



**HAL**  
open science

# Méthode d'identification d'un impact appliqué sur une structure admettant des modes de vibration basse fréquence faiblement amortis et bien séparés

Dimitri Goutaudier

► **To cite this version:**

Dimitri Goutaudier. Méthode d'identification d'un impact appliqué sur une structure admettant des modes de vibration basse fréquence faiblement amortis et bien séparés. Mécanique [physics.med-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2019. Français. NNT : 2019CNAM1225 . tel-02125320

**HAL Id: tel-02125320**

**<https://theses.hal.science/tel-02125320>**

Submitted on 10 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée par : **Dimitri GOUTAUDIER**

soutenue le : **3 avril 2019**

pour obtenir le grade de : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Discipline* : Mécanique, génie mécanique, génie civil

*Spécialité* : Mécanique

**Méthode d'identification d'un impact appliqué sur une structure admettant des modes de vibration basse fréquence faiblement amortis et bien séparés**

### THÈSE dirigée par

M. OHAYON Roger

*Professeur émérite, CNAM de Paris*

### RAPPORTEURS

M. FOLTETE Emmanuel

*Professeur des universités, ENSMM*

M. JACQUELIN Eric

*Professeur des universités, Université Lyon 1*

### PRESIDENT

M. LADEVEZE Pierre

*Professeur émérite, ENS Paris-Saclay*

### EXAMINATEURS

M. BES Christian

*Professeur, Université Paul Sabatier*

Mme. KEHR-CANDILLE Véronique

*Ingénieur de recherche, ONERA*

M. GENDRE Didier

*Ingénieur, Airbus*

### INVITE

M. ABOU-JAOUDE Saab

*Mathématicien*



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE établie entre l'ONERA et AIRBUS. Les travaux de recherche ont été effectués dans l'unité MS2 du Département Matériaux et Structures de l'ONERA. Plusieurs déplacements ont été organisés à AIRBUS, au sein de l'équipe EIJG du département Opérations Aéroportuaires, pour orienter le travail et conduire des expérimentations. Je tiens à remercier ces deux équipes pour leur accueil chaleureux et pour les bons moments passés ensemble.

Je remercie sincèrement Roger Ohayon, mon directeur de thèse, pour m'avoir accordé sa confiance et pour m'avoir donné la liberté d'orienter mes recherches. Je le remercie particulièrement de m'avoir soutenu dans ma démarche de rédiger le manuscrit au bout de deux ans. Je peux à présent dédier mon temps à essayer de valider mon travail sur un avion complet, ce qui réaliserait l'objectif visé par ce projet de recherche. J'adresse également mes remerciements à Véronique Kehr-Candille, mon encadrante ONERA, pour sa disponibilité, sa patience, et l'autonomie qu'elle m'a donnée.

Je ne remercierai jamais assez Didier Gendre, mon encadrant AIRBUS, pour son dynamisme, ses encouragements constants, et toute la confiance qu'il m'a accordée. Je lui suis reconnaissant d'avoir fourni autant d'efforts pour que cette thèse se déroule dans des conditions propices à la réussite. Je garderai pour grande partie grâce à lui un excellent souvenir de cette tranche de vie.

J'adresse mes remerciements à tous les autres membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail : à Monsieur Pierre Ladevèze pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, à Messieurs Emmanuel Foltête et Eric Jacquelin pour m'avoir consacré du temps en rapportant ce manuscrit, ainsi qu'à Monsieur Christian Bes en qualité d'examineur pour avoir participé à ma soutenance.

Cette thèse n'aurait jamais pris son parfum d'aventure si Didier ne m'avait pas fait découvrir le bureau ambulancier de Saab Abou-Jaoudé, un mathématicien débordant d'énergie et d'idées en tout genre. C'est lui qui m'a conduit à formaliser la signature d'un impact dans des mesures vibratoires. L'approche mono-capteur serait restée une utopie s'il ne m'avait pas poussé à la vérifier expérimentalement. Au-delà des échanges scientifiques, je lui suis reconnaissant d'avoir cru en moi et d'avoir pris le temps de me secouer - à plusieurs reprises - pour me rendre plus tenace.

Je remercie chaleureusement tous les stagiaires, doctorants, post-doctorants, techniciens, ingénieurs et chercheurs avec qui j'ai partagé des moments de distraction ou des conversations fructueuses. Je remercie en particulier Jean-Luc Akian pour m'avoir aidé sur certains aspects mathématiques que je ne savais pas formuler correctement.

Je remercie bien sûr ma famille et mes amis pour leur soutien bienveillant et constant, dans tous les moments de la vie et en particulier pendant cette thèse.

Enfin, je n'aurais sans doute jamais pu persévérer dans une aventure pareille sans le soutien de Noro avec qui je partage ma vie. Elle n'a jamais cessé de m'encourager et de me conseiller pour saisir les opportunités qui se présentaient. J'espère que je lui serai, à mon tour, d'une aide aussi précieuse dans tous ses projets.

---

# Résumé

La détection d'impacts est une préoccupation majeure pour suivre l'intégrité d'une structure évoluant dans un environnement comportant des risques de collision. Ce travail consiste à développer une méthode d'identification d'impact applicable à une structure composite de grandes dimensions qui soit à la fois robuste, peu coûteuse en temps de calcul, et qui nécessite peu de capteurs. Dans un premier temps, la démarche a été de décrire l'image du point d'impact dans la réponse vibratoire par un vecteur de participations modales. L'idée a ensuite été d'introduire l'hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants permettant d'établir le lien bijectif entre les participations modales et le point d'impact. Une procédure d'estimation de ces participations modales à partir d'un unique point de mesure a été proposée. Dans un second temps, la démarche a été d'étendre la procédure à l'identification d'une loi décrivant les paramètres principaux d'une force d'impact. Des conditions portant sur les paramètres de mesure et les propriétés modales de la structure sont déterminées pour garantir la précision et la robustesse de l'identification. Ce travail a permis de développer une approche en rupture par rapport à l'état de l'art, en ce sens qu'elle ne nécessite, en théorie, qu'un seul point de mesures vibratoires pour identifier un impact. Des essais expérimentaux sur un pavillon d'A350 ont permis de valider cette approche sur une structure composite de grandes dimensions.

**Mots clés :** Contrôle de santé intégré, problème inverse, identification d'impact, analyse vibratoire



# Abstract

Many industrial structures operate in an environment with a high risk of collision. The detection of impacts and the assessment of their severity is a major preoccupation in Structural Health Monitoring. This work deals with the development of an impact identification technique that is applicable to a large composite structure, numerically robust and time efficient, and that requires a low number of sensors. The first step was to describe the image of the impact point in the vibration response as a modal participation vector. The idea was to introduce the existence of a discriminating modes family to make a bijective link between the modal participations and the impact point. A least-squares procedure is developed to estimate those modal participations by measuring the vibration response of a single point on the structure. The second step was to extend the procedure to the identification of a parametric law representing the impact load history. Some conditions on measurement parameters and modal properties of the structure are identified to guarantee both the accuracy and the robustness of the procedure. The approach developed in this work is new regarding the state of the art : only one measurement point is considered for identifying an impact event. An experimental validation on an A350 crown panel indicates that the methodology is valid for large composite structures.

**Keywords :** Structural health monitoring, inverse problem, impact identification, vibration analysis

---

# Table des matières

<b>Acronymes</b>	<b>27</b>
<b>Notations</b>	<b>29</b>
<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>41</b>
1.1 Généralités sur les problèmes inverses . . . . .	42
1.2 Problème inverse de reconstruction de l'évolution temporelle d'une force d'impact . . . . .	43
1.2.1 Troncature de la décomposition en valeurs singulières - TSVD . . . . .	45
1.2.2 Régularisation de Tikhonov . . . . .	47
1.2.3 Filtre de Wiener . . . . .	49
1.2.4 Régularisation par contrôle de dimension . . . . .	50
1.2.5 Bilan sur les méthodes de reconstruction . . . . .	51
1.3 Problème inverse de localisation du point d'impact . . . . .	52
1.3.1 Techniques de triangulation . . . . .	53
1.3.2 Techniques de balayage . . . . .	55
1.3.3 Identification des participations modales . . . . .	56
<b>2 Etude sur la possibilité d'identifier un impact à partir de la réponse libre</b>	

<b>d'une structure à <math>N</math> degrés de liberté</b>	<b>61</b>
2.1 Images de l'évolution temporelle d'une excitation et de son point d'application dans la réponse vibratoire . . . . .	62
2.2 Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA . . . . .	64
2.3 Mise en évidence de l'impossibilité de reconstruire une force d'impact quelconque à partir de la réponse libre . . . . .	67
2.4 Considérations sur l'estimation de l'instant d'impact . . . . .	71
2.5 Bilan sur la possibilité d'identifier un impact à partir de la réponse vibratoire mesurée en un point . . . . .	72
<b>3 Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA tronqué</b>	<b>75</b>
3.1 Mise en évidence du phénomène de signature vibratoire du point d'application d'une excitation . . . . .	76
3.2 Hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants pour réduire la dimension du problème de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité . . . . .	78
3.2.1 Projection du modèle de réponse sur une famille de modes de vibration connus . . . . .	79
3.2.2 Définition d'une FMD par la propriété d'intersection des lignes de vibration au point d'application d'une excitation arbitraire . . . . .	80
3.2.3 Nombre minimum de modes formant une FMD d'une structure continue suivant la dimension de son paramétrage géométrique . . . . .	84
3.2.4 Caractérisation géométrique de la matrice modale tronquée sur une FMD . . . . .	87

3.3	Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir d'une estimation du VPMA tronqué sur une FMD . . . . .	91
3.3.1	Introduction d'une tolérance de colinéarité . . . . .	92
3.3.2	Noyau du problème de localisation à $\epsilon$ près . . . . .	94
3.3.3	Noyau du problème d'estimation de l'intensité à $r\%$ près . . . . .	96
3.3.4	Domaine admissible de l'erreur d'estimation commise sur le VPMA tronqué . . . . .	98
3.3.5	Choix pratique de la tolérance de colinéarité . . . . .	99
3.4	Procédure de recherche d'une FMD . . . . .	100
3.4.1	Méthode graphique de caractérisation d'un couple de modes discriminants pour une structure 1D . . . . .	101
3.4.2	Méthode numérique d'extraction d'une FMD à partir de modes de vibration connus d'une structure complexe . . . . .	105
3.5	Bilan sur la procédure d'identification d'une excitation à partir du VPMA tronqué sur une FMD . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Détermination de conditions pour l'identification robuste et précise d'un Dirac à partir de mesures vibratoires en un point</b>	<b>113</b>
4.1	Estimation du VPMA à partir de mesures vibratoires en un point . . . . .	115
4.1.1	Formulation du problème . . . . .	115
4.1.2	Résolution au sens des moindres carrés . . . . .	116
4.1.3	Variante sur l'estimation de l'intensité . . . . .	117
4.2	Conditions suffisantes sur les propriétés modales de la structure et les paramètres de mesure pour rendre le problème d'estimation du VPMA bien posé . . . . .	119
4.2.1	Presque orthogonalité des fonctions de réponse impulsionnelle discrétisées associées à des modes faiblement amortis et bien séparés . .	120

TABLE DES MATIÈRES

---

4.2.2	Formule approchée du conditionnement pour une FMD formée de modes faiblement amortis et bien séparés . . . . .	122
4.2.3	Majoration de l'erreur d'estimation commise sur le VPMA . . . . .	123
4.3	Sélection des paramètres de mesure améliorant la robustesse de la procédure d'estimation du VPMA dans les conditions de presque orthogonalité des fonctions de réponse impulsionnelle . . . . .	126
4.3.1	Sélection de la durée de mesure et de la fréquence d'échantillonnage réalisant la propriété de presque orthogonalité des réponses impulsionnelles discrétisées . . . . .	126
4.3.2	Points de mesure minimisant le conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$ . . . . .	127
4.4	Détermination du noyau du problème d'identification d'un Dirac dans des tolérances fixées . . . . .	128
4.5	Bilan sur les conditions d'identification robuste et précise d'un Dirac . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Extension de la méthode à l'identification pratique d'un impact arbitraire avec des mesures d'accélération</b>	<b>133</b>
5.1	Sélection de lois paramétriques de force d'impact . . . . .	134
5.2	Estimation simultanée du VPMA et des paramètres de la loi d'impact à partir de mesures vibratoires en un point . . . . .	136
5.2.1	Formulation du problème . . . . .	136
5.2.2	Résolution par une méthode de moindres carrés semi-linéaire explorant l'espace des paramètres de la forme d'impact . . . . .	137
5.2.3	Techniques d'estimation de l'instant d'impact . . . . .	139
5.3	Sélection de paramètres de mesures affinant le conditionnement en chaque point de l'espace des paramètres . . . . .	140
5.3.1	Etude du conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$ suivant les hypothèses sur la FMD et les paramètres de mesures . . . . .	140

## TABLE DES MATIÈRES

---

5.3.2	Réduction du conditionnement de la procédure par mesures d'accélé- rations . . . . .	142
5.3.3	Positionnement du capteur sur un point neutre de mobilité maximale	144
5.4	Mise en évidence du compromis précision-robustesse de la procédure . . . . .	147
5.4.1	Influence du nombre de modes retenus dans l'analyse sur la précision et la robustesse de la procédure . . . . .	148
5.4.2	Convergence de la bande fréquentielle par sélection itérative d'une FMD . . . . .	149
5.5	Bilan sur la procédure d'identification d'un impact paramétré . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Validation expérimentale de l'approche mono-capteur d'identification d'impacts sur une plaque métallique</b>	<b>153</b>
6.1	Dispositif expérimental . . . . .	154
6.2	Carte de robustesse angulaire de la FMD sélectionnée . . . . .	156
6.3	Détermination des paramètres permettant de localiser des impacts variés dans une précision donnée . . . . .	158
6.3.1	Description de la procédure . . . . .	158
6.3.2	Exemple détaillé de localisation d'un impact . . . . .	160
6.3.3	Influence de la FMD sélectionnée suivant la nature de l'impact appliqué	162
6.3.4	Influence du positionnement du capteur . . . . .	166
6.3.5	Performances globales de localisation pour la loi d'impact sélectionnée	169
6.4	Sélection d'une loi paramétrique pour la reconstruction d'une force d'impact	169
6.4.1	Description de la procédure . . . . .	169
6.4.2	Performances de reconstruction suivant la loi paramétrique utilisée .	171
6.5	Discussion sur les résultats expérimentaux obtenus . . . . .	174
6.5.1	Identification des contributions modales de la FMD minimale . . . . .	174
6.5.2	Performances de localisation suivant le point d'application de l'impact	177

## TABLE DES MATIÈRES

---

6.5.3	Reconstruction des formes d'impact par rapport aux solutions de référence . . . . .	178
6.5.4	Vérification de la formule approchée du conditionnement . . . . .	181
6.5.5	Localisation avec la loi de Dirac retardé . . . . .	184
<b>7</b>	<b>Validation expérimentale de la méthode d'identification d'impacts sur une structure composite de grandes dimensions</b>	<b>185</b>
7.1	Dispositif expérimental . . . . .	186
7.2	Analyse modale expérimentale du panneau . . . . .	187
7.3	Identification des FMD . . . . .	191
7.4	Positionnement des accéléromètres . . . . .	193
7.5	Vérification de la formule approchée du conditionnement . . . . .	194
7.6	Performances d'identification avec un accéléromètre . . . . .	196
7.6.1	Localisation des impacts . . . . .	196
7.6.2	Reconstruction des forces d'impact . . . . .	200
7.7	Utilisation d'un réseau de capteurs . . . . .	202
7.7.1	Définition d'une performance de localisation à partir d'un ensemble de points d'impact candidats . . . . .	202
7.7.2	Définition d'une stratégie de dialogue . . . . .	204
7.7.3	Problème d'indécidabilité . . . . .	205
7.7.4	Choix d'une stratégie de dialogue réduisant le diamètre de l'ensemble des candidats . . . . .	206
7.7.5	Prévention du risque de défaillance en utilisant un réseau de capteurs muni d'une stratégie de dialogue . . . . .	207
	<b>Conclusion</b>	<b>209</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Publications, brevet</b>	<b>221</b>
<b>Annexes</b>	<b>225</b>
<b>A Rappels mathématiques</b>	<b>225</b>
<b>B Familles de modes discriminants pour différentes configurations de poutres et de plaques</b>	<b>231</b>
<b>C Résultats de presque orthogonalité des réponses impulsionnelles</b>	<b>243</b>
<b>D Procédure complète d'identification d'un impact</b>	<b>251</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Liste des tableaux

3.1	Propriétés géométriques et mécaniques du cylindre appuyé sur trois points.	109
6.1	Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque étudiée, fabriquée par la société Vancouver2 (Toulouse, France). Valeurs expérimentales et analytiques (entre parenthèses) des fréquences propres. . . . .	155
6.2	Paramètres utilisés pour la localisation des impacts. . . . .	160
6.3	Resultats de localisation détaillés de la campagne d'impacts. . . . .	169
6.4	Espace des paramètres pour les différentes lois paramétriques testées. $\Delta t = 1/f_e$ représente la période d'échantillonnage de l'accéléromètre. . . . .	170
6.5	Performances de reconstruction de la force d'impact 1 avec les différentes lois utilisées. Le pourcentage de reconstruction correspond à l'erreur relative en norme 2 entre la force mesurée et la force reconstruite (NA = Non Applicable).	171
6.6	Performances de reconstruction de la force d'impact 2 avec les différentes lois utilisées (E=Echec) . . . . .	173
6.7	Performances d'identification de l'impact 2 pour différentes lois paramétriques en choisissant $\mu_{max} = \mu_\delta$ pour les lois GS et GD. . . . .	174
6.8	Paramètres minimisant le résidu quadratique sur le signal de force de l'impact 1. Ecart 1 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\hat{\alpha})$ et $\psi_m$ . Ecart 2 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\alpha_{ref})$ et $\psi_m$ . Ecart 3 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\alpha_{ref})$ et $\psi(\hat{\alpha})$ . . . . .	179

6.9	Paramètres minimisant le résidu quadratique sur le signal de force de l'impact 2. Ecart 1 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\hat{\alpha})$ et $\psi_m$ . Ecart 2 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\alpha_{ref})$ et $\psi_m$ . Ecart 3 : Erreur relative en norme 2 entre $\psi(\alpha_{ref})$ et $\psi(\hat{\alpha})$ . . . . .	180
6.10	Resultats de localisation de l'ensemble des impacts appliqués avec la loi DR.	184
7.1	Analyse modale expérimentale du panneau sur [10Hz,50Hz]. . . . .	189
7.2	Evaluation des rapports $\nu(C_i)$ pour les différents capteurs et pour les différentes FMD. . . . .	194
7.3	Evaluation des rapports $m(C_i)$ [%] pour les différents capteurs et pour les différentes FMD. . . . .	194
7.4	Séparations modales minimales des différentes FMD et coefficients de presque orthogonalité des familles de réponses impulsionnelles modales associées. . .	195
7.5	Conditionnement suivant le point de mesure et la FMD pour la loi DR, $D = 0.755s$ , $f_e = 5.12kHz$ . Valeur entre parenthèse : évaluation de la formule approchée du conditionnement. (F) : matrice non diagonale strictement dominante. . . . .	195
7.6	Paramètres utilisés pour la localisation des impacts appliqués sur le panneau. $\Delta t = 1/f_e$ représente la période d'échantillonnage. . . . .	196
7.7	Performances de localisation avec les accéléromètres $C_1, C_2, C_3$ . . . . .	197
7.8	Performances de localisation avec les accéléromètres $C_4, C_5, C_6$ . . . . .	197
7.9	Performances de localisation avec les accéléromètres $C_7, C_8$ . . . . .	197
7.10	Classement des différents points de mesure en termes de succès de localisation à $\epsilon = 41cm$ près suivant la famille de modes utilisée. . . . .	198
7.11	Paramètres utilisés pour la reconstruction des forces appliqués avec une loi DS. $\Delta t = 1/f_e$ représente la période d'échantillonnage. . . . .	200
7.12	Performances de localisation avec le réseau complet. . . . .	208
B.1	Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque étudiée. . . . .	236

# Table des figures

1	Coactivité entre un avion au sol et les équipements aéroportuaires. . . . .	32
1.1	Illustration des trois types de régimes dans une mesure vibratoire consécutive à un impact (extraite des données expérimentales utilisées dans le Chapitre 7). . . . .	53
2.1	Enregistrement de la réponse vibratoire en $C$ consécutive à un impact en $F$ appliqué sur une structure discrétisée. . . . .	62
2.2	Représentation des deux premières composantes du vecteur de participation modale associé à une excitation appliquée au centre d'une poutre simplement supportée. . . . .	65
2.3	Illustration de la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA. . . . .	67
2.4	Impulsion équivalente décrivant la réponse libre d'un système mécanique à 1 $ddl$ . . . . .	69
2.5	Perte d'informations sur une image en noir et blanc. . . . .	71
3.1	Discrimination du point d'application à partir du vecteur de participation modale tronqué aux deux premiers modes de flexion. . . . .	77
3.2	Intersection de deux lignes d'iso-proportion d'une plaque au point d'application d'une excitation. . . . .	83
3.3	Déformées des trois modes de flexion $\phi_1$ , $\phi_2$ et $\phi_3$ formant une FMD globale d'une plaque simplement supportée sur ses bords. . . . .	84

TABLE DES FIGURES

---

3.4	Non injectivité de $\lambda : \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ . . . . .	86
3.5	Caractérisation géométrique d'une famille de $p = 2$ modes discriminants d'une structure à $N = 6$ ddl. . . . .	88
3.6	a) Quadrants de la poutre associés aux deux modes discriminants $\phi_1$ et $\phi_2$ . b) Quadrants de la plaque associés aux trois modes discriminants $\phi_{1,1}$ , $\phi_{1,2}$ , et $\phi_{2,1}$ . . . . .	89
3.7	Représentation des quadrants et des vecteurs milieu dans le cas $p = 2$ . . . . .	90
3.8	Regroupement des lignes de la matrice modale associées aux $\phi_j^*$ répartis dans les différents quadrants. . . . .	91
3.9	Illustration de la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA tronqué sur une FMD. . . . .	91
3.10	Représentation des petits angles $\theta_i \in [0, \pi/2]$ entre $\mathbf{u}$ et les $\mathbf{v}_i$ . . . . .	93
3.11	Définition des petits angles utilisés. . . . .	93
3.12	Illustration du paramètre de tolérance de colinéarité utilisé pour la locali- sation à $\epsilon$ -près du point d'application de l'excitation. . . . .	95
3.13	Illustration des noyaux de la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité ( $\theta_o = \theta_\epsilon(F) - \theta_c$ ) . . . . .	99
3.14	Raffinement de la procédure de discrimination sur les angles. . . . .	100
3.15	Structure 1D quelconque subissant une excitation normale. . . . .	101
3.16	Poutre supportée-supportée. . . . .	103
3.17	Modes de vibration $\phi_1$ et $\phi_2$ d'un modèle 1D d'avion au sol. . . . .	104
3.18	FMD globale constituée de trois modes de la plaque simplement appuyée sur ses coins. . . . .	107
3.19	Carte de robustesse angulaire associée à $\mathcal{F}_1$ et $\epsilon = (a_\epsilon^2 + b_\epsilon^2)^{1/2}/2$ (valeur max : $25^\circ$ ). . . . .	107
3.20	Modèle éléments finis du cylindre appuyés sur trois points (croix rouges). . . . .	109
3.21	Cinq premiers modes de vibration du cylindre appuyé sur trois points. . . . .	109

TABLE DES FIGURES

---

3.22	Carte de robustesse angulaire associée à $\mathcal{F}_1$ et $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}$ (valeur max : $12^\circ$ ). . . . .	110
3.23	Carte de robustesse angulaire associée à $\mathcal{F}_2$ et $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}$ (valeur max : $15^\circ$ ). . . . .	110
4.1	a) Localisation robuste mais imprécise b) Localisation précise mais non robuste. . . . .	115
4.2	Problème d'identification d'un Dirac. . . . .	115
4.3	Illustration du lien entre projection orthogonale et troncature modale dans les conditions de presque orthogonalité de la famille des $(\mathbf{H}_i)$ . . . . .	125
4.4	Inclusion d'une boule de centre l'origine dans le noyau d'identification du Dirac dans des tolérances fixées. Voir section 3.3.4 pour la construction de cette illustration. . . . .	125
4.5	Procédure d'identification d'un Dirac. a) Impulsion en $F$ et mesures en $C$ , b) Estimation du vecteur de participation modale amplifié par minimisation de l'écart prédictions-mesures, c) Procédure de discrimination sur les angles pour identifier les candidats et les intensités associées, d) Représentation des points candidats. . . . .	132
5.1	Représentation d'une force d'impact avec répétitions de pics. . . . .	134
5.2	Modèles paramétrés de loi d'impact. . . . .	135
5.3	Problème d'identification d'un impact quelconque. . . . .	137
5.4	Estimation de l'instant d'impact à partir du signal vibratoire du capteur le plus proche du point d'impact. . . . .	139
5.5	Points neutres d'une poutre simplement supportée sur ses extrémités associés aux modes de flexion 1 et 2. . . . .	146
5.6	Détermination graphique des points neutres d'une plaque simplement supportée sur ses bords associés aux modes de flexion $(1, 1)$ , $(1, 2)$ et $(2, 1)$ . . .	146

TABLE DES FIGURES

---

5.7 Convergence de la bande fréquentielle [90Hz,285Hz] par ajout de modes dans l'analyse. . . . . 149

6.1 Dispositif expérimental. . . . . 155

6.2 Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $37^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (3a_e \ 3b_e) / N_2 = (5a_e \ 3b_e) / N_3 = (3a_e \ 5b_e) / N_4 = (5a_e \ 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 65\%$ . . . . . 156

6.3 Candidats retrouvés avec l'angle maximal de robustesse pour un impact appliqué au centre de la plaque. ( $F = 113, \theta_\epsilon(F) = 37.3^\circ$ ). . . . . 157

6.4 Candidats retrouvés avec l'angle maximal de robustesse pour un impact appliqué proche d'un coin. ( $F = 65, \theta_\epsilon(F) = 6^\circ$ ). . . . . 157

6.5 Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $39^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e \ 2b_e) / N_2 = (6a_e \ 2b_e) / N_3 = (2a_e \ 6b_e) / N_4 = (6a_e \ 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 0.89$ . . . . . 158

6.6 Allures typiques des forces d'impact appliquées suivant l'embout du marteau de choc. . . . . 159

6.7 Reconstruction des mesures pour  $F = (5.5a/8, 6.5b/8)$ . . . . . 161

6.8 Candidats retrouvés par la procédure de localisation (rond bleu : capteur, croix noire : point d'impact  $F$ , rond noir : candidat  $F_i$ ). . . . . 161

6.9 Carte de localisations pour l'embout en caoutchouc en utilisant la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  (croix verte : localisation à  $\epsilon$ -près, croix noire : candidat le plus éloigné). . . . . 163

6.10 Barycentres pondérés des candidats obtenus (croix verte : point d'impact, croix noire : barycentre). . . . . 163

6.11 Carte de localisations pour l'embout en acier en utilisant la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . 164

TABLE DES FIGURES

---

6.12 Estimation imprécise avec la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  de la première contribution modale conduisant à l'identification de nombreux candidats dans les quadrants  $Q_1$  et  $Q_3$ . . . . . 164

6.13 Carte de localisations pour l'embout en acier avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$ . . . . . 165

6.14 Barycentres pondérés des candidats obtenus avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$ . . . . . 165

6.15 Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  pour l'embout en caoutchouc et l'accéléromètre placé en  $C' = (6a/8, 5b/8)$ . . . . . 167

6.16 Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  pour l'embout en caoutchouc et l'accéléromètre placé en  $C'' = (2a/8, 6b/8)$ . . . . . 167

6.17 Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  pour l'embout en acier et l'accéléromètre placé en  $C' = (6a/8, 5b/8)$ . . . . . 168

6.18 Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  pour l'embout en acier et l'accéléromètre placé en  $C'' = (2a/8, 6b/8)$ . . . . . 168

6.19 Evolutions temporelles des impacts 1 et 2. . . . . 170

6.20 Reconstruction de la force de l'impact 1 avec les différentes lois paramétriques. 172

6.21 Reconstruction de la force de l'impact 2 avec les lois DS, QC et DR. . . . . 173

6.22 Reconstruction de la force de l'impact 2 avec différentes lois paramétriques, en choisissant  $\mu_{max} = \mu_\delta$  pour les lois GS et GD. . . . . 173

6.23 Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesuré et reconstruits pour l'impact appliqué sur la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc. La bande de fréquences  $[85\text{Hz}, 285\text{Hz}]$  correspond aux modes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , et la bande de fréquences  $[285\text{Hz}, 580\text{Hz}]$  correspond aux modes  $\phi_4, \phi_5, \phi_6$ . . . . . 176

6.24 Signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc. . . . . 176

6.25 Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 23 avec l'embout en acier. . . . . 177

TABLE DES FIGURES

---

6.26	Signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et $\mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 23 avec l'embout en acier. . . . .	177
6.27	Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesurés pour les impacts appliqués sur les cellules 1 et 28 avec l'embout en caoutchouc. . . . .	178
6.28	Formes mesurée $\psi_m$ , reconstruite avec la procédure d'identification $\psi(\hat{\alpha})$ , et de référence $\psi(\alpha_{ref})$ pour l'impact 1. . . . .	180
6.29	Formes mesurée $\psi_m$ , reconstruite avec la procédure d'identification $\psi(\hat{\alpha})$ , et de référence $\psi(\alpha_{ref})$ pour l'impact 2. . . . .	181
6.30	Evolution du conditionnement en norme 2 de la matrice $\mathbf{A}_1$ en fonction de la durée de mesure. . . . .	182
6.31	Evolution du conditionnement en norme 2 de la matrice $\mathbf{A}_2$ en fonction de la durée de mesure. . . . .	183
7.1	Situation du pavillon (crown panel) dans un fuselage d'avion. Image extraite de [Morteau-Rivet 2018]. . . . .	186
7.2	Cadres et lisses d'un panneau latéral d'A350. . . . .	186
7.3	Description du dispositif expérimental. . . . .	187
7.4	Visualisation numérique du dispositif expérimental avec Scilab. . . . .	187
7.5	Modes de vibration retenus à l'issue de l'AME. . . . .	190
7.6	Modes de vibration rejetés à l'issue de l'AME. . . . .	190
7.7	Carte de robustesse angulaire associée à $\mathcal{F}_1 = (\phi_3, \phi_5, \phi_6)$ et $\epsilon = 40.8\text{cm}$ ( $\min \theta_\epsilon = 0^\circ$ , $\max \theta_\epsilon = 22^\circ$ ). . . . .	191
7.8	Carte de robustesse angulaire associée à $\mathcal{F}_2 = (\phi_3, \phi_5, \phi_6, \phi_8)$ et $\epsilon = 40.8\text{cm}$ ( $\min \theta_\epsilon = 1^\circ$ , $\max \theta_\epsilon = 31^\circ$ ). . . . .	192
7.9	Emplacement des huit accéléromètres sur la structure. . . . .	193
7.10	Carte de localisations avec $C_2$ et $\mathcal{F}_5$ . . . . .	199
7.11	Corrélation négative entre $\nu$ et le succès de localisation à $\epsilon$ près ( $r = -0.24$ ). . . . .	199
7.12	Corrélation positive entre $m$ et le succès de localisation à $\epsilon$ près ( $r = +0.58$ ). . . . .	199

TABLE DES FIGURES

---

7.13	Phénomène de glissement vers une allure de Dirac pour la reconstruction de l'impact appliqué en $F = (4.39\text{m } 0.57\text{m})$ . Croix noire : pic d'une solution admissible. Représentation de trois solutions admissibles avec $T_3 \leq T_2 \leq T_1$ .	201
7.14	Problème de définition d'une performance de localisation à partir d'un ensemble de points : $P(A) \geq P(B)$ ou $P(A) \leq P(B)$ ?	202
7.15	Définition du diamètre $d$ et de l'excentricité $e$ d'un ensemble de points $A$ , et représentation d'un point intérieur $I$ dans le diamètre de $A$ .	204
7.16	Division d'une structure en cellules.	204
7.17	Illustration du problème d'indécidabilité.	206
7.18	Carte de localisations avec le réseau $(C_2, C_4, C_8)$ , la famille de modes $\mathcal{F}_2$ , et la stratégie de dialogue $s_d$ .	207
7.19	Carte de localisations avec le réseau complet, la famille de modes $\mathcal{F}_5$ , et la stratégie de dialogue $s_d$ .	208
A.1	Action d'un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur le disque unité. Image de [Johann 2010].	227
A.2	Illustration de la projection orthogonale de $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n$ .	229
B.1	Déformées modales des différentes configurations de poutres (d'après [Pascal 2008]).	232
B.2	Poutre encastree-libre.	233
B.3	Poutre encastree-supportee.	233
B.4	Poutre encastree-glissante.	234
B.5	Poutre encastree-encastree.	234
B.6	Modèle éléments finis de la plaque utilisé pour calculer les déformées modales dans les différentes configurations.	236
B.7	Configuration E1. Déformées des modes $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .	237

TABLE DES FIGURES

---

B.8 Configuration E1. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $24^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1.5a_e b)$  /  $N_2 = (6.5a_e b)$  /  $N_3 = (2a_e 5b_e)$  /  $N_4 = (6a_e 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = 65\%$  /  $m(N_3) = m(N_4) = 34\%$ . . . . . 237

B.9 Configuration E1S3. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$ . . . . . 238

B.10 Configuration E1S3. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $24^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1.5a_e 6b_e)$  /  $N_2 = (6.5a_e 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = 48\%$ . . . . . 238

B.11 Configuration E1E3. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$ . . . . . 239

B.12 Configuration E1E3. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $25^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e 3b_e)$  /  $N_2 = (6a_e 3b_e)$  /  $N_3 = (2a_e 5b_e)$  /  $N_4 = (6a_e 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 44\%$ . . . . . 239

B.13 Configuration S. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . . . . . 240

B.14 Configuration S. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $37^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (3a_e 3b_e)$  /  $N_2 = (5a_e 3b_e)$  /  $N_3 = (3a_e 5b_e)$  /  $N_4 = (5a_e 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 65\%$ . . . . . 240

B.15 Configuration CS. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . . . . . 241

B.16 Configuration CS. FMD partielle :  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  (valeur max :  $25^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e 2b_e)$  /  $N_2 = (6a_e 2b_e)$  /  $N_3 = (2a_e 6b_e)$  /  $N_4 = (6a_e 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 38\%$ . . . . . 241

B.17 Configuration TA. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_5, \phi_6)$ . . . . . 242

B.18 Configuration TA. FMD partielle :  $(\phi_1, \phi_5, \phi_6)$  (valeur max :  $16^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1a_e 6b_e)$  /  $N_2 = (3.5a_e 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = 30\%$  /  $m(N_2) = 16\%$ . . . . . 242

# Acronymes

**GSE** Ground Support Equipment

**LTI** Linéaire Temporellement Invariant

**ddl** degré de liberté

**TOA** Time Of Arrival

**SVD** Singular Value Decomposition

**VPM(A)** Vecteur de Participation Modale (Amplifié)

**FMD** Famille de Modes Discriminants

**FFT** Fast Fourier Transform

**FRF** Frequency Response Function

**AME** Analyse Modale Expérimentale

## ACRONYMES

---

# Notations

$\mathbf{x}, \mathbf{X}$  Vecteur ou matrice

$\mathbf{I}_n$  Matrice identité de taille  $n$

$\mathbf{diag}(\mathbf{x})$  Matrice carrée de diagonale le vecteur  $\mathbf{x}$

$\text{Im}(\cdot)$  Espace image d'une matrice

$\text{Ker}(\cdot)$  Noyau d'une matrice

$\|\cdot\|$  Norme vectorielle ou matricielle

$(\cdot)^T$  Transposée

$(\cdot)^\dagger$  Pseudo-inverse d'une matrice relativement à une norme  $\|\cdot\|$

$\kappa(\cdot)$  Conditionnement d'une matrice inversible relativement à une norme  $\|\cdot\|$

$s : t \mapsto s(t)$  Signal temporel

$\dot{s}, \ddot{s}$  Dérivées première et seconde du signal temporel  $s$

$\mathbf{S}$  Signal temporel  $s$  discrétisé

$\eta_i$  Amortissement modal

$\omega_{0i}$  Pulsation propre

$\omega_i = \omega_{0i} \sqrt{1 - \eta_i^2}$  Pseudo-pulsation

$\phi_i : M \mapsto \phi_i(M)$  Déformée modale

$\delta$  Distribution de Dirac

$g_i : t \mapsto g_i(t) = \frac{1}{\omega_{0i}} e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t)$  Réponse impulsionnelle modale ou réponse à une distribution de Dirac

$f$  Intensité d'un impact

## NOTATIONS

---

$\psi : t \mapsto \psi(t)$  Forme d'une force d'impact

$f.\psi$  Evolution temporelle d'une force d'impact d'intensité  $f$  et de forme  $\psi$

$F$  Point de la structure ou degré de liberté subissant l'impact

$N$  Nombre de degrés de liberté

$p$  Ordre de troncature modale

$\Phi$  Matrice modale tronquée de taille  $N \times p$

$\phi_i$  Déformée modale discrétisée ou  $i$ -ème colonne de  $\Phi$  (vecteur de taille  $N$ )

$\phi_i^*$  Vecteur de participations modales ou  $i$ -ème colonne de  $\Phi^T$  (vecteur de taille  $p$ )

# Introduction

## Contexte

La détection d'un impact appliqué sur une structure et l'évaluation des dommages associés sont deux préoccupations majeures du « Structural Health Monitoring ». De nombreuses structures évoluent en effet dans un environnement à haut risque de collision. Détecter certains impacts permettrait alors de surveiller la structure et d'initier, si nécessaire, une inspection ciblée. C'est notamment le cas lors des opérations aéroportuaires qui mettent en jeu plusieurs véhicules se déplaçant autour de l'avion (voir Figure 1). Divers équipements - tels que camions de frêt, convoyeurs à bande ou passerelle passagers - opèrent autour du fuselage et viennent au contact de celui-ci. Les procédures d'approche sont strictes mais il arrive que certains impacts imprévus se produisent. Un opérateur doit alors reporter l'évènement et le décrire avec précision dans un formulaire à l'attention de la compagnie aérienne. Si les endommagements sont facilement identifiables sur les fuselages métalliques (érafflures, bosses et trous), certains endommagements sont invisibles à l'oeil nu sur les fuselages composites comme celui de l'A350. En effet, des impacts d'une certaine énergie peuvent créer des endommagements internes (délamination, décollage de clip etc.), alors que la peau extérieure du fuselage retourne élastiquement à sa position initiale. Ces « impacts fantômes » sont bien connus et les fuselages composites sont dimensionnés en conséquence pour y résister. De plus, des inspections régulières des fuselages composites sont effectuées à l'aide de techniques non destructives de détection d'endommagement. Ces inspections sont cependant onéreuses et immobilisent l'avion pendant plusieurs heures. Il est donc pertinent de disposer d'un système de détection d'impacts et d'évaluation de sa sévérité qui permettrait d'optimiser ces procédures de maintenance et de réduire les temps d'immobilisation de l'avion.



FIGURE 1 – Coactivité entre un avion au sol et les équipements aéroportuaires.

## Analyse critique de l'état de l'art

L'identification d'un impact consiste d'une part à localiser le point d'application de l'impact (problème de localisation) et d'autre part à reconstruire l'évolution temporelle de l'excitation (problème de reconstruction). Le point d'impact est en général inconnu et la structure ne peut donc pas être directement équipée de capteurs d'effort aux endroits appropriés. Il faut donc identifier l'impact à partir de mesures indirectes en utilisant la réponse vibratoire de la structure consécutive à l'impact. C'est en fait un double problème inverse puisqu'il faut identifier deux objets de natures différentes : le point d'impact qui est un lieu, et l'évolution temporelle de la force d'impact qui est une grandeur temporelle. D'une certaine façon, c'est la structure même que l'on souhaite transformer en capteur d'effort en mesurant ses vibrations en certains points. De nombreuses approches ont été développées depuis les années 1980 pour résoudre ce problème dans des contextes variés, et pas seulement dans le domaine de l'Aéronautique.

[Briggs and Tse 1991] développent une technique de localisation d'un impact et d'estimation de son intensité dans le domaine fréquentiel. Ils font l'hypothèse que le spectre d'une force d'impact est plat dans une région basse fréquence. Ils proposent dans un premier temps de constituer expérimentalement un jeu de données indiquant les participations modales associées à différents impacts appliqués avec un mécanisme de chute de bille. Lorsqu'un impact a lieu, ils estiment les participations modales à partir des mesures vibratoires

et les comparent avec leur jeu de référence pour identifier simultanément l'intensité du choc et le point d'impact. Ils valident leur technique sur un montage représentant un tiroir de disque qu'ils équipent d'un accéléromètre. Les intensités sont correctement estimées mais le point d'impact n'est pas toujours déterminé de façon unique. De plus, le choix des modes à retenir dans l'analyse n'est pas discuté et les impacts sont uniquement appliqués en des points précis du tiroir le long d'une ligne.

[Wang and Chiu 2003] ont aussi développé une technique d'identification d'impact fondée sur les participations modales mais dans le domaine temporel. Leur technique permet de simultanément localiser un impact et estimer son intensité à partir d'une analyse modale de la structure. L'analogie du jeu de données de référence utilisé dans la méthode de Briggs est ici la matrice modale de la structure tronquée sur un nombre réduit de modes de vibration. Ils valident leur méthode sur une poutre métallique simplement supportée sur ses extrémités en utilisant les mesures d'un seul accéléromètre. Ils obtiennent globalement de bons résultats pour la localisation des impacts appliqués. Cependant, ils constatent que leur méthode est très sensible au point de mesure sans donner de règle précise sur le positionnement du capteur. De plus, leur technique n'est valable que pour des impacts de durée suffisamment faible pour que la réponse vibratoire de la structure puisse être approchée par sa réponse impulsionnelle.

[Leclère et al. 2004] utilisent la Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) pour reconstruire des charges dynamiques appliquées sur le pivot d'un piston dans un moteur diesel. Les auteurs étudient l'influence de l'ordre de troncature sur la qualité de reconstruction de l'évolution temporelle de l'excitation. Il observent qu'un ordre de troncature trop élevé conduit à une solution instable de norme élevée, tandis qu'un ordre de troncature trop petit conduit à une solution stable mais ne représentant pas correctement l'excitation appliquée. Cependant, le point d'impact est connu dans leur étude et ils ne s'intéressent qu'au problème de reconstruction.

[Boukria et al. 2009] identifient expérimentalement des forces d'impact appliquées sur une plaque circulaire en aluminium encastrée sur son pourtour et équipée de quatre jauges de déformation. Ils utilisent la régularisation de Tikhonov associée à la méthode de la courbe en L pour reconstruire l'évolution temporelle de la force d'impact. Pour localiser l'impact,

ils définissent une grille de points d'impact possibles et reconstruisent la force associée pour chaque point. Le point permettant de minimiser un critère de reconstruction des mesures vibratoires est retenu comme étant le point d'impact. Cette approche par balayage et la méthode de la courbe en L, bien qu'elle soit applicable dans de nombreuses situations, nécessitent un temps de calcul prohibitif pour des structures de grandes dimensions.

[Frieden et al. 2012] ont développé une méthode de localisation qui consiste à utiliser les retards d'arrivée (Time of Arrival - TOA) des ondes de Lamb  $A_0$  à différents capteurs. Une technique de triangulation basée sur un modèle de vitesse de propagation de ces ondes est utilisée pour localiser l'impact. Ils valident expérimentalement leur méthode sur une plaque composite raidie de dimensions  $40\text{cm} \times 50\text{cm}$  équipée de quatre capteurs FBG avec une fréquence d'échantillonnage de 1GHz. Ils calibrent un modèle de vitesse de propagation en effectuant une campagne d'impacts assistée par un réseau dense de capteurs PZT ayant une fréquence d'échantillonnage de 1MHz. Leur travail a permis de développer une méthode générale de localisation d'impact sur une structure composite. Toutefois, leur technique nécessite une phase de calibration qui consiste à répéter des impacts sur la structure avec un réseau dense de capteurs, ce qui n'est pas envisageable pour certaines applications.

[Zhao et al. 2017] détectent le passages des ondes de Lamb  $A_0$  dans une plaque composite carrée encastrée sur ses coins équipée de quatre jauges de déformation avec une fréquence d'échantillonnage de 1MHz. Ils utilisent une technique de transformée en ondelettes pour identifier les TOA. Le problème de triangulation est formulé par un système d'équations non-linéaires dépendant des angles de propagation. Ils proposent de le résoudre numériquement à l'aide d'un algorithme mixant une approche par essaim de particules (Particle Swarm Optimization - PSO) et une approche génétique (Genetic Algorithm - GA). Leur technique nécessite d'utiliser un réseau dense de capteurs lorsque la structure est complexe, ce qui augmente considérablement les temps de calcul pour résoudre le système d'équations non-linéaires.

## Positionnement du sujet

Les études précédentes montrent qu'il existe de nombreuses techniques pour localiser un impact appliqué sur une structure et reconstruire son évolution temporelle. Toutefois, les techniques de reconstruction applicables aux structures complexes sont trop coûteuses en temps de calcul pour envisager une application en temps réel. Par ailleurs, il semble clair que le problème de localisation est plus délicat à aborder que le problème de reconstruction qui se formalise par un problème de déconvolution bien connu dans le domaine du Traitement de l'Image. Ou bien les techniques de triangulation des TOA s'appliquent soit parce qu'on dispose d'un modèle de propagation d'ondes élastique, soit parce qu'on peut se permettre d'entraîner un réseau dense de capteurs ; ou bien il faut se résoudre à parcourir une grille de points d'impact possibles et retenir en fin de parcours le candidat jugé le plus satisfaisant suivant un critère. A cela s'ajoute que le problème de positionnement optimal des capteurs, pour la localisation ou la reconstruction, est rarement abordé. En effet, il n'existe pas de règles générales de positionnement favorisant la précision et/ou la robustesse de la procédure.

C'est dans ce contexte que cette étude a été menée. Ce travail consiste à développer une méthode d'identification d'impact applicable à une structure composite de grandes dimensions qui soit à la fois robuste, peu coûteuse en temps de calcul, et qui limite le nombre de capteurs. L'application finale qui est visée est l'identification en temps réel d'un impact d'équipement aéroportuaire appliqué sur un fuselage composite d'avion au sol, avec un nombre acceptable de capteurs pour une réalisation industrielle.

L'approche développée est en rupture par rapport à l'état de l'art, en ce sens qu'elle ne nécessite, en théorie, qu'un seul point de mesures vibratoires pour identifier l'impact. Il s'agit d'une technique basée sur l'identification de participations modales pour laquelle on peut précisément déterminer les modes de vibration qu'il faut retenir dans l'analyse. Cela permet de significativement réduire la dimension du problème et de déterminer un cadre de validité de l'approche développée.

## Hypothèses de travail

Le problème inverse d'identification d'un impact est un problème difficile qui fait toujours l'objet de nombreuses recherches. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de consensus pour le résoudre dans un cadre général. Cela dit, on a cherché dans ce travail à utiliser le moins d'hypothèses possibles et qui seront satisfaites pour l'application finale visée. Les quatre hypothèses de départ qui ont été adoptées sont les suivantes :

**H1** La structure est initialement au repos

**H2** La structure n'admet pas de modes de vibration rigides

**H3** Des modes de vibration de la structure sont connus

**H4** La structure admet un comportement modal en basse fréquence

Trois hypothèses supplémentaires ont été introduites au fil des travaux pour garantir la validité de la méthode développée :

**H5** On peut former une famille de modes discriminants à partir des modes connus (Chapitre 3)

**H6** Les modes discriminants sont faiblement amortis et bien séparés (Chapitre 4)

**H7** L'évolution temporelle de la force d'impact peut se représenter par une loi paramétrée (Chapitre 5)

Comme dans la majorité des travaux existants, on supposera implicitement que l'orientation de l'impact est connue, par exemple normale à la surface de la structure. Toutes ces hypothèses seront discutées pour les structures étudiées expérimentalement. Une campagne d'essais expérimentaux interne Airbus suggère que ces hypothèses sont valables dans le cas d'un fuselage composite impacté par un équipement aéroportuaire.

## Organisation du document

Le Chapitre 1 présente les techniques majoritairement utilisées pour résoudre les problèmes inverses de localisation et de reconstruction. Les Chapitres 1 à 5 présentent la démarche théorique suivie pour le développement d'une nouvelle méthode d'identification d'impact. Les Chapitres 6 et 7 présentent la démarche expérimentale de validation de la méthode sur une plaque métallique rectangulaire et sur un pavillon d'A350. Les notions suivantes sont nouvelles - à la connaissance de l'auteur - et définies au fil des différents chapitres :

- Vecteur de Participation Modale Amplifié (VPMA) dans le Chapitre 2,
- Famille de Modes Discriminants (FMD) et carte de robustesse angulaire dans le Chapitre 3,
- Presque orthogonalité d'une famille de réponses impulsionnelles modales dans le Chapitre 4,
- Points neutres de vibration maximale d'une structure dans le Chapitre 5.

## Démarche

La démarche a consisté dans un premier temps à savoir s'il est possible de localiser un impact appliqué sur une structure à  $N$  degrés de liberté et de reconstruire son évolution temporelle à partir de la réponse libre (Chapitre 2). L'idée d'étudier la réponse libre est que la mesure de son contenu vibratoire requiert des capteurs à plus basse fréquence d'échantillonnage que ceux utilisés pour les techniques utilisant la propagation des ondes élastiques. L'objectif a été d'établir un modèle de réponse linéaire par rapport au vecteur de participation modale amplifié (VPMA). L'intérêt est que le VPMA est l'image de l'intensité de l'impact et de son point d'application dans la réponse vibratoire. Pour cela, on a utilisé la technique de superposition modale afin de séparer les termes dépendant du point d'impact et ceux dépendant de son évolution temporelle et du point de mesure. L'idée a ensuite été de développer une méthode de localisation d'un impact et d'estimation de son intensité à partir du VPMA. Pour cela, on a montré qu'une simple procédure de discrimination basée sur des calculs d'angles permet de localiser le point d'impact et d'estimer son intensité à

partir du VPMA. Cependant, cette étude nous a conduits à renoncer à la reconstruction de l'évolution temporelle exacte de la force d'impact à partir de la réponse libre. Cela implique de se restreindre à l'estimation de certains paramètres de l'impact décrivant sa forme tels que sa durée, sa dissymétrie etc.

L'étape suivante a consisté à développer une méthode de localisation d'un impact et d'estimation de son intensité à partir du VPMA tronqué sur un nombre réduit de modes de vibration (Chapitre 3). Sachant qu'il est impossible d'identifier les  $N$  coefficients du modèle de réponse, on a cherché à réduire la dimension du modèle tout en conservant le lien bijectif entre le VPMA, le point d'impact et son intensité. L'idée a été d'introduire une hypothèse supplémentaire d'existence d'une famille de modes discriminants (FMD). On a donné un lien entre la dimension géométrique d'une structure et le nombre minimum de modes à considérer pour former une FMD. Par suite, on a adapté la procédure de discrimination en introduisant des paramètres de tolérance afin de tenir compte d'une erreur d'estimation sur le VPMA tronqué. L'objectif a alors été d'étudier la robustesse théorique de cette méthode afin de déterminer le domaine d'erreur admissible permettant de résoudre le problème d'identification dans des tolérances données. Pour cela, on a déterminé les noyaux du problème de localisation à  $\epsilon$ -près et du problème d'estimation de l'intensité de l'impact à  $r\%$ -près. La méthode développée suppose cependant d'avoir une estimation du VPMA tronqué. Dans le cas où l'impact appliqué est un Dirac, le problème d'identification se réduit précisément à l'estimation du VPMA tronqué.

L'objectif du Chapitre 4 a été de rechercher des conditions pour estimer de façon robuste et précise le VPMA tronqué à l'aide de mesures vibratoires d'un unique capteur dans le cas où l'impact appliqué est un Dirac. Pour cela, on a formulé mathématiquement le problème d'identification du Dirac sous la forme d'un problème des moindres carrés linéaire utilisant les mesures d'un seul capteur. L'objectif a été de savoir comment minimiser le conditionnement de la matrice à inverser afin d'augmenter la robustesse de la procédure. L'idée a été de rechercher une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution portant sur le positionnement du capteur, les paramètres de mesures et sur les propriétés modales de la structure. Pour cela, on a cherché les conditions permettant à la matrice associée à la méthode des moindres carrés de prendre une forme à diagonale strictement

dominante, et de pouvoir ainsi estimer aisément son conditionnement. Cette étude nous a permis d'étudier l'influence du placement du capteur sur la variation du conditionnement et de mettre en évidence des points de mesure optimaux.

Toutefois, les impacts ne peuvent pas tous être assimilés à un Dirac et il a été nécessaire d'étendre la procédure à l'estimation d'une loi paramétrée de force d'impact (Chapitre 5). Pour cela, on a sélectionné des lois paramétriques d'évolution temporelle de force d'impact permettant de représenter des impacts réels. Cela nous a permis de formuler l'identification d'impact sous la forme d'un problème des moindres carrés semi-linéaire. L'idée a ensuite été de développer une procédure d'optimisation globale pour résoudre ce problème tout en exploitant la linéarité du modèle par rapport au VPMA tronqué. Pour cela, on a proposé de discrétiser l'espace des paramètres de la forme d'impact et de résoudre un problème des moindres carrés linéaire en chacun des points. L'objectif a ensuite été d'étendre les conditions de robustesse dans le cas d'un Dirac à un impact pouvant se décrire par une loi paramétrée. Pour cela, on a utilisé le modèle de réponse libre afin de calculer le conditionnement du problème et d'étudier ses variations par rapport au point de mesure et aux propriétés modales de la FMD. En particulier, on a exhibé des points de mesure avantageux favorisant la robustesse de la procédure. A ce stade de l'étude, on pouvait conclure que l'utilisation d'un unique accéléromètre était suffisante pour identifier un impact sur une plaque, tandis que la majorité des techniques existantes en requiert au moins trois. Cette originalité nous a conduits à mettre en place des expériences sur une plaque métallique homogène afin de confronter les prévisions théoriques avec les résultats expérimentaux.

Le Chapitre 6 a consisté à utiliser la méthode développée pour identifier expérimentalement des impacts sur une plaque métallique homogène en utilisant un seul accéléromètre. Pour cela, on a identifié une FMD minimale et globale de la structure, ainsi que les points neutres associés pour placer le capteur. L'objectif a été d'identifier, dans des tolérances données, des impacts appliqués en tout point de la plaque, avec divers embouts d'un marteau de choc. On a étudié l'influence du positionnement du capteur et du choix de la FMD sur la précision de localisation. On a également étudié l'influence de la loi paramétrée choisie sur la qualité de reconstruction de la force d'impact. On a bien vérifié qu'il n'est pas

nécessaire que la FMD soit dominante dans la réponse vibratoire, mais seulement que les contributions des modes discriminants soient bien capturées. Pour cela, on s'est intéressé à l'identification d'impacts brefs excitant majoritairement des modes d'ordre élevé alors que la FMD est associée à des modes basse fréquence.

Cependant, l'application finale visée étant la détection d'un impact d'équipement aéroportuaire sur un fuselage composite d'avion au sol, l'étude de la plaque n'était suffisante. L'étape finale a consisté à valider expérimentalement la méthode sur une structure composite de grandes dimensions (Chapitre 7). Pour cela, on a étudié un morceau du pavillon d'un A350 qui consiste en un panneau composite courbe, raidi longitudinalement par des lisses et transversalement par des cadres, de dimensions  $9.24\text{m} \times 2.40\text{m}$ . On a positionné huit accéléromètres et appliqué des impacts sur toute la structure. L'objectif a été de montrer qu'un seul accéléromètre permettait de localiser la majorité des impacts appliqués. Par suite, l'utilisation d'un réseau de capteurs a été envisagée pour améliorer la robustesse de la procédure. L'idée a été de proposer des stratégies raisonnables pour faire dialoguer un ensemble de capteurs pouvant donner des résultats différents. On a vérifié que l'utilisation d'au moins trois accéléromètres permettait d'améliorer la robustesse de la procédure.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

Résumé : Le problème inverse de reconstruction est d'abord étudié car il se ramène à un problème de déconvolution lorsqu'on suppose que la structure admet un comportement linéaire élastique avec des propriétés mécaniques invariantes dans le temps. Pour le résoudre, on présente les techniques de TSVD, la régularisation de Tikhonov, le filtrage de Wiener et la régularisation par contrôle de dimension. Le problème inverse non linéaire de localisation de l'impact est ensuite abordé après avoir décrit les différentes régions dans une réponse vibratoire consécutive à un impact. Pour le résoudre, les techniques de triangulation, de balayage et d'identification des participations modales sont présentées. Le choix est fait d'étudier plus en détail les techniques de localisation à partir des participations modales puisque les travaux de recherches ont été conduits dans cette direction.

Des rappels mathématiques sont faits en Annexe A pour présenter différentes notions largement utilisées pour la résolution d'un problème inverse linéaire : conditionnement d'une matrice inversible, décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire (SVD), et résolution d'un système linéaire par la méthode des moindres carrés.

## 1.1 Généralités sur les problèmes inverses

La recherche de causalité est une idée très féconde en Sciences pour décrire des phénomènes variés. L'idée consiste, dans un premier temps, à identifier les causes qui produisent les effets observables d'un phénomène. Par exemple, pour décrire le mouvement d'une structure on va rechercher les forces qui lui sont appliquées. Dans un second temps, on va relier les effets observés (e.g. le mouvement) aux causes identifiées (e.g. les forces) par un opérateur mathématique. Cette recherche de causalité se traduit très fréquemment par une modélisation prenant la forme suivante :

$$y = \mathcal{O}(x) \tag{1.1}$$

où  $y$  désigne les effets,  $x$  les causes, et  $\mathcal{O}$  l'opérateur reliant les causes aux effets. La relation 1.1 est couramment appelée « problème direct », en ce sens qu'elle permet de directement prévoir les effets lorsqu'on connaît les causes. Le problème direct est qualifié de linéaire lorsque l'opérateur mathématique  $\mathcal{O}$  est linéaire par rapport aux causes, et non-linéaire sinon.

Dans de nombreuses situations, on s'intéresse davantage à identifier les causes qui ont produit des effets observés. On parle alors de problème inverse, lequel pouvant être linéaire ou non suivant la nature de l'opérateur direct. Un problème célèbre a été formulé en 1966 par le physicien Mark Kak :

« Peut-on entendre la forme d'un tambour ? »

L'expérience montre en effet qu'il y a une causalité entre la forme du tambour et le son émis lorsqu'il est percuté. Cependant, cette question formulée très simplement est en fait un problème inverse de géométrie spectrale qui n'a eu de réponse générale définitive - et négative - que depuis [C. Gordon 1992].

Les problèmes inverses, linéaires ou non, sont en général qualifiés de mal posés. Ils peuvent *i)* ne pas avoir de solution, *ii)* avoir plusieurs solutions, *iii)* être sensibles aux erreurs à la fois de mesures et de modélisation du problème direct. Les situations dans lesquelles ces problèmes se présentent sont très fréquentes, par exemple dès qu'on doit résoudre un système matriciel  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ , où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  désignent respectivement les causes et les effets, et  $\mathbf{A}$  est l'opérateur direct qui lie de façon linéaire les causes aux effets. On est dans la situation *i)* si  $y \notin \text{Im}(\mathbf{A})$ , dans *ii)* si  $y \in \text{Im}(\mathbf{A})$  et  $\text{Ker}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$ , et enfin dans *iii)* si  $y \in \text{Im}(\mathbf{A})$  et  $\mathbf{A}$  est mal conditionnée.

Les problèmes inverses ne sont donc pas, même dans le cas linéaire, résolus par simple inversion de l'opérateur direct (qui n'admet d'ailleurs pas toujours d'inverse). Il faut développer des méthodes dites de régularisation qui vont modifier le problème direct pour rendre possible l'inversion et la stabiliser, i.e réduire l'amplification des erreurs, et conduire à une ou éventuellement plusieurs solutions proches de la solution recherchée. Ces techniques introduisent des paramètres supplémentaires qui peuvent avoir une signification physique, par exemple supposer qu'un phénomène suit une loi connue, ou seulement numérique, comme par exemple l'ajout d'un facteur d'amortissement dans un algorithme.

## 1.2 Problème inverse de reconstruction de l'évolution temporelle d'une force d'impact

D'après [Inoue et al. 2001] le problème de reconstruction est linéaire en supposant que le comportement de la structure est linéaire élastique et que ses propriétés mécaniques sont invariantes dans le temps. En effet, dans ces hypothèses la structure agit comme un système linéaire temporellement invariant (LTI) pour lequel le théorème de superposition s'applique. Ainsi, la réponse  $q : t \mapsto q(t)$  de la structure en un point, consécutive à une excitation ponctuelle  $f : t \mapsto f(t)$ , est donnée par le produit de convolution :

$$q(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (1.2)$$

où  $g : t \mapsto g(t)$  désigne la réponse de la structure au même point pour une impulsion de Dirac appliquée au même point d'excitation. Pour s'en convaincre, la réponse à l'instant

$t$  donnée par (1.2) peut se voir comme une somme infinie de réponses impulsionnelles évaluées à l'instant  $t$ , d'amplitude  $f(\tau)$  et retardées de  $\tau$ , avec  $\tau$  prenant toutes les valeurs dans l'intervalle  $[0, t]$ . Les réponses impulsionnelles caractérisent donc complètement le comportement de la structure pour une excitation quelconque.

En pratique, c'est un capteur qui enregistre  $n + 1$  valeurs de la réponse  $q$  avec une période d'échantillonnage  $\Delta t$ . On a donc accès au vecteur de réponse  $\mathbf{Q} = (q(0) \ q(\Delta t) \ \dots \ q(n\Delta t))^T$ . Le produit de convolution (1.2) peut alors être approché par une sommation de Riemann. A l'instant  $t_k$  la réponse vérifie donc la relation suivante :

$$q(t_k) \approx \Delta t \sum_{i=1}^k g(t_i) f(t_k - t_i) \quad (1.3)$$

où  $t_i = i\Delta t$  désigne un instant de mesure. Bien sûr, la période d'échantillonnage du capteur doit être choisie suffisamment petite pour que l'approximation (1.3) soit convenable. En particulier,  $\Delta t$  doit au moins permettre de capturer les principales variations de l'excitation appliquée. Finalement, l'équation (1.2) discrétisée en temps se réduit au système matriciel linéaire :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}\mathbf{F} \quad (1.4)$$

avec  $\mathbf{F} = (f(0) \ \dots \ f(t_{n-1}))^T$  et  $\mathbf{G}$  la matrice carrée triangulaire inférieure de taille  $n$  dont la ligne  $k$  est donnée par  $\mathbf{L}_k = \Delta t(g(t_k) \ \dots \ g(t_1) \ 0 \ \dots \ 0)$ .

Le problème de reconstruction de la force d'impact  $\mathbf{F}$  semble donc se résumer à l'identification de  $\mathbf{F}$  en inversant la matrice  $\mathbf{G}$ , appelée matrice de transfert. L'identification de la matrice de transfert  $\mathbf{G}$  est toujours un sujet de recherches mais plusieurs techniques numériques ou expérimentales existent. Une analyse modale théorique est utilisée dans [Li and Lu 2016] pour déterminer les matrices de transfert d'une poutre encastree-libre et d'une plaque simplement supportée sur ses bords. La matrice de transfert d'un élément structural de pont est déterminée expérimentalement dans [Khalori et al. 2016]. Des impacts sont appliqués sur une grille de points de référence et les mesures de force et de réponse vibratoire sont utilisées pour identifier les réponses impulsionnelles pour chaque couple point d'impact/point de mesure. La même technique est employée avec un modèle éléments finis dans [Vladislav et al. 2012] pour obtenir les fonctions de transfert d'un panneau courbe troué. Une technique d'interpolation est utilisée pour raffiner la grille de

points de référence correspondant au maillage du modèle.

Par construction,  $\mathbf{G}$  est triangulaire inférieure donc son déterminant est égal à  $\det(\mathbf{G}) = (g(\Delta t))^n$ . Si la période d'échantillonnage est suffisamment petite, alors  $g(\Delta t) \neq 0$  et  $\mathbf{G}$  est inversible. Cependant,  $\mathbf{G}$  présente l'inconvénient d'être généralement mal conditionnée. D'après les relations (A.2) et (A.3), une petite erreur de mesure  $\Delta \mathbf{Q}$  ou de modélisation  $\Delta \mathbf{G}$  peut donc conduire à une solution  $\hat{\mathbf{F}}$  très éloignée de  $\mathbf{F}$ . On dit que le problème de déconvolution est mal posé. L'origine de ce mauvais conditionnement est lié aux propriétés des équations de Fredholm de première espèce, dont le problème de déconvolution (1.2) est un cas particulier. On montre par exemple dans [Andrieux 2016] que des petites perturbations haute fréquence des mesures  $q$  ou de la fonction de transfert  $g$  conduisent à de grandes perturbations sur  $f$ . Il faut alors régulariser le problème de déconvolution en introduisant des hypothèses supplémentaires sur la force d'impact. Plusieurs techniques de régularisation existent, dans le domaine temporel ou fréquentiel.

### 1.2.1 Troncature de la décomposition en valeurs singulières - TSVD

La technique la plus simple pour régulariser le problème de déconvolution est la troncature de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert  $\mathbf{G}$  (Truncated Singular Value Decomposition - TSVD). On note  $\mathbf{Q}$  des mesures parfaites et  $\mathbf{E}$  une perturbation quelconque de sorte que  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q} + \mathbf{E}$  désigne des mesures perturbées. En utilisant la SVD de la matrice  $\mathbf{G}$ , la solution « naïve » de (1.4) par inversion directe est donnée par :

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}_m \mathbf{V}_i}{\sigma_i} \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$  désignent respectivement les colonnes  $i$  des matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , et où  $\sigma_i$  est la  $i$ -ème valeur singulière<sup>1</sup> de  $\mathbf{G}$ . Une étude est menée dans [Hansen 2002] sur l'influence d'une perturbation  $\mathbf{E}$  des mesures sur  $\|\mathbf{F}\|$ . L'auteur s'intéresse dans un premier temps à l'évolution des quantités  $\sigma_i$ ,  $|\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}|$  et  $|\frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}}{\sigma_i}|$ , évaluées numériquement, suivant l'indice  $i$ . Les quantités  $|\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}|$  décroissent plus vite que les  $\sigma_i$  jusqu'à un certain indice, puis atteignent un plateau correspondant au zéro machine  $\epsilon$ . Passé cet indice, les valeurs singulières  $\sigma_i$  supérieures au zéro machine amplifient  $\epsilon$ . L'auteur conclut que la seule influence

---

1. On rappelle que  $\mathbf{G}$  est inversible par hypothèse, donc  $\sigma_i > 0$  pour tout  $i$ .

des arrondis numériques conduit à une solution (1.5) instable<sup>2</sup> de norme élevée. Par suite, l'auteur considère un bruit  $\mathbf{E}$  modélisé par une distribution normale de moyenne nulle et de variance quelconque. Son étude montre que la zone de décroissance rapide des termes  $|\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}_m|$  se rétrécit à mesure que le niveau de bruit augmente. En conséquence, le nombre de composantes perdues est d'autant plus important que le niveau de bruit augmente.

L'idée de la TSVD est de tronquer la série (1.5) avant la perte d'informations liée aux arrondis numériques et au bruit :

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}_m}{\sigma_i} \mathbf{V}_i \quad (1.6)$$

C'est donc l'ordre de troncature  $k$  qui joue le rôle de paramètre de régularisation dans la TSVD. Compte tenu de la discussion faite dans le paragraphe précédent, une approche pour choisir l'ordre de troncature est par exemple de détecter le plateau des quantités  $|\mathbf{U}_i^T \mathbf{Q}_m|$ . D'autres techniques de troncature ne nécessitant pas de contrôler ces quantités sont présentées dans [Hansen 1998]. Notons que la seule inspection des valeurs singulières ne permet pas de choisir l'ordre de troncature pour le problème de déconvolution. En effet, [Hansen 2002] montre que les  $\sigma_i$  décroissent progressivement vers le zéro numérique, sans saut particulier qui indiquerait un ordre de troncature privilégié.

La TSVD est utilisée dans [Leclère et al. 2004] pour reconstruire des charges dynamiques appliquées sur le pivot d'un piston dans un moteur diesel. Les auteurs étudient l'influence de l'ordre de troncature sur la qualité de reconstruction de l'évolution temporelle de l'excitation. Il observent qu'un ordre de troncature trop élevé conduit à une solution instable de norme élevée, tandis qu'un ordre de troncature trop petit conduit à une solution stable mais ne représentant pas correctement l'excitation appliquée. [Chen and Chan 2017] utilisent plusieurs variantes de la TSVD pour reconstruire des forces suiveuses appliquées sur un tablier de pont. Ils proposent différentes techniques de choix des paramètres de régularisation qu'ils appliquent à des mesures contaminées par des niveaux de bruits élevés allant jusqu'à 10% de l'amplitude maximale.

---

2. Le même auteur montre dans [Hansen 1998] que l'instabilité est due aux changements de signes des coordonnées de  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$  d'autant plus fréquents que  $\sigma_i$  décroît, i.e. que  $i$  augmente.

### 1.2.2 Régularisation de Tikhonov

[Tikhonov and Arsenin 1977] présentent une autre approche pour résoudre un problème inverse linéaire du type (1.4). Les auteurs proposent de minimiser la fonctionnelle quadratique :

$$\|\mathbf{Q}_m - \mathbf{GF}\|_2 + \lambda\|\mathbf{F}\|_2 \quad (1.7)$$

où  $\lambda \geq 0$  est un paramètre de régularisation et  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'idée est de minimiser le résidu tout en tempérant la norme de la solution obtenue. Suivant la propriété recherchée sur la solution, on peut étendre la technique à la minimisation de :

$$\|\mathbf{Q}_m - \mathbf{GF}\|_2 + \lambda\|\mathbf{LF}\|_2 \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{L}$  désigne un opérateur linéaire quelconque. Le choix est souvent fait d'utiliser un opérateur de dérivation d'ordre 1 ou 2 pour tempérer les variations de la solution. D'après [Demoment et al. 2002], un critère composite se met de manière plus générale sous la forme :

$$\mathcal{P}(\mathbf{Q}_m - \mathbf{GF}) + \lambda\mathcal{R}(\mathbf{F})$$

Le paramètre de régularisation  $\lambda$  permet de choisir le degré d'importance à accorder au résidu (fidélité aux données via la fonctionnelle  $\mathcal{P}$ ) par rapport aux propriétés souhaitées sur  $\mathbf{F}$  (fidélité à l'a priori via la fonctionnelle  $\mathcal{R}$ ). Une fidélité parfaite aux données est obtenue pour  $\lambda = 0$  et une fidélité parfaite à l'a priori est obtenue pour  $\lambda \rightarrow +\infty$ . L'idée de minimiser un critère composite est de renoncer à obtenir la solution exacte à partir des mesures disponibles qui sont inévitablement imparfaites. Comme dans la section précédente, on note  $\mathbf{Q}$  les données parfaites et  $\mathbf{E}$  la perturbation de sorte que  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q} + \mathbf{E}$ . On s'intéresse en fait à la classe de solutions  $\{\hat{\mathbf{F}} \mid \|\mathbf{Q}_m - \mathbf{G}\hat{\mathbf{F}}\| \leq k\|\mathbf{E}\|\}$ , avec  $k > 0$  un paramètre de tolérance, et on choisit une solution physiquement acceptable.

