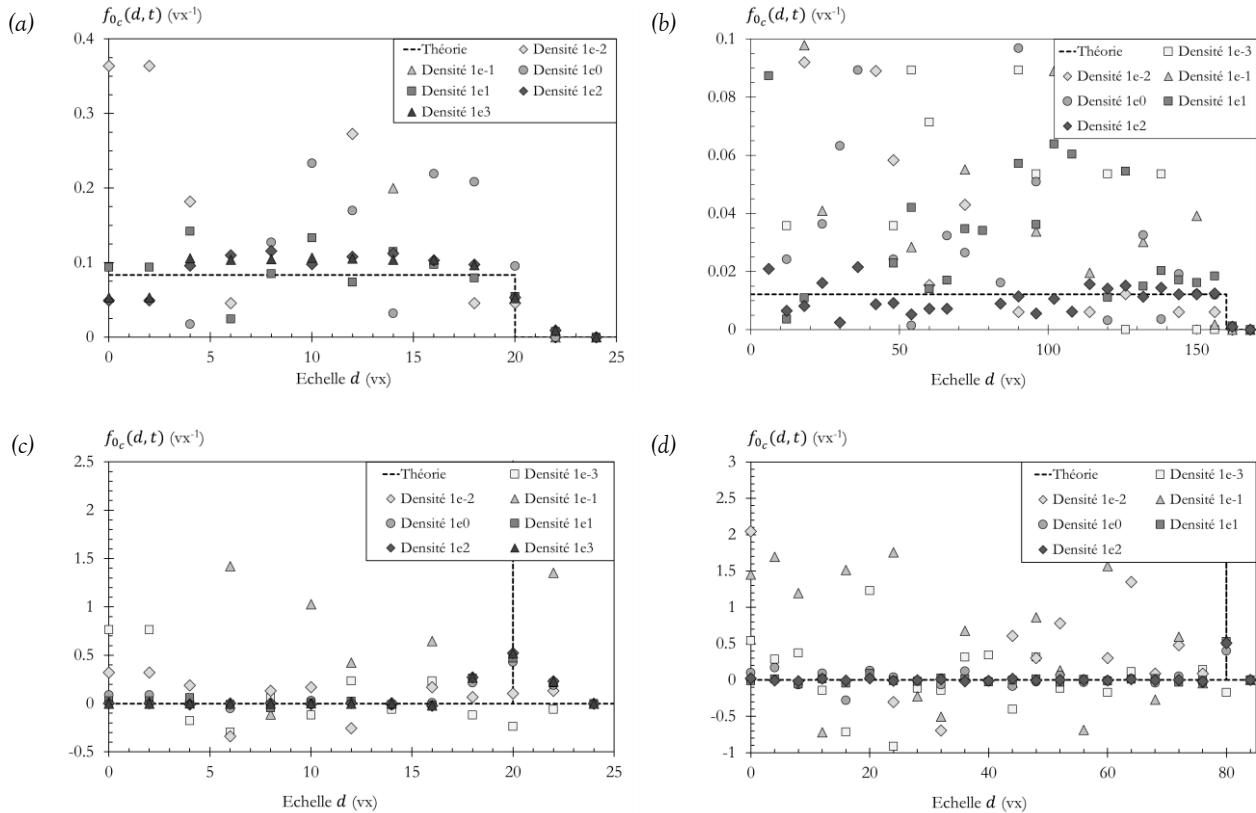


Figure 48. Comparaisons entre la distribution équivalente de cylindres théorique et le calcul par Monte-Carlo, densité exprimée en points/voxel (a) Sphère de 20 voxels de diamètre (b) Sphère de 160 voxels de diamètre (c) Cylindre de 20 voxels de diamètre (d) Cylindre de 80 voxels de diamètre.

grand nécessitera un calcul plus long (plus de points sont tirés lorsque l'objet augmente en taille, comme montré en tableau 5).

		Temps de calcul en seconde										
Densité		1,0 10 ⁻³	1,0 10 ⁻²	2,5 10 ⁻²	5,0 10 ⁻²	1,0 10 ⁻¹	2,5 10 ⁻¹	5,0 10 ⁻¹	1,0 10 ⁰	1,0 10 ¹	1,0 10 ²	1,0 10 ³
	Diamètre (voxel)											
Ligament $L = 315 \text{ vx}$	10	3,09 10 ⁻²	4,85 10 ⁻²	3,13 10 ⁻²	6,41 10 ⁻²	7,56 10 ⁻²	4,03 10 ⁻²	5,23 10 ⁻²	1,18 10 ⁻¹	6,18 10 ⁻¹	5,09 10 ⁰	5,19 10 ¹
	20	4,51 10 ⁻²	5,27 10 ⁻²	6,57 10 ⁻²	8,23 10 ⁻²	1,03 10 ⁻¹	1,43 10 ⁻¹	1,78 10 ⁻¹	3,88 10 ⁻¹	2,18 10 ⁰	1,83 10 ¹	1,80 10 ²
	40	6,72 10 ⁻²	7,76 10 ⁻²	5,36 10 ⁻²	7,89 10 ⁻²	9,39 10 ⁻²	2,07 10 ⁻¹	7,01 10 ⁻¹	9,67 10 ⁻¹	9,55 10 ⁰	6,98 10 ¹	8,19 10 ²
	80	3,84 10 ⁻²	7,51 10 ⁻²	9,30 10 ⁻²	1,74 10 ⁻¹	4,22 10 ⁻¹	1,21 10 ⁰	2,47 10 ⁻⁰	4,05 10 ⁰	3,24 10 ¹	3,01 10 ²	-
Sphère	10	1,10 10 ⁻²	2,29 10 ⁻²	2,66 10 ⁻²	1,09 10 ⁻²	1,11 10 ⁻²	1,13 10 ⁻²	2,66 10 ⁻²	2,62 10 ⁻²	1,27 10 ⁻²	2,46 10 ⁻²	2,43 10 ⁻¹
	20	1,10 10 ⁻²	2,38 10 ⁻²	3,68 10 ⁻²	1,08 10 ⁻²	1,11 10 ⁻²	1,12 10 ⁻²	1,13 10 ⁻²	2,62 10 ⁻²	1,98 10 ⁻²	1,00 10 ⁻¹	1,19 10 ⁰
	42	1,09 10 ⁻²	2,99 10 ⁻²	2,39 10 ⁻²	1,11 10 ⁻²	1,17 10 ⁻²	1,31 10 ⁻²	1,52 10 ⁻²	7,15 10 ⁻²	9,37 10 ⁻²	9,90 10 ⁻¹	1,13 10 ¹
	66	1,11 10 ⁻²	2,40 10 ⁻²	3,00 10 ⁻²	1,25 10 ⁻²	1,42 10 ⁻²	1,93 10 ⁻²	2,73 10 ⁻²	1,22 10 ⁻¹	3,44 10 ⁻¹	3,90 10 ⁰	4,38 10 ⁻¹
	160	1,18 10 ⁻²	4,17 10 ⁻²	6,60 10 ⁻²	5,40 10 ⁻²	7,46 10 ⁻²	1,65 10 ⁻¹	2,62 10 ⁻¹	3,91 10 ⁻¹	5,11 10 ⁰	5,26 10 ¹	-
Distribution ligaments	80	4,74 10 ⁻¹	2,55 10 ⁰	-	-	2,57 10 ¹	-	-	2,35 10 ²	2,16 10 ³	-	-
Distribution sphères	80	2,75 10 ⁻¹	6,09 10 ⁻²	-	-	3,10 10 ⁻¹	-	-	2,09 10 ⁰	2,16 10 ¹	2,89 10 ²	-

Tableau 4. Temps de calcul, exprimé en seconde, de la distribution d'échelles 3D d'un objet à partir de son squelette via la méthode de Monte-Carlo.

Pour un type d'objet et un nombre de points total tiré N équivalent, regardons l'influence de la taille de l'objet sur le temps de calcul de la méthode (cases des 2 tableaux en vert). Aussi bien pour les sphères que pour les ligaments cylindriques, il n'y a pas de différence notable (autre que celle venant du nombre de point N) sur le temps de calcul de la méthode entre les différentes tailles d'objets. Ce résultat était attendu car il découle directement d'une des optimisations de calcul mise en place dans la méthode de Monte-Carlo.

Enfin, pour un nombre de points total tiré N équivalent, regardons l'influence du nombre de points du squelette sur le temps de calcul de la méthode (cases des 2 tableaux en bleu). Dans cette situation, la sphère sert de référence car son squelette ne dispose que d'un seul point, comparé aux 3 autres types d'objets. Si on compare la sphère de 42 voxels seule avec l'ensemble distribué de sphères, le temps de calcul est doublé alors que le nombre de points de squelette a été multiplié par 40. Entre la sphère de 10 voxels et le ligament de 20 voxels, le temps de calcul est multiplié par 10 alors que le nombre de points du squelette est multiplié par 315. Et entre le ligament de 20 voxels et la distribution de ligament, l'augmentation du temps de calcul est similaire à l'augmentation du nombre de points du squelette.

On constate ici que la configuration du squelette de l'objet aura une influence sur le temps de calcul de la méthode, sans présenter de liens avec le nombre de points composant le squelette.

		Nombre de points total tirés										
Densité		1,0 10 ⁻³	1,0 10 ⁻²	2,5 10 ⁻²	5,0 10 ⁻²	1,0 10 ⁻¹	2,5 10 ⁻¹	5,0 10 ⁻¹	1,0 10 ⁰	1,0 10 ¹	1,0 10 ²	1,0 10 ³
	Diamètre (voxel)											
Ligament L = 315 vx	10	3,10 10 ¹	3,14 10 ²	7,85 10 ²	1,57 10 ³	3,14 10 ³	7,85 10 ³	1,57 10 ⁴	3,14 10 ⁴	3,14 10 ⁵	3,14 10 ⁶	3,14 10 ⁷
	20	1,26 10 ²	1,26 10 ³	3,14 10 ³	6,28 10 ³	1,26 10 ⁴	3,14 10 ⁴	6,28 10 ⁴	1,26 10 ⁵	1,26 10 ⁶	1,26 10 ⁷	1,26 10 ⁸
	40	5,02 10 ²	5,02 10 ³	1,26 10 ⁴	2,51 10 ⁴	5,02 10 ⁴	1,26 10 ⁵	2,51 10 ⁵	5,02 10 ⁵	5,02 10 ⁶	5,02 10 ⁷	5,02 10 ⁸
	80	2,01 10 ³	2,01 10 ⁴	5,02 10 ⁴	1,00 10 ⁵	2,01 10 ⁵	5,02 10 ⁵	1,00 10 ⁶	2,01 10 ⁶	2,01 10 ⁷	2,01 10 ⁸	-
Sphère	10	1,00 10 ⁰	1,00 10 ¹	2,50 10 ¹	5,00 10 ¹	1,00 10 ²	2,50 10 ²	5,00 10 ²	1,00 10 ³	1,00 10 ⁴	1,00 10 ⁵	1,00 10 ⁶
	20	8,00 10 ⁰	8,00 10 ¹	2,00 10 ²	4,00 10 ²	8,00 10 ²	2,00 10 ³	4,00 10 ³	8,00 10 ³	8,00 10 ⁴	8,00 10 ⁵	8,00 10 ⁶
	42	7,40 10 ¹	7,41 10 ²	1,85 10 ³	3,70 10 ³	7,41 10 ³	1,85 10 ⁴	3,70 10 ⁴	7,41 10 ⁴	7,41 10 ⁵	7,41 10 ⁶	7,41 10 ⁷
	66	2,87 10 ²	2,88 10 ³	7,19 10 ³	1,44 10 ⁴	2,88 10 ⁴	7,19 10 ⁴	1,44 10 ⁵	2,87 10 ⁵	2,87 10 ⁶	2,87 10 ⁷	2,87 10 ⁸
	160	4,10 10 ³	4,10 10 ⁴	1,02 10 ⁵	2,05 10 ⁵	4,10 10 ⁵	1,02 10 ⁶	2,05 10 ⁶	4,10 10 ⁶	4,10 10 ⁷	4,10 10 ⁸	-
Distribution ligaments	80	1,50 10 ⁴	1,50 10 ⁵	-	-	1,50 10 ⁶	-	-	1,50 10 ⁷	1,50 10 ⁸	-	-
Distribution sphères	80	8,65 10 ³	8,65 10 ⁴	-	-	8,65 10 ⁵	-	-	8,65 10 ⁶	8,65 10 ⁷	8,65 10 ⁸	-

Tableau 5. Nombre de points total N utilisés pour le calcul de la distribution d'échelles 3D d'un objet à partir de son squelette via la méthode de Monte-Carlo.

Avec ces différents résultats, on peut en déduire que l'utilisation de densités de points inférieures à 10^0 ne présente pas d'intérêt pour effectuer une analyse fine de la distribution d'échelles $e_3(d)$ calculée avec la méthode de Monte-Carlo. De plus, à l'exception de la distribution de ligaments dont l'ensemble des squelettes présente un grand nombre de points (4000), le gain de temps de calcul espéré avec la diminution de la densité de points devient très vite limité (on passe de quelques secondes maximum à un dixième de seconde minimum).

Pour les densités de points supérieures à 10^1 , la méthode de Monte-Carlo devient très gourmande en ressources de calcul (temps et espace mémoire), comme montré en tableau 4 et tableau 5. De plus, ces densités de points ne peuvent pas être utilisées pour tous les objets, limitant leur intérêt malgré leur meilleure précision. Ne reste alors que 2 densités de points : 10^0 et 10^1 , la première pouvant servir de calcul rapide mais nécessitera de forts lissages/filtrages pour pouvoir être exploitée, comme montré en figure 47 et figure 48. La densité de points de 10^1 points/voxel présente alors ici le meilleur compromis entre les ressources de calcul nécessaires d'une part, et la précision nécessaire à l'exploitation et l'analyse du résultat sans avoir à fortement lisser/filtrer ce dernier.

3.5.3. Cas réel axisymétrique

Afin de valider la méthode de calcul, une image expérimentale issue de la projection orthographique d'un ligament liquide axisymétrique est étudiée (figure 49). Son axe de symétrie est totalement inclus dans un plan parallèle au plan de projection image, axe qui est également la ligne de son squelette. De ce fait, le squelette pondéré de l'objet projeté est identique au squelette pondéré de l'objet tridimensionnel. L'intérêt d'un tel couple objet-image est de présenter des distributions de diamètres de cylindres équivalentes identiques en 2D et en 3D (voir section 2.3) qui vont pouvoir être comparées. De plus, ce choix d'image va permettre de comparer ces distributions équivalentes en utilisant 3 méthodes différentes de mesure de la distribution d'échelles :

- Calcul 2D.
- Calcul 3D via intégration axisymétrique.
- Calcul 3D via la méthode de Monte-Carlo.

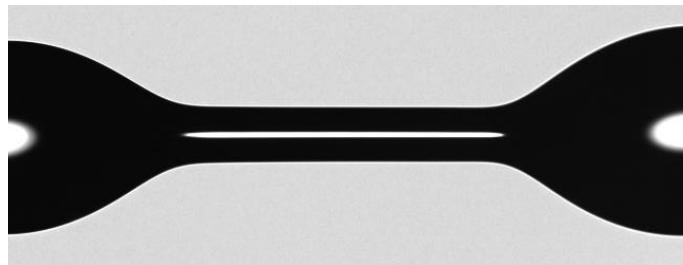


Figure 49. Ligament axisymétrique. Liquide viscoélastique contenant 5ppm de PEO dans un solvant aqueux. (Massinissa Saadi) (a) Image normalisée (b) Carte des distances euclidiennes et découpe en troncs de cône.

Le calcul 2D de la distribution d'échelles est basé sur le calcul de la carte des distances euclidienne (EDM) de l'image segmentée 2D. Cette carte des distances consiste à attribuer à chaque pixel de l'objet un niveau de gris égal à la plus courte distance (en pixel) entre ce pixel et l'interface de l'objet. La distribution cumulative d'échelles 2D consiste alors à compter le nombre de pixels en fonction de ces niveaux de gris, chaque niveau de gris différent représentant une valeur différente de l'échelle d'érosion. Une fois la distribution cumulative d'échelles 2D mesurée, la distribution d'échelles est calculée en dérivant la distribution cumulative d'échelles.

Le calcul 3D via intégration axisymétrique est également basé sur le calcul de la carte des distances euclidienne (EDM) de l'image segmentée 2D. La différence étant que ce calcul utilise ici directement la définition de la distribution d'échelles 3D : la mesure de la distribution d'échelles 3D consiste à mesurer le rapport entre la surface de l'objet érodée à l'échelle d et le volume de l'objet non érodé. A partir de cette définition et de la carte des distances 2D, le ligament est approximé en un ensemble de troncs de cône de hauteur unitaire (1 pixel) le long de son axe de symétrie (figure 50). Deux rayons r_1 et r_2 sont alors mesurables localement et permettent ainsi de calculer le volume V_{tronc} et la surface latérale S_{tronc} de chaque tronc de cône :

$$V_{tronc} = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \quad (96)$$

$$S_{tronc} = \pi (r_1 + r_2) \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \pi (r_1 + r_2) s \quad (97)$$

Avec h la hauteur du tronc de cône, r_1 et r_2 les rayons des deux sections orthogonales à l'axe de symétrie (figure 51). Pour chaque échelle d , le ligament est érodé, ce qui modifie les valeurs des rayons r_1 et r_2

de tous les troncs de cônes et modifie les valeurs S_{trunc} en $S_{trunc}(d)$. La distribution d'échelle 3D est déduite de l'Eq.(7) (voir section 2.2.2) en faisant le rapport entre la somme des surfaces des troncs de cône sur la somme de leur volume :

$$e_3(d) = \frac{S_{3D}(d)}{2V_T} = \frac{\sum S_{trunc}(d)}{2 \sum V_{trunc}} \quad (98)$$

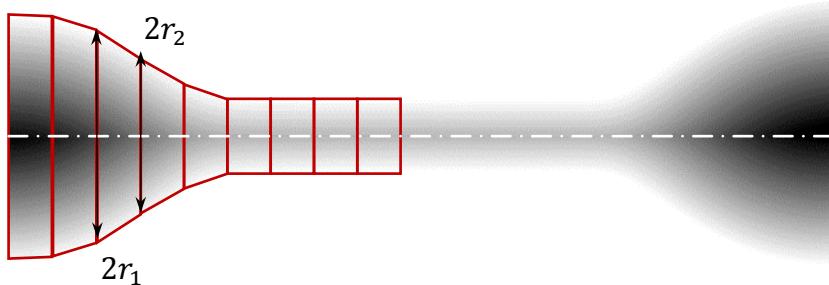


Figure 50. Ligament axisymétrique. Carte des distances euclidiennes et découpe en troncs de cône.

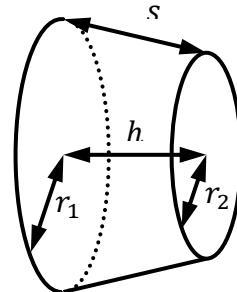


Figure 51. Tronc de cône.

Une fois les distributions d'échelles 2D et 3D déterminées, les distributions équivalentes de cylindres sont calculées :

$$f_{0_{cyl}}(d) = -\frac{e'_2(d)}{e_2(0)} \quad \text{et} \quad f_{0_{cyl}}(d) = -\frac{e''_3(d)}{e'_3(0)} \quad (99)$$

Avec $e'_2(d)$ la dérivée première par rapport à l'échelle d de la distribution d'échelles 2D $e_2(d)$, $e''_3(d)$ et $e'_3(d)$ étant respectivement les dérivées première et seconde de la distribution d'échelle 3D $e_3(d)$. L'image de ligament liquide choisie provient d'une expérience de jet libre pour un liquide viscoélastique contenant 5 ppm de PEO dissout dans un solvant aqueux (voir section 4.2 pour les détails et propriétés de ce liquide et de la caméra). Le champ de l'image est de 2,98 x 1,17 mm (1790 x 700 pixels) avec une résolution de 1,67 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ (600 pixels/mm).

Les distributions d'échelles 2D et 3D présentées en figure 52 présentent 2 zones. Une première partie constante (linéaire en 3D) aux petites échelles et une partie linéaire (polynomiale en 3D) aux grandes échelles. Ce résultat ressemble à la distribution d'échelles 2D analytique du modèle sphère et cylindre avec raccordement présenté en section 2.4.2, ce qui était attendu. La transition entre ces 2 zones s'effectue pour l'échelle $d = 238 \mu\text{m}$ pour les 3 distributions d'échelles calculées, correspondant ici au diamètre de la partie cylindrique du ligament choisi.

Concernant les 2 distributions d'échelles 3D, les valeurs de surfaces spécifiques $e_3(0)$ diffèrent de 2,5 % (3,67 mm^{-1} pour l'intégration axisymétrique et 3,58 mm^{-1} pour la méthode Monte-Carlo). Pour expliquer cette différence, nous pouvons nous intéresser aux calculs d'incertitudes et aux biais présents dans les 2 méthodes de calcul de distribution d'échelles 3D. La méthode de Monte-Carlo permet une estimation des volumes sans biais et avec une incertitude de mesure proportionnelle à $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/N}$ (intervalle de Wald), où \hat{p} est la fraction des points appartenant à l'objet parmi les N tirés. $\hat{\sigma}$ est maximal pour $\hat{p} = 0,5$, ce qui donne une incertitude relative de mesure de l'ordre de $7 \cdot 10^{-6}$ pour $N = 5 \cdot 10^9$ points, bien inférieure à la différence notée entre les 2 valeurs de surfaces spécifiques $e_3(0)$.

Pour la méthode de calcul 3D via intégration axisymétrique, on peut définir l'incertitude de mesure du rayon des sections de coupe des troncs de cône à ± 1 pixel, ce qui représente une incertitude relative de 1,4 % pour $r = 119 \mu\text{m}$ (plus petit rayon présent dans le ligament axisymétrique) et 0,36 % pour $r = 455 \mu\text{m}$ (plus grand rayon). Comme la méthode de calcul 3D via intégration axisymétrique utilise 2 valeurs de rayons, cela porte l'incertitude relative maximale à 2,8 % (plus petit rayon), et qui est encore doublée à 5,6 % car les volumes et surfaces de troncs de cône utilisent le carré des rayons dans le calcul. Tout ceci permet de dire que la différence mesurée pour la surface spécifique $e_3(0)$ entre les 2 méthodes 3D peut principalement venir des incertitudes liées à la mesure des rayons de la méthode de calcul 3D via intégration axisymétrique.

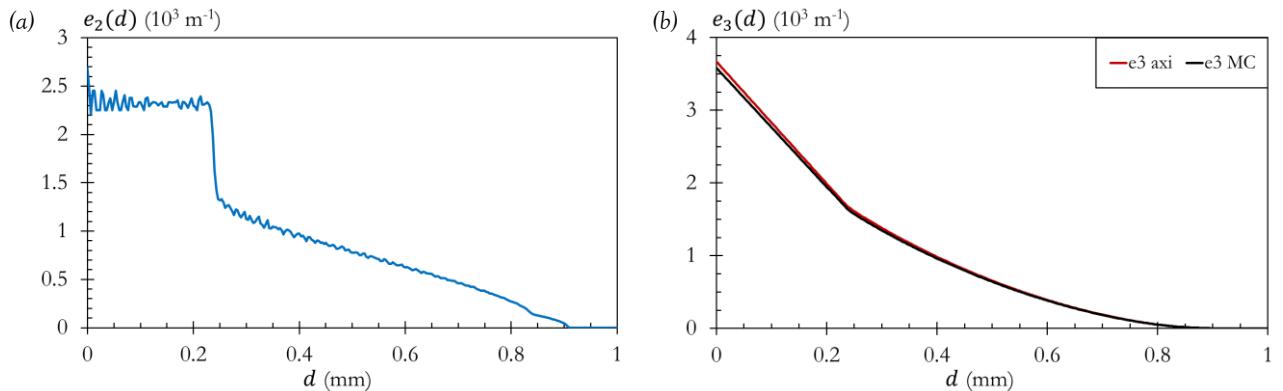


Figure 52. Distribution d'échelles 2D et 3D du ligament axisymétrique (a) cas 2D (b) cas 3D

La distribution d'échelles 2D présente de fortes perturbations, notamment aux petites échelles. Ces perturbations vont se reporter sur la distribution équivalente de cylindres. Pour les distributions d'échelles 3D, bien que les perturbations soient invisibles à l'œil nu, on peut s'attendre à ce que la double dérivation nécessaire au calcul de la distribution équivalente de cylindres les amplifie fortement. La figure 53(a) présente les distributions équivalentes de cylindres des distributions d'échelles. Les distributions équivalentes de cylindres présentent un fort pic pour l'échelle $d = 238 \mu\text{m}$ marquant la transition entre les petites et les grandes échelles. Cependant, les distributions de la figure 53(a) présentent trop de perturbations pour pouvoir analyser finement le résultat.

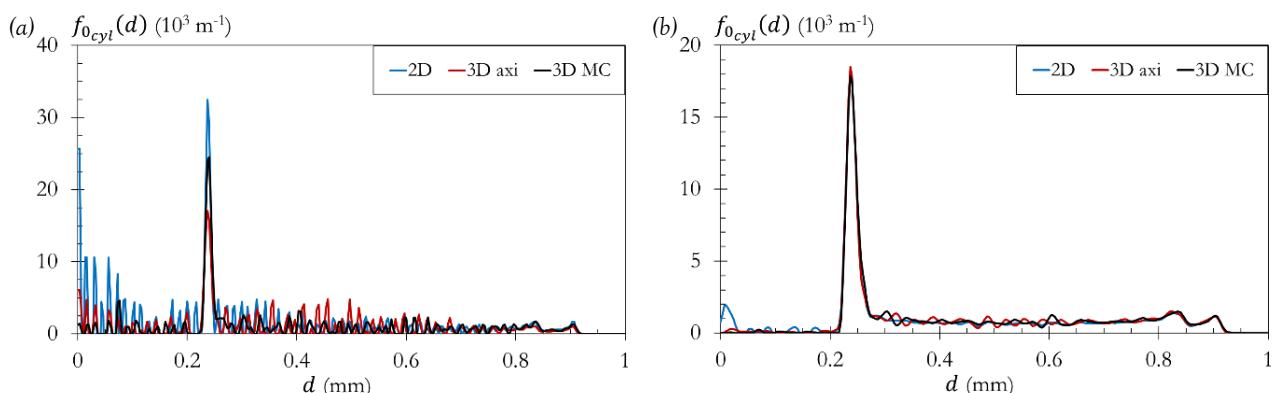


Figure 53. Distribution équivalente de cylindres du ligament axisymétrique (a) données brutes (b) données filtrées.

Afin d'atténuer ces perturbations, un lissage est effectué qui comprend 3 étapes. La première consiste à effectuer un lissage polynomial aux petites échelles : un polynôme d'interpolation est défini pour les échelles inférieures à $d = 238 \mu\text{m}$ et les données sont moyennées avec ce polynôme. L'objectif est ici de conserver le comportement moyen des distributions d'échelles aux petites échelles, notamment à l'échelle $d = 0$ afin de conserver au mieux la valeur de la surface spécifique. Ensuite un lissage par

fonction spline est appliquée. Cette opération permet d'éliminer la grande majorité d'un bruit haute fréquence en faisant une interpolation locale des données par un polynôme d'ordre 3, conservant ainsi les comportements et la continuité des dérivées secondes. Enfin un filtrage par convolution avec un noyau gaussien est effectué afin d'atténuer les larges oscillations résultantes du lissage par fonction spline. Ce protocole a été identiquement appliqué aux 2 distributions d'échelles 3D et à la cumulative d'échelle 2D avant le calcul des dérivées et de la distribution équivalent de cylindres, les coefficients du lissage polynomial étant déterminés par la méthode de minimisation des moindres carrés tandis que la largeur du noyau gaussien est fixé à 12 échelles (24 fois la résolution de l'image). Il peut être noté que la distribution issue de la méthode de Monte-Carlo aurait pu être lissée avec un filtre de type Wiener, ces filtres étant particulièrement bien adaptés au lissage des données issues d'un calcul statistique (filtrage du bruit blanc). Ce choix n'a pas été retenu afin d'appliquer la même procédure avec les mêmes paramètres aux 3 distributions d'échelles.

La figure 53(b) présente les distributions équivalentes de cylindres des distributions d'échelles lissées. On constate que le bruit aux petites échelles a été fortement réduit, les distributions équivalentes de cylindres étant nulle pour presque toutes les petites échelles, ce qui est attendu vue la forme du ligament choisi pour ce test. Le fort pic pour l'échelle $d = 238 \mu\text{m}$ est toujours présent, même si son amplitude a été atténuée avec le lissage. Aux grande échelles, on voit apparaître un plateau « constant » qui correspond aux 2 grandes structures ellipsoïdes du ligament, 2 faibles pics venant à la fin indiqués leurs diamètres respectifs.

A partir de ces résultats, nous vérifions bien que l'utilisation du calcul 2D ou 3D permet d'obtenir la distribution équivalente de cylindres du système étudié, moyennant un lissage approprié. Comme le ligament utilisé est un ligament axisymétrique, nous vérifions également que l'utilisation du calcul 2D ou 3D permet bien au final de trouver la même distribution équivalente de cylindres.

3.6. Analyse de structures ligamentaires issues d'une nappe liquide turbulente

Dans cette section, les travaux présentés dans Dumouchel et al. (2015) sont repris avec cette fois-ci l'utilisation du seuillage d'images sub-pixel et le calcul de distribution d'échelles 3D avec la méthode Monte-Carlo présentés précédemment. L'objectif est ici de comparer les résultats obtenus à ceux de Dumouchel et al. (2015).

3.6.1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est conçu pour produire des nappes liquides à basse pression d'injection dans un environnement à température et pression ambiante. Le liquide est stocké dans un réservoir pressurisé avant d'être envoyé vers l'injecteur. L'injecteur est équipé d'une buse constituée de trois disques circulaires superposés, comme le montre la figure 54. Le liquide entre dans la buse par le disque 1, traverse le disque creux (disque 2) et s'écoule par l'orifice du disque 3. Le disque 2 constitue une

chambre de turbulence. Le flux de liquide sortant prend la forme d'une nappe 2D. La turbulence constraint le flux à se réorganiser en un réseau ligamentaire qui finit par se fragmenter en gouttelettes. Les dimensions géométriques de la buse à trois disques utilisée dans le présent travail sont données dans le tableau 6. Un exemple de nappe sortant de cette buse est illustré en figure 55 (liquide : eau, pression d'injection : 1 bar). En raison de la non-symétrie de la géométrie de la buse, l'écoulement est étiré dans le plan de l'image.

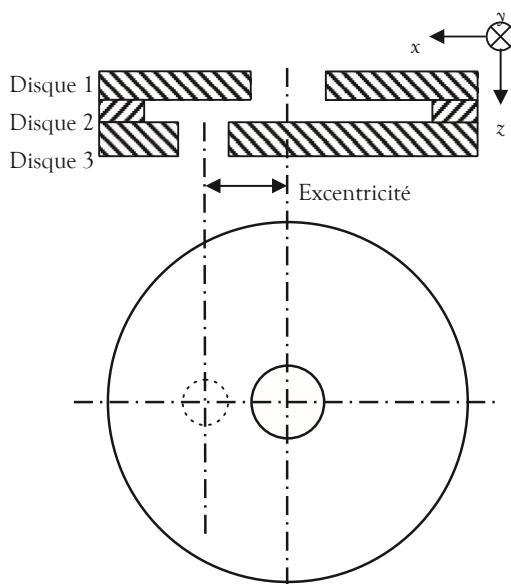


Figure 54. Injecteur triple disque, Dumouchel et al. (2015).

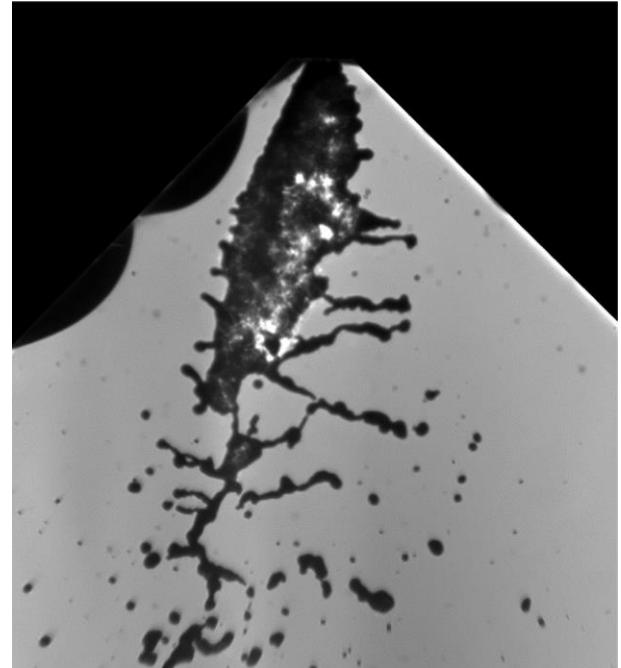


Figure 55. Nappe issue d'une buse triple disque. Eau, Pression d'injection 1 bar, Dumouchel et al. (2015).

Une caméra à grande vitesse (Phantom V12) a été utilisée à cette fin dans un montage optique par transmission. La fréquence d'acquisition des images a été fixée à 25 000 images/s, ce qui permet un bon compromis entre la résolution temporelle (40 μ s) et la définition d'image de la caméra (640 x 352 pixels). Le champ de visualisation original est de 3,5 x 6,4 mm², ce qui correspond à une résolution spatiale de 10,36 μ m/pixel. La source de lumière était une diode laser monochromatique non cohérente (Cavitar Cavitlux HF) associée à une optique de collimation.

		Dimension (μ m)
Disque 1	Epaisseur	400
	Diamètre d'orifice	600
Disque 2	Epaisseur	100
	Diamètre d'orifice	4510
Disque 3	Epaisseur	150
	Diamètre d'orifice	400
	Excentricité	450

Tableau 6. Dimension de la buse triple disque.

Trois liquides différents sont utilisés. Ils sont identifiés par des lettres majuscules : liquide A : eau ; liquide B : mélange eau-éthanol à 10 % ; et liquide C : mélange eau-éthanol à 15 %. Leurs propriétés physiques sont répertoriées en tableau 7.

Liquide	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Tension de surface σ (mN.m ⁻¹)	Viscosité dynamique de cisaillement η (mPa.s)
A - eau	994	70	1,00
B - eau-éthanol 10%	973	44	1,32
C - eau-éthanol 15%	967	38	1,57

Tableau 7. Propriétés physiques des liquides. Le pourcentage indique une proportion massique.

3.6.2. Résultats

Les ligaments identifiés dans Dumouchel et al. (2015) sont repris. Les images sont segmentées au niveau sub-pixel avec la méthode CORIA présentée précédemment. Les images segmentées sont produites avec une résolution quatre fois supérieure à la résolution initiale de l'image : 2,59 $\mu\text{m}/\text{pixel}$. A partir de ces images segmentées, les distributions d'échelles 3D sont déterminées avec la méthode de Monte-Carlo présentée et validée précédemment. La méthode a été utilisée avec une densité de 10 points par pixel pour tous les ligaments pour limiter les fluctuations statistiques intrinsèques à la méthode.

La figure 56 présente les distributions d'échelles réduites $e_3(d, t)/e_3(0, t)$ des liquides A et C en fonction de l'échelle normalisée $d e_3(0, t)$ aux temps initial et final. On constate que les distributions d'échelles réduites sont semblables lorsque le liquide est fixé, suggérant que les ligaments suivent une même dynamique d'atomisation. Ce résultat a déjà été observée avec les distributions d'échelles réduites 2D obtenues dans Dumouchel et al. (2015) (voir figure 57), ce qui valide le protocole de mesure de la distribution d'échelle 3D.

Sur la figure 56, la forme de la distribution change entre le temps initial et le temps final : au départ, la distribution d'échelles présente une forme linéaire représentative de structures cylindriques aux petites échelles. Cette forme se traduit par la présence d'un plateau constant aux petites échelles sur les distributions 2D. Les distributions de la figure 57 ne montrent pas nettement ce plateau, ce qui est dû au manque de résolution des images originale. Les distributions de la figure 56 montrent donc l'apport de la segmentation sub-pixel. Au temps final, cette forme linéaire observée en la figure 56 a laissée place à une forme quadratique aux petites échelles, cette forme est représentative des gouttes produites par le ligament.

L'augmentation de la résolution spatiale obtenue grâce à la segmentation sub-pixel permet d'avoir une lecture plus fine des distributions d'échelles. On souhaite également visualiser l'apport de la méthode Monte-Carlo sur la mesure de ces distributions. Pour cela, à partir des images segmentées sub-pixels, un nouveau calcul de distribution d'échelles 2D est réalisé en plus du calcul de distribution 3D avec la méthode de Monte-Carlo. Pour comparer les distributions d'échelles 2D et 3D, les distributions de diamètres de cylindres cumulatives équivalentes F_{0c} sont calculées à partir des Eqs.(31) et (34) (voir section 2.3.2) :

$$1 - F_{0c}(d) = \frac{e_2(d)}{e_2(0)} \quad \text{et} \quad 1 - F_{0c}(d) = \frac{e'_3(d)}{e'_3(0)} \quad (100)$$

On a montré, dans la section précédente pour un ligament axisymétrique, que les distributions de diamètres de cylindres équivalentes étaient identiques entre les cas 2D et 3D. Dans l'étude de Dumouchel et al. (2015), les ligaments ne sont pas axisymétriques mais les informations utilisées pour

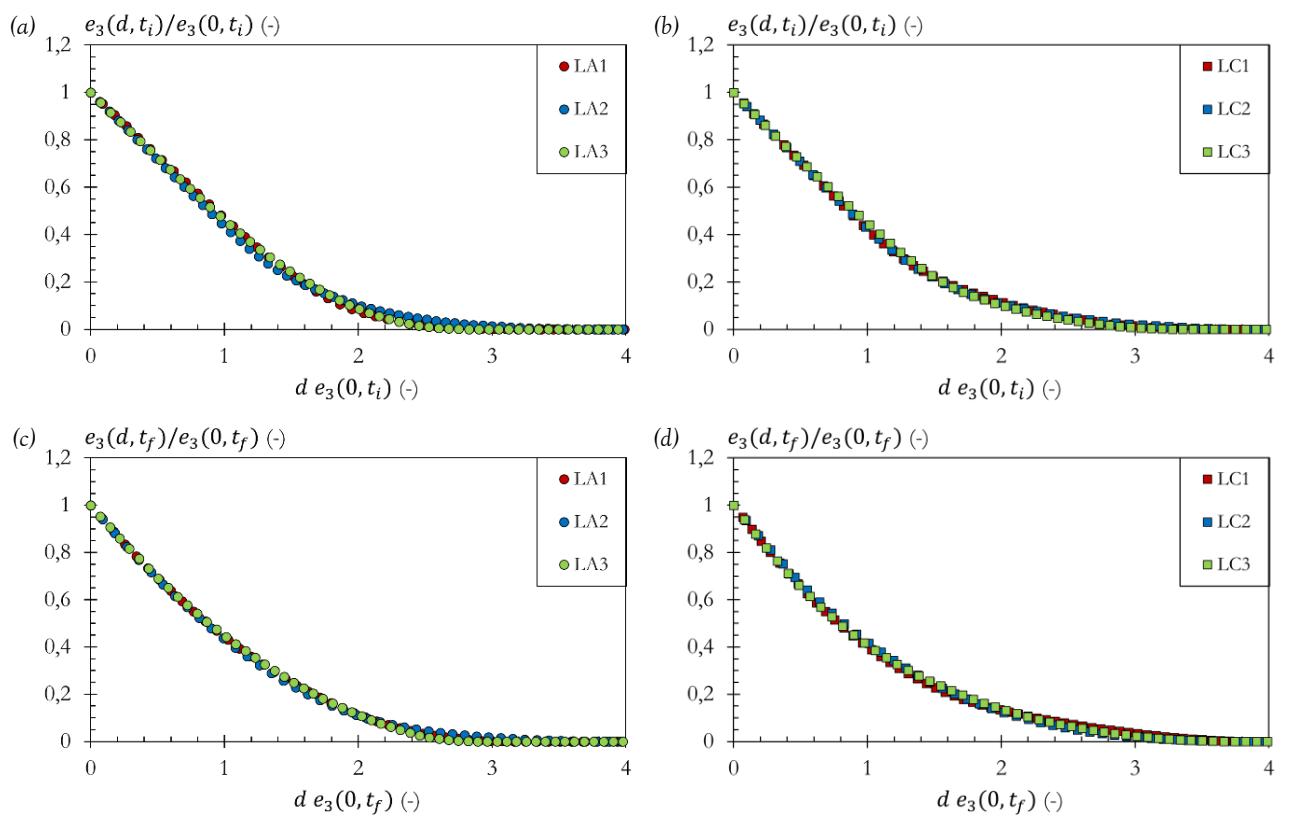


Figure 56. Distribution d'échelles réduites initiales et finales. Comparaison des ligaments pour un même liquide (a) LA initial (b) LC initial (c) LA final (d) LC final.

