

Propagation d'informations le long d'une ligne de transmission non linéaire structurée en super réseau et simulant un neurone myélinisé

Guy-Merlin Nkeumaleu

▶ **To cite this version:**

Guy-Merlin Nkeumaleu. Propagation d'informations le long d'une ligne de transmission non linéaire structurée en super réseau et simulant un neurone myélinisé. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2019. Français. NNT : 2019UBFCK006 . tel-02155228

HAL Id: tel-02155228

https://theses.hal.science/tel-02155228

Submitted on 13 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉTABLISSEMENT UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

École doctorale n°37

Sciences Pour l'Ingénieur et Microtechniques

Doctorat d'Informatique

par

GUY-MERLIN NKEUMALEU

Propagation d'informations le long d'une ligne de transmission non linéaire structurée en super réseau et simulant un neurone myélinisé.

Thèse présentée et soutenue à Dijon, le 17/01/2019

Composition du Jury :

AILLERIE MICHEL	Professeur à l'Université de Lorraine et CentraleSupélec, 1^{er} Rapporteur de la thèse	Président
DOS SANTOS SERGE	Maître de Conférences HDR à Blois à l'INSA Centre Val de Loire	Rapporteur
BILBAULT JEAN-MARIE	Professeur à l'Université de Bourgogne Franche-Comté	Directeur de thèse
NGUETCHO TCHAKOUTIO A. S.	Professeur à l'Université de Maroua au Cameroun	Codirecteur de thèse

N° | X | X | X |

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

Titre : Propagation d'informations le long d'une ligne de transmission non linéaire structurée en super réseau et simulant un neurone myélinisé.

Mots-clés : Ligne électrique 1, Equations aux dérivées partielles 2, Soliton 3, Transmissivité 4, Simulation 5.

Résumé :

Les systèmes non linéaires sont décrits généralement avec des équations aux dérivées partielles qui les caractérisent, comme la chaine de pendules couplés, la chaine de protéines comportant des molécules avec liaisons hydrogène, les réseaux atomiques...etc. Ces modèles comportent le plus souvent des interactions inter particulaires anharmoniques et des potentiels de substrat déformables. En effet, aux conséquences importantes dues à la non linéarité et à la dispersion, l'anharmonicité et la déformabilité ajoutent d'autres propriétés de propagation des ondes solitaires telles que les compactons, les kinks et les antikinks, les peakons , . . . ainsi qu'à la capacité du système à transmettre un signal. Nous utilisons ici la méthode de bifurcation pour tracer les différents portraits de phase obtenus par variation des paramètres du système. Nous mettons en évidence l'influence du facteur d'anharmonicité du couplage et celle du facteur de déformation du potentiel de substrat sur la transmissivité et la bistabilité du système. Il en ressort que l'amplitude du signal d'entrée qui produit la bistabilité dépend de la valeur absolue du coefficient d'anharmonicité et de l'épaisseur du milieu non linéaire à traverser. En tenant compte des propriétés importantes générées par de tels systèmes, il nous a paru intéressant de construire une ligne électrique caractérisée par les mêmes équations, c'est à dire un super réseau qui simule un neurone myélinisé. Les types de solitons obtenus semblent mieux adaptés pour décrire le signal électrique qui caractérise l'influx neuronal localisé dans l'espace avec un support compact.

Title: Propagation d'informations le long d'une ligne de transmission non linéaire structurée en super réseau et simulant un neurone myélinisé.

Keywords: Electrical line 1, Partial differential equation 2 , Soliton solution 3, Transmissivity 4 , Simulation 5.

Abstract:

Nonlinear systems are generally described with partial differential equations which characterize them, such as the chain of coupled pendulums, the chain of proteins comprising molecules with hydrogen bonds, the atomic networks, etc. These models most often comprise interactions between anharmonic particularities and deformable substrate potentials. Indeed, with significant consequences due to nonlinearity and dispersion, anharmonicite and deformability lead to other propagation properties of solitary waves such as compactons, kinks and antikinks, peaks, ... as well as the ability of the system to transmit a signal. We use here the method of bifurcation to draw the different phase portraits obtained by variation of the parameters of the system. We highlight the influence of the anharmonicite factor and the deformation factor on the transmissivity and bistability of the system. It follows that the amplitude of the input signal that produces the instability depends on the absolute value of the anharmonicite coefficient and the depth of the nonlinear medium to cross. Taking into account the important properties generated by such systems, it seemed interesting to build a transmission line characterized by the same equations, ie a super network that simulates a neuron with myelin. The types of solitons obtained seem to be better adapted to describe the electrical signal characterizing the localized neuronal impulse in space with a compact support.

UBFC UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

Université Bourgogne Franche-Comté
32, avenue de l'Observatoire
25000 Besançon, France

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mes parents TAGNI NKEUMALEU JOSEPH et MAGNI LEUSSI MADELEINE qui se sont sacrifiés pour ma réussite.

REMERCIEMENTS

Je remercie le Seigneur Dieu Tout Puissant pour sa bonté infinie dans ma vie.

Je remercie tous ceux qui ont accompagné ce travail et les différents acteurs qui ont contribué de proche ou de loin à sa réalisation. Ainsi je ne saurai achever cette rubrique sans porter mes distingués remerciements :

Je remercie l'équipe formidable d'encadreurs que j'ai rencontrée au laboratoire Le2i de l'Université de Bourgogne, principalement mon encadreur Le Professeur Jean-Marie BILBAULT pour son suivi méthodique et le soutient apporté durant mon séjour à Dijon.

Je remercie Le Professeur Serge Aurelien NGUETCHO TCHAKOUTIO pour le privilège qu'il m'a offert à travailler avec cette équipe formidable et pour sa large disponibilité accordée pour le suivi de ce travail.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté d'apporter leurs appréciations à ce travail.

Je remercie tous les membres de l'équipe du laboratoire d'électronique d'imagerie et Je remercie le Seigneur Dieu Tout Puissant pour sa bonté infinie dans ma vie.

Je remercie tous ceux qui ont accompagné ce travail et le différents acteurs qui ont contribué de proche ou de loin à sa réalisation. Ainsi je ne saurai achever cette rubrique sans porter mes distingués remerciements :

Je remercie l'équipe formidable d'encadreurs que j'ai rencontrée au laboratoire Le2i de l'Université de Bourgogne, principalement mon encadreur Le Professeur Jean-Marie BILBAULT pour son suivi méthodique et le soutient apporté durant mon séjour à Dijon.

Je remercie Le Professeur Serge Aurelien NGUETCHO TCHAKOUTIO pour le privilège qu'il m'a offert à travailler avec cette équipe formidable et pour sa large disponibilité accordée pour le suivi de ce travail.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté d'apporter leurs appréciations à ce travail.

Je remercie tous les membres de l'équipe du laboratoire d'électronique d'informatique et d'imagerie qui ont sacrifié leurs temps pour mon encadrement.

Je remercie mon épouse CAROL NKEUMALEU qui m'a toujours soutenu pendant la préparation de ce travail.

Je remercie HERVE et HEIDI CHOMENI pour le soutien et la confiance dont ils m'ont accordés.

Je remercie tous mes collègues du lycée classique de Maroua ainsi que ceux de la délégation régionale des enseignements secondaires de l'Extrême Nord du Cameroun.

je remercie la famille NGUETCHO de MAROUA pour le soutien inestimable.

je remercie la grande famille NKEUMALEU du Cameroun.

Je remercie la famille KUE de Yaoundé.

Je remercie la grande famille Chrétienne de l'Eglise Evangélique du Cameroun de Maroua HARDE pour le soutien qu'ils m'ont apporté.

Je remercie KAMOGNE ROGER pour tout ce qu'il a fait pour moi pour cette Thèse.

Je remercie tous mes collègues du lycée classique de Maroua ainsi que ceux de la délégation régionale des enseignements secondaires de l'Extrême Nord du Cameroun.

Je remercie tous mes camarades du laboratoire d'électronique pour l'esprit de solidarité dont ils ont fait preuve.

SOMMAIRE

1 Introduction **1**

1.1 Contexte 1

1.2 Objectifs de la thèse 2

1.3 Plan de la thèse 4

2 Généralités **5**

2.1 Introduction 5

2.2 Le neurone myélinisé 5

2.2.1 Description du neurone 5

2.2.2 Fonctionnement du neurone 5

2.2.3 Codage des messages nerveux 7

2.2.4 Le neurone vu comme super réseau électrique 7

2.3 Chaîne de pendules couplés 9

2.4 Le transfert du proton dans les chaines moléculaires 12

2.5 Ligne électrique non linéaire 13

2.6 Conclusion 14

3 Modèle théorique **17**

3.1 Introduction 17

3.2 Les équations du mouvement 20

3.3 Bifurcations et solutions de l'ENLSE 22

3.3.1 Dynamique des solitons de gap 22

3.3.1.1 Équation d'évolution 22

3.3.1.2 Trajectoires de phase et solutions 25

3.3.2 Dynamique des solitons dans la bande des fréquences permises . . 42

3.3.2.1 Équation d'évolution 42

3.3.2.2 Trajectoires de phase et solutions 43

3.3.2.2.1 Trajectoires de phase et solutions pour $k = \pm 2\pi/3$ 44

3.3.2.2.1.1 Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ n'a pas de zéro 45

3.3.2.2.1.2 Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ a une racine double. Dans ce cas, $\phi_{e_1} = \phi_{e_2} = \phi_e$ et $h_1 = h_2$. 46

3.3.2.2.1.3 Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ a deux racines réelles distinctes ϕ_{e_1} et ϕ_{e_2}, avec $\phi_{e_1} > \phi_{e_2}$ 48

3.3.2.2.2 Trajectoires de phase et solutions pour un nombre d'onde k quelconque 54

3.3.2.2.2.1 Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_3(\phi)$ a une racine triple 54

3.3.2.2.2.2 Portraits de phase et solutions du système pour $c_2 \neq 0$ quand f_3 admet une racine double 59

3.3.2.2.2.3 Portraits de phase et solutions du système pour $c_2 \neq 0$ quand f_3 admet trois racines distinctes et positives 71

3.4 Conclusion 105

4 Transmissivité, bistabilité au voisinage du gap 107

4.1 Introduction 107

4.2 Equation de Schrodinger non linéaire 107

4.3 Méthode à deux ondes 108

4.4 Conditions de continuité 109

4.5 Fonction de transfert du système 110

4.5.1 Expression analytique de la transmissivité 110

4.5.1.1 Traitement de l'équation (4.12) en considérant v comme paramètre 112

4.6 Caractéristique de la transmissivité en fonction de V_i 115

4.6.0.1 Fonction de transfert pour certaines valeurs fixées des paramètres 115

4.6.0.2 Influence de l'anharmonicité sur la fonction de transfert . . 115

4.6.0.3 Influence de la largeur du milieu non linéaire sur la fonction de transfert 115

4.7 Conclusion 116

5 Construction d'un super réseau simulant un neurone myélinisé 117

5.1 Introduction 117

5.2 Structure et fonctionnement du neurone 117

5.2.1 le neurone 117

5.2.2 Fonctionnement du neurone 117
5.3 Quelques modèles électroniques connus du neurone 118
5.3.1 Modèle de Hodgkin-Huxley 119
5.3.2 Modèle de Fitzhugh-Nagumo 121
5.3.3 Modèle proposé pour le dipôle non linéaire 123
5.4 Construction de la ligne de transmission non linéaire 125
5.4.1 Ligne de transmission diffusive linéaire 125
5.4.2 Modèle électronique d'une ligne de transmission de diffusion non linéaire. 127
5.4.3 Ligne de transmission non linéaire sans atténuation 129
5.4.4 Ligne de transmission non linéaire avec anharmonicité et substrat déformable (voir figure (5.11)) 131
5.4.5 Construction d'un super-réseau simulant un neurone myélinisé . . . 135
5.5 Conclusion 138

6 Conclusion générale **139**

1

INTRODUCTION

1.1/ CONTEXTE

De nos jours, les systèmes de transmission sont diversifiés et très répandus. Nous pouvons par exemple citer :

- la transmission du son dans un milieu matériel, qui trouve des applications en imagerie médicale, dans les sonars,...
- le transfert d'énergie dans les cellules animales et végétales (la production de l'adénosine triphosphate (ATP) utilisée comme source d'énergie chimique pour les cellules),
- le transfert des protons dans les systèmes moléculaires à liaison hydrogène pouvant expliquer la duplication de l'ADN, la dynamique moléculaire dans les protéines,
- l'illustration expérimentale de la propagation de solitons le long d'une chaîne de pendules couplés,
- certaines réactions chimiques industrielles,
- la transmission des informations dans les lignes électriques et les réseaux neuronaux, ...

Le processus de transmission du signal ou de l'information dans les systèmes, notamment nonlinéaires, est assez complexe à maîtriser, interpréter et comprendre, car cela nécessite une connaissance approfondie de nombreux domaines. Le phénomène de la dynamique des systèmes nonlinéaires se trouve en fait à l'interface de plusieurs disciplines : physique, chimie, économie, informatique, biologie, industrie, etc. Ceci induit sa nature pluridisciplinaire. Il s'agit plus précisément d'étudier et de chercher à comprendre des phénomènes naturels nonlinéaires pour lesquels est développée une modélisation théorique [1, 2, 3], suivie de simulations numériques, et enfin dans certains cas confirmée par des expériences sur des démonstrateurs électroniques réalisés en laboratoire. Ce domaine connaît actuellement un essor considérable en raison tant de son intérêt fondamental que de ses applications technologiques [4, 5]. Les interactions entre les sciences biomédicales, l'électronique, l'informatique et les mathématiques appliquées sont en pleine expansion et leurs retombées en termes de santé publique suscitent de nombreux espoirs. Des programmes de recherche internationaux ambitieux ont été lancés, en particulier aux Etats-Unis mais aussi dans le reste du monde [6, 7], pour promouvoir le développement d'instrumentations électroniques ainsi que de modèles biomathématiques et bioinformatiques permettant l'analyse des données massives en biologie moléculaire et cellulaire (Programme Virtual Cell), ainsi qu'en physiologie [8]. Le développement de ce secteur de recherche a été rendu possible par les

avancées majeures réalisées ces dernières années dans la modélisation et la simulation des phénomènes complexes [9, 10, 11], en particulier ceux régis par des équations aux dérivées partielles. Les modèles universels qui peuvent être utilisés pour décrire une grande variété d'effets ou de phénomènes physiques différents sont rares ; Ils sont pourtant d'une importance capitale. De tels modèles attirent une attention particulière en pouvant être utilisés pour décrire les concepts physiques de base de la manière la plus simple. Un modèle simple décrit une chaîne de particules (atomes) harmoniquement couplées à leurs proches voisins et assujetties à un potentiel périodique (potentiel de substrat). Les lignes électriques nonlinéaires constituent un système expérimental assez simple et suffisamment réaliste pour l'observation et l'étude quantitative de la propagation et des propriétés d'excitations nonlinéaires [12], les propriétés de transmission nonlinéaire des bi-réseaux (réseaux constitués de deux sous-réseaux de caractéristiques différentes), des super-réseaux (constitués d'un grand nombre de couches différentes) et autres systèmes nonlinéaires. Ces dernières années, c'est même devenu un des modèles fondamentaux et universels de la physique nonlinéaire. Bien qu'un lien avec le modèle classique ne soit pas souvent énoncé de manière explicite dans un certain nombre d'applications, la plupart des problèmes nonlinéaires impliquant la dynamique des chaînes non linéaires discrètes sont en fait basés sur la formulation classique présentée dans un premier temps par Frenkel et Kontorova [13, 14, 15, 16, 17, 18], puis dans un second temps par Klein et Gordon [16, 17, 18, 19]. Ces modèles idéaux peuvent être comparés à une approximation de l'équation de Toda [20] et peuvent permettre avec des transformations judicieuses, d'obtenir d'autres grandes familles d'équations comme celles de Korteweg-de Vries (KdV) [16, 17, 21], de Schrödinger non linéaire (SNL) [16, 17, 18, 22], Boussinesq [16], ... et de ce fait fournissent une bonne garantie d'applications. Ils mettent surtout en évidence la flexibilité des modèles à s'adapter à plusieurs autres systèmes réels. Leur étude qui, en quelques années, a pris une ampleur assez considérable, rencontre encore d'énormes difficultés, notamment en raison de la complexité des processus en ce qui concerne les phénomènes biologiques et industriels, la physique moléculaire, la neurophysique, pour les problèmes de corrosion, dans les tentatives d'interprétation ou de compréhension. Il apparaît donc clairement que la description fournie par ces modèles est encore insatisfaisante et qu'elle nécessite beaucoup d'améliorations.

1.2/ OBJECTIFS DE LA THÈSE

La majeure partie des résultats rigoureux obtenus jusqu'à présent avec les modèles cités ci-dessus le sont sous l'hypothèse que les interactions inter-particulaires sont simplifiées à l'extrême, c'est-à dire représentées par des fonctions harmoniques ou des fonctions d'une nonlinéarité assez simple. Elles souffrent ainsi d'une certaine insuffisance car les études expérimentales montrent que ces interactions sont de formes bien plus complexes. De même, les potentiels de substrat dans les mêmes modèles sont généralement pris sous une forme rigide ou quasi rigide (par exemple sine Gordon ou phi 4), ce qui veut dire qu'ils ne prennent pas en compte les différentes formes et évolutions des perturbations extérieures (pression, température, champ électromagnétique, ... et/ou géométrie du système).

Selon tous les travaux menés ces derniers années sur des modèles anharmoniques où il est montré que l'anharmonicité du modèle et la déformabilité du potentiel de substrat

conduisent à de nouveaux effets non décrits dans les équations antérieures [23, 24], il apparaît clairement que la description fournie par ces systèmes d'équations reste très insatisfaisante vis-à-vis des phénomènes physiques réels. Il nous a donc paru intéressant de prendre en compte une nonlinéarité forte (de type cubique-quartique) afin d'approcher au mieux les potentiels réalistes comme ceux de Toda ou de Morse, elle-même plongée dans un environnement où l'influence des effets extérieurs ne serait plus constante. Pour cela, nous utiliserons la forme déformable du substrat telle que proposée par Peyrard et Remoissenet [13, 17], et dont le sine-Gordon est un cas particulier.

Par ailleurs, parmi les phénomènes non linéaires, un grand intérêt a été porté aux propriétés de transmission des systèmes non linéaires. En régime linéaire, la propagation des ondes dans les bi-réseaux (réseau constitué de deux sous réseaux alternés de caractéristiques différentes) est décrite par une relation de dispersion présentant des bandes de fréquences interdites appelées gap. Ainsi, toutes les ondes linéaires dont les fréquences appartiennent au gap ne peuvent se propager dans de tels systèmes. On parle alors d'onde évanescente, ce qui implique une transmission très faible à travers un système de longueur finie. En régime nonlinéaire par contre, une onde dont la fréquence est comprise dans le gap linéaire peut être transmise dans le super-réseau. En effet, ses propriétés peuvent être modifiées en fonction de l'amplitude de l'onde de l'excitation qui lui est appliquée (effet Kerr en optique par exemple : l'indice de réfraction dépend ainsi de l'intensité du champ). L'augmentation de l'amplitude (ou de la puissance) du signal incident peut faire passer le système d'un état non transparent vers un état transparent, d'une façon souvent brutale : c'est le phénomène de bi-stabilité. Ce phénomène, qui s'accompagne d'hystérésis, a été étudié théoriquement et numériquement par bon nombre d'auteurs. Il peut être également lié à l'existence de solitons de bande interdite, ou solitons de gap. Il nous a paru intéressant de regarder les effets de la nonlinéarité forte et la déformabilité du substrat sur la naissance et l'existence des différents types de solutions "soliton" dans le gap, et sur leur dynamique.

Pour la résolution des équations complexes issues de ces nouveaux modèles, nous mettrons sur pied et utiliserons la technique de bifurcation. Celle-ci pourra nous permettre, non seulement de mettre en évidence les paramètres clefs et effectifs (paramètres de bifurcation) de cette dynamique, mais également d'étudier et de regarder l'apport réel de chacun des termes (nouveaux comme anciens) du modèle mathématique obtenu après la traduction du phénomène réel étudié. En plus, la méthode de bifurcation, par son analyse qualitative, nous permettra, pour un modèle mathématique donné, de faire sans trop de calculs l'inventaire complet de tous les types de solutions et de leurs différentes conditions d'existence.

Il existe à notre connaissance peu d'articles sur l'observation expérimentale des modes localisés dans un modèle à interaction du type cubique-quartique et plongé dans un milieu extérieur où les forces sont variables. Il semble donc aussi important d'avoir une meilleure connaissance de ces modes localisés dans les réseaux non linéaires réels, afin de compléter les résultats déjà obtenus essentiellement sous formes théorique et numérique.

1.3/ PLAN DE LA THÈSE

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Elle commence par des présentations générales des systèmes non linéaires avec quelques exemples :

- Un neurone
- Une chaîne de pendules couplés
- Un processus de transfert des protons dans les systèmes à liaisons hydrogène
- Et enfin une ligne électrique non linéaire.

Le troisième chapitre portera sur l'étude dynamique de l'équation générale issue des modèles où sont prises en compte simultanément : les interactions inter-particulaires de type cubique-quartique et les actions des forces extérieures. Une attention sera portée séparément sur le comportement dynamique au voisinage du gap et à l'intérieur de la bande passante permise.

Une fois les solutions trouvées, le quatrième chapitre analysera la transmissivité et la bistabilité ainsi que le phénomène d'hystéresis de quelques réponses aux excitations au voisinage du gap. Dans ce chapitre, nous établirons l'expression de la transmissivité de notre système non linéaire à l'aide de la méthode des deux ondes.

Sur la base des résultats présentés dans les premiers chapitres, sur l'existence et la dynamique des solutions les plus marquantes, le cinquième chapitre proposera de construire un super réseau simulant un neurone myélinisé, c'est-à-dire un modèle électronique du neurone avec une ligne électrique régie par le modèle mathématique étudié ci-dessus. Cette ligne pourrait être par la suite utilisée pour constituer les éléments du super réseau.

2

GÉNÉRALITÉS

2.1/ INTRODUCTION

La propagation de l'information se fait à l'aide des chaînes de transmission (milieux matériels) ou sans support (ondes hertziennes). Une chaîne de transmission est l'ensemble de dispositifs permettant le transport d'une information sur des distances souvent importantes. Elle comprend trois éléments essentiels : un émetteur, un canal de transmission et un récepteur.

Le message à transmettre est converti en signal par l'émetteur. La dynamique de certaines chaînes de transmission est très complexe et présente plusieurs particularités. De ce fait, il est nécessaire de concevoir des modèles relativement simples pour mieux maîtriser leurs comportements dynamiques. Nous allons donner quelques exemples de propagation de l'information dans les chaînes de transmission qui présentent une dynamique très variée et complexe. Le modèle que nous mettons en place pourra s'appliquer non seulement au neurone, mais à plusieurs autres systèmes physiques réels tels que des chaînes mécaniques, des systèmes biologiques, des lignes électriques...

2.2/ LE NEURONE MYÉLINISÉ

2.2.1/ DESCRIPTION DU NEURONE

Le neurone est la plus petite partie du système nerveux responsable du traitement et de la transmission de l'information. Il est constitué de dendrites, du noyau, du cytoplasme, de l'axone, de la gaine de myéline, des nœuds de Ranvier et des synapses (cf. Fig. 2.1).

2.2.2/ FONCTIONNEMENT DU NEURONE

Les éléments responsables de la transmission du message nerveux sont :

- La membrane plasmique
- Les stimuli externes
- Les ions
- Les transporteurs membranaires

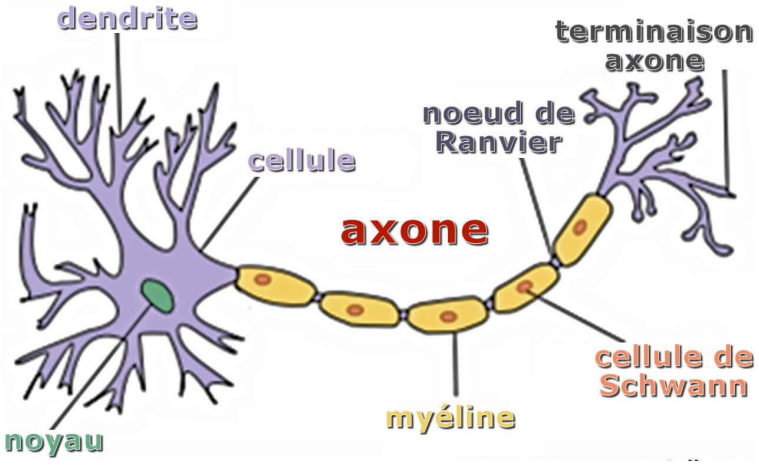


FIGURE 2.1 – Schéma d'un neurone. (https ://www.futura-sciences.com)

MEMBRANE PLASMIQUE

Elle est constituée d'une double couche de phospholipidiques qui l'entoure. C'est une barrière sélective qui laisse traverser les molécules non polaires et hydrophobes ; par contre, les molécules polaires et les ions ne peuvent pas la traverser directement. La membrane d'une cellule nerveuse présente une différence de potentiel due à la répartition inégale des charges électriques entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane. Par ailleurs, un transfert d'ions s'effectue entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane, grâce à la pression osmotique et au champ électrique transmembranaire. Ceci permet de conserver un gradient de concentration de part et d'autre de la membrane contrebalançant la diffusion osmotique des espèces ioniques au travers des canaux lorsque ceux-ci s'ouvrent, l'ensemble étant décrit par la loi de Nernst.

Lorsque la membrane n'est soumise à aucune excitation, le système constitué de la membrane, du milieu extra cellulaire et du milieu intracellulaire atteint un équilibre. Nous pouvons alors mesurer une différence de potentiel. Cette différence de potentiel prend toujours pour référence le milieu exocellulaire et porte le nom de potentiel de repos.

Le neurone réagit aux stimuli externes. Ils peuvent être physiques (lumière, son, pression, température,...etc), chimiques (neurotransmetteurs). La présence des stimuli induit une réaction de dépolarisation de la membrane par ouverture des canaux à sodium (chimiodépendants ou dépendant du stimulus sensoriel) .

Les canaux ioniques sont voltage dépendants, autrement dit leur perméabilité dépend de la différence de potentiel entre les milieux extra et intracellulaire. Les propriétés de perméabilité de ces protéines sélectives donnent naissance à un phénomène électrique se propageant le long de l'axone : c'est le potentiel d'action (PA).

Le rôle principal du neurone est de transmettre différentes informations nerveuses. Mais ces informations n'étant pas identiques, il est nécessaire de les différencier par des codes.

2.2.3/ CODAGE DES MESSAGES NERVEUX

Pour un neurone donné, l'amplitude du potentiel d'action ne varie pas pendant sa propagation et la vitesse de propagation est constante le long de l'axone.

L'information à transmettre est codée par :
- Le nombre de potentiels d'action émis
- Leur fréquence
- Leur organisation en salves
- La durée du message.

Le nombre de potentiels d'action émis et la durée du message sont généralement en rapport avec la quantité d'informations à transmettre. Ainsi, une fibre sensorielle ou motrice peut décharger pendant plusieurs minutes et émettre des centaines, voire des milliers de potentiels d'action à la suite d'une stimulation prolongée ou pour soutenir une contraction musculaire. Mais ce n'est pas toujours le cas. Certains récepteurs sensoriels, par exemple, s'adaptent très vite et cessent de décharger au bout de quelques secondes alors que la stimulation est maintenue.

La fréquence, qui s'exprime en nombre de potentiels d'action par seconde, est elle aussi en rapport avec la quantité d'informations à transmettre. Ainsi, plus l'information est importante, plus la fréquence augmente, jusqu'à une limite imposée par la structure biologique.

L'organisation en salves est un phénomène complexe qui varie en fonction des structures concernées et des messages véhiculés. Les potentiels d'action d'un même message peuvent en effet être émis sous forme de salves, plus ou moins espacées dans le temps, dont la durée, le nombre de potentiels et la fréquence diffèrent d'une salve à une autre. On parle également de rafales, de trains de potentiels ou de bouffées d'activité (voir figure 2.2).

2.2.4/ LE NEURONE VU COMME SUPER RÉSEAU ÉLECTRIQUE

La fonction d'un neurone est de transmettre l'information sous la forme d'un signal électrique se propageant le long de l'axone sans atténuation [26]. Nous nous proposons de concevoir une ligne de transmission électrique qui se rapproche du neurone myélinisé du point de vue de la propagation du signal électrique.

Avant de proposer un nouveau modèle de ligne électrique, il est nécessaire d'examiner les modèles de lignes déjà réalisés pour modéliser le neurone. Dans le milieu extérieur du neurone, les porteurs de charge électrique sont des ions qui se déplacent facilement. Donc ce milieu extérieur est un conducteur électrique. La membrane neuronale empêche les ions de migrer vers l'extérieur, comme un isolant électrique. C'est elle qui sépare les milieux intérieur et extérieur, et on peut la représenter par un condensateur.

Lors d'une excitation du neurone, il y a création d'une différence de potentiel due à la différence de concentration entre les milieux intérieur et extérieur du neurone. Le neurone doit expulser les charges positives depuis l'intérieur vers l'extérieur de la cellule grâce à des pompes. Les pompes ioniques à travers les canaux expulsent en effet certains ions de la cellule vers l'extérieur (en consommant de l'énergie sous la forme d'ATP) et donnant donc un courant électrique.

Donc la ligne électrique modélisant l'axone d'un neurone peut être schématisée comme

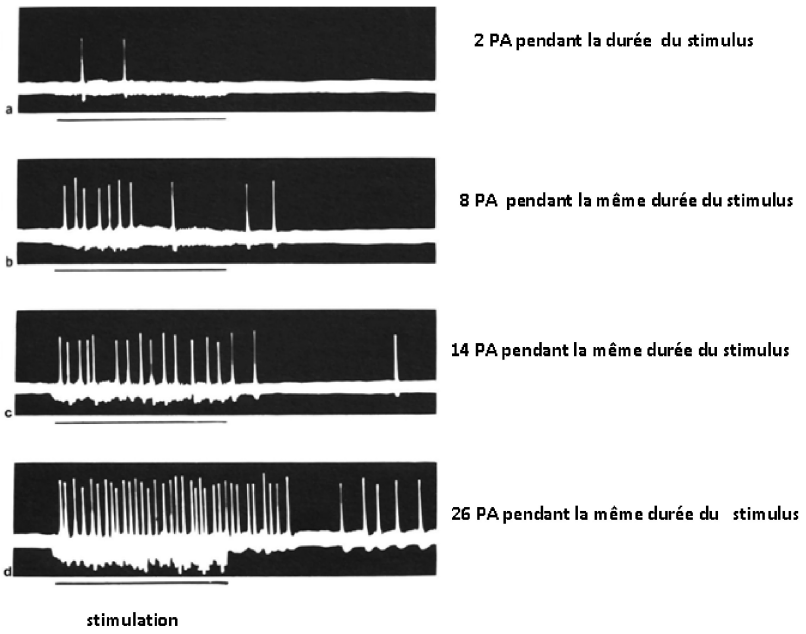


FIGURE 2.2 – Codage de l'information dans un message nerveux. Echelles : 1ms/cm et 2,5mV/cm [25] (https ://www.mcdubysvt.fr)

sur la figure (2.3) où les canaux ioniques sont représentés par la résistance membranaire r_m, l'isolant séparant les milieux intérieur et extérieur par le diélectrique du condensateur de capacité C_m et la résistance longitudinale à la circulation des ions à l'intérieur de la membrane par r_l .

A partir des lois de Kirchhoff, l'équation caractérisant la propagation du potentiel d'action est de la forme :

$$\frac{r_m}{r_l}(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) = r_m C_m \frac{dV_n}{dt} + V_n. \tag{2.1}$$

C'est une équation différentielle avec un laplacien discret (assimilable à une dérivée seconde par rapport à l'espace) et une dérivée première par rapport au temps. Cette équation linéaire ne présente pas une grande richesse pour son étude dynamique. C'est une équation de diffusion qui a été obtenue lors de la modélisation d'un neurone sur son plan comportemental et non sur le plan de la transmission de signal électrique. Par ailleurs, lors de la propagation d'un signal sans amortissement, chaque point de la ligne reproduit le même signal que la source avant de revenir à son état initial dans un neurone. Ce n'est pas le cas pour cette ligne.

Entre autres, les canaux ioniques par lesquels les ions passent du milieu intérieur vers le milieu extérieur ont ici une résistance constante notée r_m. Pourtant les canaux sont à ouverture variable et la résistance d'un conducteur caractérise l'opposition au passage du courant électrique. L'ouverture et la fermeture des canaux entraînent une variation de la section du canal, ce qui implique une variation de la résistance du canal qui ne peut donc pas être constante.

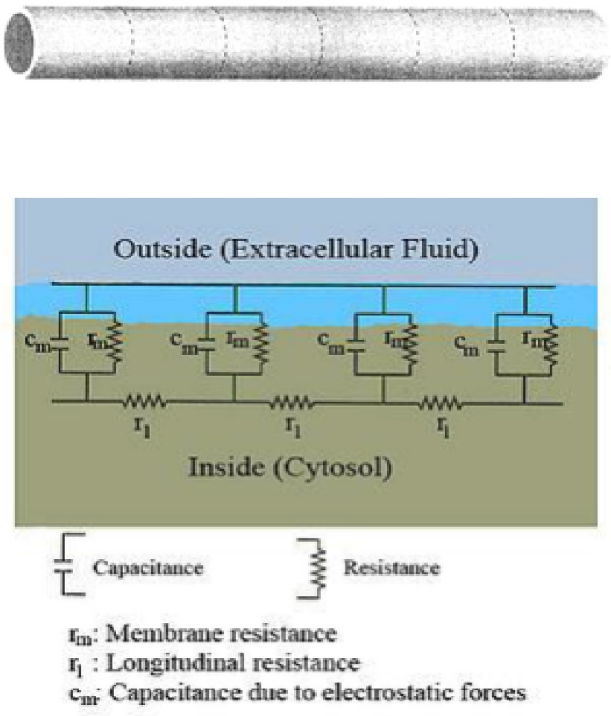


FIGURE 2.3 – Circuit électrique d'un axone (https ://www.unic.cnrs-gif.fr)

L'action des pompes ioniques entraîne un déplacement longitudinal des ions, d'où un courant longitudinal dépendant de la tension électrique qui est fonction de la concentration des ions à l'intérieur du neurone. Or ce courant longitudinal est lié à la résistance r_l supposée constante. Pourtant le courant longitudinal dépend des concentrations du milieu intérieur, ce qui signifie que la résistance longitudinale doit être variable.

Nous constatons que ce modèle présente des insuffisances pour décrire comment le neurone peut transmettre des signaux. Le neurone étant une chaîne de transmission capable de transmettre plusieurs types d'informations, il doit posséder une grande richesse de comportements dynamiques. Nous pensons donc qu'un bon modèle électrique d'un neurone doit être capable d'en reproduire la riche dynamique et de produire la grande diversité d'excitations qu'un vrai neurone peut avoir.

2.3/ CHAÎNE DE PENDULES COUPLÉS

Soit la chaîne de pendules couplés suivante : les pendules de masse m et de longueur l sont mobiles autour d'un même axe de rotation. Chaque pendule est relié à son voisin le plus proche par un ressort de constante de raideur k (voir Fig. 2.4). Le moment d'inertie de chaque masse par rapport à son axe de rotation est I. Les pendules successifs sont séparés par le pas d et sont assujettis à rester dans un même plan vertical.

Le moment du couple de torsion qui agit sur chaque pendule est $-C\theta_n$ où C est la constante de torsion et θ_n le petit angle de rotation autour de l'axe z affectant la particule

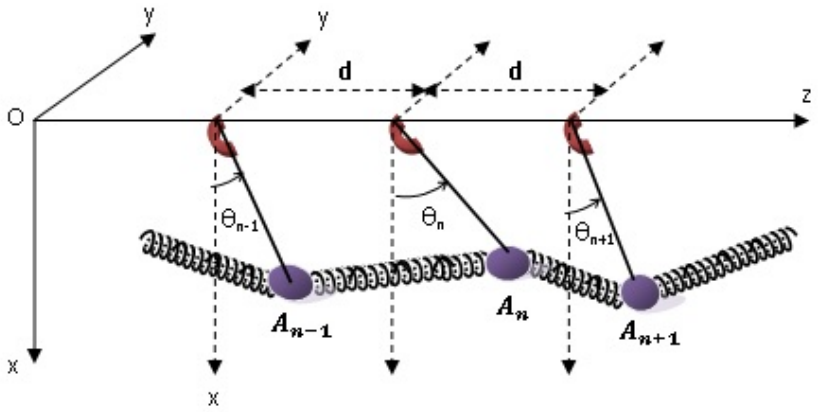


FIGURE 2.4 – Pendules couplés.

n. Le moment du poids de chaque pendule par rapport à l'axe de rotation est $-mgl\sin\theta_n$. Le point matériel A_n de masse m a pour coordonnées

$$A_n \begin{pmatrix} l\cos\theta_n \\ l\sin\theta_n \\ nd \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

et son voisin le plus proche a pour coordonnées

$$A_{n+1} \begin{pmatrix} l\cos\theta_{n+1} \\ l\sin\theta_{n+1} \\ (n+1)d \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Leur distance est

$$d_n = \sqrt{l^2(\cos\theta_n - \cos\theta_{n+1})^2 + l^2(\sin\theta_n - \sin\theta_{n+1})^2 + d^2} \tag{2.4}$$

d'où

$$d_n = \sqrt{d^2 + 4l^2\sin^2\left(\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{2}\right)} \sim d + \frac{l^2}{2d}(\theta_{n+1}-\theta_n)^2. \tag{2.5}$$

L'allongement du ressort reliant A_n et A_{n+1} est, si on appelle d_0 la longueur du ressort à vide :

$$\begin{aligned} \Delta d_n &= d_n - d_0 \\ &\simeq d - d_0 + \frac{l^2}{2d}(\theta_{n+1}-\theta_n)^2. \end{aligned}$$

La force exercée par la particule A_{n+1} sur A_n est :

$$\overrightarrow{F}_{n+1} = k\Delta d_n \overrightarrow{e}$$

où

$$\overrightarrow{e} = \frac{1}{d_n}\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{d_n}\begin{pmatrix} x_{n+1}-x_n \\ y_{n+1}-y_n \\ d \end{pmatrix}$$

et son moment par rapport à l'axe z est $\frac{k\Delta d_n}{d_n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n \end{pmatrix}$. Comme $x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n \simeq l^2(\theta_{n+1}-\theta_n)$, ce moment peut s'écrire encore :

$$\mathcal{M}_{n+1,n(z)} = \frac{kl^2\left(d-d_0+\frac{l^2}{2d}(\theta_{n+1}-\theta_n)^2\right)}{d+\frac{l^2}{2d}(\theta_{n+1}-\theta_n)^2}(\theta_{n+1}-\theta_n) = \frac{k(d-d_0)l^2}{d}(\theta_{n+1}-\theta_n) + \frac{kd_0l^4}{2d^3}(\theta_{n+1}-\theta_n)^3.$$

Donc

$$\mathcal{M}_{n+1,n(z)} \simeq \lambda_0(\theta_{n+1}-\theta_n) + \lambda_1(\theta_{n+1}-\theta_n)^3, \tag{2.6}$$

avec $\lambda_0 = \frac{k(d-d_0)l^2}{d}$ et $\lambda_1 = \frac{kd_0l^4}{2d^3}$. De même, le moment exercé par la particule A_{n-1} sur la particule A_n sera

$$\mathcal{M}_{n-1,n(z)} = \lambda_0(\theta_{n-1}-\theta_n) + \lambda_1(\theta_{n-1}-\theta_n)^3. \tag{2.7}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur la particule au point A_n, de moment d'inertie I, on aura dans la limite des faibles oscillations :

$$I\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -C\theta_n - mgl(\theta_n - \frac{\theta_n^3}{6}) + \lambda_0\left[\theta_{n+1}+\theta_{n-1}-2\theta_n\right] + \lambda_1\left[(\theta_{n+1}-\theta_n)^3-(\theta_n-\theta_{n-1})^3\right], \tag{2.8}$$

soit encore :

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C_l(\theta_{n+1}+\theta_n-1-2\theta_n) + C_{nl}\left[(\theta_{n+1}-\theta_n)^3-(\theta_n-\theta_{n-1})^3\right] - \omega_0^2(\theta_n+\mu\theta_n^3), \tag{2.9}$$

avec $C_l = \frac{\lambda_0}{I}$; $C_{nl} = \frac{\lambda_1}{I}$; $\omega_0^2 = \frac{C+mgl}{I}$; $\mu = -\frac{mgl}{6I\omega_0^2}$.

C'est une équation qui se ramène à celle de Klein- Gordon anharmonique. C_l est le coefficient d'interaction harmonique et C_nl est le coefficient d'interaction anharmonique.

L'énergie potentielle correspondant est :

$$E_p = \frac{1}{2}C(\theta_n^2-\theta_0^2) + mgl(\cos\theta_n - \cos\theta_0), \tag{2.10}$$

où θ_0 est l'amplitude correspondant à la position d'équilibre. Nous remarquons que l'équation caractérisant la chaîne de pendules couplés présente des interactions de type anharmonique avec présence des termes du substrat indéformable, c'est à dire que les interactions entre particules ont un caractère non linéaire marqué par l'importance relative des paramètres λ_0 et λ_1.

Nous allons aborder par la suite les systèmes moléculaires à liaison hydrogène caractérisés par des interactions semblables.

2.4/ LE TRANSFERT DU PROTON DANS LES CHAINES MOLÉCULAIRES

C'est la liaison hydrogène qui détermine la structure d'un très grand nombre de substances cristallisées, comme le cas de la glace qui présente une forme très stable. Dans sa structure, chaque atome d'oxygène se trouve au centre d'un tétraèdre régulier dont les quatre autres sommets sont occupés par quatre atomes d'oxygène. La glace doit sa stabilité aux liaisons hydrogène ; à chaque atome d'oxygène correspond deux atomes d'hydrogène pour la formation de la molécule d'eau. Lorsqu'un champ extérieur est appliqué sur la glace, un atome d'hydrogène se dissocie de sa molécule d'eau pour se transformer en un proton H^+ ; et le proton se déplace le long de l'axe $O-H-O$ pour arriver à une molécule d'eau voisine où il forme l'ion H_3O^+ en laissant derrière lui un ion OH^-. Ensuite, l'hydrogène de l'ion H_3O^+ formé se dissocie à l'arrivée d'un autre proton H^+ se déplaçant de la même façon que le précédent.

Le transfert du proton dans les systèmes à liaison hydrogène peut être représenté par une chaîne unidimensionnelle composée de deux sous - réseaux couplés où on distingue les interactions fortes et les interactions faibles [27, 28, 29, 30]. Parmi les interactions fortes, nous avons les interactions proton- proton. Un petit atome d'hydrogène (H) de masse m situé entre deux grands atomes (X) de masse (M) peut se mouvoir entre deux positions d'équilibre énergétiquement équivalentes. Le potentiel de substrat lié au proton est celui d'un double puits qui a deux positions d'équilibre stable séparées par une position d'équilibre instable. Or il n'est pas facile de trouver une forme appropriée de ce potentiel double puits. Dans la littérature, nous pouvons citer le double - Morse, le double-sine-Gordon, etc. Ces potentiels possèdent les caractéristiques de décrire le transfert de proton dans les liaisons hydrogène, ils prennent en compte les variations de la hauteur du potentiel double puits. Mais la position de ses minima ne permet pas d'obtenir facilement les solutions analytiques du système.

Le potentiel le mieux adapté est le potentiel ϕ^4. Il est défini comme suit :

$$V(\theta) = V_0\left(1-\frac{\theta_n^2}{\theta_0^2}\right)^2 . \tag{2.11}$$

Le déplacement du $n^{\text{ème}}$ proton par rapport au centre de la paire d'ions lourds est θ_n . V_0 est la barrière de potentiel et $2\theta_0$ est la distance entre les deux minima du potentiel double puits. Le potentiel d'interaction interparticulaire est de la forme anharmonique du fait du changement de déplacement des atomes lourds résultant de la vibration des protons et des interactions entre protons voisins. Il est défini par la relation :

$$V_{int} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m C_0^2 (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + \frac{1}{4} m C_\alpha (\theta_{n+1} - \theta_n)^4 \right], \tag{2.12}$$

où C_α est le paramètre qui contrôle l'anharmonicité entre les protons voisins et θ_n représente le déplacement du $n^{\text{ème}}$ proton entre la paire d'ions lourds de masse (M) qui l'entourent. Le dernier terme de cette équation est l'interaction anharmonique. En tenant compte de l'énergie cinétique du réseau de protons, l'Hamiltonien du réseau s'écrit :

$$H = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + V(\theta_n) + \frac{1}{2} m C_0^2 (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + \frac{1}{4} m C_\alpha (\theta_{n+1} - \theta_n)^4 \right]. \tag{2.13}$$

L'expression de l'Hamiltonien montre l'anharmonicité des interactions intermoléculaires et la présence du potentiel de substrat dans ce système de molécules à liaison hydrogène. L'équation qui caractérise ce système est analogue à la Chaîne précédente (☞ 2.3.). Ce sont des systèmes mécaniques non linéaires. Nous allons examiner le cas des systèmes constitués de lignes électriques dans le but de mieux apprécier le comportement de la propagation d'un signal électrique.

2.5/ LIGNE ÉLECTRIQUE NON LINÉAIRE

Soit une ligne électrique non linéaire dont la capacité dépend de la tension.

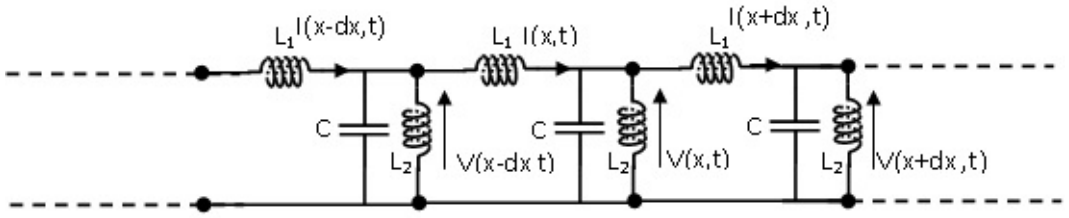


FIGURE 2.5 – Ligne électrique nonlinéaire

Nous avons

$$C(V) = C_0 \left(1 - 2a_1 V + 3a_2 V^2 + - - - \right) \tag{2.14}$$

Si les amplitudes des tensions appliquées sont faibles, nous aurons :

$$C(V) \simeq C_0 (1 - 2a_1 V) \tag{2.15}$$

La charge Q_n portée par le condensateur de la cellule n, est définie par :

$$dQ_n = C\,(V_n)\,dV_n$$

et en intégrant , nous obtenons

$$Q_n = C_0\left(V_n - a_1 V_n^2\right) \tag{2.16}$$

L'équation régissant la ligne de transmission non linéaire s'établit ainsi :

$$\frac{d^2V_n(x,t)}{dt^2} = -\omega_0^2 V(x,t) - u_0^2\,(2V_n - V_{n-1} + V_{n+1}) + a_1\frac{d^2V_n^2}{dt^2} \tag{2.17}$$

Dans cette équation, les premiers termes au second membre représentent la dispersion et le dernier la nonlinéarité. Ces deux effets se compensent pour donner naissance à une onde appelée ”soliton”. En cherchant une éventuelle solution sous la forme d'une onde plane monochromatique :

$$V_n(t) = V_0 \exp j(kn - \omega t) + c.c, \tag{2.18}$$

où c.c représente le complexe conjugué du terme précédent, la relation de dispersion linéaire reliant ω et k est donnée par ;

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4u_0^2 \sin^2\frac{k}{2}, \tag{2.19}$$

tandis que les termes non linéaires ont pour effet de modifier cette relation de dispersion.

2.6/ CONCLUSION

Nous avons présenté quelques systèmes physiques non linéaires représentant un neurone myélinisé, une chaîne de pendules couplés, une chaîne moléculaire à liaison hydrogène. A chaque fois, l'étude du modèle conduit à une équation de type propagation ou diffusion, avec de la dispersion et de la nonlinéarité.

L'objectif de la thèse est d'améliorer les connaissances sur un neurone myélinisé, et notamment les propriétés de transmission d'ondes à travers un réseau à caractéristiques périodiques (les nœuds de Ranvier sont périodiquement espacés).

Dans l'étude de la transmission de l'information d'un neurone à l'autre sous la forme de salves de potentiels d'action, on sait [4] que ces derniers communiquent principalement entre eux par l'intermédiaire d'interactions synaptiques chimiques et électriques provoquant les modifications de l'activité d'une cellule à l'autre. Considérant un neurone sous une forme épurée telle que seule son activité électrique soit prise en compte, nous sommes amenés à la notion de neurone ponctuel. Du point de vue de la modélisation, la communication inter-neuronale règle la réponse d'un neurone en fonction des messages d'informations qu'il reçoit, c'est à dire que la dynamique peut être caractérisée par des salves successives d'impulsions. Nous reparlerons des différents types de modèles de neurones dans le chapitre V.

Nous avons ensuite présenté la chaîne de pendules couplés. Cette chaîne, utilisée en démonstration de cours au niveau master pour présenter une expérience exotique illustrant les effets non linéaires, a surtout comme intérêt de mettre l'accent sur le fait que considérer des interactions uniquement harmoniques ($C_{nl} = 0$) est insuffisant pour bien décrire le comportement du système. C'est donc une justification de la suite de notre travail où nous considèrerons les interactions sous une forme anharmonique.

L'utilisation du modèle Φ^4 pour décrire le type de potentiel d'interaction dans une chaîne moléculaire à liaison hydrogène renforce encore notre démonstration tendant à critiquer l'utilisation de couplage uniquement harmonique. Ici encore, il est primordial de tenir compte de l'anharmonicité par le terme en C_α dans (2.13).

Enfin, nous avons rappelé l'universalité de la modélisation analogique de tout système de transmission par une ligne de transmission.

En améliorant encore ce modèle par la prise en compte dans un premier temps, d'une nonlinéarité plus forte, c'est à dire beaucoup plus complexe, et ensuite en tenant compte des différentes variations des forces extérieures, nous pensons obtenir de meilleurs résultats et être capables de mieux expliquer ou d'apporter des explications à certains phénomènes qui jusqu'ici n'étaient pas bien pris en compte ou interprétés.

3

MODÈLE THÉORIQUE

3.1/ INTRODUCTION

La particularité et l'originalité d'un bon modèle physique réside tant dans sa simplicité que dans son universalité. Bien que crucial dans la description et la compréhension d'une grande variété de phénomènes physiques réels, les modèles dits universels sont très rares, d'où l'importance de la modélisation dans la compréhension des phénomènes naturels et/ou liés à la vie. Ces modèles universels sont notamment de très grande valeur éducative. Un exemple de tels modèles non linéaires est celui de Klein-Gordon (NKG) [31, 32]. Le modèle NKG est devenu très populaire dans de nombreux domaines de la physique et de la vie. Le modèle standard NKG décrit une chaîne d'atomes couplés et soumis à un potentiel périodique externe. Son Hamiltonien est donné par la relation :

$$H = T + U. \tag{3.1}$$

T et U sont respectivement les énergies cinétique et potentielle. U est constitué du potentiel externe le long de la chaîne encore appelé potentiel de substrat et noté ici U_e, ainsi que des interactions interparticulaires de forme générale U_c.

Puisqu'il a été montré que, dans les systèmes physiques réels, la forme du substrat s'écarte toujours des formes sinusoïdales ou quasi-rigides trop souvent utilisées, affectant fortement ainsi les propriétés dynamiques du système, le modèle que nous présenterons ici généralisera les modèles NKG classiques, avec un potentiel de substrat dont la forme non linéaire s'adapte à divers types d'interaction et aux différents degrés de liberté. Pour cela, nous utilisons les potentiels de Peyrard et Remoissenet (PR) [13, 14, 15, 24, 33],

$$U_e(x_n, \sigma) = U_0 W(x_n, \sigma) = U_0 \frac{\tan^2\left(\frac{\pi x_n}{a}\right)}{\sigma^2 + \tan^2\left(\frac{\pi x_n}{a}\right)}, \tag{3.2}$$

où σ est le paramètre qui module la forme du substrat (encore appelé paramètre de déformabilité) et est pris dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Il est lié au coefficient s introduit par Peyrard et Remoissenet par $\sigma = (1+s)/(1-s)$. A $\sigma = 1$, le potentiel $U_e(x_n, \sigma)$ a une forme sinusoïdale, alors que pour $\sigma > 1$, les puits sont larges et séparés par des barrières de potentiel étroites et que, pour $\sigma < 1$, les puits sont étroits et séparés par des barrières larges avec des flancs à pente limitée (voir Fig. 3.1). a est la période spatiale du potentiel du substrat, alors que le paramètre U_0 contrôle ou ajuste la profondeur des barrières

énergétiques de ce potentiel (U_0 peut par exemple représenter l'énergie d'activation lors de la diffusion d'un adatom isolé dans un adsystem). $x_n(t)$ désigne la position de la cellule du site n avec une signification qui dépend du système physique considéré.