La minimisation de (1.7) présente l'avantage considérable d'être équivalente à la résolution au sens des moindres carrés du système matriciel sur-déterminé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{O}$  désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle de taille  $n$ . On note  $\mathbf{A}$  la matrice du système linéaire (1.9) et  $\mathbf{Y}$  le membre de gauche. La matrice  $\mathbf{A}$  est

clairement de rang plein en colonnes. D'après l'annexe A, sa pseudo inverse est donnée par  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ . On note  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$  une SVD de la matrice  $\mathbf{G}$ . Tous calculs faits on obtient  $\mathbf{A}^\dagger = [\mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^T \mathbf{\Sigma} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mid (*)]$ . On note  $\mathbf{\Sigma}_\lambda^\dagger = (\mathbf{\Sigma}^T \mathbf{\Sigma} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Sigma}^T$ . L'unique solution au sens des moindres carrés de norme minimale est donnée par :

$$\hat{\mathbf{F}}_\lambda = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{Y} = [\mathbf{V} \mathbf{\Sigma}_\lambda^\dagger \mathbf{U}^T \mid (*)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}_\lambda^\dagger \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_m \quad (1.10)$$

Tous les termes de  $\mathbf{\Sigma}_\lambda^\dagger$  sont nuls sauf les  $n$  termes diagonaux donnés par  $\sigma_i/(\sigma_i^2 + \lambda^2)$ , au lieu de  $1/\sigma_i$  pour la solution obtenue par simple SVD. Le rôle du paramètre de régularisation  $\lambda$  devient clair : les valeurs singulières grandes devant  $\lambda$  sont peu affectées par la régularisation, on a alors  $\sigma_i/(\sigma_i^2 + \lambda^2) \approx 1/\sigma_i$ , tandis que les petites sont d'autant plus atténuées qu'elles sont faibles devant  $\lambda$ . La régularisation de Tikhonov n'ignore donc pas les petites valeurs singulières comme la TSVD mais tient compte de leur information tout en limitant leur sensibilité au bruit.

Le choix du paramètre de régularisation  $\lambda$  est cependant délicat, et les méthodes existantes pour le régler nécessitent souvent un temps de calcul important. On cite par exemple la méthode de la courbe en L qui permet d'obtenir une valeur optimale de  $\lambda$  en un certain sens [Hansen 1992]. Cette technique consiste à minimiser (1.7) pour plusieurs valeurs de  $\lambda$ , puis à reporter sur un graphe log-log, pour chaque valeur de  $\lambda$  testée, la norme de la solution obtenue en fonction de la norme du résidu. En fin de parcours, on retient la valeur  $\lambda_L$  qui maximise la courbure de la courbe qui a généralement une forme en L. [Demoment et al. 2002] expliquent que pour  $\lambda$  petit  $\|\hat{\mathbf{F}}_\lambda\|_2$  est très sensible aux variations de  $\lambda$ , le graphe présente alors une partie verticale, tandis que pour  $\lambda$  grand c'est  $\|\mathbf{Q}_m - \mathbf{G} \hat{\mathbf{F}}_\lambda\|_2$  qui est très sensible aux variations de  $\lambda$ , et le graphe présente une partie horizontale. Le choix est donc fait de conserver la valeur pour laquelle les normes de la solution et du résidu sont les moins sensibles aux variations du paramètre de régularisation.

[Jacquelin et al. 2003] montrent qu'en pratique la courbe obtenue peut présenter plusieurs coins. Ils observent notamment ce phénomène pour le problème d'identification d'une force d'impact appliquée sur une plaque circulaire uniforme. Les auteurs recommandent d'utiliser plusieurs techniques de sélection du paramètre de régularisation pour décider de la solution à retenir. On cite notamment la technique de validation croisée (Generalized

Cross Validation - GCV) qui est développée dans [Golub et al. 1979]. La GCV consiste à identifier une solution en retirant des échantillons de mesures puis à évaluer la capacité de les restaurer à partir du modèle de réponse. On répète cette procédure pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  et on choisit en fin de parcours celle permettant de minimiser l'erreur de prédiction.

[Choi et al. 2007] utilisent la régularisation de Tikhonov pour identifier des forces appliquées sur une plaque rectangulaire homogène simplement supportée sur ses bords modélisée par éléments finis. Ils comparent les solutions obtenues pour différentes techniques de choix du paramètre de régularisation (courbe en L et méthodes de validation croisée). Ils montrent que la méthode de la courbe en L fournit les meilleurs résultats lorsque les données sont très bruitées, mais que les méthodes de validation croisée sont plus précises lorsque les données sont peu bruitées. [Boukria et al. 2009] identifient expérimentalement des forces d'impact appliquées sur une plaque circulaire en aluminium encadrée sur son pourtour en utilisant la régularisation de Tikhonov associée à la méthode de la courbe en L.

### 1.2.3 Filtre de Wiener

Le filtrage de Wiener est l'analogue dans le domaine fréquentiel de la régularisation de Tikhonov lorsque le bruit suit une distribution normale [Inoue et al. 2001]. En appliquant la transformée de Fourier à (1.2), le produit de convolution se transforme en un simple produit de spectres :

$$Q_m(\omega) = G(\omega)F(\omega) \quad (1.11)$$

Bien qu'en apparence plus simple, l'identification de la force d'impact par estimation de sa transformée de Fourier est affectée par les mêmes problèmes que la déconvolution dans le domaine temporel [Martin and Doyle 1996]. On note  $q$  les mesures parfaites et  $e$  l'erreur commise de sorte que  $q_m = q + e$ . En divisant par  $G(\omega)$  l'équation (1.11) devient :

$$F(\omega) = \frac{Q(\omega)}{G(\omega)} + \frac{E(\omega)}{G(\omega)} \quad (1.12)$$

Il est classique de montrer que  $G(\omega)$  est un filtre passe-bas de sorte que  $|G(\omega)| \rightarrow 0$  pour les fréquences élevées. La partie haute-fréquence de  $e$ , correspondant par exemple à du

bruit de mesure, peut donc être considérablement amplifiée. Il est possible d'utiliser le filtrage de Wiener pour tempérer cette amplification. Le filtre de Wiener est défini lorsque le bruit  $e$  est décorrélé de  $q$  et de  $f$  par :

$$W(\omega) = \frac{1}{G(\omega)} \frac{|G(\omega)|^2}{|G(\omega)|^2 + S_{ee}(\omega)/S_{ff}(\omega)} \quad (1.13)$$

où  $S_{ee}$  et  $S_{ff}$  désignent respectivement les spectres des fonctions d'auto-corrélation du bruit et de l'excitation. On observe que le filtre de Wiener est constitué de la mise en série d'un filtre inverse, donnant la solution exacte si l'erreur est nulle, et d'un filtre de lissage, analogue aux termes  $\sigma_i/(\sigma_i^2 + \lambda^2)$  dans la régularisation de Tikhonov, réduisant l'influence de l'erreur dans la bande de fréquences  $|S_{ee}(\omega)| \gg |G(\omega)|^2 |S_{ff}(\omega)|$ .

Une estimation du spectre de la force d'impact est alors théoriquement obtenue par  $\hat{F}(\omega) = W(\omega)Q_m(\omega)$ . En pratique, le terme  $S_{ee}(\omega)/S_{ff}(\omega)$  est inconnu mais il peut être identifié par une technique de réglage appropriée. [Inoue et al. 1992] utilisent plusieurs jeux de données avec différents niveaux de bruit pour identifier le filtre de Wiener. Ils parviennent à reconstruire des impulsions longitudinales appliquées sur l'extrémité d'une poutre encastree-libre. [Gunawan 2015] remplace  $S_{ee}(\omega)/S_{ff}(\omega)$  par un coefficient de régularisation  $K$  qu'il règle par la méthode de la courbe en L. Cette technique lui permet d'identifier expérimentalement la force d'impact exercée par une bille en acier projetée sur une poutre.

#### 1.2.4 Régularisation par contrôle de dimension

Par opposition aux techniques de minimisation d'un critère composite, comme la régularisation de Tikhonov, il existe des méthodes de régularisation par contrôle de la dimension du problème. Ces techniques consistent essentiellement à minimiser  $\|\mathbf{Q}_m - \mathbf{GF}\|_2$  en cherchant le minimum dans un sous-espace de dimension réduite.

Une force d'impact  $f$  se caractérise typiquement par une fonction continue à support compact admettant un pic principal, éventuellement suivi d'une répétition de pics de plus petites amplitudes. Plusieurs modèles paramétriques de loi d'impact peuvent être envisagés, comme un demi-sinus pour représenter un choc mou, ou un quart de cosinus pour représenter un choc dur. Pour représenter des variations plus complexes, on peut sup-

poser que  $f$  se décompose sur une famille de fonctions régulières. Le problème consiste alors à rechercher les coefficients de la décomposition permettant de minimiser un écart prédictions-mesures. Les inconnues du problème de reconstruction ne sont plus les quantités  $(f(t_i))_{1 \leq i \leq n}$ , mais  $r \ll n$  coefficients permettant de décrire une loi paramétrique. On observe que cette réduction de dimension est généralement favorable pour améliorer la robustesse d'une procédure d'identification.

[Wang and Chiu 2003] s'intéressent à l'identification de la force d'impact appliquée sur une poutre simplement supportée sous la forme d'un Dirac d'intensité inconnue. [Yan and Zhou 2009] s'intéressent à l'intensité et à la durée de la force d'impact appliquée sur un panneau raidi composite. Ils recherchent pour cela la force appliquée sous la forme d'un demi-sinus d'intensité et de durée inconnues. [Qiao et al. 2015] recherchent les variations précises des forces d'impact appliquées sur une coque en acier encastree-libre sous la forme d'une superposition de B-splines cubiques.

### 1.2.5 Bilan sur les méthodes de reconstruction

On a présenté les méthodes de reconstruction les plus fréquemment rencontrées dans la littérature scientifique pour reconstruire une force d'impact appliquée sur une structure LTI lorsque le point d'application de la force est connu. La TSVD, la régularisation de Tikhonov et le filtrage de Wiener offrent un cadre général pour l'identification d'une excitation quelconque, et pas seulement une force d'impact. En revanche, les techniques de régularisation par contrôle de dimension nécessitent un fort a priori sur l'excitation que l'on recherche. Cela les rend néanmoins adaptées pour identifier une force d'impact que l'on peut raisonnablement supposer positive et de courte durée.

L'état de l'art présenté sur les méthodes de reconstruction n'est bien sûr pas exhaustif et de nombreuses autres approches peuvent être envisagées pour identifier une force d'impact. Par exemple, l'inversion du système matriciel peut s'effectuer en utilisant un algorithme itératif, et c'est le nombre d'itérations qui joue le rôle de paramètre de régularisation [Gunawan and Homma 2004]. On cite également les méthodes probabilistes comme l'inférence bayésienne qui permettent de tenir compte des incertitudes sur les mesures et sur le modèle de réponse, ainsi que des a priori disponibles sur la solution recherchée [Zhang

et al. 2012][Aucejo and Smet 2016]. On cite par ailleurs la formulation par variables d'état [Hollandsworth and Busby 1989], l'identification d'un système ARX et son inversion [Park et al. 2009], et les réseaux de neurones entraînés à partir d'un jeu de données expérimentales [Akhavan et al. 2000] ou numériques [Sarego et al. 2017]. Les techniques basées sur les réseaux de neurones peuvent s'étendre aux structures présentant un comportement non-linéaire [Ghajari et al. 2013]. Les autres techniques peuvent néanmoins résister à de faibles non-linéarités, comme de la plasticité locale lorsque la structure étudiée est métallique [Tran 2014].

### 1.3 Problème inverse de localisation du point d'impact

Le problème de localisation est en général formulé comme un problème inverse non linéaire. Il est en ce sens plus difficile à résoudre que le problème inverse de reconstruction, comme en témoigne le faible nombre de techniques générales qui existent pour le traiter. Avant de présenter ces techniques, commençons par décrire les différentes régions que l'on peut observer dans une réponse vibratoire consécutive à un impact pour une structure LTI initialement au repos.

Un impact génère tout d'abord des ondes élastiques qui se propagent vers les frontières de la structure. Suivant les propriétés du milieu de propagation et sa géométrie, ces ondes élastiques peuvent se disperser, se réfléchir et s'interférer de façon plus ou moins complexe [Doyle 1989]. Si l'énergie de l'impact est suffisamment élevée, mais assez faible pour considérer un comportement linéaire élastique, alors ces ondes se réfléchissent aux frontières de la structure pour se superposer en modes de vibration. Du fait des divers types d'amortissement liés aux frottements internes au sein du matériau ou aux conditions aux limites, la réponse modale se caractérise par un régime d'oscillations amorties. Au final, une réponse vibratoire consécutive à un impact se divise typiquement en trois régions (voir Figure 1.1) :

- (I) La région de repos ( $t < t_{prop}$ ),
- (II) La région dominée par la propagation des ondes élastiques ( $t_{prop} \leq t < t_{modes}$ ),
- (III) La région dominée par les modes de vibration ( $t \geq t_{modes}$ ).

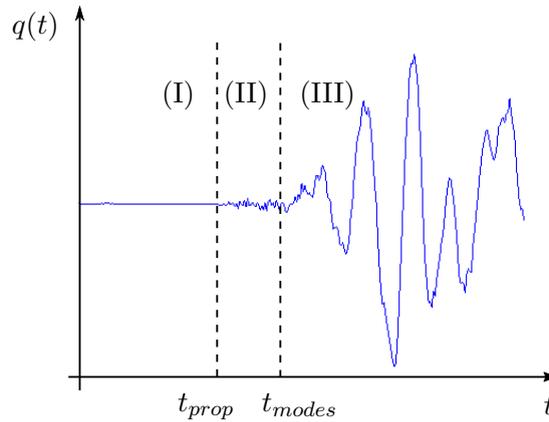


FIGURE 1.1 – Illustration des trois types de régimes dans une mesure vibratoire consécutive à un impact (extraite des données expérimentales utilisées dans le Chapitre 7).

### 1.3.1 Techniques de triangulation

Une première approche pour localiser l'impact est d'utiliser la frontière entre les régions (I) et (II), en utilisant les temps d'arrivée de certains types d'ondes aux différents capteurs placés sur la structure. Les décalages temporels sont ensuite convertis en distances à partir d'un modèle de vitesse de propagation de ces ondes. [Doyle 1989] présente des modèles de propagation d'ondes de flexion pour des structures homogènes isotropes 1D et 2D. [Su and Ye 2009] s'intéressent aux milieux anisotropes 2D et établissent les modèles de propagation des ondes de Lamb. Ces ondes se propagent dans une plaque solide à surfaces libres. Ils mettent en évidence l'importance du produit fréquence-épaisseur  $f.h$  sur la vitesse de propagation d'une onde de Lamb de fréquence  $f$  dans une plaque composite d'épaisseur  $h$ . En particulier, ils montrent que pour  $f.h < 1000$  [Hz.m] seuls les modes fondamentaux antisymétrique  $A_0$  et symétrique  $S_0$  se propagent. Les modes d'ordre supérieurs ne se propagent que lorsque le produit fréquence-épaisseur est supérieur à 1000 [Hz.m]. Pour un impact transverse d'énergie suffisamment faible, ils remarquent que *i*) le contenu spectral de la force d'impact n'excite pas les modes d'ordres élevés et que *ii*) le mode fondamental antisymétrique  $A_0$  domine le mode fondamental symétrique  $S_0$ . Il s'ensuit que la détection du mode  $A_0$  est particulièrement adaptée pour identifier la frontière (I)-(II) dans le cas d'un impact transverse basse énergie. Le principal avantage de ces techniques est qu'elles ne dépendent pas des conditions aux limites de la structure - les ondes ne se sont pas encore

réfléchies aux frontières - mais seulement des propriétés mécaniques du milieu entre les capteurs. Un autre avantage considérable est que tout impact génère des ondes élastiques alors qu'il doit être d'énergie suffisamment élevée pour que la structure vibre et que la région (III) soit significative pour être utilisée dans une méthode de localisation. Ces techniques nécessitent des capteurs à fréquence d'échantillonnage élevée pour détecter les passages des ondes élastiques, les vitesses de propagation étant de l'ordre du km/s, et un modèle de propagation qui peut être difficile à établir si le milieu est complexe.

La première étape pour effectuer une triangulation est donc d'estimer précisément les temps d'arrivée des ondes aux différents capteurs (Time Of Arrival - TOA). D'après [Park et al. 2009] il existe principalement trois approches : le dépassement d'un seuil, l'identification du pic principal et l'identification d'un double pic. Une estimation trop grossière des TOA se traduit par une grande incertitude sur la localisation de l'impact puisqu'ils sont multipliés par la vitesse de propagation des ondes qui est de l'ordre du km/s. L'estimation des TOA devient problématique dès lors que les signaux mesurés sont bruités par l'environnement de la structure et que le ratio signal/bruit est faible. Plusieurs techniques de filtrage des mesures peuvent être utilisées pour lisser leurs variations. Une fois les TOA identifiés aux différents capteurs, une triangulation à partir d'un modèle de vitesse de propagation peut être utilisée pour localiser l'impact.

Ce type de méthodes a été développé pour des structures relativement simples de type poutre et plaque, métallique ou composite. [Ahmari and Yang 2013] localisent numériquement des impacts appliqués sur une plaque métallique simplement supportée sur ses bords. Ils identifient les TOA sur 12 points de mesure virtuels par une technique de dépassement de seuil, puis ils utilisent un modèle de propagation d'ondes de flexion dans les plaques pour localiser l'impact. Les auteurs ajoutent du bruit sur les mesures numériques afin de valider la robustesse de leur procédure. [Zhao et al. 2017] détectent le passage des ondes Lamb  $A_0$  dans une plaque composite carrée encadrée sur ses coins équipée de 4 jauges de déformation avec une fréquence d'échantillonnage de 1MHz. Ils utilisent une technique de transformée en ondelettes pour identifier les TOA. Le problème de triangulation est formulé par un système d'équations non-linéaires dépendant des angles de propagation. Ils proposent de le résoudre numériquement à l'aide d'un algorithme mixant

l'approche par essaim de particules (Particle Swarm Optimization - PSO) et l'approche génétique (Genetic Algorithm - GA). [Frieden et al. 2012] s'affranchissent d'un modèle de propagation dépendant de l'angle de propagation en entraînant un réseau de capteurs à localiser des impacts à partir d'un jeu de données de référence. La structure étudiée est une plaque composite rectangulaire encastrée sur deux bords opposés. Les données de référence sont obtenues expérimentalement en appliquant des impacts sur une grille de points et en enregistrant les TOA aux différents capteurs ainsi que les coordonnées du point d'impact associé. Lorsqu'un impact est appliqué, ce jeu de données permet de déterminer des lignes d'iso-propagation par paires de capteurs. Les intersections de ces lignes, ou à défaut le barycentre des points d'intersection, permettent de localiser l'impact. Ils valident leur technique avec *i)* 4 accéléromètres ayant une fréquence d'échantillonnage de 1MHz et *ii)* 4 capteurs FBG avec une fréquence d'échantillonnage de 1GHz. L'utilisation des capteurs FBG semble nécessiter moins de points de référence dans le jeu de données initial. [Ruiz et al. 2013] utilisent une méthode statistique de validation croisée pour localiser des impacts appliqués sur une aile d'avion à partir de 9 capteurs piezo-céramique mesurant des déformations. Ils utilisent un jeu de données constitué de 574 impacts de référence permettant de déterminer le point d'impact. [Zhong et al. 2016] utilisent un réseau de neurones, entraînés sur un jeu de 200 impacts de référence, pour simultanément localiser et estimer l'énergie des impacts appliqués sur un panneau composite raidi. La structure est équipée de 10 capteurs PZT disposés en étoile effectuant des mesures avec une fréquence d'échantillonnage de 2MHz.

### 1.3.2 Techniques de balayage

Les techniques de balayage ont été développées pour éviter d'utiliser ces techniques de triangulation qui nécessitent d'une part un modèle de propagation d'onde, et d'autre part un réseau dense de capteurs à fréquence d'échantillonnage élevée. L'approche par balayage consiste à résoudre un problème de reconstruction des données sur une grille de points d'impact possibles. Le candidat qui minimise un certain écart prédictions-mesures est retenu comme étant le point d'impact. Plutôt que de chercher à résoudre directement un problème inverse non linéaire, on résout plusieurs fois un problème de reconstruction des

données en supposant que l'impact a eu lieu sur un des points de la grille. Cela permet notamment d'utiliser une plus grande partie de la réponse vibratoire avec une fréquence d'échantillonnage plus petite, la région (III) étant dominée par un contenu fréquentiel de plus basse fréquence.

[Li and Lu 2016] identifient simultanément le point d'impact et l'évolution temporelle de la force appliquée sur une poutre encadrée-libre équipée de deux accéléromètres. Ils résolvent le problème de reconstruction de la force d'impact sur une grille de points régulièrement espacés avec la méthode de Tikhonov associée à la méthode la courbe en L. Le point qui minimise la distance quadratique entre les prédictions et les mesures est choisi comme étant le point d'impact. [Vladislav et al. 2012] valident numériquement la même technique de balayage sur un modèle éléments finis de panneau homogène troué. La grille de candidats correspond au maillage de la structure. Une technique d'interpolation leur permet d'affiner la précision de localisation. [El-Bakari et al. 2014] utilisent un algorithme PSO pour automatiquement sélectionner les points d'intérêt de résolution du problème de localisation. Ils développent une technique qui s'affranchit du problème de reconstruction de l'excitation en tirant avantage du principe de réciprocité de Maxwell-Betti. Ils appliquent numériquement leur technique sur une poutre simplement supportée, virtuellement équipée de 3 capteurs mesurant des déplacements, et soumise à une distribution de pression.

### 1.3.3 Identification des participations modales

Une autre approche pour localiser un impact est d'identifier les participations de certains modes de vibration dans la réponse vibratoire. L'idée sous-jacente est que les différents modes de vibration d'une structure ne sont pas excités dans les mêmes proportions suivant le point d'application de l'impact. On présente deux techniques qui ont été développées sur ce principe et qui permettent de simultanément localiser un impact et estimer son intensité.

[Briggs and Tse 1991] développent une technique dans le domaine fréquentiel sur l'hypothèse que le spectre d'une force d'impact est plat dans une région basse fréquence. On sait en effet que plus la durée d'une excitation est petite et plus son contenu spectral est

large. En particulier, une impulsion modélisée par un Dirac excite uniformément toutes les fréquences. Ils en déduisent que sur une plage de pulsations  $[0, \omega_c]$  le spectre d'une mesure d'accélération consécutive à un impact de durée assez petite peut raisonnablement se mettre sous la forme :

$$\tilde{A}(\omega) \approx -f\omega^2 \sum_{r=1}^p \frac{A_{rjk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2}$$

où  $f$  désigne l'intensité de l'impact,  $\omega_r < \omega_c$  et  $\eta_r$  sont respectivement la pseudo-pulsation propre et l'amortissement modal du mode  $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , et  $A_{rjk} = \phi_r(M_j)\phi_r(M_k)$  est le produit des déformées modales du mode  $r$  évaluées au point de mesure  $M_j$  et au point d'impact  $M_k$ . Ils proposent dans un premier temps de constituer expérimentalement un jeu de données  $A_{rjk}$  sur une grille de points d'impact  $M_k$  de référence. Lorsqu'un impact a lieu, une régression linéaire leur permet d'identifier simultanément l'intensité  $f$  et les  $p$  coefficients  $A_{rjk}$  à partir des mesures vibratoires de l'accéléromètre. Par suite, ils utilisent leur jeu de données de référence pour localiser le point d'impact. Ils valident leur technique sur un montage représentant un tiroir de disque équipé d'un accéléromètre, et ils retiennent les  $p = 5$  premiers modes de vibration dans leur analyse. Les intensités sont correctement estimées mais le point d'impact n'est pas toujours déterminé de façon unique.

[Wang and Chiu 2003] ont développé une méthode d'identification des participations modales dans le domaine temporel. Leur technique permet de simultanément localiser un impact et estimer son intensité à partir d'une analyse modale de la structure. L'analogue du jeu de données de référence utilisé dans la méthode de Briggs est ici la matrice modale de la structure tronquée sur un nombre réduit de modes de vibration. Ils développent leur méthode sur une poutre métallique simplement supportée sur ses extrémités en utilisant les mesures d'un seul accéléromètre. Même si leur technique est présentée comme une simple astuce mathématique, elle est suffisamment générale pour être étendue à des structures plus complexes ayant un comportement linéaire élastique. On présente dans le paragraphe suivant les différentes étapes qui les conduisent à ces résultats.

Ils utilisent la technique de superposition modale pour obtenir la réponse en accélération projetée sur une famille de  $p$  modes de vibration. Le point de mesure sur la poutre est noté  $M_j$  et le point d'application de l'impulsion est noté  $M_k$ . La réponse tronquée évaluée

en  $M_j$  pour une impulsion d'intensité  $f$  ayant lieu à l'instant  $t = 0$  en  $M_k$  est donnée par :

$$\tilde{a}(t) = f \sum_{r=1}^p \frac{\phi_r(M_j)\phi_r(M_k)}{\omega_r} e^{-\eta_r\omega_{0r}t} \left[ \omega_{0r}^2(2\eta_r^2 - 1) \sin(\omega_r t) - 2\eta_r\omega_{0r}\omega_r \cos(\omega_r t) \right]$$

Au lieu de garder pour inconnue le point d'application de l'impulsion  $M_k$ , noyé dans des termes non linéaires, ils considèrent pour inconnues les quantités  $\phi_r(M_k)$ . Ils discrétisent la poutre en 20 éléments (21 noeuds dont 2 fixes), et ne retiennent que les  $p = 4$  premiers modes de vibration dans leur analyse. Leurs inconnues sont donc l'intensité de l'impulsion  $f$ , ainsi que les  $\phi_r(M_k)$  pour  $r = 1, \dots, 4$ .  $M_k$  est supposé être l'un des 19 degrés de liberté. A l'aide d'un algorithme de minimisation et d'un jeu de paramètres initiaux non précisés dans leur article, ils minimisent la somme des carrés des écarts entre les mesures d'accélération et leur modèle de réponse avec pour inconnues les  $\phi_r(M_k)$  et  $f$ . Ils notent alors  $\mathbf{D}_k = (\phi_1(M_k) \phi_2(M_k) \phi_3(M_k) \phi_4(M_k))$  le vecteur ligne formé des déformées modales des 4 modes évaluées au degré de liberté  $M_k$ , et  $\hat{\mathbf{D}}_k$  l'estimation qu'ils en font avec leur algorithme. Ils déterminent le point d'impact comme étant le degré de liberté  $l$  de leur modèle de poutre minimisant le coefficient de corrélation :

$$MAC_{kl} = \frac{(\hat{\mathbf{D}}_k \cdot \mathbf{D}_l^T)^2}{\|\hat{\mathbf{D}}_k\| \|\mathbf{D}_l\|}$$

où les  $\mathbf{D}_l$  sont connus puisque ce sont les lignes de la matrice modale de la poutre tronquée aux 4 premiers modes de vibration. Le MAC est habituellement utilisé en analyse modale expérimentale pour le recalage essais-calculs comme mesure pour comparer deux modes de vibration [Pastor et al. 2012]. Ici, le MAC n'est pas utilisé sur les colonnes de la matrice modale représentant les déformées des modes, mais sur les lignes représentant les participations modales. Ils obtiennent globalement de bons résultats pour la localisation des impacts appliqués. Ils constatent cependant que leur méthode est très sensible au point de mesure et qu'il est favorable d'éloigner l'accéléromètre du milieu de la poutre qui est un noeud de vibration pour les modes de rang pair. Ils signalent également que le modèle d'impulsion n'est pas approprié pour tous les impacts qui ont été appliqués sur la poutre. Ils mentionnent qu'il serait plus avantageux d'utiliser un modèle de loi d'impact triangulaire mais ils n'ont pas donné de suite à leur travail dans cette direction depuis la parution de leur article. [Wang 2002] adapte cette technique<sup>3</sup> pour la localisation d'une sinusoïde

3. L'article paru en 2003 a été soumis avant celui paru en 2002.

de fréquence connue mais d'intensité inconnue.

Les techniques basées sur les participations modales présentent l'avantage d'utiliser un modèle de réponse linéaire qui peut s'identifier par régression. Le choix des modes à retenir dans l'analyse ainsi que le positionnement du capteur sont les principales difficultés soulevées par ces approches. Un choix de modes arbitraire et un positionnement du capteur aléatoire peuvent facilement conduire à des problèmes de non-unicité de la solution. Ces techniques ne permettent pas actuellement de reconstruire les variations de la force d'impact, mais seulement d'identifier son intensité.



## Chapitre 2

# Etude sur la possibilité d'identifier un impact à partir de la réponse libre d'une structure à $N$ degrés de liberté

Résumé : Notre problème porte sur l'identification d'un impact d'énergie suffisante pour exciter des modes de vibration globaux d'une structure. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la possibilité de localiser un impact et de reconstruire son évolution temporelle à partir de mesures effectuées majoritairement dans le régime d'oscillations libres. On considère pour cela une structure à  $N$  degrés de liberté soumise à une excitation ponctuelle et on établit un modèle de réponse à l'aide de la technique de superposition modale. On montre que le vecteur de participation modale amplifié (VPMA) permet de localiser une excitation et d'estimer son intensité. En revanche, on met en évidence l'impossibilité de reconstruire exactement une évolution temporelle de force d'impact quelconque à partir de la réponse libre.

## 2.1 Images de l'évolution temporelle d'une excitation et de son point d'application dans la réponse vibratoire

On considère une structure linéaire élastique avec des propriétés mécaniques invariantes dans le temps discrétisée par la méthode des éléments finis. La structure discrétisée possède  $N$  degrés de libertés (*ddl*) qu'on regroupe dans un vecteur  $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_N)^T$ . On suppose que la structure est initialement au repos, et qu'elle est soumise à une excitation  $f : t \mapsto f(t)$  au *ddl* indexé  $F$  (voir Figure 2.1).

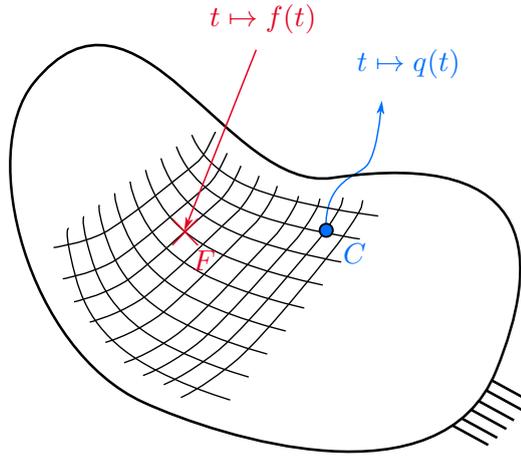


FIGURE 2.1 – Enregistrement de la réponse vibratoire en  $C$  consécutive à un impact en  $F$  appliqué sur une structure discrétisée.

Dans ces conditions, les équations du mouvement de la structure discrétisée sont d'après [Gmür 2012] :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{0}, \forall t < 0 \\ \dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{0}, \forall t < 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité de la structure discrétisée. Toutes les coordonnées du vecteur force  $\mathbf{f}(t)$  sont nulles sauf celle indexée  $F$  qui vaut  $f(t)$ . On suppose que la matrice d'amortissement satisfait la condition de frottement de Rayleigh<sup>1</sup>, c'est-à-dire qu'elle est de la forme  $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ . En normalisant les modes de vibration par rapport à la matrice masse, la matrice modale  $\Phi = [\phi_1 | \dots | \phi_N]$

---

1. Plus généralement, on montre dans [Gmür 2012] que les équations normales sont découplées lorsque la matrice  $\mathbf{D}$  satisfait la relation  $\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}$  appelée condition de frottement de Caughey. La matrice  $\Phi^T\mathbf{D}\Phi$  est alors diagonale.

CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À  $N$  DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

diagonalise simultanément  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Phi^T \mathbf{M} \Phi &= \mathbf{I} \\ \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= \text{diag}(\omega_{01}^2, \dots, \omega_{0N}^2) \\ \Phi^T \mathbf{D} \Phi &= \text{diag}(2\eta_1 \omega_{01}, \dots, 2\eta_N \omega_{0N})\end{aligned}\quad (2.2)$$

où  $\omega_{0i}$  et  $\eta_i$  désignent respectivement la pulsation propre et l'amortissement modal du  $i$ -ème mode de vibration  $\phi_i$ . En projetant les équations (2.1) dans la base modale de sorte que :

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{z}(t) \quad (2.3)$$

et en les pré-multipliant par  $\Phi^T$  avant d'utiliser les relations (2.2), on obtient un système de  $N$  équations différentielles linéaires d'ordre deux découplées. Pour  $i = 1, \dots, N$  les équations du mouvement de la coordonnée généralisée  $z_i$ , appelées équations normales, s'écrivent :

$$\begin{aligned}\ddot{z}_i(t) + 2\eta_i \omega_{0i} \dot{z}_i(t) + \omega_{0i}^2 z_i(t) &= \Phi_{Fi} f(t) \\ z_i(t) &= 0, \forall t < 0 \\ \dot{z}_i(t) &= 0, \forall t < 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

En supposant que la structure n'admet pas de modes rigides ( $\omega_{0i} > 0$ ), la solution des équations normales (2.4) est donnée par un produit de convolution entre la force d'excitation et la réponse impulsionnelle d'un système à 1 degré de liberté :

$$z_i(t) = \Phi_{Fi} (f * g_i)(t) = \Phi_{Fi} \int_0^t f(\tau) g_i(t - \tau) d\tau \quad (2.5)$$

où  $g_i(t) = \frac{1}{\omega_i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t)$  avec  $\omega_i = \omega_{0i} \sqrt{1 - \eta_i^2}$ . Ce produit de convolution traduit le fait que le système à 1 ddl agit comme un système linéaire temporellement invariant pour lequel le théorème de superposition est valable. On note  $C$  l'index d'un ddl sur lequel est placé un capteur mesurant la réponse  $q$ . En injectant (2.5) dans (2.3), la réponse enregistrée au ddl indexé  $C$  est donnée par :

$$q(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{Ci} \Phi_{Fi} (f * g_i)(t) \quad (2.6)$$

En particulier, la réponse impulsionnelle  $g$  de la structure est donnée par :

$$g(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{Ci} \Phi_{Fi} g_i(t) \quad (2.7)$$

En séparant dans (2.6) les termes qui dépendent du point de mesure  $C$ , de l'excitation  $f$  et de son point d'application  $F$ , il vient :

$$q(t) = (\phi_C^*)^T \cdot \mathbf{D}_f(t) \cdot \phi_F^* \quad (2.8)$$

où  $\phi_i^*$  désigne la  $i$ -ème colonne de  $\Phi^T$  et  $\mathbf{D}_f(t) = \mathbf{diag}((f * g_1)(t), \dots, (f * g_N)(t))$ . En posant  $\mathbf{L}_f(t) = (\phi_C^*)^T \cdot \mathbf{D}_f(t)$  et  $\mathbf{X}_F = \phi_F^*$  l'équation (2.8) devient :

$$q(t) = \mathbf{L}_f(t) \cdot \mathbf{X}_F \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) met en évidence un nouveau point de vue vis-à-vis des grandeurs qu'il est judicieux de vouloir identifier dans la réponse mesurée. L'image de l'évolution temporelle  $f : t \mapsto f(t)$  de l'excitation dans la réponse est donnée par  $\mathbf{L}_f : t \mapsto \mathbf{L}_f(t)$ , et celle de son point d'application  $F$  est donnée par le vecteur  $\mathbf{X}_F$ . Présenté sous la forme (2.9), le problème d'identification d'un impact est en fait un problème inverse bilinéaire. En effet, pour une excitation  $f$  donnée (resp. un point d'impact  $F$  donné), le modèle de réponse est linéaire par rapport à  $\mathbf{X}_F$  (resp.  $\mathbf{L}_f$ ). Or, il est beaucoup plus facile d'identifier un modèle linéaire qu'un modèle qui ne l'est pas à partir de mesures, en utilisant par exemple une procédure de moindres carrés linéaire (voir section 4.1.2). Il faut néanmoins s'assurer que les objets transformés  $\mathbf{L}_f$  et  $\mathbf{X}_F$  permettent de remonter aux inconnues initiales  $f$  et  $F$ . C'est ce que nous allons étudier dans les sections suivantes.

## 2.2 Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA

Le vecteur  $\mathbf{X}_F$  donne les pondérations de chaque mode à la réponse temporelle suivant le point d'application de l'excitation. Par définition, il a la propriété d'être commun à tout point de la structure au sens où il ne dépend pas du point de mesure. Si l'excitation est appliquée sur un noeud du mode  $i$  alors la coordonnée  $i$  de  $\mathbf{X}_F$  est nulle et le mode  $i$  ne participe pas à la réponse. Pour cette raison, on appelle  $\mathbf{X}_F$  le vecteur de participation modale (VPM) au sens où ses coordonnées indiquent les poids des différents modes de

CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À  $N$  DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

vibration suivant le point d'application de l'excitation. A titre d'exemple, les contributions  $X_1$  et  $X_2$  des modes de flexion 1 et 2 d'une poutre simplement supportée soumise à une excitation en son centre sont représentées sur la Figure 2.2.

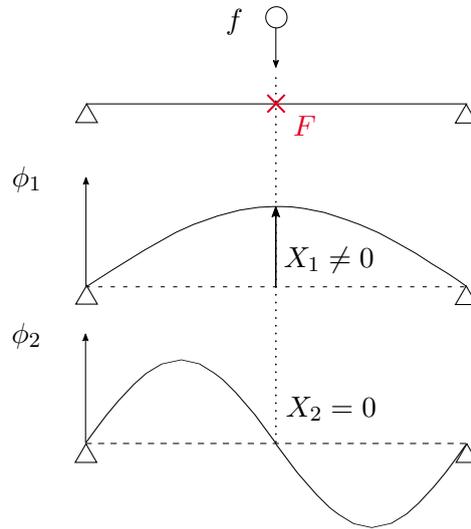


FIGURE 2.2 – Représentation des deux premières composantes du vecteur de participation modale associé à une excitation appliquée au centre d'une poutre simplement supportée.

En fait, il existe un lien bijectif très simple entre le point d'application de l'excitation et le VPM correspondant. Si les  $N$  modes de vibration de la structure discrétisée sont connus alors la matrice modale complète  $\Phi$  est disponible. La matrice  $\Phi^T$  est inversible donc toutes ses colonnes sont linéairement indépendantes. En particulier, il existe une et une seule colonne de  $\Phi^T$  qui est égale à  $\mathbf{X}_F = \phi_F^*$ , et c'est précisément la colonne  $F$ .

Il est possible de conserver le lien bijectif entre  $F$  et toute homothétie non nulle de  $\mathbf{X}_F$ . En effet, multiplier  $\mathbf{X}_F$  par un facteur  $\lambda \neq 0$  ne modifie pas les proportions dans lesquelles les différents modes de vibration sont excités. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le raisonnement précédent reste valable en remplaçant « égal à » par « colinéaire à » : le *ddl*  $F$  auquel est appliquée l'excitation s'obtient en recherchant l'unique colonne de  $\Phi^T$  colinéaire à  $\lambda \mathbf{X}_F$ . On peut tirer avantage de cette propriété pour estimer l'intensité de l'excitation appliquée. Dans la suite de cette section on remplace la notation  $f(t)$  de l'évolution temporelle de l'excitation par  $f\psi(t)$ , où  $\psi$  désigne l'évolution temporelle unitaire de l'excitation et où  $f$  est un réel désignant son intensité. En posant  $\mathbf{Z}_F = f\mathbf{X}_F$ ,

CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À  $N$  DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

qu'on appelle le vecteur de participation modale amplifié (VPMA), le modèle de réponse (2.9) s'écrit :

$$q(t) = \mathbf{L}_\psi(t) \cdot \mathbf{Z}_F \quad (2.10)$$

On retiendra donc les définitions suivantes :

**Définition 2.2.1** (VPM-VPMA). *Soit une structure soumise en un point  $F$  à une excitation d'intensité  $f$ , et  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration. On appelle vecteur de participation modale (VPM) associé à la famille  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  le vecteur colonne de taille  $p$  défini par  $\mathbf{X}_F = (\phi_1(F) \dots \phi_p(F))^T$ . On appelle alors vecteur de participation modale amplifié (VPMA) le vecteur  $\mathbf{Z}_F = f \mathbf{X}_F$ .*

**Remarque 2.2.1.** *Pour une structure discrétisée,  $F$  désigne un degré de liberté en déplacement ou en rotation, et  $\phi_i(F)$  désigne la déformée du mode  $i$  pour ce degré de liberté.*

L'intensité de l'excitation n'est alors rien d'autre que le coefficient de colinéarité entre  $\mathbf{Z}_F$  et la colonne  $F$  de  $\Phi^T$  :

$$f = \frac{(\phi_F^*)^T \cdot \mathbf{Z}_F}{\|\phi_F^*\|^2} \quad (2.11)$$

Cette façon d'estimer l'intensité d'une excitation présente des avantages qui deviendront clairs dans la section 4.1.3 lorsque nous considérerons un VPMA tronqué sur une famille réduite de modes de vibration connus.

Terminons par relever que cette procédure est valable pour tout type d'excitations, et pas seulement pour les excitations de type force d'impact que nous allons considérer à partir de la section suivante. Le *ddl*  $F$  auquel est appliquée l'excitation s'obtient en recherchant l'unique colonne de  $\Phi^T$  colinéaire au VPMA, et le coefficient de colinéarité est précisément l'intensité  $f$  de l'excitation (voir Figure 2.3).

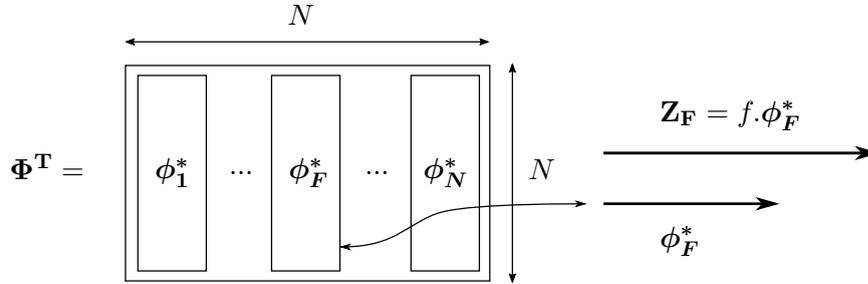


FIGURE 2.3 – Illustration de la procédure de localisation d’une excitation et d’estimation de son intensité à partir du VPMA.

### 2.3 Mise en évidence de l’impossibilité de reconstruire une force d’impact quelconque à partir de la réponse libre

Dans la section 2.1, on a considéré une excitation quelconque  $f$  et on a montré que la réponse complète faisait intervenir des produits de convolution avec des réponses impulsionnelles dans  $\mathbf{L}_f$ . On rappelle que  $\mathbf{L}_f$  est l’image de  $f$  dans la réponse et que notre démarche consiste à savoir s’il est possible de retrouver  $f$  à partir de  $\mathbf{L}_f$ . On considère à présent que l’excitation est une force d’impact et on va montrer que la majorité de la réponse mesurée consiste en des oscillations libres qui peuvent se décrire par une superposition de sinusoides amorties exponentiellement. On en déduira que l’information résiduelle de  $f$  dans la réponse libre est incomplète et qu’il est impossible, en général, de reconstituer la force d’impact à partir de  $\mathbf{L}_f$ .

D’après [Lalanne 1999] un impact se définit comme une excitation de durée finie  $T$  qui est brève devant un temps caractéristique de réponse de la structure, par exemple  $t_c = \pi/\omega_{01}$  où  $\omega_{01}$  désigne la première pulsation propre non nulle de la structure. Si l’intensité de l’impact est suffisante, l’expérience montre que des ondes élastiques se propagent du point d’application de l’impact vers les frontières de la structure avant de se réfléchir et de se superposer en modes de vibration. Cette phase vibratoire se caractérise par un régime d’oscillations amorties et nous allons montrer que la réponse libre, c’est-à-dire observée pour  $t \geq T$ , peut être modélisée par une somme de sinusoides amorties exponentiellement. Pour cela, on étudie dans un premier temps le mouvement  $z$  d’un système mécanique à 1 ddl initialement au repos soumis à une excitation  $f$  de durée finie  $T$ . L’équation du

CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À  $N$  DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

mouvement de ce système est de la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + 2\eta\omega_0\dot{z}(t) + \omega_0^2z(t) &= f(t) \\ z(t) &= 0, \forall t < 0 \\ \dot{z}(t) &= 0, \forall t < 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Passée la durée  $T$ , le second membre devient nul et le système est alors en oscillations libres avec pour conditions initiales le mouvement imprégné à l'instant  $T$ . En faisant le changement de variable  $u = t - T$  dans (2.12),  $z(t)$  devient  $y(u)$  et la réponse libre ( $u \geq 0$ ) est décrite par :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(u) + 2\eta\omega_0\dot{y}(u) + \omega_0^2y(u) &= 0 \\ y(0) &= z(T) = z_T \\ \dot{y}(0) &= \dot{z}(T) = \dot{z}_T \end{aligned} \quad (2.13)$$

En posant  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \eta^2}$  la solution de (2.13) est donnée par :

$$y(u) = \frac{1}{\omega} e^{-\eta\omega_0 u} (\omega z_T \cos(\omega u) + \dot{z}_T \sin(\omega u)) \quad (2.14)$$

En revenant à la variable  $t$  et en utilisant l'identité  $a \cos(x) + b \sin(x) = R \sin(x - \theta + \pi/2)$ , avec  $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$  et  $\tan \theta = b/a$ , la réponse libre s'exprime sous la forme :

$$z(t) = Ae^{-\eta\omega_0 t} \sin(\omega t - \phi) \quad \text{ou} \quad z(t) = Kg(t - \tau) \quad (2.15)$$

Ainsi, selon le point de vue, la réponse libre est une sinusoïde amortie exponentiellement ou la réponse à un Dirac d'intensité  $K$  et retardé de  $\tau$ , avec  $\tau \leq T$ , comme représenté sur la Figure 2.4.

CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À  $N$  DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

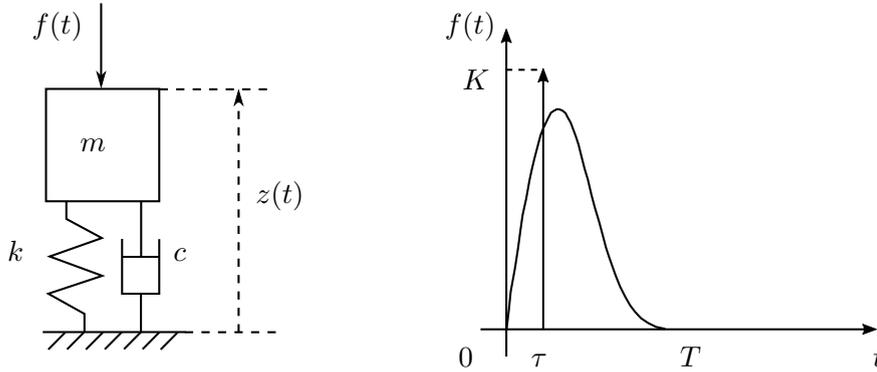


FIGURE 2.4 – Impulsion équivalente décrivant la réponse libre d'un système mécanique à 1 *ddl*.

D'après la section 2.1, la réponse d'une structure à  $N$  *ddl* peut s'exprimer comme une superposition de  $N$  réponses de systèmes mécaniques à 1 *ddl* découplés. En utilisant (2.15), la réponse libre d'une structure discrétisée mesurée au *ddl* indexé  $C$  peut se mettre sous la forme d'une somme de sinusoides amorties exponentiellement :

$$q(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{C_i} \Phi_{F_i} A_i e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (2.16)$$

ou de façon équivalente sous la forme d'une somme de réponses impulsionnelles modales retardées et modulées en amplitude :

$$q(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{C_i} \Phi_{F_i} K_i g_i(t - \tau_i) \quad (2.17)$$

$\mathbf{L}_f$  est alors de la forme :

$$\mathbf{L}_f(t) = (\Phi_{C_1} K_1 g_1(t - \tau_1) \dots \Phi_{C_N} K_N g_N(t - \tau_N)) \quad (2.18)$$

La réponse libre est donc complètement décrite par les propriétés modales de la structure et  $N$  couples de coefficients  $(A_i, \phi_i)$  ou  $(K_i, \tau_i)$  qui dépendent du mouvement imprégné à l'instant  $t = T$ . La durée d'un impact étant généralement très faible par rapport à la durée des oscillations libres, c'est donc majoritairement sous la forme (2.18) que se trouve  $\mathbf{L}_f$  au cours des mesures vibratoires. Le modèle de superposition de sinusoides amorties exponentiellement est donc adapté pour décrire la réponse d'une structure consécutive à

## CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À $N$ DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

un impact. En particulier, la réponse impulsionnelle de la structure au  $ddl$  indexé  $C$  s'en déduit en prenant  $K_i = 1$  et  $\tau_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

Les relations (2.16), (2.17) ou (2.18) montrent que l'information résiduelle de l'évolution temporelle de la force d'impact  $f$  dans la réponse libre d'une structure à  $N$  degrés de liberté se résume à un ensemble de  $N$  couples de réels  $(K_i, \tau_i)$ . Passée la durée de l'impact, les seules informations restantes sur  $f$  dans la mesure vibratoire à un instant  $t \geq T$  quelconque sont ces couples de réels qui ne dépendent pas du temps et ne sauraient a priori caractériser les variations de  $f$  recherchées. Il semble donc illusoire de chercher à remonter à l'information complète sur  $f$  à partir de la seule identification des couples  $(K_i, \tau_i)$  par une quelconque méthode. En effet, il est en général impossible de reconstruire une fonction scalaire quelconque à partir d'un ensemble fini de réels, à moins qu'elle admette une loi paramétrée. De la même façon, il est illusoire de vouloir distinguer des couleurs sur une image en noir et blanc sans a priori (voir Figure 2.5). En revanche, plus le nombre de degrés de liberté est grand et plus il est possible d'extraire d'informations sur  $f$ , de couleurs, au travers des couples  $(K_i, \tau_i)$ . Cela montre déjà qu'il y aura un compromis à trouver entre la précision souhaitée pour l'identification et le temps de calcul qui dépendra nécessairement du nombre de degrés de liberté retenus dans l'analyse.

Bien sûr, si la réponse complète est utilisée, c'est-à-dire à partir de  $t = 0$ , alors toute l'information sur l'excitation  $f$  est contenue dans la réponse mesurée  $q = f * g$ . Notons cependant que la période d'échantillonnage du capteur mesurant la réponse vibratoire doit être suffisamment petite pour correctement capturer les variations de  $f$  qui sont inconnues. Rajoutons que la déconvolution de  $f$  ne peut être robuste qu'en introduisant un paramètre de régularisation dont le réglage nécessite une procédure coûteuse en temps de calcul (voir section 1.2.2).

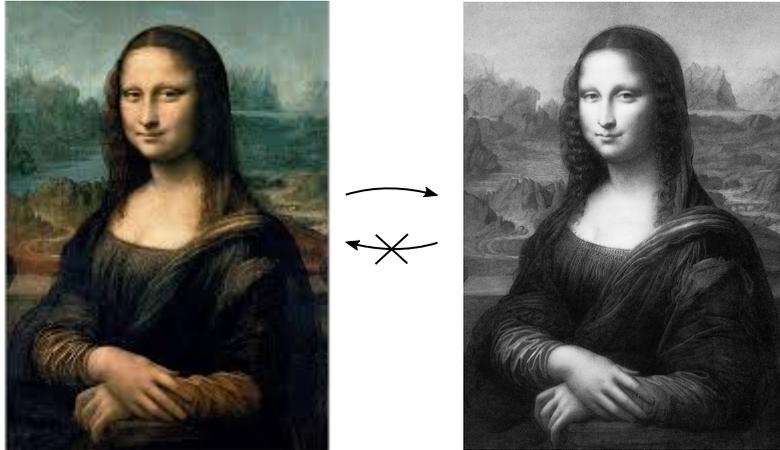


FIGURE 2.5 – Perte d'informations sur une image en noir et blanc.

Terminons cette section en mentionnant qu'il existe des algorithmes permettant d'identifier les coefficients d'une série de sinusoides amorties exponentiellement [Badeau 2005]. Il est donc possible d'écrire (2.16) sous la forme :

$$q(t) = \sum_{i=1}^N B_i e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (2.19)$$

puis d'estimer les amplitudes  $B_i$  et les déphasages  $\phi_i$  des sinusoides à partir des mesures vibratoires. Cependant, cela ne permettrait pas d'identifier les  $\Phi_{Fi}$  qui permettent de localiser l'impact. En effet, les amplitudes sont de la forme  $B_i = \Phi_{Fi} D_i$  et tout couple  $(\lambda \Phi_{Fi}, \frac{1}{\lambda} D_i)$ , avec  $\lambda \neq 0$ , permet de reconstituer l'amplitude  $B_i$ . Il s'agit d'une ambiguïté d'échelle intrinsèque aux problèmes inverses bilinéaires [S. Choudhary 2014]. On utilisera toutefois l'expression (2.19) pour démontrer certaines propositions pour l'identification d'un impact arbitraire dans le Chapitre 5.

## 2.4 Considérations sur l'estimation de l'instant d'impact

Le modèle de réponse (2.10) nécessite d'être initialisé à l'instant d'impact qui est inconnu dans la pratique. Pour une structure de dimensions suffisamment faibles initialement au repos, on peut raisonnablement supposer que l'instant d'impact est confondu avec le début du mouvement du capteur (voir Chapitre 6). En revanche, pour une structure de plus grandes dimensions les ondes élastiques qui se propagent consécutivement à l'impact

mettent un certain temps pour d'une part atteindre le capteur, et d'autre part pour se réfléchir et se superposer en modes de vibration amortis (voir section 1.3).

Il est possible de contourner ce problème d'au moins deux façons. La première approche consiste à mettre l'instant d'impact en paramètre inconnu du modèle de réponse (voir Chapitre 5). Il faut alors résoudre un problème d'optimisation fortement non linéaire avec le risque de trouver un minimum local. La seconde approche consiste à placer plusieurs capteurs sur la structure pour détecter plus précisément l'instant d'impact. Ils doivent être distribués de sorte que l'erreur maximale que l'on puisse commettre sur l'instant d'impact ne conduise pas à des erreurs trop importantes dans la procédure d'identification de l'impact. Notons que l'influence d'une erreur d'estimation sur l'instant d'impact est à comparer avec un temps caractéristique de réponse de la structure : une même erreur  $\Delta t$  n'a pas la même importance suivant la raideur de la structure.

Enfin, une autre approche pourrait être envisagée en travaillant dans le domaine fréquentiel pour s'affranchir de l'erreur d'estimation sur l'instant d'impact. En effet, les proportions dans lesquelles sont excités les modes de vibration suivant le point d'application de l'impact sont indépendantes du temps<sup>2</sup>, et le théorème du retard nous apprend que deux signaux retardés ont même transformée de Fourier en module. Cependant, cette approche n'est pas étudiée dans ce travail car la linéarité du modèle de réponse par rapport à  $\mathbf{Z}_F$  est perdue<sup>3</sup>, ce qui empêche son identification par les méthodes développées dans les Chapitres 4 et 5.

## 2.5 Bilan sur la possibilité d'identifier un impact à partir de la réponse vibratoire mesurée en un point

Dans ce chapitre, nous avons introduit une approche indirecte pour identifier un impact appliqué sur une structure à  $N$  degrés de liberté à partir de sa réponse vibratoire mesurée en un point. Plutôt que de chercher à identifier directement la force d'impact  $f$  et son point d'application  $F$ , on s'est intéressé à leurs images respectives  $\mathbf{L}_f$  et  $\mathbf{X}_F$  dans la formulation (2.9) obtenue par la technique de superposition modale. L'intérêt majeur de

---

2. Par définition  $\mathbf{Z}_F$  ne dépend pas du temps.

3. Soit  $S$  la transformée de Fourier d'un signal  $s$ . Le modèle de réponse dans le domaine fréquentiel est  $|Q(\omega)| = |\mathcal{L}(\omega) \cdot \mathbf{Z}_F|$  où la composante  $i$  de  $\mathcal{L}(\omega)$  est  $\Psi(\omega)G_i(\omega)$ .

## CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À $N$ DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

cette formulation est qu'elle est linéaire par rapport aux images  $\mathbf{L}_F$  et  $\mathbf{X}_F$ , et qu'il existe des techniques robustes et peu coûteuses en temps de calcul pour identifier des modèles linéaires à partir de mesures.

Les hypothèses que nous avons faites sont que l'impact est ponctuel, que la matrice d'amortissement satisfait la condition de Caughey, que la structure n'admet pas de modes rigides<sup>4</sup> et qu'elle reste dans son domaine de comportement linéaire élastique. La condition de Caughey permet de diagonaliser la matrice d'amortissement. En pratique, [Gmür 2012] indique qu'il est fréquent d'ignorer les composantes hors diagonale de la matrice d'amortissement même si des couplages existent et sont observés expérimentalement. Cette simplification est souvent faite lorsque la structure est faiblement dissipative et que ses fréquences propres sont bien séparées. L'hypothèse de comportement linéaire élastique suggère que l'impact est d'intensité suffisamment faible pour ne pas modifier les propriétés matériau (e.g. endommagement, plastification) ni engendrer de grandes déformations ou grands déplacements. On reviendra sur la validité de ces hypothèses pour les structures impactées étudiées dans les Chapitres 6 et 7.

On a montré que la formulation du problème de localisation d'une excitation en termes de participations modales est linéaire alors que sa formulation directe ne l'est pas puisque le point d'application  $F$  intervient dans des termes non-linéaires. Par suite, l'idée a été de montrer qu'il existe un lien bijectif simple entre le point d'application de l'excitation et le vecteur de participation modale qui permet de retrouver de façon unique  $F$  lorsque  $\mathbf{X}_F$  est connu, ou plus généralement lorsque  $\lambda\mathbf{X}_F$  est connu avec  $\lambda \neq 0$ . Ce lien bijectif traduit le fait que le point d'application de l'excitation détermine de façon unique les proportions dans lesquelles les modes de vibration sont excités. Cela rejoint l'expérience qui montre qu'appliquer une même force d'impact sur une structure en deux points différents produit des vibrations différentes. **On peut appeler ce phénomène la signature vibratoire du point d'impact.** En effet, le vecteur de participation modale est en bijection avec le point d'application de l'excitation. La réponse vibratoire d'un capteur placé en n'importe quel point de la structure est ainsi modulée par un même vecteur de participation modale.

---

4. En fait cette hypothèse n'est pas indispensable si l'on filtre la composante continue des mesures vibratoires. On filtre ainsi le mouvement de corps rigide pour ne garder que le mouvement vibratoire qui peut nous renseigner sur l'impact appliqué.

## CHAPITRE 2. ETUDE SUR LA POSSIBILITÉ D'IDENTIFIER UN IMPACT À PARTIR DE LA RÉPONSE LIBRE D'UNE STRUCTURE À $N$ DEGRÉS DE LIBERTÉ

---

L'approche développée pour la localisation est donc ponctuelle, contrairement aux techniques de triangulation qui nécessitent par construction plusieurs capteurs (voir section 1.3.1).

Concernant le problème de reconstruction de la force d'impact, on a commencé par montrer que l'intensité de l'impact pouvait facilement être évaluée à l'aide du vecteur de participation modale amplifiée  $\mathbf{Z}_F$ . Il suffit pour cela de localiser dans un premier temps le point d'application  $F$  de l'excitation en recherchant l'unique colonne de  $\Phi^T$  qui est colinéaire à  $\mathbf{Z}_F$ . Le coefficient de colinéarité est alors précisément l'intensité de l'impact. En revanche, on a mis en évidence qu'il était impossible, en général, de reconstituer l'évolution temporelle unitaire  $\psi$  de la force d'impact. En effet, dans le cas où l'excitation appliquée est un impact, c'est-à-dire une excitation suffisamment brève et intense pour produire des oscillations, on a montré que la réponse vibratoire peut raisonnablement se modéliser par une somme de sinusoides amorties exponentiellement. Ces oscillations amorties libres, qui constituent la majorité de la réponse vibratoire mesurable, ne donnent qu'une information réduite sur l'impact qui a été appliqué. En effet, l'information restante sur l'excitation  $\psi$  est un ensemble de  $N$  couples de réels  $(K_i, \tau_i)$ . Or, il est en général impossible de remonter à une fonction scalaire à partir de la donnée d'un ensemble fini de réels, à moins que celle-ci ne soit paramétrée par un petit nombre de paramètres. C'est pour cette raison que nous étudierons au Chapitre 5 la possibilité de reconstruire la force d'impact appliquée sous la forme d'une loi paramétrée. Cela permettra de plus d'utiliser des procédures beaucoup moins coûteuses en temps de calcul.

Cependant, on a supposé tout au long de ce chapitre que les  $N$  composantes de  $\mathbf{L}_F$  et  $\mathbf{X}_F$  étaient connues exactement. Dans la pratique, seul un nombre réduit de modes de vibration est disponible et on n'a accès qu'à une matrice modale tronquée. Le chapitre suivant est consacré à l'adaptation de notre approche dans la situation où seul un nombre  $p \ll N$  de modes de vibration est disponible.

## Chapitre 3

# Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA tronqué

**Résumé** : Dans le chapitre précédent, tous les coefficients du modèle de réponse associés aux  $N$  degrés de liberté de la structure étaient supposés connus, ce qui est impossible dans la pratique. L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode permettant de localiser une excitation et d'estimer son intensité à partir du VPMA tronqué sur une famille réduite de modes de vibration. L'idée nouvelle a été d'introduire l'hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants (FMD) dont les contributions déterminent complètement le point d'application d'une excitation. On propose différentes méthodes d'identification d'une FMD suivant que la structure soit considérée continue ou discrétisée. En particulier, on montre que les trois modes de flexion  $\phi_{1,1}$ ,  $\phi_{1,2}$  et  $\phi_{2,1}$  d'une plaque simplement supportée sur ses bords forment une FMD minimale et globale. Par suite, une procédure de discrimination basée sur des calculs d'angles est développée pour localiser un voisinage du point d'application d'une excitation et estimer son intensité à partir du VPMA tronqué sur une FMD. On détermine les noyaux du problème de localisation d'une excitation à  $\epsilon$ -près et du problème d'estimation de son intensité à  $r\%$ -près. L'étude montre que le noyau du problème de localisation est non borné, ce qui est très favorable pour la robustesse de la procédure de localisation.

### 3.1 Mise en évidence du phénomène de signature vibratoire du point d'application d'une excitation

Dans le domaine de la télédétection, une signature se définit par l'ensemble des éléments qui permettent de caractériser un objet ou certaines de ses propriétés par un capteur<sup>1</sup>. Dans le cas qui nous occupe, l'objet est une excitation appliquée sur une structure, la propriété recherchée est son point d'application, et nous utilisons un capteur permettant de mesurer la réponse de cette structure en un point (mesures de déplacements, vitesses ou accélérations).

On a évoqué en section 2.5 l'idée d'une signature vibratoire caractérisant le point d'application d'une excitation à partir de mesures vibratoires en un point. En effet, la connaissance des participations de tous les modes de vibration d'une structure discrétisée, mathématiquement l'identification du vecteur de participation modale  $\mathbf{X}_F$ , caractérise complètement le point d'application de l'excitation. Il y a un lien bijectif entre le point d'application  $F$  et son image  $\mathbf{X}_F$  dans la réponse vibratoire mesurée en un point. Dans la pratique, il est clair que tous les modes de vibration de la structure discrétisée ne sont pas connus et que seul un nombre  $p \ll N$  de modes sont disponibles. Notre démarche consiste à savoir s'il est possible de définir la signature vibratoire du point d'application d'une excitation à partir des contributions d'un nombre réduit de modes de vibration. Autrement dit, nous allons chercher les conditions dans lesquelles il est possible d'établir un lien bijectif entre le point d'application  $F$  d'une excitation et les participations de  $p$  modes de vibration au travers d'un vecteur de participation modale tronqué. On étendra naturellement en section 3.2.2 le phénomène de signature vibratoire pour une structure continue puisqu'on ne considérera qu'un nombre fini de modes de vibration.

Commençons par mettre en évidence, de façon intuitive et naïve, la possibilité de réduire l'information à identifier pour caractériser le point d'application d'une excitation. Imaginons pour cela que la structure étudiée est un piano accordé, et qu'on dispose d'un microphone pour enregistrer le son d'une touche jouée. On se convainc aisément qu'il existe un lien bijectif entre la note fondamentale du signal sonore enregistré et la touche jouée,

---

1. Définition Wikipedia d'une signature en télédétection.

### CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU VPMA TRONQUÉ

---

i.e. le point d'application de l'excitation. Par exemple, si la note fondamentale identifiée est un La 440Hz, alors on en déduit la touche qui a été jouée. Bien sûr, la signature du point d'application est ici acoustique au sens où le capteur utilisé, le microphone, est de nature acoustique. Cependant, cette signature acoustique est bien l'image de la signature vibratoire recherchée : le son enregistré est dû aux vibrations du mécanisme lié à la touche jouée qui se communiquent à l'air de la caisse de résonance du piano. Remarquons que, par construction, le piano a un accordage dissymétrique si bien que le microphone peut être placé n'importe où. Si deux touches du piano étaient identiques, alors la position du microphone aurait son importance : le temps d'arrivée du signal sonore au microphone, si celui-ci n'est pas à équidistance des touches identiques, permettrait de discriminer la touche jouée.

Etudions maintenant de façon plus rigoureuse le cas d'une poutre en flexion simplement supportée sur ses extrémités subissant une excitation  $f$  en un point quelconque  $F$  (voir Figure 3.1).

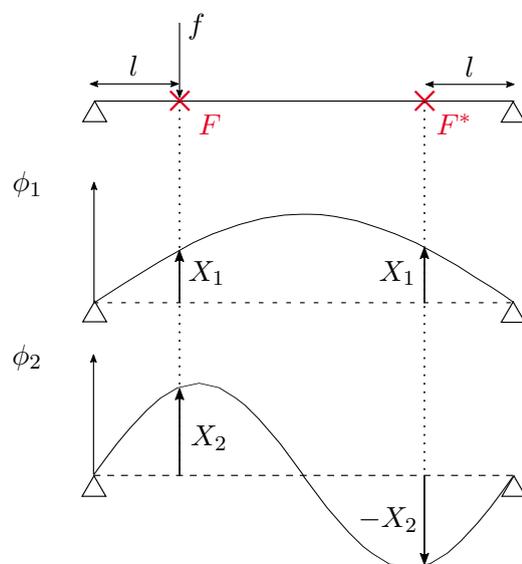


FIGURE 3.1 – Discrimination du point d'application à partir du vecteur de participation modale tronqué aux deux premiers modes de flexion.

Commençons par supposer que seule la contribution  $X_1$  du premier mode de vibration en flexion est connue. Par définition  $X_1 = \phi_1(F)$  et comme  $\phi_1$  est symétrique alors une

excitation qui aurait eu lieu au point  $F^*$ , symétrique de  $F$  par rapport au centre de la poutre, aurait aussi conduit à la contribution  $X_1 = \phi_1(F) = \phi_1(F^*)$ . Néanmoins, on remarque que la connaissance de la contribution du premier mode dans la réponse permet déjà de se restreindre à deux points candidats possibles<sup>2</sup>. Si maintenant on suppose que la contribution  $X_2$  du deuxième mode de vibration en flexion est connue, alors puisque  $\phi_2$  est antisymétrique on a  $\phi_2(F^*) = -\phi_2(F)$  qui permet de discriminer le point  $F^*$ . En conclusion, la connaissance du vecteur de participation modale tronqué  $\mathbf{X}_F = (X_1 \ X_2)^T$  permet de remonter de façon unique au point d'application  $F$  de l'excitation  $f$  : c'est le seul point auquel peut avoir lieu une excitation quelconque pour exciter les deux premiers modes dans une proportion  $(X_1 \ X_2)$  donnée.

Le point d'application d'une excitation appliquée sur une poutre simplement supportée, considérée en tant que structure continue, admet donc une signature vibratoire réduite aux contributions des deux modes de vibration en flexion. Cependant, celle-ci ne peut pas être identifiée si le capteur est positionné au milieu de la poutre qui est un noeud modal du deuxième mode de vibration en flexion. La réponse du capteur serait en effet identique que l'excitation soit appliquée au point  $F$  ou au point  $F^*$ . On étudiera en détail le problème du placement du capteur pour l'identification du vecteur de participation modale tronqué en section 5.3.3.

### 3.2 Hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants pour réduire la dimension du problème de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité

On a vu dans la section précédente qu'il n'était pas toujours nécessaire de connaître les contributions de tous les modes de vibration dans la réponse pour déterminer le point d'application d'une excitation. Cela dépend bien sûr de la structure étudiée, et on a vu dans le cas d'une poutre simplement supportée sur ses extrémités que les deux premiers modes en flexion permettent de complètement caractériser le point d'application d'une excitation. C'est ce que nous appelons des modes de vibration discriminants puisqu'il suffit d'identifier

---

2. En pratique, on verra que cela est impossible à réaliser puisque les contributions ne sont toujours connues qu'à un facteur près. Il faut connaître au moins deux contributions pour que leur rapport soit indépendant du facteur en question et permette de discriminer le point d'application de l'excitation.

leurs contributions dans la réponse pour discriminer le point d'application de l'excitation. La dimension du problème de localisation formulé en termes de participations modales est donc significativement réduite lorsqu'une famille de modes discriminants (FMD) est connue. On verra en section 5.3.1 que réduire la dimension du problème d'estimation du VPMA permet non seulement de gagner en temps de calcul mais également en robustesse. Le cas de la poutre simplement supportée sur ses extrémités a ceci de particulier que la FMD formée des deux premiers modes de flexion permet de localiser une excitation appliquée en n'importe quel point de la poutre. On verra que cette situation n'est pas isolée (e.g. poutres et plaques avec différentes conditions aux limites) mais qu'il n'est a priori pas certain qu'il existe une FMD de ce type pour toute structure parmi les modes de vibration connus. Cela compris, on peut envisager deux définitions d'une FMD :

**FMD globale :** Les contributions des modes discriminants caractérisent complètement la localisation d'une excitation appliquée en n'importe quel point de la structure,

**FMD partielle :** Les contributions des modes discriminants caractérisent la localisation d'une excitation appliquée en certains points de la structure.

La première définition, plus puissante mais moins générale que la seconde, s'est avérée applicable pour la majorité des structures simples étudiées. On montrera en section 3.2.4 en quoi les modes connus ne permettent pas toujours de former une FMD globale et on utilisera une FMD partielle dans le Chapitre 7.

Dans les sections suivantes, on va définir les grandeurs tronquées avant de proposer des caractérisations d'une FMD, suivant que la structure soit considérée continue ou discrétisée. On proposera en section 3.4 un algorithme permettant de rechercher une FMD à partir de la connaissance d'un nombre réduit de modes de vibration connus d'une structure.

### 3.2.1 Projection du modèle de réponse sur une famille de modes de vibration connus

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose n'avoir accès qu'à un nombre fini  $p$  de modes de vibration de la structure étudiée, avec  $p < N$  lorsqu'on considérera une structure discrétisée à  $N$  degrés de liberté. Pour simplifier les notations, on suppose sans perte de

généralité que les modes de vibration connus de la structure sont les  $p$  premiers<sup>3</sup>  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$ .

On appelle réponse tronquée aux  $p$  modes sélectionnés le signal défini par :

$$\tilde{q}(t) = \sum_{i=1}^p \phi_i(C) \phi_i(F) (f\psi * g_i)(t) \quad (3.1)$$

qui correspond à la projection de la réponse complète sur la famille des modes propres sélectionnés<sup>4</sup>. On rappelle que  $\psi$  désigne l'évolution temporelle unitaire de l'excitation et  $f$  son intensité (voir section 2.2). Dans le cas d'une structure discrétisée admettant  $N$  degrés de liberté, on note  $\tilde{\Phi}$  la matrice modale tronquée de taille  $N \times p$ . On conserve cependant les notations  $\mathbf{L}_\psi$  pour l'image de  $\psi$  dans le signal tronqué,  $\mathbf{X}_F$  et  $\mathbf{Z}_F = f\mathbf{X}_F$  pour désigner le VPM et le VPMA tronqués de tailles  $p \times 1$ . Les formes des modèles de réponse (2.9) et (2.10) sont donc préservées en projection sur la famille de modes sélectionnés en remplaçant formellement  $q$  par  $\tilde{q}$ .

