



HAL
open science

Modèles quasi-minimaux de matière noire électrofaible

Ronan Ruffault

► **To cite this version:**

Ronan Ruffault. Modèles quasi-minimaux de matière noire électrofaible. Physique des Hautes Energies - Phénoménologie [hep-ph]. Université de Montpellier, 2018. Français. NNT : . tel-02124999v1

HAL Id: tel-02124999

<https://theses.hal.science/tel-02124999v1>

Submitted on 10 May 2019 (v1), last revised 13 Jun 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

En Physique

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche Laboratoire Univers et Particules de Montpellier

Modèles quasi-minimaux de matière noire électrofaible

Présentée par Ronan RUFFAULT

Le 16 novembre 2018

**Sous la direction de Félix BRÜMMER
et Julien LAVALLE**

Devant le jury composé de

Mme Geneviève BÉLANGER, DIRECTRICE DE RECHERCHES CNRS, LAPTH (ANNECY LE VIEUX)

M. Jean ORLOFF, PROFESSEUR, LPC (CLERMONT-FERRAND)

M. Félix BRÜMMER, MAÎTRE DE CONFÉRENCES, LUPM (MONTPELLIER)

M. Julien LAVALLE, CHARGÉ DE RECHERCHES, LUPM (MONTPELLIER)

Rapporteuse

Rapporteur

Directeur de thèse

Co-directeur de thèse



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**

Remerciements

Comme je m’y attendais, ces remerciements me donnent du fil à retordre. N’étant pas une personne des plus expressives, il m’est difficile de parler à cœur ouvert. Et ce même dans ce paragraphe que personne ne lira. Cependant, je ne m’imagine pas rendre ce manuscrit sans évoquer et saluer ceux qui m’ont accompagné jusqu’ici. Parce que j’ai à cœur de les remercier comme il se doit, je fais l’effort d’écrire ces lignes. Si jamais un lecteur lit ces lignes intentionnellement jusqu’au bout, j’ose espérer qu’il me pardonnera la médiocrité avec laquelle j’exprime mes sentiments.

Il est inconcevable pour moi de ne pas remercier Félix en premier. Au moment où j’écris ces lignes, je travaille à ses côtés depuis maintenant plus de trois ans. D’abord dans le cadre du stage de master, puis grâce à son soutien en thèse. Même si la dernière année aura été laborieuse, il a toujours été disponible et compréhensif. J’ai énormément appris de Félix. Je suis infiniment reconnaissant pour sa patience, son implication, et sa confiance totale en ma personne. Même si je ne souhaite pas poursuivre dans la recherche, je ressors grandi de cette aventure. J’espère qu’il ne vit pas ce choix comme un échec personnel, car il serait alors dans l’erreur la plus totale. Ce serait bien une première depuis que je le connais !

Puisque j’en suis à parler de relations professionnelles, je tiens à remercier chaleureusement Aiofe et Nishita. Aiofe avec qui Félix et moi-même avons eu une collaboration fructueuse puisqu’elle a abouti à une publication. Je la remercie pour sa gentillesse, sa bienveillance et son accueil. Même si je n’ai pas beaucoup travaillé avec Nishita, je salue sa patience pour avoir pris le temps de répondre à mes questions intempestives. Je sais qu’avec Aiofe, Nishita et Félix le projet commencé à leurs côtés est entre de bonnes mains. Merci également aux membres de l’équipe IFAC et leur accueil.

Je ne peux pas ne pas mentionner Julien, Lucyna et Agnès dans ces remerciements. Leur soutien moral lorsque je n’étais pas au meilleur de ma forme a été primordial. Sans cela cette thèse n’aurait probablement pas été possible. J’aimerais remercier plus particulièrement Julien. C’est une personne sur qui on peut compter. Sa gratitude est sans limites et je ne pourrai jamais assez l’en remercier.

Que dire des autres non-permanents du laboratoire ? De mon collègue de bureau Martin ? Je suis fier de les avoir connus ! Ce sont des gens exceptionnels, intelligents, gentils. L’entente et la cohésion de ce groupe sont incroyables. Il y a trois ans de cela je les rencontrais pour la première fois, et maintenant je suis heureux de dire que ce sont de réels amis. Mention particulière à Martin, pour sa bonne humeur quotidienne et sa patience légendaire, et qui m’a supporté dans ce bureau. Mention spéciale à Michelle, qui m’a soutenu jusqu’au bout et pour qui j’ai une amitié sans failles. Enfin mention spéciale à Thomas, qui est d’une intelligence et d’une gentillesse sans pareilles.

De manière générale, je suis reconnaissant à l’ensemble du laboratoire. Chaque personne qui le constitue est bienveillante et accueillante. Je pense notamment à Amel, Lydie, Nicolas ou encore Stéphane qui m’ont été d’une grande aide. Je tiens bien évidemment à remercier le directeur du laboratoire Univers et Particules de Montpellier, Mr. Denis Puy.

Puisque je me suis déjà déversé dans le sentimentalisme, autant continuer avec la sphère intime. Que ce soit ma famille, mes amis proches et moins proches, chacun d’entre eux mérite également sa part du gâteau. Le soutien inconditionnel de ma mère m’a permis de toujours faire ce que j’aime. La fierté de mon père, parfois non justifiée, qui m’aide à assumer mes choix quotidiens. Mon frère et ma sœur, avec qui l’entente est parfois difficile, mais sans qui je ne serais pas le même. Mes grands-parents qui malgré la distance sont toujours derrière moi. Mes amis d’enfance, avec qui j’ai grandi et qui m’ont accompagné tout au long de ma vie.

J’espère n’avoir oublié personne. Si jamais c’est le cas je m’en excuse. Néanmoins, il est moins important d’apparaître dans ces quelques lignes que dans mon cœur. C’est par cette

habile échappatoire que je termine ces remerciements. OUF!

PS : Je ne pouvais pas mettre sur le même pied d'égalité les personnes remerciées précédemment avec la caféine ou l'alcool (à consommer avec modération). Mais je dois bien dire que ces breuvages m'ont été d'une grande aide tout au long de ma thèse, et très certainement pour encore un bon moment.

Table des matières

Table des matières	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
1 Physique des particules : Contexte	1
1.1 Le modèle standard de la physique des particules	2
1.2 Au-delà du modèle Standard	3
1.3 Deux modèles intéressants	8
1.4 Références	12
2 La matière noire	13
2.1 Introduction	14
2.2 Équation de Boltzmann	15
2.3 Physique des particules et propriétés	17
2.4 Abondance cosmologique de la matière sombre	24
2.5 Références	26
3 Le modèle <i>Well-tempered n-plet dark matter</i>	27
3.1 Introduction	28
3.2 Présentation du modèle	31
3.3 Classification des représentations	34
3.4 Références	44
4 Expériences, propriétés et contraintes des modèles	47
4.1 Abondance cosmologique	49
4.2 La détection directe	55
4.3 La détection indirecte	62
4.4 Production de matière sombre au LHC	64
4.5 Références	65
5 Résultats	67
5.1 L'analyse numérique	68
5.2 Présentations des résultats	68
5.3 Résumé	75
5.4 Références	77
6 Conclusion, progression et perspectives	79
6.1 Motivations et construction du modèle	80
6.2 L'analyse en quelques mots	81
6.3 Perspectives	82
6.4 Références	83

A Annexes	I
A.1 Figures annexes	I
A.2 Tableaux annexes	V
A.3 Corrections radiatives à une boucle des représentations électro-faibles	VII
A.4 Matrice de masse 3×3 : développement limité des valeurs propres	XVIII
A.5 Classification des opérateurs de dimensions supérieures	XXI
 B Liste des acronymes	 XXIX
 C Glossaire	 XXXI
 D Liste des symboles	 XXXIII

Liste des figures

1.1	Densités reliques des purs bino, higgsinos et wino	10
2.1	Répartition énergétique de l'Univers	15
2.2	Évolution de la densité de matière sombre.	22
3.1	Densité relique du 5-plet MDM	29
4.1	CMB	51
4.2	Schema modulation annuelle	57
4.3	Limites supérieures SI des expériences de Détection Directe (DD).	60
5.1	$n = 0$: Cas du pur singlet.	69
5.2	$n = 3$: Ωh^2 en fonction du mélange dans le cas du singlet-triplet	70
5.3	$n = 3$: σ_{SI} en fonction du mélange et scan de l'espace des paramètres	70
5.4	$n = 4$: Ωh^2 en fonction du mélange dans le cas du singlet-triplet	72
5.5	$n = 4$: σ_{SI} en fonction du mélange et scan de l'espace des paramètres	73
5.6	$n = 5$: Ωh^2 en fonction du mélange dans le cas du singlet-triplet	74
5.7	$n = 5$: σ_{SI} en fonction du mélange et scan de l'espace des paramètres	75
A.1	Satellite Planck	I
A.2	Histoire de l'Univers	II
A.3	Spectre de puissance du CMB	II
A.4	Cas du quadruplet : σ_{SI} vs σ_{SD}	III
A.5	Concordance cosmique	IV

Liste des tableaux

1.1	Particules élémentaires du modèle standard	2
1.2	Supermultiplets du MSSM	7
1.3	États propres du MSSM	8
1.4	Liste des candidats potentiels du modèle <i>Minimal DM</i>	9
2.1	Processus élastiques et inélastiques $2 \rightarrow 2$	17
4.1	Méthodes de détection	49
4.2	Diagrammes contribuant à σ_{SI}	60
4.3	Diagrammes contribuant à σ_{SD}	61
A.1	Contributions relatives à la co-annihilation	V
A.2	Secteurs sombres et angles de mélanges	VI

Chapitre 1

Physique des particules : Contexte

*” Dans la nature, tout a toujours
une raison. Si tu comprends
cette raison, tu n’as plus besoin
de l’expérience ”*

Léonard De Vinci

Sommaire

1.1	Le modèle standard de la physique des particules	2
1.1.1	Présentation	2
1.1.2	Les limites	2
1.2	Au-delà du modèle Standard	3
1.2.1	Supersymétrie	5
1.2.2	Le modèle standard supersymétrique minimal	6
1.3	Deux modèles intéressants	8
1.3.1	Le modèle <i>Minimal Dark Matter</i>	8
1.3.2	Le modèle <i>Well-Tempered Neutralino</i>	9
1.4	Références	12

1.1 Le modèle standard de la physique des particules

1.1.1 Présentation

Le **modèle standard** –ou *Standard Model*– (**SM**) de la physique des particules fut établi au cours de la seconde moitié du xx^e siècle. Il est d’une précision remarquable, du moins à l’échelle électro-faible, et a notamment prédit l’existence de plusieurs particules. C’est une théorie de jauge de champ renormalisable basée sur le groupe de symétrie de $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Le groupe $SU(3)$ décrit l’interaction forte régie par la chromodynamique quantique. Il est souvent noté $SU(3)_c$, l’indice c faisant référence à la couleur. Le produit cartésien $SU(2) \otimes U(1)$ rend compte de l’unification de la force faible et de l’électrodynamique quantique, regroupées sous le nom d’interaction électro-faible. On la note également $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, les indices L et Y faisant respectivement référence aux particules gauches (*left* en anglais, d’où le L) et à l’hypercharge Y . A l’échelle électro-faible, l’intensité de l’interaction électro-magnétique, de l’interaction faible et de l’interaction forte sont fixées par les constantes de couplages qui leur sont associées. Ces dernières sont respectivement notées α , G_F et α_s . Le **SM** possède dix-neuf paramètres fondamentaux.

Le **SM** comprend douze particules fermioniques de spin $1/2$. Six quarks sensibles à chacune des trois interactions, et six leptons qui ne ressentent pas l’interaction forte. Le **SM** contient également douze bosons de jauge de spin unitaire. Ceux sont les vecteurs des interactions : huit gluons pour l’interaction forte, les bosons W^\pm et Z^0 pour l’interaction faible et le photon γ pour l’interaction électromagnétique.

La dernière pièce manquante est le boson de Higgs h , qui fut récemment découvert au **LHC** en 2012. Les articles sur la découverte du boson de Higgs au **LHC** par les collaborations **ATLAS** (dispositif instrumental toroïdal pour le LHC –ou *A Toroidal LHC ApparatuS*–) et **CMS** (solénoïde compact à muons –ou *Compact Muon Solenoid*–) sont respectivement [Chatrchyan et al. \[2012\]](#) et [Aad et al. \[2012\]](#).

Le tableau Tab. 1.1 résume l’ensemble des particules du modèle standard de la physique des particules.

Fermions	Quarks	u	c	t
		d	s	b
Leptons		e^-	μ^-	τ^-
		ν_e	ν_μ	ν_τ
Bosons de Jauge	W^\pm	Z^0	γ	g
Boson de Higgs			h	

TABLEAU 1.1 – Particules élémentaires du **SM**

1.1.2 Les limites

Malgré la robustesse du **SM** vis à vis des observations, ce dernier ne permet pas de décrire la réalité de manière exacte. En effet, la théorie du **SM** possède des lacunes. Ces dernières sont liées à des problèmes fondamentaux de la physique théorique moderne. En voici quelques-unes :

Masses des neutrinos Le **SM** ne procure pas de masse aux neutrinos. Or, l’étude des oscillations des neutrinos prouve que ces derniers, du moins deux d’entre eux, ont bel et bien une masse non nulle.

Matière noire (ou matière sombre) La densité d'énergie totale de l'univers est composée à environ 70% d'énergie sombre, 25% de matière sombre et 5% de matière *ordinaire* (cf. Im. 2.1). Or, le SM ne permet pas de décrire la matière sombre. Ainsi, la majorité de la matière présente dans l'univers n'est pas décrite par le SM. Le chapitre 2 est consacré à la matière noire.

Problème de hiérarchie Le SM est une théorie quantique des champs renormalisable. Lorsque l'on évalue les diagrammes de Feynman à boucle, on constate que la masse du boson de Higgs diverge quadratiquement avec l'échelle UltraViolet (UV). La divergence ainsi obtenue est absorbée via la renormalisation afin d'en extraire la masse physique. De fait, la masse du boson de Higgs est très sensible à toute physique UV. Bien que le SM n'a pas de problème en soi, dès lors que l'on étend la théorie dans l'UV (complétion UV), il est nécessaire de compenser la divergence liée pour garder une masse physique du boson de Higgs en accord avec l'expérience. Cet ajustement, bien qu'il soit mathématiquement possible, n'est pas *naturel* dans le sens où la plupart du temps il se fait de façon artificielle. C'est le problème de hiérarchie.

Gravitation Le SM n'inclut pas l'interaction gravitationnelle. Bien qu'elle soit négligeable à l'échelle électro-faible, elle devient conséquente à l'échelle de Planck. Au-delà, on doit avoir une théorie de la gravitation prenant en compte la relativité générale et la mécanique quantique, afin de pouvoir l'inclure avec les trois autres interactions fondamentales décrites par le SM.

Ces lacunes indiquent que le SM est une théorie incomplète, d'autant plus que la liste précédente n'est pas exhaustive. D'autres grands sujets fondamentaux tels que l'asymétrie matière anti-matière ou l'inflation sont tout autant inexpliqués par la théorie du SM.

Néanmoins, le SM reste particulièrement robuste à notre échelle d'énergie, *i.e.* l'échelle électro-faible. C'est pourquoi la théorie du SM peut-être vue comme une théorie effective efficace à l'échelle électro-faible, en gardant à l'esprit qu'il n'est plus suffisant lorsque l'on souhaite explorer des échelles d'énergies différentes.

1.2 Au-delà du modèle Standard

Pour aller plus loin dans la compréhension du monde qui nous entoure, il est nécessaire de concevoir de nouveaux modèles qui gardent la robustesse du SM vis à vis des observations, mais qui pallient ses lacunes. De nos jours, de nombreux modèles *au-delà du modèle standard* –ou *Beyond the Standard Model*– (BSM) sont étudiés, et de nouveaux apparaissent quotidiennement. Ces derniers visent en général à résoudre une ou plusieurs lacunes avec plus ou moins de succès.

L'objectif des physiciens des particules est de construire des modèles qui redonnent le SM à l'échelle électro-faible, tout en expliquant un maximum de phénomènes encore inexpliqués par le SM. Pour ce faire, il faut généralement introduire de nouveaux objets, et cela de façon plus ou moins *naturelle*.

S'il est une théorie BSM particulièrement connue, c'est probablement celle du *modèle standard supersymétrique minimal* –ou *Minimal Supersymmetric Standard Model*– (MSSM). Cette extension du SM est intéressante car elle donne un cadre propice et prometteur pour résoudre de nombreuses lacunes du SM de manière naturelle. L'idée cruciale est l'ajout d'une symétrie entre les bosons et les fermions. Néanmoins, les données expérimentales tendent à écarter un tel modèle, sans pour autant l'exclure totalement. Une description de celui-ci est disponible à la section Sec. 1.2.1, car il reste malgré tout une référence.

On peut aussi citer les théories des cordes. Celles-ci permettent d'expliquer quasiment toutes les lacunes du SM sur le papier. Malheureusement, elles restent purement hypothétiques puisque qu'il n'y aucun moyen de les tester via des expériences.

Généralement, de tels modèles sont plutôt complexes et difficiles à étudier. Par exemple, dans le MSSM il y a plus de cent paramètres dans sa version minimale. L'étude d'un tel espace des paramètres est très compliquée. Néanmoins, il n'est pas rare que même pour des théories complexes, on puisse en simplifier l'étude.

En effet, lorsque que l'on s'intéresse à une problématique bien précise, il faut identifier quelles sont les quantités pertinentes. Si leur nombre est limité, alors l'étude s'en retrouve d'autant plus simple. Par exemple, si on étudie la brisure électro-faible dans le SM, il n'est pas nécessaire de considérer la chromo-dynamique quantique. Ainsi on s'affranchit de tout un pan de la théorie, qui n'est pas relevant pour la problématique étudiée, ce qui simplifie grandement l'analyse.

Une approche alternative, lorsque qu'on travail dans le cadre d'un modèle complexe, est de considérer des régions particulières de l'espace des paramètres conduisant à une étude simplifiée. Concrètement, on peut étudier des cas limites amenant à des secteurs découplés, de sorte à ce que in fine le nombres de paramètres effectifs en soit réduit. Par exemple, bien que le modèle MSSM soit a priori un modèle complexe, il est possible de restreindre le nombre de paramètres effectifs du modèle en considérant des régions particulières de l'espace des phases telles que pour un phénomène donné subsistent un nombre restreint de paramètres pertinents. C'est typiquement ce qui est fait dans le papier de Arkani-Hamed et al. [2006], ou seul le secteur neutralino du MSSM est considéré puisque les autres états supersymétriques sont supposés suffisamment lourds pour être considérés comme étant découplés. Ainsi, dans ce cas de figure les degrés de libertés pertinents pour la problématique sont limités. Ce faisant, partant d'un modèle a priori compliqué, les auteurs se ramènent à une analyse grandement simplifiée. Plus de détails sont donnés à la section Sec. 1.3.2.

En opposition aux modèles qui se veulent le plus complet possible, de nombreux physiciens des particules ont construit des modèles plus simples, visant à ne résoudre qu'un nombre limité de problèmes liés au SM. A priori moins ambitieuse, cette approche reste intéressante et complémentaire car elle est souvent plus accessible, que ce soit pour l'analyse des modèles ou bien leur testabilité via des expériences scientifiques telles que des accélérateurs par exemples.

Typiquement, si on considère la problématiques de la matière sombre (cf. Chap. 2), la littérature regorge de modèles avec un candidat viable pour la matière sombre. Dans la section Sec. 1.3.1 on discute de l'un d'entre eux, le modèle *Minimal Dark Matter* (cf. Cirelli et al. [2006]). Ce dernier est étonnamment simple et permet malgré tout d'expliquer la matière sombre dans l'univers. Ces modèles n'ont aucune autre prétention que de résoudre une problématique bien précise en introduisant généralement des mécanismes innovants. Leur motivation n'est pas de solutionner l'ensemble des problèmes actuels en physique des particules. Leur intérêt réside dans le fait qu'ils ouvrent généralement la voie à d'autres théories plus ambitieuses.

Une grande catégorie de modèles qui se veulent plus *simples* est celle des théories effectives. Ces dernières sont basées sur un principe simple. Il n'est pas forcément nécessaire de connaître une théorie dans son ensemble pour en étudier certains aspects. En effet, généralement pour une théorie donnée correspondent plusieurs échelles d'énergies auxquelles sont associés des phénomènes physiques. Si ces échelles d'énergies sont suffisamment isolées les unes des autres, on peut étudier la physique à une échelle d'énergie sans connaître en détails la physique des échelles d'énergies inférieures (InfraRouge (IR)) ou supérieures (UV). C'est le fondement des théories effectives.

Généralement, lorsque l'on étudie une théorie à l'échelle électro-faible, les effets liés à la

physique au-delà d'une certaine échelle d'énergie sont sous-dominants. On quantifie alors les effets de la théorie UV via des opérateurs de dimensions supérieures, qui sont supprimés par une certaine puissance de l'échelle d'énergie associée à la théorie UV. On parle d'opérateurs effectifs, et on dit que l'on a intégré la théorie UV.

Remarquons que l'on sait intégrer toute théorie pour la rendre effective sous une certaine échelle d'énergie choisie. C'est ce qu'on appelle l'approche *top-down*. On connaît donc le lien entre la théorie complète et la théorie effective associée. L'intérêt est que lorsque qu'on intègre la physique UV on se retrouve avec moins de paramètres. L'analyse en est donc simplifiée. Cependant, le prix à payer est que la théorie effective ainsi obtenue n'est plus complète. En effet, elle n'est valable que jusqu'à une certaine énergie inférieure à l'échelle de la théorie UV. Les théories effectives sont aussi utiles lorsque l'on ne sait rien de la théorie UV, ou si l'on veut rester agnostique quant à celle-ci. Dans ce cas, on peut tout à fait décrire la nouvelle physique avec des opérateurs effectifs.

Finalement, quelle que soit la manière dont on aborde la nouvelle physique, il n'y a pas de bonne ou de mauvaise méthode. Du moment que les motivations sont justifiées et que les physiciens ont un regard lucide sur leur travaux, tout résultat est bon à prendre. Le Graal serait d'avoir un modèle qui solutionne tous les problèmes, et dont l'existence soit confirmée par les expériences. Mais pour espérer atteindre ce stade, il faut tâtonner, construire, étudier, analyser et contraindre les théories actuelles et futures. Ce n'est ni plus ni moins qu'une part de la recherche en physique théorique.

Ce manuscrit, qui résume l'ensemble de mes travaux de thèse, n'a aucune prétention si ce n'est d'ajouter humblement une pierre à l'édifice. Lors de ces trois années de thèse, j'ai élaboré, analysé puis contraint des modèles dont la problématique est celle de la matière sombre.

1.2.1 Supersymétrie

Motivations et principe

La supersymétrie est née dans les années 70. C'est la généralisation des symétries à des multiplets contenant des particules de spins différents : les supermultiplets (cf. [Martin \[1997\]](#)). On passe d'un état fermionique à un état bosonique en appliquant l'opérateur Q de la manière suivante :

$$Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad (1.1)$$

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad (1.2)$$

La supersymétrie résout plusieurs problèmes du SM, notamment celui du problème de hiérarchie. En effet avec la [SuperSymétrie \(SUSY\)](#), chaque fermion possède un super-partenaire bosonique. Ainsi chaque boucle fermionique contribuant à la correction radiative du Higgs est exactement compensée par la boucle bosonique du super-partenaire associé. Remarquons que ce résultat est vrai uniquement pour une symétrie exacte. En effet, la correction radiative à la masse du Higgs est $\delta m_{higgs}^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) |m_B^2 - m_F^2|$, où m_B et m_F sont respectivement les masses du boson et du fermion du supermultiplet. Si la SUSY est exacte, alors $m_B = m_F$ et il y a une compensation parfaite. En revanche, pour une brisure de la SUSY, la compensation n'est plus exacte. Néanmoins, la présence du super-partenaire adoucit tout de même le problème de hiérarchie si l'échelle des masses des super-partenaires est proche de l'échelle du Higgs.

Il est également intéressant de noter que la SUSY génère plusieurs candidats éventuels à la matière sombre.

En fin de compte, la SUSY est une extension naturelle du SM. Elle résout des problèmes à la fois conceptuels et phénoménologiques, tout en gardant la pertinence du SM.

La R-Parité

Dans le **SM**, le nombre $B - L$ (où B est le nombre baryonique et L le nombre leptonique) est conservé car il n'existe aucun terme du Lagrangien qui viole ce nombre et qui soit renormalisable. On parle de symétrie accidentelle, car elle n'est pas motivée par une invariance. En revanche, dans la **SUSY**, le super-potentiel le plus général qui soit invariant de jauge et renormalisable contient des termes impliquant la violation de $B - L$. Cela implique entre autre la désintégration du proton. Or, une telle désintégration n'a jamais été observée expérimentalement. Par conséquent de tels termes doivent être supprimés. On introduit alors un nouveau nombre quantique, la R-Parité. Ce dernier caractérise les particules et les **sparticules**. Il est défini de la manière suivante :

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad \text{où} \quad \begin{cases} B \text{ est le nombre baryonique} \\ L \text{ est le nombre leptonique} \\ s \text{ est le spin} \end{cases} \quad (1.3)$$

On montre facilement que les particules du **SM** ont une R-Parité de +1 alors que les **sparticules** ont une R-Parité de -1. La R-Parité est une symétrie discrète. Mathématiquement, la conservation de la R-Parité lors d'un processus implique que le produit des P_R initiaux est égal au produit des P_R finaux. Physiquement cela implique les résultats suivants :

- Dans les accélérateurs les **sparticules** sont produites en nombre pair.
- La **particule supersymétrique la plus légère** —ou *Lightest Supersymmetric Particle*— (**LSP**) est stable, *i.e.* ne peut pas se désintégrer.
- Toute **sparticule** autre que la **LSP** peut éventuellement se désintégrer en un nombre impair de **sparticules**.

L'ajout d'une symétrie discrète telle que la R-Parité permet donc de proscrire certains termes du Lagrangien, ainsi que de stabiliser la particule la plus légère chargée sous cette symétrie. Un tel outil est donc particulièrement utile dès lors que l'on s'intéresse à la matière sombre, que ce soit dans le cadre de la **SUSY** ou non. On exploitera ce résultat dans notre propre modèle.

Brisure de la supersymétrie

Si la supersymétrie est une symétrie exacte, on s'attend à ce qu'une **sparticule** ai la même masse que la particule dont elle est le super-partenaire. Cependant, hormis les particules du **SM**, rien d'autre n'a été observé jusqu'à aujourd'hui. Ainsi, si la **SUSY** existe, elle doit être brisée de sorte que les masses des partenaires ne soient pas identiques. Typiquement, la masse des super-partenaires aux particules du **SM** doivent être plus grandes puisque qu'elles n'ont pas été détectées.

Une façon de le faire est via une brisure spontanée. Le vide n'est pas exactement invariant sous la supersymétrie, ce qui consiste à rajouter dans le Lagrangien de la théorie des termes qui brisent la supersymétrie. Lorsque l'on applique cette brisure, la dégénérescence en masse des particules avec leur super-partenaires est levée.

Notons que pour rester en accord avec la motivation initiale de résoudre du problème de hiérarchie, on ne peut pas avoir un écart trop important entre les masses des super-partenaires. C'est pourquoi on parle de brisure douce. Une telle brisure dans la théorie introduit une certaine liberté dans le lagrangien. La paramétrisation la plus générale introduit une centaine de nouveaux paramètres.

1.2.2 Le modèle standard supersymétrique minimal

L'extension minimale du modèle standard dans le cadre de la supersymétrie est appelé **MSSM**. Ce modèle est dit minimal car il introduit un nombre minimum de nouveaux états.

Le **SM** est une théorie effective du **MSSM** à basse énergie. Dans ce dernier, chaque particule du **SM** est associée à une superparticule, ou **sparticule**. Leur spin diffère de $1/2$ et elles ont les mêmes charges de jauge.

Comme les états d'hélicité droite et gauche se transforment différemment sous le groupe de jauge, on introduit des sparticules pour les fermions d'hélicité droite et gauche. Bien entendu les sfermions, qui sont des bosons de spin nul, n'ont pas d'hélicité. Cependant on les note avec une "hélicité", celle-ci faisant référence à celle de leur super-partenaire.

Contrairement au **SM**, le **MSSM** contient plusieurs bosons de Higgs. En effet dans le **MSSM** il y a deux doublets complexes de Higgs ($H_u^+ H_u^0$) et ($H_d^0 H_d^-$) gouvernés par l'algèbre de $SU(2)_L$. Le boson de Higgs du modèle standard est une combinaison linéaire de H_u^0 et H_d^0 . Leur paramètre de masse est noté μ .

Le tableau Tab. 1.2 résume l'ensemble des supermultiplets dans le **MSSM**.

Super Multiplets	Champs Bosoniques	Partenaires Fermioniques	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
Gluons / Gluinos	spin 1 g	spin $1/2$ \tilde{g}	8	1	0
Boson W / Winos	W^\pm, W^0	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	1	3	0
Boson B / Bino	B^0	\tilde{B}^0	1	1	0
($\times 3$ familles) slepton/leptons	spin 0 $(\tilde{\nu}_L, \tilde{l}_L)$ \tilde{l}_R	spin $1/2$ (ν_L, l_L) l_R	1 1	2 1	-1 -2
($\times 3$ familles) squarks/quarks	spin 0 $(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$ \tilde{u}_R \tilde{d}_R	spin $1/2$ (u_L, d_L) u_R d_R	3 3 3	2 1 1	$+\frac{1}{3}$ $+\frac{2}{3}$ $-\frac{2}{3}$
Higgs / higgsinos	spin 0 (H_u^+, H_u^0) (H_d^0, H_d^-)	spin $1/2$ $(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$ $(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	1 1	2 2	+1 -1

TABEAU 1.2 – Supermultiplets du **MSSM**

Dans le modèle standard, la symétrie électro-faible est spontanément brisée en introduisant le mécanisme de Higgs. On obtient alors un seul Higgs physique et trois champs non physiques qui procurent une masse aux bosons W^\pm et Z^0 . Dans le secteur de Higgs du **MSSM**, étant donné que l'on a deux doublets de Higgs, on se retrouve avec cinq Higgs physiques que l'on note h^0, H^0, A^0 et H^\pm . Les paramètres de brisure de **SUSY** du vide sont $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$ et b .

Notons également que dans le **SM**, il a une **valeur attendue du vide** –ou *Vacuum Expectation Value*– (**VEV**) notée v associée au doublet de Higgs. Dans le **MSSM**, il y a deux **VEVs**, v_u et v_d , associées aux deux doublets. Afin d'être consistant avec la valeur du vide mesurée au **LHC**, on doit avoir $v^2 = v_u^2 + v_d^2 = 246 \text{ GeV}^2$. Par souci de simplicité, on définit la quantité β telle que $\tan(\beta) = \frac{v_u}{v_d}$.

À cause de la brisure de la symétrie électro-faible, les gauginos ne sont pas des états propres de masses. En effet les higgsinos et les gaugino électro-faibles vont se mélanger. Les états propres de masses dus au mélange de $\tilde{B}^0, \tilde{W}^0, \tilde{H}_u^0$ et \tilde{H}_d^0 sont notés $\chi_1^0, \chi_2^0, \chi_3^0$ et χ_4^0 et sont appelés neutralinos. Les états propres de masses dus au mélange de $\tilde{W}^\pm, \tilde{H}_u^\pm$ et \tilde{H}_d^\pm sont notés quant à eux χ_1^\pm et χ_2^\pm et sont appelés charginos. Le tableau 1.3 résume les états propres d'interaction et les états propres de masse des secteurs Higgs et électroweakinos. Pour notre modèle, on s'inspire des notations du **MSSM** car on a des secteurs *neutralino-like* et *chargino-like*.

Etats propres	Jauge	Masse
Doublets de Higgs / Higgs	$H_u^0 H_u^+ H_d^0 H_d^-$	$h^0 H^0 A^0 H^\pm$
gauginos, higgsinos / neutralinos	$\tilde{B}^0 \tilde{W}_0 \tilde{H}_u^0 \tilde{H}_d^0$	$\chi_1^0 \chi_2^0 \chi_3^0 \chi_4^0$
gauginos, higgsinos / charginos	$\tilde{W}^\pm \tilde{H}_u^\pm \tilde{H}_d^\pm$	$\chi_1^\pm \chi_2^\pm$

 TABLEAU 1.3 – États propres de jauge et états propres de masses du **MSSM**

Le **MSSM** conserve la R-parité et est une théorie renormalisable. Les interactions et les masses de toutes les particules sont déterminées par leurs transformations de jauge et le superpotentiel W_{MSSM} .

$$W_{MSSM} = \bar{u}\mathbf{y}_u Q H_u + \bar{d}\mathbf{y}_d Q H_d - \bar{e}\mathbf{y}_e L H_d + \mu H_u H_d \quad (1.4)$$

On a adopté les notations de la référence **Martin [1997]**. La brisure de la supersymétrie se fait en introduisant le lagrangien de brisure douce $\mathcal{L}_{soft}^{MSSM}$:

$$\mathcal{L}_{soft}^{MSSM} = -\frac{1}{2}(M_3 \tilde{g}\tilde{g} + M_2 \tilde{W}\tilde{W} + M_1 \tilde{B}\tilde{B} + c.c.) \quad (1.5)$$

$$- (\tilde{u}\mathbf{a}_u \tilde{Q} H_u - \tilde{d}\mathbf{a}_d \tilde{Q} H_d - \tilde{e}\mathbf{a}_e \tilde{L} H_d + c.c.) \quad (1.6)$$

$$- \tilde{Q}^\dagger \mathbf{m}_Q^2 \tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger \mathbf{m}_L^2 \tilde{L} - \tilde{u}\mathbf{m}_u^2 \tilde{u}^\dagger - \tilde{d}\mathbf{m}_d^2 \tilde{d}^\dagger - \tilde{e}\mathbf{m}_e^2 \tilde{e}^\dagger \quad (1.7)$$

$$- m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (b H_u H_d + c.c.) \quad (1.8)$$

C'est l'expression la plus générale compatible avec l'invariance de jauge et la conservation de la R-Parité dans le **MSSM**. En prenant en compte cette brisure dans la théorie, le **MSSM** possède alors 105 paramètres libres tels que des masses, des phases ou encore des angles de mélange. C'est pourquoi l'analyse du **MSSM** est compliquée.

1.3 Deux modèles intéressants

Jusqu'ici nous avons discuté du **SM** ainsi que du **MSSM**. Nous avons également évoqué le fait que les physiciens des particules créent des modèles dans le but de solutionner ou d'améliorer ceux déjà existants. Les approches possibles sont multiples, plus ou moins complètes selon leurs ambitions. Dans cette section, on va s'intéresser à deux modèles s'adressant à la problématique de la matière noire. L'un dans un cadre non-**SUSY** et minimal, l'autre dans un cadre **SUSY** mais avec une configuration impliquant peu de paramètres pertinents. Ce dernier permet d'introduire la notion de mélange *Well-Tempered*, qui sera cruciale pour nos modèles.

