



**HAL**  
open science

# Dynamique linéarisée totale: Application aux robots parallèles

Julien Prades

► **To cite this version:**

Julien Prades. Dynamique linéarisée totale: Application aux robots parallèles. Autre. Université Montpellier, 2018. Français. NNT: 2018MONTTS106 . tel-02155174

**HAL Id: tel-02155174**

**<https://theses.hal.science/tel-02155174>**

Submitted on 13 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Systèmes Automatiques et Micro-Électroniques

École doctorale Information, Structures et Systèmes

Unité de recherche LIRMM

## Dynamique linéarisée totale : Application aux robots parallèles

Présentée par Julien PRADES

Le 27 Novembre 2018

Sous la direction de François PIERROT  
et Franck JOURDAN

Devant le jury composé de

François PIERROT, Directeur de Recherche, CNRS

Franck JOURDAN, Professeur, Université de Montpellier

Yannick Aoustin, Professeur, Université de Nantes

Eric Courteille, Maître de Conférence HDR, INSA Rennes

Olivier COMPANY, Maître de conférences, Université de Montpellier

Directeur

Co-Directeur

Président et rapporteur

Rapporteur

Invité



UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER



---

# **Dynamique linéarisée totale : application aux robots parallèles**

---

**PRADES Julien**

**Sous la direction de François Pierrot  
et de Franck Jourdan.**

Le 27 Novembre 2018



## Résumé

Les travaux de recherche de ce manuscrit se concentrent sur l'analyse des fréquences de vibrations des robots. Nos applications concernent plus particulièrement les architectures à cinématique parallèle. Dans un premier temps nous avons considéré les robots parallèles redondants en actionnement pour lesquels nous envisageons d'augmenter la fréquence de leurs oscillations en utilisant les efforts internes intrinsèques à ce type de structure. L'objectif est d'utiliser leur actionnement pour mettre en tension leur structure, et par conséquent, par analogie avec une corde vibrante, augmenter la fréquence de leurs oscillations. Nous avons étudié plusieurs robots plans redondants et nous montrons que dans le cadre de robots typiquement conçus pour être rigides, l'influence des efforts internes rajoutés n'a que peu d'importance. La suite de nos travaux soutient la proposition suivante : "les trajectoires très dynamiques influencent les fréquences des oscillations de la plateforme mobile". En effet, les robots parallèles quand ils sont conçus pour être légers, peuvent atteindre de grandes accélérations. Nous avons choisi de nous intéresser à l'étude de l'impact que peut avoir les effets dynamiques sur la fréquence des oscillations de la plateforme mobile de ces robots. Les robots considérés pour nos développements sont des robots parallèles plans, redondants en actionnement ou non. Nous proposons d'étudier cette influence en nous basant sur un développement au premier ordre du modèle dynamique. Cette linéarisation du modèle dynamique se veut plus complète que celles proposées dans la littérature. Nous expliquons et vérifions la validité de notre approche par une étude sur le lien entre accélération et vitesse et la fréquence d'oscillation pour les robots série PR (pendule sur glissière verticale) et RR (double pendule en rotation horizontale). Ensuite, nous généralisons notre modélisation au premier ordre et l'appliquons aux quatre robots PRR-2 PRR-3, PRR-4 et Dual-V pour voir si nous sommes capable d'en dégager une tendance concernant l'évolution des fréquences d'oscillation. Nous constatons que, en fonction des trajectoires, la dynamique a une influence faible mais visible, souvent positive sur l'augmentation des fréquences d'oscillation de la plateforme mobile. Cependant, les trajectoires et les lois horaires étant imposées, nous ne pouvons que subir cette influence.



## Abstract

The research work of this thesis manuscript focuses on the analysis of the frequency of robots' vibrations. Our applications mainly consider architectures with parallel kinematics. First we examined parallel robots which are redundant in actuation and for which we are considering an increase of their oscillations' frequency using the internal forces inherent to this type of structure. The aim is to use their actuation for tensioning of their structure, and consequently, by analogy with a vibrating-wire, to enhance their oscillation frequency. We have studied several redundant planar robots and we demonstrate that in the case of robots which are typically designed to be stiff, the impact of added internal forces is of low relevance. The continuation of our research supports the following proposal: "High dynamics trajectories have an impact on the oscillation frequency of the mobile platform." Indeed parallel robots, when designed to be light, can reach greater accelerations. We chose to concentrate on the study of the impact that dynamic effects can have on the oscillation frequency of those robots' mobile platform. The robots examined for our developments are planar parallel robots whether they have redundant actuation or not. We propose to study this impact based on a prime order development of the dynamic model. This linearisation of the dynamic model is intended to be more complete than those suggested by literature. We explain and verify the validity of our approach with a study on the link between speed and oscillation frequency on PR robots (pendulum on a vertical sliding guide) and RR robots (double pendulum rotating horizontally). Then we will generalize our first order model and apply it to the four robots (PRR-2 PRR-3, PRR-4, and Dual-V) to see if we are able to identify a pattern regarding the evolution of oscillation frequencies. We observe that, depending on the trajectories, the dynamics have a low but noticeable, and often positive, impact on the increase of oscillation frequency of the mobile platform. However, since the trajectories and speed input laws are imposed, we have no choice but to be subjected to this impact.



## **Remerciements**

Merci à mes collègues du lycée Marie Curie et à ma famille pour le soutien moral nécessaire à la réalisation d'une thèse, notamment à ma copine Vanessa. Je tiens à remercier particulièrement mon père pour les bons conseils qu'il m'a donné pour mon cursus scolaire.

Je remercie Franck Jourdan, Olivier Company et François Pierrot pour m'avoir accompagné dans la réalisation de cette thèse.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Sommaire</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Bibliographie et état de l'art</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation des modèles à solides déformables permettant de calculer les fréquences propres de vibrations . . . . .	4
1.1.1 Modèle des éléments finis volumiques à 3 dimensions (MEF3D) . . . . .	5
1.1.2 Modèle de l'assemblage des matrices de structure (MSA) . . . . .	6
1.1.3 Modèle des joints virtuels . . . . .	8
1.1.4 Comparaison et choix . . . . .	9
1.2 Présentation des modèles à solides non déformables . . . . .	10
1.2.1 Modèle dynamique linéarisé . . . . .	10
1.2.2 Modélisation de la raideur des robots . . . . .	10
1.2.3 Conclusion . . . . .	11
<b>2 Analyse modale : comparaison des modèles</b>	<b>13</b>
2.1 Présentation des robots étudiés . . . . .	15
2.1.1 Paramétrage des robots . . . . .	19
2.1.2 Modèle cinématique . . . . .	19
2.1.3 Modèle dynamique solides rigides des PKMs . . . . .	20
2.1.4 Modèle dynamique solides rigides linéarisé des PKMs . . . . .	22
2.1.5 Modèle de type éléments-finis, (MSA) . . . . .	23
2.2 Le robot parallèle PRR-2 . . . . .	24
2.2.1 Description du robot PRR-2 . . . . .	24
2.2.2 Modèle géométrique du robot PRR-2 . . . . .	25
2.2.3 Modèle cinématique du robot PRR-2 . . . . .	27

2.2.4	Modèle dynamique solides rigides du robot PRR-2 . . . . .	29
2.2.5	Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-2	30
2.2.6	Analyse modale du modèle dynamique éléments finis linéaire du robot PRR-2 . . . . .	33
2.3	Le robot parallèle PRR-3 . . . . .	38
2.3.1	Description du robot PRR-3 . . . . .	38
2.3.2	Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-3	40
2.3.3	Analyse modale du modèle dynamique éléments finis linéaire du robot PRR-3 . . . . .	43
2.4	Le robot parallèle PRR-4 . . . . .	46
2.4.1	Description du robot PRR-4 . . . . .	46
2.4.2	Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-4	48
2.5	Le robot parallèle Dual-V . . . . .	50
2.5.1	Description du robot Dual-V . . . . .	50
2.5.2	Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot Dual-V . . . . .	52
2.6	Conclusion du chapitre . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Présentation de phénomènes dynamiques</b>	<b>57</b>
3.1	Oscillations d'un pendule simple . . . . .	58
3.2	Oscillations dépendantes de l'accélération . . . . .	60
3.2.1	Équation du mouvement . . . . .	61
3.2.2	Obtention des fréquences propres par simulation numérique . . .	62
3.2.3	Obtention des fréquences par linéarisation . . . . .	65
3.2.4	Comparaison des résultats avec la linéarisation et la simulation numérique . . . . .	66
3.3	Oscillations dépendantes de la vitesse . . . . .	67
3.3.1	Équation du mouvement . . . . .	68
3.3.2	Obtention des fréquences propres par simulation numérique . . .	69
3.3.3	Obtention des fréquences propres par linéarisation . . . . .	72
3.3.4	Comparaison des résultats avec la linéarisation et la simulation numérique . . . . .	74
3.4	Conclusion . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Modèle dynamique et modèle dynamique linéarisé général</b>	<b>77</b>
4.1	Modèle dynamique : équation de Lagrange . . . . .	78
4.2	Contexte du modèle dynamique . . . . .	81
4.3	Linéarisation du modèle dynamique . . . . .	82
4.4	Identification . . . . .	83
4.4.1	Matrices de Masse . . . . .	83
4.4.2	Matrices d'amortissement . . . . .	83
4.4.3	Matrices de Raideur . . . . .	84
4.4.4	Variation des actions extérieures . . . . .	85

4.5	Conclusion . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Application aux robots parallèles</b>	<b>87</b>
5.1	Modèle dynamique linéarisé des PKMs . . . . .	88
5.2	Étude de cas . . . . .	89
5.2.1	Étude du robot PRR-2 . . . . .	91
5.2.2	Étude du robot PRR-3 . . . . .	95
5.2.3	Étude du robot PRR-4 . . . . .	98
5.2.4	Étude du robot Dual-V . . . . .	101
5.2.5	Conclusion . . . . .	104
5.3	Effets atténuants des raideurs d'inertie . . . . .	105
5.3.1	Compensation des raideurs par effet antagoniste . . . . .	105
5.3.2	Compensation des raideurs d'inertie par la raideur d'actionnement	113
5.4	Conclusion . . . . .	117
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Robot PRR-3</b>	<b>125</b>
A.1	Description du robot PRR-3 . . . . .	125
A.2	Modèle géométrique du robot PRR-3 . . . . .	127
A.3	Modèle cinématique du robot PRR-3 . . . . .	128
A.4	Modèle dynamique solides rigides du robot PRR-3 . . . . .	129
<b>B</b>	<b>Robot PRR-4</b>	<b>131</b>
B.1	Modèle géométrique du robot PRR-4 . . . . .	133
B.2	Modèle cinématique du robot PRR-4 . . . . .	135
B.3	Modèle dynamique du robot PRR-4 . . . . .	138
<b>C</b>	<b>Robot Dual-V</b>	<b>139</b>
C.1	Modèle cinématique du robot Dual-V . . . . .	142
C.2	Modèle dynamique solides rigides du robot Dual-V . . . . .	143
	<b>Index</b>	<b>145</b>
	<b>Liste des abréviations, des sigles et des symboles</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>148</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>151</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>153</b>



# Introduction

Les gains de productivité de l'industrie crée une forte pression sur les augmentations des performances des machines. Nous nous occuperons uniquement dans ce document, des robots manipulateurs pour des opérations de pick-and-place. Les opérations de pick-and-place sont décrites par la figure 1. L'objectif de ces robots étant de minimiser les temps de trajet tout en évitant la zone interdite. L'exemple de trajectoire de la figure 1 est loin d'être optimisé.

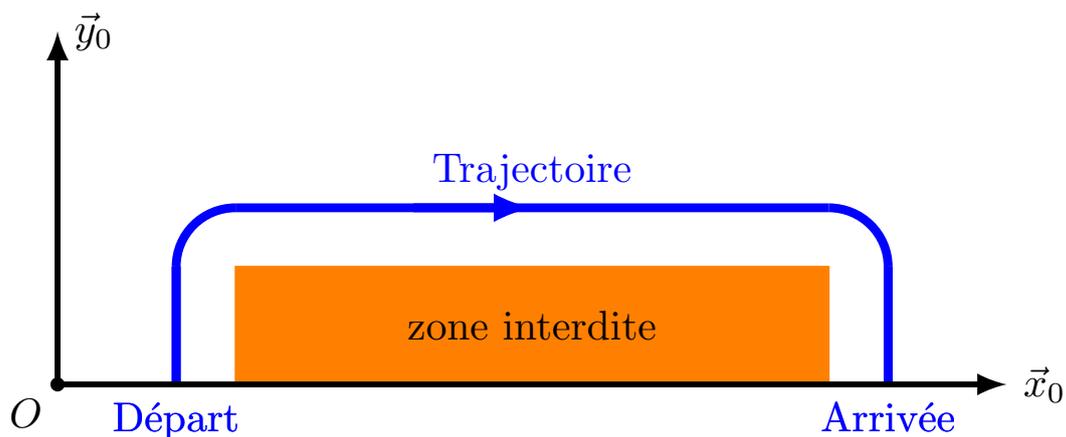


FIGURE 1: Trajectoire d'une opération de pick-and-place

Dans les performances des robots, nous relevons ces cinq critères :

- L'accélération
- La vitesse
- La précision
- La taille de l'espace de travail
- La charge utile

L'opération de pick-and-place est finie lorsque la plateforme mobile a atteint l'arrivée et ne bouge plus. Les critères énoncés ci-dessus ont une influence sur le temps d'exécution de l'opération. Les variations des actions mécaniques des moteurs du robot

stimulent les vibrations du robot. La connaissance précise des fréquences de vibration des robots permet l'élaboration d'une commande d'asservissement qui évite de stimuler les modes de vibration. Moins le robot vibre et meilleur sont son temps d'exécution et sa précision. L'Input-Shaping est une solution de commandes qui permet de répondre à cette problématique. Il est aussi possible de filtrer la loi de commande et d'enlever les composantes de la commande qui stimulent les modes de vibration.

Les robots étudiés dans cette thèse sont des robots parallèles redondants qui sont construits pour être le plus précis possible tout en allant le plus vite possible. Nous avons donc cherché comment améliorer ces robots par la commande. Il nous est apparu deux axes d'amélioration :

- Augmenter la fréquence du premier mode de vibration en pré contraignant la structure du robot avec les actions mécaniques des moteurs (comme l'augmentation de la fréquence d'oscillation d'une corde en augmentant la force de tension) afin d'augmenter la plage de fréquence disponible pour la commande. (Commande du type filtrage des fréquences pouvant stimuler les robots)
- Calculer le plus précisément possible les fréquences de vibration des robots afin d'augmenter les performances de la commande permettant de diminuer les vibrations. (Commande du type Input-Shaping)

Cette thèse se découpe en cinq chapitres. Le premier établira l'état de l'art sur l'analyse des fréquences propres d'oscillations des robots. Le deuxième chapitre montrera que le premier axe de recherche n'est pas envisageable dans la gamme de puissance des moteurs actuels. Cela demanderait énormément de puissance pour obtenir un effet significatif et nous dirigera vers le second axe de recherche. Le troisième chapitre proposera deux expériences montrant les influences des forces d'inertie sur la valeur des fréquences propres d'oscillations des robots. Le quatrième chapitre développera un modèle dynamique linéarisé prenant en compte les phénomènes mis en évidence au chapitre trois. Le cinquième chapitre proposera une application du modèle dynamique linéarisé à la famille de robots et une analyse des résultats. Nous finirons par un conclusion et présenterons les travaux possibles en relation avec celle-ci.

## Bibliographie et état de l'art

Dans ce chapitre, nous présentons les façons de calculer les fréquences propres de vibrations des robots à structure parallèle et redondante. Dans la première partie, nous montrons des méthodes qui prennent en compte les déformations structurelles des robots. La méthode la plus pertinente sera utilisée pour la suite. Dans la seconde partie nous montrons les méthodes qui calculent les fréquences propres de vibration des robots en utilisant l'hypothèse des solides indéformables, dans ces modèles, les "déformations" sont localisées au niveau des moteurs. Ce chapitre montre la théorie qui sera appliquée dans le chapitre deux. Le but commun à toutes ces méthodes est d'aboutir à un système d'équations de la dynamique linéarisée du robot qui s'écrit sous la forme de l'équation (1.1).

$$\underline{M}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \underline{K}_0 \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

- $\underline{M}_0$  matrice de masse du système dynamique linéarisé de taille  $n \times n$
- $\underline{K}_0$  matrice de raideur globale du système dynamique linéarisé de taille  $n \times n$ . Plusieurs raideurs sont réunies dans cette matrice, la raideur structurelle, la raideur issue de la précontrainte et la raideur issue de l'asservissement.
- $\Delta \ddot{\mathbf{X}}$  vecteur accélération des degrés de liberté observés de taille  $n \times 1$
- $\Delta \mathbf{X}$  vecteur position des degrés de liberté observés de taille  $n \times 1$

Les matrices  $\underline{M}_0$  et  $\underline{K}_0$  sont les matrices de masse et de raideur dont la taille et expression dépendent de la méthode choisie.

## 1.1 Présentation des modèles à solides déformables permettant de calculer les fréquences propres de vibrations

Dans cette partie, nous présentons trois méthodes pour calculer les fréquences propres de vibrations des robots en utilisant un modèle dynamique qui prend en compte les déformations.

- Le modèle des éléments finis volumiques.
- Le modèle des articulations virtuelles.
- Le modèle de l'assemblage des matrices de structure.

Nous montrerons pourquoi la méthode de l'assemblage des matrices de structure est la méthode à retenir pour obtenir une estimation rapide et précise des fréquences propres de vibrations en prenant en compte les effets de la pré-contrainte. Les éléments finis utilisés et les constructions des matrices de raideur et de masse seront détaillés par la suite. Puis nous ferons une conclusion sur ce type de modélisation. Une grande partie des informations sur les modèles à solides déformables sont présentées dans de la thèse de Coralie Germain [1].

### 1.1.1 Modèle des éléments finis volumiques à 3 dimensions (MEF3D)

Le modèle des éléments finis volumiques est le modèle le plus performant en terme de précision comparé aux autres modèles, pour une précision équivalente, mais cette précision coûte en temps de calcul. Les solides sont d'autant mieux modélisés que la taille des éléments est petite. La difficulté de ces modèles est la gestion des liaisons entre solides. Dans les solutions simples, les liaisons réelles peuvent être remplacées par des liaisons virtuelles. L'article [2] est un exemple où l'analyse modale est faite avec des liaisons virtuelles. Certains volumes sont supprimés et le contact entre les surfaces n'existe plus, comme nous pouvons voir sur la figure 1.1 pour le robot I.Ca.Ro sur la figure 1.2. Le fonctionnement des liaisons est remplacé par un couplage de degrés de liberté, ce qui est équivalent du point de vue cinématique. Des points massiques sont ajoutés pour compenser la perte de masse dû à la suppression des volumes.

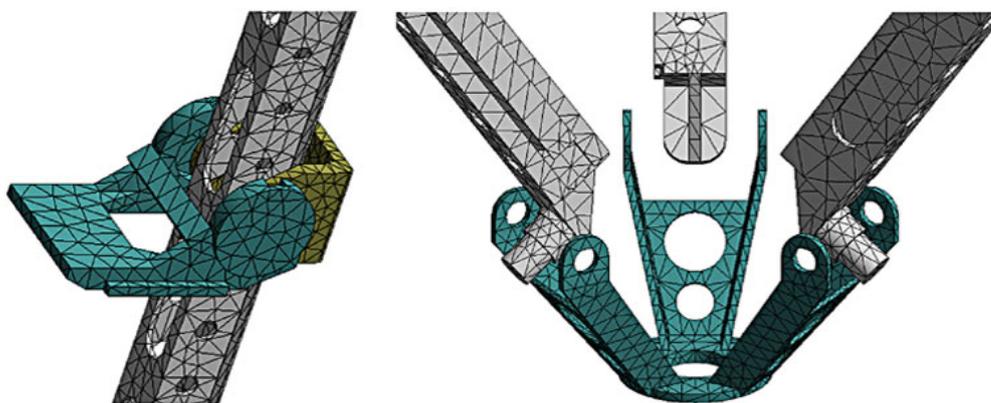


FIGURE 1.1: Discretisation du robot I.Ca.Ro. (source : [2])

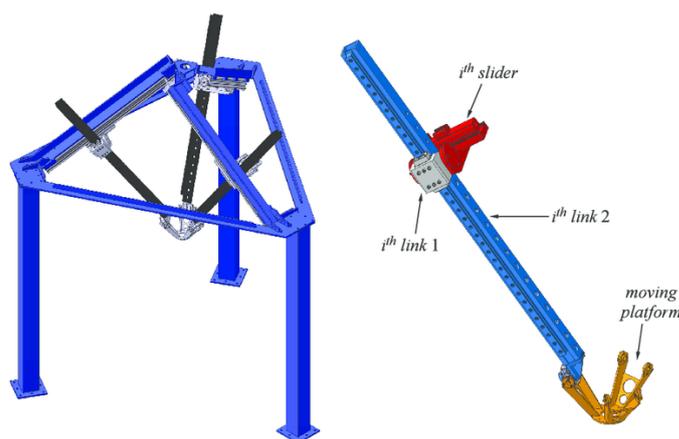


FIGURE 1.2

Dans les solutions complexes, les liaisons sont directement modélisées avec des contacts et des frottements. La modélisation des jeux de fonctionnement est possible par la géométrie des surfaces en contact (par exemple deux cylindres emboîtés l'un dans l'autre, mais avec des diamètres légèrement différents). Dans ce cas, le problème est non linéaire, mais nous pouvons récupérer les fréquences d'oscillation avec une analyse temporelle de la réponse à un choc.

Pour utiliser un modèle dynamique dans l'asservissement d'un robot, le temps de calcul du modèle doit être compatible avec la fréquence de calcul de l'asservissement (5 kHz à 10 kHz). Le modèle éléments finis volumique ne pouvant pas être utilisé dans la commande car ayant un temps de calcul trop grand, il est utilisé pour valider les autres modèles car il est supposé être le plus proche de la réalité lorsqu'il est correctement paramétré.

### 1.1.2 Modèle de l'assemblage des matrices de structure (MSA)

La méthode de l'assemblage des matrices de structure est une méthode éléments finis qui utilise la théorie des poutres et des plaques pour diminuer fortement le nombre de nœuds, elle est beaucoup utilisée dans l'étude des systèmes multi-solides, [3], [4] et [5]. Les éléments utilisés sont des éléments de surface, de ligne et de point. Les orientations et les positions dans le repère global des éléments sont calculés à partir d'un modèle de solide rigide, qui représente le point de fonctionnement de l'étude. Les matrices de raideur et de masse globale sont calculées en assemblant les matrices élémentaires respectives après modification de l'orientation et du couplage des degrés de liberté modélisant les liaisons. (Se reporter à [6] et [7] pour les matrices élémentaires et la façon de lier les degrés de liberté). Le système dynamique obtenu représente les déplacements dûs aux déformations autour de la position calculée par le solide rigide. Une application du modèle MSA au robot véloce 1.3 et [8] est présentée dans la figure 1.4. Le modèle dynamique est un modèle linéaire, il peut être complété avec l'ajout de matrices supplémentaires :

- La matrice de raideur géométrique induit des effets de la pré-contrainte. Voir la description des éléments de barre et poutre dans la prochaine partie ou se référer à [9] pour plus d'informations.
- Les matrices de raideur et d'amortissement issues des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis voir [10].

Pour obtenir ces matrices, il faut prendre en compte plusieurs termes non linéaires puis les linéariser. Ce modèle à l'avantage de se rapprocher suffisamment bien les fréquences d'oscillations des robots car nous pouvons choisir le nombre d'éléments par poutre et aussi affiner la précision du calcul.

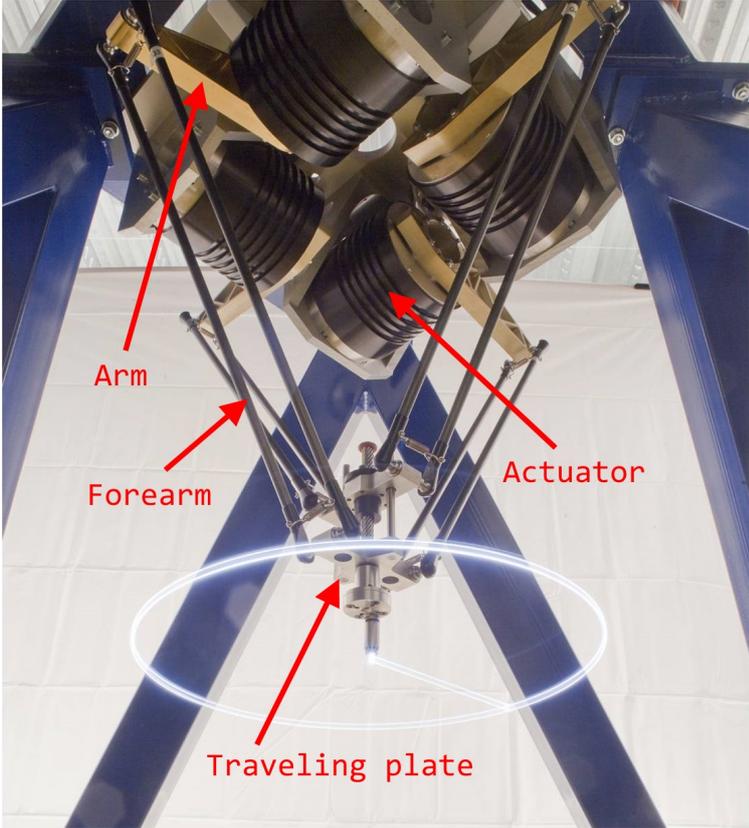


FIGURE 1.3: Robot Véloce

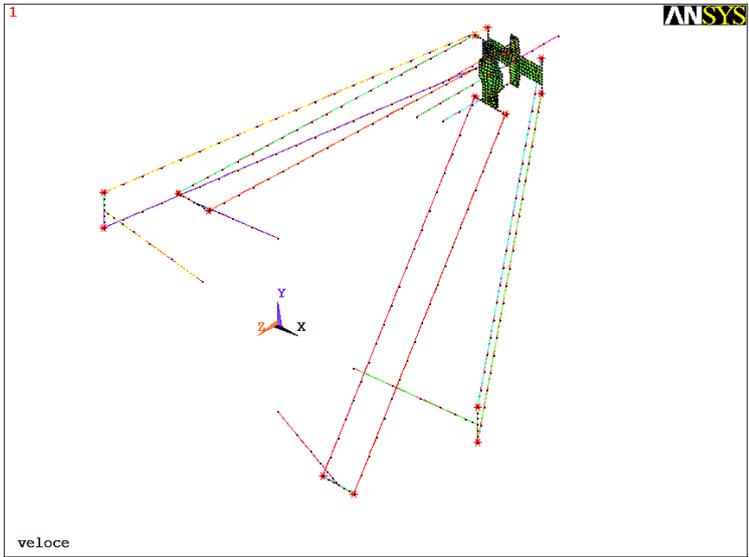


FIGURE 1.4: Modèle MSA du robot Véloce

### 1.1.3 Modèle des joints virtuels

Le modèle des joints virtuels est une méthode hybride entre les méthodes des solides déformables et indéformables, car elle utilise des éléments des deux modèles. Elle a été développée par Pashkevich [11]. Chaque chaîne cinématique est modélisée par une succession de solides indéformables suivis d'un ressort à 6 degrés de liberté permettant de représenter la raideur de l'ensemble, voir figure 1.5.

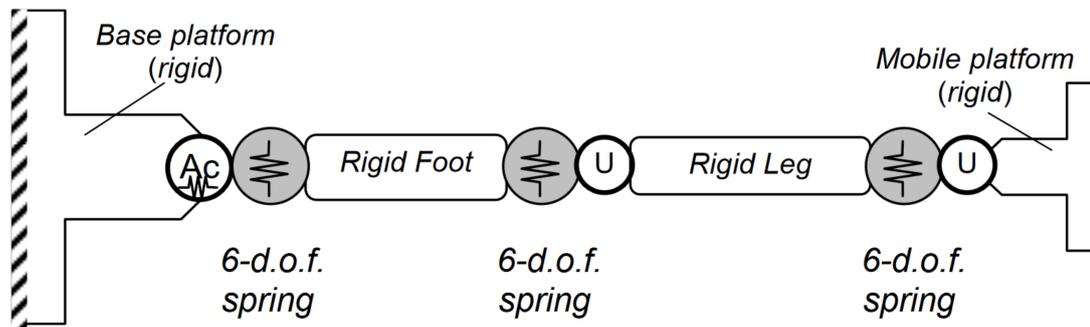


FIGURE 1.5

La matrice de raideur de la chaîne cinématique est calculée à partir de l'addition des matrices de souplesse des éléments (l'inverse de la matrice de raideur) vue par la plateforme mobile. La raideur totale du robot est la somme des raideurs de toutes les chaînes cinématiques. Ce modèle est plus rapide à calculer que le modèle d'assemblage de matrices de structure car le nombre de degrés de liberté est plus petit et qu'il ne nécessite que l'inversion de matrices  $6 \times 6$ . Par contre, ce modèle couplé avec une matrice de masse manquera de précision lors des analyses modales car il est limité en nombre de modes de vibration. C'est-à-dire, lorsque nous faisons une analyse modale d'une poutre avec un seul élément, il manque de nombreux modes d'oscillation par rapport à une analyse modale d'une poutre avec plusieurs éléments.

### 1.1.4 Comparaison et choix

Pour conclure, nous faisons un bilan des trois modèles retenus qui sont :

- Modèle des éléments finis volumiques à 3 dimensions (MEF3D)
- Modèle de l'assemblage des matrices de structure (MSA)
- Modèle des joints virtuels

Les différentes caractéristiques des modèles sont données tableau 1.1. Pour les analyses modales, nous choisissons le modèle MSA qui a des caractéristiques équilibrées. C'est-à-dire qu'il est relativement simple à mettre en place, qu'il a un temps de calcul assez court (nombre de nœuds moins important) et surtout qu'il est capable d'extraire une très grande quantité de modes.

**Remarque :** Souvent les problèmes de souplesse des robots proviennent de la qualité de leurs articulations (liaisons), Le MEF3D modélise directement cet aspect. Le MJV peut prendre en compte cette information, suivant comment sont identifiées les raideurs. La MSA peut être augmentée en rajoutant des éléments de ressorts à six degrés de liberté entre les différents solides. Mais il faut faire attention au calcul des fréquences propres, des raideurs trop différentes en intensité peuvent augmenter le conditionnement du problème.

Méthode	MEF3D	MSA	MJV
Complexité	Grande	Moyenne	Grande
Temps de calcul	Grand	Moyen	Court
Précision	Grande	Bonne	Bonne si bien paramétré
Modes extraits	Tous	Tous	Mode statique
Nombre de nœud ( $n_n$ ) (comparativement)	$n_{nMSA}^3$	$n_{nMSA}$	1
Degrés de liberté observés ( $n_n$ )	$6n_n$ ou $3n_n$	$6n_n$ ou $3n_n$	6

TABLE 1.1: Résumé des modèles solides déformables

## 1.2 Présentation des modèles à solides non déformables

Dans cette partie nous nous intéressons aux modèles solides rigides permettant de calculer les fréquences d'oscillation des robots ainsi qu'aux matrices de raideur associées à des modèles solides rigides.

### 1.2.1 Modèle dynamique linéarisé

Kozak [12] a proposé un modèle dynamique linéarisé en 2004. Son modèle a pour but de calculer les fréquences d'oscillations des robots afin de les utiliser dans une commande d'input shaping. L'input shaping [13] [14], est une commande permettant d'éviter l'apparition des oscillations d'un robot. L'input shaping "découpe" la commande d'un robot pour l'envoyer en deux parties. La seconde partie est retardée d'une demi phase par rapport à la première. Il y a deux signaux en opposition de phase qui se neutralisent par rapport à l'excitation des modes.

Le modèle dynamique utilisé est classique, les équations du mouvement sont trouvées grâce aux équations de Lagrange. Le modèle dynamique linéarisé est obtenu en utilisant la formule de Taylor et en choisissant le point de fonctionnement  $P_f$ . Le point de fonctionnement n'est pas forcément un point d'équilibre, en effet le point  $P_f$  de l'équation (1.2) est un point de fonctionnement dynamique. Il devient quasi statique lorsque les termes de vitesse et d'accélération sont nuls (équation (1.3)).

$$P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{A}_0) \quad (1.2)$$

$$P_f = (\mathbf{X}_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{A}_0) \quad (1.3)$$

Avec :

- $\mathbf{X}_0$  la position de la plateforme mobile.
- $\dot{\mathbf{X}}_0$  la vitesse de la plateforme mobile.
- $\ddot{\mathbf{X}}_0$  l'accélération de la plateforme mobile.
- $\mathbf{A}_0$  toutes les actions mécaniques du robot.

Ce modèle dynamique linéarisé au point  $P_f$  1.3 ne prend pas en compte les effets d'inertie, car les termes dépendant de la vitesse et de l'accélération sont nuls. Le fait de définir un point de fonctionnement  $P_f$  avec des valeurs de vitesses et d'accélération nulles permet de faire apparaître ces termes dans la formule de Taylor. Le modèle dynamique linéarisé complet, est développé dans cette thèse au chapitre 4 et à la section 4.3, est une extension directe du modèle de Kozak.

### 1.2.2 Modélisation de la raideur des robots

Les roboticiens se sont intéressés à la matrice de raideur des robots. Ils ont cherché à augmenter la rigidité des robots en jouant sur des paramètres de conception ou de commande. Les articles suivants sont des travaux étudiant l'effet des actions mécaniques sur la matrice de raideur des robots. Cette matrice de raideur s'appelle la matrice de

raideur géométrique en robotique, car elle représente le décalage par rapport à la position statique qui crée cette raideur.

- Kock et Schumacher [15] ont travaillé sur le contrôle de la matrice de raideur géométrique et ont montré qu'il était possible de traverser des singularités.
- Chakarov en 2004 [16] a travaillé sur la matrice de raideur géométrique des robots parallèles avec redondance d'actionnement et sur une stratégie de commande.
- Müller en 2006 [17] a travaillé sur la matrice de raideur dérivant des équations de la dynamique. Son point de fonctionnement intègre la vitesse et la position des paramètres equation (1.4). Dans ses équations, il y a la matrice de raideur d'asservissement classique, la matrice de raideur géométrique et la matrice de raideur dépendant des forces d'inertie Centrifuge et de Coriolis. Il n'a étudié que les deux premières matrices de raideur. Il a cherché à contrôler la matrice de raideur géométrique afin de conserver une raideur constante dans une direction.

$$P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{0}, \mathbf{A}_0) \quad (1.4)$$

Ensuite

- Müller, en 2007 [18], a travaillé sur la matrice de raideur due aux actions mécaniques et montré une autre façon de la contrôler.
- Moradi, en 2013 [19], a travaillé sur l'analyse de la raideur des robots parallèles à câble avec la matrice de raideur d'asservissement et de pré-contrainte classique.

### 1.2.3 Conclusion

Dans la partie des modèles rigides, la construction d'un modèle dynamique linéarisé complet a été débuté par Kozak. Les matrices de raideur d'asservissement, de raideur de précontrainte et de raideur dépendant de la vitesse ont été écrites formellement. Seules les raideurs d'asservissement et de pré-contrainte (calculées avec des efforts statiques) ont été étudiées. Nous proposons d'étendre ce qui a déjà été fait en ajoutant les raideurs dépendant des accélérations et d'étudier l'ensemble avec un point de fonctionnement dynamique  $P_f$ .

$$P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{A}_0) \quad (1.5)$$



## Analyse modale : comparaison des modèles

Dans la bibliographie, nous avons sélectionné un modèle dynamique solides rigides utilisant les équations de Lagrange et le modèle MSA. Dans ce chapitre, nous faisons une étude comparative des deux modèles. Nous souhaitons comparer les effets des trois raideurs citées ci-dessous sur la fréquence du premier mode d'oscillation.

- La raideur structurelle dépendante de la flexibilité des corps du robot
- La raideur due à l'asservissement, dépendante du contrôleur de l'asservissement.
- La raideur due aux actions mécaniques des moteurs, dépendante de la commande prédictive de l'asservissement.

Pour améliorer les performances des robots et identifier sur quels paramètres nous devons agir, il faut comparer les contributions des trois raideurs précédentes sur la valeur de la première fréquence propre d'oscillation des robots. Ce chapitre, est une recherche bibliographique et une application directe sur les méthodes permettant de calculer les fréquences propres de vibration des robots. Afin d'éviter de répéter robots parallèles, nous utiliserons l'acronyme PKM qui veut dire Parallel Kinematic Machine soit robot à cinématique parallèle en français. Les robots étudiés sont tous des robots parallèles à architecture planaire. Les quatre robots étudiés sont des mécanismes plans, les mouvements de translation sont dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et les rotations sont suivant l'axe  $\vec{z}_0$ .

**L'analyse modale, utilisant les éléments finis de ce chapitre, utilise des éléments dont les nœuds ont six degrés de liberté. Ceci permet d'observer des modes d'oscillation dans le plan et hors plan pour des robots à architecture planaire, tous les modes de vibrations sont possibles. L'analyse modale utilisant le modèle solides rigides, seul les modes liés au mouvement de la plateforme mobile sont étudiés. Il est impossible d'avoir un mode d'oscillation hors plan.**

Le chapitre se décompose en plusieurs parties :

- Présentation générale de la famille de robots utilisés et des éléments de calculs
- Étude complète du robot PRR-2 à la section 2.2
- Étude complète du robot PRR-3, redondant de degré 1, à la section 2.3
- Étude complète du robot PRR-4, redondant de degré 1, à la section 2.4
- Étude complète du robot Dual-V, redondant de degré 1, à la section 2.5
- Conclusion générale sur les modèles et sur l'influence de la pré-contrainte

Les calculs préliminaires sont détaillés pour le robot PRR-2. Pour les robots PRR-3, PRR-4 et Dual-V, les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques sont détaillés dans les annexes A, B et C.

## 2.1 Présentation des robots étudiés

Dans ce chapitre, nous étudierons plusieurs robots parallèles qui peuvent être redondants en actionnement ou non (plus de moteurs que de degrés de liberté). Ces robots sont très légers comparés aux autres car leur but est d'aller le plus vite possible d'une position à une autre. Nous pouvons citer comme exemple le robot Par2 [20]. La famille de robots, possède  $m$  liaisons motorisées et sa plateforme mobile (MP) a  $n$  degrés de liberté. La structure est composée de  $m$  chaînes cinématiques qui relient le bâti à la plateforme mobile avec  $m \geq n$  pour les robots redondants. Les robots R4 [21], Par2 figure (2.1) [20], Arrow (figure 2.2) [22] et Dual-V (figure 2.3) [23] font partie de cette famille de robots. Le graphe de liaison générique est montré par la figure 2.4.

La famille de robots étudiée possède les caractéristiques suivantes :

- Les chaînes cinématiques sont composées de deux corps et de trois liaisons (la troisième sert à relier les chaînes avec la plateforme).
- Les actionneurs peuvent être des moteurs linéaires ou des moteurs rotatifs, ils sont modélisés par une action mécanique en parallèle des liaisons  $L_{1i}$  qui peut être respectivement une liaison pivot ou glissière.
- Les liaisons  $L_{2i}$  et  $L_{3i}$  sont :
  - dans le cas d'un robot à architecture planaire des liaisons pivots (ou une liaison encastrement pour éviter les mouvements inutiles au robot suivant le cas)
  - dans le cas d'un robot à architecture spatiale des liaisons sphériques ou cardans



FIGURE 2.1: Robot Par2

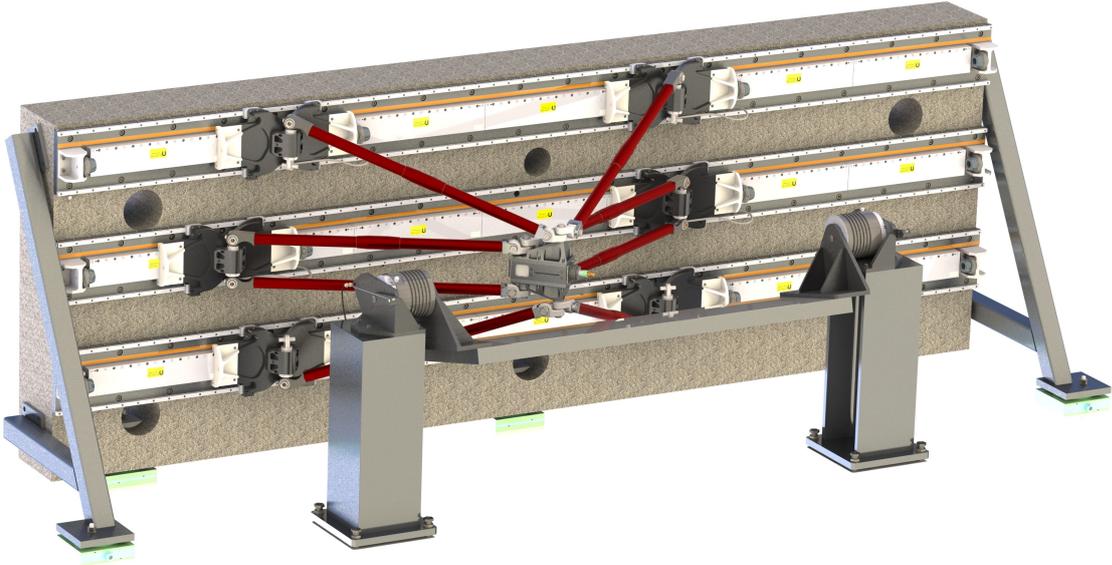


FIGURE 2.2: Robot Arrow

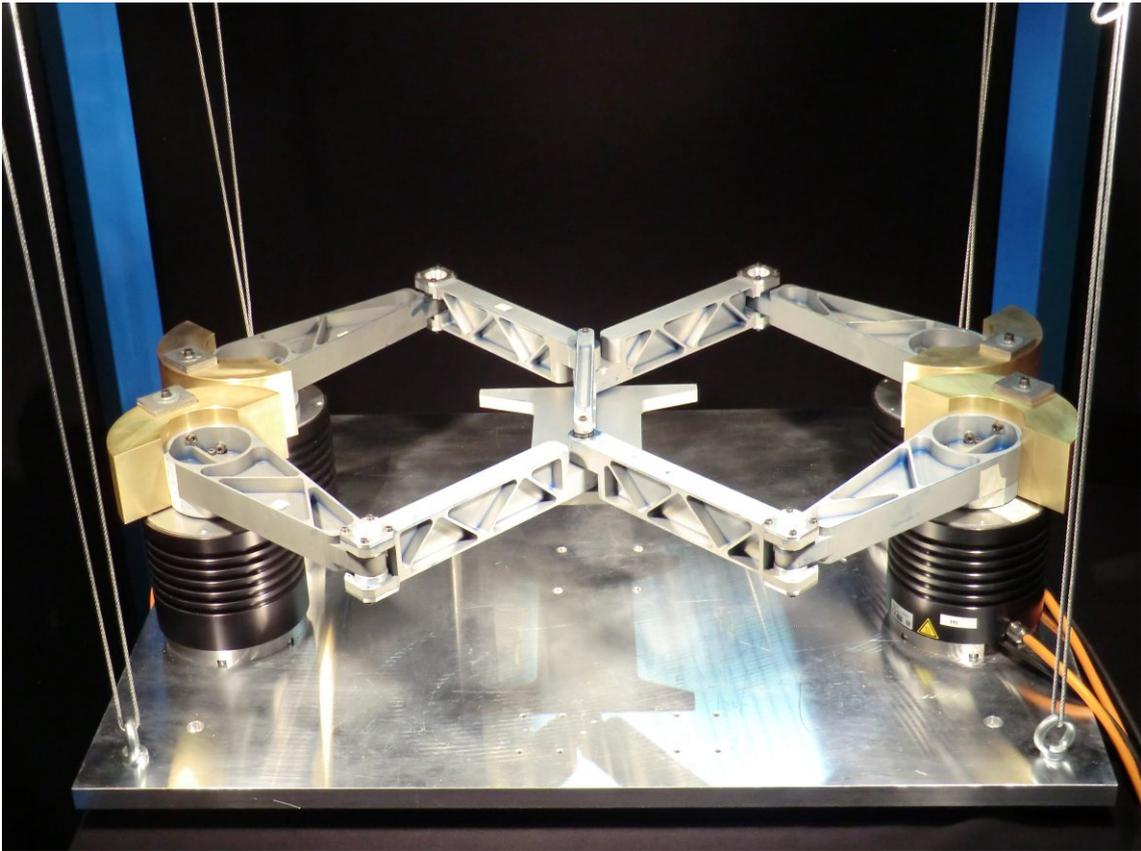


FIGURE 2.3: Robot Dual-V

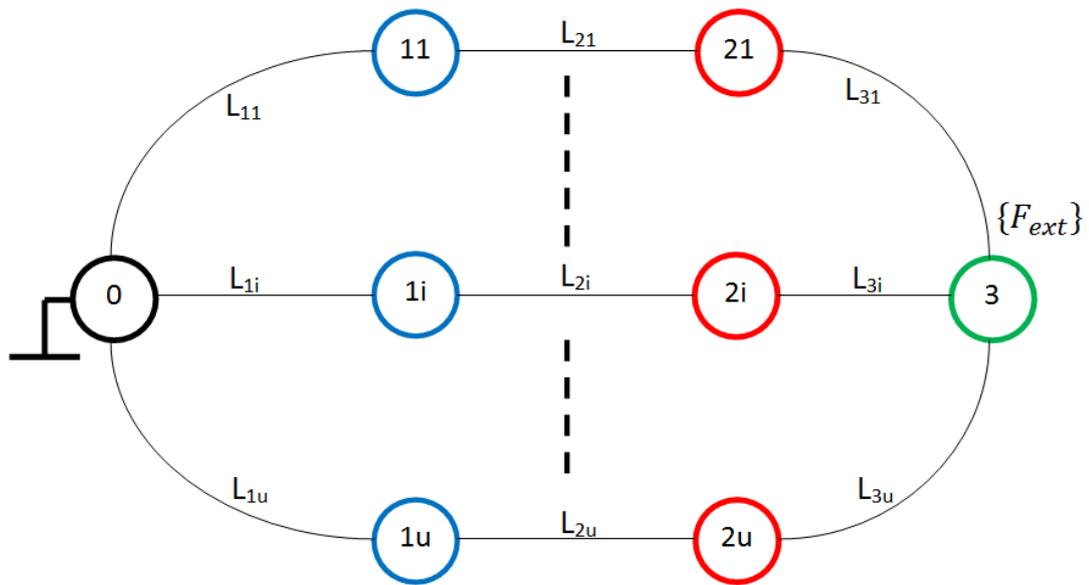


FIGURE 2.4: Graphe de liaison générique

Les inerties en jeu dans ces robots sont principalement celles des moteurs et de la plateforme (inclut l'outil et/ou la charge). Une hypothèse sur la répartition des masses des barres a une faible influence sur l'inertie globale mais permet de simplifier les calculs tout en faisant peu d'erreurs pour les modèles dynamiques solides rigides. **Cette hypothèse sera utilisée uniquement pour les modèles solides rigides.** L'hypothèse est la suivante : la répartition linéaire de la masse le long de la barre est remplacée par la concentration de la masse aux deux extrémités pesant chacune la moitié de la barre. Ceci permet de lier les masses ponctuelles aux corps adjacents  $1i$  et  $3$  et de supprimer des termes dans l'énergie cinétique. Cette hypothèse a déjà été utilisée dans [21].

### 2.1.1 Paramétrage des robots

Dans la famille de robots étudiée, il y a trois types de paramètres :

- Les  $m$  paramètres de position des moteurs  $q_i$  par rapport à leur axe de référence, qui se range sous le vecteur des coordonnées articulaires :

$$\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_m]^T \quad (2.1)$$

- Les  $n$  paramètres de position de la plateforme mobile  $\mathbf{X}$  par rapport au référentiel  $R_0$ , qui se range sous le vecteur des coordonnées opérationnelles pour un robot plan à deux ou trois degrés de liberté :

$$\mathbf{X} = [x \ y]^T \quad \text{ou} \quad \mathbf{X} = [x \ y \ \alpha]^T \quad (2.2)$$

- (Optionnel) Les paramètres de position des articulations passives  $\theta_i$  facilitant l'écriture des matrices, qui se rangent sous le vecteur des coordonnées optionnelles :

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_k]^T \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Modèle cinématique

Nous obtenons les équations de la cinématique du robot en faisant l'équiprojectivité des vitesses dans les barres (de 1 à  $m$ ) entre les points  $A_i$  et  $B_i$  (ou  $B_i = C$  suivant le type de plateforme mobile) voir figure 2.5.