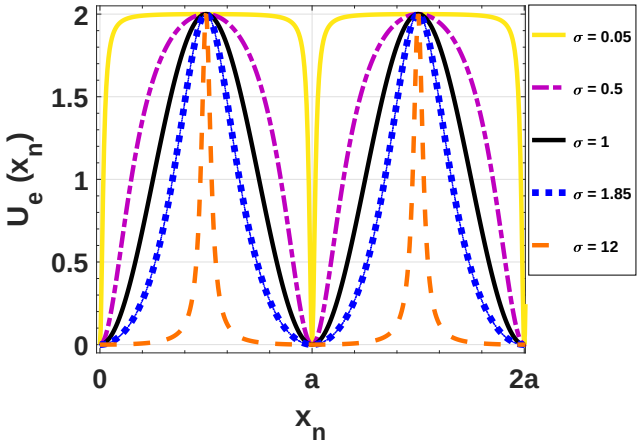


FIGURE 3.1 – Représentation du potentiel de substrat $U_e(x_n)$ pour différentes valeurs du paramètre de déformabilité σ et pour $U_0 = 2$.

La modélisation du potentiel d'interaction $U_c(x_n)$ de la $n^{\text{ième}}$ particule a eu un impact considérable et crucial lors des premières études sur la dynamique des réseaux non linéaires. Elle a montré l'existence de différents types d'excitations solitoniques et a révolutionné la science [11, 16, 17, 20, 23, 34, 35, 36, 37]. Ensuite, les recherches ont essayé dans un premier temps de déterminer les possibilités et conditions d'existence de ces nouveaux types d'excitations dans les chaînes mécaniques, et d'autre part de déterminer leurs propriétés dynamiques. Ces études ont été d'une importance capitale car leur extension à des travaux de recherches dans plusieurs autres domaines comme celui de l'optique, la biophysique, de l'imagerie ultra sonore pour agents de contraste [32], ... dépend fortement de la qualité des résultats obtenus dans les chaînes mécaniques. Avec des résultats assez probants, la plupart des travaux se sont concentrés sur des modèles avec des formes simples de potentiel interatomique $U_c(x_n)$ entre proches voisins, alors qu'ils essayaient de décrire ou de comprendre des phénomènes réalistes et donc très complexes. Il est pourtant bien connu que de nombreuses propriétés physiques des systèmes réels sont directement liées aux effets non linéaires dus aux interactions anharmoniques. Les potentiels anharmoniques réalistes, comme ceux de Toda, Born-Mayer, Coulomb, Lennard-Jones et Morse [11, 12, 16, 20, 34, 38, 39], possèdent une forte non linéarité cubique dans leurs développements en série de Taylor autour de la position d'équilibre. Il devient donc nécessaire de considérer les excitations non-linéaires dans le réseau avec des anharmonicités poussées. Pour cela, dans cette thèse, nous établissons un lien avec le développement de Taylor du potentiel $U_c(x_n)$ autour de la position d'équilibre $(x_n = 0)$ en une série de puissances des déplacements jusqu'au quatrième ordre. On obtient ainsi un potentiel de type $k_2 - k_3 - k_4$ approximatif [20, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46] défini pour le $n^{\text{ième}}$ site n par :

$$U_c(x_n) = \frac{1}{2}k_2(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{3}k_3(x_n - x_{n-1})^3 + \frac{1}{4}k_4(x_n - x_{n-1})^4 \tag{3.3}$$

où $k_2 > 0$, k_3 et k_4 sont toutes les trois des constantes qui contrôlent les forces de cou-

plage harmonique, cubique et quartique, respectivement. Il a été démontré que l'inclusion de l'anharmonicité dans l'étude des modèles de réseaux peut produire des effets nouveaux qualitativement et quantitativement [40, 41, 42, 43, 47, 27, 7]. Par ailleurs, durant ces dernières décennies, un intérêt pour les excitations localisées dans les réseaux non linéaires a été renouvelé grâce à l'identification de nouveaux types de modes localisés anharmoniques. Par conséquent, une grande attention a été portée aux solitons de gap dans les réseaux nonlinéaires. Dus aux effets de nonlinéarité, les modes de solitons de gap peuvent apparaître sous forme d'excitations localisées avec une fréquence de vibration située en dehors des bandes permises du spectre linéaire. Comme ces solitons de gap apparaissent dans des réseaux atomiques parfaits avec une symétrie de translation discrète, ils ont été baptisés "anharmonic gap mode" ou "intrinsic gap mode" [48, 49, 40, 46]. L'Hamiltonien défini dans l'équation (3.1) où

$$U(x_n) = U_e(x_n, \sigma) + U_c(x_n), \tag{3.4}$$

devient

$$H = A \sum_n \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{d\Theta_n}{dt}\right)^2 + \left[\frac{1}{2}G_2(\Theta_n - \Theta_{n-1})^2 + \frac{1}{3}G_3(\Theta_n - \Theta_{n-1})^3 + \frac{1}{4}G_4(\Theta_n - \Theta_{n-1})^4\right] + \omega_0^2 W(\Theta_n, \sigma)\right\}, \tag{3.5}$$

où $\Theta_n = 2\pi x_n/a$ est le déplacement adimensionné de la particule, $G_i = k_i/m \quad (i = 2, 3, 4)$, tandis que $A = m(a/2\pi)^2$. Les paramètres G_2 et ω_0 sont respectivement la vitesse et la fréquence caractéristique du système, avec $\omega_0^2 = 4\pi^2 U_0/ma^2$ et m, la masse de la particule en mouvement.

Dans la plupart des cas, cette équation (3.5) peut conduire à plusieurs versions étendues ou modifiées de la très célèbre équation non linéaire de Schrödinger (SNL) avec plusieurs termes supplémentaires, expliquant les dépendances spatiales et/ou temporelles des coefficients non linéaires qui s'identifient essentiellement à quelques modèles particuliers et bien précis. En utilisant des approximations telle que la "rotating wave approximation" combinées aux simulations numériques, Kiselev et al. ont montré l'inexistence des modes localisés intrinsèques, tandis qu'un mode optique non linéaire au seuil de la fréquence de coupure basse peut être considéré comme une caractéristique générale des réseaux non linéaires avec des interactions de type cubique-quartique [50, 51, 52, 53]. De plus, il a été démontré numériquement que, pour de tels modèles, il existe des seuils critiques pour les paramètres non linéaires au-dessus desquels les modes optiques disparaissent. Cela revêt une importance particulière car le seuil numérique permet de définir l'existence ou non de modes localisés.

Cependant, pour un système physique réel, il serait très intéressant de déterminer analytiquement les modes localisés car cela permettrait une interprétation plus fine et étendue de la dynamique de tels systèmes. Généralement après une modélisation, on arrive très souvent à des modèles mathématiques et la principale difficulté est d'être capable d'interpréter l'apport de chaque paramètre (représentant chacun une grandeur physique, un phénomène, une action, ou de manière générale, ayant une signification physique) de l'équation sur le phénomène à étudier. Alors il existe plusieurs méthodes théoriques pour étudier l'existence ou la naissance des excitations localisées non linéaires dans

les modèles. Mais c'est plus rare d'en trouver une qui met en exergue l'apport et l'impact de chaque paramètre de l'équation issue du modèle réel. Même lorsqu'on les utilise sous forme modifiée, en généralisant des interactions anharmoniques de type cubique-quartique, on ne les étudie que pour des valeurs spécifiques et bien précises de ces paramètres. Pourtant ces coefficients ou paramètres, en fonction du modèle physique considéré et de la finesse du développement asymptotique du potentiel U_c, peuvent prendre n'importe quelle valeur [12, 16, 21, 48, 40, 41, 54, 55, 7]. Une légère modification de ces paramètres peut provoquer un changement qualitatif ou topologique soudain du comportement dynamique du système [12, 21, 48, 41, 55, 7]. Il devient non seulement très important d'étudier le comportement des solutions pour les modèles décrits mathématiquement, mais aussi d'explorer comment ces résultats sont modulés par l'anharmonicité. Afin de traiter efficacement cette cruciale et importante question, la théorie ou technique de bifurcation représente de loin, le meilleur outil à prendre en compte [12, 21, 22, 48, 41, 55, 56, 57, 7]. À cette fin, le paragraphe suivant sera consacré à la présentation de l'équation discrète générale. Dans la limite des faibles amplitudes et pour des petits déplacements, nous déduirons la relation de dispersion non linéaire, réduisant les équations de base du mouvement à une équation non linéaire étendue de Schrödinger ($ENLS$).

3.2/ LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

En se limitant à des oscillations de faible et moyenne amplitude, c'est-à-dire pour $\Theta_n \rightarrow (\theta_0 + \varepsilon\theta_n)$, où $\varepsilon \ll 1$ et $\theta_0 = 0$ (mod.2π) est l'état fondamental ou le minimum du potentiel autour duquel les oscillations se produiront en donnant l'équation du mouvement de la nième particule, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta_n}{dt^2} &= G_2\left(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n\right) + G_3\left[(\theta_{n+1} - \theta_n)^2 - (\theta_n - \theta_{n-1})^2\right] \\ &+G_4\left[(\theta_{n+1} - \theta_n)^3 - (\theta_n - \theta_{n-1})^3\right] - \omega'^2_0(\sigma)\left[\theta_n + \varepsilon\alpha(\sigma)\theta_n^2 + \varepsilon^2\beta(\sigma)\theta_n^3\right].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Cette équation se déduit directement de l'hamiltonien (3.5) par dérivation temporelle. Il faut noter qu'avec le potentiel PR, $\omega'^2_0 = \omega_0^2/2\sigma^2$, tandis que $\alpha(\sigma) = 0$. En plus, $\beta(\sigma) = \left(2\sigma^2 - 3\right)\Big/6\sigma^2$ dépend fortement de la déformabilité σ et peut être positif ou négatif. Malgré les différences d'origine majeures pouvant exister dans les modèles initiaux, l'équation (3.6) généralise les résultats précédemment établis dans l'ADN [5, 13, 22], dans des réseaux discrets non linéaires caractérisés par les potentiels déformables et des interactions non linéaires et dispersives [38, 42, 43], dans le réseau de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) [34], lors de la diffusion des ondes par les inhomogénéités statiques localisées ou par des potentiels génériques dépendant du temps [44, 45], et bien d'autres.

Nous nous limitons maintenant au couplage faiblement non linéaire. Il est bien connu que l'équation NLS obtenue à partir de cette approximation donne lieu à deux types de solutions localisées dans un milieu infiniment long. Pour un milieu fini, des ondes stationnaires sont attendues et la transmissivité peut bien être caractérisée. Afin d'inclure les effets de l'anharmonicité et de la discrétisation du système, nous utilisons la méthode des échelles de temps multiples associée à une approximation quasidiscrète apportée par Tsurui [58, 59, 60, 61]. Ainsi, on définit

$$\theta_n(t) = A(X,\tau)e^{j\varphi_n} + c.c., \tag{3.7}$$

où $c.c.$ désigne le complexe conjugué, $X = \varepsilon(n - v_g t)$ et $\tau = \varepsilon^2 t$. v_g est la vitesse de groupe associée au paquet d'onde : $v_g = d\omega/dk$. La variable " rapide " $\varphi_n = k_p n - \omega_p t$, représentant la phase de l'onde porteuse est considérée comme complètement discrète. Notons que, dans ces conditions, tous les termes du paramètre G_3 disparaissent en raison de la parité de l'équation (3.6). Une autre solution consisterait à prendre un terme DC et une seconde harmonique en ω comme dans [28, 62, 63, 64, 65], mais ils seront négligeables en première approximation et ne seront pas considérés dans cette étude. Le nombre d'onde k_p et la pulsation de l'onde porteuse ω_p sont liés par la relation de dispersion non linéaire,

$$\omega_p^2 = \omega'^2_0 + 4G_2 \sin^2\left(\frac{k_p}{2}\right) + 48G_4 \sin^4\left(\frac{k_p}{2}\right)|A|^2. \tag{3.8}$$

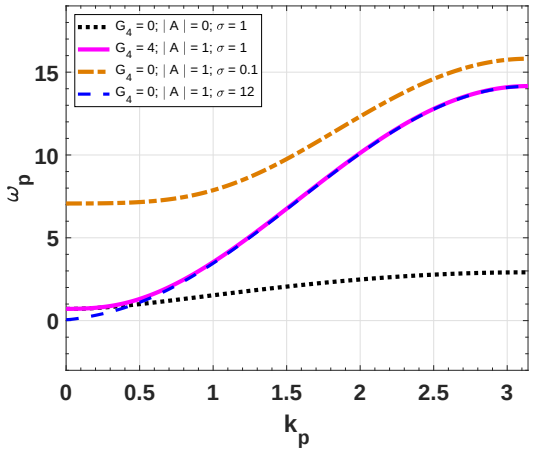


FIGURE 3.2 – Courbes de dispersion d'un système NKG ayant pour paramètres $\omega_0 = 1$, $G_2 = 2$, et pour différentes valeurs de G_4, $|A|$ et σ.

Dans l'approximation linéaire, la relation (3.8) se réduit à la relation de dispersion linéaire classique avec un gap inférieur fini : $0 < \omega_p < \omega'_0$, $(k = 0)$ et un gap supérieur semi-infini : $\omega > \sqrt{\omega'^2_0 + 4G_2}$, $(k_p = \pi)$. La relation de dispersion non linéaire $\omega_p = f\left(k_p, |A|^2\right)$ montre que la fréquence de coupure haute est modifiée lorsque $|A|$ croît (voir Fig. 3.2).

En substituant la relation (3.7) dans l'Eq(3.6), on constate que la partie enveloppe obéit à une nouvelle Équation Non Linéaire de Schrödinger Étendue(ENLSE) :

$$\begin{aligned} j\frac{\partial A}{\partial \tau} + P\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + Q(\sigma)|A|^2 A = {} & jc_1|A|^2\frac{\partial A}{\partial X} + c_2\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)^2 A^* + (c_2 + c_3)\left(|A|^2\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right) \\ & + c_3\left(A^2\frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} + 2A\frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial A^*}{\partial X}\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

où

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\omega_p}\left(G_2\cos k - v_g^2\right), \\ Q(\sigma) &= \frac{3}{2\omega_p}\left[2G_4\left(8\cos k - 2\cos 2k - 6\right) - \omega'^2_0\beta(\sigma)\right] \end{aligned}$$

sont respectivement la dispersion de la vitesse de groupe et le coefficient non linéaire. Les paramètres c_i $(i = 1, 2, 3)$ résultent des interactions interparticulaires quadratique-quartique, décrivent l'extension non linéaire de l'équation de Schrödinger non linéaire et sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{6G_4}{\omega_p}\left(\sin 2k_p - 2\sin k_p\right), \\ c_2 &= \frac{3G_4}{\omega_p}\left(\cos 2k_p - \cos k_p\right), \\ c_3 &= \frac{3G_4}{\omega_p}\left(1 - \cos k_p\right)\cdot \end{aligned}$$

L'équation (3.9) est l'équation principale et directrice de notre travail. Malgré le fait qu'elle soit issue de la modélisation d'un système atomique, cette équation généralise les résultats précédemment établis dans l'ADN [2, 3, 5], dans les fibres optiques [18, 66, 67], dans les nanocomposites en métal-diélectrique [37, 68], dans des réseaux discrets non linéaires [38, 39, 42, 43], dans la diffusion des ondes par des inhomogénéités statiques localisées ou par des potentiels génériques dépendant du temps [69, 70, 44, 45], parmi bien d'autres possibilités.

3.3/ BIFURCATIONS ET SOLUTIONS DE L'ENLSE

3.3.1/ DYNAMIQUE DES SOLITONS DE GAP

3.3.1.1/ ÉQUATION D'ÉVOLUTION

Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que le comportement dynamique du système près de la zone de gap, en particulier au gap inférieur $(k_p, \omega_p) = (0, \omega'_0)$. Dans ces conditions, la vitesse de groupe est nulle et l'équation non linéaire modifiée de Schrödinger (3.9) se réduit à :

$$j\frac{\partial A}{\partial \tau} + P\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + Q|A|^2 A = -\frac{P}{12}\frac{\partial^4 A}{\partial X^4} - -\frac{3}{2}\frac{G_4}{\omega_p}\left[\left(\left(\frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2}\right)\frac{\partial A}{\partial X} + 2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right)\frac{\partial A^*}{\partial X}\right)\frac{\partial A}{\partial X}\right], \tag{3.10}$$

avec $P = G_2/2\omega_p$ et $Q(\sigma) = \frac{1}{8}\frac{\left(3-2\sigma^2\right)}{\sigma^4}\frac{\omega_0^2}{\omega_p}$.

L'équation NLS (3.10) régit la modulation d'un train d'ondes quasi-monochromatique dans le cas de systèmes non linéaires et dispersifs. L'intérêt particulier de cette équation est son intégrabilité.

Pour certaines conditions aux limites, il a été montré que l'équation NLS admet des solutions solitons. Lorsque le milieu non linéaire est limité ou borné, ses solutions peuvent

être exprimées en fonction des fonctions elliptiques de Jacobi [71, 72, 73, 74, 75, 76]. Dans ce cas, l'enveloppe est au repos dans l'espace puisque la vitesse de groupe v_g s'annule pour $k_p = 0$, ce qui implique que le vecteur d'onde de la porteuse est au milieu de la zone de Brillouin et ne peut de ce fait transporter de l'énergie. Maintenant, nous cherchons des fonctions enveloppe de la forme

$$A(X,\tau) = \psi(X)\, e^{-j\Omega\tau}, \tag{3.11}$$

où Ω est la fréquence angulaire de l'enveloppe définie par :

$$\Omega = \omega - \omega_0^{'}. \tag{3.12}$$

Ici ω'_0 est la fréquence de la porteuse et ω, celle de l'onde incidente qui pénètre dans le milieu non linéaire. En restant dans l'hypothèse des faibles variations spatiales de l'enveloppe, Ω doit être très petit comparé à ω et à ω_p, ainsi $\omega \approx \omega_p$. Par ailleurs, Ω est négatif pour $\omega < \omega_0^{'}$, ce qui sera considéré dans la suite. $\psi(X)$ donne la forme spatiale de l'enveloppe. La substitution de l'enveloppe (3.11) dans l'équation NLS (3.10) permet d'arriver à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dX^2}\left[P + \frac{9}{2}\frac{G_4}{\omega'_0}\left(\frac{d\psi}{dX}\right)^2\right] + \Omega\psi + Q\psi^3 = 0\cdot \tag{3.13}$$

Dans l'Eq. (3.13), nous n'avons conservé que les termes dominants en G_2 (représenté par P) et les termes dominants en G_4 (termes non linéaires d'ordre ψ^3). Cette hypothèse consiste à négliger la dérivée du quatrième ordre de la variable spatiale X, qui est très petite comparée aux dérivées d'ordre deux. Ceci reste dans le même esprit que Dusuel et al. dans leurs travaux de 1998 [41].

Cette équation (3.13) peut mieux être étudiée dans le plan de phase $\left(\psi, y = \frac{d\psi}{dX}\right)$ et peut à cet effet être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{d\psi}{dX} = y, \quad \frac{dy}{dX} = \frac{c_1\psi(c_2 - \psi^2)}{c_3 - y^2}, \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{36}\frac{\left(2\sigma^2 - 3\right)\omega_0^2}{G_4\sigma^4}, \\ c_2 &= \frac{8\Omega\sigma^4}{\left(2\sigma^2 - 3\right)\omega_0}, \\ c_3 &= -\frac{1}{9}\frac{G_2}{G_4}\cdot \end{aligned}$$

Nous constatons que les paramètres (c_1, c_2, c_3) dépendent fortement des variations de la forme du substrat caractérisée par le paramètre σ et/ou de l'anharmonicité des interactions inter particulaires via le paramètre G_4. D'un point de vue mathématique, on sait qu'un tel système non linéaire peut se comporter de manière inattendue. Par exemple il serait possible que les solutions puissent présenter de brutales modifications. En faisant

varier la valeur des paramètres de ce système, la forme de la solution peut changer brusquement ; plusieurs solutions peuvent apparaître ou disparaître, perdre ou gagner de la stabilité, etc. ... On parle alors de bifurcation. Il est admis que le cadre mathématique le plus adapté à l'étude de ces systèmes dynamiques est la théorie des bifurcations. D'où l'importance des paramètres (c_1, c_2, c_3) pour l'étude de l'équation différentielle (3.13). Jusqu'ici dans la littérature [12, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 7, 77, 68], uniquement certaines valeurs précises et certains signes des paramètres c_1, c_2, c_3 ont été utilisés. C'est vrai que la connaissance d'un régime permanent pour une valeur de ces paramètres c_1, c_2, c_3 est intéressante pour celui qui désire étudier le système, mais cela reste insuffisant. Une vision globale sur l'apparition de phénomènes exotiques pour l'ensemble des valeurs possibles des paramètres s'impose, ce qui permet d'obtenir une connaissance synthétique des comportements possibles du système et de leurs domaines d'occurrence. C'est grâce à la théorie des bifurcations qu'il est possible d'avoir une telle vision.

Si $c_3 > 0$, le système (3.14) est un système d'ondes progressives singulier de deuxième classe dépendant du groupe de paramètres (c_1, c_2, c_3) [56, 7, 78]. Il a deux droites singulières définies par les équations $y = \pm y_l$, avec $y_l = \sqrt{c_3}$. En utilisant la transformation $dX = (c_3 - y^2)d\xi$, le système (3.14) devient le système régulier associé et défini comme :

$$\frac{d\psi}{d\xi} = y(c_3 - y^2), \quad \frac{dy}{d\xi} = c_1\psi\left(c_2 - \psi^2\right)\cdot \tag{3.15}$$

Les systemes (3.14) et (3.15) ont la même intégrale première :

$$H(\psi, y) = \frac{1}{2}c_3y^2 - \frac{1}{2}c_1c_2\psi^2 + \frac{1}{4}c_1\psi^4 - \frac{1}{4}y^4$$

$$= h, \tag{3.16}$$

où h est une constante. Notons tout de même que les systèmes (3.14) et (3.15) sont impairs en y et ψ. Ainsi, tous les portraits de phase présentent une double symétrie, ce qui permet de réduire l'analyse à $(\psi \geq 0, y \geq 0)$. Lorsque $\sigma \in \left]0, \sqrt{3/2}\right[$ avec $\Omega < 0$, c'est à dire pour $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$, alors le système (3.15) a neuf points d'équilibre : l'origine $O(0,0)$, les points $M_1\pm\left(\pm\sqrt{c_2}, 0\right)$, $M_2^{\pm}\left(0, \pm\sqrt{c_3}\right)$, $M_3^{\pm}\left(-\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}\right)$, et $M_4^{\pm}\left(\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}\right)$. Quand $c_2 = 0$ et $c_3 \neq 0$, ou $c_2 \neq 0$ et $c_3 = 0$, le système (3.15) n'a plus que trois points d'équilibre puisque les points $M_2^{\pm}\left(0, \pm\sqrt{c_3}\right)$, $M_3^{\pm}\left(-\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}\right)$, et $M_4^{\pm}\left(\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}\right)$ sont respectivement confondus avec les autres points d'équilibre du système (3.14).

Soit $M(\psi_l, y_l)$, la matrice Jacobienne du système (3.15) aux points d'équilibre (ψ_l, y_l) ayant pour déterminant $J(\psi_l, y_l)$. Nous aurons :

$$\begin{aligned}
J(0,0) &= \det M(0,0) = -c_1c_2c_3, \\
J(0, \pm\sqrt{c_2}) &= \det M(0, \pm\sqrt{c_2}) = J(\pm\sqrt{c_2}, 0) \\
&= 2c_1c_2c_3, \\
J(\pm\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}) &= \det M(\pm\sqrt{c_2}, \pm\sqrt{c_3}) = -4c_1c_2c_3.
\end{aligned}$$

La théorie des systèmes dynamiques dans le plan de phase donne les résultats suivants pour un point d'équilibre du système :

— si $J < 0$, alors le point d'équilibre est un point de selle ;

— si $J > 0$, alors c'est un point central ;
— si $J = 0$ et si l'indice de Poincaré du point d'équilibre est égal à 0, alors ce point d'équilibre est un point de rebroussement [79, 56, 7, 78].

Pour les valeurs de l'Hamiltonien défini par (3.16), on a

$$h_0 = H(0,0) = 0, \tag{3.17a}$$

$$h_1 = H(\pm\sqrt{c_2},0) = -\frac{1}{4}c_1c_2^2, \tag{3.17b}$$

$$h_2 = H(0,\pm\sqrt{c_3}) = \frac{1}{4}c_3^2, \tag{3.17c}$$

$$h_3 = H(\pm\sqrt{c_2},\pm\sqrt{c_3}) = \frac{1}{4}c_3^2 - \frac{1}{4}c_1c_2^2. \tag{3.17d}$$

Pour résoudre le système (3.14) (qui peut aussi bien être remplacé par (3.15) si $c_3 < 0$, sinon (3.14) et (3.15) sont équivalents), et pour tracer les portraits de phase, nous allons discuter en fonction des différents cas (pour toutes les valeurs possibles des paramètres c_1, c_2 et c_3). En utilisant les informations ci-dessus, pour effectuer une analyse qualitative, nous représentons également dans les portraits de phase les droites singulières correspondantes. Elles croisent transversalement certaines familles d'orbites. Il convient de souligner que, lorsque ces droites singulières du système (3.14) existent, les champs de vecteurs définis par le système (3.14) et le système (3.15) sont différents. Si une orbite du système (3.14) intersecte une droite singulière $y = \pm y_l$ en un point particulier $(\psi_0, \pm y_l)$, la dérivée seconde $\dfrac{d^2\psi}{dX^2}$ devient infinie, comme le montre l'équation (3.13). La direction du champ de vecteurs défini par le système (3.14) change très rapidement en sens inverse du champ de vecteurs défini par le système (3.15). Cela implique que la solution d'onde $\psi(X)$ du système (3.14), associée au système (3.15), dégénère en une solution de rupture. Ceci signifie physiquement une dislocation du réseau de particules, comme nous allons le montrer dans les sections suivantes. Les portraits de phase produits par les champs de vecteurs des systèmes (3.14) et (3.15) déterminent toutes les solutions possibles d'ondes d'enveloppes $\psi(X)$ du modèle.

3.3.1.2/ TRAJECTOIRES DE PHASE ET SOLUTIONS

Avant de présenter les différents portraits de phase, nous montrons comment obtenir les différentes solutions à partir des coordonnées polaires. En posant :

$$\psi = r\cos\varphi, \tag{3.18a}$$
$$y = r\sin\varphi, \tag{3.18b}$$

le système (3.15) prend la forme :

$$\frac{dr}{d\xi} = r\cos\varphi\sin\varphi\left[(c_3 + c_1c_2) - r^3\sin\varphi\cos\varphi\left(\sin^2\varphi + c_1\cos^2\varphi\right)\right], \tag{3.19a}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \left(c_1c_2\cos^2\varphi - c_3\sin^2\varphi\right) + r^2\left(\sin^4\varphi - c_1\cos^4\varphi\right), \tag{3.19b}$$

et son intégrale première (3.16) devient :

$$\begin{aligned} H(r,\varphi) &= \frac{1}{2}r^2\left(c_3\sin^2\varphi - c_1c_2\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{4}r^4\left(c_1\cos^4\varphi - \sin^4\varphi\right) \\ &= h. \end{aligned} \tag{3.20}$$

De cet Hamiltonien (3.20), nous avons :

$$r^2(\varphi) = \frac{1+\tan^2\varphi}{c_1 - \tan^4\varphi}\left(c_1c_2 - c_3\tan^2\varphi \pm \sqrt{\varrho_1 + \varrho_2\tan^2\varphi + \varrho_3\tan^4\varphi}\right), \tag{3.21}$$

avec

$$\varrho_1 = c_1^2c_2^2 + 4hc_1, \tag{3.22a}$$

$$\varrho_2 = -2c_1c_2c_3, \tag{3.22b}$$

$$\varrho_3 = c_3^2 - 4h. \tag{3.22c}$$

Notons que le membre de droite de l'équation Eq. (3.21) doit être réel et positif.

De (3.19b), nous avons :

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm\frac{\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2\tan^2\varphi + \varrho_3\tan^4\varphi}}{1+\tan^2\varphi}. \tag{3.23}$$

En définissant $\mu(\xi) = \tan[\varphi(\xi)]$, avec $\mu(\xi_0) = 0$, l'équation (3.23) peut être intégrée de la manière suivante :

$$\xi - \xi_0 = \pm\int_0^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\varrho_1 + \varrho_2\mu^2(\xi) + \varrho_3\mu^4(\xi)}}. \tag{3.24}$$

Revenant à la représentation paramétrique des solutions $\psi = \psi(\xi)$ et $y = y(\xi)$ du système (3.15), elle sera donnée par $\psi(\xi)$ et $y(\xi)$,

$$\psi^2(\xi) = \frac{c_1c_2 - c_3\mu^2(\xi) \pm \sqrt{\varrho_1 + \varrho_2\mu^2(\xi) + \varrho_3\mu^4(\xi)}}{c_1 - \mu^4(\xi)}, \tag{3.25a}$$

$$y^2(\xi) = \mu^2(\xi)\cdot\psi^2(\xi). \tag{3.25b}$$

En utilisant les résultats de l'analyse qualitative de la section 3.3.1.1, nous présentons dans la suite les portraits de phase des différentes bifurcations des systèmes (3.14) et (3.15), suivant toutes les différentes combinaisons possibles des paramètres du système.

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $0 < c_3 < \sqrt{c_1 c_2^2}$ (voir Fig. 3.3).

Pour les différentes valeurs de h, définissant toutes les orbites possibles du plan de phase autour des points d'équilibre ou en intersections possibles avec les droites singulières $y = \pm y_l$, et $y_l = \sqrt{c_3}$, nous allons successivement présenter quelques cas spécifiques.

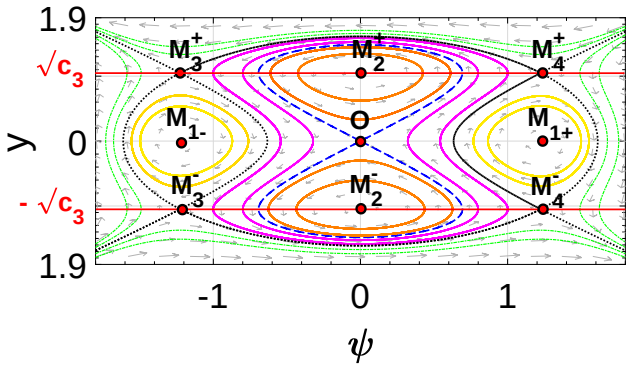


FIGURE 3.3 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 > 0$, $0 < c_3 < \sqrt{c_1 c_2^2}$. Pour ce cas $c_2 = 1$ (pointillés noirs pour $h = h_3$; pointillés bleus pour $h = 0$, courbe jaune pour $h_1 < h < h_3, \ldots$).

1. Lorsque $H(\psi, y)$ présenté en (3.16) est égal à $h_3 = \frac{1}{4}\left(c_3^2 - c_1 c_2^2\right) < 0$, les trajectoires (en pointillés noirs sur la Fig. 3.3) relient le point M_4^+ à M_3^+ (cas a), ou M_4^- à M_4^+ à gauche de M_{1+} (cas b), ou M_4^+ à M_4^- à droite de M_{1+} (cas c). Notons que les comportements des autres quadrants peuvent être facilement déduits en utilisant les symétries du système.

De l'Hamiltonien (3.16), nous avons :

$$\begin{aligned} 4H(\psi, y) - 4h_3 &= \left[\sqrt{c_1}\psi^2 + y^2 - (\sqrt{c_1}c_2 + c_3)\right]\left[\sqrt{c_1}\psi^2 - y^2 - (\sqrt{c_1}c_2 - c_3)\right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

où les premières parenthèses conduisent aux cas a et c, comme trajectoires elliptiques, tandis que les secondes conduisent au cas b, comme trajectoire hyperbolique. Les calculs donnent respectivement :

$$\psi(X) = \frac{-\sqrt{c_3 + \sqrt{c_1}c_2}}{c_1^{\frac{1}{4}}} \sin\left(c_1^{\frac{1}{4}} X\right) \tag{3.27}$$

pour le cas a,

$$\psi(X) = \frac{\sqrt{\sqrt{c_1}c_2 - c_3}}{c_1^{\frac{1}{4}}} \cosh\left(c_1^{\frac{1}{4}} X\right) \tag{3.28}$$

pour le cas b et

$$\psi(X) = \frac{\sqrt{c_3 + \sqrt{c_1}c_2}}{c_1^{\frac{1}{4}}} \cos\left(c_1^{\frac{1}{4}} X\right) \tag{3.29}$$

pour le cas c.

Par ailleurs, à partir de (3.24) et en utilisant (3.25a), nous retrouvons aussi le cas a :

$$\psi(\xi) = c_2 \frac{\left(c_3 + \sqrt{c_1}c_2\right)\tanh^2\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)}{c_3 + \sqrt{c_1}c_2\tanh^2\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)}, \tag{3.30}$$

comme le cas b :

$$\psi(\xi) = c_2 \frac{\left(\sqrt{c_1}c_2 - c_3\right)}{\sqrt{c_1}c_2 - c_3\tanh^2\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)} \tag{3.31}$$

et enfin le cas c,

$$\psi(\xi) = c_2 \frac{\left(\sqrt{c_1}c_2 + c_3\right)}{\sqrt{c_1}c_2 + c_3\tanh^2\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)}. \tag{3.32}$$

Dans tous ces cas, $y(\xi)$ peut être obtenu de $\psi(\xi)$ à partir de (3.25b). La comparaison entre (3.27) et (3.30) (et, respectivement de (3.28) et (3.31), (3.29) et (3.33)) montre que les trajectoires intéressantes dans la figure (3.3) sont correctement décrites, avec les variables X ou ξ. Il existe une distorsion entre elles due à la relation $dX = \left(c_3 - y^2\right)d\xi$ introduite lors de la transformation du système (3.14) en système (3.15), à savoir,

$$X = \frac{1}{c_1^{\frac{1}{4}}}\text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{c_3}{\sqrt{c_1}c_2}}\tanh\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)\right). \tag{3.33}$$

Dans cette relation de distorsion, il est clair que ξ appartient à $]-\infty, +\infty[$, alors que X est borné, avec des limites atteintes lorsque y devient $\pm\sqrt{c_3}$.

Il faut souligner ici que, lorsqu'une particule donnée se déplace de sorte que $y = \dfrac{d\psi}{dX}$ tende vers $\pm y_l = \pm\sqrt{c_3}$, la force résultante exercée par la chaîne (entre proches voisins gauche et droit) sur cette particule disparaît, ce qui signifie que la particule n'est plus liée à la chaîne [7]. Ainsi, le comportement de la particule est indépendante de la chaîne, comme le montre (3.13) où $P + \dfrac{9}{2}\dfrac{G_4}{\omega'_0}\left(\dfrac{d\psi}{dX}\right)^2 = 0$, et la fonction d'onde $\psi(X)$ doit satisfaire $\Omega\psi + Q\psi^3 = 0$, c'est à dire $\psi^2 = c_2$, ou $\dfrac{d^2\psi}{dX^2} = \infty$. Deux droites singulières apparaissent dans l'espace des phases : lorsqu'on atteint le point avec $y = \pm y_l$, $\psi(X)$ peut dégénérer en solution de rupture avec dislocation de la chaîne.

2. Lorsque $H(\psi, y)$ est égale à $h_0 = 0$

Ceci correspond aux trajectoires en pointillés bleus sur la Fig. 3.3 qui partent de l'origine. A la place de (3.24), nous aurons ici :

$$\int_{\xi}^{0} d\xi' = + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{d\mu'}{c_3\mu'^2 - c_1c_2}, \tag{3.34}$$

ce qui conduit à l'équation de la trajectoire autour de M_2^+ pour le point selle $O(0,0)$:

$$\mu = \tan\left[\varphi\left(\xi\right)\right] = -\sqrt{\frac{c_1c_2}{c_3}}\frac{1}{\tanh\left(\sqrt{c_1c_2c_3}\xi\right)}. \tag{3.35}$$

En plus,

$$\psi^2\left(\xi\right) = 2\frac{c_3\mu^2 - c_1c_2}{\mu^4 - c_1} \quad \text{et} \tag{3.36a}$$

$$y^2\left(\xi\right) = 2\mu^2\frac{c_3\mu^2 - c_1c_2}{\mu^4 - c_1}. \tag{3.36b}$$

Dans ce cas, malgré le fait que $\psi\left(\xi\right)$ et $y\left(\xi\right)$ soient plus fastidieux à obtenir, nous pouvons apprécier les mérites de la méthode puissante consistant à remplacer le système (3.14) par le système (3.15).

Il est intéressant de noter que cette trajectoire atteint la droite singulière $y = +\sqrt{c_3}$ pour $\psi = \psi_c = \dfrac{c_3^2}{c_1c_2 + \sqrt{c_1^2c_2^2 - c_1c_3^2}}$, où la chaîne peut éventuellement subir une dislocation.

3. Lorsque $h_1 < H\left(\psi, y\right) < h_3 < 0$

Dans ce dernier cas, les orbites principales, (en courbes jaunes sur la Fig. 3.3) n'ont pas d'intersection avec la droite singulière $y = \pm\sqrt{c_3}$ et correspondent à la famille des trajectoires fermées entourant le point d'équilibre $M_{1+}\left(+\sqrt{c_2}, 0\right)$ (et par symétrie le point $M_{1-}\left(-\sqrt{c_2}, 0\right)$). Ces dernières conduisent à des solutions périodiques du système (3.14) ou (3.15). En remplaçant $\varrho_1 + \varrho_2\mu^2(\xi) + \varrho_3\mu^4(\xi)$ par $\rho_3\left(\mu_1^2 - \mu^2\right)\left(\mu_2^2 - \mu^2\right)$ dans (3.23) avec

$$\mu_1^2 = \frac{c_1c_2c_3 + 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{c_3^2 - 4h} \quad et \tag{3.37a}$$

$$\mu_2^2 = \frac{c_1c_2c_3 - 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{c_3^2 - 4h}, \tag{3.37b}$$

on obtient :

$$\mu = \tan\left[\varphi(\xi)\right] = \mu_2 \mathrm{sn}\left(\beta_0\xi, \kappa\right), \tag{3.38}$$

où $\beta_0 = \mu_1\sqrt{c_3^2 - 4h}$ et $\kappa = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$. De (3.38) et (3.25), on obtient les représentations paramétriques des solutions périodiques entourant le point d'équilibre M_{1+} et définies comme suit :

$$\psi^2(\xi) = \frac{1}{c_1 - \mu_2^4 \mathrm{sn}^4(\beta_0\xi,\kappa)}\left[c_1c_2 - c_3\mu_2^2\mathrm{sn}^2(\beta_0\xi,\kappa) \pm \sqrt{\varrho_1}\mathrm{cn}(\beta_0\xi,\kappa)\mathrm{dn}(\beta_0\xi,\kappa)\right],$$

et

$$y^2(\xi) = \mu_2^2\mathrm{sn}^2(\beta_0\xi,\kappa)\psi^2(\xi)\cdot \tag{3.39}$$

sn, cn, dn et tn étant les fonctions elliptiques de Jacobi du premier ordre [80].

Pour les orbites jaunes fermées de la Fig. 3.3, les ondes définies par les Eqs. (3.38) et (3.39) sont périodiques en ξ, avec pour période $4K(k)$ [81, 82, 83, 84, 80], c'est-à-dire périodiques en fonction également de la variable de propagation X qui est liée aux variables physiques par $X = n - v_g t$, pour $\varepsilon \to 1$. Sachant que X et ξ sont liés par la définition du système (3.15) par :

$$X(\xi) = c_3\xi - \int_0^{\xi} y^2(\xi')d\xi', \tag{3.40}$$

nous avons la période temporelle T en X :

$$T = c_3\frac{4K(\kappa)}{\beta_0} - 4\int_0^{\frac{K(\kappa)}{\beta_0}} y^2(\xi')\,d\xi'. \tag{3.41}$$

Pour $c_3 < c_1^{\frac{1}{2}}c_2 < \dfrac{1}{2}$, les calculs permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} T = \frac{c_2\sqrt{c_1}+c_3}{\beta_0}\Bigg[&\frac{\mu_2}{c_1^{\frac{1}{4}}}\frac{\pi\Lambda_0\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{\mu_1^2}{\mu_1^2+c_1^{\frac{1}{2}}}\right),\kappa\right]}{\sqrt{\left(1+\dfrac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{2}}}+\kappa^2\right)}} + \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{2}}}}K(\kappa)\Bigg] \\ &+\frac{2\left(c_2\sqrt{c_1}-c_3\right)}{\beta_0}\left[K(\kappa)+\frac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{4}}}\frac{K(\kappa)\,\mathrm{Z}\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{\mu_1}{c_1^{\frac{1}{4}}}\right),\kappa\right]}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{2}}}\right)+\left(\kappa^2-\dfrac{\mu_2^2}{c_1^{\frac{1}{2}}}\right)}}\right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

où Λ_0 et Z sont respectivement les fonctions Lambda de Heuman et la fonction Zeta de Jacobi [80].

Il est intéressant de noter ici que (3.42) permet d'obtenir la période en X pour les oscillations dont la fréquence est dans le gap inférieur, par exemple pour $\Omega < 0$, $\sigma < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $G_4 < 0$.

Pour les autres jeux de paramètres (c_1, c_2, c_3), nous présenterons les plans de phase (ψ, y), mais en nous focalisant uniquement sur les orbites fermées qui correspondent aux oscillations dans le gap puisque ces dernières permettront d'étudier comment les ondes peuvent passer à travers un milieu non linéaire de longueur finie (voir chapitre 4)

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 > 0$, $c_3 = \sqrt{c_1 c_2^2}$ (voir Fig. 3.4).

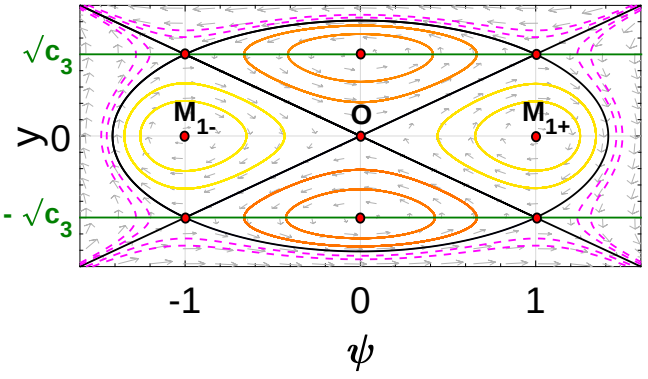


FIGURE 3.4 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 > 0$, $c_3 = \sqrt{c_1 c_2^2}$.

Le cas $H(\psi, y) = h$, $h \in]h_1, 0[$ correspond aux orbites jaunes fermées de la figure Fig. 3.4 entourant les points d'équilibre $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2}, 0)$ et conduisant ainsi à deux familles de solutions périodiques de l'équation (3.14). Ces ondes périodiques ont des profils similaires à ceux obtenus aux équations (3.38 - 3.39), avec cette fois-ci :

$$\mu_1^2 = \frac{c_1^{\frac{3}{2}} c_2^2 + 4|h|\sqrt{c_1}}{c_1 c_2^2 - 4h},$$

$$\mu_2^2 = \frac{c_1^{\frac{3}{2}} c_2^2 - 4|h|\sqrt{c_1}}{c_1 c_2^2 - 4h}.$$

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 > 0$, $c_3 > \sqrt{c_1 c_2^2}$ (Fig. 3.5)

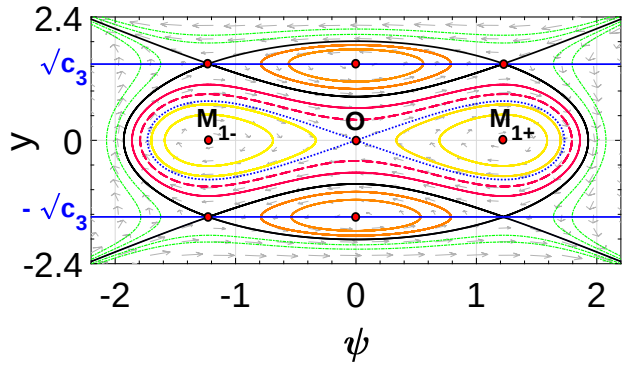


FIGURE 3.5 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 > 0$, $c_3 > \sqrt{c_1 c_2^2}$.

1. Le cas $H(\psi, y) = h$, $h \in]h_1, 0[$ correspond aux familles de courbes jaunes encerclant les points $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2}, 0)$. Celles-ci correspondent aux ondes périodiques du système

(3.14). L'orbite périodique qui entoure le point d'équilibre $M_{1+}(\sqrt{c_2},0)$ a la même représentation paramétrique que les solutions (3.39).

2. $H(\psi,y)=0$

correspond aux orbites homoclines en pointillés bleus de la figure Fig. 3.5 du système (3.14) qui entourent les points $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2},0)$ et qui passent par l'origine. Elles admettent comme solutions des solitons bright et dark. De l'équation (3.23), il s'ensuit que

$$\tan\left[\varphi(\xi)\right]=\frac{c_1c_2}{\sqrt{c_3}}\tanh\left(\frac{c_1c_2}{2\sqrt{c_3}}\xi\right)\cdot \tag{3.43}$$

Par conséquent, le système (3.14) admet des ondes solitaires de la forme :

$$\psi(\xi)=\pm\left[\frac{2c_2c_3^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\varrho_4}{2}\xi\right)}{c_3^2-c_1c_2^2\tanh^4\left(\frac{\varrho_4}{2}\xi\right)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{avec}\quad X(\xi)=c_3\xi-\int_0^{\xi}c_3(\xi)d\xi. \tag{3.44}$$

$$\text{et}\quad y^2(\xi)=\frac{2c_1c_3c_2^2\sinh^2\left(\frac{\varrho_4}{2}\xi\right)}{c_3^2\cosh^4\left(\frac{\varrho_4}{2}\xi\right)-c_1c_2^2\sinh^4\left(\frac{\varrho_4}{2}\xi\right)}\cdot \tag{3.45}$$

3. $H(\psi,y)=h,\ h\in\,]0,h_3[$

Ceci correspond aux orbites (de couleur violette) fermées de la figure Fig. 3.5 et qui entourent à la fois les trois points d'équilibre $O(0,0)$ et $M_{1\pm}\left(\pm\sqrt{c_2},0\right)$, pour une famille de solutions périodiques. Dans ce cas,

$$\varrho_1+\varrho_2\mu^2+\varrho_3\mu^4=\sqrt{\varrho_3}\left(\mu_1^2-\mu^2\right)\left(\mu_2^2-\mu^2\right),$$

où

$$\mu_1^2=\frac{-c_1c_2c_3-2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2-c_3^2+4h)}}{(4h-c_3^2)},$$

$$\mu_2^2=\frac{-c_1c_2c_3+2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2-c_3^2+4h)}}{(4h-c_3^2)}\cdot$$

Par conséquent, en utilisant (3.24), nous obtenons

$$\tan\left[\varphi(\xi)\right]=\mu_2\mathrm{sn}(\omega_2\xi,\kappa_1), \tag{3.46}$$

où $\kappa_1^2=\dfrac{\mu_2^2}{\mu_1^2}$ et $\omega_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{\varrho_3}\mu_1\cdot$ Ainsi à partir de (3.26), nous avons

$$\psi(\xi) = \left[\frac{1}{c_1 - \mu_2^4 \mathrm{sn}^4(\omega_2\xi,\kappa_1)}\left[\left(c_1c_2 - c_3\mu_2^2\mathrm{sn}^2(\omega_2\xi,\kappa_1)\right) + \mu_2\omega_2\mathrm{cn}(\omega_2\xi,\kappa_1)\mathrm{dn}(\omega_2\xi,\kappa_1)\right]\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.47}$$

En outre,

$$y^2(\xi) = \frac{1}{c_1 - x_2^4\mathrm{sn}^4(\omega_2\xi,\kappa_1)}\left[(c_1c_2 - c_3x_2^2\mathrm{sn}^2(\omega_2\xi,\kappa_1)) + x_2\omega_2\mathrm{cn}(\omega_2\xi,\kappa_1)\mathrm{dn}(\omega_2\xi,\kappa_1)\right] \times x_2^2\mathrm{sn}^2(\omega_2\xi,\kappa_1) \tag{3.48}$$

Ici encore, Eq. (3.47) donne la représentation paramétrique des solutions périodiques.

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $0 < c_3 < \sqrt{-c_1c_2^2}$ (voir Fig. 3.6)

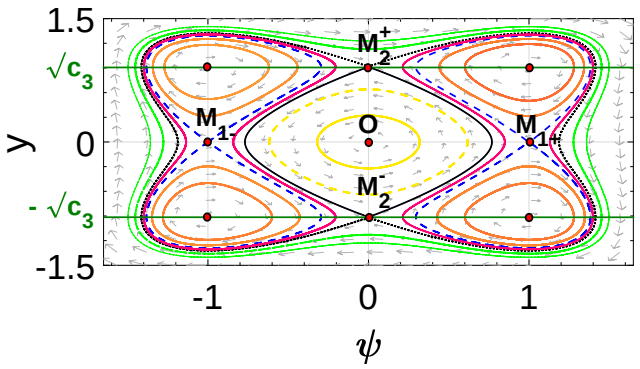


FIGURE 3.6 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $0 < c_3 < \sqrt{-c_1c_2^2}$.

1. Le cas $H(\psi, y) = h$, $h \in]0, h_2[$ correspond à la famille des courbes en pointillés jaunes qui entoure le point d'équilibre $O(0,0)$ et qui conduit aux ondes périodiques du système (3.14). Ici nous avons, $\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = \sqrt{\varrho_3}(\mu^2 + \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2)$, où

$$\mu_1^2 = -\frac{c_1c_2c_3 + 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{(4h - c_3^2)},$$
$$\mu_2^2 = \frac{-c_1c_2c_3 + 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{(4h - c_3^2)}.$$

Ces solutions périodiques ont les mêmes représentations paramétriques que (3.47 - 3.48).

2. $H(\psi, y) = h_2$

Nous avons, pour ce cas, une famille d'orbites hétéroclines en traits continus noirs de la Fig. 3.6, qui entourent le point $O(0,0)$ et qui passent par les points $M_2^{\pm}(0, \pm\sqrt{c_3})$. Il existe donc des solutions sous forme de solitons bright et dark. En effet, ϱ_3 est maintenant nul dans la formule (3.24) et il s'ensuit que :

$$\tan\left[\varphi(\xi)\right] = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right). \tag{3.49}$$

On obtient donc la représentation paramétrique d'une solution onde solitaire de la forme

$$\psi(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2\left[c_1 - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\sinh^4\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]}}\left[2\left(c_1c_2 - \frac{\varrho_1c_3}{\varrho_2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{\varrho_1}\cosh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.50}$$

avec

$$y^2(\xi) = \frac{1}{2\left[c_1 - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\sinh^4\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]}\left[2\left(c_1c_2 - \frac{\varrho_1c_3}{\varrho_2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{\varrho_1}\cosh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right). \tag{3.51}$$

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $c_3 > 0$ et $c_2 < 0$ (voir Fig. 3.7)

Les portraits de phase du système (3.14) sont présentés sur la Fig. 3.7.

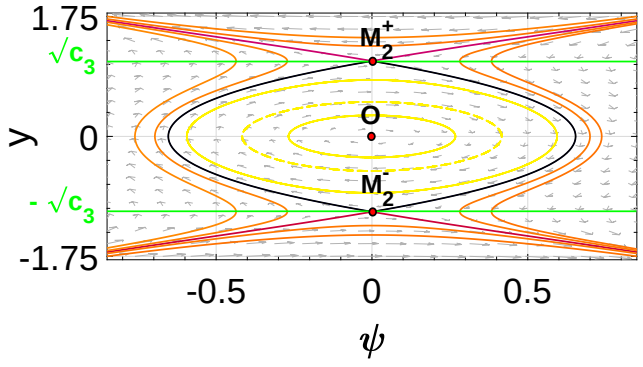


FIGURE 3.7 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $c_3 > 0$ et $c_2 < 0$.