Signalons que la réponse tronquée (3.1) n'a en général aucune raison d'être proche de la réponse complète. On sait cependant d'après [Gmür 2012] que lorsque l'excitation appliquée est un Dirac, les contributions des modes propres d'ordre élevé deviennent vite négligeables lorsque la distribution des pulsations propres  $\omega_i$  est large puisque les termes de la série sont en  $\frac{1}{\omega_i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t}$ .

### 3.2.2 Définition d'une FMD par la propriété d'intersection des lignes de vibration au point d'application d'une excitation arbitraire

Dans cette section, on considère une structure continue soumise à une excitation d'intensité  $f$  en un point quelconque  $F$ , dont  $p$  modes de vibration  $\phi_1, \dots, \phi_p$  sont connus. On note  $S$  l'ensemble des points de la structure qui ne sont pas bloqués par des conditions aux limites. L'objectif est de donner une caractérisation d'une FMD pour une structure continue, sachant que les contributions des modes de vibration ne peuvent être connues qu'au facteur  $f$  près en utilisant l'approche envisagée en section 2.2 pour localiser une excitation et estimer son intensité à partir du VPMA. L'idée originale est de montrer que le point d'application de l'excitation est toujours un point d'intersection de certaines lignes de

---

3. Cela permet d'éviter d'écrire  $(\phi_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq p}$  où  $\sigma$  désigne la sélection de modes.

4. La relation est valide pour des modes de vibration normalisés par rapport aux masses modales (voir section 2.1).

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

vibration. **On suppose  $p > 2$  et on traitera le cas  $p = 2$  dans la section 3.4.1.**

Le vecteur de participation modale amplifié peut toujours se définir pour une structure continue en se limitant aux contributions des  $p$  modes de vibration connus :

$$\mathbf{Z}_F = f (\phi_1(F) \dots \phi_p(F))^T \quad (3.2)$$

De façon analogue à la démarche utilisée pour la poutre en section 3.1, on cherche à déterminer quels sont les points de la structure auxquels auraient pu avoir lieu l'excitation pour exciter les  $p$  modes connus dans les proportions données par  $\mathbf{Z}_F$ .

Supposons que  $\mathbf{Z}_F$  est non nul. Sans perte de généralité, supposons  $\phi_1(F) \neq 0$  si bien que :

$$\mathbf{Z}_F \propto \left( 1 \frac{\phi_2(F)}{\phi_1(F)} \dots \frac{\phi_p(F)}{\phi_1(F)} \right)^T \quad (3.3)$$

On est conduit à rechercher les points  $M \in S$  auxquels auraient pu avoir lieu l'excitation pour que les modes de vibration  $\phi_1, \dots, \phi_p$  soient excités suivant les proportions respectives  $\lambda_2 = \phi_2(F)/\phi_1(F), \dots, \lambda_p = \phi_p(F)/\phi_1(F)$ . Cela nous amène à généraliser la notion de ligne nodale à celle de ligne d'iso-proportion  $\lambda$  entre les modes  $j$  et  $i$  :

**Définition 3.2.1** (Ligne d'iso-proportion). *On appelle ligne d'iso-proportion  $\lambda$  entre les modes  $j$  et  $i$  le lieu des points de la structure défini par  $L_{j/i}(\lambda) = \{M \in S \mid \phi_j(M) = \lambda \phi_i(M)\}$ .*

**Remarque 3.2.1.** *La ligne nodale du mode  $\phi_i$  se déduit de la définition en prenant  $j = i$  et  $\lambda = 0$ . On la note  $L_i(0)$ .*

**Remarque 3.2.2.**  *$L_{j/i}(\lambda)$  caractérise précisément l'ensemble des points  $M$  de la structure auxquels peut avoir lieu une excitation pour que les modes  $\phi_j$  et  $\phi_i$  soient excités dans une proportion  $\lambda$  donnée. La coordonnée  $j$  du VPMA, divisée par la coordonnée  $i$  supposée non nulle, est alors  $\lambda$ .*

**Remarque 3.2.3.** *On parlera de ligne de vibration lorsqu'on ne précisera pas les modes de vibration considérés ni la proportion  $\lambda$ .*

D'après (3.3) le point  $F$  est un point d'intersection de  $p - 1$  lignes de vibration<sup>5</sup> :

$$F \in \bigcap_{j=2}^p L_{j/1}(\lambda_j) \quad (3.4)$$

Cela compris, la famille de modes est une FMD sur  $S \setminus L_1(0)$  si pour tout  $F \in S \setminus L_1(0)$  on a l'égalité  $\bigcap_{j=2}^p L_{j/1}(\lambda_j) = \{F\}$ , avec  $\lambda_j = \phi_j(F)/\phi_1(F)$ . La famille de modes est donc une FMD sur  $S \setminus L_1(0)$  si et seulement si les lignes d'iso-proportion associées à un point quelconque  $F \in S \setminus L_1(0)$  se coupent en un unique point. Le point d'intersection est alors nécessairement le point  $F$  d'après (3.4).

Supposons que  $\mathbf{Z}_F$  est nul. Dans ce cas, on peut dire que l'excitation a eu lieu au croisement des  $p$  lignes nodales  $L_i(0)$  des modes retenus :

$$F \in \bigcap_{j=1}^p L_j(0) \quad (3.5)$$

Une condition nécessaire pour qu'une famille de modes soit discriminante est donc que l'intersection de ses lignes nodales soit vide<sup>6</sup> ou réduite à un point. On retient donc les définitions suivantes :

**Définition 3.2.2** (FMD partielle). *Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration d'une structure et  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Soit  $\mathcal{Z} \subset S \setminus L_k(0)$ . On dit que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille de modes discriminants (FMD) sur  $\mathcal{Z}$  si pour tout  $F \in \mathcal{Z}$  on a  $\bigcap_{j=1, j \neq k}^p L_{j/k}(\lambda_{jk}) = \{F\}$ , avec  $\lambda_{jk} = \phi_j(F)/\phi_k(F)$ . On dit alors que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD partielle sur  $\mathcal{Z}$ .*

**Définition 3.2.3** (FMD globale). *On dit que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD globale de la structure si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- i) *L'intersection des lignes nodales  $\bigcap_{i=1}^p L_i(0)$  est vide ou réduite à un point,*
- ii) *Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  la famille  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD sur  $S \setminus L_j(0)$ .*

**Remarque 3.2.4.** *En pratique, il n'est pas toujours nécessaire de vérifier ii) pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , par exemple s'il existe une déformée qui ne s'annule pas sur  $S$ .*

---

5. C'est un résultat général qui ne dépend pas du type d'excitation appliquée ni des modes retenus dans l'analyse.

6. Bien sûr, si elle est vide la situation où  $\mathbf{Z}_F$  est nul ne se présente pas.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

Utilisons la caractérisation précédente pour montrer qu'une plaque simplement supportée sur ses bords admet une FMD globale constituée de trois modes. On considère une plaque rectangulaire métallique de dimensions  $a \times b$  subissant une excitation normale à son plan en un point quelconque  $F = (x_F, y_F) \in S = ]0, a[ \times ]0, b[$ . On montre dans [Leissa 1969] que les modes de vibration en flexion  $\phi_{i,j}$  d'une telle plaque sont de la forme :

$$\phi_{i,j}(x, y) \propto \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.6)$$

La déformée du premier mode de vibration  $\phi_1 = \phi_{1,1}$  ne s'annule donc que sur les bords de la plaque. Or, nous avons supposé que l'excitation est normale au plan de la plaque et hors d'un bord donc le premier mode est nécessairement excité, soit  $\phi_1(F) \neq 0$ . On pose alors  $\lambda_2 = \phi_2(F)/\phi_1(F)$ ,  $\lambda_3 = \phi_3(F)/\phi_1(F)$  (avec  $\phi_2 = \phi_{1,2}$  et  $\phi_3 = \phi_{2,1}$ ) et on montre que :

$$\begin{aligned} L_{2/1}(\lambda_2) &= \{(x, y) \in S \mid y = y_F\} \\ L_{3/1}(\lambda_3) &= \{(x, y) \in S \mid x = x_F\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

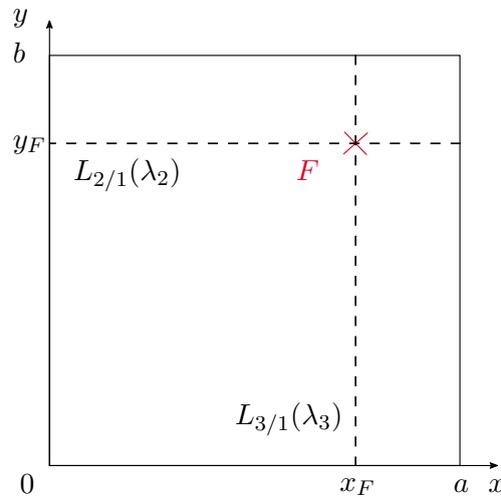


FIGURE 3.2 – Intersection de deux lignes d'iso-proportion d'une plaque au point d'application d'une excitation.

On en déduit d'une part que les lignes de vibration sont des lignes verticales ou horizontales (voir Figure 3.2), et d'autre part que  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est une FMD globale. La Figure 3.3 représente les déformées modales de ces trois modes de flexion.

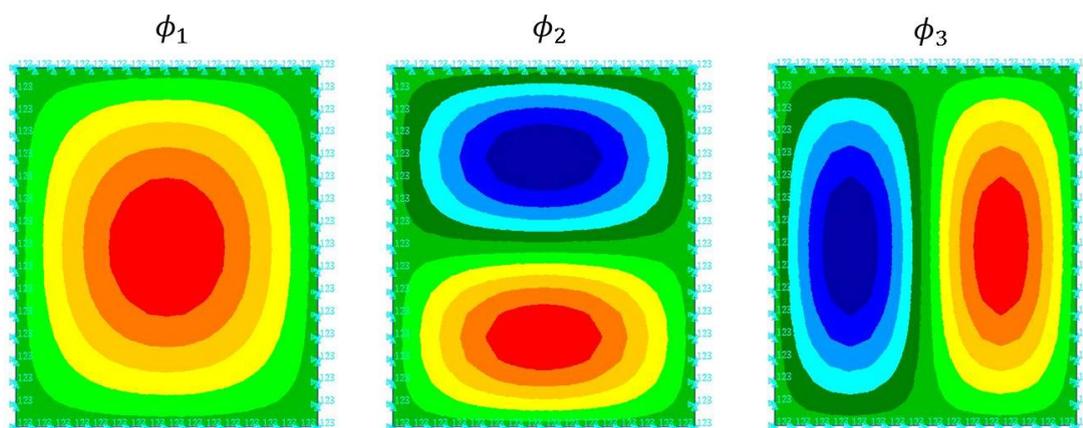


FIGURE 3.3 – Déformées des trois modes de flexion  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  formant une FMD globale d'une plaque simplement supportée sur ses bords.

Intuitivement, le mode  $\phi_1$  sert de référence non uniforme, le mode  $\phi_2$  permet de discriminer les moitiés haute/basse de la plaque, et le mode  $\phi_3$  permet de discriminer les moitiés droite/gauche. Remarquons que la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  n'est pas nécessairement formée de modes de vibration dont les fréquences propres associées se suivent. Si la dimension  $b$  de la plaque est suffisamment grande par rapport à la dimension  $a$  on peut avoir  $\omega_{1,3} \leq \omega_{2,1}$ . Il est remarquable que seulement trois modes de vibration soient suffisants pour discriminer n'importe quel point d'application d'une excitation arbitraire appliquée sur une plaque simplement supportée sur ses bords. En fait, on va montrer dans la section suivante que c'est le nombre minimum de modes dont peut être constituée une FMD pour une structure 2D.

### 3.2.3 Nombre minimum de modes formant une FMD d'une structure continue suivant la dimension de son paramétrage géométrique

On considère une structure continue dont la géométrie peut se paramétrer par  $d$  variables<sup>7</sup>  $x_1, \dots, x_d$ , avec chaque  $x_i$  pouvant prendre valeur dans un intervalle quelconque d'extrémités  $a_i$  et  $b_i$  avec  $a_i < b_i$ . On dit alors que le paramétrage géométrique de la structure est de dimension  $d$ . Par exemple, une poutre a un paramétrage géométrique de dimension  $d = 1$  tandis qu'une plaque et un cylindre ont un paramétrage géométrique de dimension

<sup>7</sup> Le résultat qu'on va établir est valable pour  $d \geq 1$  mais il est évident qu'en pratique on aura  $d \leq 3$ .

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

$d = 2$ . L'objectif est de montrer qu'il existe un nombre minimum de modes que l'on doit considérer pour former une FMD d'une structure continue<sup>8</sup>.

**Théorème 3.2.1.** *Soit une structure de dimension géométrique  $d$  et  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration. On a l'implication suivante :*

$$(\phi_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ est une FMD} \Rightarrow p \geq d + 1$$

*Démonstration.* On suppose que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD. On note  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  le produit cartésien des  $d$  intervalles de variation des  $x_i$ . Par exemple  $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  si tous les intervalles considérés sont fermés. Pour  $i = 1, \dots, p$ , on note  $\phi_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \mapsto \phi_i(M)$  l'application continue donnant la déformée d'un des  $p$  modes de vibration connus de la structure. On note  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$  un ouvert sur lequel  $\phi_1$  ne s'annule pas. On définit  $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$ ,  $M \mapsto \lambda(M) = (\phi_2(M)/\phi_1(M) \dots \phi_p(M)/\phi_1(M))$ . Par hypothèse, les modes considérés forment une FMD. La section 3.2.2 nous apprend que les proportions suivant lesquelles les modes de vibration sont excités sont uniques par rapport au point d'application. L'application continue  $\lambda$  est donc injective :  $\lambda(P) = \lambda(Q) \Rightarrow P = Q$ . La question est donc de savoir si l'on peut avoir une injection continue d'un ouvert  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  vers  $\mathbb{R}^{p-1}$ . D'après le théorème de Brouwer [nLab authors 2018], il existe une injection continue de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^{p-1}$  si et seulement si  $p - 1 \geq d$ . C'est donc une condition nécessaire pour que l'application  $\lambda$  qui nous intéresse soit une injection continue.  $\square$

La preuve du théorème précédent introduit la notion importante d'application proportion :

**Définition 3.2.4** (Application proportion). *Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de modes de vibration d'une structure de dimension géométrique  $d$ . Soit  $\mathcal{C}_j$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  sur lequel un mode quelconque  $\phi_j$  ne s'annule pas. On appelle application proportion l'application continue  $\lambda_j : \mathcal{C}_j \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$  définie par :*

$$M \mapsto \lambda_j(M) = \left( \frac{\phi_1}{\phi_j}(M), \dots, \frac{\phi_{j-1}}{\phi_j}(M), \frac{\phi_{j+1}}{\phi_j}(M), \dots, \frac{\phi_p}{\phi_j}(M) \right)$$

**Propriété 3.2.1.** *Si  $\lambda_j$  est injective sur  $\mathcal{C}_j$  alors  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD sur  $\mathcal{C}_j$ .*

---

<sup>8</sup>. L'hypothèse de structure continue est indispensable pour utiliser la continuité de l'application  $\lambda$ . Pour une structure discrétisée on peut trouver une FMD sans vérifier la relation (3.2.1) puisqu'il suffit que la caractérisation géométrique décrite en section 3.2.3 soit vérifiée.

**Remarque 3.2.5.** *L'exigence d'injectivité traduit celle d'intersection réduite à un point dans la définition donnée en section 3.2.2.*

**Remarque 3.2.6.** *On dit qu'une FMD est minimale lorsque  $p = d + 1$ .*

**Exemple 3.2.1.** *Les modes de flexion  $\phi_{1,1}, \phi_{1,2}$  et  $\phi_{2,1}$  forment une FMD minimale (et globale) de la plaque simplement supportée sur ses bords ( $d = 2$  et  $p = 3$ ).*

Compte tenu de ce qui précède, une FMD pour une structure continue 2D contient au moins trois modes. Pour s'en convaincre en images, supposons qu'on peut paramétrer la structure par un couple  $(x, y) \in \mathcal{P} = [0, 1]^2$ . On va choisir deux modes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et on va montrer que  $(\phi_1, \phi_2)$  ne peut pas être une FMD (raisonnement par contraposée). On suppose pour simplifier que les conditions aux limites sont sur les bords et qu'un mode  $\phi_1$  ne s'annule pas en dehors des bords. On considère un deuxième mode quelconque  $\phi_2$ . La fonction de proportion  $\lambda = \phi_2/\phi_1$  est continue et définie sur  $\mathcal{C} = ]0, 1[^2$ . On note  $\mathcal{D} = \lambda(\mathcal{C}) = ]\lambda_m, \lambda_M[$  et  $\lambda_0 \in \mathcal{D}$ . Lorsque  $(x, y)$  parcourt  $\mathcal{C}$ ,  $\lambda$  décrit une surface dans  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  qui admet une ligne de niveau  $\lambda_0$  (voir Figure 3.4). La valeur  $\lambda_0$  est donc prise plusieurs fois donc  $\lambda$  n'est pas injective, donc  $(\phi_1, \phi_2)$  n'est pas une FMD.

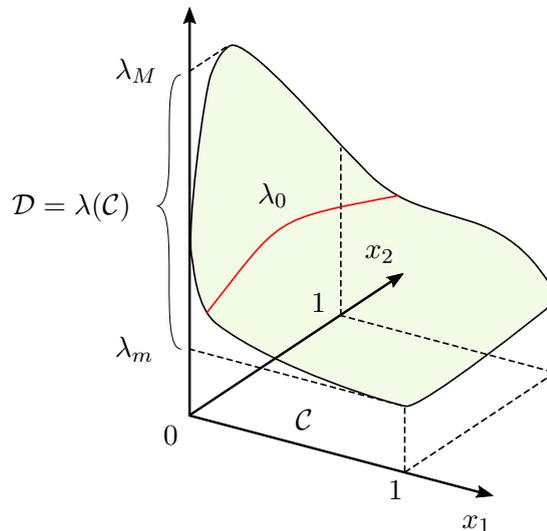


FIGURE 3.4 – Non injectivité de  $\lambda : \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ .

### 3.2.4 Caractérisation géométrique de la matrice modale tronquée sur une FMD

Dans cette section, on considère une structure discrétisée admettant  $N$  degrés de liberté soumise à une excitation quelconque au  $ddl$  indexé  $F$ . On suppose que le  $ddl$  indexé  $F$  est un degré de liberté de déplacement et que les  $N$  degrés de liberté considérés sont des degrés de liberté en déplacement (quitte à retirer toutes les lignes de la matrice modale tronquée correspondant à des degrés de liberté en rotation). L'objectif de cette section est de caractériser la matrice modale lorsqu'elle est tronquée sur une FMD.

La matrice modale tronquée  $\tilde{\Phi}$  s'obtient en sélectionnant  $p$  colonnes de la matrice inversible  $\Phi$ , et donc  $\tilde{\Phi}$  est de rang  $p$ .  $\tilde{\Phi}^T$  est également de rang  $p$ . Il existe donc  $p$  colonnes indépendantes de  $\tilde{\Phi}^T$  et les  $(N - p)$  colonnes restantes en sont des combinaisons linéaires (éventuellement nulles). Ainsi, il n'y a aucune raison pour que  $\mathbf{Z}_F = f\phi_F^*$  ne soit colinéaire qu'à la seule colonne  $F$  de  $\tilde{\Phi}^T$ . Lorsque c'est le cas, cela signifie précisément que la famille de modes retenus est une FMD. On retient donc la définition suivante d'une FMD pour une structure discrétisée :

**Définition 3.2.5** (FMD d'une structure discrétisée). *Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration d'une structure discrétisée à  $N$  degrés de liberté. On note  $\mathcal{Z} \subset \llbracket 1, N \rrbracket$  un ensemble d'indices repérant certains degrés de liberté de la structure dans la matrice modale tronquée. On dit que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD sur  $\mathcal{Z}$  si pour tout  $i \in \mathcal{Z}$  la colonne  $\phi_i^*$  n'est colinéaire à aucune autre colonne de  $\tilde{\Phi}^T$ . On dit que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD globale si c'est une FMD sur  $\mathcal{Z} = \llbracket 1, N \rrbracket$ .*

**Remarque 3.2.7.** *Cette définition nous assure que  $\mathbf{Z}_F = f\phi_F^*$  est uniquement colinéaire à la colonne indexée  $F$  de  $\tilde{\Phi}^T$ .*

Une famille de  $p$  modes  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une FMD globale si et seulement si la famille associée  $(\phi_i^*)_{1 \leq i \leq N}$  est constituée de vecteurs (de taille  $p$ ) deux-à-deux indépendants. On peut donc déterminer si la famille est discriminante en calculant les angles mutuels entre les  $\phi_i^*$  et en vérifiant s'ils sont non nuls modulo  $\pi$ . Cela nécessite cependant d'effectuer  $\mathcal{C}_2^N$  calculs d'angles, ce qui peut être prohibitif pour  $N$  grand puisqu'alors  $\mathcal{C}_2^N \sim N^2/2$ .

Pour réduire la combinatoire, on va donner une caractérisation géométrique d'une famille

de modes discriminants. Remarquons tout d'abord que si la famille  $(\phi_i^*)_{1 \leq i \leq N}$  est constituée de vecteurs deux-à-deux indépendants alors la famille  $(\phi_i^*/\|\phi_i^*\|)_{1 \leq i \leq N}$  conserve cette propriété. De même, changer un  $\phi_j^*$  en son opposé ne modifie pas non plus cette propriété puisque les angles sont comptés modulo  $\pi$ . Compte tenu de ce qui précède, la propriété suivante est vérifiée par une FMD globale d'une structure discrétisée :

**Propriété 3.2.2.** *Si la famille  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  est associée à une famille de vecteurs  $(\phi_j^*)_{1 \leq j \leq N}$  correspondant à des points distincts d'une demi-sphère unité de dimension  $p$ , quitte à normaliser les  $\phi_j^*$  et à en retourner certains, alors c'est une FMD globale.*

**Remarque 3.2.8.** *On retrouve dans cette caractérisation d'une FMD l'exigence d'injectivité étudiée en section 3.2.3.*

La Figure 3.5 représente une famille de  $N = 6$  vecteurs deux-à-deux indépendants placés dans une demi-sphère unité de dimension  $p = 2$  (demi cercle unité). On présente en section 6.2 une visualisation analogue associée à la plaque étudiée expérimentalement avec  $N = 161$  et  $p = 3$  (sphère unité).

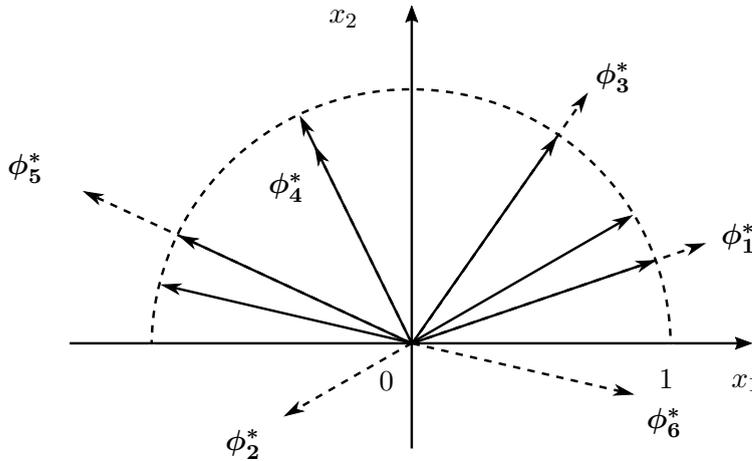


FIGURE 3.5 – Caractérisation géométrique d'une famille de  $p = 2$  modes discriminants d'une structure à  $N = 6$  ddl.

Soit  $\mathcal{S}$  une sphère de dimension  $p$  paramétrée par les variables  $x_1, \dots, x_p$ . On appelle quadrant une partie de  $\mathcal{S}$  pour laquelle les  $x_i$  restent de même signe. Chaque paramètre pouvant être de signe positif ou négatif, une sphère de dimension  $p$  admet donc  $2^p$  quadrants.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

Une demi-sphère s'obtient en ne considérant qu'une partie de  $\mathcal{S}$  pour laquelle un des  $x_i$  reste de signe constant. Une demi-sphère de dimension  $p$  admet donc  $2^{p-1}$  quadrants.

Une famille quelconque de  $p$  modes  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  s'associe à une famille de vecteurs  $(\phi_i^*)_{1 \leq i \leq N}$  représentant des points d'une demi-sphère unité de dimension  $p$ , quitte à les normaliser et à en retourner certains, qui se répartissent dans des quadrants  $Q_1, \dots, Q_{2^{p-1}}$ . Pour savoir si la famille de modes est discriminante, il suffit en fait de vérifier si les  $\phi_i^*$  de chaque quadrant, normés et éventuellement retournés, sont distincts. En notant  $N_i$  le nombre de  $\phi_j^*$  dans le quadrant  $Q_i$ , le nombre  $m$  de comparaisons qu'il faut effectuer au total est donné par  $m = \sum_{i=1}^{2^{p-1}} C_2^{N_i}$ . Si les  $\phi_i^*$  se répartissent uniformément dans chaque quadrant, soit  $N_i = N/2^{p-1}$ , alors  $m = 2^{p-1} \frac{N_i(N_i-1)}{2} \sim \frac{N^2}{2^p}$ . La division de la demi-sphère en quadrants permet donc de diviser le nombre d'opérations à effectuer, et donc de réduire la combinatoire. D'un point de vue géométrique, la décomposition en quadrants correspond à regarder les ensembles de  $ddl$  de la structure dont les déformées des modes discriminants sont de même signe. On représente sur la Figure 3.6 a) les deux quadrants de la poutre associés aux deux modes discriminants  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , et sur la Figure 3.6 b) les quatre quadrants de la plaque associés aux trois modes discriminants  $\phi_{1,1}, \phi_{1,2}$ , et  $\phi_{2,1}$  (voir leurs déformées modales sur la Figure 3.3). On utilisera en pratique la notion de quadrant dans la section 6.3.3.

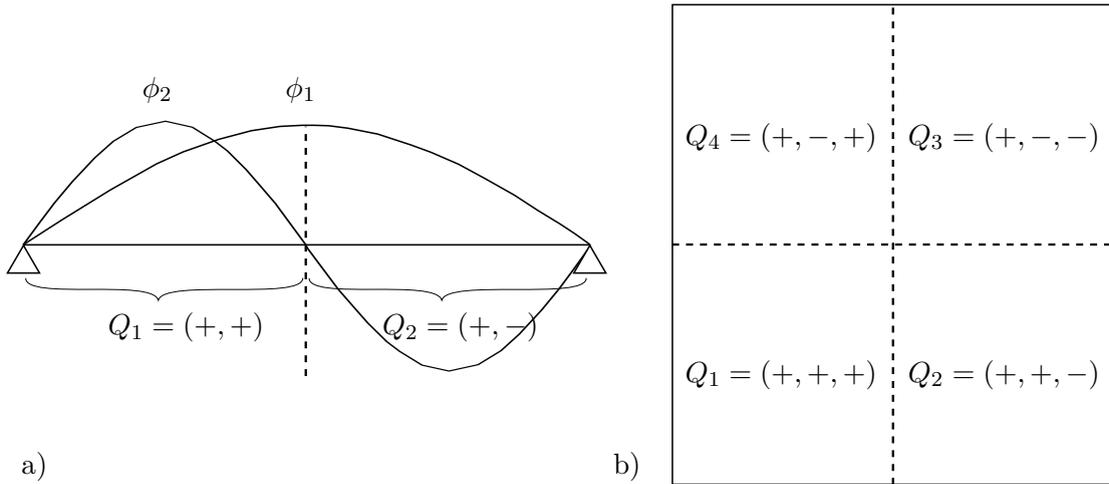


FIGURE 3.6 – a) Quadrants de la poutre associés aux deux modes discriminants  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .  
b) Quadrants de la plaque associés aux trois modes discriminants  $\phi_{1,1}, \phi_{1,2}$ , et  $\phi_{2,1}$ .

Signalons qu'il peut être possible de déterminer en seulement  $N$  opérations si une famille de modes est discriminante ou non. On note  $\sigma_i$  la sélection de signes qui caractérise le quadrant  $Q_i$  de sorte que pour  $j = 1, \dots, p$  on a  $\sigma_i(j) = \pm 1$ . On définit  $\psi_i$  le vecteur milieu du quadrant  $Q_i$  par (voir Figure 3.7) :

$$\psi_i = \frac{\sqrt{p}}{p} (\sigma_i(1) \dots \sigma_i(p))^T \quad (3.8)$$

Si pour  $i = 1, \dots, p$  les angles mutuels entre le vecteur milieu  $\psi_i$  et les  $\phi_j^*$  du quadrant  $Q_i$  sont tous distincts, alors la famille des  $p$  modes est discriminante. Dans ces conditions il suffit donc de réaliser  $N$  calculs d'angles pour vérifier que la famille est discriminante. Si certains angles sont égaux dans un même quadrant, alors il faut comparer deux-à-deux les  $\phi_j^*$ , normés et éventuellement retournés, qui ont donné les mêmes valeurs d'angle avec le vecteur milieu.

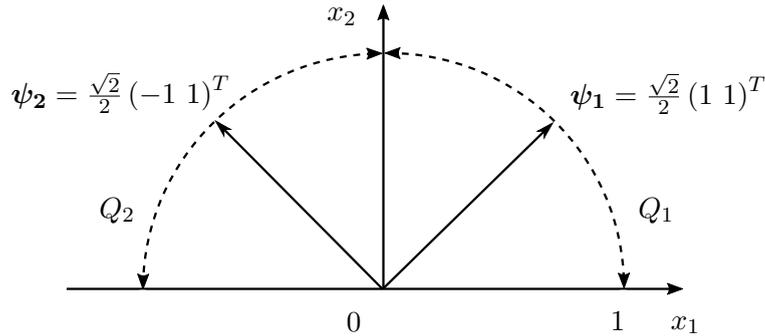


FIGURE 3.7 – Représentation des quadrants et des vecteurs milieu dans le cas  $p = 2$ .

En résumé, le tri en quadrants permet de réduire le nombre d'opérations à effectuer pour déterminer si les modes sélectionnés forment une FMD globale. La matrice modale tronquée  $\tilde{\Phi}$  est alors étudiée par blocs comme illustré sur la Figure 3.8. L'intérêt de cette décomposition en quadrants est de pouvoir identifier les blocs qui contiennent des  $\phi_i^*$  liés et qui nécessitent de rajouter des modes dans l'analyse. Cette idée de décomposer la matrice modale en blocs est à lier avec l'idée de FMD partielle proposée en début de section 3.2. Dans la situation où les  $p$  modes connus ne permettent pas de couvrir toute la structure, c'est-à-dire de localiser une excitation appliquée en un point quelconque, on peut associer une FMD à une zone spécifique de la structure liée à un ensemble de quadrants pour lesquels les  $\phi_i^*$  sont deux-à-deux indépendants.

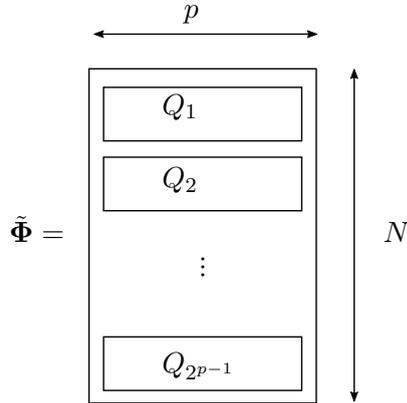


FIGURE 3.8 – Regroupement des lignes de la matrice modale associées aux  $\phi_j^*$  répartis dans les différents quadrants.

### 3.3 Développement d'une méthode de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir d'une estimation du VPMA tronqué sur une FMD

L'intérêt de tronquer sur une FMD est que la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité décrite en section 2.2 avec le VPMA complet (de taille  $N$ ) est inchangée en utilisant le VPMA tronqué (de taille  $p$ ). Le  $ddl$   $F$  auquel est appliquée une excitation d'intensité  $f$  s'obtient en recherchant l'unique colonne de  $\tilde{\Phi}^T$  colinéaire au VPMA tronqué, et le coefficient de colinéarité est précisément l'intensité  $f$  de l'excitation (voir Figure 3.9). La procédure est alors applicable à une structure discrétisée dont quelques modes seulement sont connus. D'un point de vue numérique, la procédure est à moindre coût puisque la dimension est réduite de  $N$  à  $p$ , où  $p$  désigne le nombre de modes dans la FMD.

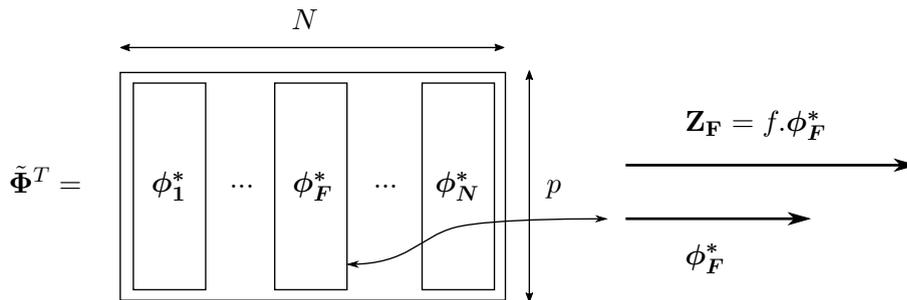


FIGURE 3.9 – Illustration de la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité à partir du VPMA tronqué sur une FMD.

Jusqu'à présent, on a supposé que l'estimation du VPMA était exacte, c'est-à-dire qu'on avait  $\mathbf{Z}_F = f\phi_F^*$ . En pratique, le VPMA est estimé par une procédure numérique utilisant des mesures et une connaissance a priori sur l'excitation appliquée (voir Chapitres 4 et 5). Il est donc toujours entaché d'une erreur, liée en partie à des erreurs de mesure (bruit électronique et de l'environnement), et en partie à des erreurs de modèle (troncature, incertitude sur les propriétés modales des modes connus, comportement faiblement non-linéaire, modèle d'excitation etc). L'objectif de cette section est d'adapter la procédure en tenant compte d'une erreur d'estimation sur le VPMA. Pour cela, on va introduire des paramètres de tolérance qu'on va relier à des exigences de localisation de l'excitation (localisation à  $\epsilon$  près) et de reconstruction de l'intensité (estimation à  $r\%$  près). On note  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  l'estimation disponible du VPMA tronqué et  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  l'erreur d'estimation commise de sorte que :

$$\hat{\mathbf{Z}}_F = \mathbf{Z}_F + \mathbf{e} \quad (3.9)$$

L'objectif des sections suivantes est de déterminer le domaine d'erreur admissible auquel peut appartenir  $\mathbf{e}$  pour ne pas empêcher une localisation de l'excitation à  $\epsilon$  près ou une estimation de son intensité à  $r\%$  près.

### 3.3.1 Introduction d'une tolérance de colinéarité

L'erreur d'identification  $\mathbf{e}$ , si elle n'est pas colinéaire à  $\mathbf{Z}_F$ , modifie l'angle entre  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  et  $\phi_F^*$ , si bien que le point d'application  $F$  ne peut pas être localisé sans précaution en recherchant une colonne de  $\tilde{\Phi}^T$  colinéaire à  $\mathbf{Z}_F$ . En effet, ou bien  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  n'est colinéaire à aucun des  $\phi_i^*$  et la procédure de recherche ne donne aucun résultat, ou bien  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  est colinéaire à un  $\phi_i^*$  correspondant à un point de la structure n'ayant a priori aucune raison d'être proche de  $F$ .

On est donc conduit à introduire une tolérance de colinéarité  $\theta_c \in [0, \pi/4]$  permettant d'assouplir la recherche de points d'application possibles appelés « candidats ». Dans toute la suite on appelle « petit angle » entre deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  l'angle  $\theta \in [0, \pi/2]$  entre la droite engendrée par  $\mathbf{u}$  et le vecteur  $\mathbf{v}$  (voir Figure 3.10). C'est une définition commode pour définir la tolérance de colinéarité qui n'interdira pas que  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  et  $\phi_F^*$  soient de sens opposés pour la localisation de l'excitation à partir du VPMA. La Figure 3.11 récapitule

les différentes notations des petits angles.

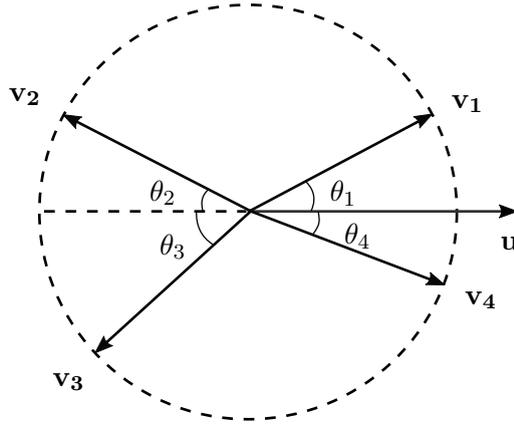


FIGURE 3.10 – Représentation des petits angles  $\theta_i \in [0, \pi/2]$  entre  $\mathbf{u}$  et les  $\mathbf{v}_i$ .

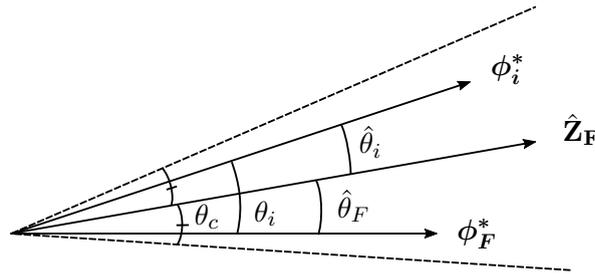


FIGURE 3.11 – Définition des petits angles utilisés.

Si le petit angle  $\hat{\theta}_i \in [0, \pi/2]$  entre  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et  $\phi_i^*$  est plus petit que  $\theta_c$  alors le point  $F_i$  sera parmi les candidats retenus pour le point d'application. La procédure assouplie avec la tolérance de colinéarité peut donc conduire à plusieurs candidats  $F_i$  parmi lesquels figure  $F$  si et seulement si :

$$\hat{\theta}_F \leq \theta_c \tag{3.10}$$

L'unicité de la solution que nous avons en travaillant avec un VPMA exact  $\mathbf{Z}_{\mathbf{F}}$  est donc perdue. Il est cependant nécessaire de procéder ainsi pour autoriser des erreurs d'estimation inévitables en pratique.

### 3.3.2 Noyau du problème de localisation à $\epsilon$ près

Etant donné que la procédure assouplie peut retrouver plusieurs candidats  $F_i$ , nous devons choisir une exigence de proximité  $\epsilon > 0$  pour définir une localisation de  $F$  jugée satisfaisante. On note  $\|F_i - F\|$  la distance euclidienne entre les lieux des *ddl* indexé  $F_i$  et  $F$ . On dira que l'excitation est localisée en  $F$  à  $\epsilon$  près si tous les candidats  $F_i$  vérifient  $\|F_i - F\| \leq \epsilon$ . Cela nous amène à définir la tolérance de colinéarité maximale  $\theta_\epsilon(F)$  garantissant une  $\epsilon$ -localisation du point d'application  $F$  à partir du VPMA exact. Pour cela on note  $\theta_i \in [0, \pi/2]$  le petit angle entre  $\phi_i^*$  et  $\phi_F^*$ . On définit dans un premier temps l'ensemble  $\Theta_\epsilon(F)$  des tolérances de colinéarité admissibles pour localiser  $F$  à  $\epsilon$ -près :

$$\Theta_\epsilon(F) = \{\theta \in [0, \pi/2] \mid \forall i, (\theta_i \leq \theta \Rightarrow \|F_i - F\| \leq \epsilon)\} \quad (3.11)$$

On définit alors la tolérance maximale de colinéarité  $\theta_\epsilon(F) \in \Theta_\epsilon(F)$  permettant de localiser  $F$  à  $\epsilon$ -près :

$$\theta_\epsilon(F) = \sup \Theta_\epsilon(F) \quad (3.12)$$

Finalement, tous les candidats sont proches à  $\epsilon$  près de  $F$  si :

$$\hat{\theta}_F + \theta_c < \theta_\epsilon(F) \quad (3.13)$$

L'inégalité (3.13) montre comme attendu que la tolérance de colinéarité doit être raisonnablement réglée<sup>9</sup> en choisissant :

$$\theta_c < \theta_\epsilon(F) \quad (3.14)$$

La condition 3.13 n'est pas nécessaire puisqu'il peut exister des  $\phi_j^*$  isolés associés à des points  $M_j$  tels que  $\theta_j > \theta_\epsilon(F)$  et  $\|M_j - F\| \leq \epsilon$ . On ne retrouvera donc pas, bien sûr, tous les points proches de  $F$  à  $\epsilon$  près avec cette procédure. C'est ce qu'on représente sur la Figure 3.12. Il ne reste plus qu'à traduire la condition (3.13) par un domaine admissible de l'erreur d'estimation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  commise sur le VPMA.

---

9. Un erreur nulle doit au moins conduire à identifier des candidats proches de  $F$  à  $\epsilon$ -près.

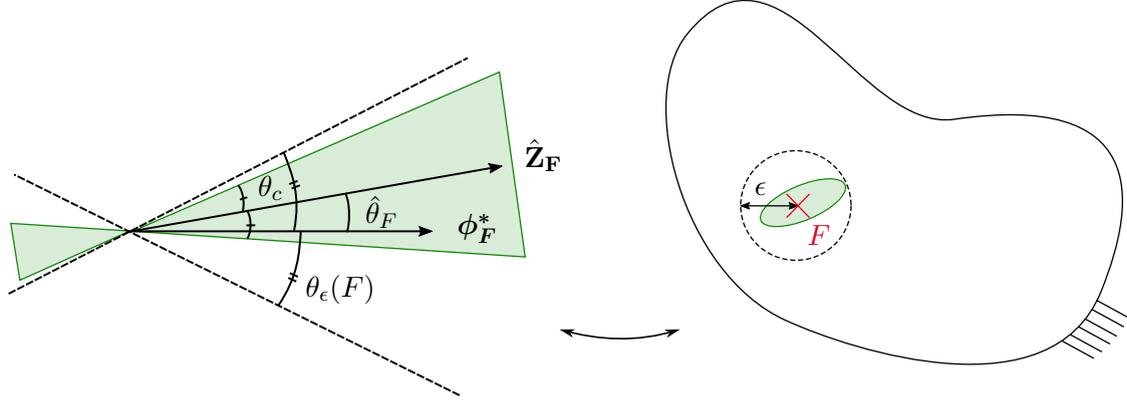


FIGURE 3.12 – Illustration du paramètre de tolérance de colinéarité utilisé pour la localisation à  $\epsilon$ -près du point d'application de l'excitation.

**Définition 3.3.1** (Noyau du problème de localisation). On note  $\mathcal{N}_\epsilon$  le noyau du problème de localisation de  $F$  à  $\epsilon$  près de la procédure défini par :

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p \mid \forall i = 1, \dots, m(\mathbf{e}), \|F_i - F\| \leq \epsilon\}$$

où  $m(\mathbf{e})$  désigne le nombre de candidats  $F_i$  trouvés avec une erreur d'estimation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  commise sur le VPMA.

La Figure 3.12 montre que si  $\mathbf{e} = -f\phi_F^* + \mathbf{y}$  avec  $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$  défini par :

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid \frac{|\mathbf{y}^T \cdot \phi_F^*|}{\|\mathbf{y}\| \|\phi_F^*\|} \leq \cos(\theta_\epsilon(F) - \theta_c)\} \quad (3.15)$$

alors  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}_\epsilon$ .  $\mathcal{C}$  représente en fait le cône de révolution dans  $\mathbb{R}^p$  de sommet l'origine, orienté par  $\phi_F^*$  et de demi-angle d'ouverture  $\theta_\epsilon(F) - \theta_c \in [0, \pi/4]$ . Le noyau  $\mathcal{N}_\epsilon$  contient donc ce même cône translaté par le vecteur  $-f\phi_F^*$ , ce qu'on note :

$$-f\phi_F^* + \mathcal{C} \subset \mathcal{N}_\epsilon \quad (3.16)$$

Le noyau du problème de localisation contient donc un cône de révolution qui a la propriété d'être stable par homothétie au sens suivant : si  $\mathbf{e} = -f\phi_F^* + \mathbf{y} \in \mathcal{N}_\epsilon$  alors  $\mathbf{e}' = -f\phi_F^* + \lambda\mathbf{y} \in \mathcal{N}_\epsilon$  quel que soit  $\lambda$ . Le domaine d'erreur admissible pour la localisation à  $\epsilon$  près n'est donc pas borné, ce qui est très favorable du point de vue de la robustesse de la procédure de localisation.

### 3.3.3 Noyau du problème d'estimation de l'intensité à $r\%$ près

Avec la procédure assouplie définie en section 3.3.1, nous devons<sup>10</sup> maintenant définir une intensité d'excitation  $f_i$  associée à chaque candidat  $F_i$  par le coefficient de colinéarité entre  $\phi_i^*$  et  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  :

$$f_i = \frac{(\phi_i^*)^T \cdot \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}}{\|\phi_i^*\|^2} \quad (3.17)$$

D'après l'étude précédente sur le noyau du problème de localisation, la situation  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = -f\phi_{\mathbf{F}}^*$  ne perturbe pas la localisation à  $\epsilon$  près pourvu que (3.13) soit vérifiée. Elle conduit en revanche à l'identification de  $f_{\mathbf{F}} = -f$  pour le *ddl* indexé  $F$  au lieu de  $f$ . On ne peut donc qu'espérer estimer  $|f|$ . L'objectif de cette section est de déterminer le domaine d'erreur admissible sur  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  permettant de garantir une estimation de  $|f|$  à  $r\%$  près, où  $r$  désigne une exigence de reconstruction.

**Définition 3.3.2** (Noyau du problème d'estimation de l'intensité). *On note  $\mathcal{N}_r$  le noyau du problème d'estimation de l'intensité  $f$  à  $r\%$  près défini par :*

$$\mathcal{N}_r = \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^p \mid \forall i = 1, \dots, m(\mathbf{e}), \left| 1 - \left| \frac{f_i}{f} \right| \right| \leq r \right\}$$

où  $m(\mathbf{e})$  désigne le nombre de couples  $(F_i, f_i)$  trouvés avec une erreur d'estimation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  commise sur le VPMA.

**Remarque 3.3.1.** *En toute rigueur,  $\mathcal{N}_r$  devrait s'appeler le noyau du problème d'estimation à  $r\%$  près de la valeur absolue de l'intensité.*

Il est clair qu'on ne peut pas procéder de la même façon que pour le noyau de localisation en cherchant la tolérance de colinéarité maximale permettant d'identifier des candidats dont les intensités associées par (3.17) soient toutes proches de  $f$  à  $r\%$  près en valeur absolue. En effet, la procédure de localisation est par construction liée à des calculs d'angles qui se relie à la tolérance de colinéarité  $\theta_c$ , alors que la procédure d'estimation de l'intensité est liée aux projections de  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  sur les  $\phi_i^*$ . Il est donc possible que  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et un  $\phi_j^*$  associé à un point  $M_j$  très éloigné de  $F$  soient tels que (3.17) conduise à un  $f_j$  proche de  $f$ . Cependant,

---

10. On pourrait considérer  $f_i = \|\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}\|/\|\phi_{F_i}^*\|$  mais on perdrait l'information sur le signe de l'intensité.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

nous allons montrer qu'étant donnée une tolérance de colinéarité  $\theta_c$  choisie il existe une précision de reconstruction  $r'$  qu'il est possible d'atteindre.

Soit  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}_r$  une erreur sur le VPMA conduisant à l'identification de  $m(\mathbf{e}) \geq 1$  candidat(s).

La relation (3.17) peut s'écrire :

$$f_i = \sigma(i) \frac{\|f\phi_{\mathbf{F}}^* + \mathbf{e}\|}{\|\phi_i^*\|} \cos(\hat{\theta}_i) \quad (3.18)$$

où  $\sigma(i) = \pm 1$  est indiqué car  $\hat{\theta}_i$  est défini comme étant le petit angle (voir section 3.3.1) dans  $[0, \theta_c] \subset [0, \pi/4]$  entre  $\phi_i^*$  et  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  de sorte que  $\cos(\hat{\theta}_i) > 0$ . La condition  $\left|1 - \left|\frac{f_i}{f}\right|\right| \leq r$  se traduit donc par :

$$(1-r)|f| \frac{\|\phi_i^*\|}{\cos(\hat{\theta}_i)} \leq \|f\phi_{\mathbf{F}}^* + \mathbf{e}\| \leq (1+r)|f| \frac{\|\phi_i^*\|}{\cos(\hat{\theta}_i)} \quad (3.19)$$

On cherche maintenant à encadrer les bornes de l'encadrement (3.19) par des quantités qui ne dépendent pas de  $\mathbf{e}$  au travers des  $F_i$  qui sont associés à une erreur  $\mathbf{e}$  donnée. Pour cela on note  $l$  (resp.  $L$ ) la plus petite (resp. plus grande) norme 2 d'une colonne  $\phi_i^*$  de la matrice  $\tilde{\Phi}^T$ . On note de plus :

$$R'_1(r) = (1-r)|f| \frac{L}{\cos(\theta_c)} \quad \text{et} \quad R'_2(r) = (1+r)|f|l \quad (3.20)$$

On désigne par  $\mathcal{B}'_i(r)$  la boule de  $\mathbb{R}^p$  de centre  $-f\phi_{\mathbf{F}}^*$  et de rayon  $R'_i(r)$ . On note  $\mathcal{B}'_2(r) \setminus \mathcal{B}'_1(r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid R'_1(r) \leq \|f\phi_{\mathbf{F}}^* + \mathbf{y}\| \leq R'_2(r)\}$ . Avec ces notations on a :

$$\mathcal{B}'_2(r) \setminus \mathcal{B}'_1(r) \subset \mathcal{N}_r \quad (3.21)$$

L'intérieur entre les deux boules  $\mathcal{B}'_i(r)$  est non vide si et seulement si  $R'_1(r) \leq R'_2(r)$ , ce qui se traduit par :

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \cos(\theta_c) \frac{l}{L} \quad (3.22)$$

Sachant que  $r > 0$ , l'étude de  $r \mapsto \frac{1-r}{1+r}$  montre que la relation 3.22 se traduit par  $r \geq r'$ , avec  $r'$  fonction de  $\theta_c$  défini pour vérifier l'égalité. Cela montre qu'il existe une exigence  $r'$

qu'il est possible d'atteindre pour la tolérance de colinéarité  $\theta_c$  choisie suivant les étirements relatifs des normes des colonnes de  $\tilde{\Phi}^T$ . De façon similaire on note :

$$R_1''(r) = (1 - r)|f|l \quad \text{et} \quad R_2''(r) = (1 + r)|f|\frac{L}{\cos(\theta_c)} \quad (3.23)$$

On a alors :

$$\mathcal{N}_r \subset \mathcal{B}_2''(r) \setminus \mathcal{B}_1''(r) \quad (3.24)$$

D'où l'on conclut finalement que :

$$\mathcal{B}_2'(r) \setminus \mathcal{B}_1'(r) \subset \mathcal{N}_r \subset \mathcal{B}_2''(r) \setminus \mathcal{B}_1''(r) \quad (3.25)$$

La caractérisation (3.21) montre qu'une partie du noyau de reconstruction ne dépend pas de l'orientation de  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  (à lier à  $\theta_c$ ) mais seulement de sa norme (à lier à  $l/L$ ). Autrement dit, l'estimation de l'intensité de l'excitation peut être précise alors que sa localisation a échoué. En effet, lorsque  $\mathbf{e}$  parcourt  $\mathbb{R}^p$ , l'angle  $\hat{\theta}_F$  entre  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et  $\phi_{\mathbf{F}}^*$  parcourt  $[0, \pi/2]$ . Cela compris, il est clair qu'il peut arriver que  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et un  $\phi_i^*$  soient tels que la relation (3.17) conduise à un  $f_i$  proche de  $f$ . Nous allons terminer cette étude sur les noyaux de la procédure dans la section suivante en étudiant le domaine d'erreur permettant à la fois de localiser l'excitation à  $\epsilon$  près et de reconstruire son intensité (en valeur absolue) à  $r\%$  près.

### 3.3.4 Domaine admissible de l'erreur d'estimation commise sur le VPMA tronqué

On suppose que les tolérances de proximité  $\epsilon$  et de reconstruction  $r$  sont raisonnablement choisies (voir (3.14) pour  $\epsilon$  et (3.22) pour  $r$ ), ce qui se traduit par  $\mathbf{0} \in \mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$ . Il est possible de représenter graphiquement les noyaux des problèmes de localisation  $\mathcal{N}_\epsilon$  et de reconstruction  $\mathcal{N}_r$  formulés par rapport à l'erreur d'estimation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  sur le VPMA. On note  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^p$  avec  $\mathbf{u}_1 = \frac{f\phi_{\mathbf{F}}^*}{\|f\phi_{\mathbf{F}}^*\|}$ . Pour  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$ , on note  $e_1$  la coordonnée de  $\mathbf{e}$  suivant  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{e}_0 = (0 \ e_2 \ \dots \ e_p)^T$  le vecteur constitué des coordonnées restantes qui est orthogonal à  $\mathbf{u}_1$ . On a donc  $\mathbf{e} = e_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_0$ . Les noyaux  $\mathcal{N}_\epsilon$  et  $\mathcal{N}_r$  étant

inclus dans des formes de révolution (cône et intérieur entre deux boules) de même centre, il en est de même pour le noyau du problème complet d'identification de l'excitation  $\mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$  (voir Figure 3.13). On visualise que le noyau du problème de localisation de  $F$  est non borné alors que celui du problème de reconstruction est borné.

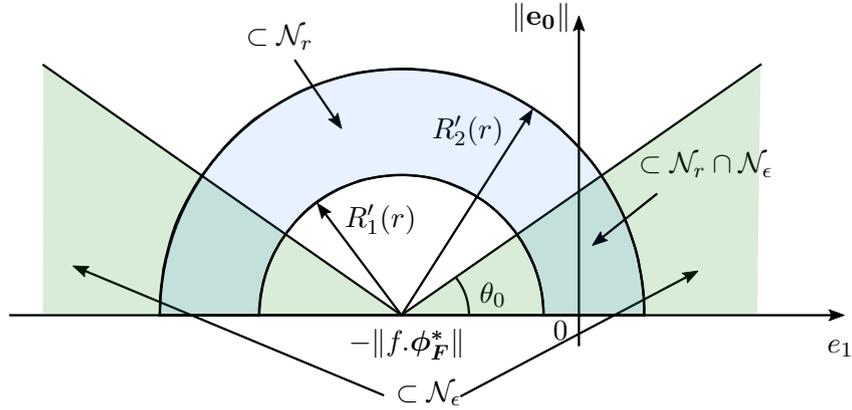


FIGURE 3.13 – Illustration des noyaux de la procédure de localisation d'une excitation et d'estimation de son intensité ( $\theta_o = \theta_\epsilon(F) - \theta_c$ )

### 3.3.5 Choix pratique de la tolérance de colinéarité

Le réglage de la tolérance de colinéarité  $\theta_c$  proposé dans la relation (3.14) dépend du point d'application  $F$  de l'excitation. En pratique,  $F$  est une inconnue et donc la tolérance de colinéarité ne peut pas être a priori réglée de façon optimale pour garantir une  $\epsilon$ -localisation de l'excitation. Une première possibilité est de choisir  $\theta_c < \min(\theta_\epsilon(F))$  avec  $F$  parcourant les *ddl* de la structure susceptibles de subir une excitation. Dans le cas où cette approche conduirait à une tolérance de colinéarité trop faible, on peut envisager de modifier comme suit la procédure de discrimination sur les angles. On note  $\hat{\theta}_i \in [0, \pi/2]$  le petit angle (voir section 3.3.1) entre un  $\phi_i^*$  et  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  et on choisit un facteur de dispersion  $\gamma > 1$ . On prend  $\theta_c = \pi/4$  et on recherche tous les  $F_i$  candidats tels que  $\hat{\theta}_{F_i} \leq \theta_c$ . On détermine ensuite  $\hat{\theta}_{min} = \min \hat{\theta}_{F_i}$  et on exclut tous les  $F_j$  tels que  $\hat{\theta}_{F_j} > \gamma \hat{\theta}_{min}$  (voir Figure 3.14). Cette procédure permet de ne conserver que les candidats  $F_i$  qui réalisent au mieux la propriété de colinéarité attendue entre  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  et  $\phi_F^*$ .

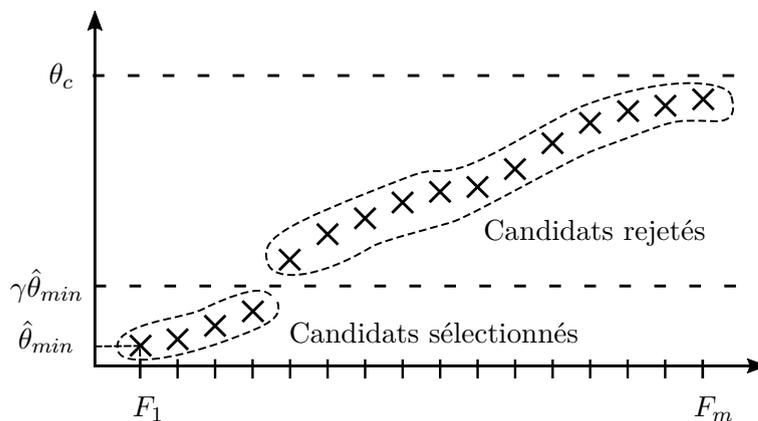


FIGURE 3.14 – Raffinement de la procédure de discrimination sur les angles.

### 3.4 Procédure de recherche d'une FMD

Dans les exemples étudiés jusqu'à présent (poutre et plaque simplement supportées), on a pu exhiber une FMD sans recourir à une méthode numérique. Les expressions des déformées modales étaient connues de façon analytique tout en étant suffisamment simples à manipuler. Ainsi, pour la poutre on a pu raisonner directement à l'aide de figures représentant les déformées des modes de flexion (voir section 3.1), tandis que pour la plaque on a utilisé les lignes de vibration qui sont simplement des lignes verticales ou horizontales (voir section 3.2.2). Dans cette section, on va montrer qu'une méthode graphique peut-être suffisante pour une structure de type poutre avec différentes conditions aux limites. En effet, la section 3.3.4 nous apprend qu'une structure 1D peut admettre un couple de modes discriminants. On proposera une méthode numérique pour les structures plus complexes pour lesquelles les méthodes graphique ou analytique (par calcul explicite des lignes de vibration) ne seraient pas applicables.

On suppose dans la suite de cette section que les  $\phi_i$  sont rangés dans l'ordre de leurs pulsations propres  $\omega_{0i}$  associées, c'est-à-dire que si  $i < j$  alors  $\omega_{0i} < \omega_{0j}$ . On suppose sans perte de généralité que la direction de l'excitation est normale et que les composantes normales des déformées modales sont connues.

### 3.4.1 Méthode graphique de caractérisation d'un couple de modes discriminants pour une structure 1D

On considère une structure 1D que l'on paramètre par une variable  $x \in I = [0, 1]$  repérant un point quelconque de la structure (voir Figure 3.15). On note  $I_{CL}$  l'ensemble des points bloqués dans la direction normale par les conditions aux limites (pour tout  $x \in I_{CL}$ ,  $\phi_i(x) = 0$  pour tout  $i$ ). Notre démarche consiste à savoir comment identifier un couple de modes discriminants étant donné un nombre fini de  $\phi_i$  connus de la structure. On se limite pour la méthode graphique à la recherche d'une FMD constituée de deux modes, sinon il est préférable d'utiliser la méthode numérique décrite en 3.4.2.

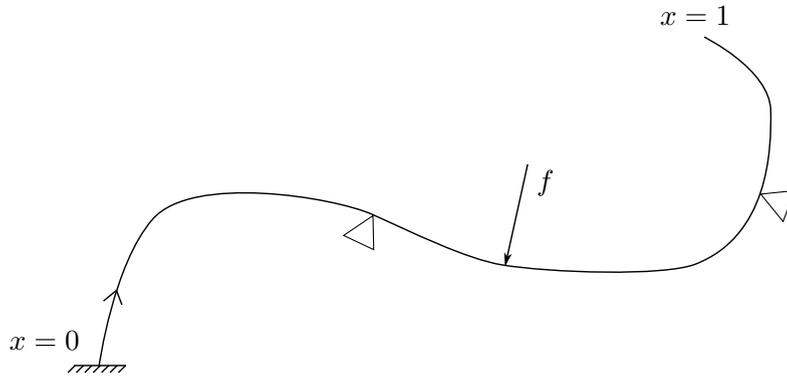


FIGURE 3.15 – Structure 1D quelconque subissant une excitation normale.

Pour des raisons qu'on détaillera dans la section 5.3.1, il est judicieux de former une FMD à partir de modes qui se suivent  $(\phi_i, \phi_{i+1})$  et qui sont associés aux pulsations propres les plus basses possibles. On étudie donc en premier lieu le couple de modes  $(\phi_1, \phi_2)$  en procédant par étapes successives et en s'arrêtant dès qu'une étape échoue :

**Etape n°1 :** On vérifie que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  n'admettent pas plus d'un noeud de vibration en commun (hors  $I_{CL}$  bien sûr). On note  $x_{nc}$  le noeud de vibration commun éventuel.

**Etape n°2 :** On vérifie que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  n'ont pas plus d'un noeud de vibration distinct de  $x_{nc}$ . On note  $x_{n1}$  l'éventuel deuxième noeud de vibration de  $\phi_1$ .

**Etape n°3 :** On vérifie que la fonction  $\lambda = \phi_2/\phi_1$  définie sur  $I \setminus (\{x_{nc}, x_{n1}\} \cup I_{CL})$  est injective. En particulier, on vérifie que les courbes représentatives de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  n'admettent pas plus d'un point d'intersection sur  $I \setminus (\{x_{nc}, x_{n1}\} \cup I_{CL})$ .

### CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU VPMA TRONQUÉ

---

Si l'une des étapes échoue alors  $(\phi_1, \phi_2)$  n'est pas une FMD et il faut repartir à la première étape avec le couple  $(\phi_2, \phi_3)$ . La recherche s'arrête lorsqu'on a trouvé un couple  $(\phi_i, \phi_j)$  satisfaisant les trois étapes ou lorsqu'il n'y a plus de couple à tester, auquel cas les modes connus ne permettent pas de former une FMD constituée de deux modes.

L'étape 1 correspond à vérifier que les lignes nodales se coupent au plus en un point (voir section 3.2.2). L'étape 2 tient au fait que le VPMA serait colinéaire à  $(0 \ 1)^T$  pour une excitation ayant lieu sur les noeuds de vibration de  $\phi_1$  distincts de  $x_{nc}$ . Au moins deux points d'application de l'excitation pourraient alors conduire à un VPMA colinéaire à  $(0 \ 1)^T$  ce qui contredirait la définition d'une FMD. On raisonne de même avec les éventuels noeuds de vibration de  $\phi_2$  distincts de  $x_{nc}$ . L'étape 3 consiste à vérifier que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont toujours excités dans des proportions différentes pour des points d'application différents des noeuds de vibration de  $\phi_1$ , ce qui se traduit par le fait que  $\lambda$  ne doit pas prendre deux fois la même valeur. En particulier, si les courbes représentatives de  $\phi_1$  et de  $\phi_2$  admettent plus d'un point d'intersection alors  $(\phi_1, \phi_2)$  n'est pas une FMD puisque la valeur 1 est atteinte plusieurs fois ( $\lambda$  n'est pas injective).

On se propose dans la suite de cette section d'appliquer cette méthode graphique à la poutre simplement supportée ainsi qu'à un modèle 1D d'avion au sol. D'autres applications sont présentées en Annexe B sur une poutre homogène considérée avec différentes conditions aux limites à ses extrémités.

### Poutre simplement supportée

Les modes de vibration en flexion d'une poutre homogène simplement supportée sur ses extrémités sont de la forme  $\phi_i = \alpha \sin(i\pi x)$ , avec  $\alpha$  qui dépend des propriétés de la poutre. Montrons que  $(\phi_1, \phi_2)$  est une FMD par la méthode graphique proposée ci-dessus. La Figure 3.16 montre que les étapes 1 et 2 sont vérifiées puisque seul  $\phi_2$  admet un noeud de vibration. La fonction  $\lambda = \phi_2/\phi_1$  est définie sur  $]0, 1[$  et est représentée sur la Figure 3.16. Elle est continue strictement décroissante donc injective.  $(\phi_1, \phi_2)$  est donc une FMD.

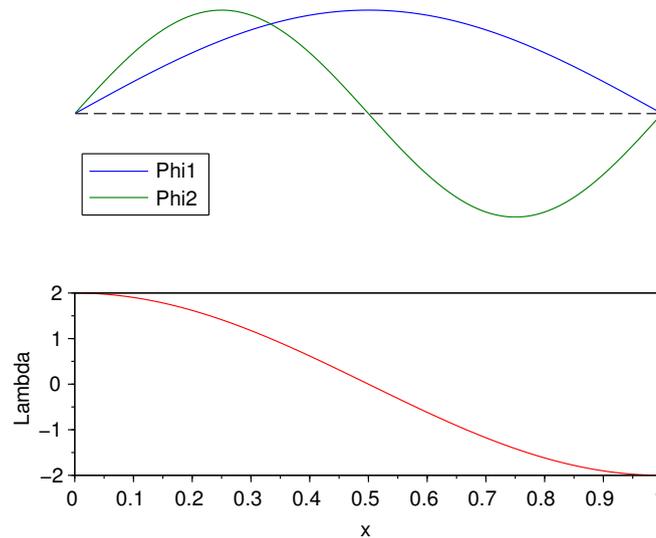


FIGURE 3.16 – Poutre supportée-supportée.

En fait c'est la seule FMD de la poutre constituée de deux modes. En effet, pour tout  $j$  et pour tout  $x$  on a  $-\alpha \leq \phi_j(x) \leq \alpha$ , et pour  $j \geq 3$   $\phi_j$  atteint au moins deux fois la valeur  $\alpha$  ou  $-\alpha$ . Il s'ensuit que pour  $i \geq 2$ ,  $j \geq 3$ , et  $i < j$ , les courbes représentatives de  $\phi_i$  et  $\phi_j$  se coupent au moins deux fois, ce qui fait systématiquement échouer l'étape 3. Il ne reste donc que le couple  $(\phi_1, \phi_2)$ .

Remarquons que  $\lambda$  s'aplatit au voisinage d'une extrémité. On peut donc s'attendre à mieux discriminer un impact appliqué sur la partie centrale de la poutre que proche d'une extrémité. Une même erreur absolue  $\delta\lambda$  commise sur  $\lambda(x)$  ne conduit pas à la même incertitude de localisation suivant que  $x$  soit proche du centre ou d'une extrémité de la poutre.

**Modèle 1D d'avion au sol (poutre appuyée sur deux ressorts)**

On considère une poutre appuyée sur deux ressorts représentant de façon simplifiée un avion au sol sur ses trains d'atterrissage. On suppose que les propriétés de la poutre et les raideurs des ressorts sont telles que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les modes de vibration associés aux ressorts. C'est le cas pour un avion au sol dont les modes de trains d'atterrissage<sup>11</sup> sont associés à des fréquences plus basses que celles des modes du fuselage.  $\phi_1$  correspond alors à des oscillations en phase des ressorts et  $\phi_2$  à des oscillations en opposition de phase comme représenté sur la Figure 3.17.

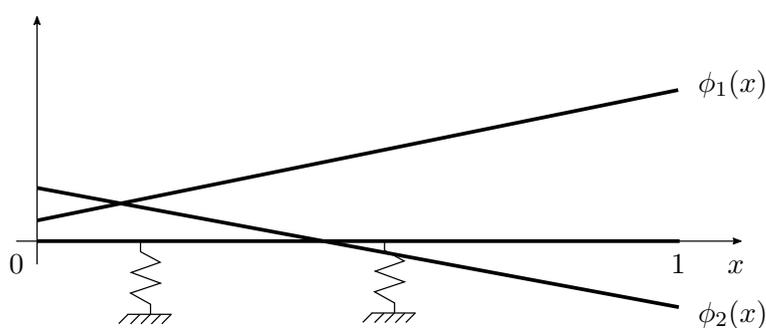


FIGURE 3.17 – Modes de vibration  $\phi_1$  et  $\phi_2$  d'un modèle 1D d'avion au sol.

Qualitativement<sup>12</sup> on a  $\phi_1(x) = ax + b$  et  $\phi_2(x) = cx + d$  avec  $ab > 0$  et  $cd < 0$ , donc :

$$\lambda(x) = \frac{cx + d}{ax + b} \quad \text{et} \quad \lambda'(x) = -\frac{ad - cb}{(ax + b)^2} \quad (3.26)$$

La quantité  $ad - cb$  ne peut pas être nulle (cela impliquerait  $b/a = d/c$  ce qui est impossible avec nos hypothèses  $ab > 0$  et  $cd < 0$ ) donc  $\lambda'$  est de signe constant.  $\lambda$  est alors continue strictement monotone donc injective.  $(\phi_1, \phi_2)$  est donc une FMD pour le modèle 1D d'avion au sol. Cela signifie que les contributions des modes de trains d'atterrissage permettent de repérer sur l'axe de l'avion le point d'application d'une excitation quelconque.

---

11. Ces modes de vibration correspondent en fait à des modes de pneus.

12. Le fuselage ne se déforme pas sur ces modes.

### 3.4.2 Méthode numérique d'extraction d'une FMD à partir de modes de vibration connus d'une structure complexe

On considère une structure de dimension géométrique  $d$  dont on connaît  $p$  modes de vibration. On propose dans cette section une méthode numérique permettant de rechercher une FMD constituée de  $q \geq d + 1$  modes. On note  $S_d = \{M_1, \dots, M_N\}$  l'ensemble des  $N$  points d'évaluation des déformées modales qui ne sont pas bloqués par les conditions aux limites. L'objectif est d'extraire une FMD à partir de la matrice modale tronquée  $\tilde{\Phi}$  de taille  $N \times p$ . Plutôt que d'utiliser la caractérisation donnée en section 3.2.4 qui se vérifie numériquement de façon combinatoire, on va utiliser les lignes de vibration définies en section 3.2.2. Pour cela, on adapte la définition de ligne de vibration pour une structure discrétisée en remplaçant «  $M \in S$  » par «  $M \in S_d$  ». Les lignes de vibration sont alors des ensembles de points inclus dans  $S_d$ .

On note pour simplifier  $(\phi_1, \dots, \phi_q)$  une famille de  $q \geq d + 1$  modes parmi les  $p$  qui sont connus<sup>13</sup>. Pour des raisons évoquées dans la section 5.3.1, il est judicieux de former une FMD à partir d'un petit nombre de modes qui se suivent  $(\phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}, \dots)$  et qui sont associés à des pulsations propres bien séparées. Pour savoir si  $(\phi_1, \dots, \phi_q)$  est une FMD on procède par étapes successives en s'arrêtant dès qu'une étape échoue :

**Étape n°1 :** On vérifie que l'intersection des lignes nodales est soit vide soit réduite à un point. S'il existe on le note  $M_n$ .

**Étape n°2 :** Pour chaque  $M_i \neq M_n$ , on recherche un indice  $k$  tel que  $\phi_k(M_i) \neq 0$ . Pour  $j \neq k$  on note  $\lambda_{jk} = \phi_j(M_i)/\phi_k(M_i)$ . On vérifie alors que l'intersection des  $q - 1$  lignes d'iso-proportion  $L_{j/k}(\lambda_{jk})$ , pour tout  $j \neq k$ , est réduite à  $\{M_i\}$ .