1.3.1 Le modèle *Minimal Dark Matter*

En général, un modèle est créé pour résoudre plusieurs lacunes du **SM**. Néanmoins, on peut également se concentrer sur un problème en particulier, et essayer d'y répondre. Plusieurs approches sont alors possibles. Souhaite-t-on une théorie **UV**? Une théorie effective à l'échelle électro-faible? etc ... Une approche particulièrement simple est de considérer des extensions minimales, visant à résoudre une problématique donnée. C'est ce que font les auteurs de l'article **Cirelli et al. [2006]**, dans le contexte de la matière sombre. Ces derniers considèrent les représentations électro-faibles les plus *simples*, et regardent celles qui peuvent potentiellement être candidate à la **matière noire (MN) –ou *Dark Matter*–**. C'est pourquoi leur article porte le nom de *Minimal Dark Matter*. En plus du **SM**, seule une nouvelle représentation électro-faible est considérée, rendant ainsi le modèle minimal. Sachant que les expériences de **DD** (cf. Sec. 4.2) permettent déjà de contraindre certains modèles, il est judicieux de prendre en

compte ces résultats. De plus, la matière noire doit être stable. Autrement dit, le temps de vie associé à la particule de matière sombre doit être supérieur à l'âge de l'Univers. Ainsi, toutes les représentations qui permettent la désintégration de la matière sombre en particules du SM via des opérateurs de dimensions quatre sont automatiquement exclues. Il faut également faire attention à ce que, selon la masse de la représentation et la valeur de l'échelle de coupure (*cut-off*), d'éventuels opérateurs de dimension supérieure n'engendrent pas telles désintégrations. Le tableau 1.4 répertorie les représentations et notifie si ces critères sont respectés.

Nombre quantiques			Passe les contraintes de la DD ?	Stable ?
$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	spin		
2	1/2	0	×	×
2	1/2	1/2	×	×
3	0	0	✓	×
3	0	1/2	✓	×
3	1	0	×	×
3	1	1/2	×	×
4	1/2	0	×	×
4	1/2	1/2	×	×
4	3/2	0	×	×
4	3/2	1/2	×	×
5	0	0	✓	×
5	0	1/2	✓	✓
5	1	0	×	×
5	1	1/2	×	✓
5	2	0	×	×
5	2	1/2	×	✓
6	1/2, 3/2, 5/2	0	×	✓
7	0	0	✓	✓
8	1/2, 3/2, ...	0	×	✓

TABLEAU 1.4 – Liste des candidats potentiels du modèle *Minimal DM* (Cirelli et al. [2006]).

A la lecture du tableau 1.4, seules deux représentations passent les contraintes de DD tout en étant stables. Ces dernières sont le quintuplet fermionique (spin-1/2) d'hypercharge nulle, et le septuplet bosonique (spin-0) d'hypercharge nulle.

Ainsi, les auteurs peuvent se focaliser sur ces deux candidats, et étudier en détails les densités reliques associées (cf. Sec. 2.4) et les signatures éventuelles.

1.3.2 Le modèle *Well-Tempered Neutralino*

Ici on se place dans la cadre SUSY, et on considère le modèle MSSM. A la section Sec. 1.2.2, on a vu que le modèle contient des états propres de masse électro-faibles, appelés charginos et neutralinos. Les neutralinos, qui ont une charge électrique nulle, ont toutes les caractéristiques d'une *particule massive interagissant faiblement* –ou *Weakly Interacting Massive Particle*– (WIMP). Le paradigme du WIMP (cf. Sec. 2.4) nous dit que les neutralinos sont de parfaits candidats à la matière noire. Ainsi, le secteur neutralino est un terrain propice pour l'étude de la problématique de la matière noire (cf. Chap. 2).

L'approche la plus simple, dans un premier temps, est de considérer le cas de neutralinos purs gauginos/higgsinos. Cela revient à étudier trois cas distincts selon que l'on considère le cas pur bino (singlet), pur higgsino (bi-doublets) ou pur wino (triplet). Cependant, lorsqu'on calcul les masses de ces représentations telles que l'on retrouve la densité relique Ωh^2 mesurée aujourd'hui (cf. Sec. 2.4), les valeurs ne sont pas convenables. On parle parfois d'impasse. La

figure Fig. 1.1 montre les densités reliques respectives en fonctions des masses.

Typiquement, le cas d'une matière sombre qui serait un pur bino est doré et déjà exclu par les expériences de [DD](#) (cf. Sec. 4.2). En effet, la gamme de masse qui permet de retrouver la bonne densité relique est exclue par les limites supérieures de [DD](#) sur les section efficaces [MN](#)-noyau. Pour ce qui est des cas purs higgsino et pur wino, les valeurs des masses ainsi obtenues sont grandes. Pour obtenir de telles valeurs dans le modèle, cela nécessite un ajustement des paramètres qui n'est pas souhaitable dès lors que l'on veut une théorie naturelle. De plus, pour de telles masses, d'environ 1.1 TeV et 2.5 TeV respectivement pour le cas higgsino et wino, il n'est plus envisageable de les détecter au [LHC](#).

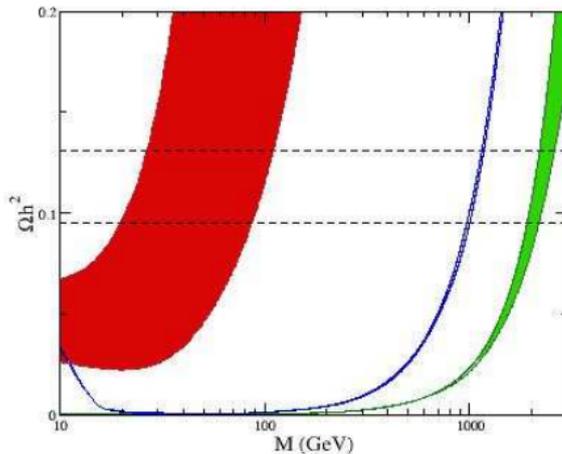


FIGURE 1.1 – Densités reliques des cas pur bino (rouge), pur higgsino (bleu) et pur wino (vert) en fonction de leur masse. La densité relique Ωh^2 mesurée se situe entre les lignes horizontales en pointillés. *Crédits : Arkani-Hamed et al. [2006].*

Partant de ce constat, il semble judicieux de considérer non plus des états purs gauginos/higgsinos pour les neutralinos, mais des mélanges. On peut varier l'intensité du mélange en changeant les valeurs des paramètres de la théorie. On parle de *Well-Tempered Neutralino* ou de mélange ajusté en français. Ce *mécanisme* a été popularisé par les auteurs de [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#).

Dans le [MSSM](#), si on écrit le Lagrangien en fonction des états propres de jauge qui sont les gauginos et higgsinos, il apparaît une matrice non diagonale qui correspond au terme de masse de ces derniers. Les états propres physiques (neutralinos) et leurs masses s'obtiennent en diagonalisant la matrice de masse. Mathématiquement, les champs physiques des neutralinos sont des combinaisons linéaires des champs de jauge, et leur masse sont des fonctions des éléments de la matrices de masse. Physiquement, on peut voir ça comme un mélange. Les neutralinos sont des mélanges, dont chaque composante est issue des gauginos/higgsinos. Le cas général est compliqué et pas spécialement intéressant en soi, et il correspond à la diagonalisation d'une matrice carrée de taille quatre.

En revanche, dans certains cas, le mélange devient plus simple à étudier. Généralement, on se retrouve dans une situation où les masses physiques et les champs physiques sont en fait des développements limités. Précédemment, nous avons vu les cas purs gauginos/higgsinos. Cela implique que le neutralino le plus léger, donc la matière noire, est en fait composé quasiment que d'une des représentations de jauge. Cela est tout à fait possible, du moment que les paramètres du Lagrangien soient convenablement choisis. Mais on a vu que de tels candidats à la matière sombre n'étaient pas satisfaisants.

Les auteurs de [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#) ont cherché à remédier à cela en étudiant non pas les cas purs, mais les mélanges impliquant deux représentations de jauge. A titre

d'exemple, il y a le cas bino-higgsinos ou encore bino-wino. Dans ces configurations, le neutralino le plus léger est essentiellement composé de deux états de jauge. Le degrés de l'un par rapport à l'autre est paramétré par un (ou deux) paramètre(s), appelé(s) paramètre(s) de mélange. Ce dernier introduit une certaine liberté quant aux interactions et aux propriétés de la matière sombre. On peut basculer d'un cas limite à un autre simplement en modifiant la valeur du paramètre de mélange. Prenons l'exemple du cas *well-tempered* bino-wino. La matière noire possède une composante provenant de bino, et une composante provenant du wino. Les proportions de ces composantes sont déterminées par le paramètre de mélange. On peut retrouver les cas purs, ou l'une des composante tend vers zéro et l'autre domine complètement le mélange.

On peut exprimer les masses physiques des neutralinos en fonction du paramètre de mélange. Celles-ci sont donc des fonctions continues en terme du paramètres de mélanges. Or, la densité relique est une fonction continue en terme des masses physique. Par transitivité, la densité relique Ωh^2 est donc une fonction continue en terme du paramètre de mélange. Ainsi, il est intéressant d'étudier comment varie la densité relique lorsque ce paramètre de mélange varie. C'est exactement le sujet de l'article [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#), dans lequel les auteurs considèrent les mélanges deux à deux entre les higgsinos et les gauginos. En choisissant des valeurs adéquates, il est toujours possible d'ajuster le mélange tel qu'on retrouve la valeur attendue pour la densité relique Ωh^2 .

1.4 Références

- G. Aad et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Phys. Lett.*, B716 :1–29, 2012. [2](#)
- N. Arkani-Hamed, A. Delgado, and G. F. Giudice. The Well-tempered neutralino. *Nucl. Phys.*, B741 :108–130, 2006. [4](#), [10](#), [11](#)
- S. Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. *Phys. Lett.*, B716 :30–61, 2012. [2](#)
- M. Cirelli, N. Fornengo, and A. Strumia. Minimal dark matter. *Nucl. Phys.*, B753 :178–194, 2006. [4](#), [8](#), [9](#)
- S. P. Martin. A supersymmetry primer. *High Energy Phys.*, 18 :1–98, 1997. [5](#), [8](#)

Chapitre 2

La matière noire

*” Matière invisible dont on
postule l’existence dans
l’Univers. ”*

Encyclopédie Larousse

Sommaire

2.1	Introduction	14
2.2	Équation de Boltzmann	15
2.3	Physique des particules et propriétés	17
2.4	Abondance cosmologique de la matière sombre	24
2.5	Références	26

2.1 Introduction

Le problème de la matière noire est apparu dans les années 30, avec les travaux de Fritz Zwicky. Ce dernier a démontré que la masse lumineuse de notre galaxie est bien inférieure à la masse dynamique. Autrement dit, la masse associée à la matière ordinaire que l'on observe n'est pas suffisante pour expliquer les effets gravitationnels qui régissent la Voie Lactée. C'est la première évidence de l'existence d'une matière sombre, qui interagirait avec la matière visible à travers l'interaction gravitationnelle.

Dans les années 60, l'étude des courbes de rotation des galaxies amène une nouvelle fois les scientifiques à postuler l'existence d'une matière noire massive. À nouveau, l'hypothèse d'une matière sombre massive qui interagirait avec la matière visible via la gravité permet d'expliquer l'allure des courbes observées.

Depuis, les observations n'ont fait que renforcer cette idée. La plupart se base sur la dynamique des corps célestes. À chaque fois le constat est le même : il manque de la masse. Pour y remédier, on postule l'existence d'une matière sombre, massive et interagissant essentiellement gravitationnellement avec la matière visible. Ainsi, le problème de la masse manquante n'en est plus un, et les observations deviennent cohérentes.

Signalons que même si le postulat de l'existence de la matière sombre semble faire consensus, il existe des théories de la gravitation modifiée qui prétendent expliquer les observations sans ajouter de masse, mais en modifiant la théorie de la gravitation elle-même. Cependant, lorsque que l'on considère des observations qui ne sont plus uniquement rattachées à la dynamique céleste, ces dernières sont mises à mal.

Dans ce manuscrit, nous ne nous intéresserons pas à de telles théories. On admettra l'existence d'une particule massive de matière noire.

Aujourd'hui encore, la nature de la matière sombre reste une énigme. Une fois son existence admise, de nombreuses questions se posent. La cosmologie, l'astrophysique et la physique des particules sont des champs de la Physique propices à l'étude de la matière sombre. Comme son nom l'indique, la physique des particules étudie les particules et leurs interactions. De fait, si l'on postule l'existence d'une particule de matière sombre, il faut alors être en mesure de l'inclure dans un modèle de particules.

La cosmologie est l'étude de l'Univers en tant qu'objet physique. En effet, la théorie de la relativité générale d'*Albert Einstein* amène à plusieurs équations décrivant comment l'Univers ainsi que son contenu sont régis. Cette discipline est primordiale pour comprendre les premiers instants, puis l'évolution de l'Univers. Enfin l'astrophysique est l'étude et l'observation des objets présents dans notre Univers.

De nos jours, il subsiste un rayonnement fossile correspondant au découplage des photons avec le bain thermique. On l'appelle **fond diffus cosmologique** –ou *Cosmic Microwave Background*– (**CMB**). Pendant plusieurs années, l'expérience Planck a cartographié le ciel afin de pouvoir l'étudier. Plus de détails sont donnés à la section Sec. 4.1.1 vis à vis de l'expérience et du **CMB**. Le **CMB** est une source d'informations précieuses. En effet, couplé avec d'autres expériences indépendantes comme l'étude des supernovæ, des lentilles gravitationnelles, de l'oscillation acoustique des baryons ou encore l'étude des grandes structures, il est possible de déterminer les proportions des composantes énergétiques de l'Univers. L'ensemble de ces résultats indépendants convergent et permettent de contraindre les paramètres cosmologiques. On parle de concordance cosmologique (cf. Fig. A.5 pour une illustration).

De ces paramètres cosmologiques, on en déduit la composition énergétique de l'Univers. Les composantes sont la matière atomique ou ordinaire (*i.e.* celle qui nous compose et qui est visible), la matière noire ou matière sombre (**MN**) et l'énergie sombre. Bien que leur nom soient similaires, la matière sombre et l'énergie sombre ne doivent pas être associées. L'énergie sombre est liée à l'expansion accélérée de l'Univers. Son origine est donc fondamentalement

différente de celle de la matière sombre. Voir l'image 2.1 pour une illustration de la répartition énergétique de l'Univers.

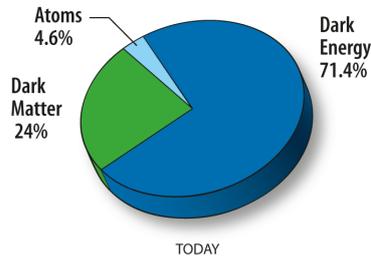


FIGURE 2.1 – Répartition énergétique de l'Univers standard. *Crédits : NASA/WMAP Science Team.*

Si on ne s'intéresse qu'à la matière qui compose l'Univers, d'après l'image Im. 2.1, près de 85% de celle-ci est noire. Or, le SM de la physique des particules ne permet pas de décrire la nature de cette matière sombre. Partant de ce constat, il semble évident qu'il est nécessaire de compléter la théorie du modèle standard des particules. Plusieurs questions se posent alors. Quelle est la nature de la matière sombre ? Quelles sont ses interactions avec la matière visible ? Comment est-elle répartie dans l'Univers ? etc ... De nombreuses expériences tentent d'y répondre, en espérant détecter un signal due à la matière noire ou en cherchant à contraindre les modèles de matière noire.

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse au problème de la matière noire. Bien évidemment, le sujet est vaste et il est impossible de tout aborder. Il existe de nombreuses théories de matière sombre aux propriétés différentes. Dans ce manuscrit, sauf contre indication, on se limitera aux aspects physiques qui sont utiles pour notre étude. Nos modèles impliquent des secteurs sombres *neutralino-like*, *i.e.* on suppose que la matière noire est une particule non-relativiste (ou froide) ayant des interactions non-gravitationnelles avec le bain thermique (*e.g.* WIMP avec des interactions électro-faibles). On s'intéresse au mécanisme de *freeze-out* et à la densité relique thermique associée pour une telle matière sombre. Les sections Sec. 2.2 et 2.3 s'inspirent notamment de Lisanti [2017].

Évidemment, pour sonder et calculer les paramètres d'une théorie donnée on fait difficilement les calcul à la main. Il existe des logiciels qui permettent d'évaluer les quantités utiles. Néanmoins, il est toujours intéressant de le faire analytiquement sur des modèles simples, ne serait-ce que pour comprendre la physique en jeu. De manière générale, lorsque que l'on utilise des logiciels, il est bon de connaître leur principe de fonctionnement.

2.2 Équation de Boltzmann

Soit la densité d'espace des phases $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. La probabilité de trouver une particule dans le volume $d^3\vec{x} d^3\vec{v}$ est par définition $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v$. La conservation des probabilités impose

$$\int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v = 1. \quad (2.1)$$

L'équation ci-dessus signifie simplement que, sachant qu'il y a une particule, la probabilité de la trouver dans l'ensemble de l'espace des phases qui lui est accessible est de 100%.

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution de la densité de l'espace des phases $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ d'une particule de matière sombre. Cette équation fondamentale stipule que

$$\mathbf{L}[f] = \mathbf{C}[f], \quad (2.2)$$

ou \mathbf{L} et \mathbf{C} sont respectivement les opérateurs de Liouville et de collision. Le terme à gauche de l'égalité donne, pour une matière sombre assimilée à un fluide, l'évolution de sa distribution d'espace des phases f . Il dépend du modèle cosmologique de l'Univers et de ses caractéristiques. L'opérateur de collision quant à lui comptabilise les interactions de la matière sombre avec les autres particules présentes dans le bain. Cette quantité dépend de la physique des particules et de la théorie considérée. L'équation Eq. (2.2) lie ces deux opérateurs, autrement dit cette égalité permet de décrire la matière sombre à travers ses interactions potentielles au cours de l'évolution de l'Univers.

Intéressons nous dans un premier temps à l'opérateur de Liouville \mathbf{L} . Lorsque que l'Univers est homogène et isotrope, ce qui semble être d'après les résultats expérimentaux, il est plus simple de travailler avec la forme covariante de \mathbf{L} . En effet, avec la métrique de Friedmann-Roberston-Walker, la densité d'espace des phases est isotrope et homogène, et ne dépend alors plus que de l'énergie E de la particule et du temps t . L'opérateur de Liouville prend alors la forme

$$\mathbf{L}[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.3)$$

Ici a est le facteur d'échelle de l'univers et \dot{a} sa dérivée temporelle. La quantité \dot{a}/a n'est rien d'autre que le taux d'expansion de l'Univers, ou le paramètre de Hubble noté H . On souhaite réécrire cette equation non plus en fonction de f , mais plutôt en fonction de la densité de particules n . Or,

$$n = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E, t), \quad (2.4)$$

où g est le nombre de degrés de liberté de la particule considérée. Avec les equations Eqs. (2.3) et (2.4), on peut écrire

$$g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{L}[f] = \frac{\partial n}{\partial t} - g H \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.5)$$

L'hypothèse d'isotropie permet d'écrire $d^3 p = 4\pi p^2 dp$ et $E dE = p dp$, ce qui ramène le calcul à une simple intégrale. Après une intégration par partie, on obtient

$$g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{L}[f] = \frac{dn}{dt} + 3 H n = \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (n a^3). \quad (2.6)$$

Partant de l'opérateur de Liouville exprimé en fonction de la fonction d'espace des phases, on s'est ramené à une expression faisant intervenir la densité de particule n . L'Eq. (2.2) peut alors se réécrire

$$\mathbf{L}[f] = \mathbf{C}[f] \Leftrightarrow g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{L}[f] = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{C}[f] \quad (2.7)$$

et avec l'équation Eq. (2.6), on obtient

$$\frac{dn}{dt} + 3 H n = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{C}[f]. \quad (2.8)$$

En l'absence de collision, $\mathbf{C} \equiv 0$ et le nombre de particules est constant. L'équation ci-dessus implique que la densité de particule diminue avec le temps, de sorte que la quantité $n a^3$ soit constante.

Jusqu'ici on s'est intéressé à l'opérateur de Liouville dans le cadre classique d'un univers isotrope et homogène, avec une matière noire froide ou non relativiste. La difficulté réside dans l'évaluation de l'opérateur de collision, qui prend en compte les interactions de la matière sombre avec le bain.

2.3 Physique des particules et propriétés

En plus de la mise en évidence d'une masse manquante, les observations astrophysiques permettent de déterminer quelle doit être la distribution de la matière sombre dans la galaxie. Il s'avère qu'il est possible d'expliquer les observations de façon générique, qui soit peu sensible au modèle de particule si ce n'est à la gamme de masse de la matière sombre. Il suffit d'avoir des halos de matière sombre. Typiquement, ces halos coïncident avec les grandes structures et forment des puits gravitationnels, qui une fois pris en compte dans la dynamique expliquent les observations. Le paramètre clé ici est donc la masse, ce qui n'est pas étonnant sachant que la particule de matière sombre a été introduit pour expliquer une masse manquante.

Malheureusement, les contraintes actuelles sur la masse de la matière sombre sont extrêmement faibles. Ces dernières ne sont pas les mêmes selon que la particule de matière sombre soit bosonique ou fermionique, mais dans les deux cas la gamme de masse accessible pour expliquer les observations est de plusieurs ordres de grandeur. Notons que, grâce au principe d'exclusion de Pauli, la masse limite inférieure pour un fermion est $m_{\text{fermion}} \gtrsim 0.7\text{KeV}$. Cette limite inférieure peut sembler faible, mais comparée à celle du boson, *i.e.* $m_{\text{boson}} \gtrsim 10^{-22}\text{eV}$, c'est vingt-cinq ordres de grandeur au dessus. Pour ce qui est des limites supérieures, certaines théories considèrent des échelles de l'ordre de la masse de Planck, soit environ 10^{27}eV . Ainsi, les physiciens n'ont que l'embarras du choix pour construire des théories de matière noire. Cependant, en fixant des hypothèses sur l'évolution de la densité de matière sombre dans l'univers primordial, certaines échelles de masses spécifiques sont alors plus ou moins motivées.

Dans la suite, on s'intéresse à une particule de matière sombre non-relativiste en équilibre thermique avec les particules du modèle standard dans l'Univers primordial. L'image 2.1 illustre les deux diagrammes possibles correspondant aux interactions $2 \rightarrow 2$.

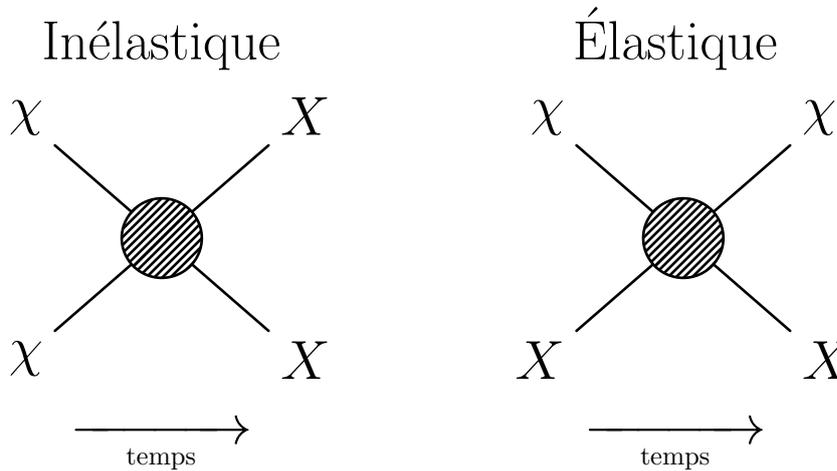


TABLEAU 2.1 – Illustration des processus inélastiques $\chi\chi \rightarrow XX$ (panel de gauche) et élastiques $\chi X \rightarrow \chi X$ (panel de droite) qui régissent les équilibres chimique et cinétique. La flèche du temps va de gauche à droite.

Matière sombre thermique

On suppose que la particule de matière sombre, notée χ , est en équilibre avec le bain thermique. On note X les particules du SM, qui sont en équilibre avec le bain de photons. On rappelle également que l'on considère une matière sombre froide (*i.e.* non-relativiste).

Revenons à l'équation Eq. (2.8). Lorsque que l'opérateur de collision n'est pas identiquement nul, l'évolution de la densité de particule n est non triviale. Pour s'en rendre compte, considérons les interactions de la forme $1+2 \leftrightarrow 3+4$. On manipule maintenant quatre espèces, que l'on identifie avec l'indice $i = 1, 2, 3, 4$.

L'opérateur de collision de la particule 1 est donnée par

$$g_1 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{C}[f_1] = - \sum_{spins} \int [f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 - f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) |\mathcal{M}_{34 \rightarrow 12}|^2] \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4, \quad (2.9)$$

où g_i et f_i sont respectivement les degrés de liberté et les densités d'espace des phases de la particule i . Le terme $|\mathcal{M}_{x \rightarrow y}|$ est l'élément de matrice pour le processus $x \rightarrow y$ obtenu avec les règles de Feynman usuelles, et la sommation sur les spins se fait sur les états initiaux et finaux. Les facteurs $(1 \pm f_i)$ prennent en compte le facteur d'exclusion de Pauli pour les fermions ($-$) et l'émission stimulée pour les bosons ($+$). Ils traduisent le fait qu'il est plus facile (difficile) pour un boson (fermion) de transitionner dans un état qui contient déjà un boson (fermion). C'est un résultat connu de la mécanique statistique de Bose-Einstein. Enfin, la seconde ligne de l'équation Eq. (2.9) contient un δ de Kronecker qui force la conservation d'énergie et les facteurs d'intégrations de l'espace des phases. Ces derniers sont

$$d\Pi_i = \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2 E_i}. \quad (2.10)$$

Sous sa forme actuelle, l'équation Eq. (2.9) est compliquée. Cependant, il est possible de la réduire à une forme beaucoup plus maniable avec les assumptions suivantes :

- L'équilibre cinétique est maintenu de sorte que les distributions d'espace des phases soient celles de Fermi-Dirac (fermion) ou Bose-Einstein (boson). En équation, si T_i est la température de l'espèce i et μ_i son potentiel chimique, dans le système où la constante de Boltzmann est unitaire cela donne

$$f_i = \left(e^{\frac{E_i - \mu_i}{T_i}} \pm 1 \right)^{-1}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} +1 \text{ pour un fermion.} \\ -1 \text{ pour un boson.} \end{cases} \quad (2.11)$$

- La température de chaque espèce satisfait la condition $T_i \ll E_i - \mu_i$. Dans ce cas, on peut négliger le facteur ± 1 provenant de la statistique. De plus, $(1 \pm f_i) \sim 1$ ce qui simplifie les calculs. Dans le cas non-relativiste qui nous intéresse ici, cette condition est facile à obtenir. En effet, $E \sim m > T$.
- Les particules de l'état final (3 et 4) sont rapidement en équilibre thermique avec le bain de photons. Cette condition est facile à réaliser, notamment lorsque les particules en question sont chargées électriquement. En effet, il ne fait aucun doute qu'elles interagissent fortement avec les photons du bain. Pour des états neutres, c'est également le cas dans la majorité des cas qui nous intéressent.

De plus, la relation bien connue reliant la section efficace à l'élément de matrice permet d'écrire

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}_{ij \rightarrow kl}|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j - p_k - p_l) d\Pi_k d\Pi_l = 4 g_i g_j \sigma_{ij} \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - (m_i m_j)^2}, \quad (2.12)$$

où σ_{ij} est la section efficace associée au processus de diffusion considéré.

Repartant de l'équation Eq. (2.9), avec les assumptions et l'égalité Eq. (2.12), et en substituant les f_i par les n_i avec Eq. (2.4), on a maintenant

$$g_1 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \mathbf{C}[f_1] = - \int \{ (\sigma_{M\phi})_{12} dn_1 dn_2 - (\sigma_{M\phi})_{34} dn_3 dn_4 \}, \quad (2.13)$$

où, pour le processus $ij \rightarrow kl$, on a défini la vitesse de Møller comme étant

$$(v_{M\phi})_{ij} = \frac{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - (m_i m_j)^2}}{E_i E_j}. \quad (2.14)$$

Enfin, étant donné que la vitesse de Møller varie très peu lorsque le nombre de particules des états initiaux et finaux changent, on peut l'extraire des intégrales. L'intégration devient triviale, en revenant à l'équation Eq. (2.8) on se retrouve avec

$$\frac{dn_1}{dt} + 3H n_1 = -\langle \sigma v_{M\phi} \rangle_{12} n_1 n_2 + \langle \sigma v_{M\phi} \rangle_{34} n_3 n_4, \quad (2.15)$$

où ici $\langle \sigma v_{M\phi} \rangle_{ij}$ est la moyenne thermique à l'équilibre, définie comme

$$\langle \sigma v_{M\phi} \rangle_{ij} = \frac{\int \sigma v_{M\phi} dn_i^{eq} dn_j^{eq}}{\int dn_i^{eq} dn_j^{eq}}. \quad (2.16)$$

Il est à noter que la vitesse en jeu dans le calcul de la moyenne de la section efficace $\langle \sigma v_{M\phi} \rangle$ n'est pas la vitesse relative des particules entrantes. Ce détail à son importance car contrairement à la quantité $(v_{rel})_{ij} n_i n_j$, la quantité $v_{M\phi} n_i n_j$ est invariante de Lorentz.

Dans la suite, pour alléger les notations, on notera simplement v pour $v_{M\phi}$.

Si maintenant on considère que les espèces 3 et 4 sont en équilibre thermique avec le bain de photons, et que les espèces 1 et 2 sont en équilibre via l'interaction $12 \leftrightarrow 34$, alors le bilan détaillé nous dis que

$$f_1^{eq} f_2^{eq} = f_3^{eq} f_4^{eq}, \quad \text{où encore} \quad \langle \sigma v \rangle_{12} n_1^{eq} n_2^{eq} = \langle \sigma v \rangle_{34} n_3^{eq} n_4^{eq}. \quad (2.17)$$

On peut alors se ramener à l'équation

$$\frac{dn_1}{dt} + 3H n_1 = -\langle \sigma v \rangle_{12} (n_1 n_2 - n_1^{eq} n_2^{eq}). \quad (2.18)$$

On a une équation analogue pour l'espèce 2, en remplaçant n_1 par n_2 à gauche du égal et avec le même terme à droite de l'égalité.

Le raisonnement que l'on vient de faire s'applique à tous les diagrammes du type $ij \rightarrow kl$, sous réserve de la validité des assumptions. Par soucis de simplicité, on ne considère que l'annihilation pure dans la partie suivante. Cela étant dit, tout ce qui est abordé à la section Sec. 2.3 se généralise facilement aux autres situations. Évidemment, l'annihilation pure n'est qu'un cas particulier parmi toutes les possibilités.

Pour une théorie générale, il n'y a pas que de l'annihilation. En effet, il peut y avoir des désintégrations que l'on a pas considérée ici. De plus, on a plus ou moins sous entendu que l'on considérait une particule de matière sombre. Or, le secteur sombre est la plupart du temps plus compliqué. Pour plus détails, voir la section Sec. 2.3.

Annihilation

Si les particules 1 et 2 sont identiques (*i.e.* processus d'annihilation), alors la densité de particules associée $n = n_1 = n_2$ satisfait

$$\frac{dn}{dt} + 3H n = -\langle \sigma v \rangle (n^2 - n_{eq}^2). \quad (2.19)$$

C'est typiquement le cas du processus inélastique illustré sur la figure Fig. 2.1, qui correspond à l'annihilation de deux particules de matière sombre χ en particules du SM. Ainsi, les particules indexées 1 et 2 sont les mêmes, et on note n la densité associée à la matière sombre.

Les particules 3 et 4 sont des particules du modèle standard et sont équilibre avec le bain de photon.

On a vu que, indépendamment de l'opérateur de collision et fortiori des interactions de la matière sombre, la densité de particule de la matière noire n décroît avec l'expansion de l'Univers (cf. Eq. (2.8)). Bien que primordiale, on souhaite s'absoudre de l'effet de l'expansion pour ne garder à travers l'équation de Boltzmann que les effets dues aux interactions de la matière sombre avec les autres particules en équilibre avec le bain thermique. Pour ce faire, on introduit l'entropie.

Soit une espèce de densité d'énergie ρ , de pression p et de température T . Partant de la relation thermodynamique $T dS = U + p dV$, on montre que l'entropie associée S vérifie

$$S = \frac{a^3}{T}(\rho + p) \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.20)$$

L'entropie est constante avec le temps, et s'il y a plusieurs espèces alors les entropies respectives sont conservées séparément. Cette propriété de l'entropie en fait une quantité physique intéressante. En notant que a est le facteur d'échelle, a^3 est donc proportionnel à un volume. De fait, on introduit la densité d'entropie, notée s est définie comme $s = S/a^3 = (\rho + p)/T$. On a alors

$$0 = \frac{dS}{dt} = \frac{d(s a^3)}{dt} \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = -3H s. \quad (2.21)$$

En comparant les équations Eq. (2.21) et (2.6), on constate que la densité d'entropie est régit par la même équation que la densité de particule en l'absence de collisions. Autrement dit l'encodage de l'effet de l'expansion de l'univers sur ces deux quantités sont identiques.

Il est alors naturel de considérer la quantité $Y = n/s$, de sorte que les effets de l'expansion de l'Univers de l'équation de Boltzmann sur n soient compensés par ceux sur s . Ainsi la quantité Y encode dans l'équation dans Boltzmann uniquement les effets dues aux interactions de la matière sombre avec les autre particules en équilibre avec le bain de photons.

En substituant $Y = n/s$ dans l'équation Eq. (2.19), et en utilisant l'équation Eq. (2.21), il est facile de voir

$$\frac{dY}{dt} = s \langle \sigma v \rangle (Y_{eq}^2 - Y^2). \quad (2.22)$$

L'équation ci-dessus est donnée en fonction de la variable du temps t usuelle. Néanmoins, la variable t peut être troquée contre une autre variable, notée x , telle que $x = m/T$ où m est la masse de la matière sombre. La variable x augmente avec le temps t car la température T décroît avec le temps ($T \propto a^{-1}$). En ré-exprimant la dérivée temporelle en une dérivée sur x , on a

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} = -\frac{x}{T} \frac{dT}{dt} \frac{d}{dx}. \quad (2.23)$$

De plus,

$$\frac{ds}{dt} = -3H s = \frac{dT}{dt} \frac{ds}{dT}. \quad (2.24)$$

En injectant les équations Eq. (2.23) et (2.24) dans l'équation Eq. (2.22) pour changer la variable t en fonction de a variable x on obtient

$$\frac{dY}{dx} = \frac{T}{3H x} \frac{ds}{dT} \langle \sigma v \rangle (Y_{eq}^2 - Y^2). \quad (2.25)$$

L'équation que l'on viens d'obtenir permet de calculer l'évolution de la matière noire. Elle n'admet pas de solution analytique, et par conséquent on la résout numériquement à l'aide de codes et d'ordinateurs. Évidemment, l'équation Eq. (2.25) est valable dans le cas simple ou les particules 1 et 2 sont identiques, mais elle se généralise très facilement dans les autres

cas. Ce que l'on viens de voir encapsule toutes les notions physiques importante, telle que l'expansion de l'univers ou les interactions de la matière sombre.