Dans ce cas, les résultats sont similaires à ceux obtenus dans le tout premier cas du paragraphe précédent.

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $0 < c_3 = \sqrt{-c_1 c_2^2}$ (voir Fig. 3.8)

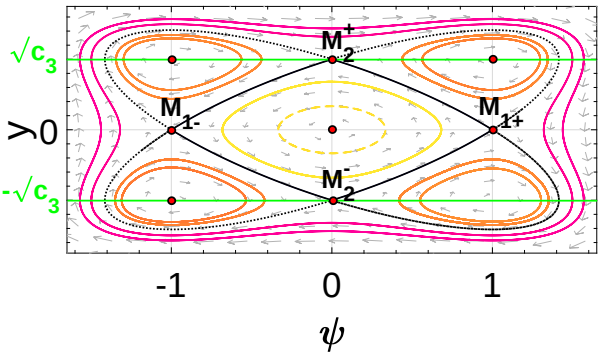


FIGURE 3.8 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $0 < c_3 = \sqrt{-c_1 c_2^2}$.

1. Le cas $H(\psi, y) = h$, $h \in]0, h_2[$ et $h_1 = h_2$ correspond à la famille des courbes fermées jaunes qui entourent $O(0,0)$. Il montre comme précédemment l'existence des solutions périodiques du système (3.14). Cependant ici, nous avons $\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = \sqrt{\varrho_3}(\mu^2 + \mu_1^2)(\mu^2 + \mu_2^2)$, où

$$\mu_1^2 = -\frac{c_2^2(-c_1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2hc_1(c_1c_2^2 + 2h)}}{(c_1c_2^2 + 4h)},$$

$$\mu_2^2 = -\frac{c_2^2(-c_1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2hc_1(c_1c_2^2 + 2h)}}{(c_1c_2^2 + 4h)}.$$

En utilisant la relation (3.24), nous obtenons

$$\tan[\varphi(\xi)] = \mu_2 \mathrm{tn}(\omega_3\xi, \kappa_2), \tag{3.52}$$

tn est la fonction de Jacobi avec $\kappa_2^2 = \dfrac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^2}$ et $\omega_3 = \dfrac{\mu_1\sqrt{\varrho_3}}{2}$. Par conséquent, nous obtenons, comme représentations paramétriques des solutions périodiques du système (3.14) :

$$\psi(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu_2^4\mathrm{tn}^4(\omega_3\xi, \kappa_2) - c_1}}\Big[\sqrt{-c_1}c_2\Big[\sqrt{-c_1} + x_2^2\mathrm{tn}^2(\omega_3\xi, \kappa_2)\Big]$$

$$- \mu_2\omega_3\mathrm{nc}(\omega_3\xi, \kappa_2)\mathrm{dc}(\omega_3\xi, \kappa_2)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$X(\xi) = c_3\xi - \int_0^{\xi} y^2(\xi)d\xi. \tag{3.53}$$

avec

$$y^2(\xi) = \frac{1}{x_2^4 \mathrm{tn}^4(\omega_3\xi,\kappa_2) - c_1}\Big[\sqrt{-c_1}c_2\Big[\sqrt{-c_1} + x_2^2\mathrm{tn}^2(\omega_3\xi,\kappa_2)\Big] \\ -x_2\omega_3\mathrm{nc}(\omega_3\xi,\kappa_2)\mathrm{dc}(\omega_3\xi,\kappa_2)\Big]\, x_2^2\mathrm{tn}^2(\omega_3\xi,\kappa_2). \tag{3.54}$$

2. $H(\psi, y) = h_1 = h_2$

Nous avons des orbites hétéroclines en traits continus noirs qui entourent le point d'équilibre $O(0,0)$ et qui relient les quatre points d'équilibre $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2}, 0)$ et $M_2^{\pm}(0, \pm\sqrt{c_3})$. Elles montrent la présence des solitons kink et anti-kink du système. Ici, $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$, et il en résulte pour l'hétérocline qui lie les points $M_{1+}(\sqrt{c_2}, 0)$ et $M_2^+(0, \sqrt{c_3})$ que :

$$\tan[\varphi(\xi)] = e^{-\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi}, \tag{3.55}$$

où $\varrho_2 = 8c_2^2(-c_1)^{\frac{3}{2}}$. La forme paramétrique de ces solutions kink et antikink est donnée par :

$$\psi(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{e^{-2\sqrt{\varrho_2}\xi} - c_1}}\left[\sqrt{-c_1}c_2\left(\sqrt{-c_1} + e^{-\sqrt{\varrho_2}\xi} + \sqrt{2}(-c_1)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.56}$$

où

$$y^2(\xi) = \frac{\sqrt{-c_1}c_2\left[\sqrt{-c_1} + e^{-\sqrt{\varrho_2}\xi} + \sqrt{2}(-c_1)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi}\right]}{e^{-\sqrt{\varrho_2}\xi} - c_1 e^{\sqrt{\varrho_2}\eta}}. \tag{3.57}$$

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $c_3 > \sqrt{-c_1c_2^2} > 0$ (voir Fig. 3.9)

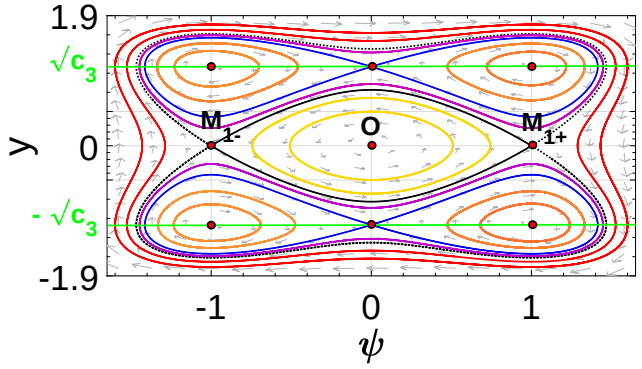


FIGURE 3.9 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $c_3 > \sqrt{-c_1c_2^2} > 0$

1. $H(\psi, y) = h$, $h \in]0, h_1[$ correspond aux orbites dorées jaunes qui entourent $O(0,0)$. Il existe des solutions périodiques ici encore. Avec

$$\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = \sqrt{\varrho_3}(\mu^2 + \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2),$$

où

$$\mu_1^2 = \frac{c_1c_2c_3 - 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{(4h - c_3^2)},$$

$$\mu_2^2 = -\frac{c_1c_2c_3 + 2\sqrt{hc_1(c_1c_2^2 - c_3^2 + 4h)}}{(4h - c_3^2)}.$$

Elles ont le même profil que les solutions (3.39).

2. $H(\psi, y) = h_1$

Ce cas correspond aux hétéroclines en traits continus noirs sur la figure 3.9 entourant les points $M_{1\pm}(\sqrt{c_2}, 0)$ ainsi que l'origine. Comme précédemment, elles conduisent aux solutions kinks et antikinks. Ici, $\varrho_1 = 0$ et nous avons :

$$\tan[\varphi(\xi)] = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_3}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right), \tag{3.58}$$

avec $\frac{\varrho_2}{\varrho_3} = -\frac{2c_3c_1c_2}{c_3^2 + c_1c_2^2}$. Nous obtenons les représentations paramétriques de ces ondes comme suit :

$$\psi(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2\left[c_1 - \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^2\sinh^4\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]}}\left[2\left[c_1c_2 - \frac{\varrho_2c_3}{\varrho_3}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho_3}}\cosh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.59}$$

avec

$$y^2(\xi) = \frac{1}{2\left[c_1 - \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^2\sinh^4\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]}\left[2\left[c_1c_2 - \frac{\varrho_2c_3}{\varrho_3}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho_3}}\cosh\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]\left[\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\varrho_2}}{2}\xi\right)\right]. \tag{3.60}$$

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 > 0$, $c_2 = 0$ et $c_3 > 0$ (voir Fig. 3.10)

1. $H(\psi, y) = h$, $h \in]0, h_2[$ correspond aux courbes jaunes fermées qui entourent l'origine $O(0, 0)$ et qui montrent l'existence de solutions périodiques. Dans ce cas,

$$\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = \varrho_3\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3} + \mu^4\right),$$

où $\varrho_1 = 16hc_1$, $\varrho_2 = 0$ et $\varrho_3 = 4c_3^2 - 16h$. Ainsi nous avons,

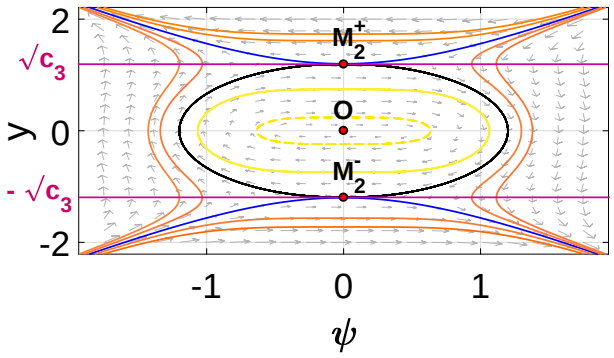


FIGURE 3.10 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 > 0$, $c_2 = 0$ et $c_3 > 0$.

$$\tan\left[\varphi(\xi)\right] = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1+\mathrm{cn}(\omega_4\xi,\kappa_3)}{1-\mathrm{cn}(\omega_4\xi,\kappa_3)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\equiv \mu(\xi), \tag{3.61}$$

avec $\omega_4 = (\varrho_1\varrho_3)^{\frac{1}{4}}$ et $\kappa_3^2 = \frac{1}{2}\cdot$ En substituant $\mu(\xi)$ dans la formule (3.24), on obtient les représentations paramétriques de ces ondes périodiques.

2. $H(\psi, y) = \frac{1}{4}c_3^2 = h_2$

Nous avons ici des hétéroclines en traits noirs sur la figure 3.10 qui relient les points d'équilibre $M_{2\pm}(0, \pm\sqrt{c_3})$. Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} h_2 - 4H(\psi, y) &= \left(y^2 - \sqrt{c_1}\psi^2 - c_3\right)\left(\sqrt{c_1}\psi^2 + y^2 - c_3\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ceci correspond à la boucle d'orbite hétérocline elliptique définie par $\sqrt{c_1}\psi^2 + y^2 = c_3$. En utilisant la première équation du système (3.14), nous trouvons la solution périodique suivante :

$$\psi(X) = \frac{\sqrt{c_3}}{c_1^{\frac{1}{4}}}\sin\left(c_1^{\frac{1}{4}}X\right). \tag{3.63}$$

Le cas $y^2 - \sqrt{c_1}\psi^2 = c_3$, correspond à deux orbites hyperboliques. En utilisant la première équation du système (3.14), nous avons la représentation paramétrique de la solution définie par la relation :

$$\psi(X) = \pm\frac{\sqrt{c_3}}{c_1^{\frac{1}{4}}}\sinh\left(c_1^{\frac{1}{4}}X\right). \tag{3.64}$$

Les Eqs. (3.64) donnent lieu à deux solutions non bornées.

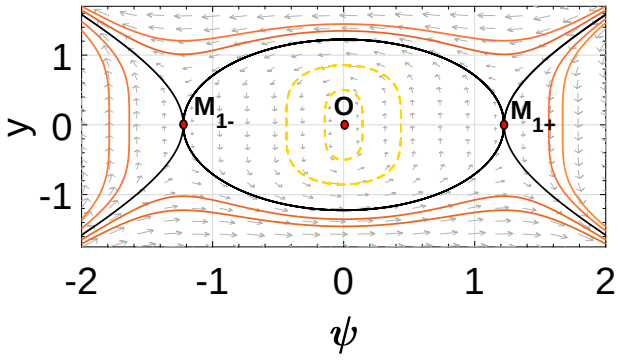


FIGURE 3.11 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 = 0$.

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 = 0$ (voir Fig. 3.11)

1. Pour ce cas $H(\psi, y) = h$ avec $h \in]h_1, 0[$, correspondant aux orbites en pointillés jaunes de la figure 3.11 qui entourent l'origine, il existe des solutions périodiques du système (3.14). Ici, il n'y a pas de droite singulière et le passage du système (3.14) au système (3.15)n'est pas nécessaire.

$$\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = |\varrho_1|\left(1 - \frac{|\varrho_3|}{\varrho_1}\mu^4\right),$$

où $\varrho_1 = 16hc_1 + 4c_1^2c_2^2$, $\varrho_2 = 0$ et $K_3 = -16h$. Nous obtenons :

$$\tan[\varphi(\xi)] = \mu(\xi) = \left(\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{cn}(\omega_5\xi, \kappa_4), \tag{3.65}$$

avec $\omega_5 = \dfrac{(\varrho_1|\varrho_3|)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$ et $\kappa_4^2 = \dfrac{1}{2}$. Leur représentation paramétrique est donnée par :

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{c_1 - \dfrac{\varrho_1}{|\varrho_3|}\mathrm{cn}^4(\omega_5\xi, \kappa_4)}}\left[\left(c_1c_2 - \sqrt{\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}}\mathrm{cn}^2(\omega_5\xi, \kappa_4)\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}\right)^{\frac{1}{4}} \omega_5 \mathrm{sn}(\omega_5\xi, \kappa_4)\mathrm{dn}(\omega_5\xi, \kappa_4)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.66}$$

avec

$$y^2(\xi) = \frac{1}{c_1 - \frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}\mathrm{cn}^4(\omega_5\xi,\kappa_4)}\left[\left(c_1c_2 - \sqrt{\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}}\mathrm{cn}^2(\omega_5\xi,\kappa_4)\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}\right)^{\frac{1}{4}}\omega_5\mathrm{sn}(\omega_5\xi,\kappa_4)\mathrm{dn}(\omega_5\xi,\kappa_4)\right] \tag{3.67}$$
$$\times \sqrt{\frac{\varrho_1}{|\varrho_3|}}\mathrm{cn}^2(\omega_5\xi,\kappa_4)\cdot$$

2. $H(\psi, y) = h_1 = -\frac{1}{4}c_1c_2^2$

Ce cas correspond aux hétéroclines en noir qui relient les points d'équilibre $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2}, 0)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 4H(\psi,y) - h_1 &= \left(\sqrt{c_1}\psi^2 - y^2 - \sqrt{c_1}c_2\right)\left(\sqrt{c_1}\psi^2 + y^2 - \sqrt{c_1}c_2\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Pour les orbites en forme de boucle, les hétéroclines elliptiques définies par $\sqrt{c_1}\psi^2 + y^2 = \sqrt{c_1}c_2$ du système (3.14), on a la représentation de la solution donnée par la relation :

$$\psi(X) = \sqrt{c_2}\sin\left(c_1^{\frac{1}{4}}X\right). \tag{3.69}$$

Pour les orbites hyperboliques définies par $y^2 - \sqrt{c_1}\psi^2 = c_3$ du système (3.14), nous obtenons les représentations paramétriques définies comme suit :

$$\psi(X) = \pm\sqrt{c_2}\cosh\left(c_1^{\frac{1}{4}}X\right). \tag{3.70}$$

Ce qui donne lieu à deux solutions non bornées.

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 = 0$ (voir Fig. 3.12)

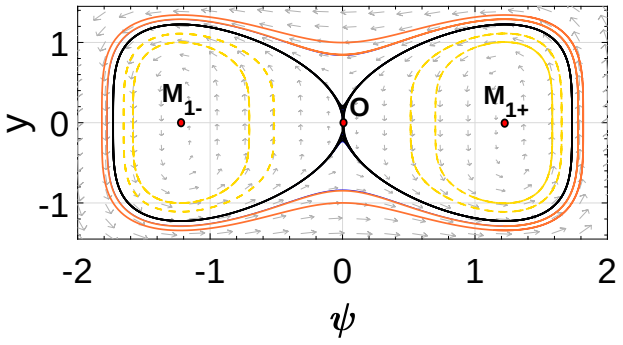


FIGURE 3.12 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 = 0$.

1. Le cas $H(\psi, y) = h$, $h \in]0, h_1[$ correspond aux familles de courbes fermées jaunes qui entourent les points $M_{1\pm}(\pm\sqrt{c_2}, 0)$. Elles confirment la présence des ondes périodiques dans le système. Dans ce cas,

$$\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = -|\varrho_3|\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3} + \mu^4\right),$$

où $\varrho_1 = 16hc_1 < 0$, $\varrho_2 = 0$ et $\varrho_3 = -16h < 0$. Nous avons,

$$\begin{aligned}\tan\left[\varphi(\xi)\right] &\equiv \mu(\xi),\\ &= \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1+\mathrm{nc}(\omega_6\xi,\kappa_5)}{1-\mathrm{nc}(\omega_6\xi,\kappa_5)}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.71}$$

avec $\omega_6 = (\varrho_1\varrho_3)^{\frac{1}{4}}$ et $\kappa_6^2 = \dfrac{1}{2}\cdot$ En substituant $\mu(\xi)$ dans l'Eq. (3.21), nous obtenons la représentation paramétrique des solutions.

2. $H(\psi, y) = 0$

Ce cas correspond aux orbites homoclines en noir qui passent par l'origine. Nous avons ici $\varrho_1 = (2c_1c_2)^2$, $\varrho_2 = \varrho_3 = 0$ et

$$\tan\left[\varphi(\xi)\right] = |c_1|c_2\xi. \tag{3.72}$$

Ceci donne comme solutions les solitons bright et dark définis comme suit :

$$\psi(\xi) = \pm\left(\frac{2c_2}{1+|c_1|^3c_2^4\xi^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}X(\xi) = \frac{\sqrt{2}c_1^{-\frac{1}{4}}}{4}\Bigg[&\ln\left(\frac{|c_1|^{\frac{3}{2}}c_2^2\xi^2 - \sqrt{2}|c_1|^{\frac{3}{4}}c_2\xi + 1}{|c_1|^{\frac{3}{2}}c_2^2\xi^2 + \sqrt{2}|c_1|^{\frac{3}{4}}c_2\xi + 1}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}|c_1|^{\frac{3}{4}}c_2\xi + 1\right)\\ &+ 2\arctan\left(\sqrt{2}|c_1|^{\frac{3}{4}}c_2\xi - 1\right)\Bigg]\cdot\end{aligned} \tag{3.73}$$

Trajectoires de phase et solutions dans les cas où $c_1 < 0$, $c_2 \leq 0$ et $c_3 = 0$ (voir Fig. 3.13)

Le cas $H(\psi, y) = h$ avec $h \in]-\infty, 0[$ correspond aux orbites en traits bleus fermées de la figure 3.13 entourant le point $O(0, 0)$. Il existe donc des ondes périodiques dans le système, données par

$$\varrho_1 + \varrho_2\mu^2 + \varrho_3\mu^4 = \varrho_3\left(1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\mu^4\right),$$

où $\varrho_1 = 16hc_1 + (2c_1c_2)^2 > 0$, $\varrho_2 = 0$ et $\varrho_3 = -16h > 0$. C'est un cas similaire au cas de la figure (3.10).

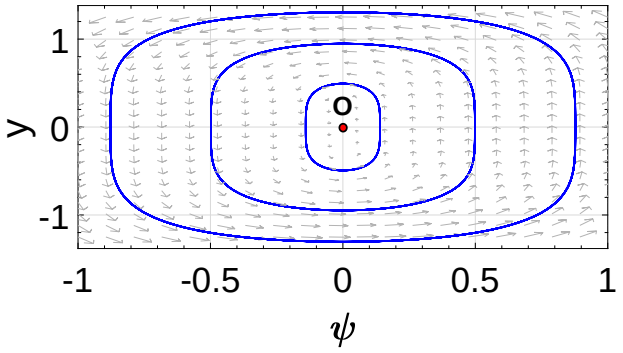


FIGURE 3.13 – Portraits de phase du système (3.15) pour $c_1 < 0$, $c_2 \leq 0$ et $c_3 = 0$.

3.3.2/ DYNAMIQUE DES SOLITONS DANS LA BANDE DES FRÉQUENCES PERMISES

Dans ce paragraphe, contrairement aux travaux précédents où nous avons étudié les comportements dynamiques des solitons autour du gap (c'est-à-dire pour $k = 0 \; ou \; \pi$), nous considérons, cette fois-ci, les comportements du système lorsque la fréquence est prise en plein dans la bande des fréquences permises c'est-à-dire pour $0 \ll k \ll \pi$.

3.3.2.1/ ÉQUATION D'ÉVOLUTION

Reprenons l'ENLSE (3.9) et cherchons la solution cette fois-ci sous forme d'onde modulée de la forme :

$$A\left(X,\tau\right) = a\left(z\right) e^{j\theta(z)} \tag{3.74}$$

où la variable z est : $z = X - v_e\tau$ et v_e, la vitesse de l'enveloppe. En substituant l'Eq. (3.74) dans l'Eq. (3.9), nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires couplées :

$$P\left(2a'\theta' + a\theta''\right) = \left(v_e + c_1a^2\right)a' + c_2\left(4a^2a'\theta' + a^3\theta''\right), \tag{3.75}$$

et

$$P\left(a'' - a(\theta')^2\right) + \left[Q(\sigma) + 2c_2(\theta')^2 + c_1\theta'\right]a^3 = -v_e a\theta' + (c_2 + 2c_3)\left(a^2a'' + a(a')^2\right), \tag{3.76}$$

où le prime désigne la dérivée première par rapport à z. En multipliant l'Eq. (3.75) par a et en intégrant une fois, nous avons

$$\theta' = \frac{c_1a^4 + 2v_ea^2 + 4K_1}{4a^2\left(P - c_2a^2\right)}, \tag{3.77}$$

où K_1 est une constante d'intégration. Si $K_1 \neq 0$, $a \to 0$, ceci donne $\theta' \to \infty$, qui n'est pas physiquement acceptable. Nous choisirons dans la suite la constante d'intégration égale à zéro. En substituant (3.77) dans l'Eq. (3.76), nous obtenons en posant $\phi = a^2$, l'équation qui régit le signal modulé :

$$\phi'' - \frac{4P(P-c_2\phi)^2(\phi')^2 - \phi^2 f_3(\phi)}{8\phi\left[P-(c_2+2c_3)\phi\right](P-c_2\phi)^2} = 0, \tag{3.78}$$

où $f_3(\phi) = \alpha_3(\sigma)\phi^3 + \alpha_2(\sigma)\phi^2 + \alpha_1(\sigma)\phi + \alpha_0$, et

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 4Pv_e^2, \\
\alpha_1(\sigma) &= 8P\left[2PQ(\sigma) + v_e c_1\right], \\
\alpha_2(\sigma) &= 3Pc_1^2 - 4c_2\left[8PQ(\sigma) + v_e c_1\right], \\
\alpha_3(\sigma) &= 2c_2\left[8Q(\sigma)c_2 - c_1^2\right].
\end{aligned}$$

L'équation (3.78) est équivalent à un système dynamique du plan (ϕ, y) tel que :

$$\frac{d\phi}{dz} = y, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{4P(P-c_2\phi)^2(y)^2 - \phi^2 f_3(\phi)}{8\phi\left[P-(c_2+2c_3)\phi\right](P-c_2\phi)^2}, \tag{3.79}$$

et admet comme intégrale première :

$$\begin{aligned}
H(\phi, y) &= \left[\frac{P-(c_2+2c_3)\phi}{\phi}\right]y^2 + \beta_2(\sigma)\phi^2 - \beta_1\phi + \frac{\beta_0}{P-c_2\phi} \\
&= h,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{P}{4c_2^3}(Pc_1 + 2v_e c_2)^2, \\
\beta_1 &= \frac{c_1}{4c_2^2}\left[Pc_1 + 4v_e c_2\right], \\
\beta_2(\sigma) &= \frac{1}{4c_2}\left[8Q(\sigma)c_2 - c_1^2\right],
\end{aligned}$$

h étant une constante. Les coefficients (α_i, β_i) sont étroitement liés aux paramètres réels du modèle physique étudié, à savoir la forme du potentiel de substrat par le paramètre σ et/ou l'anharmonicité des interactions interparticulaires par le paramètre G_4. Comme précédemment, ces coefficients sont importants pour la résolution des équations différentielles. Le système (3.79) est un système singulier particulier d'onde progressive de première classe de six paramètres $(P, Q, c_1, c_2, c_3 \; et \; v_e)$ et qui comporte trois droites singulières, $\phi = 0$; $\phi = P/c_2$ et $\phi = P/(c_2+2c_3)$.

3.3.2.2/ TRAJECTOIRES DE PHASE ET SOLUTIONS

Puisque le nombre de paramètres de bifurcation du système est élevé, nous allons plutôt le réduire pour ne pas trop alourdir la présentation, c'est à dire en travaillant avec des valeurs particulières du nombre d'onde k.

3.3.2.2.1/ Trajectoires de phase et solutions pour $k = \pm 2\pi/3$

Nous prendrons $k = \pm 2\pi/3$, ce qui a pour conséquence : $c_3 = 9G_4/2\omega$, $c_2 = 0$, tandis que $c_1 = 2\sqrt{3}c_3$ pour $k = 2\pi/3$ et $-2\sqrt{3}c_3$ pour $k = -2\pi/3$. Notons également que le paramètre P de dispersion est négatif. Nous avons alors un système à quatre paramètres seulement $(P, Q, c_3 \; et \; v_e)$ soit indirectement, $(G_2, \; G_4, \; \sigma \; et \; v_e)$. Dans ce qui suit, notre étude se concentrera sur ce système de quatre paramètres, où seulement G_4 peut être positif ou négatif, les trois autres paramètres étant toujours positifs. Ainsi, l'équation (3.79) prend la forme :

$$\frac{d\phi}{dz} = y, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{4P^2y^2 - \phi^2 f_2(\phi)}{8P\left(P - 2c_3\phi\right)\phi}, \tag{3.81}$$

avec $f_2(\phi) = 3c_1^2\phi^2 + 8\left[2PQ(\sigma) + v_e c_1\right]\phi + 4v_e^2$. En utilisant la transformation $dz = 8P\left(P - 2c_3\phi\right)\phi d\xi$, le système (3.81) devient le système régulier associé :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi} &= y\left[8P\left(P - 2c_3\phi\right)\phi\right], \\ \frac{dy}{d\xi} &= 4P^2y^2 - \phi^2 f_2(\phi)\cdot \end{aligned} \tag{3.82}$$

(3.81) et (3.82) ont la même intégrale première :

$$\begin{aligned} H(\phi, y) &= \frac{1}{4P}\left[c_1^2\phi^2 + 4\left[2PQ(\sigma) + v_e c_1\right]\phi + 4v_e^2\right]\phi + \frac{\left(P - 2c_3\phi\right)}{\phi}y^2 \\ &= h. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Pour une valeur de h fixée, l'Hamiltonien (3.83) détermine un ensemble de courbes invariables des Eqs. (3.81) et (3.82). Lorsque h varie, nous obtenons plusieurs familles d'orbites des systèmes (3.81) et (3.82) qui montrent différents comportements dynamiques. Afin d'avoir les points d'équilibre du système, il faudrait trouver les zéros de la fonction $\phi^2 f_2(\phi)$. Ainsi, dans le plan $\phi - y$, le système (3.81) a trois points d'équilibre $O(0,0)$, $E_1\left(\phi_{e_1}, 0\right)$ et $E_2\left(\phi_{e_2}, 0\right)$ où

$$\phi_{e_{(1,2)}} = \frac{2}{3c_1^2}\left[-2\left(2PQ(\sigma) + v_e c_1\right) \pm \sqrt{\Delta}\right],$$

si $\Delta = 16P^2Q^2(\sigma) + 16PQ(\sigma)v_e c_1 + c_1^2 v_e^2$ est positif. Remarquons que $\phi_{e_2} \leq \phi_{e_1}$. Avec la droite singulière $\phi_s = P/2c_3$, nous avons deux autres points d'équilibre $E_s^+\left(\phi_s, +Y_s\right)$ et $E_s^-\left(\phi_s, -Y_s\right)$ où

$$Y_s = \sqrt{\frac{1}{64c_3^4}\left[3P^2c_1^2 + 16c_3\left(v_e^2c_3 + P\left(2PQ(\sigma) + v_e c_1\right)\right)\right]}\cdot$$

De l'Hamiltonien (3.83), nous pouvons définir :

$$
\begin{aligned}
h_0 &= H(0,0) = 0,\\
h_1 &= H(\phi_{e_1},0)\\
&= \frac{c_1^2}{4P}\phi_{e_1}^3 + \frac{8PQ(\sigma)+4c_1v_e}{4P}\phi_{e_1}^2 + \frac{v_e^2}{P}\phi_{e_1},\\
h_2 &= H(\phi_{e_2},0)\\
&= \frac{c_1^2}{4P}\phi_{e_2}^3 + \frac{8PQ(\sigma)+4c_1v_e}{4P}\phi_{e_2}^2 + \frac{v_e^2}{P}\phi_{e_2},\\
h_s &= H(\phi_s,\pm Y_s)\\
&= \frac{c_1^2}{4P}\phi_s^3 + \frac{8PQ(\sigma)+4c_1v_e}{4P}\phi_s^2 + \frac{v_e^2}{P}\phi_s.
\end{aligned}
$$

Il est à noter que nous aurons toujours $h_2 < h_1$ puisque $P < 0$. En utilisant donc toutes ces informations, nous pouvons définir et présenter les portraits de phase du système.

Afin de présenter les différents portraits de phase pour différentes valeurs de h, nous rechercherons les différentes solutions à partir de la relation (3.83). Ainsi, en résolvant

$$y^2 = \frac{\phi F_3(\phi)}{8Pc_3(\phi-\phi_s)}, \tag{3.84}$$

où $F_3(\phi) = -4Ph + 4v_e^2\phi + 4\left(2PQ(\sigma) + v_e c_1\right)\phi^2 + c_1^2\phi^3$ et en utilisant le système (3.81) ou (3.82) pour chacun des cas de bifurcations, la solution correspondant à une trajectoire de phase précise pourra être déterminée. Présentons maintenant les portraits de phase des différentes bifurcations du système selon les valeurs des paramètres du système.

3.3.2.2.1.1/ Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ n'a pas de zéro

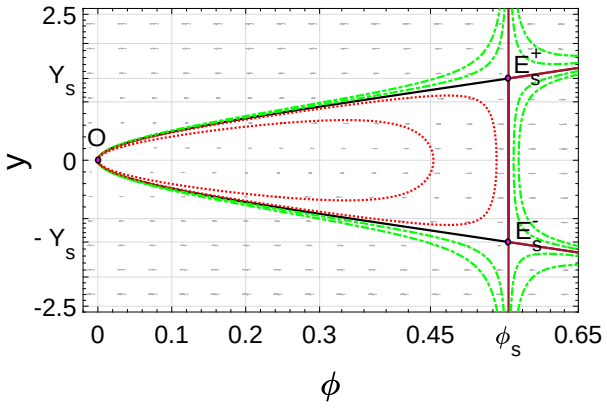


FIGURE 3.14 – Portraits de phase du système (3.81) lorsque $f_2(\phi)$ n'a pas de zéro (Valeurs des paramètres : $P = -1$, $Q = 1.5$, $v_e = 1.5$ et $c_3 = -0.9$).

1. Lorsque $H(\phi, y) = h$ introduit en (3.83) appartient à $]-\infty, h_s[$, les orbites correspondantes sont celles ouvertes en traits mixtes verts de la figure 3.14, et qui correspondent à la famille des solutions compactons du système (3.81) [56, 85].
2. Pour h égale à h_s nous avons une hétérocline en trait continu noir de la figure 3.14 qui passe par l'origine en joignant les points $E_s^{\pm}(\phi_s, \pm Y_s)$. Dans ce cas, le polynôme $F_3(\phi)$ introduit en (3.84) devient $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \phi_s)\left[(\phi - a_0)^2 + b_0^2\right]$, et conduit aux solitons de type cups pour $z \in]-z_0, +z_0[$.

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{2h_s}{3c_3}}\left[\frac{1 - \mathrm{cn}(\rho_0 z, \kappa_0)}{1 + \mathrm{cn}(\rho_0 z, \kappa_0)}\right], \tag{3.85}$$

où $\kappa_0^2 = \left[\left(a_0^2 + b_0^2\right)^{1/2} + a_0\right]/2\left(a_0^2 + b_0^2\right)^{1/2}$ et $\rho_0 = \left(3c_3 h_s/2P^2\right)^{1/4}$ [80].
Notons que, dès que $z = \pm z_0$, ϕ atteint $\phi_s = P/2c_3$ et la dérivée seconde ϕ'' devient infinie. Comme précédemment démontré, on assiste à une dislocation du réseau.
3. Le cas $H(\phi, y) = h$, $h_s < h < 0$, correspond aux orbites fermées en rouge qui passent par l'origine. Ici, $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \phi_0)\left[(\phi - a'_0)^2 + b'^2_0\right]$, et conduit à la famille des solutions peakon périodiques (voir figure 3.15).

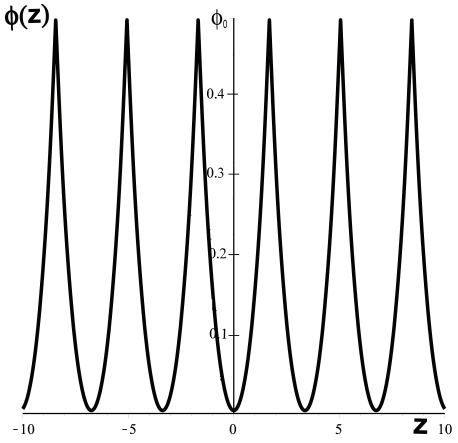


FIGURE 3.15 – Profil d'onde d'une solution périodique de type peakon.

3.3.2.2.1.2/ Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ a une racine double. Dans ce cas, $\phi_{e_1} = \phi_{e_2} = \phi_e$ et $h_1 = h_2$.

A- Trajectoires de phase et solutions pour : $h_s < h_1$

1. $H(\phi, y) = h$, $h \in]-\infty, h_s[$
   Les orbites pertinentes ici sont celles ouvertes en traits mixtes et de couleur verte de la Figure 3.16. Elles correspondent aux solutions solitons non bornées à droite de la droite singulière $\phi = \phi_s$.
2. $H(\phi, y) = h_s$
   Ici nous avons des hétéroclines en traits continus noirs entourant le point d'équilibre $E_1(\phi_e, 0)$ et reliant les points $E_s^{\pm}(\phi_s, \pm Y_s)$ et $O(0, 0)$. Il existe des cups comme à l'équation (3.85).

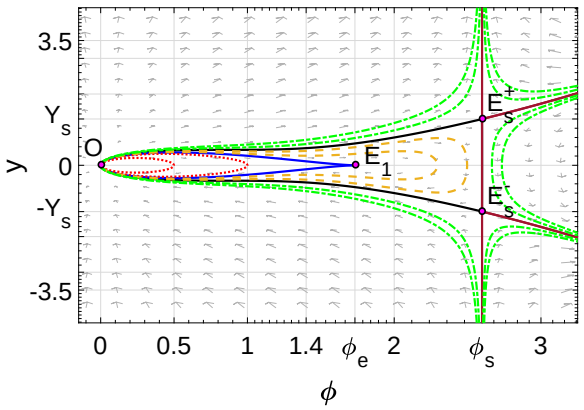


FIGURE 3.16 – Portraits de phase du système (3.81) lorsque $h_s < h_1$ alors $0 < \phi_e < \phi_s$ (Valeurs des paramètres : $P = -1.5$, $v_e = 1.5$, $Q \approx -0.0669$, et $c_3 = -0.2886$).

3. $H(\phi, y) = h$, $h \in]h_s, h_1[$

Nous avons une famille des orbites périodiques en pointillés dorés entourant le point $E_1\,(\phi_e, 0)$ et passant par l'origine $O(0,0)$. Elles donnent naissance à une famille d'ondes périodiques du système (3.81), comme celles représentées sur la figure 3.15.

4. $H(\phi, y) = h_1$

Ce cas correspond aux orbites homoclines en bleu de la figure 3.16 passant par le point $E_1\,(\phi_e, 0)$. Dans ce cas, $F_3(\phi) = 12c_3^2\,(\phi - \phi_e)^3$ et la représentation paramétrique de cette solution est donnée par

$$\phi\,(\eta) = \frac{\phi_e\phi_s \mathrm{sn}^2\,(\rho_1\eta, \kappa_1) - \phi_e\phi_s}{\phi_e \mathrm{sn}^2\,(\rho_1\eta, \kappa_1) - \phi_s}, \text{ où}$$

$$z\,(\eta) = \frac{2\sqrt{3}\phi_s^{\frac{3}{2}}}{3\phi_e\rho_1\kappa_1^2}\left[\left(1-\kappa_1^2\right)\prod\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{\phi\,(\phi_s-\phi_e)}{\phi_e\phi_s\left(1-\kappa_1^2\right)+\left(\phi_s\kappa_1^2-\phi_e\right)\phi}};1;\kappa_1\right)\right]\right.$$

$$\left.+\kappa_1^4 F\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{\phi\,(\phi_s-\phi_e)}{\phi_e\phi_s\left(1-\kappa_1^2\right)+\left(\phi_s\kappa_1^2-\phi_e\right)\phi}};\kappa_1\right)\right]\right], \tag{3.86}$$

avec $\rho_1 = \sqrt{\phi_s}/2$, $\kappa_1^2 = \phi_e/\phi_s$ et $\prod(n;\varphi;\kappa)$, une intégrale elliptique de troisième espèce.

5. $H(\phi, y) = h$, $h \in]h_1, +\infty[$

Ces trajectoires correspondent ici à une famille de courbes ouvertes (traits mixtes verts de la figure 3.16) située entre les droites singulières $\phi = 0$ et $\phi = \phi_s$. Il existe donc une famille de solutions compacton pour le système (3.81).

B- Trajectoires de phase et solutions pour : $h = h_s = h_1$

Les portraits de phase du système (3.81) sont présentés dans la figure 3.17.

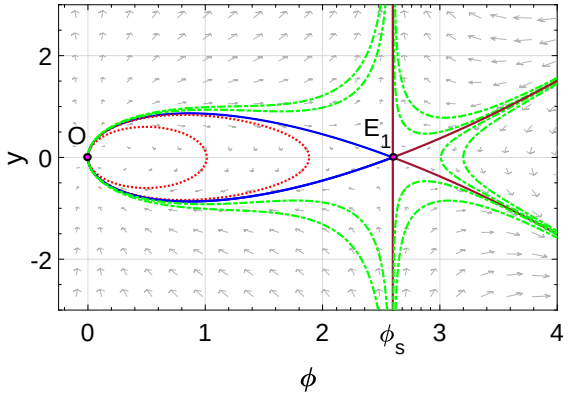


FIGURE 3.17 – Portraits de phase du système (3.81) lorsque $h_s = h_1$ alors $0 < \phi_s = \phi_e$ (Valeurs des paramètres : $P = -1.5$, $v_e = 2.25$, $Q \approx -0.1004$ et $c_3 = -0.2886$).

Le cas $H(\phi, y) = h = h_s = h_1$ correspond à l'orbite en traits continus bleus de la figure 3.17. La solution onde solitaire correspondante est donnée par la représentation paramétrique

$$\phi(z) = \phi_s \tanh^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}z\right). \tag{3.87}$$

Pour les autres types d'orbites, les résultats sont similaires à ceux obtenus dans les sessions précédentes.

3.3.2.2.1.3/ Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_2(\phi)$ a deux racines réelles distinctes ϕ_{e_1} et ϕ_{e_2}, avec $\phi_{e_1} > \phi_{e_2}$

A- Trajectoires de phase et solutions pour : $h_2 < 0 < h_1 < h_s$ d'où $\phi_s < 0 < \phi_{e_2} < \phi_{e_1}$

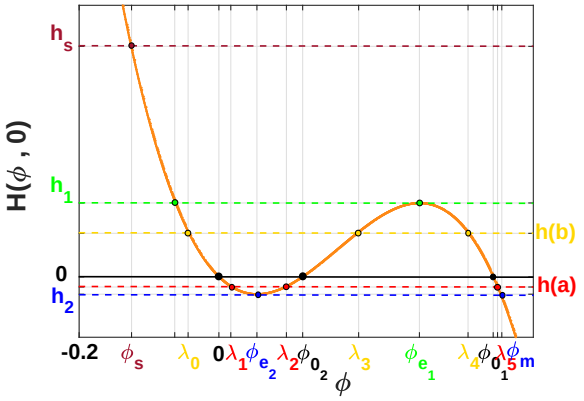


FIGURE 3.18 – Représentation de la fonction $H(\phi, 0)$ (en orange) par rapport à la position ϕ. L'intersection de $H(\phi, 0)$ avec n'importe quel niveau d'énergie h donne une valeur spécifique à λ_i. Deux exemples sont montrés : (a) $h_2 < h < 0$ conduit à λ_1, λ_2, et λ_5. (b) $0 < h < h_1$ conduit à $\lambda_0 < 0$, λ_3 et λ_4. Les abscisses des extrema ϕ_{e_1} et ϕ_{e_2} sont données au paragraphe 3.3.2.2.1. 0, ϕ_{0_1} et ϕ_{0_2} sont les racines de $H(\phi, 0)$.

Il est plus pratique ici de représenter la fonction $H(\phi,0)$, obtenue de l'équation (3.83) lorsque la dérivée $\frac{d\phi}{dz} = y$ est égale à zéro (voir Fig. 3.18). Son intersection avec n'importe quel niveau d'énergie h donne une valeur spécifique à λ_i dans l'intervalle $[0,+\infty[$ suivant les différents cas. Par conséquent, en fonction de la valeur de h, les trajectoires de phase, définies par $H(\phi,y) = h$, doivent correspondre à l'intervalle défini par ϕ où $H(\phi,0)$ est au dessus de h (voir figure 3.18). Il est représenté à la figure 3.19 par différentes couleurs de trajectoires de phase.

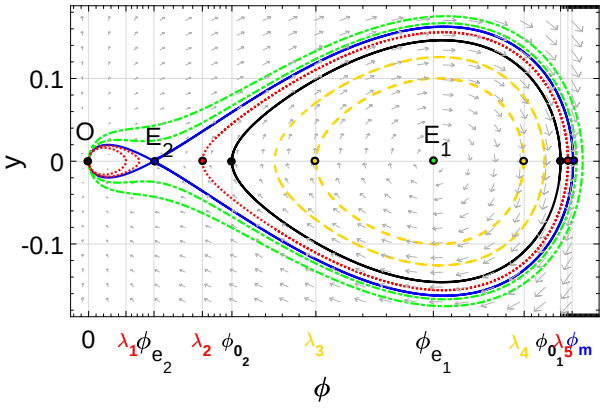


FIGURE 3.19 – Portraits de phase du système (3.82) lorsque $h_2 < 0 < h_1 < h_s$ alors $\phi_s < 0 < \phi_{e_2} < \phi_{e_1}$ (Valeurs des paramètres : $P = -1$, $Q = 1.9$, $v_e = 1.5$ et $c_3 = 4$).

1. Le cas $h < h_2$ correspond aux orbites fermées en traits mixtes verts de la figure 3.19 entourant les points d'équilibre $E_{(1,2)}\left(\phi_{e_{(1,2)}},0\right)$ et passant par l'origine O. Cela conduit à une famille de solutions périodiques des systèmes (3.81) ou (3.82).

2. $h = h_2$ correspond aux orbites homoclines en bleu. Ici nous avons $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi-\phi_m)(\phi-\phi_{e_2})^2$ où $\phi_m = (3\phi_{e_1} - \phi_{e_2})/2$. De l'Eq. (3.84), nous avons la représentation paramétrique de l'homocline :

$$\phi(\eta) = \phi_m - \phi_m \mathrm{sn}^2(\rho_2\eta,\kappa_2), \tag{3.88}$$

avec

$$z(\eta) = \sqrt{-\frac{2P}{3c_3}}\left[\eta + \frac{(\phi_{e_2}-\phi_s)}{\rho_4(\phi_m-\phi_{e_2})}\Pi\Big(\arcsin(\mathrm{sn}(\rho_2\eta,\kappa_2)),\Omega_1^2,\kappa_2\Big)\right],$$

où $\rho_2 = \sqrt{\phi_m-\phi_s}/2$, $\kappa_2^2 = \phi_m/(\phi_m-\phi_s)$, et $\Omega_1^2 = \phi_m/(\phi_m-\phi_{e_2})$.

i) Si $|\eta| \le \frac{1}{\rho_2}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\phi_m-\phi_{e_2}}{\phi_m}},\kappa_2\right)$, avec l'Eq. (3.88) nous obtenons des solitons bright où $0 \le \phi \le \phi_{e_2}$.

ii) Si $|\eta| \ge \frac{1}{\rho_2}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\phi_m-\phi_{e_2}}{\phi_m}},\kappa_2\right)$, l'Eq. (3.88) nous donne plutôt des solitons dark avec $\phi_{e_2} \le \phi \le \phi_m$.

3. $h_2 < h < 0$ correspond aux boucles en pointillés rouges de la figure 3.19. La première famille respecte $0 \leq \phi \leq \lambda_1 < \phi_{e_2}$, tandis que l'autre entoure le point d'équilibre $E_1 = (\phi_{e_1}, 0)$ en respectant $\lambda_2 \leq \phi \leq \lambda_5$. Le polynôme d'ordre trois F_3 est donné par la relation $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_5)$, et la représentation paramétrique des solutions nécessite de résoudre l'intégrale

$$z(\phi) = \sqrt{-\frac{2P}{3c_3}} \int_0^{\phi} d\phi \sqrt{\frac{\phi - \phi_s}{\phi(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_5)}}, \tag{3.89}$$

dans le premier cas de figure par exemple.

4. Lorsque $h = 0$ (trait continu noir de la figure 3.19), la trajectoire de phase relie les points $(\phi_{0_2}, 0)$ et $(\phi_{0_1}, 0)$. De (3.84), nous avons

$$\phi(\eta) = \phi_{0_1} - (\phi_{0_1} - \phi_{0_2})\,\mathrm{sn}^2(\rho_3\eta, \kappa_3), \tag{3.90}$$

avec

$$z(\eta) = \sqrt{-\frac{2P}{3c_3}} \left[\eta - \frac{\phi_s}{\rho_3\phi_{0_1}} \Pi\Big(\arcsin(\mathrm{sn}(\rho_3\eta, \kappa_3)), \Omega_2^2, \kappa_3\Big)\right],$$

où $\kappa_3^2 = (\phi_{0_1} - \phi_{0_2})/(\phi_{0_1} - \phi_s)$, $\Omega_2^2 = (\phi_{0_1} - \phi_{0_2})/\phi_{0_1}$ et $\rho_3 = \sqrt{\phi_{0_1} - \phi_s}/2$.

5. Le cas $h \in]0, h_1[$ correspond aux orbites en pointillés dorés de la figure 3.19 entourant le point $E_1 = (\phi_{e_1}, 0)$. Le polynôme F_3 prend la forme $F_3(\phi) = c_1^2(\phi - \lambda_0)(\phi - \lambda_3)(\phi - \lambda_4)$, et nous obtenons des familles de solutions périodiques du système (3.81).

En utilisant le même principe d'étude et d'analyse que ce que nous avons présenté au paragraphe $A.1$, nous présenterons pour d'autres jeux de paramètres (P, Q, v_e, c_3) le plan de phase en (ϕ, y), mais en s'arrêtant uniquement sur les nouvelles formes d'orbites physiquement acceptables, c'est-à-dire des orbites nouvelles non présentes dans les cas précédents.

B- Trajectoires de phase et solutions pour : $h_2 < h_s < 0 < h_1$ **ou** $h_2 < h_s < h_1 < 0$

Lorsque $\phi_s = P/2c_3 > 0$, il apparaît une droite singulière $\phi = \phi_s$, nous conduisant à utiliser le système d'équations (3.82) à la place du système (3.81). En assumant que $h_2 < h_s < 0 < h_1$, nous obtenons des courbes paramétriques définies par $H(\phi, y) = h$ comme le montre la figure 3.20, classées comme suit :

1. $H(\phi, y) = h_2$

Ce cas correspond à l'orbite bleue qui passe par le point $E_2 = (\phi_{e_2}, 0)$. La fonction $H(\phi, y) = h_2$ peut être réécrite de la manière suivante : $y^2 = \frac{3c_3}{2P} \frac{\phi(\phi - \phi_m)(\phi - \phi_{e_2})^2}{(\phi - \phi_s)}$. Les résultats sont similaires à ceux obtenus au paragraphe précédent quand $|\eta| \leq \frac{1}{\rho_2}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\phi_m - \phi_{e_2}}{\phi_m}}, \kappa_2\right)$ et $0 < \phi < \phi_{e_2}$.

Par ailleurs, $\phi_{e_2} < \phi < \phi_s$ correspond à la courbe en traits mixtes bleus sur la figure 3.20, révélant l'existence d'une onde solitaire dont la représentation est donnée par :

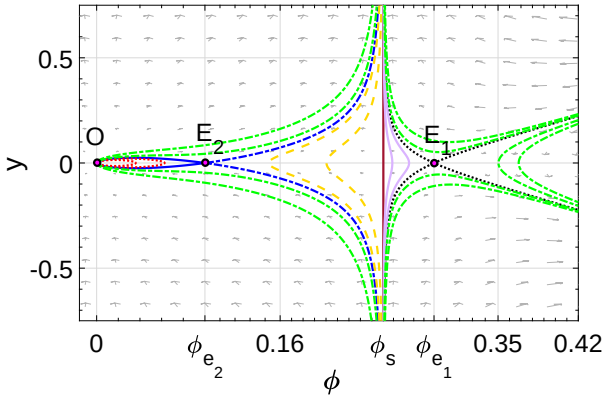


FIGURE 3.20 – Portraits de phase du système (3.82) lorsque, $h_2 < h_s < 0 < h_1$, alors $0 < \phi_{e_2} < \phi_s < \phi_{e_1}$ (Valeurs des paramètres : $P = -1.5$, $Q = 0.05$, $v_e = 1.5$ et $c_3 = -3$).

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \phi_s + \frac{\phi_m - \phi_s}{1 - \mathrm{sn}^2(\rho_4\eta, \kappa_4)}, \ \eta \in \left]-\sqrt{\frac{\phi_m}{\phi_s}}, \sqrt{\frac{\phi_m}{\phi_s}}\right[, \\ z(\eta) &= \rho_4 \frac{\phi_m - \phi_s}{\phi_m - \phi_{e_2}} \Pi[\arcsin(sn(\eta, \kappa_4)), \Omega_3, \kappa_4]. \end{aligned} \tag{3.91}$$

où $\rho_4 = \sqrt{(3c_3/2P)\,\phi_m}$, $\kappa_4^2 = \phi_s/\phi_m$ et $\Omega_3 = (\phi_s - \phi_{e_2})/(\phi_m - \phi_{e_2})$.

2. $H(\phi, y) = h$, $h \in]h_2, h_s[$

i) Pour ce cas, l'orbite principale est celle fermée en pointillés rouges sur la figure 3.20 qui intersecte la droite singulière $\phi = 0$. Le polynôme cubique devient $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)$, avec $0 < \lambda_1 < \phi_{e_2} < \lambda_2 < \phi_s < \phi_{e_1} < \lambda_3$. Cela conduit à des solutions périodiques du système (3.82) quand $0 < \phi < \lambda_1$.

ii) $\lambda_2 < \phi < \phi_s$ correspond à la famille des branches infinies en traits interrompus dorés de la figure 3.20, donnant des solutions dont le profil est donné par l'intégrale :

$$z(\phi) = \sqrt{\frac{2P}{3c_3}} \int_{\lambda_2}^{\phi} d\phi \sqrt{\frac{\phi - \phi_s}{\phi(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\lambda_3 - \phi)}}. \tag{3.92}$$

3. Lorsque $h = h_s$, le polynôme de degré trois F_3 est donné par $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \phi_s)(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)$ avec $0 < \lambda_1 < \phi_{e_2} < \phi_s < \phi_{e_1} < \lambda_2$ et correspond ainsi à deux familles d'orbites :

i) Pour $0 < \phi < \lambda_1 < \lambda_2$, nous avons la première famille qui est une partie des orbites fermées en pointillés rouges passant par l'origine sur la figure 3.20 et donnant comme solution, des ondes périodiques,

ii) et lorsque $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \phi$, nous avons la seconde famille qui est représentée par les traits mixtes verts sur la figure 3.20, dont la représentation est :

$$\phi(z) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \mathrm{sn}^2(\rho_5 z, \kappa_5)}{1 - \mathrm{sn}^2(\rho_5 z, \kappa_5)}, \tag{3.93}$$

avec $\rho_5 = \sqrt{3c_3\lambda_2/8P}$ et $\kappa_5^2 = \lambda_1/\lambda_2$.