Cette méthode peut conduire à l'identification de plusieurs FMD que l'on note  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ . Il est alors intéressant de s'intéresser aux cartes de robustesse angulaire de ces familles :

**Définition 3.4.1** (Carte de robustesse angulaire). *Soit  $\epsilon > 0$  une exigence de localisation. On appelle carte de robustesse angulaire d'une FMD la représentation graphique de  $M_i \mapsto \theta_\epsilon(M_i)$  pour tout  $M_i \in S_d$ .*

---

13. Au lieu de devoir les noter  $\phi_{\sigma(1)}, \dots, \phi_{\sigma(q)}$  avec  $\sigma$  la sélection.

**Remarque 3.4.1.** *La carte de robustesse angulaire d'une FMD indique le lieu des points de la structure pour lesquels la localisation à  $\epsilon$ - près est possible en tronquant le VPMA sur cette FMD (voir section 3.3.2).*

On privilégie en fin de parcours la famille  $\mathcal{F}_i$  qui couvre de façon satisfaisante, avec un minimum de modes, la zone de la structure susceptible d'être impactée. On donne dans la suite de cette section les cartes de robustesse angulaire des FMD sélectionnées pour une plaque homogène appuyée sur ses coins ainsi que pour un cylindre homogène appuyé sur trois points. D'autres applications sont présentées en Annexe B pour la même plaque rectangulaire homogène considérée avec différentes conditions aux limites.

### Plaque simplement appuyée sur ses coins

On considère une plaque rectangulaire métallique homogène simplement appuyée sur ses coins dont les propriétés géométriques et mécaniques sont décrites dans le Tableau B.1. Un modèle éléments finis (MEF) est réalisé avec Nastran 2014 pour calculer la matrice modale tronquée aux six premiers modes. Le MEF consiste en un découpage de  $8 \times 8$  éléments CQUAD8 possédant des noeuds au milieu de chaque arête (voir Figure B.6). Les noeuds des coins 1, 17, 209 et 225 sont simplement appuyés (translations bloquées). La procédure numérique de recherche décrite plus haut permet d'identifier que les modes  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  forment une FMD globale. Leurs déformées sont représentées sur la Figure 3.18. On se fixe une exigence de localisation égale à la demi-diagonale d'une cellule du maillage :

$$\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$$

On représente sur la Figure 3.19 la carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et à l'exigence de localisation  $\epsilon$ . On constate que  $\theta_\epsilon$  est d'autant plus grand que l'on se rapproche du centre de la plaque. L'erreur angulaire entre  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et  $\phi_{\mathbf{F}}^*$  peut donc être plus importante pour une excitation appliquée proche du centre.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

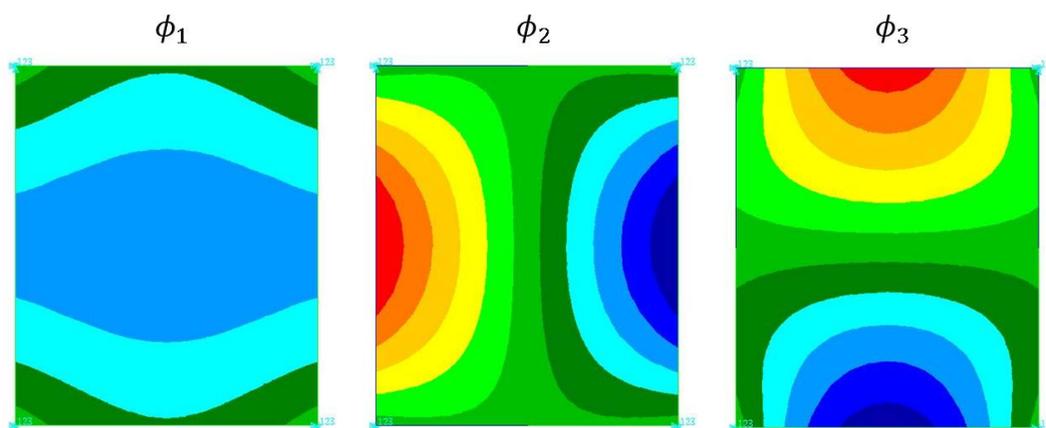


FIGURE 3.18 – FMD globale constituée de trois modes de la plaque simplement appuyée sur ses coins.

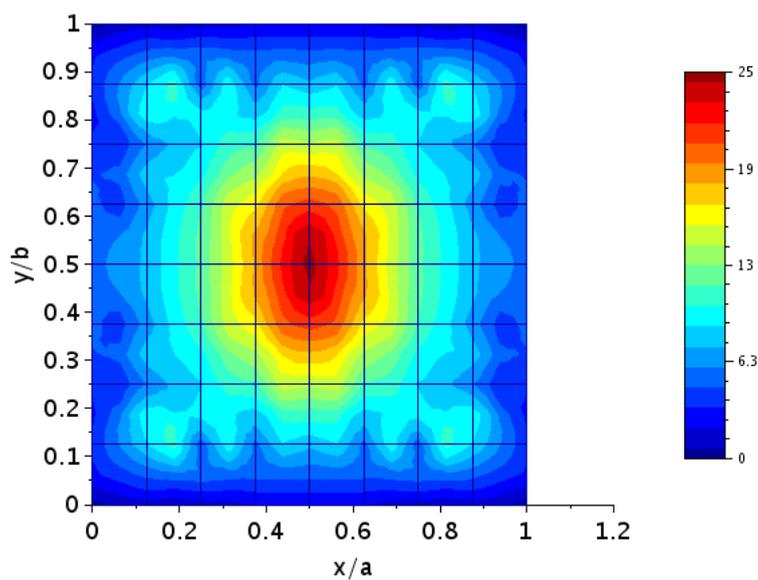


FIGURE 3.19 – Carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_1$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $25^\circ$ ).

### Cylindre fixé sur trois points

On considère un cylindre métallique appuyé sur trois points dont les propriétés géométriques et mécaniques sont décrites dans le Tableau 3.1. Un modèle éléments finis (MEF) est réalisé avec Nastran 2014 pour calculer la matrice modale tronquée aux cinq premiers modes. Le MEF consiste en un découpage de  $32 \times 20$  éléments CQUAD8 (circonférence  $\times$  longueur) possédant des noeuds au milieu de chaque arrête. Les noeuds représentés sur la Figure 3.20 sont bloqués en translation. On représente les déformées des modes de vibration sur la Figure 3.21. La procédure numérique de recherche décrite plus haut permet d'identifier que les modes  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  forment une FMD partielle couvrant l'ensemble du cylindre, exceptée la zone définie par le triangle entre les trois points d'appuis qui est une zone nodale. On note cette famille de modes  $\mathcal{F}_1$ . Le premier mode  $\phi_1$  correspond à un mode de roulis droite/gauche, le second mode  $\phi_2$  correspond à un mode d'aplatissement de la partie supérieure et le troisième mode  $\phi_3$  correspond à un mode de tangage haut/bas. On vérifie que le triangle défini par les trois points d'appuis est une ligne nodale commune aux trois modes.

On se fixe une exigence de localisation  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}$  et on se propose d'étudier la carte de robustesse angulaire de  $\mathcal{F}_1$ . Pour faciliter la visualisation, on déplie le cylindre de sorte que les points d'appuis se retrouvent sur une ligne médiane. On les représente par des croix rouges sur le cylindre déplié. Un point  $M = (R \theta X)$  sur le cylindre est repéré par un point  $P = (x y)$  sur la plaque, avec  $x = X$  et  $y = R\theta$ . On note  $a = L$  la longueur du cylindre et  $b = 2\pi R$  sa circonférence. On observe sur la Figure 3.22 que  $\mathcal{F}_1$  n'autorise que très peu d'erreur angulaire en dehors de la partie haute du cylindre. Ce n'est donc pas une bonne FMD partielle pour couvrir le cylindre hors du triangle des points d'appuis. On note  $\mathcal{F}_2 = (\phi_1, \dots, \phi_5)$  la famille formée des cinq premiers modes de vibration de la structure. Les déformées de  $\phi_4$  et  $\phi_5$  sont représentées sur la Figure 3.21. On observe sur la Figure 3.23 que les valeurs de  $\theta_\epsilon$  sont augmentées et plus uniformément réparties. Rajouter les deux modes  $\phi_4$  et  $\phi_5$  permet donc de mieux discriminer le point d'application d'une l'excitation. On observe toutefois que les zones avant-basse et arrière-basse du cylindre sont plus difficiles à discriminer ( $\theta_\epsilon \approx 3^\circ$ ). Pour mieux localiser une excitation sur ces zones il faudrait utiliser des modes d'ordre plus élevé.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU VPMA TRONQUÉ

Dimensions	$R = 10 \text{ cm}, L = 1 \text{ m}, h = 5 \text{ mm}$
Masse volumique	$2700 \text{ kg.m}^{-3}$
Module de Young	$70 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$0.3$
Mode 1	$\omega_{01} = 250 \text{ rad/s}$
Mode 2	$\omega_{02} = 883 \text{ rad/s}$
Mode 3	$\omega_{03} = 1164 \text{ rad/s}$
Mode 4	$\omega_{04} = 1670 \text{ rad/s}$
Mode 5	$\omega_{05} = 2110 \text{ rad/s}$

TABLE 3.1 – Propriétés géométriques et mécaniques du cylindre appuyé sur trois points.

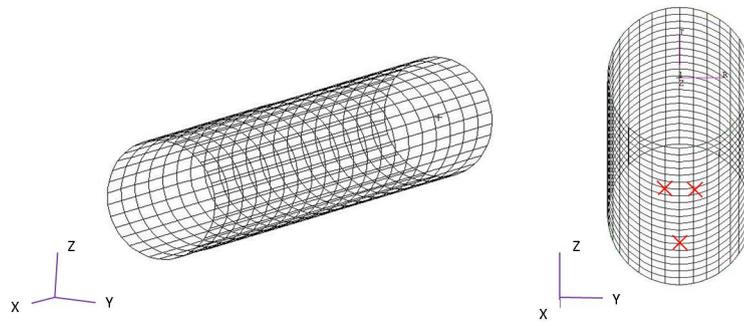


FIGURE 3.20 – Modèle éléments finis du cylindre appuyés sur trois points (croix rouges).

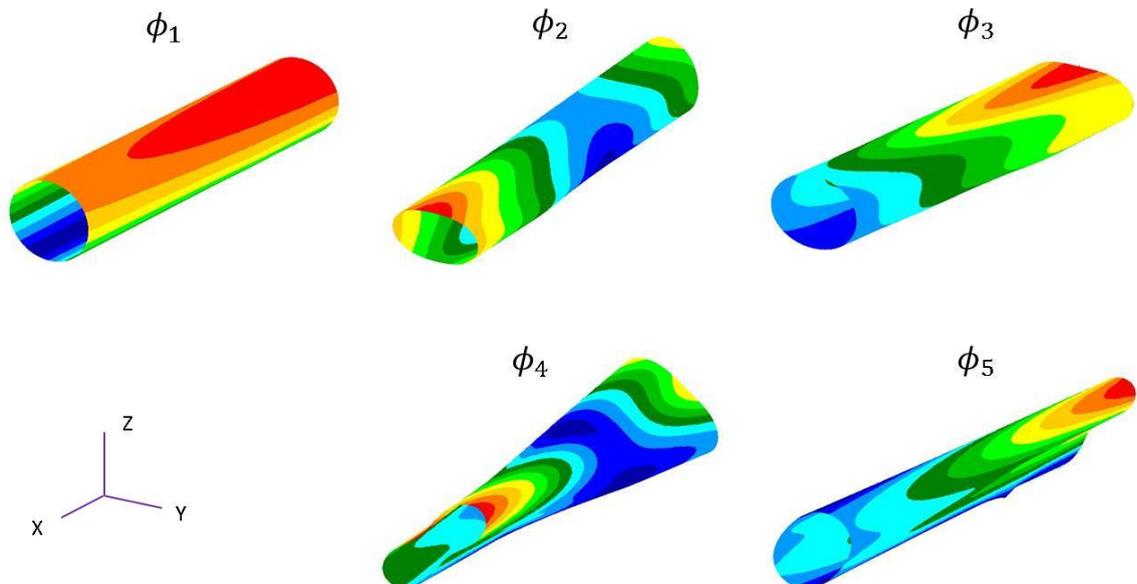


FIGURE 3.21 – Cinq premiers modes de vibration du cylindre appuyé sur trois points.

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION  
D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU  
VPMA TRONQUÉ

---

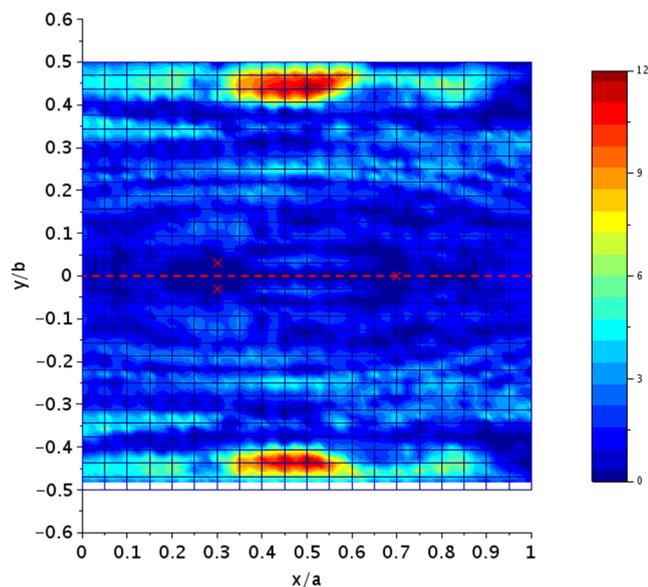


FIGURE 3.22 – Carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_1$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}$  (valeur max :  $12^\circ$ ).

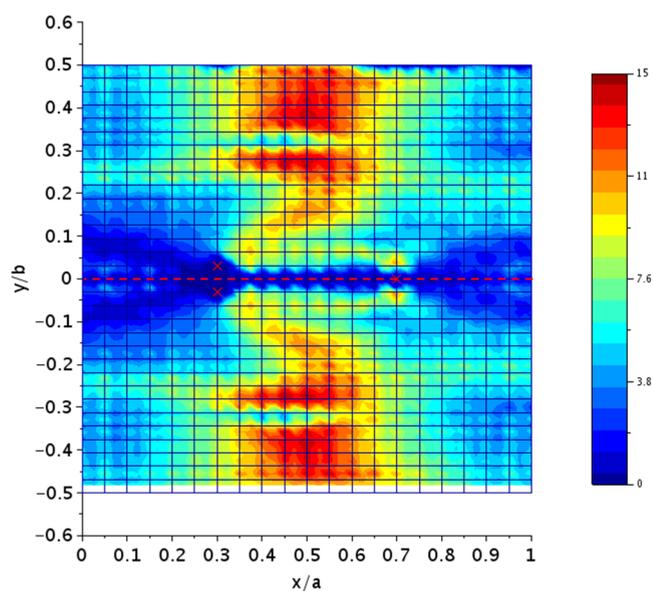


FIGURE 3.23 – Carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_2$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}$  (valeur max :  $15^\circ$ ).

### 3.5 Bilan sur la procédure d'identification d'une excitation à partir du VPMA tronqué sur une FMD

Dans ce chapitre, nous avons introduit le concept de signature vibratoire du point d'application d'une excitation en définissant les familles de modes discriminants (FMD) d'une structure. Si la structure étudiée admet une FMD globale alors les contributions des modes qui la constituent déterminent complètement le point d'application  $F$  d'une excitation. L'intérêt majeur d'utiliser une FMD est de ne conserver dans l'analyse qu'un petit nombre de modes connus de la structure. En général, il n'y a pas de raison pour qu'une structure quelconque admette une FMD globale constituée d'un petit nombre de modes, mais nous avons montré sur plusieurs exemples que cela pouvait être le cas. Nous avons même exhibé des FMD minimales formées de  $p = d + 1$  modes, où  $d$  désigne la dimension de la géométrie de la structure continue étudiée. En particulier, l'étude du modèle 1D d'avion nous a montré que les deux modes de trains d'atterrissage forment une FMD minimale. Les contributions de ces deux modes permettent donc de localiser une excitation quelconque sur l'axe de l'avion.

On a proposé une méthode de localisation d'une excitation permettant de tenir compte d'une éventuelle erreur d'estimation sur le VPMA tronqué sur une FMD. Pour cela, on a introduit un paramètre de tolérance de colinéarité qui peut être théoriquement réglé de sorte à localiser le point d'application d'une excitation à  $\epsilon$  près. Le noyau du problème de localisation avec cette procédure est un cône de révolution. C'est donc un domaine non borné, ce qui est très avantageux du point de vue de la robustesse de la procédure puisque des erreurs très grandes peuvent ne pas perturber la localisation. Cette nouvelle procédure de localisation peut conduire à l'identification de plusieurs candidats possibles. Cela nous a conduit à définir une intensité associée à chaque candidat et à étudier les conditions dans lesquelles chacune de ces intensités estime l'intensité réelle de l'excitation à  $r\%$  près (en valeur absolue). Le choix de la tolérance de colinéarité et l'étirement maximal entre les normes des colonnes de  $\tilde{\Phi}^T$  limitent la précision de reconstruction  $r$  que l'on peut espérer atteindre.

La méthode d'identification développée dans ce chapitre nécessite d'avoir une estimation

### CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE LOCALISATION D'UNE EXCITATION ET D'ESTIMATION DE SON INTENSITÉ À PARTIR DU VPMA TRONQUÉ

---

du VPMA tronqué sur une FMD. Dans le chapitre suivant nous allons étudier le problème d'estimation robuste du VPMA à partir de mesures vibratoires d'un unique capteur. Autrement dit, on va s'intéresser à l'identification des proportions dans lesquelles les modes de vibration sont excités. On va se placer dans le cas où l'excitation appliquée est un impact suffisamment bref pour être représenté par un Dirac.

## Chapitre 4

# Détermination de conditions pour l'identification robuste et précise d'un Dirac à partir de mesures vibratoires en un point

**Résumé** : Dans le cas où l'impact appliqué est un Dirac, les seules inconnues sont le point d'application de l'impact et son intensité. L'identification d'un Dirac peut donc se ramener à l'identification du VPMA tronqué sur une FMD qui permet de remonter aux inconnues du problème avec la procédure développée dans le chapitre précédent. L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode d'estimation robuste et précise du VPMA tronqué pour l'identification d'un Dirac à partir des mesures d'un unique capteur. L'idée originale a été de montrer qu'il n'est pas nécessaire que le modèle de réponse permette de bien représenter les mesures, mais seulement de capturer les contributions des modes discriminants. Pour cela, on formule le problème d'identification du VPMA tronqué par un problème des moindres carrés linéaire et on montre qu'il admet une solution unique sous certaines conditions portant sur les propriétés modales de la structure et les paramètres de la mesure. Dans ces conditions, la matrice à inverser est à diagonale strictement dominante, ce qui permet d'établir une formule approchée de son conditionnement en norme 2 et de montrer que les contributions des modes discriminants sont correctement capturées. Par suite, on propose des emplacements du capteur permettant de minimiser le conditionnement du problème et donc d'augmenter la robustesse de l'estimation du VPMA tronqué.

## CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

Dans ce chapitre on suppose que l'impact à identifier est de durée suffisamment brève pour que la réponse consécutive à cet impact puisse être assimilée à la réponse impulsionnelle de la structure (voir Equation 2.7). On dira de façon impropre que l'impact à identifier est un Dirac même si l'on ne parlera pas de distributions, au sens mathématique du terme, dans toute cette étude. On utilise la définition physique d'un Dirac comme étant la limite lorsque  $T \rightarrow 0$  du signal porte  $\pi_T$  défini par  $\pi_T(t) = 1/T$  sur  $[-T/2, T/2]$  et 0 partout ailleurs. L'intégrale de chaque signal  $\pi_T$  sur  $]-\infty, +\infty[$  est unitaire, et lorsque  $T \rightarrow 0$  on a  $q = \pi_T * g \rightarrow g$ . Bien sûr, il n'y a pas de raison dans la pratique de supposer que l'impact appliqué est un Dirac. Cependant, cette étude a un intérêt fondamental puisque l'identification d'un Dirac peut se ramener à l'identification du VPMA. Autrement dit, le Dirac est la nature d'impact la plus simple à identifier, en termes de formalisme, avec la procédure développée dans ces travaux. Les résultats de cette étude seront le point de départ pour étendre la méthode à l'identification d'une loi paramétrée de force d'impact dans le Chapitre 5.

Les notions de précision et de robustesse renvoient respectivement à l'analyse de la moyenne et de la dispersion des résultats obtenus pour un même impact appliqué en considérant plusieurs perturbations des données (mesures et/ou modèle). Signalons que la procédure de localisation développée dans le chapitre précédent permet d'identifier plusieurs candidats pour chaque essai d'identification d'impact : on suppose ici qu'un critère permet de définir un seul point à partir de cet ensemble de candidats<sup>1</sup>. On dit que la localisation est précise, relativement à un ensemble d'essais d'identification d'un même impact appliqué, lorsque la moyenne (ou barycentre) des points retrouvés  $\hat{F}$  est proche du point d'impact réel  $F$ . On dit de plus que la localisation est robuste lorsque l'ensemble des points retrouvés est peu dispersé, c'est-à-dire lorsque le diamètre de l'ensemble des points retrouvés est petit. La précision et la robustesse de la procédure sont deux propriétés distinctes que nous cherchons à réunir pour identifier correctement chaque événement d'impact. On peut en effet avoir une procédure de localisation robuste mais imprécise, tout comme on peut avoir une procédure de localisation instable mais précise (voir Figure 4.1).

---

1. Par exemple avec un barycentre pondéré comme proposé en section 4.1.3

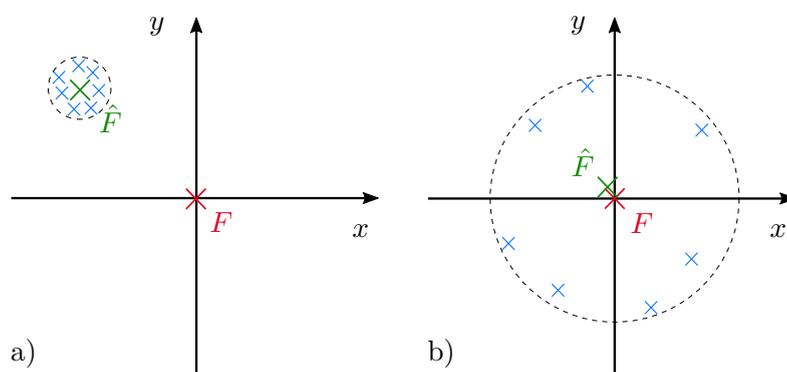


FIGURE 4.1 – a) Localisation robuste mais imprécise b) Localisation précise mais non robuste.

## 4.1 Estimation du VPMA à partir de mesures vibratoires en un point

### 4.1.1 Formulation du problème

On considère une structure linéaire élastique à  $N$  ddl aux propriétés mécaniques temporellement invariantes soumise à l'instant  $t = 0$  à un Dirac d'intensité  $f$  appliqué au ddl indexé  $F$  (voir Figure 4.2).

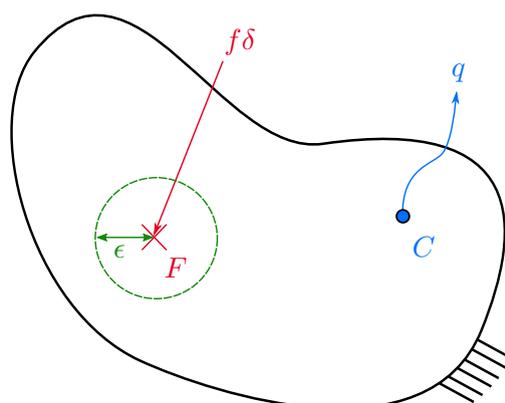


FIGURE 4.2 – Problème d'identification d'un Dirac.

L'instant d'impact, le  $t = 0$ , n'est pas considéré comme une inconnue dans cette étude<sup>2</sup>. On suppose comme dans la section 2.1 que la structure est initialement au repos, qu'elle n'a pas de modes rigides, et qu'elle est faiblement amortie. On suppose de plus qu'une famille

<sup>2</sup>. Voir section 5.2.3 pour les techniques d'estimation de l'instant d'impact

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

de  $p$  modes discriminants de la structure est connue (voir Chapitre 3), les  $p$  premiers pour simplifier les notations, et qu'un capteur est placé au  $ddl$  indexé  $C$ . Dans ces conditions, la section 3.2.1 nous apprend que la projection  $\tilde{q}$  du déplacement du  $ddl$  indexé  $C$  sur la famille des  $p$  modes connus est donnée par :

$$\tilde{q}(t) = f\mathbf{L}_\delta(t).\mathbf{X}_F = \mathbf{L}_\delta(t).\mathbf{Z}_F \quad (4.1)$$

où l'image de  $\delta$  dans la réponse, notée  $\mathbf{L}_\delta(t) = (\Phi_{C1}g_1(t) \dots \Phi_{Cp}g_p(t))$ , est connue puisque les propriétés modales des  $p$  modes retenus dans l'analyse sont supposées connues.

On dispose de  $n > p$  mesures  $(q(t_i))_{1 \leq i \leq n}$ , éventuellement entachées de bruit, prises en des instants  $t_i = i\Delta t$  avec  $\Delta t$  la période d'échantillonnage du capteur. En pratique, le bruit qui perturbe les mesures est soit de nature électronique et lié au capteur, soit lié à l'environnement de la structure. Notre problème est alors d'estimer le vecteur de participation modale amplifié  $\mathbf{Z}_F$  qui permet de remonter au point d'application  $F$  du Dirac et à son intensité  $f$  par la méthode décrite dans le Chapitre 3. Plus précisément, on souhaite localiser  $F$  à  $\epsilon$ -près et estimer  $|f|$  à  $r\%$ -près, où  $\epsilon$  et  $r$  désignent respectivement des exigences de localisation et de reconstruction (voir section 3.3).

#### 4.1.2 Résolution au sens des moindres carrés

On est dans la situation où l'on doit identifier un modèle linéaire de dimension  $p$  à partir de mesures vibratoires d'un capteur qui sont éventuellement bruitées. Une résolution au sens des moindres carrés est donc appropriée. Pour alléger les notations on note  $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_\delta(t_i)$ . On recherche une approximation  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  du VPMA au sens des moindres carrés de sorte que la somme des carrés des écarts prédictions-mesures :

$$S(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i.\mathbf{Z} - q(t_i))^2 \quad (4.2)$$

soit minimale.  $S(\mathbf{Z})$  peut se mettre sous la forme :

$$S(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} - 2\mathbf{U}^T \mathbf{Z} - \alpha \quad (4.3)$$

avec  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i$ ,  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n q(t_i) \mathbf{L}_i^T$  et  $\alpha = \sum_{i=1}^n q(t_i)^2$ .

## CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

On montre en Annexe A que la solution du problème des moindres carrés est unique si et seulement si la matrice  $\mathbf{A}$  est inversible. La solution est alors donnée par  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$ .

Nous donnerons dans la section 4.2.2 une condition suffisante pour que la matrice  $\mathbf{A}$  soit inversible, mais remarquons déjà qu'elle ne l'est pas si le capteur est placé sur un noeud modal d'un des  $p$  modes retenus dans l'analyse. En effet, d'après (2.8) on a  $\mathbf{L}_i = (\phi_C^*)^T \cdot \mathbf{D}_\delta(t_i)$  avec  $\mathbf{D}_\delta(t_i) = \mathbf{diag}(g_1(t_i), \dots, g_p(t_i))$ . Supposons sans perte de généralité que le capteur est positionné sur un noeud modal du premier mode de vibration retenu dans l'analyse de sorte que  $\Phi_{C1} = 0$ . Dans ce cas, pour tout  $i = 1, \dots, n$  la première ligne et la première colonne de chaque matrice  $\mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i$  sont nulles, et par conséquent  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible. On en déduit qu'il est nécessaire que le capteur soit placé hors d'un noeud modal pour que la matrice  $\mathbf{A}$  soit inversible.

### 4.1.3 Variante sur l'estimation de l'intensité

Il peut sembler surprenant de travailler avec le vecteur de participation modale amplifié  $\mathbf{Z}_{\mathbf{F}} = f\mathbf{X}_{\mathbf{F}}$  pour identifier en fin de parcours plusieurs intensités  $f_i$ , chacune étant associée à un candidat  $F_i$  trouvé. Nous pourrions en effet obtenir une unique estimation de l'intensité en recalant les amplitudes maximales des signaux prédits et mesurés. Pour cela, il suffirait de considérer les mesures normalisées à 1, soit le signal  $q_n = q/\|q\|_\infty$ , et d'estimer le VPMA associé  $\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}$  avec la procédure des moindres carrés décrite ci-dessus. La reconstruction du signal normalisé serait alors donnée par  $\tilde{q}_n = \mathbf{L}_\delta \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{n}}$ . On pourrait alors estimer l'intensité par :

$$\hat{f} = \frac{\|q\|_\infty}{\|\tilde{q}_n\|_\infty} \quad (4.4)$$

Cette variante n'est en fait valable que lorsque les modes retenus dans l'analyse sont effectivement ceux qui contribuent le plus à l'amplitude maximale de la réponse. Or, il n'y a aucune raison que les modes retenus, les modes discriminants qui contiennent l'information sur le point d'application  $F$ , soient ceux qui contribuent le plus dans la réponse. Nous verrons même dans le Chapitre 6 que dans le cas d'un impact dur, i.e qui sollicite une large bande de fréquences, les modes discriminants retenus contribuent peu à la réponse.

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

Cette variante conduirait certes à bien recalculer les amplitudes prédictions-mesures, mais pas à estimer convenablement l'intensité de l'impact que nous recherchons. En revanche, l'intensité  $f$  du Dirac est bien contenue dans le VPMA et il est donc raisonnable de chercher à l'estimer à partir de celui-ci. Nous pouvons toutefois nous demander dans quelle mesure un modèle de réponse qui prédit mal les mesures peut être utile pour identifier un impact. Nous allons voir dans la section suivante qu'il est possible d'estimer convenablement le VPMA tronqué aux modes discriminants même si l'erreur de troncature du modèle de réponse est élevée.

Terminons en signalant que la procédure proposée en section 3.3.3 permet d'identifier autant d'intensités possibles  $f_i$  que de candidats  $F_i$ . On peut alors définir une estimation  $\hat{f}$  de l'intensité à l'aide d'un barycentre sur les  $m$  intensités  $f_i$  obtenues. De cette façon, l'estimation  $\hat{f}$  de l'intensité de l'impact se définit par :

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^m w_i f_i \quad (4.5)$$

où les  $w_i$  sont de somme unitaire en accordant davantage d'importance aux intensités  $f_i$  associées à des  $\hat{\theta}_i$  petits. Par exemple en choisissant :

$$w_i = \frac{\cos(\hat{\theta}_i)}{\sum_{i=1}^m \cos(\hat{\theta}_i)} \quad (4.6)$$

où nous rappelons que  $\hat{\theta}_i \in [0, \theta_c] \subset [0, \pi/4]$ , et donc que  $\cos(\hat{\theta}_i) \in [\sqrt{2}/2, 1]$  (voir Figure 3.11). De façon analogue, on peut estimer le point d'impact  $F$  par un barycentre pondéré  $\hat{F}$  des candidats  $F_i$  défini par :

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^m w_i F_i \quad (4.7)$$

où l'on a abusivement noté  $M = \overrightarrow{OM}$  le vecteur position d'un point  $M$  par rapport à l'origine  $O$  d'un repère géométrique de la structure.

## 4.2 Conditions suffisantes sur les propriétés modales de la structure et les paramètres de mesure pour rendre le problème d'estimation du VPMA bien posé

On qualifie de « bien posé » un problème admettant une unique solution qui a la propriété d'être robuste par rapport aux perturbations des données (mesures et/ou modèle). Dans cette section nous allons voir que l'utilisation du modèle linéaire tronqué (4.1) ne conduit pas nécessairement à de grandes erreurs d'estimation sur le VPMA, même si le nombre  $p$  de modes retenus dans l'analyse est petit en comparaison du nombre de modes significativement excités par l'impact. Il est en effet classique de montrer que le spectre d'un Dirac est plat et excite uniformément toutes les fréquences de la structure.

On note  $\mathbf{G}_i$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  les signaux  $g_i$  (voir section 2.1),  $q$  et  $\tilde{q}$  discrétisés en temps sur l'intervalle de mesure avec la période d'échantillonnage  $\Delta t$ . Par exemple on a  $\mathbf{G}_i = (g_i(t_1) \dots g_i(t_n))^T$  avec  $t_i = i\Delta t$ . D'après l'équation (2.7) les signaux échantillonnés  $\mathbf{Q}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  se décomposent dans la famille des  $(\mathbf{G}_i)$  :

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N K_i \mathbf{G}_i \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^p K_i \mathbf{G}_i \quad (4.8)$$

où  $K_i = \Phi_{Fi} \Phi_{Ci}$ . On note  $\mathbf{Q}_e = \sum_{i=p+1}^N K_i \mathbf{G}_i$  la projection de la réponse sur la famille des  $N - p$  modes qui n'ont pas été retenus dans l'analyse. On note de plus  $\hat{\mathbf{Q}}$  le projeté orthogonal de  $\mathbf{Q}$  sur la famille  $(\mathbf{G}_i)_{1 \leq i \leq p}$  obtenu par la procédure des moindres carrés décrite en section 4.1.2.

L'objectif de cette section est de montrer que sous certaines conditions, portant sur les propriétés modales de la structure et les paramètres de mesure, le modèle de réponse  $\hat{\mathbf{Q}}$  identifié avec la procédure des moindres carrés est proche du signal tronqué  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . Pour cela, nous allons d'abord montrer que sous une condition de bonne séparation des modes les fonctions de réponse impulsionnelle  $g_i$  sont presque orthogonales, en un sens que nous précisons, pour le produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions continues sur  $[0, +\infty[$  de carré intégrable. Nous verrons que cela reste vrai en considérant les réponses impulsionnelles discrétisées  $\mathbf{G}_i$  dans l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni de son produit scalaire usuel, pourvu que la durée de mesure et la fréquence d'échantillonnage du capteur soient suffisamment grandes. Or, la procédure des moindres carrés utilisée pour estimer le VPMA permet d'obtenir le

projeté orthogonal  $\hat{\mathbf{Q}}$  du vecteur réponse mesurée discrétisée  $\mathbf{Q}$  sur l'espace engendré par la famille  $(\mathbf{G}_i)_{1 \leq i \leq p}$ . Nous en déduisons que, dans ces conditions, la solution du problème des moindres carrés conduit à l'identification d'un modèle  $\hat{\mathbf{Q}}$  proche du signal tronqué aux  $p$  modes sélectionnés  $\tilde{\mathbf{Q}}$ .

#### 4.2.1 Presque orthogonalité des fonctions de réponse impulsionnelle discrétisées associées à des modes faiblement amortis et bien séparés

On considère une famille de  $p$  réponses impulsionnelles que l'on note  $\mathcal{G} = (g_i)_{1 \leq i \leq p}$ . On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, +\infty[$  de carré intégrable qu'on munit du produit scalaire usuel défini par  $(u|v)_E = \int_0^\infty u(t)v(t)dt$ . On rappelle que les  $g_i$  sont définies par  $g_i(t) = \frac{1}{\omega_i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t)$  avec  $\eta_i < 1$ . Les amortissements modaux  $\eta_i$  étant non nuls les  $g_i$  sont des éléments de  $E$  puisque  $g_i = O_{+\infty}(u_i)$  avec  $u_i : t \rightarrow e^{-\eta_i \omega_{0i} t}$  qui est continue de carré intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

**Définition 4.2.1** (Séparation modale). *On appelle séparation modale entre deux modes distincts  $i$  et  $j$  la quantité  $s_{ij} \in [0, 1]$  définie par :*

$$s_{ij} = \frac{|\omega_i - \omega_j|}{\omega_{0i} + \omega_{0j}}$$

**Remarque 4.2.1.** *Les structures qui présentent « trop de symétries » ont des modes de vibration associés à la même fréquence propre. On a alors  $s_{ij} = 0$  pour ces modes confondus. C'est par exemple le cas lorsqu'on considère une plaque carrée simplement supportée sur ses bords :  $\phi_{1,2}$  et  $\phi_{2,1}$  sont associés à la même pulsation propre  $\omega_{1,2} = \omega_{2,1}$ .*

On pose  $\eta_m = \min_i \eta_i$ ,  $\eta_M = \max_i \eta_i$ , et  $s = \min_{i \neq j} s_{ij}$  définissant une séparation modale de la famille de modes considérés. On note  $g_i^* = g_i / \|g_i\|_E$  les réponses impulsionnelles normées et on montre en Annexe C que la famille  $\mathcal{G}^* = (g_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  vérifie :

$$\|g_i^*\|_E = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(g_i^* | g_j^*)_E| \leq \mu_E(\mathcal{G}^*) \quad (4.9)$$

avec  $\mu_E(\mathcal{G}^*)$  qu'on appelle le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $\mathcal{G}^*$  défini par :

$$\mu_E(\mathcal{G}^*) = \frac{\eta_M^2}{(1 - (\eta_M^2 - \eta_m^2))(\eta_m^2 + s^2)} \quad (4.10)$$

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

Ce coefficient est petit devant 1 lorsque les modes considérés sont faiblement amortis et bien séparés. En effet, pour  $\eta_M \rightarrow 0$  et  $s \neq 0$  on a  $|(g_i^*|g_j^*)| \rightarrow 0$ . On dit alors que la famille  $\mathcal{G}^*$  est presque orthogonale, ou que la famille  $\mathcal{G}$  est presque orthogonale à une normalisation près, au sens de la définition suivante :

**Définition 4.2.2** (Presque orthogonalité). *Soit  $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  éléments d'un espace vectoriel  $V$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_V$ . On dit que la famille  $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale sur  $V$  pour le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_V$  lorsqu'elle vérifie :*

$$\|u_i\|_V = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(u_i|u_j)_V| \leq \mu \ll 1$$

On appelle  $\mu$  le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ .

**Remarque 4.2.2.** *C'est une définition qualitative qui n'a d'intérêt que lorsqu'on précise la condition de petitesse sur  $\mu$  pour l'application visée. Dans notre étude, la petite grandeur de référence est  $\eta_M^2$  étant donné que l'on considère par hypothèse une famille de  $p$  modes de vibration faiblement amortis.*

Il reste à montrer que cette propriété peut rester vraie en considérant les signaux échantillonnés. On munit  $F = \mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel  $(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F = \sum_{k=1}^n U_k V_k$  et on considère la famille  $G = (\mathbf{G}_i)_{1 \leq i \leq p}$ . On définit  $\mathbf{G}'_i = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\|g_i\|_E} \mathbf{G}_i$  puis  $\mathbf{G}^*_i = \frac{\mathbf{G}'_i}{\|\mathbf{G}'_i\|_F}$ . On montre en Annexe C que pour une durée de mesure  $D$  suffisamment grande et une période d'échantillonnage  $\Delta t$  suffisamment petite la famille normalisée  $G^* = (\mathbf{G}^*_i)_{1 \leq i \leq p}$  vérifie :

$$\|\mathbf{G}^*_i\|_F = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(\mathbf{G}^*_i|\mathbf{G}^*_j)_F| \leq \mu_F(G^*) \quad (4.11)$$

avec  $\mu_F(G^*)$  le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $G^*$  défini par :

$$\mu_F(G^*) = \frac{\mu_E(\mathcal{G}^*) + \eta_M^2}{1 - \eta_M^2} \quad (4.12)$$

Notons que  $\mu_F(G^*) > \mu_E(\mathcal{G}^*)$  (voir Annexe C). Si les amortissements sont faibles et les modes sont bien séparés alors  $\mu_F(G^*)$  est petit devant 1 et la famille  $G^*$  est presque orthogonale :

$$\|\mathbf{G}^*_i\|_F = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(\mathbf{G}^*_i|\mathbf{G}^*_j)_F| \ll 1 \quad (4.13)$$

### 4.2.2 Formule approchée du conditionnement pour une FMD formée de modes faiblement amortis et bien séparés

Les coefficients de la matrice  $\mathbf{A}$  (voir section 4.1.2) sont donnés par :

$$A_{ij} = \Phi_{C_i} \Phi_{C_j} (\mathbf{G}_i | \mathbf{G}_j)_F = \frac{\Phi_{C_i} \Phi_{C_j}}{\Delta t} \|\mathbf{G}'_i\|_F \|\mathbf{G}'_j\|_F \|g_i\|_E \|g_j\|_E (\mathbf{G}_i^* | \mathbf{G}_j^*)_F \quad (4.14)$$

D'après la section précédente, si les modes de la FMD sont faiblement amortis et bien séparés, et si la durée de mesure et la fréquence d'échantillonnage du capteur sont suffisamment grandes, alors la famille  $G^* = (\mathbf{G}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale et les relations (4.11) sont vérifiées. On note pour alléger  $\mu = \mu_F(G^*)$ . D'après l'Annexe C on a  $\sqrt{1 - \eta_M^2} \leq \|\mathbf{G}'_i\|_F \leq \sqrt{1 + \eta_M^2}$ , si bien que pour  $i = j$  la relation (4.14) applique :

$$\frac{1 - \eta_M^2}{4\Delta t} \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \leq A_{ii} \leq \frac{1 + \eta_M^2}{4\Delta t} \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \quad (4.15)$$

On peut alors raisonnablement approcher les coefficients diagonaux par<sup>3</sup> :

$$A_{ii} \approx \frac{1}{4\Delta t} \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \quad (4.16)$$

Les coefficient hors diagonaux vérifient quant à eux :

$$|A_{ij}| \leq \mu \frac{1 - \eta_M^2}{4\Delta t} \frac{|\Phi_{C_i} \Phi_{C_j}|}{(\eta_i \eta_j)^{1/2} (\omega_{0i} \omega_{0j})^{3/2}} \quad (4.17)$$

On observe que si  $\mu$  est suffisamment petit alors :

$$|A_{ii}| > \sum_{j \neq i}^p |A_{ij}| \quad (4.18)$$

Ainsi  $\mathbf{A}$  est à diagonale strictement dominante<sup>4</sup>. La matrice  $\mathbf{A}$  est donc inversible et son conditionnement en norme 2, noté  $\kappa(\mathbf{A})$ , peut raisonnablement s'approcher par le plus grand rapport, en valeur absolue, de ses coefficients diagonaux [Spiteri 2002]. Et cette

---

3. Plus rigoureusement on devrait écrire  $A_{ii} = \frac{1}{4\Delta t} \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} + o(\frac{1}{\eta_i})$ .

4. Cela ne peut bien évidemment pas se réaliser si le capteur est sur un noeud modal puisqu'alors un coefficient diagonal serait nul.

approximation est d'autant plus précise que  $\mu$  est petit. La relation (4.16) nous conduit alors à l'approximation<sup>5</sup> suivante du conditionnement en norme 2 de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\kappa(\mathbf{A}) \approx \max \left( \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) / \min \left( \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) \quad (4.19)$$

Les paramètres de la procédure peuvent se choisir pour réduire le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  (section 4.3). La procédure d'estimation du VPMA est alors robuste puisque des perturbations voisines des mesures conduiront à des estimations voisines du VPMA. Il reste à montrer que l'estimation  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  que l'on fait du VPMA peut être précise, c'est-à-dire proche en un certain sens de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{F}}$ .

### 4.2.3 Majoration de l'erreur d'estimation commise sur le VPMA

Les signaux échantillonnés  $\mathbf{Q}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{Q}_e$  et  $\hat{\mathbf{Q}}$  se décomposent dans la famille  $G^* = (\mathbf{G}_i^*)_{1 \leq i \leq N}$  qui n'est qu'une normalisation de la famille des  $(\mathbf{G}_i)_{1 \leq i \leq N}$  (voir 4.2.1). On note  $\mathbf{X}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{X}_e$  et  $\hat{\mathbf{X}}$  les vecteurs formés de leurs composantes<sup>6</sup> respectives dans la famille  $G^*$ . On montre en Annexe C que l'erreur d'estimation commise sur  $\tilde{\mathbf{X}}$  en utilisant un modèle tronqué sur  $p$  modes vérifie :

$$\|\hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_{\infty} \leq \mu(N - p) \|\mathbf{X}_e\|_{\infty} \|\mathbf{G}^{-1}\|_{\infty} \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{G}$  est la matrice de taille  $p$  définie par  $G_{ij} = (\mathbf{G}_i^* | \mathbf{G}_j^*)$ , et  $\mu$  est le coefficient associé à la famille  $G^*$  donné par (4.12).

La majoration (4.20) montre que plus  $\mu$  est petit et moins l'erreur d'estimation commise sur  $\tilde{\mathbf{X}}$  est importante. Cependant, cette majoration est très pessimiste à cause du facteur  $(N - p)$  puisque  $N \gg p$ , et du facteur  $\mu$  qui est probablement très grand devant 1 puisque les  $N$  modes de la structure, en particulier ceux d'ordre élevé, n'ont a priori aucune raison d'être bien séparés. Il est même observé que les modes appartenant au domaine haute fréquences sont en général très rapprochés [Lesueur 1988].

5. On réalise en fait un développement limité à l'ordre 1 en  $o(1/\eta_i)$ .

6. On ne parle pas de coordonnées puisqu'a priori  $n \neq N$  et que la liberté de la famille  $(\mathbf{G}_i^*)_{1 \leq i \leq N}$  n'est pas garantie.

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

En fait, la majoration (4.20) peut être largement améliorée en remarquant que les termes dans la série (2.7) décrivant la réponse impulsionnelle sont en  $\frac{1}{\omega_{0i}} e^{-\eta_i \omega_{0i} t}$ . Les modes d'ordre élevé ne contribuent donc que très peu à la réponse mesurée si la distribution des pulsations propres  $\omega_{0i}$  est large. La structure agit donc comme un filtre passe-bas, si bien que l'on peut décomposer  $\mathbf{Q}_e$  en deux parties :

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{Q}_e^{(1)} + \mathbf{Q}_e^{(2)} \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{Q}_e^{(1)}$  contient les  $N^{(1)}$  modes qui ont été significativement excités mais dont on a pas tenu compte dans l'analyse, et  $\mathbf{Q}_e^{(2)}$  contient les  $(N - N^{(1)} - p)$  modes restants. Le signal  $\mathbf{Q}^{(1)} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}_e^{(1)} \approx \mathbf{Q}$  vérifie la majoration :

$$\|\hat{\mathbf{X}}^{(1)} - \tilde{\mathbf{X}}\|_\infty \leq \mu^{(1)} N^{(1)} \|\mathbf{X}_e^{(1)}\|_\infty \|\mathbf{G}^{-1}\|_\infty \quad (4.22)$$

où cette fois ci  $N^{(1)} \ll N$  puisque la structure agit comme un filtre passe-bas, et où  $\mu^{(1)}$  a plus de raison d'être petit devant 1 puisqu'il est seulement associé à la famille des  $N^{(1)} + p$  vecteurs  $\mathbf{G}_i^*$ .

Ainsi  $\hat{\mathbf{Q}} \approx \hat{\mathbf{Q}}^{(1)}$ , obtenu par la procédure des moindres carrés, et  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , obtenu par troncature sur  $p$  modes, sont proches si d'une part les  $N^{(1)} + p$  fonctions de réponse impulsionnelles  $g_i$  sont presque orthogonales, et d'autre part si les paramètres de mesures  $D$  et  $n$  sont bien choisis. On représente cette situation sur la Figure 4.3. Autrement dit, la presque orthogonalité des fonctions de réponse impulsionnelle réduit l'influence de l'erreur de troncature. C'est notamment pour cette raison que la procédure des moindres carrés est judicieuse pour estimer le VPMA : la projection orthogonale et la troncature se confondent dans ces conditions. Une majoration analogue à (4.22) peut s'obtenir entre  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et  $\mathbf{Z}_{\mathbf{F}}$  en passant des  $x_i$  aux  $z_i$  par une mise à l'échelle appropriée :

$$\|\hat{\mathbf{Z}}^{(1)} - \mathbf{Z}_{\mathbf{F}}\|_\infty \leq c \mu^{(1)} N^{(1)} \|\mathbf{X}_e^{(1)}\|_\infty \|\mathbf{G}^{-1}\|_\infty \quad (4.23)$$

où  $c = \sqrt{\Delta t} / \min(\Phi_{C_i} \|\mathbf{G}'_i\|_F \|g_i\|_E)$  avec  $i$  parcourant  $1, \dots, p$ .

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

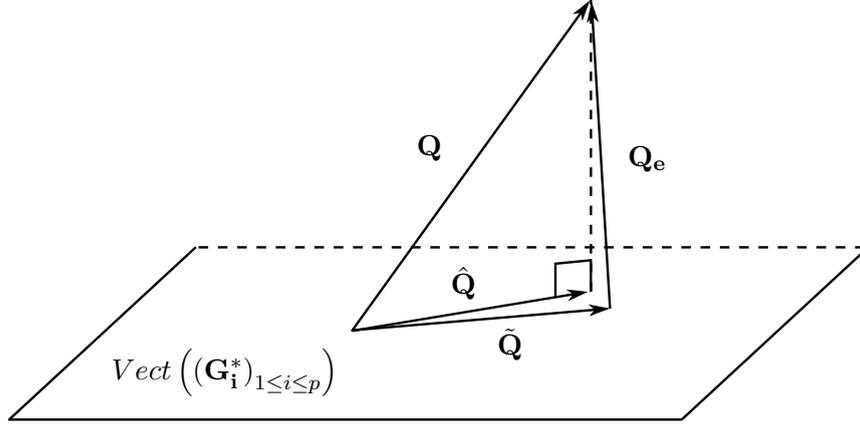


FIGURE 4.3 – Illustration du lien entre projection orthogonale et troncature modale dans les conditions de presque orthogonalité de la famille des  $(\mathbf{H}_i)$ .

Terminons en donnant une condition suffisante sur l'erreur de troncature pour que le Dirac soit localisé à  $\epsilon$  près et que son intensité soit estimée à  $r\%$  près. Pour cela, on suppose que les tolérances de colinéarité  $\theta_c$  et de reconstruction  $r$  sont raisonnablement choisies (voir sections 3.3.2 et 3.3.3). On a alors  $\mathbf{0} \in \mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$ . Autrement dit, une erreur d'estimation nulle sur le VPMA conduit à une localisation du Dirac à  $\epsilon$  près et à une reconstruction de son intensité à  $r\%$  près. En fait, on peut trouver une boule  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^p$  de rayon  $R > 0$  de centre l'origine telle que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$  (voir Figure 4.4).

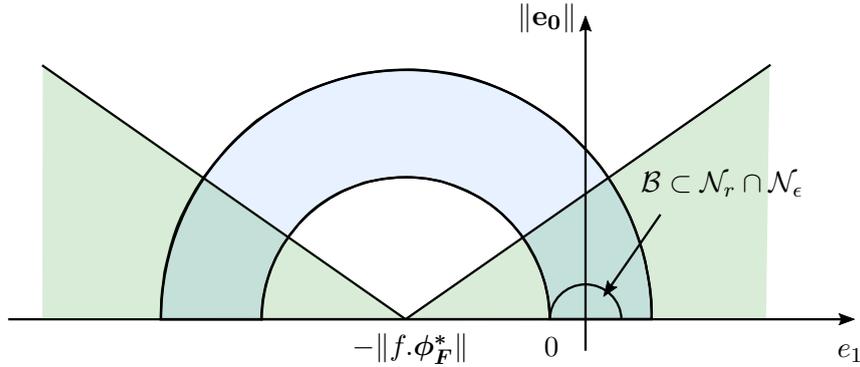


FIGURE 4.4 – Inclusion d'une boule de centre l'origine dans le noyau d'identification du Dirac dans des tolérances fixées. Voir section 3.3.4 pour la construction de cette illustration.

D'après la relation (4.23), si l'on a :

$$c\mu^{(1)}N^{(1)}\|\mathbf{X}_e^{(1)}\|_\infty\|\mathbf{G}^{-1}\|_\infty \leq R \quad (4.24)$$

Alors  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}_{\mathbf{F}} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$ , et donc le Dirac est identifié dans les tolérances fixées. La relation (4.24) indique que l'erreur de troncature peut être compensée par la presque orthogonalité de la famille  $(g_i^*)_{1 \leq i \leq N(1)+p}$ . Bien sûr, c'est seulement une condition suffisante qui a l'intérêt d'illustrer que la presque orthogonalité de la famille  $\mathcal{G}^*$  garantit l'identification robuste et précise du Dirac<sup>7</sup>.

### 4.3 Sélection des paramètres de mesure améliorant la robustesse de la procédure d'estimation du VPMA dans les conditions de presque orthogonalité des fonctions de réponse impulsionnelle

L'objectif de cette section est de proposer des paramètres de mesure (durée de mesure, fréquence d'échantillonnage, et positionnement du capteur) permettant de réduire le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  dans l'hypothèse où la famille  $(g_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale.

#### 4.3.1 Sélection de la durée de mesure et de la fréquence d'échantillonnage réalisant la propriété de presque orthogonalité des réponses impulsionnelles discrétisées

Par hypothèse, la FMD sélectionnée est associée à  $p$  fonctions de réponse impulsionnelle normées  $g_i^*$  presque orthogonales au sens de la relation (4.9). La section 4.2.1 nous apprend que la durée de mesure  $D$  peut être choisie suffisamment grande et la période d'échantillonnage  $\Delta t$  peut être choisie suffisamment petite pour que les réponses impulsionnelles discrétisées  $\mathbf{G}_i^*$  soient presque orthogonales au sens de la relation (4.13). On note  $D^*$  et  $\Delta t^*$  la durée de mesure et la période d'échantillonnage permettant de réaliser cette propriété. La première exigence sur les paramètres de mesure, si l'on veut utiliser les propriétés de presque orthogonalité, est donc d'effectuer les mesures sur une durée  $D$  avec une période

---

7. La condition nécessaire et suffisante d'identification du Dirac dans les tolérances fixées est par définition  $\mathbf{e} \in \mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$ , comme illustré sur la Figure 3.13.

d'échantillonnage  $\Delta t$  satisfaisant <sup>8</sup> :

$$D \geq D^* \quad \text{et} \quad \Delta t \leq \Delta t^* \quad (4.25)$$

Il nous reste maintenant à étudier le problème du positionnement du capteur pour minimiser le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  dans les conditions de presque orthogonalité.

### 4.3.2 Points de mesure minimisant le conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$

Commençons par motiver l'étude du positionnement du capteur en rappelant qu'il ne peut pas être placé n'importe où sur la structure suivant les contributions modales que l'on souhaite capturer. On a donné en section 4.1.2 une condition nécessaire de placement du capteur : il ne doit pas être positionné sur un des noeuds modaux des  $p$  modes de vibration retenus dans l'analyse. Dans le cas contraire, la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière et le problème d'estimation du VPMA est alors mal posé.

Si les modes discriminants sont faiblement amortis, suffisamment séparés, et que les conditions (4.25) sont satisfaites, alors les réponses impulsionnelles discrétisées normées  $\mathbf{G}_i^*$  sont presque orthogonales au sens de la relation (4.13) (voir Annexe C). La formule approchée du conditionnement donnée par (4.19) permet de retrouver que le capteur ne doit en aucun cas être placé sur un des noeuds de vibration des modes de la FMD, sinon  $\kappa(\mathbf{A}) = +\infty$  (matrice non inversible). Mais surtout, cette formule approchée donne le loisir de déterminer les points de mesure permettant de minimiser le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour minimiser  $\kappa(\mathbf{A})$  il suffit en effet de positionner le capteur sur un point  $P$  vérifiant :

$$P = \operatorname{argmin} \left( \max \left( \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) / \min \left( \frac{\Phi_{C_i}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) \right) \quad (4.26)$$

où  $C$  parcourt l'ensemble des *ddl* de la structure sur lesquels il est possible de placer un capteur.

Les points vérifiant (4.26) permettent de maximiser la robustesse de la procédure d'estimation du VPMA lorsque le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  est effectivement bien approché

---

8. D'après l'Annexe C, la période d'échantillonnage se choisit une fois que la durée de mesure est fixée. En toute rigueur, on devrait donc noter  $\Delta t(D) \leq \Delta t^*(D^*)$ .

par la formule (4.19). En particulier, cela se réalise lorsque (i) l'impact appliqué est un Dirac et (ii) lorsque les réponses impulsionnelles discrétisées sont presque orthogonales. Nous privilégierons d'autres points de mesure, que nous appellerons points neutres, dans la section 5.3.3 lorsque l'impact à identifier n'est pas un Dirac (la condition (i) est alors fausse), et/ou lorsqu'il existe une contrainte sur les temps de calculs empêchant d'utiliser une trop grande partie de la réponse vibratoire en vérifiant les conditions (4.25) (la condition (ii) est alors fausse).

#### 4.4 Détermination du noyau du problème d'identification d'un Dirac dans des tolérances fixées

On a déterminé dans la section 3.3.2 le noyau du problème de localisation d'une excitation à  $\epsilon$  près à partir d'une estimation du VPMA, et dans la section 3.3.3 on a déterminé le noyau d'estimation de son intensité à  $r\%$  près. Cependant, les noyaux  $\mathcal{N}_\epsilon$  et  $\mathcal{N}_r$  sont définis par rapport à l'erreur d'estimation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  commise sur le vecteur de participation modale amplifié  $\mathbf{Z}_F$ . On note  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$  l'erreur commise sur le modèle de réponse tronqué :

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{E} \quad (4.27)$$

L'objectif de cette section est de déterminer les noyaux  $\mathcal{N}'_\epsilon$  et  $\mathcal{N}'_r$  de la procédure définis par rapport à  $\mathbf{E}$ . Autrement dit, on cherche le domaine des erreurs  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$  admissibles sur  $\tilde{\mathbf{Q}}$  pour envoyer  $\mathbf{e} = \mathcal{O}(\mathbf{E}) \in \mathbb{R}^p$  dans  $\mathcal{N}_\epsilon$  ou  $\mathcal{N}_r$ , où  $\mathcal{O}$  désigne l'opérateur permettant de passer de  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$  à  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$ . Cela posé,  $\mathcal{N}'_\epsilon$  et  $\mathcal{N}'_r$  sont les images réciproques de  $\mathcal{N}_\epsilon$  et  $\mathcal{N}_r$  par l'opérateur  $\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{N}'_\epsilon = \mathcal{O}^{-1}(\mathcal{N}_\epsilon) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}'_r = \mathcal{O}^{-1}(\mathcal{N}_r) \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{O}^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^n$  désigne l'image réciproque d'un domaine  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$  par l'opérateur  $\mathcal{O}$ .

On sait déjà que l'opérateur  $\mathcal{O}$  en question est linéaire puisque on n'a effectué qu'une série d'opérations linéaires pour passer de  $\mathbf{Q}$  à  $\hat{\mathbf{Z}}_F$ , et donc il s'exprimera simplement sous la forme d'une matrice de taille  $p \times n$ .

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

D'après la section 4.1.2, la solution  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  du problème des moindres carrés vérifie  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{U}$ , où  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{L}_i^{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \mathbf{L}_i^{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^n E_i \mathbf{L}_i^{\mathbf{T}}$ . L'erreur dans le second membre est donc  $\mathbf{U}_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^n E_i \mathbf{L}_i^{\mathbf{T}}$ , et donc l'erreur commise sur le vecteur de participation modale est  $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}_{\mathbf{e}}$ . On note  $\mathbf{B}$  la matrice rectangulaire de taille  $p \times n$  obtenue en rangeant en colonnes les  $\mathbf{L}_i^{\mathbf{T}}$  de sorte que  $\mathbf{U}_{\mathbf{e}} = \mathbf{B}\mathbf{E}$ . On a ainsi  $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}$ , d'où l'on déduit :

$$\mathcal{O} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.29)$$

Il reste à déterminer l'image réciproque d'une partie  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$  par l'opérateur linéaire  $\mathcal{O}$ . Pour cela on considère le système matriciel :

$$\mathbf{B}\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (4.30)$$

On suppose pour simplifier que la matrice  $\mathbf{B}$  est de rang plein en lignes. D'après [Borne and Rotella 2000] sa pseudo-inverse  $\mathbf{B}^{\dagger}$  pour la norme 2 vérifie  $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{I}_p$ , où  $\mathbf{I}_p$  désigne la matrice identité d'ordre  $p$ . Une solution particulière de (4.30) est  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A}\mathbf{e}$ , si bien que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (4.30) est donné par  $\mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A}\mathbf{e}$  à un élément de  $\text{Ker}(\mathbf{B})$  près.

On en déduit les noyaux de la procédure d'estimation du VPMA formulés par rapport à l'erreur  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$  commise sur le modèle tronqué  $\tilde{\mathbf{Q}}$  :

$$\mathcal{N}'_{\epsilon} = \mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A} \mathcal{N}_{\epsilon} + \text{Ker}(\mathbf{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}'_r = \mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A} \mathcal{N}_r + \text{Ker}(\mathbf{B}) \quad (4.31)$$

$\mathcal{N}_{\epsilon}$  est un cône de révolution donc sa transformation (linéaire) par  $\mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A}$  est toujours un cône, mais qui n'est pas forcément de révolution. En particulier,  $\mathcal{N}'_{\epsilon}$  est toujours un domaine non borné, ce qui est favorable du point de vue de la robustesse de la procédure de localisation.  $\mathcal{N}_r$  est inclus dans un intérieur entre deux boules, donc sa transformation par  $\mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{A}$  est incluse dans un intérieur entre deux ellipsoïdes.

## 4.5 Bilan sur les conditions d'identification robuste et précise d'un Dirac

On récapitule ici les conditions suffisantes identifiées dans ce chapitre permettant d'identifier un Dirac de façon robuste et précise à partir de mesures vibratoires en un point.

### Conditions suffisantes d'identification robuste et précise d'un Dirac :

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- C1** : La durée de mesure  $D$  et la période d'échantillonnage  $\Delta t$  sont telles que la relation (4.12) est vérifiée
- C2** : Les amortissements  $\eta_i$  et les séparations modales  $s_{ij}$  des modes formant la FMD sont tels que la relation (4.18) est vérifiée

Alors la matrice  $\mathbf{A}$  est à diagonale strictement dominante. On peut alors améliorer la robustesse de la procédure d'identification du Dirac en remplissant la condition suivante :

- C3** : Le capteur est positionné sur un point de la structure vérifiant la relation (4.26)

Si de plus les conditions suivantes sont vérifiées :

- C4** : Les  $N^{(1)}$  modes omis dans l'analyse mais significativement excités par l'impact sont tels que  $\mu^{(1)}$  permet de vérifier la relation (4.24)
- C5** : La tolérance de colinéarité  $\theta_c$  vérifie la relation (3.14)

Alors la procédure est précise pour la localisation du Dirac. Si de plus la condition suivante est satisfaite :

- C6** : Les quantités  $l = \min_i \|\phi_i^*\|$  et  $L = \max_i \|\phi_i^*\|$  vérifient la relation (3.22),

Alors la procédure est également précise pour l'estimation de l'intensité du Dirac.

*Démonstration.* C1 et C2 impliquent que le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  est bien approché par la relation (4.19). C3 permet alors de le minimiser, i.e. de maximiser la robustesse. C4 implique que l'erreur de troncature est compensée par la presque orthogonalité des réponses impulsionnelles associées aux modes significativement excités par le Dirac, et donc que l'estimation du VPMA est précise. Avec C5 les candidats  $F_i$  retrouvés à partir du VPMA par la procédure de discrimination sont  $\epsilon$ -proches du point d'impact  $F$ . La condition C6 garantit que les intensités  $|f_i|$  associées aux candidats retrouvés seront au moins proches de  $|f|$  à  $r'$ %-près, où  $r'$  est défini par l'égalité dans la relation (3.22).  $\square$

## CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

---

Toutes ces conditions sont suffisantes mais pas nécessaires pour l'identification robuste et précise du Dirac. En particulier, la localisation peut être précise même si C4 n'est pas vérifiée. En effet, l'erreur d'estimation  $\mathbf{e}$  commise sur le VPMA peut être de norme très grande tout en étant dans  $\mathcal{N}_\epsilon$  qui n'est pas borné (voir section 3.3.2). La condition nécessaire et suffisante pour une identification précise du Dirac est que l'erreur d'estimation commise sur le VPMA soit dans  $\mathcal{N}_\epsilon \cap \mathcal{N}_r$  (voir section 3.3.4). Les conditions de presque orthogonalité permettent toutefois de garantir que l'estimation du VPMA est à la fois précise et robuste, et donc que la localisation du Dirac et l'estimation de son intensité le sont aussi lorsque la tolérance de colinéarité est bien réglée.

C2 porte sur les propriétés modales des modes formant la FMD, et donc elle dépend du système mécanique étudié (structure et conditions aux limites). C1 et C3 portent sur les paramètres de mesure sur lesquels il est possible d'agir. Notons que C1 peut être une contrainte par rapport au temps de calcul admissible puisqu'elle impose d'utiliser une grande partie de la réponse vibratoire ( $n$  est alors grand). C4 porte à la fois sur les propriétés modales du système et sur le point d'application du Dirac. En fait, la situation idéale est que les modes de la FMD soient effectivement les modes les plus excités par l'impact. Le nombre de modes pouvant être significativement excités dépend en effet du point d'application de l'excitation. Typiquement, un impact ayant lieu sur une partie plus rigide de la structure sollicite des modes plus rigides associés à des fréquences propres plus élevées.

On a vu dans ce chapitre qu'on peut résoudre le problème d'identification d'un Dirac appliqué à l'instant  $t = 0$  par une méthode des moindres carrés linéaire à partir des mesures d'un seul capteur. On représente sur la Figure 4.5 les différentes étapes de la procédure d'identification d'un Dirac. Toutefois, la technique développée suppose d'une part que l'instant d'impact est connu, le  $t = 0$ , et que l'impact est de durée suffisamment brève pour que la réponse de la structure puisse être identifiée à sa réponse impulsionnelle. En pratique, ces deux hypothèses ne sont pas toujours satisfaites : il est nécessaire d'étendre la technique développée à l'estimation de l'instant d'impact ainsi qu'à la reconstruction d'une loi paramétrée de force d'impact.

CHAPITRE 4. DÉTERMINATION DE CONDITIONS POUR L'IDENTIFICATION ROBUSTE ET PRÉCISE D'UN DIRAC À PARTIR DE MESURES VIBRATOIRES EN UN POINT

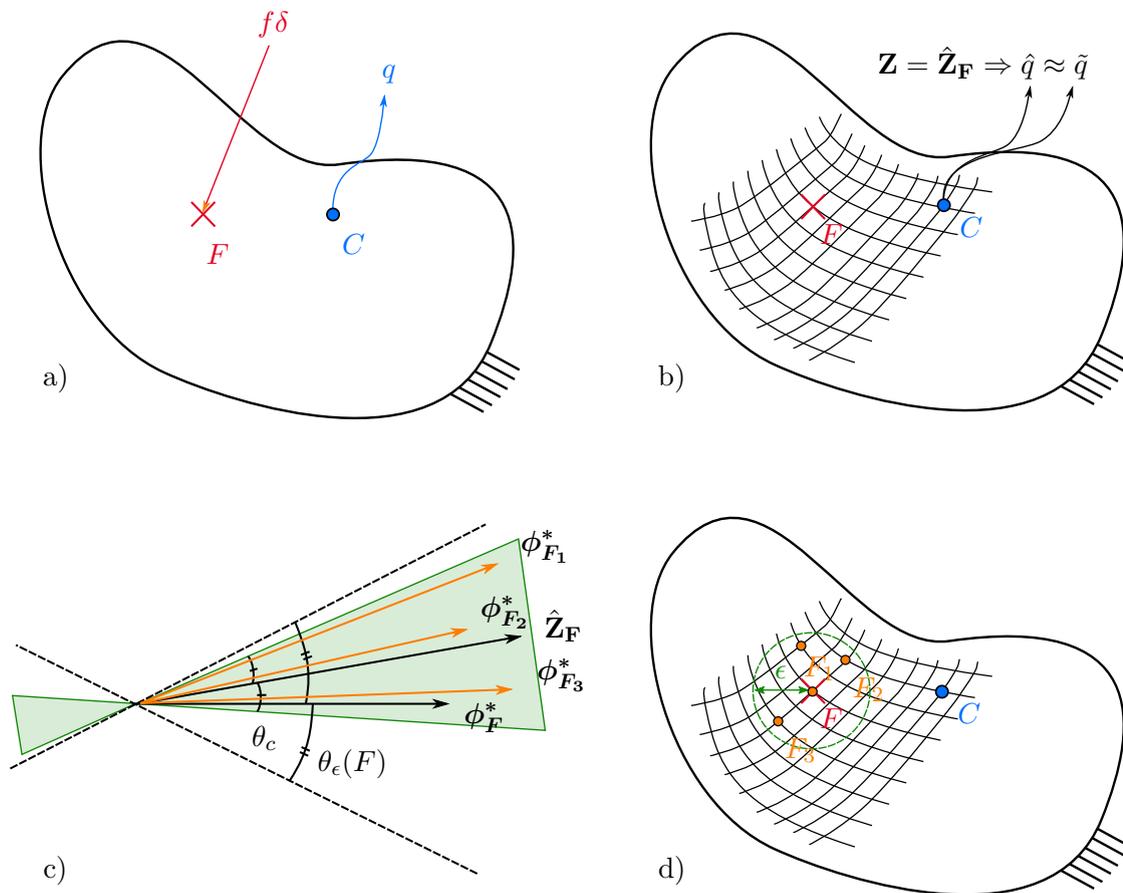


FIGURE 4.5 – Procédure d'identification d'un Dirac. a) Impulsion en  $F$  et mesures en  $C$ , b) Estimation du vecteur de participation modale amplifié par minimisation de l'écart prédictions-mesures, c) Procédure de discrimination sur les angles pour identifier les candidats et les intensités associées, d) Représentation des points candidats.

## Chapitre 5

# Extension de la méthode à l'identification pratique d'un impact arbitraire avec des mesures d'accélération

**Résumé :** Le modèle de Dirac s'applique à un impact de durée suffisamment brève pour que la réponse de la structure puisse être représentée par sa réponse impulsionnelle. En pratique, ce modèle n'est pas toujours valable et il est nécessaire de tenir compte de l'évolution temporelle de la force d'impact. L'objectif de ce chapitre est d'étendre la procédure d'identification à la reconstruction d'une loi paramétrée de force d'impact. Pour cela, on propose des lois nécessitant peu de paramètres qui décrivent convenablement différents types d'impact. Le problème d'identification est formulé par un problème des moindres carrés non-linéaire. On propose de le résoudre par une procédure d'optimisation globale tenant compte de la linéarité du modèle de réponse par rapport au VPMA tronqué. Pour affiner le conditionnement de la procédure, on montre qu'il est préférable de mesurer des accélérations plutôt que des déplacements et de placer les capteurs sur des emplacements appelés points neutres. Enfin, on propose une stratégie de réglage des paramètres de la procédure de discrimination permettant de réaliser un compromis précision-robustesse.

Une force d'impact  $\psi$  se caractérise par une durée finie  $T$  et un pic principal, parfois suivi par des répétitions de pics correspondant à des retours vibratoires de la structure sur l'impacteur (voir Figure 5.1). On a vu dans la section 2.3 qu'il était impossible de reconstruire une force d'impact  $\psi$  quelconque à partir de mesures effectuées dans le régime d'oscillations libres d'une structure à  $N$  ddl qui constitue la majorité de la réponse vibratoire mesurable. En effet, l'information résiduelle sur  $\psi$  dans le régime libre (observé pour  $t \geq T$ ) est un ensemble de  $N$  couples de réels qui ne permettent pas de reconstruire une fonction scalaire quelconque. En revanche, il semble plus raisonnable de chercher à estimer un petit nombre  $r$  de paramètres de la force d'impact caractérisant sa forme, comme sa durée ou la dissymétrie de son pic principal, d'autant plus que notre objectif est de retrouver l'énergie de l'impact et non ses variations précises.