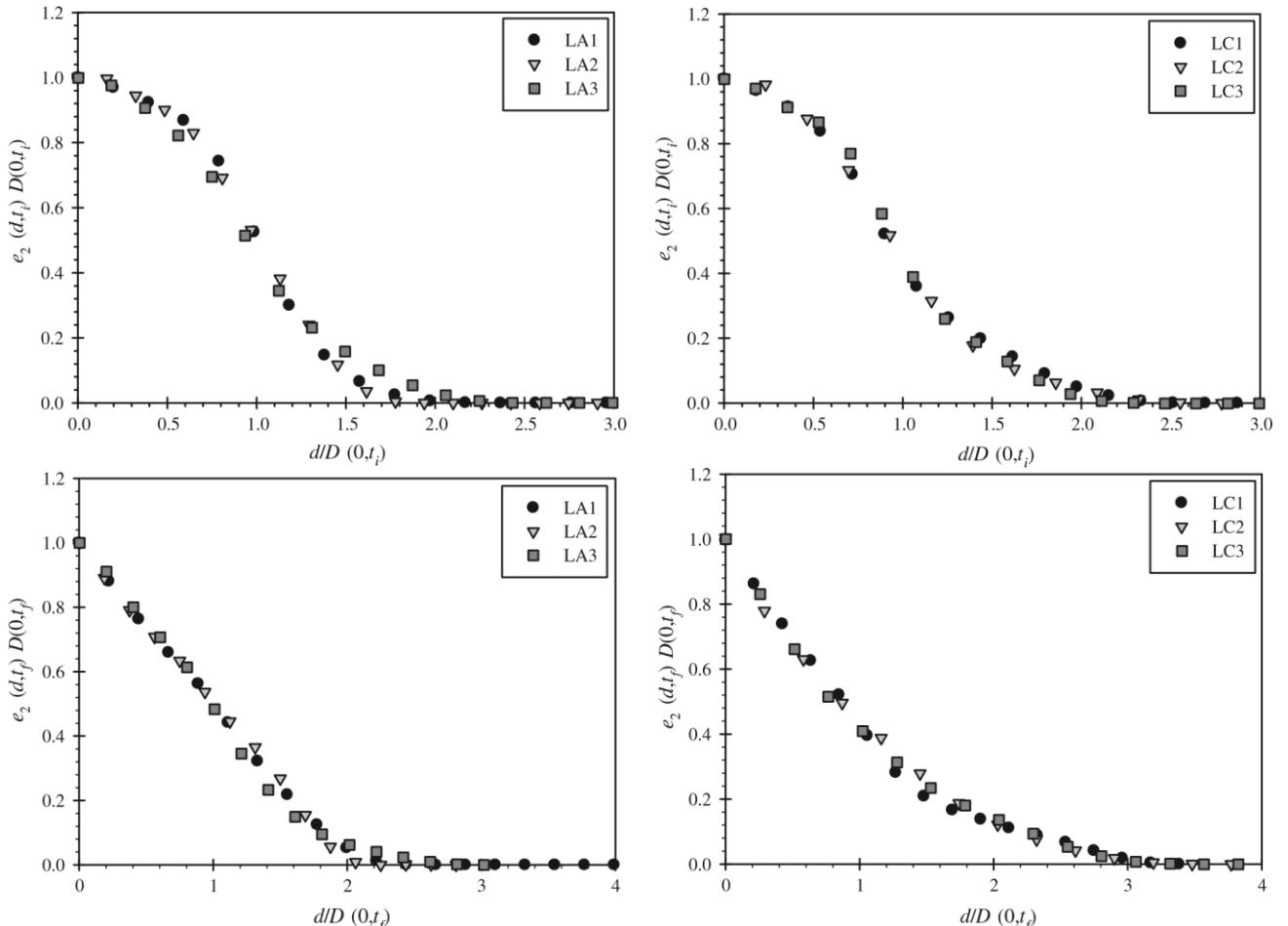


Figure 57. Distribution d'échelles réduites initiales et finales Dumouchel et al. (2015). Comparaison des ligaments pour un même liquide. Du haut à gauche au bas à droite : LA initial, LC initial, LA final, LC final

le calcul de la distribution d'échelles 3D proviennent des mêmes images qui servent au calcul 2D. On s'attend alors à avoir des distributions F_{0c} semblables entre les cas 2D et 3D.

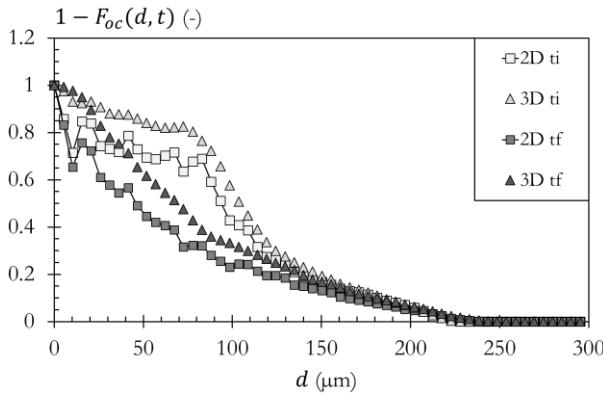


Figure 58. Comparaison des distributions de diamètres de cylindres cumulatives équivalente F_{0c} .

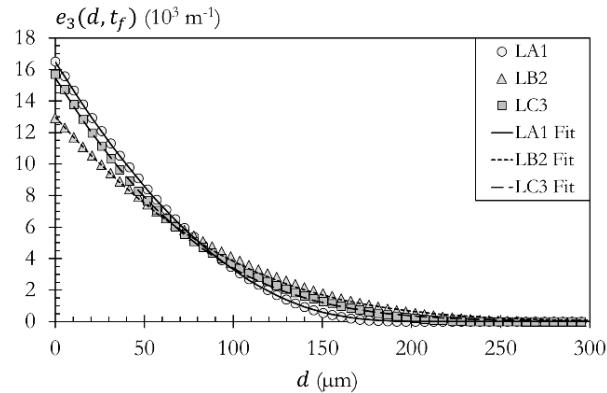


Figure 59. Comparaison entre les distributions d'échelles mesurée et mathématiques au temps final.

La figure 58 présente les distributions distributions $1 - F_{0c}$ 2D et 3D pour le ligament LC3 aux temps initial et final. Pour les deux temps présentés, les distributions F_{0c} sont de même forme, ce qui était attendu. On note le plateau quasiment constant au temps initial, correspondant à une structure cylindrique. On constate que les distributions 3D sont bien plus lisses que les distributions 2D pour les 2 temps : les fortes variations de $1 - F_{0c}$ visibles dans le cas 2D pour les échelles proches de 0 sont quasiment absentes des distributions 3D. De plus, puisque la distribution 3D est peu bruitée, une lecture de $e_3(0, t)$ est possible. Ce résultat est intéressant car $e_3(0, t)$ est proportionnel à la surface spécifique des ligaments Evers (1994) : cette quantité est importante en atomisation. Bien que non présentés pour les autres ligaments et les autres temps, l'amélioration sur les distributions d'échelles obtenues a été constatée pour toutes les situations. Ces résultats montrent l'apport sur la mesure de la distribution d'échelles de la méthode de Monte-Carlo avec une forte densité de points.

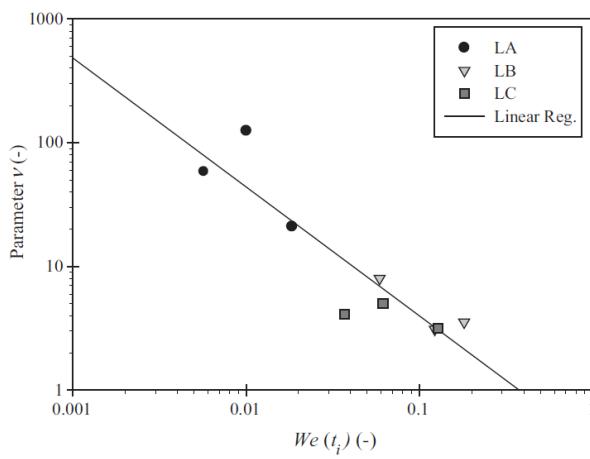


Figure 60. Corrélation entre v et $We(t_i)$. Cas 2D, Dumouchel et al. (2015).

Après avoir montré l'apport et de la segmentation sub-pixel et de la méthode Monte-Carlo sur les distributions d'échelles, on souhaite reconstruire le résultat de Dumouchel et al. (2015) présenté sur la figure 60. Ce résultat indique que la dispersion de la distribution de tailles des gouttes résulte de la compétition entre les forces de tension de surface et forces d'étiement : plus les forces d'étiement sont importantes, plus l'action des forces de tension de surfaces sont retardées, jouant en faveur d'une plus grande dispersion.

Ici, on modélise les distributions d'échelles des ligaments au temps final par des distributions de sphères. Les travaux de Marmottant et al. (2004) montrent que la distribution numérique de diamètre $f_0(D)$ des gouttes produites par des ligaments étirés s'est avérée être bien représentée par une distribution gamma Γ d'ordre v :

$$f_0(D) = \frac{v^v}{\Gamma(v)} \frac{D^{v-1}}{D_{10}} \exp\left(-\frac{vD}{D_{10}}\right) \quad (101)$$

Où D_{10} le diamètre moyen de la distribution $f_0(D)$. v est un paramètre qui modifie l'élargissement de la distribution : si v augmente, alors la distribution se resserre autour de D_{10} .

En reprenant les travaux de Dumouchel et al. (2008), il peut être démontré que la distribution d'échelles d'un tel ensemble de sphères dont les diamètres sont distribués selon l'Eq.(101) s'écrit :

$$e_3(d) = \frac{3v}{D_{10}} \frac{\Gamma(v+2, \frac{vd}{D_{10}}) - 2 \frac{vd}{D_{10}} \Gamma(v+1, \frac{vd}{D_{10}}) + \left(\frac{vd}{D_{10}}\right)^2 \Gamma(v, \frac{vd}{D_{10}})}{\Gamma(v+3)} \quad (102)$$

Où $\Gamma(x, y)$ est la distribution gamma incomplète supérieure.

Une routine Scilab, basée sur la routine d'optimisation non-linéaire « optim », a été écrite pour déterminer les couples de paramètres (v, D_{10}) qui offrent le meilleur ajustement entre les distributions d'échelles mesurées et les distributions mathématiques données par l'Eq.(102). La figure 59 présente trois exemples de distributions d'échelles avec leur régression mathématique. L'accord entre les distributions se montre satisfaisant, montrant qu'un ensemble de sphères dont les diamètres sont distribués selon une distribution gamma Γ d'ordre v donne une bonne description des gouttes issues des ligaments.

La où v renseigne sur la largeur de la distribution de diamètres des gouttes, un nombre de Weber spécifique comparant les temps caractéristiques de tension de surface et d'étirement est défini :

$$We(t_i) = \frac{\rho \dot{\varepsilon}(0, t_i)^2}{2\sigma e_2(0, t_i)^3} \quad (103)$$

Où ρ est la masse volumique du liquide, σ sa tension de surface et $\dot{\varepsilon}$ le taux de déformation du ligament donné par l'Eq.(60) en section 2.5 dans le cas 2D. Dans le cas 3D, la formulation de $We(t_i)$ diffère légèrement :

$$We(t_i) = \frac{\rho \dot{\varepsilon}(0, t_i)^2}{\sigma e'_3(0, t_i)^{1,5}} \quad (104)$$

Où $\dot{\varepsilon}(0, t_i) = \dot{e}'_3(0, t_i)/e'_3(0, t_i)$.

La figure 61 présente l'évolution du paramètre v en fonction du nombre de $We(t_i)$ pour tous les ligaments. La corrélation observée dans Dumouchel et al. (2015) est tracée en pointillés. Deux comportements se dégagent : le premier aux petits $We(t_i)$ pour lequel v décroît lorsque $We(t_i)$ augmente et le second pour les grands $We(t_i)$ où v ne dépend plus de $We(t_i)$. Ce premier comportement est en accord avec celui observé par Dumouchel et al. (2015), tandis que le second n'était pas observé pour les distributions d'échelles 2D. On note que les $We(t_i)$ obtenus en 3D diffèrent $We(t_i)$ des 2D. Ceci s'explique par une expression différente des $We(t_i)$. Par ailleurs, les $We(t_i)$ sont

déterminés à l'échelle $d = 0$. Or les distributions d'échelles sont nettement plus bruitées en 2D (voir figure 58), ce qui influence fortement les valeurs de $We(t_i)$. On note également que les $We(t_i)$ sont plus dispersés sur la plage $[10^3 ; 1]$ dans le cas 3D. Ces différences méritent de plus amples analyses, notamment en augmentant le nombre de ligaments étudiés pour chacun des liquides.

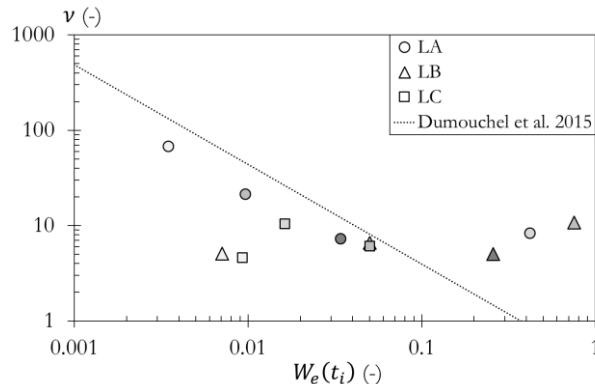


Figure 61. Corrélation entre v et $We(t_i)$. Cas 3D.

3.7. Conclusion

L'imagerie en transmission (backlight imaging) est le diagnostic optique utilisé et développé au sein de l'équipe pour étudier l'atomisation et caractériser la morphologie des interfaces. Ce chapitre a présenté la méthode de segmentation d'images développée au sein de l'équipe. Elle repose sur la combinaison d'un seuillage basé sur l'histogramme de niveau de gris de l'image et d'un seuillage par une transformée en ondelette pour localiser les objets liquides, quel que soit leur contraste. Un seuillage local basé sur un modèle d'imagerie et exploitant le gradient de niveau de gris est ensuite appliqué sur chaque objet identifié. Ce seuillage local peut être réalisé à un niveau sub-pixel dans le but d'améliorer la résolution des contours des objets liquides, améliorant ainsi leur analyse avec la description multi-échelles.

Plusieurs approches de segmentations sub-pixels issues de la littérature ont été présentées et comparées sur une image synthétique comportant plusieurs formes connues et sur une image expérimentale de nappe liquide. L'écart moyen des contours sub-pixels obtenus par les méthodes testées par rapport aux contours connus de l'image synthétique reste inférieur à un quart de pixel. Ce résultat montre que ces méthodes autorisent une amélioration de la résolution des objets étudiés d'un facteur quatre par rapport à la résolution initiale des images.

Ce chapitre introduit également une mesure de distribution d'échelles 3D basée sur une méthode de Monte-Carlo. Cette méthode vient enrichir les outils de description multi-échelles déjà existant et repose sur l'exploitation des informations portées par le squelette pondéré des objets étudiés. La précision de la méthode dépend du nombre de points utilisés dans la méthode de Monte-Carlo, un gain de précision sur la distribution d'échelles se traduisant par temps de calcul supérieur. Cette méthode 3D est testée et validée pour des ensembles synthétiques de cylindres et de sphères dont la distribution d'échelles analytiques est connue (voir chapitre 2). Une image 2D de motif de perles sur une ficelle est également utilisée pour valider cette méthode de mesure de distribution d'échelles 3D par Monte-Carlo en la comparant à une méthode 3D déjà existante utilisant la propriété d'axisymétrie du motif. Il en résulte que l'utilisation d'une densité de point inférieur à 1 point par pixel n'est pas

suffisante pour pouvoir analyser la distribution d'échelles obtenue sans recourir à des méthodes de lissages.

La segmentation sub-pixel et la méthode de Monte-Carlo sont ensuite associées et appliquées à des images de ligaments précédemment étudiés issus de nappes liquides turbulentes. Ceci a pour objectif d'apprécier les gains obtenus par ces méthodes pour des ligaments ne présentant pas un axe d'axisymétrie et pour des images avec une faible résolution. Les distributions d'échelles 3D réduites sont comparées aux résultats 2D précédents. La segmentation sub-pixel permet une lecture plus fine des distributions d'échelles grâce au gain de résolution apporté, permettant d'identifier nettement les différentes formes présentes dans les ligaments. A partir des images segmentées sub-pixels, les distributions 2D et 3D sont mesurées et comparées sur la base de leur système de cylindres équivalents. Cette comparaison montre une nette réduction des perturbations observée pour les distributions 3D lorsque le nombre de points utilisé par la méthode de Monte-Carlo est suffisamment élevé.

4. Atomisation de jets libres viscoélastiques



Nomenclature

Grandeur	Unité	Signification
c	[ppm]	Concentration de la solution polymérique
D_c	[m]	Diamètre d'un cylindre
D_{jet}	[m]	Diamètre du jet
D_{KL}	[·]	Divergence de Kullback-Leibler
D_{or}	[m]	Diamètre d'orifice de la buse
D_s	[m]	Diamètre d'une sphère
d	[m]	Echelles
d_1	[m]	Echelle caractéristique
d_2	[m]	Echelle caractéristique
d_4	[m]	Echelle caractéristique
\dot{d}_4	[m/s]	Dérivée temporelle de d_4
d_{max}	[m]	Echelle maximale du système
e_3	[m ⁻¹]	Distribution d'échelles 3D
$e_{3_i}(d, z)$	[m ⁻¹]	Distribution d'échelles 3D à la position z de l'image i
e_{3_j}	[m ⁻¹]	Distribution d'échelles 3D de j images
F_r	[·]	Nombre de Froude
$FWHM$	[m]	Largeur à mi-hauteur d'une distribution gaussienne
f_{0c}	[m ⁻¹]	Distribution de diamètres de cylindres équivalente
g	[m.s ⁻²]	Accélération de la pesanteur
H_w	[m]	Hauteur de la fenêtre d'analyse
k	[·]	Nombre d'onde adimensionné du jet
L_{BU}	[m]	Longueur de rupture d'un jet
L_c	[m]	Longueur estimée d'un cylindre
L_{or}	[m]	Longueur de la buse
M_v	[kg.mol ⁻¹]	Masse molaire du polymère
n	[·]	Paramètre de forme du modèle de perles sur une ficelle
Q_v	[m ³ /s]	Débit volumique du jet
Re	[·]	Nombre de Reynolds
Res	[pixel/m]	Résolution d'une image
t	[s]	Temps
t_{BU}	[s]	Temps de rupture du jet
$t_{d_4}^*$	[s]	Temps de fin du régime 1 pour l'échelle d_4
$t_{d_{max}}^*$	[s]	Temps de fin du régime 1 pour l'échelle d_{max}
t^{**}	[s]	Temps de début du régime 3 pour l'échelle d_4
t_r	[s]	Temps de relaxation d'une solution polymérique
V_c	[m ³]	Volume total du cylindre du modèle de perles sur une ficelle
V_i	[m ³]	Volume du jet sur l'image i
V_{jet}	[m/s]	Vitesse débitante du jet
$Vol(t)$	[m ³]	Volume moyen du jet à chaque instant
V_s	[m ³]	Volume total de la sphère du modèle de perles sur une ficelle
V_T	[m ³]	Volume total d'un objet
We_l	[·]	Nombre de Weber liquide
We_g	[·]	Nombre de Weber gazeux
W_i	[·]	Nombre de Weissenberg
z	[m]	Position du jet sous l'injecteur
z_i	[m]	Position sous l'injecteur du haut d'une image
z_k	[m]	Position sous l'injecteur du centre d'une image
α	[·]	Fraction volumique du cylindre du modèle de perles sur une ficelle
α_i	[·]	Fraction volumique du jet sur l'image i
ΔH_w	[m]	Décalage entre deux fenêtres d'analyse successives
Δt_{BU}	[s]	Incertitude liée à t_{BU}
$\delta(D)$	[·]	Distribution de Dirac en D
$\dot{\varepsilon}$	[s ⁻¹]	Taux de déformation

$\dot{\varepsilon}_{régime\ 2}$	[s ⁻¹]	Taux de déformation moyen durant le régime 2
η_r	[m ³ .kg ⁻¹]	Viscosité réduite
$\dot{\varepsilon}(d, t)$	[s ⁻¹]	Taux de déformation d'un cylindre
η	[Pa.s]	Viscosité dynamique de cisaillement du liquide
η_{Eapp}	[Pa.s]	Viscosité élongationnelle apparente
$\eta_{E,t}$	[Pa.s]	Viscosité élongationnelle terminale
η_r	[m ³ .kg ⁻¹]	Viscosité réduite
λ	[m]	Longueur d'onde de perturbation moyenne
λ_i	[m]	Une longueur d'onde sur une image
λ_{R1}	[m]	Longueur d'onde de perturbation moyenne du régime 1
σ	[m]	Tension de surface
σ_{BU}	[m]	Ecart type de la distribution de longueurs de rupture
σ_λ	[m]	Ecart type de la distribution de longueurs d'ondes
ρ	[kg.m ⁻³]	Masse volumique d'un fluide
ρ_g	[kg.m ⁻³]	Masse volumique de l'air
ω_{d_4}	[$-$]	Taux de croissance adimensionné de l'échelle d_{max}
$\omega_{d_{max}}$	[$-$]	Taux de croissance adimensionné de l'échelle d_{max}

4.1. Introduction

Cette partie présente le dispositif expérimental utilisé pour l'étude des jets de solutions viscoélastiques. Les solutions utilisées et les différentes conditions d'injection sont listées. Puis, le protocole d'acquisition des images de jets est détaillé. A partir de ces images, le diamètre du jet, les distributions de longueurs d'ondes de perturbations et de longueurs de rupture sont mesurés. Ensuite, on expose le protocole de mesure de la distribution d'échelles volumique des jets. A partir des distributions d'échelles, l'évolution de la surface spécifique du jet est étudiée et les échelles caractéristiques d_1 , d_4 et d_{max} sont mesurées. De ces échelles, on identifie les différents régimes d'amincissement suivi par les structures ligamentaires et les propriétés des solutions (temps de relaxation, viscosité élongationnelle terminale) sont déterminées en fonctions des points de fonctionnement.

4.2. Dispositif expérimental

L'ensemble du dispositif expérimental mis en place pour l'étude des jets libres est illustré en figure 62. On note z la position verticale du jet sous l'injecteur et z_i la position du haut d'une image de jet.

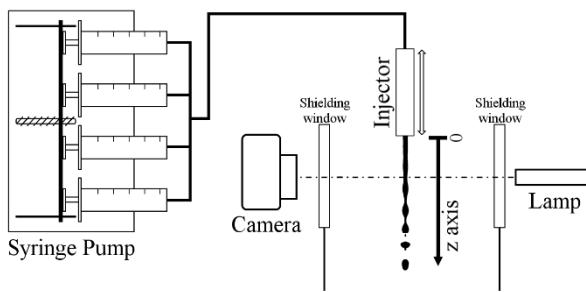


Figure 62. Schéma du dispositif expérimental.

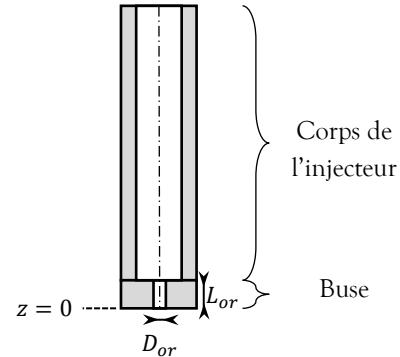


Figure 63. Schéma de l'injecteur.

4.2.1. Système d'injection

L'alimentation hydraulique est assurée par un pousse-seringue Chemyx Nexus 6000 supportant 4 seringues plastiques 3 pièces de 50 ml chacune, servant de réservoir de liquide. Ce système permet un contrôle du débit d'injection Q_v dans l'intervalle $[277 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3/\text{s} ; 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}]$. Les 4 seringues sont reliées en parallèle au tuyau d'alimentation de l'injecteur. Le volume de liquide contenu dans le tuyau n'excède pas 20 ml et est initialement rempli avant les expériences.

L'injecteur est composé d'un corps cylindrique de 5 mm de diamètre interne et de 85 mm de longueur avec un emplacement pour une buse d'injection à sa sortie, comme illustré en figure 63. Cette buse est un disque comportant un orifice de décharge cylindrique. Différentes buses ont été utilisées pour étudier l'influence de sa géométrie sur le jet. Le tableau 8 référence ces buses avec leurs dimensions. L'injecteur est disposé verticalement sur un système de déplacement 3 dimensions (3D) ZABER T-LSM permettant la mise au point du jet pour le diagnostic optique et la visualisation du jet à différentes positions verticales sous l'injecteur. Ce déplacement possède une course de 200 mm. L'ensemble

pousse-seringue, tuyau d'alimentation et injecteur sont installés à des hauteurs voisines pour limiter les changements de pressions occasionnées par le déplacement vertical de l'injecteur.

Référence buse	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
Diamètre d'orifice $D_{or} \pm 3\% (\mu\text{m})$	200	105	42	367	480	500	500
Longueur de la buse $L_{or} \pm 3\% (\mu\text{m})$	300	300	300	1000	1000	1000	5000

Tableau 8. Dimension des buses d'injection.

4.2.2. Liquides

Les liquides viscoélastiques étudiés sont des solutions polymériques de Poly(oxyde d'éthylène) (PEO) dissout dans un solvant. La masse molaire moyenne du PEO utilisé est de $M_v = 8,0 \cdot 10^3 \text{ kg.mol}^{-1}$, comme indiqué par le fabricant Sigma-Aldrich, et le solvant est un mélange aqueux contenant 5% en masse d'isopropanol. La concentration massique en polymère $c = \text{masse}_{PEO}/\text{masse}_{solution}$ est variée de 5 à 20 ppm (parts par millions, 1 ppm = 1 mg/kg) pour étudier l'influence de ce paramètre. Après préparation, les solutions sont stockées 72 heures au réfrigérateur pour les laisser s'homogénéiser. Elles sont sorties la veille des expériences pour être à température ambiante.

Les mesures de masse volumique et de viscosité de cisaillement des solutions sont réalisées avec un viscosimètre STABINGER SVM 3000 tandis que la mesure de tension de surface est réalisée avec un tensiomètre LAUDA TTV2 (volume d'une goutte produite par guttation). L'ensemble de ces mesures ont été réalisées par Florian PANZA dans le cadre d'un stage de 3^{ème} année de cycle ingénieur à l'INSA de Rouen et sont récapitulées en tableau 9. Ces propriétés sont très voisines de celles du solvant : $\rho = 989 \text{ kg.m}^{-3}$, $\sigma = 48,2 \text{ mN.m}^{-1}$ et $\eta = 1,29 \text{ mPa.s}$.

concentration $c \pm 1\% (\text{ppm})$	masse volumique $\rho \pm 1\% (\text{kg.m}^{-3})$	tension de surface $\sigma \pm 1\% (\text{mN.m}^{-1})$	viscosité dynamique de cisaillement $\eta \pm 1\% (\text{mPa.s})$	viscosité réduite $\eta_r \pm 1\% (\text{m}^3.\text{kg}^{-1})$	temps de relaxation Zimm t_r (ms)
5,03	989	47,7	1,30	2,26	9,6
7,56	989	47,7	1,33	4,49	20
9,90	989	47,7	1,33	3,29	14
12,5	989	48,0	1,34	3,04	13
15,0	989	47,9	1,35	3,17	14
19,9	989	47,8	1,35	2,17	9,6

Tableau 9. Propriétés physiques des liquides utilisés.

Les solutions préparées sont des solutions dites mobiles ou diluées. Dans une solution polymérique, les polymères forment des pelotes. La solution est dite diluée si ces pelotes n'interagissent pas entre elles lorsque la solution est au repos Chevallier (2009). Une telle solution est caractérisée par une faible

valeur du rapport c/c^* , où c^* est la concentration critique d'enchevêtrement des polymères de la solution. c^* peut être déterminée grâce à l'inverse de la viscosité réduite η_r : $c^* = 1/(\rho\eta_r)$, avec la viscosité réduite $\eta_r = (\eta_{solution} - \eta_{solvant})/(\rho c \eta_{solvant})$ (valeurs données en tableau 9) Larson (2005). Pour toutes les solutions étudiées, c/c^* est toujours inférieur à 0,05, montrant que les solutions sont diluées. Le temps de relaxation de Zimm de ces solutions, déterminé avec l'Eq.(1) en Ch.1, est donné en tableau 9.

4.2.3. Points de fonctionnement

L'influence de trois paramètres sur l'atomisation des jets de solutions viscoélastiques est étudiée : le débit Q_v , la concentration c en polymères et la géométrie de la buse. Les points de fonctionnements réalisés sont listés dans le tableau 10. Ce tableau liste également les grandeurs mesurées pour les jets qui seront définies dans la suite de ce chapitre.

Pour la plupart des couples concentration-buse, le débit a été varié. Le débit, bien que choisi et fixé avec le pousse-seringue, est systématiquement contrôlé en pesant la masse de liquide récupérée durant un intervalle de temps donné. L'étude de l'influence de la concentration est faite à géométrie constante (Buse B2). Les mesures pour les buses B4, B5, B6 et B7 ont été réalisées par Massinissa SAADI dans le cadre d'un stage de 2^{ème} année de Master à l'université de Rouen. Les expériences sont réalisées à pression atmosphérique et température ambiante, celle-ci variant entre 17°C et 24°C.

Les écoulements dans les buses sont laminaires, comme l'indique les valeurs de nombre de Reynolds Re ($Re = 4\rho Q_v / (\pi \eta D_{or}) \in [236 ; 1566]$). Dans l'injecteur, la longueur d'établissement de la couche limite (de l'ordre de $0,06 D_{or} Re$) est systématiquement plus grande que la longueur de la buse.

Pour chaque jet, le diamètre D_{jet} et sa vitesse V_{jet} sont mesurés (voir tableau 10) selon un protocole exposé plus loin en section 4.3.1. A partir de ces deux mesures, on calcule le nombre Weber gazeux du jet $We_g = \rho_g V_{jet}^2 D_{jet} / \sigma$ où ρ_g est la masse volumique de l'air à 20°C. We_g est inférieur à 1 pour tous les jets, indiquant que les effets aérodynamiques sont négligeables dans tous les cas (Dumouchel (2008)). Les jets observent un comportement dit de Rayleigh (Dumouchel (2008)) : l'instabilité capillaire génère sur le jet une perturbation axisymétrique dont l'amplitude croît, provoquant la rupture. A conditions initiales fixées et dans la mesure où les écoulements sont laminaires, la longueur de rupture du jet évolue linéairement avec la vitesse du jet.

c (ppm)	Buse D_{or} (μm)	$Q_v \pm 1\%$ $(10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	$D_{jet} \pm 4/\text{Res}$ (μm)	$V_{jet} \pm 5\%$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	$Re \pm 8\%$ (\cdot)	$We_l \pm 12\%$ (\cdot)	$\lambda_{R1} \pm 4/\text{Res}$ (μm)	$t_{BU} \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t_{d_4}^* \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t^{**} \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t_r \pm 10\%$ (ms)
5	B1 200	5,93	195	1,99	286	7,41	1135	11 ± 1	5,8	6,3	-
		9,17	190	3,23	444	17,7	1025	$10,0 \pm 0,6$	5,7	6,4	-
		13,3	185	4,94	642	37,0	1221	$7,7 \pm 0,7$	4,0	5,4	0,88
		17,2	184	6,46	830	62,1	1154	$6,6 \pm 0,6$	3,6	4,9	0,60
		20,3	200	6,49	986	87,5	1315	$7,0 \pm 0,7$	3,3	5,2	0,71
		23,7	187	8,61	1142	117	1029	$6,7 \pm 0,5$	4,2	5,4	0,48
		28,8	190	10,2	1392	174	1003	$5,1 \pm 0,4$	3,3	3,7	-
5	B2 105	2,92	125	2,37	268	12,3	689	$6,0 \pm 0,6$	3,4	3,9	-
		4,53	121	3,94	416	29,6	610	$4,0 \pm 0,3$	2,1	2,7	0,49
		6,55	117	6,09	604	62,1	576	$3,3 \pm 0,3$	1,8	2,4	0,37
		8,47	114	8,29	578	104	540	$2,6 \pm 0,2$	1,6	2,0	0,21
		11,7	112	11,9	1076	198	520	$2,1 \pm 0,2$	1,5	1,8	-
		14,5	112	14,8	1358	306	494	$1,9 \pm 0,2$	1,5	1,8	0,15
		17,0	112	17,3	1566	419	473	$1,8 \pm 0,2$	1,4	1,6	-
5	B3 42	1,82	46,0	10,9	418	74,8	-	$0,54 \pm 0,06$	0,41	0,41	-
		2,57	47,0	14,8	592	150	-	$0,50 \pm 0,06$	0,41	0,41	(0,044)
		2,92	47,0	16,8	672	194	-	$0,49 \pm 0,06$	0,39	0,39	(0,048)
		3,53	46,0	21,2	812	283	248	$0,45 \pm 0,05$	0,39	0,40	(0,049)
		3,93	47,0	22,7	906	351	251	$0,43 \pm 0,05$	0,37	0,37	(0,038)
		4,23	46,5	24,9	974	407	226	$0,49 \pm 0,05$	0,44	0,44	(0,033)
		4,53	46,5	26,7	1044	467	263	$0,47 \pm 0,05$	0,43	0,44	(0,024)
5	B4 367	34,7	339	3,85	914	40,9	1850	16 ± 1	10	13	1,4
5	B5 480	45,2	484	2,46	910	31,1	2520	29 ± 3	16	24	2,7
5	B6 500	36,7	549	1,55	710	18,2	2740	43 ± 5	24	34	4,4
		42,2	539	1,85	816	24,0	2890	37 ± 4	23	32	3,6
		47,5	534	2,12	918	30,3	2820	33 ± 4	16	24	3,2
5	B7 500	36,7	488	1,97	710	18,2	2700	45 ± 5	21	30	6,3
		47,5	463	1,82	918	30,3	2860	37 ± 5	21	33	5,6
7,5	B2 105	2,62	133	1,88	236	9,97	812	10 ± 1	3,3	5,5	-
		4,22	127	3,33	380	26,0	681	$5,9 \pm 0,5$	2,3	4,0	0,96
		5,93	119	5,34	534	51,3	590	$4,0 \pm 0,3$	1,9	2,6	0,49
		8,42	117	7,83	758	103	565	$3,4 \pm 0,3$	1,6	2,3	0,36
		11,8	114	11,5	1062	202	551	$2,5 \pm 0,2$	1,6	2,1	0,23
		13,8	113	13,7	1240	275	532	$2,6 \pm 0,2$	1,6	1,9	0,23
		16,8	114	16,6	1522	416	545	$2,4 \pm 0,2$	1,7	1,9	-
10	B2 105	3,42	138	2,29	308	17,1	832	11 ± 2	4,1	6,0	-
		4,65	129	3,56	418	31,5	715	$9,3 \pm 0,9$	2,7	4,9	-
		6,53	122	5,59	588	62,1	614	$5,3 \pm 0,4$	2,2	3,2	0,62
		8,45	119	7,60	762	104	545	$3,7 \pm 0,3$	1,6	2,4	0,43
		11,7	117	10,9	1058	200	533	$2,8 \pm 0,2$	1,4	1,7	0,31
		14,4	115	13,9	1298	302	559	$2,6 \pm 0,2$	1,5	1,8	-
		15,6	113	15,6	1408	355	545	$2,7 \pm 0,3$	1,7	2,1	-
12,5	B2 105	2,92	134	2,07	262	12,3	796	11 ± 1	3,4	6,2	2,2
		4,73	127	3,74	426	32,5	767	$6,9 \pm 0,6$	2,4	4,8	1,0
		6,45	122	5,52	578	60,2	620	$5,3 \pm 0,4$	2,2	3,8	0,74
		8,68	119	7,80	778	109	588	$4,2 \pm 0,3$	1,8	2,3	0,45
		11,3	117	10,5	1016	186	577	$3,6 \pm 0,3$	1,8	2,7	0,34
		14,4	115	13,9	1294	302	480	$3,1 \pm 0,3$	1,4	2,1	-
		17,5	114	15,6	1566	441	479	$2,6 \pm 0,3$	1,5	1,5	-

Tableau 10. Liste des points de fonctionnement réalisés.

c (ppm)	Buse D_{or} (μm)	$Q_v \pm 1\%$ ($10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)	$D_{jet} \pm 4/\text{Res}$ (μm)	$V_{jet} \pm 5\%$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	$R_e \pm 8\%$ (\cdot)	$We_l \pm 12\%$ (\cdot)	$\lambda_{R1} \pm 4^*\text{Res}$ (μm)	$t_{BU} \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t_{d_4}^* \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t^{**} \pm \Delta t_{BU}$ (ms)	$t_r \pm 10\%$ (ms)
15	B2 105	2,92	140	1,89	260	12,3	830	12 ± 1	3,5	6,1	2,0
		4,73	127	3,74	420	32,5	850	$7,5 \pm 0,6$	2,4	4,0	1,1
		6,57	121	5,70	582	62,3	615	$5,4 \pm 0,4$	1,9	3,1	0,60
		8,57	111	8,85	762	106	522	$3,9 \pm 0,3$	1,8	2,5	0,4
		11,6	115	11,2	1030	194	577	$3,4 \pm 0,3$	1,5	2,2	0,39
		14,5	113	14,4	1288	304	586	$3,2 \pm 0,3$	1,7	2,2	0,30
		17,3	112	17,6	1540	434	562	$3,0 \pm 0,3$	1,7	2,3	-
20	B2 105	2,92	141	1,87	260	12,4	701	17 ± 4	3,8	6,9	-
		4,73	130	3,56	422	32,4	654	10 ± 1	2,8	5,6	1,9
		6,55	124	5,43	584	62,5	584	$7,5 \pm 0,6$	2,4	3,5	1,0
		8,47	121	7,36	754	104	591	$6,5 \pm 0,6$	2,5	4,2	0,93
		11,7	117	10,9	1044	199	401	$4,4 \pm 0,4$	1,5	2,5	0,55
		14,3	114	14,0	1276	297	387	$3,4 \pm 0,3$	1,5	1,9	-

Tableau 10. Liste des points de fonctionnement réalisés (suite).

4.2.4. Système d'imagerie

Le montage optique de visualisation illustré en figure 64 est un montage par transmission : il permet de visualiser la projection sur un plan 2 dimensions (2D) des objets liquides. Il est composé d'une caméra associée à lunette à une visée lointaine (microscope à longue distance). La caméra est le modèle HR29050 de la société SVS-Vistek et le logiciel d'acquisition utilisé est StreamPix6. Le capteur de la caméra est de type CCD et possède 29 millions de pixels (6576 x 4384 pixels), un pixel ayant une taille de $5,5 \times 5,5 \mu\text{m}^2$. La fréquence d'acquisition maximale du capteur est de 6 images par seconde et le temps d'exposition minimal est de 17 μs . Le capteur retourne des images 8 bits (maximum 14 bits) en niveaux de gris au format TIF sans compression.

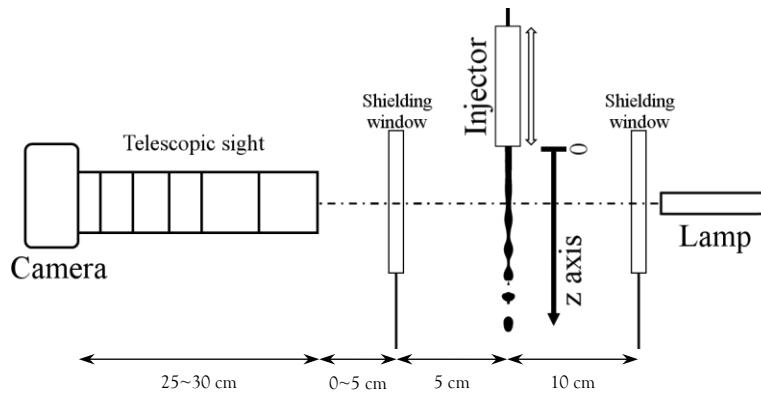


Figure 64. Schéma du diagnostic optique.

La lunette à visée lointaine est le modèle K2 DistaMax de la société Infinity. Elle comporte un diaphragme et un zoom manuel, un objectif amovible (différents grandssements disponibles) et accessoirement des allonges et des tubes avec lentilles grossissantes X2. Le grandssement de la lunette de la lunette est ajustable de 3,6 à 12, l'ouverture numérique est comprise entre 0,156 et 0,204, la profondeur de champ est de 10 à 20 μm et la résolution optique de la lunette est comprise entre 2,1 et 1,6 μm .

La résolution des images est choisie de manière à visualiser le diamètre du jet cylindrique dans sa partie non perturbée sur au moins 200 pixels. Un tel critère permet d'avoir des jets suffisamment résolus pour pratiquer l'analyse multi-échelles sans la segmentation sub-pixel. Pour cette raison, différentes résolutions et champs de visualisation ont été utilisés en fonction du diamètre de buse (tableau 11). Le champ de vision est réglé grâce à une image de mire et la réponse impulsionale du montage optique est comprise entre 5 et 8 pixels (plus le champ couvert est petit, plus la réponse impulsionale est large). Le capteur est placé en mode portrait pour disposer du plus grand nombre de pixels dans le sens de l'écoulement, optimisant ainsi le champ de visualisation.

Référence buse	B1	B2 et B3	B2 (20 ppm)	B4, B5, B6 et B7
Champ couvert (mm ²)	8,29 x 5,52	3,68 x 2,46	4,84 x 3,22	11,0*7,31
Résolution <i>Res</i> (pixels/mm)	792	1780	1380	600

Tableau 11. Résolutions et champs de visualisation choisis.