4. Les cas représentant les branches ouvertes en traits violets sur la figure 3.20, correspondent à plusieurs cas de figures

i) $h \in]h_s, 0[$: pour ce cas, $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)$ avec $0 < \lambda_1 < \phi_{e_2} < \phi_s < \lambda_2 < \phi_{e_1} < \lambda_3$. Cela conduit à des solutions ondes solitaires du système (3.82) quand $\phi_s < \phi \leq \lambda_2$ avec des profils donnés par l'intégrale :

$$z(\phi) = \sqrt{\frac{2P}{3c_3}} \int_{\phi}^{\lambda_2} d\phi \sqrt{\frac{\phi - \phi_s}{\phi(\phi - \lambda_1)(\lambda_2 - \phi)(\lambda_3 - \phi)}}. \tag{3.94}$$

ii) Lorsque $h = 0$, $F_3(\phi) = 12c_3^2\phi(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)$ où $\phi_s < \lambda_1 < \phi_{e_1} < \lambda_2$, avec la représentation suivante :

$$\phi(z) = \phi_s - (\lambda_1 - \phi_s)\,\mathrm{sn}^2(\rho_6 z, \kappa_6), \tag{3.95}$$

où $\rho_6 = \sqrt{3c_3(\lambda_2 - \phi_s)/8P}$ et $\kappa_6^2 = (\lambda_1 - \phi_s)/(\lambda_2 - \phi_s)$.

iii) Pour $h \in]0, h_1[$, $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)$ avec $\lambda_1 < 0 < \phi_s < \phi < \lambda_2 < \lambda_3$. Dans ce cas, pour avoir les solutions, il faut résoudre l'intégrale

$$z(\phi) = \sqrt{\frac{2P}{3c_3}} \int_{\phi}^{\lambda_2} d\phi \sqrt{\frac{\phi - \phi_s}{\phi(\phi - \lambda_1)(\lambda_2 - \phi)(\lambda_3 - \phi)}}. \tag{3.96}$$

C- Trajectoires de phase et solutions pour : $h_2 < h_s < h_1 < 0$ **d'où** $0 < \phi_{e_2} < \phi_{e_1} < \phi_s$

Les portraits de phase du système (3.82) sont bien illustrés à la figure 3.21 et peuvent être classés en six catégories. Les courbes paramétriques ci-dessus ont un impact significatif sur l'étude d'un comportement dynamique du modèle de base (3.6). Ces comportements dynamiques des courbes d'énergie au voisinage de la droite singulière $\phi = \phi_s$ donnent lieu à de nouvelles solutions exactes du système (3.82).

Sur la base des trajectoires de phase ci-dessus, nous pouvons avoir les discussions suivantes.

1. $H(\phi, y) = h_s$

Les courbes d'énergie définies par $H(\phi, y) = h_s$ sont des orbites hétroclines en traits continus violets de la figure 3.21 pour $(\lambda_2 < \phi < \phi_s)$ et une partie des orbites fermées en pointillés rouges lorsque $0 < \phi < \lambda_1$. Ici, $F_3(\phi, y) = 12c_3^2(\phi - \phi_s)(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)$, avec $0 < \lambda_1 < \phi_{e_2} < \lambda_2 < \phi_{e_1} < \phi_s$. Par conséquent, à partir de l'Eq. (3.84), nous avons la représentation paramétrique des solutions périodiques de type cups :

$$\phi(z) = \lambda_1 \mathrm{sn}^2(\rho_7 z, \kappa_7), \tag{3.97}$$

avec $0 < \phi < \lambda_1 < \lambda_2$, $\rho_7 = \sqrt{3c_3\lambda_2/8P}$ et $\kappa_7^2 = \lambda_1/\lambda_2$.

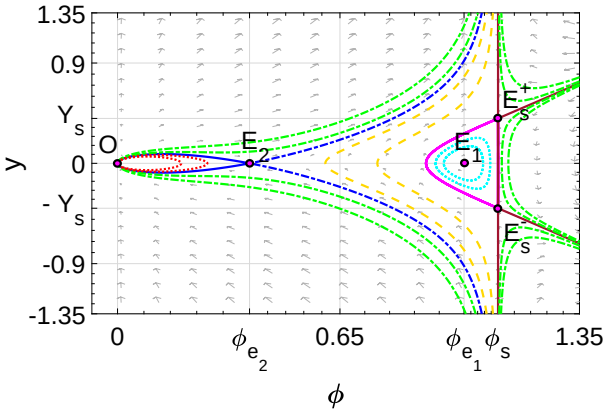


FIGURE 3.21 – Portraits de phase du système (3.82) lorsque $h_2 < h_s < h_1 < 0$ et ainsi $\phi_{e_2} < \phi_{e_1} < \phi_s$ (Valeurs des paramètres : $P = -1.779195$, $Q = 2.3$, $v_e = 1.5$ et $c_3 = -0.8$).

Dans le cas correspondant à l'orbite périodique $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \phi)$, nous avons la représentation paramétrique d'une solution onde périodique du système (3.82) définie comme suit :

$$\phi(z) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \mathrm{sn}^2(\rho_7 z, \kappa_7)}{1 - \mathrm{sn}^2(\rho_7 z, \kappa_7)}. \tag{3.98}$$

2. Lorsque $h \in]h_s, h_1[$

Pour ce dernier cas, les orbites sont en pointillés bleu ciel ou cyan, et correspondent à la famille qui entoure le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$. Alors, $F_3(\phi, y) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)$, avec $0 < \lambda_1 < \phi_{e_2} < \lambda_2 < \phi_{e_1} < \lambda_3 < \phi_s$. Ce qui conduit à des solutions périodiques pour le système (3.82).

D- Trajectoires de phase et solutions pour : $h_2 < h_s < h_1 < 0$ **et donc** $0 < \phi_s < \phi_{e_2} < \phi_{e_1}$

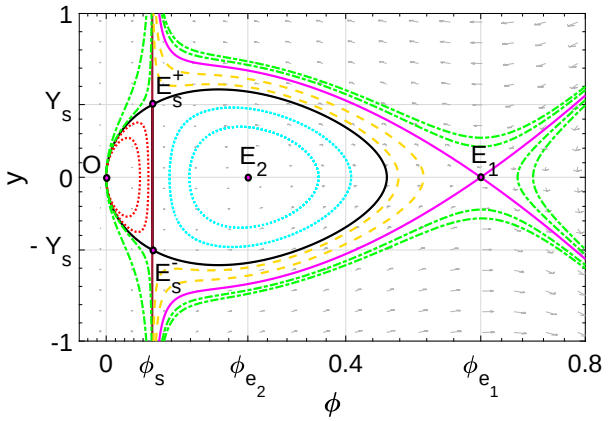


FIGURE 3.22 – Portraits de phase du système (3.82) lorsque $h_2 < h_s < h_1 < 0$, d'où $0 < \phi_s < \phi_{e_2} < \phi_{e_1}$ (Valeurs des paramètres : $P = -0.2$, $Q = -0.5$, $v_e = 1.5$ et $c_3 = -1.3$).

1. Comme le montre la figure 3.22, pour $h \in]-\infty, h_s[$, les courbes importantes définies par $H(\phi, y) = h$ sont des orbites circulaires en traits mixtes cyan entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et une partie des orbites ouvertes en traits

mixtes verts qui intersectent l'axe ϕ. Comme conséquence, il existe respectivement dans le système une famille de solutions périodiques et une famille de compactons.

2. Le cas $h = h_s$

correspond à deux familles d'orbites. La famille des hétéroclines en noir sur la figure 3.22 entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$, et reliant les points $O(0,0)$ et $E_s^{\pm}(\phi_s, Y_s)$. L'autre famille est une partie des orbites ouvertes en traits mixtes verts coupant l'axe ϕ après le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$. Dans ce cas, $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \phi_s)(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)$.

Il existe une boucle constituée de deux orbites en arc, hétéroclines dont la représentation paramétrique est une solution périodique, quand $0 < \phi < \lambda_1 < \lambda_2$, avec $z(\phi) = \sqrt{\frac{2P}{3c_3}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\phi(\lambda_1 - \phi)(\lambda_2 - \phi)}}$. Sa solution est similaire à celle obtenue en (3.88).

Pour les orbites ouvertes en traits mixtes verts, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \phi$, alors $z(\phi) = \sqrt{\frac{2P}{3c_3}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)}}$. Sa solution est similaire à celle obtenue en (3.93).

3. Pour une valeur fixée de $h \in]h_s, h_1[$ donc $0 < \lambda_1 < \phi_s < \phi_{e_2} < \lambda_2 < \phi_{e_1} < \lambda_3$, F_3 prend la forme $F_3(\phi) = 12c_3^2(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)$, et correspond à trois familles d'orbites.

i) Pour $0 < \phi < \lambda_1$, la première famille fait partie des lignes en pointillés rouges de la Fig. 3.22 et il existe une famille de solutions périodiques de types peakon du système (3.82).

ii) $\phi_s < \phi < \lambda_2$ correspond à la deuxième famille. Les courbes ouvertes se trouvant dans la zone située entre le point selle $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et la droite singulière $\phi = \phi_s$ (en pointillés dorés de la Fig. 3.22). Le système admet des solitons compactons.

iii) La dernière famille est une partie des orbites ouvertes en traits mixtes verts qui coupe l'axe des ϕ à droite du point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$.

3.3.2.2.2/ Trajectoires de phase et solutions pour un nombre d'onde k quelconque

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la résolution du système (3.79) dans son entièreté, c'est-à-dire avec ses six paramètres de bifurcations $(P, Q, c_1, c_2, c_3 \; et \; v_e)$ et ses trois droites singulières, $\phi = 0$; $\phi = P/c_2$ et $\phi = P/(c_2 + 2c_3)$. Afin d'avoir cette fois-ci les points d'équilibre du système, il faut trouver les zéros de la fonction $\phi^2 f_3(\phi)$. De manière similaire au paragraphe précédent, les solutions pourront être recherchées à partir de la relation (3.80) et du système (3.79). Présentons maintenant les portraits de phase des différentes bifurcations du système selon les valeurs des paramètres du système.

3.3.2.2.2.1/ Portraits de phase et solutions dans le cas où $f_3(\phi)$ a une racine triple

Ici, la valeur du déterminant de la matrice Jacobienne linéaire au point d'équilibre E_i est :

$$J_i = J(\phi_{e_i}, 0) = 8c_2^2(\phi_{e_i} - \phi_{s1})^2\phi_{e_i}^3(c_2 + 2c_3)(\phi_{s_2} - \phi_{e_i})(3\alpha_3\phi_{e_i}^2 + 2\alpha_2\phi_{e_i} + \alpha_1).$$

Concernant l'Hamiltonien (3.80), nous avons :

$$\begin{aligned} H(0,0) &= h_0 = -\frac{\alpha_3\phi_e^2}{8c_2^2}, \\ H(\phi_e, 0) &= h_1 = 0, \\ H(\phi_{s_2}, Y_{s_2}) &= h_{s_2} = -\frac{\alpha_3(\phi_{s_2} - \phi_e)^2}{8c_2^2}. \end{aligned}$$

Les solutions s'obtiendront en résolvant l'équation :

$$y^2 = \frac{G_2(\phi)}{(c_2 + 2c_3)\,\phi - P}, \tag{3.99}$$

où $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2}\left[(\phi - \phi_e)^2 + \dfrac{8c_2^2 h}{\alpha_3}\right]$. Pour les portraits de phase correspondant à cette situation, nous avons fixé les valeurs des paramètres : $P = -1$; $Q = -0.5623$; $c_1 = -1.732$; $c_2 = -0.3333$ et $v_e = 2.598$. Les différents cas de figures s'obtiendront pour différentes valeurs de c_3.

1. **Cas où** $0 < \phi_e < \phi_{0_1} < \phi_{s_2}$ **alors** $h_{s_2} < h_0 < h_1 = 0$ **d'où** $c_3 = 0.09523$

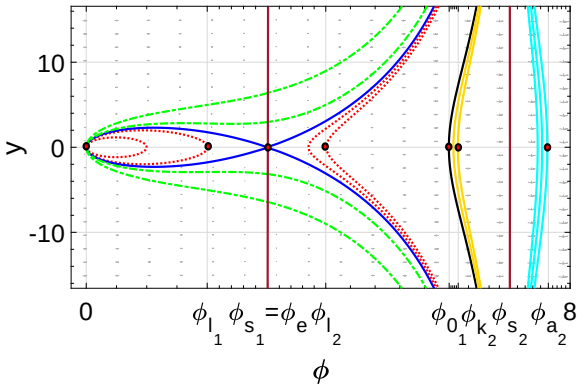


FIGURE 3.23 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $h_{s_2} < h_0 < h_1 = 0$, d'où $c_3 = -0.09523$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_{s2}[$, les orbites correspondantes sont celles de couleur verte de la figure (3.23) coupant l'axe des ϕ au point $(\phi_{a_2}, 0)$. Ici $G_2(\phi)$ peut se mettre sous la forme : $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})$, où ϕ_{a_1} et ϕ_{a_2} sont ses racines ($\phi_{a_1} < 0$ et $\phi_{a_2} > 0$). La solution correspondante est

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_2}\phi_{s_2}}{\phi_{a_2} - (\phi_{a_2} - \phi_{s_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{11}\eta, k_{11})}, \tag{3.100}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\left[-\phi_{s_2}\eta + \frac{\phi_{s_2}}{\Omega_{11}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{11}\eta, k_{11})\right); \tilde{\alpha}_{11}^2; k_{11}\right]\right],$$

où $\Omega_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{a_2}(\phi_{s_2} - \phi_{a_1})}$; $\tilde{\alpha}_{11}^2 = \frac{\phi_{a_2} - \phi_{s_2}}{\phi_{a_2}}$ et $k_{11}^2 = \frac{(-\phi_{a_1})(\phi_{a_2} - \phi_{s_2})}{\phi_{a_2}(\phi_{s_2} - \phi_{a_1})}$; $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{11}}K(k_{11})$.

ii) Le cas $h \in]h_{s2}, h_0[$ correspond à l'orbite jaune qui passe par le point $(\phi_{k_2}, 0)$. Ici $G_2(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})$ où $\phi_{k_1} < 0 < \phi_{k_2}$. La représentation paramétrique de cette solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_2}\phi_{k_2}}{\phi_{s_2} - (\phi_{s_2} - \phi_{k_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{13}\eta, k_{13})}, \tag{3.101}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\left[-\phi_{k_2}\eta + \frac{\phi_{k_2}}{\Omega_{13}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{13}\eta, k_{13})\right); \tilde{\alpha}_{13}^2; k_{13}\right]\right],$$

et où $\Omega_{13} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_2}(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}$, $\tilde{\alpha}_{13}^2 = \frac{\phi_{s_2} - \phi_{k_2}}{\phi_{k_2}}$, $k_{11}^2 = \frac{(-\phi_{k_1})(\phi_{s_2} - \phi_{k_2})}{\phi_{a_2}(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}$ et $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{13}}K(k_{13})$.

iii) $h = h_0$ correspond à la trajectoire de couleur noire qui coupe l'axe des abscisses au point $(\phi_{0_1}, 0)$. Alors $G_2(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi(\phi - \phi_{0_1})$ et la solution est :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left\{\frac{2\phi}{\phi_{s_2} - \phi_{0_1} - \frac{\phi_{0_1} + \phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - \phi_{0_1}}}\right\} + \sqrt{\frac{\phi_{s_2}}{\phi_{0_1}}}\arcsin\left\{\frac{2\phi_{0_1}\phi_{s_2}}{\phi(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})} - \frac{\phi_{0_1} + \phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - \phi_{0_1}}\right\}\right]. \tag{3.102}$$

iv) Le cas $h \in]h_0, h_1 = 0[$ correspond à deux familles d'orbites. La première est celle en pointillés rouges passant par l'origine, et la seconde, toujours en pointillés rouges, coupe l'axe des ϕ au point $(\phi_{l_2}, 0)$ et tend vers l'infini au voisinage de la droite singulière ϕ_{s_2}. Pour ce cas, $G_2(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})$ et nous avons :

a)

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{l_1}\phi_{l2}\mathrm{sn}^2(\Omega_{15}\eta, k_{15}) - \phi_{l_1}\phi_{l_2}}{\phi_{l_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{15}\eta, k_{15}) - \phi_{l_2}} \tag{3.103}$$

et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[(\phi_{l_2} - \phi_{s_2})\eta + \frac{\phi_{l_1} - \phi_{l_2}}{\Omega_{15}}\Pi\left\{\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{15}\eta, k_{15})\right); \tilde{\alpha}_{15}^2; k_{15}\right\}\right]$$

si $0 < \phi < \phi_{l_1} < \phi_{l_2} < \phi_{s_2}$. Nous avons $\tilde{\alpha}_{15}^2 = \frac{\phi_{l_1}}{\phi_{l_2}}$, $k_{15}^2 = \frac{\phi_{l_1}(\phi_{s_2} - \phi_{l_2})}{\phi_{l2}(\phi_{s_2} - \phi_{l_1})}$ et $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{15}}K(k_{15})$.

b) Par contre, si $0 < \phi_{l_1} < \phi_{l_2} < \phi < \phi_{s_2}$ nous aurons :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{l_1}(\phi_{s_2} - \phi_{l_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{15}\eta, k_{15}) - \phi_{l_2}(\phi_{s_2} - \phi_{l_1})}{(\phi_{s_2} - \phi_{l_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{15}\eta, k_{15}) - (\phi_{s_2} - \phi_{l_1})}, \tag{3.104}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[(\phi_{l_1} - \phi_{s_2})\eta + \frac{\phi_{l_2} - \phi_{l_1}}{\Omega_{15}}\Pi\left\{\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\Omega_{15}\eta, k_{15}\right)\right); \tilde{\alpha}^2_{150}; k_{15}\right\}\right],$$

où $\tilde{\alpha}^2_{150} = \dfrac{\phi_{s_2} - \phi_{l_2}}{\phi_{s_2} - \phi_{l_1}}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{15}}K(k_{15})$.

v) $h = h_1 = 0$

Ce cas correspond à l'orbite de couleur bleue qui passe par les points $(0, 0)$ et $(\phi_e, 0)$. On a : $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_e)^2$ et la solution :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{s_2}} - 1\right) + \sqrt{\frac{\phi_{s_2} - \phi_e}{\phi_e}}\,\mathrm{arcch}\left(\frac{2\phi_e(\phi_{s_2} - \phi_e)}{\phi_{s_2}(\phi - \phi_e)} + \frac{\phi_{s_2} - 2\phi_e}{\phi_{s_2}}\right)\right]. \tag{3.105}$$

vi) Pour $h \in\ ]h_1, +\infty[$,

Nous avons la famille des trajectoires ouvertes en vert qui passent par l'origine et qui tendent vers l'infini au voisinage de ϕ_{s_2}. $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}\left[(\phi - a_0)^2 + b_0^2\right]$ et la solution est obtenue en résolvant l'intégrale

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega_0}\int_0^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi_{s_2} - \phi)\left[(\phi - a_0)^2 + b_0^2\right]}}, \tag{3.106}$$

pour $0 < \phi < \phi_{s2}$.

2. Cas où $0 < \phi_e = \phi_{s2} < \phi_{0_1}$ **d'où** $h_0 < (h_1 = h_{s_2} = 0)$ **;** $c_3 = 0$

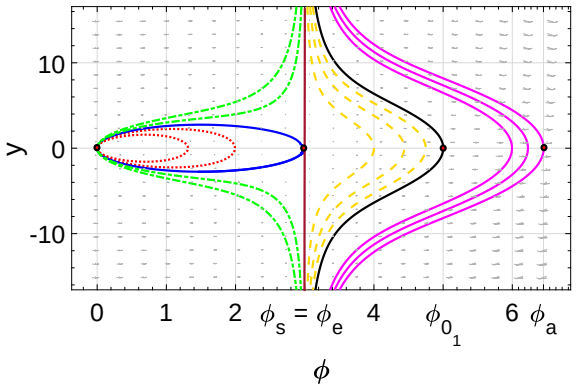


FIGURE 3.24 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_e = \phi_{s2} < \phi_{0_1}$ et $h_0 < (h_1 = h_{s_2} = 0)$; $c_3 = 0$.

i) Le cas $h \in \ ]-\infty, h_0[$ correspond à la famille de courbes de couleur violette qui coupent l'axe des abscisses en $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{0_1} < \phi_a$. Les solutions obtenues sont similaires aux solutions (3.100).

ii) Pour $h = h_0$, l'orbite correspondante est celle en noire sur la Fig. 3.24 et la solution est similaire à celle obtenue à l'Eq. (3.102).

iii) $h \in \ ]h_0, h_{s_2}[$ correspond à la famille des orbites en pointillés rouges de la Fig. 3.24 et la solution correspond à la représentation paramétrique suivante :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_1}(\phi_{a_2} - \phi_{s_2})\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - \phi_{s_2}(\phi_{a_2} - \phi_{a_1})}{(\phi_{a_2} - \phi_{s_2})\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - (\phi_{a_2} - \phi_{a_1})}, \tag{3.107}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[(\phi_{a1} - \phi_{s2})\eta + \frac{\phi_{s_2} - \phi_{a_1}}{\Omega_{33}}\Pi\left\{\arcsin(sn(\Omega_{33}\eta, k_{33})); \tilde{\alpha}^2_{330}; k_{33}\right\}\right]$$

pour $0 < \phi_{a_1} < \phi_{s_2} < \phi < \phi_{a_2}$. Nous avons ici $\tilde{\alpha}^2_{330} = \dfrac{\phi_{a_2} - \phi_{s_2}}{\phi_{a_2} - \phi_{a_1}}$ et $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{33}}K(k_{33})$.

iv) $h = h_1 = h_{s_2}$ correspond à l'orbite de couleur bleue de la Fig. 3.24 qui passe par l'origine et le point d'équilibre $(\phi_e, 0)$. La fonction $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_e)^2$ et la solution correspondante est :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_e} - 1\right). \tag{3.108}$$

v) Le cas $h > h_1$ correspond à la courbe en vert de la Fig. 3.24 et la solution correspondante est semblable à celle obtenue par l'intégrale (3.106).

3. Cas où $0 < \phi_{s_2} < \phi_e < \phi_{0_1}$ d'où $h_0 < h_{s_2} < h_1$; $c_3 = 0.0833...$

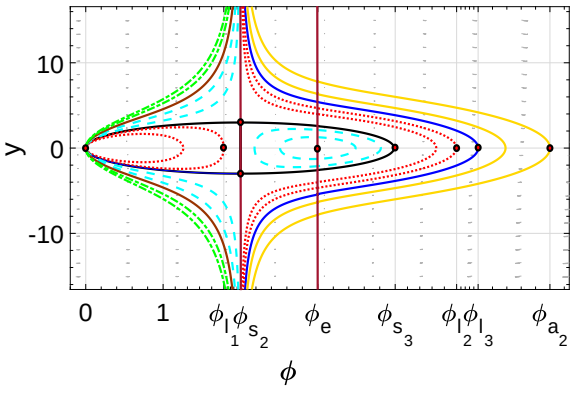


FIGURE 3.25 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{s_2} < \phi_e < \phi_{0_1}$ d'où $h_0 < h_{s_2} < h_1$ avec $c_3 = -0,0833...$.

i) $h \in \ ]-\infty, h_0[$ correspond aux orbites ouvertes de couleur jaune de la figure 3.25. Ici nous avons $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_{a1})(\phi - \phi_{a2})$ et les solutions correspondantes sont similaires à celles du cas $1.\ i)$

ii) Le cas $h = h_0$ correspond à la trajectoire de phase de couleur bleue de la figure 3.25 qui passe par le point $(\phi_{l_2}, 0)$ et qui tend vers l'infini au voisinage de la droite singulière ϕ_{s_2}. La solution correspondante est similaire à la solution Eq. (3.102).

iii) Pour $h \in \ ]h_0, h_{s2}[$, nous avons une première famille d'orbites fermées en pointillés rouges passant par l'origine $O(0,0)$ coupant l'axe des abscisses au point $(\phi_{l_1}, 0)$; et une seconde famille d'orbites ouvertes, toujours en pointillés rouges, qui passent cette fois-ci par le point $(\phi_{l_2}, 0)$ et qui tendent vers l'infini au voisinage de la droite singulière ϕ_{s_2}. Nous avons $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})$ et la représentation paramétrique des solutions est :

a) pour $0 < \phi < \phi_{a_1} < \phi_{s_2} < \phi_{a_2}$

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_1}\phi_{s_2}\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - \phi_{a_1}\phi_{s2}}{\phi_{a_1}\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - \phi_{s_2}}, \tag{3.109}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[\frac{\phi_{a_1} - \phi_{s_2}}{\Omega_{33}}\Pi\left\{\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{33}\eta, k_{33})\right); \tilde{\alpha}_{33}^2; k_{33}\right\}\right]$$

et $\tilde{\alpha}_{33}^2 = \dfrac{\phi_{a_1}}{\phi_{s_2}}$, $k_{33}^2 = \dfrac{\phi_{a_1}\left(\phi_{a_2} - \phi_{s_2}\right)}{\phi_{s_2}\left(\phi_{a_2} - \phi_{a_1}\right)}$, $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{33}}K(k_{33})$.

b) Pour $0 < \phi_{a_1} < \phi_{s_2} < \phi < \phi_{a_2}$,

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_1}\left(\phi_{a_2} - \phi_{s2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - \phi_{s_2}\left(\phi_{a_2} - \phi_{a_1}\right)}{\left(\phi_{a_2} - \phi_{s_2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right) - \left(\phi_{a_2} - \phi_{a_1}\right)}, \tag{3.110}$$

avec

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega_0}\left[\left(\phi_{a_1} - \phi_{s_2}\right)\eta + \frac{\phi_{s_2} - \phi_{a_1}}{\Omega_{33}}\Pi\left\{\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\Omega_{33}\eta, k_{33}\right)\right); \tilde{\alpha}_{330}^2; k_{33}\right\}\right]$$

avec $\tilde{\alpha}_{330}^2 = \dfrac{\phi_{a_2} - \phi_{s_2}}{\phi_{a_2} - \phi_{a_1}}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{33}}K(k_{33})$.

iv) Lorsque $h = h_{s_2}$, l'orbite principale est celle (en noir) qui coupe la droite ϕ_{s_2} en deux points sur la figure 3.25. Alors $G_2(\phi) = \dfrac{\alpha_3}{8c_2^2}\left(\phi - \phi_{s_2}\right)\left(\phi - \phi_{s_3}\right)$ et la solution a le profil donné par la relation :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{s_4}} - 1\right), \tag{3.111}$$

où $0 < \phi < \phi_{s_4}$.

v) Pour $h \in \ ]h_{s_2}, h_1[$, nous avons des orbites fermées en pointillés bleu ciel qui entourent le point $(\phi_e, 0)$ et la solution est similaire à celle de l'Eq. 3.103.

3.3.2.2.2.2/ Portraits de phase et solutions du système pour $c_2 \neq 0$ quand f_3 admet une racine double

Lorsque $f_3(\phi)$ admet une racine double, nous avons $f_3(\phi) = \alpha_3(\phi - \phi_{e_1})^2(\phi - \phi_{e_2}) = \alpha_3\phi^3 + \alpha_2\phi^2 + \alpha_1\phi + \alpha_0$. La forme canonique de $f_3(\phi)$ est :

$$f_3(\phi) = \alpha_3\left[(\phi + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3})^3 + P_0(\phi + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3}) + Q_0\right], \tag{3.112}$$

avec $P_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)^2$ et $Q_0 = \frac{2}{27}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)^3 + \frac{\alpha_0}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{3\alpha_3^2}$. Le polynôme du troisième degré admet une racine double si et seulement si nous avons la condition : $Q_0^2 + \frac{4P_0^3}{27} = 0$. Alors, ses racines sont données par : $\phi_{e_1} + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} = \pm\sqrt{\frac{-P_0}{3}}$ et $\phi_{e2} + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} = \pm 2\sqrt{\frac{-P_0}{3}}$. La racine double est donnée par :

$$\phi_{e_1} = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_3}}{3\alpha_3}. \tag{3.113}$$

La racine simple est donnée par :

$$\phi_{e_2} = \frac{-\alpha_2^2 \pm 2\sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_3}}{3\alpha_3}. \tag{3.114}$$

Nous remarquons que ϕ_{e_1} vérifie la relation $3\alpha_3\phi_{e_1}^2 + 2\alpha_2\phi_{e_1} - \alpha_1 = 0$, donc $J(\phi_{e_1}, 0) = 0$. Pour tracer les portraits de phase , nous avons fixé les valeurs des paramètres suivants : $P = -1$; $Q = +0,3766$; $v_e = 2$; $c_1 = -0,8724$; $c_2 = -0,3$. Nous obtenons alors : $\alpha_0 = -16$; $\alpha_1 = +20$; $\alpha_2 = -8$; $\alpha_3 = 1$. Il s'en suit que $\phi_{e_1} = 2$; $\phi_{e_2} = 4$; $\phi_{s_1} = \frac{10}{3}$ et $\phi_{s_2} = \frac{P}{c_2 + 2c_3}$.

L'Hamiltonien du système dans cette situation est donné par :

$$H(\phi, y) = \left[\frac{(c_2 + 2c_3)\phi - P}{\phi}\right]y^2 + \beta_2\phi^2 + \beta_1\phi + \frac{\beta_0}{c_2\phi - P}\cdot \tag{3.115}$$

Ici, $\beta_0 = 0,987662$; $\beta_1 = 3,703701$; $\beta_2 = -1,3888$; $H(\phi_{e_1}, 0) = h_1 = 4,321357$; $H(\phi_{e_2}, 0) = h_2 = -12,3443$; $H(0,0) = h_0 = -\frac{\beta_0}{P} = 0,987662$. On a

$$y^2 = \frac{G_3(\phi)}{c_2(c_2 + 2c_3)(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.116}$$

avec

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi^3 + (P\beta_2 - \beta_1 c_2)\phi^2 + (P\beta_1 + hc_2)\phi - P(h - h_0)\cdot \tag{3.117}$$

Ces relations permettront de déterminer les solutions du système.

1. **Cas où** $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_2}$ **d'où** $h_{s_2} < h_2 < 0 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0,066667$

   i) Pour $h \in\ ]-\infty, h_{s_2}[$
   Ce cas correspond à une famille d'orbites de couleur rose délimitée par la droite verticale passant par ϕ_{s_2} et l'orbite correspondant à h_{s_2} passant par le point $(\phi_{s_3}, 0)$ tel que $H(\phi_{s_3}, 0) = h_{s_2}$, avec $\phi_{s_1} < \phi_{s_3} < \phi_{e_2}$ (voir Fig. 3.26). Les orbites correspondantes sont celles qui interceptent l'axe des ϕ en ϕ_a et admettant chacune une branche infinie au voisinage de ϕ_{s_1}. On a une autre famille

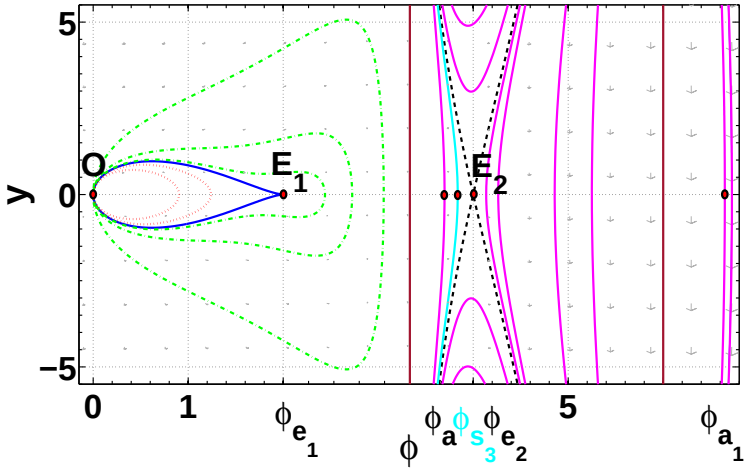


FIGURE 3.26 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_2}$ d'où $h_{s_2} < h_2 < 0 < h_0 < h_1$ et $c_3 = 0,066667$.

d'orbites de couleur rose qui admet des branches infinies en ϕ_{s_2}, chaque orbite interceptant l'axe des ϕ en un point $(\phi_{a_1}, 0)$. Alors , nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2}) \tag{3.118}$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3\phi(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})}{8c_2^2(c_2 + 2c_3)(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.119}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_a < \phi_{s_2} < \phi_{a_1}$.
Pour le cas $\phi_{s_1} < \phi \leqslant \phi_a$, nous avons :

$$\left(\frac{-\alpha_3}{8c_2^2(c_2 + 2c_3)}\right)^{\frac{1}{2}} z = \pm \int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)}}. \tag{3.120}$$

Pour $\phi_{s2} < \phi \leqslant \phi_{a1}$, nous avons :

$$\left(\frac{-\alpha_3}{8c_2^2(c_2 + 2c_3)}\right)^{\frac{1}{2}} z = \pm \int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)}}. \tag{3.121}$$

ii) Pour $h = h_{s_2}$, avec $\phi = \phi_{s_2}$
Nous avons une trajectoire de phase correspondant à une orbite de couleur rose qui tend vers l'infini au voisinage de ϕ_{s_1} et qui intercepte l'axe des ϕ en $(\phi_{s_3}, 0)$ tel que

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4}), \tag{3.122}$$

avec $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_4}$. Alors,

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{\phi - \phi_{s_1}}. \tag{3.123}$$

Une représentation paramétrique de la solution est de la forme :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}}{1 - \frac{(\phi_{s_3} - \phi_{s_1})}{\phi_{s_3}} \mathrm{sn}^2(\Omega_{12}\eta, k_{12})}, \tag{3.124}$$

avec $\omega = \left(\frac{-\alpha_3}{8c_2^2\,(c_2 + 2c_3)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $k_{12}^2 = \frac{(-\phi_{s_4})\,(\phi_{s3} - \phi_{s_1})}{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})}$, $\Omega_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})}$ et

$$z(\eta) = \pm \frac{1}{\omega\Omega_{12}} \Pi \left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{12}\eta, k_{12})\right); \tilde{\alpha}_{12}^2; k_{12}\right]. \tag{3.125}$$

iii) Pour $h \in\ ]h_{s_2}, h_2[$

Pour ce cas , nous avons une famille d'orbites de couleur rose définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{e_2}[$ et limitées par les orbites correspondant à h_{s_2} en ϕ_{s_3} et h_2 en ϕ_{e_2}, puis une autre famille de couleur rose toujours limitée par h_2 en ϕ_{e_2} et la droite singulière ϕ_{s_2}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})}{8c_2} \tag{3.126}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})}{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.127}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_{a_1} < \phi_a < \phi_{s_2}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi \leqslant \phi_{a_1}$, nous avons

$$z(\phi) = \pm \frac{1}{\omega} \int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)\,d\phi}{\sqrt{\phi\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})\,(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)}}. \tag{3.128}$$

Pour $\phi_a \leqslant \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm \frac{1}{\omega} \int_{\phi_a}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)\,d\phi}{\sqrt{\phi\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})\,(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)}}. \tag{3.129}$$

iv) Pour $h = h_2$

Dans ce cas, nous avons l'orbite en pointillés noirs d'équation :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\,(\phi - \phi_{e_2})^2\,(\phi - \phi_{m_2}) \tag{3.130}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi - \phi_{e_2})^2\,(\phi - \phi_{m_2})}{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.131}$$

avec $\phi_{m_2} < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$. Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - (\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{14}\eta, k_{14})}, \tag{3.132}$$

et

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\Bigg[-\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{e_2}}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{14}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{14}\eta, k_{14})\right); \tilde{\alpha}_{14}^2; k_{14}\right] \\ + \frac{\phi_{s_1}\left(\phi_{e_2} - \phi_{s_2}\right)}{\Omega_{14}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{14}\eta, k_{14})\right); \tilde{\alpha}_{141}^2; k_{14}\right]\Bigg], \end{aligned} \tag{3.133}$$

où $k_{14}^2 = \dfrac{(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})(-\phi_{m_2})}{\phi_{s_2}(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$, $\Omega_{14} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_2}(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$, $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{14}K(k_{14})}$.

v) Pour $h \in\ ]h_2, h_0[$

Dans ce cas, $G_3(\phi)$ admet une seule racine négative et peut se mettre sous la forme :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right) \tag{3.134}$$

avec $\phi_a < 0$; cette situation correspond à une famille d'orbites de couleur rose limitées par les orbites correspondant à h_2 et h_0 avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.135}$$

et la solution est de la forme :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi}\frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\,d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.136}$$

vi) Pour $h = h_0 = -\dfrac{\beta_0}{P}$

Ce cas correspond à une orbite définie de couleur rose dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. On a dans ce cas :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right) \tag{3.137}$$

et

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi^2\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.138}$$

La solution est de la forme

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s1}}^{\phi}\frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\phi\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.139}$$

vii) Pour $h \in\ ]h_0, h_1[$

Nous avons deux familles d'orbites. La première famille est constituée d'orbites en pointillés rouges dont chacune intercepte l'axe des ϕ en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $0 < \phi_a < \phi_{e_1}$. La seconde famille est constituée des orbites de couleur rose définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right). \tag{3.140}$$

Pour $0 < \phi < \phi_a$, nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right) \tag{3.141}$$

et

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_0^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})\,\phi\,(\phi_a - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.142}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_2}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\,\phi\,(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.143}$$

viii) Pour $h = h_1$

Pour ce cas , nous avons une orbite fermée de couleur bleue qui passe par le point d'équilibre $E(\phi_{e_1}, 0)$ et une autre branche d'orbite définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$. Nous avons alors :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{e_1})^3 \tag{3.144}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi - \phi_{e_1})^3}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.145}$$

La solution est donnée pour $0 < \phi < \phi_{e_1}$

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{e_1}\phi_{s_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18}) - \phi_{e_1}\phi_{s_1}}{\phi_{e_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18}) - \phi_{s_1}}, \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{(\phi_{e_1} - \phi_{s_1})}{\omega\Omega_{18}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta, k_{18}); \tilde{\alpha}_{18}^2; k_{18}\right)\right] \\ \pm\frac{\phi_{s_1}(\phi_{e_1} - \phi_{s_2})}{\omega\phi_{e_1}}\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18})} \end{aligned} \tag{3.147}$$

et

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18})} = \frac{k_{18}^2 - 1}{\Omega_{18} k_{18}^2} \Pi \left[\arcsin \sqrt{\frac{\phi\,(\phi_{s_2} - \phi_{e_1})}{\phi_{s_2} - \phi}}, 1, k_{18} \right] - \frac{1}{\Omega_{18}} F \left[\arcsin \sqrt{\frac{\phi\,(\phi_{s_2} - \phi_{e_1})}{\phi_{s_2} - \phi}}, k_{18} \right]. \tag{3.148}$$

Et pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\,(\phi_{s_2} - \phi_{e_1}) - \phi_{e_1}\,(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18})}{(\phi_{s_2} - \phi_{e_1}) - (\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18})} \tag{3.149}$$

et

$$z(\eta) = \pm\frac{(\phi_{e_1} - \phi_{s_1})\,\eta}{\omega} \pm \frac{(\phi_{s_1} - \phi_{e_1})}{\omega\Omega_{18}} \Pi \left[\arcsin \left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta, k_{18}); \tilde{\alpha}_{18}^2; k_{18} \right) \right] \pm \frac{(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\,\eta}{\omega} \int_0^{\eta} \mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18}) d\eta \tag{3.150}$$

où nous avons

$$\int_0^{\eta} \mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18}) d\eta = \frac{1}{\Omega_{18} k_{18}} F(v, k_{18}) - \frac{1}{\Omega_{18} k_{18}} E(v, k_{18}) \tag{3.151}$$

avec $v = \dfrac{(\phi_{s_2} - \phi_{e_1})\,(\phi(\eta) - \phi_{s_1})}{(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\,(\phi(\eta) - \phi_{e_1})}$.

ix) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

Ce cas correspond aux courbes en pointillés verts qui interceptent l'axe des ϕ en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{e_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$. Une partie correspond à la famille de courbes de couleur rose définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies.

Pour $0 < \phi < \phi_a$, nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2} (\phi - \phi_a) \left((\phi - a_0)^2 + b_0^2 \right) \tag{3.152}$$

et

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega} \int_0^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})\,d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})\,\phi\,(\phi_a - \phi) \left((\phi - a_0)^2 + b_0^2 \right)}}. \tag{3.153}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega} \int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)\,d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi_{s_2} - \phi)\,\phi\,(\phi - \phi_a) \left((\phi - a_0)^2 + b_0^2 \right)}}. \tag{3.154}$$

2. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_2} = \phi_{s_2}$ **d'où** $h_{s_2} = h_2 < 0 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0,025$

Pour $h \in\ ]-\infty, h_{s_2}[$

Dans ce cas, nous avons une famille d'orbites en pointillés de couleur rose définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et une autre famille de courbes en pointillés

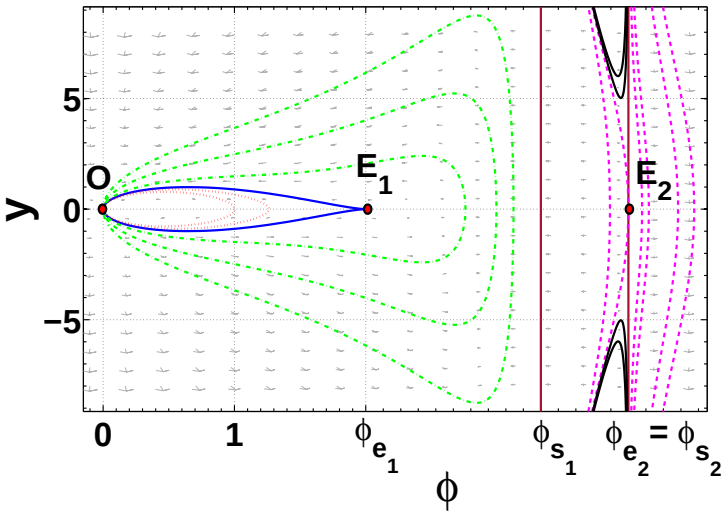


FIGURE 3.27 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_2} = \phi_{s_2}$ d'où $h_{s_2} = h_2 < 0 < h_0 < h_1$; $c_3 = 0,025$.

roses également définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, +\infty[$. L'équation caractérisant la ligne de phase est définie par

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})}{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.155}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_a < \phi_{e_2} < \phi_{a_1}$. On a les mêmes formes de solution qu'en 1.

i) Pour $h = h_2 = h_{s_2}$
Nous avons une ligne de phase en pointillés roses qui passe par le point $(\phi_{e_2}, 0)$ caractérisé par l'équation

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi - \phi_{e2})\,(\phi - \phi_{m2})}{\phi - \phi_{s_1}}. \tag{3.156}$$

C'est une orbite qui est définie pour les valeurs de ϕ telles que $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{e_2}$. On a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{e_2}}{\phi_{e_2} - (\phi_{e_2} - \phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{21}\eta, k_{21})}, \tag{3.157}$$

avec $\Omega_{21} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{e_2}\,(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$ et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{1}{\Omega_{21}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{21}\eta, k_{21}); \tilde{\alpha}_{21}^2; k_{21}\right)\right]\right], \tag{3.158}$$

où $k_{21}^2 = \dfrac{-\phi_{m_2}\,(\phi_{e_2} - \phi_{s_1})}{\phi_{e_2}\,(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$ et $\tilde{\alpha}_{21}^2 = \dfrac{\phi_{e_2} - \phi_{s_1}}{\phi_{e_2}}$.

ii) Pour $h \in\ ]h_2, h_0[$
On a une famille d'orbites noires définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et limitées par l'orbite qui correspond à h_{e2} et la droite d'équation $\phi = \phi_{s_1}$. Les solutions sont analogues au cas a).

iii) Pour $h = h_0 = -\dfrac{\beta_0}{P}$

Pour ce cas, nous avons une orbite noire définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et la solution dans cette situation est semblable au cas du $1.\ vi)$.

iv) Pour $h \in\ ]h_0, h_1[$

Pour ce cas, nous avons deux familles d'orbites définies exactement comme dans le cas $1.\ vi)$. Une famille d'orbites en pointillés rouges et une autre famille d'orbites noires et les solutions se déduisent de ce cas.

v) Pour $h = h_1$

Nous avons un cas qui est identique au $1.\ viii)$, avec une orbite de couleur bleue et les mêmes formes de solutions .

vi) Pour $h \in\ ]h_1, +\infty[$

Pour cette situation, on a les mêmes familles d'orbites que dans le cas $1.\ ix)$. La famille d'orbites en pointillés verts et les solutions sont de la même forme qu'en $1.\ ix)$.

3. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{e_2}$ **d'où** $h_{s_2} < h_2 < 0 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0,0125$

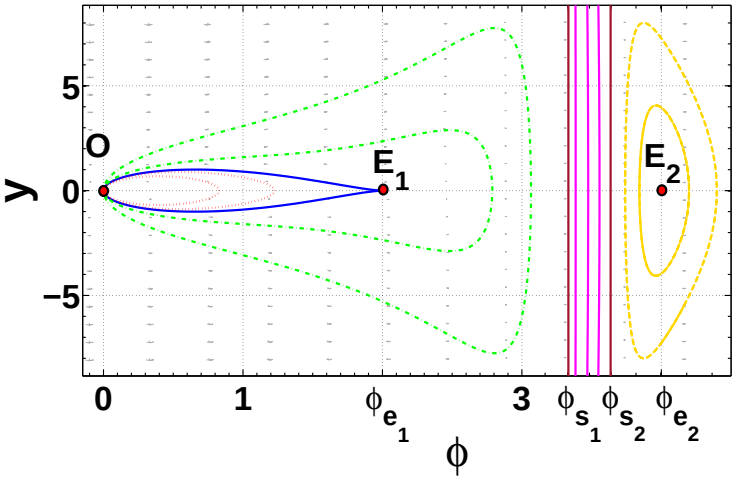


FIGURE 3.28 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{e_2}$ d'où $h_{s_2} < h_2 < 0 < h_0 < h_1$; $c_3 = 0,0125$.

i) Pour $h \in\ ]-\infty, h_{s_2}[$

Ce cas correspond à deux familles d'orbites dont l'une intercepte l'axe des ϕ en un point $(\phi_{a_1}, 0)$ tel que $\phi_{s_1} < \phi_{a_1} < \phi_{s_2}$ et l'autre famille d'orbites passant en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{e_2} < \phi_{s_3} < \phi_a$ et $H(\phi_{s_3}, 0) = h_{s_2}$. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})\,, \tag{3.159}$$

avec $\phi_{a_2} < \phi_{a_1} < \phi_a$ et

$$y^2 = -\omega^2\,\frac{\phi\,(\phi - \phi_a)\,(\phi - \phi_{a_1})\,(\phi - \phi_{a_2})}{(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.160}$$

Les solutions sont données par :
Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{a_1}$:

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\,d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)}}\cdot \tag{3.161}$$

Pour $\phi_{s_2} < \phi < \phi_a$:

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})\,d\phi}{\sqrt{\phi(\phi_a-\phi)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}}. \tag{3.162}$$

ii) Pour $h = h_{s_2}$
Nous avons une orbite d'équation

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{s_3})(\phi-\phi_{s_4})}{\phi-\phi_{s_1}}, \tag{3.163}$$

avec $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_{s_3}$ et la solution est donnée pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_3}$:

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_3}\phi_{s_1}}{\phi_{s_3} - (\phi_{s_3}-\phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{32}, k_{32})} \tag{3.164}$$

où $k_{32}^2 = \dfrac{-\phi_{s_4}(\phi_{s_3}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_3}(\phi_{s_1}-\phi_{s_4})}$,

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{32}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{32}\eta, k_{32}); \tilde{\alpha}_{32}^2; k_{32}\right)\right]\right] \tag{3.165}$$

et $\Omega_{32} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_3}(\phi_{s_1}-\phi_{s_4})}$ et $\tilde{\alpha}_{32}^2\dfrac{\phi_{s_3}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_3}}$, avec $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{32}K(k_{32})}$.

iii) Pour $h \in\ ]h_{s2}, h_2[$
On a une famille d'orbites en pointillés jaunes entourant $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2}), \tag{3.166}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{a_1} < \phi_{e_2} < \phi_a$. Chaque ligne de phase est caractérisée par :

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.167}$$

Nous avons donc deux familles d'orbites ; l'une définie pour les valeurs de ϕ telles que $\phi_{s_2} < \phi$. Nous avons comme solution :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{a_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})\,d\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})\phi(\phi_a-\phi)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}}. \tag{3.168}$$

L'autre famille est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ ayant pour solution :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\,d\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\phi(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}}. \tag{3.169}$$

iv) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à l'orbite définie par les relations

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8} c_2 \left(\phi - \phi_{e_2}\right)^2 \left(\phi - \phi_{m_2}\right) \tag{3.170}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi \left(\phi - \phi_{e_2}\right)^2 \left(\phi - \phi_{m_2}\right)}{\left(\phi - \phi_{s_1}\right)\left(\phi - \phi_{s_2}\right)}, \tag{3.171}$$

avec $\phi_{m_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{e_2}$. Ce cas correspond aux branches définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et nous avons comme solution déduite de $1.\ iv)$:

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - \left(\phi_{s_2} - \phi_{s_1}\right) \mathrm{sn}^2(\Omega_{34}\eta, k_{34})} \tag{3.172}$$

et

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\Bigg[& -\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}\eta}{\phi_{e_2}} + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{34}} \Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{34}\eta, k_{34}); \tilde{\alpha}^2_{34}; k_{34}\right)\right] \\ & + \frac{\phi_{s_1}\left(\phi_{e_2} - \phi_{s_2}\right)}{\Omega_{34}} \Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{34}\eta, k_{34}); \tilde{\alpha}^2_{341}; k_{34}\right)\right]\Bigg], \end{aligned} \tag{3.173}$$

avec $\tilde{\alpha}^2_{34} = \dfrac{\phi_{s_2} - \phi_{s_1}}{\phi_{s_2}}$, $\tilde{\alpha}^2_{341} = \dfrac{\phi_{e_2}\left(\phi_{s_2} - \phi_{s_1}\right)}{\phi_{s_2}\left(\phi_{e_2} - \phi_{s_1}\right)}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{34}} K(k_{34})$. $k^2_{34} = \dfrac{\left(-\phi_{m_2}\right)\left(\phi_{s_2} - \phi_{s_1}\right)}{\phi_{s_2}\left(\phi_{s_1} - \phi_{m_2}\right)}$.

v) Pour $h = h_0$

Alors on a l'orbite définie dans $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ telle que

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi\left(\left(\phi - a_0\right)^2 + b_0^2\right) \tag{3.174}$$

et la solution est de la forme

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{\left(\phi - \phi_{s_1}\right)\left(\phi_{s_2} - \phi\right) d\phi}{\phi\sqrt{\left(\phi - \phi_{s_1}\right)\left(\phi_{s_2} - \phi\right)\left(\left(\phi - a_0\right)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.175}$$

vi) Pour $h \in\ ]h_0, h_1[$

Nous avons deux familles d'orbites : la première famille en pointillés rouges est définie dans l'intervalle $[0, \phi_{e_1}[$ et la seconde est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$;

Pour $0 < \phi < \phi_a < \phi_{e1}$, nous avons

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\left(\phi - \phi_a\right)\left(\left(\phi - a_0\right)^2 + b_0^2\right) \tag{3.176}$$

et

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{0}^{\phi} \frac{\left(\phi - \phi_{s1}\right)\left(\phi - \phi_{s_2}\right) d\phi}{\sqrt{\left(\phi - \phi_{s_1}\right)\left(\phi - \phi_{s_2}\right)\phi\left(\phi_a - \phi\right)\left(\left(\phi - a_0\right)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.177}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\,d\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\phi(\phi-\phi_a)\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}}. \tag{3.178}$$

vii) Pour $h = h_1$

Nous avons les mêmes formes de solutions que celles obtenues au cas $1.viii)$, avec des orbites de couleur bleue.

viii) Pour $h \in\ ]h_1, \infty[$

Nous avons les mêmes formes de solution que celles obtenues au cas $1.\ ix)$, avec des orbites en pointillés verts.

4. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} = \phi_{s_2} < \phi_{e_2}$ **d'où** $h_2 < 0 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0$**.** Voir figure (3.29).

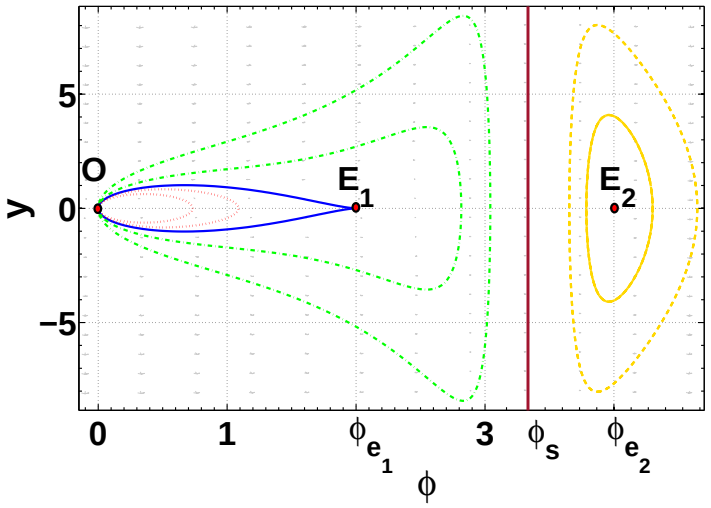


FIGURE 3.29 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_1} = \phi_{s_2} = \phi_{e_2}$ d'où $h_2 < 0 < h_0 < h_1$. $c_3 = 0$

i) Pour $h \in\ ]-\infty, h_2[$

Dans ce cas, on a une famille d'orbites fermées en pointillés jaunes entourant le point d'équilibre $E(\phi_{e_2}, 0)$ et pour $\phi > \phi_{s_1}$, nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2}), \tag{3.179}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_a < \phi_{a_1}$ et

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}{(\phi-\phi_{s_1})^2}. \tag{3.180}$$

Une représentation paramétrique de la solution est :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_a\phi_{a_1}}{\phi_{a_1}-(\phi_{a_1}-\phi_a)\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{41}\eta, k_{41})} \tag{3.181}$$

et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{\phi_{a_1}}{\Omega_{41}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{41}\eta, k_{41}); \tilde{\alpha}_{41}^2; k_{41}\right)\right]\right], \tag{3.182}$$

avec $\Omega_{41} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{a_1}(\phi_a - \phi_{a_2})}$ et $k_{41}^2 = \frac{-\phi_{a_2}(\phi_{a_1} - \phi_a)}{\phi_{a1}(\phi_a - \phi_a)}$.

ii) Pour $h = h_1$

Nous avons une ligne de phase de couleur bleue qui est caractérisée par les relations

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{e_1})^3 \tag{3.183}$$

et

$$y^2 = -\omega^2\frac{(\phi - \phi_{e_1})^3}{(\phi - \phi_{s_1})^2}. \tag{3.184}$$

La solution est donnée par :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{e_1}} - 1\right) + \frac{2\phi(\phi_{s_1} - \phi_{e_1})}{\phi_{e_1}\sqrt{\phi(\phi_{e_1} - \phi)}}\right]. \tag{3.185}$$

iii) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Nous avons une famille d'orbites en pointillés rouges passant par un point $(\phi_a, 0)$ tel que $0 < \phi_a < \phi_{e_1}$. Avec

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_2}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left[(\phi - a_0)^2 + b_0^2\right] \tag{3.186}$$

et

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a}\frac{(\phi - \phi_{s_1})\,d\phi}{\phi\sqrt{\phi(\phi_a - \phi)\left[(\phi - a_0)^2 + b_0^2\right]}}. \tag{3.187}$$

3.3.2.2.2.3/ Portraits de phase et solutions du système pour $c_2 \neq 0$ quand f_3 admet trois racines distinctes et positives

Dans le cas des racines distinctes et positives, nous avons :

$$f(\phi) = \alpha_3(\phi - \phi_{e_1})(\phi - \phi_{e_2})(\phi - \phi_{e_3}). \tag{3.188}$$

Afin de tracer les portraits de phase pour ce cas, nous avons fixé les valeurs des paramètres suivants : $P = -1$; $Q = 0,126169$; $c_1 = -1,3544$; $c_2 = -0,24069$; $v_e = 1,9364$. Ce qui conduit à $\phi_{e_1} = 1$; $\phi_{e_2} = 3$; $\phi_{e_3} = 5$ et $\phi_{s_1} = 4,1547$.

L'Hamiltonien du système dans cette situation est donné par :

$$H(\phi, y) = \left[\frac{(c_2 + 2c_3)\phi - P}{\phi}\right]y^2 + \beta_2\phi^2 + \beta_1\phi + \frac{\beta_0}{c_2\phi - P}. \tag{3.189}$$

Ici, $\beta_0 = 3,196812$; $\beta_1 = 2,9802$; $\beta_2 = -2,157692$; $h_0 = 3,196812$; $h_1 = 5,03266$; $h_2 = 1,02359$; $h_3 = -54,75431$; $\alpha_0 = -15$; $\alpha_1 = 23$; $\alpha_2 = -9$ et $\alpha_3 = 1$.

1. **Cas où** $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3} < \phi_{s_2}$ **d'où** $h_{s_2} < h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$**.** $c_3 = 0,03701$**.** Voir figure (3.30).

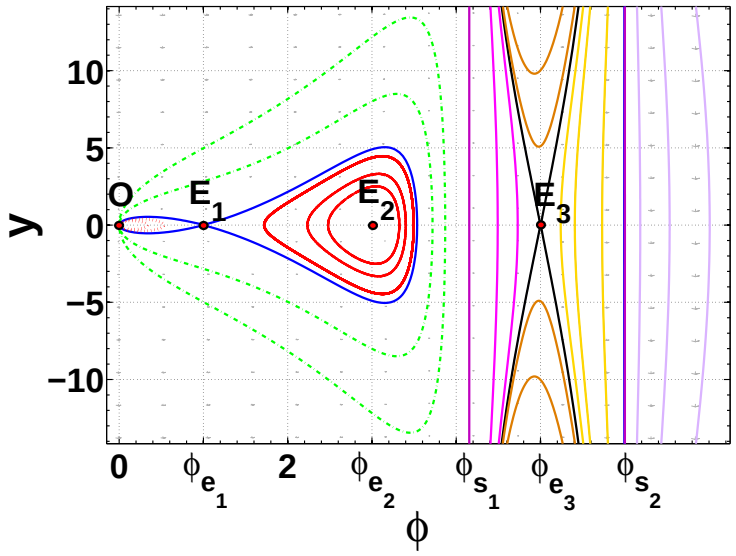


FIGURE 3.30 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3} < \phi_{s_2}$ d'où $h_{s_2} < h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$. $c_3 = 0,03701$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_{s_2}[$

Pour cette situation, nous avons une première famille d'orbites de couleur rose interceptant l'axe des ϕ en $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{s_1} < \phi_a < \phi_{s_3}$. L'autre famille d'orbites de couleur jaune est constituée des courbes interceptant l'axe des ϕ en $(\phi_{a_1}, 0)$ tel que $\phi_{s_2} < \phi_{a_1}$. Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_a$, on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a1})(\phi - \phi_{a2}) \tag{3.190}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.191}$$

et les solutions sont données par :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_1})(\phi_a - \phi)}}. \tag{3.192}$$

Pour $\phi_{s_2} < \phi < \phi_{s_3}$ avec $H(\phi_{s_3}, 0) = h_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi\,(\phi - \phi_{s_1})\,(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_a)(\phi_{a_1} - \phi)}}. \tag{3.193}$$

ii) Pour $h = h_{s_2}$

Cette situation correspond à l'orbite de couleur rose qui passe par le point $(\phi_{s_3}, 0)$ et admet une branche infinie au voisinage de ϕ_{s_1}. Alors

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - s_4) \tag{3.194}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi-\phi_{s_3})\,(\phi-\phi_{s_4})}{(\phi-\phi_{s_1})}, \tag{3.195}$$

où $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_3}$. Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_3}}{\phi_{s_3} - (\phi_{s_3} - \phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2\,(\Omega_{12}\eta, k_{12})} \tag{3.196}$$

et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s1}\eta + \frac{\phi_{s1}}{\Omega_{12}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{1_2}\eta, k_{1_2}); \tilde{\alpha}^2_{1_2}; k_{1_2}\right)\right]\right], \tag{3.197}$$

avec $\tilde{\alpha}^2_{12} = \dfrac{\phi_{s_3} - \phi_{s_1}}{\phi_{s_3}}$ et $k_{12} = \dfrac{-\phi_{s_4}\,(\phi_{s3} - \phi_{s_1})}{\phi_{s_3}\,(\phi_{s1} - \phi_{s_4})}$.

iii) Pour $h \in]h_{s_2}, h_3[$

Cette situation correspond à la famille d'orbites à droite de celle passant par $(\phi_{s_3}, 0)$ de couleur rose et l'homocline qui passe par $E(\phi_{e_3}, 0)$. L'autre famille constituée des orbites en jaune limitées par l'homocline h_3 et à gauche par $\phi = \phi_{s_2}$. Dans ce cas , on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\,(\phi-\phi_l)\,(\phi-\phi_{l_1})\,(\phi-\phi_{l_2})\,, \tag{3.198}$$

avec $\phi_{l2} < 0 < \phi_{s_3} < \phi_l < \phi_{e_3} < \phi_{l_1} < \phi_{s_2}$ et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi-\phi_l)\,(\phi-\phi_{l_1})\,(\phi-\phi_{l_2})}{(\phi-\phi_{s_1})\,(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.199}$$

où $\omega^2 = \dfrac{-\alpha_3}{8c_2^2(c_2+2c_3)}$.

Pour $\phi_{s_3} < \phi \leqslant \phi_l$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_l} \frac{(\phi-\phi_{s_1})\,(\phi-\phi_{s_2})\,d\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_{s_1})\,(\phi-\phi_{s_2})\,\phi\,(\phi_l-\phi)\,(\phi-\phi_{l_1})\,(\phi-\phi_{l_2})}}. \tag{3.200}$$

Et pour $\phi_{l_1} \leqslant \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{l_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})\phi(\phi-\phi_l)(\phi_{l_1}-\phi)(\phi-\phi_{l_2})}}. \tag{3.201}$$

iv) Pour $h = h_3$

Pour ce cas , nous avons l'homocline noire passant par le point d'équilibre $E_3\,(\phi_{e_3}, 0)$ et admettant des branches infinies au voisinage de ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Dans ce cas , nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\,(\phi-\phi_{e_3})^2\,(\phi-\phi_{m_3})\,, \tag{3.202}$$

où $\phi_{m_3} < 0$ et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\,(\phi-\phi_{e_3})^2\,(\phi-\phi_{m_3})}{(\phi-\phi_{s_1})\,(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.203}$$

Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - (\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{14}\eta, k_{14})}, \tag{3.204}$$

avec $k_{14}^2 = \dfrac{(-\phi_{m_3})\,(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_2}\,(\phi_{s_1}-\phi_{m_3})}$ et $\Omega_{14} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{m_3})}$.

Alors,

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{e_3}}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{14}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{14}\eta, k_{14}); \tilde{\alpha}_{14}^2; k_{14}\right)\right]\right] \\ \pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}(\phi_{e_3}-\phi_{s_2})}{\phi_{e_3}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{14}\eta, k_{14}); \tilde{\alpha}_{140}^2; k_{14}\right)\right]\right], \end{aligned} \tag{3.205}$$

avec $\tilde{\alpha}_{14}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}}$; $\tilde{\alpha}_{140}^2 = \dfrac{\phi_{e_3}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_2}(\phi_{e_3}-\phi_{s_1})}$ où $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega}K(k_{14})$.

v) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Pour ce cas , nous avons des orbites de couleur marron définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_a)\left[(\phi-a_0)^2 + b_0^2\right], \tag{3.206}$$

avec $\phi_a < 0$ et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi-\phi_a)\left[(\phi-a_0)^2 + b_0^2\right]}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.207}$$

La solution est donnée par :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_a)\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}}. \tag{3.208}$$

vi) Pour $h = h_2$

Nous avons alors l'orbite de couleur marron qui est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Alors,

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_2})^2(\phi-\phi_{m_2}), \tag{3.209}$$

avec $\phi_{m_2} < 0$. Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - (\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{16}\eta, k_{16})}, \tag{3.210}$$

avec $k_{16}^2 = \dfrac{(-\phi_{m_2})\,(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{m_2})}$ et $\Omega_{16} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{m_2})}$.

vii) Pour $h \in \ ]h_2, h_0[$

Ce cas correspond à une famille d'orbites de couleur rouge entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et limitées par une orbite fermée correspondant à h_0 entourant ce même point d'équilibre. Une autre famille d'orbites de couleur marron correspondant à cette situation est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies de ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3}), \tag{3.211}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.212}$$

avec $\phi_{k_1} < 0 < \phi_{k_2} < \phi_{e_2} < \phi_{k_3} < \phi_{s_1}$. Nous avons les solutions si $\phi_{k_2} < \phi < \phi_{k_3}$:

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{k_2}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi_{k_3} - \phi)}}. \tag{3.213}$$

Et pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}}. \tag{3.214}$$

viii) Pour $h = h_0$

Pour ce cas, nous avons une orbite fermée de couleur rouge qui entoure le point d'équilibre $E_2(\phi_{s_2}, 0)$ et interceptant l'axe des ϕ en $(\phi_{0_1}, 0)$ et $(\phi_{0_2}, 0)$. Une autre orbite de couleur marron correspondant à ce cas est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Alors,

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi\,(\phi - \phi_{0_1})\,(\phi - \phi_{0_2}) \tag{3.215}$$

et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi^2(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.216}$$

Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

Pour $\phi_{0_1} \leqslant \phi \leqslant \phi_{0_2}$

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})\mathrm{sn}^2\,(\Omega_{18}\eta, k_{18}) - \phi_{0_2}\,(\phi_{s_1} - \phi_{0_1})}{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta, k_{18}) - (\phi_{s_1} - \phi_0)}, \tag{3.217}$$

avec $0 < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$; $k_{18}^2 = \dfrac{(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})(\phi_{02} - \phi_{0_1})}{(\phi_{s_2} - \phi_{0_2})(\phi_{s_1} - \phi_{0_1})}$ et $\Omega_{18} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\phi_{s_2} - \phi_{0_2})(\phi_{s_1} - \phi_{0_1})}$.

De plus,

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\Omega_{18}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta,k_{18})\right);\tilde{\alpha}^2_{18};k_{18}\right]\right] \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\phi_{0_2}\Omega_{18}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta,k_{18})\right);\tilde{\alpha}^2_{180};k_{18}\right]\right], \tag{3.218}$$

avec $\tilde{\alpha}^2_{18} = \dfrac{\phi_{0_2}-\phi_{0_1}}{\phi_{s_1}-\phi_{0_1}}$ et $\tilde{\alpha}^2_{180} = \dfrac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})}{\phi_{0_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{0_2}(\phi_{s2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{18}\eta,k_{18}) - \phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{02})}{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})sn^2(\Omega\eta,k_{18}) - (\phi_{s_2}-\phi_{0_2})} \tag{3.219}$$

et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\left(\phi_{0_2}-\phi_{s_1}-\phi_{s_2}+\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{02}}\right)\eta + \frac{(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\Omega_{18}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta,k_{18})\right);\tilde{\alpha}^2_{182};k_{18}\right]\right] \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\Omega_{18}\phi_{0_2}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{18}\eta,k_{18})\right);\tilde{\alpha}^2_{183};k_{18}\right]\right], \tag{3.220}$$

avec $\tilde{\alpha}^2_{182} = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}-\phi_{0_2}}$, $\tilde{\alpha}^2_{183} = \dfrac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{18}K(k_{18})}$.

ix) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Pour ce cas, nous avons trois famille d'orbites : Une première famille d'orbites fermées en pointillés rouges, limitées par l'homocline h_1 dans l'intervalle $[0,\phi_{e_1}[$; une deuxième famille d'orbites de couleur rouge continue entourant le point d'équilibre E_2 et limitée par les orbites correspondant à h_1 et h_0 dans l'intervalle $]\phi_{e_1},\phi_{m_1}[$; la troisième famille d'orbites de couleur marron est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1},\phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}.

Nous avons

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{r_1})(\phi-\phi_{r_2})(\phi-\phi_{r_3}), \tag{3.221}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{r_1})(\phi-\phi_{r_2})(\phi-\phi_{r_3})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.222}$$

où $0 < \phi_{r_1} < \phi_{r_2} < \phi_{r_3} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$.

Pour $0 \leqslant \phi \leqslant \phi_{r_1}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi^{r_1}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi_{r_1}-\phi)(\phi-\phi_{r_2})(\phi-\phi_{r_3})}}. \tag{3.223}$$

Pour $\phi_{e_1} < \phi_{r_2} < \phi < \phi_{r_3}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{r_2}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{r_1})(\phi-\phi_{r_2})(\phi_{r_3}-\phi)}}. \tag{3.224}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{r_1})(\phi-\phi_{r_2})(\phi-\phi_{r_3})}}. \tag{3.225}$$

x) Pour $h = h_1$

Pour ce cas, nous avons une orbite de couleur bleue qui passe par $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et l'autre partie de l'orbite de couleur marron est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$. On a dans ce cas :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1}), \tag{3.226}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.227}$$

Pour $0 < \phi < \phi_{m_1}$, nous avons une représentation paramétrique de la solution sous la forme :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{m_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{110}\eta, k_{110}) - \phi_{s_1}\phi_{m_1}}{\phi_{m_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{110}\eta, k_{110}) - \phi_{s_1}}, \tag{3.228}$$

avec $k_{110}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}$; $\Omega_{110} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}$. De plus,

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}&\left[\frac{(\phi_{m_1}-\phi_{s_1})}{\Omega_{110}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{110}\eta, k_{110})\right); \tilde{\alpha}_{110}^2; k_{110}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{s_2}-\phi_{e_1})(\phi_{s_1}-\phi_{m_1})}{(\phi_{m_1}-\phi_{e_2})\Omega_{110}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{110}\eta, k_{110})\right); \tilde{\alpha}_{1101}^2; k_{110}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.229}$$

où $\tilde{\alpha}_{110}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}}{\phi_{s_1}}$; $\tilde{\alpha}_{1101}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}(\phi_{s_1}-\phi_{e_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega}K(k_{110})$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{m_1}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{110}\eta, k_{110}) - \phi_{s1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{110}\eta, k_{110}) - (\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}, \tag{3.230}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}&\left[\frac{(\phi_{m_1}-\phi_{s_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{\phi_{m_1}-\phi_{e_1}}\eta + \frac{(\phi_{s_2}-\phi_{e_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{\Omega_{110}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}\right. \\ &\left.\times\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{110}\eta, k_{110})\right); \tilde{\alpha}_{1102}^2; k_{110}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{s_1}-\phi_{m_1})}{\Omega_{110}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{110}\eta, k_{110})\right); \tilde{\alpha}_{1103}^2; k_{110}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.231}$$

où $\tilde{\alpha}_{1102}^2 = \dfrac{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})(\phi_{s_1}-\phi_{e_1})}$; $\tilde{\alpha}_{1103}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}-\phi_{m_1}}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{110}K(k_{110})}$.

xi) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

Nous avons une famille d'orbites fermées en pointillés verts passant chacune par un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{m_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$. Une autre famille de couleur marron correspondant à ce cas est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.232}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.233}$$

Pour $0 < \phi \leqslant \phi_a$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi_a - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.234}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.235}$$

2. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3} = \phi_{s2}$ **d'où** $h_{s_2} = h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0,020345$. Voir figure (3.31)

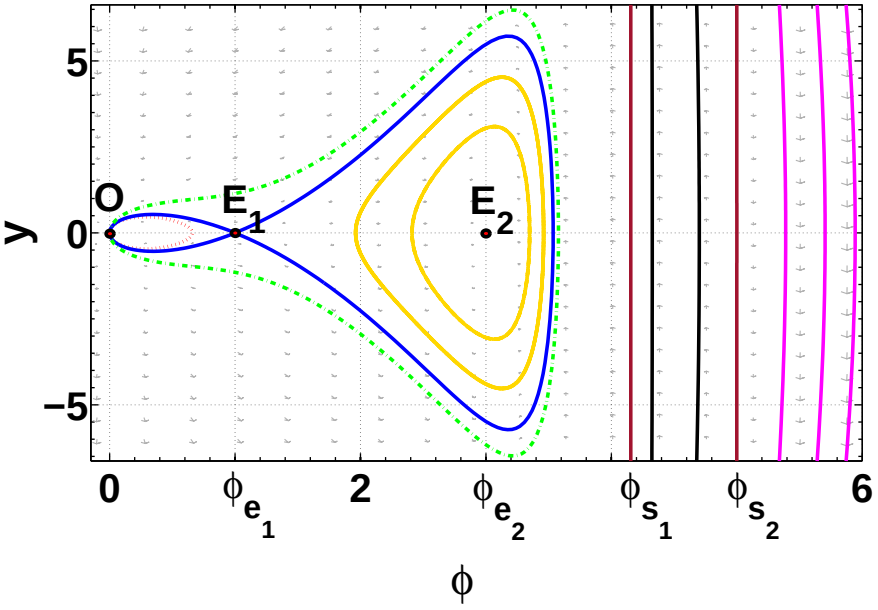


FIGURE 3.31 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3} = \phi_{s2}$ d'où $h_{s_2} = h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$; $c_3 = 0,020345$.

i) Pour $h \in \ ]-\infty, h_{s_2} = h_3[$
Nous avons deux familles d'orbites interceptant l'axe des ϕ en $(\phi_a, 0)$, (orbites noires) et $(\phi_{a_1}, 0)$(orbites roses). Les trajectoires de phase sont données par l'équation $y^2 = \dfrac{\phi G_3(\phi)}{c_2(c_2 + 2c_3)(\phi - \phi_{s1})(\phi - \phi_{s2})}$. Pour ce cas, nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2}), \tag{3.236}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.237}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_a < \phi_{e_3} < \phi_{a_1}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_a$, nous avons comme solution :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi_a-\phi)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})}}. \tag{3.238}$$

Pour $\phi_{e_3} < \phi < \phi_{a_1}$ on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_a)(\phi_{a_1}-\phi)(\phi-\phi_{a_2})}}. \tag{3.239}$$

ii) Pour $h = h_{s_2} = h_3$

Cette situation correspond à l'orbite noire passant par le point d'équilibre $E_3(\phi_{e_3}, 0)$ et admettant une branche infinie au voisinage de ϕ_{s_1}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_3})^2(\phi-\phi_{m_3}), \tag{3.240}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi-\phi_{e_3})(\phi-\phi_{m_3})}{\phi-\phi_{s_1}}, \tag{3.241}$$

avec $\phi_{m_3} < 0 < \phi_{s_1} < \phi \leqslant \phi_{e_3}$; une représentation paramétrique de la solution est de la forme :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{e_3}\phi_{s_1}}{\phi_{e_3} - (\phi_{e_3}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{22}\eta, k_{22})}, \tag{3.242}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{1}{\Omega_{22}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{22}\eta, k_{22})\right); \tilde{\alpha}_{22}^2; k_{22}\right]\right], \tag{3.243}$$

avec $\tilde{\alpha_{22}}^2 = \dfrac{\phi_{e_3}-\phi_{s_1}}{\phi_{e_3}}$; $\Omega_{22} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{e_3}(\phi_{s_1}-\phi_{m_3})}$ et $k_{22}^2 = \dfrac{-\phi_{m_3}(\phi_{e_3}-\phi_{s_1})}{\phi_{e_3}(\phi_{s_1}-\phi_{m_3})}$

iii) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Cette situation correspond à une famille d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{e_3}[$ admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2} et limitées par des orbites correspondant à h_2 et h_3. Alors :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{a_4})\left((\phi-a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.244}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi-\phi_{a_4})\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.245}$$

La solution pour une ligne de phase donnée est :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}}. \tag{3.246}$$

iv) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à l'orbite qui admet des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2} et caractérisée par l'équation

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{e_2})^2(\phi - \phi_{m_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{e_3})}, \tag{3.247}$$

avec $\phi_{m_2} < 0 < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{e_3}$. Une représentation paramétrique de la solution est :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{e_3}}{\phi_{e_3} - (\phi_{e_3} - \phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{24}\eta, k_{24})}, \tag{3.248}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}\phi_{e_3}}{\phi_{e_2}}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{24}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{24}\eta, k_{24})\right); \tilde{\alpha}_{24}^2; k_{24}\right]\right] \\ \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_1}(\phi_{e_2} - \phi_{e_3})}{\Omega_{24}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{24}\eta, k_{24})\right); \tilde{\alpha}_{240}^2; k_{24}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.249}$$

avec $\Omega_{24} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{e_3}(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$; $\tilde{\alpha_{24}}^2 = \frac{\phi_{e_3} - \phi_{s_1}}{\phi_{e_3}}$; $\tilde{\alpha}_{240}^2 = \frac{\phi_{e_2}(\phi_{e_3} - \phi_{s_1})}{\phi_{e_3}(\phi_{e_2} - \phi_{s_1})}$; $0 < \eta < \frac{1}{\Omega_{24}}K(k_{24})$ et $k_{24}^2 = \frac{(-\phi_{m_2})(\phi_{e_3} - \phi_{s_1})}{\phi_{e_3}(\phi_{s_1} - \phi_{m_2})}$.

v) Pour $h \in]h_2, h_0[$

Pour ce cas, nous avons deux familles d'orbites : la première est un ensemble de courbes fermées de couleur jaune entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{s_2}, 0)$ et limitées par l'orbite fermée correspondant à h_0 ; la seconde famille est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_3}), \tag{3.250}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.251}$$

où $\phi_{a_3} < 0 < \phi_{a_1} < \phi_{a_2} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$.

Pour $\phi_{a_1} \leqslant \phi \leqslant \phi_{a_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{a_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{a_1})(\phi_{a_2} - \phi)(\phi - \phi_{a_3})}}. \tag{3.252}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_3})}}. \tag{3.253}$$

vi) Pour $h = h_0$

Pour cette situation, nous avons une orbite fermée de couleur jaune entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et interceptant l'axe des ϕ en (ϕ_{0_1}) et (ϕ_{0_2}). Nous avons les relations :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi(\phi-\phi_{0_1})(\phi-\phi_{0_2}), \tag{3.254}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi^2(\phi-\phi_{0_1})(\phi-\phi_{0_2})}{(\phi-\phi s_1)(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.255}$$

avec $\phi_{0_1} \leqslant \phi \leqslant \phi_{0_2}$.

Une représentation paramétrique de la solution est, pour $\phi_{0_1} \leqslant \phi \leqslant \phi_{0_2}$:

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{26}\eta,k_{26}) - \phi_{0_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}{(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{26}\eta,k_{26}) - (\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}, \tag{3.256}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\Omega_{26}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{26}\eta,k_{26})\right);\tilde{\alpha}^2_{26};k_{26}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\phi_{0_2}\Omega_{26}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{26}\eta,k_{26})\right);\tilde{\alpha}^2_{260};k_{26}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.257}$$

et $\tilde{\alpha}^2_{26} = \dfrac{\phi_{0_2}-\phi_{0_1}}{\phi_{s_1}-\phi_{0_1}}$; $\tilde{\alpha}^2_{260} = \dfrac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})}{\phi_{0_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}$; $k^2_{26} = \dfrac{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_2$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{26}\eta,k_{26}) - \phi_{s1}(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{26}\eta,k_{26}) - (\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}, \tag{3.258}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})(\phi_{0_2}-\phi_{s_2})}{\phi_{0_2}}\eta + \frac{(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\Omega_{26}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{26}\eta,k_{26})\right);\tilde{\alpha}^2_{261};k_{26}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{0_2}\Omega_{26}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{26}\eta,k_{26})\right);\tilde{\alpha}^2_{262};k_{26}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.259}$$

où $\tilde{\alpha}^2_{261} = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}-\phi_{0_2}}$; $\tilde{\alpha}^2_{262} = \dfrac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{26}K(k_{26})}$.

vii) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Nous avons trois familles d'orbites : la première est constituée d'orbites fermées en pointillés rouges passant par l'origine et coupant l'axe des ϕ en un point $(\phi_{a_1}, 0)$ tel que $0 < \phi_{a_1} < \phi_{e_1}$; celles de la deuxième famille sont fermées (de couleur jaune) et entourent le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$; elles sont limitées par les orbites correspondant à h_0 et h_1, chacune de ces orbites interceptant l'axe des ϕ en $(\phi_{a_2}, 0)$ et $(\phi_{a_3}, 0)$ tels que $\phi_{e_1} < \phi_{a_2} < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} < \phi_{a_3} < \phi_{m_1}$ La troisième famille, définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$, est limitée par les orbites correspondant à h_0 et h_1 avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}.

Pour $0 < \phi < \phi_{a_1}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3})(\phi_{a_1}-\phi)}}. \tag{3.260}$$

Pour $\phi_{a_2} < \phi < \phi_{a_3}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{a_2}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi_{a_3}-\phi)}}. \tag{3.261}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3})}}. \tag{3.262}$$

viii) Pour $h = h_1$

Nous avons une homocline en bleue passant par $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et $(\phi_{m_1}, 0)$. Pour ce cas, nous avons des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}, et :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1}), \tag{3.263}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.264}$$

avec $0 < \phi_{e_1} < \phi_{m_1} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$.

Pour $0 < \phi < \phi_{m_1}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{m_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{28}\eta, k_{28}) - \phi_{s_1}\phi_{m_1}}{\phi_{m_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{28}\eta, k_{28}) - \phi_{s_1}}, \tag{3.265}$$

avec $k_{28}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}$ et $\Omega_{28} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}$. De plus,

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}&\left[+\frac{(\phi_{m_1}-\phi_{s_1})}{\Omega_{28}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{28}\eta, k_{28})\right); \tilde{\alpha}_{280}^2; k_{28}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{s_2}-\phi_{e_1})(\phi_{s_1}-\phi_{m_1})}{(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})\Omega_{28}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{28}\eta, k_{28})\right); \tilde{\alpha}_{281}^2; k_{28}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.266}$$

avec $\tilde{\alpha}_{280}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}}{\phi_{s_1}}$; $\tilde{\alpha}_{281}^2 = \dfrac{\phi_{m_1}(\phi_{s_1}-\phi_{e_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{28}K(k_{28})}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{m_1}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{28}\eta, k_{28}) - \phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{28}\eta, k_{28}) - (\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}, \tag{3.267}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}&\left[\frac{(\phi_{m_1}-\phi_{s_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{\phi_{m_1}-\phi_{e_1}}\eta + \frac{(\phi_{s_2}-\phi_{e_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{\Omega_{28}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}\right. \\ &\left.\times\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{28}\eta, k_{28})\right); \tilde{\alpha}_{282}^2; k_{28}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{s_1}-\phi_{m_1})}{\Omega_{28}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{28}\eta, k_{28})\right); \tilde{\alpha}_{283}^2; k_{28}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.268}$$

avec $\tilde{\alpha}_{282}^2 = \dfrac{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})(\phi_{s_1}-\phi_{e_1})}$; $\tilde{\alpha}_{283}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}-\phi_{m_1}}$; $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{28}}K(k_{28})$.

ix) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

Nous avons deux familles d'orbites. La première est constituée d'orbites fermées en pointillés verts dont chacune intercepte l'axe des ϕ en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{m_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$. Une autre famille est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.269}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.270}$$

Pour $0 < \phi < \phi_a$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.271}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.272}$$

3. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_{s2} < h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0,00925$**.** Voir figure (3.32).

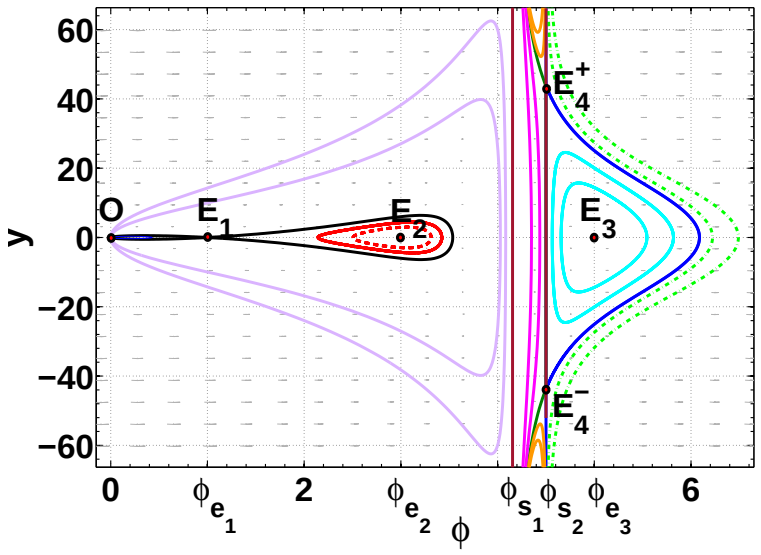


FIGURE 3.32 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2} < \phi_{e_3}$ d'où $h_{s2} < h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$; $c_3 = 0,00925$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_{s_2}[$

Pour ce cas, nous avons une famille d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s1}, \phi_{s2}[$, puis une seconde famille limitée par l'orbite correspondant à h_{s_2}. Alors, on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2}), \tag{3.273}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.274}$$

avec $\phi_{a_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi_a < \phi_{s_2} < \phi_{e_3} < \phi_{s_3} < \phi_{a_1}$ où $H(\phi_{s3}, 0) = h_{s_2}$.
Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_a$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi_a - \phi)}}. \tag{3.275}$$

Pour $\phi_{s_2} < \phi < \phi_{a_1}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{a_1}} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi_{a_1} - \phi)(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_a)}}. \tag{3.276}$$

ii) Pour $h = h_{s2}$
Nous avons l'orbite qui passe par $(\phi_{s_3}, 0)$ avec une branche infinie en ϕ_{s_1}.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4}), \tag{3.277}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{\phi - \phi_{s_1}}, \tag{3.278}$$

avec $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_3}$.
Une représentation paramétrique de la solution est :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_3}}{\phi_{s_3} - (\phi_{s_3} - \phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{32}\eta, k_{32})}, \tag{3.279}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{32}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{32}\eta, k_{32})\right); \tilde{\alpha}_{32}^2; k_{32}\right]\right], \tag{3.280}$$

où $k_{32}^2 = \dfrac{(-\phi_{s_4})(\phi_{s_3} - \phi_{s_1})}{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})}$; $\tilde{\alpha}_{32}^2 = \dfrac{\phi_{s_3} - \phi_{s_1}}{\phi_{s_3}}$.

iii) Pour $h \in]h_{s_2}, h_3[$
Nous avons des orbites fermées qui entourent le point d'équilibre $E_3(\phi_{e3}, 0)$ et interceptent chacune l'axe des ϕ en un point $(\phi_l, 0)$ et$(\phi_{l1}, 0)$; d'autres orbites sont définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_l)(\phi - \phi_{l1})(\phi - \phi_{l_2}), \tag{3.281}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_l)(\phi - \phi_{l1})(\phi - \phi_{l_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.282}$$

avec $\phi_{l_2} < 0 < \phi_{s_2} < \phi_l < \phi_{e_3} < \phi_{l_1} < \phi_{s_3}$.
Pour $\phi_l < \phi < \phi_{l_1}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_l}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_l)(\phi - \phi_{l_2})(\phi_{l1} - \phi)}}. \tag{3.283}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_{s_2}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)(\phi-\phi_l)(\phi-\phi_{l_2})(\phi-\phi_l)}}. \tag{3.284}$$

iv) Pour $h = h_3$

Ce cas correspond à une orbite définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_3})^2(\phi-\phi_{m_3}), \tag{3.285}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{e_3})^2(\phi-\phi_{m_3})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.286}$$

Une représentation paramétrique de la solution est :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2}-(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{34}\eta, k_{34})}, \tag{3.287}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}&\left[-\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{e_3}}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{34}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{34}\eta, k_{34})\right); \tilde{\alpha}_{34}^2; k_{34}\right]\right] \\ &\pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}(\phi_{e_3}-\phi_{s_2})}{\phi_{e_3}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{34}\eta, k_{34})\right); \tilde{\alpha}_{340}^2; k_{34}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.288}$$

avec $\tilde{\alpha}_{34}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}}$; $\tilde{\alpha}_{340}^2 = \dfrac{\phi_{e_3}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_2}(\phi_{e_3}-\phi_{s_1})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{34}}K(k_{34})$.

v) Pour $h \in]h_3, h_2[$

On a une famille d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_k)\left((\phi-a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.289}$$

avec $\phi_k < 0 < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$ et

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi_{s_2}-\phi)(\phi-\phi_k)\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}}. \tag{3.290}$$

vi) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à une orbite définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_2})^2(\phi-\phi_{m_2}), \tag{3.291}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{e_2})^2(\phi-\phi_{m_2})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.292}$$

avec $\phi_{m_2} < 0 < \phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$. Une représentation paramétrique de la solution est :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2} - (\phi_{s_2} - \phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{36}\eta, k_{36})}, \tag{3.293}$$

$$\begin{aligned} z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{e_2}}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{36}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{36}\eta, k_{36})\right); \tilde{\alpha}_{36}^2; k_{36}\right]\right] \\ \pm\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\phi_{s_1}(\phi_{e_2} - \phi_{s_2})}{\phi_{e_2}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{36}\eta, k_{36})\right); \tilde{\alpha}_{360}^2; k_{36}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.294}$$

avec $\tilde{\alpha}_{36}^2 = \dfrac{\phi_{s_2} - \phi_{s_1}}{\phi_{s_2}}$; $\tilde{\alpha}_{360}^2 = \dfrac{\phi_{e_2}(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})}{\phi_{s_2}(\phi_{e_2} - \phi_{s_1})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{36}}K(k_{36})$.

vii) Pour $h \in]h_2, h_0[$

Pour ce cas, nous avons deux familles d'orbites : la première est un ensemble de courbes fermées entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{s_2}, 0)$ et limitées par l'orbite fermée correspondant à h_0 ; la seconde famille est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3}), \tag{3.295}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.296}$$

où $\phi_{k_1} < 0 < \phi_{k_2} < \phi_{k_3} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$.

Pour $\phi_{k_2} \leqslant \phi \leqslant \phi_{k_3}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{k_2}}^{\phi}\frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{k_3} - \phi)(\phi - \phi_{k_2})}}. \tag{3.297}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, nous avons :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi}\frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_1})(\phi_{s_2} - \phi)(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}}. \tag{3.298}$$

viii) Pour $h = h_0$

Ce cas correspond à l'orbite fermée qui entoure le point d'équilibre $E_2(\phi_2, 0)$ et interceptant l'axe des ϕ aux points $(\phi_{0_1}, 0)$ et $(\phi_{0_2}, 0)$ tels que $\phi_{e_1} < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} < \phi_{m_1}$; une autre partie de l'orbite est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2}), \tag{3.299}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.300}$$

Pour $\phi_{0_1} \leqslant \phi \leqslant \phi_{0_2}$:

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{38}\eta, k_{38}) - \phi_{0_2}(\phi_{s_1} - \phi_{01})}{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{38}\eta, k_{38}) - (\phi_{s_1} - \phi_{0_1})}, \tag{3.301}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\Omega_{38}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{38}\eta,k_{38})\right);\tilde{\alpha}^2_{38};k_{38}\right]\right] \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\phi_{0_2}\Omega_{38}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{38}\eta,k_{38})\right);\tilde{\alpha}^2_{380};k_{38}\right]\right], \tag{3.302}$$

et $\tilde{\alpha}^2_{38} = \dfrac{\phi_{0_2}-\phi_{0_1}}{\phi_{s_1}-\phi_{0_1}}$; $\tilde{\alpha}^2_{380} = \dfrac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})}{\phi_{0_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}$; $k^2_{38} = \dfrac{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})(\phi_{0_2}-\phi_{0_1})}{(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})}$.

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$:

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{38}\eta,k_{38}) - \phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}{(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{38}\eta,k_{38}) - (\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}, \tag{3.303}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})(\phi_{0_2}-\phi_{s_2})}{\phi_{0_2}}\eta + \frac{(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\Omega_{38}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{38}\eta,k_{38})\right);\tilde{\alpha}^2_{381};k_{38}\right]\right] \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_2}(\phi_{0_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{0_2}\Omega_{38}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{38}\eta,k_{38})\right);\tilde{\alpha}^2_{382};k_{38}\right]\right], \tag{3.304}$$

où $\tilde{\alpha}^2_{381} = \dfrac{\phi_{s_2}-\phi_{s_1}}{\phi_{s_2}-\phi_{0_2}}$; $\tilde{\alpha}^2_{382} = \dfrac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2}-\phi_{s_1})}{\phi_{s_1}(\phi_{s_2}-\phi_{0_2})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{26}}K(k_{26})$.

ix) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Pour ce cas, nous avons trois familles d'orbites : une première famille d'orbites fermées, limitées par l'homocline h_1 dans l'intervalle $[0, \phi_{e_1}[$; une deuxième famille d'orbites entourant le point d'équilibre E_2 et limitée par les orbites correspondant à h_1 et h_0 dans l'intervalle $]\phi_{e_1}, \phi_{m_1}[$; la troisième famille d'orbites est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_1}, \phi_{s_2}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3}), \tag{3.305}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.306}$$

où $0 < \phi_{a_1} < \phi_{a_2} < \phi_{a_3} < \phi_{s_1} < \phi_{s_2}$.

Pour $0 \leqslant \phi \leqslant \phi_{a_1}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi^{a_1}} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi_{a_1}-\phi)(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3})}}. \tag{3.307}$$

Pour $\phi_{e_1} < \phi_{a_2} < \phi < \phi_{a_3}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{a_2}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi_{a_3}-\phi)}}. \tag{3.308}$$

Pour $\phi_{s_1} < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_{s_1}}^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})(\phi-\phi_{a_1})(\phi-\phi_{a_2})(\phi-\phi_{a_3})}}. \tag{3.309}$$

x) Pour les cas $h = h_1$ et $h \in]h_1, +\infty[$
Nous avons les mêmes comportements de lignes de phase. Par conséquent, les solutions sont analogues au cas traités en 1.

4. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} = \phi_{s_2} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$ **;** $c_3 = 0$**.** Voir figure (3.33).

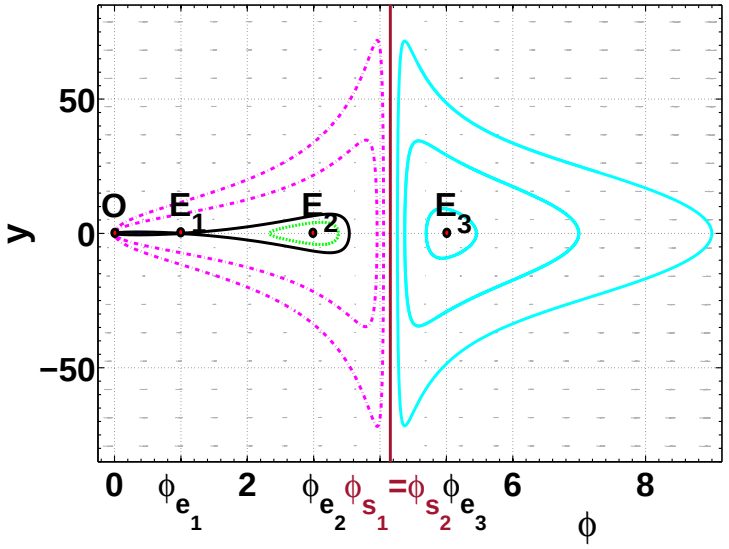


FIGURE 3.33 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} = \phi_{s_2} < \phi_{e_3}$ d'où $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1$; $c_3 = 0$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_{e_3}[$
Pour ce cas, nous avons une famille d'orbites fermées (couleur bleue claire) qui entourent le point d'équilibre $E_3(\phi_{e_3}, 0)$. Alors, on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})(\phi - \phi_{l_3}), \tag{3.310}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})(\phi - \phi_{l_3})}{(\phi - \phi_{s_1})^2}. \tag{3.311}$$

Une représentation paramétrique de la solution est donnée par :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{l1}\phi_{l_2}}{\phi_{l_2} - (\phi_{l_2} - \phi_{l_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{41}\eta, k_{41})}, \tag{3.312}$$

avec $\phi_{l_3} < 0 < \phi_{l1} < \phi < \phi_{l_2}$; $\Omega_{41} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi_{l_2}(\phi_{l1} - \phi_{l_3})}$; $k_{41}^2 = \frac{(-\phi_{l_3})(\phi_{l_2} - \phi_{l_1})}{\phi_{l_2}(\phi_{l_1} - \phi_{l_3})}$,

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{\phi_{s_1}}{\Omega_{41}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{41}\eta, k_{41})\right); \tilde{\alpha}_{41}^2; k_{41}\right]\right] \tag{3.313}$$

et $\tilde{\alpha}_{41}^2 = \frac{\phi_{l2} - \phi_{l_1}}{\phi_{l_2}}$.

ii) Pour $h \in]h_2, h_0[$
Ce cas correspond à une famille d'orbites de couleur verte qui entourent le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$. Nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3}), \tag{3.314}$$

avec $\phi_{k_3} < 0 < \phi_{k_1} < \phi < \phi_{k_2}$ et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})^2}. \tag{3.315}$$

On a comme solution :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{k_1}\phi_{k_2}}{\phi_{k_2} - (\phi_{k_2} - \phi_{k_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{42}\eta, k_{42})}, \tag{3.316}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{k_1}\eta + \frac{\phi_{k_1}}{\Omega_{42}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{42}\eta, k_{42})\right); \tilde{\alpha}_{42}^2; k_{42}\right]\right], \tag{3.317}$$

et $\tilde{\alpha}_{42}^2 = \dfrac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_2}}$, $\Omega_{42} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{k_2}(\phi_{k_1} - \phi_{k_3})}$ et $k_{42}^2 = \dfrac{(-\phi_{k_3})(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{\phi_{k_2}(\phi_{k_1} - \phi_{k_3})}$.

iii) Pour $h = h_0$

On a une orbite fermée de couleur verte qui entoure le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$. Dans ce cas, nous avons :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2}), \tag{3.318}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi^2(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi - \phi_{s_1})^2}, \tag{3.319}$$

avec

$$\begin{aligned} z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\Bigg[&\frac{2}{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}\arcsin\left(\phi - \frac{\phi_{0_1} + \phi_{02}}{2}\right) \\ &+ \frac{\phi_{s_1}\sqrt{\phi_{0_1}\phi_{0_2}}}{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}\arcsin\left(\frac{1}{\phi} - \frac{(\phi_{0_1} + \phi_{0_2})}{2\phi_{0_1}\phi_{0_2}}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.320}$$

iv) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Nous avons deux familles d'orbites : les orbites de la première famille sont fermées de couleur verte entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$. Pour la deuxième famille, les orbites sont fermées, elles passent par l'origine du plan de phase et sont situées à l'intérieur de l'homocline h_1.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_3}), \tag{3.321}$$

avec $0 < \phi_{a_1} < \phi_{e_1} < \phi_{a_2} < \phi_{a_3} < \phi_{m_1}$ et

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{a_1})(\phi - \phi_{a_2})(\phi - \phi_{a_3})}{(\phi - \phi_{s_1})^2}. \tag{3.322}$$

Pour $0 \leqslant \phi \leqslant \phi_{a_1}$, on a comme solution :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_1}\phi_{a_2}\mathrm{sn}^2(\Omega_{44}\eta, k_{44}) - \phi_{a_1}\phi_{a_2}}{\phi_{a_1}\mathrm{sn}^2(\Omega_{44}\eta, k_{44}) - \phi_{a_2}}, \tag{3.323}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{a_2} - \phi_{s_1})\eta + \frac{(\phi_{a_1} - \phi_{a_2})}{\Omega_{44}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{44}\eta, k_{44})\right); \tilde{\alpha}_{44}^2; k_{44}\right]\right], \quad (3.324)$$

avec $\tilde{\alpha}_{44}^2 = \dfrac{\phi_{a_1}}{\phi_{a_2}}$; $\Omega_{44} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{a_2}(\phi_{a_3} - \phi_{a_1})}$; $k_{44}^2 = \dfrac{(\phi_{a_1})(\phi_{a_3} - \phi_{a_2})}{\phi_{a_2}(\phi_{a_3} - \phi_{a_1})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{44}}K(k_{44})$.

Pour $0 < \phi_{a_1} < \phi_{a_2} < \phi < \phi_{a_3}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{a_1}(\phi_{a_3} - \phi_{a_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{44}\eta, k_{44}) - \phi_{a_2}(\phi_{a_3} - \phi_{a_1})}{(\phi_{a_3} - \phi_{a_2})\mathrm{sn}^2(\Omega_{44}\eta, k_{44}) - (\phi_{a_3} - \phi_{a_1})}, \quad (3.325)$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{a_1} - \phi_{s_1})\eta + \frac{(\phi_{a_2} - \phi_{a_1})}{\Omega_{44}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{44}\eta, k_{44})\right); \tilde{\alpha}_{441}^2; k_{44}\right]\right], \quad (3.326)$$

où $\tilde{\alpha}_{441}^2 = \dfrac{\phi_{a_3} - \phi_{a_2}}{\phi_{a_3} - \phi_{a_1}}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{44}}K(k_{44})$.

v) Pour $h = h_1$

Ce cas correspond à l'homocline de couleur noire qui passe par le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{e_1})^2(\phi - \phi_{m_1}), \quad (3.327)$$

avec $0 < \phi_{e_1} < \phi_{m_1}$ et

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_{e_1})^2(\phi - \phi_{m_1})}{(\phi - \phi_{s_1})^2}, \quad (3.328)$$

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{m_1}} - 1\right) + \sqrt{\frac{\phi_{m_1} - \phi_{e_1}}{\phi_{e_1}}}\mathrm{argch}\left(\frac{2\phi_{e_1}(\phi_{m_1} - \phi_{e_1})}{\phi_{m_1}(\phi - \phi_{e_1})} + \frac{\phi_{m_1} - 2\phi_{e_1}}{\phi_{m_1}}\right)\right]. \quad (3.329)$$

vi) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

On a une famille d'orbites fermées en pointillés verts, passant par l'origine et interceptant l'axe des ϕ en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{m_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \quad (3.330)$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})^2}, \quad (3.331)$$

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi}^{\phi_a}\frac{(\phi - \phi_{s_1})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi_a - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \quad (3.332)$$

5. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1 < h_{s_2}$ **;** $c_3 = -0,0112335$**.** Voir figure (3.34).