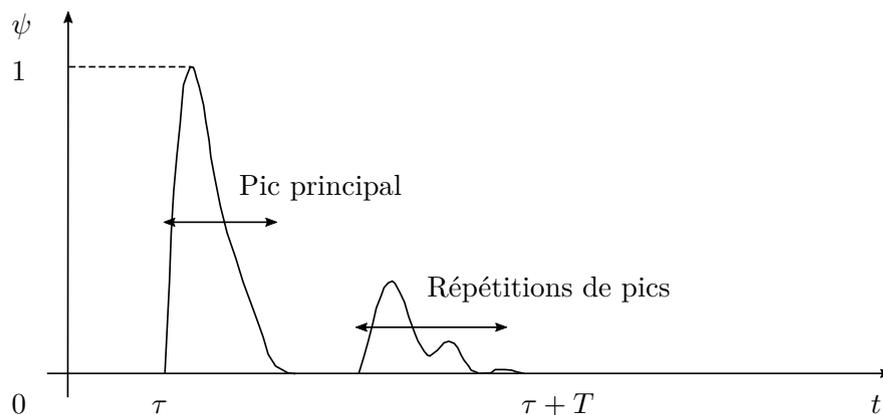


FIGURE 5.1 – Représentation d'une force d'impact avec répétitions de pics.

## 5.1 Sélection de lois paramétriques de force d'impact

De façon générale, une force d'impact se caractérise par une fonction continue à support borné  $[\tau, T + \tau]$  où  $\tau \geq 0$  désigne l'instant d'application de l'impact, et  $T > 0$  désigne la durée de l'impact (voir Figure 5.1). L'instant  $t = 0$  considéré ici correspond à un début de mesures alors que la structure est initialement au repos. On proposera en section 5.2.3 des techniques permettant d'estimer l'instant d'impact  $t = \tau$ . On suppose que la durée d'impact  $T$  est suffisamment brève pour générer des oscillations libres de la structure (voir section 2.3), mais qu'elle est suffisamment longue pour que la réponse ne puisse pas être

CHAPITRE 5. EXTENSION DE LA MÉTHODE À L'IDENTIFICATION PRATIQUE D'UN IMPACT ARBITRAIRE AVEC DES MESURES D'ACCÉLÉRATIONS

---

convenablement approchée par une réponse impulsionnelle. Dans le cas contraire, on est ramené au problème d'identification d'un Dirac étudié dans le chapitre précédent.

Remarquons qu'il n'est pas utile de chercher un modèle de force d'impact qui présente des petites perturbations par rapport à la courbe moyenne, comme cela peut être observé dans les expériences. En effet, la réponse  $q$  d'un point de la structure est donnée par l'application linéaire continue  $q : f \mapsto q(f) = f * g$ , avec  $g$  la réponse impulsionnelle de la structure. Une petite perturbation  $\Delta f$  de l'excitation se traduit par une petite perturbation  $\Delta q$  de la réponse. Les paramètres supplémentaires liés à ces petites perturbations permettraient certes de représenter plus fidèlement une force d'impact comme illustrée en Figure 5.1. Cependant, ils augmenteraient inutilement les temps de calcul avec la procédure proposée en section 5.2.2. Quatre modèles sont proposés pour représenter avec peu de paramètres une loi d'impact (voir Figure 5.2) :

**DS** Un demi sinus appliqué à l'instant  $\tau$  et de durée  $T$ ,

**QC** Un quart de cosinus appliqué à l'instant  $\tau$  et de durée  $T$ ,

**GS** Une gaussienne symétrique de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma$ ,

**GD** Une gaussienne dissymétrique de moyenne  $\mu$ , de variance gauche  $\sigma_g$  et de variance droite  $\sigma_d$ .

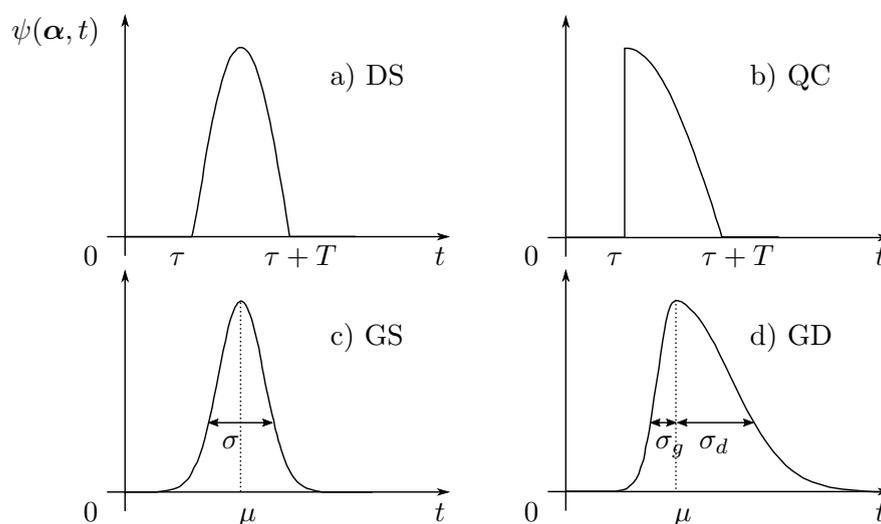


FIGURE 5.2 – Modèles paramétrés de loi d'impact.

Les modèles DS et GS représentent des « impacts mous » pour lesquels le pic principal est symétrique. Typiquement, ces impacts s'observent lorsque le matériau de l'impacteur est très peu rigide par rapport à celui de la structure au point d'impact et que la vitesse de l'impacteur n'est pas trop importante. À l'inverse, les modèles QC et GD représentent des « impacts durs » pour lesquels le pic principal se caractérise par une brusque augmentation de la force à partir de l'instant d'impact. Notons que les modèles GD et GS ne sont pas à support borné mais à décroissance exponentielle. On verra qu'ils sont adaptés aux procédures numériques puisque qu'ils sont de régularité  $\mathcal{C}^\infty$  sans nécessiter beaucoup de paramètres pour représenter un impact à pic symétrique ou dissymétrique. Les modèles DS et QC ne sont pas  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ , ce qui interdit d'utiliser des méthodes d'optimisation basées sur une hypothèse de gradient continu. Enfin, signalons que les modèles proposés ne permettent pas de représenter des répétitions de pics comme illustré sur la Figure 5.1. En pratique, ces modèles permettent cependant de capturer le pic principal contenant la majorité de l'énergie de l'impact (voir section 6.5.3).

## 5.2 Estimation simultanée du VPMA et des paramètres de la loi d'impact à partir de mesures vibratoires en un point

### 5.2.1 Formulation du problème

On considère une structure linéaire élastique à  $N$  ddl soumise à l'instant  $t = 0$  à une force d'impact  $f\psi$ . La loi unitaire  $\psi$  dépend éventuellement d'un paramètre  $\tau$  caractérisant le décalage entre l'instant d'impact et le début des mesures. On suppose qu'une FMD formée de  $p$  de modes de vibration connus de la structure est disponible (voir Chapitre 3). On note  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$  l'ensemble des  $r$  paramètres utilisés pour décrire la loi d'impact unitaire  $\psi$  avec un modèle paramétrique (voir section 5.1). On regroupe ces paramètres dans un vecteur  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_r)$  de sorte que le modèle de réponse de la structure au point de mesure  $C$  est donné par :

$$\tilde{q}(\boldsymbol{\alpha}, t) = \mathbf{L}_\psi(\boldsymbol{\alpha}, t) \cdot \mathbf{Z}_F \quad (5.1)$$

Les expressions des  $\psi(\boldsymbol{\alpha}) * g_i$  dans  $\mathbf{L}_\psi(\boldsymbol{\alpha}, t)$  peuvent se calculer explicitement pour les modèles DS et QC. En revanche, les gaussiennes se prêtent mal au calcul intégral explicite et les produits de convolution avec les lois GS et GD doivent être calculés numériquement. On dispose de  $n > p + r$  mesures  $(q(t_i))_{1 \leq i \leq n}$ , éventuellement entachées de bruit, prises aux instants  $t_i = i\Delta t$  avec  $\Delta t$  la période d'échantillonnage du capteur. Le problème est alors d'estimer le vecteur de participation modale amplifié  $\mathbf{Z}_F$ , lié au point d'application  $F$  de l'impact et à son intensité  $f$  (voir Chapitre 3), et d'identifier le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  décrivant l'évolution temporelle unitaire de la force d'impact  $\psi$ . Par suite, on souhaite localiser à  $\epsilon$ -près le point d'impact  $F$  (voir Figure 5.3) et estimer son intensité  $f$  à partir de l'estimation  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  du VPMA en utilisant la procédure de discrimination décrite en section 3.3. La reconstruction de la force d'impact est donnée par  $\hat{f}\psi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ , où  $\hat{f}$  et  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  désignent respectivement les estimations de l'intensité de l'impact et du vecteur des paramètres de la loi unitaire.

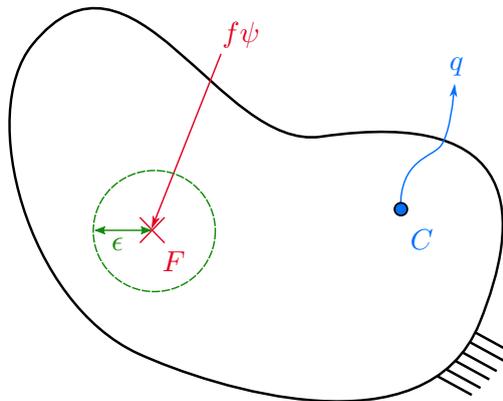


FIGURE 5.3 – Problème d'identification d'un impact quelconque.

### 5.2.2 Résolution par une méthode de moindres carrés semi-linéaire explorant l'espace des paramètres de la forme d'impact

On cherche une approximation  $\hat{\mathbf{Z}}_F$  du vecteur de participation modale amplifié et une approximation  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  du vecteur des paramètres de l'impact au sens des moindres carrés. Plus précisément, on veut minimiser la somme des carrés des écarts prédictions-mesures :

$$S(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i(\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{Z} - q(t_i))^2 \quad (5.2)$$

où l'on a posé  $\mathbf{L}_i(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{L}_\psi(\boldsymbol{\beta}, t_i)$ . Le modèle de réponse (5.1) n'est plus linéaire par rapport à toutes les inconnues puisque qu'on doit estimer le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  qui est noyé dans les expressions non linéaires  $\psi(\boldsymbol{\alpha}) * g_i$ .  $S$  n'a plus de raison d'admettre un minimum unique et une procédure d'optimisation globale doit être envisagée. Remarquons cependant que le modèle de réponse reste linéaire par rapport au vecteur de participation modale amplifié  $\mathbf{Z}_F$ . Comme on le verra dans la section 5.3, il est toujours possible de bien conditionner le problème d'estimation du VPMA pour un jeu de paramètres  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  donné.

On est donc conduit à explorer l'espace des paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  de la forme d'impact et à identifier pour chaque jeu de paramètres  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  l'unique VPMA associé par résolution d'un problème des moindres carrés linéaire (voir section 4.1.2). On retiendra, en fin de parcours, le couple  $(\boldsymbol{\alpha}^{(opt)}, \mathbf{Z}_F^{(opt)})$  pour lequel la plus petite valeur de  $S$  a été obtenue. On qualifie dans la suite cette procédure de semi-linéaire puisque qu'elle consiste à résoudre un problème des moindres carrés linéaire pour chaque jeu de paramètre  $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$  exploré. Le principal avantage de cette méthode est que chaque itération consiste à résoudre un système matriciel linéaire de petite dimension  $p$  qui nécessite très peu de temps de calcul.

L'exploration de l'espace des paramètres de la forme d'impact peut s'effectuer de plusieurs manières. Le plus simple, mais aussi le moins économique en temps de calcul, est de découper uniformément les intervalles possibles de valeurs des paramètres  $[\alpha_i^{min}, \alpha_i^{max}]$  et de résoudre en chaque point. Cette approche nécessite une connaissance préalable sur les valeurs raisonnables à donner aux extrémités de chaque intervalle et au pas de résolution. Une autre approche consiste à découper les intervalles à l'aide d'un algorithme d'exploration dédié sélectionnant automatiquement les régions d'intérêt. On peut par exemple citer les algorithmes de type génétique ou essaim de particules [Eberhart et al. 2001]. L'exploration de l'espace des paramètres peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul, surtout si l'on effectue un simple découpage uniforme, et le modèle de loi d'impact retenu doit utiliser un nombre de paramètres approprié au temps de calcul autorisé pour l'application visée<sup>1</sup>. Par ailleurs, suivant la stratégie d'exploration choisie il faut s'assurer que le modèle de loi d'impact utilisé a les régularités nécessaires pour le bon déroulement de la procédure. Par exemple, un algorithme nécessitant des calculs de gradients impose d'utiliser un modèle

---

1. Par exemple pour une application en temps réel.

de loi d'impact au moins de régularité  $\mathcal{C}^1$ , comme par exemple les modèles GS et GD.

Enfin, le couple solution obtenu peut être affiné en utilisant une procédure d'optimisation locale avec pour point de départ le couple associée à la plus petite valeur de  $S$  obtenue. Par exemple, on peut utiliser l'algorithme de Levenberg-Marquardt qui est une procédure itérative stable convergeant toujours vers le minimum local le plus proche du point de départ [Marquardt 1963]. Cet algorithme utilise une jacobienne donc il faut utiliser un modèle de loi d'impact au moins de régularité  $\mathcal{C}^1$  pour qu'elle soit continue. Une fois  $\mathbf{Z}_F^{(opt)}$  obtenu, on applique la procédure de discrimination décrite en section 3.3 pour identifier les candidats  $F_i$  possibles et les intensités  $f_i$  associées.

### 5.2.3 Techniques d'estimation de l'instant d'impact

Dans le Chapitre 4, on a supposé que l'instant d'impact était connu et on a développé une procédure d'identification d'un Dirac sans se préoccuper du problème d'estimation de l'instant d'impact. Pour une structure de dimensions suffisamment faibles, comme pour la plaque étudiée dans le Chapitre 6, le temps d'établissement du régime vibratoire  $t_{modes}$  est suffisamment court pour être négligé (voir Figure 1.1). Dans ce cas, on peut initialiser le modèle de réponse au temps  $t = t_{modes} \approx 0$ . Pour cela, il suffit de définir un seuil de dépassement de niveau vibratoire  $a > 0$  puis d'initialiser les mesures à l'instant de franchissement du seuil (voir Figure 5.4).

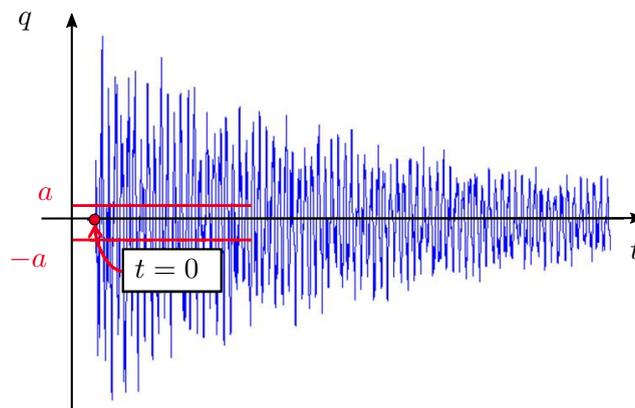


FIGURE 5.4 – Estimation de l'instant d'impact à partir du signal vibratoire du capteur le plus proche du point d'impact.

Cette approximation n'est plus valable lorsque la structure est de grandes dimensions et que le capteur est trop éloigné du point d'impact, comme pour le panneau étudié dans le Chapitre 7. On peut contourner ce problème de deux façons. La première option consiste à mettre l'instant d'impact en paramètre inconnu du modèle de réponse (par exemple avec le modèle GD proposé en section 5.1). Il faut alors résoudre un problème d'optimisation fortement non linéaire avec le risque de trouver un minimum local. La seconde approche consiste à placer plusieurs capteurs sur la structure, et à les distribuer de sorte que l'erreur maximale que l'on puisse commettre sur l'instant d'impact ne conduise pas à des erreurs trop importantes dans la procédure d'identification de l'impact.

### 5.3 Sélection de paramètres de mesures affinant le conditionnement en chaque point de l'espace des paramètres

L'objectif de cette section est de déterminer des paramètres de mesure (type de mesure effectuée et positionnement du capteur) permettant d'affiner le conditionnement du problème sachant que la loi d'impact  $\psi$  est inconnue. L'idée est de renoncer de trouver des paramètres de mesures optimaux permettant d'atteindre le minimum du conditionnement, comme nous l'avons fait pour l'identification d'un Dirac en section 4.3, et de seulement rechercher des paramètres de mesure favorables, quelle que soit la loi d'impact considérée.

#### 5.3.1 Etude du conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$ suivant les hypothèses sur la FMD et les paramètres de mesures

On se propose d'étudier le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  telle qu'introduite en section 4.1.2, dans un premier temps sans faire d'hypothèse sur la FMD et les paramètres de mesures choisis, puis dans un second temps en supposant que les modes de la FMD sont faiblement amortis et bien séparés.

Par définition,  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i^T(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{L}_i(\boldsymbol{\alpha})$  où  $\mathbf{L}_i(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\phi}_C^*)^T \cdot \mathbf{D}_\alpha(t_i)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha(t)$  la matrice diagonale de taille  $p$  dont les coefficients diagonaux sont donnés par  $h_i(t) = (\psi(\boldsymbol{\alpha}) * g_i)(t)$  (voir section 2.1). Cela compris, on peut factoriser  $\mathbf{A}$  sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_C \mathbf{H} \mathbf{D}_C \quad (5.3)$$

CHAPITRE 5. EXTENSION DE LA MÉTHODE À L'IDENTIFICATION  
PRATIQUE D'UN IMPACT ARBITRAIRE AVEC DES MESURES  
D'ACCÉLÉRATIONS

---

avec  $\mathbf{D}_C = \text{diag}(\Phi_{C1}, \dots, \Phi_{Cp})$ , et  $\mathbf{H}$  la matrice de taille  $p$  de terme général  $H_{ij} = (\mathbf{H}_i | \mathbf{H}_j)_F$  où  $\mathbf{H}_i = (h_i(t_1) \dots h_i(n\Delta t))^T$  (voir Annexe C pour un rappel des notations). On note  $\kappa(\mathbf{M})$  le conditionnement en norme 2 d'une matrice  $\mathbf{M}$  inversible. En utilisant la propriété  $\kappa(\mathbf{PQ}) \leq \kappa(\mathbf{P})\kappa(\mathbf{Q})$ , on obtient la majoration suivante :

$$\kappa(\mathbf{A}) \leq \kappa(\mathbf{H}) \max_{i,j} \left| \frac{\Phi_{Cj}}{\Phi_{Ci}} \right|^2 \quad (5.4)$$

Sans hypothèse supplémentaire, notre étude du conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  s'arrête ici, en ouvrant la porte à des placements judicieux de capteurs étudiés en section 5.3.3. On se propose cependant d'aller plus loin en supposant que les modes de la FMD sont faiblement amortis et bien séparés. On peut alors utiliser des propriétés de presque orthogonalité analogues à celles étudiées en section 4.2.1.

L'étude effectuée en section 2.3 montre que la majorité de la réponse vibratoire mesurable consiste en des oscillations libres de la structure. D'après la relation (2.17), ce régime libre peut se décrire par une somme de réponses impulsionnelles  $g_i$ , chacune retardée de  $\tau_i$ , et modulées en amplitude par des facteurs  $K_i$ . On considère ainsi la famille  $\mathcal{H} = (h_i)_{1 \leq i \leq p}$ , où les  $h_i$  sont définies par  $h_i(t) = K_i g_i(t - \tau_i)$  si  $t \geq T$  et  $h_i(t) = 0$  sinon. D'après l'Annexe C, la famille normalisée  $\mathcal{H}^* = (h_i / \|h_i\|_E)_{1 \leq i \leq p}$  vérifie :

$$\|h_i^*\|_E = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(h_i^* | h_j^*)_E| \leq \mu_E \quad (5.5)$$

Avec  $\mu_E$  le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $\mathcal{H}^*$  qui est petit devant 1 lorsque les modes considérés sont faiblement amortis et suffisamment séparés. On note  $\mathbf{H}'_i = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\|h_i\|_E}$  puis  $\mathbf{H}_i^* = \frac{\mathbf{H}'_i}{\|\mathbf{H}'_i\|_F}$ . D'après l'Annexe C, pour une durée de mesure suffisamment grande et une période d'échantillonnage suffisamment petite, la famille normalisée  $H^* = (\mathbf{H}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  vérifie :

$$\|\mathbf{H}_i^*\|_F = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \quad |(\mathbf{H}_i^* | \mathbf{H}_j^*)_F| \leq \mu_F = \frac{\mu_E + \eta_M^2}{1 - \eta_M^2} \quad (5.6)$$

En reprenant les calculs de la section 4.2.2, on montre alors que :

$$A_{ii} \approx \frac{1}{4\Delta t} \frac{K_i^2 \Phi_{Ci}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \quad (5.7)$$

Les coefficient hors diagonaux vérifient quant à eux :

$$|A_{ij}| \leq \mu_F \frac{1 - \eta_M^2}{4\Delta t} \frac{|K_i K_j \Phi_{Ci} \Phi_{Cj}|}{(\eta_i \eta_j)^{1/2} (\omega_{0i} \omega_{0j})^{3/2}} \quad (5.8)$$

Si  $\mu_F$  est suffisamment petit alors la matrice  $\mathbf{A}$  est à diagonale strictement dominante, donc inversible. Son conditionnement en norme 2 peut raisonnablement s'approcher par le plus grand rapport, en valeur absolue, de ses coefficients diagonaux. On a alors :

$$\kappa(\mathbf{A}) \approx \max \left( \frac{K_i^2 \Phi_{Ci}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) / \min \left( \frac{K_i^2 \Phi_{Ci}^2}{\eta_i \omega_{0i}^3} \right) \quad (5.9)$$

et cette approximation est d'autant plus précise que  $\mu_F$  est petit.

La relation (5.9) n'est valable que pour des mesures effectuées dans le régime libre. En pratique, la durée de l'impact est inconnue et une partie des instants de mesure sont dans le régime forcé ( $t_i \leq T$ ). On note  $m$  le plus grand indice tel que  $m\Delta t < T$ ,  $\mathbf{A}^{(m)} = \sum_{i=1}^m \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i$  la matrice calculée à partir des  $m$  premiers échantillons de mesure, et  $\mathbf{A}^{(n)} = \sum_{i=m+1}^n \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i$  calculée à partir des échantillons restants. L'approximation (5.9) est en fait valable pour  $\mathbf{A}^{(n)}$  et non pour  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(m)} + \mathbf{A}^{(n)}$ . On ne peut a priori rien dire sur le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  complète, mais on verra dans les applications (Chapitres 6 et 7) qu'utiliser une partie de la réponse forcée ne dégrade pas nécessairement le conditionnement du problème.

### 5.3.2 Réduction du conditionnement de la procédure par mesures d'accélération

On se propose d'étudier le conditionnement de la procédure pour des mesures d'accélération qui sont en pratique plus commodes à effectuer étant donné que les accéléromètres sont de petits capteurs ne nécessitant pas de point de référence. La forme du modèle de réponse (5.1) est conservée pour des mesures d'accélération en dérivant deux fois par

CHAPITRE 5. EXTENSION DE LA MÉTHODE À L'IDENTIFICATION  
PRATIQUE D'UN IMPACT ARBITRAIRE AVEC DES MESURES  
D'ACCÉLÉRATIONS

---

rapport à la variable  $t$  :

$$\ddot{q}(\boldsymbol{\alpha}, t) = \ddot{\mathbf{L}}_{\psi}(\boldsymbol{\alpha}, t) \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{F}} \quad (5.10)$$

Le régime libre de la structure se définit donc pour des mesures d'accélération à partir des fonctions  $\ddot{h}_i$  définies par :

$$\ddot{h}_i(t) = K_i \ddot{g}_i(t - \tau_i) \text{ si } t \geq \tau_i \text{ et } \ddot{h}_i(t) = 0 \text{ sinon} \quad (5.11)$$

En dérivant deux fois  $g_i$  par rapport à la variable  $t$  on obtient :

$$\ddot{g}_i(t) = -\omega_{0i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \left[ 2\eta_i \cos(\omega_i t) + \frac{1 - 2\eta_i^2}{\sqrt{1 - \eta_i^2}} \sin(\omega_i t) \right] \quad (5.12)$$

En utilisant l'identité  $a \cos(x) + b \sin(x) = R \sin(x - \phi + \pi/2)$ , avec  $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$  et  $\tan \phi = b/a$ , l'équation (5.12) devient :

$$\ddot{g}_i(t) = -R \omega_{0i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t} \sin(\omega_i t - \phi_i + \pi/2) \quad (5.13)$$

avec  $R = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_i^2}}$  et  $\tan \phi_i = \frac{1 - 2\eta_i^2}{2\eta_i \sqrt{1 - \eta_i^2}}$ . Soit encore :

$$\ddot{g}_i(t) = -\frac{\omega_{0i}^2}{\sqrt{1 - \eta_i^2}} g_i(t - u_i) \quad (5.14)$$

avec  $u_i = (\phi_i - \pi/2)/\omega_i$ . Les réponses impulsionnelles en accélération s'obtiennent à partir de celles en déplacement par une amplification  $-\frac{\omega_{0i}^2}{\sqrt{1 - \eta_i^2}}$  et un décalage temporel  $u_i$ . Pour  $t \geq T$  les fonctions  $\ddot{h}_i$  sont donc données par :

$$\ddot{h}_i(t) = -\frac{K_i \omega_{0i}^2}{\sqrt{1 - \eta_i^2}} g_i(t - (u_i + \tau_i)) \quad (5.15)$$

On remarque que  $\ddot{h}_i(t)$  est de la forme  $K'_i g_i(t - \tau'_i)$ , tout comme les fonctions  $h_i$  déjà étudiées. Si les modes de la FMD sont faiblement amortis et bien séparés, la section précédente nous apprend que la famille  $(\ddot{h}_i / \|\ddot{h}_i\|_E)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale. Une formule

approchée du conditionnement de la nouvelle matrice  $\mathbf{A}$  pour des mesures d'accélération se déduit directement de (5.9) par :

$$\kappa_{acc}(\mathbf{A}) \approx \max \left( \frac{K_i^2 \Phi_{C_i}^2 \omega_{0i}}{\eta_i} \right) / \min \left( \frac{K_i^2 \Phi_{C_i}^2 \omega_{0i}}{\eta_i} \right) \quad (5.16)$$

On observe que les pulsations propres n'interviennent plus en  $\omega_{oi}^3$  mais seulement en  $\omega_{oi}$ . Les écarts fréquentiels entre les modes retenus dans l'analyse ont donc une influence beaucoup plus réduite sur le conditionnement de la procédure par rapport à des mesures en déplacements.

La formule approchée du conditionnement (5.16) dépend des coefficients  $K_i$  qui sont inconnus. On ne peut donc pas positionner le capteur pour minimiser à coup sûr le conditionnement comme nous l'avons proposé pour le Dirac<sup>2</sup> dans le Chapitre 4. Même si l'on connaît les  $K_i$ , la relation (5.16) implique d'utiliser une grande partie de la réponse vibratoire ( $D \geq D^*$ ) avec une précision élevée ( $\Delta t \leq \Delta t^*$ ) pour atteindre les conditions de presque orthogonalité de la famille  $(\mathbf{H}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ . La taille  $n$  des vecteurs échantillonnés peut donc être importante et rédhibitoire pour une identification dans le temps autorisé par l'application visée. On va donc proposer des emplacements de capteurs judicieux quels que soient les paramètres de mesure (durée et fréquence d'échantillonnage), les propriétés modales de la FMD et la force d'impact appliquée.

### 5.3.3 Positionnement du capteur sur un point neutre de mobilité maximale

La majoration (5.4), valable aussi bien pour des mesures de déplacement ou d'accélération en considérant soit les  $h_i$  soit les  $\ddot{h}_i$ , met en évidence l'importance du rapport  $\nu(C) = \max_{i,j} \left| \frac{\Phi_{C_j}}{\Phi_{C_i}} \right|$ .

**Définition 5.3.1** (Point neutre). *Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration normalisés par rapport aux masses modales. On appelle point neutre de la structure, relativement à la famille de modes considérés, les points  $N \in S$  de la structure vérifiant :*

$$\nu(N) = \max_{i,j} \left| \frac{\phi_j(N)}{\phi_i(N)} \right| = 1$$

---

2. Dans le cas du Dirac on a  $|K_i| = 1$  pour tout  $i$ .

**Remarque 5.3.1.** *Les points neutres ne vibrent pas préférentiellement sur un mode de vibration ou un autre de la famille de modes considérés. L'emplacement du capteur n'amplifie donc pas préférentiellement les erreurs sur une participation modale ou une autre.*

**Remarque 5.3.2.** *S'ils existent, les points neutres s'obtiennent géométriquement par les points d'intersection, hors croisement éventuel des lignes nodales, des déformées en valeur absolue des modes considérés. Ils dépendent de la normalisation des modes de vibration.*

**Définition 5.3.2** (Mobilité). *Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de  $p$  modes de vibration normés par rapport aux masses modales, et  $P \in S$  un point quelconque de la structure. On note  $V = \max_{i=1, \dots, p} \max_{M \in S} |\phi_i(M)|$  le plus grand ventre des modes considérés. On appelle mobilité du point  $P$  dans la famille de modes considérés le rapport  $m(P)$  défini par :*

$$m(P) = \frac{\min_i |\phi_i(P)|}{V}$$

**Remarque 5.3.3.** *Pour une structure discrétisée on a  $V = \max_{i=1, \dots, N} \max_{j=1, \dots, p} |\Phi_{ij}|$ . On exprimera la mobilité entre 0% (noeud modal) et 100% (plus grand ventre).*

Sans hypothèse supplémentaire sur la famille  $(h_i)_{1 \leq i \leq p}$ , ni sur la durée de mesure, la fréquence d'échantillonnage du capteur ou la force d'impact appliquée, on observe qu'on peut réduire la majoration du conditionnement rien qu'en positionnant le capteur sur un point neutre. A défaut, on peut toujours positionner le capteur sur un point maximisant le rapport  $\max_{i,j} \left| \frac{\Phi_{Cj}}{\Phi_{Ci}} \right|$ . On représente sur la Figure 5.5 les deux points neutres d'une poutre simplement supportée associés aux modes de flexion 1 et 2. On en déduit, par construction graphique sur la Figure 5.6, les quatre points neutres d'une plaque simplement supportée sur ses bords associés aux modes de flexion (1, 1), (1, 2) et (2, 1).

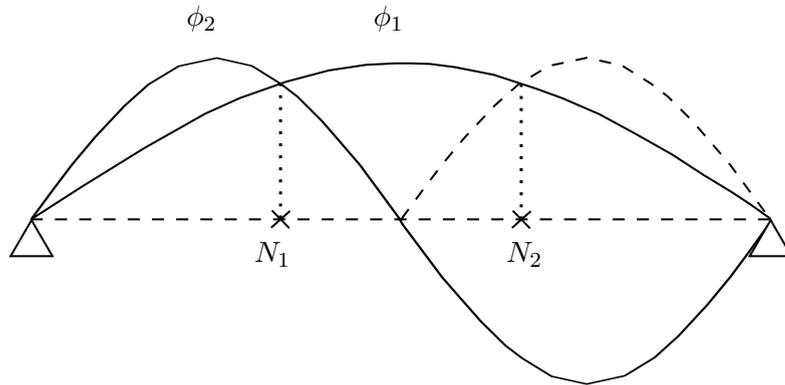


FIGURE 5.5 – Points neutres d’une poutre simplement supportée sur ses extrémités associés aux modes de flexion 1 et 2.

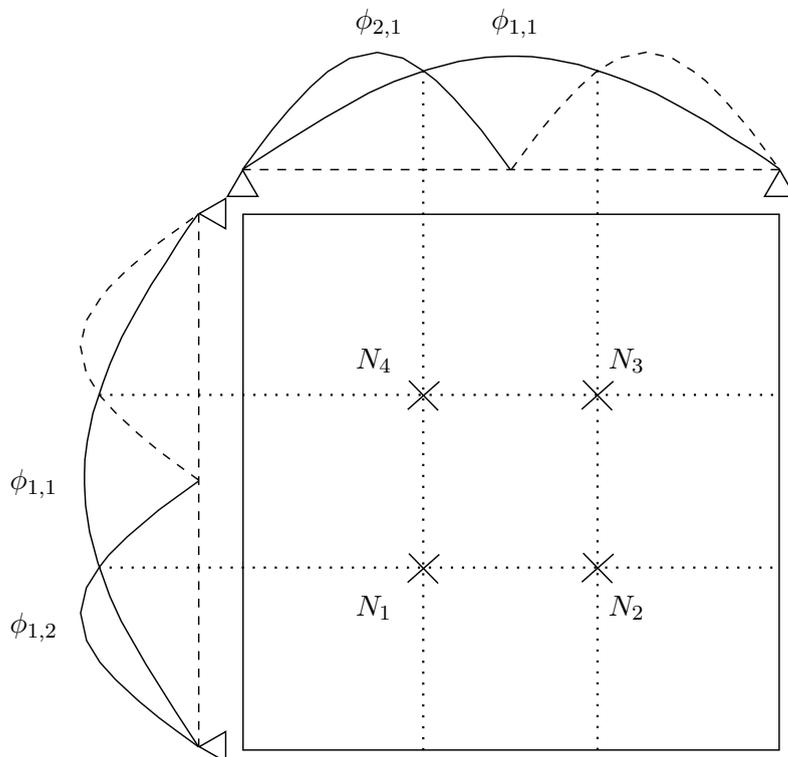


FIGURE 5.6 – Détermination graphique des points neutres d’une plaque simplement supportée sur ses bords associés aux modes de flexion (1, 1), (1, 2) et (2, 1).

Il est possible que plusieurs points neutres  $N_i$  existent avec une mobilité  $m(N_i)$  différente. Ce n'est pas le cas pour la poutre et la plaque simplement supportées qui admettent plusieurs points neutres de mobilité identique du fait des symétries de la structure. En revanche, c'est le cas pour une plaque encastree sur un bord qui admet deux paires de points neutres avec des mobilités différentes (voir Figure B.7).

On va montrer qu'il faut privilégier le positionnement du capteur sur un point neutre  $N$  de mobilité  $m(N)$  maximale. On note  $e(t)$  l'erreur commise à l'instant  $t$  sur le modèle de réponse de sorte que  $q(t_i) = \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{Z}_F + e(t_i) = q_0(t_i) + e(t_i)$ . En reprenant les notations de la section 4.1.2, on écrit  $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n q_0(t_i) \mathbf{L}_i^T + \sum_{i=1}^n e(t_i) \mathbf{L}_i^T = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_e$ . On a donc  $\hat{\mathbf{Z}}_F = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_e) = \mathbf{Z}_F + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}_e$ . L'erreur commise sur le VPMA est donc donnée par  $\hat{\mathbf{Z}}_F - \mathbf{Z}_F = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}_e$ . En reprenant les notations de la section 5.3.1, on a  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1}$ , avec  $\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{m(N)}} \mathbf{I}_p$  où  $\mathbf{I}_p$  désigne la matrice identité de taille  $p$ . On a de plus  $\mathbf{L}_i^T = \sqrt{m(N)} \cdot (h_1(t_i) \dots h_p(t_i))^T$ . On note  $\mathbf{h}_i = (h_1(t_i) \dots h_p(t_i))^T$  puis  $\mathbf{H}_e = \sum_{i=1}^n e(t_i) \mathbf{h}_i$ . On a alors  $\mathbf{U}_e = \sqrt{m(N)} \cdot \mathbf{H}_e$ . On en déduit :

$$\|\hat{\mathbf{Z}}_F - \mathbf{Z}_F\| = \frac{\|\mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_e\|}{\sqrt{m(N)}} \quad (5.17)$$

La relation (5.17) conduit alors à choisir un point neutre  $N$  de mobilité maximale afin de réduire l'erreur d'estimation sur le VPMA.

## 5.4 Mise en évidence du compromis précision-robustesse de la procédure

On suppose dans cette section que la famille  $\ddot{H}^* = (\ddot{\mathbf{H}}_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale de sorte que le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  peut s'approcher par (5.9). On suppose que la FMD sélectionnée admet au moins un point neutre sur lequel on positionne le capteur. L'objectif de cette section est de montrer que les exigences de précision et de robustesse sont contradictoires. Une stratégie de recherche de compromis est proposée en section 5.5.

### 5.4.1 Influence du nombre de modes retenus dans l'analyse sur la précision et la robustesse de la procédure

Avec les hypothèses évoquées ci-dessus, le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  est donné par :

$$\kappa_{acc}(\mathbf{A}) \approx \max \left( \frac{K_i^2 \Phi_{C_i}^2 \omega_{0i}}{\eta_i} \right) / \min \left( \frac{K_i^2 \Phi_{C_i}^2 \omega_{0i}}{\eta_i} \right) \quad (5.18)$$

En séparant les influences des différentes quantités on obtient :

$$\kappa_{acc}(\mathbf{A}) \leq \max_{i,j} \left| \frac{K_j}{K_i} \right|^2 \cdot \max_{i,j} \left| \frac{\Phi_{C_j}}{\Phi_{C_i}} \right|^2 \cdot \max_{i,j} \left( \frac{\omega_{0j}}{\omega_{0i}} \right) \cdot \max_{i,j} \left( \frac{\eta_j}{\eta_i} \right) \quad (5.19)$$

La relation obtenue montre qu'il est favorable de sélectionner une FMD dont le rapport  $\max_{i,j} (\omega_{0j}/\omega_{0i})$  est le plus petit possible. Autrement dit, la robustesse de la procédure est améliorée en retenant le plus petit nombre possible de modes dans l'analyse. A l'inverse, on peut majorer l'erreur d'estimation commise sur le VPMA par :

$$\|\hat{\mathbf{Z}}^{(1)} - \mathbf{Z}_F\|_\infty \leq c\mu^{(1)} N^{(1)} \|\mathbf{X}_e^{(1)}\|_\infty \|(\dot{\mathbf{H}}^*)^{-1}\|_\infty \quad (5.20)$$

où l'on a repris la démarche de la section 4.2.3 en notant  $\dot{\mathbf{H}}^*$  la matrice de taille  $p$  de terme général  $\ddot{H}_{ij}^* = (\dot{\mathbf{H}}_i^* | \dot{\mathbf{H}}_j^*)_F$ . Pour gagner en précision, il faut donc augmenter le nombre de modes que l'on retient dans l'analyse afin de réduire l'erreur de troncature  $N^{(1)} \|\mathbf{X}_e^{(1)}\|_\infty$ . Les exigences de précision et de robustesse sont donc antagonistes.

Notons que le nombre de modes à retenir avec des mesures d'accélération est plus important qu'avec des mesures de déplacements. En effet, les termes temporels<sup>3</sup> de la série (2.17) sont en  $\frac{1}{\omega_i} e^{-\eta_i \omega_{0i} t}$  pour des mesures de déplacements, tandis qu'ils sont en  $\omega_i e^{-\eta_i \omega_{0i} t}$  pour des mesures d'accélération. Le contenu fréquentiel des mesures vibratoires en accélération est donc plus large. Pour autant, on verra dans le Chapitre 7 qu'il suffit de retenir 7 modes pour identifier des impacts variés sur le panneau étudié avec des mesures d'accélération, même si le nombre de modes significativement excités est largement supérieur (de l'ordre de 30).

---

3. Pour des mesures effectuées dans le régime libre.

### 5.4.2 Convergence de la bande fréquentielle par sélection itérative d'une FMD

L'antagonisme entre les exigences de précision et de robustesse nous conduit à définir un critère permettant de décider, de façon systématique, si le nombre de modes retenus dans l'analyse est suffisant ou pas. Comme indiqué dans la section 3.2, l'important est de convenablement capturer les contributions de  $p$  modes discriminants qui suffisent pour localiser l'impact et estimer son intensité. Il n'est donc pas nécessaire de choisir un critère basé sur la qualité de reconstruction du signal vibratoire temporel mesuré. Il n'est d'ailleurs même pas certain qu'on soit en mesure de le faire avec les seuls modes connus de la structure. En revanche, il suffit d'étudier la proximité des contenus fréquentiels des mesures et des prédictions, sur la bande de fréquences  $[f_{01}, f_{0p}]$  couverte par la plus petite FMD disponible, pour déterminer si les contributions des modes discriminants sont ou non bien capturées (voir Figure 5.7). L'idée est donc de répéter la procédure d'identification de l'impact, en commençant par la plus petite FMD disponible, puis de rajouter des modes dans l'analyse jusqu'à satisfaire un critère de proximité. Par exemple, on peut vérifier que  $\frac{\|\tilde{Q}-Q\|_2}{\|Q\|_2} \leq \epsilon_f$ , où  $Q$  et  $\tilde{Q}$  désignent les modules des transformées de Fourier discrètes des signaux échantillonnés  $\mathbf{Q}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  sur la bande  $[f_{01}, f_{0p}]$ , et où  $\epsilon_f$  désigne une exigence de reconstruction exprimée en %.

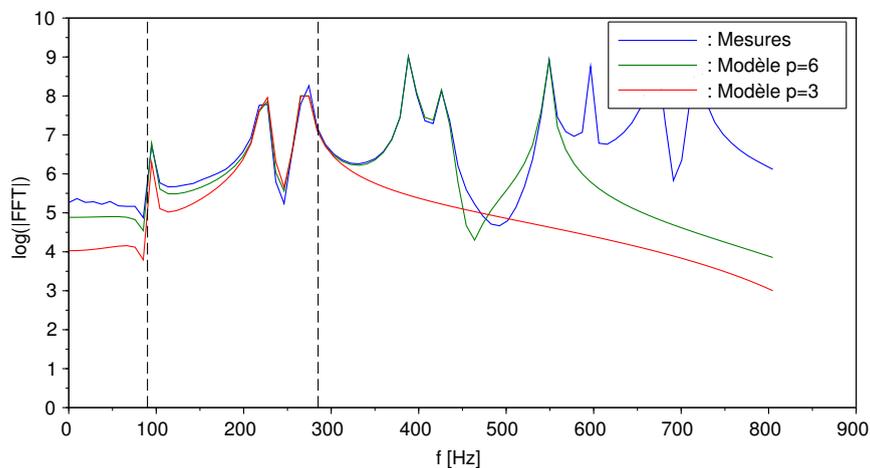


FIGURE 5.7 – Convergence de la bande fréquentielle [90Hz, 285Hz] par ajout de modes dans l'analyse.

Précisons que l'approche proposée a un sens dans la mesure où rajouter un ou plusieurs modes dans une FMD forme une nouvelle FMD :

- Pour une structure continue cela se traduit par :

$$(\phi_1, \dots, \phi_p) \text{ est une FMD} \Rightarrow (\phi_1, \dots, \phi_p, \phi_{p+1}) \text{ est une FMD}$$

où  $\phi_i : M \mapsto \phi_i(M)$  désigne l'application continue représentant la déformée du  $i$ -ème mode de vibration (voir section 3.2.3). Preuve : Par contraposée. On note  $\lambda^{(p+1)} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^p, M \mapsto \lambda^{(p+1)}(M) = (\frac{\phi_2}{\phi_1}(M) \dots \frac{\phi_{p+1}}{\phi_1}(M))$ , où  $\mathcal{C}$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  sur lequel  $\phi_1$  ne s'annule pas. Par hypothèse  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \phi_{p+1})$  n'est pas une FMD, cela signifie que l'application  $\lambda^{(p+1)}$  n'est pas injective. Il existe donc  $P \neq Q \in \mathcal{C}$  tels que pour  $j = 2, \dots, p+1$  on a  $\frac{\phi_j}{\phi_1}(P) = \frac{\phi_j}{\phi_1}(Q)$ . En particulier, pour  $j = 2, \dots, p$  on a  $\frac{\phi_j}{\phi_1}(P) = \frac{\phi_j}{\phi_1}(Q)$ , soit  $\lambda^{(p)}(P) = \lambda^{(p)}(Q)$  avec  $P \neq Q$ . L'application  $\lambda^{(p)}$  n'est pas injective, donc  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  n'est pas une FMD.

- Pour une structure discrétisée à  $N$  degrés de liberté cela se traduit par :

$$(\phi_1, \dots, \phi_p) \text{ est une FMD} \Rightarrow (\phi_1, \dots, \phi_p, \phi_{p+1}) \text{ est une FMD}$$

où  $\phi_i$  désigne la  $i$ -ème colonne de la matrice modale tronquée. Preuve : Par contraposée. Supposons que  $(\phi_1, \dots, \phi_p, \phi_{p+1})$  n'est pas une FMD. Alors il existe  $i \neq j$  tels que  $(\phi_i^*, \phi_j^*)$  soit liée<sup>4</sup>. On a donc  $\phi_i^* = \lambda \phi_j^*$ . Notons  $\mathbf{u}_k^*$  les  $p$  premières composantes de  $\phi_k^*$ . On a  $\mathbf{u}_i^* = \lambda \mathbf{u}_j^*$ , donc  $(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_j^*)$  est liée, donc  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  n'est pas une FMD.

---

4. Rappelons que  $\phi_i^*$  désigne la  $i$ -ème colonne de la transposée de la matrice modale tronquée.

## 5.5 Bilan sur la procédure d'identification d'un impact paramétré

On présente en Annexe D la procédure finale d'identification d'un impact. L'identification d'un impact arbitraire nécessite deux étapes supplémentaires par rapport à l'identification d'un Dirac : l'exploration de l'espace des paramètres de la loi de forme d'impact choisie, et la sélection itérative du nombre de modes à retenir dans l'analyse. Deux implémentations sont possibles suivant que l'on choisisse d'itérer en premier lieu sur l'exploration de l'espace des paramètres ou sur le nombre de modes. En pratique, le nombre de modes  $p^{(opt)}$  à retenir dans l'analyse pour faire converger la bande fréquentielle d'intérêt  $[f_{01}, f_{0p}]$  (voir section 5.4.2) peut s'identifier pour  $\alpha^{(i)} \neq \alpha^{(opt)}$ . On peut considérer que  $p^{(opt)}$  est identifié lorsqu'il a été obtenu pour  $x\%$  des jeux de paramètres  $\alpha^{(i)}$  testés, sur au moins  $m$  tests, avec  $x$  et  $m$  choisis par l'utilisateur. Ainsi, on réduit significativement le temps de calcul en supprimant les itérations sur  $p$  dès que la confiance de  $x\%$  de répétition est atteinte sur au moins  $m$  tests. Le choix est donc fait d'itérer sur le nombre de modes pour chaque jeu de paramètre  $\alpha^{(i)}$  testé (voir algorithme ci-dessous).

Pour la localisation, le nombre maximal de modes  $p_{max}$  à retenir dans l'analyse est majoré par le nombre de modes suffisants pour identifier un Dirac. En effet, le spectre d'un Dirac est plat et excite uniformément toutes les fréquences : c'est en ce sens le cas le plus contraignant sur le nombre de modes à retenir. La section 4.2.3 nous assure néanmoins que la structure agit comme un filtre passe-bas et que le nombre de modes à retenir est d'autant plus petit que la distribution des fréquences propres est large. Rappelons que d'après la section 5.4.1 le nombre de modes à considérer est en théorie plus élevé pour des mesures d'accélération que de déplacements.

L'objectif des chapitres suivants est de valider expérimentalement cette procédure d'identification d'impact. On s'intéresse dans le Chapitre 6 à une structure académique de petites dimensions, et dans le Chapitre 7 on s'intéresse à une structure industrielle de grandes dimensions.

---

**Algorithm** Estimation du VPMA

---

$y \leftarrow 0, i \leftarrow 1$

**Tant que** Exploration non terminée **faire**

Sélection d'un nouveau jeu de paramètres  $\alpha^{(i)}$

**Si**  $y < x$  **ou**  $i < m$  **alors**

$j \leftarrow 1$

**Tant que** Bande fréquentielle  $[f_{01}, f_{0p}]$  non reconstruite **faire**

$p^{(j)} \leftarrow p + j$

Estimation du VPMA avec  $\alpha^{(i)}$  et  $p^{(j)}$

Calcul du résidu quadratique  $S_{ij}$

Vérification de reconstruction de la bande fréquentielle  $[f_{01}, f_{0p}]$

$j \leftarrow j + 1$

**Fin Tant que**

**Mise à jour statistique de**  $p^{(opt)}$

Recherche de  $p^{(l)}$  minimisant le plus souvent le résidu quadratique

$n \leftarrow$  Nombre d'occurrences de  $p^{(l)}$  sur les  $i$  jeux de paramètres testés

$y \leftarrow n/i$

**Si non**

Estimation du VPMA avec  $\alpha^{(i)}$  et  $p^{(opt)} = p^{(l)}$

Calcul du résidu quadratique  $S_{il}$

**Fin Si**

$i \leftarrow i + 1$

**Fin Tant que**

**Identification de la loi d'impact**

$k = \operatorname{argmin}_i S_{il}$

$\alpha^{(opt)} \leftarrow \alpha^{(k)}$

**Identification du VPMA**

$\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} \leftarrow \mathbf{Z}_{\mathbf{F}}^{(k,l)}$

---

## Chapitre 6

# Validation expérimentale de l'approche mono-capteur d'identification d'impacts sur une plaque métallique

**Résumé** : Les techniques de triangulation nécessitent au moins trois capteurs pour localiser un impact appliqué sur une plaque homogène. Or, la technique développée dans les chapitres précédents permet d'envisager qu'un unique accéléromètre est théoriquement suffisant pour à la fois localiser l'impact et estimer certains de ses paramètres tels que sa durée, son intensité et la dissymétrie de son pic principal. De plus, il n'est pas nécessaire de disposer d'un modèle de réponse précis puisqu'il suffit d'identifier les contributions modales d'un faible nombre de modes de vibration formant une FMD. L'objectif de ce chapitre est de valider expérimentalement la méthode d'identification d'impact pour une plaque simplement supportée sur ses bords équipée d'un unique accéléromètre. Pour cela, on détermine les paramètres de la méthode permettant de localiser dans une précision donnée les impacts appliqués avec différents embouts d'un marteau de choc. En particulier, on étudie l'influence du positionnement du capteur sur la précision de l'identification et on montre que les meilleures performances sont obtenues lorsque le capteur est sur un point neutre. On étudie également l'influence du choix de la loi paramétrée sur la qualité de reconstruction de la force d'impact et on confirme que le modèle de gaussienne dissymétrique est plus précis pour estimer les paramètres des impacts appliqués.

Ce chapitre présente le déroulement de la procédure d'identification d'impacts, depuis l'analyse des modes de vibration de la structure à la sélection des paramètres de la méthode. On a choisi pour cela une structure académique pour laquelle l'analyse modale expérimentale peut facilement se comparer à l'analyse modale théorique. On décrit en premier lieu le dispositif expérimental, l'analyse modale de la structure et la sélection d'une FMD. On présente ensuite les résultats expérimentaux avant de les discuter.

## 6.1 Dispositif expérimental

La structure étudiée est une plaque rectangulaire en aluminium montée sur un support spécifique permettant de reproduire des conditions aux limites « simplement supportée ». Le montage consiste en quatre lamelles souples en aluminium qui sont collées sur les bords de la plaque et vissées sur un cadre rigide en acier (voir Figure 6.1). Une description technique précise est présentée dans [Robin et al. 2016]. La structure a été fournie par la société Vancouver2 et les essais ont été réalisés au Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris.

Un modèle éléments finis est réalisé avec Nastran pour calculer la matrice modale tronquée aux six premiers modes. Les déformées modales d'une plaque simplement supportée sont connues de façon analytique (voir section 3.2.2), mais l'objectif est ici d'appliquer la procédure générale d'identification d'un impact pour une structure quelconque. Le modèle éléments finis de la plaque consiste en un découpage de  $8 \times 8$  éléments CQUAD8 possédant des noeuds au milieu de chaque arête (voir Figure B.6). La résolution de la discrétisation spatiale du modèle éléments finis est  $d = \min(a, b)/16 = 2.25$  cm : on ne peut donc pas localiser des candidats plus finement que cette résolution. L'exigence de localisation de l'impact est choisie égale à la demi diagonale d'une cellule de la plaque :

$$\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2 = 3.6\text{cm}$$

Un accéléromètre 352C22 PCB Piezotronics est positionné sur le noeud le plus proche du point neutre  $N = (a/3, b/3)$ , et des impacts sont appliqués au milieu de chaque cellule avec un marteau d'impact IH-02 Tenlee Piezotronics. Plusieurs embouts faits de matériaux différents (caoutchouc, nylon, aluminium et acier) permettent de varier la force d'impact

## CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

appliquée. Une analyse modale expérimentale de la plaque est effectuée pour estimer les amortissements modaux et vérifier les fréquences propres calculées par le modèle éléments finis (voir Tableau 6.1). Exceptée la première fréquence propre, toutes les autres sont estimées avec moins de 1% d'erreur par le modèle analytique. Il était attendu d'après [Robin et al. 2016] que l'erreur sur la première fréquence propre soit plus importante à cause du montage qui perturbe le premier mode. Le logiciel m+p Analyzer 5.1 est utilisé pour enregistrer les mesures sur une durée  $D = 0.64s$  avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 12.8kHz$ . La procédure d'identification est codée avec le logiciel libre de calcul numérique Scilab.

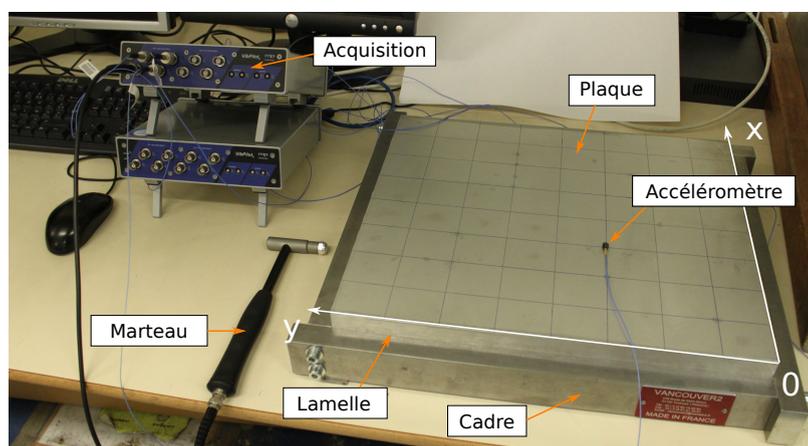


FIGURE 6.1 – Dispositif expérimental.

Dimensions	$a = 36 \text{ cm}, b = 42 \text{ cm}, h = 3 \text{ mm}$
Masse volumique	$2800 \text{ kg.m}^{-3}$
Module de Young	$72.5 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$0.33$
Mode 1	$f_{01} = 94.7 \text{ Hz} (98.3), \eta_1 = 1\%$
Mode 2	$f_{02} = 224 \text{ Hz} (223), \eta_2 = 0.3\%$
Mode 3	$f_{03} = 269 \text{ Hz} (268), \eta_3 = 0.6\%$
Mode 4	$f_{04} = 390 \text{ Hz} (393), \eta_4 = 0.3\%$
Mode 5	$f_{05} = 430 \text{ Hz} (431), \eta_5 = 0.09\%$
Mode 6	$f_{06} = 547 \text{ Hz} (551), \eta_6 = 0.14\%$

TABLE 6.1 – Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque étudiée, fabriquée par la société Vancouver2 (Toulouse, France). Valeurs expérimentales et analytiques (entre parenthèses) des fréquences propres.

## 6.2 Carte de robustesse angulaire de la FMD sélectionnée

D'après la section 3.2.4, les trois modes de flexion  $\phi_1 = \phi_{1,1}$ ,  $\phi_2 = \phi_{1,2}$  et  $\phi_3 = \phi_{2,1}$  forment une FMD minimale de la plaque. Leurs déformées sont représentées sur la Figure 3.3. On représente sur la Figure 6.2 la carte de robustesse angulaire (voir définition en section 3.4.2) de la famille  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . Les valeurs de  $\theta_\epsilon$  varient entre  $3.9^\circ$  et  $37.3^\circ$ . On observe que les valeurs de  $\theta_\epsilon$  sont plus petites près des bords et surtout proche des coins. On s'attend donc à ce que l'identification d'un impact au voisinage d'un bord soit plus difficile. Pour s'en convaincre, on représente sur les Figures 6.3 et 6.4 l'ensemble des candidats que l'on peut retrouver lorsque  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{Z}_{\mathbf{F}}$  et  $\theta_c = \theta_\epsilon(F)$ , pour un impact ayant lieu soit au centre de la plaque, soit proche d'un coin. Chaque flèche correspond à un  $\phi_i^* = (\phi_1(M_i) \ \phi_2(M_i) \ \phi_3(M_i))^T$  normé associé à un noeud  $M_i$  du modèle éléments finis. La flèche rouge correspond à  $\mathbf{Z}_{\mathbf{F}} = f\phi_{\mathbf{F}}^*$  et les flèches vertes, à l'intérieur du cône de recherche, correspondent aux  $\phi_i^*$  associés aux candidats  $F_i$  retrouvés par la procédure de discrimination.

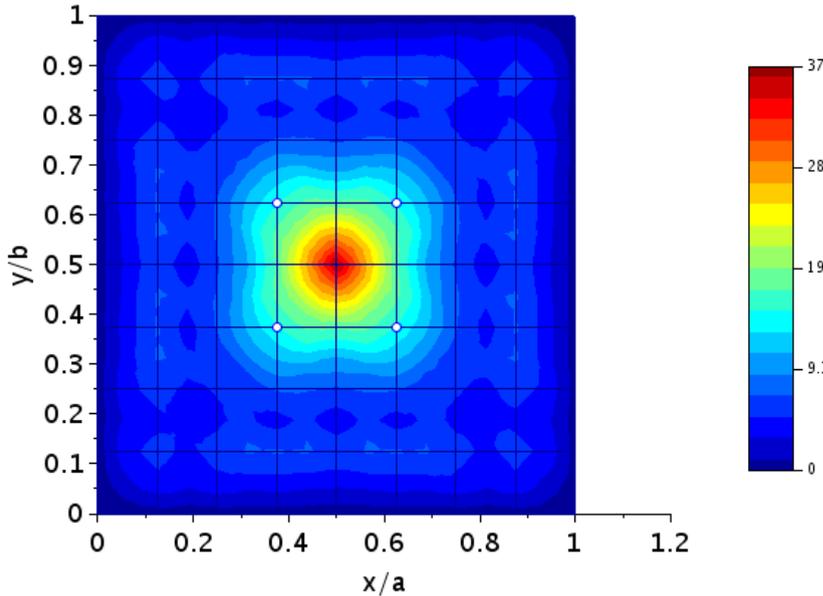


FIGURE 6.2 – Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $37^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (3a_e \ 3b_e)$  /  $N_2 = (5a_e \ 3b_e)$  /  $N_3 = (3a_e \ 5b_e)$  /  $N_4 = (5a_e \ 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 65\%$ .

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

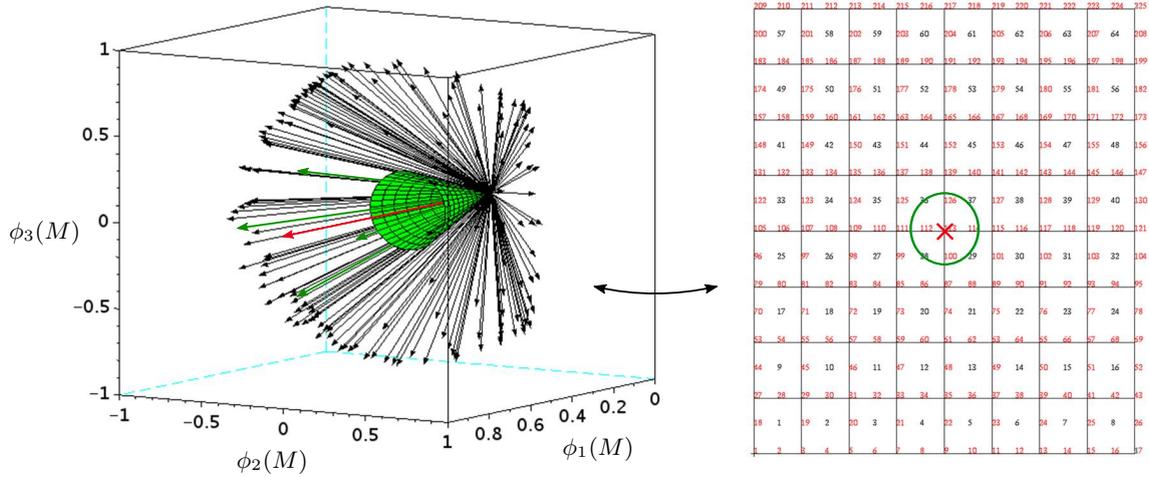


FIGURE 6.3 – Candidats retrouvés avec l'angle maximal de robustesse pour un impact appliqué au centre de la plaque. ( $F = 113, \theta_\epsilon(F) = 37.3^\circ$ ).

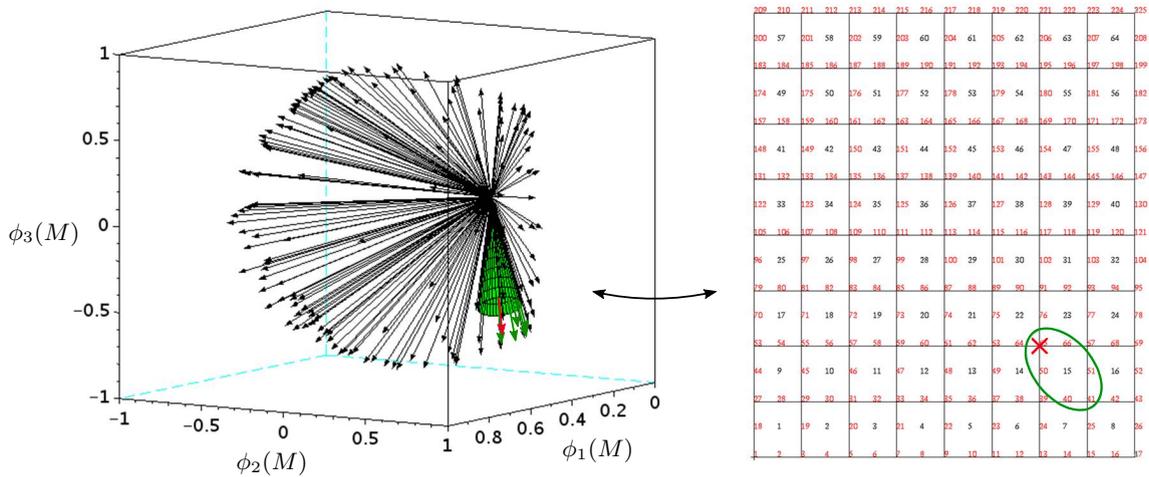


FIGURE 6.4 – Candidats retrouvés avec l'angle maximal de robustesse pour un impact appliqué proche d'un coin. ( $F = 65, \theta_\epsilon(F) = 6^\circ$ ).

La Figure 6.5 représente les valeurs de  $\theta_\epsilon$  en considérant cette fois-ci la famille  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$ . Les valeurs de  $\theta_\epsilon$  varient pour cette famille entre  $9^\circ$  et  $39.2^\circ$ . Les valeurs de  $\theta_\epsilon$  sont globalement augmentées, en particulier dans la partie centrale de la plaque, mais les valeurs les plus faibles correspondent toujours à des points proches des bords et surtout des coins.

Pour cet exemple, il est donc plus simple de discriminer un point d'impact en connaissant davantage de contributions modales. On sait néanmoins que rajouter des modes dans l'analyse n'est pas toujours favorable du point de vue de la robustesse de la procédure (voir section 5.4.1).

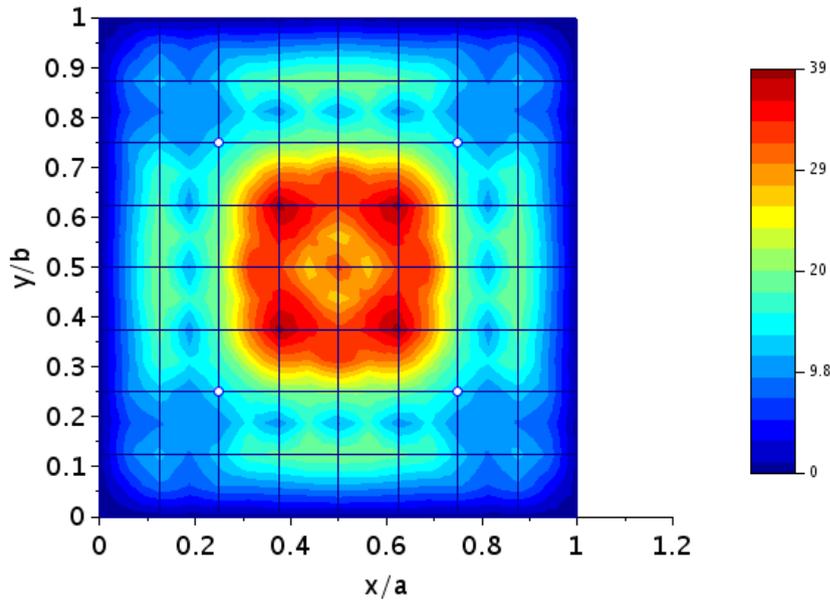


FIGURE 6.5 – Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $39^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e \ 2b_e)$  /  $N_2 = (6a_e \ 2b_e)$  /  $N_3 = (2a_e \ 6b_e)$  /  $N_4 = (6a_e \ 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 0.89$ .

## 6.3 Détermination des paramètres permettant de localiser des impacts variés dans une précision donnée

### 6.3.1 Description de la procédure

On applique un impact sur chaque cellule de la plaque avec chacun des quatre embouts du marteau de choc. La plaque est initialement au repos avant chaque essai. Au total,  $64 \times 4 = 256$  impacts ont donc été appliqués. On représente sur la Figure 6.6 les allures typiques des différentes forces enregistrées suivant l'embout utilisé. Sur l'ensemble des mesures effectuées, les durées d'impact varient entre 0.5ms et 5.5ms, et certaines forces d'impact présentent des pics multiples.

## CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

---

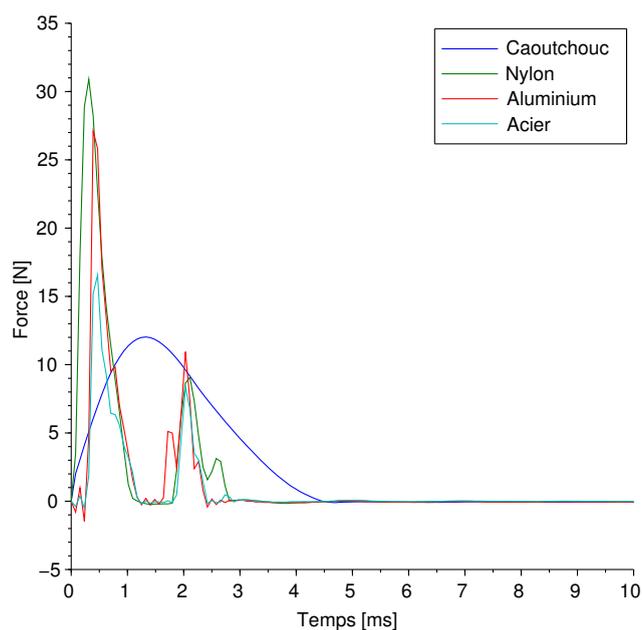


FIGURE 6.6 – Allures typiques des forces d'impact appliquées suivant l'embout du marteau de choc.

Pour chaque impact, les mesures d'accélération du capteur sont enregistrées et l'instant d'impact est estimé lorsqu'un seuil de 5% sur la valeur absolue maximale du signal est dépassé (voir section 5.2.3). La longueur du signal est réduite à environ 10 oscillations du premier mode de vibration ( $10/f_{01} = 0.11s$ ). La procédure des moindres carrés semi-linéaire décrite en section 5.2.2 est utilisée avec le modèle de demi-sinus (DS). La durée  $T$  de l'impact est estimée en explorant un intervalle  $[T_{min}, T_{max}]$ , uniformément discrétisé avec une résolution  $\Delta T$ , afin de minimiser le résidu quadratique défini par la relation (5.2). On obtient du même coup une estimation du VPMA qui est ensuite utilisée pour identifier des points d'impact candidats. On utilise pour cela la procédure de discrimination décrite en section 3.3 avec une tolérance de colinéarité  $\theta_c$  et un facteur de dispersion  $\gamma$  (voir section 3.3.5). L'ensemble des paramètres utilisés pour localiser les impacts est donné dans le Tableau 6.2.

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
MÉTALLIQUE

---

Modèle de forme d'impact	Demi-sinus (DS)
Espace des paramètres	$[T_{min}, T_{max}] = [0.3\text{ms}, 6\text{ms}]$
Pas de résolution	$\Delta T = 0.1\text{ms}$
Détection $t = 0$	Seuil de 5% sur l'amplitude maximale
Tolérance de colinéarité	$\theta_c = 25^\circ$
Facteur de dispersion	$\gamma = 2$
Discrétisation spatiale	$d_s = 2.25\text{cm}$
Exigence de localisation	$\epsilon = 3.6\text{cm}$
Durée de mesure	$D = 0.11\text{s}$
Fréquence d'échantillonnage	$f_e = 12.8\text{kHz}$
Position de l'accéléromètre	$C = 85$

TABLE 6.2 – Paramètres utilisés pour la localisation des impacts.

### 6.3.2 Exemple détaillé de localisation d'un impact

On présente les résultats détaillés obtenus pour l'impact appliqué au centre de la cellule 54, i.e en  $F = (5.5a/8, 6.5b/8)$ , avec l'embout en caoutchouc. Les mesures enregistrées sont présentées sur la Figure 6.7. On observe que l'impact a une forme lisse légèrement dissymétrique de durée  $T = 4\text{ms}$  et d'intensité  $f = 17.6\text{N}$ . La procédure des moindres carrés semi-linéaire identifie la durée d'impact  $\hat{T} = 2.6\text{ms}$  et le vecteur de participation modale amplifié  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = (15.6 \ 24.2 \ 15.1)^T$ . On observe que pour le point d'impact étudié les modes 1 et 3 sont excités dans le même ordre de grandeur tandis que le mode 2 est davantage excité. La procédure de discrimination à partir de  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$  et du facteur de dispersion permet de retrouver trois candidats<sup>1</sup> ( $F_i, f_i$ ) :

- $f_1 = 14.8\text{N}$ ,  $F_1 = (5a/8, 6b/8) \leftrightarrow \phi_{\mathbf{F}_1}^* = (1.2 \ 1.6 \ 0.90)^T$
- $f_2 = 15.1\text{N}$ ,  $F_2 = (5.5a/8, 6b/8) \leftrightarrow \phi_{\mathbf{F}_2}^* = (1.0 \ 1.5 \ 1.2)^T$
- $f_3 = 24.2\text{N}$ ,  $F_3 = (5.5a/8, 7b/8) \leftrightarrow \phi_{\mathbf{F}_3}^* = (0.57 \ 1.0 \ 0.63)^T$

La Figure 6.8 montre qu'ils sont  $\epsilon$ -proches de  $F$  donc la localisation de l'impact, dans la tolérance de localisation choisie, est réussie.

---

1. Ils se situent obligatoirement sur les points de calcul des déformées modales liés à la discrétisation de la plaque.

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

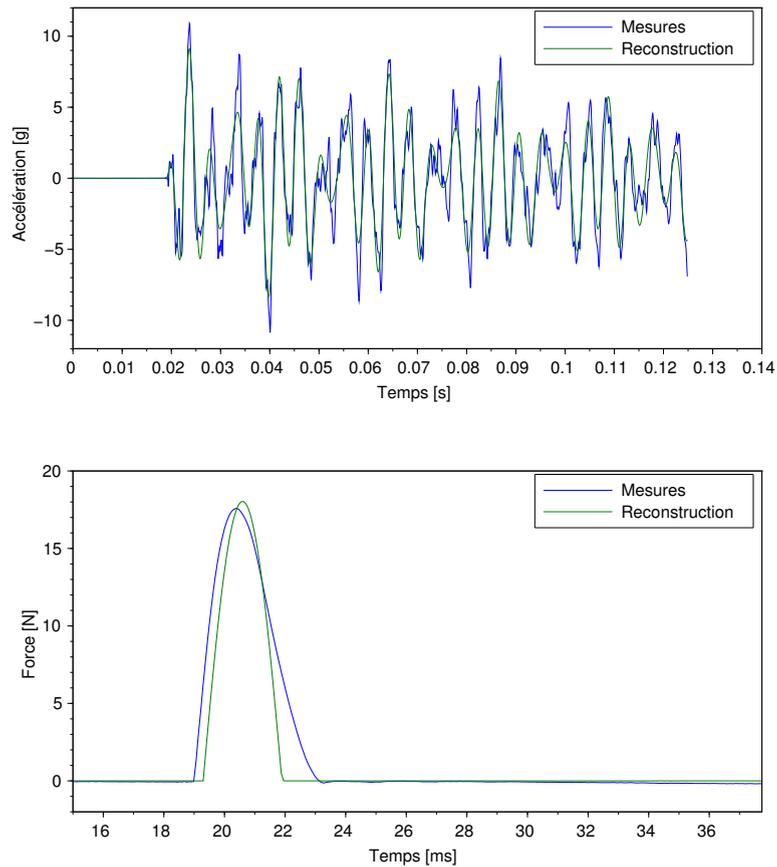


FIGURE 6.7 – Reconstruction des mesures pour  $F = (5.5a/8, 6.5b/8)$ .