La source lumineuse est une source laser CAVITAR, modèle Cavitux Smart 400W, avec sa fibre optique et une optique de collimation de 25 mm. C'est une source pulsée monochromatique autour de 640 nm et faiblement cohérente produite par une diode laser. La durée de l'impulsion lumineuse est réglable entre 10 ns et 10 μ s et a une influence sur l'énergie délivrée par la source : une faible durée d'impulsion réduit l'énergie fournie par la source. La durée de l'impulsion lumineuse est choisie égale à 20 ns. La source lumineuse et la caméra sont synchronisées avec un générateur de signaux TTL réglé à 2 Hz.

Des effets de trainée peuvent apparaître sur les images. Ils se produisent lorsque l'objet éclairé se déplace dans le champ de visualisation de la caméra pendant l'acquisition de l'image. Pour annuler cet effet, le couple temps d'exposition – résolution spatiale doit être choisi avec soin en fonction de la vitesse de déplacement des objets. Puisque la résolution des images a déjà été choisie, la durée de l'impulsion lumineuse est réglée en conséquence. Pour l'ensemble des configurations étudiées, la situation la plus délicate se produit avec la buse B3 qui génère les plus grandes vitesses de jets V_{jet} , jusqu'à 26,7 m/s comme indiqué en tableau 10. Pour une durée d'impulsion lumineuse de 20 ns, une particule de fluide se déplaçant à 26,7 m/s parcourt 0,534 μ m, la résolution de l'image ne doit pas être supérieure à 1872 pixels/mm pour limiter l'effet de trainée, ce qui est bien le cas.

L'étude réalisée est statistique : 150 images sont prises par position verticale. Ce nombre d'image est justifié dans la section 4.4.1. De plus, deux images successives ne doivent pas être temporellement corrélées. Pour le jet présentant la plus petite vitesse (buse B6, $V_{jet} = 1,55$ m/s) et une fréquence d'acquisition de 6 Hz, une particule de liquide va parcourir 258 mm entre deux images. Pour tous les champs optiques listés dans le tableau 11, la particule de liquide sort du champ de la caméra, montrant que les images ne sont pas temporellement corrélées.

Les champs choisis ne permettent pas d'observer un jet complet depuis sa sortie de l'injecteur jusqu'à sa rupture sur une seule image. Pour suivre l'évolution du jet, l'injecteur est déplacé grâce au système de déplacement 3D. Le décalage vertical choisi dépend du champ de vision et est égal à 6 mm pour les buses B1, B4, B5, B6, B7 et 3 mm pour les buses B2 et B3.

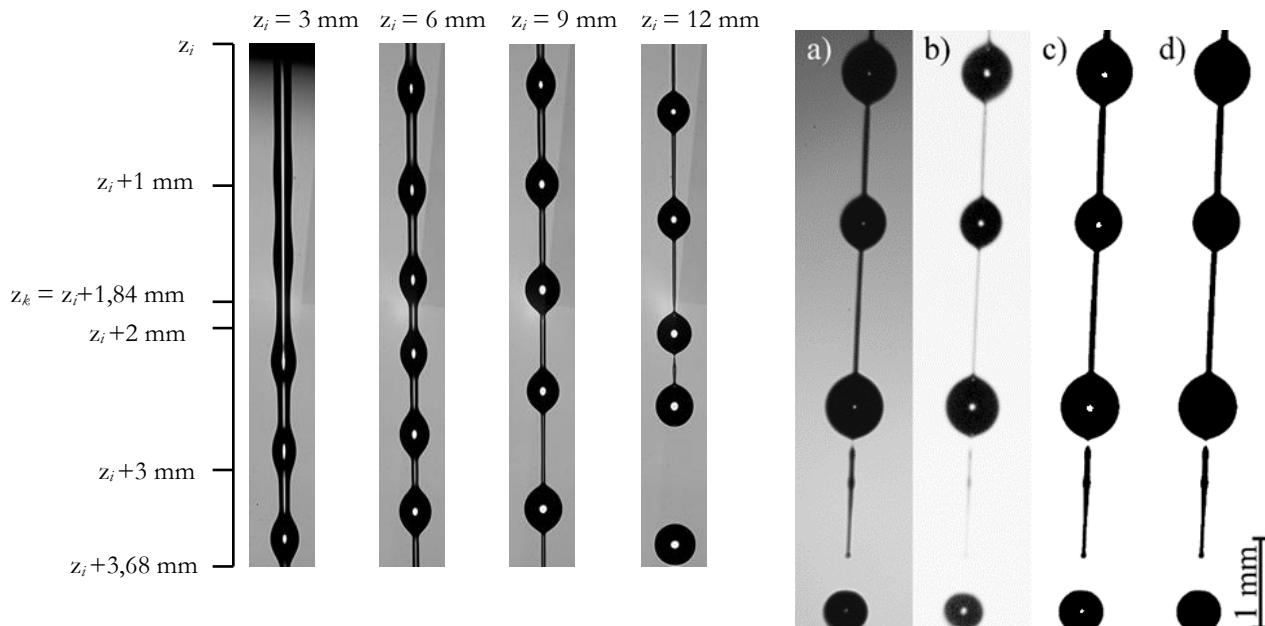


Figure 65. Images de jet, solution 5ppm, la position z_i du haut de l'image est indiquée en millimètres. Buse B2 $Q_v = 2,92 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$.

Figure 66. De l'image brute à l'image segmentée corrigée (a) image brute (b) image normalisée (c) image segmentée (d) image segmentée corrigée.

Pour chaque image, sa position verticale haute est noté z_i et son centre z_k . La figure 65 présente des images caractéristiques de jets de solution à 5ppm pour la buse B2 à différentes positions z_i . Au départ, le jet est peu perturbé ($z_i = 3 \text{ mm}$ figure 65). Plus bas, on observe le développement d'une perturbation sinusoïdale qui correspond au développement de l'instabilité capillaire du régime de Rayleigh (1878). L'amplitude de cette perturbation sinusoïdale croît avec la distance à l'injecteur. Puis le motif de perles sur une ficelle se développe ($z_i = 6 \text{ mm}$). Le ligament s'amincit jusqu'à la rupture du jet tandis que les perles croissent et adoptent une forme sphérique ($z_i = 6, 9$ et 12 mm).

Proche de l'injecteur, les images de jets présentent une ligne claire médiane indiquant l'aspect laminaire des écoulements ainsi que l'axisymétrie des jets. Une fois le motif de perles sur une ficelle établi, un point lumineux est visible au centre des perles, qui correspond au spot de poisson [citation], en plus de la ligne claire visible sur les ligaments.

Le traitement d'image décrit en Ch.3 est appliqué aux images de jets pour les segmenter au niveau pixel, comme résumé en figure 66 qui montre les étapes de normalisation figure 66(b), de localisation figure 66(c) et de remplissage figure 66(d). A partir des images segmentées corrigées (figure 66(d)), les mesures de diamètre de jets, de longueurs d'ondes de perturbation, de longueurs de rupture et de distribution volumique d'échelles sont réalisées sur ces images à deux niveaux de gris.

4.3. Mesures préliminaires

4.3.1. Diamètre et vitesse du jet

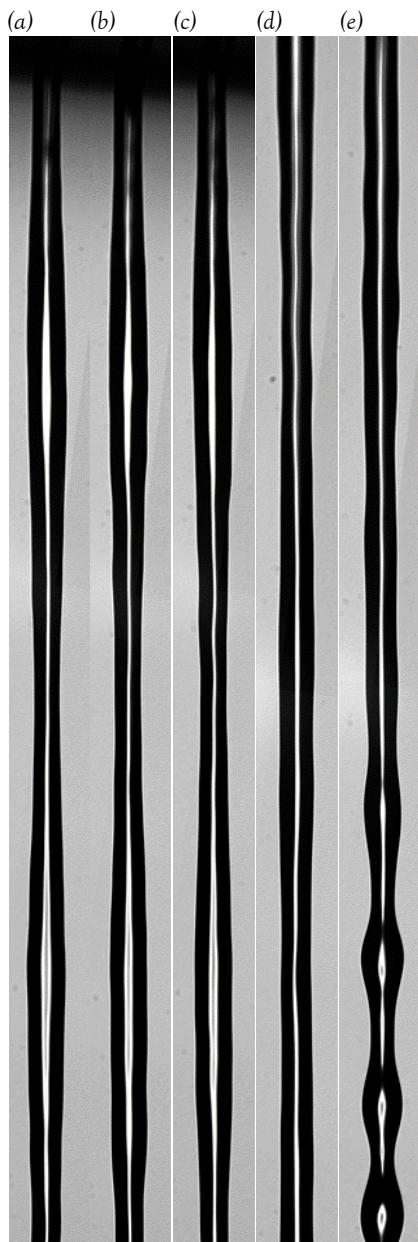


Figure 67. Déformation du jet en sortie d'injecteur. Solution à 20 ppm, buse B2, $Q_v = 14,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$. (a) (b) (c) $z_i = 4 \text{ mm}$ (d) $z_i = 8 \text{ mm}$ (e) $z_i = 12 \text{ mm}$.

Le diamètre D_{jet} est calculé en divisant la surface projetée du jet sur une partie de l'image segmentée par la hauteur de cette partie. Cette méthode est appliquée sur la partie du jet qui précède le développement de l'instabilité capillaire, là où il est le moins perturbé.

La position verticale où le jet est le moins perturbé n'est pas nécessairement située juste après l'injecteur. En effet, certains jets présentent une longue déformation en sortie de l'injecteur, comme illustrée en figure 67. Cette déformation est identique d'une image à l'autre pour un point de fonctionnement donné, comme le montre les figure 67(a)(b)(c). Elle résulte de l'écoulement interne à l'injecteur et à la buse. Cette déformation décroît en amplitude le long du jet (figure 67(d)) et celui-ci adopte ensuite une forme presque cylindrique, permettant une mesure de D_{jet} . Ensuite le jet voit l'instabilité capillaire se développer (figure 67(e)).

La vitesse du jet V_{jet} est déduite à partir de D_{jet} et du débit Q_v selon la relation : $V_{jet} = (4Q_v)/(\pi D_{jet}^2)$. Les valeurs de D_{jet} et V_{jet} sont rapportées en tableau 10. On y remarque que D_{jet} est toujours proche du diamètre de la buse et rapporte une dépendance à la vitesse plus ou moins prononcée. Bien que les mesures pratiquées ici ne permettent pas de trancher sur ce point, cette dépendance n'est peut-être pas dénuée de sens physique. Les valeurs D_{jet} et V_{jet} sont utilisées comme caractéristiques de références des jets par la suite.

4.3.2. Longueurs d'ondes de perturbation du jet

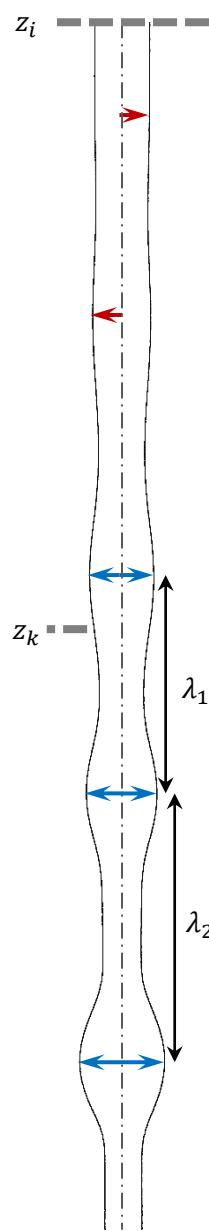


Figure 68. Mesure des longueurs d'onde de perturbation λ_i . Flèche bleue : maximum local détecté sur les 2 interfaces à la même position, conservé pour la mesure de λ . Flèche rouge : maximum local détecté sur 1 seule interface, non conservé pour la mesure de λ .

Solution 15 ppm, buse B2, $Q_v = 2,92 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$ et $z_i = 3 \text{ mm}$.

La longueur d'onde de perturbation moyenne $\lambda(z_k)$ des jets est également déterminée pour chaque série d'images à la position verticale z_k . La méthode de mesure a été développée par Jean-Baptiste CHARPENTIER dans le cadre d'un ATER à l'INSA de Rouen en 2018. Cette mesure est effectuée pour toutes les images présentant un objet liquide (ensemble de pixels connexes ayant le même niveau de gris) parcourant l'image de part en part. Un tel objet liquide présente deux interfaces liquide-gaz qui sont extraites de l'image et analysées séparément. L'interface liquide-gaz est lissée par convolution avec un noyau polynomial d'ordre 2 symétrique. Ce noyau a pour but de filtrer l'aspect marche d'escalier du contour pixélisé en plus du bruit, tout en conservant la courbure globale du contour. Ce filtrage est réalisé trois fois avec des tailles de filtres différents (60, 90 et 120 pixels). Après ce filtrage, les positions des maximums locaux de chacune des deux interfaces liquide-gaz sont mesurées, ces maximums locaux représentant les grandes structures observées sur le jet comme indiqué par les flèches de couleur en figure 68. Ces positions sont comparées entre les trois différents filtrages et conservées si et seulement si elles sont détectées pour les trois filtrages à la même position sur le contour (double flèches bleues en figure 68).

Puis, les longueurs d'ondes $\lambda_i(z_k)$ sont mesurées entre les maximums locaux successifs. Cette opération est répétée pour chaque image de la série à la position z_k , aboutissant à une distribution des longueurs d'onde de perturbation $\lambda_i(z_k)$ comme illustré en figure 69. A partir de cette distribution de longueur d'onde, la longueur d'onde moyenne de perturbation $\lambda(z_k)$ et l'écart type $\sigma_\lambda(z_k)$ sont déterminés. On calcule la largeur à mi-hauteur $FWHM_\lambda(z_k) = 2\sigma_\lambda(z_k)\sqrt{\ln 2}$ de la fonction gaussienne modélisant au mieux cette distribution de longueurs d'onde (courbe pointillée en figure 69). Puisque des visualisations du jet ont été réalisées à différentes positions z_k , $\lambda(z_k)$ représente alors l'évolution spatiale de la longueur d'onde moyenne de perturbation le long du jet.

La figure 70 présente l'évolution de $\lambda(z_k)$ pour les différentes vitesses de jet testées avec la buse B1 et la solution à 5 ppm. Le comportement frappant rapporté par cette courbe est l'augmentation non négligeable et continue de la longueur d'onde moyenne le long du jet pour certains points de fonctionnement. Observée pour d'autres conditions non représentées sur la figure 70, cette augmentation révèle l'existence du mécanisme de coalescence des perles mis en évidence par certains travaux de la littérature (Goldin et al. (1969), Li et al. (2003), Christanti et Walker (2002)) et identifié

dans le cadre de ce travail comme le montre les images de la figure 71. Selon les travaux de Li et al. (2003), ce mécanisme ne modifie pas la dynamique d'amincissement des ligaments.

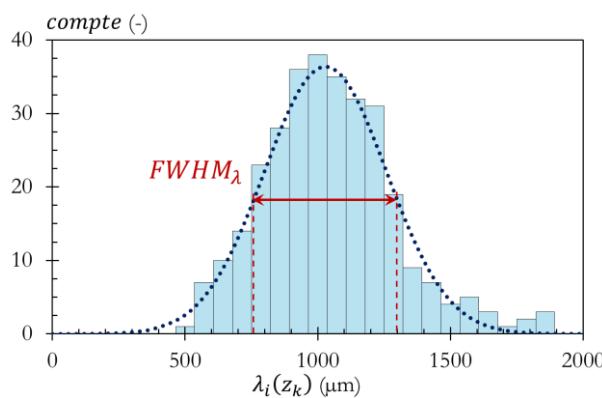


Figure 69. Histogramme des longueurs d'ondes $\lambda_i(z_k)$. Solution 5ppm, buse B1, $Q_v = 23,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$ et $z_k = 31,15 \text{ mm}$.

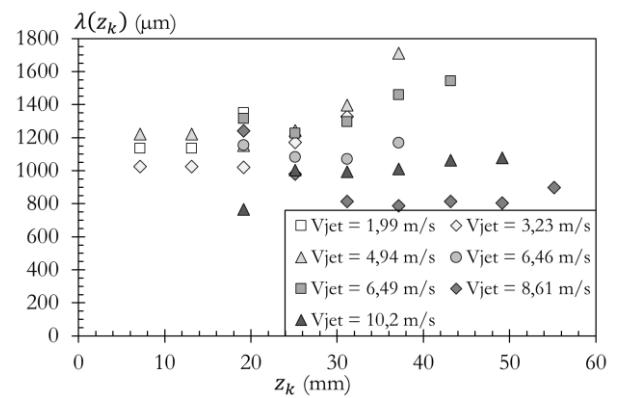


Figure 70. Evolution spatiale de la longueur d'onde $\lambda(z_k)$ pour plusieurs débits. Solution 5ppm, buse B1.

Dans la suite, λ_{R1} désigne la longueur d'onde moyenne du régime de Rayleigh et mesurée pour la position z_k située juste après la position où D_{jet} a été mesurée. λ_{R1} sert de longueur d'onde de perturbation de référence pour le jet et les mesures sont listées en tableau 10.

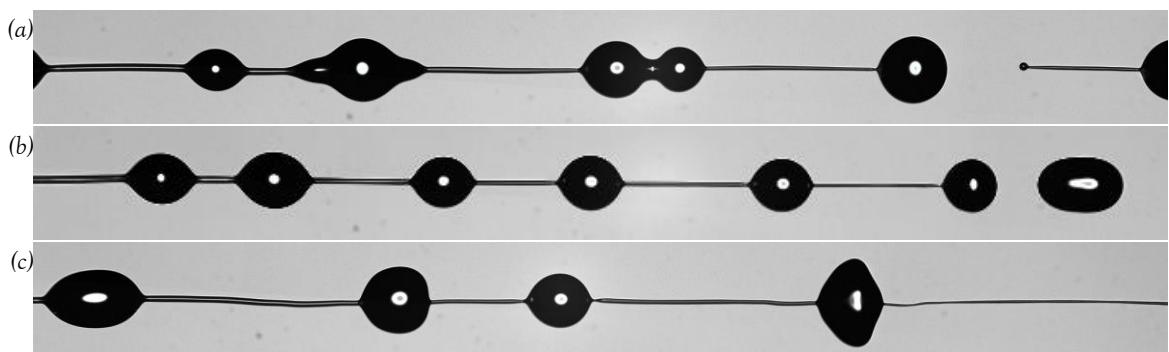


Figure 71. Coalescences des perles. Solution à 5ppm, buse B1, $Q_v = 9,17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$ et $z_k = 31,15 \text{ mm}$.

4.3.3. Longueurs de rupture du jet

La longueur de rupture du jet désigne la distance entre la sortie de l'injecteur et le point de rupture du jet. Elle varie dans le temps et est généralement associée à une valeur moyenne L_{BU} déterminée à partir de la distribution des longueurs de rupture. Celle-ci est construite en mesurant les longueurs de rupture sur toutes les images montrant un point de rupture. Sur chacune d'elles, la position z_{BU} de la première ligne de pixels ne présentant pas de jet est identifiée comme illustré en figure 72. L'ensemble des z_{BU} mesurés forme la distribution recherchée de laquelle sont déduites la longueur de rupture moyenne et son écart type σ_{BU} . (On remarque que la gaussienne centrée sur L_{BU} et de largeur à mi-hauteur $FWHM_{BU} = 2\sigma_{BU}\sqrt{\ln 2}$ reproduit convenablement la distribution de longueur de rupture.)

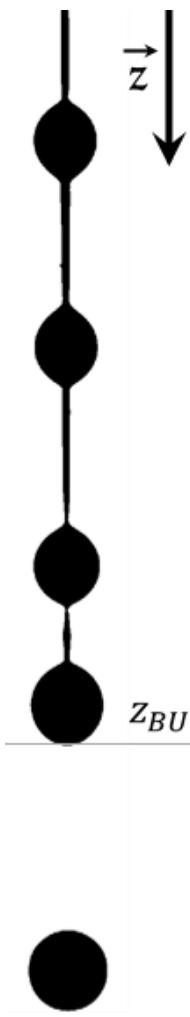


Figure 72. Mesure de la longueur de rupture du jet. Solution 5 ppm, buse B2, $Q_v = 2,92 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$ et $z_i = 12 \text{ mm}$.

La figure 73 présente la courbe de stabilité du jet qui représente L_{BU} en fonction de la vitesse V_{jet} . Les barres verticales correspondent à deux fois la largeur à mi-hauteur $FWHM_{BU}$. Pour une buse et une concentration donnée, L_{BU} croît linéairement avec la vitesse V_{jet} . Cette croissance est observée pour tous couples buse-concentration testés, ce qui est attendu et confirme que le comportement des jets étudiés n'est pas influencé par les effets aérodynamiques.

Notons qu'un comportement particulier est rapporté pour la solution 20 ppm : la croissance linéaire aux petites vitesses s'achève par un plateau pour les trois dernières vitesses. Ce comportement observé dans les expériences de Goldin et al. (1972) et Mun et al. (1998) n'a, à notre connaissance, pas reçu d'interprétation.

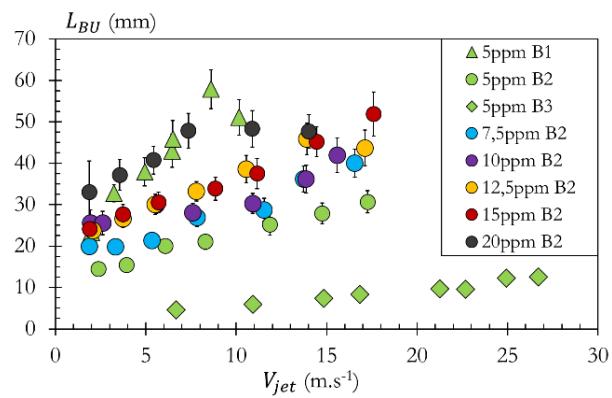


Figure 73. Dépendance de la longueur de rupture moyenne des jets avec la vitesse débitante dans la buse V_{jet} .

4.4. Mesure des distributions d'échelles 3D

4.4.1. Protocole de mesure

L'étude statistique des jets viscoélastiques est réalisée avec l'outil de description multi-échelles (voir Ch.2). La mesure de la distribution d'échelles nécessite plusieurs étapes à partir des images segmentées corrigées, illustrées en figure 74. D'abord la carte des distances euclidiennes (EDM) des images segmentées est calculée (figure 74(b)). Ensuite, la mesure de la distribution d'échelles est effectuée localement, sur une portion du jet délimitée par une fenêtre d'analyse rectangulaire. Cette fenêtre d'analyse est paramétrée par sa hauteur H_w (figure 74(c)) tandis que sa largeur est celle de l'image. La fenêtre d'analyse est repérée par sa position z qui correspond à la position verticale du point central de cette fenêtre. La fenêtre d'analyse est déplacée le long du jet, avec un pas de ΔH_w , de l'injecteur à la zone de rupture afin d'avoir l'évolution spatiale de la distribution d'échelle. La méthode de calcul utilisée ici est celle du calcul 3D via intégration axisymétrique (détalée en section 3.5.3) étant donné que l'instabilité capillaire est connue pour être un mécanisme axisymétrique.

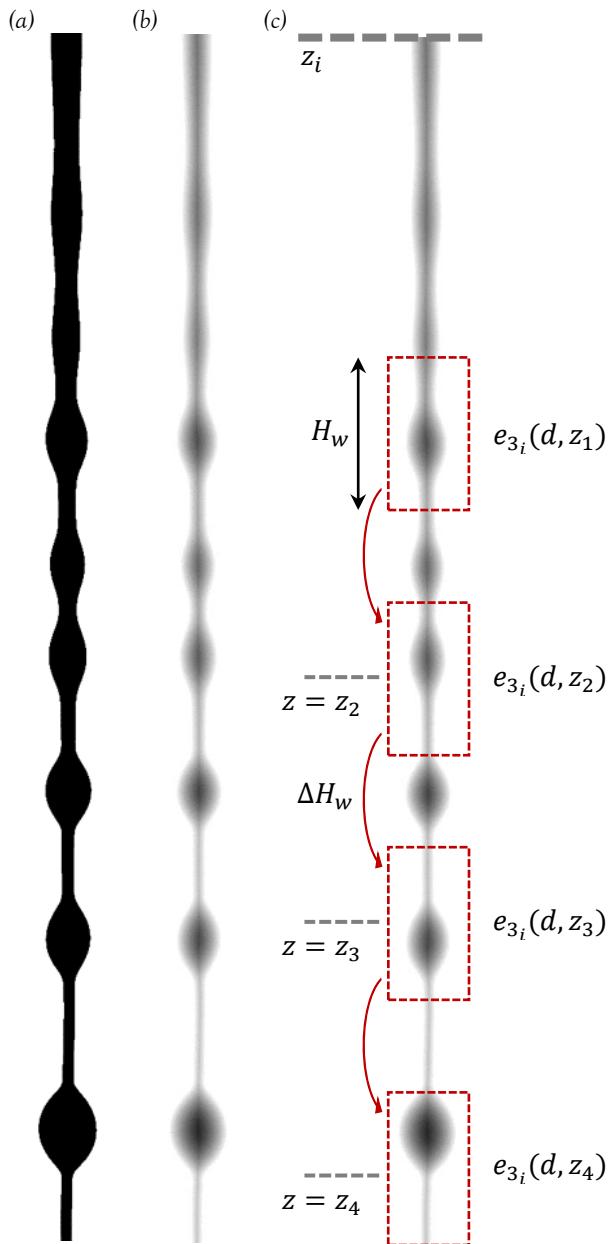


Figure 74. De l'image segmentée à la distribution d'échelle (a) Image segmentée corrigée (b) Carte des distances euclidiennes (EDM) (c) Mesure locale de la distribution d'échelles 3D le long du jet. Solution 5ppm, buse B1, $Q_v = 9,17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$ et $z_i = 15 \text{ mm}$.

notamment le taux d'étirement $\dot{\epsilon}$ qui fait intervenir une dérivée temporelle. Les dérivées de $e_3(d, t)$ sont calculées numériquement, la dérivée temporelle fait alors intervenir le pas de temps Δt correspondant au pas ΔH_w de décalage de la fenêtre d'analyse. Le choix de ΔH_w est donc important. Il doit être suffisamment petit pour offrir une représentation correcte de l'évolution temporelle de $e_3(d, z)$ et suffisamment grand pour éviter une dérivée temporelle bruitée. Le compromis s'est porté sur $\Delta H_w = H_w$.

Le nombre d'images n prises par position verticale et la hauteur H_w de la fenêtre d'analyse ont une influence sur la distribution d'échelles mesurée : n intervient explicitement dans l'Eq.(105) tandis que H_w intervient implicitement dans la mesure de $e_3_i(d, z)$. L'influence de ces deux paramètres sur la mesure de $e_3(d, t)$ est étudiée.

La mesure de la distribution d'échelles 3D est réalisée pour chacune des n images à chaque position verticale z de la fenêtre d'analyse. En notant $e_{3i}(d, z)$ la distribution d'échelles sur l'image i à une position verticale z de la fenêtre d'analyse, la distribution d'échelles 3D du jet à cette position correspond à la somme pondérée de chacune des distributions $e_{3i}(d, z)$, comme montré en section 2.2.2. $e_3(d, z)$ s'écrit :

$$e_3(d, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{3i}(d, z) \quad (105)$$

Où $\alpha_i = V_i(z) / \sum_{i=1}^n V_i(z)$ et $V_i(z)$ est le volume de la portion de jet contenue dans la fenêtre d'analyse à la position z de l'image i .

L'évolution spatiale de la distribution d'échelles est ensuite convertie en évolution temporelle en définissant le temps équivalent de la manière suivante afin de tenir compte de l'accélération du jet sous l'effet des forces de gravité :

$$t(z) = \frac{\sqrt{V_{jet}^2 + 2gz} - V_{jet}}{g} \quad (106)$$

Où g est l'accélération de la pesanteur. Quand $V_{jet}^2 \gg 2gz$, ce qui indique que le jet n'est pas soumis à l'influence de la gravité, l'Eq.(106) se simplifie en $t = z/V_{jet}$.

L'analyse de la distribution $e_3(d, t)$ utilise les résultats présentés au Ch.2. Certains résultats sont obtenus à partir des dérivées de $e_3(d, t)$,

4.4.2. Influence de la hauteur de fenêtre d'analyse sur la distribution d'échelles

La distribution d'échelles $e_{3_i}(d, t)$ est mesurée pour la portion de jet contenue dans la fenêtre d'analyse de hauteur H_w . En modifiant ce paramètre, la portion de jet considérée est plus ou moins grande, ce qui va modifier $e_{3_i}(d, t)$. Afin d'étudier l'évolution temporelle de l'instabilité capillaire, la mesure de la distribution d'échelles $e_3(d, t)$ doit être la plus locale possible afin de ne pas lisser cette évolution. En effet, si H_w est trop grand, la portion étudiée peut présenter des motifs très différents, comme un motif de perles sur une ficelle et des gouttes détachées si on se situe au niveau de la rupture, modifiant la distribution d'échelles mesurée. Il est donc nécessaire de réduire au maximum la hauteur H_w de la fenêtre d'analyse pour obtenir une meilleure sensibilité sur cette évolution temporelle. Il faut alors associer ce choix à un très grand nombre d'images. Les hauteurs choisies dépendent du diamètre de la buse comme indiqué en tableau 12. H_w est égal à 4 à 8 fois le diamètre de la buse selon les cas et se retrouve du même ordre de grandeur que la longueur d'onde λ_{R1} .

Référence buse	B1	B2	B3	B4, B5, B6 et B7
Hauteur de fenêtre H_w (mm)	1	0.5	0.5	3

Tableau 12. Hauteur de fenêtre d'analyses choisies.

4.4.3. Influence du nombre d'images sur la distribution d'échelles

L'influence du nombre d'images est étudiée sur la mesure de la surface spécifique $e_3(0, t)$ au travers de la divergence de Kullback-Leibler D_{KL} (Joyce (2011)). Cette divergence mesure l'écart entre deux distributions : plus sa valeur est faible, plus les distributions sont proches. Pour un ensemble de 300 images de jet libre à un temps t donné, la distribution d'échelles $e_{3_{300}}(d, t)$ de l'ensemble des images est calculée. On définit également la distribution d'échelles $e_{3_j}(d, t)$ pour j images choisies au hasard ($1 \leq j < 300$). La divergence de Kullback-Leibler D_{KL} s'écrit :

$$D_{KL}(j, t) = \int_{d=0}^{d=+\infty} e_{3_{300}}(d, t) \log_2 \left(\frac{e_{3_j}(d, t)}{e_{3_{300}}(d, t)} \right) dd \quad (107)$$

La figure 75 montre l'évolution de D_{KL} en fonction du nombre d'images j à différents temps t . Les symboles carrés indiquent que le jet est dans le régime de Rayleigh, les losanges dans le régime élasto-capillaire et les ronds dans le régime visco-capillaire, comme présentés dans le Ch.1. A chaque temps, la divergence D_{KL} décroît avec le nombre d'images, indiquant que les écarts entre les distributions d'échelles $e_3(d, t)$ et $e_{3_j}(d, t)$ diminuent, ce qui est attendu. D_{KL} présente ensuite un plateau lorsque l'on augmente le nombre d'images. Le nombre d'images nécessaire pour atteindre le plateau dépend du régime du jet. La situation la plus défavorable est le régime visco-capillaire pour laquelle le plateau débute à $n = 150$ images. Ainsi, en choisissant 150 images pour les expériences, on s'assure que la distribution d'échelles mesurée a atteint une convergence acceptable.

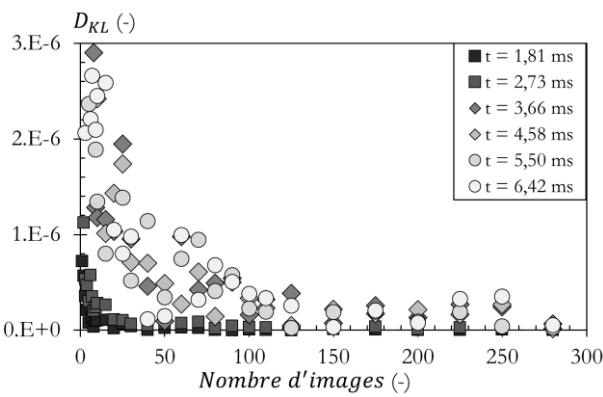


Figure 75. Divergence de Kullback-Leibler $D_{KL}(j, t)$. Solution 5 ppm, buse B1 et $Q_v = 17,2 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$.

4.4.4. Volume moyen du jet dans la fenêtre d'analyse

Comme le montre l'Eq.(105), le calcul de la distribution d'échelles volumique $e_3(d, t)$ nécessite une mesure du volume $V_i(t)$ de la portion de jet contenue dans la fenêtre d'analyse. Ce volume est mesuré selon la procédure exposée en section 3.5.3. A partir des différents volumes $V_i(t)$ mesurés sur les 150 images à un temps t donné, la moyenne arithmétique $Vol(t)$ est calculée à chaque instant t .

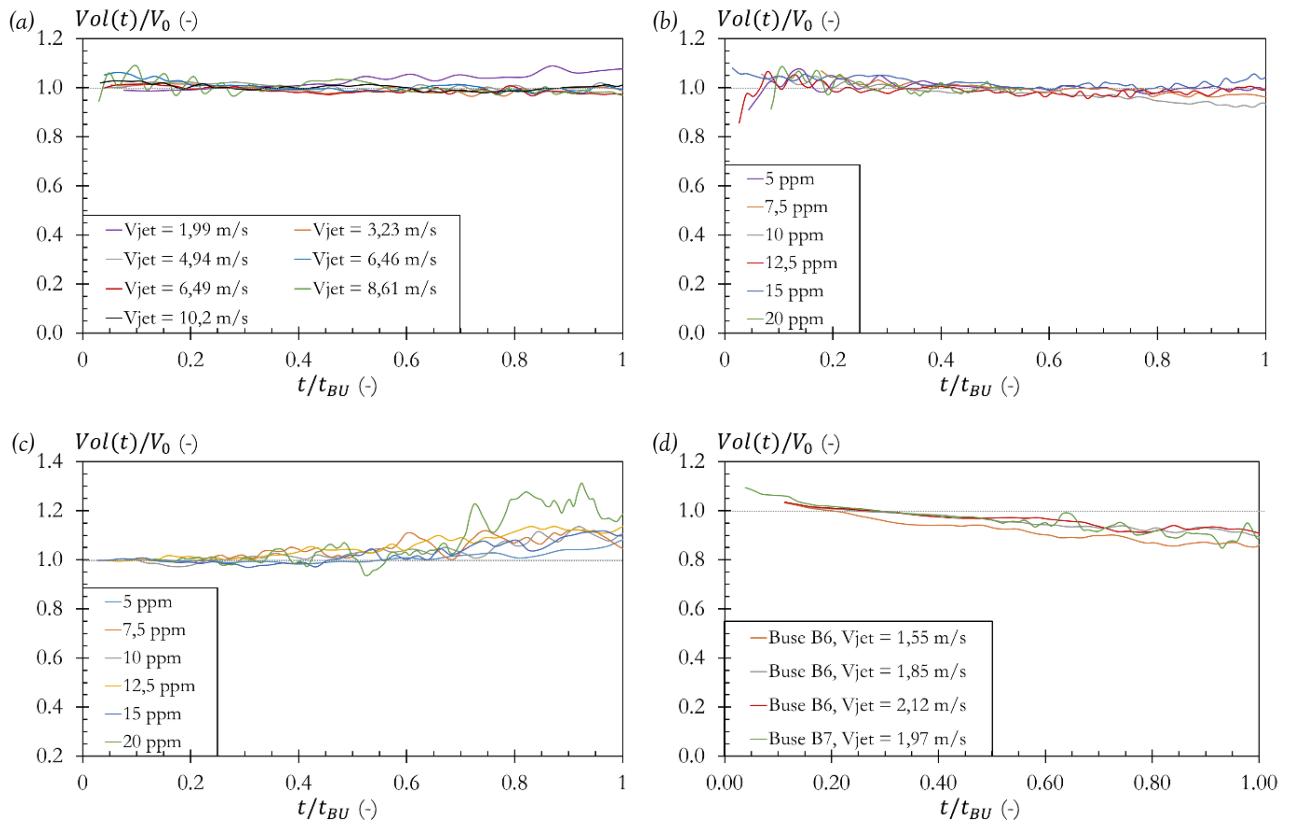


Figure 76. Evolution temporelle du volume du jet adimensionné dans la fenêtre d'analyse en fonction du temps t/t_{BU} . (a) Solution 5 ppm, buse B1 (b) Buse B2, $R_e \in [910 ; 1076]$ (c) Buse B2, $R_e \leq 310$ (d) Solution 5 ppm, $Fr \leq 2,5$.

Des exemples d'évolutions temporelles de $Vol(t)/V_0$ sont présentés en figure 76 où $V_0 = D_{jet}H_w$. $Vol(t)$ est présenté en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} où t_{BU} correspond au temps de rupture moyen du jet déterminé grâce aux mesures de L_{BU} et à l'Eq.(106). Une incertitude Δt_{BU} est associée à t_{BU} et est calculée à partir de l'Eq.(106) et des mesures issues des distributions de longueur de rupture :

$$\Delta t_{BU} = \frac{1}{2} (t(L_{BU} + FWHM_{BU}) - t(L_{BU} - FWHM_{BU})) \quad (108)$$

Ces temps de rupture moyen et leurs incertitudes sont listés en tableau 10.

Pour la plupart des points de fonctionnement, le volume $Vol(t)$ est constant en fonction du temps (figure 76(a)). Ceci indique que les effets de pesanteur restent négligeables. Pour $V_{jet} = 8,61$ m/s (figure 76(a)), $Vol(t)$ oscille aux premiers temps. Ce phénomène est également visible pour toutes les concentrations pour des jets à Reynolds similaire, comme illustré en figure 76(b). Ces oscillations résultent des longues déformations sinusoïdales du jet en sortie de l'injecteur, comme illustré en figure 67(a). Ces grandes déformations présentent une longueur caractéristique bien plus grande que la hauteur H_w de la fenêtre d'analyse (figure 67(e)). Ceci se traduit par des augmentations et diminutions cycliques du volume $Vol(t)$ qui est surestimé proche d'un gonflement et sous-estimé proche du col. Ces déformations s'amortissent comme le montrent les figure 67(d)(e) et la figure 76(b).

Pour le plus petit débit d'injection en figure 76(a) ($V_{jet} = 1,99$ m/s), $Vol(t)$ augmente légèrement avec le temps. Cette augmentation est visible pour toutes les concentrations testées lorsque le Reynolds du jet est inférieur à 310, comme illustré en figure 76(c). Ce comportement est peut-être associé au mécanisme de « gobbling » (Clasen et al. (2009)) faisant référence à la présence d'une force élastique retardant la chute du jet et se manifestant pour des nombres $We_l = 16\rho Q_v^2/(\sigma\pi^2 D_{or}^3) \leq 1$ dans la mesure où les jets de la figure 76(c) ont de faibles nombres de We_l (~ 12). Le comportement particulier observé pour la solution 5 ppm en figure 76(c) dans l'intervalle de temps $t/t_{BU} \in [0,7 ; 1]$ provient du fait que cette plage temporelle couvre une proportion non négligeable de situations pour lesquelles la rupture a déjà eu lieu. Dans ce cas, $Vol(t)$ intègre le volume des gouttes dont la répartition spatiale apparaît être à l'origine d'une augmentation de cette quantité.

Certains jets présentent une diminution de $Vol(t)$, comme le montre la figure 76(d). Pour ces situations, les effets de pesanteur ne sont pas négligeables comme l'indique leur nombre de Froude ($F_r = V_{jet}/\sqrt{gL_{BU}}$) inférieur à 2,5 : le jet s'accélère et s'allonge. Comme H_w est fixe, il en résulte une diminution du volume V_{jet} . Il faut tenir compte de ces effets de gravité dans les analyses de ces jets. Pour les autres jets, les valeurs de nombre de Froude sont comprises entre 3,29 et 76,0.

4.5. Analyse multi-échelle

Des distributions d'échelles $e_3(d, t)$ sont présentées en figure 77 pour un point de fonctionnement à différents temps. Aux premiers temps, la distribution d'échelles est linéaire, ce qui correspond à une forme de jet cylindrique (figure 13 de la section 2.3.2). Plus tard, la distribution présente deux parties distinctes : une partie linéaire aux petites échelles et une partie polynomiale aux grandes échelles. Pour ces temps, la distribution d'échelles ressemble à celle de l'ensemble cylindre et sphère présentée en section 2.4.1, la partie linéaire étant principalement portée par le cylindre et la partie polynomiale par la sphère. Cette forme est attendue pour $e_3(d, t)$ car le jet adopte un motif de perles sur une ficelle. Au cours du temps, on observe que l'échelle d_{max} augmente, indiquant la croissance de la grande structure dans le jet. Par ailleurs, la valeur de pente de la partie linéaire diminue dans le temps, indiquant un

amincissement de la partie cylindrique. Ces deux observations traduisent l'accroissement des perles et l'amincissement de la partie ligamentaire du motif de perles sur une ficelle.

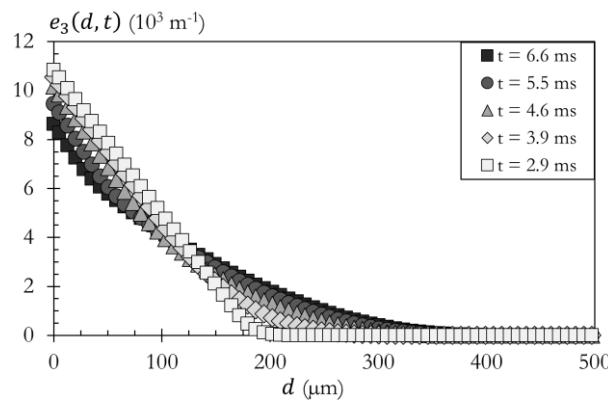


Figure 77. Evolution temporelle de $e_3(d, t)$. Solution 5 ppm, buse B1 et $Q_v = 23,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$.