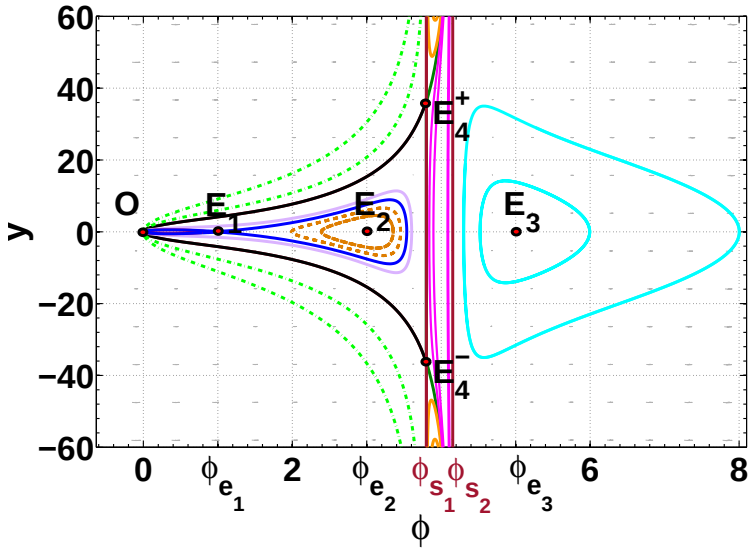


FIGURE 3.34 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ d'où $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1 < h_{s_2}$; $c_3 = -0,0112335$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_3[$

Nous avons une famille d'orbites fermées de couleur bleu clair qui entourent le point d'équilibre E_3 et définies dans le domaine $]\phi_{s_1}, +\infty[$. L'autre famille d'orbites de couleur marron est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. La solution ici a la même forme que celle obtenue en $3.\,i)$.

ii) Pour $h = h_3$

Ceci correspond à une orbite de couleur marron définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. La solution est la même que celle obtenue en $3.\,ii)$.

iii) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Nous avons une famille d'orbites de couleur marron définies dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. La solution est obtenue comme celle du $3.\,iii)$.

iv) Pour $h = h_2$

Nous avons une orbite marron définie dans l'intervalle $]\phi_{s2}, \phi_{s1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. La solution est la même que celle obtenue en $3.\,iv)$.

v) Pour $h \in]h_2, h_0[$

Nous avons deux familles d'orbites, toutes de couleur marron : la première est un ensemble de courbes fermées entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{s_2}, 0)$ et limitées par l'orbite fermée correspondant à h_0 ; la seconde famille est constituée d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. On a les mêmes formes de solutions qu'en $3.\,vii)$.

vi) Pour $h = h_0$

Ce cas correspond à l'orbite fermée de couleur marron qui entoure le point d'équilibre $E_2(\phi_2, 0)$ et interceptant l'axe des ϕ aux points $(\phi_{01}, 0)$ et $(\phi_{0_2}, 0)$ tels

que $\phi_{e_1} < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} < \phi_{m_1}$; une autre partie de l'orbite est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$. La solution est de la même forme que celle obtenue en $3.\ viii)$.

vii) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Pour ce cas, nous avons trois familles d'orbites : une première famille d'orbites fermées, limitées par l'homocline h_1 dans l'intervalle $[0, \phi_{e_1}[$; une deuxième famille d'orbites de couleur marron entourant le point d'équilibre E_2 et limitée par les orbites correspondant à h_1 et h_0 dans l'intervalle $]\phi_{e_1}, \phi_{m_1}[$; la troisième famille d'orbites de couleur marron est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. La solution est celle obtenue en $3.\ ix)$.

viii) Pour $h = h_1$

Nous avons les mêmes comportements de lignes de phase (couleur bleue). Par conséquent, les solutions sont analogues aux cas traités en $1.\ xi)$.

ix) Pour $h \in]h_1, h_{s_2}[$

Les solutions sont analogues aux cas traités en $1.\ vii)$, avec des orbites en violet entourant l'homocline h_1.

x) Pour $h = h_{s_2}$

Ce cas correspond à une orbite noire qui intercepte la droite $\phi = \phi_{s_2}$ en deux points symétriques par rapport à l'axe des ϕ et passant par $(0, 0)$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.333}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{\phi - \phi_{s_1}}. \tag{3.334}$$

La solution est donnée par :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_0^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi_{s_1} - \phi)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.335}$$

xi) Pour $h \in]h_{s_2}, +\infty[$

Ce cas correspond à une famille d'orbites en pointillés verts passant par l'origine $(0, 0)$ et admettant des branches infinies en ϕ_{s_2} ; l'autre famille correspond à des orbites qui interceptent l'axe des ϕ en un point $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{s_2} < \phi_a < \phi_{s_1}$, avec des branches infinies en ϕ_{s_1}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.336}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}. \tag{3.337}$$

Pour $\phi_a < \phi < \phi_{s_1}$, la solution est donnée par :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{\phi_a}^{\phi} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi_{s_1} - \phi)(\phi - \phi_a)(\phi - \phi_{s_2})\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right)}}. \tag{3.338}$$

Pour $0 \leqslant \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\int_0^{\phi} \frac{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})d\phi}{\sqrt{\phi(\phi-\phi_{s_1})(\phi_a-\phi)(\phi-\phi_{s_2})\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}}. \tag{3.339}$$

6. **Cas où** $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{m_1} = \phi_{s_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1 = h_{s_2}$ **;** $c_3 = -0,0209977$**.** Voir figure (3.35).

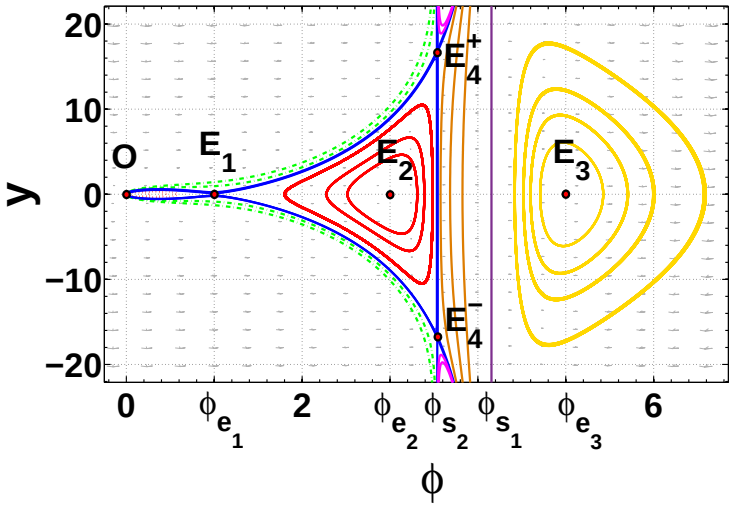


FIGURE 3.35 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{m_1} = \phi_{s_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ d'où $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1 = h_{s_2}$. $c_3 = -0,0209977$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_3[$

Nous avons des orbites fermées qui entourent le point d'équilibre $E_3(\phi_{e3}, 0)$ et définies dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, +\infty[$. Une autre famille d'orbites correspondant à ce cas est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$. Les solutions correspondent au cas traité dans $5.\ i)$.

ii) Pour $h = h_3$

On a une orbite définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies en ϕ_{s_2} et ϕ_{s_1}. Les solutions sont celles obtenues en $5.\ ii)$

iii) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Nous avons une famille d'orbites correspondant à ce cas. Elle est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$. Les solutions pour ce cas correspondent au cas traité dans $5.\ iii)$.

iv) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à une orbite définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$. Les solutions pour ce cas correspondent au cas traité dans $5.\ ii)$.

v) Pour $h \in]h_2, h_0[$

Nous avons une famille d'orbites entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{s_2}, 0)$ et une autre famille définie dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$. Les solutions sont identiques à celles obtenues en $1.\ v)$

vi) Pour $h = h_0$

Nous avons l'orbite fermée qui entoure le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$. La solution est obtenue comme au cas $1.\ vii)$.

vii) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Nous avons des familles de solutions comme celles obtenues en $1.\ ix)$.

viii) Pour $h = h_1 = h_{s_2}$

Ce cas correspond à l'homocline qui passe par le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et intercepte la droite d'équation $\phi = \phi_{s_2}$. Dans cette situation, on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{e_1})^2(\phi - \phi_{s_2}), \tag{3.340}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{e_1})^2}{\phi - \phi_{s_1}}. \tag{3.341}$$

Pour $0 \leqslant \phi < \phi_{s_1}$, on a :

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{s_1}} - 1\right) + (\phi_{e_1} - \phi_{s_1})argCh\left(\frac{2\phi_{e_1}(\phi_{s_1} - \phi_{e_1})}{\phi_{s_1}(\phi - \phi_{e_1})} + \frac{\phi_{s_1} - 2\phi_{e_1}}{\phi_{s_1}}\right)\right]. \tag{3.342}$$

ix) Pour $h \in]h_{s_2} = h_1, +\infty[$

Nous avons les mêmes familles d'orbites et les mêmes formes de solutions qu'en $5.\ ii)$

7. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} < \phi_{s_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **pour** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_1 = h_{s_2}$ **;** $c_3 = -0,023333$**,** $J_1 < 0$**,** $J_2 > 0$ **et** $J_3 > 0$**.** Les portraits de phase sont qualitativement semblables à celles de la figure (3.34)

i) Pour $h \in]-\infty, h_3[$

On a deux familles d'orbites dont l'une est constituée des courbes entourant le point d'équilibre $E(\phi_{e_3}, 0)$ et l'autre admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2}. Les solutions sont semblables à celles obtenues en $3.\ iii)$.

ii) Pour $h = h_3$

Ce cas correspond à l'orbite définie dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies.

iii) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Nous avons encore une famille d'orbites définies dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies.

iv) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à l'orbite définie dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ ayant les caractéristiques similaires au cas $7.\ ii)$.

v) Pour $h \in]h_2, h_0[$

Nous avons une famille d'orbites circulaires entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et une autre famille est définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$.

vi) Pour $h = h_0$

Nous avons la même situation qu'en $1.\ ix)$

vii) Pour $h \in]h_0, h_{s_2}[$

Cette situation correspond au cas $1.\,ix)$.

viii) Pour $h = h_{s_2}$

Ce cas correspond à une orbite fermée contenue dans l'homocline h_1, passant par l'origine du plan de phase $O(0,0)$ et interceptant l'axe des ϕ au point $(\phi_{s_3}, 0)$ tel que $0 < \phi_{s_3} < \phi_{e_1}$. L'autre branche passe par $(\phi_{s_4}, 0)$ tel que $\phi_{e_1} < \phi_{s_4} < \phi_{e_2}$. Alors :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4}), \tag{3.343}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{(\phi - \phi_{s_1})}. \tag{3.344}$$

Pour $0 < \phi < \phi_{s_3} < \phi_{s_4} < \phi_{s_1}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_3}\phi_{s_4}\mathrm{sn}^2(\Omega_{78}\eta, k_{78}) - \phi_{s_3}\phi_{s_4}}{\phi_{s_3}\mathrm{sn}^2(\Omega_{78}\eta, k_{78}) - \phi_{s_4}}, \tag{3.345}$$

avec $\Omega_{78} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_4}(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}$, $k_{78}^2 = \dfrac{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})}{\phi_{s_4}(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}$ et

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{s_4} - \phi_{s_3})\eta + \frac{(\phi_{s_3} - \phi_{s_4})}{\Omega_{78}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{78}\eta, k_{78})\right); \tilde{\alpha}_{78}^2; k_{78}\right]\right], \tag{3.346}$$

avec $\tilde{\alpha}_{78}^2 = \dfrac{\phi_{s_3}}{\phi_{s_4}}$ et $0 \leqslant \eta \leqslant \dfrac{1}{\Omega_{78}}K(k_{78})$.

Pour $0 < \phi_{s_3} < \phi_{s_4} < \phi < \phi_{s_1}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})\mathrm{sn}^2(\Omega_{78}\eta, k_{78}) - (\phi_{s_1} - \phi_{s_3})\phi_{s_4}}{(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})\mathrm{sn}^2(\Omega_{78}\eta, k_{78}) - (\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}, \tag{3.347}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{s_3} - \phi_{s_1})\eta + \frac{(\phi_{s_4} - \phi_{s_3})}{\Omega_{78}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{78}\eta, k_{78})\right); \tilde{\alpha}_{780}^2; k_{78}\right]\right], \tag{3.348}$$

où $\tilde{\alpha}_{780}^2 = \dfrac{\phi_{s_1} - \phi_{s_4}}{\phi_{s_1} - \phi_{s_3}}$ et $0 \leqslant \eta \leqslant \dfrac{1}{\Omega_{78}}K(k_{78})$.

ix) Pour $h \in]h_{s_2}, h_1[$

Nous avons les mêmes formes de solutions qu'en $1.\,ix)$.

x) Pour $h = h_1$

On a une orbite qui passe par $(\phi_{m_1}, 0)$, elle admet une branche infinie en ϕ_{s_1} et est définie dans l'intervalle $[\phi_{m_1}, \phi_{s_1}[$. Une autre branche passe par $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ avec une branche infinie en ϕ_{s_2}. Les solutions sont de la même forme que celles obtenues en $1.\,ix)$.

xi) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

On a une famille d'orbites limitées par les droites $\phi = \phi_{m_1}$ et $\phi = \phi_{s_1}$. L'autre famille est définie dans l'intervalle $[0, \phi_{s_2}[$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_a)\left((\phi - a_0)^2 + b_0^2\right), \tag{3.349}$$

$$y^2 = -\omega^2 \frac{\phi(\phi-\phi_a)\left((\phi-a_0)^2+b_0^2\right)}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}, \tag{3.350}$$

avec $\phi_{m_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$. On a les mêmes formes de solutions qu'en $1.\ xi)$.

8. **Cas où** $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} = \phi_{s_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 = h_{s_2} < h_1$ **;** $c_3 = -0,02535$**,** $J_1 < 0$**,** $J_2 > 0$ **et** $J_3 > 0$**.** Voir figure 3.36.

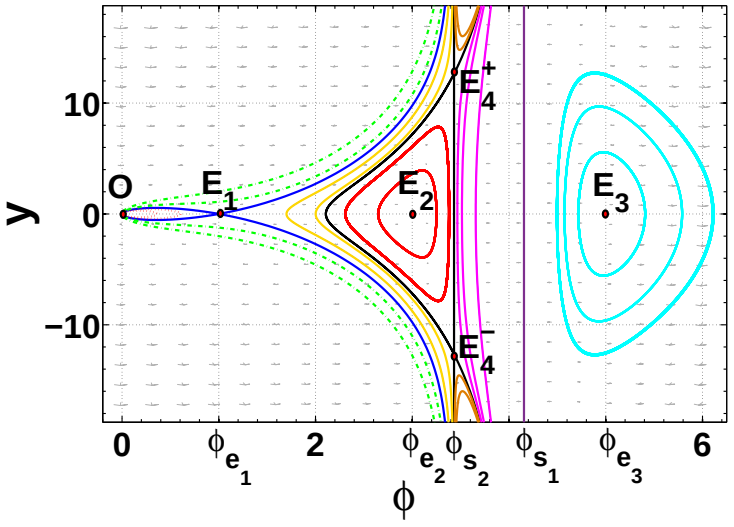


FIGURE 3.36 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0 < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{0_2} = \phi_{s_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ d'où $h_3 < 0 < h_2 < h_0 = h_{s_2} < h_1$. $c_3 = -0,02535$.

i) Pour $h \in]-\infty, h_3[$

On a deux familles d'orbites dont l'une est constituée des courbes entourant le point d'équilibre $E(\phi_{e_3}, 0)$ et l'autre admettant des branches infinies en ϕ_{s_1} et ϕ_{s_2} .Les solutions sont semblables à celles obtenues en $3.\ iii)$.

ii) Pour $h = h_3$

Ce cas correspond à la famille d'orbites définie dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies.

iii) Pour $h \in]h_3, h_2[$

Nous avons encore une famille d'orbites définies dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies.

iv) Pour $h = h_2$

Ce cas correspond à l'orbite définie dans $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ ayant les caractéristiques similaires au cas $7.\ ii)$.

v) Pour $h \in]h_2, h_0 = h_{s_2}[$

Nous avons une famille d'orbites circulaires entourant le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$ et une autre famille définie dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$.

vi) Pour $h = h_0 = h_{s_2}$

On a affaire à une orbite qui passe par le point $(\phi_{0_1}, 0)$ et qui admet une branche infinie au voisinage de ϕ_{s_1}.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}\phi(\phi-\phi_{0_1})(\phi-\phi_{s_2}), \tag{3.351}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi^2(\phi-\phi_{0_1})}{(\phi-\phi_{s_1})}, \tag{3.352}$$

on a comme solution

$$z(\phi) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{s1}-\phi_{0_1}} - \frac{\phi_{0_1}+\phi_{0_2}}{\phi_{s_1}-\phi_{0_1}}\right) + \sqrt{\frac{\phi_{s_1}}{\phi_{0_1}}}\arcsin\left(\frac{2\phi_{0_1}\phi_{s_1}}{\phi(\phi_{s_1}-\phi_{0_1})} - \frac{\phi_{0_1}+\phi_{0_2}}{\phi_{s_1}-\phi_{0_1}}\right)\right], \tag{3.353}$$

avec $\phi_{0_1} \leqslant \phi < \phi_{s_1}$.

vii) Pour $h \in]h_0, h_1[$

Ce cas correspond à trois familles d'orbites. Pour la première famille, les orbites sont fermées et contenues dans l'homocline h_1. Chaque orbite intercepte l'axe des ϕ en $(\phi_{k_1}, 0)$ tel que $0 < \phi_{k_1} < \phi_{e_1}$. Une deuxième famille est constituée d'orbites passants toutes par un point $(\phi_{k_2}, 0)$ tel que $\phi_{e_1} < \phi_{k_2} < \phi_{0_1}$. Enfin, pour la troisième famille, chacune ds orbites passe en un point $(\phi_{k_3}, 0)$ tel que $\phi_{0_2} = \phi_{S_2} < \phi_{k_3} < \phi_{m_1}$.

viii) Pour $h = h_1$

Ce cas correspond à deux branches d'orbites, dont l'une passant par le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et définie dans l'intervalle $[0, \phi_{s_2}[$, l'autre passant par $(\phi_{m_1}, 0)$ et définie dans $[\phi_{m_1}, \phi_{s_1}[$.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1}), \tag{3.354}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi-\phi_{e_1})^2(\phi-\phi_{m_1})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}. \tag{3.355}$$

Pour $0 < \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{m_1}\phi_{s_2}\mathrm{sn}^2(\Omega_{88}\eta, k_{88}) - \phi_{m_1}\phi_{s_2}}{\phi_{s_2}\mathrm{sn}^2(\Omega_{88}\eta, k_{88}) - \phi_{m_1}}, \tag{3.356}$$

avec $k_{88}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{m_1})}{\phi_{m_1}(\phi_{s_1}-\phi_{s_2})}$; $\Omega_{88} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{m_1}(\phi_{s_1}-\phi_{s_2})}$,

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{m_1}-\phi_{s_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}\eta + \frac{(\phi_{s_2}-\phi_{m_1})}{\Omega_{88}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{88}\eta, k_{88})\right); \tilde{\alpha}_{88}^2; k_{88}\right]\right]$$

$$\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{s_1}-\phi_{e_1})(\phi_{m_1}-\phi_{s_2})}{\Omega_{88}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{88}\eta, k_{88})\right); \tilde{\alpha}_{880}^2; k_{88}\right]\right], \tag{3.357}$$

avec $\tilde{\alpha}_{88}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}}{\phi_{m_1}}$ et $\tilde{\alpha}_{880}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}(\phi_{m_1}-\phi_{e_1})}{\phi_{m_1}(\phi_{s_2}-\phi_{e_1})}$; $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{88}}K(k_{88})$.

Pour $\phi_{m_1} < \phi < \phi_{s_1}$, nous avons :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1} - \phi_{m_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{88}\eta, k_{88}) - \phi_{m_1}(\phi_{s_1} - \phi_{s_2}}{(\phi_{s_1} - \phi_{m_1})\mathrm{sn}^2(\Omega_{88}\eta, k_{88}) - (\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}, \tag{3.358}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{m_1} - \phi_{s_2})}{\Omega_{88}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{88}\eta, k_{88})\right); \tilde{\alpha}^2_{882}; k_{88}\right]\right]$$
$$\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{e_1} - \phi_{s_1})(\phi_{m_1} - \phi_{s_2})}{\Omega_{88}(\phi_{m_1} - \phi_{e_1})}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{88}\eta, k_{88})\right); \tilde{\alpha}^2_{883}; k_{88}\right]\right], \tag{3.359}$$

avec $\tilde{\alpha}^2_{882} = \dfrac{\phi_{s_1} - \phi_{m_1}}{\phi_{s_1} - \phi_{s_2}}$; $\tilde{\alpha}^2_{883} = \dfrac{(\phi_{s_2} - \phi_{e_1})(\phi_{s_1} - \phi_{m_1})}{(\phi_{m_1} - \phi_{e_1})(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{88}}K(k_{88})$.

ix) Pour $h \in]h_1, +\infty[$

Ce cas correspond à deux familles d'orbites dont l'une est constituée d'orbites passant chacune en $(\phi_a, 0)$ tel que $\phi_{m_1} < \phi_a < \phi_{s_1}$. L'autre famille est constituée d'orbites qui passent en $(0, 0)$ et admettent des branches infinies en ϕ_{s_2}.

9. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{s_2} < \phi_{0_2} < \phi_{m_1} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_{S_2} < h_0 < h_1$**.**

Dans cette section, il y a plusieurs cas qui ont été déjà vus dans les sections précédentes. Nous allons nous intéresser aux nouveaux cas :

i) Cas où $h \in]h_2, h_{s_2}[$

Nous avons une famille d'orbites fermées qui entourent le point d'équilibre $E_2(\phi_{e_2}, 0)$. Et une autre famille d'orbites définies dans l'intervalle $]\phi_{s_2}, \phi_{s_1}[$ avec des branches infinies.

ii) Cas où $h = h_{s_2}$

Ce cas correspond à une orbite qui passe par le point $(\phi_{s_3}, 0)$ tel que $\phi_{0_1} < \phi_{s_3} < \phi_{e_2} < \phi_{s_2}$ avec une branche infinie en ϕ_{s_1}. Alors :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8C_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4}). \tag{3.360}$$

Dans le cas $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{0_1} < \phi_{s_3} < \phi_{s_2}$,

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8c_2^2(c_2 + 2c_3)}\frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{\phi - \phi_{s_1}} \tag{3.361}$$

Tandis que pour $\phi_{s_3} \leq \phi < \phi_{s_1}$:

$$\omega dz = \pm\frac{(\phi - \phi_{s_1})\,d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{s_4})(\phi - \phi_{s_3})(\phi_{s_1} - \phi)}}. \tag{3.362}$$

Pour $\phi_{s_4} < 0 < \phi_{s_3} \leq \phi < \phi_{s_1}$, on a :

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\phi_{s_1}(\phi_{s_3} - \phi_{s_4})}}\mathrm{sn}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{\phi_{s_1}(\phi - \phi_{s_3})}}{\sqrt{(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})\phi}}}, k_{92}\right], \tag{3.363}$$

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_3}}{\phi_{s_1} - (\phi_{s_1} - \phi_{s_3})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92})} \tag{3.364}$$

et

$$dz = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1} + \frac{\phi_{s_3}}{1 - \dfrac{(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}{\phi_{s_1}}\mathrm{sn}^2\left(\Omega_{92}\eta, k_{92}\right)}\right]d\eta\cdot \tag{3.365}$$

Ce qui entraîne,

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[-\phi_{s_1}\eta + \frac{\phi_{s_3}}{\Omega_{92}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\Omega_{92}\eta, k_{92}\right)\right), \alpha_{92}^2, k_{92}\right]\right]. \tag{3.366}$$

iii) Cas où $h \in]h_{s_2}, h_0[$

On a deux familles d'orbites : la première est constituée d'orbites passant chacune par $(\phi_{k_1}, 0)$ tel que $\phi_{0_1} < \phi_{k_1} < \phi_{s_3}$ avec une branche infinie en ϕ_{s_2}. L'autre famille est constituée d'orbites passant chacune par $(\phi_{k_2}, 0)$ tel que $\phi_{s_2} < \phi_{k_2} < \phi_{0_2}$ avec une branche infinie en ϕ_{s_1}.

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8C_2^2(C_2 + 2C_3)}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3}), \tag{3.367}$$

avec $\phi_{k_3} < 0 < \phi_{k_1} < \phi_{k_2}$

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8C_2^2(C_2 + 2C_3)}\frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}, \tag{3.368}$$

pour $\phi \in [\phi_{k_1}, \phi_{s_2}[\cup [\phi_{k_2}, \phi_{s_1}[$.

iv) Cas où $h = h_0$

Ce cas correspond à deux branches de courbes : la première passe par $(\phi_{0_1}, 0)$ avec une branche infinie en ϕ_{s_2} ; la seconde passe par $(\phi_{0_2}, 0)$ avec une branche infinie en ϕ_{s_1} .

$$G_3(P) = \frac{\alpha_3}{8C_2}\phi(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2}), \tag{3.369}$$

$$G_3(P) = \frac{\alpha_3}{8C_2}\phi(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2}), \tag{3.370}$$

Pour $\phi \in [\phi_{0_1}, \phi_{S_2}[\cup [\phi_{0_2}, \phi_s[$ nous avons :

$$\omega dz = \pm\frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})(\phi - \phi_{s_2})(\phi_{s_1} - \phi)}}, \tag{3.371}$$

Pour $\phi_{0_1} \leq \phi < \phi_{s_2}$, on a :

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{(\phi_{S_1} - \phi_{S_2})(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}}\mathrm{sn}^{-1}\left[\sqrt{\frac{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})(\phi_{S_2} - \phi)}{(\phi_{S_2} - \phi_{0_1})(\phi_{0_2} - \phi)}}, k_{92}\right], \tag{3.372}$$

avec $k_{92}^2 = \dfrac{(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})}{(\phi_{s_1} - \phi_{S_2})(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}$ et $\Omega_{92} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}$.

Alors

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92}) - \phi_{s_2}(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}{(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92}) - (\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}. \tag{3.373}$$

A partir de

$$\omega dz = \left[\phi - \phi_{s_1} - \phi_{s_2} + \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi}\right] d\eta$$

$$= \left[\phi - \phi_{s_1} - \phi_{s_2} + \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi} + \frac{\phi_{s_2} - \phi_{0_1}}{1 - \dfrac{\phi_{s_2} - \phi_{0_1}}{\phi_{0_2} - \phi_{0_1}}\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92})}\right.$$

$$\left. + \frac{(\phi_{0_2} - \phi_{s_2})}{\phi_{0_2}} \frac{1}{1 - \dfrac{\phi_{s_1}(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})}{\phi_{s_2}(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92})}\right] k_\eta$$

on obtient :

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\left(\phi_{0_1} - \phi_{s_1} - \phi_{s_2} + \frac{\phi_{s_1}\phi_{s_2}}{\phi_{0_2}}\right)\eta\right.$$

$$\left. + \frac{(\phi_{s_2} - \phi_{0_2})}{\Omega_{92}} \prod\left[\arcsin(\mathrm{sn}(\Omega_{92}\eta, k_{92})); \alpha_{92}^2, k_{92}\right]\right] \tag{3.374}$$

$$\pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{\phi_{s_1}(\phi_{0_2} - \phi_{s_2})}{\Omega_{92}\phi_{0_2}} \prod\left[\arcsin(\mathrm{sn}(\Omega_{92}\eta, k_{92})); \alpha_{92}^2, k_{92}\right]\right],$$

où $\alpha_{92}^2 = \dfrac{(\phi_{S_2} - \phi_{0_1})}{(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}$; $\alpha_{92}^2 = \dfrac{\phi_{0_2}(\phi_{s_2} - \phi_{0_1})}{\phi_{S_2}(\phi_{0_2} - \phi_{0_1})}$; et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{92}} K(k_{92})$.
Pour $\phi_{0_4} < \phi_{s_2} < \phi_{0_2} < \phi < \phi_{s_1}$ On a :

$$\eta = \frac{1}{\Omega_{92}}\mathrm{sn}^{-1}\left[\sqrt{\frac{(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})(\phi - \phi_{s_2})}}, k_{92}\right]$$

d'où :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{S_2}(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92}) - \phi_{0_2}(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}{(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92}) - (\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}$$

et

$$\omega dz = \pm\left[\phi_{s_2} - \phi_{s_1} - \phi_{s_2} + \phi_{s_1} + \frac{(\phi_{0_2} - \phi_{s_2})}{1 - \dfrac{(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})}{(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92})}\right.$$

$$\left. - \frac{\phi_{s_1}}{\phi_{0_2}} \frac{(\phi_{0_2} - \phi_{s_2})}{\left[1 - \dfrac{\phi_{s_2}}{\phi_{0_2}} \dfrac{(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})}{(\phi_{s_1} - \phi_{s_2})}\mathrm{sn}^2(\Omega_{92}\eta, k_{92})\right]}.\right. \tag{3.375}$$

D'où

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\phi_{0_2}-\phi_{s_2})}{\Omega_{92}}\prod\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\Omega_{92}\eta,k_{92}\right)\right);\alpha_{92}^2,k_{92}\right]\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{\omega}\frac{(\phi_{S_2}-\phi_{0_2})\,\phi_{s_1}}{\Omega_{92}\phi_{0_2}}\prod\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\Omega_{92}\eta,k_{92}\right)\right);\alpha_{92}^2,k_{92}\right]\right], \tag{3.376}$$

avec $\alpha_{92}^2 = \dfrac{(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{(\phi_{s_1}-\phi_{s_2})}$; $\alpha_{92}^2 = \dfrac{\phi_{s_2}(\phi_{s_1}-\phi_{0_2})}{\phi_{0_2}(\phi_{s_1}-\phi_{s_2})}$; $0<\eta<\dfrac{1}{\Omega_{92}}K(k_{92})$.

10. Cas où $0<\phi_{e_1}<\phi_{0_1}<\phi_{s_2}<\phi_{e_2}<\phi_{s_1}<\phi_{e_3}$ **d'où** $h_3<0<h_2<h_{S_2}<h_0\langle h_1$**.** Voir figure (3.35).

Nous allons nous intéresser aux cas qui ne figurent pas dans les situations abordées aux sections précédentes.

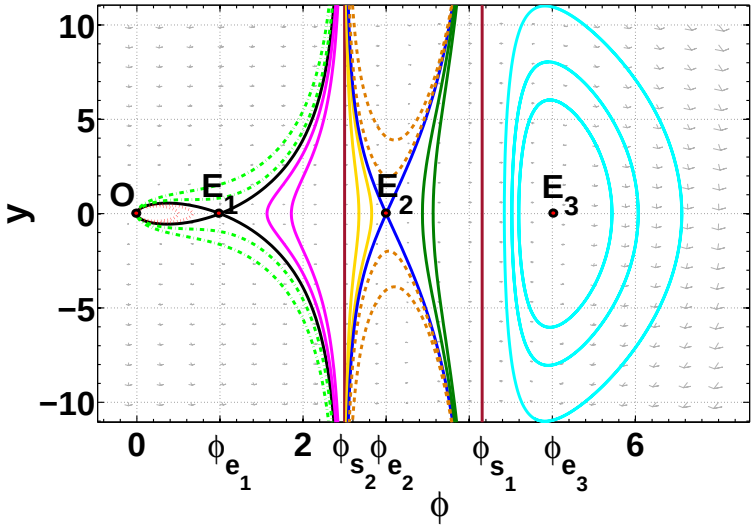


FIGURE 3.37 – Portraits de phase du système (3.79) lorsque $0<\phi_{e_1}<\phi_{0_1}<\phi_{s_2}<\phi_{e_2}<\phi_{s_1}<\phi_{e_3}$ d'où $(h_3<0<h_2<h_{s_2}<h_0<h_1)$.

i) Cas où $h\in\,]h_2,h_{s_2}[$

Cette situation correspond à deux familles d'orbites : la première est constituée d'orbites jaunes qui passent chacune par le point $(\phi_{l_2},0)$ tel que $\phi_{s_3}<\phi_{l_2}<\phi_{e_2}$ et admettant une branche infinie en ϕ_{s_2}. La seconde famille est constituée d'orbites vert foncé interceptant chacune l'axe de ϕ en $(\phi_{l_2},0)$ tel que $\phi_{e_1}<\phi_{l_2}<\phi_{s_3}$ et où $(\phi_{s_3},0)$ est un point situé sur l'orbite correspond à h_{s_2}. Alors on a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi-\phi_{l_1})(\phi-\phi_{l_2})(\phi-\phi_{l_3}),$$

avec $\phi_{l_3}<0<\phi_{l_1}<\phi_{l_2}$ et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8c_2^2(c_2-2c_3)}\frac{\phi(\phi-\phi_{l_1})(\phi-\phi_{l_2})(\phi-\phi_{l_3})}{(\phi-\phi_{s_1})(\phi-\phi_{s_2})}.$$

On a :

$$z(\phi) = \frac{\pm 1}{w} \int_{\phi}^{\phi_{l_1}} \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})\, d\phi}{\sqrt{\phi(\phi - \phi_{l_3})(\phi - \phi_{s_2})(\phi_{l_1} - \phi)(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{l_2})}}. \tag{3.377}$$

ii) Cas où $h \in]h_{s_2}, h_0[$

Pour ce cas, nous avons deux familles d'orbites situées de part et d'autre du point d'équilibre $E_2(\phi_{l_2}, 0)$. La première est constituée d'orbites de couleur rose dont chacune intercepte l'axe des ϕ en un point $(\phi_{k_1}, 0)$ tel que $\phi_{0_1} < \phi_{k_1} < \phi_{s_2}$ avec une branche infinie en ϕ_{s_2}. La seconde famille est constituée d'orbites de couleur vert foncé dont chacune intercepte l'axe des ϕ en $(\phi_{k_2}, 0)$ tel que $\phi_{s_3} < \phi_{k_2} < \phi_{0_2}$ et admet une branche infinie. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3}),$$

avec $\phi_{k_3} < 0 < \phi_{k_1} < \phi_{k_2}$ et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8c_2^2(c_2 + 2c_3)} \frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}.$$

Les solutions sont similaires aux cas obtenus précédemment.

iii) Cas ou $h = h_0$

Ce cas correspond à deux branches d'orbites : la première de couleur rose passe par le point $(\phi_{0_1}, 0)$ et admet une branche infinie en ϕ_{s_2}.

La seconde jaune passe par $(\phi_{0_1}, 0)$ et admet une branche infinie en ϕ_{s_1}. On a

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2}),$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8c_2^2(c_2 - 2c_3)} \frac{\phi^2(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi - \phi_{0_1})(\phi - \phi_{0_2})}.$$

Nous avons comme solution :

$$\omega dz = \pm \frac{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})\, d\phi}{\phi\sqrt{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{0_1})(\phi_{0_2} - \phi)}}.$$

On a les mêmes solutions qu'en $9.\,i)$. Les autres cas sont similaires à $9.\,iv)$, i.e pour $h \in]h_0, h_1[$, $h = h_1$, $et\ h \in]h_1, +\infty[$.

11. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{0_1} = \phi_{s_2} < \phi_{e_2} < \phi_{s_1} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 = h_{s_2} < h_1$**.**

Dans cette section, le cas qui nous intéresse est le cas où $h = h_0$; les autres cas ont été vus dans les sections précédentes. On affaire à une orbite qui passe par $(\phi_{0_2}, 0)$ et admettant une branche à l'infinie en ϕ_{s_1}. Alors

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3 \phi}{8c_2}(\phi - \phi_{0_2})(\phi - \phi_{s_2}),$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8C_2^2\,(c_2 - 2c_3)}\frac{\phi^2\,(\phi - \phi_{0_2})}{(\phi - \phi_{s_1})},$$

avec $\phi \in [\phi_{0_2}, \phi_{s_1}[$. Alors :

$$z\,(\eta) = \pm\frac{1}{w}\left[\arcsin\left(\frac{2\phi}{\phi_{s_1} - \phi_{0_2}} - \frac{\phi_{s_1} + \phi_{0_2}}{\phi_{s_1} - \phi_{0_2}}\right) + \left(\frac{\phi_{s_1}}{\phi_{0_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\arcsin\left(\frac{2\phi_{s_1}\phi_{0_2}}{\phi\,(\phi_{s_1} - \phi_{0_2})} - \frac{\phi_{s_1} + \phi_{0_2}}{\phi_{s_1} - \phi_{0_2}}\right)\right].$$

12. Cas où $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_2} < \phi_{0_1} < \phi_{e_2} < \phi_{e_3}$ **d'où** $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_{s_2} < h_1$

i) Cas où $h \in]h_0, h_{s_2}[$

Pour ce cas, nous avons trois familles d'orbites : la première famille est constituée d'orbites dont chacune intercepte l'axe des ϕ en $(\phi_{e_1}, 0)$ tel que $0 < \phi_{e_1} < \phi_{s_3} < \phi_{e_1}$. Ce sont des orbites fermées qui passent chacune par (0,0) et (ϕ_{e_1},0).

La seconde famille correspond aux orbites dont chacune intercepte l'axe des ϕ en $\phi_{s_2} < \phi_{l_2} < \phi_{0_1}$. Ces orbites admettent des branches infinies en ϕ_{s_2}.

La troisième famille correspond aux orbites interceptant chacune l'axe des ϕ en $(\phi_{l_3}, 0)$ tel que : $\phi_{0_2} < \phi_{l_3} < \phi_{s_4}$.

ii) Cas où $h = h_{s_2}$

Ce cas correspond à deux branches de courbes. La première passe par $(\phi_{s_3}, 0)$ et est une orbite fermée. La seconde passe par $(\phi_{s_4}, 0)$ et admet une branche infinie au voisinage de ϕ_{s_1}. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_2})(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4}), \tag{3.378}$$

$$y^2 = -\omega^2\frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{(\phi - \phi_{s_1})}, \tag{3.379}$$

où $0 < \phi_{s_3} < \phi_{s_4} < \phi_{s_1}$.

Pour $0 < \phi < \phi_{s_3}$, nous avons :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s3}\phi_{s_4}\mathrm{sn}^2(\Omega_{122}\eta, k_{112}) - \phi_{s_3}\phi_{s_4}}{\phi_{s_3}\mathrm{sn}^2(\Omega_{122}\eta, k_{122}) - \phi_{s_4}}, \tag{3.380}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{s_4} - \phi_{s_1})\eta + \frac{(\phi_{s_3} - \phi_{s_4})}{\Omega_{122}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{122}\eta, k_{122})\right); \tilde{\alpha}_{122}^2; k_{122}\right]\right], \tag{3.381}$$

avec $\tilde{\alpha}_{122}^2 = \dfrac{\phi_{s_3}}{\phi_{s_4}}$; $k_{122} = \dfrac{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})}{\phi_{s_4}(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}$; $\Omega_{122} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\phi_{s_4}(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{122}K(k_{122})}$.

Pour $\phi_{s_4} < \phi < \phi_{s_1}$, on a :

$$\phi(\eta) = \frac{\phi_{s_3}(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})\mathrm{sn}^2(\Omega_{122}\eta, k_{112}) - \phi_{s4}(\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}{(\phi_{s_1} - \phi_{s_4})\mathrm{sn}^2(\Omega_{122}\eta, k_{122}) - (\phi_{s_1} - \phi_{s_3})}, \tag{3.382}$$

$$z(\eta) = \pm\frac{1}{\omega}\left[(\phi_{s3} - \phi_{s1})\eta + \frac{(\phi_{s4} - \phi_{s3})}{\Omega_{122}}\Pi\left[\arcsin\left(\mathrm{sn}(\Omega_{122}\eta, k_{122})\right); \tilde{\alpha}^2_{123}; k_{122}\right]\right], \tag{3.383}$$

où $\tilde{\alpha}^2_{123} = \dfrac{\phi_{s_1} - \phi_{s_2}}{\phi_{s_1} - \phi_{s_3}}$ et $0 < \eta < \dfrac{1}{\Omega_{122}K(k_{122})}$. Les autres cas ont été calculés dans les sections précédentes.

13. Cas où $0 < \phi_{s_2} < \phi_{e_1} < \phi_{e_2} < \phi_{e_3}$ et $h_3 < 0 < h_2 < h_0 < h_{S_2} < h_1$.

i) Cas où $h \in]h_0, h_{s_2}[$

Ce cas correspond à trois familles d'orbites :

La première famille est constituée d'orbites dont chacune intercepte l'axe ϕ en $(\phi_{l_1}, 0)$ tel que $0 < \phi_{l_1} < \phi_{S_2}$ et passant toutes par $(0,0)$. Ce sont des orbites fermées. La seconde famille est constituée d'orbites qui admettent une branche infinie en $(\phi_{l_2}, 0)$ tel que $\phi_{s_3} < \phi_{l_2} < \phi_{e_2}$ avec $H(\phi_{s_3}, 0) = h_{s_2}$.

La troisième famille d'orbites correspond aux orbites interceptant chacune l'axe des ϕ en $(\phi_{l_3}, 0)$ tel que $\phi_{e_2} < \phi_{l_3} < \phi_{s_4}$ avec $H(\phi_{s_4}, 0) = h_{s_2}$. On a :

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8C_2}(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})(\phi - \phi_{l_3}),$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8C_2^2(c_1 + 2c_3)}\frac{\phi(\phi - \phi_{l_1})(\phi - \phi_{l_2})(\phi - \phi_{l_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{S_2})},$$

avec $\phi \in [0, \phi_{l_1}] \cup]\phi_{s_2}, \phi_{l_2}] \cup [\phi_{l_3}, \phi_{s_1}[$.

ii) Cas où $h = h_{s_2}$

Nous avons deux courbes : l'une qui passe par $(0,0)$ et $(\phi_{s_3}, 0)$. C'est une courbe fermée qui coupe la droite $\phi = \phi_{s_2}$ en deux points symétriques par rapport à l'axe des ϕ. L'autre courbe passe par $(\phi_{s_4}, 0)$ et admet une branche infinie en ϕ_{s_1}. Alors,

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})(\phi - \phi_{s_2}),$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8C_2^2(c_1 + 2c_3)}\frac{\phi(\phi - \phi_{s_3})(\phi - \phi_{s_4})}{(\phi - \phi_{s_1})},$$

avec

$\phi \in [0, \phi_{s_3}] \cup [\phi_{s_4}, +\infty[$

Nous avons la même solution qu'en (12.) pour $h = h_{s_2}$.

iii) Cas où $h \in]h_{s_2}, h_1[$

Ce cas correspond à deux familles d'orbites. Pour la première famille, nous avons des orbites fermées entourant le point d'équilibre $E_1(\phi_{e_1}, 0)$ et interceptant chacune l'axe des ϕ en $(\phi_{k_1}, 0)$ et $(\phi_{k_2}, 0)$ tels que $\phi_{s_2} < \phi_{k_1} < \phi_{e_1} < \phi_{k_2} < \phi_{s_3}$. Pour la deuxième famille, nous avons des orbites passant chacune par $(\phi_{k_3}, 0)$ tel que $< \phi_{e_2} < \phi_{s_4} < \phi_{k_3} < \phi_{m_1}$ et $H(\phi_{m_1}, 0) = h_1$. Alors,

$$G_3(\phi) = \frac{\alpha_3}{8c_2}(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})$$

et

$$y^2 = \frac{\alpha_3}{8C_2^2(c_2 + 2c_3)} \frac{\phi(\phi - \phi_{k_1})(\phi - \phi_{k_2})(\phi - \phi_{k_3})}{(\phi - \phi_{s_1})(\phi - \phi_{s_2})}.$$

3.4/ CONCLUSION

Il ressort de l'étude faite sur ce modèle théorique que la prise en compte de l'anharmonicité interparticulaire et du potentiel de substrat déformable apporte une grande richesse dynamique pour ce modèle. Un tel modèle, avec des solutions générées par son équation caractéristique, peut être mieux adapté pour décrire des systèmes physiques très complexes. C'est pourquoi il est indispensable d'approfondir son étude non seulement par la recherche de solutions ondes solitaires générées, mais aussi par l'étude de la capacité de ces systèmes à transmettre un signal. C'est pour cette raison que nous allons examiner au chapitre suivant l'étude de la fonction de transfert d'une onde à travers un système physique non linéaire de largeur finie.

4

TRANSMISSIVITÉ, BISTABILITÉ AU VOISINAGE DU GAP

4.1/ INTRODUCTION

Depuis un certain nombre d'années, plusieurs études ont été faites sur les systèmes de transmission non linéaire [76, 65, 74, 86] (biréseaux, super-réseaux, lignes de transmission non linéaire).

Au voisinage du gap, quand la fréquence se situe dans la bande interdite, la fonction de transfert de module très faible dans l'approximation nonlinéaire (Amplitude $\longrightarrow 0$) de l'onde incidente, devient importante et présente une bistabilité avec hystérésis lorsque la valeur de l'amplitude dépasse un certain seuil dépendant de la fréquence [76, 75, 36, 87].

Ces études sur la transmissivité ont été faites sous l'hypothèse d'interactions interparticulaires harmoniques ou présentant une non linéarité assez simple. Dans ce chapitre, nous allons déterminer la transmissivité d'un système de transmission non linéaire et présentant des interactions interparticulaires anharmoniques. Nous montrons par la suite l'influence du facteur responsable de l'anharmonicité et celle du facteur de déformabilité du potentiel de substrat sur le coefficient de transmission du système.

Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode à deux ondes pour la résolution de l'équation de Schrodinger non linéaire. Ceci conduit à un système de deux équations qui nous permettra de déterminer les relations entre les amplitudes des ondes incidente et transmise d'une part, ainsi que celle entre les vecteurs d'ondes de ces mêmes ondes. Ainsi nous obtiendrons l'expression analytique de la transmissivité du système.

4.2/ EQUATION DE SCHRODINGER NON LINÉAIRE

D'après l'étude d'une ligne de transmission non linéaire, l'équation caractérisant l'évolution du système non linéaire anharmonique avec substrat déformable est donnée par (3.6.)

Pour la résolution de l'équation du système, nous avons utilisé la relation (3.7). L'équation de Schrodinger est donnée par la relation (3.10) dans laquelle nous avons utilisé le fait que $k = 0$ au bord du gap inférieur avec $P = \dfrac{G_2}{2\omega_0^{'}}$ et $Q(\sigma) = \dfrac{3-2\sigma^2}{4\sigma^2}\omega_0^{'}$.

Comme lors du traitement de l'équation (3.13), nous avons en fait négligé le terme en A_{XXXX} apparaissant en (3.10), car ce terme fait intervenir une dérivée d'ordre 4 par rapport à une variable lente X, ce qui la rend négligeable par rapport aux autres termes qui sont obtenus à partir des dérivées d'ordre au plus égal à 2. C'est une équation où les paramètres P et Q dépendent du coefficient d'anharmonicité G_4, du coefficient de dispersion harmonique G_2 et du paramètre β caractérisant la déformabilité du substrat. Il n'est donc pas nécessaire de garder les termes de dérivée d'ordre 4. Pour la résolution de l'équation, nous allons utiliser une méthode appelée méthode à deux ondes [76, 74].

4.3/ MÉTHODE À DEUX ONDES

La méthode à deux ondes consiste à exprimer l'enveloppe de l'onde introduite en (3.7) sous la forme suivante :

$$A(X,\tau) = \left(V_+ e^{iK_+X} + V_- e^{-iK_-X}\right) e^{-i\Omega\tau}. \tag{4.1}$$

C'est la somme de deux ondes se propageant en sens inverse [75]. Leurs amplitudes V_+ et V_- sont supposées constantes et à priori complexes. Leurs vecteurs d'onde sont K_+ et K_-, à priori réels en l'absence de pertes (pas de résistances ni de conductances dans le modèle). Le caractère non linéaire du milieu de transmission va être pris en compte par les relations $K_+ = K_+(\Omega, V_+, V_-)$ et $K_- = K_-(\Omega, V_+, V_-)$. La pulsation Ω de ces deux ondes est la différence entre la pulsation totale ω de l'onde incidente et la pulsation ω_0 du gap comme pulsation de la porteuse :

$$\Omega = \omega - \omega_0^{'}.$$

Comme la fréquence de l'onde incidente se situe en dessous du gap, nous aurons donc $\Omega < 0$. Par la suite, nous allons exprimer les termes de l'équation en nous limitant aux parties qui contiennent les expressions en $e^{-i\Omega\tau}$, e^{iK_+X} et e^{-iK_-X}.
Les termes de l'équation (3.10) s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
iA_\tau &= \Omega\left[V_+ e^{iK_+X} + V_- e^{-iK_-X}\right] e^{-i\Omega\tau},\\
PA_{XX} &= P\left[-K_+^2 V_+ e^{iK_+X} - K_-^2 V_- e^{-iK_-X}\right] e^{-i\Omega\tau},\\
QA^2A^* &= Q\left[\left(\mid V_+ \mid^2 V_+ + 2 \mid V_- \mid^2 V_+\right) e^{iK_+X} + \left(\mid V_- \mid^2 V_- + 2 \mid V_+ \mid^2 V_-\right) e^{-iK_-X}\right] e^{-i\Omega\tau}\\
&- \frac{3G_4}{2\omega}\left[A_{XX}^* A_X + 2A_{XX}A_X^*\right] A_X = \frac{3G_4}{2\omega}\left[K_+^4 \mid V_+ \mid^2 V_+ + 2K_+^2K_-^2 V_+ \mid V_- \mid^2\right] e^{-i\Omega\tau}\\
&+ \frac{3G_4}{2\omega}\left[+K_-^4 \mid V_- \mid^2 V_- + 2K_+^2K_-^2 \mid V_+ \mid^2 V_-\right] e^{-i\Omega\tau}.
\end{aligned}$$

Par regroupement des termes en e^{iK_+X} et e^{-iK_-X} dans l'équation de Schrödinger non linéaire (3.10) ainsi modifiée, nous obtenons :

$$\Omega - PK_+^2 + Q\left(\mid V_+ \mid^2 + 2 \mid V_- \mid^2\right) = \frac{3G_4}{2\omega}\left(K_+^4 \mid V_+ \mid^2 + 2K_+^2K_-^2 \mid V_- \mid^2\right) \tag{4.2}$$

et

$$\Omega - PK_-^2 + Q\left(\mid V_- \mid^2 + 2 \mid V_+ \mid^2\right) = \frac{3G_4}{2\omega}\left(K_-^4 \mid V_- \mid^2 + 2K_+^2K_-^2 \mid V_+ \mid^2\right). \tag{4.3}$$

Ces équations ci-dessus sont indispensables pour le calcul de la transmissivité du système non linéaire.

4.4/ CONDITIONS DE CONTINUITÉ

Considérons un système de longueur finie (L). Le milieu non linéaire est limité par deux milieux linéaires .

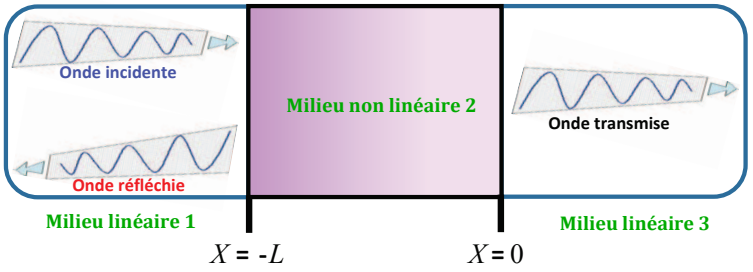


FIGURE 4.1 – Propagation d'une onde dans un milieu non linéaire et de dimension finie.

Nous allons considérer les conditions de continuité du signal aux frontières du milieu en $X = -L$ et $X = 0$, puis la continuité du gradient du signal aux mêmes frontières [76, 74]. La continuité du gradient provient de celle du courant lié au gradient de tension par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t}.$$

La quantité $V_i e^{ik_l X}$ représente l'onde incidente vers la face d'entrée $(X = -L)$, et celle $RV_i e^{-ik_l X}$ représente le signal réfléchi où R est le coefficient de réflexion de l'onde.

A l'intérieur du système, l'onde est donnée par $V_+ e^{iK_+ X} + V_- e^{-iK_- X}$. A la sortie du système non linéaire, l'onde transmise est $V_t e^{ik_l X}$.

A partir de la continuité du signal en $X = 0$, nous avons la relation

$$V_+ + V_- = V_t.$$

De la continuité du gradient du signal en $X = 0$, nous avons la relation

$$K_+V_+ - K_-V_- = k_l V_t.$$

Si nous posons $x = \frac{K_+}{k_l}$, $y = \frac{K_-}{k_l}$, $v_+ = \frac{V_+}{V_t}$, $v_- = \frac{V_-}{V_t}$, alors les conditions de continuité en $X = 0$, nous permettent d'écrire :

$$v_+ + v_- = 1 \tag{4.4}$$

et

$$xv_+ - yv_- = 1. \tag{4.5}$$

Des équations 4.5 et 4.6, nous avons

$$v_+ = \frac{y+1}{x+y} \tag{4.6}$$

et

$$v_- = \frac{x-1}{x+y}. \tag{4.7}$$

Comme x et y sont réels positifs, on peut en déduire que v_+ et v_- sont aussi réels, ce qui permet d'enlever les barres de module dans (4.2) et (4.3). Les relations de continuité de l'onde et de son gradient en $x = -L$ nous permettent d'écrire

$$V_i e^{-ik_l L} + RV_i e^{ik_l L} = V_+ e^{-iK_+ L} + V_- e^{iK_- L}$$

et

$$k_l V_i e^{-ik_l L} - k_l RV_i e^{ik_l L} = K_+ V_+ e^{-iK_+ L} - K_- V_- e^{iK_- L}.$$

Compte tenu des relations de continuité de l'onde et de son gradient à la surface caractérisée par $X = -L$, nous avons aussi la relation :

$$\begin{aligned} 2V_i e^{-ik_l L} = V_t \left[v_+(1+x)\cos(k_l Lx) + v_-(1-y)\cos(k_l Ly) \right] \\ +iV_t \left[(v_-(1-y)\sin(k_l Ly) - v_+(1+x)\sin(k_l Lx) \right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

C'est une relation qui contient des termes en x , y, v_+ et v_-. Comme ces termes dépendent de V_t, les expressions de x et y en fonction de V_t permettront de lier l'amplitude de l'onde transmise à celle de l'onde incidente ; ceci conduira à la fonction de transfert du système.