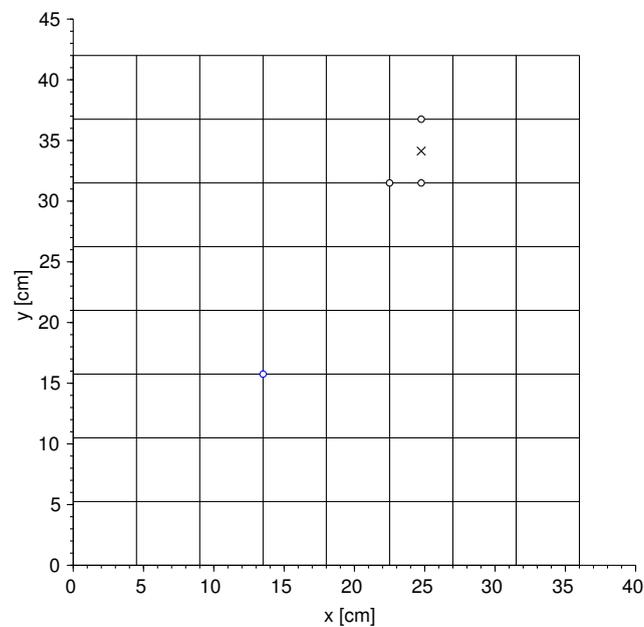


FIGURE 6.8 – Candidats retrouvés par la procédure de localisation (rond bleu : capteur, croix noire : point d'impact  $F$ , rond noir : candidat  $F_i$ ).

### 6.3.3 Influence de la FMD sélectionnée suivant la nature de l'impact appliqué

On commence par étudier les résultats globaux de localisation obtenus avec l'embout en caoutchouc. Pour présenter l'ensemble des résultats sur une même figure, une croix verte est affichée sur le point d'impact s'il a été localisé à  $\epsilon$ -près. Dans le cas contraire, on affiche une croix rouge reliée au candidat le plus éloigné. La Figure 6.9 montre l'ensemble des résultats obtenus avec les paramètres indiqués dans le Tableau 6.2. On observe que 56/64 impacts sont localisés à  $\epsilon$ -près, et que les échecs correspondent à des impacts appliqués sur des cellules proches d'un bord de la plaque. En particulier, les impacts appliqués sur les coins sont seulement localisés à  $4\epsilon$ -près (14.4cm). Pour affiner les résultats obtenus, on représente sur la Figure 6.10 les barycentres pondérés suivant les angles calculés (voir section 4.1.3).

On étudie maintenant les résultats obtenus avec l'embout en acier. La Figure 6.11 montre la carte de localisations en utilisant la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . On observe que seulement 32/64 impacts sont localisés à  $\epsilon$ -près, 51/64 à  $2\epsilon$ -près, et 59/64 à  $4\epsilon$ -près. Pour les cellules 40 et 64, la procédure de localisation a même retrouvé des candidats diamétralement opposés. Ces deux impacts ont été appliqués sur le quadrant  $Q_3 = (-, +, +)$  et des candidats ont été retrouvés dans le quadrant  $Q_1 = (+, +, +)$  (voir section 3.2.3). En fait, le mode  $\phi_1$  est très faiblement excité lorsque l'impact a lieu sur une cellule adjacente au bord, si bien que la discrimination entre les quadrants  $Q_1$  et  $Q_3$  nécessite une estimation très précise de la contribution du premier mode. Or, l'embout en acier excite davantage de fréquences et l'on commet donc une plus grande erreur de troncature, pouvant parfois inverser le signe de la première composante de  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}$ . Par exemple, pour l'impact appliqué sur la cellule 64 le VPMA estimé est  $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}} = (-0.047 \ 5.0 \ 7.0)^T$ . Il conduit à l'identification de nombreux candidats dans les quadrants  $Q_1$  et  $Q_3$  (voir Figure 6.12).

On répète donc la procédure avec les FMD augmentées en rajoutant des modes dans l'analyse, jusqu'à améliorer au mieux la localisation de l'ensemble des impacts. Les meilleurs résultats sont obtenus avec  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  et sont représentés sur la Figure 6.13. On parvient à atteindre les mêmes performances qu'avec l'embout en caoutchouc : 52/64 impacts sont localisés à  $\epsilon$ -près, 63/64 à  $2\epsilon$ -près, et 63/64 à  $4\epsilon$ -près.

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

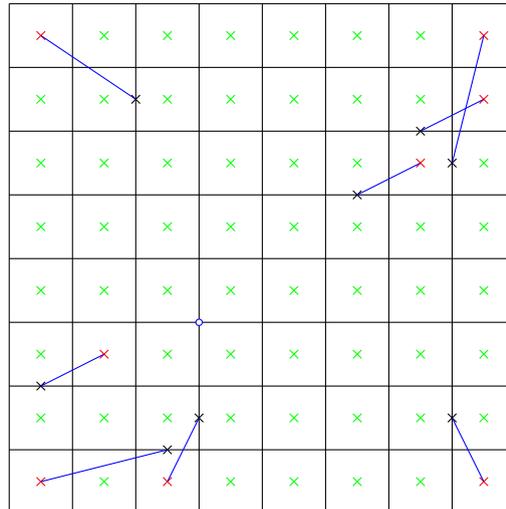


FIGURE 6.9 – Carte de localisations pour l'embout en caoutchouc en utilisant la FMD ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) (croix verte : localisation à  $\epsilon$ -près, croix noire : candidat le plus éloigné).

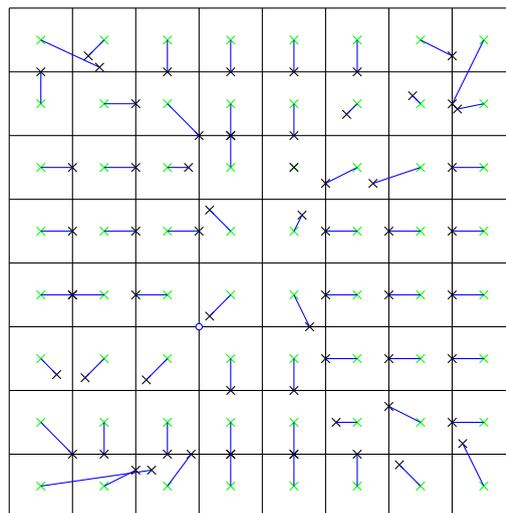


FIGURE 6.10 – Barycentres pondérés des candidats obtenus (croix verte : point d'impact, croix noire : barycentre).

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

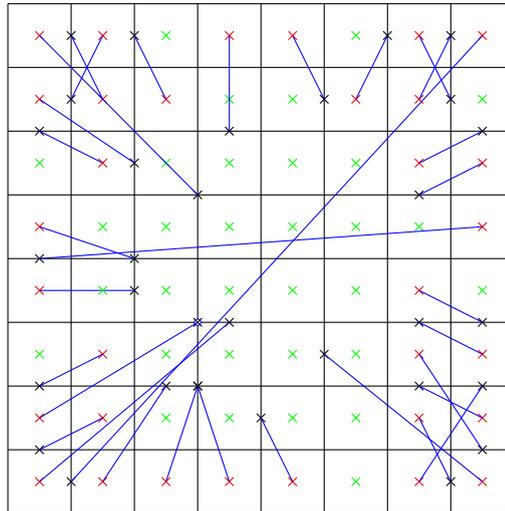


FIGURE 6.11 – Carte de localisations pour l'embout en acier en utilisant la FMD ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ).

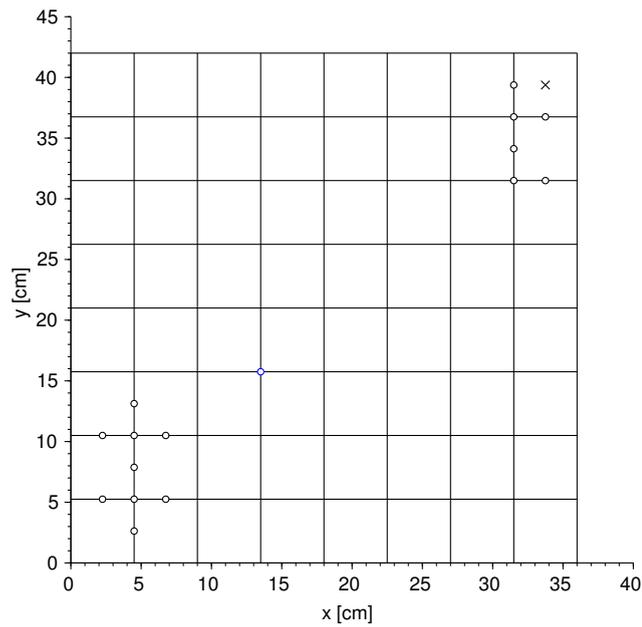


FIGURE 6.12 – Estimation imprécise avec la FMD ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) de la première contribution modale conduisant à l'identification de nombreux candidats dans les quadrants  $Q_1$  et  $Q_3$ .

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

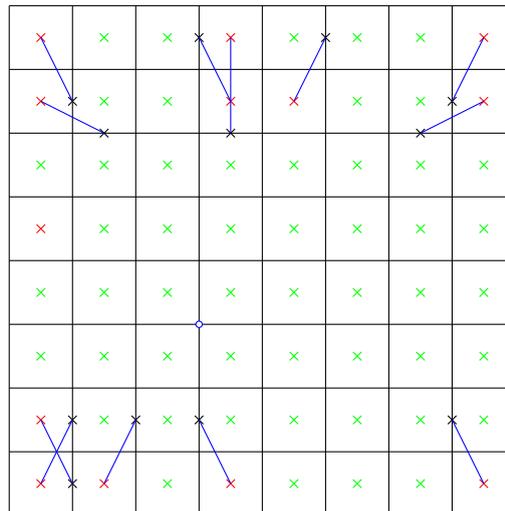


FIGURE 6.13 – Carte de localisations pour l'embout en acier avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$ .

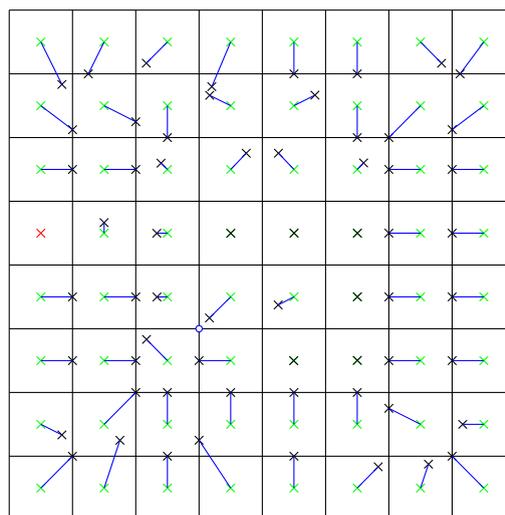


FIGURE 6.14 – Barycentres pondérés des candidats obtenus avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$ .

### 6.3.4 Influence du positionnement du capteur

Trois accéléromètres avaient été initialement placés sur la plaque pour étudier l'influence du placement du capteur sur la localisation des impacts dans les mêmes conditions. On présente les résultats de l'étude précédente avec l'embout en caoutchouc et l'accéléromètre placé soit au point  $C' = (6a/8, 5b/8)$ , soit au point  $C'' = (2a/8, 6b/8)$ . Remarquons que  $C''$  est plus éloigné d'un point neutre de la plaque que  $C'$  (voir section 5.3.3). On constate sur les Figures 6.15 et 6.16 que la localisation<sup>2</sup> est d'autant moins précise que le capteur est positionné loin d'un point neutre.

On peut cependant obtenir de meilleures performances de localisation avec les points de mesure  $C'$  et  $C''$  lorsque la durée de l'impact appliquée est plus faible. Par exemple, avec l'embout en acier on peut augmenter la FMD afin de réduire l'erreur de troncature et améliorer la précision d'estimation du VPMA. On représente sur les Figures 6.17 et 6.18 les cartes de localisations obtenues avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  et les mesures des accéléromètres  $C'$  et  $C''$ .

---

2. Les résultats des impacts appliqués sur les cellules adjacentes aux bords de la plaque n'ont pas été affichés pour plus de clarté (localisations très imprécises).

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

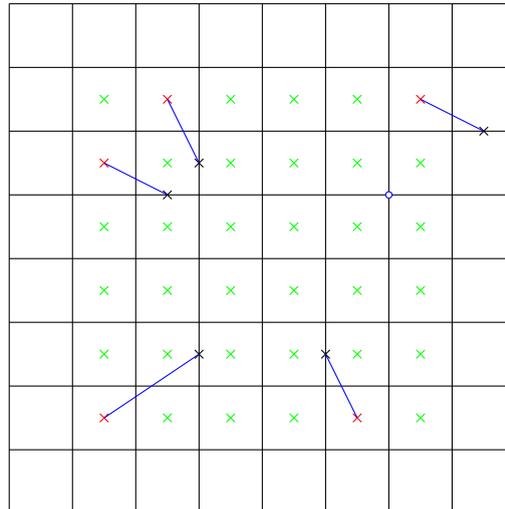


FIGURE 6.15 – Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  pour l'embout en caoutchouc et l'accéléromètre placé en  $C' = (6a/8, 5b/8)$ .

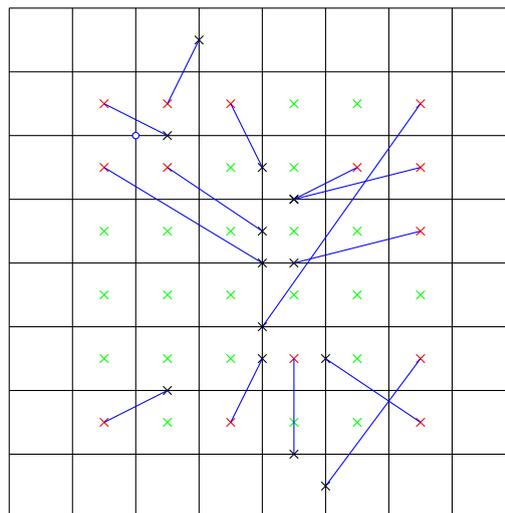


FIGURE 6.16 – Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  pour l'embout en caoutchouc et l'accéléromètre placé en  $C'' = (2a/8, 6b/8)$ .

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

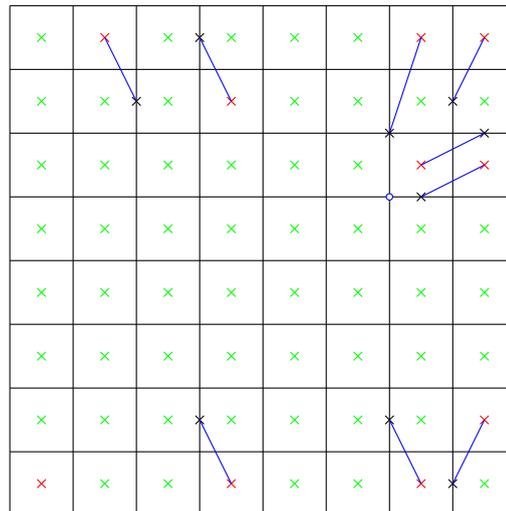


FIGURE 6.17 – Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  pour l'embout en acier et l'accéléromètre placé en  $C' = (6a/8, 5b/8)$ .

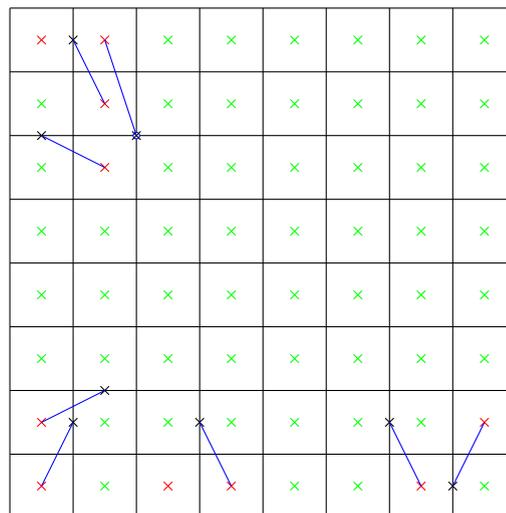


FIGURE 6.18 – Carte de localisations avec la FMD  $(\phi_1, \dots, \phi_6)$  pour l'embout en acier et l'accéléromètre placé en  $C'' = (2a/8, 6b/8)$ .

### 6.3.5 Performances globales de localisation pour la loi d'impact sélectionnée

Le Tableau 6.3 récapitule l'ensemble des meilleures performances de localisation obtenues avec les quatre embouts du marteau de choc et les trois différents points de mesure. Pour l'embout en caoutchouc, les meilleures performances sont obtenues avec  $\mathcal{F}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , tandis que pour tous les autres embouts elles sont obtenues avec  $\mathcal{F}_2 = (\phi_1, \dots, \phi_6)$ . Le point de mesure  $C$  permet de localiser à  $\epsilon$ -près 83.2% des impact appliqués,  $C'$  permet d'en localiser 79.7%, et  $C''$  permet d'en localiser 64.8%.

Embout	FMD	Loc. (/64) avec $C$			Loc. (/64) avec $C'$			Loc. (/64) avec $C''$		
		$\epsilon$	$2\epsilon$	$4\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$	$4\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$	$4\epsilon$
Caoutchouc	$\mathcal{F}_1$	56	61	64	49	60	64	29	46	58
Nylon	$\mathcal{F}_2$	53	62	63	51	62	62	41	54	56
Aluminium	$\mathcal{F}_2$	53	62	64	50	57	61	42	52	54
Acier	$\mathcal{F}_2$	51	62	63	54	62	63	54	61	62

TABLE 6.3 – Resultats de localisation détaillés de la campagne d'impacts.

## 6.4 Sélection d'une loi paramétrique pour la reconstruction d'une force d'impact

### 6.4.1 Description de la procédure

On souhaite étudier l'influence de la loi paramétrique utilisée pour capturer les paramètres de la forme d'impact. Pour cela, on applique deux impacts de formes différentes et on s'intéresse à la qualité de reconstruction de la force appliquée avec les lois proposées en section 5.1, auxquelles on ajoute la loi de Dirac retardé (DR). Pour chaque paramètre  $\alpha_i$  de la loi considérée, on discrétise uniformément un intervalle  $[\alpha_i^{min}, \alpha_i^{max}]$  avec une résolution  $\Delta\alpha_i$ . Les bornes des intervalles et les résolutions utilisées sont présentées dans le Tableau 6.4. L'instant d'impact est estimé à l'aide de la technique de franchissement de seuil décrite dans la section 6.3.1. L'estimation de l'instant d'impact est affinée avec les lois GS, GD et DR à l'aide du paramètre de position de pic  $\mu$ . L'intensité de l'impact est estimée à partir de la moyenne pondérée donnée par la relation (4.5). Les deux impacts considérés sont :

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
MÉTALLIQUE

---

**Impact 1** : 13.1N au centre de la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc

**Impact 2** : 21.6N au centre de la cellule 35 avec l'embout en acier

On représente sur la Figure 6.19 les évolutions temporelles des impacts 1 et 2. L'impact 1 a une durée de 4.5ms avec une forme lisse légèrement dissymétrique. Il peut donc convenablement se représenter par une loi monopic. L'impact 2 présente un pic principal d'une durée de 0.8ms avec des répétitions de pics sur 7ms. Les lois considérées ne peuvent donc pas reconstruire cette évolution temporelle. En pratique, ces retours vibratoires se rencontrent couramment et il est nécessaire de s'intéresser aux résultats renvoyés par la procédure d'identification.

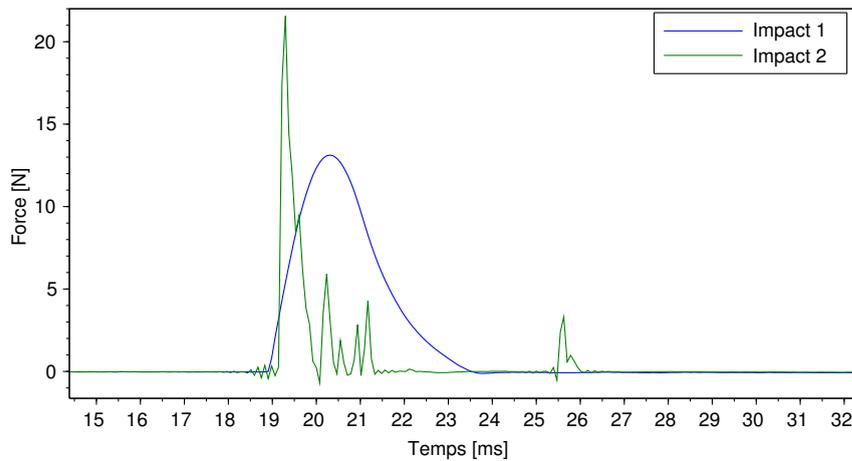


FIGURE 6.19 – Evolutions temporelles des impacts 1 et 2.

DR	DS et QC	GS	GD
$\mu_{min} = -5\Delta t$	$T_{min} = 0.3 \text{ ms}$	$\mu_{min} = -5\Delta t$	$\mu_{min} = -5\Delta t$
$\mu_{max} = +30\Delta t$	$T_{max} = 6 \text{ ms}$	$\mu_{max} = +30\Delta t$	$\mu_{max} = +30\Delta t$
$\Delta\mu = \Delta t$	$\Delta T = 0.1\text{ms}$	$\Delta\mu = \Delta t$	$\Delta\mu = \Delta t$
		$\sigma_{min} = 0.01 \text{ ms}$	$\sigma_g^{min} = 0.01 \text{ ms}$
		$\sigma_{max} = 2 \text{ ms}$	$\sigma_g^{max} = 2 \text{ ms}$
		$\Delta\sigma = 0.01 \text{ ms}$	$\Delta\sigma_g = 0.05 \text{ ms}$
			$\sigma_d^{min} = 0.01 \text{ ms}$
			$\sigma_d^{max} = 2 \text{ ms}$
			$\Delta\sigma_d = 0.01 \text{ ms}$

TABLE 6.4 – Espace des paramètres pour les différentes lois paramétriques testées.  $\Delta t = 1/f_e$  représente la période d'échantillonnage de l'accéléromètre.

### 6.4.2 Performances de reconstruction suivant la loi paramétrique utilisée

On utilise la FMD  $\mathcal{F}_1$  pour identifier l'impact 1. La Figure 6.20 montre les reconstructions du signal de force obtenues avec les différentes lois. La flèche noire représente la loi DR, et pour plus de lisibilité la hauteur de la flèche est ajustée à l'intensité de l'impact appliqué. L'intensité obtenue avec la loi DR est homogène à des [N.s]. Les paramètres optimaux avec les performances de localisation et de reconstruction associées sont présentés dans le Tableau 6.5. On observe que l'intensité retrouvée par la loi QC est trop élevée et que l'impact n'est pas localisé à  $\epsilon$ -près. Cela est dû à l'initialisation trop en avance de la loi avec la technique de seuil utilisée. En effet, la loi QC présente une discontinuité à l'instant  $t = \tau$  qui ne représente pas correctement l'évolution temporelle de la force appliquée. En conséquence, les candidats retrouvés sont plus éloignés du capteur, d'où la localisation à  $3\epsilon$ -près et l'intensité d'impact beaucoup plus élevée. Pour corriger ce problème, il faudrait laisser l'instant d'impact en paramètre de la loi pour affiner l'instant d'initialisation. Toutes les autres lois permettent de localiser à  $\epsilon$ -près le point d'impact. Les lois DS, GS et GD estiment convenablement les paramètres de la forme d'impact. Le modèle GD est cependant plus précis puisqu'il permet de capturer la dissymétrie du pic. En revanche, l'espace des paramètres avec le modèle GD est plus grand et l'identification des paramètres nécessite plus de temps de calcul. La loi DR permet de localiser à  $\epsilon$ -près l'impact, d'estimer la position du pic, et d'obtenir l'intensité d'une impulsion équivalente, exprimée en *N.s*, qui reproduirait au mieux les mesures d'accélération au sens des moindres carrés.

Loi	DS	QC	GS	GD	DR
Localisation	$\epsilon$	$3\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
Reconstruction	24.4%	132%	23.3%	13.9%	NA
Intensité	11.8N	24.2N	13.1N	12.8N	0.0176N.s
Paramètres	$T = 2.9\text{ms}$	$T = 4.3\text{ms}$	$\mu = 18\Delta t$ $\sigma = 0.68\text{ms}$	$\mu = 15\Delta t$ $\sigma_g = 0.58\text{ms}$ $\sigma_d = 1.0\text{ms}$	$\mu = 18\Delta t$

TABLE 6.5 – Performances de reconstruction de la force d'impact 1 avec les différentes lois utilisées. Le pourcentage de reconstruction correspond à l'erreur relative en norme 2 entre la force mesurée et la force reconstruite (NA = Non Applicable).

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

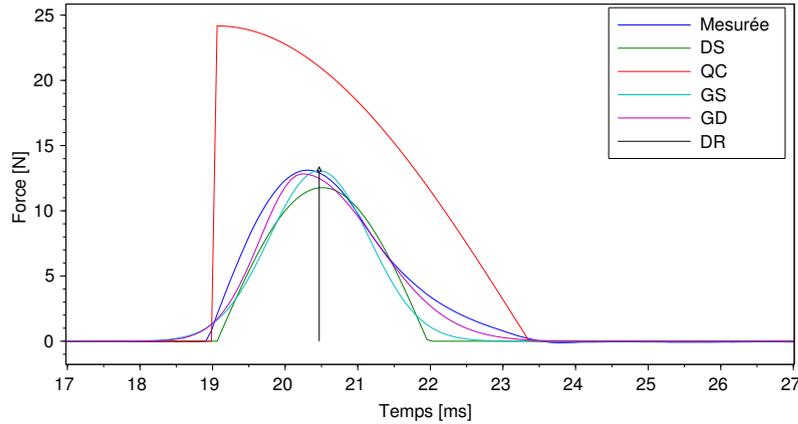


FIGURE 6.20 – Reconstruction de la force de l'impact 1 avec les différentes lois paramétriques.

On utilise la FMD  $\mathcal{F}_2$  pour identifier l'impact 2. La Figure 6.21 montre les reconstructions du signal de force obtenues avec les lois DS, QC et DR. Les paramètres optimaux avec les performances de localisation et de reconstruction associées sont présentés dans le Tableau 6.6. On observe que la procédure capture le pic principal de la force d'impact appliquée. Pour cet impact, la force appliquée admet une pente initiale suffisamment raide pour que la loi QC reconstruise assez raisonnablement le pic principal. En revanche, les lois GS et GD échouent à la fois pour la localisation et la reconstruction. Une explication possible est que l'espace des paramètres est trop vaste pour reconstruire le pic principal comme le font les lois DS et QC. En particulier, on observe que la valeur renvoyée pour  $\mu$  est  $\mu_{max}$ , ce qui signifie que le résidu quadratique se minimise en mettant à zéro la plus grande partie du signal possible. On peut contourner ce problème en réduisant l'intervalle de variation du paramètre de position du pic  $\mu$ . Par exemple, on peut choisir  $\mu_{max} = \mu_\delta$ , où  $\mu_\delta$  représente la position de l'impulsion équivalente de l'impact appliqué, identifiée au préalable avec la loi DR. Cela revient à supposer que *i*) la durée d'impact est suffisamment faible pour que l'identification avec la loi DR aboutisse, et *ii*) que la position du pic principal se situe avant  $\mu_\delta$ , comme cela a souvent été observé pour les pics dissymétriques avec  $\sigma_g < \sigma_d$ . La forme d'impact retrouvée se rapproche alors de l'allure d'un Dirac, comme représenté sur la Figure 6.22 (voir Tableau 6.7 pour les valeurs des paramètres obtenues).

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

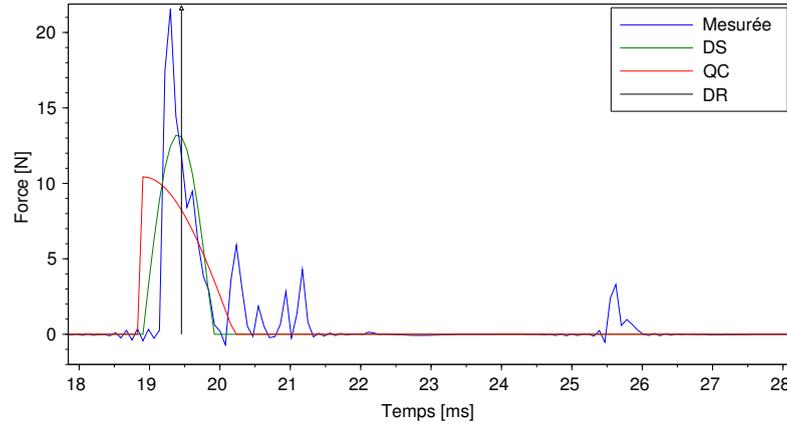


FIGURE 6.21 – Reconstruction de la force de l'impact 2 avec les lois DS, QC et DR.

Loi	DS	QC	GS	GD	DR
Localisation	$\epsilon$	$\epsilon$	E	E	$\epsilon$
Reconstruction	51.8%	74.7%	E	E	NA
Intensité	13.2N	10.4N	E	E	0.00763N.s
Paramètres	$T = 1.0\text{ms}$	$T = 1.3\text{ms}$	$\mu = +30\Delta t$ $\sigma = 0.01\text{ms}$	$\mu = +30\Delta t$ $\sigma_g = 0.01\text{ms}$ $\sigma_d = 0.22\text{ms}$	$\mu = +7\Delta t$

TABLE 6.6 – Performances de reconstruction de la force d'impact 2 avec les différentes lois utilisées (E=Echec)

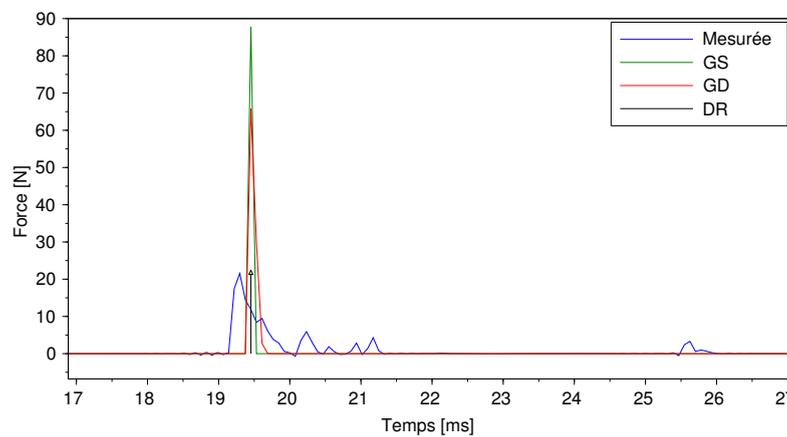


FIGURE 6.22 – Reconstruction de la force de l'impact 2 avec différentes lois paramétriques, en choisissant  $\mu_{max} = \mu_{\delta}$  pour les lois GS et GD.

Loi	GS	GD	DR
Localisation	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
Intensité	87.7N	65.7N	0.00763N.s
Paramètres	$\mu = +7\Delta t$ $\sigma = 0.01\text{ms}$	$\mu = +7\Delta t$ $\sigma_g = 0.01\text{ms}$ $\sigma_d = 0.06\text{ms}$	$\mu = +7\Delta t$

TABLE 6.7 – Performances d'identification de l'impact 2 pour différentes lois paramétriques en choisissant  $\mu_{max} = \mu_\delta$  pour les lois GS et GD.

## 6.5 Discussion sur les résultats expérimentaux obtenus

### 6.5.1 Identification des contributions modales de la FMD minimale

D'après les résultats présentés en section 6.3.5, la majorité des impacts appliqués sont localisés à  $\epsilon$ -près, quelque soit l'embout utilisé, pourvu que la FMD utilisée soit convenablement choisie. En considérant l'ensemble des impacts appliqués, on atteint 83.2% de réussite pour la localisation à  $\epsilon$ -près avec la loi DS. Pour l'embout en caoutchouc, la famille  $\mathcal{F}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est suffisante pour estimer les contributions des modes discriminants. Pour s'en convaincre, on représente sur la Figure 6.23 les contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesurés et reconstruits pour l'impact appliqué au centre de la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc. En fait, ce sont les modes de  $\mathcal{F}_1$  qui sont majoritairement excités par l'impact, si bien que le signal d'accélération reconstruit est proche du signal mesuré. On représente sur la Figure 6.24 la reconstruction du signal d'accélération. L'erreur relative en norme 2 entre les signaux mesuré et reconstruit est égale à 29.8%. On est donc dans la situation où le modèle de réponse permet non seulement d'identifier l'impact mais aussi de reconstruire convenablement les mesures d'accélération. Cependant, lorsqu'on rajoute des modes dans l'analyse, par exemple en considérant la FMD augmentée  $\mathcal{F}_2 = (\phi_1, \dots, \phi_6)$ , les contributions des modes rajoutés sont mal estimées. On représente sur la Figure 6.23 les contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesurés et reconstruits avec  $\mathcal{F}_2$ . L'erreur relative<sup>3</sup> en norme  $\infty$  sur  $\mathbf{Z}_F$  passe de 8.9% lorsqu'il est estimé avec  $\mathcal{F}_1$  à 27.1% lorsqu'il est estimé avec  $\mathcal{F}_2$ . Signalons toutefois que les contributions des modes de  $\mathcal{F}_1$  restent convenablement estimées même en retenant  $\mathcal{F}_2$  dans l'analyse. On peut donc estimer

---

3. Le VPMA exact est estimé en utilisant une moyenne des VPM des noeuds de la cellule car le centre n'est pas un point de calcul des déformées modales.

## CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

---

VPMA avec  $\mathcal{F}_2$ , puis le tronquer sur  $\mathcal{F}_1$  pour la procédure de discrimination permettant d'identifier des candidats.

En revanche, il faut utiliser  $\mathcal{F}_2$  pour tous les autres embouts. On constate en effet que les contributions des modes discriminants sont moins bien capturées en utilisant  $\mathcal{F}_1$  que  $\mathcal{F}_2$ . On représente sur la Figure 6.25 les contenus fréquentiels des signaux d'accélération reconstruits en utilisant  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$  pour l'impact appliqué au centre de la cellule 23 avec l'embout en acier. On observe que la contribution du premier mode est mieux capturée, et que les contributions des modes  $\phi_4, \phi_5, \phi_6$  sont très bien estimées. Pour cet exemple, on peut aussi bien localiser avec les modes de  $\mathcal{F}_1$  que ceux de  $\mathcal{F}_2$ . Comme suggéré en section 5.4.2, l'utilisation d'une FMD augmentée permet de mieux reconstruire la bande fréquentielle d'intérêt [85Hz,285Hz] contenant les contributions de la FMD minimale  $\mathcal{F}_1$ . Notons toutefois que les modes de  $\mathcal{F}_1$  ou de  $\mathcal{F}_2$  ne contiennent pas la majorité de l'information sur le signal d'accélération. On ne peut donc pas reconstruire convenablement les mesures d'accélération comme représenté sur la Figure 6.26. Cet exemple illustre qu'il est plus judicieux d'estimer l'intensité avec (4.5) plutôt qu'avec (4.4).

## CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

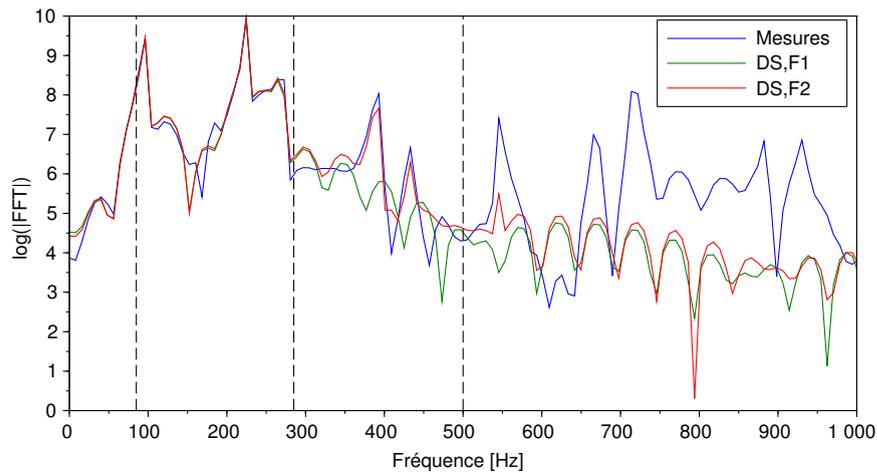


FIGURE 6.23 – Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesuré et reconstruits pour l'impact appliqué sur la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc. La bande de fréquences [85Hz,285Hz] correspond aux modes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , et la bande de fréquences [285Hz,580Hz] correspond aux modes  $\phi_4, \phi_5, \phi_6$ .

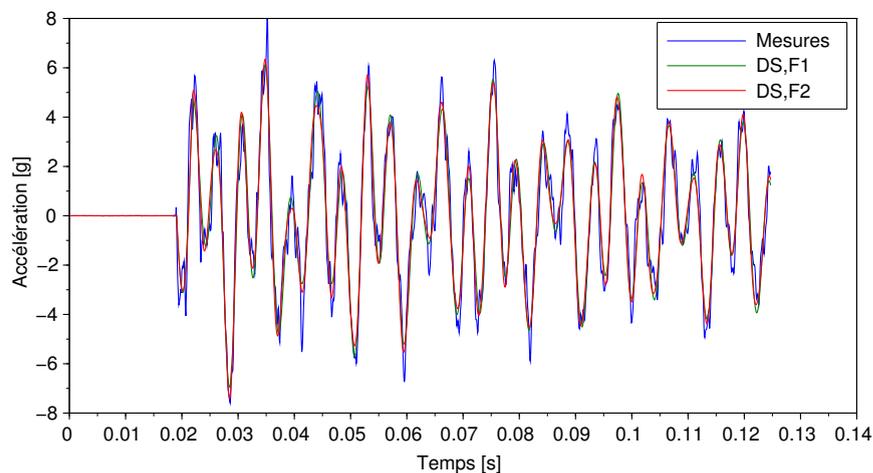


FIGURE 6.24 – Signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 21 avec l'embout en caoutchouc.

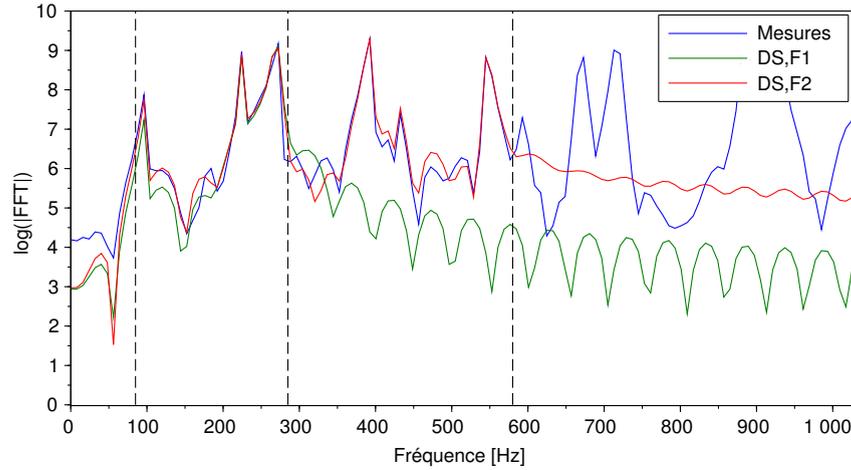


FIGURE 6.25 – Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 23 avec l'embout en acier.

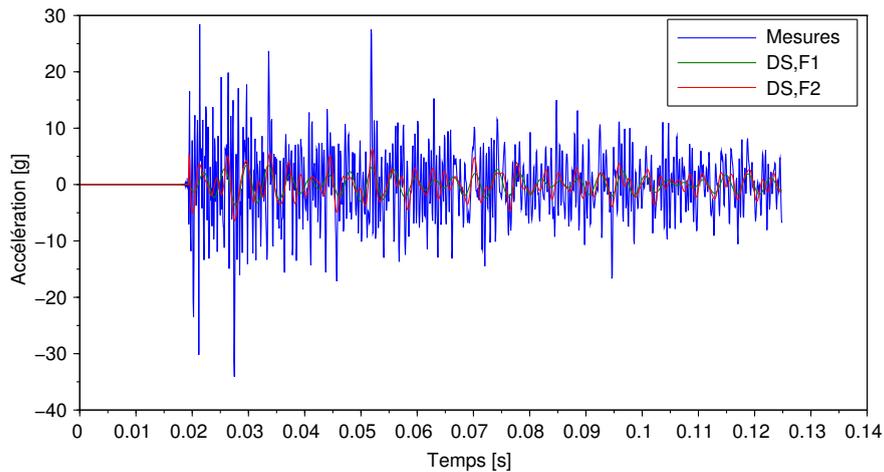


FIGURE 6.26 – Signaux d'accélération mesuré et reconstruit, avec la loi DS et  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ , pour l'impact appliqué sur la cellule 23 avec l'embout en acier.

### 6.5.2 Performances de localisation suivant le point d'application de l'impact

On remarque que ce sont essentiellement les impacts appliqués sur les cellules proches des bords de la plaque, et en particulier des coins, qui sont les moins bien localisés. Si l'on exclut ces impacts, le taux de localisation à  $\epsilon$ -près atteint 95% avec la loi DS. Cette difficulté de localisation peut s'expliquer par deux phénomènes. Premièrement, les impacts

appliqués proches des bords excitent significativement des modes de rang plus élevé. La Figure 6.27 illustre les contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesurés pour les impacts appliqués sur les cellules 1 et 28 avec l'embout en caoutchouc. On observe que des modes de rang plus élevés sont significativement sollicités par l'impact sur le coin (cellule 1). Les lignes en traitillés seraient des exponentielles décroissantes si l'axe des ordonnées n'était pas tracé en échelle logarithmique. En conséquence, l'erreur de troncature est plus élevée, ce qui dégrade la précision de la procédure. Deuxièmement, la carte de robustesse angulaire présentée en section 6.2 montre que l'angle maximum de robustesse  $\theta_\epsilon(F)$  est beaucoup plus petit pour  $F$  proche d'un coin ( $\approx 4^\circ$ ) que du centre de la plaque ( $\approx 37^\circ$ ). Ainsi, le noyau de localisation  $\mathcal{N}_\epsilon$  est beaucoup moins étendu pour un impact appliqué proche d'un bord que du centre de la plaque.

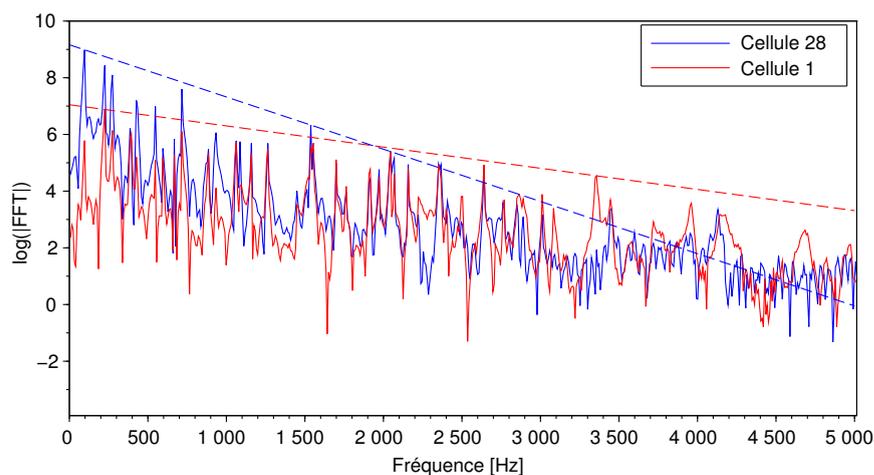


FIGURE 6.27 – Contenus fréquentiels des signaux d'accélération mesurés pour les impacts appliqués sur les cellules 1 et 28 avec l'embout en caoutchouc.

### 6.5.3 Reconstruction des formes d'impact par rapport aux solutions de référence

On s'intéresse à la qualité de reconstruction des formes d'impact 1 et 2 avec les différentes lois paramétriques (voir Figures 6.20 et 6.21). Idéalement, on souhaiterait que les lois estimées  $\psi(\hat{\alpha})$ , obtenues par minimisation d'un résidu quadratique sur les mesures d'accélération, soient proches de celles obtenues par minimisation du résidu quadratique

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

sur les mesures de force :

$$\boldsymbol{\alpha}_{ref} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n (\psi(\boldsymbol{\beta}, t_i) - \psi_m(t_i))^2$$

où  $\psi_m : t \mapsto \psi_m(t)$  désigne la forme de l'impact appliquée. Les solutions de référence sont donc les lois  $\psi(\boldsymbol{\alpha}_{ref})$  minimisant le résidu quadratique sur le signal de force unitaire. Pour les formes de référence des lois DS et QC, on utilise l'estimation de l'instant d'impact effectuée avec la technique de seuil. Les Tableaux 6.8 et 6.9 donnent les valeurs de  $\boldsymbol{\alpha}_{ref}$  pour les différentes lois, et les erreurs relatives en norme 2 les différentes formes obtenues. Les Figures 6.28 et 6.29 permettent de comparer les solutions obtenues aux solutions de référence. La loi DS conduit à une reconstruction exacte de la solution de référence pour l'impact 1, et à la meilleure reconstruction pour l'impact 2 (erreur : 19.8%). La loi GD fournit la meilleure reconstruction des mesures pour l'impact 1 (erreur : 11%), et une bonne reconstruction de la solution de référence (erreur : 4.6%). Même si les performances de reconstruction de la forme de l'impact 2 sont moins bonnes que celles de l'impact 1, on constate que les solutions obtenues par la procédure d'identification de l'impact capturent le pic principal, tout comme les solutions de référence.

Signalons qu'il peut exister de nombreux minima locaux pour lesquels le résidu quadratique sur les mesures d'accélération est proche, si bien que l'on devrait plutôt raisonner en termes de famille de solutions possibles. C'est particulièrement le cas lorsque l'impact appliqué est de durée assez faible pour être représenté par un Dirac : toute forme d'impact de durée suffisamment faible permet de reconstruire les mesures d'accélération avec des performances semblables.

Modèle	DS	QC	GS	GD
$\boldsymbol{\alpha}_{ref}$	$T = 2.9\text{ms}$	$T = 3.8\text{ms}$	$\mu = +18\Delta t$ $\sigma = 0.84\text{ms}$	$\mu = +15\Delta t$ $\sigma_g = 0.64\text{ms}$ $\sigma_d = 1\text{ms}$
Ecart 1	21.0%	42.8%	22.7%	11.0%
Ecart 2	21.0%	39.5%	13.8%	8.72%
Ecart 3	0%	47.9%	17.6%	4.8%

TABLE 6.8 – Paramètres minimisant le résidu quadratique sur le signal de force de l'impact 1. Ecart 1 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$  et  $\psi_m$ . Ecart 2 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\boldsymbol{\alpha}_{ref})$  et  $\psi_m$ . Ecart 3 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\boldsymbol{\alpha}_{ref})$  et  $\psi(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ .

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
MÉTALLIQUE

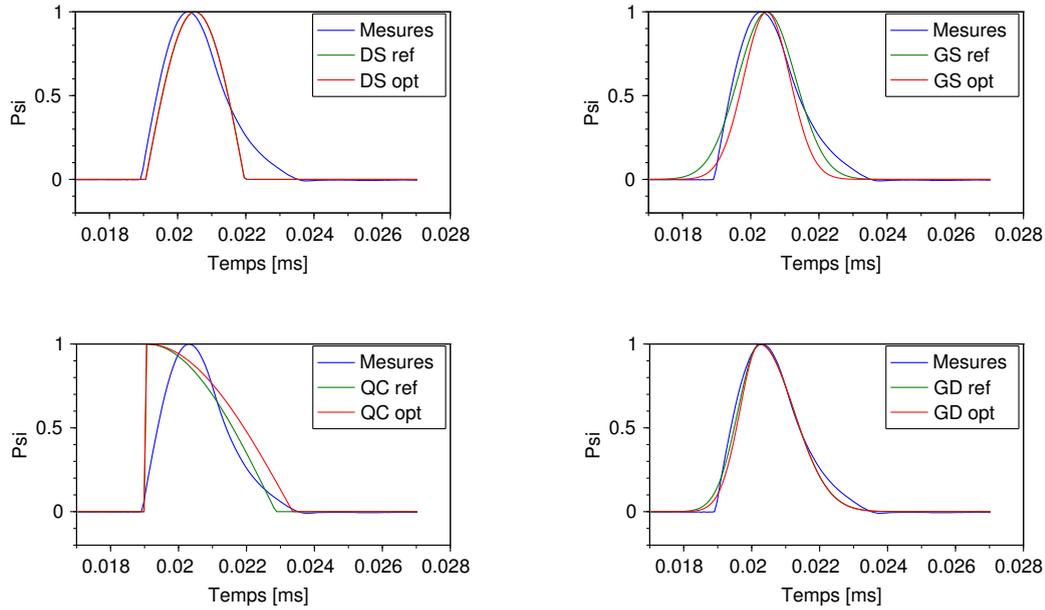


FIGURE 6.28 – Formes mesurée  $\psi_m$ , reconstruite avec la procédure d'identification  $\psi(\hat{\alpha})$ , et de référence  $\psi(\alpha_{ref})$  pour l'impact 1.

Modèle	DS	QC	GS	GD
$\alpha_{ref}$	$T = 0.9\text{ms}$	$T = 0.8\text{ms}$	$\mu = +6\Delta t$ $\sigma = 0.17\text{ms}$	$\mu = +4\Delta t$ $\sigma_g = 0.01\text{ms}$ $\sigma_d = 0.27\text{ms}$
Ecart 1	77.4%	125%	98.4%	95.4%
Ecart 2	72.2%	116%	50.0%	34.0%
Ecart 3	19.8%	80.1%	88.9%	90.4%

TABLE 6.9 – Paramètres minimisant le résidu quadratique sur le signal de force de l'impact 2. Ecart 1 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\hat{\alpha})$  et  $\psi_m$ . Ecart 2 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\alpha_{ref})$  et  $\psi_m$ . Ecart 3 : Erreur relative en norme 2 entre  $\psi(\alpha_{ref})$  et  $\psi(\hat{\alpha})$ .

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
MÉTALLIQUE

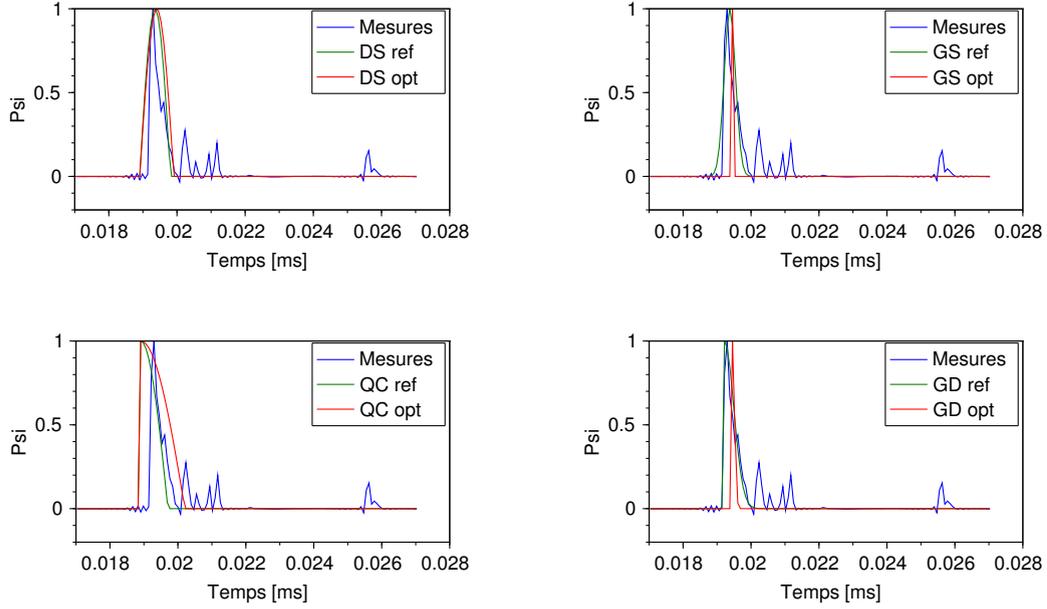


FIGURE 6.29 – Formes mesurée  $\psi_m$ , reconstruite avec la procédure d'identification  $\psi(\hat{\alpha})$ , et de référence  $\psi(\alpha_{ref})$  pour l'impact 2.

#### 6.5.4 Vérification de la formule approchée du conditionnement

Les propriétés de la plaque données dans le Tableau 6.1 permettent de calculer les séparations modales  $s_{ij}$  (voir section 4.2.1) des six premiers modes de vibration. En notant  $\mathbf{S}$  la matrice de terme général  $s_{ij}$  on a :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0.41 & 0.48 & 0.61 & 0.64 & 0.71 \\ & 0 & 0.093 & 0.27 & 0.32 & 0.42 \\ & & 0 & 0.18 & 0.23 & 0.34 \\ & & & 0 & 0.048 & 0.17 \\ & & (*) & & 0 & 0.12 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la relation 4.10 et le Tableau 6.1, on en déduit les coefficients de presque orthogonalité associés aux familles de réponses impulsionnelles liées à  $\mathcal{F}_1 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\mathcal{F}_2 = (\phi_1, \dots, \phi_6)$  :

$$\begin{aligned} \mu_E(\mathcal{F}_1) &= 0.0114 & \text{et} & & \mu_F(\mathcal{F}_1) &= 0.0115 \\ \mu_E(\mathcal{F}_2) &= 0.0429 & \text{et} & & \mu_F(\mathcal{F}_2) &= 0.0430 \end{aligned}$$

## CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

On est précisément dans la situation où la structure étudiée admet des modes basse fréquence faiblement amortis et bien séparés ( $\mu \ll 1$ ). On donne la matrice  $\mathbf{A}_1$  calculée pour l'impact 1 (voir section 6.4.1) avec la FMD  $\mathcal{F}_1$ , la loi DS avec  $\hat{\alpha}$ , la durée de mesure  $D = 0.11s$  et la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 12.8kHz$  :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 964 & 4.41 & 11.5 \\ 4.41 & 1870 & -16.6 \\ 11.5 & -16.6 & 1040 \end{bmatrix}$$

On vérifie que  $\mathbf{A}_1$  est à diagonale strictement dominante. Son conditionnement en norme 2 calculé par Scilab<sup>4</sup> est égal à  $\kappa(\mathbf{A}_1) = 1.94$ . La formule approchée (5.16), en supposant les  $K_i = 1$ , donne  $\kappa_{app}(\mathbf{A}_1) = 2.95$ . L'erreur relative entre les valeurs exacte et approchée est de 34%. Cette erreur peut se réduire en utilisant une plus grande partie du signal.<sup>5</sup> On représente sur la Figure 6.30 l'évolution du  $\kappa(\mathbf{A}_1)$  en fonction de la durée de mesure. On observe que le conditionnement converge vers la valeur 2.92. L'erreur relative se réduit alors à 0.84%. Les modes retenus dans l'analyse et les choix des paramètres de mesures rentrent donc dans le domaine de validité de la formule approchée. En particulier, les modes sont suffisamment séparés, et la durée de l'impact est assez faible pour supposer  $K_i = 1$ .

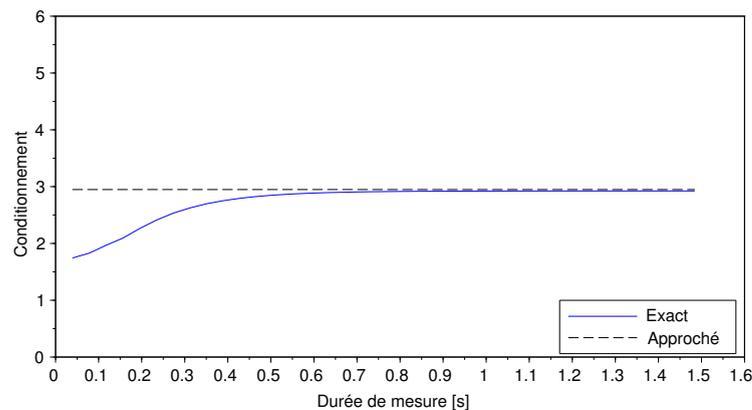


FIGURE 6.30 – Evolution du conditionnement en norme 2 de la matrice  $\mathbf{A}_1$  en fonction de la durée de mesure.

4. Scilab effectue une décomposition en valeurs singulières de la matrice avant de calculer son conditionnement en norme 2 par le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière.

5. L'intérêt est seulement de vérifier que la formule approchée du conditionnement est vérifiée dans les conditions de presque orthogonalité. Ce n'est pas avantageux en pratique car cela augmente le conditionnement de la matrice.

CHAPITRE 6. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE L'APPROCHE  
 MONO-CAPTEUR D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE PLAQUE  
 MÉTALLIQUE

---

On procède de la même façon avec l'impact 2. On donne la matrice  $\mathbf{A}_2$  calculée avec la FMD  $\mathcal{F}_2$ , la loi DS avec  $\hat{\alpha}$ , la durée de mesure  $D = 0.11s$  et la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 12.8kHz$  :

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 141 & -10.4 & -8.62 & -4.03 & 1.60 & -0.39 \\ & 475 & 5.77 & 3.73 & -0.660 & 0.447 \\ & & 384 & 3.41 & -0.645 & 0.210 \\ & & & 474 & -10.4 & 1.45 \\ & & (*) & & 442 & 3.22 \\ & & & & & 452 \end{bmatrix}$$

On a  $\kappa(\mathbf{A}_2) = 3.42$  et  $\kappa_{app}(\mathbf{A}_2) = 4.75$ . L'erreur relative est donc de 28.0%. On représente sur la Figure 6.31 l'évolution du  $\kappa(\mathbf{A}_2)$  en fonction de la durée de mesure. On observe que le conditionnement converge vers la valeur 5.69. L'erreur relative se réduit alors à 19.6%. Cette fois-ci, les modes ne sont pas suffisamment séparés pour que l'approximation du conditionnement soit correcte et que l'on puisse négliger les termes hors diagonaux de  $\mathbf{A}_2$ . Ils sont cependant assez séparés pour que la matrice  $\mathbf{A}_2$  soit à diagonale strictement dominante et bien conditionnée.

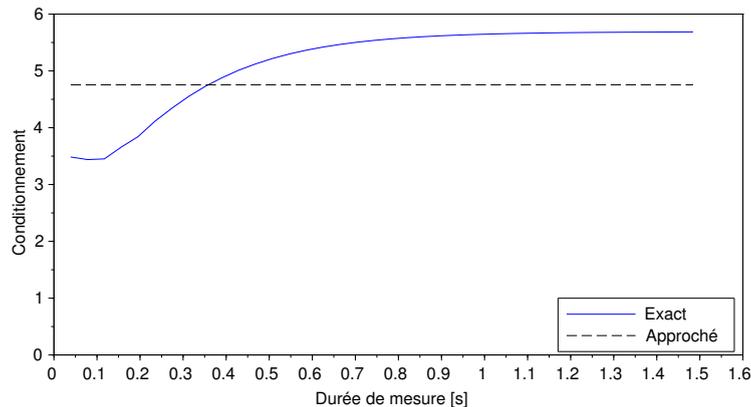


FIGURE 6.31 – Evolution du conditionnement en norme 2 de la matrice  $\mathbf{A}_2$  en fonction de la durée de mesure.

### 6.5.5 Localisation avec la loi de Dirac retardé

En fait, l'ensemble des impacts appliqués avec les embouts en nylon, aluminium ou acier, peuvent être convenablement localisés à l'aide de la loi DR. On donne dans le Tableau 6.10 les performances de localisation obtenues pour l'ensemble des impacts appliqués. Ces impacts sont donc de durées suffisamment faibles pour que les réponses mesurées puissent s'approcher par une réponse impulsionnelle. L'avantage d'utiliser cette loi pour la localisation est que les temps de calculs sont beaucoup plus rapides qu'avec les autres lois puisque le seul paramètre à déterminer est la position du pic.

Embout	FMD	Localisations (/64)		
		$\epsilon$	$2\epsilon$	$4\epsilon$
Caoutchouc	$\mathcal{F}_1$	16	50	53
Nylon	$\mathcal{F}_2$	55	64	64
Aluminium	$\mathcal{F}_2$	55	64	64
Acier	$\mathcal{F}_2$	53	64	64

TABLE 6.10 – Resultats de localisation de l'ensemble des impacts appliqués avec la loi DR.

## Chapitre 7

# Validation expérimentale de la méthode d'identification d'impacts sur une structure composite de grandes dimensions

**Résumé** : Les dimensions de la plaque étudiée dans le chapitre précédent sont suffisamment petites pour identifier un impact à l'aide d'un unique accéléromètre. En particulier, l'instant d'impact pouvait s'estimer à partir d'une technique de seuil. L'objectif de ce chapitre est de valider expérimentalement la méthode d'identification d'impact sur une structure de plus grandes dimensions, avec des propriétés mécaniques plus complexes en termes de matériaux et d'assemblages de composants. La structure étudiée est une section du pavillon d'un A350 de dimensions  $9.24\text{m} \times 2.40\text{m}$ . Une analyse modale expérimentale du panneau a permis d'identifier 7 modes de vibration de la structure entre 10Hz et 50Hz. Huit accéléromètres ont été positionnés sur la structure afin d'étudier l'influence des points de mesure choisis pour identifier les impacts. L'instant d'impact est laissé comme inconnue supplémentaire du problème. Les résultats expérimentaux montrent qu'un seul accéléromètre permet de localiser 88% des impacts appliqués à 41cm près, et 100% des impacts à 82cm près. L'utilisation d'un réseau de capteurs est discutée afin d'améliorer la robustesse de la procédure en cas de défaillance d'un capteur. En revanche, les modes connus du panneau sont associés à des fréquences propres trop basses pour correctement représenter les variations des forces d'impact appliquées. On observe un phénomène de glissement vers une allure de Dirac.

## 7.1 Dispositif expérimental

La structure étudiée est un morceau du pavillon d'un A350 de dimensions  $9.24\text{m} \times 2.40\text{m}$ . Le pavillon - crown panel - correspond à la partie supérieure centrale du fuselage (voir Figure 7.1). Il s'agit d'un panneau constitué d'une peau mince raidie longitudinalement par des lisses et transversalement par des cadres (voir Figure 7.2). Le panneau étudié a trois trous sur sa ligne médiane (passages d'antennes) et des patchs composite renforcent les zones autour de chaque trou. Tous les éléments sont en matériau composite CFRP exceptés les attaches de fixation qui sont métalliques. Le panneau est posé sur six rondins en bois et deux sangles maintiennent fermement le panneau afin d'éviter tout décollement lors des essais (voir Figure 7.3). Une note de calcul interne Airbus [Morteau-Rivet 2018] imposait d'appliquer des impacts d'une énergie inférieure à 10J avec un embout spécifique afin de ne pas endommager le panneau pour de futures utilisations.

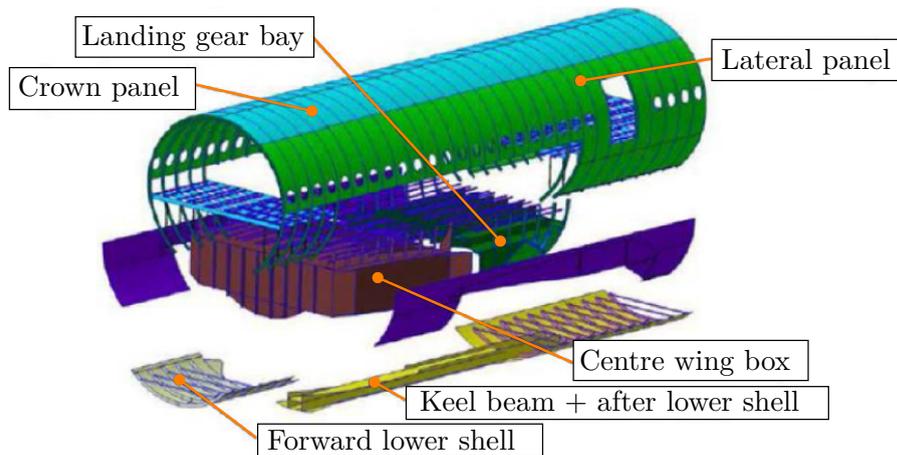


FIGURE 7.1 – Situation du pavillon (crown panel) dans un fuselage d'avion. Image extraite de [Morteau-Rivet 2018].



FIGURE 7.2 – Cadres et lisses d'un panneau latéral d'A350.

## CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE GRANDES DIMENSIONS

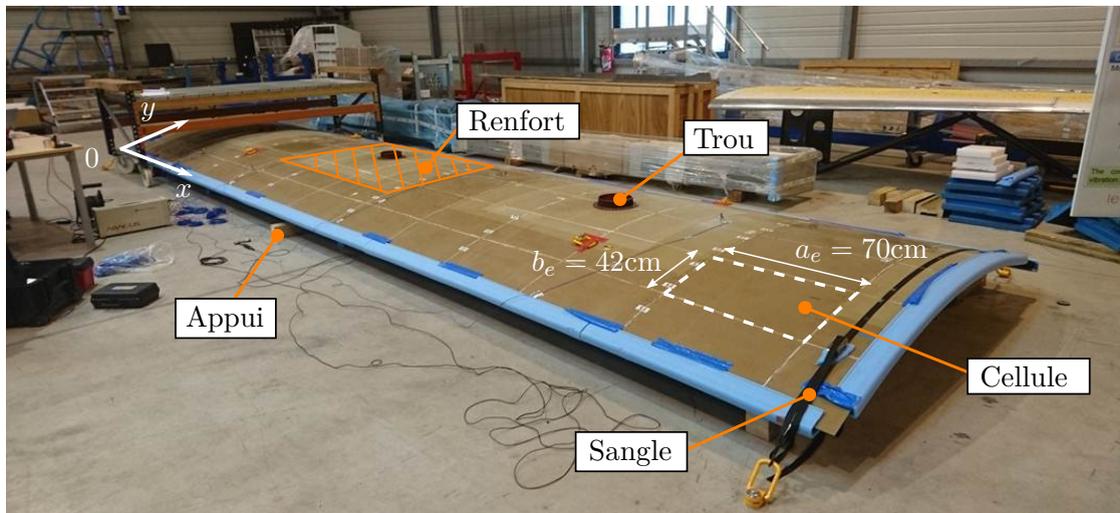


FIGURE 7.3 – Description du dispositif expérimental.

Une visualisation numérique du dispositif expérimental est réalisée avec Scilab. La Figure 7.4 représente la division du panneau en cellules (lignes noires), les trois trous (carrés rouges), les six points d'appuis (carrés noirs), et les deux sangles de maintien (lignes bleues). Le rectangle délimité en rouge par des traitillés correspond à la zone du panneau sur laquelle ont été appliqués les impacts. C'est la zone que l'on souhaite couvrir par une famille de modes discriminants.

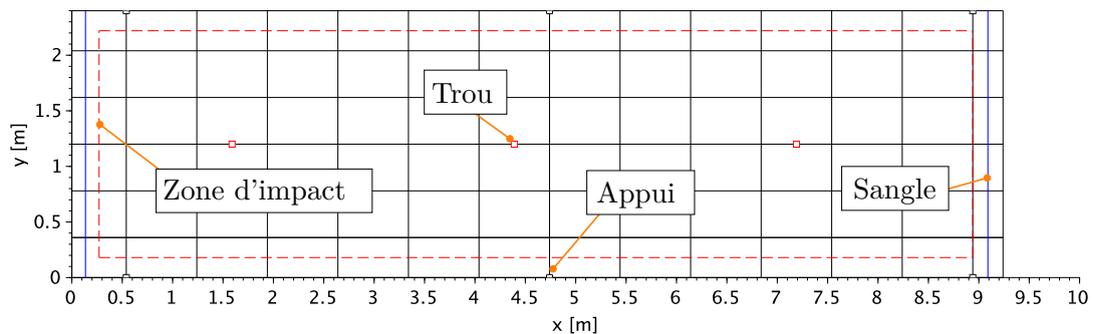


FIGURE 7.4 – Visualisation numérique du dispositif expérimental avec Scilab.

### 7.2 Analyse modale expérimentale du panneau

Une analyse modale expérimentale (AME) du panneau a été réalisée à l'aide de "tap tests" par une équipe d'analyse vibratoire Airbus. Cette technique consiste à répéter des

## CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE GRANDES DIMENSIONS

---

impacts sur une grille de points  $F_i$  de la structure et à enregistrer pour chaque impact appliqué la force et la réponse vibratoire en différents capteurs  $C_j$ . Les mesures permettent d'identifier les fonctions de transfert en fréquence (Frequency Response Function - FRF) pour chaque couple  $(F_i, C_j)$ . Les FRF - qui sont en fait les représentations fréquentielles des réponses impulsionnelles - encapsulent les propriétés modales de la structure. Un algorithme dédié permet de les extraire sur une bande de fréquences donnée. Les sorties d'une AME sur une bande de fréquences sont typiquement :

- Les fréquences propres  $f_{0i}$ ,
- Les amortissements modaux  $\eta_i$ ,
- Les masses modales  $\mu_i$ ,
- Les déformées des modes de vibration  $\phi_i$ .

Le logiciel utilisé pour effectuer l'AME est LMS Test Lab Modal Analysis version 15A. L'algorithme d'extraction de ce logiciel identifie des modes complexes dont les déformées sont représentées par des vecteurs complexes  $\phi_i \in \mathbb{C}^N$  (partie réelle et partie imaginaire). Une structure avec amortissement proportionnel n'admet que des modes réels tandis qu'une structure avec de forts amortissements ou des amortissements non proportionnels peut présenter des modes complexes. Le bruit de mesure peut aussi perturber l'identification des modes de vibration et conduire à l'identification de modes complexes non physiques. Différents indicateurs existent pour décider si un mode donné est réel ou complexe. En particulier, les indicateurs MPC (Modal Phase Collinearity) et MPD (Mean Phase Deviation) sont fondés sur l'étude des phases de chaque composante complexe d'une déformée modale. D'après le manuel [LMS International 2012] on peut considérer que le mode est réel si  $\text{MPC} \geq 90\%$  et  $\text{MPD} \leq 15^\circ$ , complexe si  $\text{MPC} < 90\%$  et  $\text{MPD} > 15^\circ$ , et indéterminé sinon. Des critères supplémentaires - nécessitant une certaine expérience utilisateur - existent pour décider dans le cas indéterminé si le mode est réel, complexe, ou seulement purement numérique (i.e. non physique). Il est donc utile d'avoir une connaissance a priori sur les déformées de la structure. Cela permet de décider si celles obtenues par l'AME sont conformes aux attentes, i.e. jugées physiquement acceptables par l'utilisateur.