4.5.1. Surface spécifique

L'évolution de la surface spécifique est étudiée au travers de la quantité adimensionnée $e_3(0, t)D_{jet}/2$ qui vaut 1 pour un cylindre de diamètre D_{jet} .

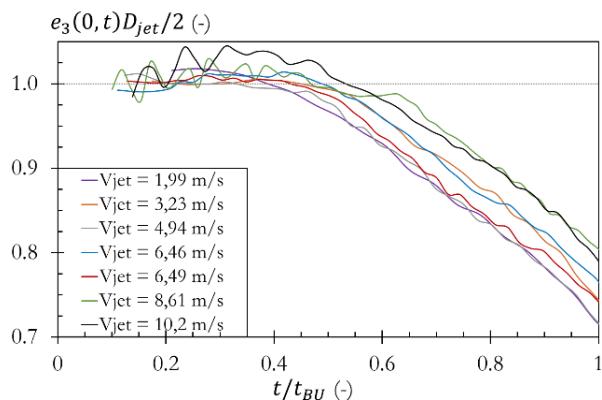


Figure 78. Evolution temporelle de la surface spécifique adimensionnée en fonction du temps t/t_{BU} pour différentes vitesses de jet. Solution 5 ppm, buse B1.

La figure 78 présente l'évolution de $e_3(0, t)D_{jet}/2$ en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} pour la solution 5 ppm avec la buse B1. Une augmentation de $e_3(0, t)D_{jet}/2$ est visible aux premiers temps. Cette augmentation a déjà été identifiée lors de l'étude numérique de l'instabilité capillaire pour un liquide newtonien (Dumouchel et al. (2017)). Elle se produit pendant le régime de Rayleigh qui porte l'accroissement des perturbations sinusoïdales. Cette augmentation de la surface spécifique traduit un gain d'interface lors de ce régime. Pour les plus grandes vitesses, une oscillation est présente et correspond à celle visible lors de l'évolution temporelle du volume $Vol(t)$ observée et discutée en section 4.4.4. Après cette phase d'accroissement, $e_3(0, t)D_{jet}/2$ décroît jusqu'à la rupture, indiquant une perte d'interface caractéristique des instabilités capillaires. Au temps de rupture, les valeurs de surface spécifique ne sont pas identiques pour les différentes vitesses : elles sont globalement plus faibles lorsque V_{jet} diminue. Les résultats expérimentaux (non montrés ici) ramènent par ailleurs une sensibilité avérée de la surface spécifique $e_3(0, t_{BU})$ à la concentration de la solution et à la géométrie de la buse. L'étude de l'instabilité capillaire pour des liquides Newtoniens (Dumouchel et al. (2017))

rapporte une dépendance entre $e_3(0, t_{BU})$ et la longueur d'onde de perturbation. Travaillant ici avec des jets libres, il est peu probable que ce paramètre soit responsable des variations de $e_3(0, t_{BU})$ puisque chaque rupture est pilotée par la perturbation la plus instable (ce point sera confirmé plus tard). Aussi les dépendances de $e_3(0, t_{BU})$ sont vraisemblablement attachées à la nature viscoélastique des solutions à travers des mécanismes qu'il conviendrait d'analyser plus en détail.

4.5.2. Mesure des échelles caractéristiques d_1 et d_4

Les échelles caractéristiques d_1 et d_4 ont été introduites en section 2.5 traitant de l'évolution de la distribution d'échelle $e_3(d, t)$ d'un ensemble de ligaments s'aminçissant avec la même dynamique. Pour rappel, $d_1(t)$ correspond à la plus petite échelle pour laquelle $\dot{e}'_3(d, t)$ est nulle et $d_4(t)$ est l'échelle pour laquelle $\dot{e}'_3(d, t)$ montre un maximum. L'intérêt de cette échelle $d_4(t)$ est qu'elle porte la dynamique d'aminçissement des ligaments, dynamique qui, rappelons-le dépend du temps de relaxation des solutions viscoélastiques quand elle est contrôlée par l'élasticité des solutions. Dans une démarche analogue, Dumouchel et al. (2017) avait travaillé avec $d_1(t)$, il convient de comparer ces échelles dans nos expériences.

La détermination expérimentale de $d_1(t)$ et $d_4(t)$ se fait donc sur la fonction $\dot{e}'_3(d, t)$ dont un exemple est présenté sur la figure 79 (5ppm, buse B1, $Q_v = 23,7 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$ à $t = 4,4 \text{ ms}$). En comparant la figure 79 avec la figure 25 du Ch.2, on remarque que la présence de la perle amène des valeurs négatives dans les grandes échelles et introduit une nouvelle échelle, $d_2(t)$. (Ce comportement est analogue à celui rapporté pour les ligaments Newtonien.) $\dot{e}'_3(d, t)$ permet d'identifier les échelles $d_1(t)$, $d_4(t)$ et d_{max} , qui n'est autre que la plus petite échelle pour laquelle $e_3(d, t) = 0$.

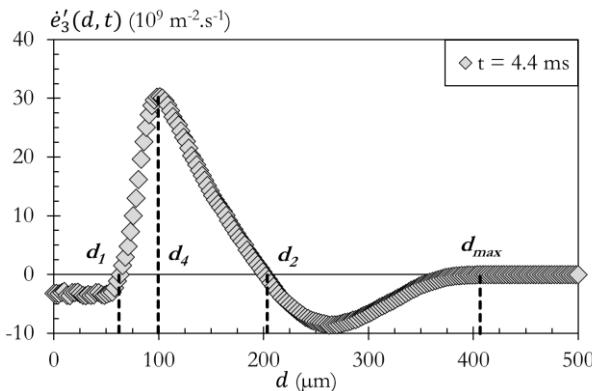


Figure 79. Evolution temporelle de $\dot{e}'_3(d, t)$ et définition des échelles caractéristiques. Solution 5ppm, buse B1, et $Q_v = 23,7 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$.

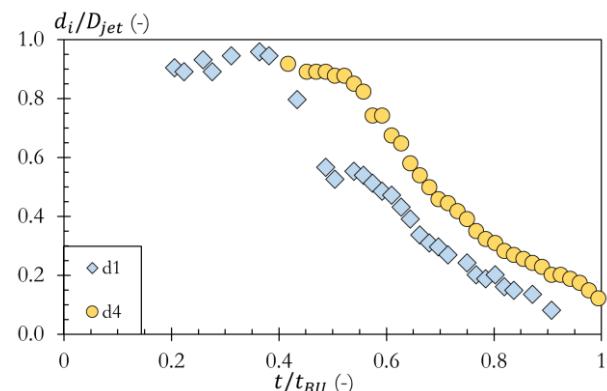


Figure 80. Evolution temporelle des échelles d_1 et d_4 . Solution 5ppm, buse B1, et $Q_v = 23,7 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$.

La figure 80 trace les évolutions temporelles des échelles d_1 et d_4 pour le cas 5ppm, buse B1, $Q_v = 23,7 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$. Comme attendu, les deux échelles diminuent dans le temps au gré des régimes d'écoulement qui prennent place dans les structures ligamentaires, l'échelle $d_4(t)$ restant toujours supérieure à l'échelle $d_1(t)$ comme leur définition l'impose (voir figure 79). Cependant, dans le domaine d'intérêt ($t/t_{BU} \in [0,6 ; 0,9]$), l'évolution de $d_4(t)$ est plus lisse et moins accidentée que celle de $d_1(t)$. Cette constatation tient du fait que pour les fonctions $\dot{e}'_3(d, t)$ de cette étude, la détection du maximum est

plus aisée. Ainsi, dans la suite du travail il est convenu d'utiliser le signal $d_4(t)$ pour identifier les régimes d'écoulement ligamentaire et leurs caractéristiques.

4.5.3. Identification des régimes ligamentaires

L'identification des régimes d'écoulement ligamentaire est conduite grâce au signal $d_4(t)$, dont la détermination est exposée dans la section précédente, et à l'échelle $d_{max}(t)$. Cette dernière est déterminée comme la plus petite échelle pour laquelle $e_3(d, t) < 0,005e_3(0, t)$. Cette section décrit la méthodologie mise au point pour correctement identifier le régime élasto-capillaire intermédiaire (voir figure 7 de l'introduction). Schématisé sur la figure 81, la méthode consiste à déterminer les régimes 1 et 3 pour en déduire le régime 2. Ces étapes sont décrites dans les sections suivantes.

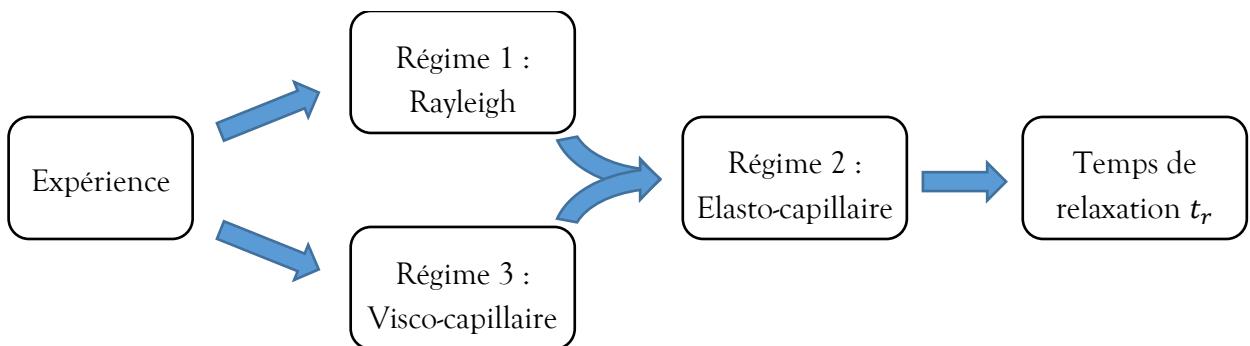


Figure 81. Ordre d'identification des régimes observés pour d_4 .

4.5.3.1. Régime de Rayleigh

Le premier régime subit par le jet est le régime de Rayleigh (voir figure 7). Ce régime est associé à une croissance exponentielle de l'amplitude de déformation qui se traduit par une décroissance linéaire de la fonction $(d_{max}(t)/D_{jet} - 1)$ dans une représentation semi-logarithmique. La figure 82 présente des exemples d'évolution de $(d_{max}(t)/D_{jet} - 1)$ en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} . Deux phases sont identifiées : aux premiers temps la fonction adopte une forte croissance linéaire suivie d'une phase de moindre croissance jusqu'à la rupture. La forte croissance linéaire correspond au régime 1. Les pentes ne sont pas exactement les mêmes en raison de la dépendance de D_{jet} et t_{BU} de la vitesse V_{jet} . Elles sont mesurées en considérant une croissance linéaire moyenne comme l'illustre la figure 82(b). Le taux de croissance adimensionné $\omega_{d_{max}}$ ainsi que le temps $t_{d_{max}}^*$, marquant la fin de la croissance exponentielle de d_{max} , sont également déterminés.

Le régime 1 est également associé à une croissance linéaire de la fonction $(1 - d_4(t)/D_{jet})$ dans une représentation semi-logarithmique. Des exemples de cette fonction sont montrés sur la figure 83. Ayant pris soin d'ôter les points des premiers temps pour lesquels la mesure de $d_4(t)$ est peu précise, on remarque deux croissances linéaires successives, la première étant de pente plus grande que la seconde. La première partie des courbes correspond au régime 1. Le taux de croissance adimensionné ω_{d_4} ainsi que le temps $t_{d_4}^*$, marquant la fin de la croissance exponentielle de $d_4(t)$, sont mesurés comme

précédemment en considérant un comportement moyen comme illustré en figure 83(b). Pour comparaison, cette figure affiche également $d_{max}(t)$.

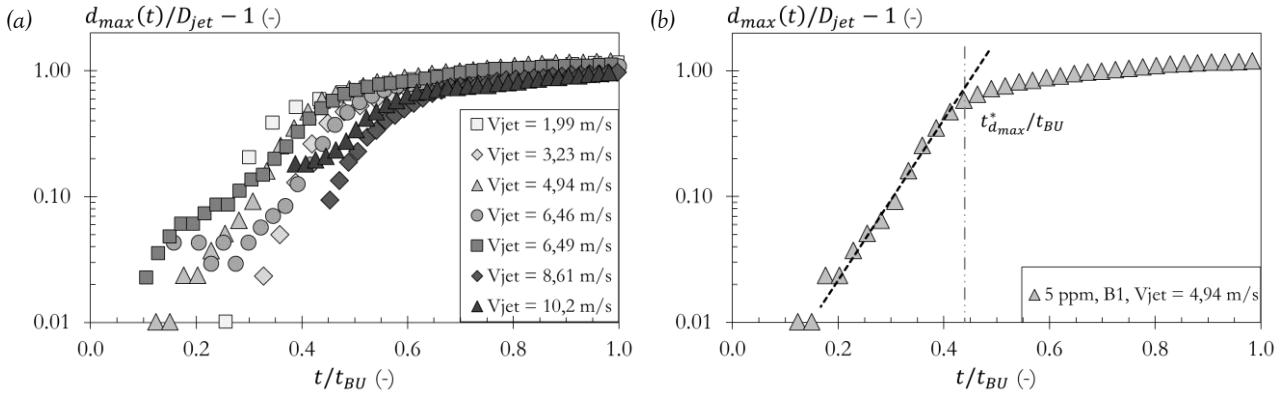


Figure 82. Evolution temporelle de $(d_{max}/D_{jet} - 1)$ en fonction du temps t/t_{BU} . (a) Solution 5 ppm, buse B1 (b) Mesure de t^* , la ligne pointillée donne la pente maximale trouvée pour le régime 1.

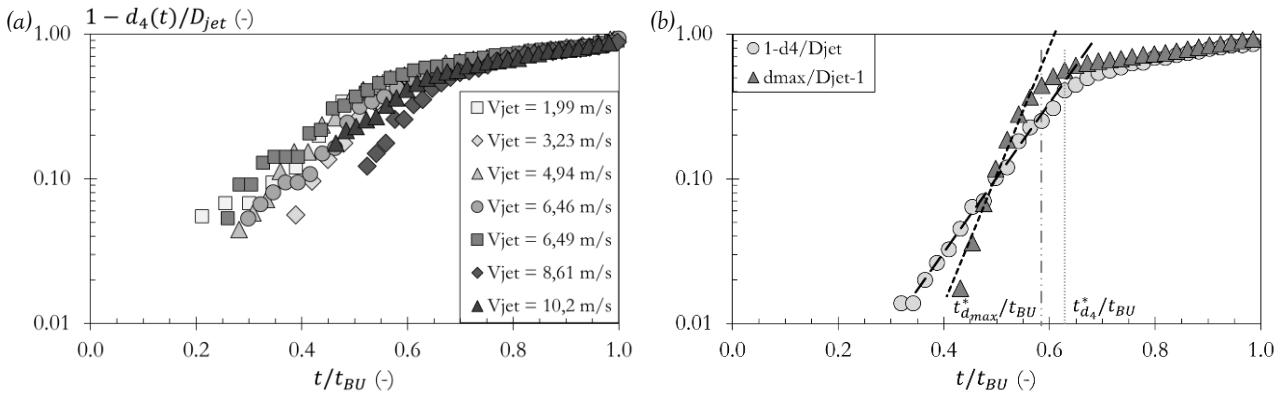


Figure 83. Evolution temporelle de $(1 - d_4/D_{jet})$ en fonction du temps t/t_{BU} . (a) Solution 5 ppm, buse B1 (b) Comparaison entre d_{max} et d_4 , solution 5 ppm, buse B6 et $Q_v = 47,5 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$.

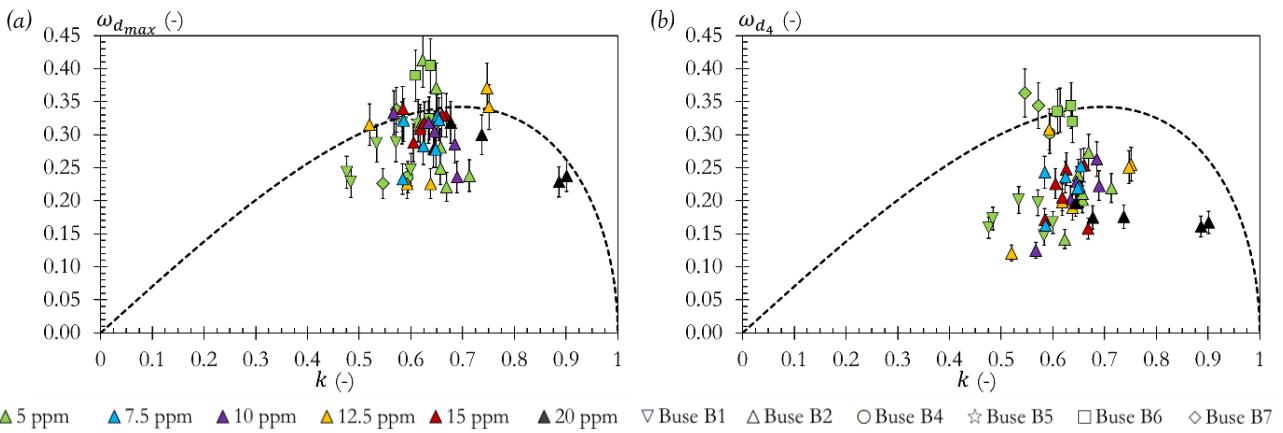


Figure 84. Taux de croissance adimensionné du régime 1 en fonction du nombre d'onde $k = \pi D_{jet} / \lambda_{R1}$. En pointillé, théorie non visqueuse Rayleigh (1878) (a) Mesure sur d_{max} (b) Mesure sur d_4 .

On remarque que le taux de croissance pour d_{max} est plus important que pour d_4 . Ce comportement est observé pour tous les points de fonctionnement comme le montre la figure 84 où la ligne pointillée correspond à la théorie du cas non-visqueux (Rayleigh (1878)). On constate que les $\omega_{d_{max}}$ présentent

un très bon accord avec la théorie de Rayleigh (1878) alors que les ω_{d_4} sont significativement plus faibles, montrant que la contribution des effets non-linéaires est non négligeable et se manifeste tôt lors de l'atomisation. Ces observations coïncident point par point à celles rapportées pour l'instabilité capillaire d'un fluide Newtonien (Dumouchel et al. (2017)).

La figure 84(b) montre également que $t_{d_{max}}^* < t_{d_4}^*$, comportement commun à toutes les situations. S'intéressant à la dynamique de $d_4(t)$, $t_{d_4}^*$ est le temps de fin du régime 1 conservé dans la suite. Ce temps est répertorié en tableau 10.

4.5.3.2. Régime visco-capillaire

Le régime visco-capillaire est caractérisé par une décroissance linéaire du diamètre des ligaments et donc de l'échelle $d_4(t)$ (voir figure 7 de l'introduction) jusqu'à la rupture du jet. La figure 85 présente l'évolution de la fonction $d_4(t)/D_{jet}$ en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} . Trois phases apparaissent : la décroissance de $d_4(t)$ est d'abord à dérivée seconde négative, puis à dérivée seconde positive (marquant ici le passage par un point d'inflexion), pour s'achever par une dérivée seconde nulle. Ce dernier comportement correspond à une décroissance linéaire : c'est la marque du régime 3 qui s'étend quasiment jusqu'à la rupture. On remarque en effet une brusque décroissance de $d_4(t)$ pour certains points de fonctionnement lorsque $t/t_{BU} = 1$ est approché (figure 85(b)).

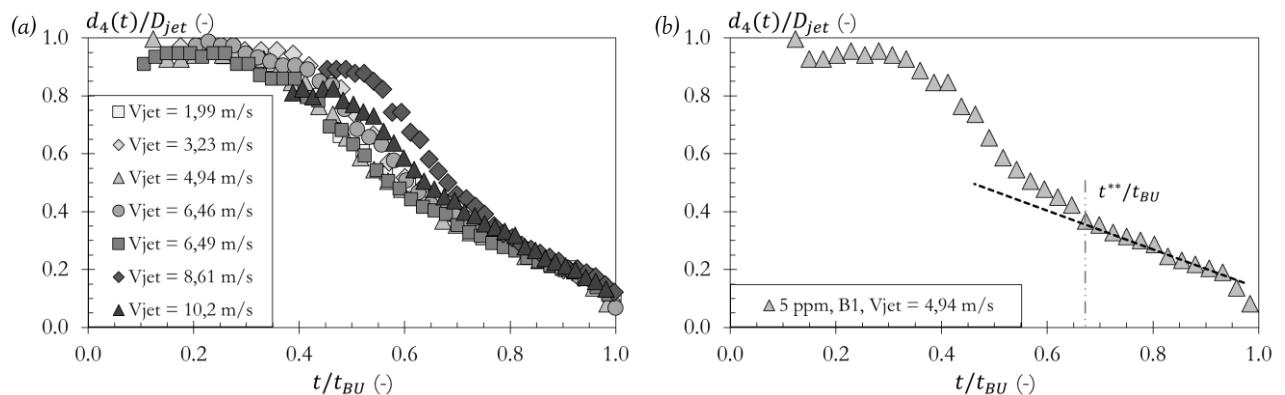


Figure 85. Evolution temporelle de d_4/D_{jet} en fonction du temps t/t_{BU} . (a) Solution 5 ppm, buse B1 (b) Mesure de t^{**} , la ligne pointillée donne la pente trouvée pour le régime 3.

Pour les mêmes raisons que pour le régime 1, les pentes observées pour le régime 3 en figure 85 ne sont pas les mêmes. Ces pentes sont mesurées sur la base d'un comportement moyen comme illustré sur la figure 85(b). Elles constituent une source d'information précieuse pour mesurer les viscosités élongationnelles terminales $\eta_{E,t}$ grâce à la relation :

$$\frac{d}{dt}(d_4) = \frac{-\sigma}{\eta_{E,t}} \quad (109)$$

La figure 85(b) est également utile pour déterminer le temps t^{**} marquant le début du régime 3. Ces temps sont répertoriés en tableau 10.

4.5.3.3. Régime élasto-capillaire

Une fois les régimes 1 et 3 et leurs caractéristiques de temps ($t_{d_4}^*$ et t^{**}) identifiés pour chaque point de fonctionnement, le régime élasto-capillaire peut être recherché dans l'intervalle $[t_{d_4}^* ; t^{**}]$, comme illustré en figure 86.

On peut d'ores et déjà identifier dans le tableau 10 des situations pour lesquelles $t_{d_4}^* = t^{**}$. C'est le cas pour la buse B3 à toutes les vitesses. Ce résultat indique que le protocole décrit ici pour identifier le régime 2 n'est pas approprié pour ces points de fonctionnement.

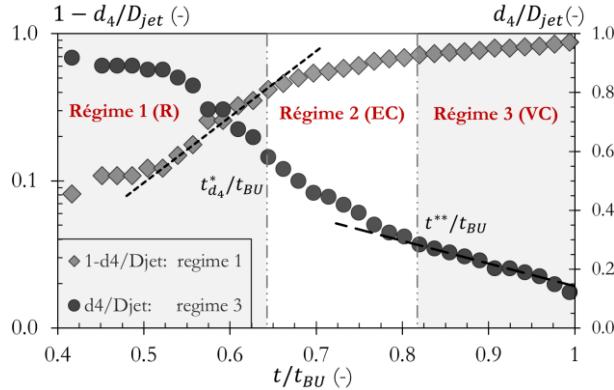


Figure 86. Identification du régime 2 (élasto-capillaire). Solution 5ppm, buse B1 et $Q_v = 23,7 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$.

Pour les autres cas, $t_{d_4}^*$ désigne la fin du régime 1 et t^{**} le début du régime 3 et non le début et la fin du régime 2 respectivement. Il existe en effet une plage de transition entre les différents régimes dont la durée est au minimum de l'ordre de $2 \Delta t_{BU}$. Il convient donc de comparer $t^{**} - t_{d_4}^*$ à $2 \Delta t_{BU}$. C'est l'objet de la figure 87. Le rapport $\Delta t_{BU}/(t^{**} - t_{d_4}^*)$ présenté sur cette figure pour tous les points de fonctionnement permet de distinguer deux groupes :

- $\Delta t_{BU}/(t^{**} - t_{d_4}^*) > 0,5$: les conditions sont jugées inappropriées pour identifier le régime 2.
- $\Delta t_{BU}/(t^{**} - t_{d_4}^*) < 0,5$: le régime 2 peut être identifié dans l'intervalle réduit $[(t_{d_4}^* + \Delta t_{BU})/\Delta t_{BU} ; (t^{**} - \Delta t_{BU})/\Delta t_{BU}]$.

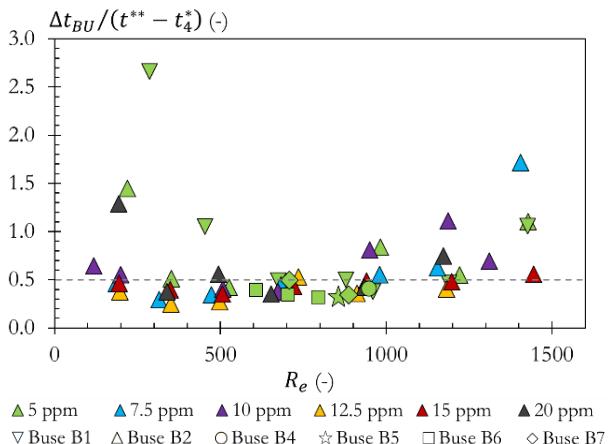


Figure 87. Comparaison de l'intervalle $[t_{d_4}^*, t^{**}]$ à Δt_{BU} , régime 2.

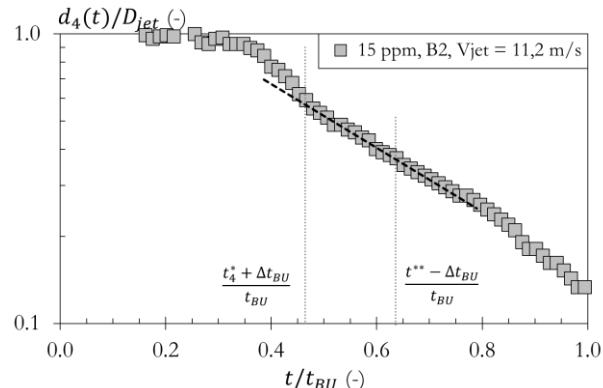


Figure 88. Caractérisation du régime 2.

La figure 88 présente l'évolution de $d_4(t)/D_{jet}$ en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} pour un point de fonctionnement où le régime 2 a été identifié. Dans cette représentation semi-logarithmique, une décroissance linéaire de $d_4(t)/D_{jet}$ correspond au comportement exponentiel du régime 2 (voir

figure 7 de l'introduction). Le coefficient directeur de la pente est mesuré dans l'intervalle réduit $[(t_4^* + \Delta t_{BU})/\Delta t_{BU}; (t^{**} - \Delta t_{BU})/\Delta t_{BU}]$ et le temps de relaxation t_r est mesuré. Les valeurs de t_r sont répertoriés en tableau 10.

4.6. Résultats

4.6.1. Temps de relaxation

Les temps de relaxation t_r , répertoriés en tableau 10, affichent une dépendance avec V_{jet} et le diamètre des buses d'injection. Par exemple, la solution 7,5 ppm présente un t_r égal à 0,23 ms pour $V_{jet} = 13,7$ m/s ce qui est quatre fois plus faible que le t_r (0,96 ms) mesuré pour $V_{jet} = 3,33$ m/s. Cette différence traduit une variation des propriétés physiques des solutions en raison d'une modification des polymères. Il est à noter que certaines études font usage de l'injection pour dégrader les solutions (Stelter et al. (2002a)).

En effet, la dégradation mécanique des solutions polymériques dû aux forts taux de déformation dans les injecteurs a été rapportée par plusieurs études (Nguyen et al. (1988), Merrill et al. (1980)). Merrill et al. (1980) montre notamment l'existence d'un taux de déformation critique à partir duquel les polymères se rompent. Par ailleurs, l'augmentation du taux de déformation au-delà de cette valeur impose de plus forts taux de rupture. Cette dégradation mécanique résulte en la diminution de la masse molaire des polymères qui, en vertu du modèle de Zimm, doit s'accompagner d'une réduction du temps de relaxation. On peut donc s'attendre à une diminution du temps de relaxation quand le taux de déformation dans l'injecteur augmente.

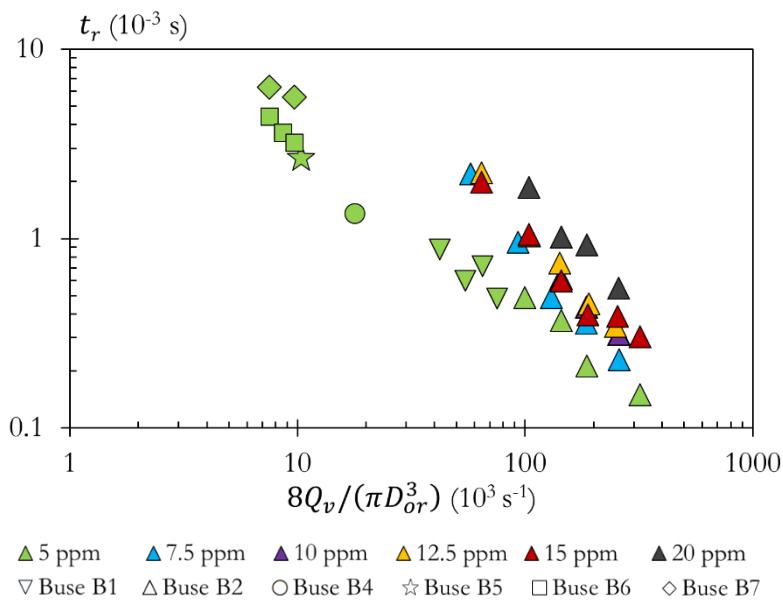


Figure 89. Temps de relaxation t_r en fonction du « taux de déformation » dans l'injecteur.

Le taux de déformation dans l'injecteur est simplement évalué ici comme le rapport de la vitesse dans l'orifice sur le diamètre. Ce rapport est égal à $8Q_v/(\pi D_{or}^3)$. La figure 89 présente les t_r mesurés en fonction du taux de déformation $8Q_v/(\pi D_{or}^3)$. On observe une forte corrélation en loi de puissance d'exposant -1. On note par ailleurs une certaine dispersion des points en fonction de la concentration.

Cependant, en accord avec le commentaire ci-dessus, la diminution du temps de relaxation avec le taux de déformation est avérée. Donc, la dépendance entre le temps de relaxation et les conditions d'injections semblent bien résulter d'une dégradation des polymères dans l'injecteur.

Il est intéressant ici de reconsidérer les résultats expérimentaux de Schümmmer et al. (1983) qui ont mis en évidence une dépendance entre t_r et l'injection. Contrairement à nos observations, leurs résultats rapportent une diminution de t_r quand la vitesse du jet diminue. Ainsi, on peut assurer que la variation de t_r n'est pas liée à de la dégradation mécanique dans l'injecteur.

4.6.2. Taux de déformation du régime élasto-capillaire

Le taux déformation $\dot{\varepsilon}$ subit par le ligament dans le régime élasto-capillaire est défini par :

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2\dot{d}_4}{d_4} \quad (110)$$

La dérivée temporelle de d_4 est fortement bruitée et réclame un lissage préalable. La méthode de lissage choisie est la méthode LOESS (LOcally weighted Scatterplot Smoother) implémentée sous SigmaPlot (version 11.0). Un exemple de lissage est présenté en figure 90 où une bonne représentation des données expérimentales est visible. Une qualité identique a été obtenue pour toutes les conditions expérimentales. Les échelles d_4 lissées permettent le calcul de $\dot{\varepsilon}$ et du nombre de Weissenberg W_i . Celui-ci exprime le rapport des forces élastiques sur les forces visqueuses. Pour un ligament cylindrique viscoélastique abritant un écoulement élongationnel, W_i s'écrit (McKinley (2005)) :

$$W_i = t_r \dot{\varepsilon} \quad (111)$$

Théoriquement, dans le régime 2, W_i prend une valeur constante égale à $2/3$. En effet, la décroissance exponentielle de la taille des ligaments impose $\dot{d}_4/d_4 = -1/3t_r$ qui, associé aux Eqs.(110) et (111), ramène la valeur $2/3$.

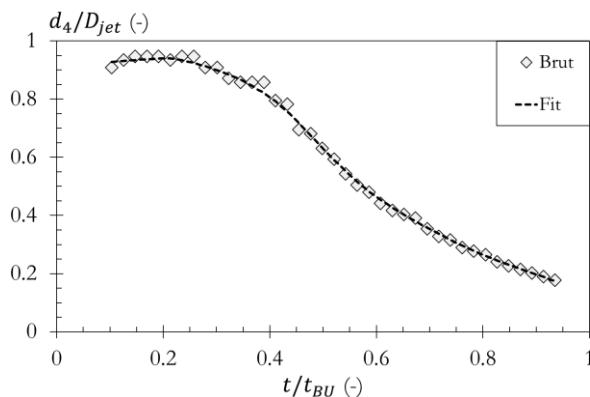


Figure 90. Lissage de l'échelle d_4 par méthode LOESS. Solution 5 ppm, buse B1, $Q_v = 20,3 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$

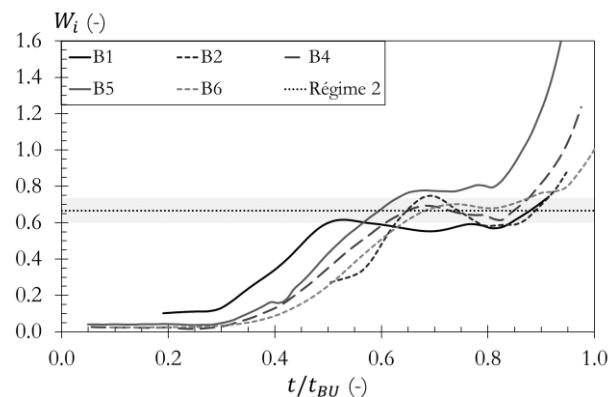


Figure 91. Evolution du nombre de Weissenberg W_i en fonction du temps t/t_{BU} . Solution 5 ppm, $R_e \in [910 ; 1076]$.

La figure 91 présente les W_i en fonction du temps adimensionné t/t_{BU} pour des situations où le temps de relaxation a été mesuré avec la solution 5 ppm. Sur cette figure, les régimes 2 identifiés par $W_i = 2/3$ s'affichent clairement. Il est important de mentionner ici que les intervalles de temps correspondant à ces régimes sont identiques à ceux trouvés en section 4.5.3. Un taux de déformation

moyen $\dot{\varepsilon}_{\text{régime 2}}$ est calculé sur ces intervalles. La figure 92 montre les temps de relaxation en fonction de ce taux de déformation moyen.

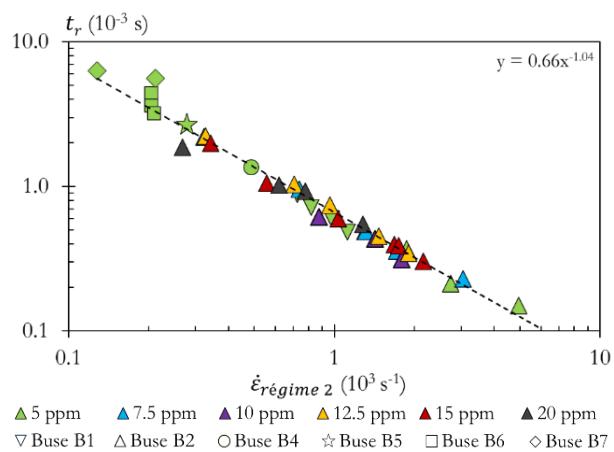


Figure 92. Temps de relaxation t_r en fonction du taux de déformation moyen du ligament durant le régime 2.

La figure 92 rapporte clairement un comportement unique en accord avec le comportement théorique attendu à savoir $t_r = 2/3 \dot{\varepsilon}_{\text{régime 2}}^{-1}$ (voir discussion plus haut). Même si ce résultat n'apporte pas d'information supplémentaire sur les mécanismes étudiés, il valide le protocole de mesure du temps de relaxation exposé dans la section précédente.

Ce constat ouvre une autre voie pour déterminer le temps de relaxation t_r . Voisine de la méthode de Schümmel et al. (1983), cette seconde voie propose de déterminer t_r à partir de $\dot{\varepsilon}_{\text{régime 2}}$. (Gardons à l'esprit que cette méthode nécessite une étape de lissage de l'échelle $d_4(t)$.) Elle est appliquée sur les résultats de la buse B3 pour lesquels la méthode précédente n'a pu conclure.

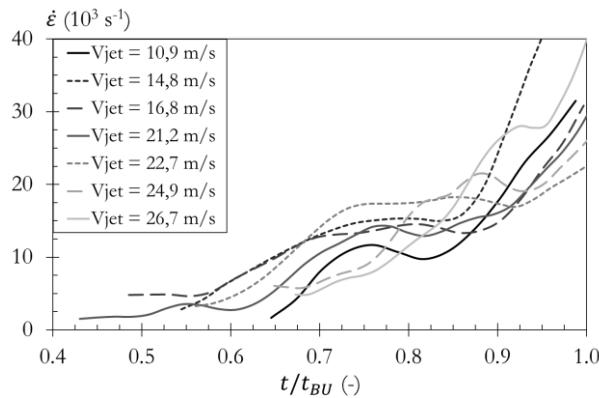


Figure 93. Taux d'éirement $\dot{\varepsilon}$ en fonction du temps t/t_{BU} .
Solution 5 ppm, buse B3.

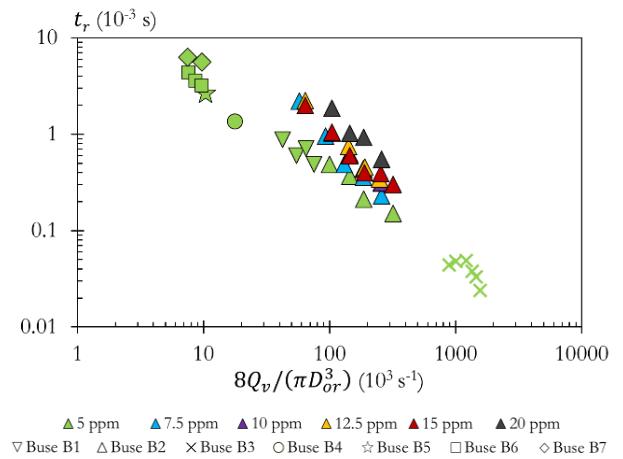


Figure 94. Temps de relaxation t_r en fonction du taux de déformation moyen du ligament durant le régime 2. Ajout de B3.

Les évolutions temporelles du taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ pour la buse B3 sont présentées sur la figure 93. Pour certaines vitesses ($>11\text{m/s}$), on y remarque l'existence d'un régime élasto-capillaire identifié par un taux de déformation constant dont la valeur permet de calculer un temps de relaxation. La figure 94 complète la figure 89 de ces nouveaux résultats. Ils s'alignent parfaitement avec le comportement global. Ce résultat induit deux commentaires :

- La détermination du temps de relaxation à partir du lissage de l'échelle $d_4(t)$ et du calcul du taux de déformation des ligaments est validée. Plus souple que la méthode exposée dans la section précédente, cette alternative implique une étape de lissage qui peut se révéler délicate.

- La figure 94 confirme le rôle dominant de la dégradation mécanique des polymères dans l'injecteur sur les résultats de ce travail.

4.6.3. Viscosité élongationnelle terminale

Pour les jets soumis à une instabilité capillaire, les forces visqueuses ou viscoélastiques s'équilibrent avec la force capillaire (McKinley (2005)). On définit alors la viscosité élongationnelle apparente du fluide $\eta_{E,app}$ permettant cet équilibre pour un ligament cylindrique viscoélastique abritant un écoulement élongationnel :

$$\eta_{E,app} = \frac{2\sigma}{\dot{\varepsilon}d_4} = -\frac{\sigma}{\dot{d}_4} \quad (112)$$

La figure 95 présente $\eta_{E,app}$ en fonction de $\dot{\varepsilon}$ pour différentes buses. Les courbes présentent trois parties correspondant aux trois régimes d'amincissement des ligaments. Comme attendu, on remarque que la viscosité élongationnelle apparente accède à une valeur constante dans le régime 3. Cette viscosité élongationnelle spécifique est la viscosité élongationnelle terminale $\eta_{E,t}$. La figure 96 trace $\eta_{E,t}$ en fonction du temps de relaxation. Cette figure met à jour une très forte corrélation entre ces deux grandeurs : l'augmentation du temps de relaxation étant associé à une augmentation de $\eta_{E,t}$. Cette dépendance s'aligne de façon acceptable avec le modèle empirique de Stelter et al. (2002b) également illustré sur la figure. On peut noter ici la robustesse de ce modèle qui a été obtenue dans une toute autre plage d'étude : $\eta_{E,t} \in [10 ; 200] \text{ Pa.s}$ et $t_r \in [3 ; 200] \text{ ms}$.