On remarque que l'aspect *physique des particules* est intervient dans la moyenne de la section efficace $\langle\sigma v\rangle$. Or, la variable Y est gouvernée par $\langle\sigma v\rangle$, qui rappelons le est donnée par

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{\int \sigma v dn_i^{eq} dn_j^{eq}}{\int dn_i^{eq} dn_j^{eq}} = \frac{\int \sigma v e^{-E_i/T} e^{-E_j/T} d^3p_i d^3p_j}{\int e^{-E_i/T} e^{-E_j/T} d^3p_i d^3p_j}. \quad (2.26)$$

La dernière égalité s'obtient en remplaçant les densités de particules par leur expression en fonction de densités de l'espace des phases à l'équilibre, ces dernière étant assimilées à des distribution de Maxwell-Boltzmann dans la limite considérée ou $T \ll E_i - \mu_i$. Ici, comme les espèces sont en équilibre il n'y a qu'une seule température, celle du bain des photons.

Par des redéfinitions des variables d'intégration, l'équation Eq. (2.26) peut être calculée. Pour un calcul explicite, voir le célèbre papier [Gondolo and Gelmini \[1991\]](#). On montre que

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{8m^4 T K^2(m/T)} \int_{4m^2}^{\infty} \sigma(\tilde{s} - 4m^2) \sqrt{\tilde{s}} K_1(\sqrt{\tilde{s}}/T) ds \xrightarrow{\text{non-rel}} b_0 + \frac{3}{2} b_1 x^{-1} + \dots, \quad (2.27)$$

où K_i est la fonction de Bessel modifié à l'ordre i , et $\tilde{s} = 2m^2 + 2E_i E_j - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$.

Dans la limite non relativise, *i.e.* pour $x \ll 1$, on peut écrire la section efficace comme une expansion en puissance négative de x . Dans la très grande majorité des cas, le premier et/ou le second terme de l'expansion domine. Le cas ou le terme b_0 domine est appelé annihilation en onde s . Si c'est le second terme en x^{-1} qui domine on parle d'annihilation en onde p . Cette terminologie peut sembler anecdotique, mais la distinction est justifiée car le premier terme ne dépend pas de la masse de la particule, contrairement au second terme qui dépend de x et donc a fortiori de la masse. Cette différence a donc son importance.

Enfin, il est important de noter que ce développement est une approximation du cas non relativiste, et qu'il ne permet pas de prendre en compte certains effets importants tels que les résonances ou les effets de seuil.

Bien qu'il n'existe pas de solutions analytique à l'équation Eq. (2.25), on peut quand même se donner une idée du comportement global de Y .

Dans un premier temps, il faut comparer le taux d'annihilation Γ de la matière sombre avec le taux d'expansion de l'Univers, soit H la constante de Hubble. En effet, la balance entre ces deux phénomènes est cruciale. Lorsque $H \gg \Gamma$, le processus d'annihilation est très efficace et l'équilibre entre la matière sombre et le bain thermique est maintenue. En revanche, lorsque $H \ll \Gamma$, les particules de matière sombre ne peuvent plus interagir pour s'annihiler du fait de l'expansion trop rapide de l'Univers. Par conséquent les particules de matière sombre ne sont plus en équilibre. La figure 2.2 illustre ces comportement limites, que l'on peut résumer ainsi

$$Y(x \lesssim x_f) \simeq Y_{eq}(x) \quad \text{et} \quad Y(x \gtrsim x_f) \simeq Y_{eq}(x_f), \quad (2.28)$$

ou x_f correspond au *freeze-out*, l'instant auquel Y quitte sa position d'équilibre et ou la densité de matière sombre est *figée*. Génériquement, on a $x_f = \mathcal{O}(10)$.

Tout ce que l'on viens de voir dans le cadre de l'annihilation est généralisable à tout autre situation. Notamment dans le cadre de la section suivante, avec co-annihilation, désintégration, etc...

Co-annihilation et autres processus

Bien que l'annihilation pure soit un processus important dans le calcul de l'abondance cosmologique, d'autres processus sont tout aussi cruciaux. Voir les papiers [Binetruy et al.](#)

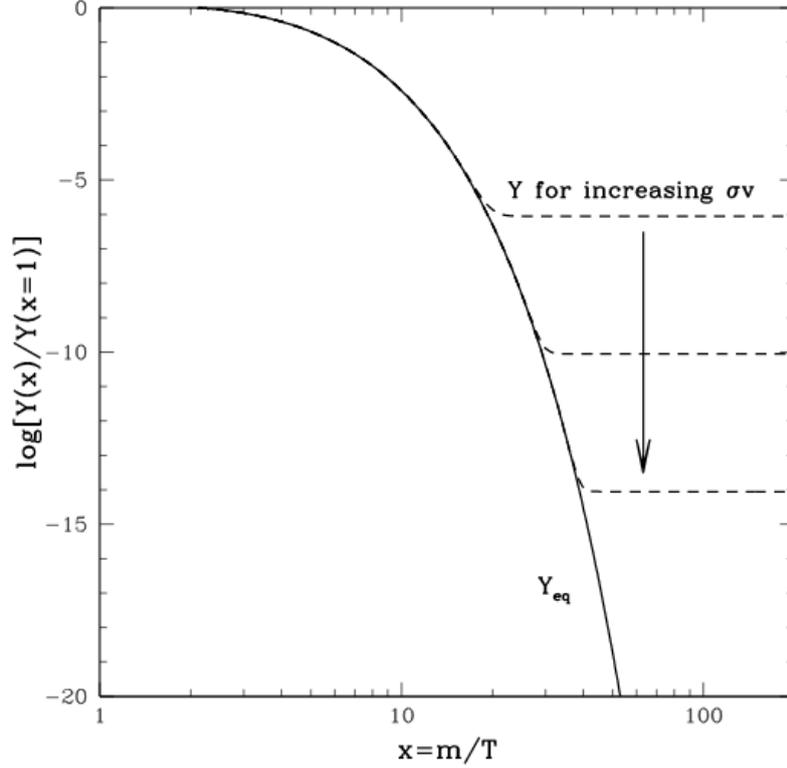


FIGURE 2.2 – Illustration de l'évolution de la densité de matière sombre Y en fonction de x . *Crédits : Garrett and Duda [2011].*

[1984], Griest and Seckel [1991] ou bien Edsjo and Gondolo [1997]. Pour fixer les choses, on considère dans cette section le MSSM. Ce dernier possède un secteur sombre riche composé de neutralinos et charginos. Un tel secteur est très intéressant pour nos modèles puisque leur secteur sombre sont similaires.

On considère donc le secteur sombre, constitué des neutralinos mais également des charginos. La R-parité permet d'affirmer que le neutralino le plus léger (LSP) est la matière sombre. On notera χ_i pour désigner toute particule du secteur sombre, et X pour les non-supersymétriques (SM).

On a vu que l'équation de Boltzmann permettait de décrire l'évolution au cours du temps de la densité de particules n_i d'une espèce donnée. Afin de l'écrire correctement, elle doit inclure les processus physiques pertinent, *i.e.* ceux ayant un impact sur la densité de particules. Pour les particules supersymétriques telles que les neutralinos, ils sont au nombre de quatre. Donnons dans un premier temps l'équation de Boltzmann complète, puis expliquons les termes à droite de l'égalité.

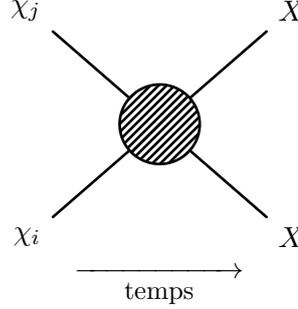
$$\frac{dn_i}{dt} = -3Hn_i - \sum_j \langle \sigma v \rangle_{ij} (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) \quad (2.29)$$

$$- \sum_{j \neq i} \left[\Gamma_{ij} (n_i - n_i^{eq}) - \Gamma_{ji} (n_j - n_j^{eq}) \right] \quad (2.30)$$

$$- \sum_{j \neq i} \left[\langle \sigma'_X v \rangle_{ij} (n_i n_X - n_i^{eq} n_X^{eq}) - \langle \sigma'_X v \rangle_{ji} (n_j n_X - n_j^{eq} n_X^{eq}) \right] \quad (2.31)$$

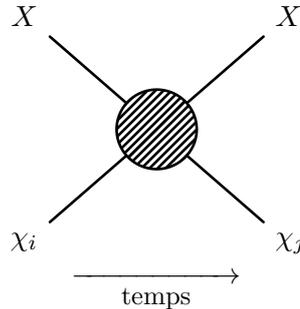
1^{er} terme : L'expansion de l'univers. Évidemment on retrouve le terme due à l'expansion de l'Univers et a fortiori à la dilution du nombre de particules par unité de co-volume. On l'a déjà étudié à la section Sec. 2.2. C'est exactement la même physique.

2nd terme : La co-annihilation. Ce terme correspond à tous les diagrammes du type $\chi_i \chi_j \rightarrow X X$. Le schéma ci dessous illustre ces processus. On peut tout à fait avoir $i = j$, et dans ce cas on retrouve l'annihilation pure que l'on a vu à la section Sec. 2.3. Cependant, deux particules différentes du secteur sombre peuvent aussi se rencontrer pour donner des particules du SM. On parle alors de co-annihilation. Par exemple, dans le MSSM un neutralino et un chargino peuvent se co-annihiler pour donner lieu à un neutrino et lepton. Au même titre que l'annihilation, la co-annihilation modifie le nombre de particules du secteur sombre et doit être comptabilisée.



3nd terme : Les désintégrations. Depuis le début, nous n'avons jamais considéré les désintégrations. Or, il se peut que les particules du secteur sombre ne soient pas stables et puissent se désintégrer. Ces désintégrations sont plus ou moins efficaces selon le choix des paramètres. De plus, la R-parité contraint ces désintégrations. En effet, une particule supersymétrique ne peut se désintégrer qu'en un nombre impair de particules supersymétriques si la dynamique le permet. On comptabilise avec des signes opposés selon que la particule i que l'on regarde se désintègre (n_i diminue) ou bien qu'elle soit l'un des états d'une désintégration d'une particule j (n_i augmente). Évidemment, on ne peut pas avoir $i = j$. Dans l'équation Eq. 2.30, les Γ sont les taux de désintégrations.

4nd terme : La diffusion d'une particule du secteur sombre sur le bain thermique. Le diagramme correspondant se trouve ci-dessous. L'équation Eq. (2.31) prend en compte, avec le bon signe, les processus $\chi_i X \rightarrow \chi_j X$ (n_i diminue) et $\chi_j X \rightarrow \chi_i X$ (n_i augmente). Ce n'est pas de la co-annihilation, car ici le nombre global de particules sombres est inchangée, mais l'effectif de chaque espèce change. On doit avoir $i \neq j$, car autrement la densité de particule n'est pas affectée.



Bien que les sections efficaces des processus de co-annihilation et de diffusion soient de même magnitude, la densité de particule n_X du bain relativiste est bien plus grande que n'importe quelle densité n_j du secteur sombre non-relativiste. Ainsi, comme la probabilité de ces processus est proportionnelle aux densités des états initiaux, la diffusion d'une particule supersymétrique sombre sur le bain thermique est beaucoup plus efficace que les processus de co-annihilation. Ainsi, on peut considérer que les distributions des χ_i restent en équilibre thermique.

Généralement, les temps de vie des particules χ_i autre que la **LSP** sont très inférieure à l'âge de l'Univers. De plus, la conservation de la R-parité implique qu'au bout d'un certain temps toutes ces particules se sont désintégrées, de sorte qu'il ne reste plus que le neutralino le plus léger, soit la matière sombre. Ainsi, l'abondance finale n'est autre que la somme de des abondance associé aux χ_i .

$$n = \sum_i n_i. \quad (2.32)$$

Si on prend cette somme dans l'équation Eq. (2.29), on réalise que le troisième et le quatrième termes à droite de l'égalité disparaissent. Ce n'est pas surprenant puisque ces derniers ne changent pas le nombre global de particules sombres. De plus, on a vu que les distributions restaient à l'équilibre. Ça reste vrai pour les quotients. On a alors,

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \sum_{i,j} \langle \sigma v \rangle_{ij} (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) \quad \text{et} \quad \frac{n_i}{n} \simeq \frac{n_i^{eq}}{n^{eq}}. \quad (2.33)$$

En combinant ces deux équations ci-dessus, on peut écrire

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn \langle \sigma_{eff} v \rangle (n^2 - n_{eq}^2), \quad \text{avec} \quad \langle \sigma_{eff} v \rangle = \sum_{ij} \langle \sigma v \rangle_{ij} \frac{n_i^{eq} n_j^{eq}}{n^{eq} n^{eq}}. \quad (2.34)$$

On retrouve exactement la même équation (Eq. 2.19) que dans le cas de l'annihilation pure, mais dans un cadre plus général qu'est celui du **MSSM**. On peut donc faire exactement les mêmes manipulations, pour notamment retrouver

$$\frac{dY}{dx} = \frac{T}{3Hx} \frac{ds}{dT} \langle \sigma_{eff} v \rangle (Y_{eq}^2 - Y^2). \quad (2.35)$$

Pour plus de détail et un calcul détaillé de la densité relique incluant tous ces processus dans le cadre du **MSSM** avec le neutralino le plus léger comme matière sombre, voir **Edsjo and Gondolo [1997]**.

2.4 Abondance cosmologique de la matière sombre

En cosmologie, on définit la quantité Ω_X associée à une composante énergétique X de l'Univers de la manière suivante,

$$\Omega_X = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_X = \frac{\rho_X}{\rho_{crit}} \quad \text{avec} \quad \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.36)$$

Faisons de même pour la matière sombre χ . Pour une matière sombre non relativiste, ou froide, on a la relation $\rho_\chi = m_\chi n_\chi$. De plus, on a vu que $n_\chi = Y s$, d'où

$$\Omega_\chi = \frac{m_\chi s Y}{\rho_{crit}}. \quad (2.37)$$

Évidemment, ce qui nous intéresse c'est la densité relique calculée aujourd'hui car c'est cette valeur qui est mesurée par les expériences telle que Planck. Les résultats sont généralement donnés à un facteur h^2 près, et on montre alors que

$$\Omega_\chi = \frac{m_\chi s Y}{\rho_{crit}} \xrightarrow{\text{aujourd'hui}} \Omega_\chi h^2 \simeq \frac{10^{-26} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{\langle \sigma v \rangle} \simeq 0.1 \left(\frac{0.01}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{m_\chi}{100 \text{ GeV}} \right)^2, \quad (2.38)$$

ou l'on a supposé

$$x_f = \mathcal{O}(10) \quad \text{et} \quad \langle \sigma v \rangle \simeq \frac{\alpha^2}{m^2}. \quad (2.39)$$

La quantité $\Omega_\chi h^2$ est définie comme l'abondance cosmologique de la particule χ . Lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement Ωh^2 . Cette quantité peut se calculer à chaque instant dans l'histoire de l'Univers. Lorsque qu'elle est évaluée aujourd'hui, on parlera tout autant d'abondance cosmologique que de **densité relique**. Le terme relique signifie que ce que l'on observe aujourd'hui comme matière sombre est le vestige d'une histoire thermique.

Paradigme du **WIMP**

L'équation Eq. (2.38) n'as pas été écrite sous cette forme de manière anodine. En effet, en assumant une particule de matière sombre interagissant faiblement, *i.e.* pour un couplage $\alpha \sim 0.01$, avec une masse électro-faible de l'ordre de 100GeV, on obtient une densité relique Ωh^2 qui correspond à la mesure de Planck, soit environ 0.1. Le fait qu'une telle particule donne naturellement la densité relique observée aujourd'hui est connue sous le nom de miracle du **WIMP** ou paradigme du **WIMP**. Ce constat à mené de nombreux chercheurs à considérer des modèles ayant comme candidat à la matière sombre une telle particule, notamment en **SUSY** avec les neutralinos. Ces particules sont appelées **WIMP** pour *Weakly Interactive Massive Particle*.

Cependant, il faut garder à l'esprit que ce "miracle" n'est pas nécessairement la solution qu'a choisie la nature. Il est tout à fais envisageable, à la vue de l'équation Eq. (2.38), de retrouver la bonne densité relique avec des couplages bien plus faibles avec des masses plus grandes par exemple.

2.5 Références

- P. Binetruy, G. Girardi, and P. Salati. Constraints on a System of Two Neutral Fermions From Cosmology. *Nucl. Phys.*, B237 :285–306, 1984. [21](#)
- J. Edsjo and P. Gondolo. Neutralino relic density including coannihilations. *Phys. Rev.*, D56 : 1879–1894, 1997. [22](#), [24](#)
- K. Garrett and G. Duda. Dark Matter : A Primer. *Adv. Astron.*, 2011 :968283, 2011. [22](#)
- P. Gondolo and G. Gelmini. Cosmic abundances of stable particles : Improved analysis. *Nucl. Phys.*, B360 :145–179, 1991. [21](#)
- K. Griest and D. Seckel. Three exceptions in the calculation of relic abundances. *Phys. Rev.*, D43 :3191–3203, 1991. [22](#)
- M. Lisanti. Lectures on Dark Matter Physics. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics : New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015) : Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*, pages 399–446, 2017. URL <https://inspirehep.net/record/1427360/files/arXiv:1603.03797.pdf>. [15](#)

Chapitre 3

Le modèle *Well-tempered n-plet dark matter*

” La théorie, c’est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c’est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Si la pratique et la théorie sont réunies, rien ne fonctionne et on ne sait pas pourquoi. ”

Albert Einstein

Sommaire

3.1	Introduction	28
3.1.1	Motivations	28
3.1.2	Constataion	29
3.1.3	Finalité	30
3.2	Présentation du modèle	31
3.2.1	Description générale	31
3.2.2	Lagrangien	32
3.3	Classification des représentations	34
3.3.1	$n = 0$, un singleton comme matière sombre?	34
3.3.2	$n = 2$, Le <i>well-tempered</i> higgsino-bino et sa version non-SUSY	34
3.3.3	$n = 3$, Le <i>well-tempered</i> wino-bino et sa version non-SUSY	35
3.3.4	$n = 4$, Le quadruplet-singlet	39
3.3.5	$n = 5$, Le quintuplet-singlet	42
3.3.6	Masses physiques et mélange	43
3.4	Références	44

3.1 Introduction

3.1.1 Motivations

Comme vu précédemment dans le chapitre 2, l'hypothèse d'une matière sombre dans l'Univers suggère l'existence d'une ou plusieurs nouvelles particules en plus de celles présentes dans le SM. La mesure de la densité relique, notée Ωh^2 , permet de calculer la quantité de matière sombre dans l'univers. Les données récentes de Planck indiquent que la valeur actuelle est $\Omega h^2 = 0.120 \pm 0.001$ (Cf Aghanim et al. [2018]). Néanmoins, au moment de notre analyse ces données n'étant pas encore publiées, nous avons utilisé la valeur précédente ; celle-ci étant $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$ (Cf Ade et al. [2016]). C'est pourquoi dans ce manuscrit nous utiliserons systématiquement la valeur publiée en 2015. Voir la section Sec. 4.1.1 pour plus de détails sur l'expérience Planck.

Une telle mesure est précieuse, car toute théorie ayant une valeur supérieure pour la mesure de la densité relique est exclue. En effet, cela signifie que la matière sombre est en *sur-abondance*, ce qui rentre en désaccord direct avec les observations. En revanche, si pour une théorie donnée, la densité relique associée est inférieure à la valeur mesurée, la théorie n'est pas nécessairement exclue. On parle alors de *sous-abondance*. Cela signifie que le modèle justifie l'existence d'une partie de la matière sombre dans l'Univers, mais pas de sa totalité. Il faut alors compléter le modèle afin de rendre compte de la totalité de la matière sombre dans l'Univers. Par exemple en ajoutant une ou plusieurs nouvelles particules sombres, afin que la somme des densités reliques soit égale à la densité relique totale Ωh^2 mesurée. De tels modèles ne sont plus *minimaux*, dans le sens où le secteur associé à la matière sombre se complexifie. Enfin, le troisième cas correspond aux modèles qui, pour un unique candidat à la matière sombre, reproduisent la densité relique Ωh^2 mesurée. Dans ce cas on parle de modèle minimal, en opposition au cas précédent. On a déjà évoqué ce cas de figure à la section 1.3.1, avec le modèle *Minimal Dark Matter*. De tels modèles sont particulièrement intéressants car le secteur sombre est très simple. Nombre d'entre eux utilisent les propriétés du WIMP. La densité relique d'une particule stable, électriquement neutre, ayant une section efficace de l'ordre de celle de l'interaction faible et avec une masse proche de l'échelle électro-faible, reproduit *grosso modo* la densité relique Ωh^2 mesurée aujourd'hui dans l'Univers. On parle du **miracle du WIMP, ou paradigme du WIMP** (cf. Sec. 2.4).

Les représentations électro-faibles possédant les caractéristiques d'un WIMP sont donc *naturellement* des candidates potentielles de matière sombre. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer de nouvelles interactions en plus de celles déjà présentes dans le SM, puisque que l'interaction faible y est déjà décrite. Le SM demeure identique d'un point de vue structurel, *i.e.* le groupe de symétrie de jauge associé reste $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Cependant en y ajoutant une ou plusieurs représentations, notamment chargées sous $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, on obtient des modèles *simples* qui peuvent potentiellement expliquer la matière sombre.

Jusqu'ici on ne s'est intéressé qu'au problème de la matière sombre. Les modèles sont conçus de manière à ce qu'ils redonnent la bonne densité relique Ωh^2 observée. Évidemment, ce n'est pas suffisant. Toute bonne théorie se doit de pouvoir être testée, afin d'être validée ou non. Ainsi, les modèles envisagés dans ce manuscrit se veulent être potentiellement testables au LHC. Pour ce faire, seules les masses jusqu'à quelques centaines de GeV seront considérées. En effet, pour une production électro-faible, la portée du LHC est de quelques centaines de GeV avant que la section efficace de production ne devienne négligeable.

Pour résumer, la motivation principale est théorique. On souhaite établir un modèle de **matière sombre**, le plus minimal possible et qui exploite le **paradigme du WIMP**. La seconde motivation est quant à elle pratique. Le modèle en question se doit d'être **potentiellement testable au LHC**, ce qui limite les masses des nouvelles représentations électro-faibles à quelques centaines de GeV. Dans la suite, on prend la masse M_Z du boson Z^0 comme

masse électrofaible de référence. L'important est de garder à l'esprit que l'ordre de grandeur de l'échelle électro-faible est de 100 GeV.

3.1.2 Constatation

Le modèle *Minimal Dark Matter* (cf. Cirelli et al. [2006]) utilise le paradigme du WIMP dans un cadre minimal. Les auteurs listent toutes les représentations electro-faibles, et gardent celles qui passent les contraintes expérimentales. Ils ajoutent ensuite au SM les représentations consistantes, puis calcule la densité relicue.

On l'a déjà vu à la section 1.3.1, la plus petite représentation qui passe toute les contraintes est le quintuplet fermionique de SU(2) avec hypercharge nulle. Sur la figure 3.1, la densité relicue Ωh^2 est atteinte lorsque la courbe rouge croise la bande horizontale grise, soit aux alentours des 10 TeV.

Ainsi, bien que ce modèle soit intéressant en soit, la masse de la nouvelle représentation doit être quatre ordres de grandeur au dessus de l'échelle électro-faible qui nous intéresse pour avoir une densité relicue en accord avec l'expérience.

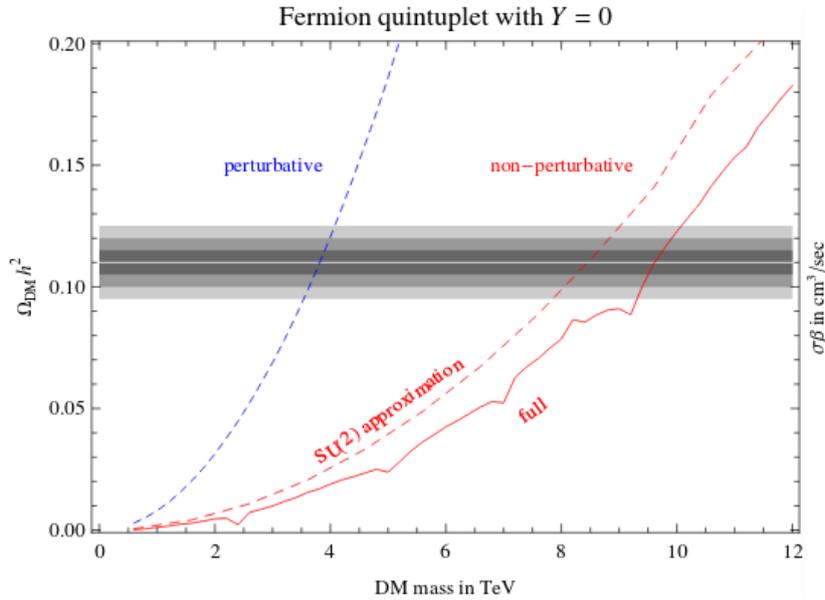


FIGURE 3.1 – Densité relicue du 5-plet MDM en fonction de sa masse. La courbe pleine rouge correspond au calcul complet incluant les effets de Sommerfeld, effets non perturbatifs qui amplifient les annihilations. La courbe bleue inclue les annihilations s-wave et p-wave au niveau de l'arbre (calcul perturbatif). La barre horizontale correspond à la densité relicue Ωh^2 . Crédits : Cirelli and Strumia [2009].

Avec le modèle *Well-Tempered Neutralino* (cf. Arkani-Hamed et al. [2006]), on est dans un cadre SUSY. A priori, l'environnement est bien plus complexe que celui du SM. Cependant, les auteurs regardent l'espace des paramètres où seules les représentations électro-faibles qui sont les electroweakinos (cf. 1.3.2 et 1.2.1) sont relevants. Autrement dit toutes les autres particules supersymétriques sont découplées de l'échelle électro-faible. La théorie résultante peut être vue comme une théorie effective, contenant le SM usuel et uniquement les neutralinos et charginos à l'échelle électro-faible. Ces derniers constituent alors le secteur de la matière sombre. Suite à la brisure électro-faible, les états présents dans le secteur sombre vont alors se mélanger pour finalement donner lieu aux états physiques, dont la matière sombre. Ici on a donc la notion clés de *mélange*. Ce dernier est souvent paramétrisé par un angle ou plusieurs angles, appelé angle(s) de mélange. Sa valeur dépend du choix des paramètres fondamentaux de la théorie, telles que les masses et les couplages présents dans le Lagrangien. *In fine*, en choisissant des valeurs adéquates on peut ajuster le mélange tel que celui-ci redonne bien la

valeur attendue pour la densité relique Ωh^2 . En d'autres termes, pour un modèle donné, on peut retrouver la bonne densité relique en ajustant le ou les angle(s) de mélange. On parle de *well-tempered mixing* ou mélange correctement ajusté en français.

Si on s'intéresse aux représentations électro-faibles, les articles [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#) et [Cirelli et al. \[2006\]](#) nous disent que, pour retrouver la densité relique Ωh^2 mesurée par Planck on doit avoir :

- Pur higgsino MN (bi 2-plet fermionique) $\rightarrow m = 1.1 \text{ TeV} \gg M_Z$
- Pur winos MN (3-plet fermionique) $\rightarrow m = 2.5 \text{ TeV} \gg M_Z$
- Minimal MN (5-plet fermionique) $\rightarrow m = 10 \text{ TeV} \gg \gg M_Z$

On voit immédiatement que les masses des représentations sont beaucoup plus grandes que l'échelle électro-faible M_Z . Ce n'est pas étonnant, et on peut extrapoler sans prendre trop de risques en affirmant que plus la représentation est grande, plus sa masse doit être élevée. Cela s'explique simplement par le fait que qu'en augmentant la taille de la représentation, on accroît également l'aptitude de la matière sombre à interagir et donc la densité relique associée diminue. Cet effet est cependant compensé si l'on augmente la masse de la représentation. C'est pourquoi on obtient ce comportement, *i.e.* pour maintenir la densité relique à la bonne valeur en augmentant la taille de la représentation il faut augmenter sa masse en conséquence. Contrairement au n-plet, un singlet pur quant à lui n'a aucune interaction avec le reste des particules. Ainsi, comme la densité relique est une fonction continue, en introduisant habilement un mélange entre un n-plet et un singlet, il existe a priori une solution où la matière sombre interagit via sa composante n-plet pour redonner la bonne valeur de la densité relique, et ce pour une masse électro-faible.

3.1.3 Finalité

Ayant tout ça en tête, on souhaite établir un modèle de matière sombre. On se donne la possibilité d'ajouter une ou plusieurs représentations **fermioniques** électro-faibles au SM. Pourquoi fermionique ? Dans la SUSY, les electroweakinos forment un secteur sombre *naturel*. En effet, pour une large partie de l'espace des phases, le neutralino le plus léger est la matière sombre. C'est exactement ce qu'exploitent les auteurs de l'article sur le modèle *Well-Tempered Neutralino*, dans le cadre du MSSM. Ainsi, on choisit des états fermioniques pour faire écho à un tel secteur sombre electrofaible fermionique. Notons tout de même que la majorité des théories SUSY sont mises à mal expérimentalement. On ne souhaite donc pas retrouver une théorie similaire. D'autant plus que dans le MSSM, seules les représentations electrofaibles que sont le singlet avec le bino, le doublet avec les higgsinos, et le triplet avec le wino sont présentes. On ne souhaite pas se limiter à celles-ci, et avoir la possibilité de considérer des représentations plus exotiques, à l'image du modèle *Minimal Dark Matter*.

On veut un modèle de matière sombre fermionique exploitant un mélange *well-tempered*, similaire à celui présent dans le papier [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#). Comme on l'a vu plus haut, on sait qu'un mélange bien choisi permet a priori d'obtenir la densité relique Ωh^2 mesurée aujourd'hui. Néanmoins, contrairement au modèle *well-tempered neutralino* ([Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#)), on souhaite se restreindre à un environnement *minimal*, similaire à celui du modèle *minimal dark matter* ([Cirelli et al. \[2006\]](#)). Le coût pour gagner en simplicité sera d'avoir *in fine* une théorie effective. Ainsi, on travaillera juste avec le SM, les nouvelles représentations électro-faible, et les opérateurs de dimensions supérieures.

3.2 Présentation du modèle

3.2.1 Description générale

Dans la suite, on s'intéresse au cas où la matière sombre est essentiellement un singlet de $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, ayant une petite composante provenant d'un autre état chargé sous $SU(2) \otimes U(1)$. Ces modèles sont des extensions du SM, avec seulement deux nouvelles représentations, dont un singlet. Toute autre physique est supposée UV, et encodée à travers des opérateurs effectifs associés à l'échelle de coupure Λ ou *cut-off*. Le mélange est généré avec des opérateurs effectifs faisant intervenir le doublet Higgs. Ces modèles peuvent être vus comme la généralisation des scénarii *well-tempered neutralino* avec un *bino-like* en tant que LSP dans un contexte non SUSY, ce qui permet des représentations plus exotiques. Encore une fois, la référence en SUSY pour les scénarii du type *well-tempered neutralino* est Arkani-Hamed et al. [2006], mais il y a bien sûr d'autres papiers intéressants sur le sujet, *e.g.* Chakraborti et al. [2017], Badziak et al. [2017], Huang et al. [2017], Ellwanger [2017], Han et al. [2017], Beneke et al. [2017], Baer et al. [2016], Bramante et al. [2016], ou encore la revue Jungman et al. [1996] ainsi que ses références internes. Évidemment cette liste est loin d'être exhaustive.

En résumé, on considère une extension minimale du SM avec un **singlet** de jauge fermionique χ ainsi qu'un fermion ψ se transformant dans la représentation de $SU(2) \otimes U(1)$.

Plus en détail, si on définit \mathbf{n}_Y comme l'ensemble des n-plet de $SU(2)$ avec une hypercharge Y associée à $U(1)$, alors χ appartient à 0_0 et ψ appartient à n_Y . Dans la suite, on va considérer plusieurs valeurs pour n et Y . Évidemment puisque l'on souhaite obtenir une particule de matière sombre, celle-ci doit avoir une charge électrique nulle. De plus, notre matière noire est issue du mélange entre χ et ψ , et plus précisément entre χ et le ou les états neutres de ψ . Ainsi on doit choisir n et Y tels qu'il existe un état du n-plet ψ qui soit électriquement neutre. Enfin on ne souhaite pas avoir d'anomalies de jauge dans ces modèles.

Pour n impair, *e.g.* $n = 3$ ou $n = 5$ dans ce manuscrit, la représentation ψ est réelle et on choisit $Y = 0$. Ainsi on a bien un état du triplet ou du quintuplet électriquement neutre. Il suffit de vérifier que la relation $T_3 + Y = 0$ est vraie, où T_3 est l'isospin. Pour n pair, ou $n = 4$ dans ce manuscrit, on doit considérer le partenaire de Dirac $\bar{\psi}$ de ψ puisque la représentation n'est plus réelle. Si ψ est dans n_Y , alors $\bar{\psi}$ est dans \bar{n}_{-Y} . On choisit $Y = \pm 1/2$. Ces choix n'engendrent pas d'anomalies.

Ensuite, on octroie une masse de Majorana pour les représentations réelles, soient le singlet χ et les n-plet ψ pour n impair, et une masse de Dirac pour les représentations paires. Le choix des masses sera primordial dans le calcul de la densité relique. On rappelle ici que l'on souhaite garder des masses proches de l'échelle électro-faible. On note m la masse associée à χ , et M la masse associée à ψ . On suppose que la valeur de m est inférieure à celle de M . Ce choix peut sembler hasardeux, mais si on oublie le mélange provenant de ψ , la particule de matière sombre est assimilée à χ . Autrement dit c'est la particule la plus légère du secteur sombre, donc elle est complètement stable. En effet, pour assurer la stabilité de la particule de MN, on impose une symétrie discrète \mathbb{Z}_2 sous laquelle les nouvelles particules sont impaires et celle du SM sont paires. Ainsi la particule la plus légère impaire sous \mathbb{Z}_2 ne peut se désintégrer et est automatiquement stable. Notons que cette symétrie discrète a également l'avantage d'empêcher tout mélange avec les leptons du SM. Cette symétrie est l'équivalent de la R-Parité en SUSY, mais dans un cadre minimal non-super-symétrique.

Le paradigme du WIMP nous dit alors que, pour une masse proche de l'électro-faible, la densité relique associée va *grosso modo* correspondre à la bonne densité relique Ωh^2 . Ce n'est pas étonnant puisque le modèle a initialement été basé sur cette propriété des WIMP.