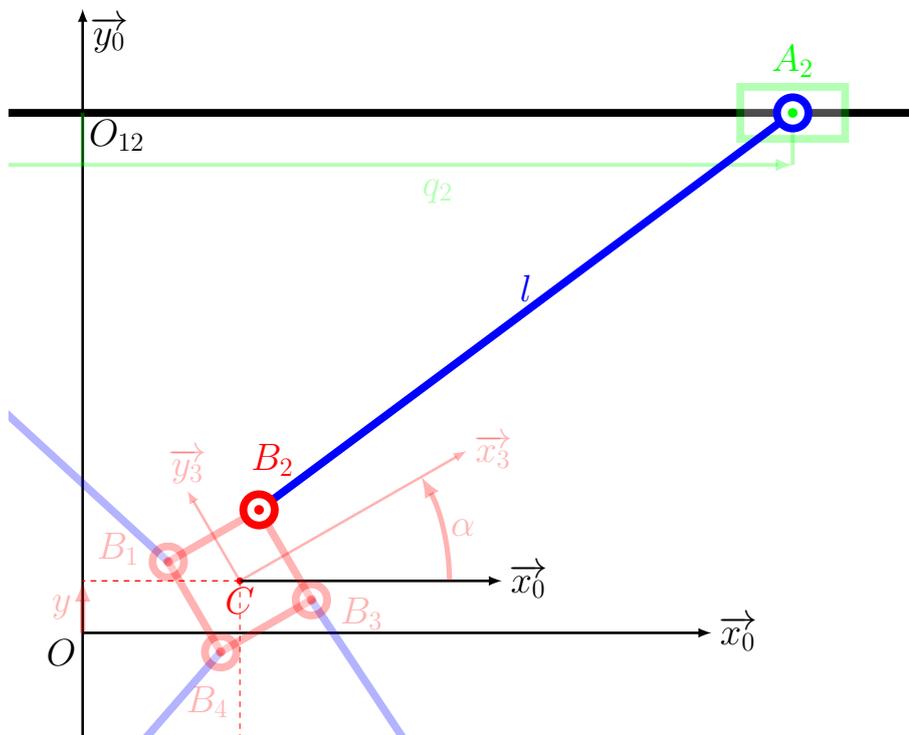


FIGURE 2.5: Schéma cinématique : focus sur la barre  $A_2B_2$

$$\frac{d\overrightarrow{A_i B_i}}{dt} \cdot \overrightarrow{A_i B_i} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\overrightarrow{O A_i}}{dt} \cdot \overrightarrow{A_i B_i} = \frac{d\overrightarrow{O B_i}}{dt} \cdot \overrightarrow{A_i B_i} \quad (2.5)$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 2i/0}} \cdot \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{V_{B \in 2i/0}} \cdot \overrightarrow{A_i B_i} \quad (2.6)$$

Les matrices  $\underline{J}_q$  et  $\underline{J}_X$  du robot sont trouvées par identification des termes du système composé des équations 2.6. La matrice définie par l'équation 2.9 s'appelle la matrice Jacobienne inverse du robot  $\underline{J}_m$  et elle peut être calculée si  $\underline{J}_q$  est inversible.

$$\underline{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \underline{J}_X \dot{\mathbf{X}} \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \underline{J}_q^{-1} \underline{J}_X \dot{\mathbf{X}} \quad (2.8)$$

$$\underline{J}_m = \underline{J}_q^{-1} \underline{J}_X \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Modèle dynamique solides rigides des PKMs

L'obtention du modèle dynamique est détaillée section 4.1 avec les paramètres propres aux équations de Lagrange.

#### Notation pour les PKMs

Pour faire le lien avec la notation utilisée en robotique, voici les relations à utiliser :

- Pour les paramètres de positions :
  - Les degrés de liberté sont les paramètres de position de la plateforme  $\mathbf{q}_L = \mathbf{X}$ .
  - Les paramètres contraints sont les paramètres des actionneurs  $\mathbf{q}_C = \mathbf{q}$ .
  - ⇒ Les axes asservis sont les paramètres  $\mathbf{q}_C$ .
- Pour les actions mécaniques :
  - Les actions mécaniques des degrés de liberté sont les actions mécaniques extérieures qui agissent sur la plateforme  $\mathbf{Q}_L = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ .
  - Les actions mécaniques des paramètres contraints sont les actions mécaniques des moteurs qui agissent sur les corps  $1i$ ,  $\mathbf{Q}_C = \boldsymbol{\tau}$ .
- La matrice de la relation de contrainte cinématique des paramètres  $\underline{H}$  devient la matrice Jacobienne inverse du robot  $\underline{J}_m$ . Il ne faudra pas oublier que  $\underline{J}_m$  dépend des paramètres  $X$  et  $q$  lors de la linéarisation (notamment pour les dérivations).

$$\underline{H}(q) = \underline{J}_m(X, q) \quad (2.10)$$

- La plateforme est un seul corps, la matrice  $\underline{\mathbb{M}}_X$  est la matrice de masse de la plateforme qui est invariante en fonction de la position.

- L'énergie cinétique des actionneurs est invariante en fonction de la position,  $\underline{\mathbb{M}}_q$  est une matrice diagonale constante contenant les masses ou les inerties des actionneurs.
- L'énergie potentielle de pesanteur est négligée devant les fortes accélérations du robot.
- L'énergie potentielle élastique n'est pas étudiée dans cette thèse, mais elle peut être facilement ajoutée dans les calculs par ceux qui le souhaitent avec le terme  $\mathbf{E}(q)$  du chapitre 4.

En connaissant l'architecture et la répartition des inerties du robot générique, nous pouvons écrire le modèle dynamique associé à ces robots. La cinématique des robots étant parallèle, il est plus pratique d'écrire le modèle dynamique avec le vecteur des coordonnées opérationnelles comme variable de mouvement. La somme de l'énergie cinétique des moteurs est :

$$2T_{PKM} = \sum_{i=1}^m m_q q_i^2 + m_X \overrightarrow{V_{C \in 3/0}}^2 + \left( \mathbb{I}_{RX} \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \right) \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \quad (2.11)$$

Avec  $m_{qi}$  l'inertie associée au moteur  $i$ ,  $m_{pfm}$  et  $\mathbb{I}_{Rpfm}$  respectivement la masse et la matrice d'inertie (diagonale) de la plateforme mobile.

$$2T_{PKM} = \dot{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbb{M}}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbb{M}}_X \dot{\mathbf{X}} \quad (2.12)$$

- $\underline{\mathbb{M}}_q$  matrice diagonale contenant les  $m_{qi}$
- $\underline{\mathbb{M}}_X$  matrice diagonale contenant les  $m_X$  pour les mouvements de translations et la diagonale de  $\mathbb{I}_{RX}$  pour le mouvement de rotation

La puissance virtuelle des actions mécaniques extérieures est :

$$P_{vPKM} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} + \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.13)$$

En utilisant les équations de Lagrange avec multiplicateurs, nous obtenons deux équations matricielles

$$\underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \underline{J}_X^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.14)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_q \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \underline{J}_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.15)$$

En multipliant l'équation 2.15 par  $\underline{J}_m^T$  ( $\underline{J}_m^T = \underline{J}_X^T \underline{J}_q^{-T}$ ) et en l'additionnant membre à membre avec l'équation 2.14, nous obtenons :

$$\underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

Pour finaliser le modèle dynamique du robot, il faut injecter l'équation 2.17 dans l'équation 2.16.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}} \quad (2.17)$$

Ce qui donne le modèle dynamique générique de la famille de PKM.

$$\left( \underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \right) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau} \quad (2.18)$$

À ce stade, nous rappelons que  $\underline{J}_m$  dépend potentiellement de  $X$ ,  $q$  et  $\theta$ .

### 2.1.4 Modèle dynamique solides rigides linéarisé des PKMs

Le modèle dynamique linéarisé est obtenu en appliquant le théorème de Taylor au modèle dynamique sur toutes les variables  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}_{\text{ext}})$  au point de fonctionnement  $P_f$ .

$$P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{F}_{\text{ext}0}) \quad (2.19)$$

Nous souhaitons faire une analyse modale du cas quasi-statique (autour de point de fonctionnement statique), donc  $\dot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}0} = \mathbf{0}$ .

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{K}}_0 \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Avec :

$$\underline{\mathbb{M}}_0 = \underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \quad (2.21)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_0 = \underline{\mathbb{K}}_X + \underline{\mathbb{K}}_g \quad (2.22)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_X = \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{K}}_q \underline{J}_{m0} \quad \underline{\mathbb{K}}_g = -\frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.23)$$

et

- $\underline{\mathbb{K}}_X$  la matrice de raideur de l'asservissement vue de la plateforme mobile
- $\underline{\mathbb{K}}_q$  la matrice de raideur des axes asservis du robot
- $\underline{\mathbb{K}}_g$  la matrice de raideur géométrique.

Sachant que les variables  $\mathbf{q}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  sont des fonctions de  $\mathbf{X}$ .  $\mathbf{q}_0$  et  $\boldsymbol{\theta}_0$  sont calculées pour être compatibles avec  $\mathbf{X}_0$ . La formule de dérivation de composition de fonction est utilisée pour effectuer la dérivée partielle. La matrice de raideur  $\underline{\mathbb{K}}_X$  est tout le temps utilisée dans les modèles dynamiques linéarisés des robots (Kozak [12]) et la matrice  $\underline{\mathbb{K}}_g$  est plutôt utilisée en ajout dans les matrices de raideurs des robots à câbles. Les robots à câbles étant des structures précontraintes, il est nécessaire que la modélisation prenne en compte cette précontrainte. Pour plus de détails voir la section 4.3 pour la linéarisation et la section 4.4 pour l'identification des matrices.

### 2.1.5 Modèle de type éléments-finis, (MSA)

La méthode choisie pour évaluer les fréquences d'oscillation des robots dans cette partie est la Matrix Structural Analysis qui est basée sur une méthode des éléments finis utilisant uniquement des éléments à une et deux dimensions, voir chapitre 1. La raideur due aux actions mécaniques est implémentée dans le modèle par des éléments finis de poutre 1D permettant la prise en compte des précontraintes. Nous étudions deux robots le DualV et le PR-2 dans des situations différentes pour analyser leurs comportements. Nous concluons cette partie sur des nouvelles hypothèses à prendre en compte pour l'étude suivante.

Pour la modélisation des robots, nous posons plusieurs hypothèses :

- les robots sont conçus pour avoir de hautes performances (structures peu déformables, grandes accélérations, grandes vitesses et grandes précisions)
- les solides ont un comportement élastique linéaire 3D, loi de Hooke
- les matériaux ont un comportement linéaire
- le frottement est négligé
- les jeux de fonctionnements sont nuls

Ces hypothèses sont le point de départ de l'étude que nous proposons, elles seront modifiées suivant les conclusions des parties suivantes. La première partie comparera la contribution de la précontrainte sur les fréquences par rapport à la raideur structurelle. Puis dans la seconde partie, nous comparerons les effets de la précontrainte sur la fréquence par rapport à la raideur structurelle et à la raideur d'asservissement. Nous finirons par comparer la contribution de la précontrainte par rapport à la raideur d'asservissement et nous concluons sur les effets de la précontrainte.

## 2.2 Le robot parallèle PRR-2

### 2.2.1 Description du robot PRR-2

Le robot PRR-2 est un robot parallèle à deux degrés de mouvements représentés par le vecteur des coordonnées articulaires  $\mathbf{X}$  et deux degrés d'actionnement représentés par le vecteur des coordonnées opérationnelles  $\mathbf{q}$ . **Le robot PRR-2 est un robot non redondant.** Les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  représentent l'orientation des barres 12 et 22, respectivement les barres de  $A_1$  et  $A_2$  vers  $C$ , voir figures 2.6 et 2.7. Pour faciliter les calculs,  $\theta_1$  est choisi pour représenter l'ouverture du robot et  $\theta_1$  est renommé  $\theta$ .

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La modélisation du robot PRR-2 est faite dans le plan 2D  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . C'est un des robots les plus simples. Il est utilisé dans cette thèse pour tester les différents modèles (solide rigide et éléments finis). Il a une singularité de type II [24] lorsque le point  $C$  est sur l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  ( $y = 0$  et  $\theta = 0$ ), ce qui permet de tester les effets de la précontrainte. C'est le seul point où nous pouvons tendre les barres uniquement avec les actionneurs. Les barres ont une longueur de  $0,3m$  et une masse de  $0,73kg$ . Les moteurs 1 et 2 ont une masse de  $5,6kg$  chacun. Le centre de gravité des moteurs se situe respectivement au point  $A_1$  et  $A_2$ . La plateforme mobile pèse  $6kg$  et son centre de gravité est repéré au point  $C$ . Pour la modélisation éléments finis, les barres sont modélisées avec leur propre poids. Pour la modélisation solides rigides, les barres sont modélisées sans masse, leur masse étant répartie entre la masse des moteurs et celle de la plateforme.

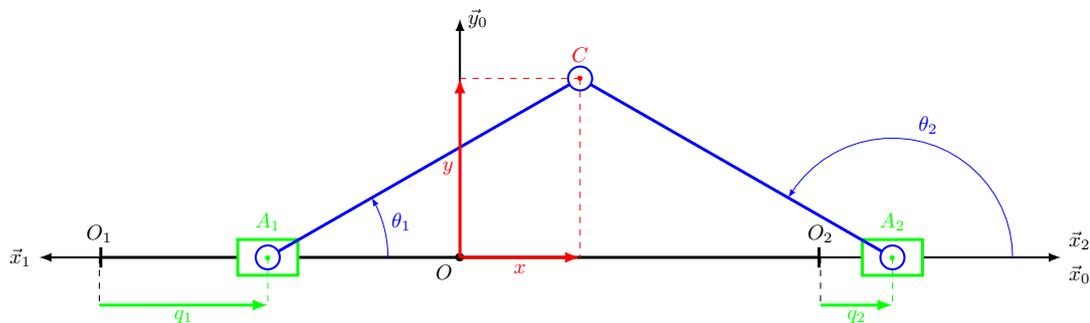


FIGURE 2.6: Schéma cinématique du robot PRR-2

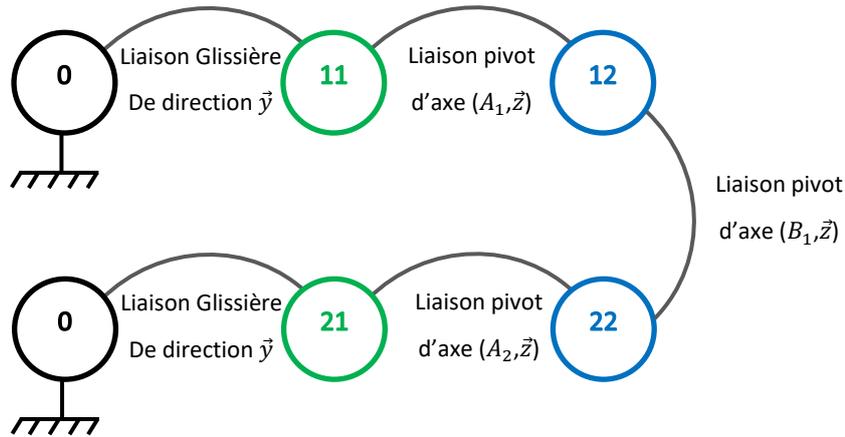


FIGURE 2.7: Graphe de liaison du robot PRR-2

### 2.2.2 Modèle géométrique du robot PRR-2

Ici, nous cherchons la fonction qui permet de calculer les  $\mathbf{q}$  en fonction des  $\mathbf{X}$ . La position du point  $C(x, y)$  est connue. Les points  $A_1$  et  $A_2$  sont les deux intersections du cercle de centre  $C$  et de rayon  $l$  (longueur des barres) avec l'axe  $(O, \vec{x}_1)$  (ou  $(O, \vec{x}_2)$  car ce sont les mêmes axes) voir figure 2.8. Ce qui se traduit par l'équation :

$$\overrightarrow{A_i C}^2 = l^2 \quad (2.25)$$

$$\left( \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{O_i O} + \overrightarrow{O C} \right)^2 = l^2 \quad (2.26)$$

$$\overrightarrow{A_i O}^2 + \overrightarrow{O_i O}^2 + \overrightarrow{O C}^2 + 2\overrightarrow{A_i O} \cdot \overrightarrow{O_i O} + 2\overrightarrow{O_i O} \cdot \overrightarrow{O C} + 2\overrightarrow{A_i O} \cdot \overrightarrow{O C} = l^2 \quad (2.27)$$

$$q_i^2 + 2 \left( l - \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i \right) q_i + \overrightarrow{O C}^2 - 2l \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i = 0 \quad (2.28)$$

Le discriminant réduit  $\Delta'$  de l'équation 2.28 vaut :

$$\Delta' = \left( l - \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i \right)^2 - \overrightarrow{O C}^2 + 2l \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i \quad (2.29)$$

$$\Delta' = l^2 + \left( \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i \right)^2 - \overrightarrow{O C}^2 \quad (2.30)$$

$$\Delta' = l^2 - \left( \overrightarrow{O C} \cdot \vec{y}_i \right)^2 \quad (2.31)$$

Les solutions de l'équation 2.28 sont :

$$q_i = \overrightarrow{O C} \cdot \vec{x}_i - l \pm \sqrt{l^2 - \left( \overrightarrow{O C} \cdot \vec{y}_i \right)^2} \quad (2.32)$$

Les solutions compatibles avec le mode d'assemblage du robot sont :

$$q_1 = -l - x + \sqrt{l^2 - y^2} \quad (2.33)$$

$$q_2 = -l + x + \sqrt{l^2 - y^2} \quad (2.34)$$

Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les orientations des barres 21 et 22.

$$\theta = \theta_1 = \text{atan2}\left(y, \sqrt{l^2 - y^2}\right) \quad (2.35)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}\left(y, -\sqrt{l^2 - y^2}\right) \quad (2.36)$$

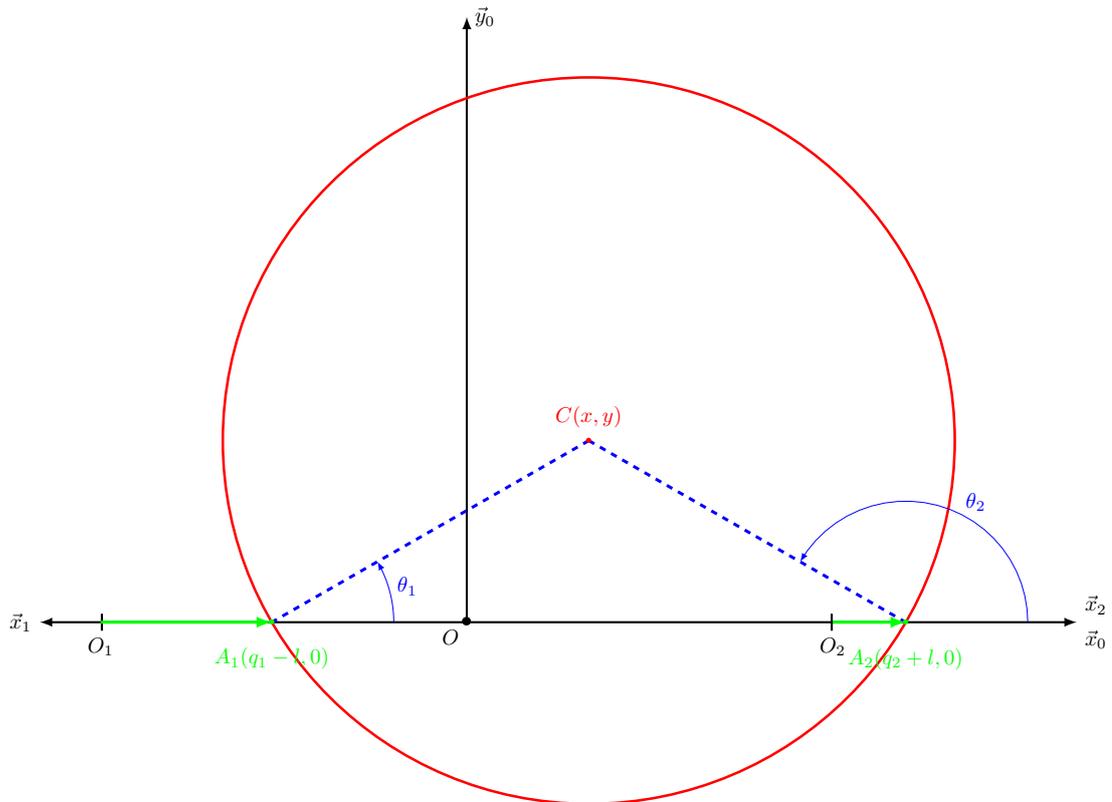


FIGURE 2.8: Construction du modèle géométrique du robot PRR-2

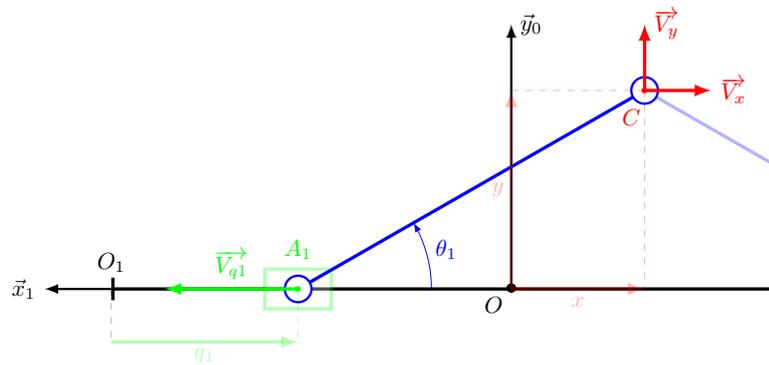
### 2.2.3 Modèle cinématique du robot PRR-2

L'étude cinématique du robot PRR-2 permet l'écriture de la relation entre les vitesses de la plateforme mobile  $\overrightarrow{V_{C \in 3/0}}$  avec la vitesse des moteurs. Les équations suivantes donnent les relations qui existent entre l'écriture matricielle utilisée en robotique et la cinématique classique.

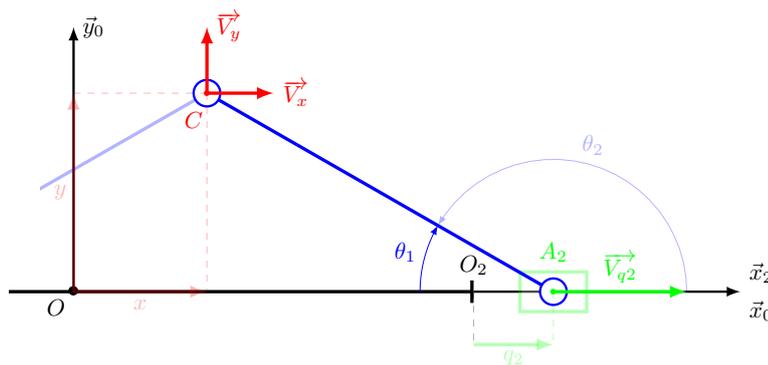
$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} \quad \overrightarrow{V_x} = \dot{x} \overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{V_y} = \dot{y} \overrightarrow{y_0} \quad (2.37)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{A_1 \in 1/0}} = \dot{q}_1 \overrightarrow{x_1} \quad \overrightarrow{V_{A_2 \in 2/0}} = \dot{q}_2 \overrightarrow{x_2} \quad (2.38)$$

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{A_1 C}}{l} \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{A_2 C}}{l} \quad (2.39)$$



(a) Schéma équiprojectivité barre 1



(b) Schéma équiprojectivité barre 2

FIGURE 2.9: Cinématique du robot PRR-2

L'équiprojectivité sur les barres 21 et 22 donne les équations :

$$\overrightarrow{V_{A1 \in 1/0}} \cdot \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{u_1} \quad \longrightarrow \quad q_1 \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{u_1} = (\dot{x} \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{u_1} \quad (2.40)$$

$$\overrightarrow{V_{A2 \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{u_2} \quad \longrightarrow \quad q_2 \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = (\dot{x} \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{u_2} \quad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_1} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \implies \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -1 & -\tan \theta \\ 1 & -\tan \theta \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \quad (2.43)$$

Les matrices  $\underline{J}_{qP_{RR-2}}$ ,  $\underline{J}_{XP_{RR-2}}$  et  $\underline{J}_{mP_{RR-2}}$  sont obtenues par identification.

$$\underline{J}_{qP_{RR-2}} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad \underline{J}_{XP_{RR-2}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\text{Pour } \theta \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad \underline{J}_{mP_{RR-2}} = \begin{bmatrix} -1 & -\tan \theta \\ 1 & -\tan \theta \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Les calculs du modèle dynamique linéarisé ont besoin de la relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\mathbf{X}}$ . Cette relation est obtenue en utilisant la loi des champs des moments entre le point  $A_1$  et  $C$  pour les vitesses.

$$\overrightarrow{V_{C \in 21/0}} = \overrightarrow{V_{A1 \in 21/0}} + \overrightarrow{CA_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21/0}} \quad (2.46)$$

$$\dot{x} \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0} = -q_1 \overrightarrow{x_0} - l \overrightarrow{u_1} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{z_0} \quad (2.47)$$

$$(\dot{x} + q_1) \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0} = l \dot{\theta} \overrightarrow{v_1} \quad (2.48)$$

Avec  $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{z_0}$ . En projetant l'équation sur le vecteur  $\overrightarrow{v_1}$  :

$$(\dot{x} + q_1) \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{v_1} + \dot{y} \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{v_1} = l \dot{\theta} \quad (2.49)$$

$$-(\dot{x} + (-\dot{x} - \tan \theta \dot{y})) \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = l \dot{\theta} \quad (2.50)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{l \cos \theta} \dot{y} \quad (2.51)$$

Ce résultat de la cinématique permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{l \cos \theta} \quad (2.52)$$

### 2.2.4 Modèle dynamique solides rigides du robot PRR-2

Les inerties en mouvement du robot PRR-2 sont les glissières motorisées de masse  $m_q$  du corps 11 et 12 dont les centres de gravité se situent aux points  $A_i$  et la plateforme mobile (corps 3) de masse  $m_X$  dont le centre de gravité est localisé au point  $C$ . Le double de l'énergie cinétique du robot est donc :

$$2T_{PRR2} = m_q \overline{V_{A1 \in 11/0}}^2 + m_q \overline{V_{A2 \in 12/0}}^2 + m_X \overline{V_{C \in 21/0}}^2 \quad (2.53)$$

Ce qui se développe en forme polynomiale. Les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_{XPRR2}$  et  $\underline{\mathbb{M}}_{qPRR2}$  sont identifiées à partir de l'équation de l'énergie cinétique. L'énergie cinétique des barres est répercutée sur l'énergie cinématique des moteurs et de la plateforme grâce à l'hypothèse utilisée pour cette famille de robots.

$$2T_{PRR2} = m_q \dot{q}_1^2 + m_q \dot{q}_2^2 + m_X \dot{x}^2 + m_X \dot{y}^2 \quad (2.54)$$

Ce qui donne :

$$\underline{\mathbb{M}}_{qPRR2} = \begin{bmatrix} m_q & 0 \\ 0 & m_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbb{M}}_{XPRR2} = \begin{bmatrix} m_X & 0 \\ 0 & m_X \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

La puissance virtuelle du système est la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs sur la plateforme et de la puissance virtuelle :

$$P_{vPRR2} = \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{X}}^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Pour assembler le robot il faut utiliser sa matrice Jacobienne  $\underline{J}_{mPRR2}$  et sa dérivée  $\underline{\dot{J}}_{mPRR2}$ . (La matrice  $\underline{J}_{mPRR2}$  étant la matrice  $\underline{H}$  du chapitre 4 avec les hypothèses de la famille de robots).

$$\underline{J}_{mPRR2} = \begin{bmatrix} -1 & -\tan \theta \\ 1 & -\tan \theta \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \quad \underline{\dot{J}}_{mPRR2} = -\frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Les équations du mouvement du robot PRR2 sont les équations (2.58) et (2.62)

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR2}(\theta) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{C}}_{PRR2}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{Q}}_{PRR2} \quad (2.58)$$

Avec

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR2}(\theta) = \underline{\mathbb{M}}_{XPRR2} + \underline{J}_{mPRR2}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR2} \underline{J}_{mPRR2} \quad (2.59)$$

$$\underline{\mathbb{C}}_{PRR2}(\theta) = \underline{J}_{PRR2}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR2} \underline{\dot{J}}_{PRR2} \quad (2.60)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}_{PRR2} = \underline{\mathbf{Q}}_L + \underline{J}_{mPRR2}^T \underline{\mathbf{Q}}_C \quad (2.61)$$

Lorsque nous effectuons les calculs des matrices de l'équation (2.58), nous obtenons chacun des termes de l'équation (2.62)

$$\begin{bmatrix} m_X + 2m_q & 0 \\ 0 & m_X + 2m_q t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\dot{\theta} m_q t}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -t & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

avec  $t = \tan \theta$  et  $c = \cos \theta$

## 2.2.5 Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-2

Pour effectuer l'analyse modale du robot PRR-2, il faut calculer les matrices  $\underline{\mathbb{K}}_X$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$

$$\underline{\mathbb{K}}_X = \underline{J}_{m0}^T \underline{K}_q \underline{J}_{m0} = 2k_q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tan^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_g = - \frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.64)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_g = \frac{\tau_{10} + \tau_{20}}{l \cos^3 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Le modèle dynamique linéarisé du robot PRR-2 pour l'analyse modale est décrit par les équations (2.66) et (2.67). Les valeurs des paramètres constants sont données dans le tableau 2.1.

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_X + \underline{\mathbb{K}}_g) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} m_X + 2m_q & 0 \\ 0 & m_X + 2m_q \tan^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{bmatrix} + \left( 2k_q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tan^2 \theta \end{bmatrix} + \frac{\tau_{10} + \tau_{20}}{l \cos^3 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.67)$$

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse des moteurs	$m_q$	5,6	kg
Masse de la PFM	$m_x$	6	kg
Masse de la barre	$m_b$	0,73	kg
Masse volumique de la barre	$\rho$	2700	$kg/m^3$
Longueur de la barre	1	0,3	m
Côté extérieur de la section carrée	$c_{ext}$	0,05	m
Côté intérieur de la section carrée	$c_{int}$	0,04	m
Raideur d'asservissement	$k_q$	200000	$N/m$

TABLE 2.1: Paramètres constants du PRR-2

### Analyse modale du robot PRR-2 sur son espace de travail

Pour visualiser les évolutions des fréquences propres d'oscillation du robot sur l'espace de travail, il faut faire varier la position  $y$  de 0 à  $l$ . Les déplacements sur  $x$  n'ont aucune influence sur les vibrations car ils ne modifient en rien la géométrie du robot. Il n'est pas nécessaire de faire varier la position de  $-l$  à  $l$  car le robot a une géométrie symétrique pour les positions  $y$  positifs avec les positions  $y$  négatifs. Pour cette étude, il est impossible d'appliquer la précontrainte au robot, car le seul point où cela est possible est pour  $y = 0$ . En prenant en compte les informations précédentes, le modèle dynamique linéarisé (2.67) devient l'équation (2.68). La figure 2.10 est obtenue en calculant les fréquences propres dans l'espace de travail.

$$\begin{bmatrix} m_X + 2m_q & 0 \\ 0 & m_X + 2m_q \tan^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{bmatrix} + 2k_q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tan^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

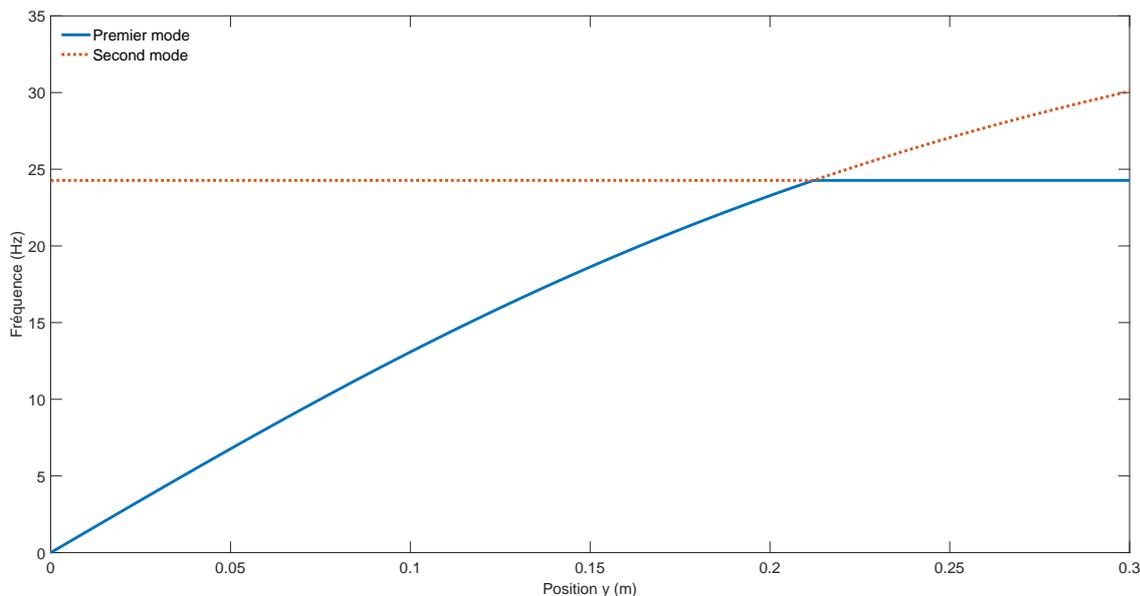


FIGURE 2.10: Analyse modale du modèle solide rigide du robot PRR-2

Le robot possède deux types de singularités :

- Une singularité de type II en  $y = 0$ . Ce qui se vérifie lorsque la fréquence d'oscillation du premier mode tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers 0.
- Une singularité de type I en  $y = l$ . Ce qui se traduit par le terme  $\tan^2 \theta$  qui tend vers l'infini. Les effets ne sont pas visibles sur la figure 2.10 car le calcul n'aboutit pas pour ce point.

### Analyse modale du robot PRR-2 : visualisation des effets de la précontrainte

Pour visualiser les effets de la précontrainte sur le robot PRR-2, il faut mettre le robot en position telle que  $y = 0$  puis appliquer des forces d'égale intensité pour les moteurs ( $\tau_{10} = \tau_{20} = \tau_0$ ). Avec les informations précédentes, le modèle dynamique linéarisé devient l'équation 2.69 :

$$\begin{bmatrix} m_X + 2m_q & 0 \\ 0 & m_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\ddot{x} \\ \Delta\ddot{y} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_q & 0 \\ 0 & \frac{\tau_0}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.69)$$

La figure 2.11 est obtenue en calculant les fréquences propres au point  $\mathbf{X} = [0 \ 0]^T$ .

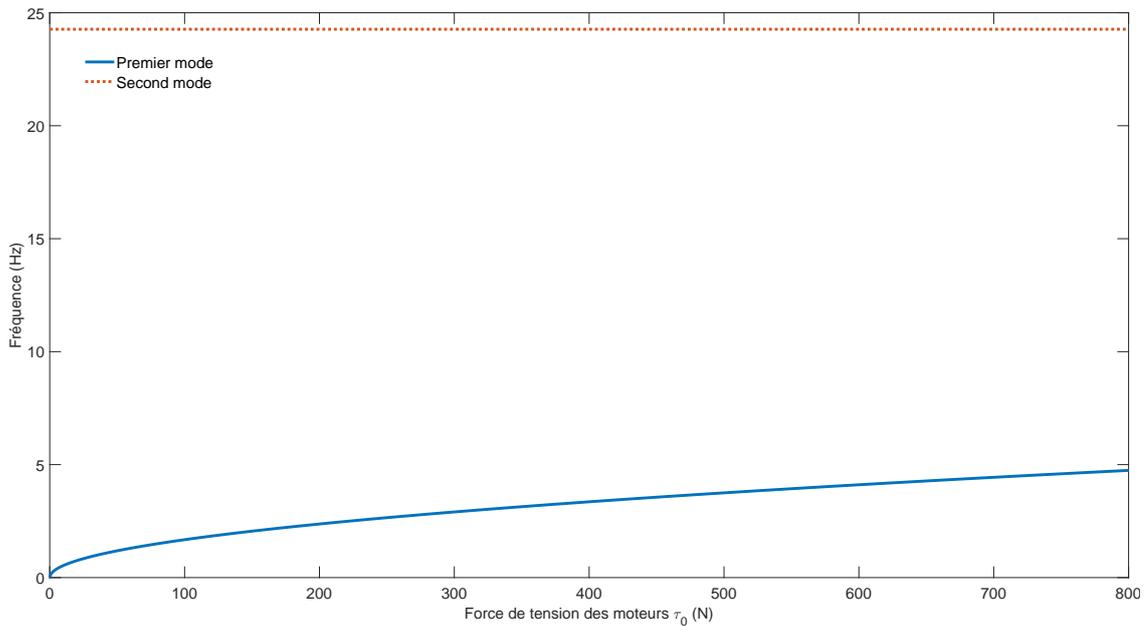


FIGURE 2.11: Analyse modale du modèle solide rigide du robot PRR-2 : effet de la précontrainte

La précontrainte dans ce robot fonctionne comme avec les éléments finis de barre, c'est-à-dire avec une raideur en  $F/l$ . La section carrée des barres est égale à  $9\text{cm}^2$ , les moteurs appliquent une force de tension maximum de  $800\text{N}$  permanente, ce qui induit une contrainte de  $0,9\text{MPa}$ . Les barres peuvent tenir ces efforts, par contre les moteurs sont proches du maximum possible. Avec ces valeurs la fréquence propre calculée ne dépasse pas  $5\text{Hz}$ . Cependant, dès qu'il y a tension, nous constatons une raideur non nulle.

## 2.2.6 Analyse modale du modèle dynamique éléments finis linéaire du robot PRR-2

### Analyse modale du robot PRR-2 sur son espace de travail

Dans cette partie, nous construisons directement le modèle dynamique du robot en assemblant les éléments qui le composent et en rajoutant le couplage lié aux liaisons cinématiques du robot. La figure 2.12 décrit le modèle éléments finis du robot PRR-2. Les lignes bleues sont les éléments finis de poutre des barres 21 et 22. Les points bleus sont les nœuds aux extrémités des éléments. Le nœud  $N_{13}$  représente la masse de la plateforme mobile. Les lignes vertes  $R_1$ ,  $R_2$  et les cercles rouges  $R_3$ ,  $R_4$  représentent les relations cinématiques des nœuds. La figure 2.13 représente le modèle éléments finis assemblés

- $R_1$  : liaison encastrement entre  $N_6$  et  $N_{13}$
- $R_2$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_{13}$  et  $N_{12}$
- $R_3$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_1$  et le bâti
- $R_4$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_7$  et le bâti

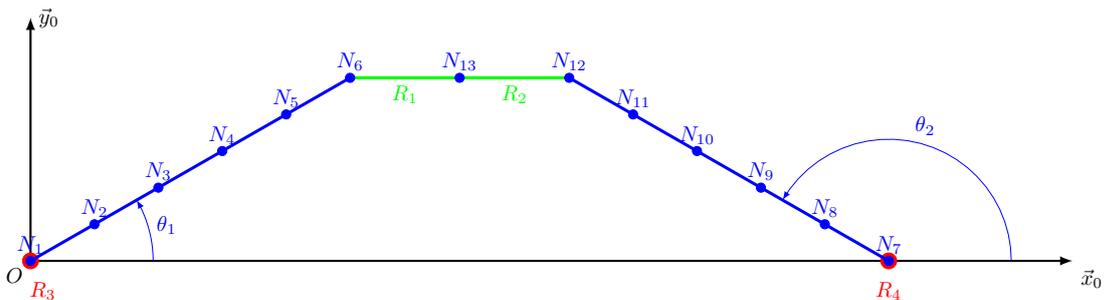


FIGURE 2.12: Modèle éléments finis du robot PRR-2

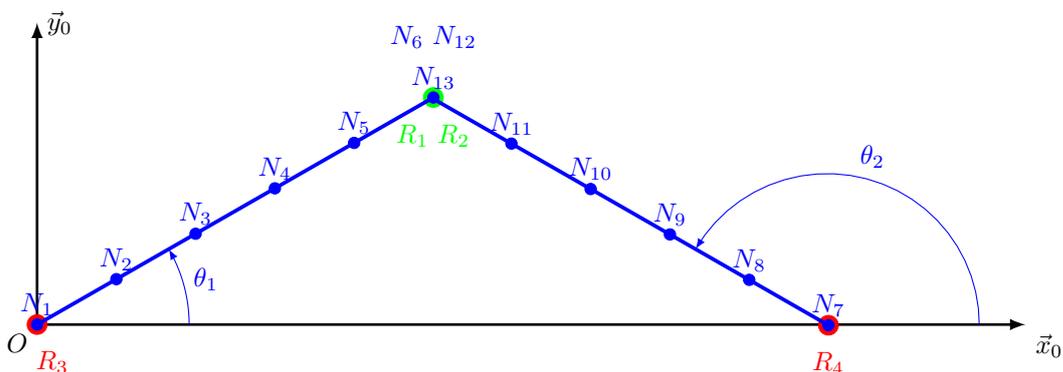


FIGURE 2.13: Modèle éléments finis assemblés du robot PRR-2

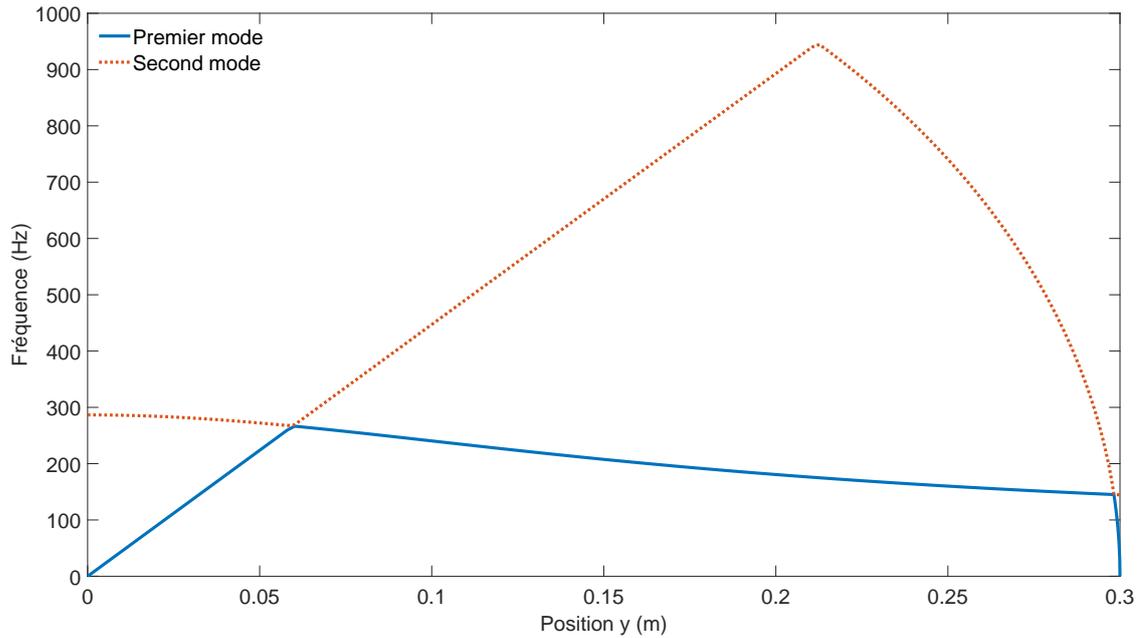


FIGURE 2.14: Analyse modale du modèle élément fini du robot PRR-2

Sur la figure 2.14, nous constatons que la forme des courbes est globalement différente de la figure 2.10, car ce sont différents modes qui sont observables. Il y a la même singularité type II en  $y = 0$  que pour le modèle solides rigides. En  $y = l$  il y a aussi une singularité mais cette fois-ci le calcul est possible et la fréquence chute vers  $0Hz$  car la raideur est nulle. La fréquence du premier mode de cette analyse est largement au dessus de celle du modèle solides rigides, car la raideur de la structure est supérieure à la raideur de l'asservissement pour les paramètres choisis.

### Analyse modale du robot PRR-2 : visualisation des effets de la précontrainte

Pour tester les effets de la précontrainte pour le modèle éléments finis, il faut orienter les barres 21 et 22 avec les angles respectifs  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = \pi$ , comme sur la figure 2.15. La figure 2.16 donne la fréquence du premier mode pour une force de tension allant de 0N à 800N. Dans le cas du robot PRR-2, le fonctionnement de la précontrainte donne le même résultat avec les deux modèles.

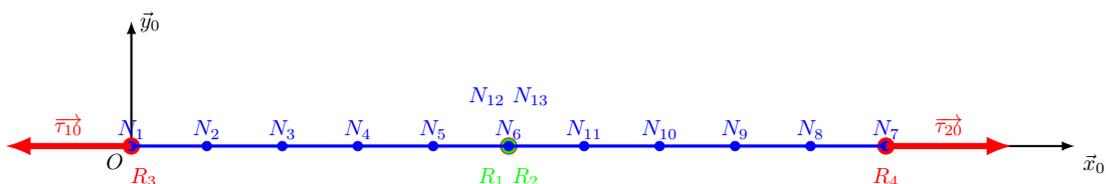


FIGURE 2.15: Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-2 : cas précontraint

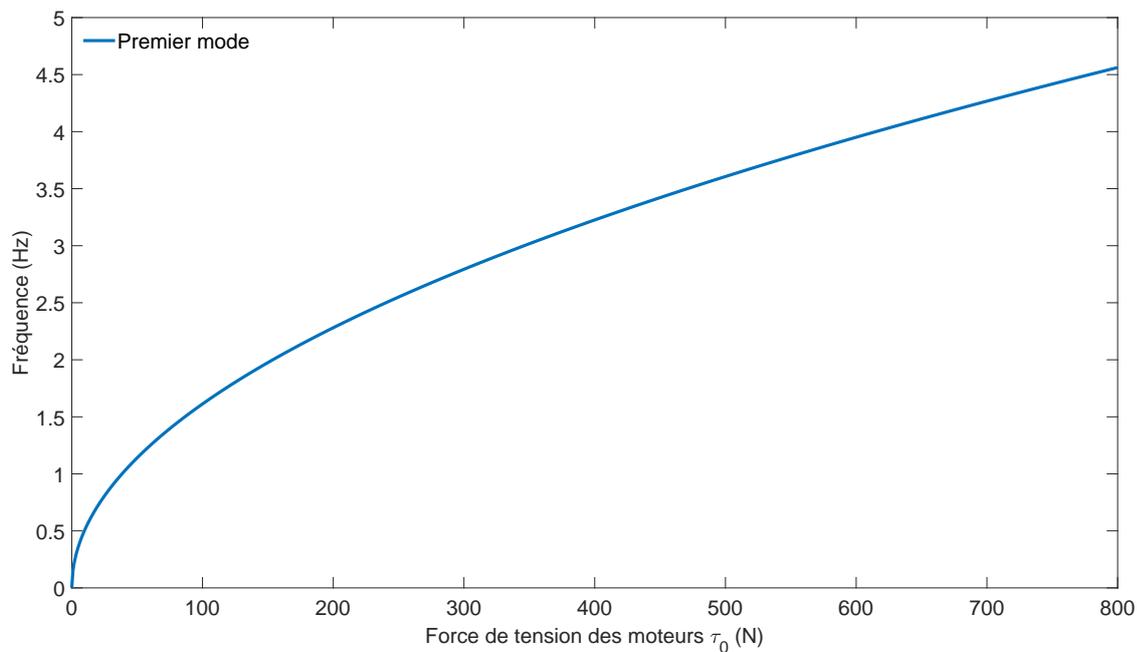


FIGURE 2.16: AM du modèle EF du robot PRR-2 : effet de la précontrainte

**Analyse modale du robot PRR-2 : modélisation EF avec raideur d'asservissement**

Pour prendre en compte la raideur d'asservissement dans le modèle éléments finis, il faut modifier les relations cinématiques  $R_3$  et  $R_4$  pour qu'elles libèrent le mouvement de translation suivant  $\vec{x}_0$ . Les barres en rouge sont des éléments de barre simulant l'asservissement. Ils ont pour raideur  $k_q$  et pour masse nodale  $m_q$ . Les liaisons cinématiques de ce modèle sont décrites en dessous :

- $R_1$  : liaison encastrement entre  $N_6$  et  $N_{13}$
- $R_2$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_{13}$  et  $N_{12}$
- $R_3$  : liaisons en série : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  suivi d'une liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  en entre  $N_1$  et le bâti
- $R_4$  : liaisons en série : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  suivi d'une liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  entre  $N_7$  et le bâti
- $R_5$  : encastrement entre  $N_{14}$  et le bâti
- $R_6$  : encastrement entre  $N_{17}$  et le bâti
- $R_7$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_{15}$  et  $N_1$
- $R_8$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_7$  et  $N_{16}$

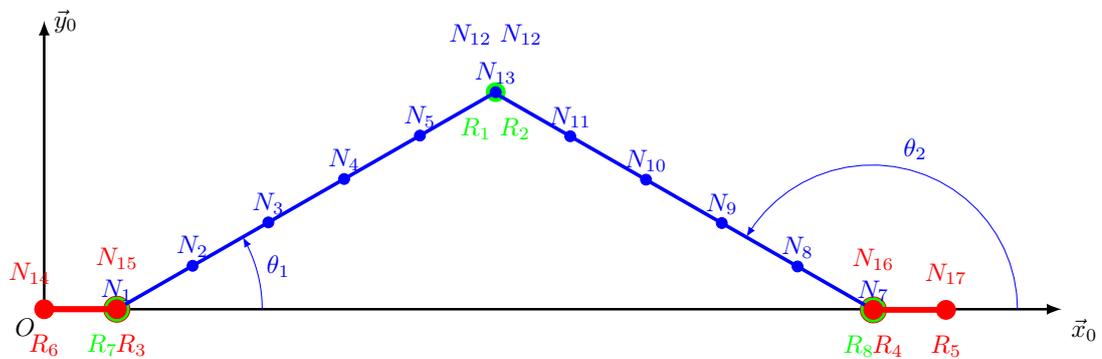


FIGURE 2.17: Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-2 avec raideur d'asservissement

Le problème de cette simulation est que le conditionnement du système matriciel est très mauvais et les résultats n'ont aucun sens. La conditionnement d'une matrice est donné par l'équation (2.70). Les notations  $A$  et  $\lambda_i$  sont valables seulement pour (2.70) et ils représentent respectivement une matrice carré symétrique définie positive et ses valeurs propres. (Ce raisonnement ne prend pas en compte la pré-contrainte car la matrice  $A$  ne serait plus symétrique).

$$Cond(A) = \frac{|\max(\lambda_i)|}{|\min(\lambda_i)|} \quad (2.70)$$

Pour justifier ce mauvais conditionnement, il faut comparer la pulsation de vibrations au carré car  $\omega_i^2 = \lambda_i$ .