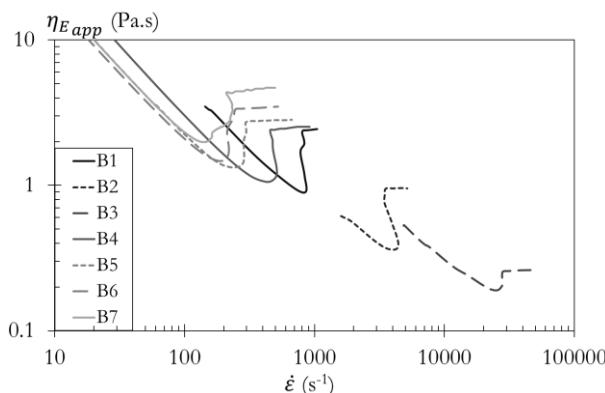


Figure 95. Evolution de la viscosité élongationnelle apparente $\eta_{E,app}$ en fonction du taux d'étiènement $\dot{\varepsilon}$. Solution 5 ppm, $Re \in [910 ; 1076]$.

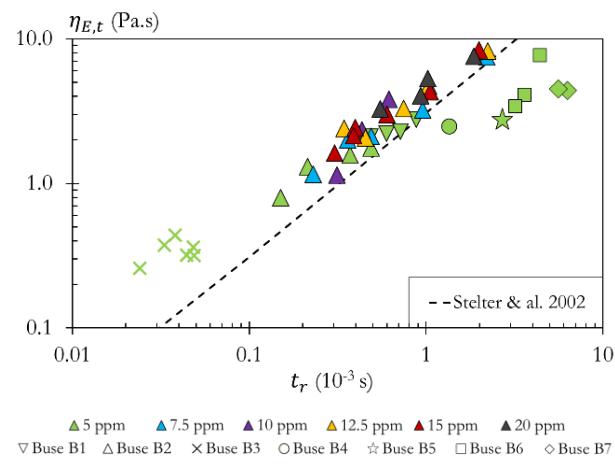


Figure 96. Viscosité élongationnelle terminale en fonction du temps de relaxation. La ligne pointillée correspond à la corrélation obtenue pour les polymères flexibles (dont le PEO) de Stelter & al. (2002) : $\eta_{E,t} = (3074,9t_r + 0,003) \text{ Pa.s}$.

4.6.4. Estimation de la longueur de ligament

Cette dernière section montre comment la distribution d'échelle peut également produire une estimation de la longueur moyenne des ligaments au cours du processus. Cette information est intéressante, notamment pour juger de l'importance du mécanisme de coalescence identifié dans la section 4.3.2. Pour atteindre une estimation de la longueur moyenne des ligaments en fonction du

temps, l'utilisation d'un modèle est requis. En première approche, on fait usage du modèle simple après avoir pris soin de lui permettre de représenter le passage d'un cylindre (forme initiale) à un cylindre plus une goutte (forme de perles sur une ficelle).

Ainsi, lors de sa déformation, une partie du jet reste cylindrique et s'amincit tandis que l'autre partie passe d'une forme cylindrique à une forme sphérique. Pour tenir compte de ce changement de la forme aux grandes échelles, le paramètre $n(t)$ est introduit dans les Eqs.(45) et (46). L'évolution temporelle de $e_3(d, t)$ est donc modélisée de la façon suivante :

$$\text{Pour } d \leq D_c, \quad e_3(d, t) = \alpha(t) \frac{2}{D_c} \left(1 - \frac{d}{D_c}\right) + (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)}{D_s(t)} \left(1 - \frac{d}{D_s(t)}\right)^{n(t)-1} \quad (113)$$

$$\text{Pour } D_c < d \leq D_s, \quad e_3(d, t) = (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)}{D_s(t)} \left(1 - \frac{d}{D_s(t)}\right)^{n-1} \quad (114)$$

Où $D_c(t)$ représente le diamètre de la petite structure, $D_s(t)$ celui de la grande structure et $n(t)$ est un paramètre variant de 2 à 3 dont la fonction est de reproduire le changement de forme de la grande structure : $n(t) = 2$ lorsque la grande structure est cylindrique (temps initiaux), il augmente jusqu'à 3 lorsqu'elle devient une sphère.

L'application du modèle consiste à déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $n(t)$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} e_3(0, t) = \alpha(t) \frac{2}{D_c(t)} + (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)}{D_s(t)} \\ e'_3(0, t) = -\alpha(t) \frac{2}{D_c(t)^2} - (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)(n(t) - 1)}{D_s(t)^2} \end{cases} \quad (115)$$

En première approche, cette résolution est réalisée en posant $D_c(t) = d_4(t)$, $D_s(t) = d_{max}(t)$ et en utilisant les valeurs expérimentales pour $e_3(0, t)$ et $e'_3(0, t)$. Par ailleurs, à chaque instant, on impose $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ et $2 \leq n(t) \leq 3$.

Le résultat de ce modèle est illustré sur la figure 97 pour trois temps correspondant aux trois régimes de la structure ligamentaire. Dans les trois cas, le résultat du modèle présente un accord acceptable avec la mesure. Des accords de même qualité ont été obtenus pour les autres points de fonctionnement.

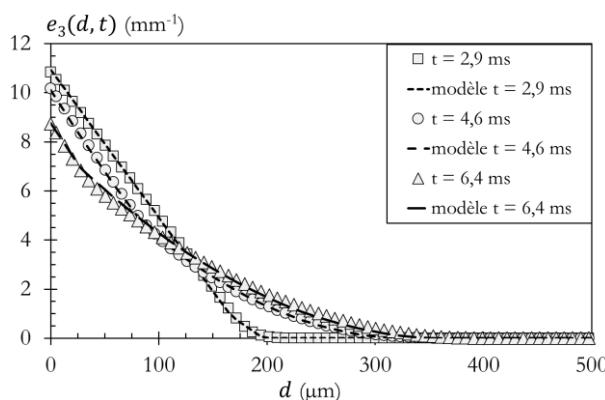


Figure 97. Modélisation de $e_3(d, t)$. Solution 5ppm, buse B1 et $Q_v = 23,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$.

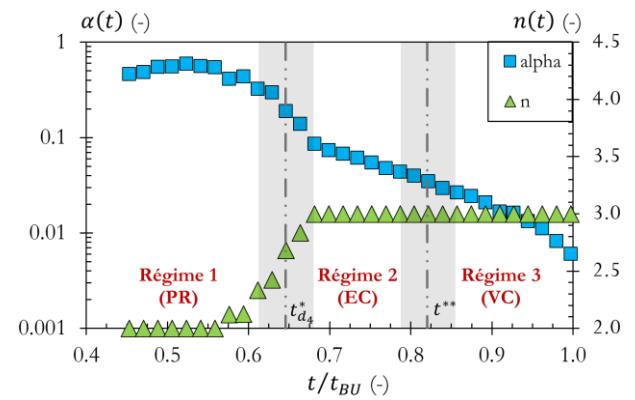


Figure 98. Evolution temporelle des paramètres $\alpha(t)$ et $n(t)$. Solution 5ppm, buse B1 et $Q_v = 23,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$.

La figure 98 présente les fonctions $\alpha(t)$ et $n(t)$ pour une condition d'injection particulière (5ppm, buse B1 et $Q_v = 23,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$). Sur cette figure, les zones grisées représentent les transitions entre les différents régimes. On remarque qu' $n(t)$ évolue de 2 à 3 dans la zone de transition entre les deux premiers régimes. Ceci a du sens dans la mesure où le motif de perles sur une ficelle caractéristique du régime 2 présente une grande structure très sphérique. La fonction $\alpha(t)$ quant à elle montre une décroissance continue qui semble en accord avec le mécanisme de drainage des ligaments vers les sphères. La fonction $\alpha(t)$, combinée aux échelles $d_4(t)$ et $d_{max}(t)$, permet d'évaluer une longueur moyenne en fonction du temps $L_c(t)$ par la relation :

$$L_c(t) = \frac{2\alpha(t)d_{max}(t)^3}{3d_4(t)^2(1-\alpha(t))} \quad (116)$$

La figure 99 présente $L_c(t)$ pour les jets de solution 5ppm avec la buse B1 à partir de $t_{d_4}^*$. Dans les intervalles de temps correspondant aux régimes 2, la longueur moyenne des ligaments augmente ou est constante selon la vitesse du jet. L'augmentation est clairement une preuve de l'existence de mécanismes de coalescence dans le régime élasto-capillaire. Ce constat concerne tous les points de fonctionnement exception faite des forts Reynolds (> 1500). Il démontre que le mécanisme de coalescence est fréquent. Cependant, les temps de relaxation mesurés sont restés très corrélés en fonction du taux de déformation de l'injecteur, viscosité élongationnelle apparente et du taux de déformation du régime 2. En accord avec le résultat de simulation Li et al. (2003) les résultats expérimentaux de ce travail montrent que la dynamique des structures ligamentaires n'est pas modifiée par la coalescence des grandes structures.

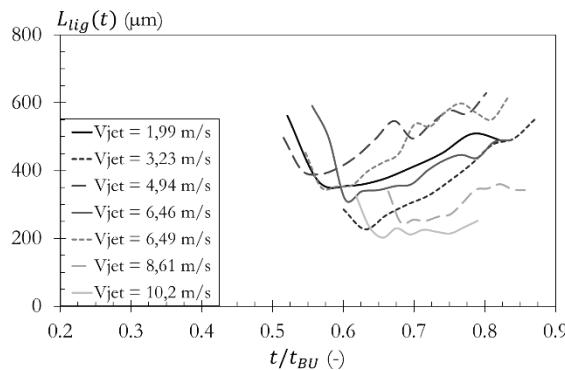


Figure 99. Evolution temporelle de la longueur du ligament durant le régime 2. Solution 5ppm, buse B1.

5. Conclusion



Ce travail traite de l'atomisation de structures ligamentaires viscoélastiques. Les structures ligamentaires font le lien entre l'écoulement initial sortant de l'injecteur et le spray, leur étude est importante dans la compréhension de l'atomisation. Leur étude est facilitée si ces structures présentent des durées de vie importantes. Or, un moyen d'augmenter leurs durées de vies est d'ajouter une faible concentration d'un polymère flexible de grande masse molaire. Cet ajout confère aux liquides des propriétés viscoélastiques. L'étude de ces liquides viscoélastiques fait usuellement appel à des rhéomètres extensionnels de type CaBER qui sont basés sur la rupture d'un pont liquide entre deux plaques. Cependant, le CaBER n'est pas adapté à l'étude de solutions mobiles (très faible concentration en polymères) pour lesquelles le pont liquide présente notamment des oscillations inertielles parasites et/ou une dynamique d'amincissement trop rapide pour pouvoir être mesurée. Pour étudier ces solutions mobiles, l'utilisation de jets forcés est possible comme l'ont montrés les travaux de Schümmel et al. (1983) et Keshavarz et al. (2015). Ces jets sont produits à partir de l'éjection du liquide au travers d'un orifice cylindrique. Or, ce type de configuration produit des écoulements à très fort taux de déformation qui peuvent dégrader mécaniquement les solutions étudiées (Nguyen et al. (1988), Merrill et al. (1980)), ce qui modifie leur propriétés physiques.

L'originalité du travail présenté ici est d'étudier des jets libres de solutions mobiles soumis à l'instabilité capillaire à l'aide de la description multi-échelles. Le défi principal consiste à mettre en place un protocole expérimental pour l'étude d'un jet libre qui, du fait de ses fluctuations, nécessite un traitement statistique. En outre, ces fluctuations ne permettent pas l'utilisation de techniques de mesures locales, justifiant l'utilisation de l'outil multi-échelles qui fournit une description globale des structures étudiées. A partir d'images du jet, l'objectif est d'identifier et de caractériser les différents régimes d'amincissement des filaments des structures de perles sur une ficelle observables lors de l'atomisation des jets de solutions viscoélastiques.

En premier lieu, la compréhension des résultats fournis par l'outil d'analyse multi-échelles a été enrichie grâce à l'étude théorique de plusieurs systèmes. Les systèmes de référence, consistant en des ensembles de sphères ou de cylindres, permettent d'introduire la notion de systèmes équivalents : deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes distributions d'échelles. Le motif de perles sur une ficelle, caractéristique des jets de solutions viscoélastiques, est analysé au travers de deux modèles théoriques dont le raccordement entre la perle et la ficelle diffère. Les distributions d'échelles de ces deux modèles montrent des différences significatives de comportement aux petites échelles. Ce résultat implique que l'étude du comportement de la ficelle peut être directement réalisée à partir du comportement observé aux petites échelles.

A partir de ce résultat et parce que l'étude des jets libres présentée ici est statistique, l'évolution temporelle de la distribution d'échelles d'un ensemble de ficelles est étudiée à travers un ensemble de cylindres s'amincissant avec une même dynamique. Des échelles caractéristiques présentant la même dynamique d'amincissement que celle des cylindres ont été identifiées. En reprenant une étude numérique présentant le suivi temporel d'un ligament Newtonien soumis à l'instabilité, il est montré qu'une des échelles précédemment identifiées, d_4 , est égale au diamètre du col de ce ligament. De ces résultats, on suppose que la dynamique de l'échelle d_4 issue du comportement d'un ensemble de ligaments est liée à la dynamique des cols de ces ligaments.

En second lieu, les techniques de mesure des distributions d'échelles à partir d'images de systèmes liquides ont été enrichies par l'utilisation de méthodes de segmentation d'images sub-pixels et par l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo.

Pour pouvoir être finement analysées avec la description multi-échelles, il est nécessaire que les images des systèmes liquides présentent une haute définition : quand ce n'est pas le cas, les techniques de segmentations sub-pixels sont utilisées pour l'améliorer. La technique développée précédemment au laboratoire est comparée à d'autres méthodes de segmentation sub-pixels pour une image test floutée comportant plusieurs formes et pour une image issue d'une caméra rapide. Les différentes méthodes retournent des contours similaires et proches des interfaces des objets : l'écart moyen entre les contours sub-pixels et l'interface des formes tests est d'un quart de pixel. Ce résultat valide l'augmentation de la résolution des distributions d'échelles d'un facteur quatre. Pour améliorer encore la segmentation sub-pixels, il peut être envisagé de combiner plusieurs des méthodes testées.

Une méthode générale de mesure de la distribution d'échelles 3D d'un objet à partir de son squelette pondéré est mise en place avec une méthode de Monte-Carlo. Elle est appliquée ici sur des images 2D en faisant l'hypothèse d'une axisymétrie locale. La méthode est testée et validée pour les systèmes de références, dont l'étude théorique a été précédemment réalisée dans ce travail. De plus, la méthode de Monte-Carlo a été utilisée pour une image de perles sur une ficelle, ce qui a permis de comparer et valider cette méthode par rapport à un calcul de distribution d'échelles 3D par axisymétrie.

La segmentation sub-pixel et la méthode de Monte-Carlo sont combinées dans le but de revisiter des données publiées provenant de l'imagerie rapide de ligaments issus de nappes liquides turbulentes. Ces images sont faiblement résolues et constituent une application idéale pour ces évolutions. Les comportements observés pour les distributions d'échelles réduites 2D le sont également pour les distributions 3D. Les distributions 2D et 3D obtenues à partir des images segmentées sub-pixels sont comparées sur la base de leur système équivalent. Une réduction importante des perturbations est constatée avec la méthode Monte-Carlo (10 points par pixels) par rapport aux méthodes de mesures 2D utilisées précédemment, notamment aux petites échelles. Ce résultat autorise des analyses plus fines des distributions d'échelles et incite à compléter les études de ces ligaments. De plus, l'amélioration des méthodes de mesure des distributions d'échelles 2D peut s'envisager en adaptant la méthode de Monte-Carlo. Cependant, cette dernière présente par nature des temps de calculs élevés.

Actuellement, les images produites au sein de l'équipe pour l'étude des systèmes liquides présentent un unique angle de vue. A partir de telles images, seul un squelette 2D peut être extrait et l'hypothèse forte utilisée pour l'analyse des distributions d'échelles 3D par la méthode de Monte-Carlo est que le squelette pondéré de l'objet 3D est identique à celui extrait de sa photographie. Dans la recherche du squelette pondéré 3D, une piste d'étude peut être l'utilisation de différentes prises de vues selon différentes directions d'un même système liquide afin de reconstruire un squelette 3D, comme l'illustre les travaux de Durix et al. (2016).

En dernier lieu, l'étude statistique des jets libres de solutions mobiles est réalisée pour différents points de fonctionnement, les trois paramètres variés étant la concentration de la solution, les dimensions de la buse d'injection et la vitesse d'injection. L'étude du jet est statistique et le dispositif d'imagerie fait usage d'une caméra avec une définition suffisante (29 millions de pixels) pour éviter l'utilisation des méthodes de seuillage sub-pixels. La méthode de mesure de la distribution d'échelle 3D choisie est la

méthode axisymétrique. Ce choix est justifié car l'instabilité capillaire est connue pour être un mécanisme axisymétrique.

Des mesures préliminaires sur les images segmentées sont réalisées, donnant accès aux mesures du diamètre moyen du jet non perturbé, de sa vitesse débitante, de la longueur de rupture moyenne ainsi que de l'évolution de la longueur d'onde de perturbation. Ces mesures préliminaires permettent de vérifier que l'influence des perturbations aérodynamiques sur les jets est négligeable. Un mécanisme de coalescence des perles est également identifié à cette étape.

Le protocole de mesure des distributions d'échelles est ensuite détaillé. A partir de ces distributions d'échelles, l'étude de la surface spécifique montre une phase de croissance avant une décroissance, ce qui est en accord avec l'étude de l'instabilité capillaire pour des liquides Newtoniens (Dumouchel et al. (2017)). Il est également constaté que l'évolution temporelle de la surface spécifique dépend des paramètres étudié, notamment au temps de rupture où la surface spécifique est plus faible lorsque la vitesse du jet diminue, comportement attribué à la nature viscoélastique des solutions.

De ces distributions d'échelles, les échelles caractéristique d_4 et d_{max} sont mesurées. A partir de d_4 , un protocole d'identification des régimes ligamentaire est présenté. Le premier régime d'amincissement, celui de Rayleigh, est identifié pour les deux échelles caractéristiques d_4 et d_{max} . Il est constaté que le taux de croissance adimensionné mesuré pour d_{max} correspond à celui décrit par le cas non-visqueux (Rayleigh (1878)) et qu'il est systématiquement supérieur à celui mesuré pour d_4 . Ces différences sont en accord avec Dumouchel et al. (2017) et méritent des études complémentaires. Dans un second temps, le régime visco-capillaire est déterminé, puis le régime élasto-capillaire est identifié entre ces deux régimes précédents moyennant quelques précautions. Les temps de relaxation mesurés dans le régime élasto-capillaire retournent une sensibilité aux conditions d'injection et corrèlent avec les taux de déformation dans les injecteurs. En accord avec Merrill et al. (1980) et Nguyen et al. (1988), ce résultat démontre l'importance de la dégradation mécanique des polymères dans l'injecteur.

Le taux de déformation dans les ligaments est également étudié. Il montre une phase constante durant le régime élasto-capillaire. Le taux de déformation de ce régime corrèle avec les temps de relaxation suivant le comportement théorique attendu. Le protocole de mesure de temps de relaxation est validé. A partir de ce comportement théorique, les mesures de temps de relaxation sont complétées et les résultats confirment la corrélation forte observée avec les conditions d'injections. Notons que des temps de relaxation aussi faible que quelques dizaines de microsecondes ont été obtenus. La comparaison des taux de déformations dans l'injecteur et dans les ligaments suggère que la dégradation des solutions se situe dans l'injecteur.

Pour le régime visco-capillaire, les viscosités élongationnelles terminales mesurées montrent une forte corrélation avec les temps de relaxation. Cette corrélation correspond à celle déjà observée par Stelter et al. (2002b) pour des solutions non diluées.

Enfin, le modèle simple de perles sur une ficelle est utilisé pour modéliser les distributions d'échelles des jets afin d'obtenir des informations sur la répartition du volume de liquide entre la perles et la ficelle. Le modèle présente un accord acceptable. Une estimation de la longueur moyenne du ligament durant le régime élasto-capillaire est réalisée. L'évolution temporelle de cette longueur montre une augmentation pour les jets avec un Reynolds inférieur à 1500, traduisant ainsi l'influence de la coalescence durant ce régime. Pour un Reynolds supérieur à 1500, la longueur moyenne de ligament reste constante. Cependant, aucune influence de la coalescence n'est notable sur les grandeurs

précédemment mesurées, indiquant que la dynamique d'amincissement des ligaments n'est pas modifiée par la coalescence des perles en accord avec le résultat de simulation Li et al. (2003).

Cette thèse présente de nombreux résultats qui mériteraient une analyse plus fine et/ou des expériences complémentaires. Concernant la mesure de la distribution d'échelles, la combinaison de plusieurs méthodes de seuillage et l'utilisation de la méthode Monte-Carlo en 2D ainsi que la combinaison de plusieurs prises de vues pour une analyse 3D peuvent être envisagées comme voies d'amélioration.

Concernant les jets de solutions viscoélastiques mobiles, une étude plus fine de l'évolution temporelle de la surface spécifique en fonction des différents paramètres testés est nécessaire pour améliorer la compréhension et la contribution des mécanismes observés. L'influence du taux de déformation dans l'injecteur sur le temps de relaxation doit être complétée en élargissant les gammes de vitesse de jets et de buses utilisées pour identifier, par exemple, un taux minimal en-dessous duquel les solutions ne sont pas dégradées. L'influence du polymère et de sa molaire peuvent aussi être étudiée.

Enfin, ce travail a permis d'améliorer la compréhension des résultats produits par la distribution d'échelles pour l'étude de ligaments s'amincissants, définissant une échelle caractéristique dont la dynamique est égale à celle observée par une distribution de ligaments. La mesure et l'étude de cette échelle dans le cas de jets libres de solutions viscoélastiques mobiles a permis d'identifier et de caractériser les régimes d'amincissements des ligaments. Ce résultat montre la pertinence de la description multi-échelles pour l'étude des processus d'atomisation non contrôlés et incite à développer son utilisation.

Bibliographie



ASHGRIZ, N., YARIN, A. L., Capillary instability of free liquid jets. In : Handbook of Atomization and Sprays. Springer, Boston, MA, 2011. p. 3-53.

BHAT, P. P., APPATHURAI, S., HARRIS, M. T., PASQUALI, M., MCKINLEY, G. H., BASARAN, O. A., Formation of beads-on-a-string structures during break-up of viscoelastic filaments. *Nature Physics*, 2010, vol. 6, no 8, p. 625.

BLAISOT, J. B., Drop size and drop size distribution measurements by image analysis. ICLASS, 12th Triennial international conference on liquid atomization and spray systems, 2012, Heidelberg, Germany, September 2-6.

BLAISOT, J. B., LEDOUX, M., Simultaneous measurement of diameter and position of spherical particles in a spray by an original imaging method. *Applied Optics* 37, 1998, n°22, 5137-5144

BLAISOT, J. B., YON, J., Droplet size and morphology characterization for dense sprays by image processing: application to the Diesel spray. *Experiments in fluids*, 2005, vol. 39, no 6, p. 977-994.

BOUSFIELD, D. W., KEUNINGS, R., MARRUCCI, G., DENN, M. M., Nonlinear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1986, vol. 21, no 1, p. 79-97.

CALABI L., A Study of the Skeleton of Plane Figures, Technical Report 60429, Sr-2, Parke Mathematical Laboratories, December 1965.

CAMPO-DEANO, L., CLASEN, C., The slow retraction method (SRM) for the determination of ultra-short relaxation times in capillary breakup extensional rheometry experiments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010, vol. 165, no 23-24, p. 1688-1699.

CASELLES, V., KIMMEL, R., SAPIRO, G., "Geodesic active contours," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 22, no. 1, pp. 61-79, Feb. 1997.

CHAN, T. F., VESE, L. A., "Active contours without edges," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no. 2, pp. 266-277, 2001.

CHANG, H., YEUNG, D. Y., XIONG, Y. M., Super-resolution through neighbor embedding, *Proceedings of 17th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 275-282, 2004.

CHARPENTIER, J. B., RENOULT, M. C., CRUMEYROLLE, O., MUTABAZI, I., Growth rate measurement in free jet experiments. *Experiments in Fluids*, 2017, vol. 58, no 7, p. 89.

CHEVALLIER, C., Écoulements élongationnels de solutions diluées de polymères. 2009. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.

CHIGIER, N., The future of atomization and sprays. In : *Proceedings of ILASS-Europe*. 2005.

CHRISTANTI, Y., WALKER, L. M., Surface tension driven jet break up of strain-hardening polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2001, vol. 100, no 1-3, p. 9-26.

CHRISTANTI, Y., WALKER, L. M., Effect of fluid relaxation time of dilute polymer solutions on jet breakup due to a forced disturbance. *Journal of Rheology*, 2002, vol. 46, no 3, p. 733-748.

CLASEN, C., BICO, J., ENTOV, V. M., MCKINLEY, G. H., 'Gobbling drops': the jetting-dripping transition in flows of polymer solutions. *Journal of fluid mechanics*, 2009, vol. 636, p. 5-40.

CLASEN, C., PHILLIPS, P. M., PALANGETIC, L., VERMANT, J., Dispensing of rheologically complex fluids: the map of misery. *AIChE Journal*, 2012, vol. 58, no 10, p. 3242-3255.

DESPOTOVIĆ, I., GOOSSENS, B., PHILIPS, W. MRI segmentation of the human brain: challenges, methods, and applications. *Computational and mathematical methods in medicine*, 2015, vol. 2015.

DOI, M., EDWARDS, S.F., *The Theory of Polymer Dynamics*, Oxford University Press, New-York, 1986.

DUMOUCHEL, C., ANISZEWSKI, W., MÉNARD, T., VU, T. T., The Characteristic Scales of the Capillary Instability. *ICMF 2016*, May 2016, Florence, Italy. *Proceedings of ICMF 2016*, 2016.

DUMOUCHEL, C., ANISZEWSKI, W., VU, T. T., MÉNARD, T., Multi-scale analysis of simulated capillary instability. *International Journal of Multiphase Flow*, 2017, vol. 92, p. 181-192.

DUMOUCHEL, C., BLAISOT, J.B., BOUCHE, E., MÉNARD, T., VU, T. T., Multi-scale analysis of atomizing liquid ligaments. *International Journal of Multiphase Flow*, 2015, vol. 73, p. 251-263.

DUMOUCHEL, C., COUSIN, J., et GROUT, S., Analysis of two-dimensional liquid spray images: the surface-based scale distribution. *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, 2008, vol. 15, no 1.

DUMOUCHEL, C., Liquid Atomization and Spray: A Multi-Scale Description. In : *ASME 2017 Fluids Engineering Division Summer Meeting*. American Society of Mechanical Engineers, 2017. p. V01AT04A015-V01AT04A015

DUMOUCHEL, C., On the experimental investigation on primary atomization of liquid streams. *Experiments in fluids*, 2008, vol. 45, no 3, p. 371-422.

DURIX, B., MORIN, G., CHAMBON, S., ROUDET, C., GARNIER, L., Caractérisation de la projection du squelette d'une surface canal 3D: Application à la reconstruction 3D à partir de deux images. In : *20eme édition des journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG 2015)*. 2015. p. pp. 1.

DURIX, B., MORIN, G., CHAMBON, S., ROUDET, C., GARNIER, L., COTS, O., Reconstruction basée squelette d'un objet 3D à partir de points de vue multiples. In : *Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG 2016)*. 2016. p. pp. 1-11.

ENTOV, V. M., HINCH, E. J. Effect of a spectrum of relaxation times on the capillary thinning of a filament of elastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1997, vol. 72, no 1, p. 31-53.

EVERS, L., W. Analogy between atomization and vaporization based on the conservation of energy. *SAE Technical Paper*, 1994.

FDIDA, N., BLAISOT, J. B., Drop size distribution measured by imaging: determination of the measurement volume by the calibration of the point spread function. *Measurement Science and Technology*, 2009, vol. 21, no 2, p. 025501.

FREEMAN, W. T., Learning low-level vision, *International Journal of Computer Vision*, Vol.40, No.1, 25-47, 2000.

GOLDIN, M., PFEFFER, R., SHINNAR, R. Break-up of a capillary jet of a non-Newtonian fluid having a yield stress. *The Chemical Engineering Journal*, 1972, vol. 4, no 1, p. 8-20.

GOLDIN, M., YERUSHALMI, J., PFEFFER, R., SHINNAR, R., Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, vol. 38, no 4, p. 689-711.

GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

GORDON, M., YERUSHALMI, J., SHINNAR, R., Instability of jets of non-Newtonian fluids. *Transactions of the Society of Rheology*, 1973, vol. 17, no 2, p. 303-324.

HARRIS, J. L., Diffraction and Resolving Power, *Journal of the Optical Society of America*, Vol.54, No.7, 931-933, 1964.

JOSEPH, D. D., *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*. Springer Science & Business Media, 2013.

JOYCE, J. M., Kullback-leibler divergence. In : *International encyclopedia of statistical science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. p. 720-722.

KASS, M., WITKIN, A., TERZOPOULOS, D., "Snakes: active contour models," *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.

KELLER, A., ODELL, J. A., The extensibility of macromolecules in solution; a new focus for macromolecular science. *Colloid and Polymer Science*, 1985, vol. 263, no 3, p. 181-201.

KESHAVARZ, B., SHARMA, V., HOUZE, E. C., KOERNER, M. R., MOORE, J. R., COTTS, P. M., THRELFALL-HOLMES, P., MCKINLEY, G. H., Studying the effects of elongational properties on atomization of weakly viscoelastic solutions using Rayleigh Ohnesorge Jetting Extensional Rheometry (ROJER). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, vol. 222, p. 171-189.

KEYS, R., « Cubic convolution interpolation for digital image processing », *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. 29, no 6, 1981, p. 1153-1160.

KIMMEL, R., AMIR, A., BRUCKSTEIN, A., "Finding shortest paths on surfaces using level set propagation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 17, no. 6, pp. 635-640, Jun. 1995.

LARSON, R. G., The rheology of dilute solutions of flexible polymers: Progress and problems. *Journal of Rheology*, 2005, vol. 49, no 1, p. 1-70.

LEFEBVRE, A. H., *Atomization and Sprays*, Hemisphere Pub. Corp., New York, 1989, vol. 1989.

LI, C., HUANG, R., DING, Z., GATENBY, J. C., METAXAS, D. N., GORE, J. C., "A level set method for image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities with application to MRI," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 20, no. 7, pp. 2007–2016, 2011.

LI, C., XU, C., GUI, C., FOX, M. D., Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation. IEEE transactions on image processing, 2010, vol. 19, no 12, p. 3243-3254.

LI, J., FONTELOS, M., A. Drop dynamics on the beads-on-string structure for viscoelastic jets: A numerical study. Physics of Fluids, 2003, vol. 15, no 4, p. 922-937.

MALLADI, R., SETHIAN, J. A., VEMURI, B. C., "Shape modeling with front propagation: A level set approach," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 17, no. 2, pp. 158–175, Feb. 1995.

MARMOTTANT, P., VILLERMAUX, E., Fragmentation of stretched liquid ligaments. Physics of fluids, 2004, vol. 16, no 8, p. 2732-2741.

MCKINLEY, G. H., Visco-elasto-capillary thinning and break-up of complex fluids. 2005.

MERRILL, E. W., LEOPAIRAT, P., Scission of non-interpenetrating macromolecules in transient extensional flows. Polymer Engineering & Science, 1980, vol. 20, no 7, p. 505-511.

METROPOLIS, N., ULAM, S., The Monte Carlo method. Journal of the American statistical association, 1949, vol. 44, no 247, p. 335-341.

MIDDLEMAN, S., Stability of a viscoelastic jet. Chemical Engineering Science, 1965, vol. 20, no 12, p. 1037-1040.

MUGELE, R. A., EVANS, H. D., Droplet size distribution in sprays. Industrial & Engineering Chemistry, 1951, vol. 43, no 6, p. 1317-1324.

MUMFORD, D., SHAH, J., "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems," Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 42, no. 5, pp. 577–685, 1989.

MUN, R. P., BYARS, J. A., BOGER, D. V., The effects of polymer concentration and molecular weight on the breakup of laminar capillary jets. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1998, vol. 74, no 1-3, p. 285-297.

NGO, V. D., Etude de la morphologie des éléments d'un spray liquide et de leur production. 2013. Thèse de doctorat. Rouen.

NGUYEN, T. Q., KAUSCH, H. H., Chain scission in transient extensional flow kinetics and molecular weight dependence. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 1988, vol. 30, no 2-3, p. 125-140.

PETERNELL, M., POTTMANN, H., Computing rational parametrizations of canal surfaces. Journal of Symbolic Computation, 1997, vol. 23, no 2-3, p. 255-266.

PETITJEAN, M., On the analytical calculation of van der Waals surfaces and volumes: Some numerical aspects. Journal of Computational Chemistry, 1994, vol. 15, no 5, p. 507-523.

PETITJEAN, M., Spheres unions and intersections and some of their applications in molecular modeling. In : Distance Geometry. Springer, New York, NY, 2013. p. 61-83.

RAYLEIGH, Lord. On the instability of jets. Proceedings of the London mathematical society, 1878, vol. 1, no 1, p. 4-13.

RODD, L. E., SCOTT, T. P., COOPER-WHITE, J. J., MCKINLEY, G. H., Capillary break-up rheometry of low-viscosity elastic fluids. 2004.

RONFARD, R., "Region-based strategies for active contour models," Int. J. Comput. Vis., vol. 13, no. 2, pp. 229-251, Oct. 1994.

RUTLAND, D. F., JAMESON, G. J., A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets. Journal of Fluid Mechanics, 1971, vol. 46, no 2, p. 267-271.

SCHÜMMER, P., TEBEL, K. H. A new elongational rheometer for polymer solutions. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1983, vol. 12, no 3, p. 331-347.

STEGER, C., Evaluation of subpixel line and edge detection precision and accuracy. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 1998, vol. 32, p. 256-264.

STELTER, M., BRENN, G., DURST, F., The influence of viscoelastic fluid properties on spray formation from flat-fan and pressure-swirl. Atomization and Sprays, 2002b, vol. 12, no 1-3.

STELTER, M., BRENN, G., YARIN, A. L., SINGH, R. P., DURST, F., Investigation of the elongational behavior of polymer solutions by means of an elongational rheometer. Journal of Rheology, 2002a, vol. 46, no 2, p. 507-527.

STELTER, M., BRENN, G., YARIN, A. L., SINGH, R. P., DURST, F., Validation and application of a novel elongational device for polymer solutions. Journal of Rheology, 2000, vol. 44, no 3, p. 595-616.

TERZOPOULOS, D., WITKIN, A., KASS, M., "Constraints on deformable models: recovering 3D shape and non rigid motion," Artificial Intelligence Journal, vol. 36, no. 1, pp. 91-123, 1988.

TIMOFTE, R., DE SMET, V., VAN GOOL, L., A+: Adjusted anchored neighborhood regression for fast super-resolution. In : Asian Conference on Computer Vision. Springer, Cham, 2014. p. 111-126.

TIMOFTE, R., DE SMET, V., VAN GOOL, L.: Anchored Neighborhood Regression for Fast Example-Based Super Resolution. ICCV (2013) 1920-1927

TIRTAATMADJA, V., MCKINLEY, G. H., COOPER-WHITE, J. J., Drop formation and breakup of low viscosity elastic fluids: Effects of molecular weight and concentration. Physics of fluids, 2006, vol. 18, no 4, p. 043101.

TSAI, R. Y., HUANG, T. S., Multi-frame Image Restoration and Registration, Springer-Verlag, New York, 1984.

VAN REETH, E., Système avancé d'interpolation spatiale de signaux de télévision pour affichage sur écrans Haute-Définition. 2011. Thèse de doctorat. Grenoble.

VESE, L., CHAN, T., "A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 50, no. 3, pp. 271-293, Dec. 2002.

VU, T. T., DUMOUCHEL, C., Analysis of ligamentary atomization of highly perturbed liquid sheets. *International Journal of Multiphase Flow*, 2018, vol. 107, p. 156-167.

YON, J. (2003). Jet diesel haute pression en champ proche et lointain : Etude par imagerie. Thèse de doctorat, Université de Rouen.

YUSHKEVICH, P. A., PIVEN, J., HAZLETT, H. C., SMITH, R. G., HO, S., GEE, J. C., GERIG, G., "User-guided 3D active contour segmentation of anatomical structures: significantly improved efficiency and reliability," *NeuroImage*, vol. 31, no. 3, pp. 1116-1128, 2006.

ZHANG, K., WANG, B., ZUO, W., ZHANG, H., ZHANG, L., Joint learning of multiple regressors for single image super-resolution. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, vol. 23, no 1, p. 102-106.

ZIWEI, L., CHENGDONG, W., DONGYUE, C., YUANCHEN, Q., CHUNPING, W., Overview on image super resolution reconstruction. In : *Control and Decision Conference (2014 CCDC)*, The 26th Chinese. IEEE, 2014. p. 2009-2014.

Annexes



Annexe 1 : Multi-scale analysis of a viscoelastic liquid jet	131
Annexe 2 : Behaviour of free falling viscoelastic liquid jets	141
Annexe 3 : Viscoelastic ligament dynamics in free liquid jet experiments	149



Multi-scale analysis of a viscoelastic liquid jet



Christophe Tirel^a, Marie-Charlotte Renault^{a,b,*}, Christophe Dumouchel^a, Denis Lisiecki^a, Olivier Crumeyrolle^b, Innocent Mutabazi^b

^a Normandie Université, Université et INSA de Rouen, CNRS – CORIA, 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France

^b Normandie Université, Université du Havre, CNRS – LOMC, 76053 Le Havre, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2 December 2016

Accepted 2 May 2017

Available online 3 May 2017

Keywords:

Multi-scale analysis

Extensional rheology

Jet break-up

Low-viscosity viscoelastic liquids

Dilute polymer solutions

ABSTRACT

A multi-scale analyzing tool is now available to investigate the temporal evolution of two phase flows such as liquid systems experiencing an atomization process. Thanks to its multi-scale and global nature, it allows identifying all dynamics simultaneously involved in the process with no restriction of the liquid system shape. In the present work this multi-scale tool is applied on 2D visualizations of free falling jets of a low-viscosity viscoelastic solution. The jets are produced from a cylindrical discharge orifice and the liquid is a very dilute polymer solution containing 5 ppm of Poly(ethylene oxide). High spatial resolution images of the free falling jets are performed as a function of the velocity and at several distances from the discharge orifice. For every operating condition, the liquid jet remains cylindrical first, then shows the development of a sinusoidal perturbation and finally adopts a beads-on-a-string pattern before breakup occurs. The multi-scale analysis is performed on a high number of images and at several spatial positions in order to return statistical and temporal information, respectively. The results of this analysis show that during the sinusoidal perturbation stage, the large-scale region follows an exponential increase as predicted by the linear stability theory and during the beads-on-a-string stage, the small-scale region follows an exponential decrease similar to an elasto-capillary regime from which the relaxation time of the polymer solution can be extracted. This work positions the multi-scale approach as a promising and complementary tool to the currently used techniques in order to probe complex liquid rheology, especially in the case of mobile viscoelastic solutions.

© 2017 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

A falling jet issuing from an orifice into atmospheric air is an example of a two-phase flow with evolving interface shapes. It also makes a wonderful case study of a capillary-driven fluid instability [1,2]. Any surface deformation of wavelength greater than the jet circumference is capillary unstable and grows along the jet axis, causing the jet breakup. During this process, the falling jet deforms into swollen regions connected by filaments until final breakup. The jet interface is thus a complex time-dependent shape function. After breakup, jet fragments tend to rearrange themselves into spherical drops, which is the shape minimizing the surface area and also the surface energy—provided that the surface tension is constant—of a given liquid volume.

Capillary jets are widely present in Nature as well as in various industrial and medical applications (see [3] for a detailed review on the physics of the jet). Because of the fundamental and indus-

trial interest of capillary jets, there are numerous experimental and numerical studies dedicated to the jet problem, exploring more or less complex configurations. Increasingly the complexity concerns the nature of the liquid.

The measurements commonly performed on capillary jets are the wavelength of the perturbation and the temporal evolution of its amplitude. These measurements require a prior detection of the interface minimum/maximum displacements from its unperturbed state [4]. Quite often this detection is made easier by imposing the perturbation frequency that annihilates the temporal and spatial variabilities of the jet behavior [5]. This constraint may be skipped by using a multi-scale tool such as the one recently introduced to describe and analyze time-dependent fluid domains in atomization processes [6–8]. In this technique, any fluid region delimited by an interface is described by a scale distribution that is measured as a function of time. This allows us to identify characteristic and distinct scale behaviors for characteristic scales and time periods in one single measurement. The purpose of the present work is to apply this global and easy to use technique on experimental visualizations of free falling capillary jets of a viscoelastic solution in order to measure the dynamic of their large and small-scale struc-

* Corresponding author at: Normandie Université, Université et INSA de Rouen, CNRS – CORIA, 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France.

E-mail address: renoultm@coria.fr (M.-C. Renault).