Avant de passer à la suite, quelques mots sur le mélange. Ce dernier est causé par des opérateurs de dimensions supérieures faisant intervenir le doublet de Higgs, que l'on notera ϕ . Après la brisure électro-faible, le Lagrangien contient des matrices de masses non diagonales.

nales. Les états propres de masse sont donc des mélanges d'états propres de jauge. C'est le mécanisme classique des mélanges. On parle de mélange *well-tempered*, ou ajustés, car les masses des états physiques vont fortement dépendre des paramètres présents dans les matrices de masse, et par conséquent vont être déterminants pour le calcul de la densité relic. Ces paramètres sont les masses de jauge, les couplages et l'échelle UV notée Λ de la théorie.

Cette dernière échelle est importante, car notre modèle est en fait une théorie effective. Cela signifie qu'il est valable en dessous de cette échelle. Tous les états lourds vivant au dessus de cette énergie ont été intégrés. Leur impact sur la théorie effective se fait uniquement à travers le cut-off Λ , qui intervient dans les opérateurs effectifs qu'ils génèrent. La théorie est simple et minimale, mais le prix à payer est d'avoir une théorie résultante effective. Autrement dit une théorie uniquement valable à basse énergie. Ce n'est pas un problème si l'on s'intéresse à l'échelle électro-faible. On ne suppose rien sur la complétion UV de nos modèles. Cependant, dans le cas $n = 3$, on se retrouve dans le cas bien connu SUSY, où seuls le bino et le wino sont pertinents, tous les autres états supersymétriques étant lourds. On a donc un exemple de complétion UV pour ce cas précis. Pour les représentations plus exotiques telles que le quadruplet ou le quintuplet, bien que ce soit intéressant, on restera complètement agnostique quant à la complétion UV.

3.2.2 Lagrangien

Notre théorie est une extension du SM. Autrement dit on ajoute au Lagrangien du SM, noté \mathcal{L}_{SM} , un nouveau Lagrangien que l'on note \mathcal{L}_{DM} . En équation cela donne la relation

$$\mathcal{L}_{\text{Théorie}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{DM}}, \quad (3.1)$$

où $\mathcal{L}_{\text{Théorie}}$ est le Lagrangien complet de la théorie. C'est dans \mathcal{L}_{DM} que la nouvelle physique apparaît, notamment la phénoménologie liée à la MN, d'où cette notation. Ce que contient celui-ci varie sensiblement selon la parité de n .

n impair

Le Lagrangien du modèle pour n impair, spécifiquement pour $n = 3$ ou 5 dans ce manuscrit, est le suivant :

$$\mathcal{L}_{\text{DM}} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \left(\frac{1}{2} M \psi \psi + \frac{1}{2} m \chi \chi + \text{h.c.} \right) + \mathcal{L}_{\text{quartic}} + \mathcal{L}_{\text{mix}}, \quad (3.2)$$

avec, schématiquement,

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \frac{\lambda}{\Lambda^{n-2}} (\phi^\dagger \phi)^{\frac{n-1}{2}} \psi \chi + \text{h.c.}, \quad (3.3)$$

et

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \chi \chi + \text{h.c.}. \quad (3.4)$$

Opérateur de dimension 5 :

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi \psi + \text{h.c.}. \quad (3.5)$$

n pair

Le Lagrangien du modèle pour n pair, spécifiquement pour $n = 4$, est le suivant :

$$\mathcal{L}_{\text{DM}} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{\psi} + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \left(M \psi \bar{\psi} + \frac{1}{2} m \chi \chi + \text{h.c.} \right) + \mathcal{L}_{\text{quartic}} + \mathcal{L}_{\text{mix}}, \quad (3.6)$$

où $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est donné par Eq. (3.4) comme précédemment, et \mathcal{L}_{mix} est donné schématiquement comme suit,

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \frac{1}{\Lambda^{n-2}} (\phi^\dagger \phi)^{\frac{n-2}{2}} \left(\lambda \phi \chi \psi - \lambda' \phi^\dagger \chi \bar{\psi} + \text{h.c.} \right) \quad (3.7)$$

Ici $(\psi, \bar{\psi}^\dagger)$ forme un spineur de Dirac, appartenant à $\mathbf{n}_{\frac{1}{2}}$.

Opérateurs de dimension 5 :

$$\frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi \bar{\psi} + \text{h.c.} \quad (3.8)$$

$$\frac{\zeta_1}{\Lambda} (\phi^\dagger \tau^a \phi) (\psi t^a \bar{\psi}) - \frac{\zeta_2}{\Lambda} (\phi_i (\tau^a)^i_j \phi^j) (\bar{\psi}_I (t^a)^I_J \bar{\psi}^J) - \frac{\zeta_3}{\Lambda} (\phi_i^\dagger (\tau^a)^i_j \phi^{\dagger j}) (\psi_I (t^a)^I_J \psi^J) + \text{h.c.} \quad (3.9)$$

Les matrices τ^a génèrent la $\mathbf{2}$, les matrices t^a génèrent la \mathbf{n} , où $\mathbf{2}$ et \mathbf{n} sont les représentations de $\text{SU}(2)$, *i.e.* le doublet et le n-plet.

Notations et symétrie

Les notations sont les suivantes, $\sigma_{\mu=1,2,3}$ représentent les matrices de Pauli et σ_0 est l'identité. L'indice μ prend les valeurs entière de 0 à 3 et correspond à l'indice de Lorentz. L'indice a est l'indice de $\text{SU}(2)$ et prend les valeurs 1, 2 et 3. Dans le cas de la représentation $\mathbf{2}$, les générateurs τ^a ne sont rien d'autre que les matrices de Pauli multipliées par un facteur un demi. Les termes m et M sont les masses respectivement associées au singlet χ et à la représentation ψ de \mathbf{n}_Y . La masse m correspond à la masse du singlet χ , qui est une représentation réelle. C'est une masse de Majorana. La masse M quant à elle est une masse de Majorana si n est impair ($n = 3$ ou $n = 5$), ou une masse de Dirac lorsque n est pair ($n = 4$). L'opérateur D est la dérivée covariante habituelle tandis que le ∂ est la dérivée simple s'appliquant au singlet. Enfin ϕ est le doublet de Higgs standard.

Tout les nouveaux fermions sont impairs sous une symétrie discrète globale \mathbb{Z}_2 , alors que les particules du **SM** sont paires.

Discussion

Afin d'obtenir la densité relique observée avec une masse électro-faible, on sait que la masse physique la plus légère, *i.e.* la plus petite valeur propre après diagonalisation de la matrice de masse, doit être χ -like. C'est à dire en grande majorité issue du terme de masse m associé à χ dans la Lagrangien. Néanmoins, on autorise un faible mélange entre χ et la ou les composantes neutres de ψ via \mathcal{L}_{mix} . Pour une valeur de n strictement supérieure à deux, la dimension de l'opérateur de mélange \mathcal{O}_{mix} associé à \mathcal{L}_{mix} est strictement supérieure à quatre. Autrement dit, le mélange est due à un opérateur de dimension supérieure. On travaille donc avec une théorie effective. Le Lagrangien est valide jusqu'à une échelle notée Λ , au delà de laquelle de nouveaux états apparaissent dans le spectre. On assumera que Λ est suffisamment grand de sorte que ces états additionnels ne jouent aucun rôle à l'échelle électro-faible, si ce n'est d'engendrer les opérateurs de dimensions supérieures. Cette assumption est primordiale dans l'analyse du modèle, et pour la cohérence des résultats. Pour $\Lambda \sim \text{TeV}$, c'est déjà le cas si la nouvelle physique est faible couplée, *i.e.* $\lambda, \lambda', \kappa \lesssim 1$. Or, c'est dans ce cadre là que l'on se place.

L'opérateur $\mathcal{O}_{\text{quartic}}$ associé à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$, est l'opérateur dominant menant à l'annihilation directe $\chi\chi$ en particules du **SM** sans impliquer ψ . Ce dernier étant de dimension cinq, son impact sur les propriétés de la matière sombre du modèle est potentiellement fort, sachant que la dimension de \mathcal{O}_{mix} est de dimension égale ou supérieure à cinq pour $n > 3$.

Les opérateurs de dimension cinq correspondant aux Eqs. (3.5), (3.8) et (3.9) vont avoir un impact sur le spectre de masse après la **Brisure de la symétrie électro-faible –ou *ElectroWeak Symmetry Breaking*– (EWSB)**. Par conséquent ils vont indirectement influencer la valeur de la densité relique Ωh^2 . Alors que κ' peut toujours être réduis à zéro par une redéfinition de la masse M , le couplage κ'' induit un décalage en masse entre les états électriquement chargés

et les états neutres, et doit donc être pris en compte.

La liste des opérateurs de dimension supérieure est loin d’être exhaustive. C’est d’autant plus vrai lorsque la dimension de ces derniers augmente. Cependant on restreint notre analyse aux opérateurs définis précédemment. Une première raison est que l’on proscrie les **Changement de saveur par courant neutre** –ou *Flavour-Changing Neutral Currents*– (FCNC) du modèle. Ainsi les opérateurs de dimension six couplant la matière sombre avec les fermions du SM, tel que $\phi_{\bar{q}_L u_R} \chi\chi/\Lambda^2$, sont proscriés. En effet un tel opérateur mène un un large FCNC, qui n’est pas acceptable. La seconde raison est que les opérateurs de dimensions supérieures ont un rôle au mieux sous-dominant sur les observables qui nous intéressent. Ces observables sont la densité relique, le spectre de masse et la détection directe.

Pour plus de contenu sur la classification des opérateurs de dimensions supérieures, l’article de [Duch et al. \[2015\]](#) est intéressant. Dans ce dernier, les opérateurs de dimension six avec un singlet de matière sombre stable par parité avec le SM sont notamment listés. Il y également l’article de [Dedes et al. \[2016\]](#), où un doublet électro-faible est considéré. Dans le cadre de nos modèles, l’annexe A.5 établie une classification partielle des opérateurs de dimensions supérieures possibles.

3.3 Classification des représentations

On va s’intéresser ici en détail à différentes valeurs de n , ce qui revient à varier la taille de la représentation ψ qui est par définition dans \mathbf{n}_Y .

3.3.1 $n = 0$, un singleton comme matière sombre ?

Par abus de notation, on suggère le cas $n = 0$. Cela signifie que l’on retire ψ de notre modèle. Autrement dit on se retrouve avec le SM, auquel on ajoute un singleton χ ayant une masse électro-faible. Si on regarde le Lagrangien, en plus de \mathcal{L}_{SM} , il reste évidemment le terme cinétique et le terme de masse associés à χ , mais également $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$. Grâce à la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 , la matière noire χ est stable. La densité relique associée est entièrement régie par l’annihilation $\chi\chi$ en particules de SM. Son efficacité est directement corrélée à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ et au rapport du couplage κ sur le cut-off Λ .

Le densité relique Ωh^2 peut être obtenue via un *freeze-out* thermique (cf. Ch. 2), et dépend de la masse m de la particule χ , du couplage κ et du cut-off Λ . En réalité la donnée pertinente est celle du coefficient de Wilson κ/Λ puisque qu’il y à une dégénérescence entre κ et Λ . Étant donné que l’on souhaite une théorie valable jusqu’à quelques Tera-electronvolts, ainsi qu’une masse électro-faible pour la matière sombre, cela gèle le cut-off Λ et m . Ainsi, seul le couplage κ reste libre. En le faisant varier, on change la valeur de la densité relique. La densité relique observée Ωh^2 est alors obtenue pour de larges valeurs de κ , qui sont d’ores et déjà exclues par la DD. Ainsi on ne s’attardera pas d’avantage sur ce cas, d’autant plus que la phénoménologie potentielle au LHC n’est pas intéressante dans notre optique de pouvoir sonder le modèle.

3.3.2 $n = 2$, Le *well-tempered* higgsino-bino et sa version non-SUSY

Ce cas est familier puisqu’il fait directement écho au MSSM. En effet, la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 correspond à la R -parité du MSSM, χ au bino et $(\psi, \bar{\psi})$ aux higgsinos. Le wino est quant à lui découplé. De même les squarks, les sleptons et les bosons de Higgs non-standards ont des masses beaucoup plus grandes comparées à celle du bino M_2 et du paramètre de masse des higgsinos μ . La matière sombre est le neutralino le plus léger. En plus du SM, la théorie ne comporte alors effectivement que le bino, qui est un singlet, et les higgsinos, qui forment un doublet de Dirac. Le cas $n = 2$ est particulier dans le sens où l’on à une théorie renormalisable.

En effet, l'invariance de jauge permet d'écrire \mathcal{L}_{mix} comme des couplages de Yukawa bino-higgsinos, qui sont de dimension quatre.

Comme ce système à été abondamment étudié en **SUSY** ainsi que dans le contexte non-supersymétrique, on ne s'y attardera pas ici. Cependant on peut noter que dans le cadre supersymétrique, les scénarios menant à la bonne densité relicue sont exclus, comme le démontre entre autre le papier [Barducci et al. \[2015\]](#). Le lecteur peut se référer aux articles [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#), [Huang et al. \[2017\]](#), [Barducci et al. \[2015\]](#), [Mahbubani and Senatore \[2006\]](#), [Cohen et al. \[2012\]](#), [Yanagida and Yokozaki \[2013\]](#), [Cheung and Sanford \[2014\]](#), [Bramante et al. \[2015\]](#), [Calibbi et al. \[2015\]](#), [Freitas et al. \[2015\]](#), [Badziak et al. \[2015\]](#), [Yaguna \[2015\]](#), [Horiuchi et al. \[2016\]](#), [Banerjee et al. \[2016\]](#), [Basirnia et al. \[2017\]](#), ou encore [Jungman et al. \[1996\]](#).

3.3.3 $n = 3$, Le *well-tempered* wino-bino et sa version non-SUSY

Comme dans pour le cas $n = 2$, le cas $n = 3$ se retrouve avec le **MSSM**. La symétrie \mathbb{Z}_2 est la R -parité, χ au bino et ψ est le triplet du wino. Les higgsinos sont découplés, et leur échelle de masse μ dans le **MSSM** correspond au **cut-off** Λ . Les autres états super-symétriques sont découplés, à des échelles de masse supérieures. En d'autres termes, le modèle correspond à l'étude du **MSSM** lorsque seuls le bino et le wino subsistent à l'échelle électro-faible, tous les autres états supersymétriques étant intégrés. On se retrouve avec une théorie effective valable jusqu'à l'énergie Λ , au delà de laquelle les higgsinos, et potentiellement d'autres états supersymétriques, ne peuvent plus être intégrés. Cette configuration, le *well-tempered* wino-bino, a déjà été étudiée dans la littérature, voir notamment les papiers [Arkani-Hamed et al. \[2006\]](#), [Harigaya et al. \[2014\]](#), [Nagata et al. \[2015\]](#), [Jungman et al. \[1996\]](#) ou encore [Rolbiecki and Sakurai \[2015\]](#).

L'étude du cas $n = 3$ reste malgré tout intéressant à étudier avec notre modèle. En effet cela va permettre de comparer les résultats obtenus avec ceux de la littérature, et de conforter notre analyse pour des représentations plus exotiques. De plus, le passage d'une théorie **UV** qu'est le **MSSM**, à une théorie effective qu'est la notre est loin d'être trivial. Or on a ici la chance de connaître la complétion **UV** pour le cas $n = 3$. Autant en tirer profit et en faire un cas d'étude plus global, même si pour des valeurs plus grandes de n on restera agnostique sur la complétion **UV**.

Le *well-tempered* wino-bino : du **MSSM** à sa version non-supersymétrique.

Partant du **MSSM** dans l'hypothèse où tous les états supersymétriques autres que les électroweakinos sont découplés, montrons qu'en intégrant les higgsinos on retrouve notre théorie effective. Ce passage, bien qu'intéressant en soit, permet de passer d'un contexte **SUSY** à un contexte non-supersymétrique. Ainsi on simplifie l'analyse du modèle, c'est en autre l'intérêt de notre théorie. Remarquons qu'il est évidemment plus simple de passer d'une théorie complète **UV** à une théorie effective. Le sens inverse demande un travail théorique beaucoup plus poussé.

En plus des particules du **SM**, on suppose que seuls les neutralinos sont présents. Autrement dit tous les scalaires supersymétriques sont suffisamment lourds pour être considérés comme étant découplés à l'échelle qui nous intéresse. Dans le **MSSM**, avec la notation de Weyl à deux composantes, le Lagrangien associé aux neutralinos est donné par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & + \tilde{h}_u^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{h}_u + \tilde{h}_d^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{h}_d + \tilde{W}^{a\dagger} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{W}^a + \tilde{B}^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{B} \\
 & - \frac{1}{2} M_1 \tilde{B} \tilde{B} - \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a - \mu \tilde{h}_u \tilde{h}_d + \text{h.c.} \\
 & - \sqrt{2} g \left(h_u^\dagger \tau^a \tilde{h}_u \right) \tilde{W}^a - \frac{g'}{\sqrt{2}} h_u^\dagger \tilde{h}_u \tilde{B} - \sqrt{2} g \left(h_d^\dagger \tau^a \tilde{h}_d \right) \tilde{W}^a - \frac{g'}{\sqrt{2}} h_d^\dagger \tilde{h}_d \tilde{B} + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

La première ligne correspond respectivement aux termes cinétiques des deux higgsinos \tilde{h}_u et \tilde{h}_d , du triplet de Majorana ($n = 3$) correspondant au wino \tilde{W}^a , et du bino \tilde{B} qui est un singlet de Majorana. La seconde ligne comprend les termes de masse, et la troisième ligne les termes de couplages. Pour des raisons de simplicité, on choisit les paramètres de masse μ , M_1 et M_2 comme étant réels et positifs. On ignore également les interactions avec les bosons de jauge, ces derniers s'obtiennent en remplaçant les dérivées par les dérivées covariantes. Les matrices $\tau^a = \sigma^a/2$ génèrent la représentation fondamentale de $SU(2)$, et les couplages g et g' sont respectivement associés à $SU(2)$ et $U(1)$.

On s'intéresse à la situation où $\mu \gg M_1, M_2, m_Z$. En effet, si les higgsinos sont lourds comparés au bino et au wino, alors on peut les intégrer. Cela se fait en les substituant par leur équation du mouvement dans le Lagrangien. Au niveau zéro en terme de dérivée, les équations du mouvement pour \tilde{h}_u et \tilde{h}_d sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{h}_d} = 0 &\Rightarrow \tilde{h}_d = \frac{1}{\mu} \left(-\sqrt{2}g h_d^\dagger \tau^a \tilde{W}^a - \frac{g'}{\sqrt{2}} h_d^\dagger \tilde{B} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{h}_u} = 0 &\Rightarrow \tilde{h}_u = \frac{1}{\mu} \left(-\sqrt{2}g h_u^\dagger + \frac{g'}{\sqrt{2}} h_u^\dagger \tilde{B} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

En substituant alors ces expressions dans le Lagrangien \mathcal{L} , et en ne gardant que les termes dominants, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = &\tilde{W}^{a\dagger} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{W}^a + \tilde{B}^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{B} \\ &+ \frac{1}{\mu^2} \left(\sqrt{2}g \tilde{W}^{a\dagger} \tau^a h_d + \frac{g'}{\sqrt{2}} \tilde{B}^\dagger h_d \right) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \left(\sqrt{2}g h_d^\dagger \tau^a \tilde{W}^a + \frac{g'}{\sqrt{2}} h_d^\dagger \tilde{B} \right) \\ &+ \frac{1}{\mu^2} \left(\sqrt{2}g \tilde{W}^{a\dagger} \tau^a h_u - \frac{g'}{\sqrt{2}} \tilde{B}^\dagger h_u \right) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \left(\sqrt{2}g h_u^\dagger \tau^a \tilde{W}^a - \frac{g'}{\sqrt{2}} h_u^\dagger \tilde{B} \right) \\ &- \left(\frac{1}{2} M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a + \text{h.c.} \right) \\ &+ \frac{1}{\mu} \left(\sqrt{2}g h_u^\dagger \tau^a \tilde{W}^a + \frac{g'}{\sqrt{2}} h_u^\dagger \tilde{B} \right) \left(\sqrt{2}g h_d^\dagger \tau^a \tilde{W}^a - \frac{g'}{\sqrt{2}} h_d^\dagger \tilde{B} \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.12)$$

On constate que les termes de dimensions six, *i.e.* en $1/\mu^2$, correspondent aux corrections des termes cinétiques du bino et du wino. Le terme de dimension cinq, *i.e.* en $1/\mu$, induit une matrice de masse non diagonale. Les termes de dimensions supérieures étant sous-dominants sont négligés.

Les bosons de Higgs, après **EWSB**, peuvent être remplacés par $h_u = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix}$ et $h_d = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}$, où $v_u = v s_\beta$ et $v_d = v c_\beta$ sont respectivement les **VEVs** telles que $v_u^2 + v_d^2 = v^2$, avec v la **VEV** du Higgs standard. On peut alors réécrire les choses en fonction du cosinus et du sinus de l'angle de Weinberg, notés c_W et s_W , ainsi qu'en fonction de $\sin(\beta) = s_\beta$. On rappelle que $\tan(\beta) = v_u/v_d$. En définissant le doublet des états de jauge neutres $\psi_0 = \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W}^3 \end{pmatrix}$, on obtient alors le Lagrangien des neutralinos

$$\mathcal{L}_{\text{eff,neut}} = \psi_0^\dagger G_0 i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_0 - \frac{1}{2} \psi_0^T \widehat{M}_0 \psi_0 + \text{h.c.}, \quad (3.13)$$

où la matrice cinétique et la matrice de masse sont données, à l'ordre dominant, par

$$G_0 = \mathbb{1} + \frac{M_Z^2}{\mu^2} T, \quad \widehat{M}_0 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} - s_{2\beta} \frac{M_Z^2}{\mu} T \quad (3.14)$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} s_w^2 & -s_w c_w \\ -s_w c_w & c_w^2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Définissons

$$G_0^{-1/2} \equiv \mathbb{1} - \frac{1}{2} \frac{M_Z^2}{\mu^2} T + \mathcal{O}(\mu^{-3}) \quad (3.16)$$

Afin de retrouver un terme cinétique canonique, on redéfinit $\psi_0 \rightarrow G_0^{-1/2} \psi_0$. Prenant cela en compte dans le terme de masse, on a

$$\widehat{M}_0 \rightarrow G_0^{-1/2} \widehat{M}_0 G_0^{-1/2} \equiv M_0. \quad (3.17)$$

En détail, on obtient

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} - s_{2\beta} \frac{m_Z^2}{\mu} T + \frac{m_Z^2}{\mu^2} \begin{pmatrix} M_1 s_w^2 & \frac{M_1 + M_2}{2} s_w c_w \\ \frac{M_1 + M_2}{2} s_w c_w & M_2 c_w^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\mu^{-3}). \quad (3.18)$$

La matrice de masse ayant des entrées non nulles hors de la diagonale, il faut la diagonaliser pour obtenir les masses physiques des deux neutralinos χ_1^0 et χ_2^0 . En diagonalisant M_0 dans l'approximation où μ est large et $M_2 > M_1$, on a les expressions

$$\begin{aligned} m_{\chi_1^0} &= M_1 - s_{2\beta} s_w^2 \frac{m_Z^2}{\mu} - s_w^2 \frac{m_Z^2 M_1}{\mu^2} - \frac{s_{2w}^2 s_{2\beta}^2}{4} \frac{m_Z^4}{\mu^2 (M_2 - M_1)} + \mathcal{O}(\mu^{-3}), \\ m_{\chi_2^0} &= M_2 - s_{2\beta} c_w^2 \frac{m_Z^2}{\mu} - c_w^2 \frac{m_Z^2 M_2}{\mu^2} + \frac{s_{2w}^2 s_{2\beta}^2}{4} \frac{m_Z^4}{\mu^2 (M_2 - M_1)} + \mathcal{O}(\mu^{-3}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

On retrouve les expressions connues pour un les neutralinos bino-like et wino-like. Jusqu'ici on s'est focalisé sur les états neutres, *i.e.* les neutralinos. Voyons maintenant ce qu'il en est des charginos. Le Lagrangien effective pour $\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widetilde{W}^1 \mp i \widetilde{W}^2)$ est

$$\mathcal{L}_{\text{eff, char}} = \psi_{\pm}^{\dagger} G_{\pm} i \overline{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\pm} + \psi_{\pm}^{\dagger} G_{\pm} i \overline{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\mp} - \psi_{\pm} \widehat{M}_{\pm} \psi_{\mp} + \text{h.c.} \quad (3.20)$$

avec

$$G_{\pm} = 1 + c_w^2 \frac{m_Z^2}{\mu^2}, \quad \widehat{M}_{\pm} = M_2 - c_w^2 s_{2\beta} \frac{m_Z^2}{\mu} \quad (3.21)$$

ou l'on a gardé le terme dominant. En renormalisant les champs pour obtenir des termes cinétiques canoniques, on retrouve via le terme de masse l'expression connue pour un chargino wino-like

$$m_{\chi_{\pm}^{\pm}} = M_2 - s_{2\beta} c_w^2 \frac{m_Z^2}{\mu} - c_w^2 \frac{m_Z^2 M_2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\mu^{-3}). \quad (3.22)$$

Quelques remarques sur ce que l'on vient de voir. Tout d'abord on a intégré les champs des higgsinos, qui sont des états de jauge et non les états de masse, *i.e.* les neutralinos et charginos higgsinos-like. Cependant, étant donnée que les angles de mélanges des higgsinos sont supprimés par μ^{-1} , la différence sera visible aux ordres supérieurs, et non au premier ordre comme on vient de le faire.

Ensuite on voit que les expansions en masse des neutralinos explose s'il y a dégénérescence en masse. En effet, si $M_1 = M_2$ alors les termes en $1/(M_2 - M_1)$ sont infinis. Nos résultats restent valables à moins que la différence en masse entre le bino et le wino est loin en dessous de l'échelle électro-faible.

Partant du Lagrangien du [MSSM](#), en supposant que les scalaires supersymétriques sont suffisamment lourds pour être découplés, nous avons calculé les masses des charginos et des neutralinos dans la limite où les higgsinos ont été intégrés, car $\mu \gg M_1, M_2, m_Z$. On a choisi μ, M_1 et M_2 réels et positifs par simplicité, avec $M_2 > M_1$. Bien qu'un mélange wino-bino est interdit par l'invariance de jauge au niveau renormalisable, le fait d'intégrer les higgsinos nous a amené à écrire des termes de dimensions supérieur à 4, qui eux génèrent bel et bien un mélange. Ces termes de dimension supérieure sont supprimés par μ , l'échelle de masse des higgsinos. C'est en fait le [cut-off](#) de la théorie effective nouvellement établie.

Nous avons redéfinis les champs de sorte que les termes cinétiques soient canoniques, puis diagonalisé les matrices de masses pour obtenir les masses des états physiques χ_1^0 , χ_2^0 et χ^\pm . Le neutralino χ_1^0 est bino-like, alors que le neutralino χ_2^0 et le chargino χ^\pm sont wino-like. Cela se voit facilement, il suffit de prendre la limite à l'infini pour μ .

Jusqu'ici on est resté dans le cadre **SUSY**. Comment étendre ce résultat dans un cadre non-super-symétrique ?

Sachant que dans le **MSSM** il y a deux doublets de Higgs, il faut choisir l'un des doublets comme étant quasi-standard, et découpler le second en restant cohérent. Pour ce faire, on effectue les changements $h_u \rightarrow s_\beta \phi$ et $h_d \rightarrow c_\beta i \sigma^2 \phi^*$ dans l'Eq. (3.12), avec ϕ le Higgs standard sur **SM**. Les opérateurs affectant les masses des charginos et des neutralinos deviennent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \widetilde{W}^{a\dagger} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \widetilde{W}^a + \widetilde{B}^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \widetilde{B} - \left(\frac{1}{2} M_1 \widetilde{B} \widetilde{B} + \frac{1}{2} M_2 \widetilde{W}^a \widetilde{W}^a + \text{h.c.} \right) \\ & + \frac{g^2}{2\mu^2} (\phi^\dagger \phi) \widetilde{W}^{a\dagger} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \widetilde{W}^a + \frac{g'^2}{2\mu^2} (\phi^\dagger \phi) \widetilde{B}^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \widetilde{B} + \left(\frac{gg'}{\mu^2} \phi^\dagger \tau^a \phi \widetilde{W}^{a\dagger} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \widetilde{B} + \text{h.c.} \right) \\ & + \frac{g^2 s_{2\beta}}{2\mu} \phi^\dagger \phi \widetilde{W}^a \widetilde{W}^a + \frac{g'^2 s_{2\beta}}{2\mu} \phi^\dagger \phi \widetilde{B} \widetilde{B} + \frac{gg' s_{2\beta}}{\mu} \phi^\dagger \tau^a \phi \widetilde{W}^a \widetilde{B} + \text{h.c.} + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

En remplaçant les couplages de jauge électro-faibles ainsi que les facteurs $s_{2\beta}$ dans l'Eq. (3.23) par des coefficients génériques, et μ par une échelle d'énergie quelconque, il est maintenant facile de décrire le système bino-wino par son équivalent non-supersymétrique, *i.e.* le système singlet-triplet. Le Lagrangien le plus général, à l'ordre $\mathcal{O}(\Lambda^{-1})$, est

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} (M \psi \psi + m \chi \chi + \text{h.c.}) \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \chi \chi + \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi^a \psi^a + \frac{\lambda}{\Lambda} \phi^\dagger \tau^a \phi \psi^a \chi + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

On retrouve évidemment le Lagrangien de notre modèle pour n impaire vu à l'Eq. (3.2). On a ici une structure détaillée pour \mathcal{L}_{mix} . En effet

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \left[\frac{\lambda}{\Lambda^{n-2}} (\phi^\dagger \phi)^{\frac{n-1}{2}} \psi \chi + \text{h.c.} \right]_{n=3} = \frac{\lambda}{\Lambda} \phi^\dagger \tau^a \phi \psi^a \chi + \text{h.c.} \quad (3.25)$$

On assume m et M comme étant réelles et positives, avec $M > m$. Cette dernière condition est nécessaire s'il on veut que la matière sombre soit un singlet-like. Les corrections aux masses provenant des opérateurs $\phi^\dagger \phi \chi \chi$ et $\phi^\dagger \phi \psi \psi$ sont **SU(2)**-invariantes, *i.e.* la correction est la même pour chaque état d'une représentations de **SU(2)**. On peut donc les absorber par une redéfinition de m et M , qui sont simplement translatée d'une valeur qui dépend respectivement des couplages κ/Λ et κ'/Λ .

En revanche, l'opérateur \mathcal{L}_{mix} induit un mélange entre ψ et χ après **EWSB**. Les états physiques ainsi que leur masse s'obtiennent en diagonalisant la matrice de masse. C'est l'objet de la section suivante.

Paramétrage du mélange dans le cas impair

Bien que l'on soit dans la section $n = 3$, on se place dans le cas plus générale ou n est impair. De cette façon, ce que l'on va voir ici restera valable pour le cas $n = 5$.

On part du Lagrangien de l'Eq. (3.2). Après la brisure électro-faible, on redéfinit les masses m et M de sorte que les décalages en masse provenant des opérateurs \mathcal{O}_κ et $\mathcal{O}_{\kappa'}$

soient absorbés. Si on dénomme ψ^0 l'état neutre du n -plet ψ , les termes de masse restant présent dans le Lagrangien sont

$$\mathcal{L} \subset \left[-\frac{M}{2} \psi^0 \psi^0 - \frac{m}{2} \chi \chi + \lambda_{\text{mix}} \chi \psi^0 + \text{h.c.} \right], \quad (3.26)$$

avec

$$\lambda_{\text{mix}} = \mathcal{T}_\psi \frac{\lambda}{\Lambda^{n-2}} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}. \quad (3.27)$$

Le terme $v/\sqrt{2}$ provient des Higgs, avec $v = 246$ GeV, et \mathcal{T}_ψ est un scalaire qui dépend de l'algèbre $\text{SU}(2)$, directement lié à la valeur de n et de l'hypercharge associé à ψ . Dans le cas du triplet d'hypercharge nulle, on a $\mathcal{T}_\psi = 1/\sqrt{2}$. On voit immédiatement que la matrice de masse n'est pas diagonale si λ_{mix} n'est pas nulle. En effet, dans la base (ψ^0, χ) , la matrice de masse s'écrit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M & -2\lambda_{\text{mix}} \\ -2\lambda_{\text{mix}} & m \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Les masses des états physiques χ_1^0, χ_2^0 sont données par les valeurs propres. On a :

$$m_{\chi_1^0, \chi_2^0} = \frac{1}{2} (M + m \pm \xi) \quad \xi = \sqrt{(M - m)^2 + 4\lambda_{\text{mix}}^2} \quad (3.29)$$

On choisi d'ordonner les masses physique de manière à ce que $m_{\chi_1^0} < m_{\chi_2^0}$. Ainsi, comme $m < M$, on a directement que χ_1^0 est singlet-like et χ_2^0 est n -plet like.

Soit maintenant l'angle de mélange, noté θ . Notons c_θ et s_θ son cosinus et son sinus. Par définition, l'angle de mélange est solution de

$$\mathcal{R}_\theta^{-1} \begin{pmatrix} M & -2\lambda_{\text{mix}} \\ -2\lambda_{\text{mix}} & m \end{pmatrix} \mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} m_{\chi_2^0} & 0 \\ 0 & m_{\chi_1^0} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

\mathcal{R}_θ est la matrice de rotation. Elle donne directement le lien entre les états de jauge χ et ψ^0 et les états physique χ_1^0 et χ_2^0 . En effet,

$$\begin{pmatrix} |\psi^0\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} |\chi_2^0\rangle \\ |\chi_1^0\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

En utilisant cette égalité matricielle, il est facile de voir que

$$s_\theta^2 = \frac{1}{2} - \frac{M - m}{2\xi} \quad (3.32)$$

Avec l'Eq. (3.32), sachant que λ_{mix} est positif et que l'on a supposé $m < M$, on obtient l'angle de mélange θ au premier ordre :

$$\theta = \frac{2\lambda_{\text{mix}}}{M - m} \quad (3.33)$$

Dans le cas du triplet, on a $\mathcal{T}_\psi = 1/\sqrt{2}$ et $n = 3$. On obtient donc

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda v^2}{\Lambda(M - m)}, \quad (3.34)$$

3.3.4 $n = 4$, Le quadruplet-singlet

Contrairement aux configurations précédentes, le cas du quadruplet-singlet n'a pas d'équivalent dans le **MSSM**. De plus, là on l'on avait des représentations de $\text{SU}(2)$ strictement réelles pour n impair, on se retrouve avec une représentation pseudo-réelle, ce qui rend l'étude plus complexe comme on va le voir.