- La valeur propre maximale de la matrice est  $\omega_{poutre}^2$  qui représente la vibration du mode de traction-compression d'un élément de poutre.
- La valeur propre minimale de la matrice est  $\omega_{barre}^2$  qui représente la vibration du mode de traction-compression d'un élément de barre.

$$\omega_{poutre}^2 = \frac{E}{\rho l_{elm}^2} \approx 2,88.10^{10} (rad/s)^2 \quad \omega_{barre}^2 = \frac{k_q}{m_q} \approx 3,6.10^4 (rad/s)^2 \quad (2.71)$$

Pour la suite, les modèles éléments finis prenant en compte la raideur d'asservissement ne seront plus étudiés à cause du choix de la valeur numérique très faible de la raideur des actionneurs.

## 2.3 Le robot parallèle PRR-3

### 2.3.1 Description du robot PRR-3

Le robot PRR-3 est un robot parallèle redondant de degré 1 à deux degrés de mouvement représentés par le vecteur des coordonnées articulaires  $\mathbf{X}$  et trois degrés d'actionnement représentés par le vecteur des coordonnées opérationnelles  $\mathbf{q}$ . Les paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  représentent l'orientation des barres 12, 22 et 32. Le robot PRR-3 est construit sur le modèle du robot PRR-2 en ajoutant une barre supplémentaire. Cette barre en plus permet de pré-contraindre le robot en tout point de son espace de travail.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

La modélisation du robot PRR-3 est faite dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . Ce robot est utilisé dans cette thèse pour tester les effets de la précontrainte sur tout l'espace de travail. La longueur des barres est de 30cm et elles ont une masse de 0,02kg. Les moteurs 1, 2 et 3 ont une masse de 5,6kg chacun. Le centre de gravité des moteurs se situe respectivement aux points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . La plateforme mobile pèse 6kg et son centre de gravité est repéré au point C. Les hypothèses de modélisation du robot PRR-2 sont utilisées pour la modélisation éléments finis et solides rigides du robot PRR-3. Les modèles géométrique, cinématique et dynamique du robot PRR-3 sont détaillés dans l'Annexe A.

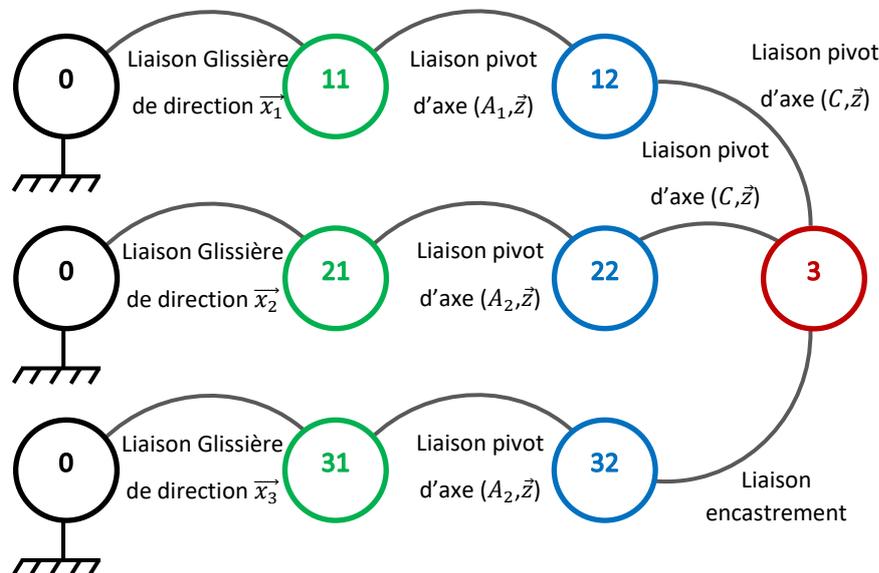


FIGURE 2.18: Graphe de liaison du robot PRR-3

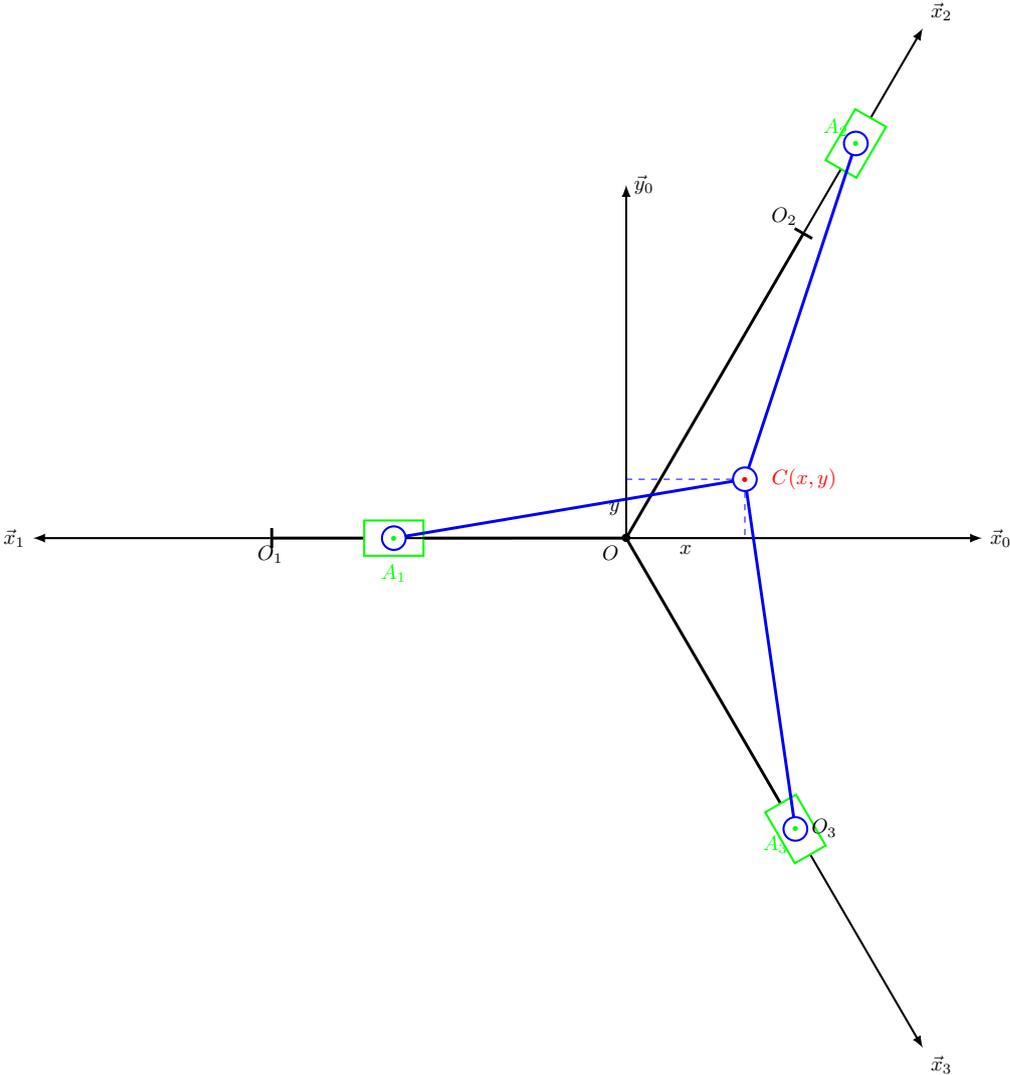


FIGURE 2.19: Schéma cinématique du robot PRR-3

### 2.3.2 Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-3

Pour effectuer l'analyse modale du robot PRR-3, il faut calculer les matrices  $\underline{\mathbb{K}}_X$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$ . Seuls les calculs de  $\underline{\mathbb{K}}_g$  sont détaillés, pour les autres matrices, les calculs sont faits formellement en utilisant Matlab symbolic toolbox puis évalués numériquement en utilisant Matlab à chaque point de l'espace de travail.

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_X + \underline{\mathbb{K}}_g) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_0 = \underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \quad (2.74)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_X = \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{K}}_q \underline{J}_{m0} \quad (2.75)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_g = -\frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.76)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_g = -\frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{q}} \underline{J}_{mPRR3} \quad (2.77)$$

#### Analyse modale du robot PRR-3 sur son espace de travail

Pour réaliser la cartographie du premier mode d'oscillation du robot PRR3 représentée sur la figure 2.20, les coordonnées du point  $C$  varient de  $x_{min} = -0,4m$  à  $x_{max} = 0,4m$  et de  $y_{min} = -0,4m$  à  $y_{max} = 0,4m$ . Pour chaque position, le calcul est effectué si les  $q_i$  sont des réels, c'est-à-dire que la position est atteignable. Les constantes du robot PRR2 (voir table 2.2) sont utilisées pour construire cette cartographie. Grâce à sa troisième barre le robot PRR3 n'a pas de singularité au centre de son espace de travail et la fréquence d'oscillation ne varie pas beaucoup 19 – 22Hz sur la partie centrale (plus de la moitié) de son volume accessible.

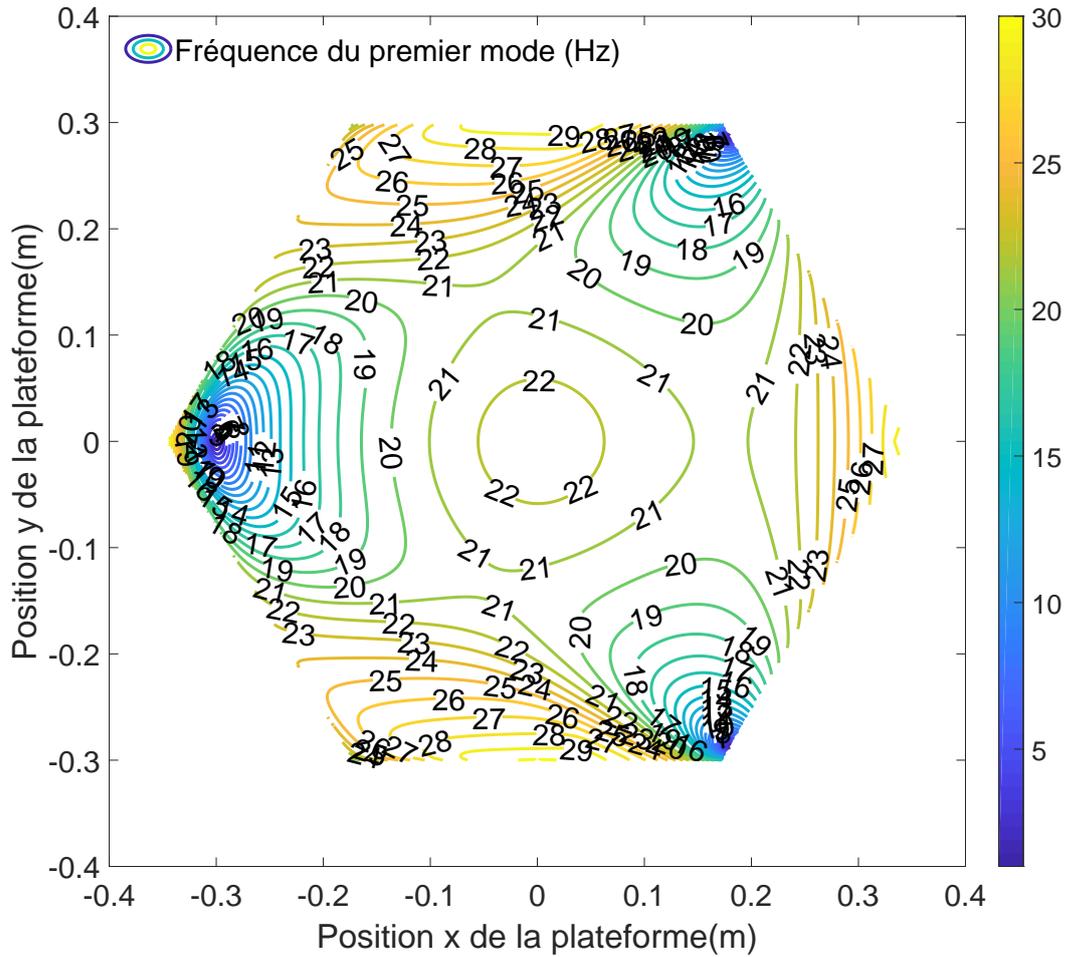


FIGURE 2.20: Cartographie du premier mode d'oscillation du robot PRR3

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse des moteurs	$m_q$	5,6	kg
Masse de la PFM	$m_x$	6	kg
Longueur de la barre	$l$	0,3	m
Raideur d'asservissement	$k_q$	200000	$N/m$

TABLE 2.2: Paramètres constants du PRR-3

**Analyse modale du robot PRR-3 : visualisation des effets de la précontrainte**

Pour mieux voir les effets de la précontrainte, l'analyse modale est menée sur l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Cet axe a l'avantage de traverser les zones importantes du robot PRR3. Les coordonnées du point  $C$  varient donc de  $x_{min} = -0,4m$  à  $x_{max} = 0,4m$  pour  $y = 0m$ . Les actions des moteurs sont calculées en utilisant la formule 2.78 et en imposant la norme infinie du vecteur  $\tau_0$  égale à 800N. La figure 2.22 représente le résultat de l'analyse modale le long de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  pour des valeurs d'actionnement maximum de 0N en bleu, 400N en rouge et 800N en orange. Les effets de la précontrainte sont quasiment négligeables dans l'espace de travail, sauf autour de la singularité de type II ( $x = -0.3m$  voir figure 2.21) où la précontrainte permet de limiter la chute de fréquence à 5Hz.

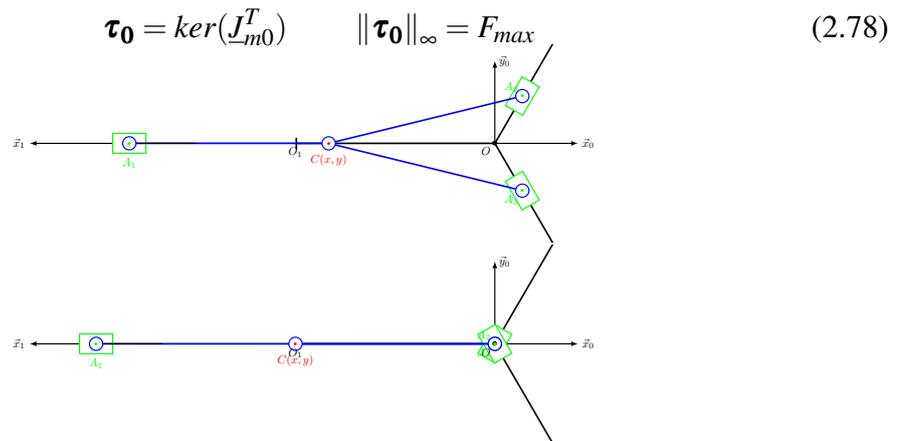


FIGURE 2.21: Singularité de type II pour  $x = -0,3m$  du robot PRR-3

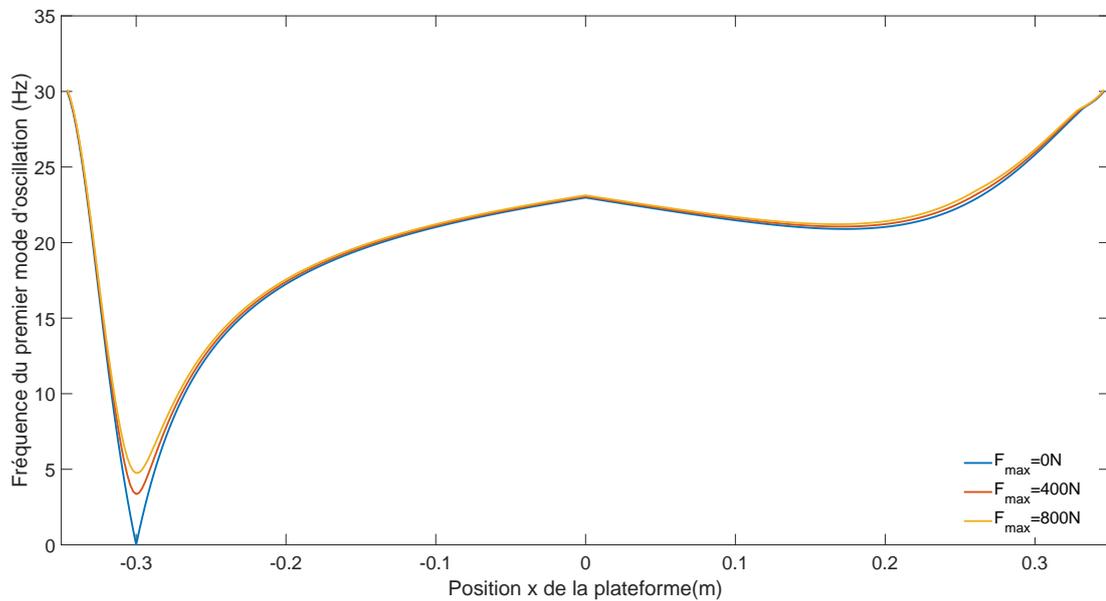


FIGURE 2.22: Analyse modale du robot PRR3 avec modélisation de la précontrainte

### 2.3.3 Analyse modale du modèle dynamique éléments finis linéaire du robot PRR-3

Dans cette partie, nous construisons directement le modèle dynamique du robot en assemblant les éléments qui le composent et en rajoutant le couplage lié aux liaisons cinématiques du robot. La figure 2.23 décrit le modèle éléments finis assemblé du robot PRR-3. Les lignes bleues sont les éléments finis de poutre des barres 21, 22 et 23. Les points bleus sont les nœuds aux extrémités des éléments. Le noeuds  $N_{16}$  représente la masse de la plateforme mobile.

- $R_1$  : liaison encastrement entre  $N_5$  et  $N_{16}$
- $R_2$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_5$  et  $N_{10}$
- $R_3$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_5$  et  $N_{15}$
- $R_{11}$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_1$  et le bâti
- $R_{12}$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_6$  et le bâti
- $R_{13}$  : liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  entre  $N_{11}$  et le bâti

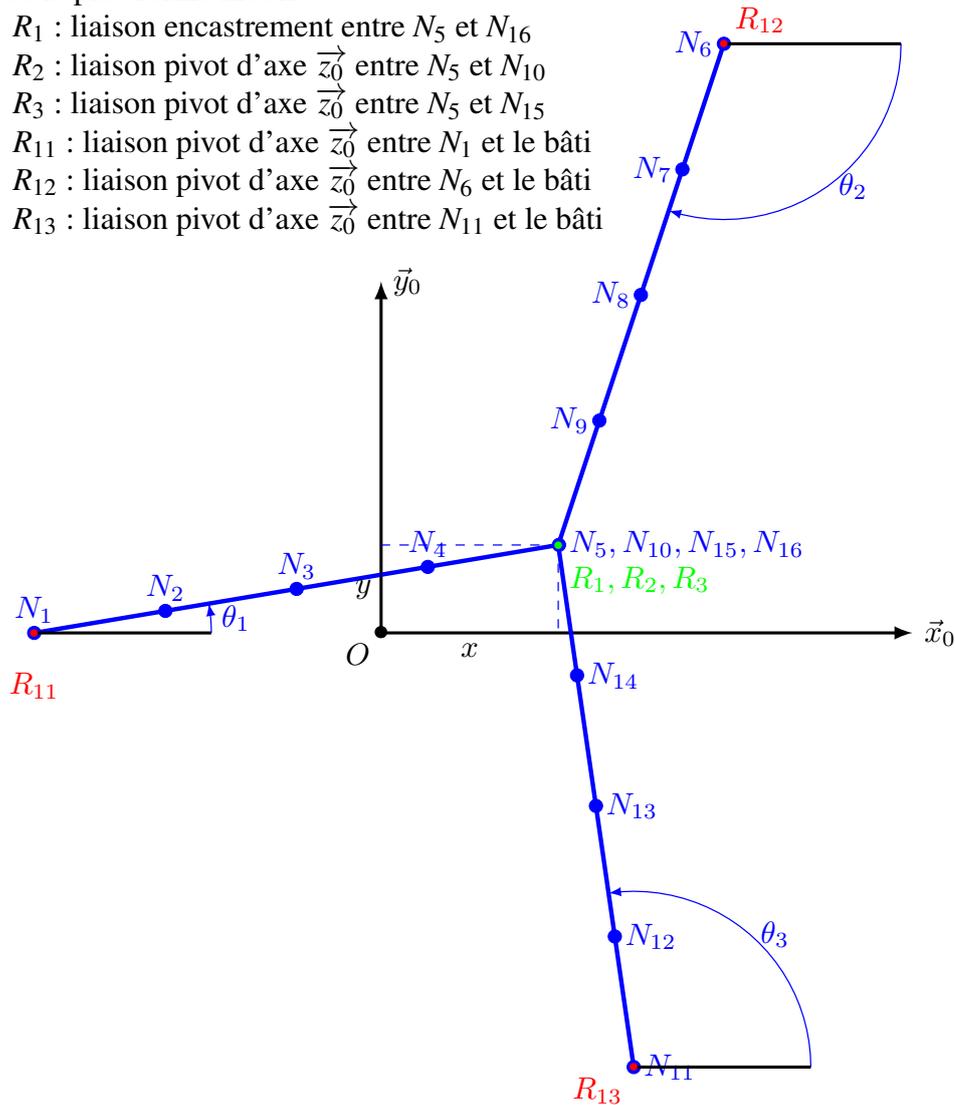


FIGURE 2.23: Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-3

### Étude avec les mêmes paramètres que ceux du robot PRR-2

La figure 2.24 est le résultat de l'analyse modale du robot PRR-3 lorsque la plateforme mobile suit l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec les paramètres du tableau 2.3. Sur cette figure, il y a trois courbes qui représentent l'analyse modale du robot avec les effets de la précontrainte. La différence entre les 3 courbes est la valeur maximale de l'actionnement possible par l'un des moteurs pour calculer les effets de la précontrainte. Les effets de la précontrainte sont négligeables devant la raideur de la structure avec les paramètres choisis et l'actionnement maximum de  $800N$ . Les fréquences calculées sont plus de dix fois plus grandes que dans le modèle solides rigides avec la raideur d'asservissement.

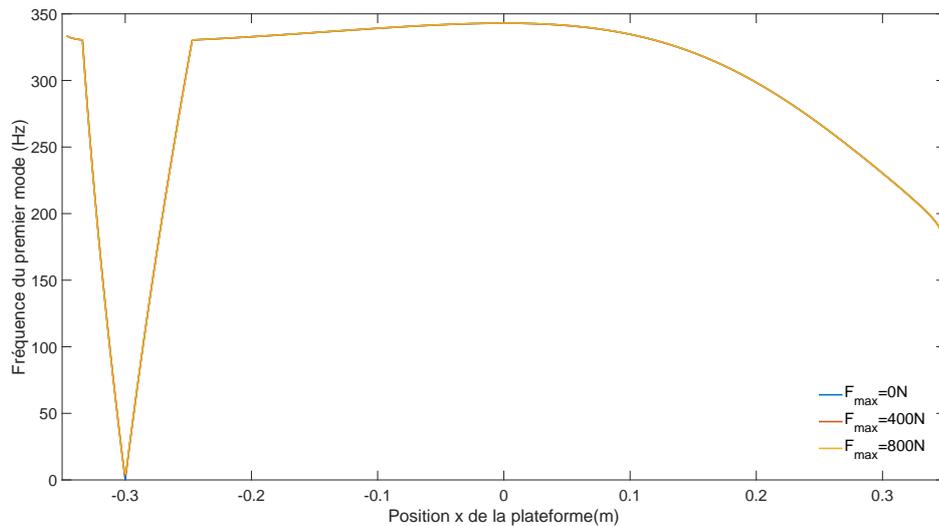


FIGURE 2.24: Analyse modale du robot PRR-3 avec les paramètres du tableau 2.3

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse de la PFM	$m_x$	6	kg
Masse volumique de la barre	$\rho$	2700	$kg/m^3$
Longueur de la barre	$l$	0,3	m
Côté extérieur de la section carrée	$c_{ext}$	0,05	m
Côté intérieur de la section carrée	$c_{int}$	0,04	m

TABLE 2.3: Paramètres constants du PRR-3

### Étude avec les paramètres modifiés

Pour visualiser les effets de la précontrainte, les paramètres du robot ont été changés. La section des barres a été diminuée pour que la raideur structurale soit plus faible. La masse de la plateforme mobile a été diminuée aussi pour avoir une fréquence du même ordre que pour le modèle solides rigides. Les nouveaux paramètres sont ceux du tableau 2.4. La contribution en fréquence de la précontrainte reste toujours faible. La contribution est de  $2Hz$  pour des fréquences avoisinant les  $30Hz$  et de  $5Hz$  au voisinage de la singularité. Les modèles géométrique, cinématique et dynamique sont détaillés dans l'annexe A

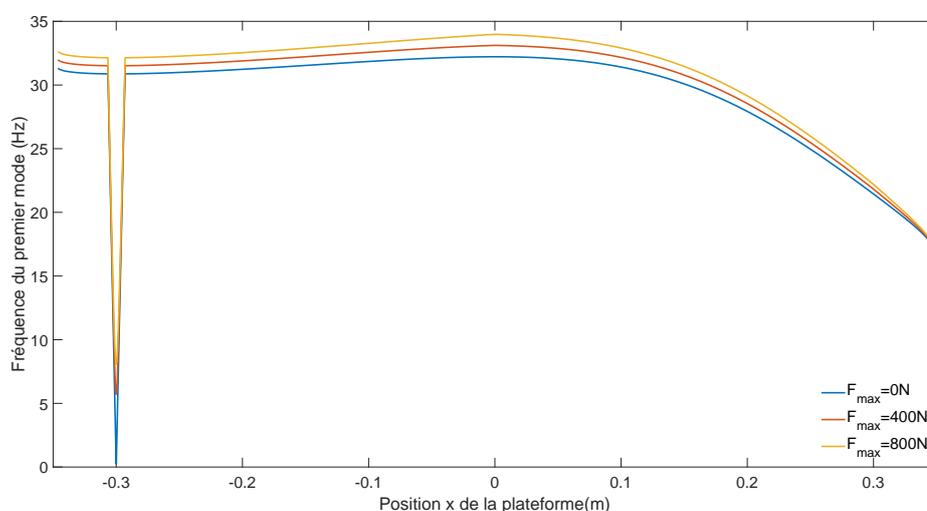


FIGURE 2.25: Analyse modale du robot PRR-3 avec les paramètres du tableau 2.4

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse de la PFM	$m_x$	2	kg
Masse volumique de la barre	$\rho$	2700	$kg/m^3$
Longueur de la barre	$l$	0,3	m
Côté de la section carrée pleine	$c$	0,01	m

TABLE 2.4: Paramètres constants du PRR-3

## 2.4 Le robot parallèle PRR-4

### 2.4.1 Description du robot PRR-4

Le robot PRR-4 est un robot parallèle redondant de degré 1 à trois degrés de mouvements (deux translations et une rotation de la plateforme mobile) pour quatre degrés d'actionnement (les quatre glissières motorisées). Les dimensions du robot ont été choisies pour avoir une singularité de type II au centre de l'espace de travail, afin de voir comment se comporte le robot autour de cette singularité. Notamment, il est possible de traverser une singularité. Les liaisons motorisées sont des glissières de direction  $\vec{x}$  aux points  $A_i$ . Ce sont des moteurs linéaires qui réalisent ces liaisons. Le schéma cinématique et le paramétrage du robot sont donnés sur la figure 2.27. Les valeurs des paramètres géométriques, d'inertie et de la raideur de la commande sont données dans le tableau 2.5. Les modèles géométrique, cinématique et dynamique du robot PRR-4 sont détaillés dans l'Annexe B.

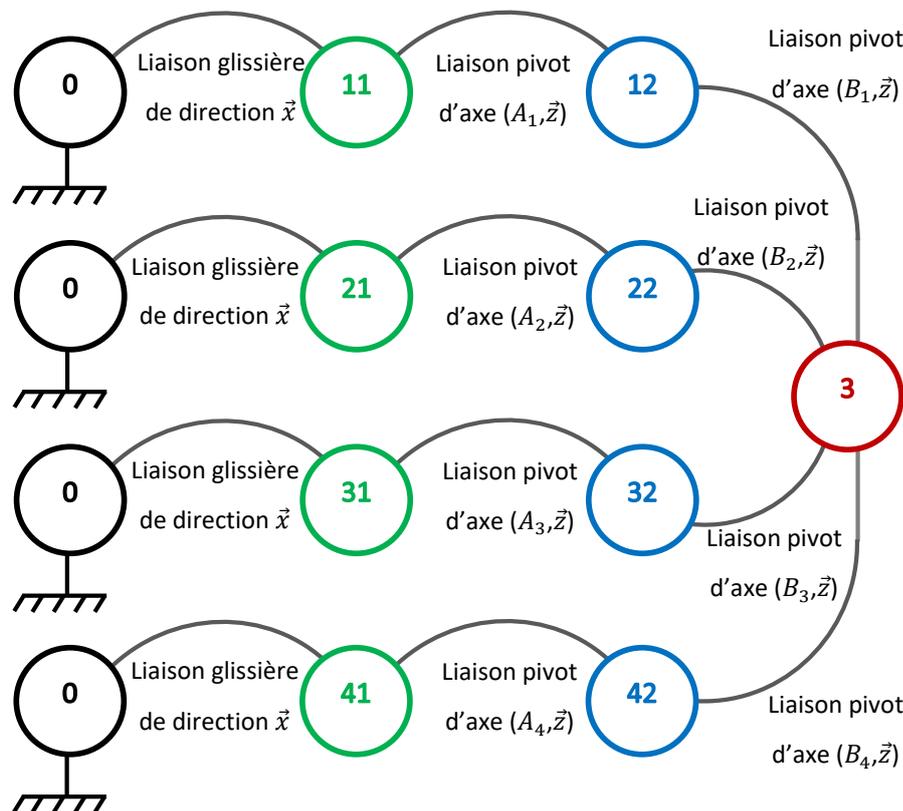


FIGURE 2.26: Graphe de liaison du robot PRR-4

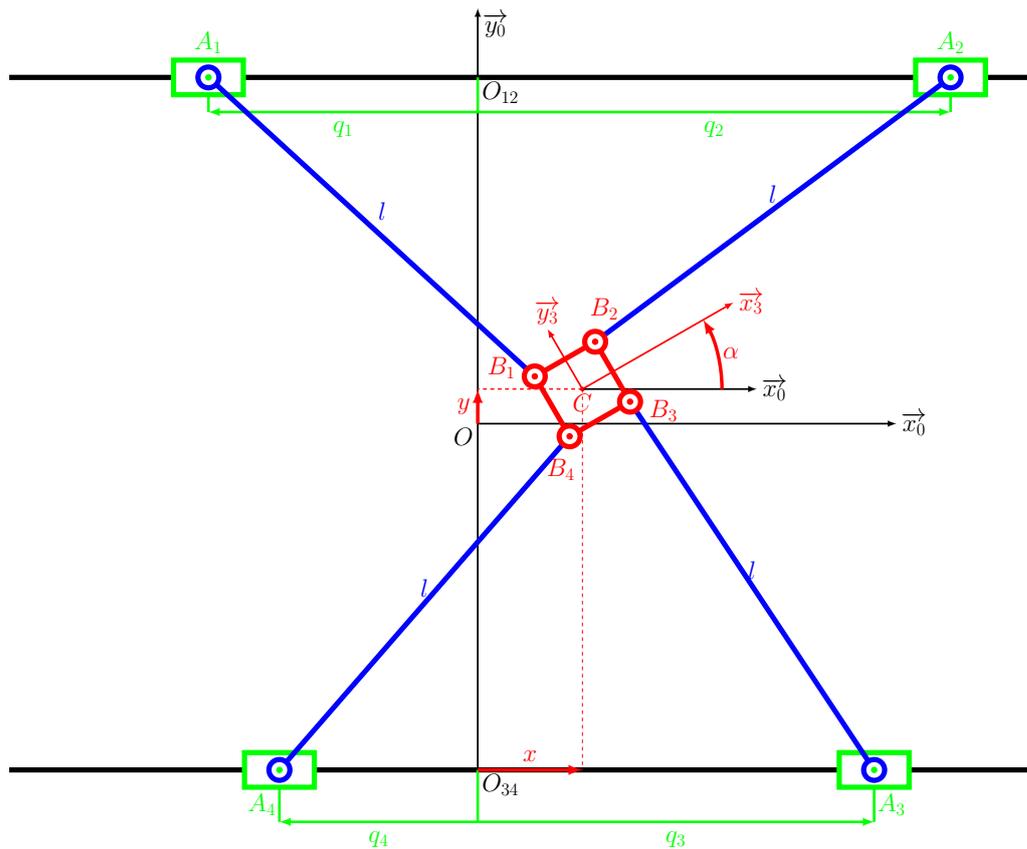


FIGURE 2.27: Schéma cinématique du robot PRR-4

Pour plus de détails sur la plateforme mobile, voir le tableau B.2 et la figure B.3.

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse des moteurs	$m_q$	8	kg
Masse de la PlateForme Mobile (PFM)	$m_X$	10	kg
Inertie de la PFM	$I_X$	0,36	$kg.m^2$
Demi-longueur de la PFM	a	0,1	m
Demi-largeur de la PFM	b	0,1	m
Masse de la barre	$m_b$	5,15	kg
Raideur d'asservissement	$k_q$	200000	$N/m$

TABLE 2.5: Paramètres constants du PRR-4

## 2.4.2 Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot PRR-4

Le modèle dynamique linéarisé du robot PRR-4 pour l'analyse modale est décrit par l'équation (2.79). Les valeurs des paramètres constants sont données dans le tableau 2.5. Pour effectuer l'analyse modale du robot PRR-4, il faut calculer les matrices  $\underline{\mathbb{K}}_X$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$ .

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_X + \underline{\mathbb{K}}_g) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}_0 &= \underline{\mathbb{M}}_X + \underline{\mathbb{J}}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{\mathbb{J}}_{m0} & \underline{\mathbb{K}}_X &= \underline{\mathbb{J}}_{m0}^T \underline{\mathbb{K}}_q \underline{\mathbb{J}}_{m0} \\ \underline{\mathbb{M}}_0 &= m_q \begin{bmatrix} 4 & t_i & f_i \\ t_i & t_i^2 & f_i t_i \\ f_i & f_i t_i & f_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_X & 0 & 0 \\ 0 & m_X & 0 \\ 0 & 0 & i_X \end{bmatrix} & \underline{\mathbb{K}}_X &= k_q \begin{bmatrix} 4 & t_i & f_i \\ t_i & t_i^2 & f_i t_i \\ f_i & f_i t_i & f_i^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbb{K}}_g = -\frac{\partial \underline{\mathbb{J}}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \underline{\mathbb{J}}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.80)$$

Le calcul de  $\underline{\mathbb{K}}_g$  se fait entièrement sur Matlab, la matrice est trop complexe pour pouvoir l'écrire ici. Le robot a un comportement symétrique pour la position  $y$  et pour la rotation  $\alpha$  de la plateforme. La cartographie de l'espace de travail est faite de  $y_{min} = 0m$  à  $y_{max} = 0,37m$  et  $\alpha_{min} = 0rad$  à  $\alpha_{max} = \frac{\pi}{4}rad$ . Les figures 2.28 et 2.29 donnent la fréquence propre d'oscillation du robot sur l'espace de travail étudié. La première donne l'oscillation sans pré-contrainte tandis que la seconde donne la fréquence d'oscillation avec pré-contrainte dans le cas où l'actionnement limité au maximum à  $F_{max} = 800N$ . L'influence de la pré-contrainte sur les fréquences d'oscillation du robot est très limitée dans les zones où la fréquence est suffisamment haute (de 8 à 20Hz). Par contre, l'influence de la pré-contrainte est importante autour de la singularité ( $y = 0$  et  $\alpha = 0$ ). La fréquence passe de 0Hz à 6Hz pour la position singulière et elle augmente de 1 à 2Hz autour de la singularité.

Pour ce robot, chercher à augmenter la fréquence d'oscillation du robot avec la précontrainte n'est pas une bonne idée, car cela consommerait une grande partie des efforts moteurs pour tendre le robot ce qui laisserait d'autant moins pour son fonctionnement (mouvement).

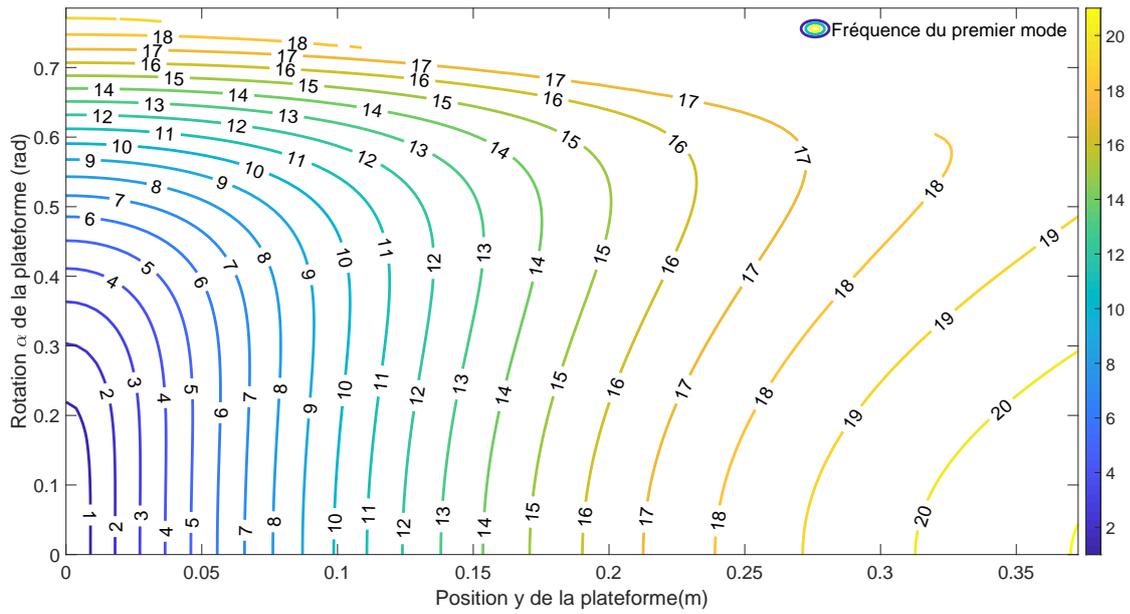


FIGURE 2.28: Cartographie de la fréquence du premier mode d'oscillation sans pré-contrainte

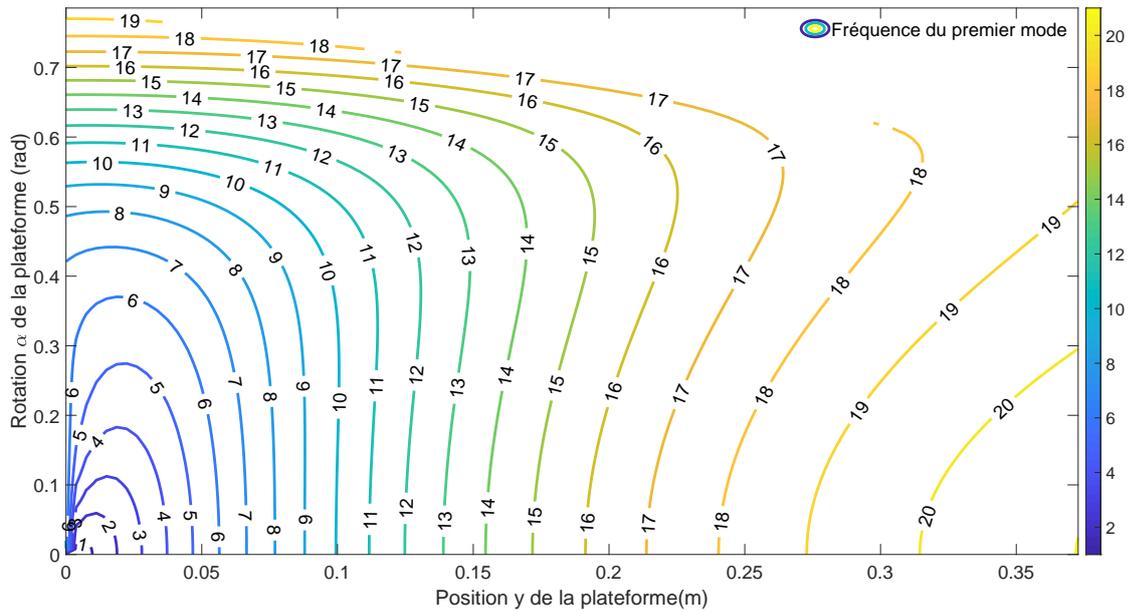


FIGURE 2.29: Cartographie de la fréquence du premier mode d'oscillation avec pré-contrainte  $\|\tau_0\|_\infty = 800N$

## 2.5 Le robot parallèle Dual-V

### 2.5.1 Description du robot Dual-V

Le robot Dual-V est un robot parallèle redondant de degré 1 à trois degrés de mouvements représentés par le vecteur des coordonnées opérationnelles  $\mathbf{X}$  qui sont les mouvements de la plateforme mobile. La plateforme mobile a une masse  $m_X$  dont le centre de gravité est le point  $P_5$  et une inertie  $i_x$  d'axe  $(P_5, \vec{z}_0)$ . Le Dual-V a quatre chaînes cinématiques RRR qui relient le bâti à la plateforme mobile. Pour chaque chaîne  $i$ , la liaison pivot entre le bâti et le corps  $1i$  est motorisée (moteur  $i$ , de paramètre  $q_i = \theta_{1i}$ , d'inertie  $i_q$  et de couple  $C_i$ ) et la seconde d'axe  $(B_i, \vec{z}_0)$  (de paramètre  $\theta_{2i}$ ) et la troisième d'axe  $(C_i, \vec{z}_0)$  sont passives. Les barres  $1i$  de longueur  $l$  ont un mouvement de rotation et leur inertie est rapportée au niveau du moteur  $i$ . Les barres  $2i$  de longueur  $l_{2i} = l$  ont leurs masses et inerties rapportées respectivement sur les barres  $1i$  et la plateforme suivant l'hypothèse simplificatrice des barres assimilées à deux masses ponctuelles. Le schéma cinématique du robot et de son paramétrage est montré par la figure 2.31. Pour plus de détails au sujet du Dual-V, le lecteur peut se référer à [23]. Les paramètres de géométrie, d'inertie et de la commande sont donnés dans le tableau 2.6. Le modèle cinématique et le modèle dynamique du robot Dual-V sont détaillés dans l'Annexe C.

$$\mathbf{X} = [x \ y \ \theta_5]^T \quad \mathbf{q} = [\theta_{11} \ \theta_{21} \ \theta_{31} \ \theta_{41}]^T \quad (2.81)$$

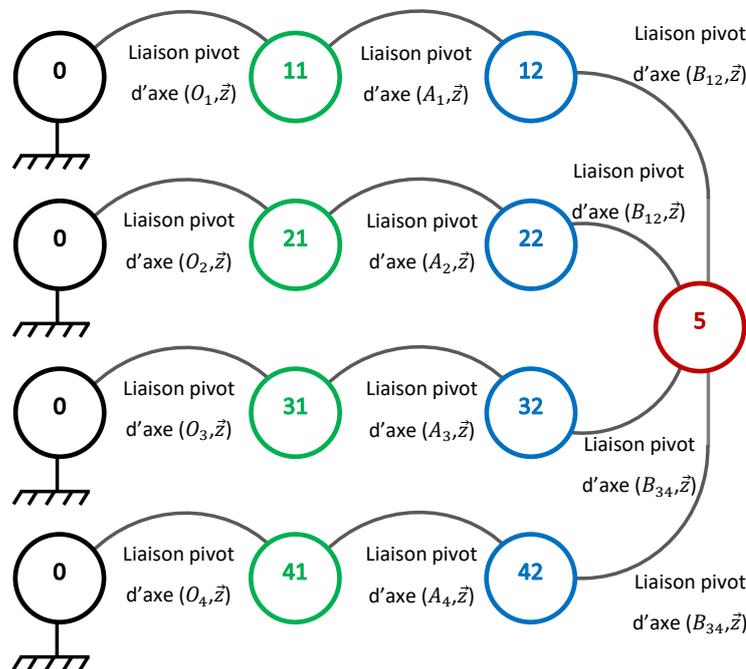


FIGURE 2.30: Graphe de liaison du robot Dual-V

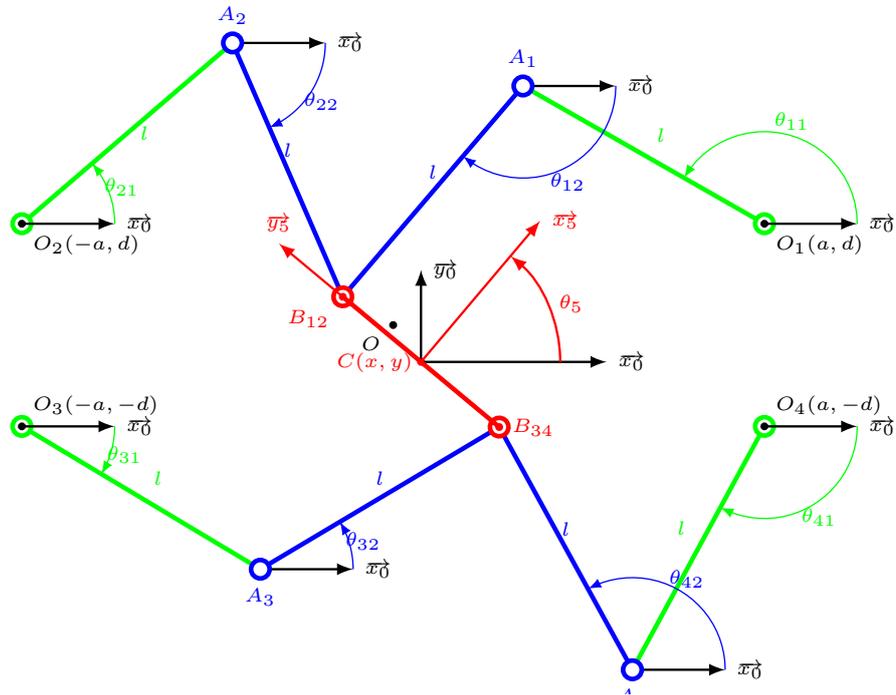


FIGURE 2.31: Schéma cinématique du robot Dual-V

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Distance $A_iO$ projetée sur $\vec{x}_0$	$a$	0,39	$m$
Distance $A_iO$ projetée sur $\vec{y}_0$	$d$	0,11	$m$
Demi-longueur de la plateforme			
Masse de la PFM	$m_x$	2,1	$kg$
Inertie de la PFM	$i_x$	0,023	$kg.m^2$
Inertie rapportée des moteurs	$i_q$	0,074	$kg.m^2$
Masse de la barre	$m_b$	1,9	$kg$
Masse volumique de la barre	$\rho$	2700	$kg/m^3$
Longueur des barres	$l$	0,28	$m$
Côté de la section carrée	$c$	0,05	$m$
Raideur d'asservissement	$k_q$	900	$N.m/rad$

TABLE 2.6: Paramètres constants du Dual-V

## 2.5.2 Analyse modale du modèle dynamique solide rigide du robot Dual-V

Le modèle dynamique linéarisé du robot Dual-V pour l'analyse modale est décrit par l'équation (2.82). Les valeurs des paramètres constants sont données dans le tableau (2.6). Pour effectuer l'analyse modale du robot Dual-V, il faut calculer les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_0$ ,  $\underline{\mathbb{K}}_x$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$ . Pour ce robot, les calculs des matrices ont été faits formellement dans un premier temps puis elles sont numériquement évaluées pour toutes les positions. Pour la cartographie du premier mode, seuls les déplacements  $x$  et  $y$  sont étudiés pour simplifier l'analyse.