Nomenclature

$D(d,t)$	Scale diameter
d	Scale
d_1	Specific small scale
$D_c(t)$ $D_s(t)$	Cylinder and sphere diameter
D_{c0} , D_{s0}	Initial cylinder and sphere diameter
De	Deborah number
D_j	Jet diameter
D_{max}	Jet diameter of the maximum surface point
d_{max}	Maximum scale
D_{min}	Jet diameter of the minimum surface point
D_{or}	Discharge orifice diameter
D_{sf}	Final sphere diameter
$E_2(d,t)$	Cumulative scale distribution
$e_2(d,t)$	Scale distribution
Fr	Froude number
g	Gravity acceleration constant
H_w	Analyzing window height
k	Perturbation wavenumber
L	Cylinder length
L_{BU}	Average breakup length
L_{or}	Discharge orifice length
M_v	Molar mass
Oh	Ohnesorge number
R	Gas constant
Re	Reynolds number
S_T	Total surface area of the liquid system
$S(d)$	Surface area of the eroded system at scale d
t	Time
t_{BU}	Breakup time
t_r	Relaxation time of the polymer solution
t_σ	Capillary time
T	Temperature
V_g	Mean jet velocity
We	Liquid Weber number
z	Distance from nozzle orifice
ΔH_w	Analyzing window shift
λ	Perturbation wavelength
μ	Shear viscosity
$[\mu]$	Polymer intrinsic viscosity into the solvent
ρ	Liquid density
σ	Surface tension coefficient
ω	Growth rate of the jet instability

tures. This approach is inspired from a recently multi-scale analysis of simulated capillary instability of a forced Newtonian liquid jet [9]. In that analysis, the temporal evolution of two characteristic scales was examined: the maximum scale d_{max} and the scale d_1 . d_{max} is representative of the drop region and is equal to the diameter of the maximum surface point D_{max} . d_1 is not equal to the minimum surface point D_{min} but its dynamics is the same. Therefore, the method gives access to the dynamics of D_{max} and D_{min} through d_{max} and d_1 , respectively. The time evolution of d_{max} was shown to be exponential as expected by linear stability theory. The relation between d_{max} and time t reads:

$$\frac{d_{max}}{D_j} = 1 - 2\eta_m \exp\left(\omega_m \frac{t}{t_\sigma}\right) \quad (1)$$

Here D_j is the unperturbed jet diameter and $t_\sigma = \sqrt{\rho D_j^3 / (8\sigma)}$ is the capillary time. ρ and σ are the density and air/liquid surface tension, respectively. The growth rate ω_m and the amplitude parameter η_m both depend on the perturbation wavelength. ω_m was found in excellent agreement with the prediction of linear stability

theory [9]. On the other hand, the scale d_1 follows three regimes of evolution: an exponential regime, a power-law regime and a linear one in agreement with previous studies on capillary liquid breakup (see for instance the map of misery of Clasen et al. [10]). The first regime is the counterpart of the exponential increase of d_{max} while the last two ones correspond to two thinning regimes, differing only by the dominant resisting force acting against the capillary-driving one: inertia then viscosity. In the inertia-capillary regime the evolution of d_1 writes:

$$\frac{d_1}{d_1^*} = \left(1 - \omega^* \frac{t - t^*}{t_\sigma^*}\right)^{2/3} \quad (2)$$

where $t_\sigma^* = \sqrt{(\rho d_1^*)^3 / (8\sigma)}$ and the parameters d_1^* , ω^* , t^* depend on the perturbation wavelength. In the visco-capillary regime d_1 follows:

$$\frac{d_1}{d_1^{**}} = \left(1 - \omega^{**} \frac{t - t^{**}}{t_{\sigma\mu}^{**}}\right) \quad (3)$$

where $t_{\sigma\mu}^{**} = \mu d_1^{**} / (2\sigma)$ is the characteristic visco-capillary time and μ the liquid dynamic viscosity. The parameters d_1^{**} , ω^{**} and t^{**} depend on the perturbation wavelength. Here, we intend to reproduce this analysis on experimental visualizations of jets of a low-viscosity but elastic liquid i.e., a low-viscosity viscoelastic liquid, showing significant extensional behavior, with the objective of tracking the small-scale dynamics.

Dilute solutions of water-soluble polymers are examples of low-viscosity viscoelastic liquids. Jets of such solutions are encountered in diverse domains of applications: inkjet printing technology [11,12], propulsion industry [13], medicine [14] etc.. Jets and filaments of low-viscosity dilute polymer solutions were investigated by several authors in the literature [15–17] to cite only a few examples]. The main feature of these non-Newtonian flows is the evolution of the jet at late times into beads-on-a-string structures where the drop-regions are connected by thin filaments, disappearing only asymptotically [18]. These structures tend to retard final jet breakup and this delay is described by an elasticity-controlled thinning regime. It is now well established (see for instance [19]) that the time evolution of $D_{min}(t)$ in the elasticity-controlled thinning regime is exponential and writes [20]:

$$\frac{D_{min}(t)}{D_j} = \left(\frac{GD_j}{4\sigma}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{t}{3t_r}\right) \quad (4)$$

with t_r the relaxation time of the polymer solution and G the modulus of the dilute solution. If the multi-scale tool can provide a measurement of the dynamic of $D_{min}(t)$, as it was shown on simulated jets of a Newtonian fluid [9], it will allow us to get a measurement of t_r . This would be of particular interest since measuring the extensional properties of mobile liquids is known to be challenging [5,21]. We will discuss the corresponding literature in more detail later in the paper.

In the present study, we apply the 2D multi-scale analysis to experimental visualizations of free-falling jets of a very dilute polymer solution. From the analysis, we extract two characteristic time-scales, the inverse of the growth rate of the instability and the relaxation time of the polymer solution, for different operating conditions. The article is structured as follows. The 2D multi-scale analysis is detailed in Section 2. Section 3 presents the fluids, experimental set-up and operating conditions, as well as the measurement protocol. In Section 4, the results and analysis are exposed and a discussion of our results with respect to previous work is proposed. We end the article with a conclusion.

2. 2D multi-scale description

The concept of 2D multi-scale description and analysis of free liquid flows is introduced in this section. The presentation is re-

stricted to the elements relevant for the present work. (More details are available in [6–9].) The 2D multi-scale description of a liquid system consists in measuring the cumulative scale distribution of its 2D projection. Inspired from the Euclidean Distance Mapping method to measure fractal dimension [22], the cumulative scale distribution is built from successive erosion operations of the 2D projection for a scale d ranging from 0 to infinity. The erosion operation at scale d consists in removing a strip of width $d/2$ around the whole system. The cumulative scale distribution $E_2(d)$ is the measurement of the relative amount of system surface area removed after the erosion operation at scale d . If S_T designates the surface area of the system 2D projection and $S(d)$ the remaining surface area after the erosion at scale d , $E_2(d)$ writes:

$$E_2(d) = \frac{S_T - S(d)}{S_T} \quad (5)$$

For $d=0$, $S(d)=S_T$ and $E_2(0)=0$. For a sufficiently large scale, the erosion operation removes all the system and the remaining surface area $S(d)=0$: therefore $E_2(d)=1$. For intermediate scales, $S(d)$ keeps decreasing or remains constant while d increases. Therefore, $E_2(d)$ is a cumulative and the smallest scale for which $E_2(d)=1$ is the maximum scale d_{max} of the system as mentioned in the Introduction section. The first derivative of $E_2(d)$ in the space scale introduces the scale distribution $e_2(d)$:

$$e_2(d) = \frac{dE_2(d)}{dd} \quad (6)$$

The dimension of $e_2(d)$ is the inverse of a length. This function is the ratio of the perimeter of the eroded system at scale d on twice the surface-area S_T . The functions $E_2(d)$ and $e_2(d)$ depend on the shape of the system but they are not a measurement of this shape since systems with different shapes may report identical scale distributions.

For simple objects, the distribution $e_2(d)$ can be analytically established. This is the case for a sphere and for a cylinder with a high aspect ratio. These objects are particularly relevant in the context of liquid atomization during which drops and ligaments are often encountered structures. The 2D projections of these objects are a circle and a rectangle, respectively, and their scale distribution $e_2(d)$ writes:

$$\text{Sphere of diameter } D_s : \begin{cases} e_2(d) = \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) & \text{for } d \leq D_s \\ e_2(d) = 0 & \text{for } D_s < d \end{cases} \quad (7)$$

Cylinder of diameter D_c and length L

$$\text{with } L/D_c \gg 1 : \begin{cases} e_2(d) = \frac{1}{D_c} & \text{for } d \leq D_c \\ e_2(d) = 0 & \text{for } D_c < d \end{cases} \quad (8)$$

The surface-based scale distribution of a sphere depends linearly on the scale (Eq. (7)). On the other hand, the surface-based scale distribution of a cylinder is independent of the scale (Eq. (8)). Therefore, the scale distribution easily discriminates liquid ligaments from drops.

When the shape of the liquid system varies with time, the scale distribution becomes a function of the scale and of the time and writes $e_2(d,t)$. It is important to mention here that the temporal variation of $e_2(d,t)$ might result from the variation of the perimeter of the eroded system, the variation of the surface-area, or the variation of both of them. For dimension reason, it is convenient to consider the inverse of $e_2(d,t)$ introducing the scale-diameter $D(d,t)$ [7]:

$$D(d,t) = \frac{1}{e_2(d,t)} \quad (9)$$

The scale-diameter has the dimension of a length. For a cylindrical ligament, we see from Eq. (8) that the scale diameter is scale

independent and is always equal to the ligament diameter, i.e., $D(d,t)=D_c(t)$. Inversely, for a non ligamentary structure, the scale diameter is scale dependent.

As an illustration, these notions are applied to a synthetic beads-on-a-string system made of a sphere of diameter D_{s0} and of a cylinder of diameter D_{c0} and length L . Shown in Fig. 1, this system is assumed of constant volume during time. The cylinder is subjected to a contraction motion characterized by a constant length and an exponential decrease of its diameter as:

$$D_c(t) = D_{c0} \exp(-\alpha t) \quad (10)$$

where α is the growth rate. The decrease of volume of the cylinder is compensated by the equivalent increase of volume of the sphere. The sphere diameter increases therefore as:

$$D_s(t) = \left[D_{s0}^3 + \frac{3L}{2} (D_{c0}^2 - D_c(t)^2) \right]^{1/3} \quad (11)$$

During the process, the 2D-projection system surface area (surface area of the drawing shown in Fig. 1) varies as:

$$S_T(t) = D_c(t)L + \frac{\pi D_s(t)^2}{4} \quad (12)$$

The process lasts until the volume of the sphere equals the whole volume, i.e., when $D_c(t)$ approaches zero. Introducing this condition into Eq. (11) leads to the final sphere diameter D_{sfin} :

$$D_{sfin} = \left(D_{s0}^3 + \frac{3LD_{c0}^2}{2} \right)^{1/3} \quad (13)$$

The scale-diameter $D(d,t)$ is calculated from Eqs. (7)–(12). For $D_s < D_{sfin}$, it comes:

$$\begin{cases} d < D_c(t) & D(d,t) = \frac{S_T(t)}{L + \frac{3}{2}(D_s(t) - d)} \\ D_c(t) < d < D_s(t) & D(d,t) = \frac{2S_T(t)}{\pi(D_s(t) - d)} \end{cases} \quad (14)$$

Note that the scale-diameter is never defined for scales higher than $D_s(t)$ since the corresponding $e_2(d,t)$ is equal to 0. A calculation has been performed with the following set of parameters: $D_{s0} = 500 \mu\text{m}$, $D_{c0} = 100 \mu\text{m}$, $L = 5 \text{ mm}$, $\alpha = 0.2 \text{ (ms)}^{-1}$. For this case, Eq. (13) gives $D_{sfin} = 584.8 \mu\text{m}$. The top graph of Fig. 2 displays the temporal evolution of the scale-diameter for d ranging from 0 to $90 \mu\text{m}$. Since the synthetic system considered here is 'discontinuous', i.e., there is no physical connection between the cylinder and the sphere, the function $D(d,t)$ is not continuous at the time for which $d=D_c(t)$. Of course, this will not be the case for actual systems that are continuous. Thus, for the present synthetic example, the $D(d,t)$ curves are drawn continuous in the top graph of Fig. 2. Fig. 2 also shows the temporal evolution of the diameter $D_c(t)$ of the cylinder.

We clearly see in Fig. 2 that the scale diameter $D(d,t)$ is rather scale independent provided that $d < D_c(t)$. This scale independence is related to a rather high value of the parameter L (see Eq. (14)). If $D_c(t)$ decreases, the width of the interval of small scales less than $D_c(t)$ decreases accordingly and for any scale becoming higher than $D_c(t)$, $D(d,t)$ suddenly increases as shown in the top graph of Fig. 2. In other words, the detection of the cylinder-diameter decrease can be recognized by identifying the scale d leaving the small-scale interval as time goes.

The specific scale delimiting the small-scale interval is precisely the scale d_1 mentioned in the Introduction section. In the synthetic situation represented in Fig. 2, $d_1(t)$ is equal to the cylindrical diameter $D_c(t)$: $d_1(t)$ is the scale for which $D(d,t)$ stops decreasing and increases sharply (see for instance the behavior of $D(d,t)$ at $t = 1 \text{ ms}$ for $d = 80 \mu\text{m}$ or at $t = 2.4 \text{ ms}$ for $d = 60 \mu\text{m}$). For an actual system, the variation of $D(d,t)$ is not that sharp and its continuous time-derivative goes through zero. Therefore, the characteristic scale $d_1(t)$ is defined as the smallest scale for which the time-derivative of the scale diameter is equal to zero. In the case of the

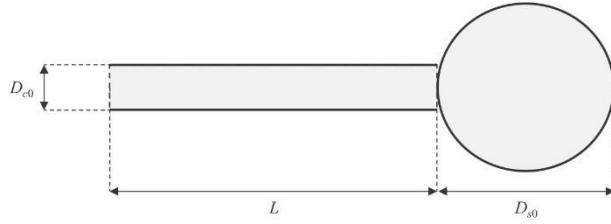


Fig. 1. Geometry of the synthetic beads-on-a-string system.

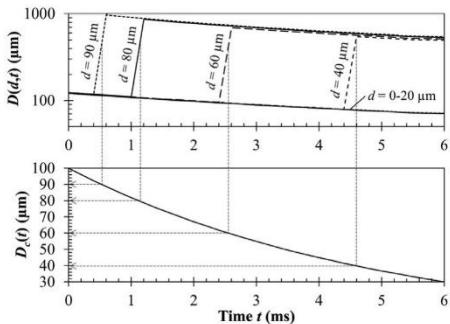


Fig. 2. Scale diameter $D(d,t)$ of the synthetic system versus time t for several scales d and the corresponding diameter $D_c(t)$ of the synthetic system cylinder versus time t . The dashed arrows show the correspondence between the cylinder diameter $D_c(t)$ and the scale for which we observe a jump of function $D(d,t)$ at time t .

beads-on-a-string deformation process, this scale reports the same dynamic as the diameter of the string.

3. Test fluids, experimental set-up and measurements

3.1. Test fluids

The low-viscosity viscoelastic fluid is a polymer solution containing 5 part per million (ppm) of Poly(ethylene oxide) (PEO) dissolved into a solvent. The average molar mass of the PEO is $M_v = 8 \cdot 10^3 \text{ kg mol}^{-1}$, as stated by the manufacturer (Sigma-Aldrich), and the solvent is an aqueous mixture containing 5% in mass of isopropyl alcohol. The density ρ , the shear viscosity μ and the surface tension σ of the solution were measured at room temperature: $\rho = 989 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 1.34 \text{ mPa s}$, $\sigma = 48.9 \text{ mN m}^{-1}$. These values are very similar to those obtained for the solvent ($\rho_s = 989 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu_s = 1.24 \text{ mPa s}$, $\sigma_s = 49.3 \text{ mN m}^{-1}$). To measure the elongational properties of viscoelastic solutions it is common to use a Capillary Breakup Extensional Rheometer (CaBER) [23,24]. This technique relies on the filament thinning in a stretched liquid bridge. But the CaBER is not appropriate to characterize the viscoelastic solution used in the present work due to its mobile nature (see [5] for more details). For now, its relaxation time t_r is estimated from the Zimm model in a good solvent [25], $t_r \sim \mu_s [\mu] M_v / (\rho R T)$, which is commonly used to describe dilute polymer solutions as the one studied and characterized here by a low value of c/c^* . T is the temperature of the solution, R the gas constant, $[\mu]$ the intrinsic viscosity of the PEO in the solvent, c the concentration of the solution and c^* the overlap concentration for polymer coils, calculated as the inverse of $[\mu]$. At $T=20^\circ\text{C}$, $[\mu]$ was measured by rotational rheometry ($[\mu] = 2.9 \times 10^{-3} \text{ ppm}^{-1}$) from which the values $c/c^* \sim 0.015$ and $t_r \sim 12 \text{ ms}$ were deduced.

3.2. Experimental set-up

The free falling jet experimental set-up is drawn in Fig. 3. It includes three major parts: the injector, the liquid pressure-controlled system and the visualization technique.

The injector is a cylindrical body ended with a cylindrical discharge orifice. It is oriented in the vertical direction $(0, z)$ (see Fig. 3). The liquid feeds in the cylindrical body with an imposed pressure and then discharges through the orifice as a free falling liquid jet, i.e., a vertical jet with no imposed perturbation. The length and diameter of the injector body are equal to 85 mm and 5 mm, respectively. The cylindrical discharge orifice has a diameter $D_{or} = 200 \mu\text{m}$ and a length $L_{or} = 300 \mu\text{m}$. The liquid pressure-controlled system consists of an air pressure tank with flexible pipes. The pressure is manually adjusted with an expansion valve and is controlled with an air pressure sensor located ahead of the injector. The injector is mounted on a computer-controlled three-axis displacement system. In particular, the vertical adjustment allows us to select different positions along the $(0, z)$ axis from the orifice exit. The jet production system operates in a wide and open chamber equipped with windows whose role is to protect the liquid jet from any external perturbations.

Snapshots of the liquid jet issuing from the injector are recorded by using a shadowgraph optical method. The light source, the object and the image sensor are aligned and fixed on an optical bench. The light source is a HSPS NANOLITE KL-L whose flash duration is of the order of 20 ns. The receiver is a sCMOS pco.edge 5.5 USB sensor (2560×2160 pixels) with an integrated shutter. The optical recording system, i.e. light source, image sensor and acquisition, is synchronized by a TTL signal. The field covered by the image is $6.56 \text{ mm (height)} \times 5.54 \text{ mm (width)}$. The corresponding spatial resolution is equal to $2.56 \mu\text{m/pixel}$. For every operating condition, this optical arrangement ensures frozen liquid flow images. To follow the jet evolution from the nozzle exit down to the fragmentation region, the injector is vertically shifted using the three-axis displacement system. Considering the physical height of the visualized field (6.56 mm), the vertical shift was taken equal to 6 mm. At each vertical position, 204 images were taken at a 10 Hz frequency. The proximity of this frequency with the one of the jet capillary instability which, according to linear stability theory [1] is equal to 2.4 Hz, is not penalizing for two reasons. First, the liquid system for free-falling jets implies a certain variability in space and time and avoids any unfavorable locking between the behavior and the observation. Second, the images are fully uncorrelated in time since during 0.1 s the jets travel 190 mm at least which is much higher than the image height.

The experimental runs were performed under atmospheric ambient pressure and temperature (between 19°C and 21°C). The injection pressure ranged from 0.05 bar to 1 bar, corresponding to a mean jet velocity V_q ranging from 2 to 10 m s^{-1} . This velocity was obtained by dividing the volume flow rate by the section area $\pi D_j^2/4$, where D_j is the mean jet diameter measured close to

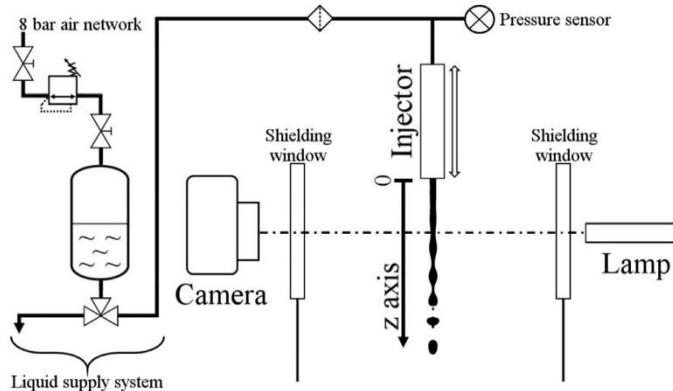


Fig. 3. Experimental set-up.

Table 1
Identification and operating conditions of the experimental runs. The Weber number We is defined in the text (see Section 3.2).

Group	Run	D_j (μm)	V_q (m s^{-1})	We ($We^{1/2}$) (-)
1	1	190	8.58	142 (11.9)
	2	191	8.59	143 (11.9)
	3	192	8.48	140 (11.8)
	4	192	8.42	138 (11.7)
2	5	215	1.89	7.75 (2.78)
	6	206	3.46	25.0 (5.00)
	7	209	4.51	43.1 (6.56)
	8	197	5.66	63.9 (7.99)
	9	193	6.99	95.5 (9.77)
	10	189	8.98	154 (12.4)
	11	184	10.3	199 (14.1)

the orifice exit before any perturbation becomes visible. The experiments were performed in two groups: 1 – reproducibility experiments; 2 - jet velocity dependency experiments. In group 1, the injection pressure was adjusted to obtain a velocity V_q around 8 m s^{-1} . This single experiment was repeated four times in a row. They are identified Run #1 to #4 in the following. In group 2, seven experiments with a varying velocity V_q were performed and are identified Run #5 to #11 in the following (see Table 1). In every case, the liquid jet was never turned off during the experiments. The Reynolds number $Re = \rho V_q D_j / (2\mu)$, Ohnesorge number $Oh = \mu / \sqrt{\rho \sigma D_j / 2}$, Deborah number $De = \sqrt{8\sigma r_f^2 / (\rho D_j^3)}$, liquid Weber number $We = \rho V_q^2 D_j / (2\sigma)$ and Froude number $Fr = V_q / \sqrt{gL_{BU}}$ (where L_{BU} is the average breakup length and g the gravitational acceleration) corresponding to the operating conditions explored during this work are: $1.5 \times 10^2 \leq Re \leq 7.0 \times 10^2$, $1.9 \times 10^{-2} \leq Oh \leq 2.0 \times 10^{-2}$, $75 \leq De \leq 95$, $7.7 \leq We \leq 2.0 \times 10^2$ and $3.7 \leq Fr \leq 13$. These numbers say that the present jets are laminar, weakly viscous, elastic and sometimes sensitive to the gravitational acceleration.

3.3. Measurements

The images taken at several z positions can be used to reconstruct the entire jet from the nozzle exit down to the breakup region. An example of this is shown in Fig. 4 for the polymer solution at 8 m s^{-1} (Run #1, see Table 1). We remind here that the image height is 6.56 mm and that the injection is performed vertically. We see in Fig. 4 that the jet maintains a rather cylindrical and unperturbed shape along 17 mm. At this position, a clear and

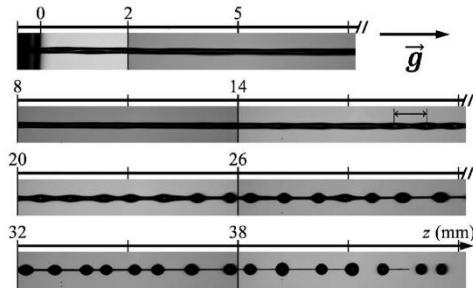


Fig. 4. Reconstructed jet. Fluid: polymer solution, $We^{1/2} = 12$. The double arrow indicates the initial perturbation wavelength identification.

sinusoidal perturbation becomes visible. This perturbation grows in amplitude with the downstream position keeping its sinusoidal shape down to 25 mm. After this position, the deformation process continues but the shape of the perturbation significantly varies leading to the expected beads-on-a-string pattern at 30 mm. This pattern remains visible until breakup occurs at 43 mm. In this work, the multi-scale tool introduced in Section 2 is used to describe this process.

The multi-scale description starts with the measurement of the cumulative scale distribution from the analysis of the experimental images. This image analyzing stage can be summarized in four steps illustrated in Fig. 5. First, the raw images (Fig. 5-a) are normalized (Fig. 5-b) in order to produce images with identical and constant background level. Second, the normalized images are binarized (Fig. 5-c). A single threshold is determined from the gray-level histogram to segregate the liquid pixel from the background pixel. The resulting images have two gray levels only: black for the liquid and white for the background. Third, a correction is applied to remove the white dots or zones that may remain on the axis of the liquid jet (Fig. 5-d). Resulting from non-deviated light, these white stains reveal the laminar and smooth nature of the jet. Fourth, the Euclidian Distance Mapping is applied (Fig. 5-e). This step consists in attributing to each black (liquid) pixel a gray level equal to the distance (in pixels) of the nearest interface boundary.

The cumulative scale-distribution is obtained from the count of pixels according to these gray-levels. This measurement is local, i.e., the count is performed on a portion of the jet delimited by a rectangular analyzing window of height H_w (see Fig. 5-e). This operation is repeated on the 204 iso- z images and an averaged cu-

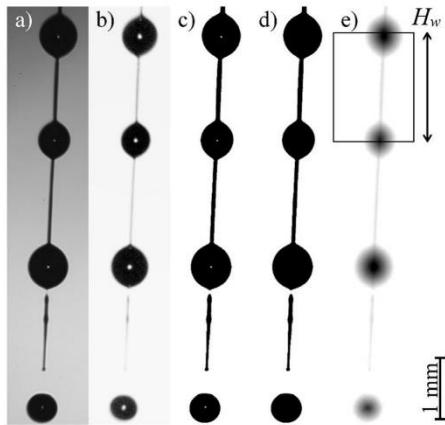


Fig. 5. From the raw image to the Euclidian Distance Map. a) Raw image b) Normalized image c) Binarized image d) Corrected image from the low intensity pixels inside the jet e) Euclidian Distance Map. Fluid: polymer solution. $We^{1/2} = 4.3$ (This experiment is not reported in Table 1).

cumulative distribution $E_2(d,t)$ is calculated that is attributed to the analyzing-window middle-line position z and then to the equivalent time t defined by:

$$t = \frac{\sqrt{V_q^2 + 2gz} - V_q}{g} \quad (15)$$

In particular, the average breakup time t_{BU} is obtained for $z=L_{BU}$. When $V_q^2 \gg 2gz$ ($Fr \gg 1$), Eq. (15) simplifies as $t=z/V_q$. The temporal evolution of the cumulative distribution is then obtained by sliding the Analyzing Window from the top to the bottom of the image with a spatial shift of ΔH_w . The image analyzing procedure has been conducted with the free ImageJ software. It requires values for the parameters H_w and ΔH_w .

The choice of the height of the analyzing window H_w is a compromise between the necessity of having a local information and a statistical information. If H_w is small the information is very local but a high number of images is required to ensure a good statistic. If H_w is large, less images are needed but the local aspect of the measurement is lost which manifests by a strong dependence between $E_2(d,t)$ and H_w . The adopted protocol to choose H_w is the one reported in [9]: $E_2(d,t)$ is measured for a decreasing H_w and the highest H_w from which $E_2(d,t)$ stops varying is selected. The application of this protocol leads to $H_w=1.0$ mm. This parameter is of the order of magnitude of the beads-on-a-string pattern (see Fig. 4).

The parameter ΔH_w is the shift of the analyzing window: it controls the temporal resolution ($=V_q/\Delta H_w$) which should be adjusted to allow a good following of the temporal variations. If the temporal resolution is too high, the variations of the system might be too small to be accurately measured. Subsequently, any temporal derivative might be pretty incorrect. If the temporal resolution is too small, the variations of the system might be too high to report an accurate perception of the dynamic. The selection we made in the paper ($\Delta H_w=1.0$ mm) offers a good compromise between these two extreme situations. Both parameters H_w and ΔH_w have been kept constant for all positions and velocities.

Once the cumulative distribution $E_2(d,t)$ are obtained, they are corrected from the inaccuracy of the Euclidian Distance Map tool in the small scales and smoothed in the scale and time spaces. Then, the scale distribution $e_2(d,t)$ and the scale diameter $D(d,t)$ are calculated (Eqs. (6) and (9) respectively) and the character-

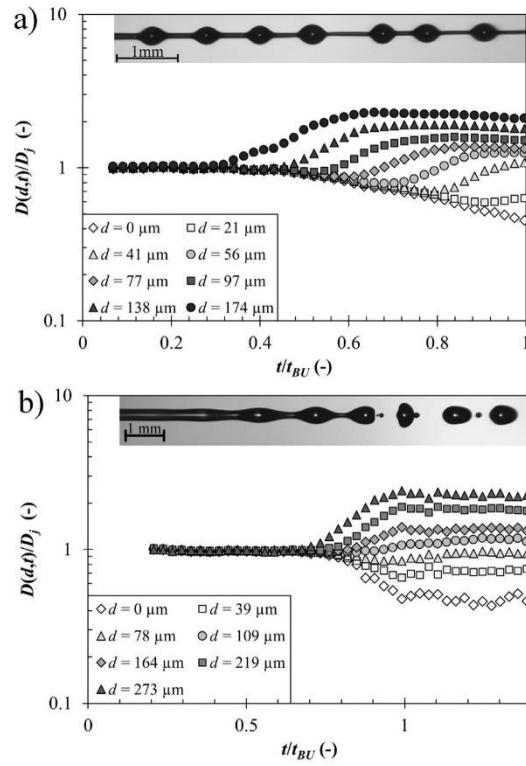


Fig. 6. Dimensionless scale-diameter $D(d,t)/D_j$ versus dimensionless time t/t_{BU} for several scales d : a) Fluid: polymer solution, $We^{1/2} = 12$, b) Fluid: solvent, $We^{1/2} = 5.0$ with $D_j = D_{or} = 300 \mu\text{m}$. Incrusted images show corresponding jet morphology. (t_{BU} is the breakup time).

istic scales d_{max} and d_1 are determined with the free software Scilab. The characteristic scales d_{max} and d_1 have been introduced in Section 2. They are determined as follows. The maximum scale d_{max} is taken as the smallest scale for which $E_2(d,t) \geq 0.995$ instead of $E_2(d,t)=1$. The threshold 0.995 is the highest value for which an exponential increase in time is ensured for d_{max} for all working conditions. It excluded unphysical and overestimated value of d_{max} when they exist. It has been checked that in the absence of these overestimated d_{max} , the threshold 0.995 brings the same dynamics as the theoretical threshold 1. The scale d_1 is determined as the smallest scale satisfying:

$$\frac{dD(d,t)}{dt} = 0 \quad (16)$$

The accuracy of the determination of these two scales is limited by the image spatial resolution. The effect of this is the existence of a non-reliability region for every result involving these scales.

4. Results and discussion

The typical temporal evolution of the scale diameters $D(d,t)$ for the jet of the polymer solution is shown in Fig. 6-a for several scales (Run #1, see Table 1). As said above, this jet is subject to a beads-on-a-string deformation process (see the image incrusted in the figure). By way of a comparison, the temporal evolution of the scale diameters $D(d,t)$ for a solvent jet (with no polymer) is shown in Fig. 6-b for several scales ($V_q=2 \text{ m s}^{-1}$, $D_j=D_{or}=300 \mu\text{m}$). For

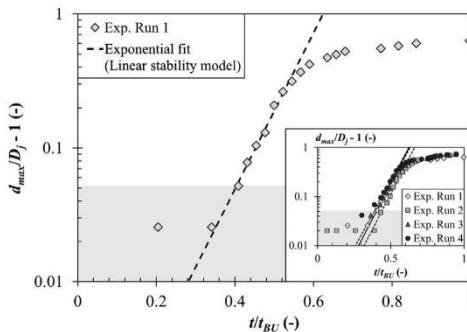


Fig. 7. Dimensionless maximum scale $d_{max}/D_j - 1$ versus dimensionless time t/t_{BU} for experimental run #1. Fluid: polymer solution. $We^{1/2} = 12$. The dashed line represents the linear stability model. The insert figure shows the results for the four experimental runs of Group 1.

this case also, an image showing the liquid jet deformation is incrust in the figure. Because of the absence of polymer, no beads-on-a-string pattern is observed. Instead, a classical Newtonian liquid behavior takes place. Fig. 6 shows that the scale diameter $D(d,t)$ is very sensitive to the jet deformation and breakup process. For both liquids, the scale diameter is independent of the scale at initial times and becomes scale-dependent as time increases. The main difference between the two liquids is the time duration of this scale-dependency development: it starts at $t/t_{BU} = 0.2$ and 0.75 for the polymer solution and the solvent solution, respectively. This difference is related to the characteristic time of the small structure life-time. As explained in Section 2 (see Fig. 2), the scale-dependency development seen in Fig. 6-a is representative of the thinning ligament dynamics.

Fig. 7 shows the temporal evolution of d_{max} for Run #1. The gray zone in the figure corresponds to the non-reliability region. Disregarding the first values falling in the non-reliability region, we see that d_{max} monotonously increases with time. This behavior is expected since this scale is equal to the jet crest diameter. Two zones of increase are visible. First (for $0.4 < t/t_{BU} < 0.55$) the temporal increase is exponential as the one expressed by Eq. (1). This behavior corresponds to the capillary instability as described by the linear stability theory. The growth rate of the instability can be obtained from the slope of the linear behavior marked in Fig. 7 by a dash line. Second (for $0.55 < t/t_{BU} < 1$) the d_{max} increase considerably slows down. Considering that for Run #1 $t_{BU} = 5.4$ ms, we can evaluate that the transition between the two zones occurs at around $z = 25$ mm. Fig. 4 shows that this position is the one where the jet rearranges as a beads-on-a-string configuration. The temporal evolution of d_{max} obtained for the four Runs of Group 1 (see Table 1) are compared to each other in the insert figure. As far as the dynamic of d_{max} is concerned, we see that the experimental protocol reports an excellent reproducibility.

The scale d_1 is the one for which the temporal derivative of the scale diameter is equal to zero (see Section 2). Fig. 8 shows the temporal evolution of this scale for the experimental Run #1 under a dimensionless form. The non-reliability region is indicated in gray. For $0.5 < t/t_{BU} < 0.9$, we see that d_1 exponentially decreases in time. The corresponding growth rate is expected to be related to the relaxation time t_r as expressed by Eq. (4). For higher times, the points deviate from the exponential behavior. Due to finite extensibility of the polymer molecules, a physical argument often used in the literature to model viscoelastic behaviors (see for instance the work of Entov and Hinch [26]), the elastic response is limited. The viscous response continues to grow, the only one balanc-

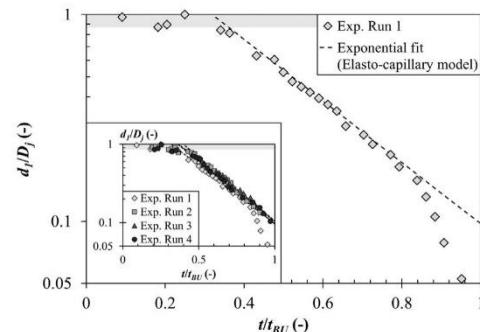


Fig. 8. Dimensionless scale d_1/D_j versus dimensionless time t/t_{BU} for experimental run #1. Fluid: polymer solution. $We^{1/2} = 12$. The dashed line represents the Elasto-capillary model. The insert figure shows the results for the four experimental runs of Group 1.

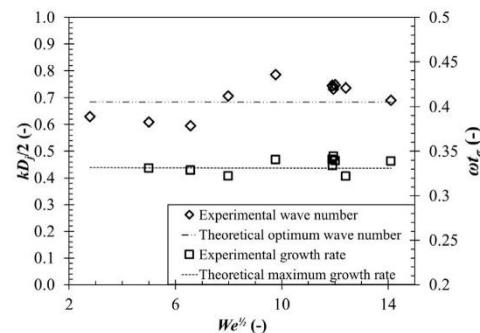


Fig. 9. Dimensionless wavenumber $kD_j/2$ and dimensionless growth rate ωt versus the square root of the Weber number $We^{1/2}$. Fluid: polymer solution. The horizontal lines indicate the Brenn theoretical predictions for the most unstable wavenumber and maximum growth rate. Note that the growth rate value of the lower Weber number is not present due to the lack of data points required to determine it.

ing the capillary thinning of the filament. This last stage is thus the expected visco-capillary regime. However, there are too few points to allow for its quantitative characterization. The plot incrust in Fig. 8 compares the results for the four runs. The behaviors in the exponential stage are clearly parallel demonstrating the reproducibility of the experimental protocol to extract the relaxation time from the decrease of the scale d_1 (the value found for the four experimental runs of Fig. 8 is 0.48 ms).

In the present jet regime (Rayleigh regime) the growth rate of the linear instability is supposed to be independent of the mean jet velocity. Furthermore, the relaxation time is an intrinsic property of the solution and should not depend on the mean jet velocity as well. Group 2 experimental runs would show us whether the characteristic times extracted from d_{max} and d_1 fulfill this non-dependency.

The experimental protocol and analysis detailed above was scrupulously reproduced for the seven experimental runs of Group 2 (see Table 1). For each case, the wavenumber k of the initial perturbation was determined from the estimation of the wavelength λ ($k = 2\pi/\lambda$) identified on the images as shown in Fig. 4. Furthermore the linear growth rate ω of the perturbation was also determined from the exponential increase of the scale d_{max} as shown in Fig. 7. For all operating conditions, Fig. 9 shows the initial perturbation wavenumber and growth rate as a function of the root square of the Weber number. Experimental data points are found

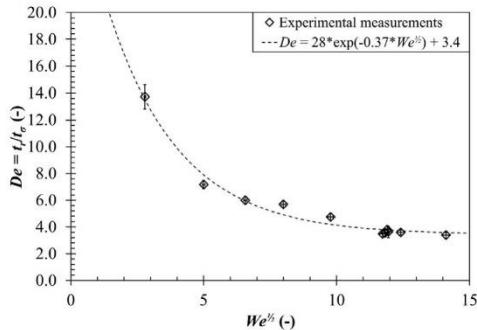


Fig. 10. Deborah number $De = t_r/t_0$ versus the square root of the Weber number $We^{1/2}$. Fluid: polymer solution. The dashed curve represents the best fit of the data, searched under the mathematical form: $ae^{bWe^{1/2}} + c$, with a, b and c being the parameters of the fit.

in good agreement with the predictions of linear stability theory for the fastest growing mode and the maximum growth rate (indicated by the horizontal lines in Fig. 9). The theoretical values are obtained from the model of Brenn et al. [27] for a non-Newtonian fluid using the Ohnesorge of the PEO solution, the Deborah number calculated with the Zimm relaxation time and the time ratio taken as the viscosity ratio of the solvent viscosity to the polymer solution one. These values are very similar to the ones predicted by Rayleigh $kD/2 = 0.69$ and $\omega t_0 = 0.34$ since the polymer solution studied here is a low-viscosity solution. We note also that the measured growth rates are never above the Rayleigh's theoretical limit. The good agreement between experiment and theory on Fig. 9 demonstrates that the observed perturbation is the optimum one, confirming the free nature of the liquid jets.

For all operating conditions, the elasto-capillary regime of the d_1 scale was identified and the relaxation time t_r was evaluated from the slope in this regime according to Eq. (4). The results are plotted in Fig. 10 as a function of the root square of the Weber number. This figure clearly evidences a dependency between the relaxation time and the Weber number. However, two points must be mentioned. First, the relaxation times found for the four runs of Group 1 are very close to each other. This validates the reproducibility of the experimental procedure. Second, whereas the relaxation time depends on the Weber number, an asymptotic value is reached as the Weber number increases. This asymptote is recognized by the mathematical fit reproduced in the figure and the corresponding asymptotic relaxation time is $t_r = 0.44$ ms.

The idea of using a viscoelastic jet behavior to determine the relaxation time of a polymer solution is not new. It defines a method for elongational rheometry whose proof-of-concept was originally demonstrated by Schümmer and Tebel [28–30] and that was recently developed by Keshavarz et al. [5].

Schümmer and Tebel [28–30] reported the dependency of the relaxation time to jet operating conditions. Forced jet experiments with the same polymer solution but different operating conditions – amplitude and frequency of nozzle disturbance and jet velocity – were conducted. For the range of parameters explored, it was shown that an increase in disturbance amplitude or frequency but a decrease in mean jet velocity causes a decrease of the relaxation time (see for instance Fig. 14 in [30] for more details on the domain of jet operation). According to these authors, it should be possible to identify suitable operating conditions for which a unique relaxation time can be obtained. So far, the existence of this suitable operating domain has not been fully demonstrated, limiting the use of the jet behavior to probe elongational properties of fluids.

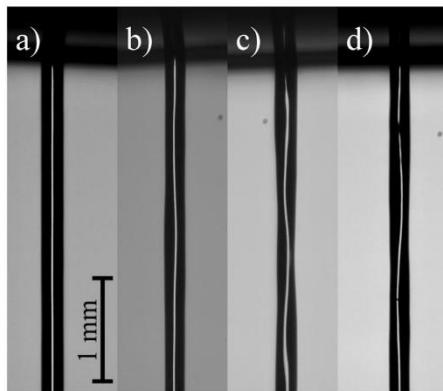


Fig. 11. Visualization of the amplitude perturbation at the exit of the injector for different Weber number experiments. Injection pressure a) $We^{1/2} = 5.0$ b) $We^{1/2} = 8.0$ c) $We^{1/2} = 9.8$ d) $We^{1/2} = 12$.

Recently, there has been a resurgence of interest for the jet elongational rheometer. One reason is that this technique allows to address the well-known challenge of elongational rheology for very dilute polymer solutions, as proved and discussed in great details in the recent work of Keshavarz et al. [5]. In this quantitative investigation on atomization of viscoelastic liquid jets, the authors introduced the use of the Rayleigh Ohnesorge Jetting Extensional Rheometry (ROJER) to obtain precise measurements of elongational properties for very dilute polymer solutions. The technique relies on the filament thinning in a vibrating jet, based on the original ideas from Schümmer and Tebel [28–30], and can be seen as a “flying CABER”. In that work, it was found that for fixed disturbance amplitude and frequency the value of the relaxation time did not depend on the jet velocity.