4.5/ FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTÈME

4.5.1/ EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA TRANSMISSIVITÉ

Remplaçons les expressions des amplitudes V_+, V_- puis les vecteurs d'ondes K_- et K_+ dans leurs relations obtenues de l'équation de Schrodinger non linéaire. Nous obtenons les équations suivantes :

$$\Omega - Pk_l^2 x^2 + QV_t^2 \left(v_+^2 + 2v_-^2 \right) = \frac{3G_4 V_t^2 k_l^4}{2\omega_0'} \left(x^4 v_+^2 + 2x^2 y^2 v_-^2 \right) \tag{4.9}$$

et

$$\Omega - Pk_l^2 y^2 + QV_t^2\left(v_-^2 + 2v_+^2\right) = \frac{3G_4V_t^2k_l^4}{2\omega_0^{'}}\left(y^4v_-^2 + 2x^2y^2v_+^2\right). \tag{4.10}$$

Après addition des équations (4.9) et (4.10), nous avons :

$$2\Omega - Pk_l^2\left(x^2+y^2\right) + 3QV_t^2\left(v_+^2+v_-^2\right) = \frac{3G_4V_t^2k_l^4}{2\omega_0^{'}}\left[\left(x^4+2x^2y^2\right)v_+^2 + \left(y^4+2x^2y^2\right)v_-^2\right]. \tag{4.11}$$

Après soustraction des équations (4.9)et (4.10), nous avons :

$$Pk_l^2\left(x^2-y^2\right) + QV_t^2\left(v_+^2-v_-^2\right) = \frac{3G_4V_t^2k^4}{2\omega_0^{'}}\left[\left(y^4-2x^2y^2\right)v_-^2 + \left(2x^2y^2-x^4\right)v_+^2\right]. \tag{4.12}$$

Posons : $\alpha = 16Pk_l^2$, $k = 64\Omega$, $\beta = 48QV_t^2$, $\gamma = \dfrac{3G_4k_l^4V_t^2}{2\omega_0^{'}}$, $u = x+y$ et $v = x-y$;

$$3\gamma u^6 + p(v).u^4 + q(v).u^2 + r(v) = 0 \tag{4.13}$$

et

$$A(v).u^4 + B(v).u^2 + C(v) = 0, \tag{4.14}$$

avec

$$\begin{aligned}
p(v) &= -3\gamma v^2 - 20\gamma v + \alpha,\\
q(v) &= -3\gamma v^4 + 24\gamma v^3 + (32\gamma+\alpha)v^2 - k - \beta,\\
r(v) &= \gamma(3v^6 - 4v^5) - \beta(v-2)^2,\\
A(v) &= \gamma(2-3v),\\
B(v) &= \gamma(6v^3 - 12v^2 - 8v) - \alpha v,
\end{aligned}$$

et

$$C(v) = (v-2)\left[-3\gamma v^4 + 4\gamma v^3 + \frac{\beta}{3}\right].$$

En posant $Z = u^2$, les équations ci - dessus s'écrivent de nouveau

$$\gamma Z^3 + pZ^2 + qZ + r = 0 \tag{4.15}$$

et

$$AZ^2 + BZ + C = 0. \tag{4.16}$$

4.5.1.1/ TRAITEMENT DE L'ÉQUATION (4.12) EN CONSIDÉRANT v COMME PARAMÈTRE

Regardons déjà dans quelles conditions $A(v) = 0$: Ce serait pour $v = \frac{2}{3}$. On a alors :

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{80\gamma + 6\alpha}{9}; \qquad C\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{64\gamma + 36\beta}{81}; \qquad p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{44\gamma}{3} + \alpha \\ q\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{212\gamma + 12\alpha}{27} - k - \beta; \qquad r\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{64\gamma}{243} - \frac{16\beta}{9}. \end{aligned}$$

En essayant de résoudre le système (4.15) et (4.16), on n'obtient pas de solutions pour Z. On peut donc considérer $A(v)$ différent de zéro pour la suite.

Pour $A(v) \neq 0$, nous pouvons écrire comme solution de (4.15) :

$$Z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Après élimination de Z dans (4.11), nous obtenons une équation de la forme

$$\begin{aligned} &C\left[(4+3\gamma)^2C^2 - p(4+3\gamma)BC + (4+3\gamma)(qB^2 + 3rAB - 2qAC)\right] \\ &+C\left[-pqAB + (q^2 - 2rp)A^2 + p^2AC\right] \\ &+r\left[pAB^2 + rA^3 - qA^2B - (4+3\gamma)B^3\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Cette équation possède 13 termes de degré 15 en l'inconnue v, ce qui la rend impossible à résoudre, même avec l'aide de Mathematica ou Mapple. Par contre, il apparaît que la valeur $v = 2$ joue un rôle intéressant en annulant certaines combinaisons de termes, quand $C(v)$ est en facteur.

La belle symétrie entre les équations (4.9) et (4.10) peut nous faire penser qu'une solution serait facilement trouvée en posant $x = y$ et $v_+ = v_-$. Cependant, en reportant ces égalités dans l'équation (4.5), on obtient alors $xv_+ - yv_- = 0$ au lieu de 1. Ce cas n'est donc pas possible.

En posant comme solution d'essai seulement l'égalité des amplitudes V_+ et V_-, soit $v_+ = v_- = \frac{1}{2}$, les conditions sur x et y deviennent : $y + 1 = x - 1 = a$, ceci donnerait $x = a + 1$ et $y = a - 1$, où a est une constante restant à déterminer. Cet ansatz a également le mérite de donner $v = 2$. Alors les amplitudes de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le milieu non linéaire sont les mêmes, tandis que l'enveloppe de l'onde devient :

$$\begin{aligned} A(X,\tau) &= \left(V_+e^{iK_+X} + V_-e^{-iK_-X}\right)e^{-i\Omega\tau} \\ &= \frac{1}{2}V_te^{-i\Omega\tau}\left[e^{i(a+1)k_lX} + e^{-i(a-1)k_lX}\right] \\ &= V_te^{-i\Omega\tau}e^{k_lX}\left(\frac{e^{iak_lX} + e^{-iak_lX}}{2}\right) \\ &= V_t\cos(ak_lX)e^{(ik_lX - \Omega\tau)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

On obtient alors un système d'ondes stationnaires de longueur d'onde $\frac{2\pi}{ak_l} = \frac{\lambda_l}{a}$ dont la distance entre les ventres et les noeuds est $\frac{\lambda_l}{4a}$.

La soustraction des équations (4.9) et (4.10) donnant (4.12) nous fait perdre les quantités Ω et Q qui influencent pourtant la fonction de transfert. Il est nécessaire pour nous de considérer l'addition des équations (4.9) et (4.10) c'est à dire (4.11), où ces termes apparaitront, plus que l'équation obtenue par différence qui nécessiterait d'aller à des ordres supérieurs dans l'approximation de la méthode des 2 ondes. Nous pouvons nous affranchir de cette difficulté en posant $a >> 1$ et en cherchant a telle que donnée ci-dessous à partir de (4.11) quand $a >> 1$:

$$\Omega - Pk_l^2a^2 + \frac{3QV_t^2}{4} = \frac{9G_4k_l^4V_t^2a^4}{8\omega_0^{'}}. \tag{4.19}$$

D'où

$$a^4 + \frac{8\omega_0^{'}P}{9G_4k_l^2V_t^2}a^2 - \frac{8\omega_0^{'}\Omega + 6\omega_0^{'}QV_t^2}{9G_4V_t^2k_l^4} = 0 \tag{4.20}$$

et on arrive à :

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{8\omega_0^{'}P}{9G_4k_l^2V_t^2} + \sqrt{\left(\frac{8\omega_0^{'}P}{9G_4k_l^2V_t^2}\right)^2 + \frac{32\omega_0^{'}\Omega + 24\omega_0^{'}QV_t^2}{9G_4V_t^2k_l^4}}\right]. \tag{4.21}$$

Le cas intéressant donnant a réel positif est donc $G_4 < 0$.

L'expression de la transmissivité est, à partir de (4.8), avec $u = x + y = 2a$:

$$\tau = \frac{V_t}{V_i} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(u^2+16) + (16-u^2)\cos(k_lLu)}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{f(u)}} \tag{4.22}$$

avec $f(u) = (u^2+16) + (16-u^2)\cos(k_lLu) = 2u^2\sin^2\frac{k_lLu}{2} + 32\cos^2\frac{k_lLu}{2}$.

La transmissivité dépend du paramètre u. Ainsi, il est plus commode d'exprimer les amplitudes des ondes incidente et transmise en fonction de $u = 2a$. En effet, à partir de (4.20), on obtient :

$$V_t^2\left[3Q - \frac{9G_4k_l^4}{8\omega_0^{'}}u^4\right] = Pk_l^2u^2 - 4\Omega. \tag{4.23}$$

D'où $V_t = \sqrt{g(u)}$ avec :

$$g(u) = \frac{Pk_l^2u^2 - 4\Omega}{3Q - \frac{9G_4k_l^4}{8\omega_0^{'}}u^4}. \tag{4.24}$$

Il est à noter qu'avec $G_4 < 0, \quad P > 0, \quad Q > 0$ et $\Omega < 0, \quad g(u)$ est une fraction toujours strictement positive. Pour $u = 0, \quad g(0) = -\frac{4\Omega}{3Q} > 0$, tandis que, pour u tendant vers l'infini, $g(u \longrightarrow \infty) = 0^+$.

A partir des expressions ci-dessus (4.24) et de (4.22), on obtient :

$$V_i = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{f(u).g(u)}. \tag{4.25}$$

On peut donc étudier les variations de τ en fonction de V_i, comme représentées sur la figure (4.2), où les coordonnées de τ et V_i sont obtenues implicitement à partir de la grandeur u.

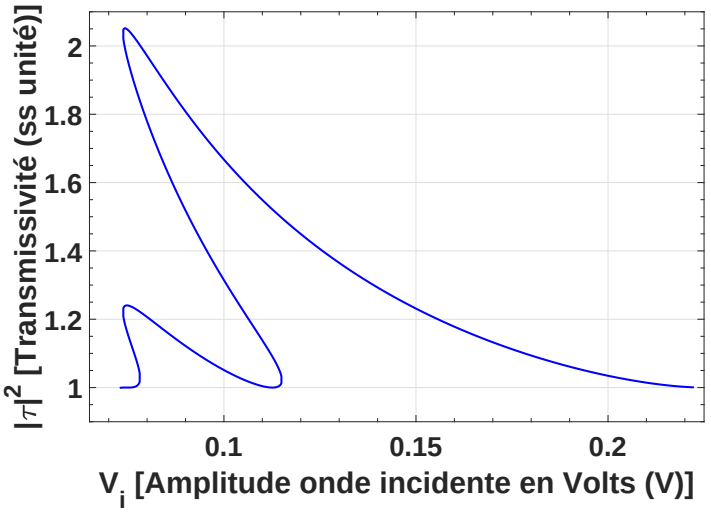


FIGURE 4.2 – Caractéristique de la transmissivité en fonction de l'amplitude de l'onde incidente. $k_l L = 4,8$; $P = 0,7$, $\Omega = -0,0001$, $G_4 = -0,87$, $Q = 0,8$, $G_2 = 1$ et $\omega_0^{'} = 0,70$.

On observe sur cette figure que la transmissivité, partant de valeurs proches de 1 pour des faibles valeurs de V_i, augmente brusquement pour une valeur donnée de l'amplitude incidente, selon un phénomène dit de bistabilité. Les paramètres choisis pour illustrer la courbe de la transmissivité sont donnés dans la légende de la figure (4.2), en particulier $k_l L = 4,8$, ce qui correspond à une épaisseur L de la zone nonlinéaire à traverser égale à $0,76\Lambda_l$, où Λ_l est la longueur d'onde dans les milieux incident et émergent, c'est-à-dire dans celui qui précède et dans celui qui suit notre tranche nonlinéaire. La transmissivité double ainsi brusquement sa valeur pour une valeur donnée de V_i. On peut calculer cette valeur de seuil, car elle correspond à une dérivée infinie de l'expression $\tau = \tau(V_i)$.

Comme $\frac{d\tau}{dV_i} = \frac{d\tau}{du}\frac{du}{dV_i}$ et qu'on a, à partir de (4.25) :

$$\frac{du}{dV_i} = \frac{1}{\frac{dV_i}{du}} \quad \text{et}$$

$$\frac{dV_i}{du} = \frac{f^{'}(u)g(u) + f(u)g^{'}(u)}{8\sqrt{2}\sqrt{f(u)g(u)}},$$

et, qu'à partir de (4.22), $\frac{d\tau}{du} = -\frac{2\sqrt{2}f'(u)}{f^{\frac{3}{2}}(u)}$, on obtient :

$$\frac{d\tau}{dV_i} = -\frac{32f'(u)\sqrt{g(u)}}{f(u)\left[f'(u)g(u) + f(u)g'(u)\right]}. \tag{4.26}$$

Cette dérivée est infinie si et seulement si $f(u).(f'(u)g(u) + f(u)g'(u)) = 0$. Comme $f(u)$ est toujours strictement positif (4.22), la condition caractéristique sur l'amplitude du seuil de l'onde incidente donnant la bistabilité s'écrit $f'(u)g(u) + f(u)g'(u) = 0$. Cette valeur dépend fortement des paramètre $G_4, L, \ldots$ du système étudié.

4.6/ CARACTÉRISTIQUE DE LA TRANSMISSIVITÉ EN FONCTION DE V_i

Dans cette section, nous voulons montrer la variation de la fonction de transfert par rapport à l'amplitude de l'onde incidente.

4.6.0.1/ FONCTION DE TRANSFERT POUR CERTAINES VALEURS FIXÉES DES PARAMÈTRES

Nous avons la caractéristique suivante de la fonction de la transfert pour les valeurs des paramètres indiquées sur la figure (4.2).

Nous remarquons que la fonction de transfert présente une bistabilité accompagnée du phénomène d'hystérésis.

4.6.0.2/ INFLUENCE DE L'ANHARMONICITÉ SUR LA FONCTION DE TRANSFERT

Pour mettre en évidence l'influence du coefficient d'anharmonicité sur la fonction de transfert, nous avons fixé les valeurs des paramètres comme pour la figure (4.2) sauf la valeur de G_4 qui est modifiée suivant les types de courbes obtenues, tout en restant négative.

Nous remarquons que l'amplitude de l'onde incidente correspondant à la bistabilité diminue lorsque le module du coefficient d'anharmonicité augmente, tandis que la valeur maximale de la transmissivité ne varie pas (voir Fig. 4.3) pour les deuxième et troisième maxima.

4.6.0.3/ INFLUENCE DE LA LARGEUR DU MILIEU NON LINÉAIRE SUR LA FONCTION DE TRANSFERT

Pour mettre en évidence l'influence de la largeur du milieu non linéaire sur la fonction de transfert, nous avons fixé les valeurs des paramètres comme sur la figure (4.2) et nous avons pris différentes valeurs du produit $k_l L$. Nous remarquons sur la figure (4.4) que la valeur maximale de la transmissivité augmente pour des grandes valeurs du produit $k_l L$ et que l'amplitude de l'onde incidente provoquant la bistabilité ne varie pas.

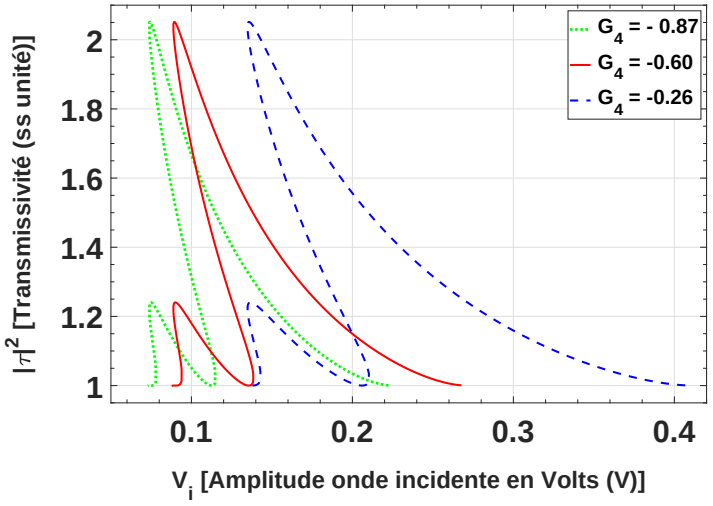


FIGURE 4.3 – Influence de l'anharmonicité sur la transmissivité pour $G_4 = -0,26\,;\,-0,60$ et $-0,87$.

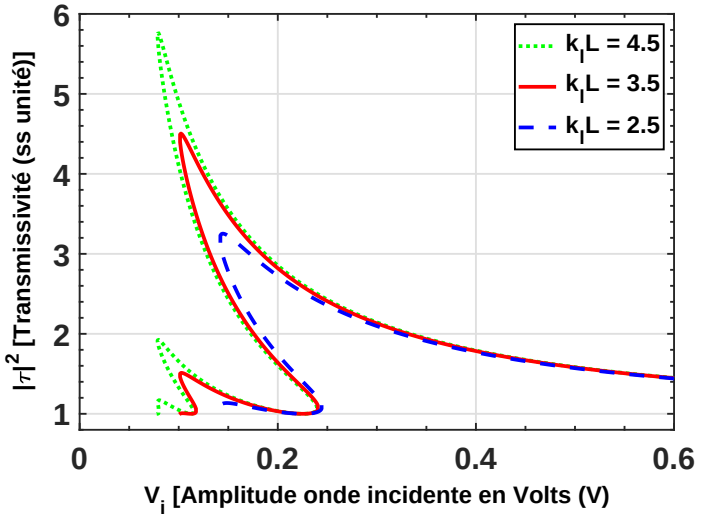


FIGURE 4.4 – Influence de la largeur du milieu non linéaire sur la transmissivité pour $k_l L = 2,5\,;\,3.5$ et 4.5.

4.7/ CONCLUSION

L'étude de la transmissivité de notre système à l'aide de la méthode à deux ondes nous a facilité l'obtention de l'expression analytique du coefficient de transmission. Il ressort des différentes caractéristiques de la transmissivité que l'amplitude de l'onde incidente au seuil de bistabilité diminue lorsque le module du coefficient d'anharmonicité augmente. La valeur maximale de la fonction de transfert augmente pour des grandes valeurs du produit $k_l L$.

Notre présentation pourrait évidemment servir à plus grand échelle pour étudier le rôle de chaque paramètre dans le phénomène de bistabilité et de transmissivité.

5

CONSTRUCTION D'UN SUPER RÉSEAU SIMULANT UN NEURONE MYÉLINISÉ

5.1/ INTRODUCTION

Les sciences qui permettent l'étude du fonctionnement du système nerveux sont regroupées sous le terme neurosciences. Les biologistes et les médecins se sont d'abord intéressés à l'étude du système nerveux, mais les disciplines telles que la chimie, les mathématiques, la psychologie et la physique ont favorisé l'évolution des neurosciences. Certaines disciplines cherchent à comprendre la constitution du système nerveux tandis que d'autres s'intéressent au fonctionnement des éléments du système nerveux. Dans ce chapitre, il est question d'élaborer un super-réseau qui simule un neurone myélinisé. Pour y parvenir, nous allons d'abord présenter le neurone et son fonctionnement, les modèles électroniques du neurone qui existent déjà, et construire un tronçon de ligne électrique électrique qui représentera un élément du super-réseau, pour finalement agencer plusieurs tronçons.

5.2/ STRUCTURE ET FONCTIONNEMENT DU NEURONE

5.2.1/ LE NEURONE

Le neurone est l'unité fondamentale du système nerveux. C'est encore la cellule du système nerveux. Nous avons vu dans le chapitre 2 que nous pouvions le considérer comme une cellule unique.

5.2.2/ FONCTIONNEMENT DU NEURONE

La valeur du potentiel membranaire dont la dynamique esst représentée en (5.1) est au repos à environ $-70mV$. Lorsqu'un stimulus dépolarise légèrement la membrane de sorte que le potentiel membranaire soit supérieur au seuil, le potentiel d'action est déclenché.

Le potentiel seuil représente donc la valeur du potentiel ouvrant plusieurs canaux, perméables aux ions sodium. Cette entrée d'ions positifs change rapidement la polarité de la membrane vers des valeurs plus positives. On dit que la membrane se

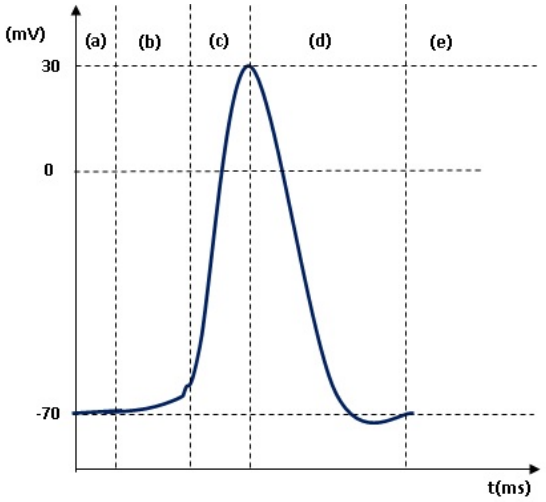


FIGURE 5.1 – variation du potentiel d'action, a : état de repos – b : stimulation – c : dépolarisation – d : polarisation et hyperpolarisation – e : retour à l'état de repos. L'échelle des temps en abscisses est d'environ $1ms/cm$.

dépolarise. L'entrée des ions sodium diminue ensuite progressivement puisque la force électrostatique s'oppose au gradient chimique des ions sodium.

Sous l'influence de la dépolarisation de la membrane, plusieurs canaux ioniques à potassium s'ouvrent. Le gradient électrostatique de la membrane dépolarisée et le gradient des ions potassium vont dans la même direction. Ils permettent la sortie massive des ions potassium. Pendant ce temps, les canaux sodiques restent fermés, ce qui bloque l'entrée des ions sodium. Les canaux potassiques plus lents à se fermer laissent encore sortir les ions potassium en grand nombre.

Cette sortie des ions potassium chargés positivement rend l'extérieur de la membrane plus positif et l'intérieur plus négatif. La membrane se repolarise. Comme les canaux potassium réagissent lentement, beaucoup d'ions potassium sortent et le potentiel membranaire passe sous le potentiel de repos.

La membrane s'hyperpolarise le temps que la plupart des canaux potassiques se referment, que le gradient chimique des ions potassium et le gradient électrostatique se rééquilibrent. Pendant ce temps, les canaux sodiques restés inactivés pendant la durée du potentiel d'action se rechargent pour prendre une configuration fermée mais activable. Puisque les canaux sodiques sont inactivés, il est très difficile de stimuler immédiatement le neurone pour avoir un autre potentiel d'action. Cette période est donc appelée période réfractaire.

5.3/ QUELQUES MODÈLES ÉLECTRONIQUES CONNUS DU NEURONE

Certaines modélisations de la membrane cellulaire ont été faites par Hodgkin-Huxley en 1952,... Fitzhugh-Nagumo en 1961 et Hindmarsh-Rose en 1982. Par la suite, nous allons présenter certains de ces modèles.

5.3.1/ MODÈLE DE HODGKIN-HUXLEY

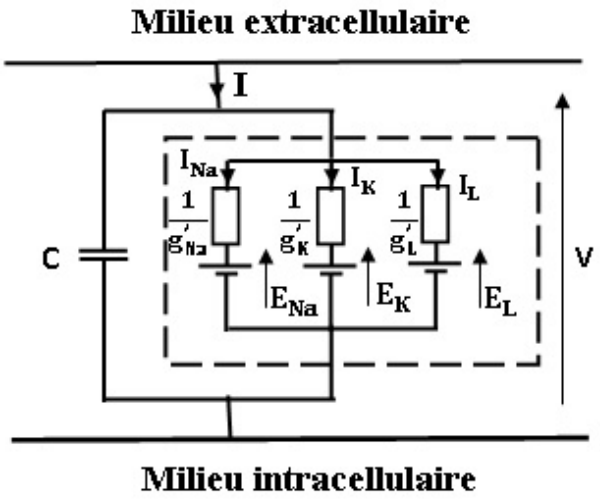


FIGURE 5.2 – Représentation analogique d'une membrane plasmique avec des passages possibles pour différents ions.

Ce modèle a été proposé en 1952 par Hodgkin et Huxley (H,H) [88] pour la propagation de l'influx nerveux. Le courant ionique qui circule dans l'axone est constitué de deux principaux courants, à savoir le courant sodique et le courant potassique. Hodgkin et Huxley ont proposé des équations différentes pour les conductances des canaux à sodium et des canaux à potassium. Dans chacun des cas, il existe une valeur maximale de la conductance de valeur respective g_{N_a} et g_K, et la valeur réelle de la conductance est obtenue en multipliant par un coefficient compris entre 0 et 1.

Toutes les propriétés cinétiques du modèle dépendent de ces coefficients multiplicateurs. Dans ce modèle (H,H), les changements de conductance ne dépendent que de la tension et du temps, et non de la concentration en ions sodium et potassium, ou de la direction de circulation du courant. Les expériences montrent que g_{N_a} et g_K évoluent graduellement en fonction du temps, sans changement brusque, même lorsque la tension monte à un niveau supérieur. Donc les coefficients doivent être des fonctions continues dans le temps.

Pour traverser la membrane, un ion est soumis à un gradient électrochimique, qui s'exprime par la différence entre le potentiel de la membrane et le potentiel d'équilibre de l'ion considéré [89].

Le flux d'une espèce d'ions à travers ses propres canaux est proportionnel à ce gradient électrochimique. Lorsque les canaux ioniques sont fermés, les ions ne peuvent pas passer de part et d'autre de la membrane. Mais lorsqu'ils sont activés, chaque canal ionique devient un passage ouvert par lequel les ions traversent la membrane cellulaire. Ce passage d'ions, qui n'est ni plus ni moins qu'un courant électrique traversant la membrane cellulaire, se fait dans le sens du gradient électrochimique de l'ion concerné.

Par la suite, Hodgkin et Huxley ont considéré que chacun des canaux devait être com-

posé de quatre composants indépendants, chacun pouvant être ouvert ou fermé. Dans le cas des canaux à potassium, ces quatre composants sont identiques avec une probabilité n d'être en position ouverte. La probabilité que les quatre composants soient ouverts est donc n^4. L'ouverture et la fermeture d'un canal potassique étant dépendantes du potentiel de membrane, ils ont considéré que chacun des composants passait de la position ouverte à la position fermée en fonction du potentiel de membrane. Ainsi, un composant passe de l'état fermé de probabilité $(1-n)$ à l'état ouvert de probabilité n, suivant les coefficients α_n et β_n, eux mêmes dépendant du potentiel de membrane [90]. Si la valeur initiale de n est connue, les valeurs suivantes de n dans le temps sont données par l'équation :

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1-n) - \beta_n n, \tag{5.1}$$

soit $n_\infty = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n}$ et $\tau_n = \dfrac{1}{\alpha_n + \beta_n}$.

n_∞ n'est autre que la valeur de n à l'équilibre et τ_n la constante de temps d'approche de cet équilibre. Tout comme α_n et β_n, ces valeurs dépendent du potentiel de membrane. On peut alors réécrire l'équation décrivant l'évolution de n comme suit.

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau_n}. \tag{5.2}$$

Soit I_K le flux potassique, c'est à dire la quantité d'ions K qui circulent à travers la membrane. Dans le modèle de Hodgkin- Huxley, I_K est donnée par :

$$I_K = n^4 g'_K (V - E_K), \tag{5.3}$$

où V est le potentiel membranaire et E_K le potentiel d'équilibre des ions potassium. Si la conductance est nulle, les ions ne peuvent pas circuler, ce qui implique un courant nul. De plus, si le potentiel membranaire est égal au potentiel d'équilibre de l'ion, il n'y a pas de courant, car il n'y a plus de circulation de l'ion qui a atteint son équilibre.

Hodgkin et Huxley ont utilisé un formalisme similaire pour décrire le courant sodique I_{N_a}. Cependant, dans le cas des ions sodium, il existe un état supplémentaire. En effet, un canal à sodium peut être ouvert et actif, ouvert et inactif, ou fermé. Afin de modifier ces différents états, ils ont considéré qu'un canal sodique pouvait être composé de quatre composants, dont trois contrôlent l'ouverture et la fermeture, tandis que le dernier contrôle l'activation ou l'inactivation. Les trois composants contrôlant l'ouverture et la fermeture ont chacune une probabilité m d'être en position ouverte, tandis que le composant qui contrôle l'activation et l'inactivation a une probabilité h d'être en position active. Ainsi, la probabilité qu'un canal sodique soit ouvert et actif est m^3h. Le modèle de Hodgkin et Huxley traite l'ouverture (m) et l'activation (h) indépendamment. Ces deux processus dépendent du potentiel de membrane. Soit I_{N_a} le flux sodique, c'est à dire la quantité d'ions sodium qui circulent à travers la membrane.

$$I_{N_a} = m^3 h g'_{N_a} (V - E_{N_a}), \tag{5.4}$$

où V est le potentiel de membrane et E_{N_a} le potentiel d'équilibre des ions sodium. Comme pour l'évolution de la variable n des canaux K, la transition de la position ouverte de probabilité m ou fermée de probabilité $(1-m)$ de chaque composant est donnée par les coefficient α_m et β_m.

De même pour h, dont les transitions de la position active de probabilité h à la position inactive de probabilité $(1-h)$ sont données par les coefficients α_h et β_h.

De la même façon que pour n, les évolutions de m et h sont données par les équations différentielles.

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1-m) - \beta_m m = \frac{m_\infty - m}{\tau_m}, \tag{5.5}$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h (1-h) - \beta_h h = \frac{h_\infty - h}{\tau_h}, \tag{5.6}$$

avec $\tau_m = \dfrac{1}{\alpha_m + \beta_m}$, $\tau_h = \dfrac{1}{\alpha_h + \beta_h}$, $m_\infty = \dfrac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m}$ et $h_\infty = \dfrac{\alpha_h}{\alpha_h + \beta_h}$.

Le bilan des charges électriques (voir figure (5.2)) est donné par l'équation :

$$I = C\frac{dV}{dt} + I_{N_a} + I_K + I_L, \tag{5.7}$$

où I_{N_a} est le courant de sodium, I_K le courant de potassium et I_L le courant de fuite qui prend en considération les autres ions.

On a ainsi :

$$I = C\frac{dV}{dt} + m^3 h g'_{Na}(V - E_{N_a}) + n^4 g'_K (V - E_K) + g'_L (V - E_L). \tag{5.8}$$

5.3.2/ MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO

C'est une simplification du modèle de Hodgkin et Huxley. Bien que le modèle de Hodgkin-Huxley soit assez réaliste biophysiquement, seules les projections des trajectoires en quatre dimensions peuvent être observées. Le modèle de Fitzhugh-Nagumo, plus simple [91, 92], permet d'avoir une vue des solutions complètes. Cela permet d'avoir une explication géométrique de phénomènes importants liés à l'excitabilité et aux mécanismes de génération de potentiels d'action [93, 94, 95, 90].

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C}\left[m^3 h g' N_a (V - E_{N_a}) + n^4 g'_K (V - E_K) + g'_L (V - E_L) - I\right]$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{dt} &= \frac{1}{\tau_m(v)}(m_\infty(V) - m), \\
\frac{dn}{dt} &= \frac{1}{\tau_n(v)}(n_\infty(V) - n), \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{\tau_h(v)}(h_\infty(V) - h)\cdot
\end{aligned}$$

Comme nous avons vu précédemment que l'activation du sodium est très rapide, on peut faire l'approximation suivante.

$$m = m_\infty. \tag{5.9}$$

Ainsi m est assimilable à une constante et l'équation différentielle du modèle (H, H) concernant $m(t)$ peut être éliminée. On a remarqué qu'expérimentalement la somme des deux variables h et n est à peu près constante au cours de l'évolution temporelle du potentiel d'action.

$$h_\infty(V) + n_\infty(V) = 0,8. \tag{5.10}$$

Pour la généralisation, on peut noter que :

$$h(V) + an(V) = b \tag{5.11}$$

où a et b sont des constantes. Soit donc une nouvelle variable w combinaison linéaire des deux variables h et n, définie de la manière suivante, et appelée variable de "recouvrement".

$$w(V) = b - h(V) = an(V). \tag{5.12}$$

On a alors :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau_w(v)} \left(w_\infty(V) - w\right). \tag{5.13}$$

Grâce à toutes ces simplifications, les équations de Hodgkin et Huxley se réduisent à deux équations :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\left(g'_{N_a} m_\infty(V)\right)^3 (b - w)\left(V_{N_a} - V\right) + g'_K \left(\frac{w}{a}\right)^4 (V_K - V) + g'_L \left(V_L - V\right) + I, \tag{5.14}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau_w(V)} \left(w_\infty(V) - w\right). \tag{5.15}$$

A partir de certaines observations, Fitzhugh a vu que la V nullcline (c'est à dire la courbe dans l'espace de phase (v, w) décrite quand $\frac{dV}{dt} = 0$) avait la forme d'une fonction cubique et que le w nullcline (c'est à dire $\frac{dw}{dt} = 0$) pouvait être approximée par une droite. Les deux sont dans la région où les variables ont un sens physiologique [89]. Il a alors proposé un modèle de la forme, amélioré par la suite avec Nagumo. Son modèle proposé est de la forme :

$$\dot{V} = V\left(V - \alpha\right)\left(1 - V\right) - w + I, \tag{5.16}$$

$$\dot{w} = \varepsilon\left(V - \gamma w\right). \tag{5.17}$$

Il ressort des modèles de Fitzhugh-Nagumo et de celui d'Hodgkin et Huxley, que le courant transmembranaire qui est dû à la circulation des ions sodium, potassium et calcium

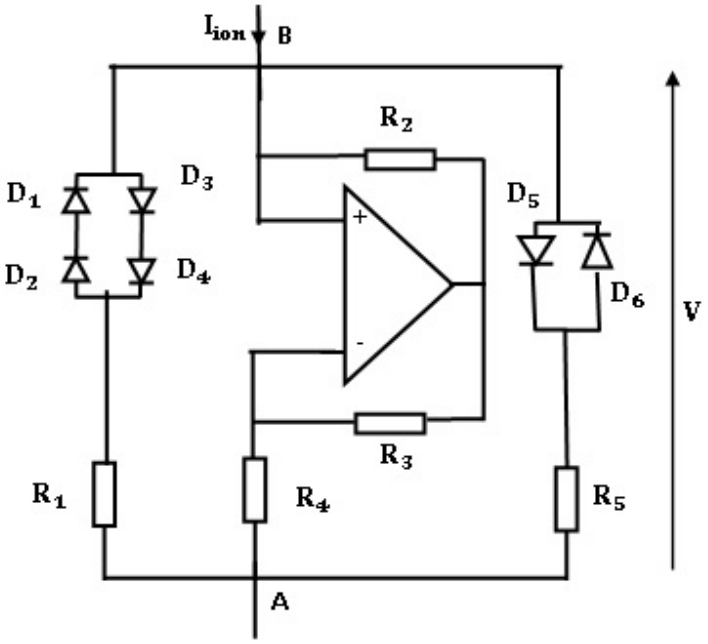


FIGURE 5.3 – Modèle du dipôle non linéaire illustrant le modèle de Fitzhugh-Nagumo.

à travers les canaux dépendant de la tension est un courant non linéaire. Pour le modèle proposé par l'équipe d'électronique non linéaire du LE2i Dijon [95], le dipole (D) visible sur la figure (5.3) est une résistance non linéaire, et le courant qui la traverse vérifie la relation :

$$I_{ion} = \frac{G}{V_b\,(V_b - V_a)} V\,(V - V_a)\,(V - V_b)\,. \tag{5.18}$$

Dans cette expression, le potentiel de repos de la membrane active est nul et les paramètres sont définis comme suit :

- le potentiel d'activation initial du canal sodium est V_a,
- Le potentiel pour lequel le courant total ionique s'annule est V_b,
- La conductance totale du canal est G,
- Le courant qui traverse le condensateur est $I_c = C\dfrac{dV}{dt}$.

5.3.3/ MODÈLE PROPOSÉ POUR LE DIPÔLE NON LINÉAIRE

Pour notre modèle de neurone myélinisé, nous allons construire un dipôle nonlinéaire, permettant de simuler analogiquement l'équation (3.6) caractérisant notre système. Il est représenté sur la figure (5.4). Le suiveur placé à l'entrée permet d'obtenir la tension V_n sans consommer de courant. Donc, le courant qui arrive à l'entrée de ce dipôle est $I_{D,n}$. Passant dans une inductance L_1 située entre des points de potentiel respectif V_n en amont et $V_{S,n}$ en aval, on a la relation :

$$L_1 \frac{dI_{D,n}}{dt} = V_n - V_{S,n}. \tag{5.19}$$

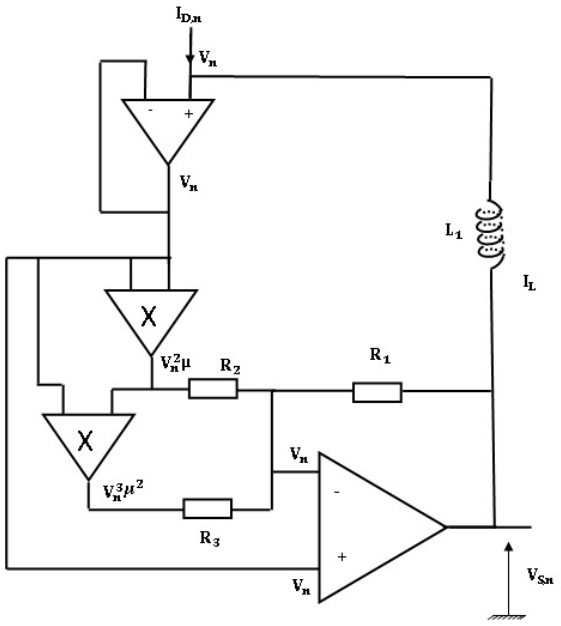


FIGURE 5.4 – -Modèle du dipôle non linéaire .

Nous utilisons également deux multiplicateurs de coefficient μ, c'est-à-dire donnant en sortie $\mu.a.b$, lorsque leurs entrées valent a et b, ainsi qu'un amplificateur opérationnel monté en additionneur/soustracteur. Ainsi, avec les conductances G_1, G_2 et G_3, respectivement inverses des résistances R_1, R_2 et R_3 de la figure (5.4), on obtient $V_{S,n}$, la tension de sortie de ce dipôle par rapport à la masse :

$$V_{S,n} = R_1 V_n (G_1 + G_2 + G_3) - \mu R_1 G_2 V_n^2 - \mu^2 R_1 G_3 V_n^3.$$

D'où :

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_{D,n}}{dt} &= V_n - V_{S,n} \\ &= (1 - R_1 (G_1 + G_2 + G_3)) V_n + \mu R_1 G_2 V_n^2 + \mu^2 R_1 G_3 V_n^3. \end{aligned}$$

Soit :

$$L_1 \frac{dI_{D,n}}{dt} = \alpha_p V_n + \beta_p V_n^2 + \gamma_p V_n^3, \tag{5.20}$$

où α_p, β_p et γ_p dépendent des résistances du schéma. Par exemple, si on prend $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1/G$ et $\mu = 1$, on aura : $\alpha_p = -2$; $\beta_p = \gamma_p = 1$.

Les figures (5.5) et (5.6) montrent la simulation par Multisim de ce dipôle nonlinéaire.

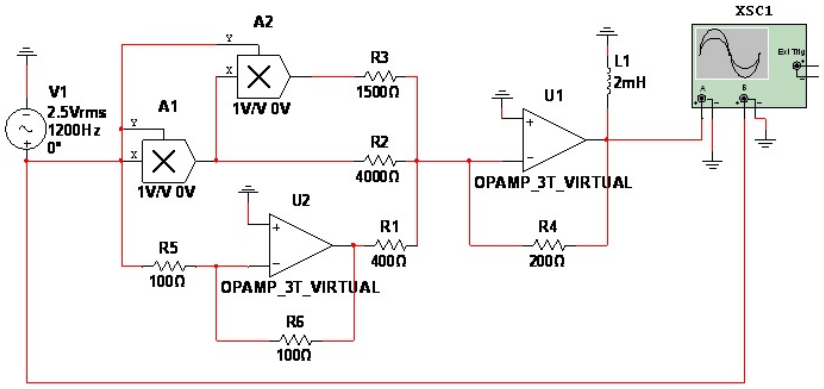


FIGURE 5.5 – Modèle du dipôle non linéaire par multisim .

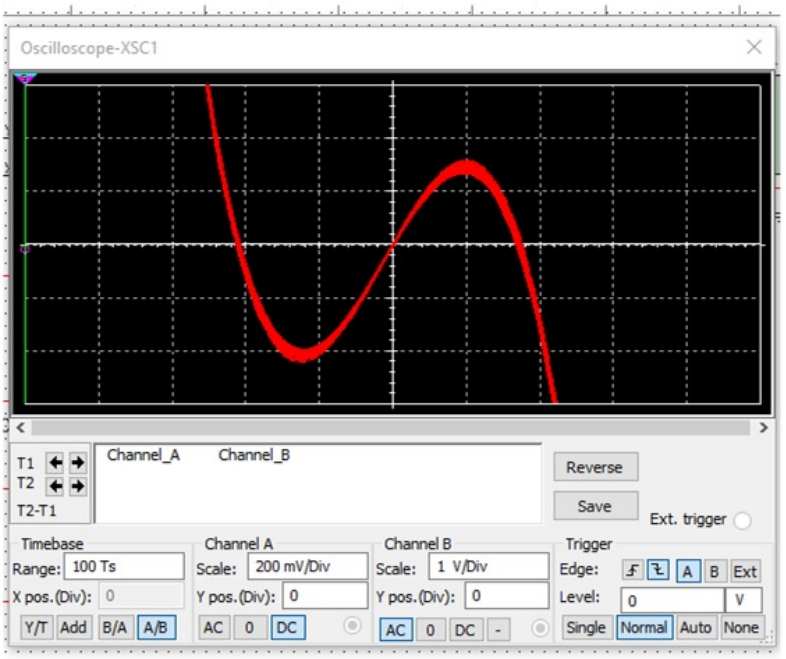


FIGURE 5.6 – Modèle du dipôle non linéaire caractéristique de la tension de l'inductance en fonction de la tension du dipôle .

5.4/ CONSTRUCTION DE LA LIGNE DE TRANSMISSION NON LINÉAIRE

5.4.1/ LIGNE DE TRANSMISSION DIFFUSIVE LINÉAIRE

Un neurone non myélinisé est une cellule nerveuse dépourvue de la couche lipidique qui entoure l'axone. Dans cette cellule nerveuse, l'influx neuronal est fortement atténué ; il ne se propage pas sur une longue distance. Considérons une ligne de transmission

constituée de résistances en série de valeur commune R_1 et couplés par des condensateurs de capacité C en parallèle avec des résistances de valeur commune R_2.

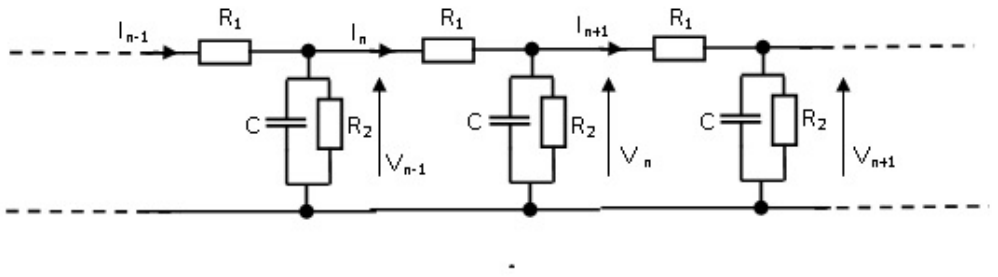


FIGURE 5.7 – Modèle du neurone sans myéline.

En appliquant les lois de Kirchoff, nous avons :

$$I_n - I_{n+1} = C\frac{dV_n}{dt} + \frac{V_n}{R_2}, \tag{5.21}$$

$$I_{n+1} = \frac{V_n - V_{n+1}}{R_1}, \tag{5.22}$$

d'où

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n = R_1 C\frac{dV_n}{dt} + \frac{R_1}{R_2}V_n \tag{5.23}$$

Lorsque les nœuds consécutifs de la ligne sont très rapprochés, nous avons une ligne électrique à constantes réparties et nous pouvons utiliser l'approximation des milieux continus :

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t), \tag{5.24}$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - R_1 C\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{R_1}{R_2}V = 0. \tag{5.25}$$

Pour déterminer la loi des potentiels, nous posons $\xi = x - ut$, ce qui conduit à la nouvelle équation :

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + uR_1 C\frac{dV}{d\xi} - \frac{R_1}{R_2}V = 0. \tag{5.26}$$

Une solution est de la forme :

$$V(x,t) = Ae^{r_1(x-ut)} + Be^{r_2(x-ut)} \tag{5.27}$$

avec $r_1 = \frac{1}{2}\left[-R_1Cu - \sqrt{(R_1Cu)^2 + 4\frac{R_1}{R_2}}\right]$ et $r_2 = \frac{1}{2}\left[-R_1Cu + \sqrt{(R_1Cu)^2 + 4\frac{R_1}{R_2}}\right]$.

Ce potentiel est atténué car r_1 et r_2 sont des nombre réels. Les résistances de valeur commune R_1 montées en série sont donc responsables de l'atténuation du signal. Ce phénomène est observé dans les neurones dépourvus de myéline. Lorsque le neurone est myélinisé, l'influx neuronal se propage sans atténuation. Il est donc intéressant de modéliser une ligne de transmission qui caractérise un neurone myélinisé.

5.4.2/ MODÈLE ÉLECTRONIQUE D'UNE LIGNE DE TRANSMISSION DE DIFFUSION NON LINÉAIRE.

Cette ligne représente le circuit électrique équivalent d'un neurone myélinisé. L'indice n caractérise un noeud actif. Notons la présence du dipôle nonlinéaire D_n présenté au paragraphe (5.3.2.), à la figure (5.3) et décrit par la relation (5.18).

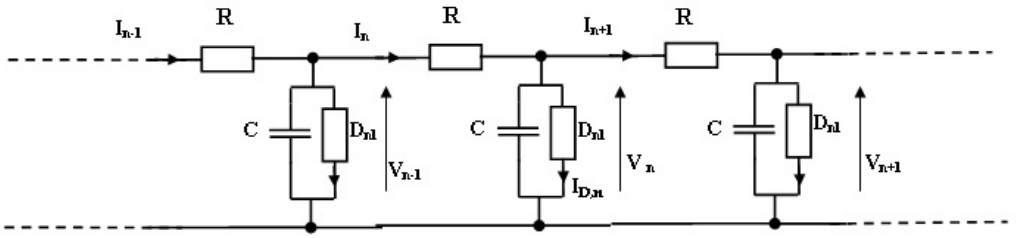


FIGURE 5.8 – Modèle de ligne électrique [95].

— V_n représente le potentiel transmembranaire du neurone au site n.
— Le courant électrique longitudinal qui part du site $n-1$ au site n est I_n.
— Celui qui traverse le dipôle D_{nl} est appelé $I_{D,n}$.
— R_i est la résistance interne de la membrane du corps du neurone.
— R_0 est la résistance extérieure de la membrane du corps du neurone.

Soit R est la résistance équivalente de la portion de la ligne limitée par les sites n et $n+1$, alors :

$$R = R_0 + R_i \tag{5.28}$$

Les lois de Kirchoff nous permettent d'écrire :

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n = R\,(I_n - I_{n+1})\,, \tag{5.29}$$

$$I_n - I_{n+1} = C\frac{dV_n}{dt} + I_{D,n}. \tag{5.30}$$

D'où

$$\frac{dV_n}{dt} + \frac{G}{CV_b\,(V_b - V_a)}V_n\,(V_n - V_a)\,(V_n - V_b) = \frac{1}{RC}\,(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n)\,. \tag{5.31}$$

Si nous supposons que l'espace entre deux noeuds consécutifs est très faible, alors l'approximation des milieux continus donne :

$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \simeq s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ où $x = ns$ avec s la distance qui sépare deux noeuds consécutifs. Par la suite on posera $s = 1$. En posant $a^2 = \frac{s^2}{RC}$ et $b^2 = \frac{G}{CV_b(V_b - V_a)}$; On a :

$$a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = b^2 V (V - V_a)(V - V_b). \tag{5.32}$$

Pour la résolution de cette équation, effectuons le changement de variable suivant : $\xi = x - ut$. On a alors :

$$a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + u \frac{\partial V}{\partial \xi} = b^2 V (V - V_a)(V - V_b). \tag{5.33}$$

Avec $V' = \frac{\partial V}{\partial \xi}$, nous avons :

$$V' \left[a^2 \frac{\partial V'}{\partial V} + u \right] = b^2 \left[V^3 - (V_a + V_b) V^2 + V_a V_b V \right]. \tag{5.34}$$

Cette équation montre que V' est de la forme : $V' = \alpha V^2 + \beta V + \lambda$. En remplaçant V' par cette expression et en procédant par identification selon les puissances de V, nous avons 3 familles de solutions. En effet :

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 a^2 &= b^2, \\ 3\alpha\beta a^2 + \alpha u &= -b^2 (V_a + V_b), \\ a^2\beta^2 + u\beta + 2\alpha\lambda a^2 &= b^2 V_a V_b \\ \text{et } a^2\beta\lambda + u\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de α, β , λ et u sont données dans les trois cas de solutions :

1.

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \\ \alpha &= \pm \frac{b\sqrt{2}}{2a}, \\ \beta &= \pm \frac{b\sqrt{2}}{2a} V_b, \\ u &= \pm ab\sqrt{2} \left(V_a - \frac{V_b}{2} \right), \end{aligned}$$

soit :

$$V(x,t) = - \frac{b\sqrt{2} V_a \exp\left(- \frac{b\sqrt{2}}{2a} (x - ut) \right)}{2a + b\sqrt{2} \exp\left(- \frac{b\sqrt{2}}{2a} (x - ut) \right)} \tag{5.35}$$

2.

$$\begin{aligned}\lambda &= 0,\\ \alpha &= \pm\frac{b\sqrt{2}}{2a},\\ \beta &= \pm\frac{b\sqrt{2}}{2a}V_a,\\ u &= \pm ab\sqrt{2}\left(V_b - \frac{V_a}{2}\right),\end{aligned}$$

soit

$$V(x,t) = -\frac{b\sqrt{2}V_b \exp\left(-\frac{b\sqrt{2}}{2a}(x-ut)\right)}{2a + b\sqrt{2}\exp\left(-\frac{b\sqrt{2}}{2a}(x-ut)\right)} \tag{5.36}$$

3. Pour $\lambda \pm \frac{b\sqrt{2}V_aV_b}{2a}$,

$$\begin{aligned}\alpha &= \pm\frac{b\sqrt{2}}{2a},\\ \beta &= \mp\frac{b\sqrt{2}}{2a}(V_a + V_b),\\ u &= \pm\frac{ab\sqrt{2}}{2}(V_a + V_b),\end{aligned}$$

soit

$$V(x,t) = \frac{V_a + V_b\exp(\rho(x-ut))}{1+\exp(\rho(x-ut))}, \tag{5.37}$$

avec $\rho = \frac{b\sqrt{2}}{2a}(V_a - V_b)$.

Cette onde est représentée sur la figure (5.9). On constate qu'elle est capable de reproduire le front montant du potentiel d'action tel que vu lors de l'étude de la figure (5.1).

5.4.3/ LIGNE DE TRANSMISSION NON LINÉAIRE SANS ATTÉNUATION

Un neurone myélinisé est une cellule nerveuse entourée de gaine de myéline, c'est à dire une couche lipidique qui favorise la propagation de l'influx neuronal sans atténuation. Le modèle du neurone myélinisé peut être représenté par une ligne de transmission où les résistances en parallèle (R_2) sont remplacées par les dipôles non linéaires (D_{nl}) comme étudiés au paragraphe (5.3.3.) et les résistances en série (R_1) sont remplacées par des inductances parfaites (L_1). Pour établir la loi caractérisant l'évolution du signal électrique qui se propage dans cette ligne, nous allons appliquer les lois de Kirchhoff.