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_x + \underline{\mathbb{K}}_g) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.82)$$

Les figures 2.32 (en 3D) et 2.33 (courbes de niveau) sont les résultats de l'analyse modale du DualV sur son espace de travail sans précontrainte. La figure 2.34 est le résultat de l'analyse modale du robot Dual-V avec précontrainte, sachant que le couple maximal statique des moteurs dans cette situation est de  $C_{max} = 130N.m$ . La comparaison entre l'analyse modale avec et sans contrainte du Dual-V est très importante car le Dual-V est le seul robot étudié de cette thèse qui existe physiquement. Le gain en fréquence lorsque les moteurs sont à 100% de leur capacité est de  $1Hz$  au maximum, cela confirme que la précontrainte n'est pas une bonne solution pour augmenter les plus basses des fréquences d'oscillation pour ce type de robot.

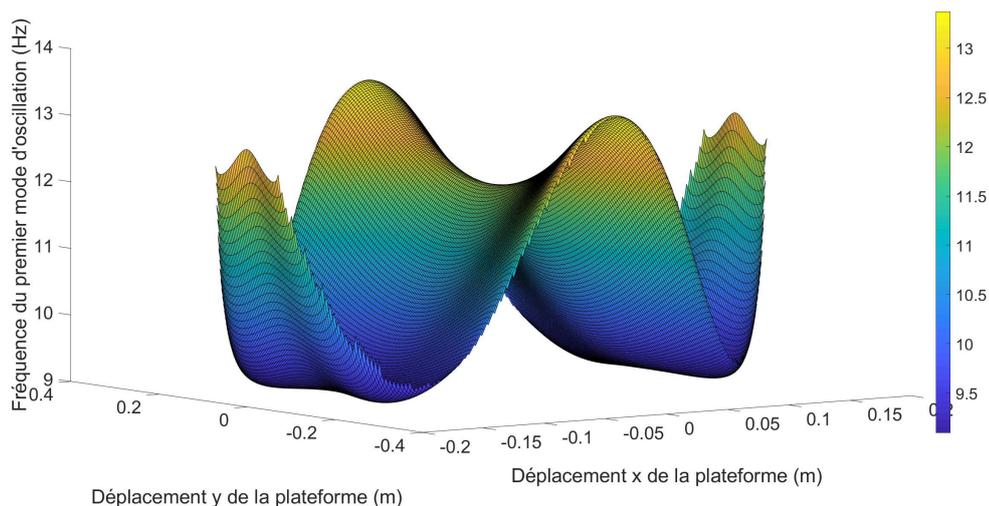


FIGURE 2.32: Surface 2D de la cartographie du premier mode d'oscillation du DualV

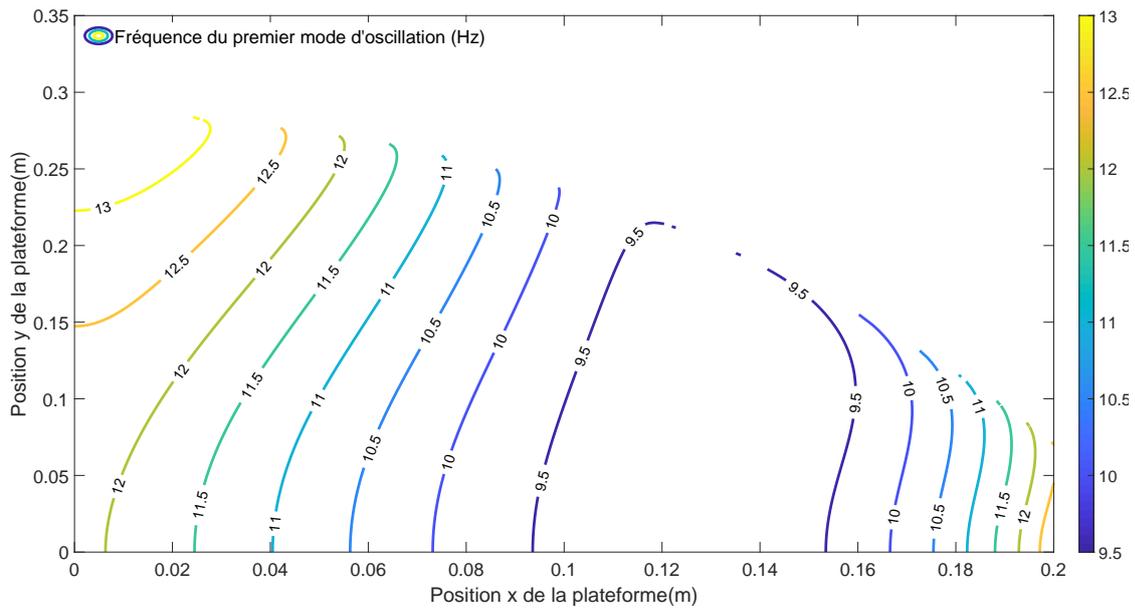


FIGURE 2.33: Cartographie du 1<sup>er</sup> mode du robot DualV sans précontrainte

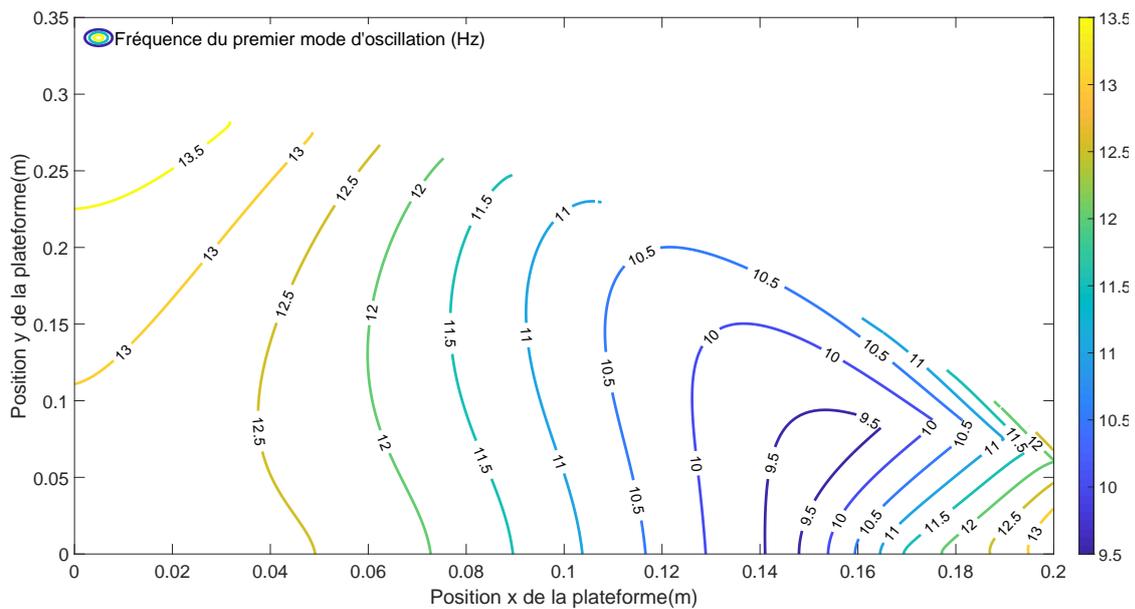


FIGURE 2.34: Cartographie du 1<sup>er</sup> mode du robot DualV avec précontrainte et  $\|\tau_0\|_\infty = 130 \text{ N.m}$

L'orientation de la plateforme mobile est  $\theta_5 = 0 \text{ rad}$  dans les figures 2.32, 2.33 et 2.34. Pour des raisons de symétrie, seul le cadran  $x$  positif et  $y$  positif est montré pour les figures 2.33 et 2.34.

## 2.6 Conclusion du chapitre

Le but de ce chapitre est d'étudier l'influence de la précontrainte sur les fréquences propres d'oscillations pour les deux modèles choisis. Pour le modèle solides rigides les raideurs étudiées sont :

- La raideur due à l'asservissement, dépendant du contrôleur de l'asservissement.
- La raideur due aux actions mécaniques des moteurs, dépendant de la commande aux couples calculés (en anglais CTC : Computed Torque Control) de l'asservissement.

La structure est supposée indéformable.

Pour le modèle éléments finis les raideurs étudiées sont :

- La raideur structurelle dépendant de la géométrie et des matériaux du robot.
- La raideur due aux actions mécaniques des moteurs, dépendant de la commande feed forward de l'asservissement.

Dans ce cas, le conditionnement de la matrice du système modale est très mauvais. Par conséquent les résultats sont impossibles à interpréter.

Le modèle solides rigides et le modèle éléments finis fournissent tous les deux les mêmes conclusions :

- Les fréquences calculées avec les deux modèles sans précontrainte ont le même comportement vis-à-vis des singularités type II. Les zones où la variation de la fréquence est stable sont les mêmes pour les deux modèles.
- La raideur due aux actions mécaniques des moteurs a une influence quasiment négligeable sur la fréquence d'oscillation lorsque le robot est dans son espace de travail. Par contre, la raideur de précontrainte empêche la fréquence de chuter à 0Hz lorsque le robot se trouve à une singularité.

**Remarque :** Cette conclusion est valable pour des robots conçus pour être rigides. Mais l'opposé est vrai pour des robots dont la conception impose des raideurs faibles voir la section 2.3.3. La pré-contrainte peut être utile pour les robots parallèles à câbles planaires (Robot Pickable [25]) ou spatiaux (Robot Co.Gi.Ro voir figure 2.35 [26]), sous réserve de prendre en compte les spécificités liées au comportement des câbles car ces robots sont intrinsèquement peu rigides et doivent être tendus pour fonctionner. Les câbles ne pouvant que "tirer" les robots sont nécessairement redondants pour les totalement contraints [27] ou tendus par la gravité pour les suspendus.

Pour les paramètres géométriques choisis correspondant à des robots performants, la fréquence d'oscillation du modèle éléments finis est de l'ordre de vingt fois supérieure à celle du modèle solides rigides. Elles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour ne pas interférer. Ce qui valide l'hypothèse des solides rigides pour des robots performants. Pour la suite de cette thèse, nous choisissons le modèle solides rigides pour nos études et nous nous concentrons sur l'étude des effets des forces d'inertie sur les robots parallèles.



FIGURE 2.35: Robot Co.Gi.Ro



## Présentation de phénomènes dynamiques

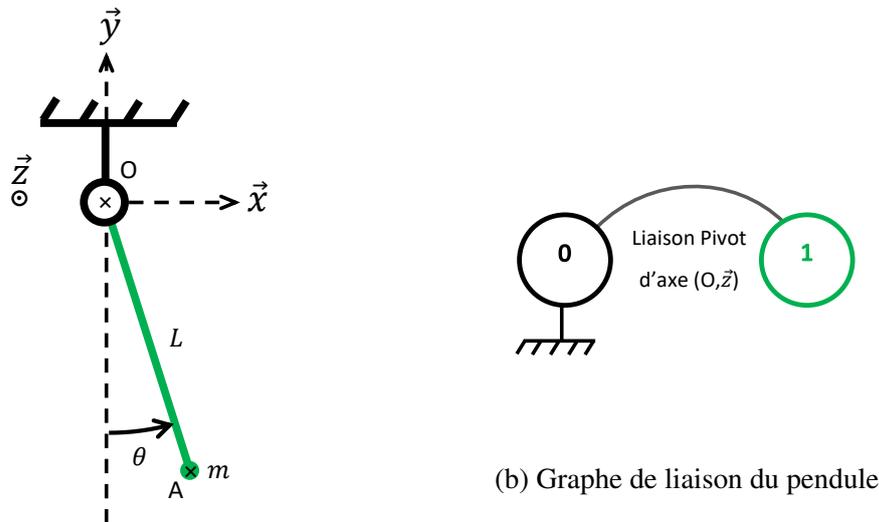
Dans l'analyse modale des mécanismes, le système d'équations utilisé est obtenu en linéarisant les équations du mouvement (qu'elles proviennent du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) pour les systèmes rigides ou du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) pour les éléments finis). Les équations du mouvement sont linéarisées autour d'un point de fonctionnement. Le choix du point de fonctionnement est très important car il permet de montrer l'influence de certains termes ou de les négliger dans le système d'équations linéarisées. Lorsque, l'analyse modale est utilisée pour étudier des systèmes statiques, le point de fonctionnement choisi est un point de fonctionnement "statique", c'est-à-dire que la vitesse et l'accélération des paramètres de position sont nulles. Dans le cas d'un système dynamique (en mouvement), les analyses modales se font principalement avec un point de linéarisation statique, car les forces d'inertie sont négligeables devant les autres sollicitations. Kozak a développé un modèle dynamique linéarisé respectant ces hypothèses [12].

Il existe un cas où le point de fonctionnement n'est pas statique, c'est dans l'analyse modale des rotors, où la vitesse et l'accélération de rotation du rotor sont prises en compte dans le point de fonctionnement. La thèse de Sino [28] utilise des modèles qui prennent en compte les effets gyroscopiques sur les fréquences d'oscillations des rotors. Le cours de Centrale Lyon de Laîné [29] et l'article du code ASTER [30] utilisent un point de fonctionnement dynamique (accélération et vitesse) dans leurs modèles des rotors.

Le but de ce chapitre est de montrer que les forces d'inertie ont une influence sur les modes de vibrations et notamment sur la valeur des fréquences de vibration. Pour cela, les trois parties de ce chapitre mettront en évidence cette influence via l'étude du pendule simple et feront l'analogie avec deux systèmes proches, les robots PR et RR.

### 3.1 Oscillations d'un pendule simple

Le pendule simple est composé d'une masse et d'un fil supposé rigide qui est assimilé à une barre. La masse et la barre (formant le corps 1) sont en liaison pivot par rapport au bâti (corps 0) comme représenté sur la figure 3.1. Les paramètres sont donnés table 3.1. Ceci constitue la base de notre étude. Le mouvement de rotation de la liaison pivot est repéré par le paramètre  $\theta$ . Les études du pendule simple, du robot PR et du robot RR qui suivent, mettront en évidence le type de force qui influe sur les oscillations de  $\theta$ .



(a) Schéma cinématique du pendule

(b) Graphe de liaison du pendule

FIGURE 3.1: Définition du pendule

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur de la barre	$l$	0,05	m
Masse de la masse	$m$	0,5	kg

TABLE 3.1: Paramètres géométrique et d'inertie du pendule

Le Principe Fondamental de la Dynamique est appliqué dans le référentiel terrestre. Le solide étudié est le corps 1. Le bilan des actions mécaniques qui agissent sur le corps 1 sont :

- Le poids  $\left\{ \vec{P}, \vec{0} \right\}_A$  ( $\vec{P} = -m.g.\vec{y}$ ). ( $g$  l'accélération du champ de pesanteur)
- L'action mécanique de la liaison pivot sur le corps 1 .

L'équation du moment dynamique projetée sur  $\vec{z}$  en  $O$  donne les équations (3.1) et (3.2).

$$\vec{P} \wedge \vec{AO} = m.l^2.\ddot{\theta}.\vec{z} \quad (3.1)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\sin(\theta) = 0 \quad (3.2)$$

Pour obtenir la fréquence d'oscillation du pendule autour du point de fonctionnement  $\theta = 0$ , il faut linéariser l'équation (3.2) et nous obtenons la fréquence d'oscillation du pendule (3.4).

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\theta = 0 \quad (3.3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.4)$$

Maintenant nous posons la question suivante : Comment peut-on changer la fréquence d'oscillation du pendule ? La fréquence d'oscillation du pendule est donnée par l'équation (3.4), qui dépend de la longueur du fil et de la gravité. Pour notre étude, nous nous intéresserons à la gravité, par un exemple théorique. Nous ferons deux mesures, l'une à la surface de la Terre et l'autre à la surface de la Lune. La mesure de la fréquence d'oscillation du pendule sur Terre ( $g_{Terre} = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ) donne  $f_{Terre} = 2,2 \text{ Hz}$  et celle faite sur la Lune ( $g_{Lune} = 1,62 \text{ m s}^{-2}$ ) donne  $f_{Lune} = 0,90 \text{ Hz}$ . De ces expériences nous pouvons faire l'analogie suivante : la tige du pendule simple peut être assimilée à une barre liée au bâti par un pivot d'un côté et tendue par une force  $F$  de l'autre (comme une barre du PRR-2 quand il est à plat et tendu). La gravité induit une force au niveau du point A qui permet de tendre la barre 1. Le poids joue le même rôle dans le pendule que la force  $F$  pour la barre. Dans les deux cas, la raideur apparente est  $k = \frac{F}{l}$  et  $F = mg$  dans le cas du pendule.

Dans la suite de ce chapitre, nous souhaitons tendre le corps 1 avec des forces d'inertie. Nous supprimons l'influence de la gravité sur le pendule et nous ajoutons le corps 0 et une liaison supplémentaire au pendule pour créer un mouvement d'entraînement. Ce mouvement générera une force d'inertie au point A, voir figure 3.2. Dans la partie 3.2, le nouveau système est un robot PR dont la fréquence d'oscillation  $\theta$  dépend de l'accélération du mouvement d'entraînement. Dans la partie 3.3 le système est un robot RR dont la fréquence d'oscillation  $\theta$  dépend de la vitesse de rotation du mouvement d'entraînement.

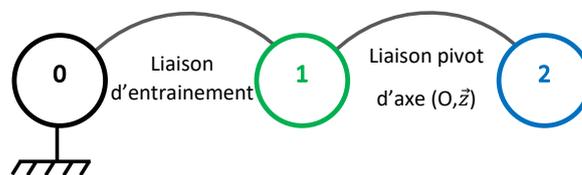
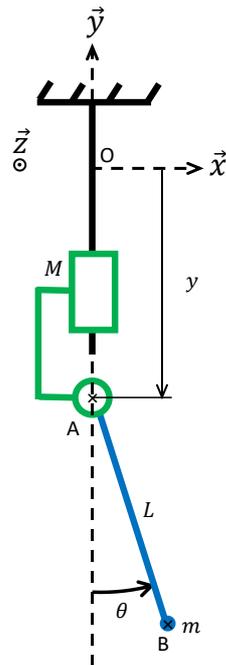


FIGURE 3.2: Graphe de Liaison du corps d'entraînement et du pendule

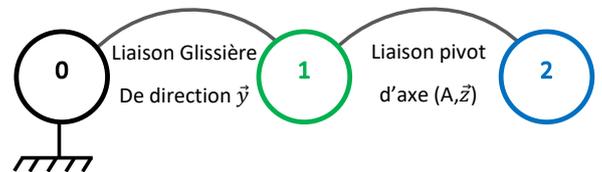
### 3.2 Oscillations dépendantes de l'accélération

Dans cette partie, nous proposons de vérifier l'hypothèse suivante : l'accélération peut influencer la valeur des fréquences propres. Pour cela nous ferons l'étude dynamique du robot PR, puis nous ferons la comparaison entre deux cas :

- Premier cas : le calcul des valeurs propres des équations du mouvement linéarisé autour d'un point de fonctionnement dynamique.
- Second cas : la simulation numérique des équations du mouvement sans linéarisation mais dans les conditions du point de fonctionnement.



(a) Schéma cinématique du robot PR



(b) Graphe de liaison du robot PR

FIGURE 3.3: Définition du Robot PR

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur de la barre	$l$	0,05	m
Masse de la glissière	$M$	0,5	kg
Masse de la plateforme mobile	$m$	0,5	kg

TABLE 3.2: Paramètres géométriques et d'inertie du robot PR

La force de gravité n'est plus prise en compte dans les calculs car nous souhaitons reproduire les effets de la gravité avec la force d'inertie d'accélération. Le robot présenté par les figures 3.3 est un robot série PR. Il permet de simuler la gravité artificielle grâce à l'accélération de la glissière et de "choisir la valeur de la gravité". Le pendule est formé dans ce robot par le corps 2 et la liaison pivot est la liaison 1-2, voir figure 3.3b. Les degrés de liberté de ce robot sont  $q^T = [y \theta]$ .  $y$  est le paramètre de la translation du corps 1 par rapport au corps 0. Le moteur linéaire d'action  $\tau_1$  permet de contrôler le mouvement  $y$ .  $\theta$  est le paramètre de la rotation du corps 2 par rapport au corps 1. Le moteur rotatif d'action  $\tau_2$  permet de contrôler le mouvement  $\theta$ . L'obtention des équations du mouvement (3.11) du robot PR est réalisé grâce aux équations de Lagrange et de la procédure proposée à la section 4.1.

### 3.2.1 Équation du mouvement

Les inerties en mouvement du robot PR sont la masse  $M$  du corps 1 et la masse  $m$  du corps 2. Le double de l'énergie cinétique du robot est donc :

$$2T_{PR} = M \overrightarrow{V_{G \in 1/0}}^2 + m \overrightarrow{V_{A \in 2/0}}^2 \quad (3.5)$$

Ce qui se développe en :

$$2T_{PR} = (M + m) \dot{y}^2 + ml^2 \dot{\theta}^2 + 2ml \dot{y} \dot{\theta} \sin(\theta) \quad (3.6)$$

Et la puissance virtuelle des efforts extérieures est :

$$P_{vPR} = \tau_1 \dot{y} + \tau_2 \dot{\theta} \quad (3.7)$$

Les matrices suivantes sont calculées à partir de l'énergie cinétique du robot PR voir section 4.1.

$$\underline{\mathbb{M}}_{PR}(\theta) = \begin{bmatrix} M + m & ml \sin(\theta) \\ ml \sin(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\underline{\dot{\mathbb{M}}}_{PR}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} ml \cos(\theta) \\ \dot{\theta} ml \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\underline{\mathbb{C}}_{PR}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta} ml \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Les équations du mouvement du robot PR sont les équations (3.11) et (3.12)

$$\underline{\mathbb{M}}_{PR}(\theta) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbb{C}}_{PR}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{PR} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \sin(\theta) \\ ml \sin(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ml \dot{\theta} \cos(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Pour se mettre dans la situation du pendule simple, il faut avoir une accélération  $\ddot{y}$  constante valant  $g_{Terre}$ . Dans ce cas, le moteur linéaire se déplace en accélérant et le moteur rotatif exerce un couple nul.

### 3.2.2 Obtention des fréquences propres par simulation numérique

Le système dynamique est simulé à l'aide de Simulink. Le modèle dynamique réécrit sous la forme de l'équation (3.13) facilite la construction du modèle par schéma bloc. Le rajout de  $\underline{J}^T \mathbf{F}$  permet d'exciter le robot au niveau du point  $B$

$$\boldsymbol{\tau} + \underline{J}^T \mathbf{F} - \underline{C}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}} = \underline{M}(q) \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.13)$$

- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  vecteur des actions mécaniques des moteurs.
- $\mathbf{F} = [F_x \quad F_y]^T$  vecteur des actions mécaniques sur la plateforme mobile.
- $\mathbf{q} = [y \quad \theta]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$  et  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{y} \quad \ddot{\theta}]^T$  vecteurs position, vitesse et accélération des coordonnées articulaires du robot PR.

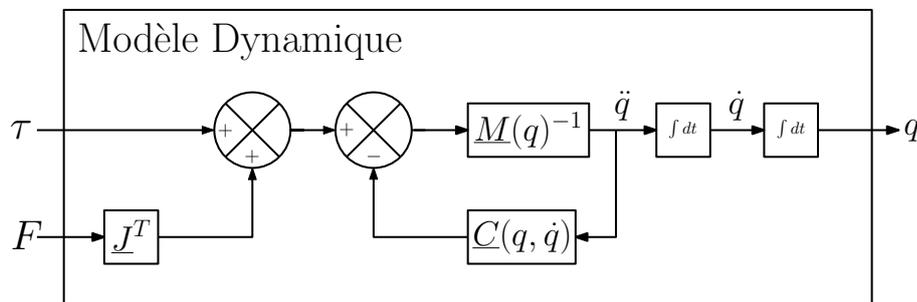


FIGURE 3.4: Schéma bloc du modèle dynamique sur Simulink

Pour simuler la gravité, il faut avoir une accélération constante sur  $\vec{y}$ . Dans la suite de cette sous partie, nous détaillons la simulation numérique pour une accélération  $\ddot{y} = 40m.s^{-2}$ . Le choix de l'accélération n'est pas important pour montrer la procédure, car c'est la même quelle que soit l'accélération. La figure 3.5 montre l'évolution temporelle des accélérations, vitesses et positions des paramètres articulaires que nous souhaitons suivre pour notre simulation. Les conditions initiales des deux intégrateurs sont  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

Pour respecter cette trajectoire, il faut que les actionneurs génèrent un vecteur d'effort constant  $\boldsymbol{\tau} = [220N \quad 0N.m]^T$ . Le robot est libre pour le degré  $\theta$ . Les conditions que nous avons imposées sont suffisantes pour avoir une erreur nulle en position, vitesse et accélération. Pour rappel, il n'y a pas de correcteur activé pendant la simulation. Pour observer le phénomène vibratoire, il faut exciter le robot avec un choc sur les forces extérieures qui prend la forme d'une fonction créneau de norme  $\mathbf{F} = [10^{-4}N \quad 0N]^T$  et de durée 0,05s. La norme devant être suffisamment faible pour ne pas trop s'éloigner de la trajectoire désirée qui est notre point de fonctionnement et la durée suffisamment courte pour exciter les modes. La figure 3.6 montre la forme de l'excitation sur  $\mathbf{F}_{EXTx}$  et les oscillations (de l'ordre de  $10^{-5}$  rad) qui en découlent sur  $\theta$ .

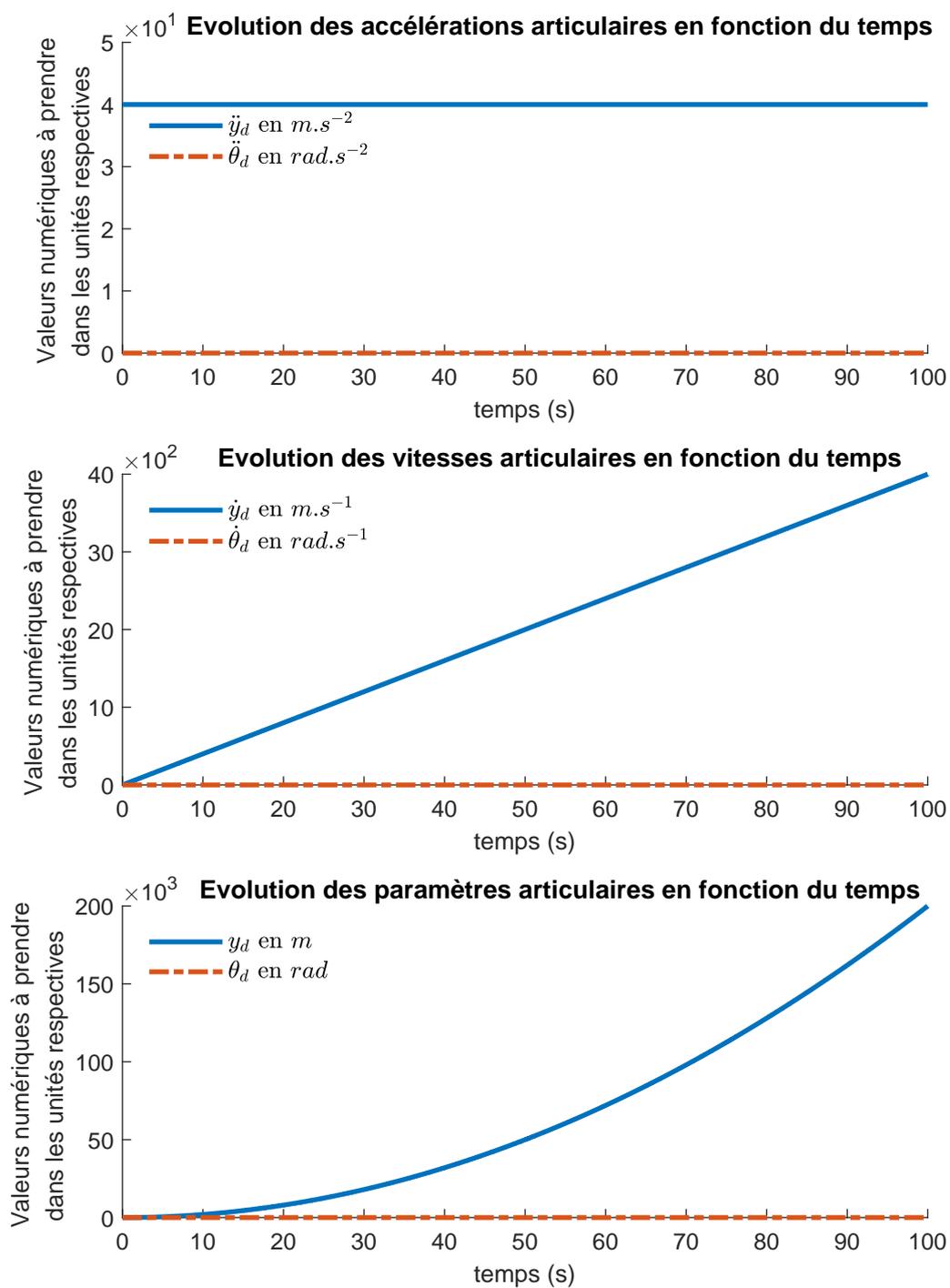


FIGURE 3.5: Définition de la trajectoire du robot PR

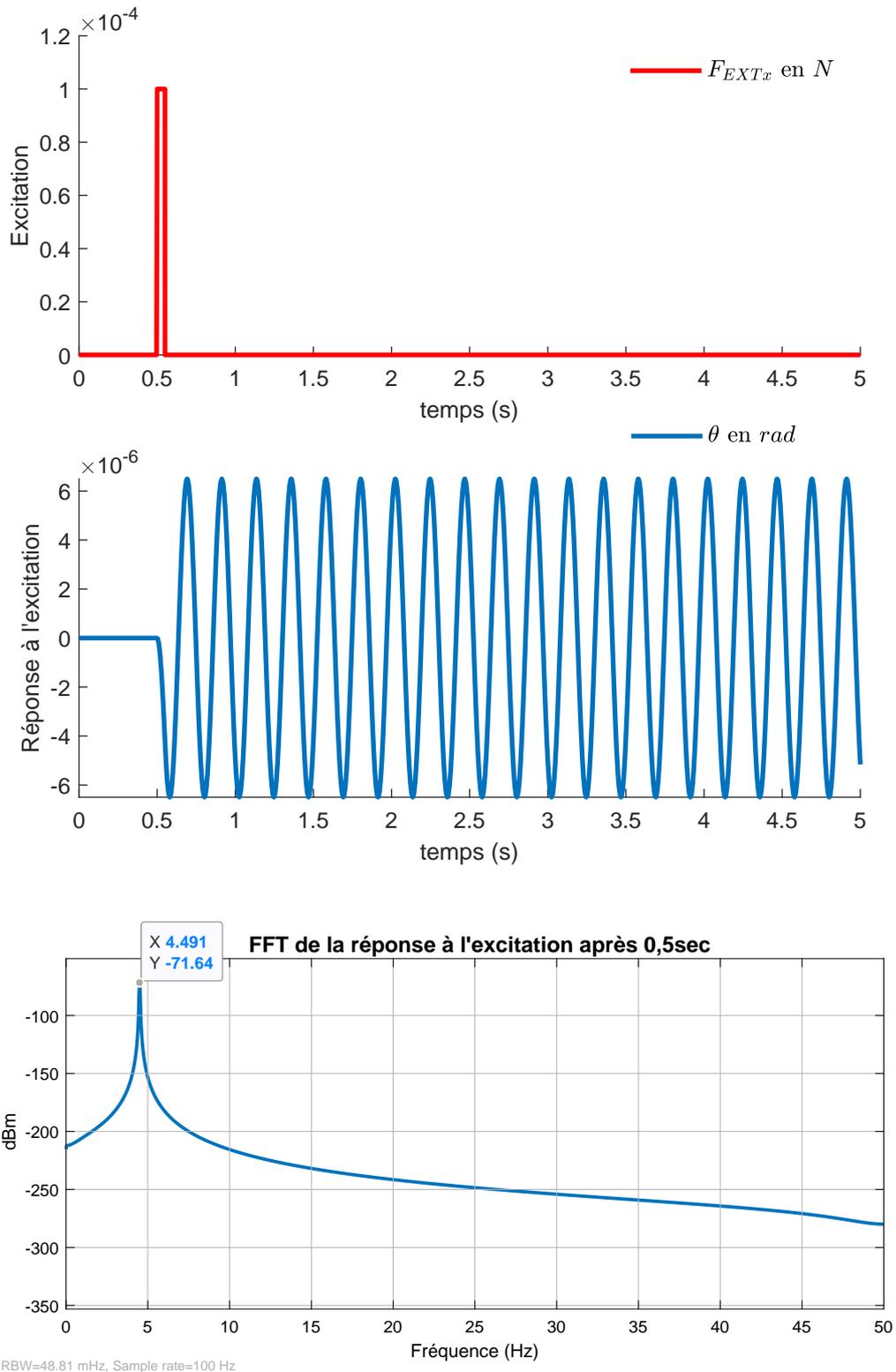


FIGURE 3.6: Simulation numérique de la réponse temporelle à un choc

### 3.2.3 Obtention des fréquences par linéarisation

Nous supposons que le mouvement de la pivot est de très faible amplitude par rapport au mouvement de la glissière. La variation de  $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$  est très petite dans les équations du mouvement du robot PR (3.12). Le système d'équation devient (3.14) :

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\theta \\ ml\theta & ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ml\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Or, pour faire une analyse modale nous avons besoin uniquement des termes du premier ordre. Nous pouvons supposer que les termes provenant des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis sont négligeables devant la force d'actionnement de la glissière. La figure 3.7 montre les forces d'inertie associées aux termes  $\ddot{\theta}\theta$  et  $\dot{\theta}^2$  à comparer avec l'action mécanique du moteur  $F$  et la force d'inertie  $(M+m)\ddot{y}$  qui valent  $220N$  chacune, pour une accélération  $\ddot{y} = 40m.s^{-2}$ .

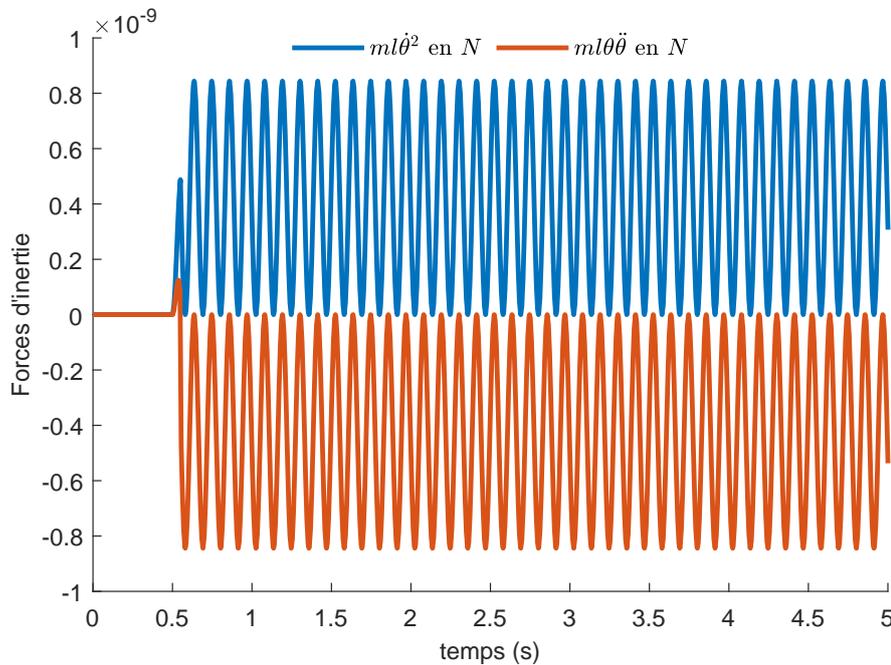


FIGURE 3.7: Évaluation des forces d'inertie

Le système d'équation (3.15) est le système d'équation du mouvement linéarisé à l'ordre 1. En calculant les valeurs propres de ce système, nous obtenons la valeur des fréquences d'oscillation de la pivot en fonction de l'accélération équation (3.16).

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{y}}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$f_{PR} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\ddot{y}}{l}} \quad (3.16)$$

### 3.2.4 Comparaison des résultats avec la linéarisation et la simulation numérique

Pour comparer les résultats, nous mettons sur le même graphique (figure 3.8) la fréquence élevée au carré en fonction de l'accélération  $\ddot{y}$ . Les fréquences obtenues par la linéarisation sont représentées par la droite orange et les valeurs obtenues par la méthode numérique sont représentées par les points bleus. La différence entre les deux est très faible. Pour chaque valeur de  $\ddot{y}$  souhaitée nous relevons les fréquences d'oscillation en faisant une FFT de la réponse au choc (figure 3.6) sur la sortie (ici seulement l'angle  $\theta$ ). Les valeurs obtenues sont données dans la table 3.3.

Accélération $\ddot{y}$ ( $m s^{-2}$ )	Simulation numérique(Hz)	Fréquences théorie linéarisée(Hz)	Erreurs(%)
1,62	0,93	0,90	-2,65
5	1,56	1,59	1,98
9,81	2,18	2,22	2,21
20	3,125	3,18	1,82
30	3,9	3,89	-0,03
40	4,49	4,50	0,25
50	5,07	5,03	-0,73
60	5,46	5,51	0,96
Écart-type de l'erreur(%)			1,27

TABLE 3.3: Comparaison des fréquences en fonction de l'accélération

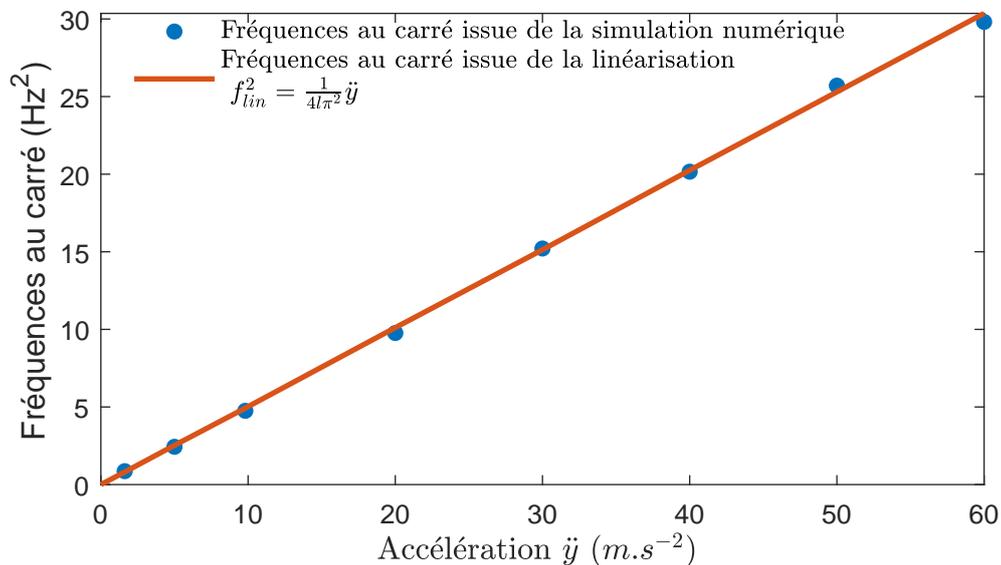
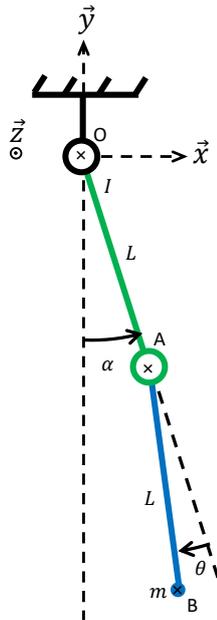


FIGURE 3.8: Comparaison des fréquences obtenues par linéarisation et par simulation numérique pour le robot PR

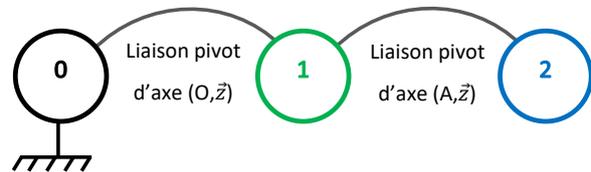
### 3.3 Oscillations dépendantes de la vitesse

Dans cette partie, nous proposons de vérifier l'hypothèse suivante : la vitesse peut influencer la valeur des fréquences propres. Pour cela nous ferons l'étude dynamique du robot RR (aussi appelé double pendule), puis nous ferons la comparaison entre deux cas :

- Premier cas : le calcul des valeurs propres des équations du mouvement linéarisées autour d'un point de fonctionnement dynamique.
- Second cas : la simulation numérique des équations du mouvement sans linéarisation mais dans les conditions du point de fonctionnement.



(a) Schéma cinématique du robot RR



(b) Graphe de liaison du robot RR

FIGURE 3.9: Définition du robot PR

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur de la barre	$l$	0,5	$m$
Inertie du corps 1	$I$	0,36	$kg.m^2$
Masse de la plateforme mobile	$m$	5	$kg$

TABLE 3.4: Paramètres géométriques et d'inertie du robot RR

Ce que nous avons fait avec l'accélération, nous pouvons aussi le faire avec la vitesse. Ici, pour simuler la gravité, nous utilisons la machine décrite par la figure 3.9. La gravité est émulée par le mouvement de rotation qui crée une accélération centrifuge. Pour mettre en mouvement le robot et maintenir le point de fonctionnement, les liaisons pivot sont motorisées. Le moteur de la liaison 0-1 a pour couple moteur  $\tau_1$ , le moteur de la liaison 1-2 a pour couple moteur  $\tau_2$ .

### 3.3.1 Équation du mouvement

Les inerties en mouvement du robot RR sont l'inertie  $I$  du corps 1 et la masse  $m$  du corps 2. Le double de l'énergie cinétique du robot est donc :

$$2T_{RR} = I\overline{\Omega_{1/0}}^2 + m\overline{V_{A \in 2/0}}^2 \quad (3.17)$$

$$2T_{RR} = [I + 2ml^2(1 + \cos \theta)] \dot{\alpha}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2ml^2(1 + \cos \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} \quad (3.18)$$

Et la puissance virtuelle des efforts extérieures est :

$$P_{vRR} = \tau_1\dot{\alpha} + \tau_2\dot{\theta} \quad (3.19)$$

Les matrices suivantes sont calculées à partir de l'énergie cinétique du robot PR voir section 4.1.

$$\underline{\mathbb{M}}_{RR}(\theta) = \begin{bmatrix} I + 2ml^2(1 + \cos \theta) & ml^2(1 + \cos \theta) \\ ml^2(1 + \cos \theta) & ml^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{RR}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta}ml^2 \sin \theta & -\dot{\theta}ml^2 \sin \theta \\ -\dot{\theta}ml^2 \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\underline{\mathbb{C}}_{RR}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(\dot{\alpha} + \dot{\theta})ml \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Les équations du mouvement du robot RR sont les équations (3.23) et (3.24)

$$\underline{\mathbb{M}}_{RR}(\theta) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbb{C}}_{RR}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{RR} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} I + 2ml^2(1 + \cos \theta) & ml^2(1 + \cos \theta) \\ ml^2(1 + \cos \theta) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\dot{\theta}ml^2 \sin \theta & -\dot{\theta}ml^2 \sin \theta \\ \dot{\alpha}ml^2 \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Pour créer une force d'inertie dépendant uniquement de la vitesse de rotation, il suffit que les deux moteurs rotatifs exercent un couple nul et que le corps 1 ait une vitesse de rotation initiale non nulle.

### 3.3.2 Obtention des fréquences propres par simulation numérique

Les équations du mouvement du robot RR (3.24) sont simulées à l'aide du logiciel Simulink. Nous utilisons le même schéma bloc (figure 3.10) que pour la simulation précédente. Le modèle dynamique réécrit sous la forme de l'équation (3.25) permet d'identifier les matrices à renseigner pour la simulation. Le rajout de  $\underline{J}^T \mathbf{F}$  permet d'exciter le robot au niveau du point  $B$ .

$$\boldsymbol{\tau} + \underline{J}^T \mathbf{F} - \underline{C}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}} = \underline{M}(q) \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.25)$$

- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  vecteur des actions mécaniques des moteurs.
- $\mathbf{F} = [F_x \quad F_y]^T$  vecteur des actions mécaniques sur la plateforme mobile.
- $\mathbf{q} = [\alpha \quad \theta]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\theta}]^T$  et  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{\alpha} \quad \ddot{\theta}]^T$  vecteurs position, vitesse et accélération des coordonnées articulaire du robot RR.

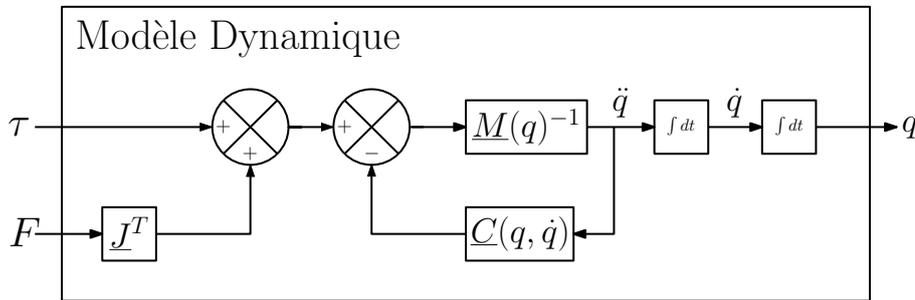


FIGURE 3.10: Schéma bloc du modèle dynamique sur Simulink

Pour simuler une force d'inertie constante en norme, dépendant de la vitesse, au niveau du point  $B$ , qui tend le corps 2, il suffit de maintenir une vitesse de rotation  $\vec{\Omega}_{1/0}$  constante du corps 1. Dans la suite de cette sous partie, nous détaillons la simulation numérique pour une vitesse  $\dot{\alpha} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les résultats de toutes les simulations sont donnés dans la partie suivante. La figure 3.11 montre l'évolution temporelle des accélérations, vitesses et positions des paramètres articulaires que nous souhaitons suivre pour notre simulation. Les conditions initiales des deux intégrateurs sont  $\dot{\mathbf{q}} = [60 \text{ rad.s}^{-1} \quad 0 \text{ rad.s}^{-1}]^T$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

Pour respecter cette trajectoire, il faut que les actionneurs génèrent un vecteur d'effort constant  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ . Le robot est libre pour le degré  $\theta$ . Les conditions que nous avons imposées sont suffisantes pour avoir une erreur nulle en position, vitesse et accélération. Pour rappel, il n'y a pas de correcteur activé pendant la simulation.

Pour observer le phénomène vibratoire, il faut exciter le robot sur le degré  $\theta$  avec un créneau sur  $\mathbf{F} = [10^{-4} \text{ N} \quad 0 \text{ N}]^T$  pendant  $0,01 \text{ s}$  suffisamment faible pour ne pas trop s'éloigner de la trajectoire désirée qui est notre point de fonctionnement. La figure 3.12 montre la forme de l'excitation sur  $F_x$  et les oscillations (de l'ordre de  $10^{-5} \text{ rad}$ ) qui en découlent sur  $\theta$ .