For the present experiments, only the injection pressure is imposed. Note that a change in the injection pressure causes a change both in the mean jet velocity and the mean jet diameter, which are used to calculate the Weber number. As can be seen in Table 1, the jet at the exit of the orifice experiences an expansion or a contraction depending on the injection pressure, a phenomenon that is already known for Newtonian fluids (see for example [31]) and that is expected to be modified here by the die-swell effect of the polymer solution [32]. On the other hand, the disturbance amplitude and frequency are freely selected by the physical system. Based on the results of Fig. 9, we can reasonably assume that the experiments are performed at a constant disturbance frequency, the most unstable one. Although the disturbance amplitude has not been measured, its dependency with the Weber number is evidenced by the luminous line on the axis of the liquid jet near the injector. Fig. 11 reports a series of images taken at the orifice exit for four different experiments of Group 2. We observe that the sinuosity of the luminous central line increases with the Weber number. A close examination of image series reveals that this sinuosity is constant with time and therefore highlights a steady-state deformation of the jet, which generates a larger initial perturbation amplitude. This means that, in our free jet conditions, an increase in Weber number causes an increase in initial disturbance amplitude. On the other hand, Fig. 10 shows that a Weber number increase causes a decrease of the relaxation time. Considering Schümmer and Tebel's findings [28–30], these elements tend to demonstrate that the effect of disturbance amplitude is dominant over the one of jet velocity in the present work: the decrease of relaxation time

with the Weber number due to a decrease of mean jet velocity is due to an increase of the initial disturbance amplitude.

It is important to emphasize that the high values of the relaxation times are obtained for the low Weber numbers experiments (Runs # 5–7, $We = 8, 25, 43$ see Table 1). One may wonder whether the system is not close to the dripping-jetting transition for which a gobbling effect may modify the characteristic time of the filament thinning while preserving its exponential behavior [33] or not. The critical Weber number (see Eqs. (3.1) and (3.2) in [33]) was estimated close to 2, confirming that our jet experiments are strictly above the fully-developed gobbling regime. Assuming the presence of residual gobbling gives us a relaxation time 3/2 greater than the one measured here, which makes the difference between the values at low and high Weber numbers even larger. Thus, the gobbling effect can not explain the high values of the relaxation time obtained in the low Weber number experiments.

The present experiments show also that for sufficient large Weber numbers, the relaxation time becomes quasi-independent of the Weber number, in agreement with the conclusion of Schümmer and Tebel [28–30] speaking for the existence of a suitable operating domain. The results of Keshavarz et al. [5] that reported no velocity effect, seems to prove the existence of this domain. Yet, these results require to be confirmed by a series of additional experiments, in order to better understand the effect of the perturbation amplitude on the relaxation time in both free and forced jet experiments. A more detailed study is thus needed to precise the domain of operation where a unique relaxation time can be achieved with a jet elongational rheometer.

5. Conclusion

The 2D multi-scale analyzing tool developed to diagnose liquid atomization processes has been applied on images of free-falling jets of a low-viscosity viscoelastic solution showing beads-on-a-string structures. Performing a global description of the liquid jet, the multi-scale approach allows identifying and isolating the dynamics at different scales involved in the jet deformation process. Because of the viscoelastic nature of the liquid, the present jet deforms in two steps: first a sinusoidal perturbation manifests and grows in amplitude, and second this sinusoidal perturbation transforms as a beads-on-a-string structure whose evolution involves the thinning of the string until breakup occurs. The free-falling characteristic of the jet has been proven by the fact that, for every tested liquid jet velocity, the initial perturbation wavelength exhibits the value of the optimum wave predicted by the linear stability theory. The multi-scale analysis concentrates on two scales: the maximum scale d_{max} and the scale d_1 whose dynamic follows the one of the small structure. In the first jet deformation step, d_{max} exponentially increases with time with a growth rate always equal to the linear theory prediction. This again demonstrates the free-falling nature of the jet. In the second jet deformation step, the dynamic of the scale d_1 corresponds to the one of the filament between the beads. This dynamic is found to follow an elasto-capillary regime from which the characteristic relaxation time can be determined. The reproducibility of this technique to determine this time was demonstrated to be excellent. When the jet velocity increases, it is found that the relaxation time decreases and seems to converge towards an asymptotic value. Based on previous works of the literature, this behavior has been identified in the present experiments to result from the increase of the initial amplitude of the perturbation with the jet velocity. This suggests performing further experiments in order to identify operating conditions ensuring the determination of a constant relaxation time independent of the operating conditions. Since high initial amplitude perturbation has to be privileged, using complex geometry nozzles might constitute an interesting suggestion.

This work shows that the multi-scale approach represents an interesting and complementary alternative to the currently used techniques to probe the extensional properties of a viscoelastic solution. This technique has advantages. Since it is based on a global description, it is not subject to a spatial accuracy required by any local technique. Furthermore, no specific injection conditions are required. The multi-scale description can be applied in any situation, whatever the shape of the liquid system. In particular, it would be able to identify and quantify elasto-capillary mechanisms in any complex atomization scenario. Finally, it is also important to mention that, with one measurement, this approach provides all the dynamics involved in the evolution of an atomizing liquid system. The completeness of such information has not been fully exploited so far.

Acknowledgments

The authors acknowledge the financial support from the French National Research Agency (ANR) through the program Investissements d'Avenir (ANR-10 LABX-09-01), LABEX EMC3. The authors would like also to thank Prof. Günter Brenn from Graz University of Technology for fruitful discussions.

References

- [1] L. Rayleigh, On the instability of jets, *Proc. Lond. Math. Soc.* 10 (1979) 4–13.
- [2] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, 1961.
- [3] J. Eggers, E. Villermaux, Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.* 71 (2008) 036601.
- [4] C. Clasen, J. Bico, V. Entov, G.H. McKinley, *J. Fluid Mech.* 636 (2009) 5–40.
- [5] B. Keshavarz, V. Sharma, E.C. Houze, M.R. Koerner, J.R. Moore, P.M. Cotts, P. Threlfall Holmes, G.H. McKinley, Studying the effects of elongational properties on atomization of weakly viscoelastic solutions using Rayleigh Ohnesorge Jetting Extensional Rheometry (ROJER), *J. Non-Newton. Fluid* 222 (2015) 171–189.
- [6] C. Dumouchel, S. Grout, Application of the scale entropy diffusion model to describe a liquid atomization process, *Int. J. Multiph. Flow* 35 (2009) 952–962.
- [7] C. Dumouchel, S. Grout, Towards an interpretation of the scale diffusivity in liquid atomization process: an experimental approach, *Physica A* 390 (2011) 1811–1825.
- [8] C. Dumouchel, J.B. Blaisot, E. Bouche, T. Ménard, T.T. Vu, Multi-scale analysis of atomizing liquid ligaments, *Int. J. Multiph. Flow* 73 (2015) 251–263.
- [9] C. Dumouchel, W. Aniszewski, T.T. Vu, T. Ménard, Multi-scale analysis of simulated capillary instability, *Int. J. Multiph. Flow* 92 (2017) 181–192.
- [10] C. Clasen, P.M. Phillips, L. Palangetic, J. Vermant, Dispensing of rheologically complex fluids: the map of misery, *AIChE J.* 58 (2012) 3242–3255.
- [11] C. McIlroy, O.G. Harlen, N.F. Morrison, Modelling the jetting of dilute polymer solutions in drop-on-demand inkjet printing, *J. Non-Newton. Fluid* 201 (2013) 17–28.
- [12] N.F. Morrison, O.G. Harlen, Viscoelasticity in inkjet printing, *Rheol. Acta* 49 (2010) 619–632.
- [13] K.K. Chao, C.A. Child, E.A. Grens II, M.C. Williams, Antimisting action of polymeric additives in jet fuels, *AIChE J.* 30 (1984) 111.
- [14] E. Zussman, A.L. Yarin, R.M. Nagler, Age- and flow-dependency of salivary viscoelasticity, *J. Dent. Res.* 86 (2006) 281.
- [15] M. Goldin, J. Yerushalmi, R. Pfeffer, R. Shinnar, Breakup of laminar capillary jet of a viscoelastic fluid, *J. Fluid Mech.* 38 (1969) 689.
- [16] M.S.N. Oliveira, G.H. McKinley, Iterated stretching and multiple beads-on-a-string phenomena in dilute solutions of highly extensible flexible polymers, *Phys. Fluids* 17 (7) (2005).
- [17] P.P. Bhat, S. Appathurai, M.T. Harris, M. Pasquali, G.H. McKinley, O.A. Basaran, Formation of beads-on-a-string structures during breakup of viscoelastic filaments, *Nat. Phys.* 6 (2010) 625–631.
- [18] S. Middleman, Stability of a viscoelastic jet, *Chem. Eng. Sci.* 20 (12) (1965) 1037.
- [19] M. Stelter, G. Brenn, A.L. Yarin, R.P. Singh, F. Durst, Validation and application of a novel elongation device for polymer solutions, *J. Rheol.* 44 (2000) 595–616.
- [20] D. Vadillo, W. Mathews, C. Clasen, *Rheol. Acta* 51 (2012) 755–769.
- [21] Y. Christanti, L.M. Walker, Surface tension driven jet break up of strain-hardening polymer solutions, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 100 (2001) 9–26.
- [22] J. Bérubé, M. Jébrak, High precision boundary fractal analysis for shape characterization, *Comput. Geosci.* 25 (1999) 1059–1071.
- [23] S. Anna, G. McKinley, Elasto-capillary thinning and breakup of model elastic liquids, *J. Rheol.* 45 (2001) 15.
- [24] L. Campo-Deano, C. Clasen, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 165 (2010) 1688–1699.
- [25] M. Doi, S.F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, Oxford University Press, New-York, 1986.

[26] V.M. Entov, E.J. Hinch, Effect of a spectrum of relaxation times on the capillary thinning of a filament of elastic liquid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 72 (1997) 31–54.

[27] G. Brenn, Z.B. Liu, F. Durst, Linear analysis of the temporal instability of axisymmetrical non-Newtonian liquid jets, *Int. J. Multiph. Flow* 26 (10) (2000) 1621–1644.

[28] P. Schümmer, K.H. Tebel, The use of controlled jet instability for elongational rheometry, *J. Rheol.* 26 (1982) 77–78.

[29] P. Schümmer, K.H. Tebel, Design and Operation of the free jet elongational rheometer, *Rheol. Acta* 21 (1982) 514–516.

[30] P. Schümmer, K.H. Tebel, A new elongational rheometer for polymer solutions, *J. Non-Newton. Fluid* 12 (1983) 331–347.

[31] S. Middleman, J. Gavis, *Phys. Fluids* 4 (3) (1961) 355–359.

[32] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, vol. 1, second ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.

[33] C. Clasen, J. Bico, V. Entov, G.H. McKinley, *J. Fluid Mech.* 636 (2009) 5–40.

Behaviour of free falling viscoelastic liquid jets.

Christophe Tirel, Marie-Charlotte Renoult*, Christophe Dumouchel, Jean-Bernard Blaisot
 Normandie Université, Université et INSA de Rouen, CNRS – CORIA
 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France
 *Corresponding author: renoultm@coria.fr

Abstract

In a recent work, a protocol to measure the relaxation time of dilute polymer solutions, known to be challenging, has been established [1]. This protocol is based on a 2D multi-scale description of free-falling low velocity viscoelastic liquid jets. Although the relaxation time reached an asymptotic value for high jet velocities, a significant dependence with the jet velocity is observed for low velocities. The present work reconsiders these previous experimental data using a 3D multi-scale analysis in order to identify the origin of the dependence between the relaxation time and the jet velocity. The 3D analysis demonstrates the importance of a velocity-dependent coalescence mechanism in the jet behaviour. Thanks to a simple model of jet deformation it is demonstrated that this coalescence mechanism prevents the elasto-capillary contraction of the smallest scales from occurring when the jet velocity is reduced.

Keywords

Dilute polymer solutions, Viscoelasticity, Jet break-up, Multi-scale analysis

Introduction

Contrary to Newtonian fluids, the atomisation of a cylindrical jet of a viscoelastic solution presents long life time cylindrical ligaments connecting spherical beads, the so called beads-on-a-string (BOAS) structures [2]. These structures are observed at times prior jet breakup. It is well known that the thinning evolution of the ligaments diameter is controlled by the elasticity of the liquid [3]. The decrease is exponential, with a relaxation time *depending only on the physical properties of the liquid*. The measurement of this relaxation time is also known to be particularly challenging for dilute polymer solutions [4] for which the relaxation time is very short (micro-second or under). Previous studies [5-8] have investigated the possibility to use a cylindrical jet to measure this quantity, a method that could be suitable to probe very short times [4]. Yet, it was shown that the relaxation time obtained with this method depends on the jet operating conditions, i.e. the jet velocity, the amplitude and the frequency of the initial disturbance [6-8], thus limiting the development of this experimental method. Until recently, new results [4] suggest that an operating domain where these dependences vanish may exist.

In this context, a multi-scale analysis of the behaviour of free falling jets of a dilute viscoelastic solution was performed, allowing measurements of the relaxation time [1]. The dynamics of the smaller scales was monitored and an exponential decrease was observed from which a relaxation time was extracted. It was found that the measured relaxation time decreases with increasing jet velocity, reaching a plateau for sufficiently high velocities. This behaviour was related to the influence of the initial amplitude disturbance as reported in [6-8]. The higher jet velocity was imposed, the larger initial amplitude was observed on jet images and the lower relaxation time was measured in agreement with [6-8]. To date, the dependence of the relaxation time with the jet velocity (or the initial amplitude disturbance) remains unexplained. The objective of the present paper is thus to complete this previous work [1] by performing a 3D multi-scale analysis for these free falling jets of dilute viscoelastic solutions in order to gain a deeper insight into the jet velocity dependence. A model of jet deformation is used in complement to enrich the 3D analysis. Section 2 summarizes the previous investigation and describes the 3D multi-scale analysis and the model. Section 3 presents the results and the application of the model. The article ends with a conclusion.

Jet images: acquisition and analysis

This section summarizes the experimental work and the 2D multi-scale analysis that are presented in detail in [1]. It also introduces the 3D multi-scale analysis and the model of jet deformation which constitute the new aspect of the present study.

The experimental setup produces free falling jets of a low-viscosity viscoelastic polymer solution containing 5 ppm of Poly(ethylene oxide) (PEO) dissolved into a solvent (density $\rho = 989 \text{ kg/m}^3$; shear viscosity $\mu = 1.34 \text{ mPa.s}$; surface tension $\sigma = 48.9 \text{ mN/m}$). The liquid was kept in a pressurized tank and fed an injector with a cylindrical nozzle whose diameter is $D_{or} = 200 \mu\text{m}$. Images of the free falling jets were obtained with a high spatial resolution camera and a light source of short duration (20 ns) used in a diffused backlight illumination optical arrangement.

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

The field of view covered by the images was 6.56 mm x 5.54 mm and the spatial resolution was equal to 2.56 $\mu\text{m}/\text{pixel}$. A 3D displacement system was used to translate the injector to be able to visualize the jets on their full length, i.e., from the nozzle exit down to the breakup point.

The parameter of the experiment was the injection pressure that ranged from 0.05 to 1 bar. The mean jet velocity V_q was obtained by dividing the measured volume flow rate by the jet section area $\pi D^2/4$ where the mean jet diameter D was measured on the jet within the three first millimeters after the nozzle exit. The mean jet velocity ranged from 1.9 m/s to 10 m/s. For each injection pressure and for each position of the injector, 204 images decorrelated in time were recorded and the subsequent analysis was statistical. A reconstructed full jet is shown in Fig. 1. The jet issuing from the nozzle is slightly deformed. At around 16 mm a sinusoidal disturbance appears. This disturbance grows and rearranges to the expected beads-on-a-string pattern (BOAS) which remains visible until breakup occurs.

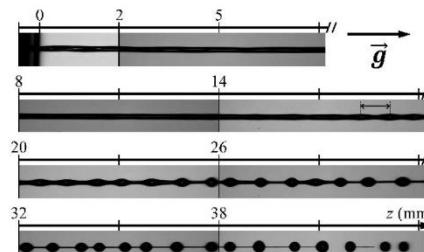


Figure 1. Reconstructed jet (Fluid: polymer solution, Mean jet velocity $V_q = 8.58 \text{ m/s}$)

The analysis of these images used a 2D multi-scale description of the jet. This description consisted in measuring the surface-based cumulative scale function $E_2(d,z)$ as a function of the position z (see [1]). First, image treatments were applied to provide two-level images where the liquid appeared as black pixels on a white background. Second, a rectangular analyzing window delimiting a portion of the jet was positioned at a distance z from the nozzle exit. Third, the surface-based cumulative scale function $E_2(d,z)$ of the jet portion delimited by the analyzing window was measured. Introduced in several previous works (see [9-11] for instance), the measurement of this function is inspired from the Euclidean Distance Mapping method to determine fractal dimension [12] and consists in applying successive erosion operations at a scale d ranging from 0 to infinity. The erosion operation consists in removing a strip of width $d/2$ around the whole system. The cumulative scale function $E_2(d,z)$ is the ratio of surface area of the removed strip on the total surface area of the local jet portion. For the scale $d = 0$, the surface area removed by erosion is equal to zero and $E_2(0,z) = 0$. For a sufficiently large scale, the surface area removed by erosion is equal to the total surface area of the local jet portion and $E_2(d,z) = 1$. Between these two scales, $E_2(d,z)$ monotonously increases. A more detailed definition of the cumulative scale function is available in [9-11]. At each z position, the measurement was performed on 204 images and an average cumulative function was calculated. The spatial evolution of the average cumulative scale function was obtained by sliding the analyzing window from the top of the jet (just under the nozzle) down to the bottom (in the spray region). The size of the analyzing window was chosen of the order of the length of the BOAS pattern i.e. 390 pixels for every velocity. Furthermore, 390 pixels appeared also appropriate for the shift of the analyzing window along the z axis. The spatial series of local cumulative scale functions in space was transformed as a temporal series using the equivalent time t defined as:

$$t = \frac{\sqrt{V_q^2 + 2gz} - V_q}{g} \quad (1)$$

where g is the gravitational acceleration. When $V_q^2 \gg 2gz$ (Froude number $\gg 1$), Eq. (1) simplifies as $t = z/V_q$. The 2D multi-scale analysis concentrated on the 2D scale-distribution $e_2(d,t)$ which is the first derivative of the cumulative function in the scale space: $e_2(d,t) = dE_2(d,t)/dd$. This distribution is equal to the ratio of the perimeter of the eroded local system at scale d on twice the total surface area of the local system. The temporal evolution of the scale distribution $e_2(d,t)$ gives information on the physical mechanisms involved in the shape evolution of the jet. To illustrate this, one can consider the temporal derivative of the scale distribution as shown for instance in Fig. 2 ($V_q = 1.9 \text{ m/s}$, $t = 6.3 \text{ ms}$, BOAS pattern). This derivative is equal to zero for three characteristic scales noted d_1 , d_2 and d_3 . The d_3 scale is the maximum scale d_{\max} of the system. The scale d_4 for which the derivative is a minimum is a characteristic scale. It has been demonstrated ([11] for instance) that the specific behavior of the derivative in the small scale range ($d < d_1$) in Fig. 2 denotes the presence of a thinning cylindrical ligament. The scale d_1 appears

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

as a characteristic scale of the dynamics of the ligament. The temporal evolution of d_1 for the free viscoelastic jets reported a decrease according to three regimes [1]. The second one is an exponential regime which corresponds to an elastic-controlled capillary thinning behavior [1], i.e.:

$$d_1 \propto \exp\left(-\frac{t}{3t_r}\right) \quad (2)$$

where t_r is the relaxation time of the viscoelastic solution. The relaxation time was measured from Eq. (2) as a function of the mean jet velocity V_q [7]. Figure 3 reports the results by plotting the Deborah number $D_e = t/t_r$ as a function of the square root of the jet Weber number We where:

$$t_r = \sqrt{\frac{\rho D_j^3}{8\sigma}} \quad We = \frac{\rho V_q^2 D_j}{\sigma} \quad (3)$$

Figure 3 shows a dependence between t_r and the mean jet velocity. Nevertheless, we note that an asymptotic value is reached when We increases. This value is $t_r = 0.44$ ms and is believed to be the relaxation time of the solution. In order to obtain a better understanding of the behaviour of low-velocity free-falling viscoelastic jets, we suggest completing the previous analysis by a 3D multi-scale approach. This is the purpose of the present work.

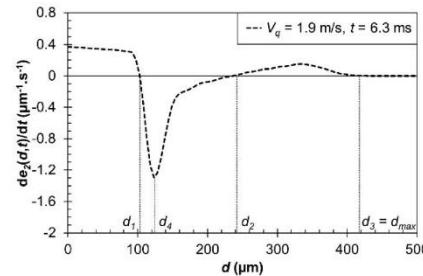


Figure 2. Temporal derivative of the scale distribution.
Introduction of characteristic scales

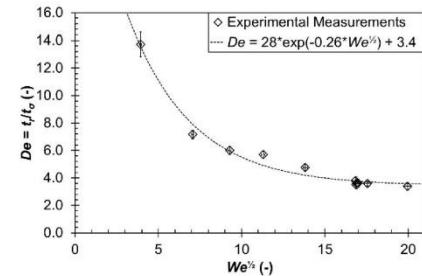


Figure 3. Deborah number D_e as a function of the Weber number (from [7])

In the case where 3D system information is available, the 3D generalization of the 2D multi-scale description summarized above is straightforward (see [11, 13] for applications). The system is characterized by its volume and the erosion operation removes the peripheral volume of a $d/2$ thickness from the system boundary. The cumulative distribution $E_3(d,t)$ is the ratio of the volume removed by the erosion at scale d on the total volume of the system. The scale distribution $e_3(d,t)$ defined as the first derivative of the cumulative distribution $E_3(d,t)$ in the scale space is equal to the ratio of the surface area of the eroded system at scale d on twice the total volume of the system. Therefore, $e_3(0,t)$ is directly proportional to the specific-surface-area (surface of the interface per unit volume) introduced by Evers [14].

In the present work, the studied free liquid jets are assumed axisymmetric. This assumption seems reasonable since the capillary instability is known as an axisymmetric mechanism. For each jet portion delimited by the analyzing window, this hypothesis allows to calculate the jet volume and surface by integration for each successive values of the scale d . Then, the 3D multi-scale description uses these two pieces of information to calculate the scale distribution $e_3(d,t)$. After the analysis of all the images, we determine $V(t)$ which is the local average volume of the jet portion delimited by the analyzing window, and $e_3(d,t)$ which is the local average volume-based scale distribution.

One of the main objectives of the 3D multi-scale approach is to describe the behavior of the jet when it is shaped as a BOAS pattern. In this case, the jet can be described as the composition of two simple systems: a cylinder of diameter $D_1(t)$ and volume $V_1(t)$ (system 1) and a sphere of diameter $D_2(t)$ (volume $V_2(t)$, system 2). The volume-based scale distributions for these two systems are:

$$\text{System 1} \quad e_3(d,t) = \frac{2}{D_1(t)} \left(1 - \frac{d}{D_1(t)}\right) \quad \text{for } d < D_1(t) \quad (4)$$

$$\text{System 2} \quad e_3(d, t) = \frac{3}{D_2(t)} \left(1 - \frac{d}{D_2(t)}\right)^2 \quad \text{for } d < D_2(t) \quad (5)$$

The similarity between these two expressions must be noted. Furthermore, the scale distribution of a cylinder shows a first order dependence with the scale and a sphere shows a second order one. This observation suggests that a system whose shape is between a cylinder and a sphere would report a scale dependence order between 1 and 2. Therefore, since the free falling jet evolves from a cylindrical system to an arrangement of a cylinder and a sphere (see Fig. 1), its scale distribution can be modelled as:

$$\begin{aligned} e_3(d, t) &= \alpha(t) \frac{2}{D_1(t)} \left(1 - \frac{d}{D_1(t)}\right) + (1 - \alpha(t)) \frac{n}{D_2(t)} \left(1 - \frac{d}{D_2(t)}\right)^{n-1} \quad \text{for } d < D_1(t) \\ e_3(d, t) &= (1 - \alpha(t)) \frac{n}{D_2(t)} \left(1 - \frac{d}{D_2(t)}\right)^{n-1} \quad \text{for } D_1(t) < d < D_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

In Eq.(6), the parameter n varies from 2 to 3 as time increases. At early times the jet is cylindrical and $n = 2$. Then, when a part of the jet swells up, n increases. It then approaches 3 when the swollen part is almost a sphere. In Eq.(6), the parameter $\alpha(t)$ represents the relative volume of the ligament part of the jet: $\alpha(t) = V_1(t)/(V_1(t) + V_2(t))$. The knowledge of this parameter may provide a better characterization of the behaviour of the ligaments in the BOAS pattern. In particular, if the evolution of the BOAS is due to a capillary contraction of the string controlled by the viscoelasticity of the solution, the volume $V_1(t) + V_2(t)$ should be constant, the diameter of the string should decrease as Eq. (2) and therefore, the dynamic of the parameter $\alpha(t)$ is expected to be:

$$\alpha(t) \propto \exp\left(-\frac{2t}{3t_r}\right) \quad (7)$$

Therefore the model expressed by Eq. (6) can bring precious information about the analysis of the 3D multi-scale description of the free falling viscoelastic liquid jets.

Results

Figure 4 presents the temporal evolution of $V(t)$, the average volume of liquid delimited by the analysing window, for three jet velocities. ($V(t)$ is divided by $V(t)$ where the initial time t_i corresponds to the top position of the analysing window.) The time is made dimensionless by using the breakup time t_{BU} whose average value has been determined for every jet velocity. We see that $V(t)$ is rather constant during time for each velocity. This shows that 204 images are enough to perform statistical analysis. Note however that for $V_q = 4.5$ m/s and 9.0 m/s, $V(t)$ slightly decreases first before becoming constant. This evolution results from the fact that the assumption of axisymmetry is not fully satisfied at the beginning for these jets that are initially subjected to a slight deformation. This remains insignificant for the subsequent analysis.

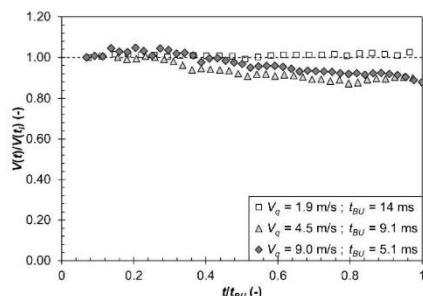


Figure 4. Temporal evolution of the ratio $V(t)/V(t_i)$ as a function of the mean jet velocity V_q (t_{BU} is the breakup time)

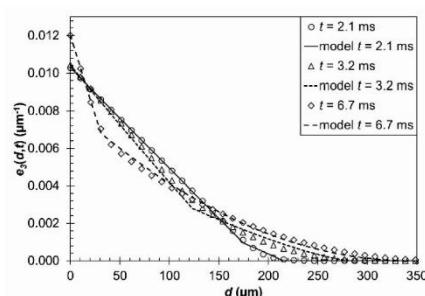


Figure 5. Volume-based scale distribution $e_3(d, t)$ as a function of time ($V_q = 5.7$ m/s, $t_{BU} = 7.2$ ms, dots: measurements; lines: model)

Figure 5 shows an example of the temporal evolution of the volume-based scale distribution $e_3(d, t)$ ($V_q = 5.7$ m/s). At $t = 2.1$ ms, the scale distribution is linear which, according to Eq. (4), signifies that the jet is still a cylinder. As time goes, the scale distribution loses this linearity indicating that the jet experiences a deformation. In the large scale region, we note a continuous increase of the maximum scale d_{max} . This illustrates the presence of a thickening

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

mechanism that is due to the growth of swells along the jet. In the small scale region, the distribution remains linear with the scale and the absolute value of the slope increases with time. These two behaviours reveal the presence of a thinning cylindrical ligament.

As mentioned in the previous section, $e_3(0,t)$ is equivalent to the specific-surface-area of the system, i.e., the interface area per unit volume. The temporal evolution of this quantity appears to be very much dependent on the mean jet velocity. This is illustrated in Fig. 6-a where the product $e_3(0,t)D/2$ is plotted as a function of the ratio t/t_{BU} for several mean jet velocities. At early times, since the jets are cylindrical for every velocity, $e_3(0,t)D/2$ should be equal to 1 (see Eq. (4)). Figure 6-a reports this value for all cases. As time increases, two types of evolution are identified. For the high velocities (5.7 m/s to 9 m/s in Fig. 6-a), $e_3(0,t)D/2$ increases up to a local maximum at around $t/t_{BU} = 0.5$ and then decreases before increasing again when the breakup is approached. The first increase corresponds to the deformation of the cylindrical jet caused by the growth of the swells (as for the Newtonian case [11]) and the subsequent decrease occurs during the evolution of the BOAS pattern. This indicates that the evolution of the BOAS is an interface reduction mechanism. The last increase before the breakup is moderate for 7.0 m/s and 9.0 m/s but is much pronounced for 5.7 m/s.

For the other velocities, the evolution of $e_3(0,t)D/2$ is different: it shows a continuous increase until the breakup is reached. Furthermore, the variations of $e_3(0,t)D/2$ are much higher than for the highest velocities. Such an increase of the specific-surface-area suggests that the system is very much deformed, i.e., it is far less spherical.

This is verified by considering the product $SP = e_3(0,t)d_{max}(t)/2$. SP is a shape parameter. It is equal to 1 for a cylinder (Eq. 4) and to 1.5 for a sphere (Eq. 5). For a system composed of a cylinder of diameter $D_1(t)$ plus a sphere of diameter $d_{max}(t)$ (with $d_{max} > D_1(t)$), the parameter SP is equal to (see Eq. (6)):

$$SP = \alpha(t) \frac{d_{max}(t)}{D_1(t)} + \frac{3}{2} (1 - \alpha(t)) \quad (8)$$

Figure 6-b shows the temporal evolution of the shape parameter SP for the same velocities as in Fig. 6-a. The horizontal dash lines indicate SP for a cylinder and for a sphere. For all velocities, $SP = 1$ at the initial time. Then, the increase of SP until the breakup is approached ($t/t_{BU} = 1$) depends on the mean jet velocity. For the high velocities (5.7 m/s to 9 m/s in Fig. 6-b), we note an inflection of SP when the value 1.5 is exceeded. Then, SP moderately increases until the breakup is reached. (Once again, we note that the jet with $V_q = 5.7$ m/s shows a different behaviour near the breakup with a more pronounced increase than for the two other velocities.) The fact that SP remains close to 1.5 at breakup means that the surface-area of the system is mainly brought by the beads that are close to spheres. In other words, the amount of surface-area brought by the strings is almost negligible. For the low velocities (1.9 m/s to 4.5 m/s in Fig. 6-b), the inflection after $SP = 1.5$ is far less pronounced than for higher velocities and the subsequent increase of SP is far more pronounced. Equation (8) indicates that high values of SP are due to a combination of a high d_{max}/D_1 ratio and a non-negligible parameter $\alpha(t)$. Therefore, contrary to the previous case, the surface-area of the system at breakup is not brought by spherical beads only and the contribution of the string is not negligible anymore.

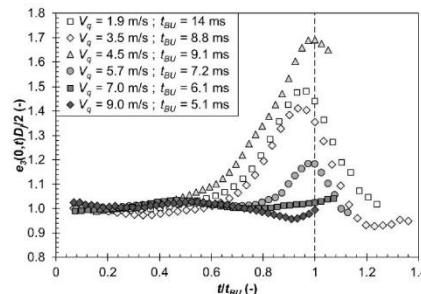


Figure 6-a. Temporal evolution of the specific-surface-area. Influence of the mean jet velocity

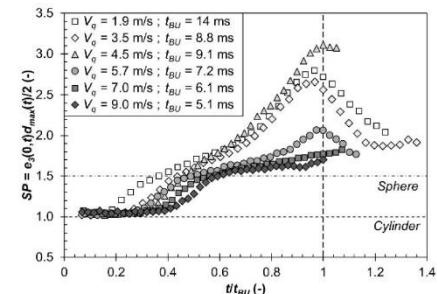


Figure 6-b. Temporal evolution of the shape parameter SP . Influence of the mean jet velocity

As a complement of the results shown in Fig. 6-a and 6-b, Fig. 7 presents the pdf (probability density function) of the maximum scale d_{max} of the drops visible after the breakup. We clearly see in this figure that the pdf of d_{max} depends on the mean jet velocity: it is shifted to larger d_{max} as the velocity decreases. According to Eq. (8) this could contribute to the high values of SP . Furthermore, since at low velocity the beads are larger than at high velocity, they could be also more deformed and could explain the high specific-surface-area reported in Fig. 6.

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

A close examination of the images revealed the presence of a mechanism of coalescence of consecutive swells along the jet. This mechanism is visible for each velocity. It is illustrated in Fig. 8 ($V_q = 1.9$ m/s, several positions). The coalescence mechanism increases the size of the beads and therefore the scale d_{max} . The shift of the d_{max} pdf when V_q decreases reported in Fig. 7 suggests an increase of the number and degree of coalescence events. We believe that the symmetry loss of the pdf in Fig. 7 is an illustration of this point.

The application of the model given by Eq. (6) may help understanding the evolution of SP and identifying the coalescence mechanism. This model represents one unit pattern of the BOAS, i.e., one string plus one bead, the latter being more or less spherical according to the value of the parameter n . If the evolution of this unit pattern is only due to the capillary contraction of the string controlled by the viscoelastic forces, a part of the string volume will transfer in the bead but the volume of the unit pattern will remain constant. Thus, the parameter $\alpha(t)$ will decrease according to Eq. (7). However, if a coalescence event occurs, the volume of the unit pattern increases and the parameter $\alpha(t)$ should decrease more rapidly than in the previous case. Furthermore, the parameter $n(t)$ of the model gives an information on the shape of the beads and should indicate whether they are more or less spherical according to the velocity. Thus, the model given by Eq. (6) is applied in order to examine the variation of the parameters $\alpha(t)$ and $n(t)$.

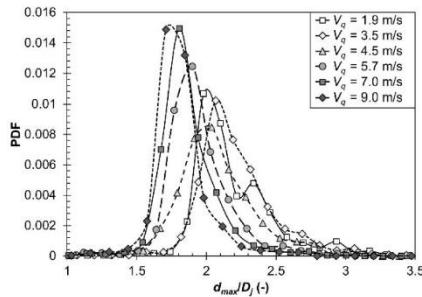


Figure 7. PDF of d_{max}/D_0 of the droplets. Influence of the velocity

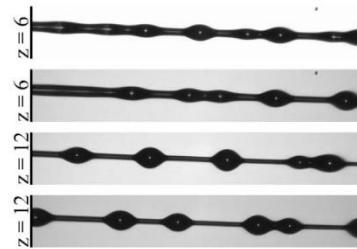
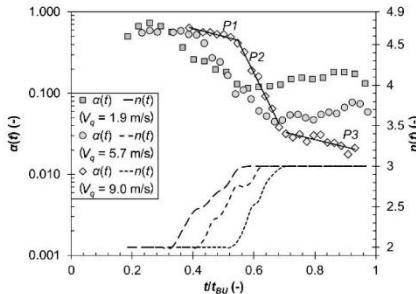


Figure 8. Illustrations of the coalescence mechanism ($V_q = 1.9$ m/s)

The application of the model was performed as follows. Equation (6) is used to express $e_3(0,t)$ and $e_3'(0,t)$. (The prime indicates a derivative in the scale space.) It comes:

$$\begin{cases} e_3(0,t) = \alpha(t) \frac{2}{D_1(t)} + (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)}{D_2(t)} \\ e_3'(0,t) = -\alpha(t) \frac{2}{D_1(t)^2} - (1 - \alpha(t)) \frac{n(t)(n(t) - 1)}{D_2(t)^2} \end{cases} \quad (9)$$

The quantities $e_3(0,t)$ and $e_3'(0,t)$ are given by the experiments. The parameter $D_2(t)$ that represents the maximum scale is taken equal to $d_{max}(t)$. Finally, the parameter $D_1(t)$ is taken equal to the characteristic scale d_4 that is introduced in Fig. 2. The reason for this choice is that this scale allows us to obtain very good fits. The parameters $\alpha(t)$ and $n(t)$ are found by solving the system Eq. (9). At each time we paid attention that $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ and $2 \leq n(t) \leq 3$. The agreement between the model and the experiments is satisfactory as illustrated in Fig. 5.



This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Figure 9. Parameters $\alpha(t)$ and $n(t)$ versus t from the beginning of the elasto-capillary regime to the breakup time. Influence of the velocity. (The symbols correspond to the parameter $\alpha(t)$ and the dashed lines to the parameter $n(t)$)

Figure 9 presents the parameters $\alpha(t)$ and $n(t)$ for three velocity as a function of the ratio t/t_{BU} . For all velocities, the parameter $\alpha(t)$ shows a sharp exponential decrease (P2 in Fig. 9) whose slope depends on the velocity. The characteristic time t_2 of this decrease ($=-t_{BU}/(\text{slope P2})$) are given in Table 1 for each velocity. These times can be compared with $3t_r/2$ also given in Table 1 where t_r is the characteristic time obtained from the analysis of the scale d_1 and shown in Fig. 3 (see previous section). For the high velocities (from 7 m/s to 10 m/s) we see that $t_2 \ll 1.5t_r$. This says that the behaviour P2 is the region where the mechanism of coalescence is the more active. This mechanism is fast and produces strings on which the capillary contraction takes place. For the other velocities (1.9 m/s to 5.7 m/s), t_2 is more of the order of $1.5t_r$. This says that the t_r measured for these velocities is a characteristic time of the coalescence mechanism and not of the extensional relaxation time as expected. The coalescence is slow and produces strings that are not subject to the elasto-capillary regime of contraction. The behaviour P2 is preceded by a P1 behaviour (not found for 1.9 m/s). For high velocities, we see in Table 1 that the corresponding characteristic time t_1 is of the order of $1.5 t_r$. The mechanism found here corresponds to the elasto-capillary regime of contraction. However, for low velocities, $t_1 \gg 1.5t_r$: the string is not in the elasto-capillary regime of contraction.

Table 1. Characteristic times of the linear behaviours in Fig. 9 (all velocities)

V_q (m/s)	$t_r (3t_r/2)$ (ms)	t_1 (ms)	t_2 (ms)	t_3 (ms)
1.9	2.18 (3.27)	-	2.3	-
3.5	1.07 (1.61)	7.14	0.75	-
4.5	0.91 (1.37)	3.86	0.89	-
5.7	0.79 (1.19)	5.65	0.71	-
7.0	0.64 (0.96)	0.88	0.26	29
9.0	0.47 (0.71)	1.40	0.29	2.4
10.	0.43 (0.65)	0.96	0.16	2.4

Finally, after the behaviour P2, two situations occur. For the low velocities, $\alpha(t)$ becomes almost constant: the coalescence has stopped and the volume of the ligament is rather constant. Therefore, the continuous thinning of the ligament reported by the scale d_1 [7] corresponds to an elongation mechanism probably due to gravity effects. For the high velocities, the behaviour P3 is a third exponential decrease whose characteristic time $t_3 \gg 1.5t_r$ (see Table 1). This mechanism is not the elasto-capillary regime of contraction anymore. The temporal evolution of $n(t)$ (Fig. 9) shows that it increases from 2 to 3 during the coalescence mechanism. In other words, for every velocity, $n(t) = 3$ when the coalescence is over saying that the beads are reasonably spherical. Therefore, the high values of the parameter SP reported in Fig. 6-b for the small velocity V_q is due to a non-negligible contribution of the string to this quantity. This is confirmed by the fact that the string at small velocity contain more liquid than at high velocity (see Fig. 9). Images confirm that strings at small velocity are longer than those at high velocity.

Conclusions

This work completes a previous experimental study of the behaviour of free-falling liquid jet of dilute viscoelastic solutions [1]. This study considered the dynamic at small scales that was detected by applying a 2D multi-scale description of the jets and identified an exponential decreasing regime from which the viscoelastic relaxation time of the solution could be measured. The objective of the present complement is to understand why this relaxation time, which is expected to be a constant physical property of the viscoelastic solution, shows a sharp increase at small jet velocities. To achieve this, the 2D multi-scale description is extended to a 3D multi-scale one. This extension is possible because the capillary instability that develops on a cylindrical liquid jet is an axisymmetric mechanism. This characteristic has been validated here despite a slight initial deformation of the jets mainly observed at high velocity. Among other results, the 3D analysis reports the temporal evolution of the specific-surface-area (interface area per unit volume) of the jet and highlights a deep variation of this evolution when the jet velocity decreases. This evolution is found to be accompanied by an increasing deviation from sphericity of the system. On the other hand, a mechanism of swell-coalescence, whose intensity increases for small velocities, has been identified. The interpretation of these results has been conducted from the application of a simple model of the jet deformation, i.e., of the 3D scale distribution. The model demonstrates that the dynamic of coalescence is very much velocity dependent and that, at low velocity, this mechanism prevents the elasto-capillary contraction at

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ILASS – Europe 2017, 6-8 Sep. 2017, Valencia, Spain

small scales from occurring. Furthermore, at low velocity it is found that after the coalescence mechanism, a pure elongation mechanism takes place at small scales that conserves the volume of the strings. In conclusion, the volume of the strings when the breakup is approached is much higher at low velocity explaining the corresponding high values of the specific-surface-area for these cases. These conclusions constitute another demonstration of the practical interest of the multi-scale description and analysis for free liquid flows. The next step for this work is to investigate the coalescence mechanism on free-falling jets of dilute polymer solutions in order to control it when the viscoelastic relaxation time wants to be measured.