On introduit le fermion de Dirac $(\psi, \bar{\psi}^\dagger)$ se transformant dans $\mathbf{4}_{\frac{1}{2}}$, ainsi que le singlet de jauge χ . Le Lagrangien est celui vu à la Sec.3.2.2. Réécrivons la totalité de ce dernier en détaillant la structure des indices des indices, notamment en ce qui concerne \mathcal{L}_{mix} .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{\psi} + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \left(M \psi_I \bar{\psi}^I + \frac{1}{2} m \chi \chi + \text{h.c.} \right) \\
 & + \left(\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \chi \chi + \frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi_I \bar{\psi}^I + \text{h.c.} \right) \\
 & + \left(\frac{\zeta_1}{\Lambda} (\phi^\dagger \tau^a \phi) (\psi t^a \bar{\psi}) - \frac{\zeta_2}{\Lambda} (\phi_i (\tau^a)^i_j \phi^j) (\bar{\psi}_I (t^a)^I_J \bar{\psi}^J) - \frac{\zeta_3}{\Lambda} (\phi_i^\dagger (\tau^a)^i_j \phi^{\dagger j}) (\psi_I (t^a)^I_J \psi^J) + \text{h.c.} \right) \\
 & + \left(\frac{\lambda}{\Lambda^2} \epsilon_{jl} \epsilon_{km} \phi_i^\dagger \phi^l \phi^m d_I^{ijk} \chi \bar{\psi}^I - \frac{\lambda'}{\Lambda^2} \epsilon_{kl} \phi_i^\dagger \phi_j^\dagger \phi^l d_I^{ijk} \chi \psi^I + \text{h.c.} \right),
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

où les d_I sont formé une base orthogonale des tenseurs symétriques de $2 \times 2 \times 2$ contenant les coefficients de Clebsch-Gordan. Explicitement on a

$$\begin{aligned}
 d_1^{ijk} &= \delta_1^i \delta_1^j \delta_1^k, & d_2^{ijk} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta_1^i \delta_1^j \delta_2^k + \delta_1^i \delta_2^j \delta_1^k + \delta_2^i \delta_1^j \delta_1^k), \\
 d_3^{ijk} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta_1^i \delta_2^j \delta_2^k + \delta_2^i \delta_2^j \delta_1^k + \delta_2^i \delta_1^j \delta_2^k), & d_4^{ijk} &= \delta_2^i \delta_2^j \delta_2^k.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ici le symbole δ_j^i est le symbole de Kronecker. Les générateurs du quadruplet sont

$$\begin{aligned}
 t^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, & t^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} i & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} i & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^3 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les indices I, J associés au quadruplet sont montés et baissés grâce à $\mathcal{E} = \sigma^1 \otimes i\sigma^2$. On a

$$(\mathcal{E}_{IJ}) = (-\mathcal{E}^{IJ}) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

ou de façon équivalente,

$$Q_I = d_J^{lmn} d_I^{ijk} \epsilon_{li} \epsilon_{mj} \epsilon_{nk} Q^J := (\mathcal{E}_{JI})^T Q^J = \mathcal{E}_{IJ} Q^J. \tag{3.39}$$

La matrice \mathcal{E} joue exactement le même rôle ϵ , la première étant associé à la représentation $\mathbf{4}$ de $\text{SU}(2)$, alors que la seconde, bien connue, est associée à la fondamentale $\mathbf{2}$ de $\text{SU}(2)$.

En terme des états propres de charge électrique, les quadruplet sont

$$(\psi^I) = \begin{pmatrix} \psi^{++} \\ \psi^+ \\ \psi^0 \\ \tilde{\psi}^- \end{pmatrix}, \quad (\bar{\psi}^J) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^+ \\ \tilde{\psi}^0 \\ \psi^- \\ \psi^{--} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\psi}_J) = \begin{pmatrix} \psi^{--} \\ -\psi^- \\ \tilde{\psi}^0 \\ -\tilde{\psi}^+ \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Masses physiques et paramétrisation du mélange

On va voir en détail comment obtenir les masses physiques. Pour cela on a besoin de considérer les termes de masse dans le Lagrangien. Après la brisure électro-faible, les termes de masses en fonction des états propres de charge électriques sont, lorsque que l'on substitue le boson de Higgs par sa VEV (*i.e.* $\phi \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}}$, avec $v = 246\text{GeV}$) :

$$-M\psi_I \bar{\psi}^I = -M(\psi^{++}\psi^{--} - \psi^+\psi^- + \psi^0\tilde{\psi}^0 - \tilde{\psi}^-\tilde{\psi}^+), \quad (3.41)$$

$$-\frac{1}{2} m\chi\chi = -\frac{1}{2} m\chi\chi, \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2\Lambda} \phi^\dagger \phi \chi\chi = \frac{1}{2\Lambda} \frac{v^2}{2} \chi\chi, \quad (3.43)$$

$$\frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi_I \bar{\psi}^I = \frac{\kappa'}{\Lambda} \frac{v^2}{2} (\psi^{++}\psi^{--} - \psi^+\psi^- + \psi^0\tilde{\psi}^0 - \tilde{\psi}^-\tilde{\psi}^+), \quad (3.44)$$

$$\frac{\zeta_1}{\Lambda} \phi^\dagger \tau^a \phi \psi_I (t^a)_J \bar{\psi}^I = \frac{1}{4} \frac{\zeta_1 v^2}{\Lambda} (-3\psi^{++}\psi^{--} + \psi^+\psi^- + \psi^0\tilde{\psi}^0 - 3\tilde{\psi}^-\tilde{\psi}^+), \quad (3.45)$$

$$-\frac{\zeta_2}{\Lambda} \epsilon \phi \tau^a \phi \bar{\psi}_I (t_a)^J \bar{\psi}^J = \frac{\zeta_2 v^2}{\Lambda} (\tilde{\psi}^0\tilde{\psi}^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\psi}^+\psi^- - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi^-\tilde{\psi}^+), \quad (3.46)$$

$$-\frac{\zeta_3}{\Lambda} \phi^\dagger \tau^a \epsilon \phi^\dagger \psi_I (t_a)^J \bar{\psi}^J = \frac{\zeta_3 v^2}{\Lambda} (\psi^0\psi^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi^+\tilde{\psi}^- - \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\psi}^-\psi^+), \quad (3.47)$$

$$\frac{\lambda}{\Lambda^2} \epsilon_{jl} \epsilon_{km} \phi_i^\dagger \phi^l \phi^m d_I^{ijk} \chi \bar{\psi}^I = \frac{v^3}{2\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\sqrt{3}\Lambda^2} \chi \tilde{\psi}^0, \quad (3.48)$$

$$-\frac{\lambda'}{\Lambda^2} \epsilon_{kl} \phi_i^\dagger \phi_j^\dagger \phi^l d_I^{ijk} \chi \psi_I = \frac{v^3}{2\sqrt{2}} \frac{\lambda'}{\sqrt{3}\Lambda^2} \chi \psi^0. \quad (3.49)$$

Par une redéfinition des masses m et M , on absorbe les décalages $\text{SU}(2)$ -universels provenant des Eqs. (3.43) et (3.44). Ensuite, sans perdre de généralités, on peut également absorber le décalage en masse du secteur neutre de l'Eq. (3.45) dans une seconde redéfinition de M . En définitive, on applique les changements suivants :

$$m \rightarrow m - \frac{\kappa v^2}{4\Lambda} \quad \text{et} \quad M \rightarrow M - \frac{\kappa' v^2}{2\Lambda} - \frac{\zeta_1 v^2}{8\Lambda}. \quad (3.50)$$

Prenant cela en compte, on réécrit les choses comme suit :

$$\mathcal{L}_{mass} = -m_{\psi^{\pm\pm}} \psi^{++}\psi^{--} - (\tilde{\psi}^- \psi^-) \mathcal{M}_c \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^+ \\ \psi^+ \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\chi \tilde{\psi}^0 \psi^0) \mathcal{M}_n \begin{pmatrix} \chi \\ \tilde{\psi}^0 \\ \psi^0 \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad (3.51)$$

avec

$$m_{\psi^{\pm\pm}} = M + \frac{\zeta_1 v^2}{2\Lambda}, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{M}_c = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\zeta_2 v^2}{2\Lambda} & -M - \frac{\zeta_1 v^2}{4\Lambda} \\ -M + \frac{\zeta_1 v^2}{4\Lambda} & \frac{\sqrt{3}\zeta_3 v^2}{2\Lambda} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} m & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^3}{\Lambda^2} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda' v^3}{\Lambda^2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^3}{\Lambda^2} & -\frac{\zeta_2 v^2}{2\Lambda} & M \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda' v^3}{\Lambda^2} & M & -\frac{\zeta_3 v^2}{2\Lambda} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Soient les états physiques, notés $\chi^{\pm\pm}$ pour l'unique état doublement chargé, $\chi_{1,2}^\pm$ pour les états chargés et $\chi_{1,2,3}^0$ pour les états neutres. On parlera de neutralinos pour ces derniers et de charginos pour les états chargés, à l'image du secteur des electroweakinos dans le cadre SUSY .

Des Eqs. (3.51) et (3.52), on a directement

$$m_{\chi^{\pm\pm}} = M + \frac{\zeta_1 v^2}{2\Lambda}. \quad (3.54)$$

Pour obtenir les masses des charginos et neutralinos, il faut respectivement diagonaliser les matrices \mathcal{M}_c et \mathcal{M}_n .

La matrice de masse des charginos étant de taille 2×2 , il n'est pas compliqué d'en obtenir les valeurs propres. Les solutions exactes sont longues, et pas intéressantes telles quelles. Cependant, dans notre cas on a $v/\Lambda \ll 1$, on peut donc écrire les valeurs propres comme un développement limité. On obtient alors

$$m_{\chi_{1,2}^\pm} = M \mp 2M\sqrt{\Xi^2 + 3\Sigma^2} + 6M\Theta^2(1 - 3\Theta^2). \quad (3.55)$$

avec

$$\Xi = \frac{\zeta_1 v^2}{8M\Lambda}, \quad \Theta = \frac{(\zeta_3 - \zeta_2)v^2}{8M\Lambda} \quad \text{et} \quad \Sigma = \frac{(\zeta_3 + \zeta_2)v^2}{8M\Lambda}. \quad (3.56)$$

On a choisi $m_{\chi_1^\pm}$ et $m_{\chi_2^\pm}$ de sorte que χ_1^\pm soit le plus léger.

Conceptuellement, il faut faire la même chose pour le secteur neutralino. Bien que la théorie soit simple, les calculs eux sont très fastidieux. En effet, \mathcal{M}_n est une matrice de taille 3×3 n'ayant aucune de ses entrées nulles. Néanmoins, par un procédé que l'on détaille dans l'annexe A.4, on obtient les valeurs propres pour $v/\Lambda \ll 1$.

$$\begin{aligned} m_{\chi_1^0} &= m(1 + \theta_+^2 + \theta_-^2) - M(\theta_+^2 - \theta_-^2), \\ m_{\chi_2^0} &= M(1 + \theta_-^2) + m\theta_-^2 + 2M[\Sigma + \Theta^2(1 - \Theta^2)], \\ m_{\chi_3^0} &= M(1 + \theta_+^2) - m\theta_+^2 - 2M[\Sigma + \Theta^2(1 - \Theta^2)], \end{aligned} \quad (3.57)$$

où

$$\theta_\pm = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{(\lambda \pm \lambda')v^3}{(M \mp m)\Lambda^2}. \quad (3.58)$$

Les paramètres θ_+ et θ_- sont en fait deux angles de mélanges, donnés au premier ordre. Contrairement au cas du triplet-singlet (n impair en général) ou il y a un seul angle de mélange, le cas du quadruplet-singlet (n pair en général) en possède deux. Ce n'est pas étonnant étant donné que le secteur des neutralinos est plus complexe. En effet, là où on a deux neutralinos pour n impair, on se retrouve avec trois neutralinos pour n pair. Par conséquent le mélange est décrit par deux angles et non un seul.

Pour des valeurs convenables des couplages, on a $m_{\chi_1^0} \leq m_{\chi_2^0} \leq m_{\chi_3^0}$.

3.3.5 $n = 5$, Le quintuplet-singlet

Après le cas triplet-singlet vu à la Sec.3.3.3, pour n impair, le modèle le plus simple est celui du quintuplet-singlet. A priori, il n'est pas compliqué de généraliser le cas du triplet pour tout n impair. On va ici détailler le cas $n = 5$.

On a le Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \frac{1}{2}(M\psi\psi + m\chi\chi + \text{h.c.}) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \chi \chi + \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi^A \psi^A + \frac{\lambda}{\Lambda^3} \phi^{\dagger i} \phi_j \phi^{\dagger k} \phi_\ell C_{Aik}^{j\ell} \psi^A \chi + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

On a ici explicitement donné la structure de \mathcal{L}_{mix} . Les indices i, j, k et l correspondent à la fondamentale de $\text{SU}(2)$, alors que l'indice A est associé à la représentation $\mathbf{n}_Y = \mathbf{5}_0$ de $\text{SU}(2)$. L'indice A prend les valeurs de 1 à 5. Le tenseur $C_{Aik}^{j\ell}$ est donné par

$$C_{Aik}^{j\ell} = \rho_A^{ab} \sigma_i^a \sigma_k^b, \quad (3.60)$$

où les ρ_A^{ab} forment une base orthonormale des matrices 3×3 de trace nulle, *i.e.*

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dans cette base, les transformations de jauge du quintuplet sont générées par

$$(t^a)_{AB} = -2i \epsilon^{abc} \rho_A^{bd} \rho_B^{cd}. \quad (3.62)$$

Les états propres de masse du système quintuplet-singlet sont un fermion de Dirac doublement chargé $\chi^{++} = \frac{\psi^4 - i\psi^3}{\sqrt{2}}$, un fermion de Dirac simplement chargé $\chi^+ = \frac{\psi^2 - i\psi^1}{\sqrt{2}}$ and deux fermions de Majorana neutres $\chi_{1,2}^0$, le plus lourd étant ψ^5 -like lorsque $M > m$. Le singlet-like neutre le plus léger constitue la matière sombre.

3.3.6 Masses physiques et mélange

A la Sec.3.3.3, on a vu comment paramétriser le mélange et comment obtenir les masses physiques dans le cas où n est impair. On va donc ici simplement donner les valeurs spécifiques au système quintuplet-singlet.

Pour ψ appartenant à $\mathbf{5}_0$, on a $\mathcal{T}_\psi = 1/\sqrt{6}$. Donc, pour $v = 246\text{GeV}$

$$m_{\chi_1^0, \chi_2^0} = \frac{1}{2} (M + m \pm \xi), \quad \xi = \sqrt{(M - m)^2 + 4\lambda_{\text{mix}}^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{mix}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\Lambda^3} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^4. \quad (3.63)$$

L'angle de mélange θ , au premier ordre, est

$$\theta = \frac{2\lambda_{\text{mix}}}{M - m} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^4}{\Lambda^3 (M - m)}. \quad (3.64)$$

3.4 Références

- P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016. [28](#)
- N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018. [28](#)
- N. Arkani-Hamed, A. Delgado, and G. F. Giudice. The Well-tempered neutralino. *Nucl. Phys.*, B741 :108–130, 2006. [29](#), [30](#), [31](#), [35](#)
- M. Badziak, A. Delgado, M. Olechowski, S. Pokorski, and K. Sakurai. Detecting underabundant neutralinos. *JHEP*, 11 :053, 2015. [35](#)
- M. Badziak, M. Olechowski, and P. Szczerbiak. Is well-tempered neutralino in MSSM still alive after 2016 LUX results? *Phys. Lett.*, B770 :226–235, 2017. [31](#)
- H. Baer, V. Barger, and H. Serce. SUSY under siege from direct and indirect WIMP detection experiments. *Phys. Rev.*, D94(11) :115019, 2016. [31](#)
- S. Banerjee, S. Matsumoto, K. Mukaida, and Y.-L. S. Tsai. WIMP Dark Matter in a Well-Tempered Regime : A case study on Singlet-Doublets Fermionic WIMP. *JHEP*, 11 :070, 2016. [35](#)
- D. Barducci, A. Belyaev, A. K. M. Bharucha, W. Porod, and V. Sanz. Uncovering Natural Supersymmetry via the interplay between the LHC and Direct Dark Matter Detection. *JHEP*, 07 :066, 2015. [35](#)
- A. Basirnia, S. Macaluso, and D. Shih. Dark Matter and the Higgs in Natural SUSY. *JHEP*, 03 :073, 2017. [35](#)
- M. Beneke, A. Bharucha, A. Hryczuk, S. Recksiegel, and P. Ruiz-Femenia. The last refuge of mixed wino-Higgsino dark matter. *JHEP*, 01 :002, 2017. [31](#)
- J. Bramante, P. J. Fox, A. Martin, B. Ostdiek, T. Plehn, T. Schell, and M. Takeuchi. Relic Neutralino Surface at a 100 TeV Collider. *Phys. Rev.*, D91 :054015, 2015. [35](#)
- J. Bramante, N. Desai, P. Fox, A. Martin, B. Ostdiek, and T. Plehn. Towards the Final Word on Neutralino Dark Matter. *Phys. Rev.*, D93(6) :063525, 2016. [31](#)
- L. Calibbi, A. Mariotti, and P. Tziveloglou. Singlet-Doublet Model : Dark matter searches and LHC constraints. *JHEP*, 10 :116, 2015. [35](#)
- M. Chakraborti, U. Chattopadhyay, and S. Poddar. How light a higgsino or a wino dark matter can become in a compressed scenario of MSSM. *JHEP*, 09 :064, 2017. [31](#)
- C. Cheung and D. Sanford. Simplified Models of Mixed Dark Matter. *JCAP*, 1402 :011, 2014. [35](#)
- M. Cirelli and A. Strumia. Minimal Dark Matter : Model and results. *New J. Phys.*, 11 :105005, 2009. [29](#)
- M. Cirelli, N. Fornengo, and A. Strumia. Minimal dark matter. *Nucl. Phys.*, B753 :178–194, 2006. [29](#), [30](#)
- T. Cohen, J. Kearney, A. Pierce, and D. Tucker-Smith. Singlet-Doublet Dark Matter. *Phys. Rev.*, D85 :075003, 2012. [35](#)
- A. Dedes, D. Karamitros, and V. C. Spanos. Effective Theory for Electroweak Doublet Dark Matter. *Phys. Rev.*, D94(9) :095008, 2016. [34](#)

- M. Duch, B. Grzadkowski, and J. Wudka. Classification of effective operators for interactions between the Standard Model and dark matter. *JHEP*, 05 :116, 2015. [34](#)
- U. Ellwanger. Present Status and Future Tests of the Higgsino-Singlino Sector in the NMSSM. *JHEP*, 02 :051, 2017. [31](#)
- A. Freitas, S. Westhoff, and J. Zupan. Integrating in the Higgs Portal to Fermion Dark Matter. *JHEP*, 09 :015, 2015. [35](#)
- T. Han, F. Kling, S. Su, and Y. Wu. Unblinding the dark matter blind spots. *JHEP*, 02 :057, 2017. [31](#)
- K. Harigaya, K. Kaneta, and S. Matsumoto. Gaugino coannihilations. *Phys. Rev.*, D89(11) :115021, 2014. [35](#)
- S. Horiuchi, O. Macias, D. Restrepo, A. Rivera, O. Zapata, and H. Silverwood. The Fermi-LAT gamma-ray excess at the Galactic Center in the singlet-doublet fermion dark matter model. *JCAP*, 1603(03) :048, 2016. [35](#)
- P. Huang, R. A. Roglans, D. D. Spiegel, Y. Sun, and C. E. M. Wagner. Constraints on Supersymmetric Dark Matter for Heavy Scalar Superpartners. *Phys. Rev.*, D95(9) :095021, 2017. [31](#), [35](#)
- G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest. Supersymmetric dark matter. *Phys. Rept.*, 267 :195–373, 1996. [31](#), [35](#)
- R. Mahbubani and L. Senatore. The Minimal model for dark matter and unification. *Phys. Rev.*, D73 :043510, 2006. [35](#)
- N. Nagata, H. Otono, and S. Shirai. Probing Bino-Wino Coannihilation at the LHC. *JHEP*, 10 :086, 2015. [35](#)
- K. Rolbiecki and K. Sakurai. Long-lived bino and wino in supersymmetry with heavy scalars and higgsinos. *JHEP*, 11 :091, 2015. [35](#)
- C. E. Yaguna. Singlet-Doublet Dirac Dark Matter. *Phys. Rev.*, D92(11) :115002, 2015. [35](#)
- T. T. Yanagida and N. Yokozaki. Bino-Higgsino Mixed Dark Matter in a Focus Point Gaugino Mediation. *JHEP*, 11 :020, 2013. [35](#)

Chapitre 4

Expériences, propriétés et contraintes des modèles

*” A theory is a supposition which we hope to be true, a hypothesis is a supposition which we expect to be useful; fictions belong to the realm of art; if made to intrude elsewhere, they become either make-believes or mistakes.
”*

George Johnstone Stoney

Sommaire

4.1	Abondance cosmologique	49
4.1.1	Planck et le CMB	49
4.1.2	Propriétés du modèle	51
4.2	La détection directe	55
4.2.1	Présentation	55
4.2.2	Principe	55
4.2.3	Taux de diffusion	56
4.2.4	Section efficace différentielle de diffusion	58
4.2.5	Expériences	59
4.2.6	Allure des contraintes	59
4.2.7	Contraintes de la DD sur nos modèles	60
4.3	La détection indirecte	62
4.3.1	Principe	62
4.4	Production de matière sombre au LHC	64
4.5	Références	65

Idéalement, une théorie doit pouvoir être validée ou invalidée par l'expérience. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Il arrive souvent qu'on ne puisse pas totalement rejeter une théorie. En effet, lorsque qu'une théorie a plusieurs paramètres, il n'est pas toujours possible de la tester sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Néanmoins, on peut généralement exclure une partie de cet espace des paramètres par l'expérience. On parle de contraintes expérimentales, celles-ci permettant de réduire l'espace des paramètres accessible. Ces contraintes sont primordiales et complémentaires à la théorie. Sans elles, les concepts et les idées ne pourraient pas être testés.

Pour nos modèles, la motivation initiale est la matière sombre. On a vu au chapitre 2 que s'il y a une matière sombre, alors il existe aujourd'hui une densité relique qui lui est associée. À la section 2.3, on a vu comment, pour un modèle donnée, évaluer la densité relique dans l'hypothèse d'une matière sombre froide. De fait, afin de tester le modèle il faut comparer cette valeur théorique avec la valeur expérimentale. La première partie de la section Sec. 4.1 décrit l'expérience de Planck, qui en observant le CMB à permis de mesurer la valeur la plus précise de la densité Ωh^2 . C'est cette valeur qui nous sert à contraindre nos modèles. La seconde partie de la section Sec. 4.1 est l'application de ce qui a été vu au chapitre Ch. 2 mais dans le contexte de nos modèles. On y discute des propriétés de la matière sombre, et de l'influence des paramètres du modèles sur la densité relique théorique que l'on doit comparer à la densité relique mesurée par Planck.

Cela étant dit, il n'est pas suffisant de s'arrêter à cet aspect. En effet, il faut pouvoir tester une théorie de plusieurs manières pour la rendre plus robuste. D'autant plus qu'on vu à la section Sec. 2.4 que le fait d'introduire une particule de type WIMP permettait de retrouver *a priori* l'abondance attendue. Fort heureusement, il existe d'autres expériences dites de détections. Comme leurs noms l'indiquent, elles ont pour but de détecter d'éventuelles particules de matière sombre, ou à défaut de réduire l'espaces des paramètres d'une théorie donnée. Elles se basent essentiellement sur les interactions d'une particule de matière sombre avec son environnement. Par conséquent, ces expériences permettent de sonder un modèle sur un autre terrain que celui de la densité relique. On s'intéresse aux expériences de DD à la section 4.2 ainsi qu'aux expériences de Détection indirecte (DI) à la section 4.3. Même si *in fine* seule la détection directe permet de contraindre nos modèles, une section de ce chapitre est consacrée à la détection indirecte. Là où la DD fait essentiellement appel à la physique des particules, la détection indirecte possède en plus une dimension astrophysique. Ces deux types d'expériences sont complémentaires, même si en générale l'une est plus contraignante que l'autre pour un modèle donné.

Enfin, l'étude d'une théorie avec une nouvelle particule de matière sombre est évidemment à relier avec les expériences de collectionneurs. En effet, une fois qu'un modèle de matière sombre passe les contraintes sur la densité relique et de détection, l'étude des signatures éventuelles de celui-ci dans un collectionneur est l'étape suivante. Le LHC est un formidable outil, qui permet de contraindre d'avantage un modèle voir de réduire drastiquement l'espace des phases. On discute du LHC à la section 4.4 de ce chapitre.

Le tableau 4.1 illustre les processus à l'origine des trois méthodes de détections citées plus haut, à savoir la détection directe et indirecte et la production de matière sombre en collisionneur. Ces dernières sont expliquées plus en détails dans la suite.

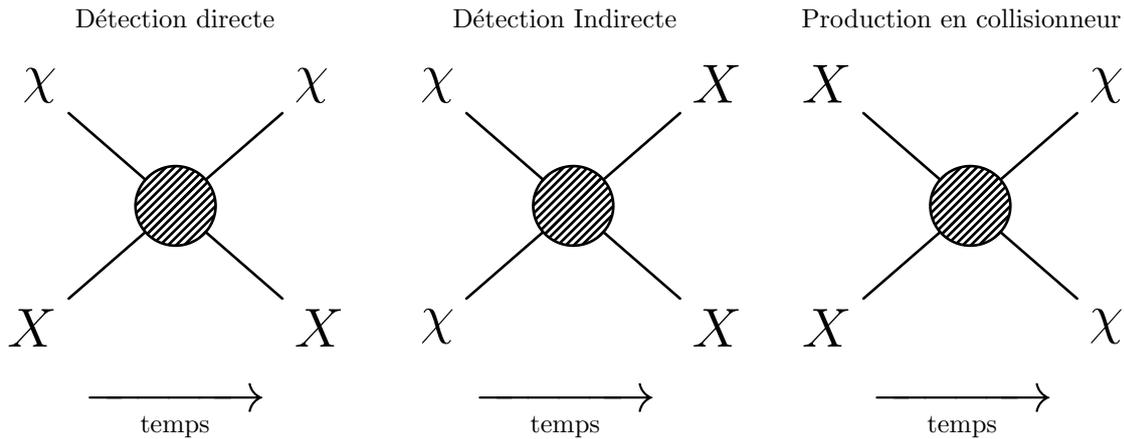


TABLEAU 4.1 – Diagrammes correspondants à la **DD** (panel de gauche), à la **DI** (panel du milieu) et de production de matière sombre en collisionneur (panel de droite). Ici χ est la matière sombre, et X représente n’importe quelle particule du **SM**.

4.1 Abondance cosmologique

4.1.1 Planck et le **CMB**

Le fond diffus cosmologique (**CMB**)

Nature du **CMB** L’Univers est rempli d’un rayonnement fossile, le **CMB**. Le terme *fossile* ici est important. Il signifie que les photons qui le composent proviennent d’un événement lointain dans le temps. En effet, ces derniers ont circulé à travers le temps et l’espace dès lors qu’ils furent aptes à se propager librement, soit depuis environ quatorze milliard d’années, qui n’est ni plus ni moins que l’âge de l’Univers.

Plus précisément, aux prémices de l’Univers, ce dernier était constitué d’un plasma de particules (protons, neutrons et électrons principalement) ainsi que de photons. Pendant un peu moins de 400 000 ans, les photons interagissaient constamment avec les électrons libres du plasma. Par conséquent, ils ne pouvaient pas circuler librement. On dit alors que l’Univers était opaque, ou plus familièrement on parle de soupe cosmique. De fait, il est n’est pas envisageable de sonder cette période avec les photons, vecteurs d’informations privilégiés en astrophysique. On peut interpréter cela comme un horizon temporel.

Cependant, l’Univers étant en expansion continue, il refroidi avec le temps. Ainsi, lorsque les électrons se combinent avec les protons pour former les premiers atomes d’hydrogène stable ($\sim 400\,000$ ans après le Big Bang), la population d’électrons libres devient négligeable. Les photons n’interagissant plus avec eux, ils peuvent circuler librement. On dit alors que l’Univers devient transparent. Le **CMB** est constitué des photons n’ayant pas interagis depuis que l’Univers est transparent, d’où le terme fossile. De tels vecteurs d’informations sont évidemment précieux pour comprendre les premiers instants de l’Univers.

De nos jours, comme l’Univers à refroidi et s’est étendu, les photons du **CMB** ont une longueur d’onde d’environ 1 mm et le rayonnement diffus associé à une température de 2.7 Kelvin. L’Univers est rempli de ces photons, il y en a environ 400 par centimètre cube. Ils forment ce qu’on appelle le fond diffus cosmologique ou **CMB**, que l’on peut détecter avec un radio-télescope ou encore un télescope à infrarouge lointain.

Le **CMB et la cosmologie** L’étude du **CMB** est cruciale car il contient des éléments qui permettent aux scientifiques de mieux comprendre l’histoire de l’Univers, que ce soit avant ou après que celui-ci devienne transparent. Il est également intrinsèquement lié aux modèles cosmologiques.

Plaçons nous dans le cadre du modèle cosmologique standard, celui dans lequel on travaille. Ce dernier repose sur le principe qu'au grandes échelles l'Univers est isotrope et homogène. C'est à dire que ses propriétés sont identiques en tout point, et dans n'importe quelle direction de l'espace. Bien évidemment, jusqu'ici l'étude du **CMB** confirme ces assumptions. Dans ce modèle, l'Univers est né il y a quatorze milliards d'années. A cette époque, l'Univers était extrêmement dense et chaud. On appelle Big Bang les tous premiers instants de l'univers.

Depuis, l'Univers s'est étendu. Les structures qu'on observe aujourd'hui sont le fruit de fluctuations dans l'Univers primordial, lesquelles se sont amplifiées avec l'inflation cosmologique. On ne fait ici qu'une grotesque description du modèle de cosmologie standard, mais cela permet de situer les choses. L'image **A.2** en annexe donne une représentation visuelle et schématique de l'évolution de l'Univers avec le modèle cosmologique standard. La chose importante à retenir est qu'aujourd'hui il est possible de mesurer le rayonnement fossile, que ce dernier date des premiers instants de l'Univers, et qu'il est une source d'information précieuse quant au modèle cosmologique.

Les paramètres du modèle standard de la cosmologie sont obtenus via de nombreuses observations astrophysiques basées sur des processus physiques différents. Néanmoins, afin de concilier la théorie avec les observations les physiciens ont du ajouter deux composantes énergétiques dont la nature est une énigme encore aujourd'hui. L'une d'entre elles est bien évidemment la matière sombre, dont on a déjà évoqué l'existence à la section **2**, et qui est la motivation initiale pour notre modèle de particule. La seconde composante est l'énergie sombre, qui est liée à l'expansion accélérée de l'Univers.

Le modèle standard de la cosmologie peut être encodé avec un petit nombre de paramètres, incluant notamment la densité de la matière ordinaire, la densité de la matière sombre, l'énergie sombre, la constante de Hubble ou encore la courbure de l'Univers.

Différentes valeurs de ces paramètres produisent différentes distributions de structures dans l'Univers, et par conséquent une configuration du **CMB** différente. Ainsi, l'étude du **CMB**, couplé avec d'autres expériences indépendantes comme l'étude des supernovae, des lentilles gravitationnelles, de l'oscillation acoustique des baryons ou encore l'étude des grandes structures, permet de déterminer les proportions des composantes énergétiques de l'Univers. En effet tous ces résultats indépendants convergent et permettent de contraindre les paramètres cosmologiques. Un très beau résultat de la physique moderne montre qu'avec les paramètres cosmologiques mesurés, la courbe théorique colle parfaitement avec les observation du **CMB**, comme le montre la figure **A.3** en annexe. Ainsi, le modèle cosmologique standard est extrêmement motivé, et ses paramètres sont très bien contraints.

A la fin, ce qu'il est important de retenir dans notre cas est que des expériences mesurant les paramètres cosmologiques, et plus particulièrement avec l'expérience de Planck, on mesure précisément la valeur densité de particule de matière sombre, *i.e.* de la densité relique. Pour des modèles de matière sombre tels que le notre, c'est une quantité primordiale et c'est pourquoi on a pris le temps d'expliquer tout cela. Le fait est que *in fine*, ce qui nous intéresse n'est rien d'autre que la densité relique Ωh^2 de la matière noire calculée aujourd'hui pour contraindre notre modèle. Mais il est important de comprendre d'où viens cette valeur et comment elle est mesurée.

Le satellite Planck

Planck est un satellite de l'Agence européenne spatiale –ou *European Space Agency*– (**ESA**). Il a été conçu pour observer l'Univers à des longueurs d'ondes comprises entre 0.3 mm et 11.1 mm. Cette gamme de longueurs d'onde permet de couvrir les ondes infrarouges lointaines, les micro-ondes ainsi que les ondes radios à hautes fréquences. Évidemment, ces longueurs d'ondes ne sont pas choisies au hasard, elles correspondent parfaitement à celles du **CMB** aujourd'hui. En effet, la mission principale de Planck était d'étudier le rayonnement fossile qu'est le **CMB** sur tout le ciel, et ce avec une sensibilité et une résolution jamais égalées auparavant. Le satellite Planck a été lancé le 14 mai 2009, et fut éteint le 23 octobre 2013. Une

image de ce dernier est présenté dans l'annexe, Fig. A.1. Sur l'image 4.1, on voit une image du CMB mesurée par Planck, nettoyée de sources parasites tel que le disque galactique.

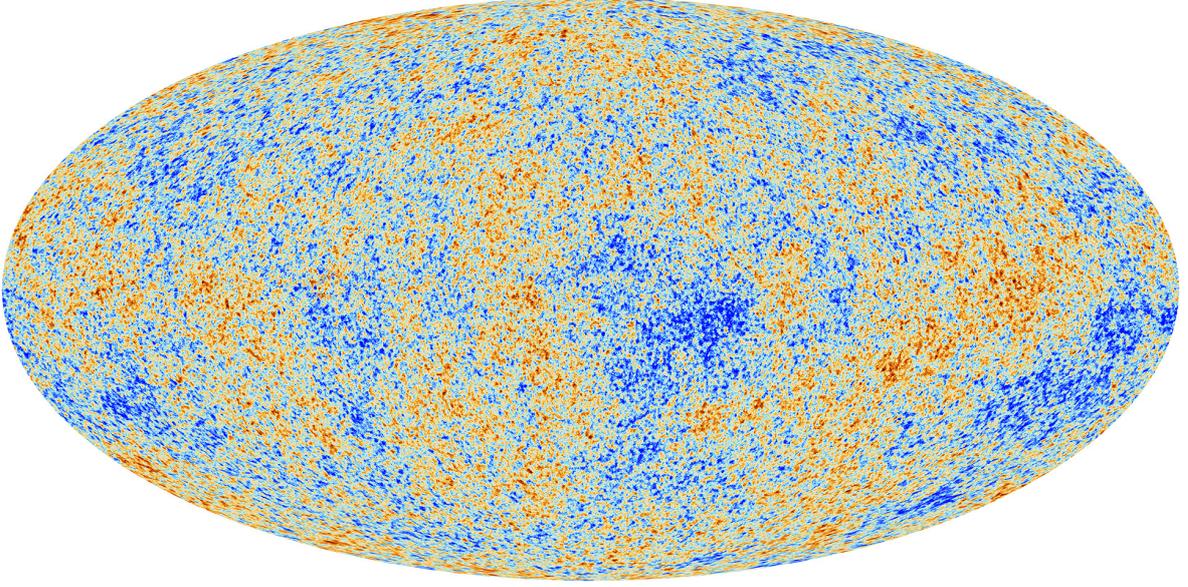


FIGURE 4.1 – Image du CMB. Voir la référence [Bucher \[2015\]](#) pour plus d'informations. *Crédits : ESA/Planck Collaboration.*

4.1.2 Propriétés du modèle

Intéressons nous maintenant à la matière noire et ses propriétés dans le cadre de nos modèles. Les quantités physiques importantes sont évidemment les masses, mais également le ou les angles de mélanges. Ces quantités ont été dérivées au chapitre 3.