Pour réaliser l'AME, le panneau a été divisé en  $14 \times 6$  cellules, chaque cellule compre-

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

nant un point de mesure<sup>1</sup> en son centre, aux sommets, et au milieu de chaque arête (9 points par cellule). Un accéléromètre PCB-356B21 a été positionné sur chaque rangée verticale de points de mesure à environ 1/3 des bords longitudinaux. Un marteau d'impact PCB-086D05 avec un embout en élastomère de 21mm de diamètre a été utilisé pour appliquer les impacts. Une chaîne d'acquisition Abacus a été utilisée pour enregistrer les mesures. Le logiciel d'AME a permis d'extraire 10 modes de vibration sur la bande de fréquences [10Hz,50Hz]. Les valeurs des incateurs MPC et MPD sont indiquées dans le Tableau 7.1. Les modes 2,3,5,6,7,8,9 sont retenus comme étant des modes de vibration réels de la structure. Leurs déformées sont représentées sur la Figure 7.5. Seuls les modes 2,3,5 sont identifiés sans ambiguïté avec de très bons indicateurs ( $MPC \geq 90\%$  et  $MPD \leq 15^\circ$ ) et des déformées attendues. Les modes 6,8,9 sont indéterminés ( $MPC \geq 90\%$  et  $MPD > 15^\circ$ ) mais leurs déformées étaient également attendues. On observe que les fréquences propres des modes 8 et 9 sont très proches. La déformée du mode 9 se différencie de celle du mode 8 par une opposition de phase sur la moitié du panneau faiblement excitée. Le mode 7 est retenu même si  $MPC < 90\%$  et  $MPD > 15^\circ$  car sa déformée est une symétrie de celle du mode 8. Les modes 1,4,10 sont rejetés car il sont identifiés avec  $MPC < 90\%$  et  $MPD > 15^\circ$ , et parce que leurs déformées sont très irrégulières pour des modes basse fréquence (voir Figure 7.6). Ces modes sont soit liés à des amortissements non proportionnels ou à des non-linéarités, soit à la méthode numérique.

Mode	$f_i$ [Hz]	$\eta_{0i}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]
1	11.0	1.08	77.9	18.0
2	13.2	0.42	99.6	4.08
3	17.0	0.58	99.3	5.90
4	18.2	1.32	67.3	35.1
5	21.2	2.68	98.0	7.07
6	33.9	2.95	93.9	15.1
7	39.4	0.94	88.9	22.4
8	42.8	1.14	93.2	17.9
9	44.1	1.39	94.7	17.4
10	44.8	0.95	83.2	26.9

TABLE 7.1 – Analyse modale expérimentale du panneau sur [10Hz,50Hz].

---

1. Un point de mesure désigne ici un impact à appliquer pour l'AME, associé à des mesures vibratoires aux différents capteurs.

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

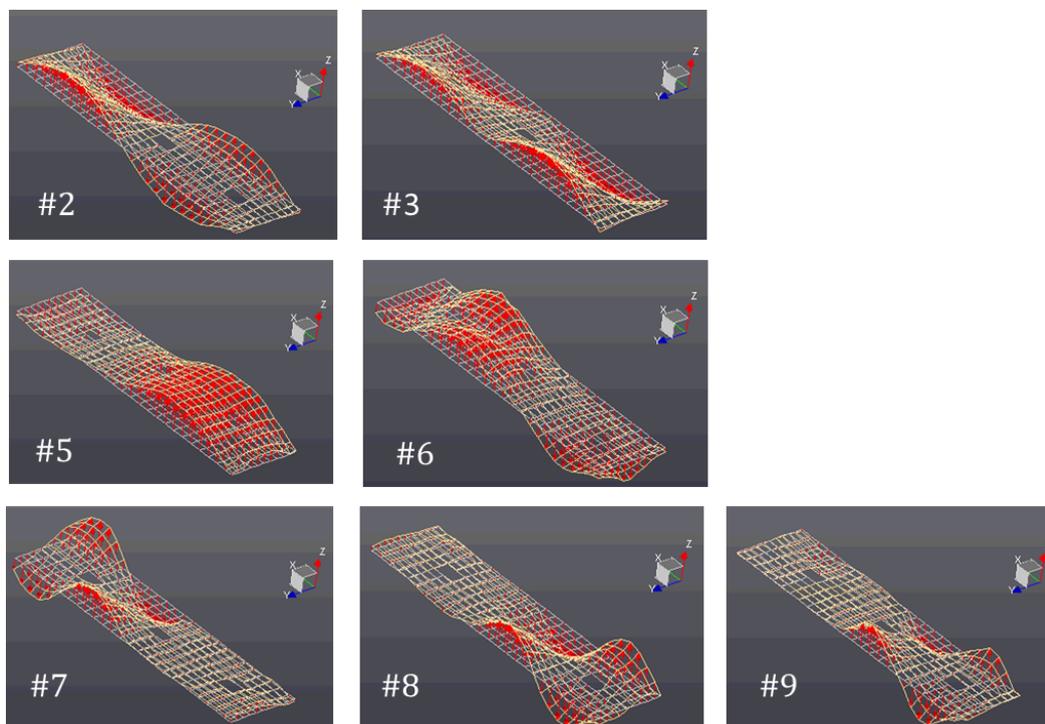


FIGURE 7.5 – Modes de vibration retenus à l'issue de l'AME.

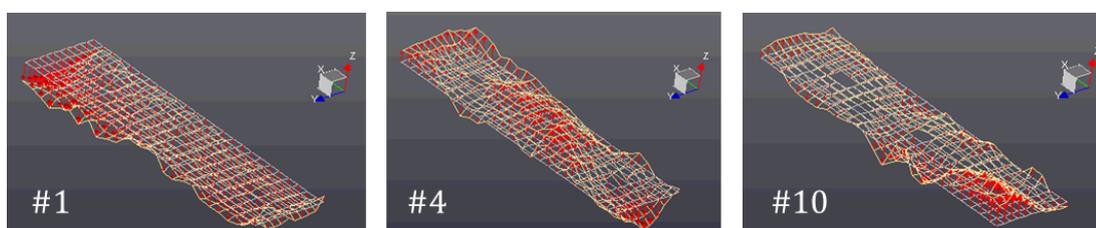


FIGURE 7.6 – Modes de vibration rejetés à l'issue de l'AME.

### 7.3 Identification des FMD

La résolution longitudinale de la discrétisation spatiale de l'AME est  $a_e/2 = 35\text{cm}$ , et la résolution transversale est  $b_e/2 = 21\text{cm}$  (voir Figure 7.3). L'exigence de localisation est choisie égale à la longueur d'une demi-diagonale d'une cellule du panneau :

$$\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2 = 40.8\text{cm}$$

La procédure présentée en section 3.4.2 est utilisée pour identifier des FMD à partir des 7 modes de vibration retenus par l'AME. On les note  $\phi_2, \phi_3, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8$  et  $\phi_9$  conformément à la Figure 7.5. La structure est de dimension géométrique  $d = 2$ , donc on s'intéresse dans un premier temps aux familles formées de  $p = d + 1 = 3$  modes (voir section 3.2.3). Il existe  $\mathcal{C}_3^7 = 35$  combinaisons possibles de familles formées de 3 modes parmi les 7 qui sont connus. Pour chaque combinaison, on calcule les cartes de robustesse angulaire associée à la précision  $\epsilon$  choisie (voir section 3.4.2), et on retient les valeurs min et max de  $\theta_\epsilon$  (voir section 3.3.2). C'est la famille  $\mathcal{F}_1 = (\phi_3, \phi_5, \phi_6)$  qui couvre la plus grande partie du panneau avec  $\min \theta_\epsilon = 0^\circ$  et  $\max \theta_\epsilon = 22^\circ$ . Aucune FMD globale de 3 modes n'a été trouvée en utilisant les modes connus de l'AME. La Figure 7.7 représente la carte de robustesse angulaire associée à la famille  $\mathcal{F}_1$  et à la précision  $\epsilon$  choisie.

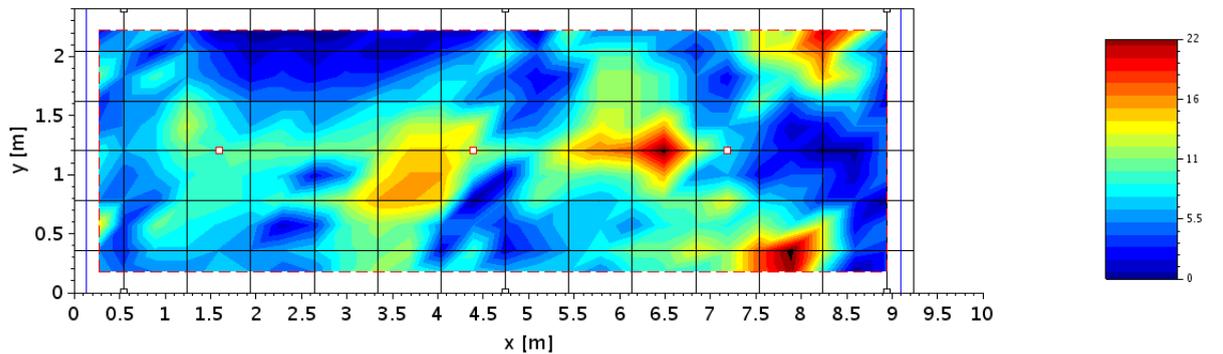


FIGURE 7.7 – Carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_1 = (\phi_3, \phi_5, \phi_6)$  et  $\epsilon = 40.8\text{cm}$  ( $\min \theta_\epsilon = 0^\circ$ ,  $\max \theta_\epsilon = 22^\circ$ ).

On s'intéresse maintenant aux familles augmentées de  $\mathcal{F}_1$  (voir section 5.4.2). L'idée est d'augmenter les valeurs min et max de  $\theta_\epsilon$  sur l'ensemble de la zone que l'on souhaite couvrir

## CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE GRANDES DIMENSIONS

---

(voir Figure 7.4). On considère dans un premier temps les familles  $\mathcal{F}_1$  augmentées d'un seul mode, et on obtient que  $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{F}_1, \phi_8)$  est une FMD globale avec  $\theta_\epsilon = 1^\circ$  et  $\max \theta_\epsilon = 31^\circ$ . En répétant ce procédé, on obtient  $\mathcal{F}_3 = (\mathcal{F}_2, \phi_7)$  avec  $\min \theta_\epsilon = 9^\circ$  et  $\max \theta_\epsilon = 37^\circ$ , puis  $\mathcal{F}_4 = (\mathcal{F}_3, \phi_2)$  avec  $\min \theta_\epsilon = 10^\circ$  et  $\max \theta_\epsilon = 39^\circ$ , et enfin  $\mathcal{F}_5 = (\mathcal{F}_4, \phi_9)$  avec  $\min \theta_\epsilon = 10^\circ$  et  $\max \theta_\epsilon = 44^\circ$ .

En fin de parcours, on a obtenu la meilleure FMD partielle formée de 3 modes (famille  $\mathcal{F}_1$ ), puis on a successivement amélioré la robustesse angulaire en rajoutant des modes un-à-un à partir de  $\mathcal{F}_1$  (familles  $\mathcal{F}_2$  à  $\mathcal{F}_5$ ). La Figure 7.8 illustre la carte de robustesse angulaire de  $\mathcal{F}_2$ . Ce procédé a permis de tester 45 combinaisons, au lieu de toutes les combinaisons possibles de familles contenant entre 3 et 7 modes qui sont au nombre de 99.

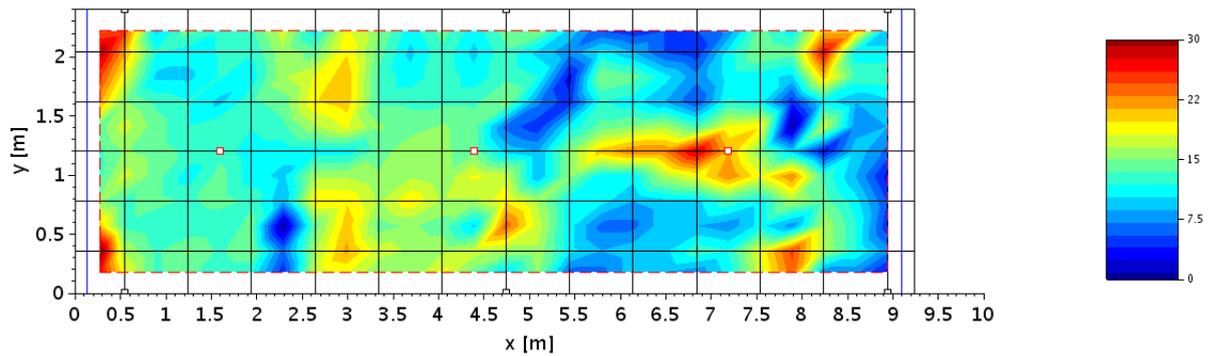


FIGURE 7.8 – Carte de robustesse angulaire associée à  $\mathcal{F}_2 = (\phi_3, \phi_5, \phi_6, \phi_8)$  et  $\epsilon = 40.8\text{cm}$  ( $\min \theta_\epsilon = 1^\circ$ ,  $\max \theta_\epsilon = 31^\circ$ ).

## 7.4 Positionnement des accéléromètres

Une contrainte de temps lors des essais expérimentaux a conduit à positionner les accéléromètres avant que l'AME ne soit achevée. La Figure 7.9 représente par des ronds bleus les positions  $C_1, \dots, C_8$  des huit accéléromètres qui ont été montés sur la structure (modèle PCB-356B21).

D'après la section 5.3.3, plus le rapport  $\nu(C) = \max_{i,j} \left| \frac{\Phi_{C_j}}{\Phi_{C_i}} \right|$  est proche de 1, et plus on diminue la majoration (5.4) du conditionnement de la matrice à inverser pour l'estimation du VPMA. Les rapports  $\nu(C_i)$  dans les familles  $\mathcal{F}_1$  à  $\mathcal{F}_5$  sont indiquées dans le Tableau 7.2. Un autre rapport important est  $m(C)$ , aussi défini en section 5.3.3, qui indique si le capteur est proche d'un noeud modal de la famille de modes étudiée. Plus  $m(C)$  est proche de 100% et plus le capteur est éloigné d'un noeud modal. Les rapports  $m(C_i)$  de ces points de mesure sont indiqués dans le Tableau 7.3.

Les valeurs de ces rapports seront mises en regard des performances de localisation dans la section 7.6.1. On verra que certains points de mesure sont bien meilleurs que d'autres. En particulier la position  $C_8$  n'identifiera que très peu d'impacts. On s'en servira cependant en section 7.7.5 comme point de mesure défectueux permettant de valider une stratégie de dialogue entre plusieurs capteurs d'un réseau si l'un d'entre devait s'avérer défaillant.

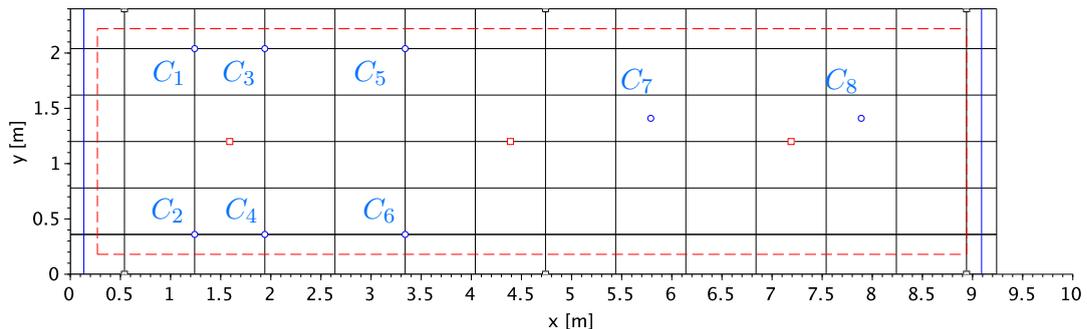


FIGURE 7.9 – Emplacement des huit accéléromètres sur la structure.

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$
$\nu(C_1)$	2.85	3.82	16.9	16.9	22.3
$\nu(C_2)$	1.46	1.95	4.72	4.72	7.41
$\nu(C_3)$	5.17	5.17	10.5	10.5	10.5
$\nu(C_4)$	2.21	2.21	13.7	13.7	13.7
$\nu(C_5)$	8.42	8.42	15.8	15.8	16.3
$\nu(C_6)$	16.6	16.6	16.6	16.6	20.7
$\nu(C_7)$	3.17	3.29	3.29	3.29	4.07
$\nu(C_8)$	3.15	3.29	3.54	3.54	3.54

TABLE 7.2 – Evaluation des rapports  $\nu(C_i)$  pour les différents capteurs et pour les différentes FMD.

	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$
$m(C_1)$	15.3	15.3	3.45	3.21	2.40
$m(C_2)$	31.1	31.1	12.8	11.9	8.92
$m(C_3)$	13.7	13.7	6.75	6.26	4.67
$m(C_4)$	33.2	33.2	5.35	4.96	3.72
$m(C_5)$	7.61	7.61	4.06	3.77	2.82
$m(C_6)$	3.89	3.89	3.89	3.61	2.71
$m(C_7)$	11.5	11.1	11.1	10.3	6.24
$m(C_8)$	5.75	5.50	5.50	5.10	3.82

TABLE 7.3 – Evaluation des rapports  $m(C_i)$  [%] pour les différents capteurs et pour les différentes FMD.

## 7.5 Vérification de la formule approchée du conditionnement

Les modes discriminants ne sont pas aussi bien séparés (voir section 4.2.1) que ceux de la plaque étudiée dans le chapitre précédent (voir section 6.5.4). On donne dans le Tableau 7.4 les séparations modales minimales  $s = \min_{i \neq j} s_{ij}$  pour les familles  $\mathcal{F}_1$  à  $\mathcal{F}_5$ , ainsi que les coefficients  $\mu_E$  et  $\mu_F$  des familles de réponses impulsionnelles modales associées. Les coefficients  $\mu_E$  et  $\mu_F$  des familles  $\mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$  ne peuvent pas être considérés petits devant 1, et ceux de la famille  $\mathcal{F}_5$  sont plus grands que 1. On ne peut donc pas conclure sur le conditionnement de la matrice à inverser dans la procédure d'identification de l'impact (voir section 4.1.2). On se propose donc de le calculer pour les différents points de mesures et les différentes FMD en utilisant les paramètres donnés dans le Tableau 7.6. On donne

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

dans le Tableau 7.5 les valeurs obtenues qu'on compare avec la formule approchée (5.16) en prenant les  $K_i$  égaux à 1. On observe que la matrice n'est pas toujours à diagonale strictement dominante (symbole F) et que son conditionnement dépasse 100 pour plusieurs configurations. En particulier, on s'attend à ce que les points de mesure  $C_5$  et  $C_6$  soient très sensibles aux erreurs de mesure et/ou de modèle, quelle que soit la FMD utilisée ( $\kappa \geq 90$ ).

	$s$	$\mu_E$	$\mu_F$
$\mathcal{F}_1$	0.110	0.0715	0.0724
$\mathcal{F}_2$	0.110	0.0715	0.0724
$\mathcal{F}_3$	0.0423	0.477	0.479
$\mathcal{F}_4$	0.0423	0.482	0.483
$\mathcal{F}_5$	0.0143	3.94	3.95

TABLE 7.4 – Séparations modales minimales des différentes FMD et coefficients de presque orthogonalité des familles de réponses impulsionnelles modales associées.

	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$
$C_1$	10.7(20.8)	46.4(47.7)	269(256)(F)	263(256)(F)	482(379)(F)
$C_2$	2.81(5.45)	12.1(12.4)	21.1(20.0)	20.7(20.0)	49.2(41.6)
$C_3$	35.2(68.6)	60.8(68.6)	75.6(77.7)	74.3(77.7)	87.8(77.7)
$C_4$	6.43(12.5)	7.73(12.5)	88.3(132)	86.6(133)	163(133)(F)
$C_5$	93.5(182)	192(197)	209(197)	(208)(197)	308(209)(F)
$C_6$	362(705)	649(705)(F)	652(705)(F)	663(705)(F)	1380(1180)(F)
$C_7$	12.86(12.65)	12.9(12.6)	12.9(12.6)	12.8(12.6)	12.8(12.6)
$C_8$	12.1(23.6)	12.1(23.6)	39.3(41.8)	40.7(41.8)	40.8(41.8)(F)

TABLE 7.5 – Conditionnement suivant le point de mesure et la FMD pour la loi DR,  $D = 0.755\text{s}$ ,  $f_e = 5.12\text{kHz}$ . Valeur entre parenthèse : évaluation de la formule approchée du conditionnement. (F) : matrice non diagonale strictement dominante.

## 7.6 Performances d'identification avec un accéléromètre

On se propose dans un premier temps d'utiliser séparément les huit accéléromètres positionnés sur la structure. On discutera en section 7.7 l'utilisation simultanée de plusieurs accéléromètres. L'objectif de cette section est de valider l'approche mono-capteur développée pour identifier des impacts sur une structure composite de grandes dimensions.

### 7.6.1 Localisation des impacts

Le logiciel LMS Test Lab est utilisé pour enregistrer les mesures sur une durée  $D = 0.755\text{s}$  avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5.12\text{kHz}$ . La procédure d'identification est codée avec le logiciel libre de calcul numérique Scilab. Les paramètres utilisés sont donnés dans le Tableau 7.6. L'instant d'impact est d'abord estimé à l'aide de la procédure de franchissement d'un seuil décrite en section 5.2.3. Le seuil est choisi à 5% de l'accélération maximale mesurée par le capteur utilisé. L'estimation est ensuite ajustée avec le paramètre  $\mu$  d'avance ou de retard (voir section 5.1). L'estimation du point d'impact est obtenue à partir d'un barycentre pondéré sur les  $\hat{\theta}_i$  (voir section 4.1.3). Les Tableaux 7.7 à 7.9 présentent les performances de localisation obtenues suivant la famille de modes utilisée et le point de mesure. Les meilleurs succès de localisation à  $\epsilon$  et  $2\epsilon$  près sont précisés pour chaque capteur par les valeurs entre parenthèses.

Loi de forme d'impact	Dirac Retardé (DR)
Détection de l'instant d'impact	Franchissement d'un seuil puis ajustement
Espace des paramètres	$\mu_{min} = -5\Delta t$ $\mu_{max} = +20\Delta t$ $\Delta\mu = \Delta t$
Tolérance de colinéarité	$\theta_c = 25^\circ$
Facteur de dispersion	$\gamma = 2$
Discrétisation spatiale	$d_s = 21\text{cm}$
Exigence de localisation	$\epsilon = 40.8\text{cm}$
Durée de mesure	$D = 10/f_1 = 0.755\text{s}$
Fréquence d'échantillonnage	$f_e = 5.12\text{kHz}$

TABLE 7.6 – Paramètres utilisés pour la localisation des impacts appliqués sur le panneau.  $\Delta t = 1/f_e$  représente la période d'échantillonnage.

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

FMD	Loc. (/48) avec $C_1$		Loc. (/48) avec $C_2$		Loc. (/48) avec $C_3$	
	$\epsilon$	$2\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$
$\mathcal{F}_1$	29(60%)	31	31	39	24	34
$\mathcal{F}_2$	23	40(83%)	38	48(100%)	29(60%)	40(83%)
$\mathcal{F}_3$	6	13	37	46	24	36
$\mathcal{F}_4$	6	13	38	46	23	35
$\mathcal{F}_5$	11	17	42(88%)	45	24	34

TABLE 7.7 – Performances de localisation avec les accéléromètres  $C_1, C_2, C_3$ .

FMD	Loc. (/48) avec $C_4$		Loc. (/48) avec $C_5$		Loc. (/48) avec $C_6$	
	$\epsilon$	$2\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$
$\mathcal{F}_1$	36	41	24	32	5	12
$\mathcal{F}_2$	41(85%)	48(100%)	34(71%)	43(90%)	14	26
$\mathcal{F}_3$	28	41	17	22	22(46%)	28
$\mathcal{F}_4$	30	38	17	22	22(46%)	29(60%)
$\mathcal{F}_5$	34	41	17	20	17	23

TABLE 7.8 – Performances de localisation avec les accéléromètres  $C_4, C_5, C_6$ .

FMD	Loc. (/48) avec $C_7$		Loc. (/48) avec $C_8$	
	$\epsilon$	$2\epsilon$	$\epsilon$	$2\epsilon$
$\mathcal{F}_1$	25(52%)	37	0	1
$\mathcal{F}_2$	17	32	2(4%)	5
$\mathcal{F}_3$	24	37	1	6(12%)
$\mathcal{F}_4$	24	39(81%)	2	6(12%)
$\mathcal{F}_5$	23	34	2(4%)	4

TABLE 7.9 – Performances de localisation avec les accéléromètres  $C_7, C_8$ .

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

On donne dans le Tableau 7.10 le classement des différents points de mesure en termes de succès de localisation suivant la famille de modes sélectionnée. Les positions  $C_2$  et  $C_4$  se partagent les deux premières places du classement sur l'ensemble des familles de modes, tandis que  $C_8$  est systématiquement le point de mesure le moins performant, avec un succès de localisation de l'ordre de 4% seulement. La Figure 7.10 représente la carte de localisations associée au point de mesure  $C_2$  avec  $\mathcal{F}_5$ . L'approche mono-capteur est donc validée pour cette structure composite de grandes dimensions :  $C_2$  localise 88% des impacts à  $\epsilon = 41\text{cm}$  près, et 100% des impacts à  $2\epsilon = 82\text{cm}$  près.

On représente sur les Figures 7.11 et 7.12 la dispersion du succès suivant les valeurs de  $\nu$  et de  $m$ . On observe une corrélation<sup>2</sup> négative ( $r = -0.24$ ) entre  $\nu$  et le succès, et une corrélation positive ( $r = +0.58$ ) entre  $m$  et le succès. Les développements de la section 5.3.3 suggéraient de telles tendances. Les corrélations obtenues avec ces positions de capteurs ne sont toutefois pas très marquées ( $|r| < 0.9$ ).

Classement	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$
n°1	$C_4(75\%)$	$C_4(85\%)$	$C_2(77\%)$	$C_2(79\%)$	$C_2(88\%)$
n°2	$C_2$	$C_2$	$C_4$	$C_4$	$C_4$
n°3	$C_1$	$C_5$	$C_3$	$C_7$	$C_3$
n°4	$C_7$	$C_3$	$C_7$	$C_3$	$C_7$
n°5	$C_3$	$C_1$	$C_6$	$C_6$	$C_6$
n°6	$C_5$	$C_7$	$C_5$	$C_5$	$C_5$
n°7	$C_6$	$C_6$	$C_1$	$C_1$	$C_1$
n°8	$C_8$	$C_8$	$C_8$	$C_8$	$C_8$

TABLE 7.10 – Classement des différents points de mesure en termes de succès de localisation à  $\epsilon = 41\text{cm}$  près suivant la famille de modes utilisée.

---

2. Le coefficient de corrélation entre deux variables  $X$  et  $Y$  se définit par  $r = \frac{\text{E}[(X-\text{E}[X])(Y-\text{E}[Y])]}{\sigma_X \sigma_Y}$ , où  $\text{E}[Z]$  désigne l'espérance de la variable  $Z$  et  $\sigma_Z$  sa variance.

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

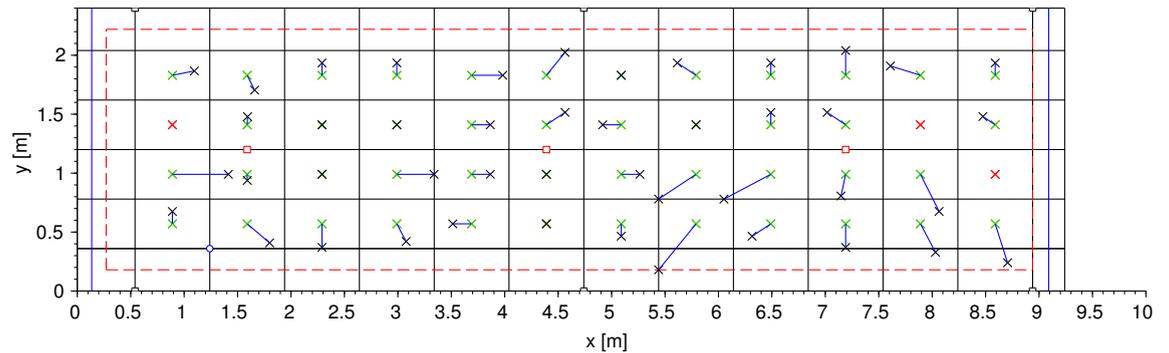


FIGURE 7.10 – Carte de localisations avec  $C_2$  et  $\mathcal{F}_5$ .

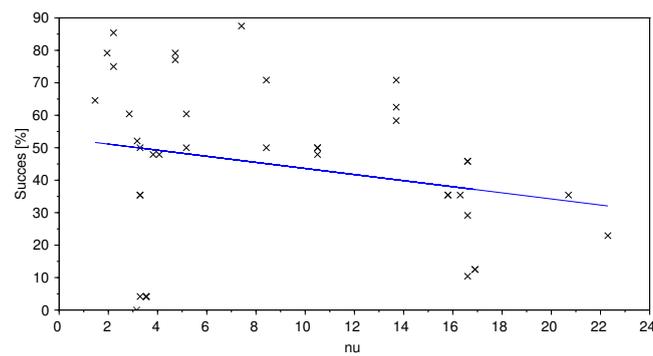


FIGURE 7.11 – Corrélation négative entre  $\nu$  et le succès de localisation à  $\epsilon$  près ( $r = -0.24$ ).

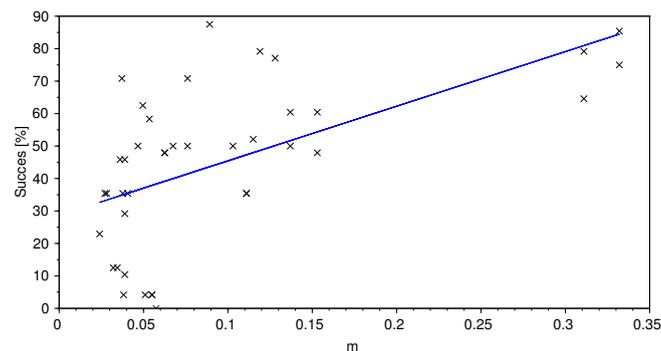


FIGURE 7.12 – Corrélation positive entre  $m$  et le succès de localisation à  $\epsilon$  près ( $r = +0.58$ ).

### 7.6.2 Reconstruction des forces d'impact

On se propose d'étudier les performances de reconstruction des forces d'impact appliquées avec la loi DS (voir section 5.1) et les paramètres donnés dans le Tableau 7.11.

Loi de forme d'impact Détection de l'instant d'impact Espace des paramètres	Demi-sinus (DS) Franchissement d'un seuil puis ajustement $\mu_{min} = -5\Delta t$ $\mu_{max} = +20\Delta t$ $\Delta\mu = \Delta t$ $T_{min} = 1\text{ms}$ $T_{max} = 8\text{ms}$ $\Delta T = 0.5\text{ms}$
Famille de modes Tolérance de colinéarité Facteur de dispersion	$\mathcal{F}_5$ $\theta_c = 25^\circ$ $\gamma = 2$
Durée de mesure Fréquence d'échantillonnage Point de mesure	$D = 10/f_1 = 0.755\text{s}$ $f_e = 5.12\text{kHz}$ $C_2$

TABLE 7.11 – Paramètres utilisés pour la reconstruction des forces appliqués avec une loi DS.  $\Delta t = 1/f_e$  représente la période d'échantillonnage.

Les performances de reconstruction obtenues sont moins bonnes que celles atteintes dans le Chapitre 6 avec la plaque métallique. On observe souvent que l'écart prédictions-mesures  $S$  (voir section 5.2.2) varie peu. Il en résulte que des valeurs de  $S$  très voisines de  $S_m = \min S$  sont parfois associées à des solutions très différentes. On représente sur la Figure 7.13 une famille de solutions  $\hat{\psi} = \psi(\hat{\alpha})$  définies par :

$$\left(\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{F}}, \hat{\alpha}\right) \in \left\{(\mathbf{Y}, \beta) \mid S(\mathbf{Y}, \beta) \leq (1+c)S_m\right\}$$

avec  $c = 2\%$ . On observe que la famille de solutions semble glisser vers l'allure d'un Dirac à mesure que le paramètre de durée d'impact diminue. Ce phénomène peut s'expliquer par les résultats de la section 7.6.1 : les impacts appliqués sont de durées suffisamment petites pour que la réponse vibratoire puisse convenablement s'approcher par une réponse à un Dirac. Cela était également le cas pour la plaque étudiée dans le Chapitre 6, mais dans une bien moindre mesure. En effet, la durée typique des impacts appliqués pour les deux structures est de 5ms, mais la bande de fréquences de la FMD utilisée pour la plaque s'étend sur [94Hz,547Hz], tandis que celle du panneau s'étend sur [11Hz,44Hz]. En conséquence, les

## CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE GRANDES DIMENSIONS

---

modes connus du panneau ne permettent pas de convenablement reconstruire le contenu fréquentiel de la force d'impact appliquée qui est de durée très brève. On obtient donc avec cette procédure qu'une famille de solutions admissibles, au sens où elles permettent de convenablement approcher la réponse vibratoire mesurée du panneau.

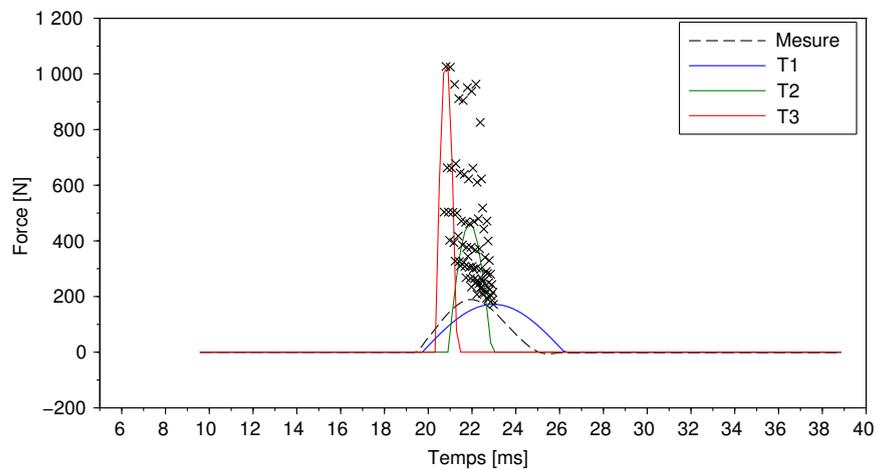


FIGURE 7.13 – Phénomène de glissement vers une allure de Dirac pour la reconstruction de l'impact appliqué en  $F = (4.39m \ 0.57m)$ . Croix noire : pic d'une solution admissible. Représentation de trois solutions admissibles avec  $T_3 \leq T_2 \leq T_1$ .

## 7.7 Utilisation d'un réseau de capteurs

L'approche développée dans cette thèse ne nécessite en théorie qu'un seul point de mesures vibratoires. Cela signifie que chaque capteur d'un réseau peut indépendamment identifier un impact appliqué sur une structure. On souhaite savoir s'il est possible de faire communiquer un réseau de capteurs afin d'améliorer simultanément les performances de localisation et la robustesse de la procédure. Il est en effet nécessaire d'envisager le cas où au moins un des capteurs installés présente un dysfonctionnement. Ce dernier ne doit pas pour autant faire échouer la procédure alors que d'autres capteurs du réseau parviennent à correctement localiser l'impact.

### 7.7.1 Définition d'une performance de localisation à partir d'un ensemble de points d'impact candidats

Chaque capteur identifie un ensemble de points plus ou moins proches du point d'impact. Lorsqu'on utilise un réseau de capteurs, la question se pose de savoir comment évaluer a posteriori la performance de localisation d'un capteur par rapport à un autre. Il existe des définitions précises de distances entre un ensemble de points et un point. Par exemple, on peut utiliser la distance usuelle entre un ensemble de points  $A$  et un point  $b$  par  $d(A, b) = \min_{a \in A} \|b - a\|$ . La Figure 7.14 montre que l'utilisation de cette distance est discutable pour évaluer une performance de localisation à partir d'un nuage de points très dispersés. En effet, quelques points de  $A$  sont très proches de  $F$ , mais les autres sont plus éloignées que tous ceux de l'ensemble de points  $B$ .

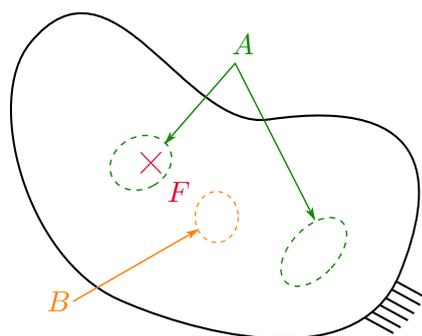


FIGURE 7.14 – Problème de définition d'une performance de localisation à partir d'un ensemble de points :  $P(A) \geq P(B)$  ou  $P(A) \leq P(B)$  ?

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

---

Comme tout choix paraît discutable, on se propose de rassembler des propriétés que l'on souhaite réaliser pour définir une performance de localisation à partir d'un ensemble de points d'impact candidats :

**Définition 7.7.1** (Performance de localisation). *Soit  $F$  le point d'impact,  $A$  un ensemble de points,  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) un point plus proche (resp. plus distant) de  $F$  que tout autre point de  $A$ . On appelle performance de localisation une application  $\mathcal{P} : A \mapsto \mathcal{P}(A) \in [0, 1]$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- i)  $A = \{F\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = 1$  (succès)
- ii)  $A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = 0$  (échec)
- iii)  $\mathcal{P}(A \cup \{P_1\}) \geq \mathcal{P}(A)$  (valorisation)
- iv)  $\mathcal{P}(A \cup \{P_2\}) \leq \mathcal{P}(A)$  (pénalisation)

**Exemple 7.7.1.** *Soit  $S$  l'ensemble des points de la structure. Les applications suivantes sont des performances de localisation :*

$$A \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{\|I-F\|}{\max_{M \in S} \|M-F\|} & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

où  $I$  est un point intérieur quelconque dans le diamètre de  $A$ , i.e. un barycentre pondéré des points de  $A$ .

**Exemple 7.7.2.** *Soit  $\epsilon > 0$  une exigence de localisation. Les applications suivantes sont des performances de localisation :*

$$A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \|I - F\| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $I$  est un point intérieur quelconque dans le diamètre de  $A$ .

Avec cette définition, on se convainc que les grandeurs importantes d'un ensemble de points d'impact candidats  $A$  sont son diamètre  $d$  ainsi que son excentricité  $e$  (voir Figure 7.15). Ces deux paramètres se mettent d'ailleurs en relation avec les exigences de précision et de robustesse discutées en introduction du Chapitre 4 : on souhaite que  $e$  et  $d$  soient aussi petits que possible pour chaque identification d'impact.

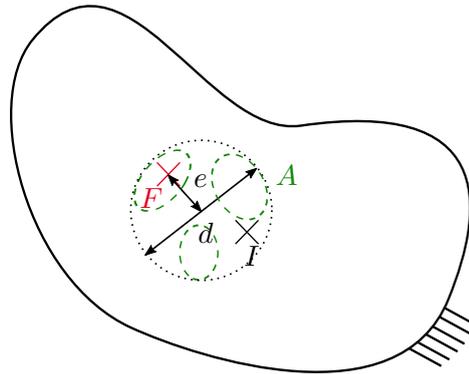


FIGURE 7.15 – Définition du diamètre  $d$  et de l'excentricité  $e$  d'un ensemble de points  $A$ , et représentation d'un point intérieur  $I$  dans le diamètre de  $A$ .

### 7.7.2 Définition d'une stratégie de dialogue

La première opération envisagée pour faire communiquer deux capteurs est l'intersection de leurs résultats. Avec la procédure de localisation développée, chaque capteur identifie un ensemble discret de points. Or, l'utilisation d'une intersection entre deux ensembles discrets de points<sup>3</sup> serait une opération trop sévère : deux points distincts très proches ont une intersection vide. On suppose donc que la structure étudiée est divisée en  $n$  cellules  $c_1, \dots, c_n$ . Notre objectif est de localiser la cellule  $c_F$  de la structure sur laquelle un impact est appliqué (voir Figure 7.16). Le choix est donc fait d'associer à chaque capteur  $C_i$  l'ensemble  $\mathcal{C}_i$  des  $n_i$  cellules qu'il a retrouvées :  $C_i \mapsto \mathcal{C}_i = \{c_1^{(i)}, \dots, c_{n_i}^{(i)}\}$ .

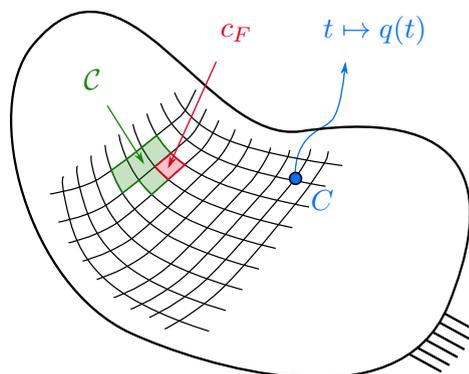


FIGURE 7.16 – Division d'une structure en cellules.

---

3. L'ensemble obtenu par intersection de deux ensembles discrets de points est défini par l'ensemble des points communs de ces deux ensembles.

On propose la définition suivante de stratégie de dialogue :

**Définition 7.7.2** (Stratégie de dialogue). *Soient  $q \geq 2$  capteurs  $C_1, \dots, C_q$  distribués sur une structure identifiant respectivement les ensembles de cellules  $C_1, \dots, C_q$ . On note  $E = \{C_1, \dots, C_q\}$  l'ensemble des résultats individuels de chaque capteur. On appelle stratégie de dialogue une application  $s : E \mapsto s(E) \subset E$ .*

**Remarque 7.7.1.** *On note  $(E, s)$  un réseau de capteurs muni d'une stratégie de dialogue.*

**Exemple 7.7.3.** *Une stratégie de dialogue triviale est par exemple  $s(C_1, \dots) = C_1$  qui choisit systématiquement les résultats du premier capteur du réseau.*

On se limite aux stratégies de dialogue qui sont des sélections de résultats parmi l'ensemble des résultats individuels de tous les capteurs. On pourrait bien sûr imaginer des stratégies fondées directement sur l'ensemble des mesures de chaque capteur du réseau. Cette restriction est motivée par l'utilisation du critère des moindres carrés pour estimer les participations modales des modes discriminants (voir section 5.2.1). Ce sont en effet les carrés des écarts prédictions-mesures qui interviennent dans la procédure. Les mesures d'un capteur défectueux, intégrés dans un critère d'écart prédiction-mesures portant sur toutes les mesures des capteurs, fausserait l'ensemble des résultats.

### 7.7.3 Problème d'indécidabilité

L'utilisation d'une stratégie de dialogue, telle que définie dans la section précédente, admet d'emblée une limitation : l'indécidabilité. Si l'on imagine la situation présentée sur la Figure 7.17, on se convainc qu'il n'existe pas de stratégie de dialogue permettant de systématiquement choisir l'ensemble  $C_1$  plutôt que l'ensemble  $C_2$ . Il faut en effet connaître  $F$  pour évaluer  $P(C_1)$  puis  $P(C_2)$ , pour choisir  $C_1$  plutôt que  $C_2$ .

L'utilisation d'un réseau de capteurs muni d'une stratégie de dialogue  $(E, s)$  ne permet donc pas systématiquement de réaliser la propriété suivante :

$$\mathbf{P} : P(s(E)) \geq \max_i P(C_i)$$

Autrement dit, il n'existe pas de stratégie de dialogue permettant de systématiquement améliorer les performances individuelles de chaque capteur d'un réseau. Avec cette ap-

proche, on conclut que le nombre de capteurs n'est pas corrélé à la performance de localisation.

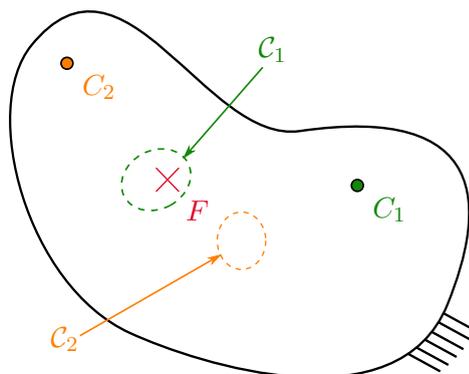


FIGURE 7.17 – Illustration du problème d'indécidabilité.

#### 7.7.4 Choix d'une stratégie de dialogue réduisant le diamètre de l'ensemble des candidats

Le problème d'indécidabilité nous conduit à renoncer à vouloir systématiquement réaliser toute propriété dépendant de  $F$ . Par exemple, l'exigence de précision, consistant à réduire l'excentricité  $e$  de l'ensemble des candidats, n'est pas non plus décidable puisque  $e$  dépend de  $F$  (voir Figure 7.15). En revanche, le diamètre  $d$  d'un ensemble de points ne dépend pas de  $F$ , et on peut facilement le réduire en retirant certains points. Il ne reste plus qu'à choisir les points à retirer. Le choix est fait d'associer à chaque cellule  $c$  de la structure (voir section 7.7.2) le nombre  $n(c)$  de fois qu'un capteur du réseau a retrouvé cette cellule, et à ne conserver que les cellules  $c_j$  telles que  $n(c_j) = \max_{i=1, \dots, n} n(c_i)$ . On ne conserve ainsi que les cellules qui ont été retrouvées le plus grand nombre de fois. En notant  $c_{j_1}, \dots, c_{j_k}$  les  $k$  cellules ainsi identifiées, la stratégie de dialogue  $s_d$  retenue est définie par :

$$s_d(E) = \{c_{j_1}, \dots, c_{j_k}\}$$

Il faut toutefois rester prudent sur les performances de localisation attendues avec cette stratégie de dialogue. Tout ce qu'on peut dire est que si la cellule retrouvée le plus grand nombre de fois est  $c_F$ , alors la stratégie de dialogue  $s_d$  réalise  $\mathbf{P}$  (voir section 7.7.3). Ce choix de stratégie de dialogue, comme un autre, reste contestable vis-à-vis de la performance de localisation attendue dans la mesure où l'on ne connaît pas le point  $F$ .

### 7.7.5 Prévention du risque de défaillance en utilisant un réseau de capteurs muni d'une stratégie de dialogue

On se propose de vérifier que la stratégie de dialogue proposée dans la section précédente permet de prévenir le risque de défaillance d'un capteur du réseau. On utilise dans un premier temps les deux meilleurs points de mesures  $C_2$  et  $C_4$ , ainsi que le moins bon point de mesure  $C_8$  (voir section 7.6.1). On convient qu'il faut utiliser au moins  $q \geq 3$  capteurs pour éviter la situation d'indécidabilité présentée sur la Figure 7.17. Le point de mesure  $C_8$  joue le rôle du capteur défaillant. La Figure 7.18 illustre la carte de localisations obtenue avec le réseau  $(C_2, C_4, C_8)$  muni de la stratégie de dialogue  $s_d$  définie dans la section précédente. On observe que 83% des impacts sont localisés à  $\epsilon$  près, et que 100% sont localisés à  $2\epsilon$  près. On vérifie bien que l'utilisation du réseau de capteurs muni de cette stratégie de dialogue permet d'ignorer la défaillance du point de mesure  $C_8$ .

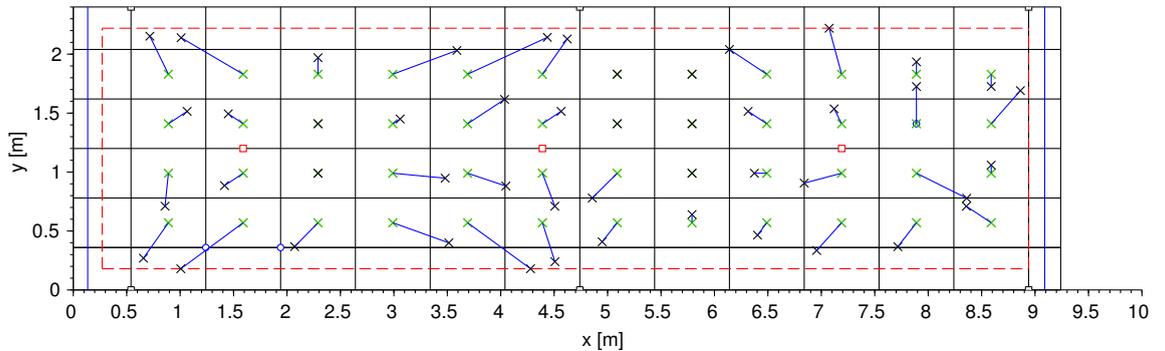


FIGURE 7.18 – Carte de localisations avec le réseau  $(C_2, C_4, C_8)$ , la famille de modes  $\mathcal{F}_2$ , et la stratégie de dialogue  $s_d$ .

On se propose finalement d'utiliser l'ensemble des capteurs positionnés sur la structure pour localiser les impacts. Le Tableau 7.12 donne les résultats de localisation obtenus suivant la famille de modes utilisée. On observe que l'utilisation du réseau de capteurs permet d'obtenir de bonnes performances quelle que soit la FMD globale retenue, alors même que les points de mesures  $C_5, C_6, C_8$  sont défaillants (voir Tableau 7.10). La Figure 7.19 représente la carte de localisations obtenue avec  $\mathcal{F}_5$ . Avec la stratégie de dialogue utilisée, il suffit en effet que la majorité des capteurs s'accorde sur des cellules proches du point d'impact pour que les performances de localisation soient satisfaisantes.

CHAPITRE 7. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE  
D'IDENTIFICATION D'IMPACTS SUR UNE STRUCTURE COMPOSITE DE  
GRANDES DIMENSIONS

FMD	Loc. (/48)	
	$\epsilon$	$2\epsilon$
$\mathcal{F}_1$	33	40
$\mathcal{F}_2$	35(73%)	46
$\mathcal{F}_3$	34	48(100%)
$\mathcal{F}_4$	35	47
$\mathcal{F}_5$	37(77%)	47

TABLE 7.12 – Performances de localisation avec le réseau complet.

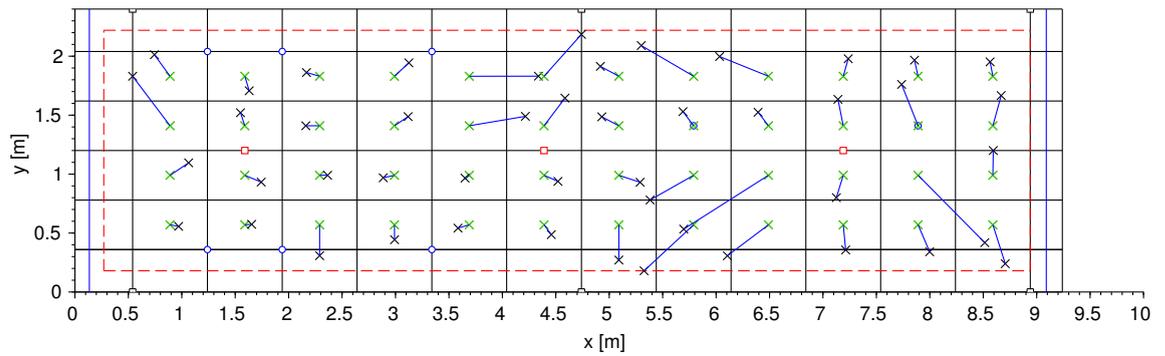


FIGURE 7.19 – Carte de localisations avec le réseau complet, la famille de modes  $\mathcal{F}_5$ , et la stratégie de dialogue  $s_d$ .

# Conclusion

Ce travail a mis en évidence qu'il est possible d'identifier un impact à partir de mesures vibratoire effectuées en un unique point d'une structure. L'approche proposée repose sur une hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants (FMD) permettant de couvrir la zone de la structure susceptible d'être impactée. La technique développée a été validée expérimentalement sur une structure composite complexe de grandes dimensions.

## Nouveautés

A l'inverse des techniques de triangulation, la méthode de localisation développée utilise non pas la région de la réponse dominée par la propagation d'ondes, mais celle dominée par les modes de vibration. Il est clair que cela donne un avantage pratique par rapport aux autres techniques. Cela nous permet d'une part d'utiliser moins de capteurs puisque les vibrations sont perceptibles en tout point de la structure. D'autre part, cela permet d'utiliser des capteurs moins coûteux puisque les fréquences que l'on souhaite détecter sont bien inférieures à celles mises en jeu dans la région de propagation des ondes. Il est cependant nécessaire que l'impact appliqué sur la structure soit d'énergie suffisante pour la faire vibrer, sans quoi la signature vibratoire du point d'impact se retrouve dans le bruit et ne peut être identifiée. Dans le cadre de l'application visée, à savoir l'identification d'un impact d'équipement aéroportuaire appliqué à un fuselage d'avion (métallique ou composite), on sait que ce dernier point n'est pas limitant puisque des campagnes expérimentales ont montré que ces impacts excitent les modes de vibration basse fréquence de l'avion.

Contrairement aux méthodes existantes d'identification des participations modales, on ne cherche pas à sélectionner les modes permettant de reconstruire au mieux les mesures

vibratoires. La seule exigence est de correctement capturer les contributions des modes de la FMD dans la réponse contenant l'information sur le point d'impact. On a d'ailleurs vérifié expérimentalement que l'on pouvait retenir un très petit nombre de modes dans l'analyse en comparaison du nombre de modes significativement excités par les impacts appliqués. Le plus petit nombre possible de modes à retenir pour former une FMD est relié à la dimension du paramétrage géométrique de la structure. Des méthodes ont été proposées pour exhiber une FMD à partir des modes de vibration connus. Lorsque les déformées s'expriment de façon analytique, on peut s'intéresser aux lignes d'iso-proportion déterminées par le point d'impact et rechercher si elles se coupent en un unique point. Cette propriété d'une FMD est d'ailleurs valable quelle que soit l'excitation appliquée, et pas seulement pour des forces d'impact. Lorsque les déformées ne peuvent être exprimées de façon analytique (structure à discrétiser), on peut s'intéresser aux cartes de robustesse angulaire associées à différentes combinaisons de modes. On sélectionne alors la famille de modes permettant de mieux couvrir la structure.

On a proposé des points de mesures vibratoires avantageux pour positionner un capteur que l'on a appelés points neutres de vibration maximale. L'étude des variations du conditionnement de la matrice à inverser dans la procédure des moindres carrés montre que ces points permettent d'améliorer la robustesse de la procédure. Un critère mathématique basé sur la connaissances des déformées, normalisées par rapport aux masses modales, a été proposé pour identifier ces points. Les résultats expérimentaux confirment que les points neutres conduisent globalement à de meilleures performances de localisation. On a également montré que l'utilisation d'un réseau de capteurs pouvant dialoguer permet d'améliorer la robustesse de la procédure. Ce problème devient en effet important dans la situation où un capteur est défectueux. En revanche, la stratégie de dialogue proposée ne permet pas systématiquement d'améliorer les performances individuelles des capteurs du réseau. Contrairement à de nombreux travaux, on ne conclut donc pas avec cette approche que le nombre de capteurs est corrélé aux performances de localisation.

### **Améliorations possibles**

Plusieurs améliorations de la technique développée peuvent être envisagées, notamment en ce qui concerne les performances numériques. Il semble important d'améliorer la phase exploratoire de l'espace des paramètres dans la procédure des moindres carrés semi-linéaire. C'est en effet la partie la plus coûteuse en temps de calcul dès lors que l'on souhaite capturer un nombre important de paramètres de l'impact. Il serait intéressant d'essayer plusieurs stratégies d'exploration basées sur des algorithmes d'optimisation globale de type génétique ou essaim de particules.

Des considérations sur l'information contenue dans la réponse libre de la structure nous ont conduits à n'estimer que certains paramètres de la forme d'impact, comme sa durée ou la dissymétrie de son pic principal. Cela présente l'avantage de fortement réduire la dimension du problème de reconstruction. Cependant, l'inconvénient est que l'on ne peut pas finement reconstruire les variations de la force d'impact. On a même observé que la reconstruction de la force pouvait glisser vers l'allure d'un Dirac si la bande de fréquence de la FMD ne couvre pas suffisamment le contenu vibratoire de la force d'impact. Or, une connaissance plus précise de l'évolution temporelle de la force renseigne davantage sur l'évènement d'impact. Cela dit, on peut imaginer combiner la partie localisation de l'approche développée dans ce travail avec une technique de reconstruction plus performante, si bien sûr les temps de calcul autorisés le permettent.

Dans le cas de l'utilisation d'un réseau de capteurs, un travail supplémentaire est à fournir pour définir une stratégie de dialogue conduisant le plus souvent possible à améliorer les performances de localisation individuelles de chaque capteur. Une idée serait d'utiliser un critère portant sur la qualité de reconstruction du contenu vibratoire mesuré à partir des prédictions de chaque capteur. On pourrait d'emblée rejeter les résultats de localisation des capteurs conduisant à de grands écarts sur les participations modales. Au préalable, il faudrait étudier l'influence d'une erreur sur chaque participation modale vis-à-vis de la localisation du point d'impact.

### Perspectives

Au-delà des améliorations techniques que l'on pourrait effectuer, cette étude ne permet pas de résoudre toutes les questions posées sur l'identification d'un impact à partir de mesures de capteurs.

L'hypothèse la plus difficile à réaliser dans un contexte opérationnel est certainement la connaissance des propriétés modales actuelles des modes discriminants. En effet, il est clair que les propriétés modales d'une structure aussi complexe qu'un avion sont sujettes à varier suivant la pression des pneus, le centrage de l'avion, la masse de carburant etc. Pour une réalisation industrielle de cette méthode, il serait pertinent de répondre à la question suivante :

Peut-on calibrer automatiquement les propriétés modales d'un avion en opération ?

L'énergie de l'impact est une grandeur importante pour évaluer sa sévérité qui semble faire consensus dans de nombreux travaux. Elle se calcule naturellement à partir de l'énergie cinétique injectée par l'impacteur au moment de percuter la structure. L'impacteur et ses propriétés sont toutefois inconnues et semblent inaccessibles à partir des mesures vibratoires. Certains auteurs proposent d'évaluer cette énergie par le travail de la force d'impact qui représente l'énergie injectée dans la structure par l'impacteur. L'approche développée dans ce travail permet bien d'évaluer la force d'impact, mais pas précisément le déplacement de la structure au point d'impact. Un travail supplémentaire est à fournir dans cette direction, par exemple en établissant des lois empiriques. La réponse à la question suivante permettrait donc de compléter l'approche développée pour évaluer la sévérité d'un impact :

Comment évaluer l'énergie d'un impact à partir de mesures vibratoires ?

Fondamentalement, il semble possible de s'affranchir de l'estimation de l'instant d'impact pour localiser un impact. Le contenu vibratoire, i.e. les différentes harmoniques présentes dans les signaux mesurés, sont identiques pour un même impact appliqué à des instants différents. La formulation en termes de contenu spectral est cependant non-linéaire par

## CONCLUSION

---

rapport au vecteur de participation modale. Cela empêche notamment d'identifier simplement un Dirac à l'aide de la méthode des moindres carrés linéaire utilisée. Cependant, l'ajout de l'instant d'impact dans la loi paramétrée à identifier conduit à des minima locaux, ainsi qu'à des temps de calcul plus importants. Et cela d'autant plus que la structure est de grandes dimensions puisque les capteurs ont plus de raison d'être fortement éloignés du point d'impact. Le problème suivant est donc ouvert et reste à étudier :

Peut-on s'affranchir de l'estimation de l'instant d'impact pour localiser un impact ?

Même si les notions développées dans ce travail ont pour application l'identification d'un impact ponctuel, on peut se demander si elles peuvent également servir dans d'autres contextes. Il semble par exemple possible de directement utiliser l'approche développée pour localiser une sinusoïde d'intensité et de fréquence inconnue. Le problème suivant est donc à étudier pour élargir le domaine d'application :

Peut-on étendre l'approche mono-capteur développée à la localisation d'autres types d'excitation, en particulier des excitations multiples ?

## CONCLUSION

---

# Bibliographie

- S. Ahmari and M. Yang. Impact location and load identification through inverse analysis with bounded uncertain measurements. *Smart Materials and Structures*, 22 :085024, 2013.
- F. Akhavan, S.E. Watkins, and K. Chandrashekhara. Prediction of impact contact forces of composite plates using fiber optic sensors and neural networks. *2nd International Conference on Structural Integrity*, 7 :195–205, 2000.
- G. Allaire and M. Kaber. *Algèbre linéaire numérique : cours et exercices*. Editions Ellipses, 2002.
- S. Andrieux. *Recalage, identification, suivi en service de structures*. Presse des Ponts, 2016.
- M. Aucejo and O. De Smet. Bayesian source identification using local priors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66-67 :120–136, 2016.
- R. Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées : Application aux signaux de musique*. PhD thesis, ENST, 2005.
- P. Borne and F. Rotella. *Théorie et pratique du calcul matriciel*. Editions Technip, 2000.
- Z. Boukria, P. Perrotin, A. Bennani, and A. Limam. Identification et localisation des impacts par analyse inverse - Poutre et plaque -. In *19ème Congrès Français de Mécanique*, 2009.
- J.C. Briggs and M-K. Tse. Impact force identification using extracted modal parameters and pattern matching. *International Journal of Impact Engineering*, 12 :361–372, 1991.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- S. Wolpert C. Gordon, D. L. Webb. One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27 :134–138, 1992.
- Z. Chen and T. Chan. A truncated generalized singular value decomposition algorithm for moving force identification with ill-posed problems. *Journal of Sound and Vibration*, 401 :297–310, 2017.
- H.G. Choi, A.N. Thite, and D.J. Thompson. Comparison of methods for parameter selection in Tikhonov regularization with application to inverse force determination. *Journal of Sound and Vibration*, 304 :894–917, 2007.
- G. Demoment, J. Idier, J-F. Giovanneli, and A. Mohammad-Djafari. *Problèmes inverses en traitement du signal et de l'image*. Techniques de l'ingénieur, 2002.
- J.F. Doyle. *Wave propagation in structures*. Springer, New York, NY, 1989.
- R. Eberhart, Y. Shi, and J. Kennedy. *Swarm intelligence*. Morgan Kaufmann, 2001.
- A. El-Bakari, A. Khamlichi, E. Jacquelin, and R. Dkiouak. Assessing impact force localization by using a particle swarm optimization algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :1554–1561, 2014.
- J. Frieden, J. Cugnoni, J. Botsis, and T. Gmür. Low energy impact damage monitoring of composites using dynamic strain signals from FBG sensors – Part I : Impact detection and localization. *Composite Structures*, 94 :438–445, 2012.
- M. Ghajari, Z. Sharif-Khodaei, M.H. Aliabadi, and A. Apicella. Identification of impact force for smart composite stiffened panels. *Smart Materials and Structures*, 22 :085014, 2013.
- T. Gmür. *Dynamique des Structures, Analyse modale Numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2012.
- G.H. Golub, M. Heath, and Grace Wahba. Generalized Cross-Validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21 :215–223, 1979.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- F.E. Gunawan. Impact force reconstruction using the regularized Wiener filter method. *Inverse problems in science and engineering*, 24 :1107–1132, 2015.
- F.E. Gunawan and H. Homma. Efficient iterative solution for large elasto-dynamic inverse problems. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 47 :130–137, 2004.
- P.C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 34 :561–580, 1992.
- P.C. Hansen. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*. SIAM, 1998.
- P.C. Hansen. Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices. *Numerical Algorithms*, 29 :323–378, 2002.
- P.E. Hollandsworth and H.R. Busby. Impact force identification using the general inverse technique. *International Journal of Impact Engineering*, 8 :315–322, 1989.
- H. Inoue, K. Kishimoto, T. Shibuya, and T. Koizumi. Estimation of impact load by inverse analysis. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 35 :420–427, 1992.
- H. Inoue, J. Harrigan, and S. Reid. Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force. *Applied Mechanics Reviews, American Society of Mechanical Engineers*, 54 :503–524, 2001.
- E. Jacquelin, A. Bennani, and P. Hamelin. Force reconstruction : analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :81–107, 2003.
- G. Johann. Visual representation of a singular value decomposition (SVD) of the 2-dimensional real shearing, August 2010. URL <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Singular-Value-Decomposition.svg>.
- K. Khalori, L. Ye, S. Mustapha, J. Li, and B. Li. Reconstruction and analysis of impact forces on a steel-beam-reinforced concrete deck. *Experimental Mechanics*, 56 :1547–1558, 2016.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- C. Lalanne. *Vibrations et chocs mécaniques - Tome 2 : Chocs mécaniques*. Hermes Science Publications, 1999.
- Q. Leclère, C. Pezerat, B. Laulagnet, and L. Polac. Indirect measurement of main bearing loads in an operating diesel engine. *Journal of Sound and Vibration*, 286 :341–361, 2004.
- A.W. Leissa. *Vibration of plates*. NASA SP-160, 1969.
- C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, 1988.
- Q. Li and Q. Lu. Impact localization and identification under a constrained optimization scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 366 :133–148, 2016.
- LMS International. *The LMS Test.Lab Modal Analysis manual - Rev 12A*. 2012.
- D.W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11 :431–441, 1963.
- M.T. Martin and J.F. Doyle. Impact force identification from wave propagation responses. *International Journal of Impact Engineering*, 18 :65–77, 1996.
- E. Morteau-Rivet. Maximum impact energy for impact test on A350XWB S15 crown panel. Technical Report, Airbus Internal, October 24th, 2018.
- nLab authors. Topological invariance of dimension, December 2018. URL <http://ncatlab.org/nlab/show/topological%20invariance%20of%20dimension>.
- J. Park, S. Ha, and F-K. Chang. Monitoring impact events using a system-identification method. *AIAA Journal*, 47 :2011–2021, 2009.
- J-C. Pascal. *Vibrations et acoustique 2*. Cours de l’Ecole Nationale Supérieure d’Ingénieurs du Mans, 2008.
- M. Pastor, M. Binda, and T. Harcarik. Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 48 :543–548, 2012.
- B. Qiao, X. Chen, X. Xue, X. Luo, and R. Liu. The application of cubic B-spline collocation method in impact force identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64 : 413–427, 2015.

- O. Robin, J-D. Chazot, R. Boulandet, M. Michau, A. Berry, and N. Atalla. A plane and thin panel for representative simply supported boundary conditions for laboratory vibroacoustic tests. *Acta Acustica United with Acustica*, 102 :170–182, 2016.
- M. Ruiz, L.E. Mujica, X. Berjaga, and J. Rodellar. Partial least square/projection to latent structures (PLS) regression to estimate impact localization in structures. *Smart Materials and Structures*, 22 :025028, 2013.
- U. Mitra S. Choudhary. Fundamental limits of blind deconvolution part I : Ambiguity kernel. In *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, 2014.
- G. Sarego, L. Cappellini, M. Zaccariotto, and U. Galvanetto. Impact force reconstruction in composite panels. *2nd International Conference on Structural Integrity*, 5 :107–114, 2017.
- P. Spiteri. *Algorithmes numériques pour la résolution de grands systèmes*. Techniques de l'ingénieur, 2002.
- Z. Su and L. Ye. *Identification of damage using Lamb waves. From fundamentals to applications*. Springer-Verlag, London, 2009.
- A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems*. Winston-Wiley, 1977.
- D.T. Tran. *Reconstruction de sollicitations dynamiques par méthodes inverses*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.
- L. Vladislav, R. Zemcik, T. Kroupa, and J. Bartosek. Reconstruction of impact force on curved panel using piezoelectric sensors. *Procedia Engineering*, 48 :367–374, 2012.
- B-T. Wang. Prediction of impact and harmonic forces acting on arbitrary structures : theoretical formulation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16 :935–953, 2002.
- B-T. Wang and C-H. Chiu. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17 :683–704, 2003.

- G. Yan and L. Zhou. Impact load identification of composite structure using genetic algorithms. *Journal of sound and vibration*, 319 :869–884, 2009.
- E. Zhang, J. Antoni, and P. Feissel. Bayesian force reconstruction with an uncertain model. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :798–814, 2012.
- G. Zhao, H. Hu, S. Li, L. Liu, and K. Li. Localization of impact on composite plates based on integrated wavelet transform and hybrid minimization algorithm. *Composite Structures*, 176 :234–243, 2017.
- Y. Zhong, J. Xiang, H. Gao, and Y. Zhou. Impact energy level assessment of composite structures using MUSIC-ANN approach. *Structural Control and Health Monitoring*, 23 : 825–837, 2016.

# Publications, brevet

Ce travail de thèse a conduit à quatre publications :

- Dimitri Goutaudier, Didier Gendre and Véronique Kehr-Candille, *Single-sensor approach for impact localization and force reconstruction by using discriminating vibration modes*, Mechanical Systems and Signal Processing, October 2018 (en révision).
- Dimitri Goutaudier, Didier Gendre, Véronique Kehr-Candille and Roger Ohayon, *Impulse identification technique by estimating specific modal participations from vibration measurements*, Journal of Sound and Vibration, March 2019 (soumis).
- Dimitri Goutaudier, Didier Gendre and Véronique Kehr-Candille, *Real-time impact identification technique using modal superposition*, Proceedings of 9th European Workshop on Structural Health Monitoring, Manchester (UK), July 10-13, 2018.
- Dimitri Goutaudier and Didier Gendre, *Real-time impact identification on an A350 crown panel by using acceleration measurements*, Proceedings of 12th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford (USA), September 10-12, 2019 (en préparation).

Un brevet a également été déposé à l'Institut national de la propriété industrielle :

- Dimitri Goutaudier et Didier Gendre, *Aéronef équipé d'un système d'estimation des paramètres d'un impact*, Brevet déposé à l'INPI le 02/07/2018.



# Annexes



## Annexe A

# Rappels mathématiques

L'objectif de cette annexe est de présenter différentes notions d'algèbre linéaire utiles pour la résolution d'un problème inverse linéaire. Ces rappels sont en grande partie tirés de [Allaire and Kaber 2002] et [Borne and Rotella 2000].

### Conditionnement d'une matrice inversible

Le conditionnement d'une matrice  $\mathbf{A}$  inversible de taille  $n$ , relativement à une norme subordonnée  $\|\cdot\|$ , est défini par :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (\text{A.1})$$

Il vérifie toujours  $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ . En effet, en notant  $\mathbf{I}$  la matrice identité de taille  $n$ , on a par propriété d'une norme matricielle  $1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \kappa(\mathbf{A})$ . Le conditionnement d'une matrice donne une indication sur le potentiel d'amplification des erreurs lors de la résolution d'un système matriciel linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , avec  $\mathbf{A}$  inversible et  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ . On montre dans [Allaire and Kaber 2002] qu'une perturbation du second membre  $\Delta\mathbf{Y}$  conduit à la majoration suivante de l'erreur d'estimation  $\Delta\mathbf{X}$  :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} \quad (\text{A.2})$$

On montre également qu'une erreur sur la matrice  $\Delta\mathbf{A}$  conduit à la majoration :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (\text{A.3})$$

Enfin, pour des erreurs commises à la fois sur le second membre et la matrice, on a :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{A}\|} \left( \frac{\|\Delta \mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right) \quad (\text{A.4})$$

Le conditionnement d'une matrice inversible est donc une grandeur d'intérêt pour analyser la stabilité de la résolution d'un système matriciel linéaire par inversion directe.

## Décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire

La SVD (Singular Value Decomposition) d'une matrice  $\mathbf{A}$  de taille  $n \times m$  consiste à factoriser  $\mathbf{A}$  sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices orthogonales, de tailles respectives  $n \times n$  et  $m \times m$ , et  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice rectangulaire diagonale<sup>1</sup> de taille  $n \times m$ . On suppose dans la suite que  $n \geq m$ , le cas  $n < m$  se traite en considérant  $\mathbf{A}^T$ . Les coefficients  $\sigma_i$  de  $\mathbf{\Sigma}$ , habituellement rangés par ordre décroissant  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$ , sont des réels positifs ou nuls appelés valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ . Les valeurs singulières d'une matrice sont uniques mais pas les matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  qui dépendent d'un choix de bases. Le nombre de valeurs singulières non nulles donne notamment le rang de  $\mathbf{A}$ . La SVD montre que toute matrice peut se représenter par une matrice diagonale, moyennant deux changements de base : un au départ et un à l'arrivée. En effet, soient  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soit  $u$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . On note  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ , et  $\mathbf{A}$  la matrice représentative de  $u$  dans ces bases. D'après la SVD, on a  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ . Soit  $x \in E$  et  $y = u(x) \in F$ . On note  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  les vecteurs formés des coordonnées de  $x$  et  $y$  dans les bases respectives  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . On a alors  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\mathbf{X}$ . On note  $\mathcal{B}'_E$  la base de  $E$  formée des vecteurs représentés dans  $\mathcal{B}_E$  par les colonnes de  $\mathbf{V}$ , et  $\mathcal{B}'_F$  la base de  $F$  formée par les vecteurs représentés dans  $\mathcal{B}_F$  par les colonnes de  $\mathbf{U}$ . On fait le changement de base au départ  $\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E$  et celui à l'arrivée  $\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F$ . En notant  $\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{Y}'$  les vecteurs formés des coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}'_E$  et  $\mathcal{B}'_F$ , on a  $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{Y}'$ . On a alors

1. Seuls les coefficients  $(i, i)$  sont éventuellement non nuls, avec  $i$  allant de 1 à  $\min(n, m)$ .

$\mathbf{Y}' = \Sigma \mathbf{X}'$ , ce qui montre que les coordonnées de  $\mathbf{Y}'$  s'obtiennent par simple multiplication de celles de  $\mathbf{X}'$ .

Cela compris, la SVD montre qu'une matrice inversible transforme la sphère unité en une ellipsoïde [Allaire and Kaber 2002]. On représente sur la Figure A.1 l'action d'un automorphisme de  $\mathbf{R}^2$  sur le disque unité. Cela donne une interprétation géométrique du conditionnement en norme 2 d'une matrice inversible : c'est le rapport entre les longueurs du plus grand et du plus petit demi-axe de l'ellipsoïde obtenue par transformation de la sphère unité. Pour une matrice inversible de taille  $n$ , on a donc :

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (\text{A.6})$$

Le conditionnement en norme 2 d'une matrice inversible est d'ailleurs généralement calculé numériquement par les logiciels en faisant une SVD de la matrice puis en utilisant la relation (A.6).

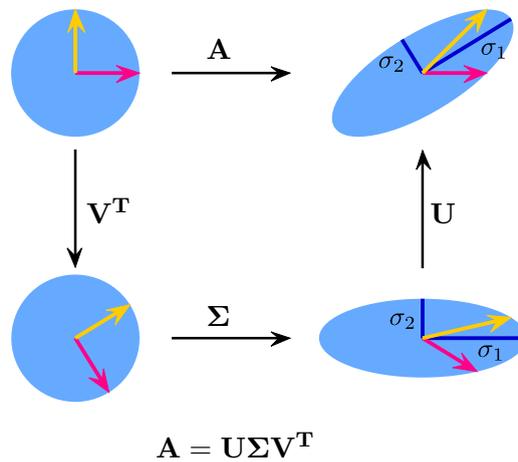


FIGURE A.1 – Action d'un automorphisme de  $\mathbf{R}^2$  sur le disque unité. Image de [Johann 2010].

## Résolution d'un système matriciel linéaire au sens des moindres carrés

On considère une matrice  $\mathbf{A}$  de taille  $n \times m$  de rang  $r$ , avec  $n \geq m$ , et le système matriciel  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , avec  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^m$  et  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ . On recherche les solutions  $\hat{\mathbf{X}}$  qui minimisent la norme euclidienne du résidu :

$$\hat{\mathbf{X}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X}} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2 \quad (\text{A.7})$$

Toute solution vérifiant (A.7) est appelée solution du système linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  au sens des moindres carrés. Cette situation se présente notamment lorsqu'on veut identifier un modèle linéaire de  $m$  paramètres à partir de  $n$  réalisations observées. Du fait des erreurs de modélisation du phénomène observé et du bruit de mesure inévitable en pratique, il est possible que  $\mathbf{Y} \notin \operatorname{Im}(\mathbf{A})$ , et par conséquent que le système linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  n'admette pas de solution. Le choix est alors souvent fait de rechercher les solutions vérifiant (A.7).

D'après la section précédente,  $\mathbf{A}$  se factorise sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ . On note  $\mathbf{X}' = \mathbf{V}^T\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}' = \mathbf{U}^T\mathbf{Y}$ ,  $x'_i$  et  $y'_i$  les composantes respectives de  $\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{Y}'$ . On a alors :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 = \|\mathbf{\Sigma}\mathbf{X}' - \mathbf{Y}'\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i x'_i - y'_i)^2 + \sum_{i=r+1}^n (y'_i)^2$$

Les solutions  $\hat{\mathbf{X}}$  sont donc données par  $\hat{x}'_i = y'_i/\sigma_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , et  $\hat{x}'_i$  quelconque pour  $i = r+1, \dots, m$ . Sans hypothèse supplémentaire sur  $\mathbf{A}$ , il existe donc une infinité de solutions au sens des moindres carrés.

Si  $\mathbf{A}$  est de rang plein en colonnes on a  $r = m$  et la solution au sens des moindres carrés est unique. On note  $\mathbf{\Sigma}^\dagger$  la matrice rectangulaire de taille  $m \times n$  de diagonale  $(1/\sigma_i)_{1 \leq i \leq m}$  et de coefficients hors diagonaux nuls. L'unique solution au sens des moindres carrés est donnée par  $\hat{\mathbf{X}}' = \mathbf{\Sigma}^\dagger \mathbf{Y}'$ , soit  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^\dagger \mathbf{U}^T \mathbf{Y}$ . On note  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^\dagger \mathbf{U}^T$  qu'on appelle pseudo-inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  pour la norme euclidienne. On a alors plus simplement  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{Y}$ . Un simple calcul montre en fait que  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ .

Dans le cas contraire, on verra qu'il est raisonnable de s'intéresser à l'unique solution de norme minimale donnée par  $\hat{x}'_i = y'_i/\sigma_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , et  $\hat{x}'_i = 0$  pour  $i = r+1, \dots, m$ . On note  $\mathbf{\Sigma}^\dagger$  la matrice rectangulaire de taille  $m \times n$  définie par  $\Sigma_{ii}^\dagger = 1/\sigma_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  et nulle partout ailleurs. L'unique solution au sens des moindres carrés de norme minimale

est alors donnée par :

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\Sigma^\dagger\mathbf{U}^T\mathbf{Y}$$

En notant  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\Sigma^\dagger\mathbf{U}^T$ , on a toujours  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{Y}$ . La matrice  $\mathbf{A}^\dagger$  est toujours appelée pseudo-inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  pour la norme euclidienne. Une présentation détaillée des propriétés des pseudo-inverses est faite dans [Borne and Rotella 2000].

D'un point de vue géométrique,  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{Y}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A})$  pour le produit scalaire euclidien (voir Figure A.2). En effet, en notant  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^n$ , on a pour tout  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$  :

$$(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}|\mathbf{A}\mathbf{X}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{A}\mathbf{X}) = ((\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)\mathbf{Y}|\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)\mathbf{Y}$$

En utilisant la SVD de la matrice  $\mathbf{A}$  et la définition de  $\mathbf{A}^\dagger$  on montre que  $\mathbf{A}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger) = \mathbf{0}$ . On en déduit que  $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$  est orthogonal à tout élément de  $\text{Im}(\mathbf{A})$ , autrement dit que  $\hat{\mathbf{Y}}$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{Y}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A})$ .

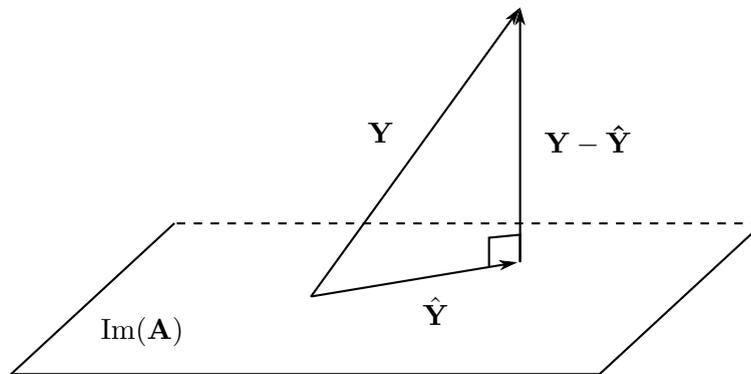


FIGURE A.2 – Illustration de la projection orthogonale de  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n$ .



## Annexe B

# Familles de modes discriminants pour différentes configurations de poutres et de plaques

L'objectif de cette annexe est de donner des FMD pour différentes configurations de poutres et de plaques. Pour les poutres nous utilisons la méthode graphique décrite en section 3.4.1 et pour les plaques nous utilisons la méthode numérique décrite en section 3.4.2.

### Poutre homogène de section rectangulaire considérée avec différentes conditions aux limites

On considère une poutre homogène de section rectangulaire et de longueur unitaire. D'après [Pascal 2008] les déformées modales en flexion sont de la forme :

$$\phi_n(x) = C_{1n} \cosh(\beta_n x) + C_{2n} \cos(\beta_n x) + S_{1n} \sinh(\beta_n x) + S_{2n} \sin(\beta_n x) \quad (\text{B.1})$$

où les coefficients  $\beta_n, C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n}$  dépendent des conditions aux limites de la poutre. Les valeurs de ces coefficients sont données sur la Figure B.1 pour différents types de conditions aux limites aux extrémités de la poutre.

ANNEXE B. FAMILLES DE MODES DISCRIMINANTS POUR DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE POUTRES ET DE PLAQUES

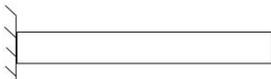
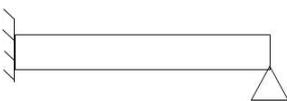
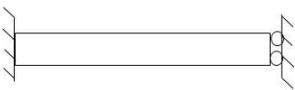
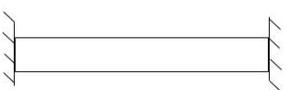
	$\phi_n(x)$	$\beta_n$	$\sigma_n$
 Encastrée-libre	$\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)$ $-\sigma_n(\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))$	1,875 4,694 7,855 11,00 14,14 $\frac{(2n-1)\pi}{2}$ pour $n > 5$	0,7341 1,019 0,992 1 pour $n > 3$
 Encastrée-supportée	$\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)$ $-\sigma_n(\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))$	3,927 7,069 10,21 13,35 16,49 $\frac{(4n+1)\pi}{4}$ pour $n > 5$	1,001 1 pour $n > 1$
 Encastrée-glissante	$\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)$ $-\sigma_n(\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))$	2,365 5,498 8,639 11,78 14,92 $\frac{(4n-1)\pi}{4}$ pour $n > 5$	0,983 1 pour $n > 1$
 Encastrée-encastrée	$\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)$ $-\sigma_n(\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))$	4,730 7,853 11,00 14,14 17,28 $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ pour $n > 5$	0,983 1 pour $n > 1$
 Supportée-supportée	$\sin(\beta_n x)$	$n\pi$	

FIGURE B.1 – Déformées modales des différentes configurations de poutres (d'après [Pascal 2008]).

Pour toutes ces configurations les deux premiers modes de flexion forment une FMD. Nous représentons sur les Figures B.2 B.3 B.4 B.5 les déformées modales des quatre premières configurations. Nous représentons également leurs fonctions de proportions  $\lambda = \phi_2/\phi_1$  définies sur  $]0, 1[$  qui sont clairement continues injectives. Les résultats de la cinquième configuration (poutre supportée-supportée) sont présentés en section 3.4.1.

ANNEXE B. FAMILLES DE MODES DISCRIMINANTS POUR DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE POUTRES ET DE PLAQUES

---

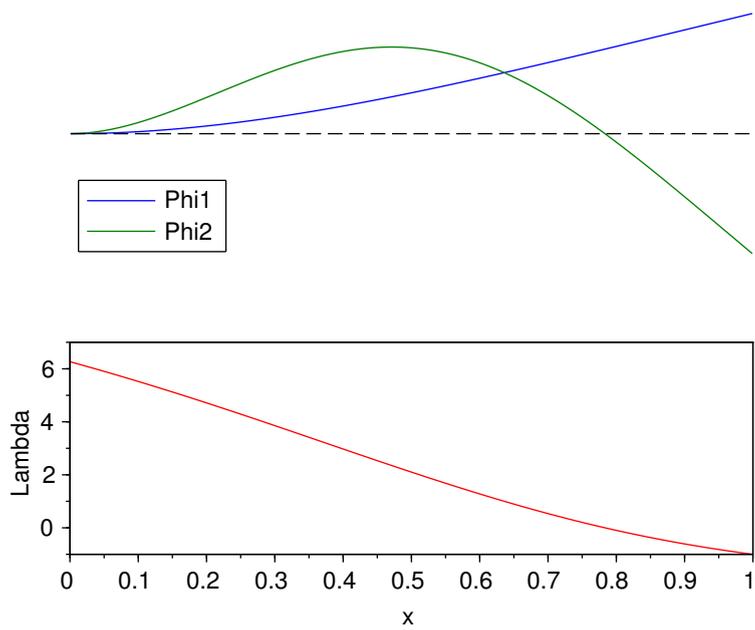


FIGURE B.2 – Poutre encastree-libre.

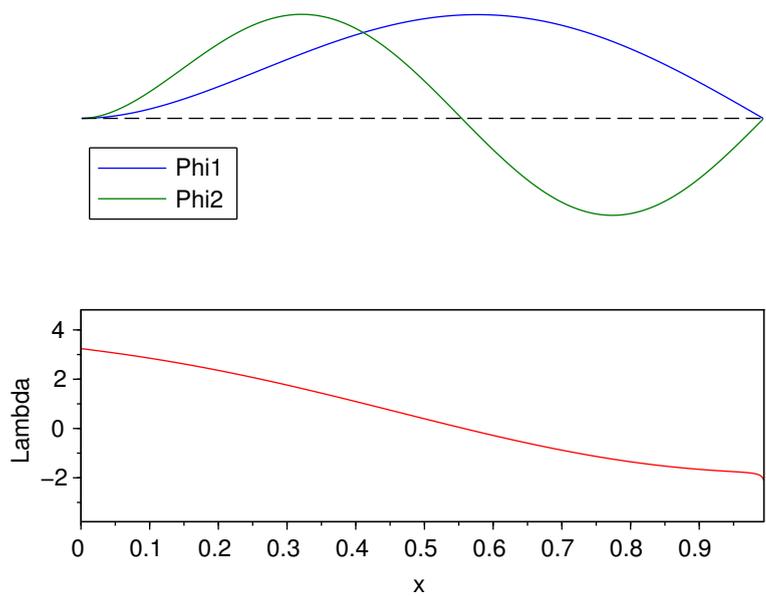


FIGURE B.3 – Poutre encastree-supportee.

ANNEXE B. FAMILLES DE MODES DISCRIMINANTS POUR DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE POUTRES ET DE PLAQUES

---

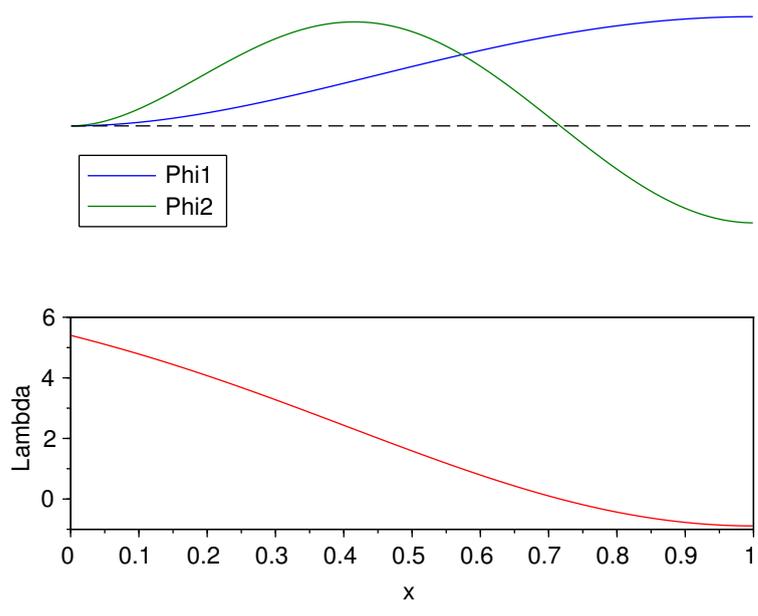


FIGURE B.4 – Poutre encastrée-glissante.

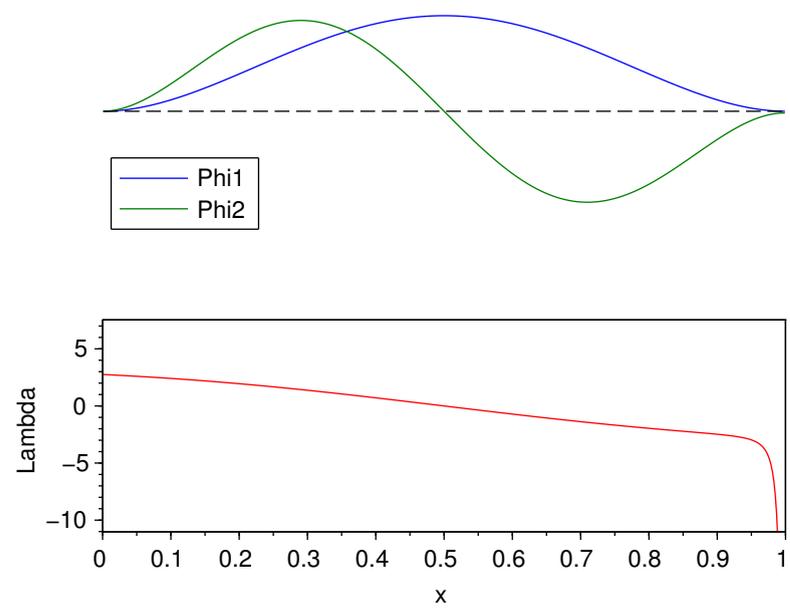


FIGURE B.5 – Poutre encastrée-encastrée.

## Plaque rectangulaire homogène considérée avec différentes conditions aux limites

On considère une plaque homogène rectangulaire dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont données dans le Tableau B.1. Un modèle éléments finis (MEF) est réalisé avec Nastran 2014 pour calculer les six premières déformées modales normées par rapport aux masses modales dans différentes configurations. Le MEF consiste en un découpage de  $8 \times 8$  éléments CQUAD8 possédant des noeuds au milieu de chaque arête (voir Figure B.6). On considère les conditions aux limites suivantes :

**E1** : Encastrement du bord 1,

**E1-S3** : Encastrement du bord 1 et bord 3 supporté,

**E1-E3** : Encastrement des bords 1 et 3,

**S** : Supportée sur tous les bords,

**CS** : Coins supportés,

**TA** : Appuyée sur trois points.

Excepté pour la configuration TA, on identifie pour chaque configuration une FMD globale en utilisant la méthode décrite dans la section 3.4.2. Pour la configuration TA, on donne la FMD partielle constituée de trois modes couvrant le mieux la plaque. Pour chaque configuration, on donne les points neutres de vibration maximale associés (voir section 5.3.3) ainsi que la carte de robustesse angulaire pour  $\epsilon = (a_c^2 + b_c^2)^{1/2}/2$  (voir section 3.4.2). Les résultats des configurations CS et S sont présentés plus en détails dans les sections respectives 3.4.2 et 6.2. On constate que les FMD obtenues correspondent aux modes 1D discriminants associés aux configurations similaires de poutre avec l'ajout d'un mode dans la direction transverse.

ANNEXE B. FAMILLES DE MODES DISCRIMINANTS POUR DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE POUTRES ET DE PLAQUES

Dimensions	$a = 36 \text{ cm}, b = 42 \text{ cm}, h = 3 \text{ mm}$
Masse volumique	$2800 \text{ kg.m}^{-3}$
Module de Young	$72.5 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$0.33$

TABLE B.1 – Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque étudiée.

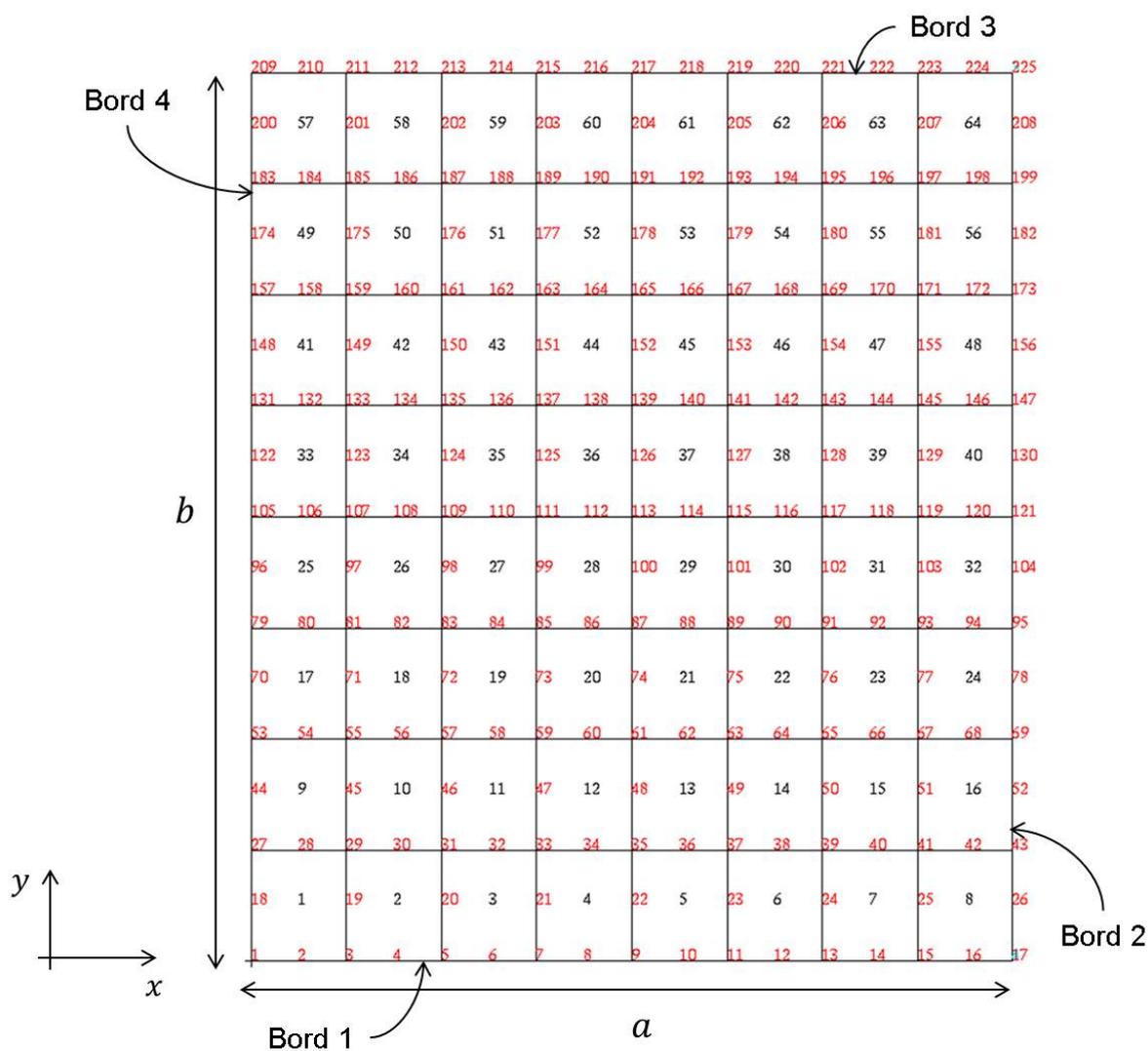


FIGURE B.6 – Modèle éléments finis de la plaque utilisé pour calculer les déformées modales dans les différentes configurations.

Plaque encastree sur le bord 1

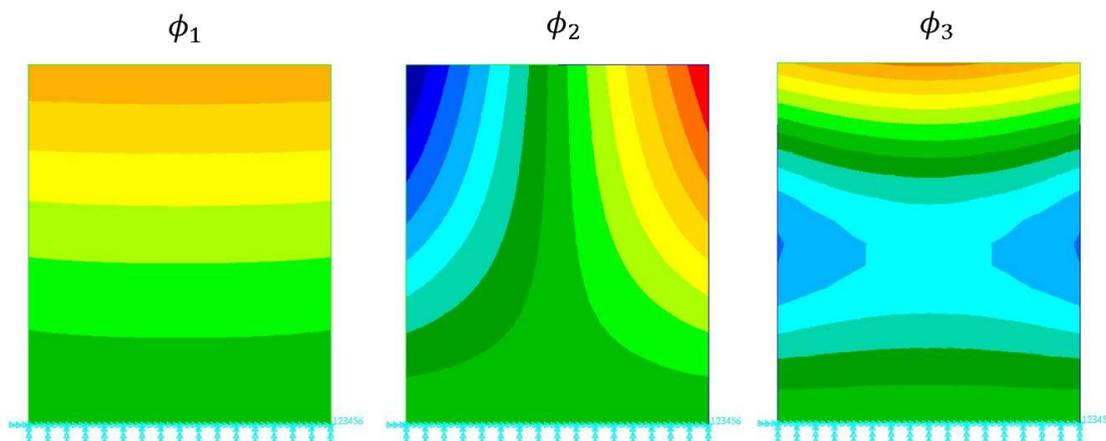


FIGURE B.7 – Configuration E1. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

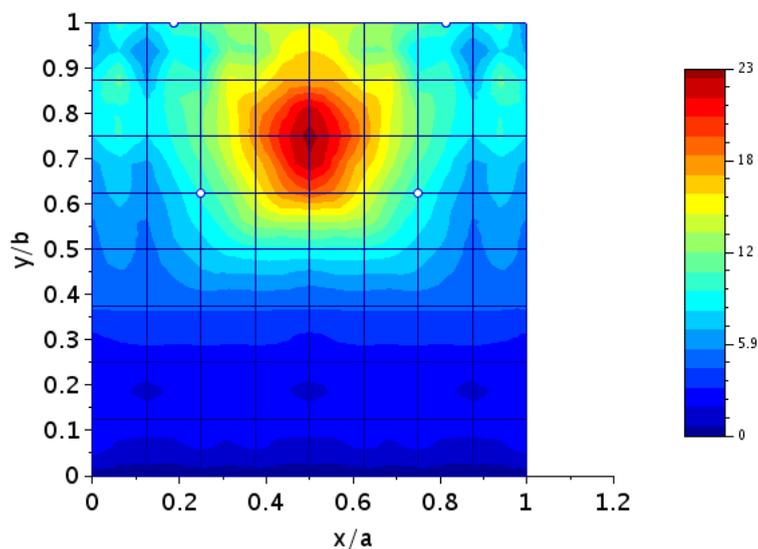


FIGURE B.8 – Configuration E1. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $24^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1.5a_e b) / N_2 = (6.5a_e b) / N_3 = (2a_e 5b_e) / N_4 = (6a_e 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = 65\% / m(N_3) = m(N_4) = 34\%$ .

Plaque encastree sur le bord 1 et appuiee sur le bord 3

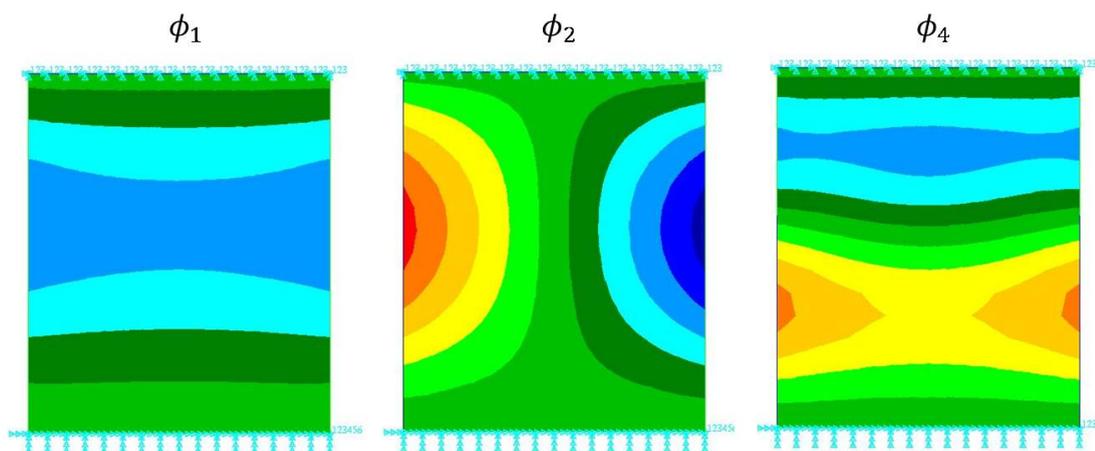


FIGURE B.9 – Configuration E1S3. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$ .

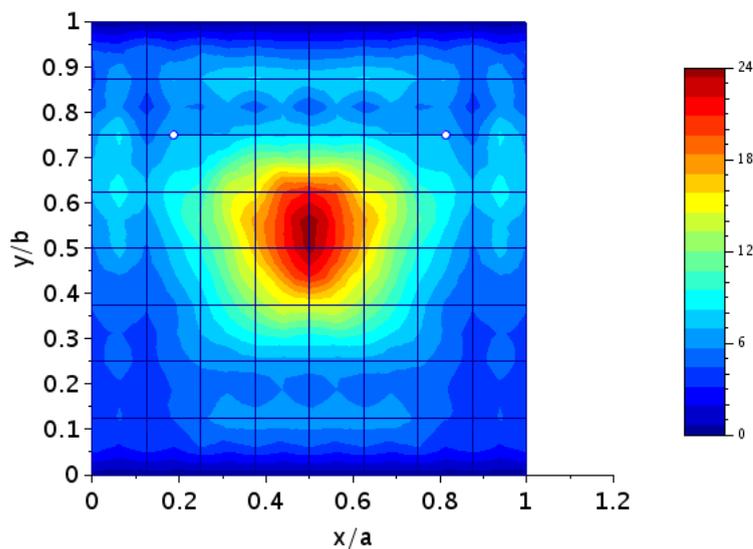


FIGURE B.10 – Configuration E1S3. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $24^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1.5a_e \ 6b_e)$  /  $N_2 = (6.5a_e \ 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = 48\%$ .

Plaque encastree sur les bords 1 et 3

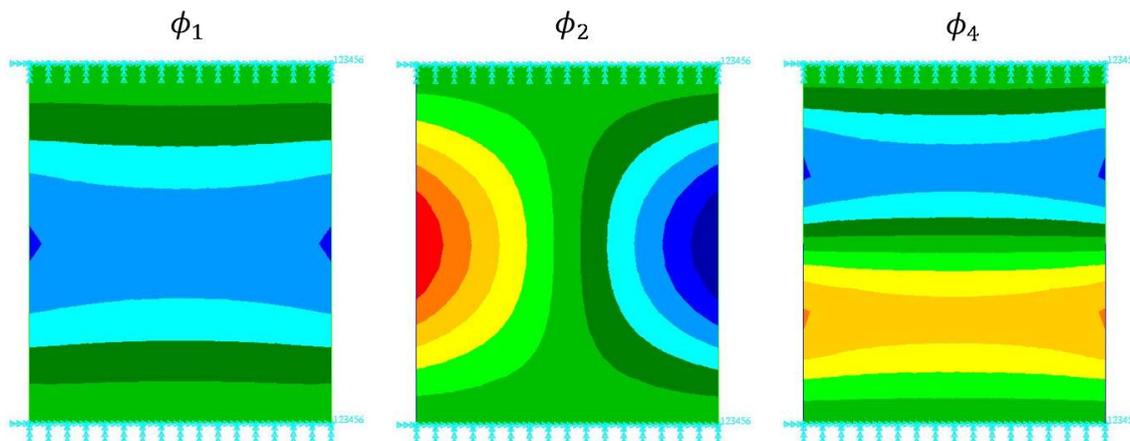


FIGURE B.11 – Configuration E1E3. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$ .

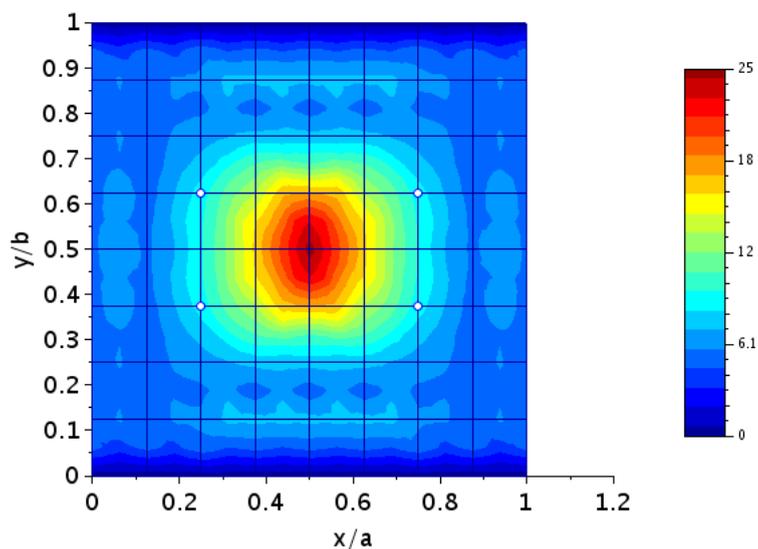


FIGURE B.12 – Configuration E1E3. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $25^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e \ 3b_e) / N_2 = (6a_e \ 3b_e) / N_3 = (2a_e \ 5b_e) / N_4 = (6a_e \ 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 44\%$ .

Plaque simplement supportée sur ses bords

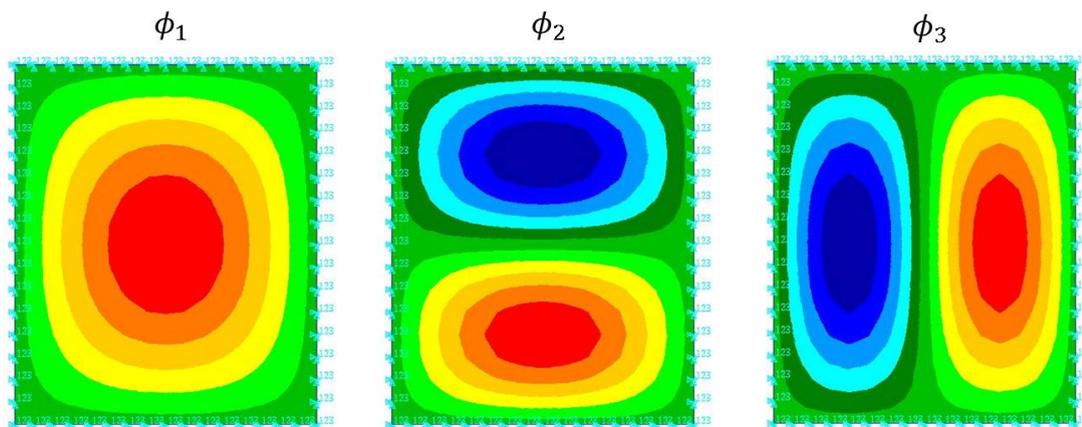


FIGURE B.13 – Configuration S. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

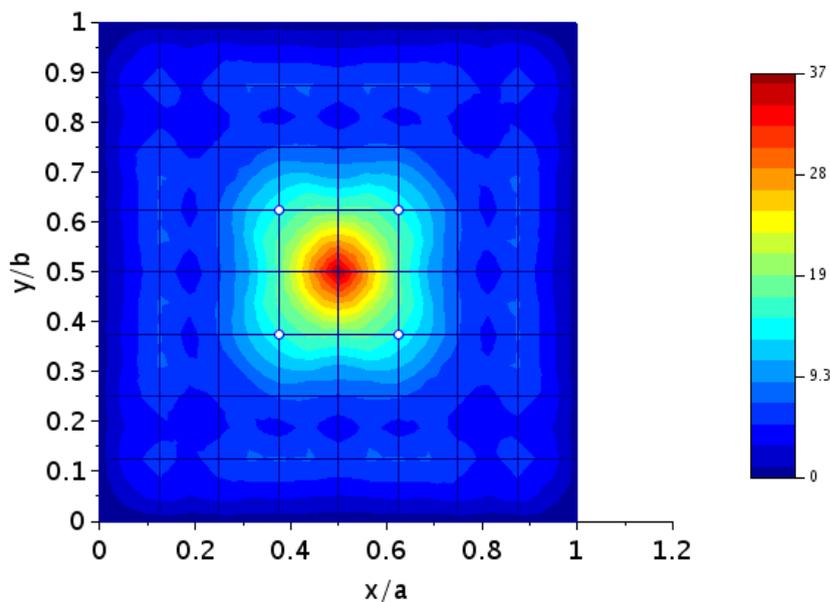


FIGURE B.14 – Configuration S. Carte de robustesse angulaire associée à  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et  $\epsilon = (a_e^2 + b_e^2)^{1/2}/2$  (valeur max :  $37^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (3a_e \ 3b_e) / N_2 = (5a_e \ 3b_e) / N_3 = (3a_e \ 5b_e) / N_4 = (5a_e \ 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 65\%$ .

Plaque simplement supportée sur ses coins

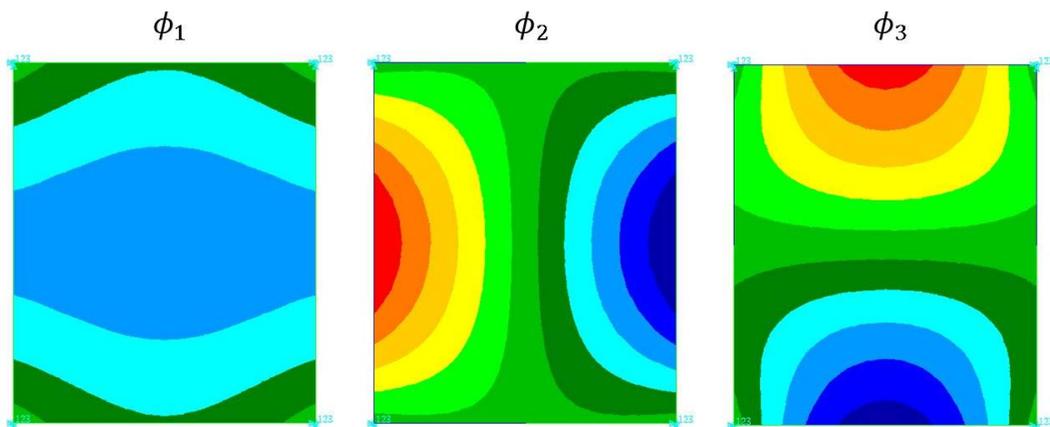


FIGURE B.15 – Configuration CS. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

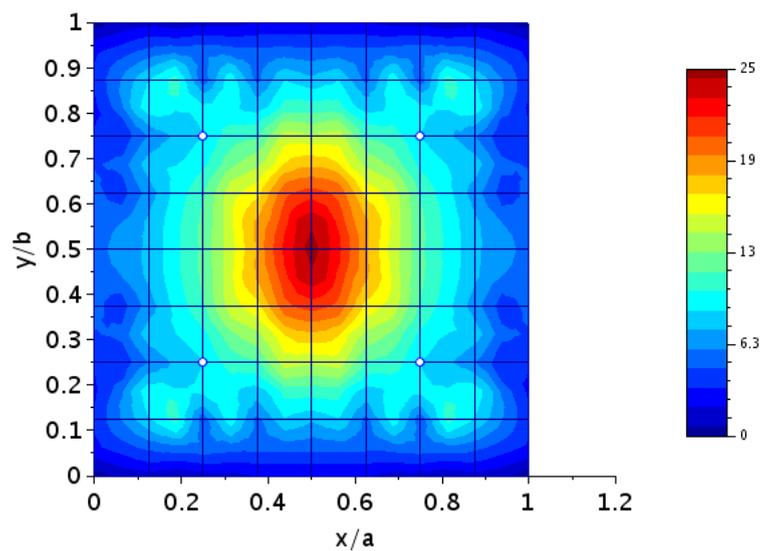


FIGURE B.16 – Configuration CS. FMD partielle :  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  (valeur max :  $25^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (2a_e \ 2b_e) / N_2 = (6a_e \ 2b_e) / N_3 = (2a_e \ 6b_e) / N_4 = (6a_e \ 6b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = m(N_2) = m(N_3) = m(N_4) = 38\%$ .

**Plaque à bords libres simplement appuyée sur trois points**

On donne la FMD partielle formée de trois modes permettant de couvrir le plus uniformément la structure. On observe que la zone triangulaire entre les points d'appuis n'est pas couverte. L'inspection des déformées modales montre que les déformées des modes 1 et 5 ne varient pas dans cette zone, et le mode 6 admet un ventre de vibration présentant trop de symétries pour discriminer les points à  $\epsilon$ -près.

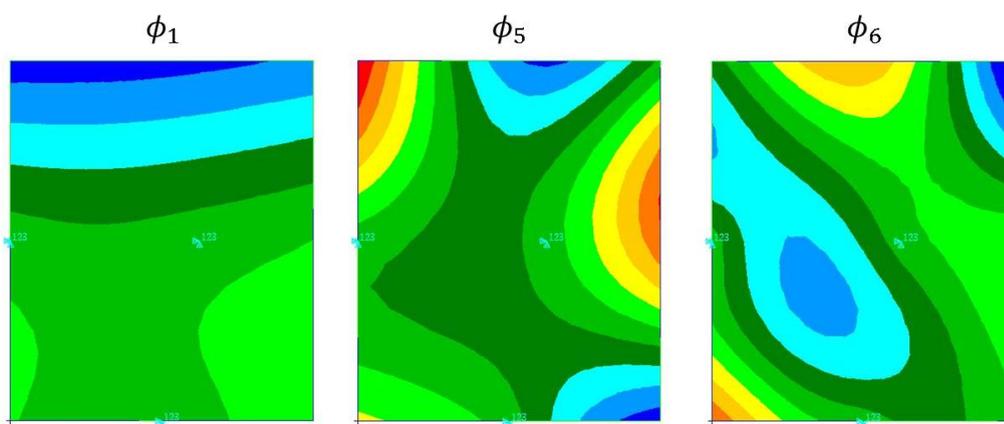


FIGURE B.17 – Configuration TA. Déformées des modes  $(\phi_1, \phi_5, \phi_6)$ .

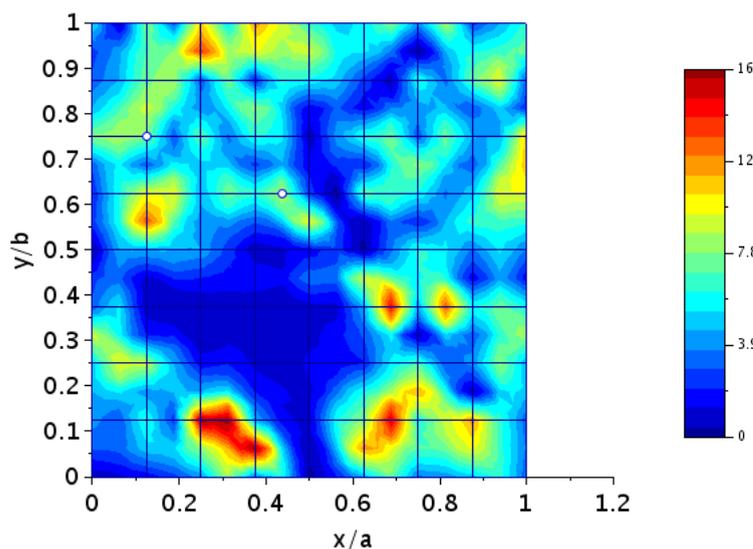


FIGURE B.18 – Configuration TA. FMD partielle :  $(\phi_1, \phi_5, \phi_6)$  (valeur max :  $16^\circ$ ). Points neutres :  $N_1 = (1a_e \ 6b_e)$  /  $N_2 = (3.5a_e \ 5b_e)$ . Mobilités :  $m(N_1) = 30\%$  /  $m(N_2) = 16\%$ .

## Annexe C

# Résultats de presque orthogonalité des réponses impulsionnelles

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, +\infty[$  de carré intégrable que l'on munit du produit scalaire usuel défini par  $(u|v)_E = \int_0^\infty u(t)v(t)dt$ . Les fonctions de réponse impulsionnelle  $g_i$  sont définies sur  $[0, +\infty[$  par  $g_i(t) = \frac{1}{\omega_i} e^{-\eta_i \omega_i t} \sin(\omega_i t)$  avec  $0 < \eta_i < 1$ . Les amortissements modaux  $\eta_i$  étant supposés non nuls les  $g_i$  sont clairement des éléments de  $E$ . On note  $T$  la durée d'un impact de sorte que le régime libre de la structure peut se représenter par des réponses impulsionnelles modales  $h_i$  retardées de  $\tau_i \leq T$  (voir section 2.3). On considère ainsi les fonctions  $h_i$  définies sur  $[0, +\infty[$  par  $h_i(t) = g_i(t - \tau_i)$  si  $t \geq T$  et  $h_i(t) = 0$  sinon. On note  $\Delta t$  la période d'échantillonnage d'un capteur,  $n$  le nombre de mesures et  $D = n\Delta t$  la durée de mesure. On pose  $F = \mathbf{R}^n$  que l'on munit du produit scalaire usuel défini par  $(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F = \sum_{k=1}^n U_k V_k$ . On définit l'échantillonnage d'un signal  $u \in E$  par  $\mathbf{U} = (u(0) \dots u((n-1)\Delta t))^T \in F$ . L'objectif de cette annexe est de démontrer les différentes relations utilisées dans les Chapitres 4 et 5.

## Presque orthogonalité sur $E$ d'une famille $(h_i)$ pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)_E$

On considère une famille  $\mathcal{H} = (h_i)_{1 \leq i \leq p}$  et on commence par calculer les produits scalaires mutuels entre chaque élément. En notant  $\alpha_i = \omega_i \tau_i$  on a :

$$\begin{aligned} (h_i|h_j)_E &= \int_T^{+\infty} h_i(t)h_j(t)dt \\ &= \frac{e^{\eta_i\omega_{0i}\tau_i + \eta_j\omega_{0j}\tau_j}}{\omega_i\omega_j} \int_T^{+\infty} e^{-(\eta_i\omega_{0i} + \eta_j\omega_{0j})t} \sin(\omega_i t - \alpha_i) \sin(\omega_j t - \alpha_j) dt \\ &= \frac{e^{\eta_i\omega_{0i}\tau_i + \eta_j\omega_{0j}\tau_j}}{2\omega_i\omega_j} \left[ \int_T^{+\infty} e^{-(\eta_i\omega_{0i} + \eta_j\omega_{0j})t} \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\alpha_i - \alpha_j)) dt - \right. \\ &\quad \left. \int_T^{+\infty} e^{-(\eta_i\omega_{0i} + \eta_j\omega_{0j})t} \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\alpha_i + \alpha_j)) dt \right] \end{aligned}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_T^{+\infty} e^{-at} \cos(bt - c) dt = \Re \left[ e^{-jc} \int_T^{+\infty} e^{(-a+jb)t} dt \right] = \Re \left[ -e^{-jc} \frac{a + jb}{a^2 + b^2} \left[ e^{(-a+jb)t} \right]_T^{+\infty} \right] \\ &= \frac{e^{-aT}}{a^2 + b^2} \Re \left[ (\cos(c - bT) - j \sin(c - bT)) (a + jb) \right] \\ &= e^{-aT} \frac{a \cos(c - bT) + b \sin(c - bT)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

En posant  $a = \eta_i\omega_{0i} + \eta_j\omega_{0j}$ ,  $b_1 = \omega_i - \omega_j$ ,  $b_2 = \omega_i + \omega_j$ ,  $c_1 = \alpha_i - \alpha_j - b_1T$  et  $c_2 = \alpha_i + \alpha_j - b_2T$ , on obtient :

$$(h_i|h_j)_E = \frac{e^{-[\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i) + \eta_j\omega_{0j}(T-\tau_j)]}}{2\omega_i\omega_j} \left[ \frac{a \cos(c_1) + b_1 \sin(c_1)}{a^2 + b_1^2} - \frac{a \cos(c_2) + b_2 \sin(c_2)}{a^2 + b_2^2} \right] \quad (C.1)$$

En prenant  $i = j$  on a  $a = 2\eta_i\omega_{0i}$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 2\omega_i$ ,  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 2(\alpha_i - \omega_i T)$ , si bien que la relation précédente devient :

$$\begin{aligned} (h_i|h_i)_E &= \frac{e^{-2\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i)}}{2\omega_i^2} \left[ \frac{1}{2\eta_i\omega_{0i}} - \frac{2\eta_i\omega_{0i} \cos(2(\alpha_i - \omega_i T)) + 2\omega_i \sqrt{1 - \eta_i^2} \sin(2(\alpha_i - \omega_i T))}{4\eta_i^2\omega_{0i}^2 + 4\omega_{0i}^2(1 - \eta_i^2)} \right] \\ &= \frac{e^{-2\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i)}}{4\eta_i\omega_{0i}^3(1 - \eta_i^2)} \left[ 1 - \eta_i \left( \eta_i \cos(2(\alpha_i - \omega_i T)) + \sqrt{1 - \eta_i^2} \sin(2(\alpha_i - \omega_i T)) \right) \right] \quad (C.2) \end{aligned}$$

- Supposons que l'impact appliqué est un Dirac. On a alors  $T = \tau_i = 0$  et pour  $i = j$  on obtient :

$$(g_i|g_i)_E = \frac{1}{4\eta_i\omega_{0i}^3} \quad (\text{C.3})$$

Pour  $i \neq j$  on a :

$$(g_i|g_j)_E = \frac{1}{2\omega_i\omega_j} \left[ \frac{a}{a^2 + b_1^2} - \frac{a}{a^2 + b_2^2} \right] = \frac{a}{2\omega_i\omega_j} \frac{b_2^2 - b_1^2}{(a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2)} = \frac{2a}{(a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2)}$$

On note  $\eta_m = \min_i \eta_i$ ,  $\eta_M = \max_i \eta_i$  et  $s = \min_{i \neq j} \frac{|\omega_i - \omega_j|}{\omega_{0i} + \omega_{0j}}$ . On a de façon évidente :

$$|b_1| \geq s(\omega_{0i} + \omega_{0j}) \quad \text{et} \quad b_2 \geq \sqrt{1 - \eta_M^2}(\omega_{0i} + \omega_{0j})$$

$$\eta_m(\omega_{0i} + \omega_{0j}) \leq a \leq \eta_M(\omega_{0i} + \omega_{0j})$$

D'où l'on obtient :

$$\frac{1}{(a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2)} \leq \frac{1}{(\omega_{0i} + \omega_{0j})^4 (1 - (\eta_M^2 - \eta_m^2))(\eta_m^2 + s^2)} \quad (\text{C.4})$$

Donc :

$$|(g_i|g_j)_E| \leq \frac{2\eta_M}{(\omega_{0i} + \omega_{0j})^3 (1 - (\eta_M^2 - \eta_m^2))(\eta_m^2 + s^2)}$$

Et d'après l'inégalité classique entre moyennes géométrique et arithmétique :

$$\sqrt{\omega_{0i}\omega_{0j}} \leq \frac{\omega_{0i} + \omega_{0j}}{2} \quad (\text{C.5})$$

On en déduit :

$$|(g_i|g_j)_E| \leq \frac{1}{4(\omega_{0i}\omega_{0j})^{3/2}} \frac{\eta_M}{(1 - (\eta_M^2 - \eta_m^2))(\eta_m^2 + s^2)}$$

On considère maintenant la famille normalisée  $\mathcal{G}^* = (g_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  avec  $g_i^* = g_i / \|g_i\|_E$ .

On a d'après (C.3) :

$$\frac{1}{\|g_i\|_E \|g_j\|_E} \leq 4\eta_M(\omega_{0i}\omega_{0j})^{3/2}$$

D'où l'on déduit finalement :

$$\|g_i^*\|_E = 1 \quad \text{et} \quad |(g_i^*|g_j^*)_E| \leq \mu_E(\mathcal{G}^*) = \frac{\eta_M^2}{(1 - (\eta_M^2 - \eta_m^2))(\eta_m^2 + s^2)}$$

Avec  $\mu_E(\mathcal{G}^*)$  qu'on appelle le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $\mathcal{G}^*$ .

Ce coefficient est petit devant 1 lorsque les modes considérés sont suffisamment séparés. En effet, pour  $\epsilon < 1$  la condition  $\mu_E(\mathcal{G}^*) < \epsilon$  se traduit par :

$$s > \eta_M \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta)\epsilon} - \left(\frac{\eta_m}{\eta_M}\right)^2}$$

ANNEXE C. RÉSULTATS DE PRESQUE ORTHOGONALITÉ DES RÉPONSES  
IMPULSIONNELLES

---

où  $\delta = \eta_M^2 - \eta_m^2 < 1$  puisque  $\eta_M < 1$ . En particulier, la séparation  $s$  nécessaire est d'autant plus petite que les amortissements des modes considérés sont faibles (signalons que par définition  $s < 1$ ). On retiendra donc que pour des modes faiblement amortis et bien séparés on a  $\mu_E(\mathcal{G}^*) \approx \frac{\eta_M^2}{\eta_m^2 + s^2} < 1$ .

- Sans hypothèse sur la forme d'impact, on reprend (C.2) en utilisant l'identité  $a \cos(x) + b \sin(x) = R \cos(x - \theta)$ , avec  $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$  et  $\tan \theta = b/a$ . On a alors :

$$(h_i | h_i)_E = \frac{e^{-2\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i)}}{4\eta_i \omega_{0i}^3 (1 - \eta_i^2)} [1 - \eta_i \cos(2(\alpha_i - \omega_i T) - \theta_i)]$$

D'où l'on tire :

$$\frac{e^{-2\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i)}}{4\eta_i \omega_{0i}^3 (1 + \eta_i)} \leq \|h_i\|_E^2 \leq \frac{e^{-2\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i)}}{4\eta_i \omega_{0i}^3 (1 - \eta_i)} \quad (\text{C.6})$$

Soit encore d'après (C.3) :

$$\frac{e^{-2\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i)}}{1 + \eta_i} \leq \left( \frac{\|h_i\|_E}{\|g_i\|_E} \right)^2 \leq \frac{e^{-2\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i)}}{1 - \eta_i}$$

Pour  $i \neq j$  on écrit :

$$(h_i | h_j)_E = \frac{e^{-[\eta_i \omega_{0i}(T-\tau_i) + \eta_j \omega_{0j}(T-\tau_j)]}}{2\omega_i \omega_j (a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2)} [aC + S]$$

Où l'on a noté  $C = (a^2 + b_2^2) \cos(c_1) - (a^2 + b_1^2) \cos(c_2)$  et  $S = b_1(a^2 + b_2^2) \sin(c_1) - b_2(a^2 + b_1^2) \sin(c_2)$ . On pose  $|\cos(c)| = \max_i(|\cos(c_1)|, |\cos(c_2)|)$  de sorte que :

$$|C| \leq (2a^2 + b_1^2 + b_2^2) |\cos(c)| = 2(a^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2) |\cos(c)|$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} 2(a^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2) &= 2((\omega_{0i} + \omega_{0j})^2 - 2\omega_{0i}\omega_{0j}(1 - \eta_i\eta_j)) \\ &= (\omega_{0i} + \omega_{0j})^2 \left[ 2 - \left( \frac{\sqrt{\omega_{0i}\omega_{0j}}}{\frac{\omega_{0i} + \omega_{0j}}{2}} \right)^2 (1 - \eta_i\eta_j) \right] \\ &= 2'(\omega_{0i} + \omega_{0j})^2 \end{aligned}$$

Où l'on a noté  $2' = \left[ 2 - \left( \frac{\sqrt{\omega_{0i}\omega_{0j}}}{\frac{\omega_{0i} + \omega_{0j}}{2}} \right)^2 (1 - \eta_i\eta_j) \right]$  vérifiant  $1 + \eta_i\eta_j \leq 2' \leq 2$ .

On a alors :

$$|C| \leq 2'(\omega_{0i} + \omega_{0j})^2 |\cos(c)|$$

ANNEXE C. RÉSULTATS DE PRESQUE ORTHOGONALITÉ DES RÉPONSES  
IMPULSIONNELLES

---

Et par suite :

$$a|C| \leq 2'\eta_M(\omega_{0i} + \omega_{0j})^3 |\cos(c)|$$

En posant  $|\sin(c)| = \max_i(|\sin(c_1)|, |\sin(c_2)|)$  et en utilisant  $b_2 \leq \omega_{0i} + \omega_{0j}$ , on montre de façon similaire que :

$$|S| \leq 2'(\omega_{0i} + \omega_{0j})^3 |\sin(c)|$$

D'où l'on déduit en utilisant (C.4) et (C.5) :

$$|(h_i|h_j)_E| \leq \frac{e^{-[\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i)+\eta_j\omega_{0j}(T-\tau_j)]}}{4(\omega_{0i}\omega_{0j})^{3/2}} \frac{2'}{1-\eta_M^2} \frac{\eta_M|\cos(c)| + |\sin(c)|}{(1-(\eta_M^2-\eta_m^2))(\eta_m^2+s^2)}$$

On considère maintenant la famille normalisée  $\mathcal{H}^* = (h_i^*)_{1 \leq i \leq p}$  avec  $h_i^* = h_i/\|h_i\|_E$ .

On a d'après (C.6) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|h_i\|_E\|h_j\|_E} &\leq 4\sqrt{\eta_i\eta_j}\sqrt{1+\eta_i}\sqrt{1+\eta_j}(\omega_{0i}\omega_{0j})^{3/2}e^{-[\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i)+\eta_j\omega_{0j}(T-\tau_j)]} \\ &\leq 4\eta_M(1+\eta_M)(\omega_{0i}\omega_{0j})^{3/2}e^{-[\eta_i\omega_{0i}(T-\tau_i)+\eta_j\omega_{0j}(T-\tau_j)]} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit finalement :

$$\|h_i^*\|_E = 1 \quad \text{et} \quad |(h_i^*|h_j^*)_E| \leq \mu_E(\mathcal{H}^*) = \frac{2'}{1-\eta_M} \frac{\eta_M^2|\cos(c)| + \eta_M|\sin(c)|}{(1-(\eta_M^2-\eta_m^2))(\eta_m^2+s^2)}$$

Avec  $\mu_E(\mathcal{H}^*)$  le coefficient de presque orthogonalité de la famille  $\mathcal{H}^*$  qui est petit devant 1 lorsque les modes considérés sont faiblement amortis et suffisamment séparés. On a alors  $\mu_E(\mathcal{H}^*) = O(\frac{\eta_M}{\eta_m^2+s^2})$ . Lorsque  $T \rightarrow 0$  on a  $|\sin(c)| \rightarrow 0$ . On retrouve que pour un impact de durée suffisamment faible, plus précisément de durée  $T$  telle que  $|\sin(c)| \leq \eta_M$ , on a  $\mu_E(\mathcal{H}^*) = O(\frac{\eta_M^2}{\eta_m^2+s^2})$ .

## Approximation de $(u|v)_E$ par $\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F$ et application à une famille de réponses impulsionnelles échantillonnées

- Soient  $u, v \in E$ . On va montrer que l'on peut approcher  $(u|v)_E$  à la précision souhaitée par  $\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F$  pourvu que la durée de mesure  $D$  et la fréquence d'échantillonnage  $1/\Delta t$  soient assez grandes. Plus précisément on veut montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists D^* > 0, \exists n^*(D) > 0, \\ (D \geq D^*, n \geq n^*(D)) \Rightarrow |\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F - (u|v)_E| \leq \epsilon$$

Preuve : Soit  $\epsilon > 0$ . On a :

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \int_0^D u(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} u(t)v(t)dt = (u|v)_E$$

Par définition de la limite :

$$\exists D^* > 0, \forall D \geq D^* \quad \left| \int_0^D u(t)v(t)dt - (u|v)_E \right| \leq \epsilon/2 \quad (\text{C.7})$$

On choisit  $D \geq D^*$ . On note  $n$  le nombre de mesures de sorte que  $\Delta t = D/n$ . Il reste à choisir  $n$  pour réaliser la propriété souhaitée. On note  $t_k = k\Delta t$  les instants de mesures. On a :

$$\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F = \Delta t \sum_{k=1}^n u(t_k)v(t_k) = S_n$$

On reconnaît que  $S_n$  est une somme de Riemann avec  $uv$  continue sur  $[0, D]$ . On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^D u(t)v(t)dt$$

Par définition de la limite :

$$\exists n^*(D) > 0, \forall n \geq n^*(D) \quad \left| S_n - \int_0^D u(t)v(t)dt \right| \leq \epsilon/2 \quad (\text{C.8})$$

D'où l'on déduit en utilisant (C.7) que pour  $D \geq D^*$  et  $n \geq n^*(D)$  on a :

$$\begin{aligned} |\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F - (u|v)_E| &\leq |\Delta t(\mathbf{U}|\mathbf{V})_F - \int_0^D u(t)v(t)dt| + \left| \int_0^D u(t)v(t)dt - (u|v)_E \right| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

- Soit  $\mathcal{H} = (h_i)_{1 \leq i \leq p}$ . On veut montrer la propriété suivante

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0, \exists D^* > 0, \exists n^*(D) > 0, \\ & (D \geq D^*, n \geq n^* \Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |\Delta t(\mathbf{H}_i | \mathbf{H}_j)_F - (h_i | h_j)_E| \leq \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Preuve : On reprend la démonstration précédente en choisissant  $D \geq \max_{i,j} D_{ij}^*$  puis  $n(D) \geq \max_{i,j} n_{ij}^*(D)$ .

- Soit  $\mathcal{H} = (h_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille presque orthogonale, à une normalisation près, de coefficient  $\mu_E$ . On veut montrer que la famille  $H = (\mathbf{H}_i)_{1 \leq i \leq p}$  est presque orthogonale, à une normalisation près, pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)_F$  lorsque la durée de mesure et la fréquence d'échantillonnage sont assez grandes et que les modes considérés sont faiblement amortis et bien séparés.

Preuve : On note  $h_i^* = \frac{h_i}{\|h_i\|_E}$  et  $\mathbf{H}'_i = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\|h_i\|_E} \mathbf{H}_i$ . Pour tout  $\epsilon > 0$  la condition  $|\Delta t(\mathbf{H}_i | \mathbf{H}_j)_F - (h_i | h_j)_E| \leq \epsilon$  est équivalente à  $|(\mathbf{H}'_i | \mathbf{H}'_j)_F - (h_i^* | h_j^*)_E| \leq \frac{\epsilon}{\|h_i\|_E \|h_j\|_E}$  qui se traduit par :

$$1 - \frac{\epsilon}{\|h_i\|_E^2} \leq \|\mathbf{H}'_i\|_F^2 \leq 1 + \frac{\epsilon}{\|h_i\|_E^2} \quad \text{et} \quad |(\mathbf{H}'_i | \mathbf{H}'_j)_F| \leq \mu_E + \frac{\epsilon}{\|h_i\|_E \|h_j\|_E} \quad (\text{C.10})$$

Soit  $\epsilon = \eta_M^2 \min_i \|h_i\|_E^2$ . D'après (C.9) il existe  $D^*$  et  $n^*(D)$  tels que pour  $D \geq D^*$  et  $n \geq n^*(D)$  les relations (C.10) deviennent :

$$1 - \eta_M^2 \leq \|\mathbf{H}'_i\|_F^2 \leq 1 + \eta_M^2 \quad \text{et} \quad |(\mathbf{H}'_i | \mathbf{H}'_j)_F| \leq \mu_E + \eta_M^2 \quad (\text{C.11})$$

On pose  $\mathbf{H}_i^* = \frac{\mathbf{H}'_i}{\|\mathbf{H}'_i\|_F}$ . Les relations (C.11) deviennent alors :

$$\|\mathbf{H}_i^*\|_F = 1 \quad \text{et} \quad |(\mathbf{H}_i^* | \mathbf{H}_j^*)_F| \leq \mu_F = \frac{\mu_E + \eta_M^2}{1 - \eta_M^2} \quad (\text{C.12})$$

On en conclut que pour des modes suffisamment amortis et un choix approprié de paramètres de mesure (durée de mesure et fréquence d'échantillonnage) la famille  $H^*$  associée à la famille  $\mathcal{H}^*$  est également presque orthogonale.

## Majoration de l'erreur d'estimation commise sur le VPMA

On va montrer la majoration (4.20). Pour alléger les notations on note  $\mathbf{N}_i = \mathbf{H}_i^*$ . On a alors  $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{N}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{N}_i$  et  $\hat{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^p \hat{x}_i \mathbf{N}_i$  la projection orthogonale de  $\mathbf{Q}$  sur  $[\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p]$ .

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, p \quad & (\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}} \mid \mathbf{N}_j) = 0 \\ & \left( \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{N}_i - \sum_{i=1}^p \hat{x}_i \mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j \right) = 0 \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, p \quad & \sum_{i=1}^p \hat{x}_i (\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j) = \sum_{i=1}^N x_i (\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j) \\ & = \sum_{i=1}^p x_i (\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j) + \sum_{i=p+1}^N x_i (\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j) \end{aligned}$$

On note  $\mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}$  la matrice de terme général  $(\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j)$  avec  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On note  $q = N - p$  et  $\mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$  la matrice de terme général  $(\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j)$  avec  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket p+1, N \rrbracket$ . On note  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1 \dots \hat{x}_p)^T$  et  $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{X}_e)^T$  avec  $\tilde{\mathbf{X}} = (x_1 \dots x_p)^T$  et  $\mathbf{X}_e = (x_{p+1} \dots x_N)^T$ . On a ainsi :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{p}} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \mathbf{X}_e$$

Donc :

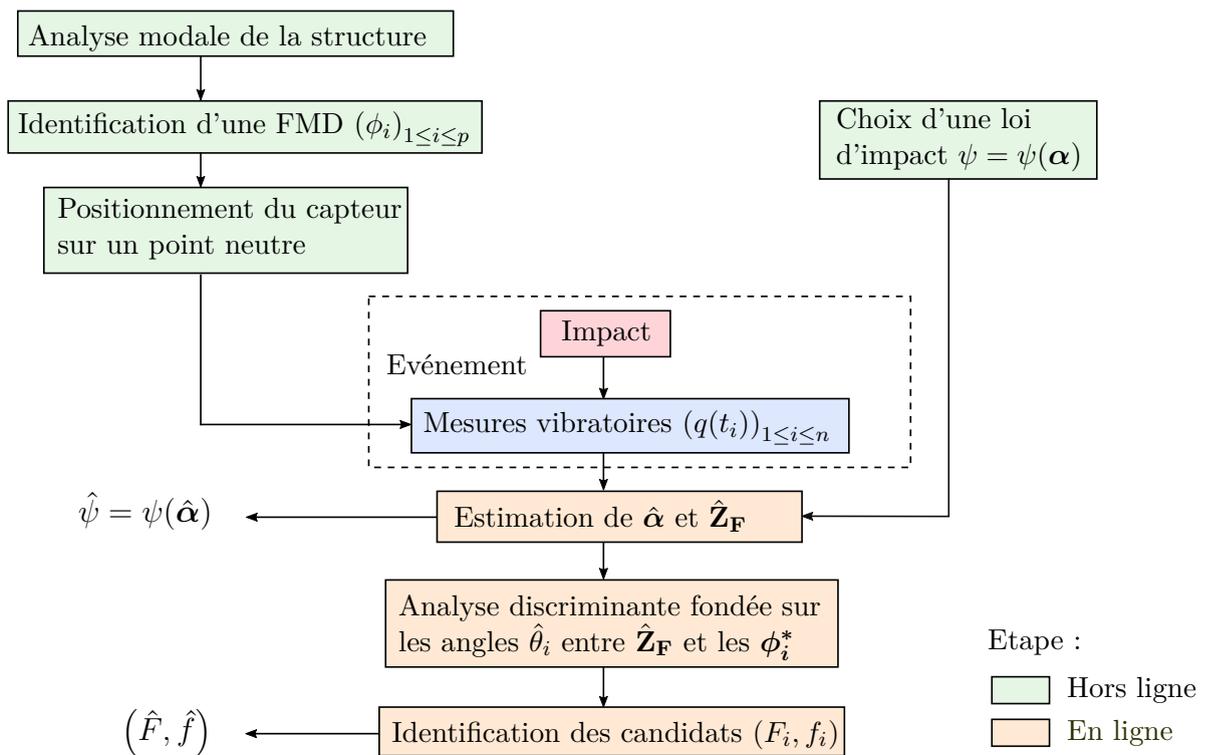
$$\hat{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \mathbf{X}_e \quad (\text{C.13})$$

D'après la définition des  $\mathbf{N}_i$  on a  $(\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_i) = 1$  et  $|(\mathbf{N}_i \mid \mathbf{N}_j)| \leq \mu$ . Pour  $\mathbf{Y} = (y_1 \dots y_l)^T$  on note  $\|\mathbf{Y}\|_\infty = \sup_i |y_i|$  et pour  $\mathbf{M}$  de taille  $k \times l$  on note la norme matricielle induite  $\|\mathbf{M}\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{Y}\|_\infty \leq 1} \|\mathbf{M}\mathbf{Y}\|_\infty$ . En utilisant la propriété de séparation de la norme induite la relation (C.13) permet d'obtenir la relation cherchée :

$$\|\hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_\infty \leq \mu(N - p) \|\mathbf{X}_e\|_\infty \|\mathbf{N}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{-1}\|_\infty \quad (\text{C.14})$$

## Annexe D

# Procédure complète d'identification d'un impact



ANNEXE D. PROCÉDURE COMPLÈTE D'IDENTIFICATION D'UN IMPACT





Dimitri GOUTAUDIER

**Méthode d'identification d'un impact appliqué sur une structure admettant des modes de vibration basse fréquence faiblement amortis et bien séparés**

**AIRBUS**

**Résumé :** La détection d'impacts est une préoccupation majeure pour suivre l'intégrité d'une structure évoluant dans un environnement comportant des risques de collision. Ce travail consiste à développer une méthode d'identification d'impact applicable à une structure composite de grandes dimensions qui soit à la fois robuste, peu coûteuse en temps de calcul, et qui nécessite peu de capteurs. Dans un premier temps, la démarche a été de décrire l'image du point d'impact dans la réponse vibratoire par un vecteur de participations modales. L'idée a ensuite été d'introduire l'hypothèse d'existence d'une famille de modes discriminants permettant d'établir le lien bijectif entre les participations modales et le point d'impact. Une procédure d'estimation de ces participations modales à partir d'un unique point de mesure a été proposée. Dans un second temps, la démarche a été d'étendre la procédure à l'identification d'une loi décrivant les paramètres principaux d'une force d'impact. Des conditions portant sur les paramètres de mesure et les propriétés modales de la structure sont déterminées pour garantir la précision et la robustesse de l'identification. Ce travail a permis de développer une approche en rupture par rapport à l'état de l'art, en ce sens qu'elle ne nécessite, en théorie, qu'un seul point de mesures vibratoires pour identifier un impact. Des essais expérimentaux sur un pavillon d'A350 ont permis de valider cette approche sur une structure composite de grandes dimensions.

**Mots clés :**

Contrôle de santé intégré, problème inverse, identification d'impact, analyse vibratoire

**Abstract :** Many industrial structures operate in an environment with a high risk of collision. The detection of impacts and the assessment of their severity is a major preoccupation in Structural Health Monitoring. This work deals with the development of an impact identification technique that is applicable to a large composite structure, numerically robust and time efficient, and that requires a low number of sensors. The first step was to describe the image of the impact point in the vibration response as a modal participation vector. The idea was to introduce the existence of a discriminating modes family to make a bijective link between the modal participations and the impact point. A least-squares procedure is developed to estimate those modal participations by measuring the vibration response of a single point on the structure. The second step was to extend the procedure to the identification of a parametric law representing the impact load history. Some conditions on measurement parameters and modal properties of the structure are identified to guarantee both the accuracy and the robustness of the procedure. The approach developed in this work is new regarding the state of the art : only one measurement point is considered for identifying an impact event. An experimental validation on an A350 crown panel indicates that the methodology is valid for large composite structures.

**Keywords :**

Structural health monitoring, inverse problem, impact identification, vibration analysis