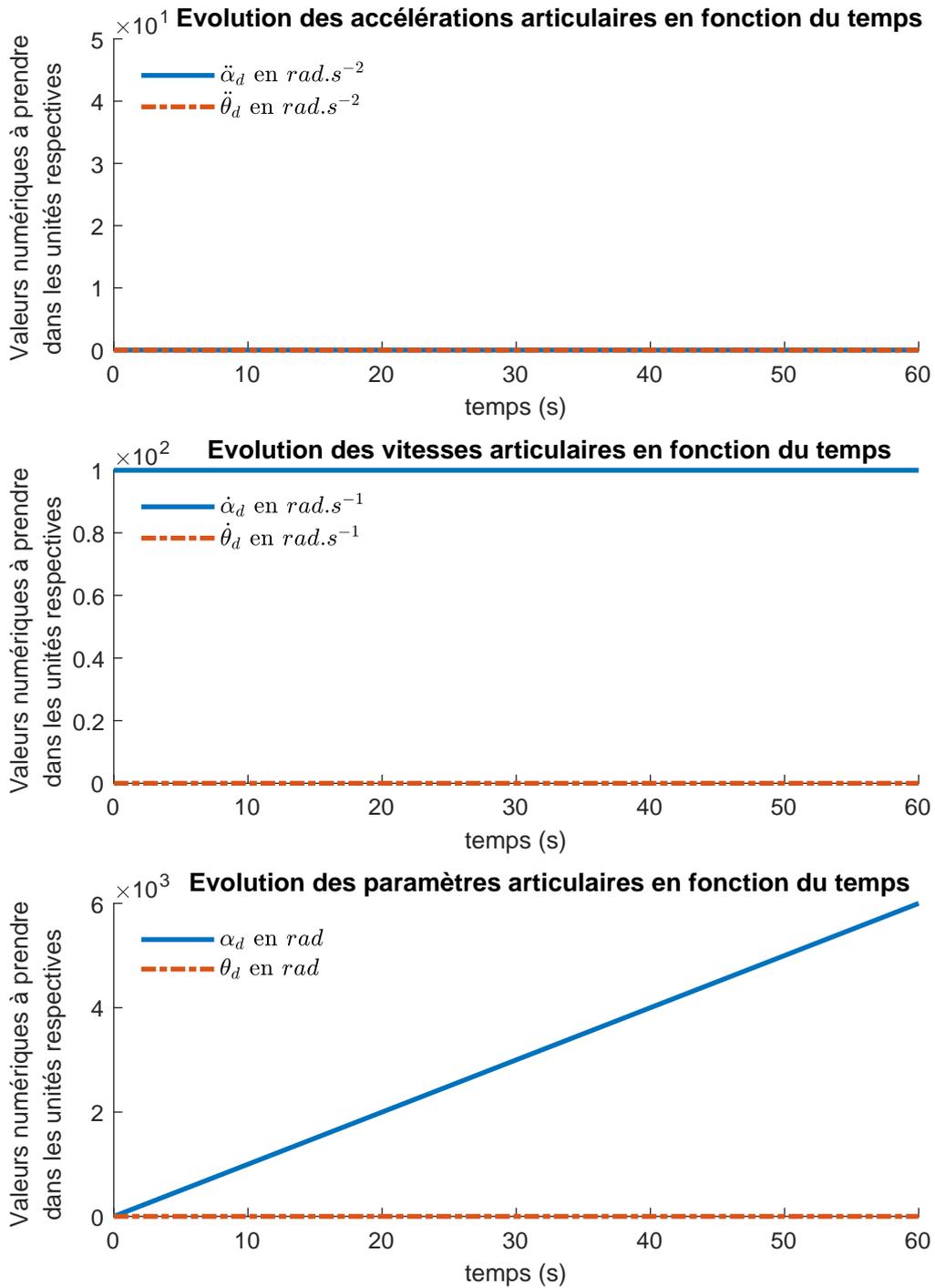


FIGURE 3.11: Définition de la trajectoire du robot RR

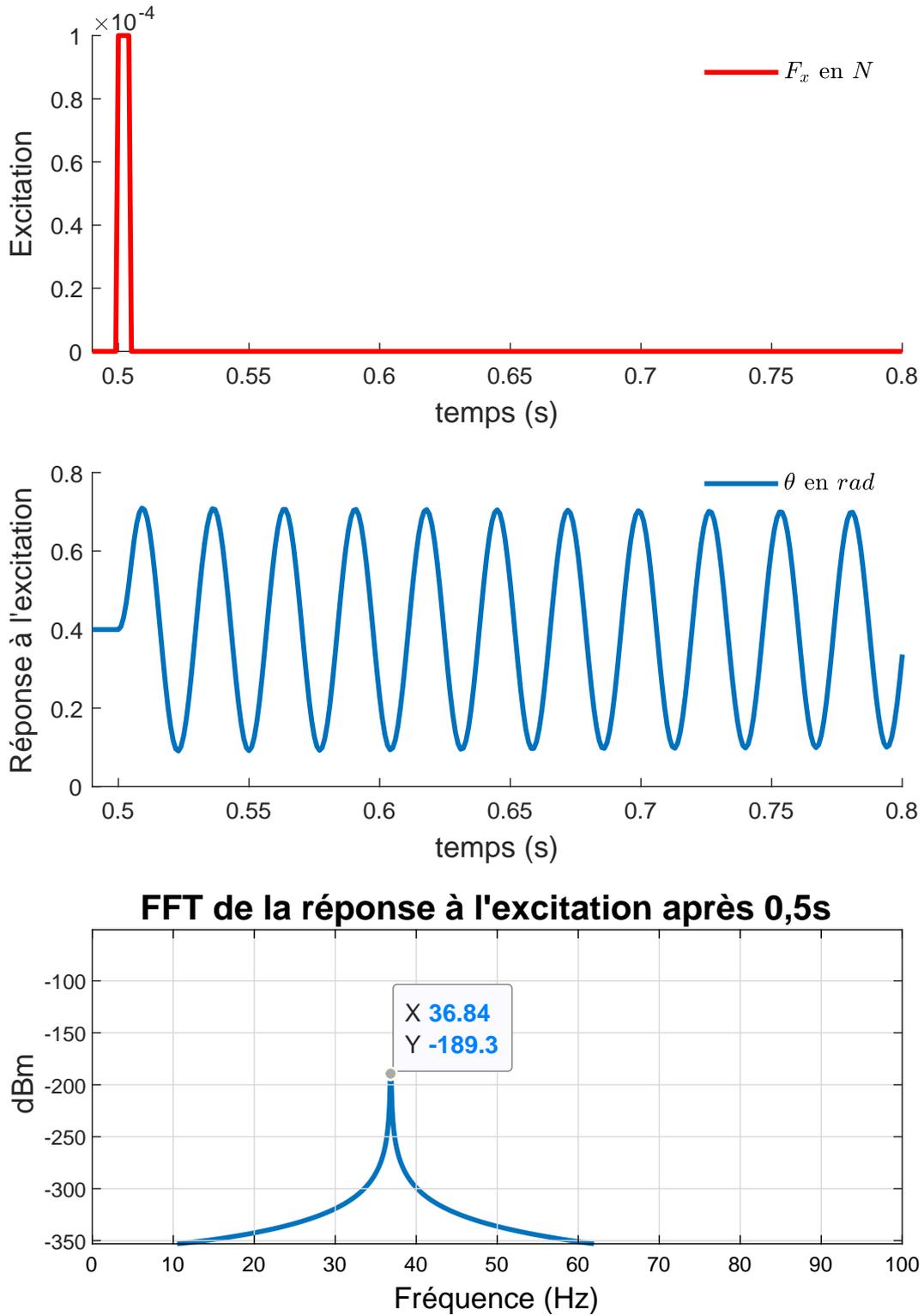


FIGURE 3.12: Simulation numérique de la réponse temporelle à un choc

### 3.3.3 Obtention des fréquences propres par linéarisation

Pour reproduire le même comportement que la gravité, il faut avoir une vitesse de rotation  $\dot{\alpha}$  constante. L'action des moteurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  n'est pas nécessaire pour maintenir les conditions du point de fonctionnement et il faut supposer les variations de  $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$  très petites. Le système d'équations devient (3.26).

$$\begin{bmatrix} \frac{I}{ml^2} + 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\theta\dot{\theta} & -\theta\dot{\theta} \\ \theta\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Comme pour le cas précédent (robot PR), pour faire une analyse modale nous avons besoin uniquement des termes du premier ordre. Les termes  $\theta\dot{\theta}\dot{\alpha}$  et  $\theta\dot{\theta}^2$ , représentant les inerties de Coriolis et centrifuge, sont du troisième ordre. Ils sont négligeables devant les autres termes de l'équation (3.26). La figure 3.13 montre l'ordre de grandeur des termes d'accélération et l'ordre de grandeurs des termes d'accélération de Coriolis et centrifuge. Les résultats de cette figure sont issus de la simulation avec  $\dot{\alpha} = 60 \text{ rad/s}$  et nous montrons 0,3 secondes pour plus de lisibilité des graphes. Le système d'équations (3.27) est le système d'équation du mouvement linéarisé à l'ordre 1.

$$\begin{bmatrix} \frac{I}{ml^2} + 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Nous injectons la première équation dans la seconde et nous avons :

$$\left( 1 - \frac{4}{\frac{I}{ml^2} + 4} \right) \ddot{\theta} + \dot{\alpha}^2 \theta = 0 \quad (3.28)$$

Ce qui donne :

$$\ddot{\theta} + \dot{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{4ml^2}{I} \right) \theta = 0 \quad (3.29)$$

Nous en déduisons les fréquences d'oscillation du robot RR qui sont :

$$f = \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{4ml^2}{I}} \right) \dot{\alpha} \quad (3.30)$$

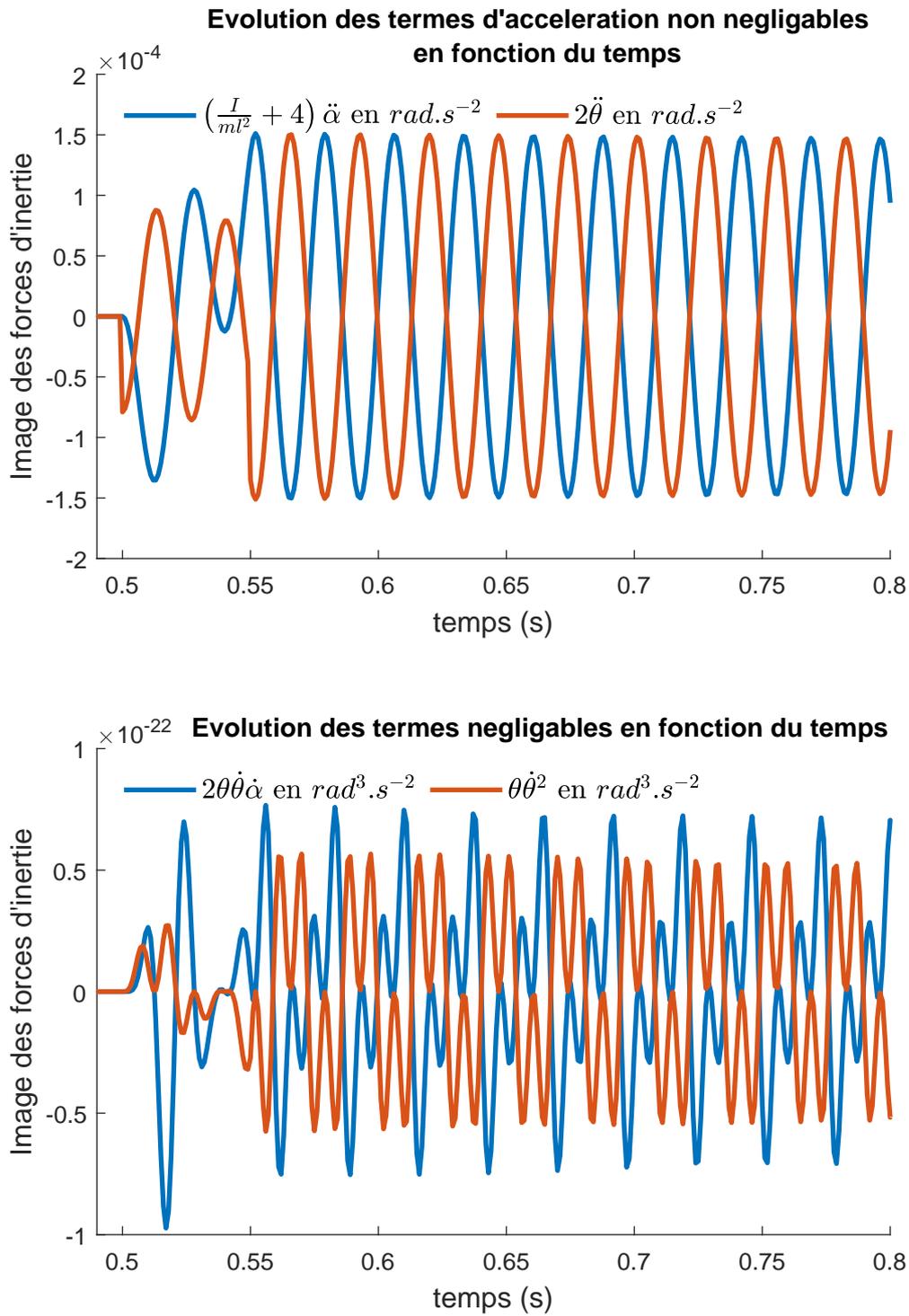


FIGURE 3.13: Ordre de grandeur des termes de l'équation (3.26)

### 3.3.4 Comparaison des résultats avec la linéarisation et la simulation numérique

Pour comparer les résultats, nous mettons sur le même graphique la fréquence en fonction de la vitesse angulaire  $\alpha$ . Les fréquences obtenues par la linéarisation sont représentées par la droite orange et les valeurs obtenues par la méthode numérique sont représentées par les points bleus (figure 3.14). La différence entre les deux est très faible, l'écart-type de l'erreur est de 0,014%. Pour chaque valeur de  $\alpha$  souhaitée, nous relevons les fréquences d'oscillation en faisant une FFT de la réponse au choc (figure 3.12) sur la sortie (ici seulement l'angle  $\theta$ ).

Vitesses angulaires $\dot{\alpha}$ ( $rad\ s^{-1}$ )	Fréquences (Hz)	Fréquences théoriques (Hz)	Erreurs (%)
1	0,58	0,61	0,055
5	3,12	3,07	-0,017
10	6,05	6,14	0,0148
20	12,3	12,28	-0,0014
30	18,35	18,42	0,0039
40	24,6	24,56	-0,0014
50	30,66	30,70	0,0014
60	36,7	36,84	0,0039
Écart-type de l'erreur (%)			0,014

TABLE 3.5: Résultats de toutes les simulations du robot RR

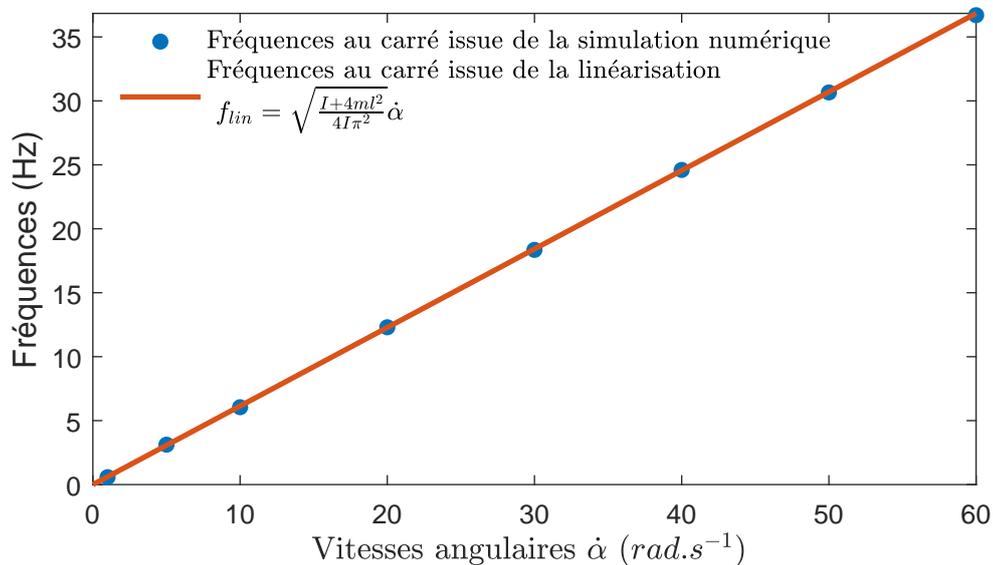


FIGURE 3.14: Comparaison des fréquences obtenues par linéarisation et par simulation numérique pour le robot RR

## 3.4 Conclusion

Jusqu'à présent pour les robots, le calcul de la fréquence d'oscillation des systèmes dans l'analyse modale était réalisé uniquement à partir d'un point de fonctionnement statique. Nos travaux utilisant les simulations présentées dans ce chapitre, montrent qu'il existe aussi un lien entre la fréquence d'oscillation des systèmes mécaniques dans l'analyse modale et les termes du premier ordre provenant des forces d'inertie propre à la vitesse (Coriolis et centrifuge), propre à l'accélération. Dans la suite de cette thèse, nous développerons un modèle dynamique linéarisé qui inclura ces forces d'inertie afin d'enrichir le calcul de la fréquence d'oscillation.



## Modèle dynamique et modèle dynamique linéarisé général

Le chapitre précédent a mis en évidence les effets de l'inertie sur les fréquences de vibration. Ce nouveau chapitre développera un modèle dynamique linéarisé général qui prend en compte ces effets d'inertie. Andreas Muller a travaillé sur les effets de l'actionnement et de la vitesse sur la raideur des robots, voir [31], [17] et [18].

Dans ce chapitre, le modèle dynamique d'un système général est écrit grâce aux équations de Lagrange (première partie). La seconde partie propose l'écriture du modèle dynamique linéarisé général. Le modèle présenté fonctionne pour tout type de robot et il n'y a pas d'obligation d'utiliser l'hypothèse sur la répartition des masses pour les barres. C'est le modèle dynamique linéarisé utilisé au chapitre 5. Il est plus complet que le modèle présenté au chapitre 2.

## 4.1 Modèle dynamique : équation de Lagrange

Les équations de Lagrange sont une re-formulation des équations classiques du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) de Newton. Elles permettent de visualiser le problème du point de vue énergétique et ne font pas intervenir les actions de liaisons. Les équations de Lagrange permettent l'écriture directe des équations du mouvement et s'appliquent dans les mêmes conditions que le PFD, c'est-à-dire dans un référentiel  $R_0$  galiléen et pour un système isolé. Dans ce chapitre, les équations de Lagrange sont écrites sous forme matricielle.  $n$  est le nombre de paramètres du système et  $m$  le nombre de degrés de liberté.

*Rappel des notations :*

—  $q$  représente les paramètres de position. Écrit sans indice, il représente tous les paramètres. Exemple :  $f(q) = f(q_1, \dots, q_n)$

—  $\dot{\mathbf{q}}$  est le vecteur contenant les vitesses des paramètres. Exemple :  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

—  $\ddot{\mathbf{q}}$  est le vecteur contenant les accélérations des paramètres. Exemple :  $\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$

Pour établir le modèle dynamique du système générique, le nombre de paramètres du système est choisi supérieur au nombre de degré de liberté. Les paramètres sont séparés en deux :

—  $\mathbf{q}_L = [q_i]^T$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$  les paramètres des degrés de liberté.

—  $\mathbf{q}_C = [q_i]^T$  pour  $i$  allant de  $n+1$  à  $m$  les paramètres des degrés contraints.

Ces paramètres sont rangés dans l'ordre suivant :

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_L^T \quad \mathbf{q}_C^T] \quad (4.1)$$

Il n'y a pas de couplage entre les paramètres dans la matrice de masse. Le seul lien entre les paramètres est décrit par les équations de contraintes.

$$\underline{A}(q_L) \dot{\mathbf{q}}_L - \underline{B}(q_C) \dot{\mathbf{q}}_C = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

La fonction  $T$  est l'énergie cinétique du système et la fonction  $V$  est l'énergie potentielle du système.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_L^T \underline{M}_L(q_L) \dot{\mathbf{q}}_L + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_C^T \underline{M}_C(q_C) \dot{\mathbf{q}}_C \quad V = V(q) \quad (4.3)$$

Avec  $\underline{M}_L$  et  $\underline{M}_C$  qui sont les matrices de masses symétriques.

Le lagrangien du système est la différence entre l'énergie cinétique et potentielle.

$$L = T - V \quad (4.4)$$

La puissance virtuelle  $P_v$  permet de calculer les coefficients des forces généralisées.

$$Q_i = \frac{\partial P_v(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.5)$$

Les équations de Lagrange avec multiplicateurs s'écrivent pour le paramètre  $q_i$

$$\text{Pour } i = 1 \text{ jusqu'à } m \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m-n} a_{ij} \lambda_j \quad (4.6)$$

Avec  $\lambda_j$  les multiplicateurs de Lagrange et  $a_{ij}$  les coefficients des polynômes de degré 1 en  $\dot{q}_i$  provenant de la dérivée des équations de contrainte. Du fait du découplage, les équations de Lagrange s'écrivent :

— Pour les  $q_L$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_L} = \mathbf{Q}_L + \underline{A}^T(q_L) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.7)$$

— Pour les  $q_C$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_C} = \mathbf{Q}_C + \underline{B}^T(q_C) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.8)$$

En développant le premier terme de chaque équation :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} \right) = \underline{\mathbb{M}}_L(q_L) \ddot{\mathbf{q}}_L + \dot{\underline{\mathbb{M}}}_L(q_L, \dot{q}_L) \dot{\mathbf{q}}_L \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C} \right) = \underline{\mathbb{M}}_C(q_C) \ddot{\mathbf{q}}_C + \dot{\underline{\mathbb{M}}}_C(q_C, \dot{q}_C) \dot{\mathbf{q}}_C \quad (4.10)$$

Puis en identifiant le second terme pour chaque équation :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} = \underline{\mathbb{C}}_L(q_L, \dot{q}_L) \dot{\mathbf{q}}_L - \mathbf{E}_L(q_L) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C} = \underline{\mathbb{C}}_C(q_C, \dot{q}_C) \dot{\mathbf{q}}_C - \mathbf{E}_C(q_C) \quad (4.12)$$

Avec :

—  $\underline{\mathbb{C}}_L$  et  $\underline{\mathbb{C}}_C$  des matrices contenant les coefficients d'ordre 2 en  $\dot{q}_i$  du système d'équations respectif  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L}$  et  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C}$ .

—  $\mathbf{E}_L$  et  $\mathbf{E}_C$  les vecteurs contenant tous les termes restants de  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L}$  et  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C}$  ne pouvant pas être rangés dans  $\underline{\mathbb{C}}_L$  et  $\underline{\mathbb{C}}_C$ .

En regroupant les termes qui peuvent l'être, les équations deviennent :

$$\underline{\mathbb{M}}_L(q_L) \ddot{\mathbf{q}}_L + \underline{\mathbb{C}}_L(q_L, \dot{q}_L) \dot{\mathbf{q}}_L + \mathbf{E}_L(q) = \mathbf{Q}_L + \underline{A}^T(q_L) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.13)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_C(q_C) \ddot{\mathbf{q}}_C + \underline{\mathbb{C}}_C(q_C, \dot{q}_C) \dot{\mathbf{q}}_C + \mathbf{E}_C(q) = \mathbf{Q}_C - \underline{B}^T(q_C) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.14)$$

Les équations de contraintes permettent d'exprimer la relation entre les paramètres.

$$\dot{\mathbf{q}}_C = \underline{B}^{-T}(q_C) \underline{A}(q_L) \dot{\mathbf{q}}_L \quad (4.15)$$

Pour simplifier les écritures, les variables dans les matrices sont masquées. Nous posons  $\underline{B}^{-1}\underline{A} = \underline{H}$  et  $\underline{A}^T \underline{B}^{-T} = \underline{H}^T$ . Il en résulte les deux relations suivantes :

$$\dot{\mathbf{q}}_C = \underline{H} \dot{\mathbf{q}}_L \quad (4.16)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_C = \underline{H} \ddot{\mathbf{q}}_L + \underline{\dot{H}} \dot{\mathbf{q}}_L \quad (4.17)$$

L'équation (4.14) est multipliée par  $H^T$  :

$$H^T \underline{M}_C \ddot{\mathbf{q}}_C + H^T \underline{C}_C \dot{\mathbf{q}}_C + H^T \underline{E}_C = H^T \underline{Q}_C - \underline{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.18)$$

Puis en remplaçant  $\dot{\mathbf{q}}_C$  et  $\ddot{\mathbf{q}}_C$ .

$$\underline{H}^T \underline{M}_C \underline{H} \ddot{\mathbf{q}}_L + (\underline{H}^T \underline{C}_C \underline{H} + \underline{H}^T \underline{M}_C \underline{\dot{H}}) \dot{\mathbf{q}}_L + \underline{H}^T \underline{E}_C = \underline{H}^T \underline{Q}_C - \underline{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.19)$$

Nous sommes les deux équations (4.13) et (4.19) :

$$(\underline{M}_L + \underline{H}^T \underline{M}_C \underline{H}) \ddot{\mathbf{q}}_L + (\underline{C}_L + \underline{H}^T \underline{C}_C \underline{H} + \underline{H}^T \underline{M}_C \underline{\dot{H}}) \dot{\mathbf{q}}_L + \underline{E}_L + \underline{H}^T \underline{E}_C = \underline{Q}_L + \underline{H}^T \underline{Q}_C - \underline{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.20)$$

Nous obtenons le modèle dynamique général qui s'écrit :

$$\boxed{\underline{M}_G(q) \ddot{\mathbf{q}}_L + \underline{C}_G(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L + \underline{E}_G(q) = \underline{Q}_G} \quad (4.21)$$

Avec

$$\underline{M}_G(q) = \underline{M}_L + \underline{H}^T \underline{M}_C \underline{H} \quad (4.22)$$

$$\underline{C}_G(q, \dot{q}) = \underline{C}_L + \underline{H}^T \underline{C}_C \underline{H} + \underline{H}^T \underline{M}_C \underline{\dot{H}} \quad (4.23)$$

$$\underline{E}_G(q) = \underline{E}_L + \underline{H}^T \underline{E}_C \quad (4.24)$$

$$\underline{Q}_G = \underline{Q}_L + \underline{H}^T \underline{Q}_C \quad (4.25)$$

Pour la partie suivante, les équations du modèle dynamique sont écrites sous la forme d'une fonction  $\mathbf{d}$ , telle que l'équation (4.26), cette forme permet de simplifier l'étape de linéarisation.

$$\mathbf{d}(q, \dot{q}, \ddot{q}, A) = \underline{M}_G(q) \ddot{\mathbf{q}}_L + \underline{C}_G(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L + \underline{E}_G(q) - \underline{Q}_G(q, A) \quad (4.26)$$

## 4.2 Contexte du modèle dynamique

- $\mathbf{Q}_L$  et  $\mathbf{Q}_C$  sont des vecteurs contenant les actions mécaniques qui correspondent respectivement aux degrés de liberté  $\mathbf{q}_L$  et  $\mathbf{q}_C$  (à l'endroit où une action mécanique est appliquée, il y correspond un degré de liberté).
- Pour faciliter la notation, le vecteur  $\mathbf{A}$  est défini par :  $\mathbf{A}^T = [\mathbf{Q}_L^T, \mathbf{Q}_C^T]$
- Le système est un robot dont tous les paramètres de position sont asservis. Cet asservissement suit une commande qui, dans cette étude, est une commande Proportionnelle-Dérivée (PD) avec une chaîne directe (qui pré-calculé les actions mécaniques, ce qui correspond à une commande en couple calculé CTC, figure 4.1 pour voir l'agencement de la commande).
- En ne sachant pas quelles sont les liaisons actives asservies, passives et parfaites, dans un premier temps elles seront toutes considérées asservies (raideur et amortissement). Pour désactiver l'élasticité et l'amortissement d'une liaison, il suffit d'annuler les composantes de raideur et ou d'amortissement correspondantes. Dans ce cas là :

Les actions mécaniques  $\mathbf{Q}_L$  et  $\mathbf{Q}_C$  sont de la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_L(q_L, \dot{q}_L) = \mathbf{Q}_{Lctc} + \mathbf{Q}_{Lcor} + \mathbf{Q}_{Lext} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Q}_C(q_C, \dot{q}_C) = \mathbf{Q}_{Cctc} + \mathbf{Q}_{Ccor} + \mathbf{Q}_{Cext} \quad (4.28)$$

Avec

- $\mathbf{Q}_{Lctc}$  et  $\mathbf{Q}_{Cctc}$  sont les actions mécaniques des actionneurs calculées par la commande CTC.
- $\mathbf{Q}_{Lcor}$  et  $\mathbf{Q}_{Ccor}$  sont les actions mécaniques des actionneurs calculées par l'asservissement (correcteur).
- $\mathbf{Q}_{Lext}$  et  $\mathbf{Q}_{Cext}$  sont les vecteurs des actions mécaniques autres qui ne dépendent pas de la commande CTC et de la commande PD.

Les actions mécaniques calculées par le correcteur PD permettent d'écrire les actions mécaniques  $\mathbf{Q}_L$  et  $\mathbf{Q}_C$  sous la forme :

$$\mathbf{Q}_L(q_L, \dot{q}_L) = \mathbf{Q}_{Lctc} - \underline{K}_L(\mathbf{q}_L - \mathbf{q}_{L0}) - \underline{D}_L(\dot{\mathbf{q}}_L - \dot{\mathbf{q}}_{L0}) + \mathbf{Q}_{Lext} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Q}_C(q_C, \dot{q}_C) = \mathbf{Q}_{Cctc} - \underline{K}_C(\mathbf{q}_C - \mathbf{q}_{C0}) - \underline{D}_C(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_{C0}) + \mathbf{Q}_{Cext} \quad (4.30)$$

Avec

- $\underline{K}_L$  et  $\underline{K}_C$  sont les matrices diagonales de raideurs de la commande proportionnelle.
- $\underline{D}_L$  et  $\underline{D}_C$  sont les matrices diagonales d'amortissement de la commande dérivée.
- $\mathbf{q}_{L0}$ ,  $\mathbf{q}_{C0}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{L0}$  et  $\dot{\mathbf{q}}_{C0}$  sont les positions et vitesses de la commande désirée au moment du calcul.

Pour l'analyse modale, les variations de la commande sont négligeables devant les autres termes. La commande sera considérée constante, ce qui permet le changement de variables suivant :

$$\mathbf{Q}_L(q_L, \dot{q}_L) = \mathbf{Q}_{L0} - \underline{K}_L \mathbf{q}_L - \underline{D}_L \dot{\mathbf{q}}_L + \mathbf{Q}_{Lext} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{Q}_C(q_C, \dot{q}_C) = \mathbf{Q}_{C0} - \underline{K}_C \mathbf{q}_C - \underline{D}_C \dot{\mathbf{q}}_C + \mathbf{Q}_{Cext} \quad (4.32)$$

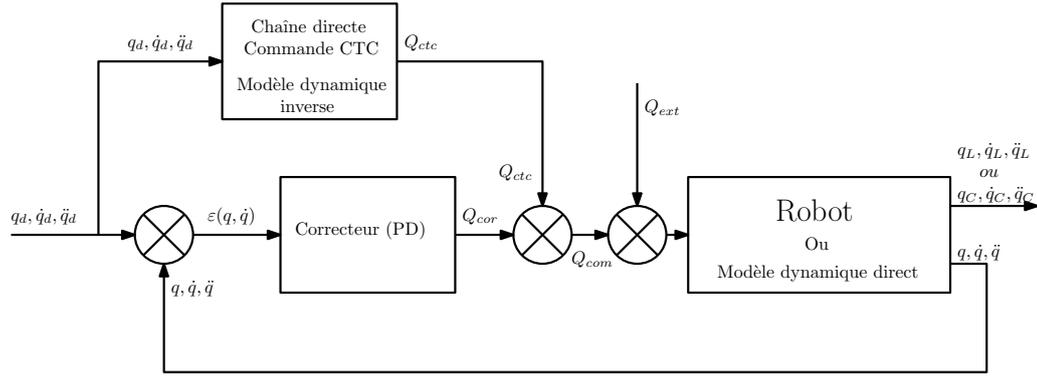


FIGURE 4.1: Schéma bloc de la commande des robots

### 4.3 Linéarisation du modèle dynamique

Le développement limité de  $\mathbf{d}$  à l'ordre 1 par rapport au point de fonctionnement  $P_f$ , donne le modèle dynamique linéarisé (MDL), (4.34).

$$P_f = (\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{A}_0) \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial d}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_L} \right|_{P_f} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_L + \left. \frac{\partial d}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} \right|_{P_f} \Delta \dot{\mathbf{q}}_L + \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{q}_L + \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{A}} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{A} = 0 \quad (4.34)$$

En utilisant la loi de commande (4.31) et (4.32), il est possible d'exprimer  $\Delta \mathbf{A}$  de l'équation (4.34) en fonction de  $\Delta \mathbf{q}_L$  et  $\Delta \dot{\mathbf{q}}_L$ .

$$\left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{A}} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{A} = \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{Q}_L} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{Q}_L + \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{Q}_C} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{Q}_C \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{A}} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{A} = -\underline{I} \Delta \mathbf{Q}_L - \underline{H}^T \Delta \mathbf{Q}_C \quad (4.36)$$

Les variations des actions mécaniques calculées par la chaîne directe sont négligeables devant les variations de la commandes PD et des actions extérieures.

$$\Delta \mathbf{Q}_L(q_L, \dot{q}_L) = -\underline{K}_L \Delta \mathbf{q}_L - \underline{D}_L \Delta \dot{\mathbf{q}}_L + \Delta \mathbf{Q}_{Lext} \quad (4.37)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_C(q_C, \dot{q}_C) = -\underline{K}_C \Delta \mathbf{q}_C - \underline{D}_C \Delta \dot{\mathbf{q}}_C + \Delta \mathbf{Q}_{Cext} \quad (4.38)$$

En utilisant l'équation (4.16), on en déduit :

$$\Delta \mathbf{q}_C = \underline{H} \Delta \mathbf{q}_L \quad (4.39)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_C = \underline{H} \Delta \dot{\mathbf{q}}_L \quad (4.40)$$

D'où :

$$\left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{A}} \right|_{P_f} \Delta \mathbf{A} = (\underline{\mathbf{K}}_L + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{K}}_C \underline{\mathbf{H}}) \Delta \mathbf{q}_L + (\underline{\mathbf{D}}_L + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{D}}_C \underline{\mathbf{H}}) \Delta \dot{\mathbf{q}}_L - \Delta \mathbf{Q}_{L\text{ext}} - \underline{\mathbf{H}}^T \Delta \mathbf{Q}_{C\text{ext}} \quad (4.41)$$

Pour alléger les notations, nous posons :

$$\underline{\mathbf{K}}_P(q_0) = \underline{\mathbf{K}}_L + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{K}}_C \underline{\mathbf{H}} \quad (4.42)$$

$$\underline{\mathbf{C}}_D(q_0) = \underline{\mathbf{D}}_L + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{D}}_C \underline{\mathbf{H}} \quad (4.43)$$

## 4.4 Identification

Le but des calculs suivants est d'identifier les termes de l'équation (4.34) et de les faire correspondre avec un système d'équations différentielles du second ordre.

$$\underline{\mathbf{M}}_0(q_0) \Delta \ddot{\mathbf{q}}_L + \underline{\mathbf{C}}_0(q_0, \dot{q}_0) \Delta \dot{\mathbf{q}}_L + \underline{\mathbf{K}}_0(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, A_0) \Delta \mathbf{q}_L = \Delta \mathbf{F} \quad (4.44)$$

### 4.4.1 Matrices de Masse

Sans aucune ambiguïté, l'identification de  $\underline{\mathbf{M}}_0$  donne :

$$\underline{\mathbf{M}}_0(q_0) = \left. \frac{\partial d}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_L} \right|_{P_f} = \underline{\mathbf{M}}(q_0) \quad (4.45)$$

Sachant que :

$$\underline{\mathbf{M}}(q_0) = \underline{\mathbf{M}}_L(q_{L0}) + \underline{\mathbf{H}}^T(q_0) \underline{\mathbf{M}}_C(q_{C0}) \underline{\mathbf{H}}(q_0) \quad (4.46)$$

### 4.4.2 Matrices d'amortissement

Pour identifier  $\underline{\mathbf{C}}_0$  il faut rechercher tous les termes qui vont se mettre en facteur de  $\Delta \dot{\mathbf{q}}_L$

$$\underline{\mathbf{C}}_0(q_0, \dot{q}_0) = \left. \frac{\partial d}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} \right|_{P_f} + \underline{\mathbf{C}}_D(q_0) \quad (4.47)$$

Qui peut s'écrire

$$\underline{\mathbf{C}}_0(q_0, \dot{q}_0) = \underline{\mathbf{C}}_v(q_0, \dot{q}_0) + \underline{\mathbf{C}}_D(q_0) \quad (4.48)$$

- Avec  $\underline{\mathbf{C}}_v(q_0, \dot{q}_0)$  la matrice d'amortissement cinématique dépendante de la position  $q$  et de la vitesse  $\dot{q}$ .

$$\underline{\mathbf{C}}_v(q_0, \dot{q}_0) = \left. \frac{\partial (\underline{\mathbf{C}}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial (\underline{\mathbf{C}}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_C} \right|_{P_f} \underline{\mathbf{H}}(q_0) \quad (4.49)$$

Sachant que :

$$\underline{\mathbf{C}}(q_L, \dot{q}_L) = \underline{\mathbf{C}}_L + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{C}}_C \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{M}}_C \dot{\underline{\mathbf{H}}} \quad (4.50)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{C}}_D(q_0)$  la matrice d'amortissement de la commande dépendante de la position  $q$ .

$$\underline{\mathbb{C}}_D(q_0) = \underline{D}_L + \underline{H}^T \underline{D}_C \underline{H} \quad (4.51)$$

### 4.4.3 Matrices de Raideur

Pour identifier  $\underline{\mathbb{K}}_0$ , il faut rechercher tous les termes qui vont se mettre en facteur de  $\Delta \mathbf{q}_L$

$$\underline{\mathbb{K}}_0(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, A_0) = \left. \frac{\partial d}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \underline{\mathbb{K}}_P(q_0) \quad (4.52)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_0(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, A_0) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}(q) \dot{\mathbf{q}}_L}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbb{C}}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(q)}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} - \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{Q}}(q, A_0)}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \underline{\mathbb{K}}_P(q_0) \quad (4.53)$$

Chaque dérivée partielle est identifiée avec la matrice se trouvant à la même position.

$$\underline{\mathbb{K}}_0(q_0, \dot{q}_0) = \underline{\mathbb{K}}_i(q_0, \ddot{q}_0) + \underline{\mathbb{K}}_v(q_0, \dot{q}_0) + \underline{\mathbb{K}}_p(q_0) + \underline{\mathbb{K}}_g(q_0, Q_{C0}) + \underline{\mathbb{K}}_P(q_0) \quad (4.54)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{K}}_i(q_0, \ddot{q}_0)$  la matrice de raideur d'inertie dépendante de la position  $q$  et de l'accélération  $\ddot{q}$ .

$$\underline{\mathbb{K}}_i(q_0, \ddot{q}_0) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}(q_L, q_{C0}) \dot{\mathbf{q}}_L}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}(q_{L0}, q_C) \dot{\mathbf{q}}_{L0}}{\partial \mathbf{q}_C} \right|_{P_f} \underline{H}(q_0) \quad (4.55)$$

Sachant que :

$$\underline{\mathbb{M}}(q_L, q_C) = \underline{\mathbb{M}}_L(q_L) + \underline{H}^T(q_L, q_C) \underline{\mathbb{M}}_C(q_C) \underline{H}(q_L, q_C) \quad (4.56)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{K}}_v(q_0, \dot{q}_0)$  la matrice de raideur cinématique dépendante de la position  $q$  et de la vitesse  $\dot{q}$

$$\underline{\mathbb{K}}_v(q_0, \dot{q}_0) = \left. \frac{\partial (\underline{\mathbb{C}}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L)}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial (\underline{\mathbb{C}}(q, \dot{q}) \dot{\mathbf{q}}_L)}{\partial \mathbf{q}_C} \right|_{P_f} \underline{H}(q_0) \quad (4.57)$$

Sachant que :

$$\underline{\mathbb{C}}(q_L, \dot{q}_L) = \underline{\mathbb{C}}_L + \underline{H}^T \underline{\mathbb{C}}_C \underline{H} + \underline{H}^T \underline{\mathbb{M}}_C \dot{\underline{H}} \quad (4.58)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{K}}_{pe}(q_0)$  la matrice de raideur potentielle élastique dépendante de la position  $q$ .

$$\underline{\mathbb{K}}_p(q_0) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(q)}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(q)}{\partial \mathbf{q}_C} \right|_{P_f} \underline{H}(q_0) \quad (4.59)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{K}}_g(q_0, Q_{C0})$  la matrice de raideur géométrique dépendante de la position  $q$  et de l'actionnement  $Q_C$

$$\underline{\mathbb{K}}_g(q_0, Q_{C0}) = - \left. \frac{\partial \underline{H}^T \underline{\mathbf{Q}}_{C0}}{\partial \mathbf{q}_L} \right|_{P_f} \quad (4.60)$$

- Avec  $\underline{\mathbb{K}}_P(q_0)$  la matrice de raideur de commande dépendant de la position  $q$ .

$$\underline{\mathbb{K}}_P(q_0) = \underline{K}_L + \underline{H}^T \underline{K}_C \underline{H} \quad (4.61)$$

#### 4.4.4 Variation des actions extérieures

Pour finaliser l'équation (4.44), nous devons compléter le vecteur  $\Delta\mathbf{F}$ . Dans ce vecteur, nous retrouvons toutes les actions mécaniques extérieures qui ne dépendent pas de la commande et de la position.

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{Q}_{\text{Lext}} + \underline{H}^T \Delta\mathbf{Q}_{\text{Cext}} \quad (4.62)$$

### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle général dynamique linéarisé d'un mécanisme asservi avec une commande CTC autour d'un point de fonctionnement  $P_f$ . Ne connaissant pas la position des axes asservis et des paramètres sollicités par les actions mécaniques extérieures, nous avons supposé qu'ils étaient tous asservis et qu'ils pouvaient tous être sollicités. Pour l'application à un cas connu, il faut supprimer certaines composantes de matrices et des vecteurs, voire les supprimer complètement si leur existence n'a plus de sens. Dans le chapitre qui suit nous proposons d'appliquer notre modèle dynamique linéarisé aux robots parallèles.



## Application aux robots parallèles

Ce chapitre présente l'étude du modèle dynamique linéarisé appliqué aux robots étudiés dans cette thèse. Les robots étudiés sont tous des robots plans contenus dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Les mouvements observés lors de l'analyse modale sont contenus dans ce même plan. Il est donc impossible de voir les oscillations d'un mode hors plan. Le chapitre se décompose en trois parties. La première partie présente la simplification des matrices issues de la linéarisation en prenant en compte les particularités dans la famille de robots étudiés. La deuxième partie présente l'application du modèle dynamique linéarisé le long d'une trajectoire définie pour les robots étudiés au chapitre 2. La troisième partie présente des phénomènes qui peuvent atténuer ou compenser les effets des forces d'inertie sur les fréquences d'oscillations des robots. Les développements de ce chapitre sont une extension de l'article que notre équipe a rédigé [32].

## 5.1 Modèle dynamique linéarisé des PKMs

Le modèle dynamique linéarisé des PKMs conserve la même forme que pour le cas général 4.44, mais avec les notations propres aux robots parallèles voir section 2.1.3.

$$\underline{\mathbb{M}}_0 \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{C}}_0 \Delta \dot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{K}}_0 \Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.1)$$

Matrices	Contenant les matrices suivantes	Expressions
$\underline{\mathbb{M}}_0$	$\underline{\mathbb{M}}_0(\mathbf{X}_0)$	$\underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0}$
$\underline{\mathbb{C}}_0$	$\underline{\mathbb{C}}_v(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)$	$\left. \frac{\partial \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right _{\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0}$
	$\underline{\mathbb{C}}_d(\mathbf{X}_0)$	$\underline{J}_{m0}^T \underline{D}_q \underline{J}_{m0}$
$\underline{\mathbb{K}}_0$	$\underline{\mathbb{K}}_i(\mathbf{X}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0)$	$\left. \frac{\partial \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \ddot{\mathbf{X}}} \right _{\mathbf{X}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0}$
	$\underline{\mathbb{K}}_v(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)$	$\left. \frac{\partial \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right _{\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0}$
	$\underline{\mathbb{K}}_g(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$	$\left. - \frac{\partial \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} \right _{\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\tau}_0}$
	$\underline{\mathbb{K}}_p(\mathbf{X}_0)$	$\underline{J}_{m0}^T \underline{K}_q \underline{J}_{m0}$

TABLE 5.1: Matrices du modèle dynamique linéarisé appliquées aux PKMs

Sachant que :

$$\underline{J}_{m0} = \underline{J}_m(\mathbf{X}_0, \mathbf{q}_0) \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(X, q)}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} = \left. \frac{\partial u(X, q_0)}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} + \left. \frac{\partial u(X_0, q)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \underline{J}_{m0} \quad (5.3)$$

Les développements sont relativement simples, rapides et permettent une compréhension facilitée. Ils montrent les effets du point de fonctionnement  $(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$  sur les différentes matrices. Ces équations sont capables de montrer la fréquence instantanée d'oscillations des robots lorsqu'ils suivent une trajectoire.

## 5.2 Étude de cas

Dans cette partie, nous montrons plusieurs simulations numériques de robots. Nous nous intéressons à l'évolution de la fréquence du premier mode d'oscillations le long de la trajectoire. Nous comparerons deux cas :

- cas 1 : Pour la trajectoire donnée, à chaque intervalle de temps, nous calculons la fréquence du premier mode d'oscillations avec un point de fonctionnement statique  $P_f = (\mathbf{X}_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Ce qui revient à calculer les valeurs propres de la matrice de la formule 5.4

$$\underline{\mathbb{M}}_0^{-1} \underline{\mathbb{K}}_p \quad (5.4)$$

- cas 2 : Pour la trajectoire donnée, à chaque intervalle de temps, nous calculons la fréquence du premier mode d'oscillations avec un point de fonctionnement dynamique  $P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$ . Ce qui revient à calculer les valeurs propres de la matrice de la formule 5.5

$$\underline{\mathbb{M}}_0^{-1} (\underline{\mathbb{K}}_i + \underline{\mathbb{K}}_v + \underline{\mathbb{K}}_g + \underline{\mathbb{K}}_p) \quad (5.5)$$

Les résultats des calculs du cas 1 sont les courbes bleues et les résultats des calculs du cas 2 sont les courbes vertes, voir figures 5.2, 5.4, 5.6 et 5.8.

Les fréquences d'oscillation sont calculées toutes les  $100\mu s$  le long de la trajectoire. La trajectoire de référence est une translation du point D au point A. La distance entre A et D est la longueur  $d$  (0.4m pour le cas présent). Le Jerk (la dérivée de l'accélération par rapport au temps) de la trajectoire est représentée par une fonction créneau par rapport au temps où les valeurs extrêmes valent  $+J_{max}, 0$ , ou  $-J_{max}$ . L'accélération, la vitesse et la position sont des fonctions "S curve" calculées par intégrations successives par rapport au temps, tout en limitant les extrêmes des fonctions si nécessaire. Le tableau 5.2 donne les valeurs des extrêmes pour chaque fonctions. Le Jerk, l'accélération, la vitesse et la position en fonction du temps sont représentés sur la figure 5.1. Dans cette configuration, seule la vitesse n'atteint pas sa limite  $V_{max}$ .