En concordance avec la convention usuelle pour les neutralinos en SUSY, on note χ_i^0 les états propres de masse électriquement neutres, ordonnés par ordre croissant selon leur masse $m_{\chi_i^0}$. On rappelle qu'ils sont au nombre de deux pour n impair, et de trois pour n pair. On adopte la même convention pour les états chargés, où le 0 en exposant est remplacé par la charge électrique des états propres de masse. Les mélanges sont paramétrisés par un ou deux angles de mélange selon la parité de n , respectivement noté θ dans le cas impair, θ_+ et θ_- dans le cas pair. Dans la suite on parlera d'angle de mélange au singulier, en gardant à l'esprit qu'ils sont au nombre de deux dans le cas où n est pair.

La particule de matière sombre est, par construction, la particule la plus légère impaire sous la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 . Comme elle ne peut se désintégrer, elle est automatiquement stable. C'est exactement comme dans le MSSM, où le neutralino le plus léger est stabilisé grâce à la R-parité. Autrement dit, χ_1^0 est notre particule matière sombre. Ses interactions sont limitées puisqu'elle est χ -like. C'est essentiellement un singlet avec une petite composante provenant du n -plet ψ . Pour mieux visualiser ce qu'il se passe, on peut raisonner en faisant les changements $\chi \sim \chi_1^0$ et $\psi \sim \theta \chi_1^0$ dans les Lagrangiens des Eq. (3.2) et Eq. (3.6), avec θ petit. Les termes qui permettent à χ_1^0 d'interagir avec les autres particules sont au nombre de trois.

Tout d'abord il y a \mathcal{L}_{mix} . Ce dernier est à l'origine des interactions électro-faibles, portées par la composante venant de ψ et donc supprimé par le mélange. Or, toujours par construction, le mélange est faible puisqu'il est supprimé par une certaine puissance du cut-off Λ , qui dépend de la représentation ψ . Ainsi, les propriétés de la matière sombre vont grandement dépendre du mélange entre χ et ψ .

Ensuite il y a $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$. Cet opérateur permet l'annihilation directe de la matière sombre en particules du SM, et ce indépendamment du mélange. A la différence de \mathcal{L}_{mix} , sa dimension

est de cinq, et est indépendante de ψ .

Enfin, dans une moindre mesure, l'opérateur de dimension cinq $\psi\psi\phi\phi$ influence aussi la densité relique. Cependant, ce dernier est supprimé par l'angle de mélange au carré puisque la composante de χ_1^0 venant de ψ est proportionnelle à l'angle de mélange. En effet, $\psi\psi\phi\phi \sim \theta^2 \chi_1^0 \chi_1^0 \phi\phi$.

Bien sur, les masses vont avoir un rôle crucial quant aux propriétés de la matière sombre. On s'intéresse à des masses de l'ordre de l'échelle électro-faible, jusqu'à quelques centaines de GeV. Puisque que l'on impose χ_1^0 étant singlet-like, cela implique que la masse m associée à χ est inférieure à la masse M du n -plet ψ . La différence de masse entre la masse du n -plet M et celle du singlet m , notée $\Delta m = M - m$, est de l'ordre de la dizaine de GeV.

Densité relique et *freeze-out*

On s'intéresse au comportement de la densité relique Ωh^2 . On travail avec des masses électro-faibles, que l'on fixe. Se référer au chapitre Chap. 2 sur la matière sombre et la densité relique, et notamment à la section 2.3. Étant donné que nos modèles possèdent des secteurs sombres similaires à celui du MSSM, ce que l'on a vu dans le contexte du MSSM reste valable pour nos modèles, ou la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 joue le rôle de la R-parité.

Afin de simplifier, on suppose que l'impact de $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est négligeable devant celui de \mathcal{L}_{mix} . En d'autres termes, l'annihilation directe de la matière sombre est négligeable devant les processus de co-annihilation dus à l'opérateur \mathcal{L}_{mix} . Étant donné que le mélange entre les χ_i^0 est due à un opérateur de dimension supérieure, il peut être aussi petit que l'on veut si l'échelle de la nouvelle physique est suffisamment grande. En effet, θ est proportionnel au cut-off Λ , lui même élevé à une certaine puissance négative. On a vu que $\theta \propto \Lambda^{-1}$ et $\theta \propto \Lambda^{-3}$ pour $n = 3$ et $n = 5$, et $\theta_{\pm} \propto \Lambda^{-2}$ pour $n = 4$ (cf. Ch.3). Se manifestent alors les différents cas suivants listés ci-dessous.

- L'angle de mélange est trop petit pour que la matière sombre χ_1^0 puisse à un instant donné être en équilibre dans l'histoire thermique de l'univers. Dans ce cas, la densité relique associée à χ_1^0 ne peut être prédite que si on assume certaines conditions initiales.

A titre d'exemple, on peut envisager un scénario où l'abondance initiale de χ_1^0 est nulle. Puis, avec de très faibles couplages au SM, son abondance augmente au cours du temps via à un processus de *freeze-in*. Dans certains cas, ce processus est indépendant de la physique UV, *i.e.* de la température de réchauffement de l'Univers. Le calcul se fait alors sans hypothèse supplémentaire. On discute du processus de *freeze-in* plus en détail à la section Sec.4.1.2. Remarquons qu'il peut y avoir une contribution à la densité relique Ωh^2 provenant du *freeze-out* de χ_2^0 , puis de la désintégration de χ_2^0 en χ_1^0 .

- L'angle de mélange est petit mais suffisamment grand pour qu'il y ai les désintégrations rapides $\psi_i \rightarrow \chi_1^0 + \text{SM}$ ainsi que les processus $\chi_1^0 + \text{SM} \rightarrow \psi_i + \text{SM}$ (diffusion sur le bain thermique) grâce à l'opérateur de mélange \mathcal{L}_{mix} . Ici on ψ_i correspond à n'importe quel état n -plet like, par exemple χ_2^0 , et SM englobe une ou plusieurs particules du SM. L'abondance de χ_1^0 est alors complètement déterminée par les co-annihilations de ψ_i , lesquelles font décroître la densité de χ_1^0 puisque ce dernier reste en équilibre avec les ψ_i . En effet, comme l'illustre le tableau A.1 dans le cas du singlet-quintuplet, les canaux de co-annihilation contenant les états de ψ dominant.

On retrouve ce cas de figure dans le cas du *well-tempered neutralino*, où il a déjà été remarqué dans le papier Arkani-Hamed et al. [2006] que dans cette situation, la densité relique devient effectivement indépendante d'une valeur précise de θ , et ne dépend alors que des masses. Ainsi, même pour des valeurs très petites de l'angle de mélange on peut retrouver la densité relique observée $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$ en choisissant convenablement les masses, et plus particulièrement la différence entre les masses.

Notons que ce cas doit être artificiellement ajusté, où *finet-tuned* en anglais. En effet, avec une différence de masse de l'ordre de 10% qui semble naturelle, la densité relique Ωh^2 est extrêmement sensible à la valeurs exacte. Par conséquent, le choix des paramètres doit être très précis afin d'obtenir la densité relique observée.

- Pour $\theta \gtrsim 0.1$, les processus d'annihilations impliquant directement χ_1^0 deviennent importants. De fait, la densité relique est dépend des masses et de de la valeur de l'angle de mélange θ . Pour des masses électro-faibles, avec une différence en masse d'environ 20 GeV, il est toujours possible de retrouver la bonne densité relique en choisissant le θ adéquate. En effet, en augmentant le mélange, on passe d'une matière sombre *singlet-like* avec une densité relique élevée pour une masse électro-faible, vers une matière sombre étant de plus en plus *n-plet-like*, avec une densité relique faible. Or, la densité relique étant une fonction continue, il existe nécessairement un angle de mélange intermédiaire tel que l'on trouve la bonne densité relique. C'est bien ce que l'on obtient avec nos analyse numériques.

- Lorsque l'angle de mélange approche $\mathcal{O}(1)$, la physique décrite par notre théorie effective atteint sa limite de validité. Au delà, la densité relique dépend en détail de la physique UV, *i.e.* des états intégrés vivants au dessus du *cut-off* Λ . On n'est donc plus en mesure de décrire ce qu'il se passe d'un point de vu indépendant, *i.e.* sans supposer quoique ce soit quant à la complétion UV.

Cependant, sachant que l'on s'intéresse à des représentations avec des masses électro-faibles, cette situation est phénoménologiquement moins intéressante pour nous car un mélange d'ordre $\mathcal{O}(1)$ du singlet avec le *n-plet* conduit à une section efficace d'annihilation élevée, et donc à une densité relique trop basse pour être en accord avec les observations. Pour compenser ce phénomène il faut alors augmenter la masse des représentation, ce qui (comme on l'a vu avec les modèles tels que *Minimal Dark Matter* ou bien *Well-Tempered Neutralino* dans les cas pur higgsinos/gaugino), amène à des masses de plusieurs TeV.

Tout ce qu'on viens de voir est valable lorsque $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est négligeable devant \mathcal{L}_{mix} . Or, $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ permet à la matière sombre χ_1^0 de s'annihiler en particules du SM indépendamment du mélange. Cependant, il s'avère les valeurs de κ/Λ suffisamment élevées pour influencer la section efficace d'annihilation de manière significative sont déjà exclues par les expériences de DD. Ainsi, le modèle est consistant avec les observations si l'on néglige cet opérateur. Ce que l'on vient alors de dire reste donc valable.

Le processus du *freeze-in* en quelques mots

Le *freeze-in* est un mécanisme de production de matière sombre dans l'histoire de l'Univers. Il permet de reproduire la densité relique observée actuelle sans faire intervenir les paramètres UV de l'Univers primordial, telle que la température de réchauffement. Voir les références McDonald [2002] et Hall et al. [2010] pour les détails. C'est un mécanisme alternative au *freeze-out*. Ce dernier est certainement plus connu car ses applications sont nombreuses, notamment vis à vis des théories WIMP. Cependant, le *freeze-in* est tout aussi intéressant. En effet, il permet de calculer la densité relique pour des théories possédant des couplages extrêmement faibles de la matière sombre. Ces couplages sont si faible que celle-ci n'est potentiellement jamais en équilibre lors de l'histoire thermique de l'univers. Le contexte est donc complètement différent que pour le *freeze-out*, les deux mécanismes sont complémentaires.

Précisons que, dans un processus de *freeze-in* classique, les interactions se font via des opérateurs renormalisables. Le fait de considérer des opérateurs de dimensions supérieures change potentiellement ce qui est dit ci-dessus, en particulier par rapport au fait que la densité relique de dépend pas des quantités UV. C'est ce que l'on va mettre en exergue dans ce qui suit, de façons très succincte. Encore une fois, se référer au papiers cités ci-dessus pour plus d'informations.

Dans ce scénario, la particule de matière noire interagit si faiblement avec le reste du bain thermique qu'elle en est thermiquement découplée. C'est la première situation de la section 4.1.2. Pour ce faire, il suffit de prendre le cut-off Λ très grand, ou bien les couplages sans dimension très petits. Cela engendre automatiquement un angle de mélange très faible. De plus, on considère qu'initialement l'abondance de la matière noire est négligeable, et qu'elle n'augmente que grâce aux interactions du bain thermique. C'est particulièrement vrai lorsque la température chute en deçà de la masse de la matière sombre.

Évaluons la densité relique résultante pour un couplage du type $\alpha' \phi \psi \chi$, en résolvant l'équation de Boltzmann pour n_χ . La densité du nombre de particules χ prend alors approximativement la forme

$$\dot{n}_\chi + 3n_\chi H \approx \frac{g_\psi M^2 \Gamma_\psi}{2\pi^2} T K_1(M/T), \quad (4.1)$$

où K_1 est la première fonction de Bessel modifiée de second genre, $\Gamma_\psi \sim \alpha^2 M / (8\pi)$ est le taux de désintégration de ψ en une particule de matière noire χ et un Higgs ϕ , et T et H sont respectivement la température et la constante de Hubble. On a repris les mêmes notations pour les masses de ψ et χ que notre modèle. En utilisant l'approximation $\dot{T} \approx -HT$, la densité relique résultante est alors

$$\Omega_\chi h^2|_{\text{tot}} \simeq \frac{1.09 \times 10^{27} m \Gamma_\psi}{g_*^S \sqrt{g_*^P} M^2}. \quad (4.2)$$

Dans le cas d'opérateurs non renormalisables, lorsque l'on résout l'équation de Boltzmann on trouve que la densité relique dépend de la physique UV, et notamment de la température de réchauffement T_R . Par exemple, pour $\frac{\alpha}{\Lambda} \phi^\dagger \phi \psi \chi$ on obtient la densité relique

$$\Omega_\chi h^2|_{\text{tot}} \propto \frac{\alpha^2 m T_R}{\Lambda^2}. \quad (4.3)$$

Bien que ce résultat soit intéressant en soi, il n'est malheureusement pas indépendant de la physique UV. Or on n'a aucune information quant à la température de réchauffement T_R . Le mécanisme de *freeze-in* UV, *i.e.* avec des opérateurs effectifs, est donc moins prédictifs puisque qu'on les contraintes sur les masses et les couplages sont moins fortes. En effet, dans l'exemple précédent la présence de T_R ajoute un degrés de liberté supplémentaire.

Cependant, de tels scénarii sont parfois plus génériques que les mécanismes de *freeze-in* classiques. Nombre d'entre eux ont été étudié dans l'article [Elahi et al. \[2015\]](#).

Jusqu'ici on est resté assez général. Que se passe t-il plus précisément dans le cadre de notre théorie effective ? Prenons le cas $n = 3$. On sait que, cf. sec Sec.4.1.2, les deux opérateurs pertinents pour la densité relique sont $\mathcal{L}_{quartic}$ et \mathcal{L}_{mix} . Après avoir réécrit ces opérateurs en fonctions du boson de Higgs h et de sa VEV, et s'être débarrassé des termes de masses, il reste deux opérateurs à trois champs (type $h \chi_1^0 \chi_1^0$) et deux opérateurs à quatre champs (type $h h \chi_1^0 \chi_1^0$). Les deux premiers sont renormalisables, et la production de matière noire associée est donc indépendante des de la physique UV de l'univers primordial. En revanche, les deux opérateurs à quatre champs sont de dimension supérieure, et la densité relique associée va dépendre de la température de réchauffement comme on l'a vu précédemment.

Cela étant dit, on peut estimer pour quelle température de réchauffement T_R les opérateurs renormalisables dominant. On obtient une température relativement basse, de l'ordre de 10 TeV. Si cette condition est satisfaite, en général, pour obtenir la bonne densité relique avec de tels modèles, cela implique des couplages de l'ordre de $\mathcal{O}(10^{-11} - 10^{-13})$. Bien que ce résultat soit intéressant, on ne considèrera pas cette situation. En effet, on s'intéresse à l'espace des paramètres ou notre modèle est potentiellement accessible au LHC. Or avec si faibles couplages, il n'y aucun espoir de pouvoir déceler une quelconque signature de notre modèle.

4.2 La détection directe

4.2.1 Présentation

Nombreuses sont les théories qui prédisent l'existence d'une nouvelle particule élémentaire pour expliquer la matière sombre. Le postulat de base étant que, comme on l'a vu au chapitre 2, la particule de matière sombre soit massive et interagisse essentiellement gravitationnellement. Un moyen de confirmer qu'une telle particule existe serait donc de la détecter via une autre interaction que la gravitation. Une interaction privilégiée est celle de l'interaction faible, car une très large gamme de modèle implique que la matière sombre puisse interagir faiblement. C'est notamment due au paradigme du **WIMP** (voir Sec. 2.4), mais pas nécessairement.

Cependant, la portée de l'interaction faible est inférieure à la taille d'un nucléon, ce qui est extrêmement petit. Ceci expliquerait pourquoi les effets de l'interaction de la matière sombre avec la matière ordinaire sont particulièrement difficiles à voir. Il faut littéralement qu'une particule de matière sombre entre en *collision* avec la matière ordinaire, afin qu'un signal soit émis et reconnaissable. Imaginons qu'une particule de matière sombre traverse librement la Terre jusqu'à rencontrer un atome situé dans un détecteur. S'il y a alors diffusion de la matière noire sur l'atome, ce dernier acquiert une certaine énergie de recul E_R . Si cette énergie est suffisamment grande, il est potentiellement possible de détecter cette interaction et d'extirper de la cinématique les propriétés de la particule de matière sombre diffusée. Voir le panel de gauche du tableau 4.1 pour le diagramme correspondant. Cette approche est appelée **DD**, et a été proposée en premier par Goodman et Witten [Goodman and Witten \[1985\]](#), puis a été développée par Drukier, Freese et Spergel [Drukier et al. \[1986\]](#) au milieu des années 80.

Statistiquement parlant de telles collisions ne sont pas si rares, et peuvent se produire au sein d'un détecteur. L'idée est donc de concevoir un détecteur suffisamment sensible de sorte qu'il soit capable de mesurer l'énergie de recul associée à la collision entre une particule de matière sombre et un noyau de matière ordinaire. Évidemment, la difficulté réside dans le fait que ce même détecteur puisse discriminer tout autre signal parasite.

Une source importante de parasite sont les rayons cosmiques. La Terre est constamment bombardée par ces derniers. C'est pourquoi les expériences de détection directe se font sous une certaine épaisseur de couche terrestre. A titre d'exemple, le flux de rayons cosmiques à 1600m sous terre est environ un million de fois plus faible qu'à la surface. La plupart des radiations parasites restantes peuvent être stoppées avec une couche suffisante de bouclier. Bien sur, le bouclier en question ne stoppe pas la matière sombre puisque celle-ci n'interagit que très peu avec la matière ordinaire. Enfin il faut que le détecteur soit construit avec des matériaux le très peu radioactifs, afin d'avoir un bruit de fond minimal.

4.2.2 Principe

Dans cette section, on reprend les notations adoptées au chapitre 2. Lorsque qu'une particule de matière sombre est diffusée sur un atome de masse M_n , l'énergie de recul atomique est

$$E_r = \frac{q^2}{2 M_n} = (50 \text{ keV}) \left(\frac{m_\chi}{100 \text{ GeV}} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{M_n} \right), \quad (4.4)$$

ou q est le moment transféré et lors de la collision est $v \sim 10^{-3}$ est la vitesse de la particule de matière sombre incidente dans le cas non relativiste.

Prenons à titre d'exemple les expériences [la grande expérience souterraine au xénon –ou Large Underground Xenon experiment– \(LUX\)](#) et [XENON1T](#), que nous décrivons brièvement à la section Sec. 4.2.5. Ces deux expériences utilisent le Xénon comme atome cible, ce dernier ayant une masse $M_n \sim 120 \text{ GeV}$. Sachant que ces expériences ont une énergie seuil de quelques keV, en substituant E_r et M_n par leur valeur dans l'équation 4.4, on en déduit que la sensibilité

de tels détecteurs se dégrade pour des masses de matière sombre inférieures à ~ 10 GeV. Cela étant dit, la gamme de masse optimale de la matière sombre pour la détection est l'échelle électro-faible, soit aux alentours de 100 GeV. En effet, à de telles masses l'énergie de recul est de l'ordre de quelques dizaines de keV, là où la réponse du détecteur est la plus efficace. Ainsi, les masses électro-faibles sont privilégiées par ces détecteurs. C'est idéal pour tester les nombreuses théories, et notamment celles qui contiennent des [WIMP](#).

Depuis le début on parle de diffusion de la matière sombre sur l'atome cible. Cela sous-entend que la particule de matière sombre rebondit sur l'atome cible sans être altérée, *i.e.* que la matière sombre sortante est la même que la matière sombre entrante (au niveau d'excitation près). Cela se justifie par le fait que pour une particule de matière sombre de masse électro-faible, son énergie cinétique est de quelques keV. Cette valeur est bien inférieure à l'énergie de liaison de l'atome cible qui est de l'ordre du MeV. Ainsi, pour les masses électro-faible qui nous intéressent, seule la diffusion est pertinente.

Il est tout de même à noter que ces détecteurs permettent également de tester des modèles avec des particules de matières sombre plus massives. Cependant, les contraintes sont moins fortes du fait que l'on s'éloigne de la gamme de masse qui correspond au maximum de la sensibilité du détecteur. Pour ce qui est des masse sub-GeV, on est sous le seuil de détection. En l'état, ces expériences ne sont donc pas adaptées. Néanmoins, pour de si faibles masses, la diffusions de la particule de matière sombre sur les électrons de l'atome cible est plus efficace que sur l'atome lui même. De fait, avec une analyse et un procédé différents il est quand même possible de contraindre les petites masses.

Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux particules de matière sombre de masse électro-faibles, dans la limite non relativiste.

4.2.3 Taux de diffusion

La quantité physique importante pour la [DD](#) et évidemment le taux de diffusion d'une particule de matière sombre sur un noyau cible du détecteur. Intéressons nous au taux différentiel par unité de masse du détecteur, donnée par

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{n_\chi}{m_n} \left\langle v \frac{d\sigma}{dE_R} \right\rangle = \frac{\rho_\chi}{m_\chi m_n} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} d^3v v \tilde{f}(\vec{v}, t) \frac{d\sigma}{dE_R}. \quad (4.5)$$

On passe de la deuxième à la troisième égalité en voyant simplement que $n_\chi = \rho_\chi/m_\chi$, et en notant que l'expression entre les brackets correspond à la moyenne sur les vitesses des particules de matière sombre entrantes. Ici \tilde{f} est la distribution des vitesses dans le laboratoire et $d\sigma/dE_R$ est la section efficace différentielle de diffusion.

La distribution de vitesse dans le laboratoire \tilde{f} s'obtient en appliquant un boost Galiléen à la distribution de vitesse galactique f .

$$\tilde{f}(\vec{v}, t) = f(\vec{v} + \vec{v}_{\text{obs}}(t)), \quad \text{où} \quad \vec{v}_{\text{obs}}(t) = \vec{v}_\odot + \vec{v}_\oplus(t), \quad (4.6)$$

avec \vec{v}_\odot la vitesse relative du Soleil par rapport au repère galactique de la matière sombre, et \vec{v}_\oplus la vitesse relative de la Terre par rapport au Soleil. Pour fixer les ordres de grandeurs, on a $v_\odot \sim 220 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_\oplus \sim 30 \text{ km.s}^{-1}$.

Du fait de la rotation de la Terre autour du Soleil, une bonne approximation pour $\vec{v}_{\text{obs}}(t)$ est donnée par

$$\vec{v}_{\text{obs}}(t) = \vec{v}_\odot \left(1 + \epsilon \cos[\omega(t - t_0)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right), \quad (4.7)$$

où $\omega = 2\pi/\text{an}$, t_0 est la phase de modulation annuelle. Le paramètre ϵ correspond au rapport de la composante de \vec{v}_\oplus en direction du Soleil avec v_\odot , et on a $\epsilon \ll 1$. Avec les equations (4.6)

et (4.7), sachant que $\epsilon \ll 1$, on est en mesure de faire un développement de Taylor de sorte à avoir

$$f(\vec{v} + \vec{v}_{\text{obs}}(t)) = f(\vec{v} + \vec{v}_{\odot}) + \epsilon \cos[\omega(t - t_0)] f'(\vec{v} + \vec{v}_{\odot}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.8)$$

Avec l'équation ci-dessus, on déduit la forme du taux de différentiel définis plutôt.

$$\frac{dR}{dE_R} = r_0 + r_1 \epsilon \cos[\omega(t - t_0)] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.9)$$

Le premier terme r_0 ne dépend pas de la rotation de la Terre autour du Soleil. Le second terme décrit quant à lui l'effet de cette révolution à l'ordre dominant. Ce terme est important pour prendre en compte la modulation du signal. Les termes d'ordres supérieurs sont potentiellement importants pour des particules de matière sombre légères ($\lesssim 10$ GeV), ou encore si on introduit des sous-structures dans la distribution des vitesses. Il est également à noter que cette approximation est valable dans le cas non-relativiste. On pourra retenir que la forme donnée à l'équation (4.9) est correcte dans le cas qui nous intéresse, soit pour une particule de matière sombre non-relativiste avec une masse électro-faible.

Quelques mots sur la modulation annuelle La **MN** n'a pas de direction privilégiée dans le repère galactique. Cependant, dans le référentiel du laboratoire, les vitesses de la **MN** sont anti-parallèles à la vitesse du Soleil par rapport à la Galaxie. Il y a donc comme un *vent* de **MN** dans le référentiel du Soleil. Au mois de juin la Terre se déplace dans la direction opposée à ce vent de **MN**, alors qu'en décembre la Terre se déplace dans la même direction que le vent de matière sombre. Ainsi, un observateur sur Terre s'attend à voir des particules de matière sombre avec des vitesses plus élevées en juin qu'en décembre, ainsi qu'un flux de **MN** plus important en été qu'en hivers. C'est la conséquence directe du second terme de l'équation (4.9), qui encode la modulation annuelle due à la rotation de la Terre autour du Soleil.

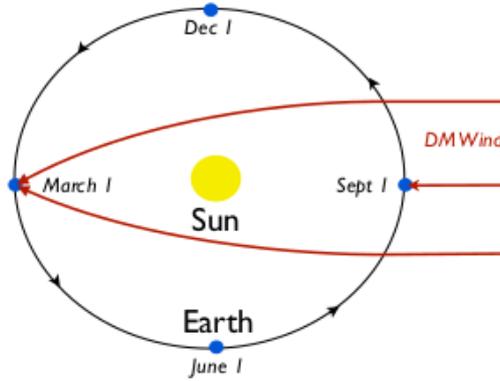


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de l'orbite terrestre autour du Soleil, avec l'orientation du vent de **MN**. La figure est extraite de Lee et al. [2014].

L'image 4.2 illustre cet effet, les flèches rouges indiquant la direction du vent de **MN**. On constate que les lignes rouges ne sont pas droites. Cette courbure est due à un effet purement gravitationnel, et n'a rien à voir avec la modulation annuelle. Néanmoins cela altère quelque peu la modulation attendue. En effet, lorsque la matière sombre traverse le puit gravitationnel du Soleil, sa trajectoire n'est plus rectiligne mais suit la géodésique associée. On parle alors de modulation gravitationnelle. A la fin, c'est la compétition entre la modulation gravitationnelle et la modulation annuelle qui détermine la modulation réelle.

Revenons à la formule (4.5). Afin de calculer l'intégrale, il est nécessaire de déterminer les valeurs des bornes, *i.e.* v_{\min} et v_{\max} .

Commençons par la vitesse maximale. Cette dernière n'est rien d'autre que la vitesse d'échappement de la matière sombre du halo de matière sombre dans lequel se trouve le laboratoire. Les mesures de vitesses d'étoiles les plus rapides dans la galaxie indiquent que la vitesse d'échappement se situe entre 498 km.s^{-1} et 608 km.s^{-1} , avec un niveau de confiance de 90% (voir [Smith et al. \[2007\]](#)).

La vitesse minimale correspond à la plus petite vitesse nécessaire pour causer la diffusion d'un noyau avec une énergie E_R . Considérons le cas général $\chi + N \rightarrow \chi' + N$, où χ' est un état excité de χ avec une masse égale à $m_\chi + \delta$. On retrouve le cas purement élastique lorsque $\delta \rightarrow 0$. La cinématique nous dicte alors que, dans le cas non relativiste, on a

$$v_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2 m_n E_R}} \left| \frac{E_R (m_\chi + m_n)}{m_\chi} + \delta \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m_n E_R}{2 \mu^2}} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_\chi m_n}{m_\chi + m_n}. \quad (4.10)$$

On remarque que, comme on peut s'y attendre, v_{\min} augmente lorsque la masse du noyau cible augmente et diminue lorsque la masse de la matière sombre augmente. On peut également noter que la vitesse minimale est plus petite dans le cas d'un événement purement élastique, *i.e.* pour δ nul.

Finalement, on obtient le taux d'événements total, généralement exprimé en kg.j^{-1} , en intégrant le taux différentiel sur les énergies possibles, *i.e.*

$$R = \int_{E_{\text{seuil}}}^{\infty} dE_R \frac{dR}{dE_R} \quad (4.11)$$

L'énergie seuil correspond à l'énergie minimale de recul que le détecteur est capable de mesurer.

Il ne nous manque plus qu'à discuter de la section efficace différentielle de diffusion $d\sigma/dE_R$ pour prétendre être apte à calculer le taux de diffusion. C'est l'objet de la prochaine section.

4.2.4 Section efficace différentielle de diffusion

La section efficace différentielle MN-noyau $d\sigma/dE_R$ encode les propriétés de physique de particule de la matière sombre, qui découlent directement du modèle considéré. Cette section efficace dépend fondamentalement de l'interaction de la matière sombre avec les quarks, laquelle est décrite au niveau microscopique en terme d'opérateurs effectifs.

En effet, dans le contexte de la DD, pour évaluer la section efficace différentielle de diffusion d'une particule de matière sombre sur un noyau cible, on adopte généralement une approche effective. Supposons que la matière sombre χ soit un fermion (de Dirac ou de Majorana), et qu'elle interagisse avec les quarks via un scalaire ou pseudo-scalaire ϕ . On peut alors décrire le processus de diffusions par un opérateur effectif à quatre fermions.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = g \bar{\chi} \Gamma_\chi \chi \bar{Q} \Gamma_Q Q, \quad (4.12)$$

avec Q les champs de quarks, $\Gamma_{\chi,Q} = I, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\mu\nu} \gamma^5$ selon la structure de l'interaction et g le couplage effective.

La procédure à suivre est la suivante :

- Il faut établir le matching entre l'opérateur contenant les quarks avec l'opérateur faisant intervenir les nucléons pour pouvoir calculer l'amplitude de diffusion MN-noyau \mathcal{M} .
- Prendre la limite non-relativiste de \mathcal{M} , notée \mathcal{M}_{nr} .
- Relier l'amplitude ainsi obtenue à la section efficace de diffusion en moyennant et sommant sur les spins des états initiaux et finaux, *i.e.* $\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{2 m_n}{\pi v^2} |\overline{\mathcal{M}_{\text{nr}}}|^2$. Ici v est la vitesse relative entre la matière sombre et le noyau.

La section efficace ainsi obtenue correspond alors à l'interaction de la matière sombre avec les noyaux cibles. Pour arriver au résultat, on utilise entre autres les éléments de la matrice hadronique, qui permet de décrire le contenu en quarks et gluon des nucléons. Ces derniers induisent de larges incertitudes. Bien que ces étapes ne tiennent que quelques lignes, elles sont loin d'être triviales. Le passage des quarks aux nucléons ou bien la sommations sur les spins sont généralement des calculs techniques.

Généralement, la section efficace de diffusions MN-noyau peut être décomposée en deux parties. L'une est appelée spin-indépendant et l'autre spin-dépendante.

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \left(\frac{d\sigma}{dE_R} \right)_{SI} + \left(\frac{d\sigma}{dE_R} \right)_{SD} \quad (4.13)$$

L'origine des différentes contributions se comprend au niveau microscopique, avec le Lagrangien décrivant les interactions de la matière sombre avec les quarks. Les contributions à la section efficace spin-indépendant proviennent des opérateurs effectifs à quatre fermion du type scalaire-scalaire ($\Gamma_\chi, \Gamma_Q = I$) ou vecteur-vecteur ($\Gamma_\chi, \Gamma_Q = \gamma_\mu$). La contribution à la section efficace spin-dépendant correspondent aux couplages de type vecteur axial ($\gamma^\mu \gamma^5$). Lorsque l'on détaille les calculs, on voit que la partie spin-indépendante est proportionnelle au carré du numéro atomique A de l'atome cible, alors que la partie spin-dépendante est elle proportionnelle à $J(J+1)$, où J est le moment angulaire du noyau. Cela explique entre autre les noms attribué à ces deux contributions. Ces contributions sont typique des candidats WIMP, et sont potentiellement testables dans les expériences de DD.

4.2.5 Expériences

Il existe plusieurs expériences de DD réparties sur le globe terrestre. Dans ce manuscrit, les résultats de LUX ont été utilisés, cette expérience ayant la meilleur sensibilité dans le régime qui nous intéresse. Les projections des futurs résultats de XENON1T ont également été employés, afin d'avoir une idée de l'évolution des contraintes sur nos modèles avec les prochaines données.

LUX

Cette expérience se trouve dans ce qui était la plus grande mine d'or nord américaine, *Homestake Mine* située dans le Dakota du sud. L'appareillage constituant le détecteur réside au complexe souterrain de recherche de Sanford –ou *Sanford Underground Research Facility*– (SURF), à environ 1500m sous la surface. Le détecteur est un *Time Projection Chamber*, ou (TPC), utilisant une cible de 368kg d'ultra-pure xénon liquide. Voir luxdarkmatter.org.

XENON1T

L'expérience est installée au laboratoire national souterrain de Gran Sasso de l'Institut national de physique nucléaire –ou *Istituto Nazionale di Fisica Nucleare*– (INFN), en Italie. Une cible de 62kg de xénon en phase liquide-solide est utilisée en TPC. Voir xenon1t.org.

4.2.6 Allure des contraintes

Les résultats des expériences de détection directe sont donnés sous forme d'une figure, où la section efficace d'interaction de la particule de matière sombre avec la matière ordinaire est donnée en fonction de la masse de la particule de matière sombre. Voir la figure Fig. 4.3.