I_{D_n} est le courant qui traverse le dipôle non linéaire soumis au potentiel (V_n). Or nous avons :

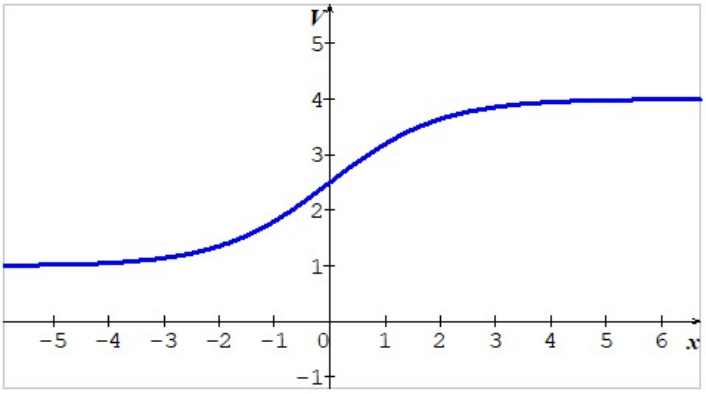


FIGURE 5.9 – Propagation du potentiel de membrane (en grandeurs normalisées) à t fixé et en fonction de x.

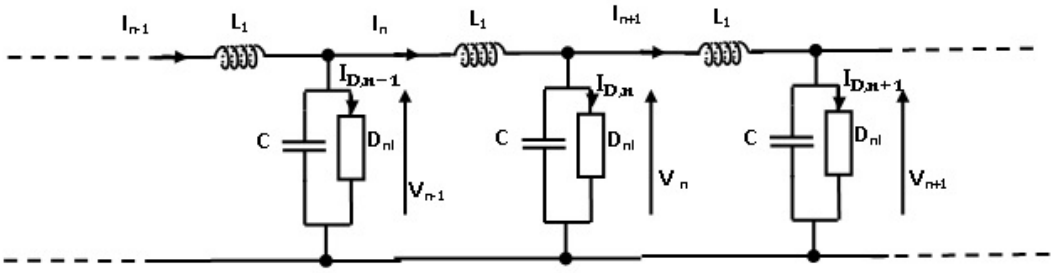


FIGURE 5.10 – Transmission sans atténuation.

$$\begin{aligned} L_1\frac{dI_n}{dt} &= (V_{n-1}-V_n), \\ L_1\frac{dI_{n+1}}{dt} &= (V_n-V_{n+1}), \\ L_1\frac{dI_{D,n}}{dt} &= \alpha_p V_n+\beta_p V_n^2+\gamma_p V_n^3, \\ \text{et } I_n-I_{n+1} &= C\frac{dV_n}{dt}+I_{D,n}. \end{aligned}$$

D'où

$$L_1C\frac{d^2V_n}{dt^2}=V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n-\left(\alpha_pV_n+\beta_pV_n^2+\gamma_pV_n^3\right). \tag{5.38}$$

L'équation caractérisant la propagation du signal dans cette ligne est de la forme :

$$\frac{d^2V_n}{dt^2}=G_2\left(V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n\right)-\omega_0'^2\left(V_n+\alpha V_n^2+\beta V_n^3\right), \tag{5.39}$$

avec $G_2=\dfrac{1}{L_1C}$; $\omega_0'^2=\dfrac{\alpha_p}{L_1C}$; $\alpha=\dfrac{\beta_p}{\alpha_p}$ et $\beta=\dfrac{\gamma_p}{\alpha_p}$.

C'est une équation qui comporte un terme de dispersion de coefficient (G_2) et un terme non linéaire. La dispersion et la non linéarité sont deux phénomènes néfastes à l'onde qui agissent en sens opposés, mais qui se compensent mutuellement pour donner naissance à une onde solitaire solution de l'équation caractérisant cette ligne.

Lorsque les nœuds consécutifs sont très rapprochés, nous pouvons écrire :

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

L'équation caractéristique s'écrit de nouveau :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = G_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \omega_0^2 \left(V + \alpha V^2 + \beta V^3\right). \tag{5.40}$$

Pour la résolution de l'équation caractéristique, nous allons opérer le changement de variable suivant : $\xi = x - ut$, ce qui nous conduit à une équation différentielle à une seule variable de la forme :

$$\left(G_2 - u^2\right) \frac{d^2 V}{d\xi^2} = \omega_0^2 \left(V + \alpha V^2 + \beta V^3\right). \tag{5.41}$$

En posant $\frac{dV}{d\xi} = y$, nous pouvons encore écrire :

$$\left(G_2 - u^2\right) y \frac{dy}{dV} = \omega_0^2 \left(V + \alpha V^2 + \beta V^3\right). \tag{5.42}$$

Quand $G_2 - u^2 < 0$, nous pouvons avoir les solutions pour $4\beta < \alpha^2$:

$$V(x,t) = \frac{2}{-\alpha \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) \sin\left[\left(\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{G_2 - u^2}}\right)(x - ut - x_0)\right]}, \tag{5.43}$$

et

$$V(x,t) = \frac{2}{-\alpha + \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) \cos\left[\left(\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{G_2 - u^2}}\right)(x - ut - x_0)\right]}. \tag{5.44}$$

Nous pouvons remarquer que les signaux qui se propagent dans cette ligne sont des solitons limités par des valeurs $V_{min} = \frac{2}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}$ et $V_{max} = \frac{2}{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}$.

5.4.4/ LIGNE DE TRANSMISSION NON LINÉAIRE AVEC ANHARMONICITÉ ET SUBSTRAT DÉFORMABLE (VOIR FIGURE (5.11))

Cette ligne est représenté par la figure (5.11) où les condensateurs de capacité C sont montés en parallèle et les inductances sont montées en série.

La tension $V_{P,n}$ est obtenue suivant la figure (5.12) où elle dépend de V_n et de V_{n-1}.

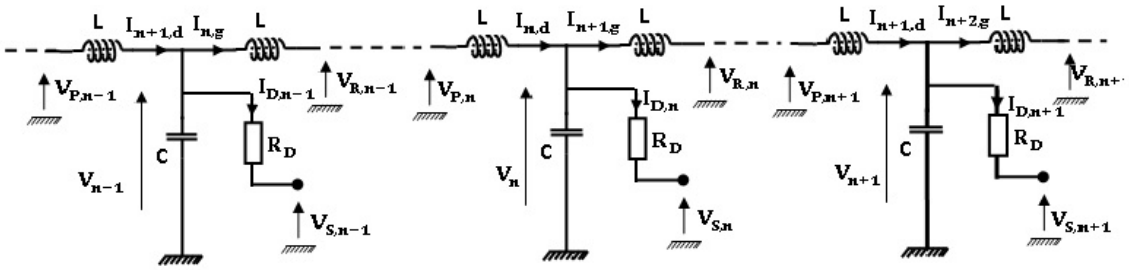


FIGURE 5.11 – Ligne de transmission anharmonique et non linéaire.

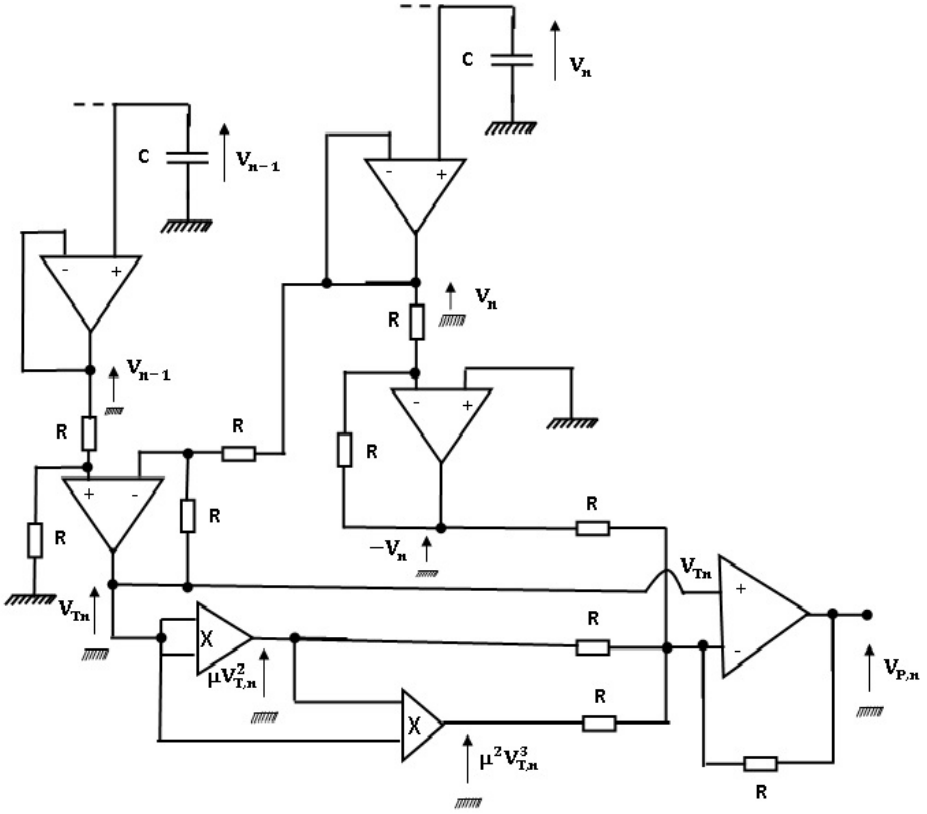


FIGURE 5.12 – Obtention de la tention $V_{P,n}$.

Ce montage est constitué de 2 multiplieurs de tensions, de montages suiveur, inverseur et diviseur de tension électrique. Les résistances du circuit peuvent être différentes. Dans ce cas présent, nous avons attribué la même valeur à chaque résistance. Nous avons les équations suivantes :

$$V_n - \frac{1}{2}V_{n-1} = \frac{1}{2}V_{n-1} - V_{Tn}.$$

Autrement dit :

$$V_{Tn} = V_{n-1} - V_n. \tag{5.45}$$

La loi des courants entrant dans l'amplificateur opérationnel en bas à droite de la figure (5.12) donne :

$$\frac{\mu V_{TN}^2 - V_{TN}}{R} + \frac{\mu^2 V_{TN}^3 - V_{TN}}{R} + \frac{-V_n - V_{TN}}{R} = \frac{V_{TN} - V_{P,n}}{R},$$

d'où

$$V_{P,n} = 4V_{Tn} + V_n - \mu V_{Tn}^2 - \mu^2 V_{Tn}^3.$$

Autrement dit :

$$V_{P,n} = 4(V_{n-1} - V_n) + V_n - \mu(V_{n-1} - V_n)^2 - \mu^2(V_{n-1} - V_n)^3. \tag{5.46}$$

La tension $V_{R,n}$ est obtenue suivant la figure (5.13) où elle dépend de V_n et de V_{n+1}.

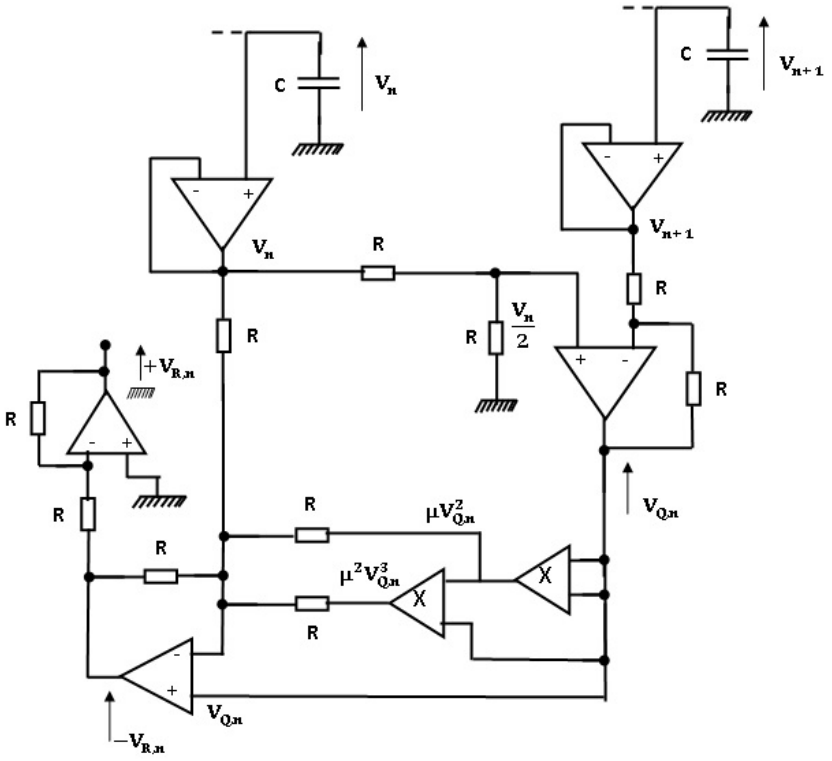


FIGURE 5.13 – Obtention de la tention $V_{R,n}$.

Ce montage est constitué de 2 multiplieurs de tensions, de montages suiveur, inverseur et diviseur de tension électrique. Les résistances du circuit peuvent être différentes. Dans ce cas présent, nous avons attribué la même valeur à chaque résistance. Nous avons les équations suivantes :

$$V_{n+1} - \frac{1}{2}V_n = \frac{1}{2}V_n - V_{Qn},$$

Autrement dit :

$$V_{Qn} = V_n - V_{n+1} \tag{5.47}$$

La loi des courants entrant dans l'amplificateur opérationnel en bas de la figure (5.13) donne :

$$\frac{\mu V_{Qn}^2 - V_{Qn}}{R} + \frac{\mu^2 V_{Qn}^3 - V_{Qn}}{R} + \frac{V_n - V_{Qn}}{R} = \frac{V_{Qn} - (-V_{R,n})}{R},$$

d'où

$$-V_{R,n} = 4V_{Qn} - V_n - \mu V_{Qn}^2 - \mu^2 V_{Qn}^3.$$

Autrement dit

$$-V_{R,n} = 4\left(V_n - V_{n+1}\right) - V_n - \mu\left(V_n - V_{n+1}\right)^2 - \mu^2\left(V_n - V_{n+1}\right)^3. \tag{5.48}$$

La loi des tensions aux bornes des inductances nous permet d'écrire (voir figure 5.11) :

$$L\frac{dI_{n,d}}{dt} = V_{P,n} - V_n = 4\left(V_{n-1} - V_n\right) - \mu\left(V_{n-1} - V_n\right)^2 - \mu^2\left(V_{n-1} - V_n\right)^3, \tag{5.49}$$

et

$$L\frac{dI_{n+1,g}}{dt} = V_n - V_{R,n} = 4\left(V_n - V_{n+1}\right) - \mu\left(V_n - V_{n+1}\right)^2 - \mu^2\left(V_n - V_{n+1}\right)^3. \tag{5.50}$$

Nous remarquons que, puisque les paramètres utilisés sont les mêmes, $I_{n,g} = I_{n,d}$, pour tout n. La loi des nœuds permet d'écrire pour la cellule n :

$$C\frac{dV_n}{dt} + I_{Dn} = I_{n,d} - I_{n+1,g},$$

d'où

$$LC\frac{d^2V_n}{dt^2} + L\frac{dI_{Dn}}{dt} = L\frac{dI_{n,d}}{dt} - L\frac{dI_{n+1,g}}{dt}. \tag{5.51}$$

Avec les équation (5.20),(5.49) et (5.50), nous déduisons la relation suivante, identique à l'équation (3.6) du troisième chapitre.

$$\begin{aligned}\frac{d^2V_n}{dt^2} &= G_2\left(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n\right) + G_3\left[\left(V_{n+1} - V_n\right)^2 - \left(V_n - V_{n-1}\right)^2\right] \\ &+G_4\left[\left(V_{n+1} - V_n\right)^3 - \left(V_n - V_{n-1}\right)^3\right] - \omega_0'^2\left[V_n + \alpha V_n^2 + \beta V_n^3\right],\end{aligned} \tag{5.52}$$

avec $G_2 = \dfrac{4}{LC}$, $G_3 = \dfrac{\mu}{LC}$, $G_4 = -\dfrac{\mu^2}{LC}$, $\omega_0'^2 = \dfrac{\alpha_p}{L_1 C}$, $\alpha = \dfrac{\beta_p}{\omega_0'^2}$ et $\beta = \dfrac{\gamma_p}{\omega_0'^2}$

Nous remarquons que la non linéarité des dipôles montés en série dans la ligne est responsable de l' anharmonicité de la ligne ; l'équation caractérisant la propagation du signal électrique dans cette ligne est analogue aux équations obtenues pour la chaîne

de pendules couplées et à celles du transfert de protons dans les systèmes moléculaires avec liaison hydrogène. Les solutions de cette équation (3.6) ont été obtenues lors de son étude au chapitre 3. A partir de ces études, nous allons utiliser cette ligne pour construire un super-réseau qui simule un neurone myélinisé.

5.4.5/ CONSTRUCTION D'UN SUPER-RÉSEAU SIMULANT UN NEURONE MYÉLINISÉ

Les super-réseaux sont en général des réseaux qui possèdent plusieurs bandes de fréquence, constitués de motifs répartis de façon alternative. Pour la construction de notre super-réseau, nous allons considérer un cas particulier afin de mettre en place une méthode d'analyse. Ici, nous remplaçons les condensateurs de capacité (C) par une série de (n) condensateurs de capacité (C_1), suivie d'une autre série de (p) condensateurs de capacité (C_2) tel que $C_2 = 2C_1$, et puis on recommence la même répartition en alternant les séries des condensateurs. Nous avons donc la ligne suivante voir figure (5.14) avec n cellules pour la première série et p cellules pour la deuxième.

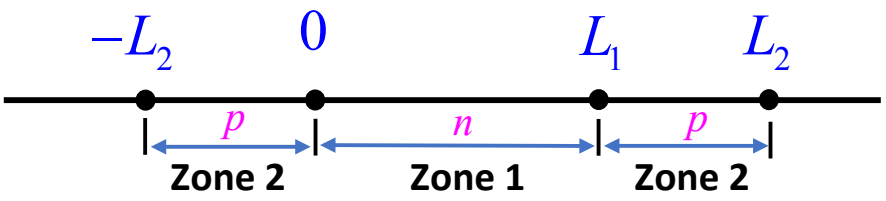


FIGURE 5.14 – Super-réseau non linéaire.

Les équations caractérisant l'évolution de l'onde sont données pour les premières séries (le 1 signifie première série) :

$$\begin{aligned} C_1\frac{d^2V_{i,1}}{dt^2} &= a_1\left(V_{i+1,1}+V_{i-1,1}-2V_{i,1}\right)+a_2\left[\left(V_{i+1,1}-V_{i,1}\right)^2-\left(V_{i,1}-V_{i-1,1}\right)^2\right] \\ &+a_3\left[\left(V_{i+1,1}-V_{i,1}\right)^3-\left(V_{i,1}-V_{i-1,1}\right)^3\right]-b_1V_{i,1}-b_2V_{i,1}^2-b_3V_{i,1}^3 \end{aligned} \tag{5.53}$$

De même pour la deuxième série (le 2 signifie deuxième série) :

$$\begin{aligned} C_2\frac{d^2V_{i,2}}{dt^2} &= a_1\left(V_{i+1,2}+V_{i-1,2}-2V_{i,2}\right)+a_2\left[\left(V_{i+1,2}-V_{i,2}\right)^2-\left(V_{i,2}-V_{i-1,2}\right)^2\right] \\ &+a_3\left[\left(V_{i+1,2}-V_{i,2}\right)^3-\left(V_{i,2}-V_{i-1,2}\right)^3\right]-b_1V_{i,2}-b_2V_{i,2}^2-b_3V_{i,2}^3 \end{aligned} \tag{5.54}$$

La relation de dispersion linéaire est obtenue en posant :

$$V_n(x,t) = e^{-j\omega t}\varphi(n). \tag{5.55}$$

A partir des équation (5.53) et (5.54), nous avons :

$$-\omega^2C_1\varphi(i,1) = a_1\left[\varphi(i+1,1)+\varphi(i-1,1)-2\varphi(i,1)\right]-b_1\varphi(i,1), \tag{5.56}$$

et

$$-2\omega^2 C_1\varphi(i,2) = a_1\left[\varphi(i+1,2)+\varphi(i-1,2)-2\varphi(i,2)\right]-b_1\varphi(i,2). \tag{5.57}$$

En utilisant l'approximation des milieux continus, le Laplacien discret s'écrit

$$\varphi(i+1,1)+\varphi(i-1,1)-2\varphi(i,1)\longrightarrow\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x), \tag{5.58}$$

et

$$\varphi(i+1,2)+\varphi(i-1,2)-2\varphi(i,2)\longrightarrow\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x). \tag{5.59}$$

En $L = L_1 + L_2$, on retombe sur le même motif qu'en $x = 0$. (période du super-réseau). Ainsi : entre $0 < x < L_1$, on a :

$$-\omega^2 C_1\varphi(x) = a_1\frac{d^2\varphi}{dx^2}-b_1\varphi(x), \tag{5.60}$$

entre $L_1 < x < L_1 + L_2$, on a :

$$-2\omega^2 C_1\varphi(x) = a_1\frac{d^2\varphi}{dx^2}-b_1\varphi(x). \tag{5.61}$$

On a une équation du type Hill - Brillouin - Parodi [96].

D'après le théorème de Floquet, $\varphi(x)$ a comme expression :

$$\varphi(x) = D_1\alpha(x)e^{\mu x}+D_2\beta(x)e^{-\mu x}, \tag{5.62}$$

où μ est un "vecteur d'onde" a priori complexe, D_1 et D_2 sont des constantes quelconques. $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions périodiques de période $L = L_1 + L_2$. Alors, $\alpha(x+L) = \alpha(x)$ et $\beta(x+L) = \beta(x)$. On simplifie en prenant $D_1 = 1$ et $D_2 = 0$. Alors $\varphi(x) = \alpha(x)e^{\mu x}$. Nous remarquons que $\varphi(x-L) = \alpha(x-L)e^{\mu(x-L)} = \alpha(x)e^{\mu x}e^{-\mu L} = \varphi(x)e^{-\mu L}$.

A partir de (5.61), nous avons :

$$\varphi(x) = Ae^{\chi_1 x}+Be^{-\chi_1 x} \tag{5.63}$$

avec $\chi_1^2 = \dfrac{b_1-\omega^2 C_1}{a_1}$.

A partir de (5.62), nous avons :

$$\varphi(x) = Ce^{\chi_2 x}+De^{-\chi_2 x} \tag{5.64}$$

avec $\chi_2^2 = \dfrac{b_1-2\omega^2 C_1}{a_1}$.

En tenant compte des conditions de continuité de $\varphi(x)$, et de sa dérivée première, en $x = 0$ et $x = L_1$, nous avons :

$$\begin{aligned} A + B - C - D &= 0, \\ A\chi_1 - B\tau_1 - C\chi_2 + D\chi_2 &= 0, \\ Ae^{\mu}L.e^{-\chi_1 L_2} + Be^{\mu}L.e^{\chi_1 L_2} - C.e^{-\chi_2 L_1} - D.e^{-\chi_2 L_1} &= 0, \\ A\chi_1 e^{\mu}L.e^{-\chi_1 L_2} - B\chi_1 e^{\mu}L.e^{\chi_1 L_2} - C\chi_2.e^{\chi_2 L_1} + D\chi_2 e^{-\chi_2 L_1} &= 0\cdot \end{aligned}$$

La relation de dispersion est obtenue en posant que le déterminant du système formé par ces quatre équations en A, B, C et D est nul. Ainsi :

$$\cosh \mu L = \cosh \chi_1 L_2 \cosh \chi_2 L_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1}\right)\sinh \chi_1 L_2 \sinh \chi_2 L_1 \tag{5.65}$$

où $\dfrac{\chi_1}{\chi_2} = \sqrt{\dfrac{b_1 - \omega^2 C_1}{b_1 - 2\omega^2 C_1}}$ et $\dfrac{\chi_2}{\chi_1} = \sqrt{\dfrac{b_1 - 2\omega^2 C_1}{b_1 - \omega^2 C_1}}$.

χ_1^2 est négatif si $\omega^2 > \dfrac{b_1}{C_1} = \omega_0^2$, alors χ_2^2 est aussi négatif. On pose $X_1^2 = -\chi_1^2 = \dfrac{C_1}{a_1}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$, ainsi que $X_2^2 = -\chi_2^2 = \dfrac{C_1}{a_1}\left(2\omega^2 - \omega_0^2\right)$. Alors $\sinh(\chi_1 L_2)$ devient $\sinh(iX_1 L_2) = i\sin(X_1 L_2)$, puis $\sinh(\chi_2 L_1)$ devient $\sinh(iX_2 L_1) = i\sin(X_2 L_1)$. De même, $\cosh(\chi_1 L_2)$ devient $\cos(X_1 L_2)$ et $\cosh(\chi_2 L_1)$ devient $\cos(X_2 L_1)$.

On a alors :

$$\cosh \mu L = \cos(X_1 L_2)\cos(X_2 L_1) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega^2 - \omega_0^2}} + \sqrt{\frac{2\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}\right)\sin(X_1 L_2)\sin(X_2 L_1)\cdot$$

Le second membre est borné pour toutes les valeurs de ω. Donc $\cosh \mu L$ est en fait un cosinus et $\mu = ik$, ce qui veut dire que $\cosh \mu L = \cos kL$ et nous avons la relation de dispersion :

$$\cos(kL) = \cos(X_1 L_2)\cos(X_2 L_1) - \frac{1}{2}\frac{3\omega^2 - 2\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(2\omega^2 - \omega_0^2\right)}}\sin(X_1 L_2)\sin(X_2 L_2)\,. \tag{5.66}$$

La caractéristique de la relation de dispersion sera tracée pour $L_2 = \dfrac{1}{10}L$ et $L_1 = \dfrac{9}{10}L$, ce qui est plus proche de la réalité des neurones myélinisés, où la zone de largeur L_2 peut être assimilée aux nœuds de Ranvier (voir figure 5.15). De plus, nous choisissons $L = 20$.

A partir de $\omega \geqslant \omega_0$, l'expression sous le radical est bien positive, on va avoir une propagation, sauf pour des gaps à k multiple de $\dfrac{\pi}{L_1 + L_2}$. Alors, $\cos kL = -1$ et :

$$-1 = \cos(X_1 L_2)\cos(X_2 L_1) - \frac{1}{2}\frac{3\omega^2 - 2\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(2\omega^2 - \omega_0^2\right)}}\sin(X_1 L_2)\sin(X_2 L_2)\,, \tag{5.67}$$

ce qui conduit à des valeurs de ω qui sont les bords des gaps. Ainsi, pour le premier de ces gaps, nous trouvons numériquement : ω_1^- et ω_1^+ tel que : $\omega_1^- < \omega_0 < \omega_1^+$

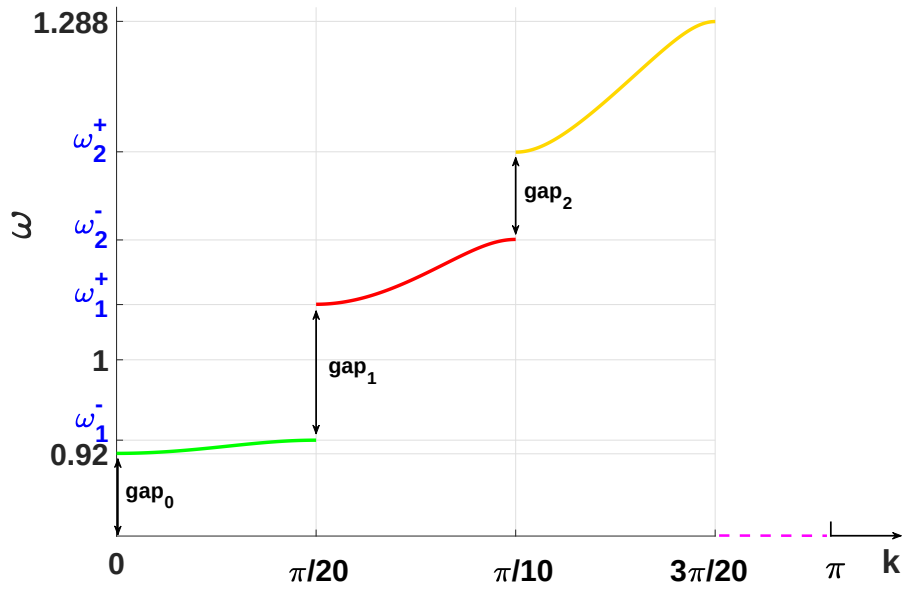


FIGURE 5.15 – Courbe de dispersion linéaire d'une ligne de transmission non linéaire avec anharmonicité et substrat déformable montrant l'ouverture des intervalles de gap (période du super-réseau). Paramètres : $L_2 = \frac{1}{10}L$, $L_1 = \frac{9}{10}L$, $\omega_0 = 1$ et $L = 20$. $\omega_1^- \simeq 0.9316$, $\omega_1^+ \simeq 1.047$, $\omega_2^- \simeq 1.102$ et $\omega_2^+ \simeq 1.77$

5.5/ CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de caractériser le neurone biologique par la nature du signal électrique qui s'y propage, encore appelé influx neuronal. C'est un signal périodique sans atténuation le long du neurone myélinisé. Nous avons examiné quelques modèles électroniques du neurone sans termes d'anharmonicité. Nous avons construit un super-réseau où chaque tronçon comporte une série d'éléments. L'équation caractérisant chaque tronçon est celle qui a été résolue au cours de l'étude d'une ligne de transmission non linéaire. Nous avons vu que cette équation admet plusieurs fonctions périodiques parmi lesquelles des compactons. La richesse dynamique des équations (5.53) et (5.54) avec des termes a_2, a_3, b_2 et b_3 avec les outils développés au chapitre 3 va ouvrir des perspectives pour comprendre comment la propagation va se passer, sans doute au voisinage du gap, mais le manque de temps ne nous a pas permis de développer davantage cette partie.

6

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système non linéaire plongé dans un potentiel de substrat déformable avec des interactions anharmoniques et modélisé par une équation aux dérivées partielles. Le premier objectif de cette thèse était de montrer l'apport de l'anharmonicité et de la déformabilité du potentiel de substrat sur les phénomènes nouvellement observés tel que les nouvelles ondes comme les compactons, les cups, les kinks et antikinks ainsi que la variation de l'amplitude seuil provoquant le phénomène de bistabilité sur la transmissivité du système. Après avoir illustré les propriétés de notre système, le second objectif était de les utiliser pour construire un super-réseau électrique dont chaque tronçon obéit aux équations caractéristiques, l'ensemble permettant de simuler un neurone myélinisé.

Nous avons proposé un schéma de ligne de transmission non linéaire où les signaux représentant les informations pouvaient se propager comme dans un neurone myélinisé. Dans un premier temps, nous avons étudié les systèmes non linéaires dont les caractéristiques sont semblables à celles de notre ligne de transmission. Nous avons examiné la chaîne de pendules couplés, le transfert des protons dans les systèmes moléculaires à liaison hydrogène et la ligne électrique non linéaire. Nous avons noté des termes de dispersion, de non linéarité et d'anharmonicité dans ces systèmes. Il nous paru intéressant de chercher les solutions de ces équations caractéristiques et d'apprécier l'influence du paramètre responsable de l'anharmonicité. La détermination des solutions a conduit à une équation de Schrodinger non linéaire et à une relation de dispersion délimitant l'intervalle des fréquences possibles. Nous avons utilisé la méthode de bifurcation pour sa résolution en traçant les portraits de phase. Les solutions de l'équation de Schrodinger ont été obtenues pour la fréquence minimale du système (gap inférieur) et ensuite pour les fréquences à l'intérieur de la bande passante. Nous avons obtenu une variété de solutions solitons parmi lesquelles les compactons. Après avoir déterminé les types de solutions de l'équation caractéristique de la ligne, il a été intéressant d'étudier comment un tronçon de ligne nonlinéaire pouvait transmettre un signal. Pour cela, nous avons envoyé un signal d'un milieu linéaire vers un tronçon de la ligne non linéaire de longueur finie, ensuite, nous avons déterminé la valeur du signal de sortie du milieu non linéaire. Cela nous a permis de déterminer la transmissivité du système qui est le rapport de l'amplitude du signal de sortie sur celui du signal d'entrée. L'expression de la transmissivité a montré qu'elle dépend du facteur d'anharmonicité du système et que l'amplitude de l'onde incidente qui provoque la bistabilité augmente avec le coefficient d'anharmonicité.

A partir de ces études théoriques, nous avons conçu un tronçon de ligne obéissant tout d'abord à son équation caractéristique, avec un élément en parallèle qui est un dipôle non

linéaire. Nous avons utilisé le logiciel de simulation Multisim pour réaliser ce dipôle non linéaire. Le super-réseau a été obtenu en alternant différents tronçons avec des capacités C_1 et C_2 différentes dans ces tronçons. Nous avons montré qu'il y a propagation avec des gaps à $k = \frac{n \cdot \pi}{L_1 + L_2}$. La richesse dynamique des équations (5.53) et (5.54) avec des termes en a_2, a_3, b_2 et b_3, et avec les outils développés au chapitre 3, va ouvrir des perspectives pour comprendre comment la propagation sans doute au voisinage du gap, mais le manque de temps ne nous a pas permis de développer davantage cette partie.

Ce travail permet d'envisager de nombreuses applications, comme des travaux de modélisation et de simulation des systèmes physiques tels que :

- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la propagation du signal dans une chaîne de protéines,
- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la propagation du signal à la surface des eaux peu profondes,
- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la dynamique de l'ADN,
- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la propagation des ondes internes en océanographie,
- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la propagation des ondes de pression sanguine,
- Le modèle électronique de la ligne caractérisant la propagation des onde sismiques.

PRODUCTION SCIENTIFIQUE

REVUES INTERNATIONALES INDEXÉES

A. S. Tchakoutio Nguetcho, G. M. Nkeumaleu and J. M. Bilbault, “Behavior of gap solitons in anharmonic lattices”, Phys. Rev. E 96 (2017), 022207 – 1 to 12. DOI : https ://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.022207.

CONFÉRENCES INTERNATIONALES À COMITÉ DE LECTURE

- G. M. Nkeumaleu, A. S. Tchakoutio Nguetcho, and J. M. Bilbault, ”Modulated-wave solutions for an anharmonic lattice”. AIP Conference Proceedings 1978, 470078 (2018) ; https ://doi.org/10.1063/1.5044148.

- G. M. Nkeumaleu, A. S. Tchakoutio Nguetcho, and J. M. Bilbault, ”Wave propagation modelling in shallow water with an entire family of shallow water wave equations”.”De-Freezing the Anomalies of Fluid Dynamics and Aerodynamics”. 3rd International Conference on Fluid Dynamics & Aerodynamics. October 25-26, 2018 — Berlin, Germany.

- A. S. Tchakoutio Nguetcho, G. M. Nkeumaleu and J. M. Bilbault, “Modulated-wave solutions for a discrete nonlinear electrical transmission line”. ICNAAM 2017 (15th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics). ICNAAM 2017, 25-30 September 2017, Thessaloniki, Greece.

- G. M. Nkeumaleu, A. S. Tchakoutio Nguetcho and J. M. Bilbault, “Modulated-wave solutions for an anharmonic lattice”. Topological problems of nonlinear wave physics, (NWP-2017), 22-28 July, 2017, Moscow – St. Petersburg, Russia.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Y. Han, B. Özyilmaz, Y. Zhang, and P. Kim. Energy band-gap engineering of graphene nanoribbons. *Physical Review Letters*, 98(20), May 2007.

[2] T. Dauxois, M. Peyrard, and A. R. Bishop. Entropy-driven DNA denaturation. *Physical Review E*, 47(1) :R44, Jan 1993.

[3] M. Joyeux, S. Buyukdagli, and Mi. Sanrey. $1/f$ fluctuations of DNA temperature at thermal denaturation. *Physical Review E*, 75(6) :061914, Jun 2007.

[4] D. C. Rotaru, H. Yoshino, D. A. Lewis, G. B. Ermentrout, and G. Gonzalez-Burgos. Glutamate receptor subtypes mediating synaptic activation of prefrontal cortex neurons : Relevance for schizophrenia. *Journal of Neuroscience*, 31(1) :142, Jan 2011.

[5] M. Joyeux and S. Buyukdagli. Dynamical model based on finite stacking enthalpies for homogeneous and inhomogeneous DNA thermal denaturation. *Physical Review E*, 72(5) :051902, Nov 2005.

[6] J. B. Bassingthwaighte. Strategies for the physiome project. *Annals of Biomedical Engineering*, 28(8) :1043, Aug 2000.

[7] A. S. Tchakoutio Nguetcho, Jibin Li, and J. M. Bilbault. Bifurcations of phase portraits of a singular nonlinear equation of the second class. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8) :2590, Aug 2014.

[8] U. Dehlinger. Zur theorie der rekristallisation reiner metalle. *Annalen der Physik*, 394(7) :749, 1929.

[9] J. Paturej, A. Milchev, V. G. Rostiashvili, and T. A. Vilgis. Thermal degradation of unstrained single polymer chain : Non-linear effects at work. *The Journal of Chemical Physics*, 134(22) :224901, Jun 2011.

[10] Z. D. Li, P. B. He, L. Li, J. Q. Liang, and W. M. Liu. Magnetic soliton and soliton collisions of spinor bose-einstein condensates in an optical lattice. *Physical Review A*, 71(5) :053611, May 2005.

[11] A. Scott. *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Routledge, 2004.

[12] Y. Chen, X. Ai, and C. A. Marianetti. First-principles approach to nonlinear lattice dynamics : Anomalous spectra in PbTe. *Physical Review Letters*, 113(10) :105501, Sep 2014.

[13] M. Peyrard and T. Dauxois. *Physiques des solitons (French Edition)*. EDP SCIENCES, 2004.

[14] K. Yoshino, T. Nomura, K. Pakdaman, and S. Sato. Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models. *Physical Review E*, 59(1) :956, Jan 1999.

[15] K. Pakdaman. Periodically forced leaky integrate-and-fire model. *Physical Review E*, 63(4) :041907, Mar 2001.

[16] O. M. Braun and Yuri S. Kivshar. *The Frenkel-Kontorova Model*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[17] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[18] G. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics, Fourth Edition (Optics and Photonics)*. Academic Press, 2006.

[19] A. Milchev. Solitary waves in a frenkel-kontorova model with non-convex interactions. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 41(2) :262, Mar 1990.

[20] M. Toda. *Theory of Nonlinear Lattices*. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[21] A. S. Tchakoutio Nguetcho, Jibin Li, and J. M. Bilbault. Global dynamical behaviors in a physical shallow water system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 36 :285, Jul 2016.

[22] A. S. Tchakoutio Nguetcho, G. M. Nkeumaleu, and J. M. Bilbault. Behavior of gap solitons in anharmonic lattices. *Physical Review E*, 96(2) :022207, Aug 2017.

[23] G. Agrawal Y. S. Kivshar. *Optical Solitons*. Elsevier S&T, 2003.

[24] O. M. Braun and Y. S. Kivshar. Nonlinear dynamics of the frenkel–kontorova model. *Physics Reports*, 306(1) :1, Dec 1998.

[25] M. C. Garnier. La propagation du message nerveux. Cours de sciences de la nature et la vie pour Diplome d'Accès aux Etudes Universitaires (DAEU), chapitre 2 de la partie 4 : Système nerveux.

[26] V. B. Kazantsev, A. S. Tchakoutio Nguetcho, S. Jacquir, S. Binczak, and J. M. Bilbault. Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold. *Neurocomputing*, 83 :205, Apr 2012.

[27] A. S. Tchakoutio Nguetcho and T. C. Kofane. Soliton patterns and breakup thresholds in hydrogen-bonded chains. *The European Physical Journal B*, 57(4) :411, Jun 2007.

[28] E. Kengne, A. Lakhssassi, and W. M. Liu. Modeling of matter-wave solitons in a nonlinear inductor-capacitor network through a gross-pitaevskii equation with time-dependent linear potential. *Physical Review E*, 96(2) :022221, Aug 2017.

[29] I. Chochliouros and J. Pouget. Transport properties in a hydrogen-bonded chain model including dipole-dipole interactions. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 7(46) :8741, Nov 1995.

[30] R. Mefougue, P. Woafo, and T.C. Kofane. Motion of two-component soliton in a discrete hydrogen-bonded chain. *Solid State Communications*, 86(6) :393, May 1993.

[31] V. J. Sánchez-Morcillo, N. Jiménez, J. Chaline, A. Bouakaz, and S. Dos Santos. Spatio-temporal dynamics in a ring of coupled pendula : Analogy with bubbles. In *Nonlinear Systems and Complexity*, page 251. Springer International Publishing, Oct 2013.

[32] J. Chaline, N. Jiménez, A. Mehrem, A. Bouakaz, S. Dos Santos, and Víctor J. Sánchez-Morcillo. Macroscopic acousto-mechanical analogy of a microbubble. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(6) :3600, Dec 2015.

[33] M. Peyrard and M. Remoissenet. Solitonlike excitations in a one-dimensional atomic chain with a nonlinear deformable substrate potential. *Physical Review B*, 26(6) :2886, Sep 1982.

[34] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. *Studies of nonlinear problems. I.* Los Alamos report LA-1940, published later in Collected Papers of Enrico Fermi, E. Segré (Ed.) (University of Chicago Press, Chicago 1965) ; also in Nonlinear Wave Motion, Newell A. C. Ed., Lecture in Applied Mathematics 15 (AMS, Providence, Rhode Island, 1974) ; also in The Many-Body Problem, Mattis C. C. Ed. (World Scientific, Singapore, 1993, 1955.

[35] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6) :240, Aug 1965.

[36] T. Itoh C. Caloz. *Electromagnetic Metamaterials : Transmission Line Theory and Microwave Applications*. JOHN WILEY & SONS INC, 2005.

[37] A. S. Reyna, E. Bergmann, P. F. Brevet, and C. B. de Araújo. Nonlinear polarization instability in cubic-quintic plasmonic nanocomposites. *Optics Express*, 25(18) :21049, Aug 2017.

[38] P. Maniadis, A. V. Zolotaryuk, and G. P. Tsironis. Existence and stability of discrete gap breathers in a diatomic β fermi-pasta-ulam chain. *Physical Review E*, 67(4) :046612, Apr 2003.

[39] M. Saha and A. K. Sarma. Modulation instability in nonlinear metamaterials induced by cubic–quintic nonlinearities and higher order dispersive effects. *Optics Communications*, 291 :321, Mar 2013.

[40] G. Huang and B. Hu. Asymmetric gap soliton modes in diatomic lattices with cubic and quartic nonlinearity. *Physical Review B*, 57(10) :5746, Mar 1998.

[41] S. Dusuel, P. Michaux, and M. Remoissenet. From kinks to compactonlike kinks. *Physical Review E*, 57(2) :2320, Feb 1998.

[42] M. Eleftheriou, B. Dey, and G. P. Tsironis. Compactlike breathers : Bridging the continuous with the anticontinuous limit. *Physical Review E*, 62(5) :7540, Nov 2000.

[43] M. A. Agüero and M. J. Paulin. Solitonic structures in a nonlinear model with interparticle anharmonic interaction. *Physical Review E*, 63(4) :046606, Mar 2001.

[44] S. Flach, A. E. Miroshnichenko, and M. V. Fistul. Wave scattering by discrete breathers. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13(2) :596, Jun 2003.

[45] S. Flach and A. Gorbach. Discrete breathers in fermi–pasta–ulam lattices. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(1) :015112, Mar 2005.

[46] L. S. Brizhik, A. P. Chetverikov, W. Ebeling, G. Röpke, and M. G. Velarde. Bound states of electrons in harmonic and anharmonic crystal lattices. In *Quodons in Mica*, page 291. Springer International Publishing, 2015.

[47] A. S. Tchakoutio Nguetcho, J. R. Bogning, D. Yemele, and T. C. Kofane. Kink compactons in models with parametrized periodic double-well and asymmetric substrate potentials. *Chaos, Solitons & Fractals*, 21(1) :165, Jul 2004.

[48] Jibin Li, F. Chen, and A. S. Tchakoutio Nguetcho. Bifurcations and exact solutions in a model of hydrogen-bonded-chains. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(04) :1550062, Apr 2015.

[49] A. S. Tchakoutio Nguetcho and E. Wamba. Effects of nonlinearity and substrate's deformability on modulation instability in NKG equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 50 :271, Sep 2017.

[50] B. Dey, M. Eleftheriou, S. Flach, and G. P. Tsironis. Shape profile of compact-like discrete breathers in nonlinear dispersive lattice systems. *Physical Review E*, 65(1) :017601, Dec 2001.

[51] B. A. Malomed and A. Milchev. Interaction of dislocations with a local defect in an atomic chain with a nonconvex interparticle potential. *Physical Review B*, 41(7) :4240, Mar 1990.

[52] S. A. Kiselev, S. R. Bickham, and A. J. Sievers. Anharmonic gap modes in a perfect one-dimensional diatomic lattice for standard two-body nearest-neighbor potentials. *Physical Review B*, 48(18) :13508–13511, Nov 1993.

[53] S. A. Kiselev, S. R. Bickham, and A. J. Sievers. Anharmonic gap mode in a one-dimensional diatomic lattice with nearest-neighbor born-mayer-coulomb potentials and its interaction with a mass-defect impurity. *Physical Review B*, 50(13) :9135, Oct 1994.

[54] B. Z. Essimbi and I. V. Barashenkov. Spatially localized voltage oscillations in an electrical lattice. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 35(12) :1438, Jun 2002.

[55] L. Zhang, L. Chen, and X. Huo. The effects of horizontal singular straight line in a generalized nonlinear klein-gordon model equation. *Nonlinear Dynamics*, 72(4) :789, Jan 2013.

[56] Jibin Li and H. Dai. *On the study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equations : Dynamical System Approach*. Science Press, Beijing, 2006.

[57] Jibin Li and G. Chen. Exact traveling wave solutions and their bifurcations for the kudryashov-sinelshchikov equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(05) :1250118, May 2012.

[58] Jibin Li and L. Jiang. Exact solutions and bifurcations of a modulated equation in a discrete nonlinear electrical transmission line (i). *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(01) :1550016, Jan 2015.

[59] P. B. Ndjoko, J. M. Bilbault, S. Binczak, and T. C. Kofane. Compact-envelope bright solitary wave in a DNA double strand. *Physical Review E*, 85(1) :101103, Jan 2012.

[60] P. Rosenau and S. Schochet. Almost compact breathers in anharmonic lattices near the continuum limit. *Physical Review Letters*, 94(4) :045503, Feb 2005.

[61] A. Tsurui. Wave modulations in anharmonic lattices. *Progress of Theoretical Physics*, 48(4) :1196, Oct 1972.

[62] F. Kenmogne and D. Yemélé. Exotic modulated signals in a nonlinear electrical transmission line : odulated peak solitary wave and gray compacton. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(1) :21, Jan 2012.

[63] F. Kenmogne and D. Yemélé. Bright and peaklike pulse solitary waves and analogy with modulational instability in an extended nonlinear schrödinger equation. *Physical Review E*, 88(4) :043204, Oct 2013.

[64] E. Kengne and A. Lakhssassi. Analytical studies of soliton pulses along two-dimensional coupled nonlinear transmission lines. *Chaos, Solitons & Fractals*, 73 :191, Apr 2015.

[65] Abdourahman and E. Kengne. Generation of nonlinear modulated waves in a modified noguchi electrical transmission network. *Chaos, Solitons & Fractals*, 92 :1, Nov 2016.

[66] W. P. Hong and S.H. Park. Modulation instability of optical waves in the cubic-quintic complex ginzburg-landau equation with fourth-order dispersion and gain terms. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 59(7-8), Jan 2004.

[67] W. P. Hong. Modulational instability of the higher-order nonlinear schrödinger equation with fourth-order dispersion and quintic nonlinear terms. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 61(5) :225, Jan 2006.

[68] P. Tchofo Dinda and M. Remoissenet. Breather compactons in nonlinear klein-gordon systems. *Physical Review E*, 60(5) :6218, nov 1999.

[69] S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and D. J. Frantzeskakis. Two-soliton collisions in a near-integrable lattice system. *Physical Review E*, 68(5) :056603, Nov 2003.

[70] J. Gomez-Gardeñes, B. A. Malomed, L. M. Floría, and A. R. Bishop. Solitons in the salerno model with competing nonlinearities. *Physical Review E*, 73(3) :036608, Mar 2006.

[71] P. Rosenau, J. M. Hyman, and M. Staley. Multidimensional compactons. *Physical Review Letters*, 98(2) :024101, Jan 2007.

[72] P. Rosenau and E. Kashdan. Compactification of nonlinear patterns and waves. *Physical Review Letters*, 101(26) :264101, Dec 2008.

[73] P. Rosenau and E. Kashdan. Emergence of compact structures in a klein-gordon model. *Physical Review Letters*, 104(3) :034101, Jan 2010.

[74] J. M. Bilbault, C. Tatuam Kamga, and M. Remoissenet. Gap solitons and transmissivity of one-dimensional asymmetric systems. *Physical Review B*, 47(10) :5748, Mar 1993.

[75] P. Marquié, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet. Observation of nonlinear localized modes in an electrical lattice. *Physical Review E*, 51(6) :6127, Jun 1995.

[76] P. Marquie and J. M. Bilbault. Bistability and nonlinear standing waves in an experimental transmission line. *Physics Letters A*, 174(3) :250–254, Mar 1993.

[77] H. Guoxiang and H. Bambi. Asymmetric gap soliton modes in diatomic lattices with cubic and quartic nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 57 :5746, Mar 1998.

[78] A. S. Tchakoutio Nguetcho, S. Binczak, V. Borisovich Kazantsev, S. Jacquir, and J. M. Bilbault. Experimental active spike responses of analog electrical neuron : beyond “integrate-and-fire” transmission. *Nonlinear Dynamics*, 82(3) :1595, Jul 2015.

[79] S. Binczak, V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin, and J.M. Bilbault. Experimental study of bifurcations in modified FitzHugh-nagumo cell. *Electronics Letters*, 39(13) :961, Jul 2003.

[80] Paul F. Byrd and Morris D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer Berlin Heidelberg, 1971.

[81] Y. Salathiel, Y. Amadou, G. Betchewe, S. Y. Doka, and T. C. Kofane. Soliton solutions and traveling wave solutions for a discrete electrical lattice with nonlinear dispersion through the generalized riccati equation mapping method. *Nonlinear Dynamics*, 87(4) :2435, Dec 2016.

[82] A. J. Sievers and S. Takeno. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals. *Physical Review Letters*, 61(8) :970, Aug 1988.

[83] L. Prandtl. Ein gedankenmodell zur kinetischen theorie der festen körper. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 8(2) :85, 1928.

[84] A. I. Sergienko. Dynamics of bjerrum faults and protonic ice conductivity. *physica status solidi (b)*, 144(2) :471, Dec 1987.

[85] Jibin Li. *Singular Nonlinear Travelling Wave Equations :Bifurcations and Exact Solutions*. Science Press, Beijing, 2013.

[86] A. B. Togueu Motcheyo, C. Tchawoua, M. Siewe Siewe, and J.D. Tchinang Tchameu. Supratransmission phenomenon in a discrete electrical lattice with nonlinear dispersion. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(4) :946, Apr 2013.

[87] A. B. Togueu Motcheyo, C. Tchawoua, and J. D. Tchinang Tchameu. Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice. *Physical Review E*, 88(4) :040901, Oct 2013.

[88] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117(4) :500–544, Aug 1952.

[89] N. Corson. *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*. Ph.D. thesis, LMAH EA 3821 - FR CNRS 3335 - Université du Havre (France), Dec. 2009.

[90] S. Saïghi. *Circuits et systèmes de modélisation analogique de réseaux de neurones biologiques : application au développement d'outils pour les neurosciences computationnelles*. Ph.D. thesis, IMS-CNRS UMR 5218 - Université de Bordeaux (France), Nov. 2004.

[91] Richard FitzHugh. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 17(4) :257–278, Dec 1955.

[92] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50(10) :2061–2070, Oct 1962.

[93] V. B. Kazantsev. Selective communication and information processing by excitable systems. *Physical Review E*, 64(5) :056210, Oct 2001.

[94] V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, S. Binczak, and J. M. Bilbault. Spiking patterns emerging from wave instabilities in a one-dimensional neural lattice. *Physical Review E*, 68(1) :017201, Jul 2003.

[95] S. Binczak, S. Jacquir, J. M. Bilbault, V. B. Kazantsev, and V. I. Nekorkin. Experimental study of electrical FitzHugh–nagumo neurons with modified excitability. *Neural Networks*, 19(5) :684, Jun 2006.

[96] L. Brillouin and M. Parodi. *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Masson et Cie, Paris, 1956.

Document réalisé avec LaTeX et :
le style LaTeX pour Thèse de Doctorat créé par S. Galland — http://www.multiagent.fr/ThesisStyle
la collection de paquets `tex-upmethodology` — http://www.arakhne.org/tex-upmethodology/