Limites	Symboles	Valeurs extrêmes	Unités
Jerk	$J_{max}$	50000	$m/s^3$
Accélération	$A_{max}$	700	$m/s^2$
Vitesse	$V_{max}$	200	$m/s$
Position	$P_{max}$	$d = 0,4$	m

TABLE 5.2: Paramètres de la trajectoire

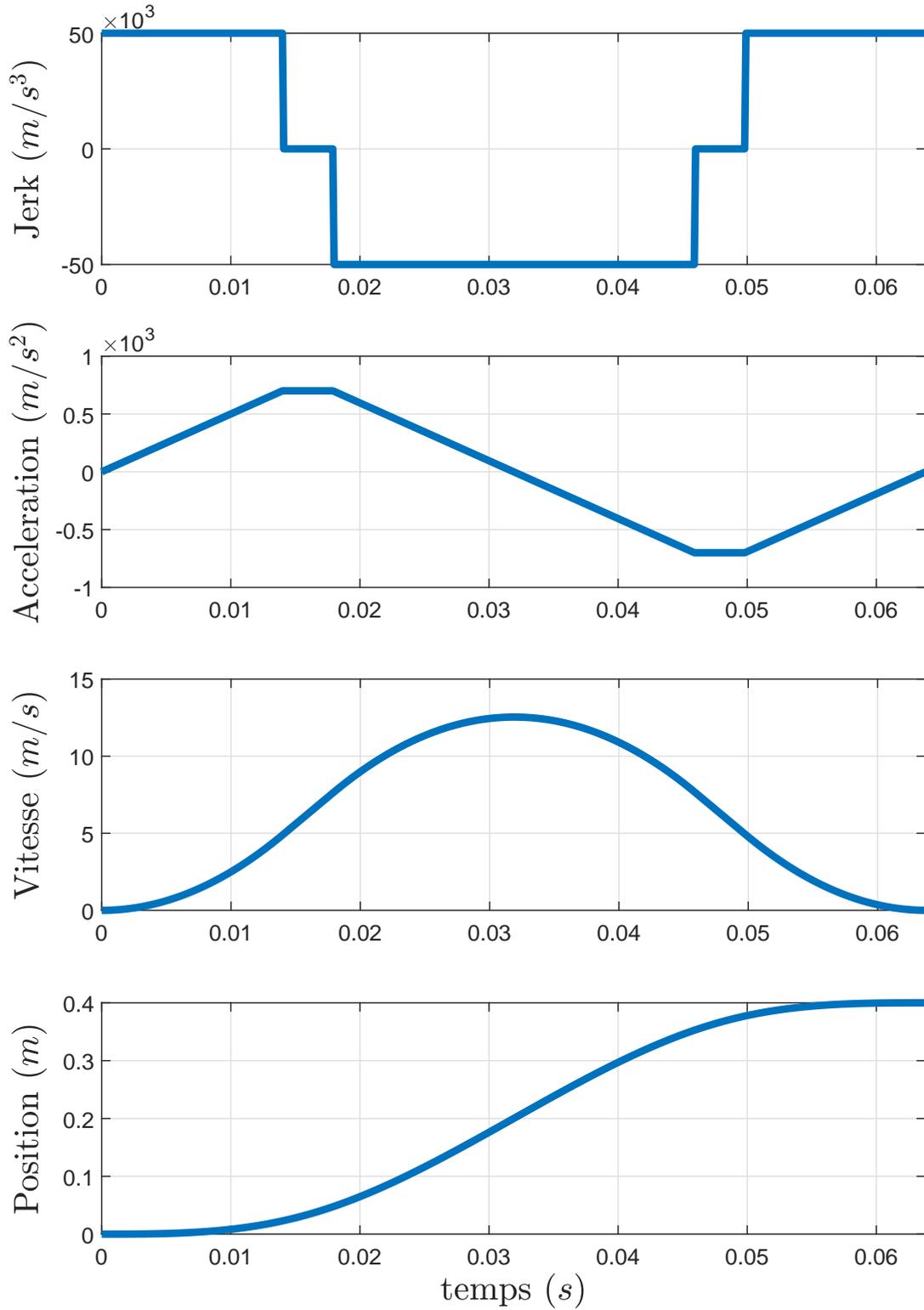


FIGURE 5.1: Représentation temporelle de la trajectoire

### 5.2.1 Étude du robot PRR-2

La description complète du robot PRR-2 est faite à la section 2.2. L'avantage du robot PRR-2 est qu'il est suffisamment simple pour que toutes les matrices puissent être écrites de manière littérale. C'est le seul robot où les matrices sont détaillées.

Matrices	Contenant les matrices suivantes	Expressions
$\underline{\mathbb{M}}_0$	$\underline{\mathbb{M}}_0(\mathbf{X}_0)$	$\begin{bmatrix} m_X + 2m_q & 0 \\ 0 & m_X + 2m_q t_0^2 \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbb{K}}_0$	$\underline{\mathbb{K}}_i(\mathbf{X}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0)$	$\frac{4\dot{y}m_q \sin \theta}{l \cos^4 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\underline{\mathbb{K}}_v(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0)$	$-\frac{2\dot{y}^2 m_q (2 \cos^2 \theta - 3)}{l^2 \cos^6 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\underline{\mathbb{K}}_g(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$	$\frac{\tau_{10} + \tau_{20}}{l \cos^3 \theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\underline{\mathbb{K}}_p(\mathbf{X}_0)$	$2k_q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tan^2 \theta \end{bmatrix}$

TABLE 5.3: Matrices du modèle dynamique linéarisé du robot PRR-2

Avec  $\theta = \text{atan2}(y, \sqrt{l^2 - y^2})$

#### Première trajectoire du robot PRR-2

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.6 exprimés dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

#### Seconde trajectoire du robot PRR-2

Le point de départ et le point d'arrivée sont désormais les vecteurs de l'équation 5.7 exprimé dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Le résultat de l'analyse modale le long des deux trajectoires est donné par la figure 5.2.

Pour la trajectoire 1 parallèle à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ , la fréquence dans le cas statique (courbe bleue) et dans le cas dynamique (courbe verte) ne varient pas du tout. Des explications sur l'interprétation des résultats sont fournies à la sous-section 5.3.1.

Pour la trajectoire 2 parallèle à l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ , le robot traverse la position  $y = 0$  qui est la singularité de type II du robot PRR-2. Au démarrage et à la fin de la trajectoire, la contribution des matrices de raideur des forces d'inertie et d'actionnement ( $\underline{\mathbb{K}}_i$ ,  $\underline{\mathbb{K}}_v$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$ ) dans la matrice de raideur globale ( $\underline{\mathbb{K}}_0$ ) est négative. Ce qui se traduit par le fait que la courbe verte passe au dessous de la courbe bleue. Pour la partie centrale, la contribution est positive, ce qui se traduit par le fait que la courbe verte passe au dessus de la courbe bleue. Autour de la singularité, dans le cas statique, la fréquence chute à 0 et dans le cas dynamique la fréquence est non nulle. Il est possible de traverser les singularités tout en gardant une certaine raideur si le robot a une vitesse non nulle. Ici ce sont les forces d'inerties dépendantes de la vitesse qui créent la raideur suffisante pour rester stable. C'est une autre façon de traverser une singularité que celle proposée par Kock [15] et Six [24].

Afin d'avoir une meilleure vision de l'influence des forces d'inertie sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-2, nous changeons la valeur de la raideur d'asservissement  $k_q$  qui varie de  $0N/m$  à  $10000000N/m$ . Cette étude est faite sur la trajectoire 2 car c'est la seule trajectoire sensible aux forces d'inertie. Les résultats de cette étude sont données sur la figure 5.3.

- Pour  $k_q = 0N/m$ , la matrice  $\underline{\mathbb{K}}_0$  est singulière, une des valeurs propres est nulle et l'autre est négative.
- Pour  $0N/m < k_q < 5000N/m$ , la contribution négative des matrices de raideur  $\underline{\mathbb{K}}_i$ ,  $\underline{\mathbb{K}}_v$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$  est suffisamment grande pour que  $\underline{\mathbb{K}}_0$  ait une valeur propre négative (chute de la fréquence d'oscillation vers  $0Hz$ ).
- Pour  $k_q \leq 5000N/m$  la contribution de la matrice de raideur d'asservissement  $\underline{\mathbb{K}}_p$  est suffisamment grande pour compenser la contribution des matrices de raideur des forces d'inertie et d'actionnement ( $\underline{\mathbb{K}}_i$ ,  $\underline{\mathbb{K}}_v$  et  $\underline{\mathbb{K}}_g$ ).
- Pour  $k_q$  suffisamment grand (ex :  $k_q \geq 10000000N/m$ ), la contribution de la matrice de raideur d'asservissement est prédominante dans la matrice globale  $\underline{\mathbb{K}}_0$ , sauf autour de la singularité.

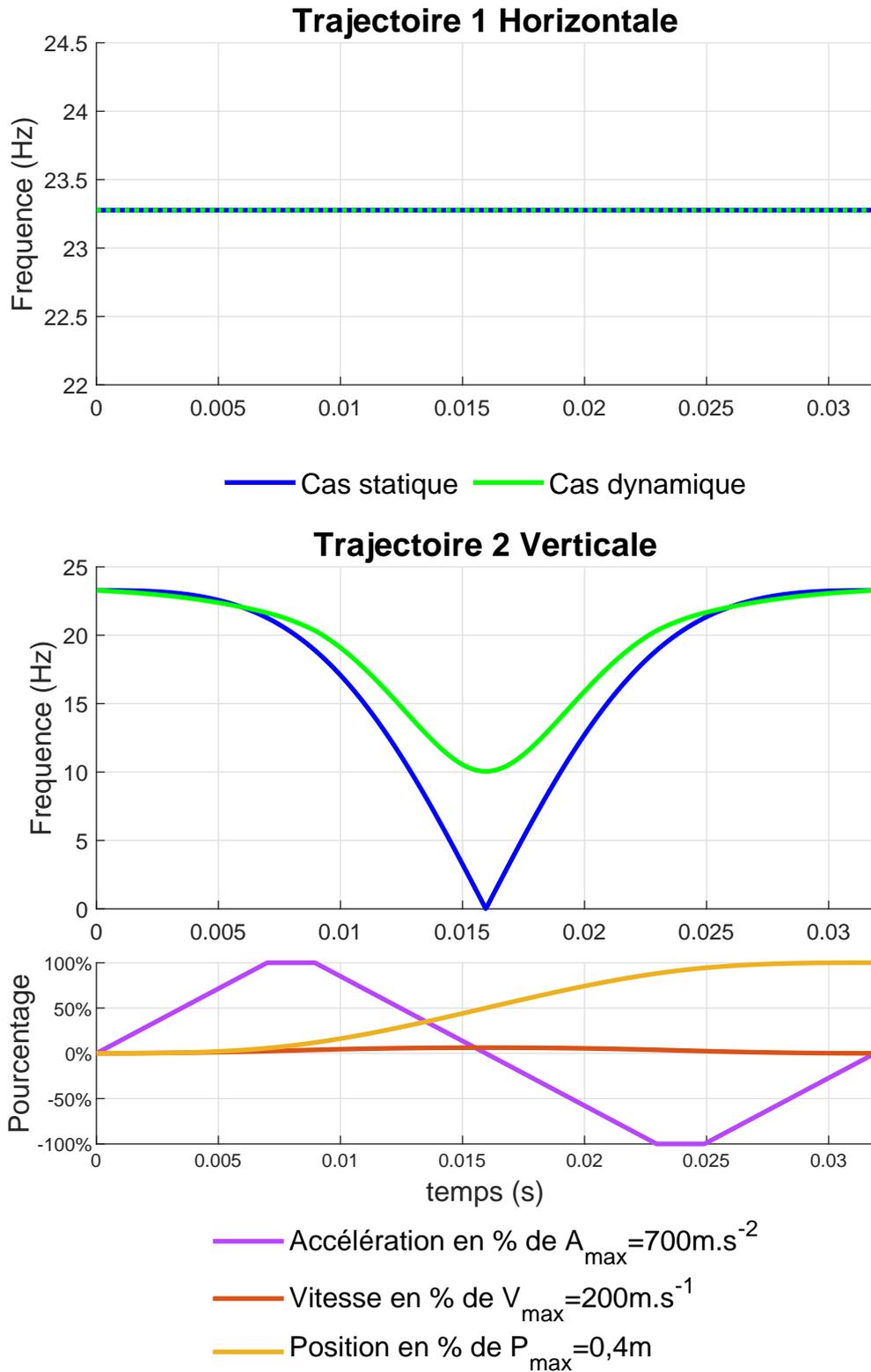


FIGURE 5.2: Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-2

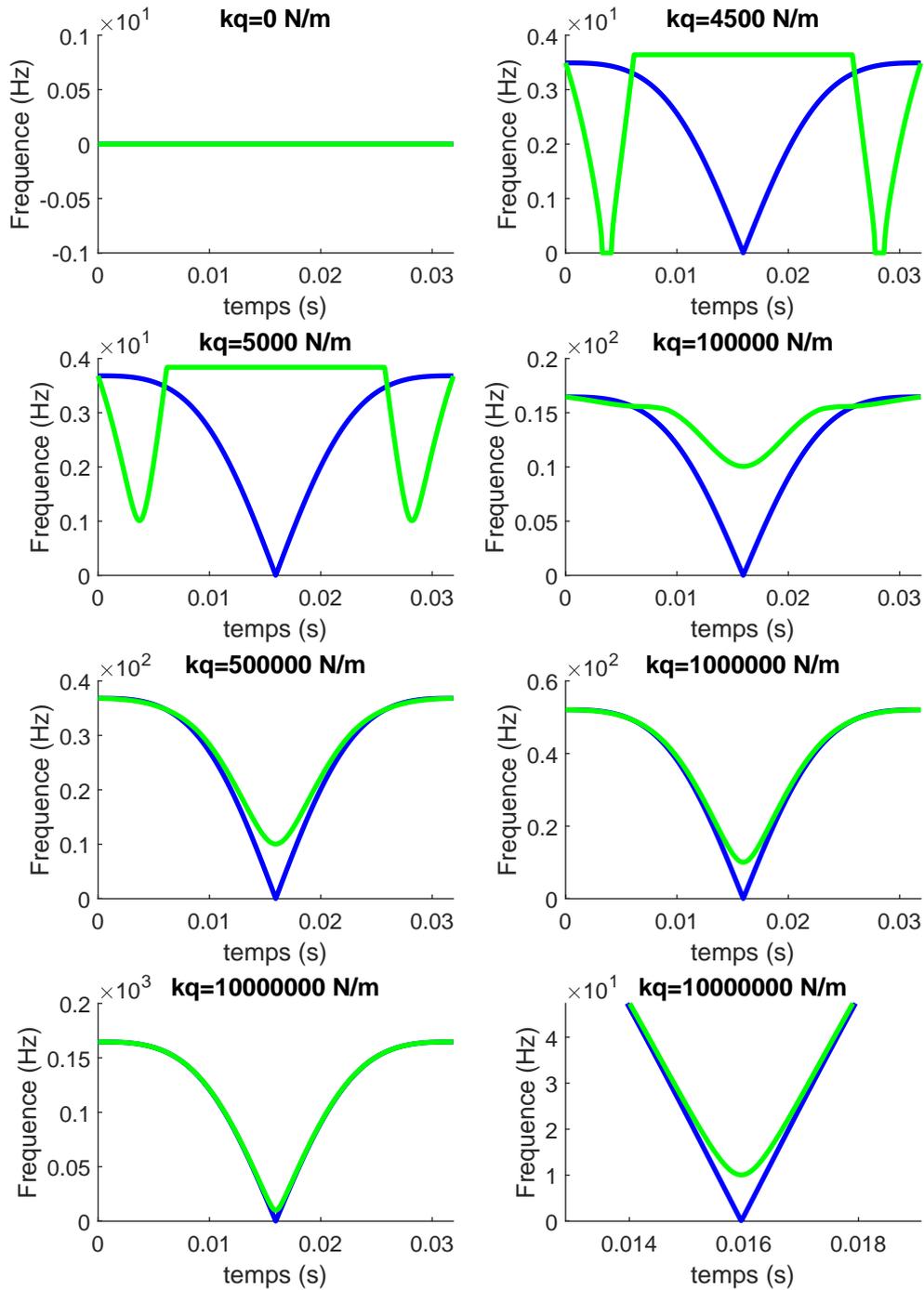


FIGURE 5.3: Analyse de sensibilité du paramètre  $k_q$  sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-2 lors du suivi de la trajectoire 2

## 5.2.2 Étude du robot PRR-3

La description complète du robot PRR-3 est faite à la section 2.3. L'expression des matrices de ce robot est trop complexe pour être écrite ici. Les calculs sont faits formellement à l'aide de Matlab Symbolic Toolbox puis intégrés dans des fonctions sur Matlab.

### Première trajectoire du robot PRR-3

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.8 exprimés dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

### Seconde trajectoire du robot PRR-3

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.9 exprimés dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Le résultat de l'analyse modale le long des trajectoires est donné par la figure 5.4 pour  $k_q = 200000N/m$ .

La courbe bleue, qui est le cas statique, varie et se comporte comme pour la cartographie faite à la section 2.3.2, sauf que la courbe est déformée car le robot ne se déplace pas à vitesse constante. Pour les deux trajectoires, nous aboutissons à la même conclusion : La courbe verte, qui est le cas dynamique, est légèrement au dessus de la courbe bleue, ce qui veut dire que les effets dynamiques pour les deux trajectoires choisies passant par l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  pour la première et passant par l'axe  $(O, \vec{y}_0)$  pour la seconde ont tendance à augmenter la raideur du robot.

La figure 5.5 présente l'évolution des fréquences d'oscillation du robot PRR-3 suivant la trajectoire 1 lorsque le paramètre  $k_q$  varie de  $0N/m$  à  $10000000N/m$ . Le comportement des fréquences d'oscillation du PRR-3 dans le cas dynamique en fonction du paramètre  $k_q$  est divisé en trois parties :

- Pour  $0N/m \leq k_q < 5000N/m$ , la contribution négative des matrices de raideur  $\mathbb{K}_i$ ,  $\mathbb{K}_v$  et  $\mathbb{K}_g$  est suffisamment grande pour que  $\mathbb{K}_0$  ait une valeur propre négative (chute de la fréquence d'oscillation vers  $0Hz$ ).
- Pour  $5000N/m < k_q < 500000N/m$ , il existe une différence notable entre le cas statique et le cas dynamique.
- Pour  $k_q \gg 500000N/m$  (ex :  $k_q = 10000000N/m$ ), les effets des forces d'inertie sur les fréquences d'oscillation sont négligeables (dans ce cas il n'y a pas de singularité de type II pour créer une différence).

Une étude similaire en utilisant la trajectoire 2 donne les mêmes résultats.

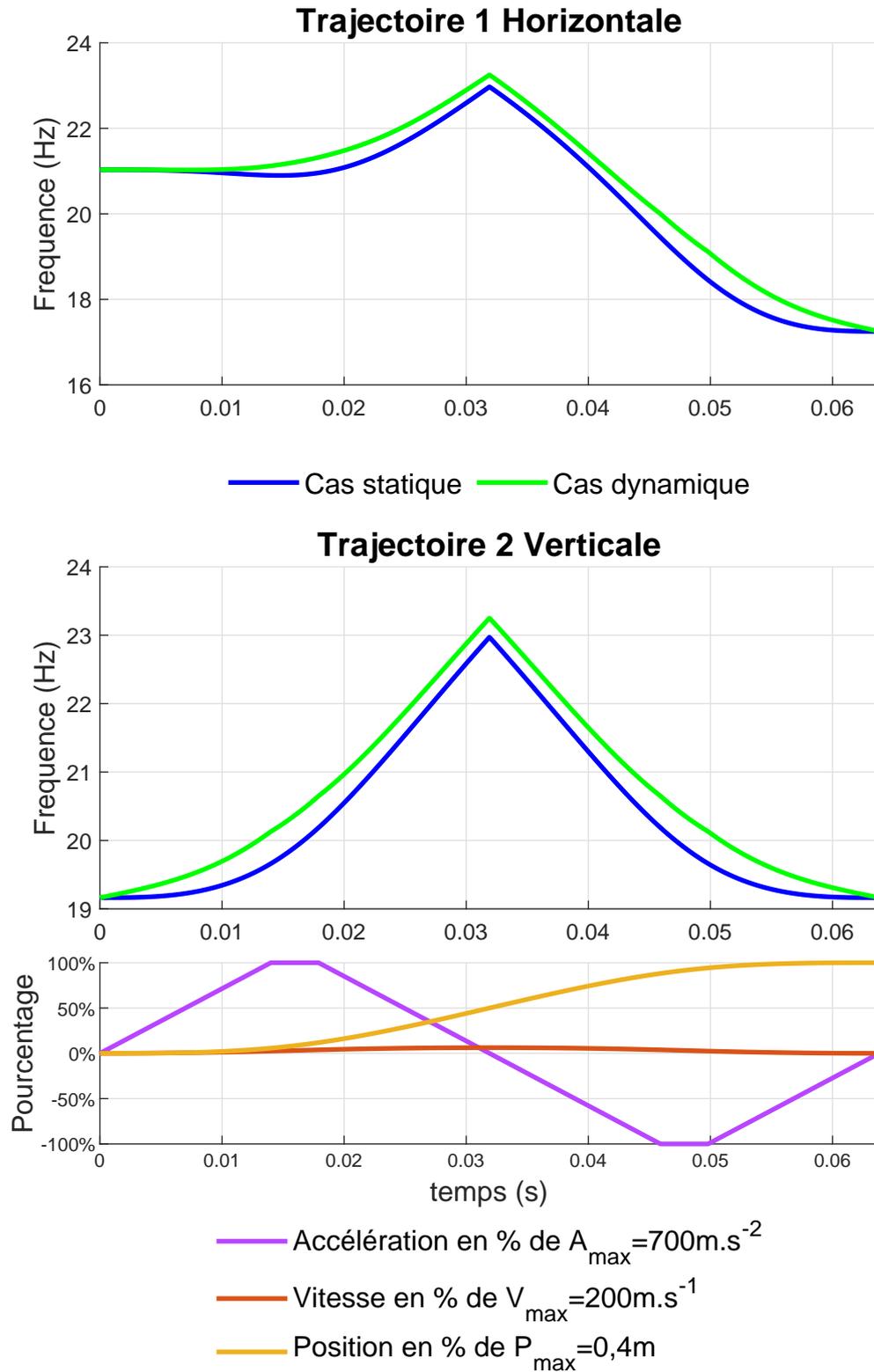


FIGURE 5.4: Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-3

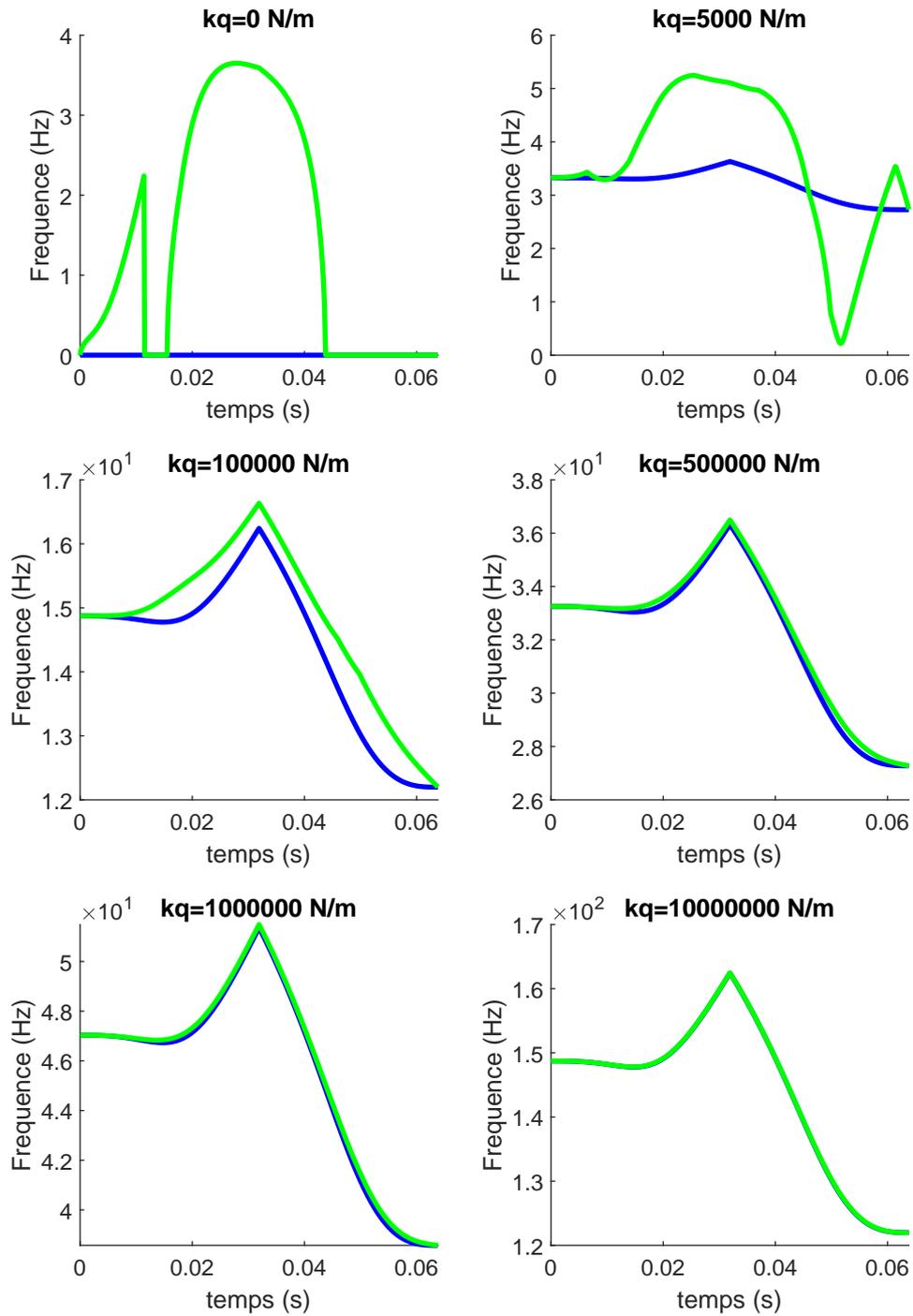


FIGURE 5.5: Analyse de sensibilité du paramètre  $k_q$  sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-3 lors du suivi de la trajectoire 1

### 5.2.3 Étude du robot PRR-4

La description complète du robot PRR-4 est faite à la section 2.4. L'expression des matrices de ce robot est trop complexe également. Pour ce robot les paramètres de trajectoire et de raideur sont différents, voir tableau 5.4.

Limites	Symboles	Valeurs extrêmes	Unités
Jerk	$J_{max}$	20000	$m/s^3$
Accélération	$A_{max}$	200	$m/s^2$
Vitesse	$V_{max}$	10	$m/s$
Position	$P_{max}$	$d$	m
Raideur d'asservissement	$k_q$	$5 \cdot 10^7$	$N/m$

TABLE 5.4: Paramètres de la trajectoire

#### Première trajectoire du robot PRR-4

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.10 exprimés dans  $R_0$ .

$$X_d = [0 \ 0, 1]^T \quad X_a = [10 \ 0, 1]^T \quad (5.10)$$

#### Seconde trajectoire du robot PRR-4

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.11 exprimés dans  $R_0$ .

$$X_d = [0 \ 0, 1]^T \quad X_a = [0 \ -0, 1]^T \quad (5.11)$$

Le résultat de l'analyse modale le long de la trajectoire est donné par la figure 5.6.

Pour la trajectoire horizontale 1, la courbe bleue, qui est le cas statique, ne varie pas car le robot conserve sa géométrie lors d'un mouvement parallèle à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Pour le cas dynamique (courbe verte), la différence entre la courbe bleue et la courbe verte n'est pas significative.

Pour la trajectoire verticale 2, lorsque nous comparons les deux courbes, nous voyons le même genre de comportement mais avec quelques différences. Dans le cas statique la fréquence du premier mode chute vers 0 lorsque  $y = 0$  (singularité de type II) mais ce n'est pas le cas lorsque nous prenons en compte les forces d'inertie dans les calculs. Nous pouvons en déduire que les forces d'inertie induisent la raideur permettant de traverser les singularités parallèles.

Le comportement des fréquences d'oscillation du robot PRR-4 dans le cas dynamique est le même que pour le robot PRR-2, seules les valeurs délimitant les zones sont différentes, voir figure 5.7.

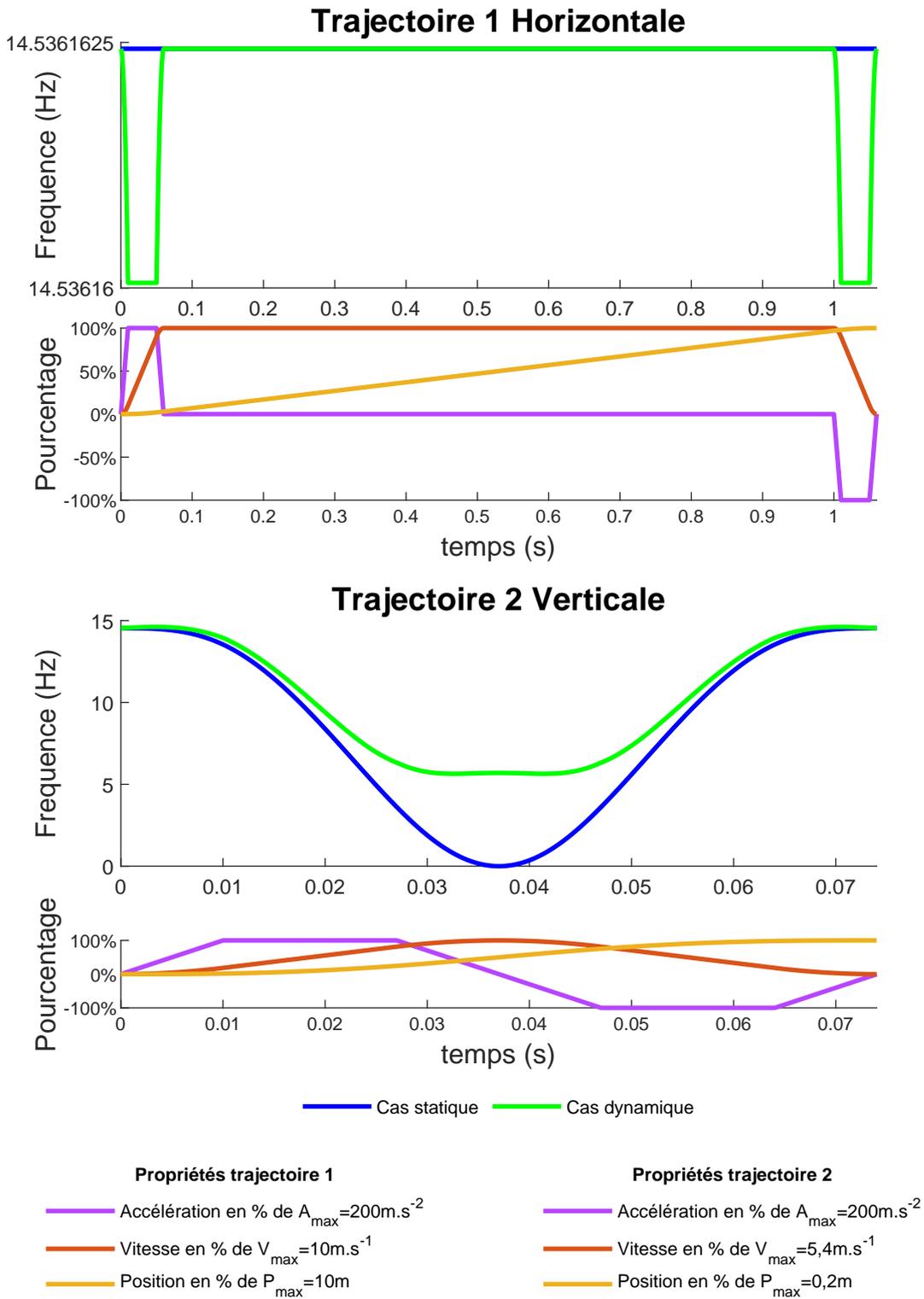


FIGURE 5.6: Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-4

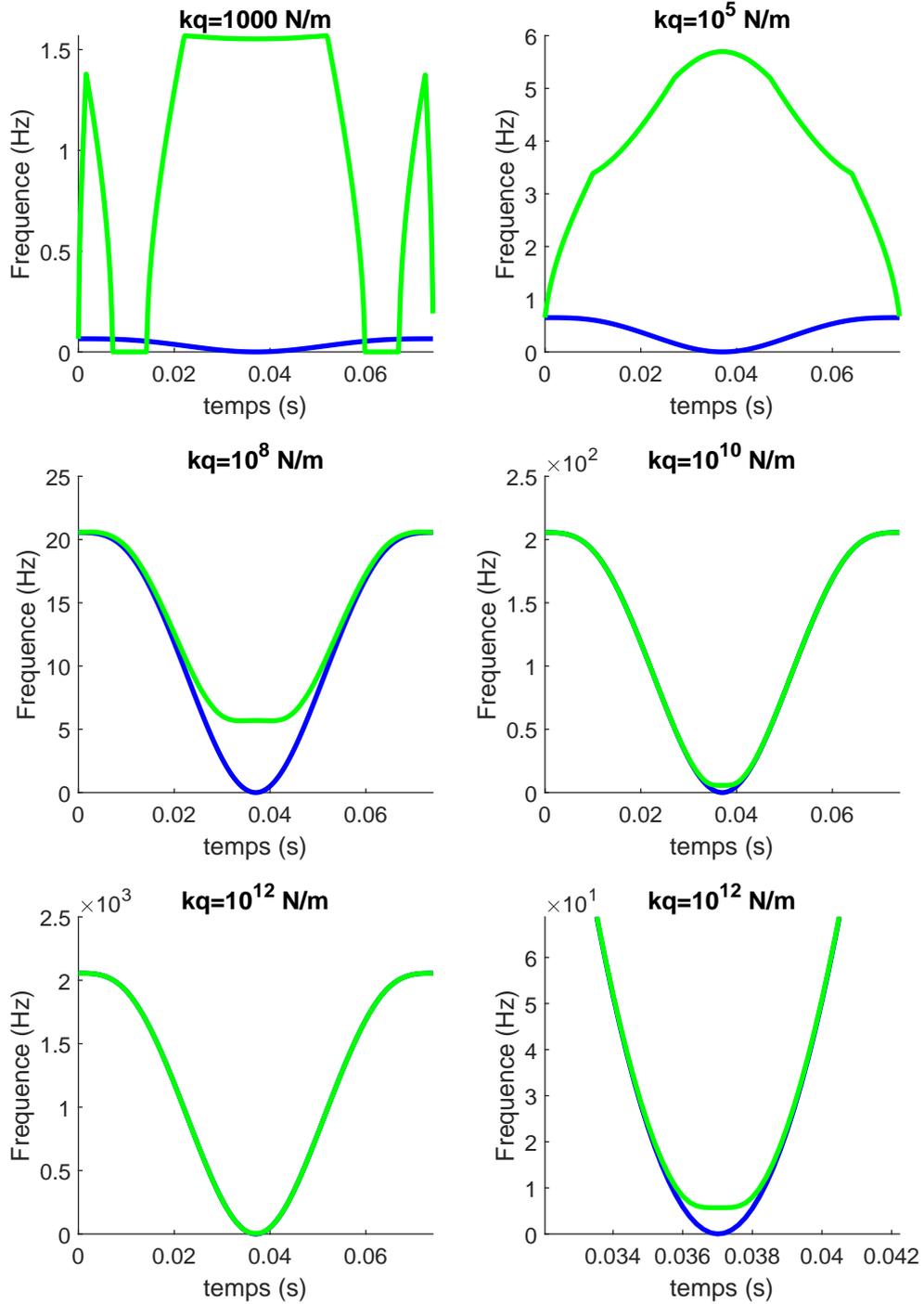


FIGURE 5.7: Analyse de sensibilité du paramètre  $k_q$  sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-4 lors du suivi de la trajectoire 2

### 5.2.4 Étude du robot Dual-V

Les paramètres de trajectoire et de raideur utilisés sont ceux du tableau 5.5.

Limites	Symboles	Valeurs extrêmes	Unités
Jerk	$J_{max}$	20000	$m/s^3$
Accélération	$A_{max}$	200	$m/s^2$
Vitesse	$V_{max}$	10	$m/s$
Position	$P_{max}$	0,2	m
Raideur d'asservissement	$k_q$	900	$N.m/rad$

TABLE 5.5: Paramètres de la trajectoire

#### Première trajectoire du robot Dual-V

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.12 exprimés dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

#### Seconde trajectoire du robot Dual-V

Le point de départ et le point d'arrivée sont les vecteurs de l'équation 5.13 exprimés dans  $R_0$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad X_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Pour les deux trajectoires suivies par le robot Dual-V, l'influence de la vitesse et de l'accélération sont visibles sur la figure 5.8. Pour la géométrie du robot Dual-V l'accélération a un comportement différent en fonction de la trajectoire et la vitesse a tendance à augmenter la fréquence du premier mode d'oscillation.

Lorsque nous faisons l'analyse de sensibilité du paramètre  $k_q$  pour les deux trajectoires, les trois zones identifiées dans les robots précédents sont de nouveaux présentes.

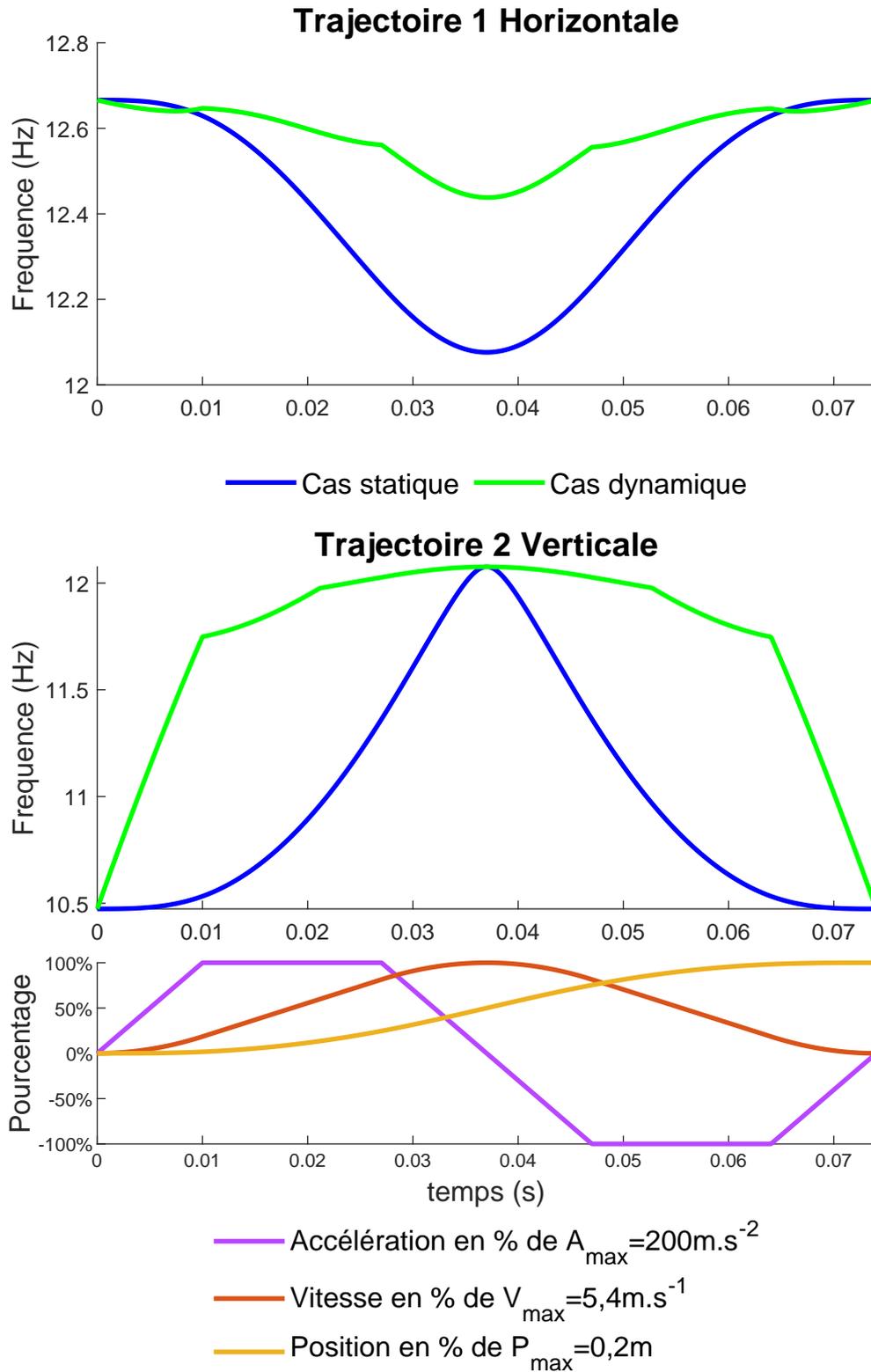


FIGURE 5.8: Analyse modale le long des trajectoires du robot Dual-V

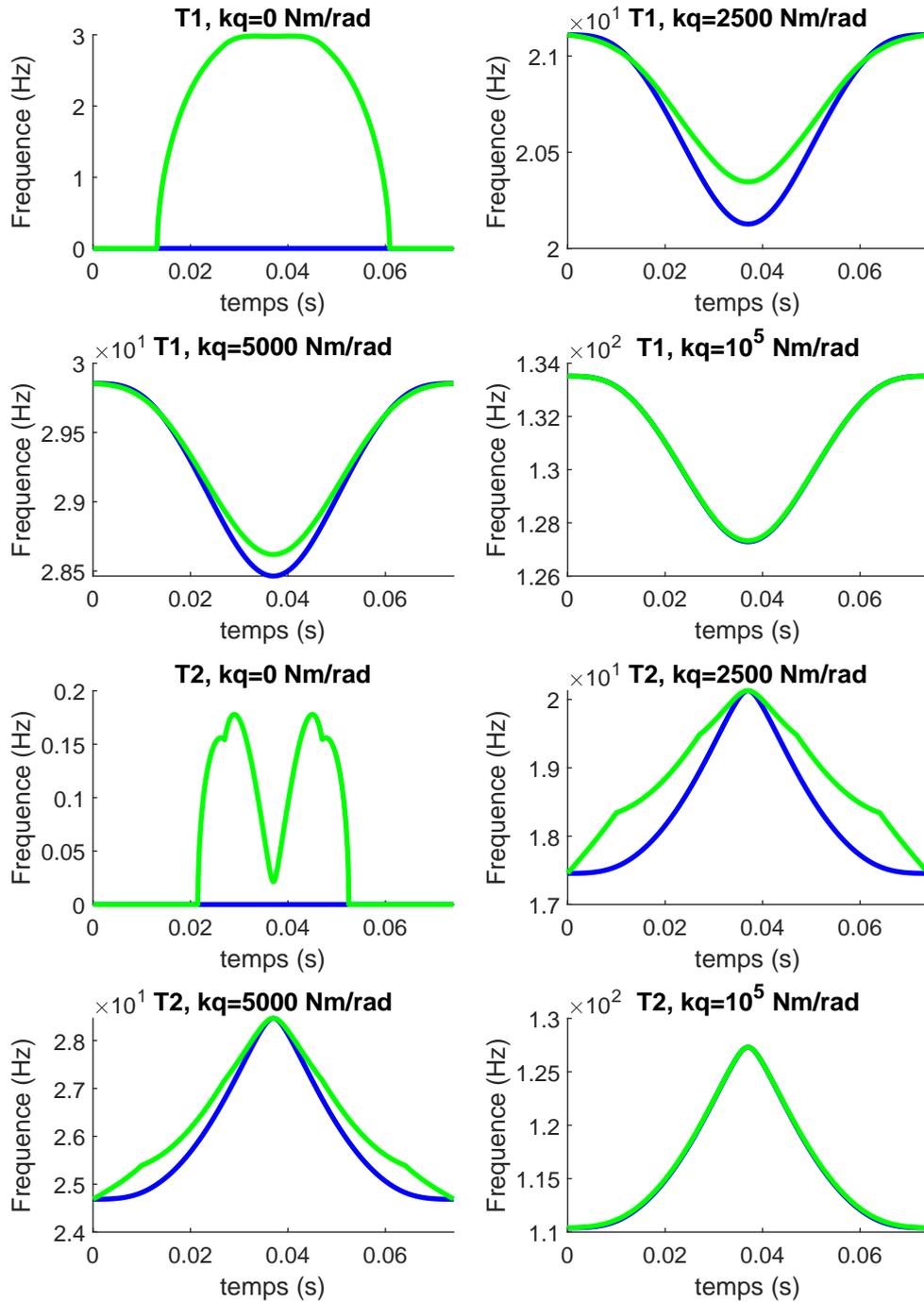


FIGURE 5.9: Analyse de sensibilité du paramètre  $k_q$  sur les fréquences d'oscillation du robot Dual-V lors du suivi des trajectoires 1 et 2

### 5.2.5 Conclusion

Après toutes les simulations présentées dans cette partie, il est possible d'identifier plusieurs manières dont les forces d'inerties influent sur les fréquences du premier mode d'oscillation. Les cas identifiés sont les suivants :

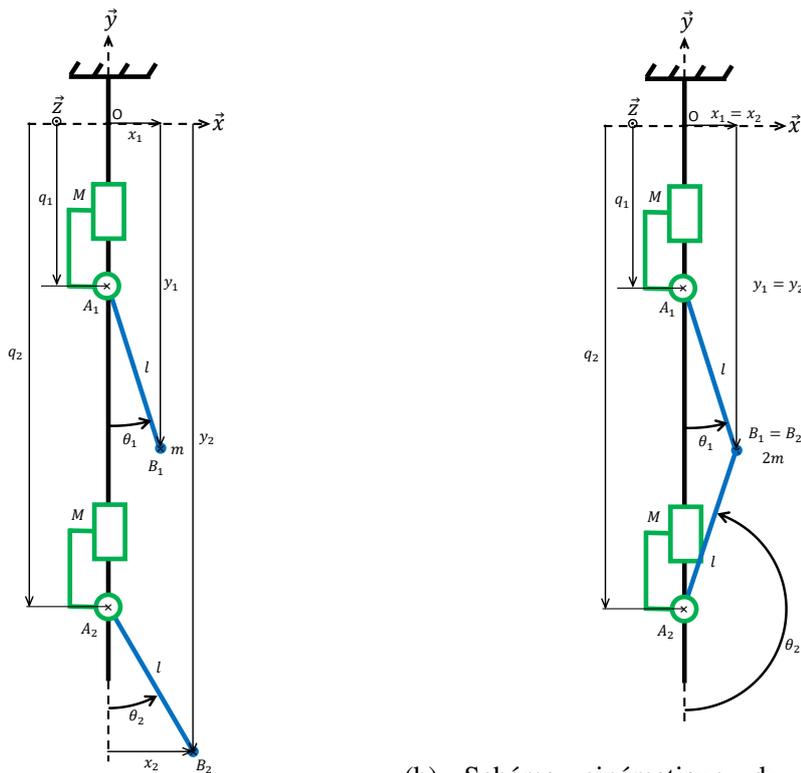
- 1<sup>er</sup> cas : Les forces d'inertie n'ont aucune influence sur la valeur de la fréquence du premier mode d'oscillation. Nous pouvons voir cela avec le cas du PRR-2 et PRR-4 lors de la trajectoire 1, il y a compensation de la raideur issue de la force d'inertie.
- 2<sup>nd</sup> cas : Les forces d'inertie ont une influence sur la valeur de la fréquence du premier mode d'oscillation, mais nous ne pouvons pas dire si cette influence sera une augmentation ou une diminution et sur quelle partie de la trajectoire. Suivant la valeur des gains proportionnels de l'asservissement ( $k_q$ ), nous pouvons identifier trois zones :
  - Pour des faibles valeurs de  $k_q$ , l'asservissement n'est pas capable de compenser la chute de fréquence due aux forces d'inertie et le modèle dynamique linéarisé du robot n'a pas de valeurs propres négatives (fréquences complexes donc instabilité).
  - Pour des valeurs intermédiaires de  $k_q$ , le modèle dynamique linéarisé a des valeurs propres positives, l'influence des forces d'inertie est présente.
  - Pour des grandes valeurs de  $k_q$ , la matrice de raideur d'asservissement  $\underline{\mathbb{K}}_p$  est prépondérante dans la matrice de raideur globale  $\underline{\mathbb{K}}_0$  et l'influence des forces d'inertie est négligeable.
  - Il y a le cas particulier des singularités qui ne dépend pas de la valeur de  $k_q$ . Seules les forces d'inertie et d'actionnement peuvent créer de la raideur dans ce cas là.

Les différents cas dépendent fortement de la géométrie, de la répartition des inerties, de la commande du robot et de la trajectoire. Le modèle développé lors de cette thèse permet de faire des prédictions sur le comportement de la fréquence du premier mode d'oscillation. La section suivante illustre les phénomènes mis en jeu pour ces variations de fréquence à partir de cas simplifiés.

### 5.3 Effets atténuants des raideurs d'inertie

#### 5.3.1 Compensation des raideurs par effet antagoniste

La comparaison de l'analyse modale du robot PR avec l'analyse modale du robot PRR-2 montrera les effets antagonistes des chaînes fermées. Dans le chapitre 3, l'influence de la dynamique a été montrée pour le robot série PR. Pour créer une chaîne fermée, deux robots PR peuvent être assemblés pour créer le robot PRR-2 qui possède une chaîne fermée, voir figures 5.10 et 5.11. Les calculs sont refaits différemment ici pour voir les influences des chaînes fermées sur les fréquences des modes d'oscillation.