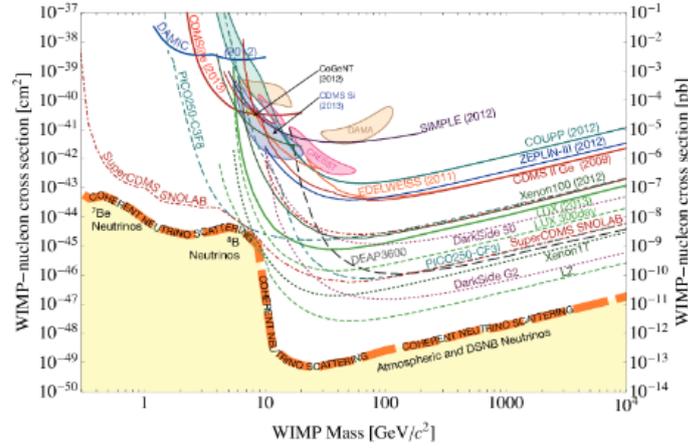
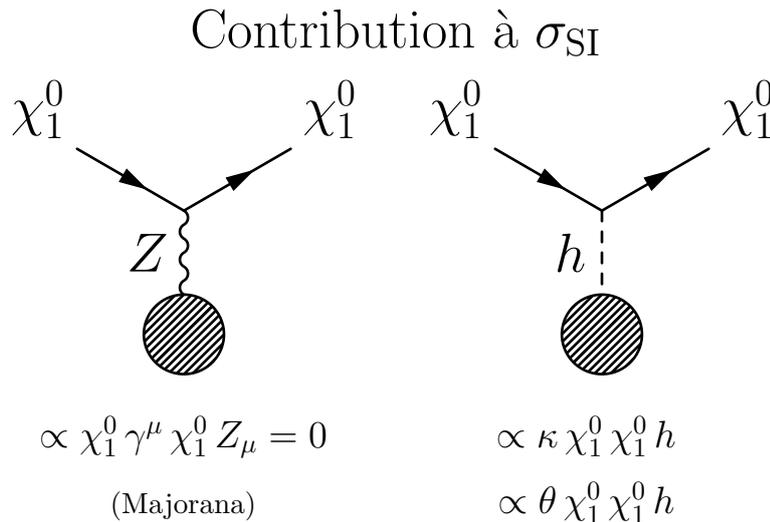


FIGURE 4.3 – Résumé (ligne pleine) et projection (ligne en pointillés) des limites supérieures sur les section efficace spin-indépendant WIMP-noyau. Crédits : Cooley [2014].

4.2.7 Contraintes de la DD sur nos modèles

On discute dans cette section de la détection directe, et des contraintes éventuelles sur nos modèles. Les expériences de DD sondent l'interaction de la matière sombre avec les nucléons. L'interaction de la matière sombre avec les nucléons est divisée en deux sections efficaces d'interactions. La section efficace spin-indépendante et la section efficace spin-dépendante. Voir la section 4.2.

• Discutons dans un premier temps de la section efficace spin-indépendante σ_{SI} dans nos modèles. Les seuls diagrammes contribuant à σ_{SI} sont ceux ayant pour médiateur un boson de Higgs. En effet, étant donné que nos particules de matière sombre sont des fermions de Majorana, le courant $j^\mu = \chi_1^0 \gamma^\mu \chi_1^0$ est nul. Par conséquent toute contribution éventuelle à σ_{SI} avec pour médiateur le boson Z^0 est automatiquement zéro. La tableau Tab. 4.2 illustre ces résultats.

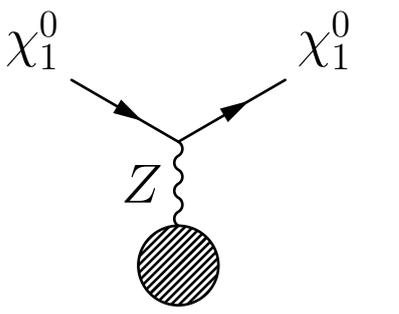


TABEAU 4.2 – Diagrammes contribuant la section efficace spin-indépendant. Comme la matière sombre est un fermion de Majorana, le diagramme de gauche est automatiquement nul. Ici θ fait référence au(x) paramètre(s) de mélange.

La contribution via le médiateur Higgs est due à la fois à l'opérateur quartique $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ de dimension cinq et à \mathcal{L}_{mix} . Ainsi les expériences de DD vont nous permettre de contraindre ces deux aspects de notre modèle.

• Intéressons nous maintenant à la section efficace spin-dépendante σ_{SD} . Seuls le couplage vecteur-axial de la matière sombre avec le boson Z contribue à σ_{SD} . Or, un tel couplage est nécessairement proportionnel à l'hypercharge Y de la représentation n -plet impliqué dans le mélange avec le pur singlet. Ainsi, nos représentation avec n impair n'ont aucune contribution à la section efficace spin-dépendante puisque qu'elles ont une hypercharge nulle. En revanche, pour n pair l'hypercharge est différente de zéro. Donc il existe une contribution à σ_{SD} uniquement lorsque n est pair.

Contribution à σ_{SD}



$$\propto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \chi_1^0 \gamma^\mu \gamma^5 \chi_1^0 Z_\mu \theta_+ \theta_- & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

TABLEAU 4.3 – Diagrammes contribuant la section efficace spin-dépendant. Seules les représentations impaires ont une contribution non nulle.

Pour nos modèle, la contrainte spin-indépendante est plus contraignante que celle étant spin-dépendante (cf. figure A.4). Ce n'est pas surprenant car contrairement σ_{SD} , une composante de σ_{SI} provient de $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ qui est de dimension cinq et qui ne dépend pas du mélange.

Remarquons que la taille relative des couplages de Yukawa, *i.e.* entre le Higgs et les quarks, impliquent que l'interaction du Higgs avec le quark strange domine le résultat. Ainsi, la composante strange des nucleons affecte l'incertitude totale du calcul de σ_{SI} , qui est de l'ordre de 20% d'après Durr et al. [2016]. Avec celle-ci il faut également prendre en compte l'incertitude sur la densité locale de matière sombre $\rho = 0.3 \pm 0.1 \text{ GeV/cm}^3$, cf. Bovy and Tremaine [2012]. Les contraintes sont donc affaiblies par ces incertitudes, et ce par un facteur de deux.

Les contraintes sur σ_{SI} sont données par plusieurs expériences de DD, notamment par les expériences de particule et d'astrophysique au xénon –ou *Particle and Astrophysical Xenon Experiments*– (PandaX) et LUX. Les résultats de LUX étant plus contraignants dans la gamme de masse qui nous intéresse, on utilisera ces données dans la suite. De futurs résultats sont attendus de la part de XENONIT, et on utilisera leur projections afin de voir comment va potentiellement varier la contrainte sur la DD.

Les résultats de ces expériences sont donnés en assumant que la matière sombre redonne la densité relique Ωh^2 totale mesurée par Planck. Or, dans notre modèle, ça n'est le cas que lorsque les paramètres sont convenablement choisis. Ainsi, pour être consistant, la section efficace σ_{SI}^X prenant en compte la densité relique $\Omega h^2|_X$ du modèle est donnée par

$$\sigma_{\text{SI}}^X = \frac{\Omega h^2|_{\text{exp}}}{\Omega h^2|_X} \sigma_{\text{SI}}^{\text{exp}}. \quad (4.14)$$

La relation est linéaire, si $\Omega h^2|_X$ est en sous-abondance, alors les contraintes sur σ_{SI}^X sont relaxées, et inversement en sur-abondance.

Dans notre modèle, le couplage de la matière sombre au Higgs se fait soit avec $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$, soit avec \mathcal{L}_{mix} . Autrement dit, la section efficace spin-indépendante σ_{SI} dépend du coupage κ , et du mélange entre le singlet et le n-plet, paramétrisé par

$$\theta \propto \frac{\lambda v^{n-1}}{\Lambda^{n-2}(M-m)}. \quad (4.15)$$

Plus précisément, lorsque κ décroît, lorsque la différence en masse augmente ou lorsque l'échelle Λ augmente on observe que σ_{SI} décroît. Il est intéressant de voir que le comportement de la densité relique est *grosso modo* l'inverse, *i.e.* Ωh^2 croît quand σ_{SI} décroît. Ainsi, une limite supérieure sur la densité relique avec Planck agit de façon complémentaire avec une limite supérieure de σ_{SI} .

Il y a cependant une différence importante quant aux comportements de σ_{SI} et Ωh^2 . Alors que la section efficace spin-indépendante est indépendante de la masse de la particule de matière sombre, la densité relique est approximativement inversement proportionnelle à la masse de la matière sombre.

4.3 La détection indirecte

4.3.1 Principe

Dans le **MSSM** comme dans notre modèle, les particules neutres du secteur sombre que sont les neutralinos (**WIMP**) sont des fermions de Majorana, *i.e.* elles sont leur propre antiparticule. Ainsi, elles peuvent s'annihiler entre elles et générer une multitude de produits de d'annihilation (cf. tableau 4.1, panel du milieu). De fait, l'annihilation WIMP-WIMP, si elle est observée, est une preuve potentielle de l'existence de la matière sombre dans notre Univers. Cette technique est appelée **DI** puisque l'on ne détecte pas directement la matière sombre mais des produits secondaires issus de l'annihilation de la matière sombre.

Comme on s'intéresse à l'annihilation WIMP-WIMP, la quantité physique cruciale est évidemment le taux d'annihilation associé. Ce dernier étant proportionnel au carré de la densité de matière sombre aujourd'hui, il semble judicieux de regarder les endroits où la densité de matière sombre est élevée, *i.e.* là où l'annihilation WIMP-WIMP est la plus probable. Le Soleil, la Terre ou bien le centre galactique sont donc des endroits propices aux observations. Les produits issue de l'annihilation incluent notamment les rayons- γ , les neutrinos et l'antimatière. sachant cela, il existe trois méthodes d'observations que l'on décrit brièvement ci-dessous.

Rayons- γ On pense que les annihilations WIMP-WIMP donnant lieu à des rayons- γ se produisent le plus souvent dans le centre galactique. L'un des processus générant un rayonnement γ est lorsque deux particules de matière sombre s'annihilent en un quark et un antiquark. Ces derniers donnent lieu à un faisceau de particule (*particule jet*) émettant à son tour les rayons- γ en question. Comme le processus de fragmentation quark-antiquark a grandement été étudié et bien compris grâce aux accélérateurs, la création de rayons- γ via les faisceaux est un processus suffisamment prédictif pour en extirper des contraintes sur **DI**. Un deuxième processus menant à l'émission d'un rayon- γ est lorsque la matière sombre s'annihile directement en rayon- γ . Dans ce cas, l'énergie du photons est proportionnelle à la masse du **WIMP**. Si l'on considère des particules de masse électro-faible, soit d'une centaine de GeV, les rayons- γ attendus sont d'une énergie considérable (*extremely high energy gamma rays*). Même si leur flux hypothétique est très faible et qu'ils soient difficiles à détecter, une observation de tels rayons- γ serait une indication évidente d'une annihilation de matière sombre et de sa masse.

Neutrinos Dans certaines cas, les neutrinos peuvent être un produit d'annihilation important. Lorsque qu'un **WIMP** voyage à travers l'Univers et la matière, il perd de l'énergie par diffusion. Ainsi, les **WIMP** peuvent se retrouver piégés dans de larges puits gravitationnels

tels que les objets compacts. Par conséquent, les particules de matière sombre peuvent s'accumuler dans un volume donné, augmentant ainsi leur taux d'annihilation. S'opère alors un équilibre entre leur taux d'annihilation et leur taux de capture. Il se trouve que le Soleil réunit des conditions favorables à un tel équilibre pour une grande majorité de modèles, et qu'il est proche de la Terre. Le Soleil est donc une source d'observation privilégiée pour l'annihilation WIMP-WIMP en neutrinos. Seuls les neutrinos issus de l'annihilation WIMP-WIMP ont une chance de s'échapper de l'objet compact (*e.g.* le Soleil) dans lequel s'est produite l'annihilation du fait qu'ils interagissent très peu avec la matière. C'est pourquoi on ne s'intéresse ici qu'aux neutrinos et pas aux autres produits issus de l'annihilation. Des WIMP suffisamment massifs (plus lourd que le boson W^\pm) s'annihilent en Higgs, bosons de jauge, quarks top et bottom ou encore muons, ces derniers menant à des neutrinos énergétiques que l'on est en mesure de détecter avec les télescopes à muons.

Anti-matière L'anti-matière est a priori un bon signal pour une annihilation WIMP-WIMP car elle est relativement rare dans l'Univers, et la plupart des mécanismes de création d'anti-matière dans l'Univers sont bien compris. La matière sombre, lorsqu'elle s'annihile en une paire quark-antiquark, peut après hadronisation produire des antiprotons. Un autre exemple de production d'antimatière via annihilation de WIMP est lorsque des positrons secondaires sont créés à partir des produits d'annihilations primaires comme W^+ , *i.e.* $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow W^- W^+$ puis $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$. Contrairement aux rayons- γ et aux neutrinos, les antiparticules ainsi produites sont chargées électriquement et donc sensibles aux champs magnétiques présents dans l'Univers. Elles perdent de l'énergie par effet Compton-inverse et effet synchrotron. Le flux d'antimatière doit donc être étudiée sur l'ensemble du halo galactique, et non plus sur des sources denses comme le centre galactique ou le Soleil. Lorsque qu'une particule d'antimatière atteint l'atmosphère terrestre, elle interagit pour donner naissance à des gerbes de particules. C'est pourquoi les expériences qui étudient les rayons cosmiques d'antimatière doivent être en orbite, au-dessus de l'atmosphère.

Contraintes de la DI sur nos modèles

Après s'être penché sur les contraintes de la DD sur nos modèles, c'est naturellement que l'on fait de même avec la DI. Pour nos modèles, la section efficace d'annihilation aujourd'hui est dominée par le processus $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow W^- W^+$. Pour la région de l'espace des paramètres respectant à la fois les contraintes liées à la DD et amenant à la densité relique Ωh^2 mesurée aujourd'hui, le taux d'annihilation correspondant est bien inférieur aux limites actuelles de la DI (Ahn et al. [2016]).

Ce n'est pas étonnant puisque c'est la co-annihilation qui domine sur l'annihilation pure. De plus, on sait que le coefficient de Wilson κ lié à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$, qui est à l'origine de l'origine de l'annihilation pure est grandement supprimé par les contraintes de la DD. Même si \mathcal{L}_{mix} permet également l'annihilation pure de la matière sombre avec elle-même, sa contribution est supprimée par l'angle de mélange qui est petit.

Notons tout de même que pour des masses plus élevées, ce n'est plus nécessairement la co-annihilation qui domine devant l'annihilation. En effet, l'effet non perturbatif de Sommerfeld devient alors important et peut significativement affecter le résultat cité plus haut. Voir les références Beneke et al. [2016] et Beneke et al. [2017] dans l'étude du bino-wino dans le cadre du MSSM. Néanmoins, les masses alors en jeu sont bien plus grandes que l'échelle électro-faible, ce qui rend une étude potentielle au LHC caduque. On ne s'intéressera donc pas à cette situation.

En conclusion, pour l'espace des paramètres qui nous intéressent, la DI ne permet pas de contraindre davantage nos modèles. On ne considérera donc que les contraintes liées à la densité relique et la DD.

4.4 Production de matière sombre au LHC

On ne peut pas clôturer ce chapitre sans parler de la troisième méthode de détection éventuelle de la matière sombre. Comme le montre le panel de droite du tableau [tableau 4.1](#), c'est la production de matière sombre dans les collisionneurs. Cette méthode est utile pour les théories avec une particule de matière sombre suffisamment légère pour être produite. Pour des masses électro-faibles telles que dans nos modèles, et avec un collisionneur tel que le [LHC](#), il est possible que des particules de matière sombre soient créées suite à une collision proton-proton à 13TeV. Les particules sombres ainsi créées ont potentiellement des signatures identifiables au sein des détecteurs. Évidemment, la difficulté est de s'identifier les signatures avec un rapport signal sur bruit élevé afin de distinguer la signature d'une particule sombre du bruit de fond.

Comme son nom l'indique, le [LHC](#) est un collisionneur de particules. Il a été construit par l'organisation européenne pour la recherche nucléaire, ou plus couramment appelée [conseil Européen pour la Recherche Nucléaire \(CERN\)](#). C'est le plus grand et le plus puissant collisionneur jamais construit, et se situe à la frontière franco-suisse. Après avoir accéléré deux faisceaux de protons, il les fait se collisionner frontalement en quatre points, auxquels sont rattachés quatre expériences différentes. Ces dernières sont [ATLAS](#), [CMS](#), [expérience sur un grand collisionneur d'ions –ou *A Large Ion Collider Experiment*– \(Alice\)](#) et [expérience du LHC sur le quark beauté –ou *Large Hadron Collider beauty experiment*– \(LHCb\)](#). Ces quatre détecteurs de particules sont réparties le long d'un anneau de 27km, enterré environ 100m sous la surface.

Dans ce manuscrit on n'abordera pas les aspects collisionneur de nos modèles. On ne s'intéresse qu'aux contraintes sur la détection directe et sur la densité relique. Ces dernières permettent de réduire l'espace des paramètres de sorte que l'analyse de nos modèles au [LHC](#) en soit simplifiée en terme de scan des paramètres. Voir le papier [Bharucha et al. \[2018\]](#) pour des premiers résultats sur les signatures des modèles singlet-triplet et singlet-quintuplet.

4.5 Références

- M. L. Ahnen et al. Limits to dark matter annihilation cross-section from a combined analysis of MAGIC and Fermi-LAT observations of dwarf satellite galaxies. *JCAP*, 1602(02) :039, 2016. [63](#)
- N. Arkani-Hamed, A. Delgado, and G. F. Giudice. The Well-tempered neutralino. *Nucl. Phys.*, B741 :108–130, 2006. [52](#)
- M. Beneke, A. Bharucha, F. Dighera, C. Hellmann, A. Hryczuk, S. Recksiegel, and P. Ruiz-Femenia. Relic density of wino-like dark matter in the MSSM. *JHEP*, 03 :119, 2016. [63](#)
- M. Beneke, A. Bharucha, A. Hryczuk, S. Recksiegel, and P. Ruiz-Femenia. The last refuge of mixed wino-Higgsino dark matter. *JHEP*, 01 :002, 2017. [63](#)
- A. Bharucha, F. Brümmer, and N. Desai. Next-to-minimal dark matter at the LHC. 2018. [64](#)
- J. Bovy and S. Tremaine. On the local dark matter density. *Astrophys. J.*, 756 :89, 2012. [61](#)
- M. Bucher. Physics of the cosmic microwave background anisotropy. *Int. J. Mod. Phys.*, D24 (02) :1530004, 2015. [51](#)
- J. Cooley. Overview of Non-Liquid Noble Direct Detection Dark Matter Experiments. *Phys. Dark Univ.*, 4 :92–97, 2014. [60](#)
- A. K. Drukier, K. Freese, and D. N. Spergel. Detecting Cold Dark Matter Candidates. *Phys. Rev.*, D33 :3495–3508, 1986. [55](#)
- S. Durr et al. Lattice computation of the nucleon scalar quark contents at the physical point. *Phys. Rev. Lett.*, 116(17) :172001, 2016. [61](#)
- F. Elahi, C. Kolda, and J. Unwin. UltraViolet Freeze-in. *JHEP*, 03 :048, 2015. [54](#)
- M. W. Goodman and E. Witten. Detectability of Certain Dark Matter Candidates. *Phys. Rev.*, D31 :3059, 1985. [[325\(1984\)](#)]. [55](#)
- L. J. Hall, K. Jedamzik, J. March-Russell, and S. M. West. Freeze-In Production of FIMP Dark Matter. *JHEP*, 03 :080, 2010. [53](#)
- S. K. Lee, M. Lisanti, A. H. G. Peter, and B. R. Safdi. Effect of Gravitational Focusing on Annual Modulation in Dark-Matter Direct-Detection Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 112 (1) :011301, 2014. [57](#)
- J. McDonald. Thermally generated gauge singlet scalars as selfinteracting dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :091304, 2002. [53](#)
- M. C. Smith et al. The RAVE Survey : Constraining the Local Galactic Escape Speed. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 379 :755–772, 2007. [58](#)

Chapitre 5

Résultats

*” An experiment is a question
which science poses to Nature,
and a measurement is the
recording of Nature’s answer. ”*

Max Planck

Sommaire

5.1	L’analyse numérique	68
5.1.1	Outils utilisés	68
5.1.2	Données utilisées	68
5.1.3	Méthode et paramétrage	68
5.2	Présentations des résultats	68
5.2.1	Un premier résultat : $n = 0$	68
5.2.2	Système singlet-triplet : $n = 3$	71
5.2.3	Système singlet-quadruplet : $n = 4$	72
5.2.4	Système singlet-quintuplet : $n = 5$	73
5.3	Résumé	75
5.4	Références	77

5.1 L'analyse numérique

5.1.1 Outils utilisés

Afin de contraindre nos modèles numériquement, il faut tout d'abord les implémenter sur ordinateur. Autrement dit il faut traduire la théorie en langage machine. Pour ce faire, j'ai récupéré les fichiers déjà existants propres au **SM** sous **FeynRules 2.3**, que j'ai ensuite modifiés et adaptés afin que les fichiers ainsi créés décrivent notre théorie. **FeynRules 2.3** est un package de **Wolfram Mathematica**. Voir le papier [Alloul et al. \[2014\]](#) pour plus d'informations sur **FeynRules**.

Grâce aux fichiers générés avec **FeynRules**, on est alors en mesure de sonder et d'étudier numériquement nos modèles. Pour rappel, on s'intéresse à la densité relique Ωh^2 ainsi que qu'à la section efficace spin-indépendante σ_{SI} . Ces deux quantités sont évaluées grâce au code publique **micrOMEGAs 4.3.1**, cf. [Bélanger et al. \[2015\]](#) et [Belanger et al. \[2014\]](#).

5.1.2 Données utilisées

Les résultats numériques obtenus peuvent être comparés aux valeurs expérimentales. La densité relique Ωh^2 est celle mesurée par Planck en 2015 (cf. [Ade et al. \[2016\]](#)), et sa valeur est $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$. Il est à noter qu'avec la valeur la plus récente publiée en 2018, 0.120 ± 0.001 (Cf [Aghanim et al. \[2018\]](#)), nos résultats restent similaires, et nos conclusions identiques. Cela se comprend étant donnée le faible changement sur la valeur numérique entre les deux mesures. La section efficace spin-indépendante que nous utilisons est celle de **LUX**, voir [Akerib et al. \[2017\]](#). Afin d'anticiper l'évolution des contraintes sur nos modèles avec les prochains résultats sur la **DD**, nous avons également pris en compte les perspectives quant aux futurs contraintes potentielles de l'expérience **XENON1T** (cf. [Aprile et al. \[2016\]](#)). Depuis notre analyse, la collaboration **XENON1T** a publié ses premiers résultats, et les limites sur la **DD** pour la gamme de masse qui nous intéresse sont dors et déjà meilleures que celles de **LUX** (voir [xenon1t.org](#)). Néanmoins, ces dernières limites restent inférieures aux perspectives que nous avons utilisé. Ainsi, les conclusions quant aux futurs contraintes restent valables. Pour le moment, les premiers résultats de **XENON1T** permettent juste de contraindre effectivement davantage nos modèles, sans pour autant dépasser les perspectives considérées pour notre analyse.

5.1.3 Méthode et paramétrage

Les résultats sont présentés sous forme de figures, ayant comme paramètres d'entrée la masse du **WIMP** $m_{\chi_1^0}$ et la différence de masse entre χ_2^0 et χ_1^0 , notée Δm . Pour l'analyse numérique, le ou les coefficients de de Wilson associés à \mathcal{L}_{mix} , *i.e.* λ ou (λ, λ') , sont fixés à l'unité. Ainsi, la valeur du coefficient de Wilson κ associé à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est donné en unité de λ . On étudie la densité relique Ωh^2 et la section efficace spin-indépendante σ_{SI} en fonction de l'angle de mélange θ pour des masses physiques électro-faibles. Remarquons que lorsque les masses et les coefficients de Wilson sont fixés, on fait varier l'angle de mélange en changeant la valeur du **cut-off** Λ . En effet, il y a une correspondance directe entre ces paramètres, cf. equations Eq. (3.33) et Eq. (3.58).

5.2 Présentations des résultats

5.2.1 Un premier résultat : $n = 0$

Comme on s'y attendait à la section Sec.3.3.1, l'annihilation d'un pur singlet χ via l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ peut potentiellement mener à la densité relique mesurée lorsque le coefficient de

Wilson correspondant κ/Λ est suffisamment grand. Cependant, comme on peut le constater avec la figure Fig.5.1, de telles valeurs sont doré et déjà exclues par les expériences de DD.

Par conséquent, un pure singlet avec une masse électro-faible n'est pas compatible avec les observations. Des degrés de liberté supplémentaires sont nécessaire à l'échelle électro-faible. Ces derniers correspondent bien évidemment à ψ dans notre modèle.

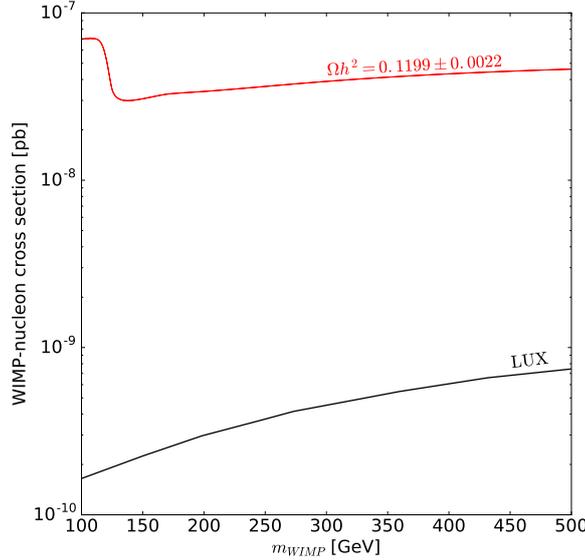


FIGURE 5.1 – Cas du pure singlet ($n = 0$). Le coefficient de Wilson κ est fixé à 1, le **cut-off** est choisi de sorte que l'on retrouve la bonne densité relicue Ωh^2 via le processus thermique du *freeze-out*. La section efficace WIMP-nucleon spin-indépendante est exclue par la limite supérieure de LUX. On compare la section efficace normalisée (cf. 4.2.7) avec les résultats de LUX Akerib et al. [2017].

On peut néanmoins pousser l'analyse un peu plus loin. Premièrement, on a considéré uniquement $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ comme canal d'annihilation. Autrement dit on a négligé les autres opérateurs, en particulier ceux donnant lieu à l'annihilation de la matière sombre en fermions du SM. Ces derniers, du type $(q_L \chi)(q_L^\dagger \chi^\dagger)/\Lambda^2$, sont de dimension six. On s'attend donc à ce que leur impact soit faible comparé à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ de dimension cinq. De plus, de tels opérateurs sont généralement grandement supprimés afin d'éviter les changements de saveur par courant neutre, en général par des échelles bien plus grande que le TeV. Ainsi, le fait de les négliger est motivé dès lors que l'on considère l'universalité des saveurs. Néanmoins, puisque l'on ne fait aucune hypothèse quant à la complétion UV de notre modèle, on peut envisager des structures de saveurs comme par exemple dans le *minimal flavour violation*. Dans ce cas, ces opérateurs de dimensions cinq peuvent avoir un impact non-négligeable.

Deuxièmement, on a considéré uniquement le processus thermique du *freeze-out*. Or, avec un κ très faible ou un **cut-off** très grand, les contraintes de DD ne sont plus un problème. Dans ce contexte, on peut tout à fait imaginer que la densité relicue puisse être obtenue par un processus de *freeze-in*, comme mentionné à la section Sec.4.1.2.

Cela étant dit, on n'ira pas plus loin dans l'analyse du pur singlet. La conclusion importante ici est que pour un processus thermique de *freeze-out* et des masses électro-faibles, le singlet doit nécessairement être accompagné par d'autres représentations électro-faibles. Dans la suite on se focalise sur les systèmes singlet-triplet, singlet-quadruplet et singlet-quintuplet (cf. Sec.3.2).

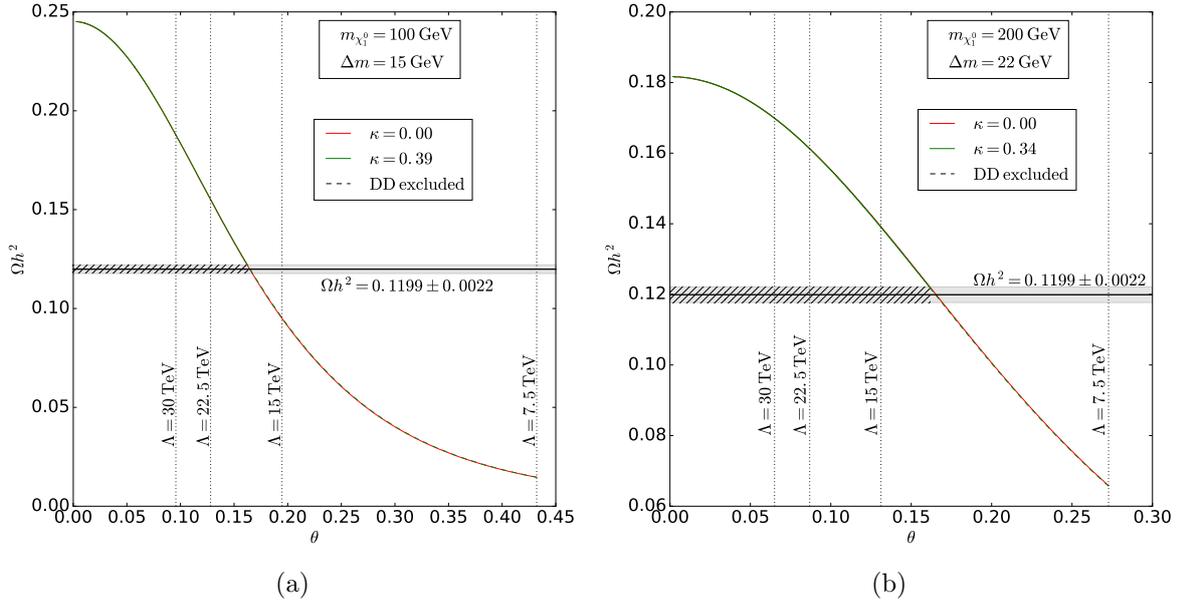


FIGURE 5.2 – Densité relic thermique via *freeze-out* en fonction de l’angle de mélange θ du système singlet-triplet, avec $m_{\chi_1^0} = 100$ GeV (a) et $m_{\chi_1^0} = 200$ GeV (b). Pour un coefficient de Wilson λ fixé à 1, on indique la valeur du *cut-off* correspondante avec l’équation Eq. (3.34). L’impact de $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ sur Ωh^2 est négligeable pour les valeurs de κ qui passent sous la contrainte de la DD.

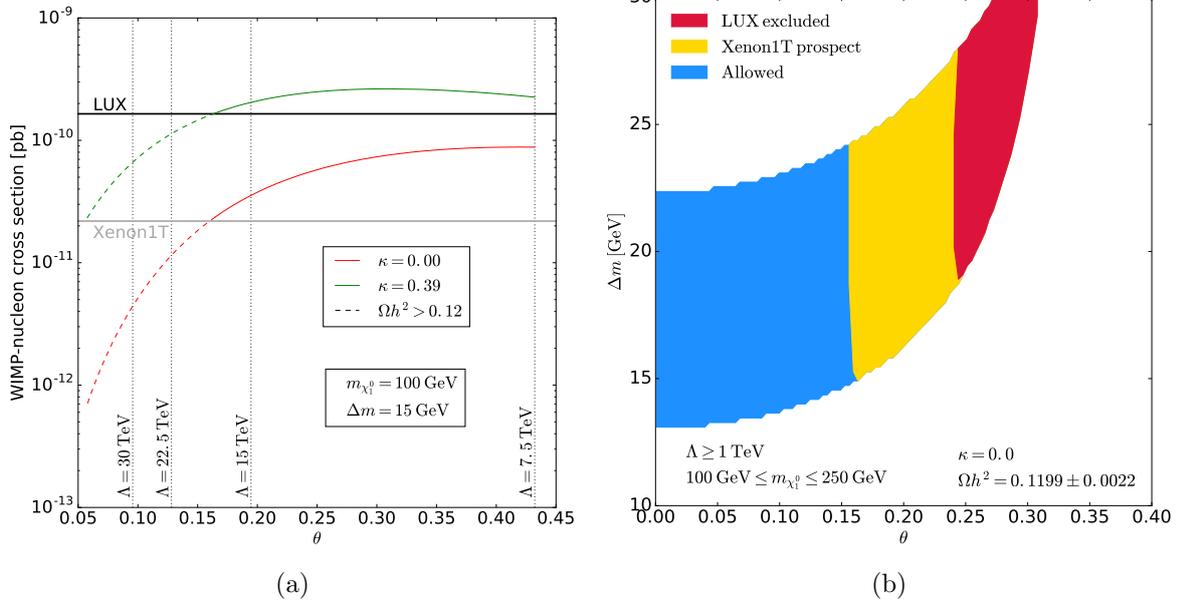


FIGURE 5.3 – (a) Section efficace *WIMP*-nucléon du système singlet-triplet, pour $m_{\chi_1^0} = 100$ GeV et une différence de masse de 15 GeV, en fonction du mélange singlet-triplet θ . Les contraintes de la DD imposent au coefficient de Wilson κ une limite supérieure d’environ 0.39 (pour $\lambda = 1$). (b) Ici $\kappa = 0$, l’aire colorée correspond à l’espace des paramètres telle que l’on retrouve $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$.

5.2.2 Système singlet-triplet : $n = 3$

Les résultats pour la densité relique Ωh^2 , ainsi que la section efficace spin-indépendante WIMP-nucleon σ_{SI} , sont respectivement montrés dans les figures Fig. 5.2 et 5.3. Les masses choisies sont évidemment électro-faibles, et représentatives du comportement générique des paramètres étudiés.

Plus spécifiquement, Fig. 5.2 montre la densité relique Ωh^2 en fonction de l'angle de mélange du système singlet-triplet. On a fixé la masse du WIMP $m_{\chi_1^0}$ et la différence de masse $\Delta m = m_{\chi_2^0} - m_{\chi_1^0} = \xi$, où ξ est défini dans l'Eq. (3.29). Pour une valeur fixe de λ , et en assumant que l'Eq. (3.34) est une bonne approximation, l'angle de mélange θ est en correspondance directe avec le l'échelle de suppression Λ . Cette dernière est également indiquée sur la figure avec les barres verticales. On choisi de fixer le coefficient de Wilson associé au mélange à l'unité, *i.e.* $\lambda = 1$, et de faire varier celle du **cut-off** pour moduler le mélange. Bien entendu, cela n'implique pas nécessairement que les opérateurs qui induisent le mélange aient un couplage $\mathcal{O}(1)$. En effet, il y a une dégénérescence en entre λ et Λ , ce qui signifie que qu'en redéfinissant simultanément ces deux paramètres on peut tout à fait avoir un couplage plus faible avec un **cut-off** plus petit par exemple. La quantité pertinente à considéré est en fait λ/Λ .

Fixer les paramètres $m_{\chi_1^0}$, Δm et θ n'est pas suffisant pour complètement déterminer la densité relique thermique. En effet, la section efficace d'annihilation dépend également de $\mathcal{L}_{\text{quatic}}$ et *a fortiori* du coefficient de Wilson κ . Les (co-)annihilations dépendent à la fois du mélange entre le singlet et le triplet, paramétrisé par θ , et du couplage quartique du singlet avec le boson de Higgs, *i.e.* κ . On constate que lorsque θ augmente, les processus de (co-)annihilations sont facilités, ce qui à pour effet immédiat de réduire la valeur de la densité relique. Ce comportement est indépendant de la valeur de κ , comme on peut le voir sur la figure.