Acknowledgments

The authors acknowledge the financial support from the French National Research Agency (ANR) through the program Investissement d'Avenir (ANR-10 LABX-09-01), LABEX EMC3.

References

- [1] Tirel, C., Renoult, M.C., Dumouchel, C., Lisiecki, D., Crumeyrolle, O., Mutabazi, I., (2017) Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics (under revision).
- [2] Goldin M., Yerushalmi J., Pfeffer R., Shinnar R., (1969) Journal of Fluid Mechanics, 38, pp. 689-711.
- [3] M. Stelter, G. Brenn, A.L. Yarin, R.P. Singh, F. Durst, (2000) Journal of Rheology, 44, pp. 595-616.
- [4] Keshavarz, B., Sharma, V., Houze, E. C., Koerner, M. R., Moore, J. R., Cotts, P. M., Threlfall Holmes, P., McKinley, G. H., (2015) Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 222, pp. 171-189.
- [5] Christanti, Y., Walker, L.M., (2001) Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 100(1), pp. 9–26.
- [6] Schüümer, P., Tebel, K.H., (1982) Journal of Rheology, 26(1), pp. 77-78.
- [7] Schüümer, P., Tebel, K.H., (1982) Rheologica Acta, 21(4-5), pp. 514-516.
- [8] Schüümer, P., Tebel, K.H., (1983) Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 12(3), pp. 331-347.
- [9] Dumouchel, C., Grout, S., (2009) International Journal of Multiphase Flow 35, pp. 952-962.
- [10] Dumouchel, C., Aniszewski, W., Ménard, T., Vu, T.T, August 23-27. 2015, 13th ICCLASS Conference, Tainan (Taiwan).
- [11] Dumouchel, C., Aniszewski, W., Vu, T.T, Ménard, T., (2017) International Journal of Multiphase Flow, 92, pp. 181-192.
- [12] Bérubé, J., Jébrak, M., (1999) Comput. Geoscie. 25, pp. 1059-1071.
- [13] Dumouchel, C., (2017) ASME – FEDSM, Fluids Engineering Summer Conference, FEDSM2017-69590
- [14] Evers, L.W., SAE Technical Series (1994) Paper n°940190.

This work is licensed under a [Creative Commons 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Viscoelastic ligament dynamics in free liquid jet experiments

C. Tirel¹, M. C. Renoult¹, C. Dumouchel¹

¹CORIA, Normandie Université, Université et INSA de Rouen, CNRS, France

Abstract

The widely-used experimental methods to determine the relaxation time of viscoelastic solutions are based on ligament thinning measurements. The CaBER (Capillary Breakup Extensional Rheometer) produces a stretched liquid filament between two plates and deduces the solution relaxation time from its diameter temporal decrease. However this technique does not suit dilute polymer solutions for which the jet rheometer such as the ROJER (Rayleigh Ohnesorge Jetting Extensional Rheometer) is seen as a promising alternative. The measurement principle consists in analyzing the temporal evolution of the neck diameter of a liquid jet experiencing a capillary instability. However, this technique is known to be difficult to implement and has revealed a dependence between the measured relaxation time and the operating conditions involving the jet velocity, the perturbation frequency and initial amplitude.

In the present work an experimental protocol is reported to extract the relaxation time of a dilute polymer solution from its jet behavior. The main features are the use of free liquid jets which simplifies the control of the operating conditions and of a multi-scale analyzing tool which simplifies the measurement to be performed on the jets. Twenty one experiments with various jet diameters and velocities were performed. The results explain why the relaxation time measurement cannot be performed on any jets and allow elaborating a precise procedure for a confident measurement of the relaxation time.

Keywords: dilute polymer solution, ligament behavior, jet break-up

Introduction

Viscoelastic liquids have specific shear thinning and strain-hardening properties that confer on them characteristic behaviors while atomizing. For instance, laminar viscoelastic liquid jets break up with formation of beads-on-strings structures composed of large spherical beads and thin cylindrical threads. These threads might be the seat of an elongational flow where capillary and elastic forces are in balance, the first being the driving force, the second the resistive one, that leads to a specific decrease of their diameter with time. This decrease is controlled by the stress relaxation time scale t_r of the viscoelastic solution. The knowledge of this time scale is therefore of paramount importance in the context of atomization but its experimental determination remains challenging especially for very dilute polymer solutions.

The Capillary Breakup Extensional Rheometer (CaBER) performs this measurement by detecting and analyzing the elasto-capillary thinning of a filament formed by stretching a liquid bridge between two coaxial cylindrical plates. For dilute polymer solutions, Rodd and al. [1] have shown that the CaBER have limitations: there is a lower shear viscosity limit and a lower relaxation time limit for which the relaxation time measurement is not possible due to the fast thinning of the filament and the lack of resolution of the device. Moreover, liquid shape oscillations are introduced due to the fast transition of the plates from their initial positions to their final configurations for which the liquid bridge is unstable and thins down [2]. These oscillations persist for multiples of the capillary time and corrupt the CaBER measurement if the breakup occurs before they vanish. These limitations have been overcome in part with the use of the Slow Retraction Method and the use of a high speed camera, but there is a progressive appearance of beads-on-strings structures at the final steps of the filament thinning resulting from an iterated elastic instability [3].

Another technic based on jet experiments have been developed [4-8]. For dilute polymer solutions, the jet rheometer is seen as a promising alternative to the liquid filament rheometer [7]. Up so far, the jet rheometer considers the behavior of a cylindrical liquid jet forced at a given perturbation amplitude and frequency [4-6, 8]. However, this technic remains tricky in particular because the resulting relaxation time might report a dependence on the jet operating conditions, i.e. the jet velocity and the initial disturbance amplitude and frequency [6]. Recently, new results suggest however the existence of an operating domain free of these dependences [8].

The present work intends to shed more light on the use of liquid jet capillary instability as a support to perform relaxation time measurement. Two characteristic features distinguish the present approach: 1 – the use of free liquid jets; 2 – the application of a multi-scale tool for analyzing the jets.

ICLASS 2018, 14th Triennial International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, Chicago, IL, USA, July 22-26, 2018

During the capillary instability of a viscoelastic cylindrical jet, the neck diameter $D_{min}(t)$ is expected to decrease according to three regimes that are presented in Table 1. The first regime is the Plateau-Rayleigh (PR) instability during which a sinusoidal perturbation develops and $D_{min}(t)$ decreases according to Eq. (1) where D_{jet} is the jet diameter, ω the non-dimensional growth rate and t_σ the capillary time ($= (\rho D_{jet}^3 / \sigma)^{1/2}$ ρ being the liquid density and σ the surface tension) [9]. The second regime is the Elasto-Capillary (EC) regime during which elastic and capillary forces balance in the liquid strings whose diameter $D_{min}(t)$ exhibits an exponential decrease as reported by Eq. (2). The third regime is the Visco-Capillary (VC) regime during which elongational viscous and capillary forces balance in the liquid string. This mechanism is associated with a linear decrease of the neck diameter $D_{min}(t)$ (see Eq. (3) where t_{BU} designates the jet breakup time and μ_e the terminal elongational viscosity. This presentation shows that the measurement of the relaxation time t_r is possible provided that 1 – the EC regime exists; 2 – the temporal resolution is high enough to provide a exploitable $D_{min}(t)$ in this regime.

Regime 1: Plateau-Rayleigh (PR)	Regime 2: Elasto-Capillary (EC)	Regime 3: Visco-Capillary (VC)
$D_{jet} - D_{min}(t) \propto \exp\left(\omega \frac{t}{t_\sigma}\right)$ (1)	$D_{min}(t) \propto \exp\left(-\frac{t}{3t_r}\right)$ (2)	$D_{min}(t) \propto \frac{\sigma}{\mu_e} (t_{BU} - t)$ (3)

Table 1 Successive regimes of a viscoelastic jet capillary instability

Based on the behaviors summarized in Table 1, previous jet rheometers rested on the measurement of $D_{min}(t)$ which required the determination of its location. The present work uses a different approach through the application of a multi-scale analysis as introduced in previous papers [10,11]. This analysis describes the jet as a time-dependent scale distribution $e_2(d,t)$ and the analysis consists in considering the behavior of a small scale whose dynamics is the same as the diameter $D_{min}(t)$. The analysis of this dynamics allows identifying the existence of the EC regime and, then, measuring the solution relaxation time.

Compared to the previous works [10,11], the optical arrangement in the present work has been modified in order to improve the spatial resolution. It is indeed of paramount importance to have, at each time, enough scales (that is enough pixels) to correctly describe the ligaments that are the structures of interest in this study. Furthermore, by assuming the axisymmetry of the jets, the multi-scale analysis is performed in 3D which returns the temporal evolution of the specific area (amount of surface area per unit volume) of the jet. Finally, new injection conditions are considered here. More precisely, three discharge orifices with different diameters have been used.

This article is structured as followed. The experimental setup and optical imaging arrangement are presented in the next section. It is followed by a section dedicated to the analyzing tools (image analysis and multi-scale analysis). Then, the results are presented and discussed. The article ends with a conclusion section.

Experimental setup

The experimental setup produces free falling cylindrical jets. The injector is composed of a cylindrical body (5 mm internal diameter) ended with a cylindrical discharge orifice of length $L_{or} = 300 \mu\text{m}$. Three different discharge orifice diameters are available, i.e., $D_{or} = 200 \mu\text{m}$, $105 \mu\text{m}$ and $42 \mu\text{m}$. The injector is fed by a syringe pump that imposes the injection flow rate. The volume liquid flow rate Q_v is varied for each nozzle diameter in the same Reynolds number range, i.e., $Re = 4\rho Q_v / \pi D_{or} \mu \in [110; 715]$ where μ is the solution shear viscosity. (For each nozzle, seven flow rates are explored.) To visualize the total length of the jets, i.e., from the nozzle exit down to the breakup point, a 3D displacement system is used to translate the injector.

The low-viscosity viscoelastic polymer solution used contains 5 ppm of Poly(ethylene oxide) (PEO) dissolved into an aqueous mixture with 5% in mass of isopropyl alcohol (density $\rho = 989 \text{ kg/m}^3$; shear viscosity $\mu = 1.34 \text{ mPa.s}$; surface tension $\sigma = 48.9 \text{ mN/m}$). The average molar mass of the PEO is $M_v = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/mol}$.

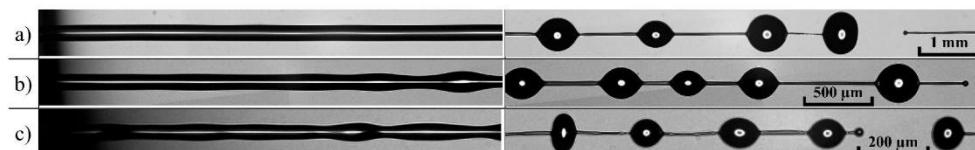


Figure 1 Viscoelastic jets at the nozzle exit and in the breakup region. a) $D_{or} = 200 \mu\text{m}$, $Q_v = 5.5 \text{ ml/min}$; b) $D_{or} = 105 \mu\text{m}$, $Q_v = 2.72 \text{ ml/min}$; c) $D_{or} = 42 \mu\text{m}$, $Q_v = 1.54 \text{ ml/min}$

Transmission images of the jets are performed. In order to get a high spatial resolution, a 29 Mpixels camera (6576 x 4384 pixels, SVS-Vistek HR29050) is used. The spatial resolution has been settled to $1.26 \mu\text{m/pixel}$ for the

200 μm discharge orifice and to 0.56 $\mu\text{m}/\text{pixel}$ for the 105 and 42 μm discharge orifices. The choice of these resolutions results from a compromise between the number of pixels in the jets and the depth of field of the optical arrangement. The physical field covered by the image is 8.29 mm x 5.52 mm and 3.68 mm x 2.46 mm according to the spatial resolution. For each operating condition (orifice diameter, flow rate, position) $n = 150$ uncorrelated images are recorded. This number is high enough for a statistical analysis as detailed in the analysis section. Figure 1 presents typical images of the jets at the nozzle exit and in the breakup region for each orifice diameter. In the near nozzle region, the white line in the middle of the jets attests that the flows are laminar and axisymmetric. The appearance of the naturally-selected sinusoidal perturbation downstream from the nozzle is always clearly visible as well as the ligaments of the beads-on-strings pattern down to the breakup region.

Analysis

Viscoelastic flows issuing from a cylindrical orifice might be larger or smaller than the orifice diameter according to the characteristics of the internal flow. This is the reason why it is decided to characterize the jets with a proper measurement of their diameter D_{jet} and of their subsequent velocity V_{jet} . For each injection flow rate, D_{jet} is deduced from the jet projected surface area S_{jet} averaged on the 150 images and measured along a distance $z_{jet} = 3 \text{ mm}$ where the jet is not deformed, i.e., $D_{jet} = S_{jet}/z_{jet}$. The corresponding velocity is obtained by: $V_{jet} = 4Q_v/\pi D_{jet}^2$. Furthermore, the wavelength λ_{jet} of the naturally-selected mode identified in Fig. 1 is measured and averaged on 50 images for each operating condition. All these measurements are reported in Table 2.

n°	Q_v (ml/min)	D_{jet} (μm)	V_{jet} (m/s)	t_{BU} (ms)	t_σ (ms)	λ_{jet} (μm)	ω (-)
$D_{or} = 200 \mu\text{m}$							
1.1	3.56	195	1.99	11.1	0.137	978	0.336
1.2	5.50	190	3.23	9.98	0.132	951	0.336
1.3	7.96	185	4.94	7.62	0.127	975	0.330
1.4	10.3	184	6.46	6.45	0.126	842	0.342
1.5	12.2	200	6.49	6.88	0.142	975	0.339
1.6	14.2	187	8.61	6.56	0.129	938	0.336
1.7	17.3	190	10.2	5.02	0.132	911	0.340
$D_{or} = 105 \mu\text{m}$							
2.1	1.75	125	2.37	6.03	0.070	578	0.342
2.2	2.72	121	3.94	3.91	0.067	587	0.340
2.3	3.93	117	6.09	3.21	0.064	569	0.337
2.4	5.08	114	8.29	2.53	0.061	522	0.335
2.5	7.02	112	11.9	2.06	0.060	506	0.333
2.6	8.72	112	14.8	1.84	0.060	484	0.337
2.7	10.2	112	17.3	1.73	0.060	480	0.340
$D_{or} = 42 \mu\text{m}$							
3.1	1.09	46.0	10.9	0.571	0.016	-	-
3.2	1.54	47.0	14.8	0.534	0.016	199	0.339
3.3	1.75	47.0	16.8	0.518	0.016	198	0.338
3.4	2.12	46.0	21.3	0.486	0.016	195	0.339
3.5	2.36	47.0	22.7	0.457	0.016	187	0.328
3.6	2.54	46.5	24.9	0.523	0.016	199	0.340
3.7	2.72	46.5	26.7	0.506	0.016	202	0.341

Table 2 Characteristics of the jets for all operating conditions
(For case n° 3.1, the wavelength measurement was not possible)

As mentioned in the introduction, a 3D multi-scale tool is used to analyze the temporal evolution of the jets. This tool has been introduced in detail in previous articles [11, 12] and is summarized here only. It provides the scale distribution $e_3(d, z)$ which is the ratio of the surface area of the local system eroded at scale d on twice the total volume of this system before any erosion operation. This distribution is measured for all possible values of the scale d (i.e., until the jet has totally disappeared by erosion) and at several locations z from the nozzle exit to the breakup region. Although images provide a 2D information, the 3D scale distribution is deduced by assuming the axisymmetry of the liquid jet at every stages. The capillary instability is known to be axisymmetric enough for this assumption to be acceptable. (This is confirmed by the images in Fig. 1.)

The steps of the scale distribution measurement are illustrated in Fig. 2. The initial image (Fig. 2-a) is treated in order to produce a two-level image (Fig. 2-b) where the liquid appears in black on a white background. Then, the

Euclidian Distance Map of the jet is performed (Fig. 2-c). The volume-based scale distribution function is calculated in a portion of the jet delimited by an Analyzing Window (Fig.2-d).

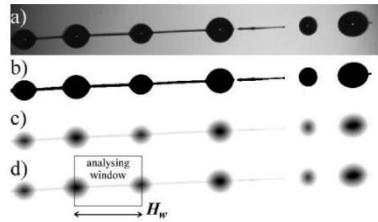


Figure 2 Steps of scale distribution measurement a) Raw image; b) Two-level image; c) Euclidian Distance Map; d) Analyzing Window where the local scale distribution is measured

The spatial evolution of the volume-based scale distribution is obtained by sliding the Analyzing Window from the nozzle exit down to the breakup region. The height H_w of the analyzing window is taken of the order of the naturally-selected perturbation wavelength. This choice is a good compromise between localness and number of images required to have a converged average scale distribution. Indeed, the local measurement of the scale distribution is performed on each image of the series and a local average distribution is calculated. If $e_3(d,z)$ represents the measurement performed on image i , the average scale distribution at this location is defined by:

$$e_3(d,z) = \frac{\sum_{i=1}^n V_i(z) e_{3i}(d,z)}{\sum_{i=1}^n V_i(z)} \quad (4)$$

where $V_i(z)$ is the jet portion volume in the Analyzing Window in image i . Then, the scale distribution spatial dependence is transformed as a temporal dependence by using the equivalent time t defined by:

$$t = \frac{\sqrt{V_{jet}^2 + 2gz} - V_{jet}}{g} \quad (5)$$

where g is the gravitational acceleration. When $V_{jet}^2 \gg 2gz$ (Froude number $\gg 1$), Eq. (5) simplifies as $t = z/V_{jet}$. The temporal resolution of the scale distribution measurement is depending on the shift of the Analyzing Window. For most operating conditions, using a shift equal to H_w appeared acceptable. However, when a greater temporal resolution is required (such as for injector $D_{or} = 200 \mu\text{m}$ with small injection velocities) it was divided by 2, returning twice more points.

The convergence of the mean scale distribution measurement, as a function of the image number, is studied through the value of $e_3(d=0,t)$, which is the maximum value of e_3 by definition. The variation of the average of $e_3(0,t)$ is always less than 4% when $n = 150$ images (this result was established for condition 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 and for at least three different positions for every case). $n = 150$ is therefore a sufficient number of images.

It is important to mention that the scale distribution measured as explained above describes the mean arrangement of the liquid system. This mean arrangement is called the unit pattern of the jet. If the jet is exactly cylindrical, the unit pattern is a portion of this cylinder whatever its length ($e_3(d)$ is independent of cylinder's length). As shown in previous works ([13] for instance) $e_3(d)$ is linear in this case and decreases from $2/D_c$ at $d = 0$ to 0 at $d = d_{\max} = D_c$ where D_c stands for the cylinder diameter. If the cylindrical jet is deformed by a sinusoidal perturbation of wavelength λ , the unit pattern is a portion of the jet of length λ . Finally, if the jet is a succession of beads connected by cylindrical ligaments, the unit pattern is made of one bead whose diameter is equal to the mean diameter of the beads seen at this location and one ligament whose diameter is equal to the mean diameter of the ligaments seen at this location. Furthermore, the bead-ligament volume ratio of the unit pattern corresponds to the mean bead-ligament volume ratio seen at this location.

An example of the temporal evolution of the scale distribution is given in Fig. 3 (Case n°1.6, refer to Table 2). At the initial time ($t = 2.9 \text{ ms}$) $e_3(d,t)$ is linear indicating that the initial jet is cylindrical. This, of course, corresponds to the observation. As time goes, the maximum scale d_{\max} (smallest scale for which $e_3(d,t) = 0$) increases in agreement with the growth of the sinusoidal perturbation in Regime 1 (see Table 1) and the behavior of the beads in Regimes 2 and 3. For the great times, note that the scale distribution remains linear in the small region. This behavior denotes the persistence of a cylindrical portion in the unit pattern which, of course, corresponds to the

string of the beads-on-strings structure. Two points are interesting to mention here: 1 – the derivative of the linear portion decreases with time which reveals the decrease of the ligament diameter (this is precisely this dynamic that we are interested in), 2 – $e_3(0,t)$ decreases with time. This second behavior is better shown in Fig. 4 for three cases (1.6; 2.6; 3.4). As mentioned earlier, $e_3(0,t)$ is half of the specific surface area (i.e. interface surface area per unit volume [14]). As expected for a capillary instability this quantity decreases with time. This behavior is reported for every case investigated in this work. (The oscillations of $e_3(0,t)$ sometimes observed at the beginning, such as for case n°1.6 in Fig. 4, are likely related to the presence of a static deformation.)

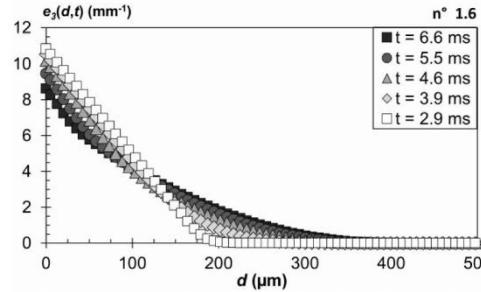


Figure 3 Temporal evolution of $e_3(d,t)$ (Case n° 1.6)

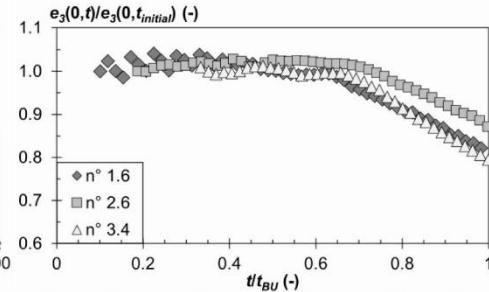


Figure 4 Temporal evolution of the specific surface $e_3(0,t)/e_3(0,t_{initial})$ (-) (Cases n° 1.6 ; 2.6 ; 3.4, the breakup times t_{BU} are given in Table 2)

Now, the analysis consists in identifying scales whose dynamics is the same as the one of the unit pattern ligaments that are the seat of an elongational flow. Using the quasi one-dimensional continuity equation provided by Stelter et al. [15], the stretching rate $\dot{\varepsilon}$ of such a flow is equal to:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-2}{D_c(t)} \frac{dD_c(t)}{dt} \quad (6)$$

where D_c is the diameter of the cylindrical ligament and v the longitudinal velocity along the z axis. It is straight forward to demonstrate that for an isolated cylinder, the stretching rate given by Eq. (6) is related to the scale distribution by [13]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{e}_3'(d,t)}{e_3'(d,t)} \quad (7)$$

where the prime indicates a scale derivative and the dot a temporal derivative. Since the scale distribution is linear in the scale space for a cylinder, the stretching rate characterizing its elongation is independent of the scale d also.

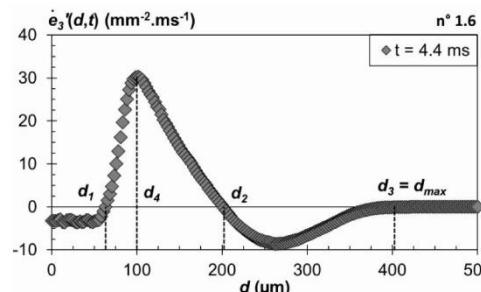


Figure 5 Temporal evolution of $e_3'(d,t)$ (Case 1.6). Definition of characteristic scales

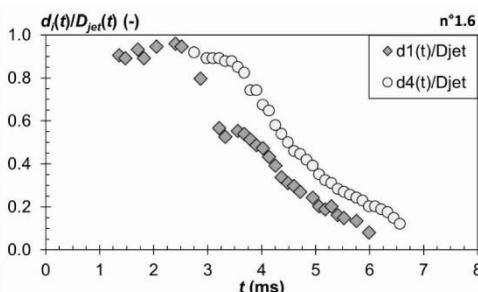


Figure 6 Temporal evolution the scales d_1 and d_4 (Case 1.6)

For case 1.6, Fig. 5 shows the function $e_3'(d,t)$ at time $t = 4.4$ ms for which the jet is rearranged as beads-on-strings. This figure reveals that $e_3'(d,t)$ is scale-independent in the small scale region, i.e., the ligament thinning is identifiable with the scale distribution temporal evolution. Furthermore, the dynamics of this flow is the same

as the dynamics of the scale d_1 defined in Fig. 5 because of the scale proximity. Therefore, as done in previous works [10-13], the temporal evolution of the necks of the jet can be explored from $d_1(t)$. However, in the present situation, an accurate determination of the scale d_1 would require a spatial resolution that is difficult to achieve when imaging the full jet. The present optical arrangement provides $d_1(t)$ measurements with non-negligible scatter (see Fig. 6 for instance) that is pejorative for the analysis. This is the reason why it is decided to consider the scale d_4 (see Fig. 5 for the definition) that is less sensitive to spatial resolution and whose dynamics remains the same as the scale d_1 as evidenced in Fig. 6.

Results and Discussion

For six cases among the 21 that constitute the experimental part of this work (see Table 2), Fig 7 presents the temporal evolution of the characteristic scale $d_4(t)$ in two different manners: $(d_4(t)/D_{jet})$ and $(1 - d_4(t)/D_{jet})$. As expected, the ratio $d_4(t)/D_{jet}$ highlights a monotonous decrease of the scale d_4 . For every operating condition, the curves in Fig. 7 are used to identify the Regime 1 (PR) and the Regime 3 (VC) introduced in Table 1.

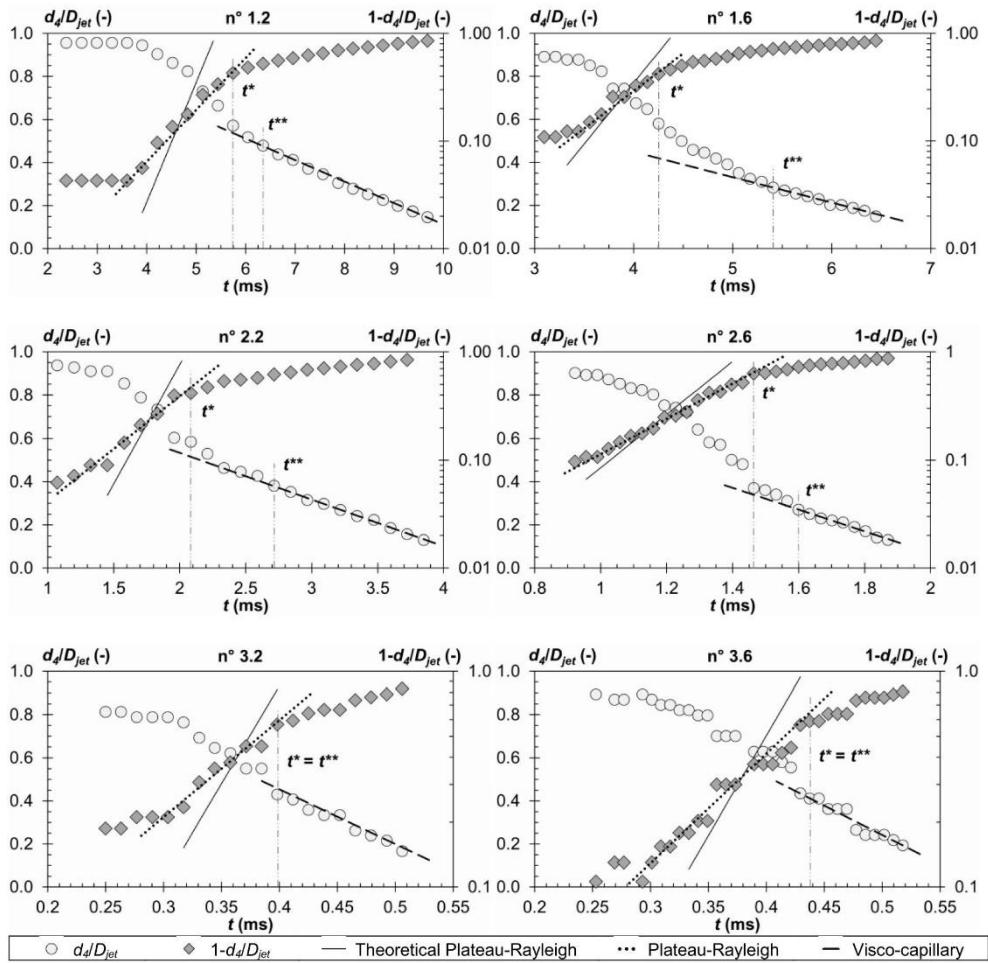


Figure 7 Temporal evolution of scale d_4 . Identification of Regime 1 (PR) and Regime 3 (VC)
(Cases n° 1.2; 1.6; 2.2; 2.6; 3.2; 3.6)

According to Eq. (1), Regime 1 is associated with a linear increase of the function $(1 - d_4(t)/D_{jet})$ in a semi-log representation. Furthermore, being exponential (see Eq. (1)), this increase is expected to be the steepest one. This behavior is seen for every situation as evidenced by the dot lines in Fig. 7. To demonstrate that this linear increase corresponds to the PR regime, the theoretical increase expressed by Eq. (1) is calculated, ω being the non-

dimensional growth reported by Rayleigh linear theory [1] for the sinusoidal perturbation of wavelength λ . (The values of ω are given in Table 2.) The continuous lines in Fig. 7 indicate the PR theoretical results. The experimental and theoretical growth rates are of the same order of magnitude which confirms that the identified linear portion does correspond to regime 1. (The results also exhibit a systematic smaller experimental growth rate compared to the theoretical one. It is interesting to mention that this very difference was reported by the analysis of simulated capillary instability of Newtonian ligaments [12].) The time t^* at which regime 1 ends is identified as the time at which the linear behavior is lost (see Fig. 7).

According to Eq. (3), Regime 3 is associated with a linear decrease of the ratio $(d_4(t)/D_{jet})$ in a linear representation. Furthermore, this regime is the last one and should extend to the final breakup. The results presented in Fig. 7 show this behavior in every situation as indicated by the dash lines. The extension of this line allows identifying the time t^{**} from which Regime 3 starts. (The time t^{**} is shown in Fig. 7.)

The determination of the characteristic times t^* and t^{**} is performed for every operating condition and the results are displayed in Fig. 8. Following Table 1, Regime 2 – i.e. the one of interest in the present work – may extend in the interval $[t^*; t^{**}]$ at best. Figure 8 shows that the range of this interval is very much dependent on the working conditions. For the small orifice diameter ($D_{or} = 42 \mu\text{m}$), the range of $[t^*; t^{**}]$ is nil whatever the velocity indicating the absence of an EC regime for these jets. For the medium orifice diameter ($D_{or} = 105 \mu\text{m}$), the range of $[t^*; t^{**}]$ remains pretty small (especially at high velocity) and might not allow the development of the EC regime. For the large orifice diameter ($D_{or} = 200 \mu\text{m}$), the range of $[t^*; t^{**}]$ appears small for the two smallest and the highest velocities. However, for the four medium velocities (cases n° 1.3, 1.4, 1.5, 1.6), the range of $[t^*; t^{**}]$ might be large enough to allow the development of the EC regime and, subsequently, the measurement of the relaxation time t_r .

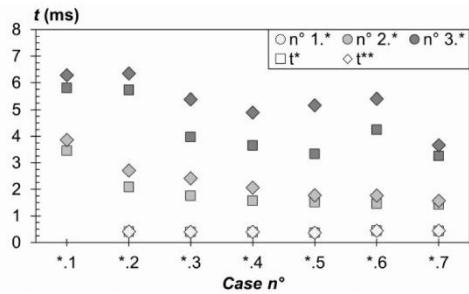


Figure 8 Characteristic times t^* and t^{**} for every working condition

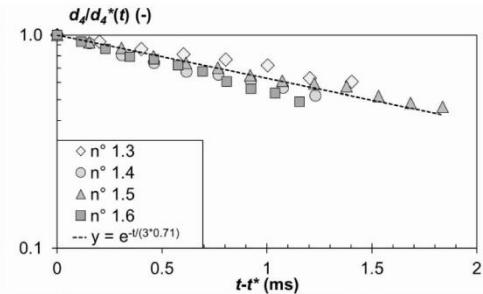


Figure 9 Evolution of $d_4(t)$ in the EC regime (Cases n° 1.3, 1.4, 1.5, 1.6)

According to Eq. (2), the measurement of the relaxation time can be performed by considering the evolution of the scale $d_4(t)$ as a function of time in a semi-log representation. In order to compare the cases with each other, the ratio $d_4(t)/d_4(t^*)$ versus $(t - t^*)$ is plotted in the interval $[t^*; t^{**}]$ for the cases n° 1.3, 1.4, 1.5, 1.6. Figure 9 shows the results. Three important points must be mentioned. First, the four cases report a linear behavior in this representation which validates the dependence expressed by Eq. (2) and gives credit to the existence of the EC regime. Second, for every case, the number of points is sufficient to determine a slope with no ambiguity. Third, the slopes of the four cases are very close to each other. This means that the detected EC regime is not depending on the injection conditions and that the characteristic time that can be extracted from it is the relaxation time of the dilute polymer solution. For the present dilute solution, this relaxation time is $t_r = 0.71 \text{ ms}$.

Finally, Fig. 10 shows the ratio $(t^{**} - t^*)/t_r$ for every case. It can be seen that the cases reporting an EC regime are those for which the available temporal range $[t^*; t^{**}]$ is at least 1.5 time the relaxation time t_r . If it is less, this regime has no time to settle properly and to provide a possibility of measurement. On the other hand, we see that the jets whose breakup time are less than the relaxation time, no EC regime can be identified. This is the case of the smallest orifice diameter jets at every velocity for which the breakup time never exceeds 0.5 ms.

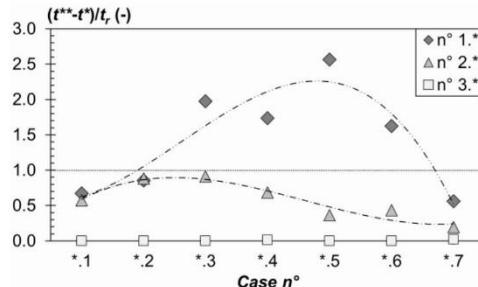


Figure 10 Comparison of the $[t^*; t^{**}]$ range with the solution relaxation time t_r

Conclusion

The present experimental work and subsequent analysis demonstrate that a pure elongational flow is not guaranty in the strings of a beads-on-strings pattern formed during the breakup of free cylindrical-dilute-polymer-solution jets. One of the reason is that the successive regimes of small-scale dynamics exhibit short durations that sometimes are of the same order of magnitude as the characteristic time we want to measure or even less. Thus, the elongational flow has no time to properly settle and the corresponding elongational regime is unidentifiable. All this act as a brake upon the determination of dilute-polymer-solution relaxation time from the behavior of low-velocity cylindrical jets.

These results might explain some dependences between the relaxation time t_r and the injection conditions reported in the literature. Indeed, the regimes of the small-scale dynamics are recognized by their expected temporal variation. However, their small duration associated with small variations of the scale of interest might generate confusion between the tracked mathematical behaviors. In a previous work [11], we suggested a possible link between a bead coalescence mechanism along the jet and the dependence between t_r and the operating conditions. The simulation work due to Li and Fontelos [16] demonstrates that the coalescence mechanism doesn't modify the liquid strings' dynamics. Therefore, this mechanism is not responsible for the hypothetic presence of an EC regime. This, of course, doesn't exclude the fact that the absence of such a regime modifies the coalescence mechanism.

A confident measurement of the dilute-polymer-solution relaxation time from a jet experiment is possible. This is what this work demonstrates. It is not clear yet which association of diameter and velocity should be recommended to perform this measurement, but the experimental work presented here might define the bases of a protocol to perform it with no ambiguity. The two important aspects of this protocol are 1 – the use of free liquid jets (meaning that it can be applied on any ligamentary structures whatever their production process); 2 – the use of a multi-scale description tool that straight-forwardly applies in any conditions.

References

- [1] Rodd, L.E., Scott, T.P., Cooper-White, J.J., & McKinley, G.H. *Applied Rheology* 15: 12-27 (2005)
- [2] Campo-Deño, L., Clasen, C., *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 165: 1688-1699 (2010)
- [3] Oliviera, M.S.N., McKinley, G.H., *Physic of Fluids* 17: 071704 (2005)
- [4] Schüümmer, P., Tebel, K.H., *Journal of Rheology* 26: 77-78 (1982)
- [5] Schüümmer, P., Tebel, K.H., *Rheologica Acta* 21: 514-516 (1982)
- [6] Schüümmer, P., Tebel, K.H., *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 12: 331-347 (1983)
- [7] Bazilevsky, A.V., Entov, V.M., Rozhkov, A.N., Yarin, A.L., *Third European Rheology Conference and Golden Jubilee Meeting of the British Society of Rheology*, Springer, Dordrecht: 44-46 (1990)
- [8] Keshavarz, B., Sharma, V., Houze, E.C., Koerner, M.R., Moore, J.R., Cotts, P.M., Threlfall Holmes, P., McKinley, G.H., *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 222: 171-189 (2015)
- [9] L. Rayleigh, *Proceedings of the London mathematical* 10: 4-13 (1879)
- [10] Tirel, C., Renoult, M.C., Dumouchel, C., Lisiecki, D., Crumeyrolle, O., Mutabazi, I., *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 245: 1-10 (2017)
- [11] Tirel, C., Renoult, M.C., Dumouchel, C., Blaisot, J.B., *Illass Europe 28th european conference on liquid atomization and spray systems*, Valencia (2017)
- [12] Dumouchel, C., Aniszewski, W., Vu, T.T., Ménard, T., *International Journal of Multiphase Flow* 92: 181-192 (2017)
- [13] Dumouchel, C., *ASME 2017 Fluids Engineering Division Summer Meeting*: FEDSM2017-69590 (2017)
- [14] Evers, L.W., *SAE Technical Series* 940190 (1994)
- [15] Stelter, M., Brenn, G., Yarin, A.L., Singh, R.P., Durst, F., *Journal of Rheology* 44: 595-616 (2000)
- [16] Li, J., Fontelos, M.A., *Physics of Fluids* 15: 922-937 (2003)

Résumé :

Ce travail traite de l'atomisation des structures ligamentaires. Cette étude est focalisée sur les ligaments produits par des jets libres de solutions viscoélastiques diluées. La description multi-échelles est utilisée pour étudier les dynamiques d'amincissement de ces ligaments. La description multi-échelles d'un système liquide est initialement présentée : elle décrit le système à travers sa distribution d'échelles. Cette description est appliquée à des ensembles théoriques ainsi qu'à des systèmes modélisant les ligaments étudiés, améliorant la compréhension de cet outil de description.

De nouvelles méthodes sont utilisées pour mesurer les distributions d'échelles : méthode de segmentation d'images sub-pixels et méthode de Monte-Carlo. Leur combinaison apporte une amélioration notable aux petites échelles et permettent une mesure des distributions d'échelles 3D. Ce résultat incite à revisiter les études antérieures où la description multi-échelles a été utilisée.

A notre connaissance, c'est la première fois qu'une étude sur les jets libres de solutions viscoélastiques diluées est réalisée de manière statistique. L'influence de trois paramètres est étudiée : la concentration en polymère de la solution, les dimensions de la buse d'injection et le débit d'injection. Basé sur les résultats donnés par la description multi-échelles, un protocole d'identification des régimes d'amincissement des ligaments est présenté. Les caractéristiques de ces régimes sont mesurées, en particulier le temps de relaxation de la solution. Les temps mesurés sont compris entre 24 μ s et 6,3 ms, ce qui est en accord avec les temps de relaxation mesurés dans la littérature pour les jets. L'approche multi-échelles confirme ici sa pertinence pour l'étude des processus d'atomisation.

Les temps de relaxation mesurés présentent une forte corrélation vis-à-vis du taux de déformation subit par la solution durant l'injection. Ce résultat indique que la solution a subi une dégradation mécanique. Il convient de tenir compte de l'étape d'injection lorsque l'on souhaite atomiser de telles solutions viscoélastiques diluées.

Mots clefs : atomisation, structure ligamentaire, solution viscoélastique diluée, jet libre, analyse multi-échelles, segmentation sub-pixels, Monte-Carlo.

Abstract:

This work concern the atomization of ligament structures. This study focuses on ligaments produced by free jets of dilute viscoelastic solutions. The multi-scale description is used to study the thinning dynamics of these ligaments. The multi-scale description of a liquid system is initially presented: it describes the system through its scale distribution. This description is applied to theoretical systems as well as to systems modelling the ligaments studied, improving the understanding of this description tool.

New methods are used to measure the scale distributions: sub-pixel image segmentation method and Monte-Carlo method.

Their combination provides a significant improvement at small scales and allows a measurement of 3D scale distributions. This result prompts us to revisit previous studies where the multi-scale description was used.

To our knowledge, this is the first time that a study on free jets of dilute viscoelastic solutions has been carried out statistically. The influence of three parameters is studied: the polymer concentration of the solution, the dimensions of the injection nozzle and the injection flow rate. Based on the results of the multi-scale description, a protocol for identifying ligament thinning regimes is presented. The characteristics of these regimes are measured, in particular the relaxation time of the solution. The measured times are between 24 μ s and 6.3 ms, which is in accordance with the relaxation times measured in the literature for jets. The multi-scale approach here confirms its relevance for the study of atomization processes.

The measured relaxation times show a strong correlation with the deformation rate of the solution during injection. This result indicates that the solution has undergone mechanical degradation. The injection step should be taken into account when atomizing such dilute viscoelastic solutions.

Keywords: atomization, ligament structure, dilute viscoelastic solution, free jet, multi-scale analysis, sub-pixel segmentation, Monte-Carlo.