(a) Schéma cinématique de 2 robots PR

(b) Schéma cinématique du robot PRR-2 assemblés

FIGURE 5.10: Assemblage du robot PRR-2

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur de la barre	$l$	0,05	m
Masse de la glissière	$M$	0,5	kg
Masse de la plateforme mobile	$m$	0,5	kg

TABLE 5.6: Paramètres géométrique et d'inertie du robot PR-2

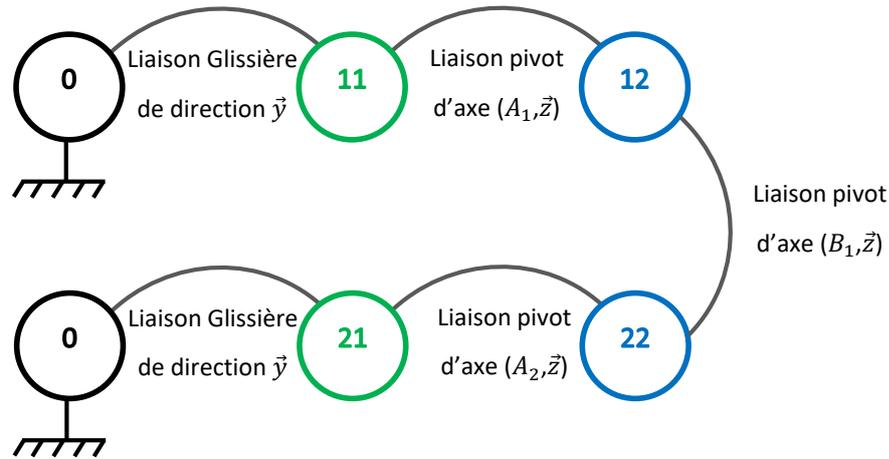


FIGURE 5.11: Graphe de liaison du robot PRR-2

La force de gravité n'est pas prise en compte dans les calculs. Dans un premier temps, nous écrivons le modèle dynamique d'une seule chaîne cinématique et le modèle dynamique associé (un seul robot PR), mais exprimé avec les paramètres de position du point  $B$  (l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange facilite le calcul). Puis nous utiliserons les multiplicateurs de Lagrange une seconde fois pour relier les deux chaînes cinématiques qui nous donneront le modèle dynamique du robot PR-2 et le modèle dynamique linéarisé associé à ce robot.

### Étude du robot PR

Les inerties en mouvement du robot PR sont la masse  $M$  du corps 1 et la masse  $m$  du corps 2. Le double de l'énergie cinétique du robot est donc :

$$2T_{PR} = M \overrightarrow{V_{G \in 1/0}}^2 + m \overrightarrow{V_{A \in 2/0}}^2 \quad (5.14)$$

Par contre le paramétrage du robot est différent et nous souhaitons que les paramètres libres du robot soient  $x_1$  et  $y_1$ . L'énergie cinétique s'écrit :

$$2T_{PR} = M \dot{q}_1^2 + m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \quad (5.15)$$

Et la puissance virtuelle du robot PR est :

$$P_{VPR} = F_q \dot{q}_1 + F_\theta \dot{\theta}_1 + F_x \dot{x}_1 + F_y \dot{y}_1 \quad (5.16)$$

Pour simplifier les calculs, nous utiliserons les équations de Lagrange en utilisant les multiplicateurs pour relier les paramètres  $q_1$  et  $\theta_1$  aux paramètres  $x_1$  et  $y_1$ . Les matrices suivantes sont calculées à partir de l'énergie cinétique du robot PR.

$$\underline{\mathbb{M}}_{XPR} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{qPR} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_{XPR}$  et  $\underline{\mathbb{M}}_{qPR}$  sont constantes, nous en déduisons que les matrices  $\underline{\mathbb{C}}_{XPR}$  et  $\underline{\mathbb{C}}_{qPR}$  sont nulles (en faisant référence à la famille de robot). Il faut renseigner les équations de contrainte pour pouvoir calculer les équations du mouvement du robot PR.

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1 \\ y_1 &= -l \cos \theta_1 + q_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

En dérivant les équations de contrainte(5.19), nous avons la relation des vitesses (5.20) qui se réécrit sous la forme (5.21) et nous permet de calculer la matrice  $\underline{H}$ . Ici nous gardons la notation  $\underline{H}$  car ce n'est pas la matrice jacobienne du robot PR-2.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 l \sin \theta_1 + \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & l \cos \theta_1 \\ 1 & l \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

$$\underline{H}_{PR}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -\tan \theta_1 & 1 \\ \frac{1}{l \cos \theta_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$(\underline{\mathbb{M}}_X + \underline{H}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{H}) \ddot{\mathbf{X}}_1 + \underline{H}^T \underline{\mathbb{M}}_q \dot{\underline{H}} \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{Q}_X + \underline{H}^T \mathbf{Q}_{q1} \quad (5.23)$$

Grâce à l'équation (5.23), nous pouvons calculer les équations du mouvement du premier robot PR qui sont les équations (5.24) et (5.25).

$$\underline{\mathbb{M}}_{PR1}(\theta_1) \ddot{\mathbf{X}}_1 + \underline{\mathbb{C}}_{PR1}(\theta_1, \dot{\theta}_1) \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{Q}_{X1} + \underline{H}^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & \iff \\ & \begin{bmatrix} M \tan^2 \theta_1 + m & -M \tan \theta_1 \\ -M \tan \theta_1 & M + m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \frac{\dot{\theta}_1 M}{\cos^2 \theta_1} \begin{bmatrix} \tan \theta_1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tan \theta_1 & \frac{1}{l \cos \theta_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{q1} \\ F_{\theta_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nous calculons le modèle dynamique linéarisé du robot PR et les matrices associées 5.26. Les matrices d'amortissement ne sont pas prises en compte pour simplifier la démarche et la matrice de raideur d'asservissement est nulle car il n'y en a pas. Le point de fonctionnement choisi est  $P_f = (\mathbf{X}_{10}, \dot{\mathbf{X}}_{10}, \ddot{\mathbf{X}}_{10}, \mathbf{A}_{10})$

$$\underline{\mathbb{M}}_{0PR} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_{iPR} + \underline{\mathbb{K}}_{vPR} + \underline{\mathbb{K}}_{gPR}) \Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.26)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{0PR} = \begin{bmatrix} M \tan^2 \theta_{10} + m & -M \tan \theta_{10} \\ -M \tan \theta_{10} & M + m \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

La matrice de masse  $\underline{\mathbb{M}}_{PR1}$ , la matrice d'amortissement  $\underline{\mathbb{C}}_{PR1}(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  et  $\underline{H}^T(\theta_1)$  ne dépendent que du paramètre  $\theta_1$  pour les paramètres de position.  $\theta_{10}$ ,  $F_{q10}$  et  $F_{\theta10}$  sont les paramètres  $\theta_1$ ,  $F_{q1}$  et  $F_{\theta1}$  compatibles avec  $\mathbf{X}_{10}$  et  $\mathbf{A}_{10}$  du point de fonctionnement  $P_f$ . Les dérivées partielles d'un vecteur  $U$  quelconque se font en suivant la formule (5.28) :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \mathbf{x}_{10}} = \left. \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}} \quad (5.28)$$

Avec  $\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}}$  qui est la seconde ligne de la matrice  $\underline{H}$  :

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l \cos \theta_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Nous calculons les dérivées partielles des vecteurs suivants  $\underline{\mathbb{M}}_{PR} \ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\underline{\mathbb{C}}_{PR} \dot{\mathbf{X}}$  et  $-\underline{H}^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}$  :

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}_{PR} \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} \frac{2M \tan \theta_{10} \dot{x}_{10} - M \dot{y}_{10}}{\cos^2 \theta_{10}} \\ \frac{-M \dot{y}_{10}}{\cos^2 \theta_{10}} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{C}}_{PR} \dot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_{10} M (2 \sin^2 \theta_{10} + 1)}{\cos^4 \theta_{10}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$-\left. \frac{\partial \underline{H}^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} (1 + \tan^2 \theta_{10}) F_{q10} + \frac{\tan \theta_{10}}{l \cos \theta_{10}} F_{\theta10} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Le système dynamique linéarisé étant calculé, nous donnons davantage de précisions sur le point de fonctionnement, qui est le même que dans le cas du chapitre 3.2 (pour rappel  $\theta_{01} = \dot{\theta}_{01} = \ddot{\theta}_{01} = 0$ ). Nous en déduisons que  $x_{01} = \dot{x}_{01} = \ddot{x}_{01} = 0$  et nous avons une accélération constante sur  $y$  grâce à une force d'actionnement  $F_{q10}$  qui vaut  $(M + m)\ddot{y}_{10}$ . Après substitution des valeurs, l'expression des matrices est :

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}} = \frac{1}{l} [1 \quad 0] \quad (5.33)$$

et

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}_{PR} \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\ddot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} -M\ddot{y}_{10} \\ -M\ddot{y}_{10} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{C}}_{PR} \dot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$- \left. \frac{\partial \underline{\mathbb{H}}^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}}{\partial \theta_1} \right|_{\ddot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} (M + m)\ddot{y}_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Le système dynamique linéarisé au point de fonctionnement est :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M + m \end{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \frac{1}{l} \left( \begin{bmatrix} -M\ddot{y}_{10} \\ -M\ddot{y}_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M + m)\ddot{y}_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \right) [1 \quad 0] \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.37)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M + m \end{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \frac{\ddot{y}_{10}}{l} \begin{bmatrix} m & 0 \\ -M & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

En étudiant les valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbb{M}}_{OPR}^{-1} \cdot \underline{\mathbb{K}}_{OPR}$ , nous retrouvons une fréquence d'oscillation de  $f_{PR} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\ddot{y}_{01}}{l}}$

### Étude du robot PR-2

Les équations de la dynamique du second robot PR se trouvent en faisant un changement d'indice de variable (1 devient 2). Le second robot PR n'a pas les actions mécaniques au point  $B_2$  car elles sont déjà comptabilisées sur le premier robot.

$$\underline{\mathbb{M}}_{PR2}(\theta_2) \ddot{\mathbf{X}}_2 + \underline{\mathbb{C}}_{PR2}(\theta_2, \dot{\theta}_2) \dot{\mathbf{X}}_2 = \underline{H}^T(\theta_2) \mathbf{Q}_{q2} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \iff \\ & \begin{bmatrix} M \tan^2 \theta_2 + m & -M \tan \theta_2 \\ -M \tan \theta_2 & M + m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \frac{\dot{\theta}_2 M}{\cos^2 \theta_2} \begin{bmatrix} \tan \theta_2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\tan \theta_2 & \frac{1}{l \cos \theta_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{q2} \\ F_{\theta_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pour obtenir les équations de la dynamique du robot PRR-2, il faut utiliser les multiplicateurs de Lagrange sur les équations dynamiques du robot PR1 et PR2. L'équation de contraintes est (5.41).

$$\overrightarrow{B_1 B_2} = \vec{0} \quad (5.41)$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

L'équation (5.42) permet de dire que les équations de la dynamique du robot PRR-2 sont la somme des équations de la dynamique du robot PR1 (5.24) et PR2 (5.39). Les matrices des robots dépendent des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . En regardant le schéma cinématique du robot PR-2 contraint (figure 5.10 (b)) nous pouvons en déduire des relations sur  $\theta_2$  par rapport à  $\theta_1$  (5.43).

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 &= -\cos \theta_1 \\ \tan \theta_2 &= -\tan \theta_1 \\ \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Les actions mécaniques  $F_{\theta_1}$  et  $F_{\theta_2}$  sont nulles car il n'y a pas de moteurs à ces endroits. Les équations de la dynamique du robot PR-2 sont les équations 5.44 et 5.45

$$\underline{\mathbb{M}}_{PR-2}(\theta_1) \ddot{\mathbf{X}}_1 + \underline{\mathbb{C}}_{PR-2}(\theta_1, \dot{\theta}_1) \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{Q}_{X1} + \underline{J}_m^T(\theta) \mathbf{Q}_q \quad (5.44)$$

$$2 \begin{bmatrix} Mt^2 + m & 0 \\ 0 & M + m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_1 \frac{Ms}{c^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{q1} \\ F_{q2} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

avec  $s = \sin \theta_1$ ,  $c = \cos \theta_1$  et  $t = \tan \theta_1$ .

Nous calculons le modèle dynamique linéarisé du robot PR-2 et les matrices associées 5.46. Les matrices d'amortissement ne sont pas prises en compte pour simplifier la démarche et la matrice de raideur d'asservissement est nulle car il n'y en a pas. Le point de fonctionnement choisi est  $P_f = (\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0, \ddot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{A}_0)$

$$\underline{\mathbb{M}}_{0PR-2} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\underline{\mathbb{K}}_{iPR-2} + \underline{\mathbb{K}}_{vPR-2} + \underline{\mathbb{K}}_{gPR-2}) \Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.46)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{0PR-2} = 2 \begin{bmatrix} M \tan^2 \theta_{10} + m & 0 \\ 0 & M + m \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

La matrice de masse  $\underline{\mathbb{M}}_{PR-2}$ , la matrice d'amortissement  $\underline{\mathbb{C}}_{PR-2}(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  et  $\underline{J}_m^T(\theta_1)$  dépendent que du paramètre  $\theta_1$  pour les paramètres de position. Les dérivées partielles d'un vecteur  $U$  se font en suivant la formule de l'équation (5.28) :

Avec  $\frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1}$  qui est la seconde ligne de la matrice  $\underline{H}$  car la relation entre  $\theta_1$  et  $\mathbf{X}$  est la même pour le robot PR et PR-2 :

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}} = \begin{bmatrix} 1 \\ l \cos \theta_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Nous calculons les dérivées partielles des vecteurs suivants  $\underline{\mathbb{M}}_{PR} \ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\underline{\mathbb{C}}_{PR} \dot{\mathbf{X}}$  et  $-\underline{H}^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}$  :

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}_{PR-2} \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} \frac{4M \tan \theta_{10} \ddot{x}_{10}}{\cos^2 \theta_{10}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Nous remarquons que la matrice  $\underline{\mathbb{K}}_{iPR-2}$  ne dépend plus de l'accélération  $\ddot{y}_{10}$ .

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{C}}_{PR-2} \dot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}_{10} M (4 \sin^2 \theta_{10} + 2)}{\cos^4 \theta_{10}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$-\left. \frac{\partial \underline{J}_m^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} (1 + \tan^2 \theta_{10})(F_{q10} - F_{q20}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Le système dynamique linéarisé étant calculé, nous donnons plus de précision sur le point de fonctionnement, qui est le même que dans le cas du chapitre 3.2 (pour rappel  $\theta_{01} = \dot{\theta}_{01} = \ddot{\theta}_{01} = 0$ ). Nous en déduisons que  $x_{01} = \dot{x}_{01} = \ddot{x}_{01} = 0$  et nous avons une accélération constante sur  $y$  grâce à une force d'actionnement  $F_{q10}$  et  $F_{q20}$  qui valent  $(M + m)\ddot{y}_{10}$  chacune. Le point de fonctionnement étant le même,  $\frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1}$  prend la même valeur que pour le robot PR.

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{X}_1} \right|_{\theta_{10}} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Après substitution des valeurs, les matrices sont :

— Pour la matrice de masse :

$$\underline{\mathbb{M}}_{0PR-2} = 2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M+m \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

— Pour les matrices de raideur :

— dépendant de l'accélération :

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{M}}_{PR-2} \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

— dépendant de la vitesse, en sachant que  $\dot{\theta}_{01} = 0$  :

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbb{C}}_{PR-2} \dot{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_{10}M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

— dépendant de l'actionnement, en sachant que  $F_{q10} = F_{q20}$  :

$$- \left. \frac{\partial J_m^T(\theta_1) \mathbf{Q}_{q1}}{\partial \theta_1} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_{10}, \theta_{10}} = \begin{bmatrix} F_{q10} - F_{q20} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

En rassemblant toutes les matrices, nous avons dans ce point de fonctionnement du robot PR-2, le modèle dynamique suivant :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M+m \end{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

Pour ce point de fonctionnement, l'accélération et l'actionnement n'ont aucune influence sur les fréquences de vibrations du robot PR-2. La combinaison de deux robots PR annule la dépendance en  $\ddot{y}$  de la matrices de raideur d'inertie  $\underline{K}_i$  et l'effet de l'actionnement se compense. Cet exemple peut donner une explication pour laquelle les effets d'inertie sont moins visibles sur des robots à structure parallèle que sur des robots série ou structures arborescentes. Ceci pourrait être une généralisation mais cela reste à démontrer.

### 5.3.2 Compensation des raideurs d'inertie par la raideur d'actionnement

Dans les deux cas précédents, pour obtenir les équations du modèle dynamique linéarisé (5.38) et (5.57), nous avons dû prendre en compte la raideur d'actionnement dans les calculs. Nous avons pu le faire car la valeur des forces de l'actionnement était simple à calculer. Nous proposons ici une modification des matrices en prenant en compte le calcul des actions des moteurs dans le cas général.

La commande CTC calcule les actions des moteurs à partir d'un modèle dynamique. Si le modèle dynamique est suffisamment proche de la réalité alors les correcteurs (PD) auront peu d'erreurs à corriger. Voir figure 5.12 pour la structure de l'asservissement.

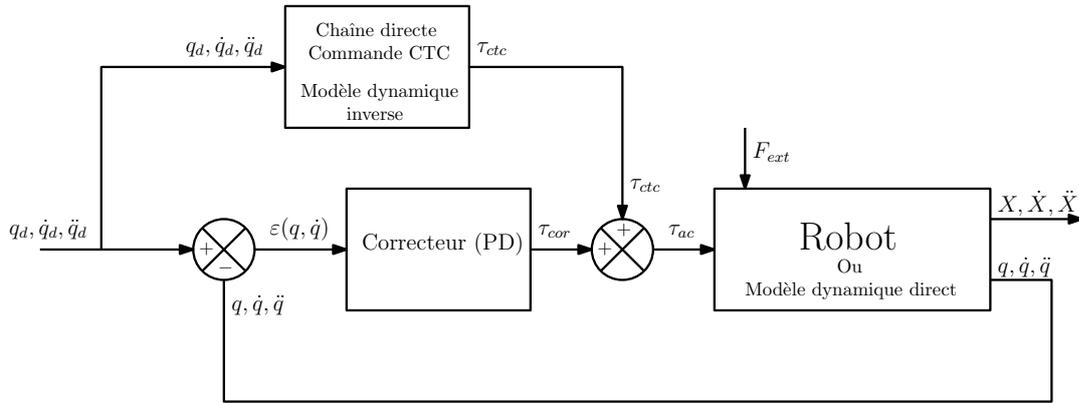


FIGURE 5.12: Schéma bloc de la commande CTC des robots

Pour rappel, le modèle dynamique des robots de la famille de robot du chapitre 4.2 est :

$$(\underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \dot{\underline{J}}_m \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{ext} + \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau} \quad (5.58)$$

Pour calculer les actions mécaniques de la chaîne directe, il faut calculer  $\boldsymbol{\tau}$ , cette formule est valable dans l'espace de travail :

$$\boldsymbol{\tau}_{ctc} = \underline{J}_0^* [(\underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0}) \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \dot{\underline{J}}_{m0} \dot{\mathbf{X}}_0 - \mathbf{F}_{ext0}] + \lambda_i \mathbf{V}_i \quad (5.59)$$

Avec

- $\boldsymbol{\tau}_{ctc}$  les actions mécaniques des moteurs calculées par la commande CTC.
- $\underline{J}_{m0}$  la matrice jacobienne du robot calculée à la position  $q_0$  et  $X_0$ .
- $\underline{J}_0^*$  est la pseudo inverse de  $\underline{J}_{m0}^T$  pour le robot redondant sinon c'est l'inverse de  $\underline{J}_{m0}^T$  pour les autres.
- $\dot{\underline{J}}_{m0}$  est la dérivée temporelle de la matrice jacobienne du robot calculée à la position  $q_0$  et  $X_0$  et la vitesse  $\dot{q}_0$  et  $\dot{X}_0$
- $\mathbf{V}_{i0}$  un vecteur  $i$  du noyau de  $\underline{J}_{m0}^T$  pour les robots redondants uniquement.
- $\lambda_i$  un coefficient permettant le calcul des actions de précontrainte des robots redondants.

En distribuant  $\underline{J}_0^*$ , nous obtenons :

$$\boldsymbol{\tau}_{ctc} = \underline{J}_0^* \underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_{m0} \dot{\mathbf{X}}_0 - \underline{J}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} + \lambda_i \mathbf{V}_i \quad (5.60)$$

Nous pouvons identifier trois types de contributions pour les actions mécaniques d'actionnement.

$$\boldsymbol{\tau}_{ctc} = \boldsymbol{\tau}_{AD} + \boldsymbol{\tau}_{AF} + \boldsymbol{\tau}_{AP} \quad (5.61)$$

- $\boldsymbol{\tau}_{AD}$  les actions mécaniques des moteurs calculées pour mettre en mouvement le robot.
- $\boldsymbol{\tau}_{AF}$  les actions mécaniques des moteurs calculées pour équilibrer les actions mécaniques extérieures .
- $\boldsymbol{\tau}_{AP}$  les actions mécaniques des moteurs calculées pour pré-contraindre le robot (afin de limiter les jeux).

La matrice de raideur est issue de la dérivée partielle du modèle dynamique par rapport à la position.

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ (\underline{\mathbb{M}}_X + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m) \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_m \dot{\mathbf{X}} - \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_{\text{ext}} \right] \Big|_{\ddot{X}_0, \dot{X}_0, X_0} \quad (5.62)$$

Nous pouvons supprimer les termes  $\underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  car ils ne dépendent pas de  $\mathbf{X}$  :

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{J}_m^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_m \dot{\mathbf{X}} - \underline{J}_m^T \boldsymbol{\tau} \right] \Big|_{\ddot{X}_0, \dot{X}_0, X_0} \quad (5.63)$$

Puis en factorisant par  $\underline{J}_m^T$  :

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \underline{J}_m^T (\underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_m \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\tau}) \right] \Big|_{\ddot{X}_0, \dot{X}_0, X_0} \quad (5.64)$$

Nous pouvons appliquer la formule classique de dérivation d'un produit,  $(uv)' = u'v + uv'$  :

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial \underline{J}_m^T}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{X_0} \left[ \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_{m0} \dot{\mathbf{X}}_0 - \boldsymbol{\tau}_{ctc} \right] + \underline{J}_{m0}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_m \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\tau} \right] \Big|_{\ddot{X}_0, \dot{X}_0, X_0} \quad (5.65)$$

Nous pouvons maintenant substituer  $\boldsymbol{\tau}_{ctc}$  par sa valeur calculée à l'équation (5.60).

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = & \frac{\partial \underline{J}_m^T}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{X_0} \left[ \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_{m0} \dot{\mathbf{X}}_0 - (\underline{J}_0^* \underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_{m0} \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_{m0} \dot{\mathbf{X}}_0 - \underline{J}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} + \lambda_i \mathbf{V}_i) \right] \\ & + \underline{J}_{m0}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{j}_m \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\tau} \right] \Big|_{\ddot{X}_0, \dot{X}_0, X_0} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Plusieurs termes s'annulent dans l'expression (5.66) de la matrice de raideur  $\underline{\mathbb{K}}_0$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = & \frac{\partial \underline{J}_m^T}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{X_0} [-\underline{J}_0^* \underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{J}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} - \lambda_i \mathbf{V}_i] \\ & + \underline{J}_{m0}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\tau}] \Big|_{\dot{X}_0, X_0, X_0} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [-\underline{J}_m^T \underline{J}_0^* \underline{\mathbb{M}}_X \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{J}_m^T \underline{J}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} - \underline{J}_m^T \lambda_i \mathbf{V}_i + \underline{J}_{m0}^T (\underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\tau})] \Big|_{\dot{X}_0, X_0} \quad (5.68)$$

$$\underline{\mathbb{K}}_0(X_0, \dot{X}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \begin{array}{cc} \underbrace{(\underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m - \underline{J}_m^T \underline{J}_0^* \underline{\mathbb{M}}_X)}_{\text{Matrice de raideur d'inertie}} \ddot{\mathbf{X}}_0 + \underbrace{\underline{J}_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q \underline{J}_m \dot{\mathbf{X}}}_{\text{Matrice de raideur d'inertie}} & \\ + \underbrace{\underline{J}_m^T (\underline{J}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} - \lambda_i \underline{J}_m^T \mathbf{V}_i)}_{\text{Matrice de raideur géométrique}} - \underbrace{\underline{J}_{m0}^T \boldsymbol{\tau}}_{\text{Matrice de raideur d'asservissement}} & \end{array} \right) \Big|_{\dot{X}_0, X_0} \quad (5.69)$$

Dans le tableau 5.7, nous présentons les expressions des différentes matrices dans deux situations :

- Lorsque nous ne connaissons pas l'expression des actions mécaniques des moteurs (à gauche).
- Lorsque nous connaissons l'expression des actions mécaniques des moteurs (à droite).

Les actions mécaniques des moteurs ne sont pas en adéquation avec le modèle dynamique	Les actions mécaniques des moteurs sont en adéquation avec le modèle dynamique
$\underline{\mathbb{K}}_i(X_0, \dot{X}_0) = \left. \frac{\partial J_m^T \underline{\mathbb{M}}_q J_m \ddot{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} \right _{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0}$	$\underline{\mathbb{K}}_i(X_0, \dot{X}_0) = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [(J_{m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q J_m - J_m^T J_0^* \underline{\mathbb{M}}_X) \ddot{\mathbf{X}}_0] \right _{\mathbf{x}_0}$
$\underline{\mathbb{K}}_v(X_0, \dot{X}_0) = \left. \frac{\partial J_m^T \underline{\mathbb{M}}_q J_m \dot{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} \right _{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0}$	$\underline{\mathbb{K}}_v(X_0, \dot{X}_0) = \left. \frac{\partial J_{-m0}^T \underline{\mathbb{M}}_q J_m \dot{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} \right _{\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0}$
$\underline{\mathbb{K}}_g(X_0, \boldsymbol{\tau}_0) = - \left. \frac{\partial J_m^T \boldsymbol{\tau}_0}{\partial \mathbf{X}} \right _{\mathbf{x}_0}$	$\underline{\mathbb{K}}_g(X_0, \boldsymbol{\tau}_0) = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [J_m^T (\underline{\mathbf{J}}_0^* \mathbf{F}_{\text{ext}0} - \lambda_i J_m^T \mathbf{V}_i)] \right _{\mathbf{x}_0}$
$\underline{\mathbb{K}}_P(X_0) = J_{m0}^T \underline{\mathbb{K}}_q J_{m0}$	$\underline{\mathbb{K}}_P(X_0) = J_{m0}^T \underline{\mathbb{K}}_q J_{m0}$

TABLE 5.7: Expressions des différentes matrices de raideur

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons adapté le modèle dynamique linéarisé du chapitre 4 aux particularités de la famille de robot étudiée au chapitre 2. Nous avons pu voir les effets de l'inertie sur la première fréquence propre d'oscillation des robots PRR-2, PRR-3, PRR-4 et Dual-V. Nous avons vu que certains effets pouvaient atténuer l'influence de la dynamique sur les fréquences propres de vibrations, notamment les contributions antagonistes de la raideur dynamique et la compensation de la raideur provenant de la matrice géométrique. Cependant en fonction des trajectoires, la dynamique tend à augmenter globalement la fréquence des oscillations. Cela reste lié aux trajectoires effectuées.



# Conclusion

Le but original de ces travaux de recherche était de chercher un moyen d'augmenter la fréquence du premier mode d'oscillation grâce à la précontrainte, en espérant reproduire le même effet que celui qui permet d'augmenter la fréquence d'oscillation des cordes d'une guitare grâce à la tension de la corde. Pour cela nous avons utilisé deux modèles pour conduire nos explorations :

- Le modèle éléments finis linéaire
- Le modèle solides rigides linéarisé

Nous nous sommes vite rendu compte que la précontrainte n'était pas la solution pour augmenter les fréquences d'oscillation. Les raideurs générées par la précontrainte s'additionnent avec la raideur déjà existante du modèle choisi qui est d'origine beaucoup plus grande que la raideur de précontrainte (hypothèse des robots performants). Le seul cas où cela présente un intérêt est lorsque le robot se trouve au voisinage d'une singularité de type II, où la fréquence d'oscillation chute vers  $0Hz$ .

Les fréquences d'oscillation du modèle éléments finis linéaire sont plus de dix fois plus grandes que celles du modèle solides rigides lorsque les robots sont conçus rigides chapitre 2. Cela est dû aux valeurs numériques choisies de la raideur d'asservissement qui ne peuvent pas être trop grandes pour les robots redondants, sinon il pourrait y avoir destruction du robot. Nous pouvons supposer qu'à masse constante, c'est la raideur qui est cent fois plus grande ( $n$  fois plus grande dans l'équation ci-dessous).

$$k_{struc} = n.k_{ass}$$

Dans une chaîne cinématique la raideur d'asservissement est en série avec la raideur de la structure. La raideur totale est donc :

$$\frac{1}{k_{ass+struc}} = \frac{1}{k_{ass}} + \frac{1}{k_{struc}}$$
$$k_{ass+struc} = k_{ass} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Le calcul de la raideur équivalente totale donne un résultat très proche de la raideur d'asservissement lorsque  $n$  est grand

$$k_{ass+struc} \xrightarrow{\text{pour } n \text{ grand}} k_{ass}$$

C'est pourquoi nous avons choisi de continuer nos études avec le modèle solides rigides.

Lors des recherches bibliographiques nous avons remarqué que les modèles dynamiques linéarisés et les études de raideurs ne prennent en compte dans leurs calculs que l'équation de la statique. Nous avons décidé d'écrire un modèle dynamique linéarisé à partir de l'équation de la dynamique.

Les équations de ce modèle dynamique linéarisé montrent une influence des forces d'inerties sur la fréquence du premier mode d'oscillation. Pour voir directement cette influence, nous avons étudié les robots PR et RR avec des simulations numériques temporelles. Ces simulations numériques nous ont permis de valider notre modèle. Nous avons ensuite testé des robots parallèles planaires pour voir leur comportement lorsqu'ils suivaient une trajectoire très dynamique. En fonction du robot et de la trajectoire, nous avons constaté :

- une augmentation de la fréquence d'oscillation
- une diminution de la fréquence d'oscillation
- aucun effet sur la fréquence d'oscillation
- un raideur résiduelle permettant de traverser les singularités parallèles

Quelques études complémentaires ont permis d'expliquer le fait que le gain (ou la diminution) de fréquences est faible pour les robots parallèles voire complètement nul. D'une manière plus générale notre principale contribution a porté sur le développement d'un modèle dynamique linéarisé plus complet ...

Le contexte de la thèse a consisté à l'appliquer à des robots parallèles qui, pour des raisons de compensations des effets entre les différentes chaînes cinématiques qui les composent, a démontré la faible incidence sur la raideur/fréquence des oscillations. Ceci dit, nous avons démontré que les effets existent et peuvent être non négligeables pour une chaîne ouverte (robots séries ou arborescents)

Les travaux présentés dans cette thèse ouvrent des perspectives dans le domaine de la robotique vers une modélisation plus fine des effets de la dynamique. Grâce à ces travaux, il serait possible :

- d'appliquer la méthode dynamique linéarisée à des robots série pour quantifier l'influence de la dynamique sur les fréquences d'oscillation.
- de déterminer un modèle dynamique plus proche de la réalité pour avoir un meilleur calcul dans la commande CTC
- d'appliquer la raideur "statique" due à la pré-contrainte pour les robots à câbles (suspendus ou redondants) qui rencontrent des problèmes de vibrations. Cependant l'application ne présente pas d'intérêt pour les robots parallèles redondants rigides.

D'autre part, dans le cadre de la robotique, on tend à développer des robots peu rigides ou flexibles. L'intérêt des travaux sur la raideur et la pré-contrainte serait, avec un même robot, de passer par la commande un mode souple/faible raideur (quand l'opérateur interagit ou est à proximité) à un mode plus rigide quand il doit faire une tâche demandant de la précision et que l'opérateur s'est éloigné.

Une deuxième contribution a été de démontrer que, en dehors du voisinage des positions singulières, la prise en compte de la raideur des robots parallèles redondants, construit pour être rigides, n'apportait pas de résultats significatifs concernant le contrôle de leur raideur en jouant sur les efforts internes grâce à leur sur-actionnement (redondance d'actionnement)

Il serait également intéressant d'observer expérimentalement les phénomènes que nous avons mis en évidence d'un point de vue purement théorique afin de juger les limites de notre modélisation.

Pour cela, nous proposons deux expériences :

- La première expérience serait de construire un robot PR instrumenté (accéléromètre et capteur de position angulaire) avec une longueur de glissière suffisamment grande pour que les phénomènes dynamiques puissent s'établir et être observés
- La seconde expérience serait de construire un cube contenant un pendule, un capteur angulaire et un accéléromètre et de mettre cette boîte dans une fusée. Ce type d'expérience peut sembler irréalisable au premier abord mais pourrait très bien être conduit à l'université dans le cadre de projets FUSEX et/ou CUBSAT avec le concours du CSU.

Enfin, le modèle dynamique linéarisé que nous proposons pourrait, entre autres, trouver des applications dans :

- la conception de robot pour éviter d'avoir des phénomènes dynamiques nuisibles au robot.
- la commande des robots qui peuvent être sensibles à la précision de l'estimation des fréquences propres d'oscillation (notamment dans une commande utilisant l'input shaping).



# **Annexes**



## Robot PRR-3

### A.1 Description du robot PRR-3

**Le robot PRR-3 est un robot parallèle redondant de degré 1 à deux degrés de mouvement représentés par le vecteur des coordonnées articulaires  $\mathbf{X}$  et trois degrés d'actionnement représentés par le vecteur des coordonnées opérationnelles  $\mathbf{q}$ .** Les paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  représentent l'orientation des barres 12, 22 et 32. Le robot PRR-3 est construit sur le modèle du robot PRR-2 en ajoutant une barre supplémentaire. Cette barre en plus permet de pré-contraindre le robot en tout point de son espace de travail.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La modélisation du robot PRR-3 est faite dans le plan 2D  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . Il est utilisé dans cette thèse pour tester les effets de la précontrainte sur tout l'espace de travail. La longueur des barres est de 30cm et elles ont une masse de 0,02kg. Les moteurs 1, 2 et 3 ont une masse de 5,6kg chacun. Le centre de gravité des moteurs se situe respectivement au point  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . La plateforme mobile pèse 6kg et son centre de gravité est repéré au point C. Les hypothèses de modélisation du robot PRR-2 sont utilisées pour la modélisation éléments finis et solides rigides du robot PRR-3.

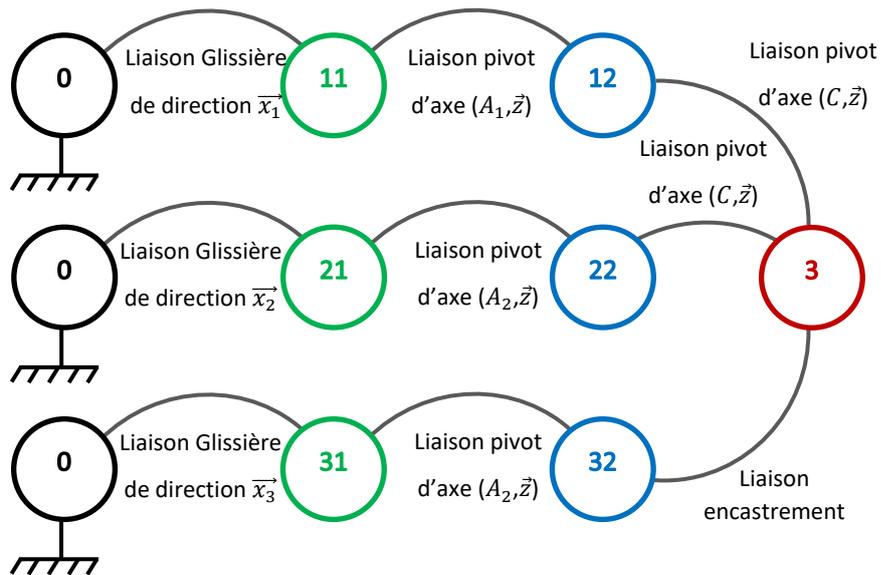


FIGURE A.1: Graphe de liaison du robot PRR-3

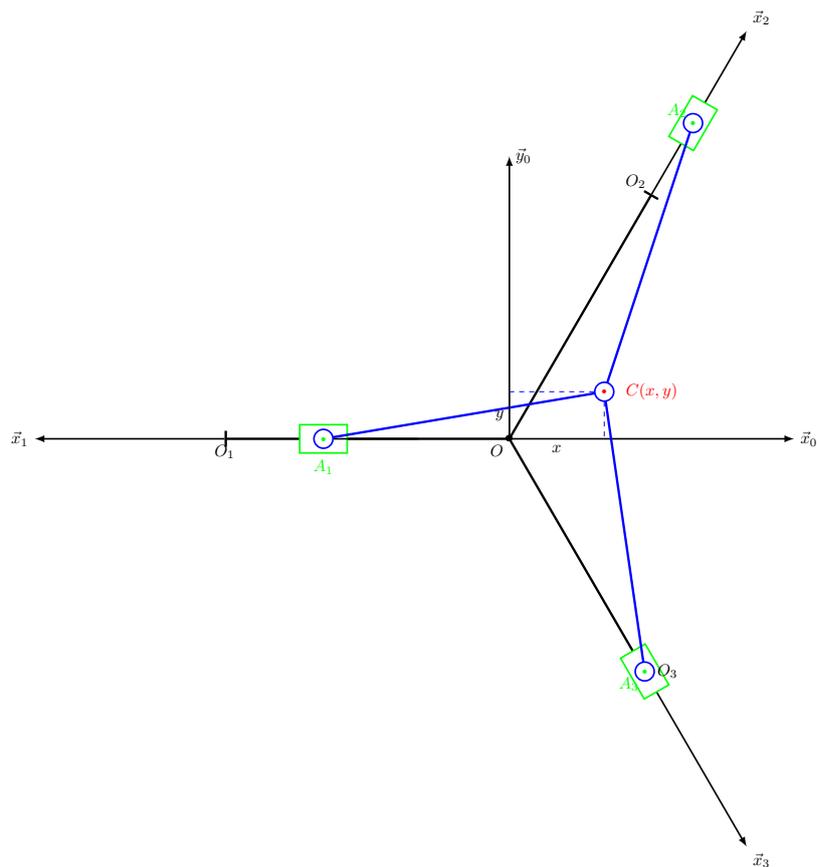


FIGURE A.2: Schéma cinématique du robot PRR-3

## A.2 Modèle géométrique du robot PRR-3

Le modèle géométrique d'une branche PRR a été fait génériquement à partir du robot PRR-2. Nous reprenons les solutions 2.32 de l'équation 2.28.

$$q_i = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{x}_i - l \pm \sqrt{l^2 - (\overrightarrow{OC} \cdot \vec{y}_i)^2}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{y}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$q_1 = -x - l + \sqrt{l^2 - y^2} \quad (\text{A.4})$$

$$q_2 = \frac{x}{2} - l + \sqrt{l^2 - \left(-\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right)^2} \quad (\text{A.5})$$

$$q_3 = \frac{x}{2} - l + \sqrt{l^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right)^2} \quad (\text{A.6})$$

Les angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sont les orientations des barres 12, 22 et 32. Pour le modèle dynamique éléments finis, les angles  $\theta_{iEF}$  sont les orientations des barres  $i2$  (ou du vecteur  $\overrightarrow{A_iC}$ ) par rapport au vecteur  $\vec{x}_0$ .

$$\overrightarrow{A_iC} = -(q_i + l) \vec{x}_i + \overrightarrow{OC} \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_{iEF} = (\vec{x}_0, \overrightarrow{A_iC}) \quad (\text{A.8})$$

$$\overrightarrow{A_iC} \cdot \vec{x}_0 = x - (q_i + l) \vec{x}_i \cdot \vec{x}_0 \quad (\text{A.9})$$

$$\overrightarrow{A_iC} \cdot \vec{y}_0 = y - (q_i + l) \vec{x}_i \cdot \vec{y}_0 \quad (\text{A.10})$$

$$\theta_{iEF} = \text{atan2}(\overrightarrow{A_iC} \cdot \vec{y}_0, \overrightarrow{A_iC} \cdot \vec{x}_0) \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Modèle cinématique du robot PRR-3

L'étude cinématique du robot PRR-3 permet l'écriture de la relation entre les vitesses de la plateforme mobile  $\overrightarrow{V_{C \in 3/0}}$  avec la vitesse des moteurs. Les équations suivantes donnent les relations qui existent entre l'écriture matricielle utilisée en robotique et la cinématique classique.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} \quad \overrightarrow{V_x} = \dot{x}\overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{V_y} = \dot{y}\overrightarrow{y_0} \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{A_i \in 1/0}} = \dot{q}_i \overrightarrow{x_i} \quad (\text{A.13})$$

$$\overrightarrow{u_i} = \frac{1}{l} A_i \overrightarrow{C} \quad (\text{A.14})$$

L'équiprojectivité sur les barres  $i2$  donne les équations :

$$\overrightarrow{V_{A_i \in 1/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} \quad \longrightarrow \quad \dot{q}_i \overrightarrow{x_i} \cdot \overrightarrow{u_i} = (\dot{x}\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{u_i} \quad (\text{A.15})$$

$$[\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_i}] [\dot{q}_i] = [\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{y_0}] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Les matrices  $\underline{J}_{qXPRR3}$  et  $\underline{J}_{XPRR3}$  sont obtenues par identification.  $\underline{J}_{mPRR3}$  et  $\underline{J}_{mPRR3}$  sont calculées directement après.

$$\underline{J}_{qPRR3} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_3} \end{bmatrix} \quad \underline{J}_{XPRR3} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{y_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{J}_{mPRR3} = \underline{J}_{qPRR3}^{-1} \underline{J}_{XPRR3} \quad (\text{A.19})$$

$$\underline{J}_{mPRR3} = \sum_{i=1}^2 \dot{x}_i \frac{\partial \underline{J}_{mPRR3}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial \underline{J}_{mPRR3}}{\partial q_i} \quad (\text{A.20})$$

## A.4 Modèle dynamique solides rigides du robot PRR-3

Les inerties en mouvement du robot PRR-3 sont les glissières motorisées de masse  $m_q$  du (corps 11, 21 et 31) dont leurs centres de gravité se situent aux points  $A_i$  et la plateforme mobile (corps 3) de masse  $m_X$  dont le centre de gravité est localisé au point  $C$ . Le double de l'énergie cinétique du robot est donc :

$$2T_{PRR3} = \sum_{i=1}^3 m_q \overrightarrow{V_{A_i \in i/0}}^2 + m_X \overrightarrow{V_{C \in 21/0}}^2 \quad (\text{A.21})$$

Ceci se développe en forme polynomiale. Les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_{XPRR3}$  et  $\underline{\mathbb{M}}_{qPRR3}$  sont identifiées à partir de l'équation de l'énergie cinétique.

$$2T_{PRR3} = m_q \dot{q}_1^2 + m_q \dot{q}_2^2 + m_q \dot{q}_3^2 + m_X \dot{x}^2 + m_X \dot{y}^2 \quad (\text{A.22})$$

Ce qui donne :

$$\underline{\mathbb{M}}_{qPRR3} = \begin{bmatrix} m_q & 0 & 0 \\ 0 & m_q & 0 \\ 0 & 0 & m_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbb{M}}_{XPRR3} = \begin{bmatrix} m_X & 0 \\ 0 & m_X \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

La puissance virtuelle du système est la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs sur la plateforme :

$$P_{vPRR3} = \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{X}}^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Pour assembler le robot il faut utiliser la matrice Jacobienne du robot  $\underline{J}_{mPRR3}$  ( $\underline{J}_{mPRR3}$  étant la matrice  $\underline{H}$  dans le chapitre 4) et de sa dérivée  $\underline{\dot{J}}_{mPRR3}$ . Les équations du mouvement du robot PRR-3 sont données sous forme matricielle dans l'équation (A.25). Les composantes des matrices ne sont pas détaillées pour alléger les notations.

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR3} \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{C}}_{PRR3} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{ext} - \underline{J}_{mPRR3}^T \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.25})$$

Avec

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR3} = \underline{\mathbb{M}}_{XPRR3} + \underline{J}_{mPRR3}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR3} \underline{J}_{mPRR3} \quad (\text{A.26})$$

$$\underline{\mathbb{C}}_{PRR3} = \underline{J}_{PRR3}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR3} \underline{\dot{J}}_{PRR3} \quad (\text{A.27})$$



## Robot PRR-4

Le robot PRR-4 est un robot parallèle redondant de degré 1 à trois degrés de mouvements pour quatre degrés d'actionnement. Les dimensions du robot ont été choisies pour avoir une singularité de type II au centre de l'espace de travail, afin de voir comment se comporte le robot autour de cette singularité. Notamment, il est possible de traverser une singularité. Les liaisons motorisées sont des glissières de direction  $\vec{x}$  aux points  $A_i$ . Ce sont des moteurs linéaires actionnent ces liaisons. Le schéma cinématique et le paramétrage du robot sont donnés sur la figure B.2. Les valeurs des paramètres géométriques, d'inertie et de la raideur de la commande sont donnés dans le tableau B.1.

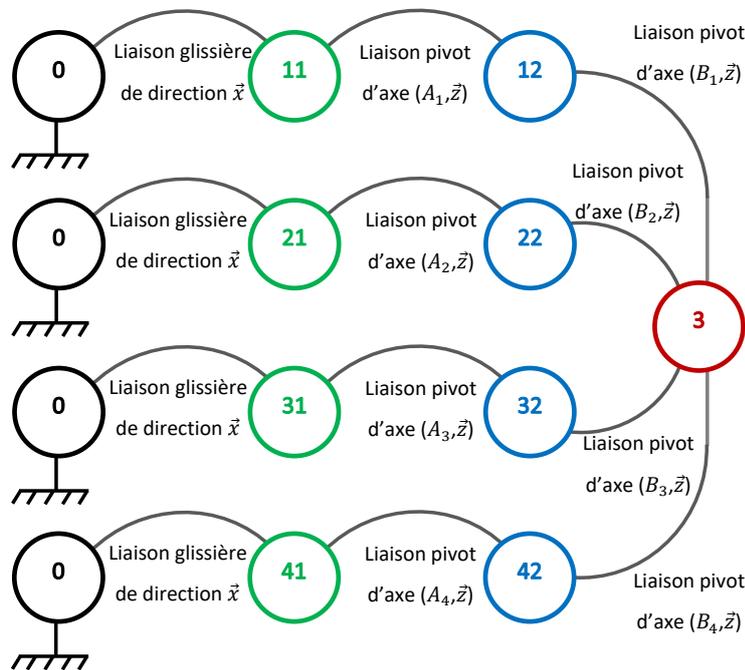


FIGURE B.1: Graphe de liaison du robot PRR-4

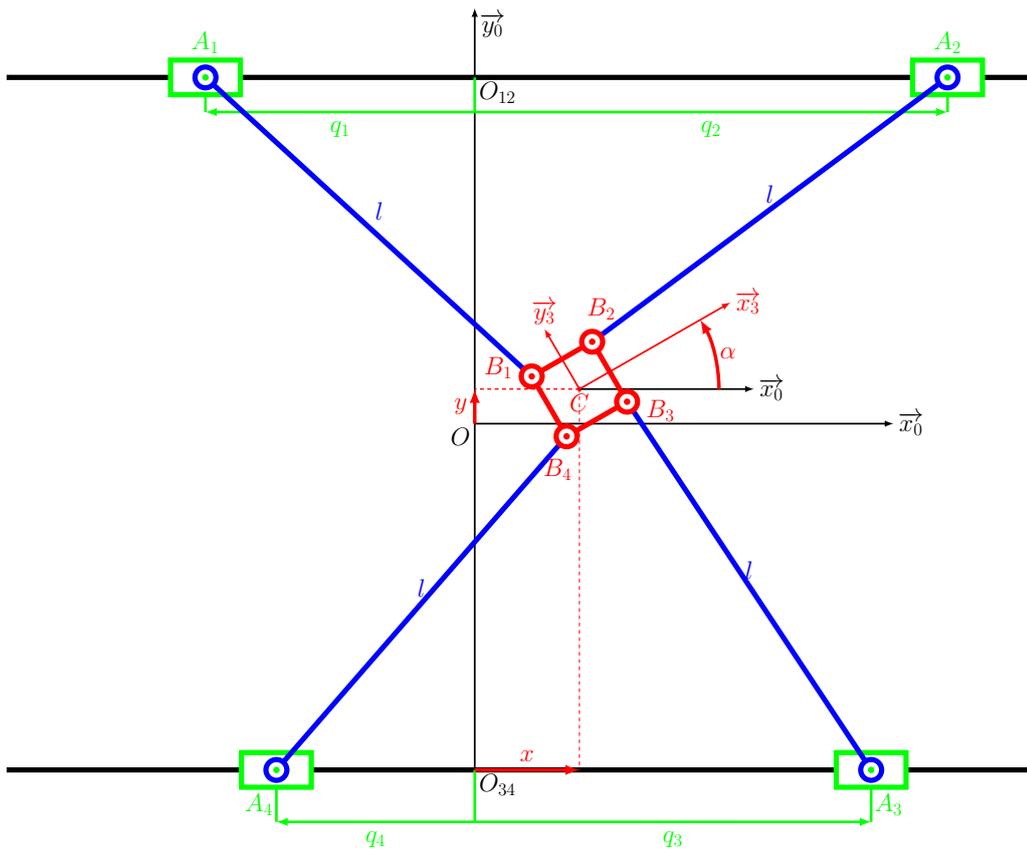


FIGURE B.2: Schéma cinématique du robot PRR-4

Pour plus de détails sur la plateforme mobile, voir le tableau B.2 et la figure B.3.

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Masse des moteurs	$m_q$	8	kg
Masse de la PlateForme Mobile (PFM)	$m_X$	10	kg
Inertie de la PFM	$I_X$	0,36	$kg.m^2$
Demi-longueur de la PFM	a	0,1	m
Demi-largeur de la PFM	b	0,1	m
Masse de la barre	$m_b$	5,15	kg
Raideur d'asservissement	$k_q$	200000	$N/m$

TABLE B.1: Paramètres constants du PRR-4

## B.1 Modèle géométrique du robot PRR-4

Ici nous cherchons la fonction qui permet de calculer les  $\mathbf{q}$  en fonction des  $\mathbf{X}$ . La position du point  $C(x, y)$  est connue, ce qui permet de calculer directement la position des points  $B_i$ .

$$\overrightarrow{OB_i}\Big|_{R_0} = \overrightarrow{OC}\Big|_{R_0} + \underline{R}_\alpha \overrightarrow{CB_i}\Big|_{R_3} \quad (\text{B.1})$$

Les points  $A_i$  sont respectivement l'intersection du cercle de centre  $B_i$  et de rayon  $l$  (longueur des barres) et les lignes  $(O_i, \vec{x}_0)$ .

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{A_i O_i} + \overrightarrow{O_i O} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_i} \quad (\text{B.2})$$

Avec :

$$\overrightarrow{A_i O_i} = -q_i \vec{x}_0 \quad (\text{B.3})$$

$$\overrightarrow{O_i O} = e_i \vec{y}_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\overrightarrow{OC} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 \quad (\text{B.5})$$

$$\overrightarrow{CB_i} = a_i \vec{x}_3 + b_i \vec{y}_3 \quad (\text{B.6})$$

Le calcul de la norme du vecteur  $\overrightarrow{A_i B_i}$  donne l'équation (B.7), puis le polynôme de l'équation (B.8) lorsque  $\overrightarrow{A_i O_i}$  est remplacé par sa valeur.

$$\left(\overrightarrow{A_i O_i} + \overrightarrow{O_i B_i}\right)^2 - l^2 = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$q_i^2 - 2\left(\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{x}_0\right) q_i + \overrightarrow{O_i B_i}^2 - l^2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

Le discriminant réduit  $\Delta'$  de l'équation B.8 vaut :

$$\Delta' = l^2 - \left(\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{y}_0\right)^2 \quad (\text{B.9})$$

Les solutions de l'équation B.8 sont :

$$q_i = \overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{x}_0 \pm \sqrt{l^2 - \left(\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{y}_0\right)^2} \quad (\text{B.10})$$

avec :

$$\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{x}_0 = x + a_i \cos \alpha + b_i \sin \alpha \quad (\text{B.11})$$

$$\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{y}_0 = y + e_i + a_i \sin \alpha - b_i \cos \alpha \quad (\text{B.12})$$

Les solutions compatibles avec le mode d'assemblage du robot sont :

$$q_1 = x - a \cos \alpha + b \sin \alpha - \sqrt{l^2 - (e - y + b \cos \alpha + a \sin \alpha)^2} \quad (\text{B.13})$$

$$q_2 = x + a \cos \alpha + b \sin \alpha + \sqrt{l^2 - (e - y + b \cos \alpha - a \sin \alpha)^2} \quad (\text{B.14})$$

$$q_3 = x + a \cos \alpha - b \sin \alpha + \sqrt{l^2 - (e + y + b \cos \alpha + a \sin \alpha)^2} \quad (\text{B.15})$$

$$q_4 = x - a \cos \alpha - b \sin \alpha - \sqrt{l^2 - (e + y + b \cos \alpha - a \sin \alpha)^2} \quad (\text{B.16})$$

Les angles  $\theta_i$  sont les orientations des barres i.

$$\theta = \theta_i = \text{atan2} \left( \pm \sqrt{l^2 - (\overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{y}_0)^2}, \overrightarrow{O_i B_i} \cdot \vec{y}_0 \right) \quad (\text{B.17})$$

## B.2 Modèle cinématique du robot PRR-4

L'étude cinématique du robot PRR-4 permet l'écriture de la relation entre la vitesse de translation  $\overrightarrow{V_{C \in 3/0}}$  et la vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$  de la plateforme mobile et avec la vitesse des moteurs. Les équations suivantes donnent les relations qui existent entre l'écriture matricielle utilisée en robotique et la cinématique classique.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} \quad \overrightarrow{V_x} = \dot{x} \overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{V_y} = \dot{y} \overrightarrow{y_0} \quad (\text{B.18})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z_0} \quad (\text{B.19})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{A_i \in 1i/0}} = \dot{q}_i \overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{A_i B_i}}{l} \quad \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{u_i} \quad (\text{B.20})$$

Pour écrire la relation cinématique entre le point  $A_i$  et  $C$ , il faut déterminer la relation cinématique entre le point  $B_i$  et  $C$  avec la loi des champs des moments cinématiques appliquée au solide 3.

$$\overrightarrow{V_{B_i \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} + \overrightarrow{B_i C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \quad (\text{B.21})$$

L'équi-projectivité des vitesses sur la barre  $A_i B_i$  donne l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V_{A_i \in 1i/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{V_{B_i \in 2i/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} \quad (\text{B.22})$$

$$\dot{q}_i \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{u_i} = \left( \dot{x} \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{B_i C} \wedge \dot{\alpha} \overrightarrow{z_0} \right) \cdot \overrightarrow{u_i} \quad (\text{B.23})$$

$$\dot{q}_i \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{u_i} = \dot{x} \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{y_0} + \dot{\alpha} \overrightarrow{B_i C} \cdot \overrightarrow{v_i} \quad (\text{B.24})$$

$$\underline{J}_{qPRR-4} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{x_0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{J}_{XPRR-4} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1}^T & \overrightarrow{B_1 C} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{u_2}^T & \overrightarrow{B_2 C} \cdot \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{u_3}^T & \overrightarrow{B_3 C} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{u_4}^T & \overrightarrow{B_4 C} \cdot \overrightarrow{v_4} \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\underline{J}_{mPRR-4} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{y_0}}{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0}} & \frac{\overrightarrow{B_1 C} \cdot \overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{x_0}} \\ 1 & \frac{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{y_0}}{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0}} & \frac{\overrightarrow{B_2 C} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{x_0}} \\ 1 & \frac{\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{y_0}}{\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_0}} & \frac{\overrightarrow{B_3 C} \cdot \overrightarrow{v_3}}{\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{x_0}} \\ 1 & \frac{\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{y_0}}{\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{x_0}} & \frac{\overrightarrow{B_4 C} \cdot \overrightarrow{v_4}}{\overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{x_0}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

L'écriture des matrices  $J_{qPRR4}$ ,  $J_{XPRR4}$  et  $J_{mPRR4}$  est faite à partir des vecteurs. Cette écriture dépend de comment sont calculés les vecteurs et les produits scalaires. Les vecteurs  $\vec{u}_i$  et  $\vec{v}_i$  peuvent être écrits en fonction des paramètres  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{X}$  ou des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ . La position des points  $B_i$  par rapport au point  $C$  peut être exprimée en coordonnées cartésiennes dans la base  $R_3$  ou en coordonnées polaires avec les paramètres  $d$  et  $\varphi_i$ . Pour simplifier les écritures au maximum, les vecteurs  $u_i$  et  $v_i$  sont écrits en fonction des paramètres  $\theta_i$  et  $B_iC$  en coordonnées polaires. Les vecteurs colonnes sont écrits dans le repère  $R_0$

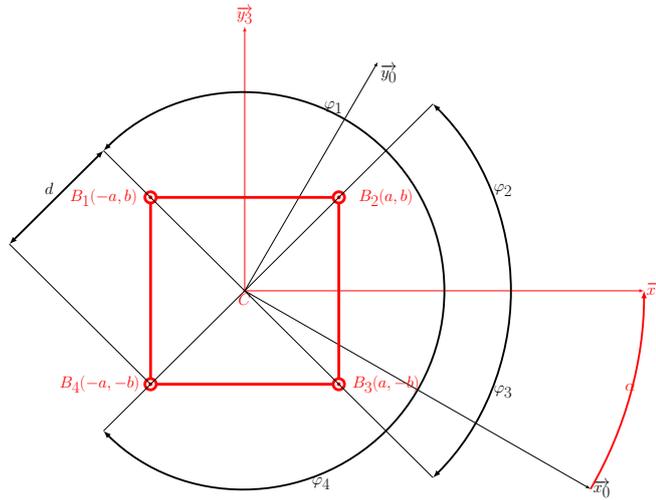


FIGURE B.3: Schéma de la plateforme mobile du PRR-4

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Demi-longueur de la PFM	a	0,1	m
Demi-largeur de la PFM	b	0,1	m
Demi-diagonale de la PFM	d	0,14	m

TABLE B.2: Paramètres de la plateforme mobile du PRR-4

$$\vec{u}_i = \frac{1}{l} \left| \pm \sqrt{l^2 - \left( \frac{\vec{O}_i B_i \cdot \vec{y}_0}{\vec{O}_i B_i} \right)^2} \right. \quad \text{ou} \quad \vec{u}_i = \begin{cases} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$\vec{B}_i \vec{C} = -a_i \vec{x}_3 - b_i \vec{y}_3 \quad \text{ou} \quad \vec{B}_i \vec{C} = -d u_{3\varphi_i} \quad (\text{B.28})$$

$$\vec{u}_{3\varphi_i} = \cos(\alpha + \varphi_i) \vec{x}_0 + \sin(\alpha + \varphi_i) \vec{y}_0 \quad (\text{B.29})$$

$$\varphi_i = \text{atan2}(b_i, a_i) \quad (\text{B.30})$$

Il faut calculer le produit scalaire entre le vecteur  $\overrightarrow{B_i C}$  et  $\overrightarrow{v_i}$  :

$$\overrightarrow{B_i C} \cdot \overrightarrow{v_i} = -d \cos(\overrightarrow{B_i C}, \overrightarrow{v_i}) = d \sin(\alpha + \varphi_i - \theta_i) \quad (\text{B.31})$$

$$(\overrightarrow{B_i C}, \overrightarrow{v_i}) = -(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{B_i C}) + (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{u_i}) + \frac{\pi}{2} = -(\alpha + \varphi_i) + (\theta_i) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.32})$$

Matrice	Expression complète	Expression simplifiée
$\underline{J}_{mPRR4}$	$\begin{bmatrix} 1 & \tan \theta_1 & d \frac{\sin(\alpha + \varphi_1 - \theta_1)}{\cos \theta_1} \\ 1 & \tan \theta_2 & d \frac{\sin(\alpha + \varphi_2 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \\ 1 & \tan \theta_3 & d \frac{\sin(\alpha + \varphi_3 - \theta_3)}{\cos \theta_3} \\ 1 & \tan \theta_4 & d \frac{\sin(\alpha + \varphi_4 - \theta_4)}{\cos \theta_4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & f_1 \\ 1 & t_2 & f_2 \\ 1 & t_3 & f_3 \\ 1 & t_4 & f_4 \end{bmatrix}$
$\underline{j}_{mPRR4}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} & \dot{\alpha} d \frac{\cos(\alpha + \varphi_1 - \theta_1)}{\cos \theta_1} - \dot{\theta}_1 d \frac{\cos(\alpha + \varphi_1)}{\cos^2 \theta_1} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} & \dot{\alpha} d \frac{\cos(\alpha + \varphi_2 - \theta_2)}{\cos \theta_2} - \dot{\theta}_2 d \frac{\cos(\alpha + \varphi_2)}{\cos^2 \theta_2} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_3}{\cos^2 \theta_3} & \dot{\alpha} d \frac{\cos(\alpha + \varphi_3 - \theta_3)}{\cos \theta_3} - \dot{\theta}_3 d \frac{\cos(\alpha + \varphi_3)}{\cos^2 \theta_3} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_4}{\cos^2 \theta_4} & \dot{\alpha} d \frac{\cos(\alpha + \varphi_4 - \theta_4)}{\cos \theta_4} - \dot{\theta}_4 d \frac{\cos(\alpha + \varphi_4)}{\cos^2 \theta_4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & dt_1 & df_{1\alpha} - df_{1\theta} \\ 1 & dt_2 & df_{2\alpha} - df_{2\theta} \\ 1 & dt_3 & df_{3\alpha} - df_{3\theta} \\ 1 & dt_4 & df_{4\alpha} - df_{4\theta} \end{bmatrix}$

TABLE B.3: Expressions de la matrice Jacobienne inverse du robot PRR4 et de sa dérivée

### B.3 Modèle dynamique du robot PRR-4

Les inerties en mouvement du robot PRR-4 sont les glissières motorisées de masse  $m_q$  du corps 1i dont les centres de gravité se situent aux points  $A_i$  et la plateforme mobile (corps 3) de masse  $m_X$  dont le centre de gravité est localisé au point  $C$  et d'inertie  $i_X$  d'axe  $(C, \vec{z}_0)$ . Le double de l'énergie cinétique du robot est l'équation (B.33) et elle permet d'identifier les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_{XPRR-4}$  et  $\underline{\mathbb{M}}_{qPRR-4}$  sous forme polynomiale.

$$2T_{PRR4} = \sum_{i=1}^4 m_q \overrightarrow{V_{A_i \in 1i/0}}^2 + m_X \overrightarrow{V_{C \in 3/0}}^2 + i_X \overrightarrow{\Omega_{3/0}}^2 \quad (\text{B.33})$$

$$2T_{PRR4} = m_q (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) + m_X (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + i_X \dot{\alpha}^2 \quad (\text{B.34})$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{qPRR-4} = \begin{bmatrix} m_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbb{M}}_{XPRR-4} = \begin{bmatrix} m_X & 0 & 0 \\ 0 & m_X & 0 \\ 0 & 0 & i_X \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

La puissance virtuelle du système est la somme des puissances virtuelles des efforts extérieures sur la plateforme :

$$P_{VPRR-4} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} + \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (\text{B.36})$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = [F_x \quad F_y \quad C_z]^T \quad (\text{B.37})$$

Pour assembler le robot, il faut utiliser la matrice Jacobienne du robot  $\underline{J}_{mPRR-4}$  et de sa dérivée  $\underline{\dot{J}}_{mPRR-4}$ . Pour la suite, il est très difficile d'écrire l'équation littérale du mouvement sur cette page car les expressions sont longues. L'équation (B.38) représente les équations du mouvement du robot PRR-4.

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR4} \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{C}}_{PRR4} \dot{\mathbf{X}} = \underline{J}_{mPRR4}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (\text{B.38})$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{PRR4} = \underline{\mathbb{M}}_{XPRR4} + \underline{J}_{mPRR4}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR4} \underline{J}_{mPRR4} \quad \underline{\mathbb{C}}_{PRR4} = \underline{J}_{mPRR4}^T \underline{\mathbb{M}}_{qPRR4} \underline{\dot{J}}_{mPRR4} \quad (\text{B.39})$$

$$f_i = d \frac{\sin(\alpha + \varphi_i - \theta_i)}{\cos \theta_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = d \frac{\cos(\alpha + \varphi_i - \theta_i)}{\cos \theta_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} = d \frac{\cos(\alpha + \varphi_i)}{\cos^2 \theta_i} \quad (\text{B.40})$$

$$\underline{J}_{mPRR-4} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta_1 & f_1 \\ 1 & \tan \theta_2 & f_2 \\ 1 & \tan \theta_3 & f_3 \\ 1 & \tan \theta_4 & f_4 \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{J}}_{mPRR-4} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} & \dot{\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \dot{\theta}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} & \dot{\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - \dot{\theta}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_3}{\cos^2 \theta_3} & \dot{\alpha} \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} - \dot{\theta}_3 \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} \\ 0 & \frac{\dot{\theta}_4}{\cos^2 \theta_4} & \dot{\alpha} \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} - \dot{\theta}_4 \frac{\partial f_4}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (\text{B.41})$$

## Robot Dual-V

**Le robot Dual-V est un robot parallèle redondant de degré 1** à trois degrés de mouvements représentés par le vecteur des coordonnées opérationnelles  $\mathbf{X}$  qui sont les mouvements de la plateforme mobile. La plateforme mobile a une masse  $m_X$  dont le centre de gravité est le point  $P_5$  et une inertie  $i_x$  d'axe  $(P_5, \vec{z}_0)$ . Le Dual-V a quatre chaînes cinématiques RRR qui relient le bâti à la plateforme mobile. Pour chaque chaîne  $i$ , la première pivot d'axe  $(A_i, \vec{z}_0)$  en partant du bâti est motorisée (moteur  $i$ , de paramètre  $q_i = \theta_{1i}$ , d'inertie  $i_q$  et de couple  $C_i$ ). La seconde d'axe  $(B_i, \vec{z}_0)$  (de paramètre  $\theta_{2i}$ ) et la troisième d'axe  $(C_i, \vec{z}_0)$  sont passives. Les barres  $1i$  de longueur  $l1i = l$  ont un mouvement de rotation et leur inertie est rapportée au niveau du moteur  $i$ . Les barres  $2i$  de longueur  $l2i = l$  ont leurs masses et inerties rapportées respectivement sur les barres  $1i$  et la plateforme suivant l'hypothèse simplificatrice des barres assimilées à deux masses ponctuelles. Le schéma cinématique du robot et de son paramétrage est montré par la figure C.2. Pour plus de détails au sujet du Dual-V, le lecteur peut se référer à [23]. Les paramètres de géométrie, d'inertie et de la commande sont données dans le tableau C.1.

$$\mathbf{X} = [x \quad y \quad \theta_5]^T \quad \mathbf{q} = [\theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31} \quad \theta_{41}]^T \quad (\text{C.1})$$

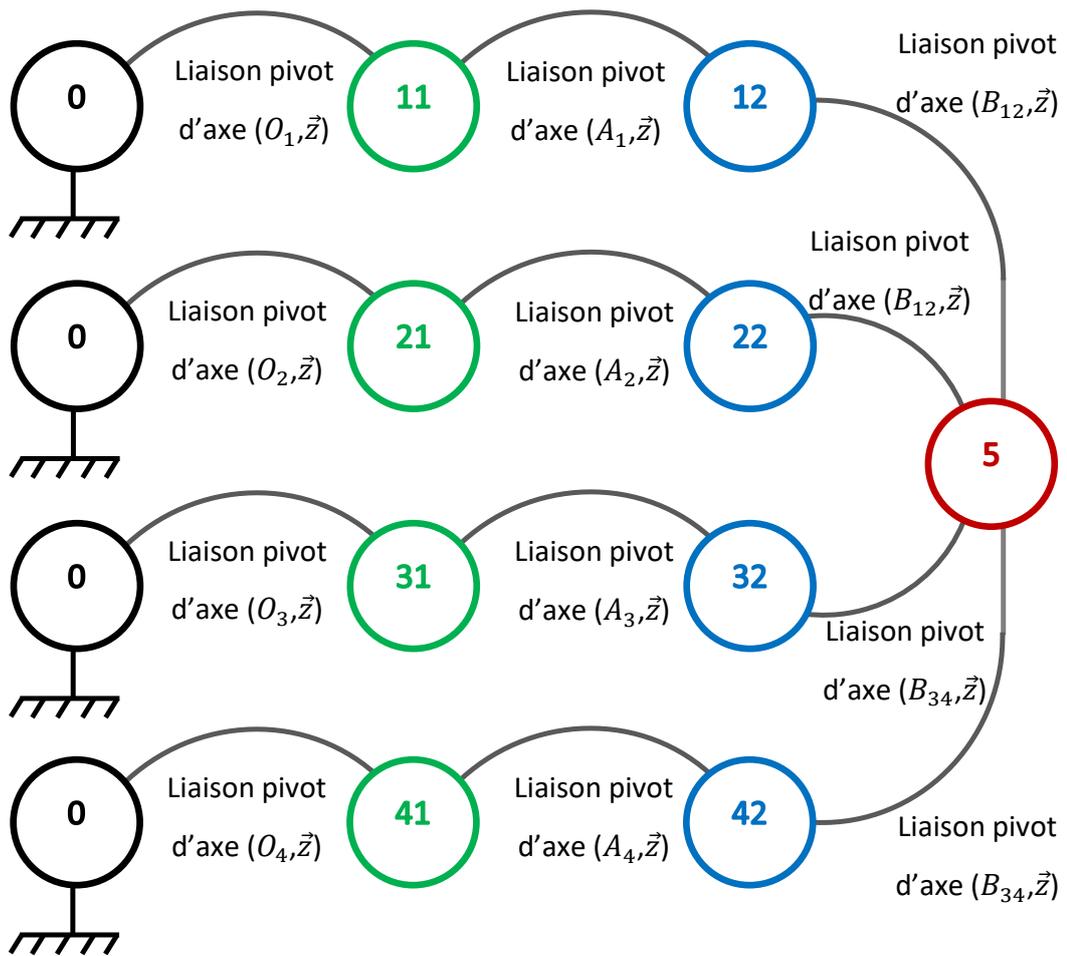


FIGURE C.1: Graphe de liaison du robot Dual-V

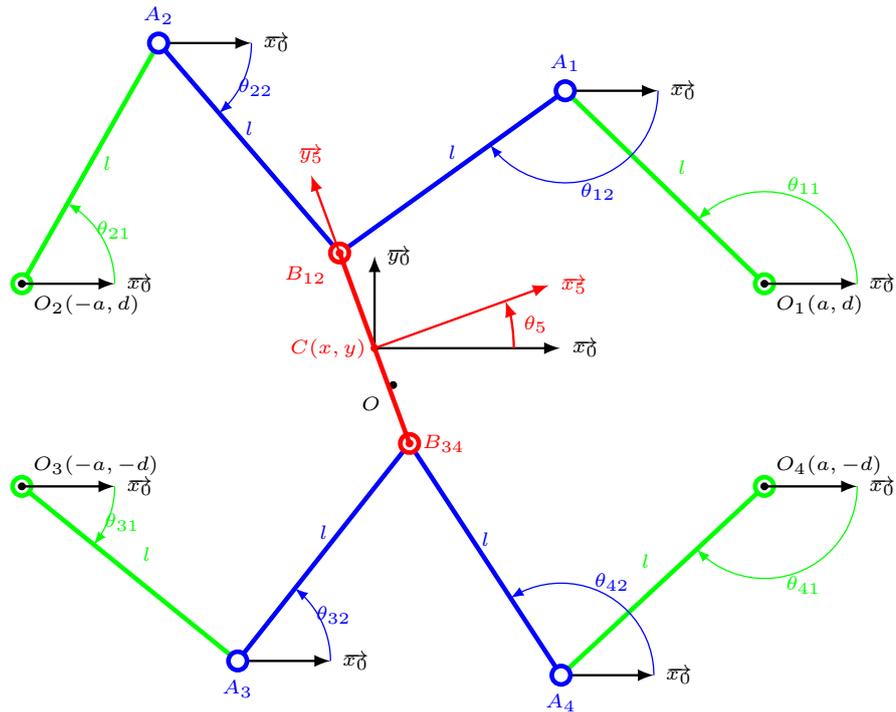


FIGURE C.2: Schéma cinématique du robot Dual-V

Noms	Symboles	Valeurs	Unités
Distance $A_iO$ projetée sur $\vec{x}_0$	$a$	0,39	$m$
Distance $A_iO$ projetée sur $\vec{y}_0$	$d$	0,11	$m$
Demi-longueur de la plateforme			
Masse de la PFM	$m_x$	2,1	$kg$
Inertie de la PFM	$i_x$	0,023	$kg.m^2$
Inertie rapportée des moteurs	$i_q$	0,074	$kg.m^2$
Masse de la barre	$m_b$	1,9	$kg$
Masse volumique de la barre	$\rho$	2700	$kg/m^3$
Longueur des barres	$l$	0,28	$m$
Côté de la section carrée	$c$	0,05	$m$
Raideur d'asservissement	$k_q$	900	$N.m/rad$

TABLE C.1: Paramètres constants du Dual-V

## C.1 Modèle cinématique du robot Dual-V

L'étude cinématique du robot Dual-V permet l'écriture de la relation entre les vitesses de la plateforme mobile  $\overrightarrow{V_{P \in 5/0}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{5/0}}$  avec la vitesse des moteurs.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} \quad \overrightarrow{V_x} = \dot{x} \overrightarrow{x_0} \quad \overrightarrow{V_y} = \dot{y} \overrightarrow{y_0} \quad (\text{C.2})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\theta}_5 \overrightarrow{z_0} \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_{i1/0}} = \dot{\theta}_{i1} \overrightarrow{x_0} \quad (\text{C.4})$$

Pour écrire la relation cinématique entre les points  $A_i$  et  $P$ , il faut déterminer la relation cinématique, dans un premier temps entre les points  $A_i$  et  $B_i$  et dans un second temps entre  $C_i$  et  $P$  avec la loi des champs des moments cinématiques.

$$\overrightarrow{V_{B_i \in i1/0}} = \overrightarrow{V_{A_i \in i1/0}} + \overrightarrow{B_i A_i} \wedge \overrightarrow{\Omega_{i1/0}} \quad (\text{C.5})$$

$$\overrightarrow{V_{B_i \in i1/0}} = l \dot{\theta}_{i1} \overrightarrow{y_{i1}} \quad (\text{C.6})$$

$$\overrightarrow{V_{C_i \in 5/0}} = \overrightarrow{V_{P \in 5/0}} + \overrightarrow{C_i P} \wedge \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \quad (\text{C.7})$$

$$\overrightarrow{V_{C_i \in 5/0}} = \dot{x} \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{y_0} + d_i \dot{\theta}_5 \overrightarrow{x_5} \quad (\text{C.8})$$

L'équi-projectivité des vitesses sur la barre  $B_i C_i$  donne l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V_{B_i \in i2/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{V_{C_i \in i2/0}} \cdot \overrightarrow{u_i} \quad (\text{C.9})$$

$$l \dot{\theta}_{i1} \overrightarrow{y_{i1}} \cdot \overrightarrow{u_i} = \dot{x} \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_0} + \dot{y} \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{y_0} + d_i \dot{\theta}_5 \overrightarrow{x_5} \cdot \overrightarrow{v_i} \quad (\text{C.10})$$

Les matrices suivantes sont obtenues en utilisant l'équi-projectivité sur les barres  $2i$ , voir dans l'article [23].

$$\underline{J}_q = -l \begin{bmatrix} s(\theta_{11} - \theta_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(\theta_{21} - \theta_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s(\theta_{31} - \theta_{32}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s(\theta_{41} - \theta_{42}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\underline{J}_x = \begin{bmatrix} c(\theta_{12}) & s(\theta_{12}) & -c(\theta_{12} - \theta_5) b \\ c(\theta_{22}) & s(\theta_{22}) & -c(\theta_{22} - \theta_5) b \\ c(\theta_{32}) & s(\theta_{32}) & c(\theta_{32} - \theta_5) b \\ c(\theta_{42}) & s(\theta_{42}) & c(\theta_{42} - \theta_5) b \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

avec  $s = \sinus$  et  $c = \cosinus$

## C.2 Modèle dynamique solides rigides du robot Dual-V

Les inerties en mouvement du robot Dual-V sont les inerties  $i_q$  rapportées à l'axe  $(A_i, \vec{z}_0)$  des moteurs  $i$  et la plateforme mobile (corps 5) de masse  $m_X$  de centre de gravité  $P_5$  et l'inertie  $i_X$  d'axe  $(P, \vec{z}_0)$ . Le double de l'énergie cinétique du robot est l'équation C.13 qui permet d'identifier les matrices  $\underline{\mathbb{M}}_{XPRR-4}$  et  $\underline{\mathbb{M}}_{qPRR-4}$  sous forme polynomiale.

$$2T_{DualV} = \sum_{i=1}^4 i_q \overrightarrow{\Omega_{1i/0}}^2 + m_X \overrightarrow{V_{P_5 \in 5/0}}^2 + i_X \overrightarrow{\Omega_{5/0}}^2 \quad (C.13)$$

$$2T_{DualV} = i_q (\dot{\theta}_{11}^2 + \dot{\theta}_{21}^2 + \dot{\theta}_{31}^2 + \dot{\theta}_{41}^2) + m_X (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + i_X \dot{\theta}_5^2 \quad (C.14)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{qDualV} = \begin{bmatrix} i_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbb{M}}_{XDualV} = \begin{bmatrix} m_X & 0 & 0 \\ 0 & m_X & 0 \\ 0 & 0 & i_X \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

La puissance virtuelle du système est la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs sur la plateforme :

$$P_{vDualV} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} + \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (C.16)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = [F_x \ F_y \ C_z]^T \quad (C.17)$$

Pour assembler, le robot il faut utiliser la matrice Jacobienne du robot  $\underline{J}_{mDualV}$  et sa dérivée  $\underline{\dot{J}}_{mDualV}$ . Pour la suite, il est très difficile d'écrire l'équation du mouvement sur cette page car les expressions sont trop longues. L'équation C.18 représente les équations du mouvement du robot PRR-4.

$$\underline{\mathbb{M}}_{DualV} \ddot{\mathbf{X}} + \underline{\mathbb{C}}_{DualV} \dot{\mathbf{X}} = \underline{J}_{mDualV}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (C.18)$$

$$\underline{\mathbb{M}}_{DualV} = \underline{J}_{mDualV}^T \underline{\mathbb{M}}_{qDualV} \underline{J}_{mDualV} + \underline{\mathbb{M}}_{XDualV} \quad (C.19)$$

$$\underline{\mathbb{C}}_{DualV} = \underline{J}_{mDualV}^T \underline{\mathbb{M}}_{qDualV} \underline{\dot{J}}_{mDualV} \quad (C.20)$$



# Bibliographie

- [1] GERMAIN. « Optimal Design of a two degree-of-freedom translational parallel robot for pick-and-place operations ». Thèse. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2013. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01108739> (cf. p. 4).
- [2] PALMIERI et al. « Configuration-dependent modal analysis of a Cartesian parallel kinematics manipulator : numerical modeling and experimental validation ». In : *Meccanica* 49.4 (2014), p. 961-972. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/s11012-013-9842-4. URL : <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9842-4> (cf. p. 5).
- [3] BAUCHAU. *Flexible multibody dynamics*. Springer, 2011 (cf. p. 6).
- [4] Courteille ROGNANT et PATRICK. « A Systematic Procedure for the Elastodynamic Modeling and Identification of Robot Manipulators ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 26.6 (2010), p. 1085-1093. DOI : 10.1109/TRO.2010.2066910. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00755847> (cf. p. 6).
- [5] DEBLAISE, HERNOT et MAURINE. « A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation ». In : *ICRA*. 2006, p. 4213-4219. DOI : 10.1109/ROBOT.2006.1642350 (cf. p. 6).
- [6] DHATT et BATOZ. *Modélisation des structures par éléments finis*. science publications, Hermès, 1990 (cf. p. 6).
- [7] J. F. IMBERT. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues Editions, 1979 (cf. p. 6).
- [8] BENNEHAR, CHEMORI et PIERROT. « L1 Adaptive Control of Parallel Kinematic Manipulators : Design and Real-Time Experiments ». In : *ICRA*. Seattle, United States, 2015. DOI : 10.1109/ICRA.2015.7139400. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01176534> (cf. p. 6).
- [9] PRZEMIENIECKI. *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover, 1985. ISBN : 9780486649481. URL : <https://books.google.fr/books?id=Jd6i0k4wvtQC> (cf. p. 6).

- [10] PIRAS, CLEGHORN et MILLS. « Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links ». In : *Mechanism and Machine Theory* 40.7 (2005), p. 849-862. ISSN : 0094-114X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.12.007>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X05000261> (cf. p. 6).
- [11] PASHKEVICH, CHABLAT et WENGER. « Stiffness Analysis of Overconstrained Parallel Manipulators ». In : *Mechanism and Machine Theory* 44.5 (2009), p. 966-982. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2008.05.017. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00372638> (cf. p. 8).
- [12] KOZAK, EBERT-UPHOFF et SINGHOSE. « Locally Linearized Dynamic Analysis of Parallel Manipulators and Application of Input Shaping to Reduce Vibrations ». In : *ASME J. Mech. Des.*, vol. 126, no. 1, pp.156 -168 (2004) (cf. p. 10, 22, 57).
- [13] ROBINETT et al. *Flexible Robot Dynamics and Controls*. IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering. Springer US, 2012. ISBN : 9781461505396. URL : <https://books.google.fr/books?id=YpLTBwAAQBAJ> (cf. p. 10).
- [14] PELÁEZ. et al. « Input shaping reference commands for trajectory following Cartesian machines ». English. In : *Control Engineering Practice* 13.8 (2005), p. 941-958. DOI : 10.1016/j.conengprac.2004.09.011 (cf. p. 10).
- [15] KOCK et SCHUMACHER. « A parallel x-y manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications ». In : *ICRA*. T. 3. 1998, 2295-2300 vol.3. DOI : 10.1109/ROBOT.1998.680665 (cf. p. 11, 92).
- [16] CHAKAROV. « Study of the antagonistic stiffness of parallel manipulators with actuation redundancy ». In : *Mechanism and Machine Theory* 39.6 (2004), p. 583-601. ISSN : 0094-114X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2003.12.001>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X0400014X> (cf. p. 11).
- [17] MULLER. « Stiffness control of redundantly actuated parallel manipulators ». In : *ICRA*. 2006, p. 1153-1158. DOI : 10.1109/ROBOT.2006.1641865 (cf. p. 11, 77).
- [18] MÜLLER et MAISSER. « Generation and application of prestress in redundantly full-actuated parallel manipulators ». In : *Multibody System Dynamics* 18.2 (2007), p. 259-275. ISSN : 1573-272X. DOI : 10.1007/s11044-007-9081-3. URL : <https://doi.org/10.1007/s11044-007-9081-3> (cf. p. 11, 77).
- [19] MORADI. « Stiffness Analysis of Cable-Driven Parallel Robots ». Thèse. Queen's University. Department of Mechanical et Materials Engineering, 2013. URL : <https://books.google.fr/books?id=Dp6UnQAACAAJ> (cf. p. 11).

- [20] BARADAT et al. « Par2 : a Spatial Mechanism for Fast Planar, 2-dof, Pick-and-Place Applications ». In : *Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. Montpellier, France, 2009, p. 10. URL : <https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00305178> (cf. p. 15).
- [21] CORBEL et al. « Towards 100G with PKM. Is actuation redundancy a good solution for pick-and-place? » In : *ICRA*. 2010, p. 4675-4682. DOI : 10.1109/ROBOT.2010.5509921 (cf. p. 15, 18).
- [22] SHAYYA et al. « A Novel 4 DoFs (3T-1R) Parallel Manipulator with Actuation Redundancy - Workspace Analysis ». In : *MeTrApp'2013 : 2nd Conference on Mechanisms, Transmissions and Applications*. T. 17. New Advances in Mechanisms, Transmissions and Applications Mechanisms and Machine Science. Bilbao, Spain, 2013, p. 317-324. DOI : 10.1007/978-94-007-7485-8\\_39. URL : <https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00906202> (cf. p. 15).
- [23] VOLKERT et al. « Design and experimental evaluation of a dynamically balanced redundant planar 4-RRR parallel manipulator ». In : *The International Journal of Robotics Research* 32.6 (2013), p. 744-759. DOI : 10.1177/0278364913484183. URL : <https://doi.org/10.1177/0278364913484183> (cf. p. 15, 50, 139, 142).
- [24] SIX et al. « A Controller Avoiding Dynamic Model Degeneracy of Parallel Robots During Singularity Crossing ». In : *Journal of Mechanisms and Robotics* 9.5 (2017), p. 051008. ISSN : 1942-4302. DOI : 10.1115/1.4037256. URL : <http://dx.doi.org/10.1115/1.4037256> (cf. p. 24, 92).
- [25] YANG et al. « Planar motion device ». anglais. Brev. WO2016096057 (A1). Juin 2016. URL : <https://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?DB=EPODOC&II=0&ND=4&adjacent=true&FT=D&date=20180410&CC=WO&NR=2016096057A1&KC=A1#> (cf. p. 54).
- [26] NGUYEN et al. « On the Simplifications of Cable Model in Static Analysis of Large-Dimension Cable-Driven Parallel Robots ». In : *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2013), p. 928-934 (cf. p. 54).
- [27] LAMAURY. « Contribution to the control of redundantly actuated cable-driven parallel robots ». Thèse. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2013. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01021423> (cf. p. 54).
- [28] SINO. « Dynamique et stabilité des rotors : application aux rotors composites ». Thèse. l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007. URL : <http://theses.insa-lyon.fr/publication/2007ISAL0067/these.pdf> (cf. p. 57).

- [29] LAÏNÉ. « Introduction à la dynamique des rotors ». Cours. Centrale Lyon. URL : <http://solar.energy.cours.free.fr/doc%20cours%20ing/dynamique/rotor.pdf> (cf. p. 57).
- [30] HASSINI. « Notice de modélisation de la gyroscopie ». In : *Code ASTER* (2015). URL : [https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/fr/man\\_u/u2/u2.06.31.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/fr/man_u/u2/u2.06.31.pdf) (cf. p. 57).
- [31] MULLER. « Internal Preload Control of redundantly actuated Parallel Manipulators - Backlash avoiding Control ». In : *ICRA*. 2005, p. 948-953. DOI : 10.1109/ROBOT.2005.1570239 (cf. p. 77).
- [32] PRADES et al. « Dynamics effects on natural frequencies in modal analysis of PKMs ». In : *MMAR : Methods and Models in Automation and Robotics*. Miedzyzdroje, Poland, 2015. URL : <https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-01275362> (cf. p. 87).

# Table des figures

1	Trajectoire d'une opération de pick-and-place . . . . .	1
1.1	Discrétisation du robot I.Ca.Ro. (source : [2]) . . . . .	5
1.2	. . . . .	5
1.3	Robot Véloce . . . . .	7
1.4	Modèle MSA du robot Véloce . . . . .	7
1.5	. . . . .	8
2.1	Robot Par2 . . . . .	16
2.2	Robot Arrow . . . . .	17
2.3	Robot Dual-V . . . . .	17
2.4	Graphe de liaison générique . . . . .	18
2.5	Schéma cinématique : focus sur la barre $A_2B_2$ . . . . .	19
2.6	Schéma cinématique du robot PRR-2 . . . . .	24
2.7	Graphe de liaison du robot PRR-2 . . . . .	25
2.8	Construction du modèle géométrique du robot PRR-2 . . . . .	26
2.9	Cinématique du robot PRR-2 . . . . .	27
2.10	Analyse modale du modèle solide rigide du robot PRR-2 . . . . .	31
2.11	Analyse modale du modèle solide rigide du robot PRR-2 : effet de la précontrainte . . . . .	32
2.12	Modèle éléments finis du robot PRR-2 . . . . .	33
2.13	Modèle éléments finis assemblés du robot PRR-2 . . . . .	33
2.14	Analyse modale du modèle élément finis du robot PRR-2 . . . . .	34
2.15	Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-2 : cas précontraint . . . . .	35
2.16	AM du modèle EF du robot PRR-2 : effet de la précontrainte . . . . .	35
2.17	Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-2 avec raideur d'asservissement . . . . .	36
2.18	Graphe de liaison du robot PRR-3 . . . . .	38
2.19	Schéma cinématique du robot PRR-3 . . . . .	39
2.20	Cartographie du premier mode d'oscillation du robot PRR3 . . . . .	41
2.21	Singularité de type II pour $x = -0,3m$ du robot PRR-3 . . . . .	42

2.22	Analyse modale du robot PRR3 avec modélisation de la précontrainte . . .	42
2.23	Schéma du modèle éléments finis du robot PRR-3 . . . . .	43
2.24	Analyse modale du robot PRR-3 avec les paramètres du tableau 2.3 . . .	44
2.25	Analyse modale du robot PRR-3 avec les paramètres du tableau 2.4 . . .	45
2.26	Graphe de liaison du robot PRR-4 . . . . .	46
2.27	Schéma cinématique du robot PRR-4 . . . . .	47
2.28	Cartographie de la fréquence du premier mode d'oscillation sans pré-contrainte . . . . .	49
2.29	Cartographie de la fréquence du premier mode d'oscillation avec pré-contrainte $\ \tau_0\ _\infty = 800N$ . . . . .	49
2.30	Graphe de liaison du robot Dual-V . . . . .	50
2.31	Schéma cinématique du robot Dual-V . . . . .	51
2.32	Surface 2D de la cartographie du premier mode d'oscillation du DualV . .	52
2.33	Cartographie du 1 <sup>er</sup> mode du robot DualV sans précontrainte . . . . .	53
2.34	Cartographie du 1 <sup>er</sup> mode du robot DualV avec précontrainte et $\ \tau_0\ _\infty = 130N.m$ . . . . .	53
2.35	Robot Co.Gi.Ro . . . . .	55
3.1	Définition du pendule . . . . .	58
3.2	Graphe de Liaison du corps d'entraînement et du pendule . . . . .	59
3.3	Définition du Robot PR . . . . .	60
3.4	Schéma bloc du modèle dynamique sur Simulink . . . . .	62
3.5	Définition de la trajectoire du robot PR . . . . .	63
3.6	Simulation numérique de la réponse temporelle à un choc . . . . .	64
3.7	Évaluation des forces d'inertie . . . . .	65
3.8	Comparaison des fréquences obtenues par linéarisation et par simulation numérique pour le robot PR . . . . .	66
3.9	Définition du robot PR . . . . .	67
3.10	Schéma bloc du modèle dynamique sur Simulink . . . . .	69
3.11	Définition de la trajectoire du robot RR . . . . .	70
3.12	Simulation numérique de la réponse temporelle à un choc . . . . .	71
3.13	Ordre de grandeur des termes de l'équation (3.26) . . . . .	73
3.14	Comparaison des fréquences obtenues par linéarisation et par simulation numérique pour le robot RR . . . . .	74
4.1	Schéma bloc de la commande des robots . . . . .	82
5.1	Représentation temporelle de la trajectoire . . . . .	90
5.2	Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-2 . . . . .	93
5.3	Analyse de sensibilité du paramètre $k_q$ sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-2 lors du suivi de la trajectoire 2 . . . . .	94
5.4	Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-3 . . . . .	96
5.5	Analyse de sensibilité du paramètre $k_q$ sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-3 lors du suivi de la trajectoire 1 . . . . .	97

5.6	Analyse modale le long des trajectoires du robot PRR-4 . . . . .	99
5.7	Analyse de sensibilité du paramètre $k_q$ sur les fréquences d'oscillation du robot PRR-4 lors du suivi de la trajectoire 2 . . . . .	100
5.8	Analyse modale le long des trajectoires du robot Dual-V . . . . .	102
5.9	Analyse de sensibilité du paramètre $k_q$ sur les fréquences d'oscillation du robot Dual-V lors du suivi des trajectoires 1 et 2 . . . . .	103
5.10	Assemblage du robot PRR-2 . . . . .	105
5.11	Graphe de liaison du robot PRR-2 . . . . .	106
5.12	Schéma bloc de la commande CTC des robots . . . . .	113
A.1	Graphe de liaison du robot PRR-3 . . . . .	126
A.2	Schéma cinématique du robot PRR-3 . . . . .	126
B.1	Graphe de liaison du robot PRR-4 . . . . .	131
B.2	Schéma cinématique du robot PRR-4 . . . . .	132
B.3	Schéma de la plateforme mobile du PRR-4 . . . . .	136
C.1	Graphe de liaison du robot Dual-V . . . . .	140
C.2	Schéma cinématique du robot Dual-V . . . . .	141



# Liste des tableaux

1.1	Résumé des modèles solides déformables . . . . .	9
2.1	Paramètres constants du PRR-2 . . . . .	30
2.2	Paramètres constants du PRR-3 . . . . .	41
2.3	Paramètres constants du PRR-3 . . . . .	44
2.4	Paramètres constants du PRR-3 . . . . .	45
2.5	Paramètres constants du PRR-4 . . . . .	47
2.6	Paramètres constants du Dual-V . . . . .	51
3.1	Paramètres géométrique et d'inertie du pendule . . . . .	58
3.2	Paramètres géométriques et d'inertie du robot PR . . . . .	60
3.3	Comparaison des fréquences en fonction de l'accélération . . . . .	66
3.4	Paramètres géométriques et d'inertie du robot RR . . . . .	67
3.5	Résultats de toutes les simulations du robot RR . . . . .	74
5.1	Matrices du modèle dynamique linéarisé appliquées aux PKMs . . . . .	88
5.2	Paramètres de la trajectoire . . . . .	89
5.3	Matrices du modèle dynamique linéarisé du robot PRR-2 . . . . .	91
5.4	Paramètres de la trajectoire . . . . .	98
5.5	Paramètres de la trajectoire . . . . .	101
5.6	Paramètres géométrique et d'inertie du robot PR-2 . . . . .	105
5.7	Expressions des différentes matrices de raideur . . . . .	116
B.1	Paramètres constants du PRR-4 . . . . .	132
B.2	Paramètres de la plateforme mobile du PRR-4 . . . . .	136
B.3	Expressions de la matrice Jacobienne inverse du robot PRR4 et de sa dérivée	137
C.1	Paramètres constants du Dual-V . . . . .	141

# **Dynamique linéarisée totale : application aux robots parallèles**

## **Résumé**

Cette thèse se concentre sur l'analyse modale des robots. Les robots considérés pour nos développements sont des robots parallèles (PKM) plans, redondants en actionnement ou non. Dans un premier temps nous avons considéré les PKM redondants pour lesquels nous envisageons d'augmenter la fréquence de leurs oscillations en utilisant les efforts internes. Nous avons étudié plusieurs robots plans redondants et nous montrons que dans le cadre de robots conçus pour être rigides, l'influence des efforts internes rajoutés n'a que peu d'importance. La suite de nos travaux soutient la proposition suivante : "les trajectoires très dynamiques influencent les fréquences des oscillations de la plateforme mobile". En effet, les robots parallèles légers, peuvent atteindre de grandes accélérations. Nous avons choisi de nous intéresser à l'étude de l'impact que peut avoir les effets dynamiques sur la fréquence des oscillations de la plateforme mobile de ces robots. Nous proposons d'étudier cette influence en nous basant sur un développement au premier ordre du modèle dynamique. Cette linéarisation du modèle dynamique se veut plus complète que celles proposées dans la littérature. Nous expliquons et vérifions la validité de notre approche par une étude sur le lien entre accélération et vitesse et la fréquence d'oscillation pour les robots série PR et RR. Ensuite, nous généralisons notre modélisation au premier ordre et l'appliquons aux quatre robots pour voir si nous sommes capable d'en dégager une tendance concernant l'évolution des fréquences d'oscillation. Nous constatons que, en fonction des trajectoires, la dynamique a une influence faible mais visible, souvent positive sur l'augmentation des fréquences d'oscillation de la plateforme mobile. Cependant, les trajectoires et les lois horaires étant imposées, nous ne pouvons que subir cette influence.

**Dynamique, effets d'inertie, linéarisation, robots parallèles, commande**

---

## **Total linearized dynamics : application to parallel robots**

### **Abstract**

This thesis manuscript focuses on robot modal analysis. Our applications mainly revolve around architectures with parallel kinematic machines (PKM). First we examined PKMs which are redundant in actuation. The aim is to use their actuation is the tensioning of their structure, to enhance their oscillation frequency. We have studied several redundancy planar robots and we demonstrate that in the case of robots which are typically designed to be stiff, the impact of added internal forces is of low relevance. The continuation of our research supports the following proposal: "High dynamics trajectories have an impact on the oscillation frequency of the mobile platform." Indeed parallel robots, when designed to be light, can reach greater accelerations. We chose to concentrate on the study of the impact that dynamic effects can have on the oscillation frequency of those robots' mobile platform. The robots examined for our developments are planar PKMs whether they have redundant actuation or not. We offer to study this impact based on a prime order development of the dynamic model. This linearisation of the dynamic model is intended to be more complete than those suggested by literature. We explain and verify the validity of our approach with a study on the link between speed and oscillation frequency on PR robots and RR robots. Then we will generalize our first order model and apply it to the four robots to see if we are able to identify a pattern regarding the evolution of oscillation frequencies. We observe that, depending on the trajectories, the dynamics have a low but noticeable, and often positive, impact on the increase of oscillation frequency of the mobile platform. However, since the trajectories and speed input laws are imposed, we have no choice but to be subjected to this impact.

**Dynamics, inertia effects, linearization, parallel robots, command controls**

---

**Université de Montpellier**