Les valeurs sélectionnées de κ sont justifiées avec la Fig. (5.3a), où la section efficace spin-indépendante σ_{SI} est donnée en fonction de l'angle de mélange θ . On peut voir que dès que κ approche de 0.4, la limite supérieure de la détection directe devient contraignante, du moins pour des angles de mélange donnant la densité relique mesurée par Planck. N'importe quelle valeur de κ suffisamment grande pour significativement modifier la valeur de la densité relique par rapport au cas $\kappa = 0$ (en rouge sur la Fig. 5.2) va induire une section efficace σ_{SI} trop grande pour être compatible avec les données de LUX. Par exemple, les angles de mélanges en dessous de 0.16 sur les Fig. (5.2) et (5.3a) ne peuvent pas donner la bonne densité relique de $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$ puisque cela nécessiterai une trop grande valeur de κ . C'est la signification de l'aire hachurée. Cependant, ceci n'est valable pour les valeurs choisies de $m_{\chi_1^0}$ et Δm . En comparant les Fig. (5.2a) et (5.2b) on constate que la zone hachurée ne correspond pas aux même valeurs limites de l'angle de mélange.

La raison pour laquelle la densité relique thermique Ωh^2 est moins sensible à la valeur de κ que la section efficace spin-indépendante σ_{SI} est que la contribution des diagrammes avec un boson de Higgs en médiateur est moins importante. En effet, ce sont les co-annihilation qui dominent largement la densité relique.

Enfin, la Fig. (5.3b) montre, dans le plan $(\Delta m, \theta)$, l'espace des paramètres correspondant à la densité relique $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$. Cette figure est valable pour une masse du WIMP allant de 100GeV à 250GeV, avec κ nul. On vois que l'expérience LUX élimine déjà une partie de cet espace, et qu'avec les futurs résultats de XENON1T on va pouvoir d'avantage réduire l'espace disponible restant. Ainsi, pour des masses électro-faibles, le système singlet-triplet est d'ores et déjà contraint par la DD, et le sera d'autant plus à l'avenir. L'espace des paramètres passant les contraintes étant assez réduit, cela simplifie d'autant plus une analyse éventuelle

du modèle au LHC.

5.2.3 Système singlet-quadruplet : $n = 4$

Cette section est, comme son nom l'indique, consacrée aux résultats du système singlet-quadruplet. On a des figures similaires au modèle singlet-triplet (cf. Sec. 5.2.2), mais cette fois-ci on a deux angles de mélanges. Voir la Sec. 3.3.4 pour les détails.

Le cas générique est de choisir $\theta_- = 0$, *i.e.* l'angle de mélange θ_+ domine le mélange. Cette configuration permet de visualiser l'allure générique du système singlet-quadruplet, voir la Fig. 5.4a.

En opposition à la situation précédente, on considère également le cas où les deux angles de mélange sont égaux, *i.e.* les deux angles contribuent de manière équivalentes au mélange. Cependant, le cas $\theta_- = \theta_+$ est quelque peu *fine-tuned* du fait que les coefficients de Wilson λ et λ' doivent être choisis précisément pour compenser la suppression du facteur $(M - m)/(M + m)$ entre les angles de mélanges, voir Eq. (3.58). D'ailleurs, le *fine-tuning* se reflète sur la Fig. 5.4b, à travers les artefacts numériques sur la courbe, et également à travers le fait qu'il faille choisir une valeur précise de Δm pour retrouver la bonne densité relicue. En comparant les Figs. 5.4a et 5.4b, on constate que θ_+ est grandement supprimé dans le cas où les angles sont égaux.

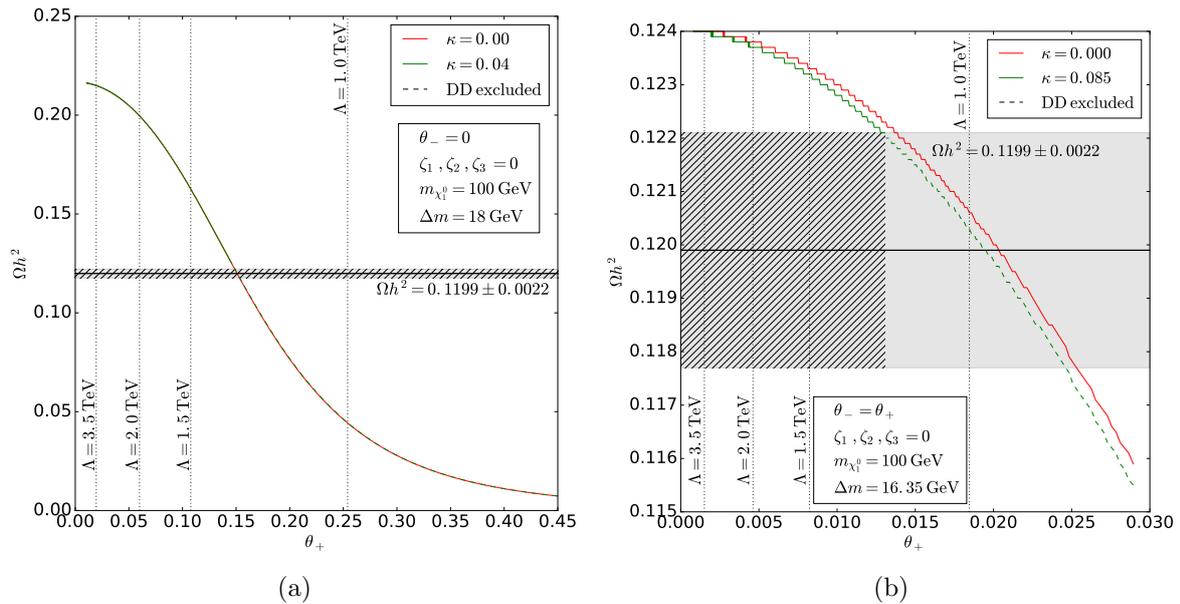


FIGURE 5.4 – Densité relicue thermique via *freeze-out* en fonction de l'angle de mélange θ_+ du système singlet-quadruplet, avec $m_{\chi_1^0} = 100$ GeV. (a) $\theta_- = 0$, c'est le cas générique avec un angle de mélange dominant. (b) $\theta_- = \theta_+$, situation particulière où les deux angles de mélanges sont égaux.

Sur la Fig. 5.5, les coefficients de Wilson associés aux opérateurs de dimension cinq que sont κ' et $\zeta_{1,2,3}$ sont nuls (voir le Lagrangien Eq. (3.35)). Après vérification, l'impact d'un κ' non nul est très faible, mais perceptible, après la réabsorption de la masse induite par une redéfinition du paramètre M . En effet, κ' différent de zéro implique un canal supplémentaire d'annihilation de la matière sombre, mais ce dernier est supprimé par le mélange. Voir la Sec. 3.3.4 pour les détails du système.

En revanche, la densité relicue du modèle est particulièrement sensible aux couplages $\zeta_{1,2,3}$ puisque ces derniers modifient le spectre de masse des états physiques. Effectivement, on peut facilement modifier les différences de masse entre les états chargés et l'état neutre du n -plet de plusieurs GeV en choisissant $\zeta_{1,2,3}$ non nuls. De fait, cela change drastiquement le taux de co-annihilation qui dépend fortement des masses.

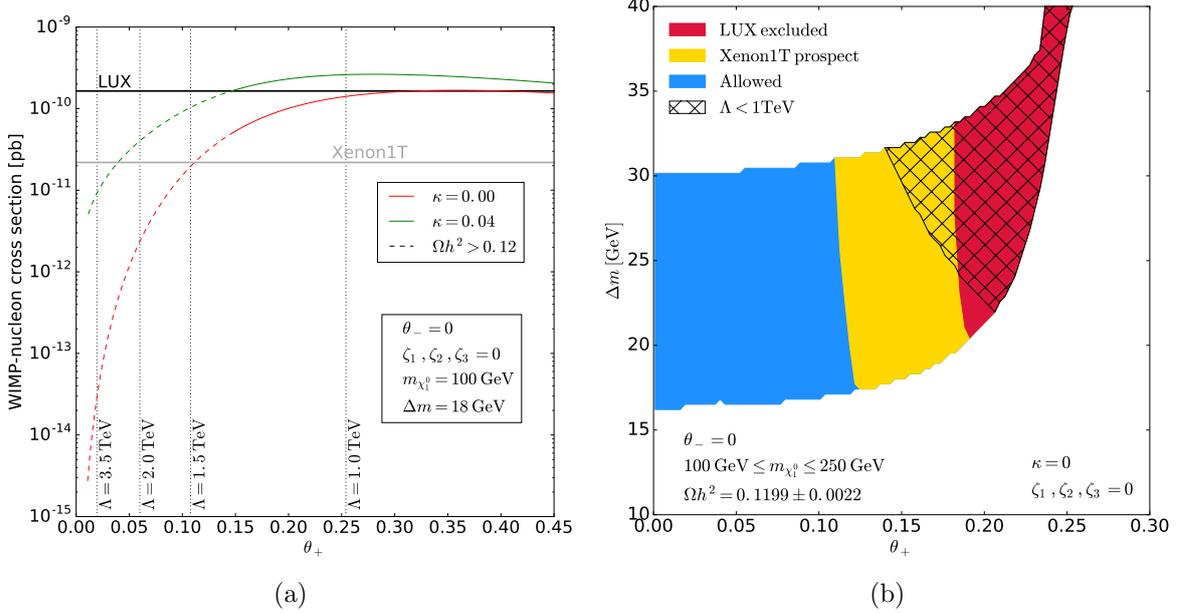


FIGURE 5.5 – (a) Section efficace WIMP-nucléon du système singlet-quadruplet, pour $m_{\chi_1^0} = 100 \text{ GeV}$ et une différence de masse de 18 GeV , en fonction du mélange singlet-quadruplet θ_+ et avec $\theta_- = 0$. Les contraintes de la DD imposent au coefficient de Wilson κ une limite supérieure d'environ 0.04 (pour $\lambda, \lambda' = 1$). (b) Ici $\kappa = 0$, la surface coïncide avec l'espace des paramètres où l'on retrouve $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$. La région hachurée correspond à un cut-off Λ inférieur à 1 TeV , *i.e.* là où notre théorie effective n'est plus valable.

La Fig. 5.5a montre la contrainte de la DD avec les données de LUX sur le système singlet-quadruplet pour $\theta_- = 0$. Une fois de plus, on a $\zeta_{1,2,3} = 0$. On a vérifié que l'impact de ces couplages est toujours sous-dominant. On a la valeur de la section efficace spin-indépendante σ_{SI} en fonction de l'angle de mélange θ_+ pour une masse du WIMP de 100 GeV dans le cas générique. Comme pour le système singlet-triplet, la DD impose de très faibles valeurs pour le couplage κ .

La Fig. 5.5b quant à elle montre l'espace des paramètres pour $\kappa = \kappa' = \zeta_{1,2,3} = 0$, où l'on retrouve la densité relicue thermique observée par Planck, *i.e.* $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$. On constate que les limites de la DD commencent à contraindre l'espace des paramètres disponible. Cependant, si l'on impose que le cut-off Λ soit plus grand que le TeV , alors on ne considère plus la zone hachurée. Les données de LUX permettent alors de ne contraindre qu'une petite zone de l'espace des paramètres restant.

Enfin, étant donné que le lien entre θ_+ et Λ diffère d'un facteur de v/λ par rapport au cas singlet-triplet, on remarque que des valeurs plus faibles du cut-off redonne la densité relicue observée, et les expériences de DD peuvent potentiellement sonder ces espaces, même si l'angle de mélange associé est plus petit.

5.2.4 Système singlet-quintuplet : $n = 5$

Les résultats pour le système singlet-quintuplet sont présentés avec les Fig. 5.6 et 5.7.

Dans le modèle du quintuplet, le mélange est due à un opérateur de dimension sept, ainsi lorsque l'on impose au cut-off Λ des valeurs supérieures au téra-électronvolt, l'angle de mélange est génériquement très petit. En effet, comme le montre l'Eq. (3.33), la suppression est de l'ordre de v^2/Λ^2 par rapport au cas du triplet. Une conséquence directe est qu'il faille particulièrement bien choisir la différence de masse $M - m$ afin de reproduire la densité relicue observée. C'est notamment pourquoi les Figs. 5.6a, 5.6b et 5.7a sont perti-

nentes pour une valeur de Δm donné au dixième de giga-électronvolt près. Néanmoins, il est toujours possible de trouver un choix de paramètres adéquats en accord avec les observations.

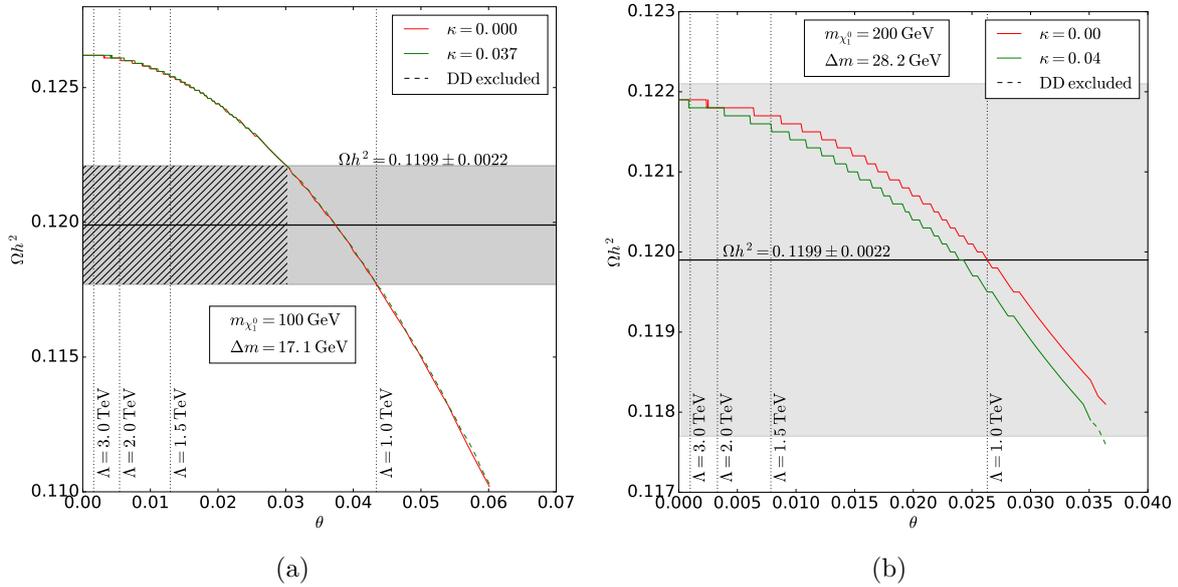


FIGURE 5.6 – Densité relicue thermique via *freeze-out* en fonction de l’angle de mélange θ du système singlet-quintuplet, avec $m_{\chi_1^0} = 100$ GeV (a) et $m_{\chi_1^0} = 200$ GeV (b). Pour un coefficient de Wilson λ fixé à 1, on indique la valeur du *cut-off* correspondante. L’impact de $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ sur Ωh^2 est négligeable pour les valeurs de κ qui passent sous la contrainte de la *DD*.

Alors que la dépendance en θ est qualitativement identique que dans le cas du système singlet-triplet ou du système singlet-quadruplet, l’influence du coefficient de Wilson κ sur la densité relicue thermique est significativement plus prononcée pour le modèle du quintuplet. Cet effet est tout à fait attendu et compréhensible. En effet, dans le cas $n = 5$, l’opérateur de mélange \mathcal{L}_{mix} est de dimension sept, alors que $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ reste de dimension cinq. Ainsi, \mathcal{L}_{mix} est relativement moins important que $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$, le coefficient de Wilson κ associé à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est donc particulièrement significatif. Ce que l’on vient de dire est d’autant plus vrai lorsque la valeur de n augmente.

Cependant, les contraintes expérimentale sur la *DD* ne permettent toujours pas des valeurs suffisamment grandes de κ pour que son impact soit significatif quant à la densité relicue. Autrement dit, on retombe sur la même conclusion que pour les cas précédents. En effet, la Fig. 5.6a montre que la densité relicue, pour la valeur limite de κ autorisée par les contraintes de *DD* obtenue via la Fig. 5.7a avec une masse du *WIMP* de 100 GeV, ne diffère quasiment pas du cas avec κ nul puisque les courbes rouge et vertes se superposent.

Avec Fig. 5.7b où λ est fixé à l’unité et avec $\kappa = 0$, on observe qu’à cause de la relative suppression du mélange dans le cas du quintuplet, toute la région sondée par *LUX* ayant la densité relicue observée par Planck ainsi que la région potentiellement sondée par *XENON1T* correspondent à des valeurs du *cut-off* en dessous de téra-électronvolt.

On en déduit que pour κ nul et Λ plus grand que le téra-électronvolt, les angles de mélange tels que l’on retrouve la densité relicue $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$ sont trop faibles pour que le modèle du quintuplet puisse être contraint par les expériences de *DD* actuelles. Si on l’on relaxe la condition sur le *cut-off*, alors ces expériences peuvent potentiellement réduire l’espace des phases, malheureusement notre théorie n’est alors plus valable.

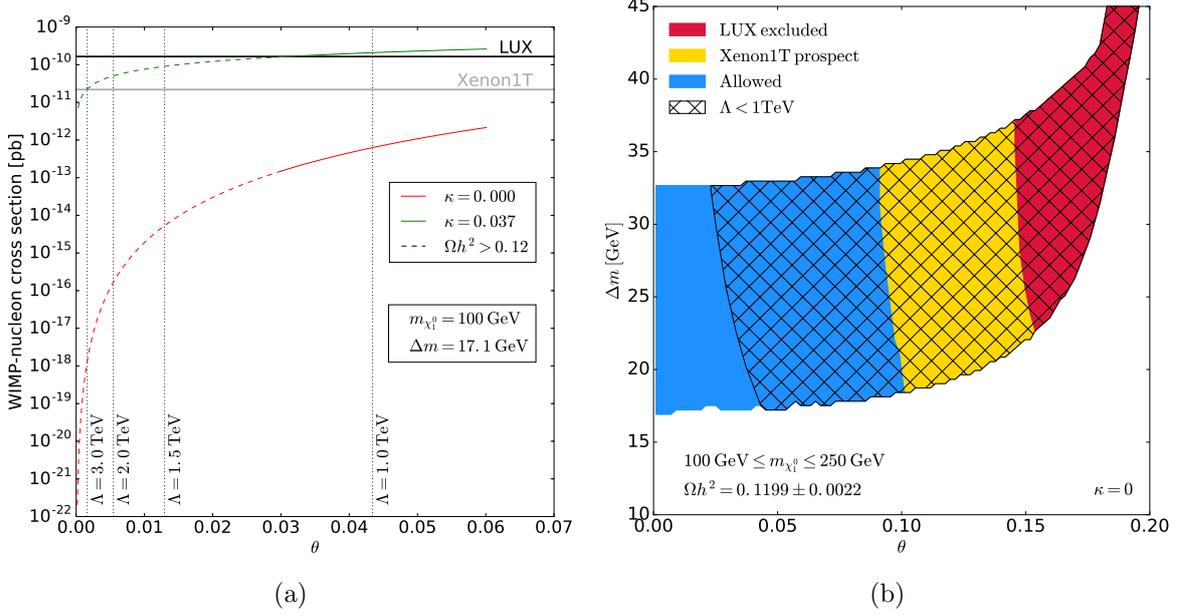


FIGURE 5.7 – (a) Section efficace WIMP-nucléon du système singlet-quintuplet, pour $m_{\chi_1^0} = 100$ GeV et une différence de masse de 17.1 GeV, en fonction du mélange singlet-quintuplet θ . Les contraintes de la DD imposent au coefficient de Wilson κ une limite supérieure d'environ 0.037 (pour $\lambda = 1$). (b) Ici $\kappa = 0$, Ici $\kappa = 0$, la surface coïncide avec l'espace des paramètres ou l'on retrouve $\Omega h^2 = 0.1199 \pm 0.0022$. La région hachurée correspond à un cut-off Λ inférieur à 1 TeV, *i.e.* là où notre théorie effective n'est plus valable.

5.3 Résumé

Quelque soit le modèle considéré, la densité relique Ωh^2 doit être dominée par les effets du n -plet à travers le mélange plutôt que par l'annihilation via $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$. Dans le cas du système singlet-triplet, où \mathcal{L}_{mix} et $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ sont tous les deux de dimension cinq, bien que κ et λ soient du même ordre de grandeur, l'annihilation via $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est quand même supprimée (*p-wave suppressed*). Lorsque n augmente, la densité relique est d'autant plus dominée par \mathcal{L}_{mix} car les processus de co-annihilation deviennent de plus en plus importants, malgré que la dimension de \mathcal{L}_{mix} augmente également.

La DD contraint l'espace des paramètres de nos modèles tel que l'on ai $\kappa \ll \lambda$. En effet, le coefficient de Wilson de $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ est très contraint par la DD comparée à celui de \mathcal{L}_{mix} . Une petite variation de κ peut amener à dépasser la limite supérieure de la DD, alors que λ peut prendre des valeurs plus étalées sans violer la contraintes de la DD. Cela est due au fait que la densité relique Ωh^2 est essentiellement dictée par les processus de co-annihilation dues à \mathcal{L}_{mix} plutôt que l'annihilation via $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$. Les explications éventuelles à ce phénomène sont directement reliées à la complétion UV des modèles, qui ne sont pas abordées ici. Cependant, on peut noter pour le système singlet-triplet, le MSSM est une complétion UV possible. Avec la Sec. 3.3.3, on peut voir que l'on obtient effectivement une suppression. En effet, on se retrouve avec $\kappa/\lambda = \tan \theta_w \approx 0.53$.

Remarquons qu'en fait les contraintes de la DD ne portent pas directement sur κ ou λ , mais sur κ/Λ et λ/Λ^j ou j dépend de la représentation considérée (cf. chapitre 3). On peut donc avoir des valeurs de κ très grandes du moment que le cut-off Λ soit suffisamment grand. On dit qu'il y a une dégénérescence entre κ et Λ . Il en est de même pour λ et Λ . C'est pourquoi dans les figures on fixe le coefficient λ comment étant unitaire et on fait varier le cut-off Λ (ce qui revient à faire varier l'angle de mélange). Le coefficient κ quant à lui est donné en unité de λ .

On peut également voir que sur les figures montrant la densité relique en fonction de l'angle de mélange, il semble y avoir une asymptote horizontale vers les très petits angles de

mélange. Ce n'est pas étonnant, et on a déjà discuté de cette situation à la section 4.1.2. On a vu que lorsque le mélange devient très faible, mais suffisamment grand pour maintenir le neutralino χ -like en équilibre, alors la densité relicue ne dépend plus vraiment de la valeur du mélange. En effet, l'abondance de la matière sombre est réduite via les co-annihilations des neutralinos ψ -like, et ne dépend alors essentiellement plus que des masses.

5.4 Références

- P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016. [68](#)
- N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018. [68](#)
- D. S. Akerib et al. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure. *Phys. Rev. Lett.*, 118(2) :021303, 2017. [68](#), [69](#)
- A. Alloul, N. D. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, and B. Fuks. FeynRules 2.0 - A complete toolbox for tree-level phenomenology. *Comput. Phys. Commun.*, 185 :2250–2300, 2014. [68](#)
- E. Aprile et al. Physics reach of the XENON1T dark matter experiment. *JCAP*, 1604(04) : 027, 2016. [68](#)
- G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov. micrOMEGAs_3 : A program for calculating dark matter observables. *Comput. Phys. Commun.*, 185 :960–985, 2014. [68](#)
- G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov. micrOMEGAs4.1 : two dark matter candidates. *Comput. Phys. Commun.*, 192 :322–329, 2015. [68](#)

Chapitre 6

Conclusion, progression et perspectives

” N’essayez pas de devenir un homme qui a du succès. Essayez de devenir un homme qui a de la valeur ”

Albert Einstein

Sommaire

6.1 Motivations et construction du modèle	80
6.2 L’analyse en quelques mots	81
6.2.1 Densité relique	81
6.2.2 Contraintes	81
6.2.3 Résultats	81
6.3 Perspectives	82
6.4 Références	83

6.1 Motivations et construction du modèle

Dans ce manuscrit, nous avons construit une catégorie de modèles effectifs de matière noire de masse électro-faible et interagissant via l'interaction faible. Une telle particule est qualifiée de **WIMP**. Comme on l'a vu au chapitre 1, la matière noire est une des problématique majeure de la physique moderne puisque le **SM** de la physique des particules ne permet pas de l'expliquer. C'est la motivation théorique de nos modèles. Cependant, le fait que nous avons choisi des candidats de matière sombre avec des masses électro-faibles est une motivation plutôt pratique que théorique. En effet, on sait que dans un collisionneur tel que celui du **LHC**, on ne peut espérer produire des particules au plus de quelques TeV. Donc, dans la perspective d'une étude de nos modèles au **LHC**, on s'est restreint à des masses électro-faibles.

Au chapitre 2, on a vu qu'une particule **WIMP** permet de retrouver une densité relique, via *freeze-out*, proche de celle mesurée aujourd'hui par Planck. On parle du paradigme du **WIMP**. Ce fut une bonne indication quant à la direction à suivre pour élaborer nos modèles. Lorsque l'on ajoute une nouvelle représentation électro-faible ψ au **SM**, on se rend compte que pour retrouver la bonne densité relique, il est nécessaire d'avoir des masses multi-TeV. Plus la nouvelle représentation est grande (n -plet), plus sa masse doit être grande. Cela s'explique par le fait que les états de la nouvelle représentation peuvent se co-annihiler et donc faire baisser la valeur de la densité relique efficacement. Pour compenser cet effet, il faut alors augmenter la masse de la représentation puisque la densité relique est proportionnelle au carrée à celle-ci.

Une question s'est alors posée. Est-il possible de compenser les effets de la co-annihilation sans pour autant augmenter la masse de la nouvelle représentation afin de la maintenir à l'échelle électro-faible?

La réponse à cette question est positive. Cependant, il faut introduire une seconde représentation : un singlet χ . Ce dernier a lui aussi une une masse électro-faible, inférieure à celle du n -plet ψ . On peut alors induire un mélange entre les états d'hypercharge nulle des nouvelles représentations χ et ψ . La matière sombre correspond alors à la particule la plus légère issue de ce mélange. Afin de la rendre stable, on ajoute une symétrie discrète \mathbb{Z}_2 sous laquelle le **SM** est pair, et χ et ψ sont impairs. Les nouvelles représentations sont fermioniques.

Ce que l'on viens de décrire n'est en fait rien d'autre qu'un mélange *well-tempered* impliquant un secteur sombre constitué de χ et ψ impair sous une symétrie discrète \mathbb{Z}_2 . C'est une version non-**SUSY** du secteur neutralino du **MSSM** ou la symétrie discrète correspond à la R-parité, le singlet χ et le bino et le n -plet ψ peut correspondre aux higgsinos (2-plet) ou au wino (3-plet). Voir la section 1.2.1 pour plus de détails sur le **MSSM**. Néanmoins, contrairement au **MSSM**, la représentation ψ peut être plus exotique. Le n -plet ψ peut a priori être un quintuplet par exemple.

Jusqu'ici nous avons introduit deux nouvelles représentations, un mécanisme de mélange et une symétrie discrète. Le mélange se fait grâce à des opérateurs de dimensions supérieures, ces derniers étant associés à une échelle d'énergie **UV**, ou **cut-off**, noté Λ . Autrement dit, notre théorie est une théorie effective. C'est le prix à payer pour n'avoir que deux nouvelles représentations en plus du modèles standard. Contrairement au **MSSM**, qui est une théorie complète avec de nombreux nouveaux paramètres, notre théorie est plus minimale mais ne possède pas de complétion **UV**. Au delà du cut-off Λ , notre modèle ne permet plus de décrire la physique. De plus, on reste complètement agnostique quant à la complétion **UV** de nos modèles. Notons tout de même que lorsque $n=2$ ou $n=3$, alors notre théorie effective est en fait le **MSSM** à l'échelle électro-faible lorsque tous les états supersymétriques autres que les neutralinos et charginos sont découplés.

Finalement, nos modèles sont des théories effectives avec une matière sombre de type **WIMP**. Le contenu électro-faible des ces derniers est constitué par un single fermionique et

un n -plet fermionique de $SU(2)$ en plus du SM . Le candidat à la matière sombre est un $WIMP$, et son abondance relique est obtenue via *freeze-out*.

Nos modèles peuvent se voir comme une description effective de la matière sombre et de ses propriétés en collisionneur à l'échelle électro-faible. On ne suppose rien quant à la complétion UV . L'échelle à laquelle notre théorie effective n'est plus valable est supérieure au TeV, mais tout état éventuel au delà de cette échelle est génériquement trop lourd pour qu'il puisse être découvert au LHC s'il ne porte que des charges électro-faibles.

6.2 L'analyse en quelques mots

Nos modèles sont implémentés avec `FeynRules` 2.3. Les propriétés qui nous intéressent sont évalués avec `micrOMEGAs` 4.3.1. On se concentre sur les configurations singlet-triplet ($n=3$), singlet-quadruplet ($n=4$) et singlet-quintuplet ($n=5$).

6.2.1 Densité relique

Puisque l'on construit un modèle de matière sombre, la quantité cruciale à évaluer est la densité relique Ωh^2 . Celle-ci dépend à la fois de l'évolution de l'Univers et des interactions de la matière sombre avec le reste du bain thermique (cf. Chap. 2). Pour nos modèles, ce sont les contributions des processus de co-annihilations qui ont un impact important sur la densité relique. Autrement dit, c'est la co-annihilation de la matière sombre χ -like avec les états ψ -like qui sont pertinents. On peut également noter que pour un mélange très faible, tant que la matière sombre reste en équilibre avec le bain, l'abondance de la matière sombre est déterminée par la co-annihilation des états ψ -like. Voir la section 4.1.2 pour plus de détails.

6.2.2 Contraintes

Comme on l'a déjà dit ci-dessus, le premier paramètre permettant de contraindre nos modèles est la densité relique Ωh^2 . Une fois que l'espace des paramètres redonnant la bonne valeur pour la densité relique est identifié, on peut alors le contraindre d'avantage grâce aux expériences de détection directe et indirecte. Il se trouve que les contraintes issues des expériences de DD sont bien meilleurs pour nos modèles que celles provenant des expériences de DI . De plus, les limites supérieures expérimentales sur les sections efficaces d'interaction dans la gamme de masse qui nous intéresse sont plus fortes pour l'expérience LUX . C'est pourquoi nous avons utilisé les données de la référence [Akerib et al. \[2017\]](#). Afin d'anticiper l'évolution des contraintes sur nos modèles avec les prochains résultats sur la DD , nous avons également pris en compte les perspectives quant aux futurs contraintes potentielles de l'expérience [XENON1T Aprile et al. \[2016\]](#). Pour une description des expériences et des contraintes vis à vis de nos modèles le lecteur est renvoyé au chapitre 4.

6.2.3 Résultats

On s'est focalisé sur l'espace des paramètres pour $n=3$ (singlet-triplet), $n=4$ (singlet-quadruplet) et $n=5$ (singlet-quintuplet). La détection directe est particulièrement contraignante, notamment vis à vis de l'annihilation directe de la matière sombre en une paire de bosons de Higgs à travers l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ de dimension cinq. Ce dernier doit être sous-dominant afin que nos modèles soient viables. Ainsi, du moment que le modèle est compatible avec les contraintes de la détection directe, sa densité relique est essentiellement dictée par le mélange entre le singlet et le n -plet. On remarque que pour $n=3$, l'effet d'un couplage quartique κ contraint mais non nul est négligeable. Pour des valeurs de n plus grandes ($n=4,5$), ou le mélange est supprimé comparé au couplage quartique, les effets dues à κ deviennent plus prononcés.

Le fait que le coefficient de Wilson associé à $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$ soit petit est relié à des contraintes non triviales sur les complétions UV possibles. On constate que les prochaines générations d'expériences de détection directe pourront d'avantage sonder et contraindre nos modèles même avec des couplages très faibles, voir négligeables.

Pour une masse de matière sombre donnée et un décalage de masse défini entre le singlet et le n -plet, la contrainte sur la valeur de la densité relique fixe le mélange et la valeur de l'angle associé, ce qui se traduit directement en une valeur du cut-off Λ de la théorie effective étudiée. Comme on s'y attend, pour des mélanges importants la différence de masse doit être plus grande étant donné que le mécanisme principal régissant la densité relique et la co-annihilation.

Les trois configurations singlet-triplet ($n=3$), singlet-quadruplet ($n=4$) et singlet-quintuplet ($n=5$) diffèrent entre autre du fait de la suppression relative de l'angle de mélange par un ou plusieurs facteurs v/Λ selon la représentation considérée. Cependant, pour de très petits angles de mélanges, la dépendance de la valeur de la densité relique devient effectivement indépendante de θ . Ainsi, le cut-off Λ n'a a priori pas de contrainte sur sa valeur maximum, si ce n'est que le *singlet-like* WIMP doit être en équilibre thermique avec les états *n-plet-like*. Voir le chapitre 5 pour une présentation complète des résultats obtenus.

6.3 Perspectives

On peut transcrire nos modèles dans un cadre bosonique, ou cette fois-ci le singlet χ et le n -plet ψ sont des bosons. On passe alors de champs fermioniques de dimension $3/2$ à des champs bosoniques de dimension 1. Les opérateurs possibles sont donc différents du cas fermioniques. Le spectre des masses physiques est modifié, que ce soit vis à vis du mélange ou des corrections radiatives (l'annexe A.3 traite également le cas bosonique). Ainsi, les propriétés de la matière noire, qui dépendent fortement des masses, diffèrent du cas fermioniques.

Nous avons choisi d'étudier la région de l'espace des paramètres correspondante aux masses électro-faibles, de sorte que celle-ci soit cinétiquement accessibles au LHC. Les recherches en collisionneurs des états supersymétriques que sont les neutralinos et charginos peuvent potentiellement contraindre d'avantage l'espace des paramètres en adaptant les analyses collisionneurs à nos modèles. Les analyses sur les énergies manquantes lorsque la particule de matière sombre s'échappe du détecteur sont *a priori* intéressantes, ou encore les vertex déplacés pour contraindre la désintégrations $\chi_2^0 \rightarrow \chi_1^0$ lorsque l'écart en masse est suffisamment faible. On peut également penser aux traces manquantes si un état *ψ -like* chargé (chargino) se désintègre en un état neutre (neutralino) et un pion léger, ce dernier n'étant pas reconstruit par le détecteur. Enfin, nos modèles ont, selon la valeur de n , la particularité d'avoir éventuellement des états doublement chargés. L'étude de leur désintégration peut aussi être une piste intéressante.

Nos modèles ont donc potentiellement des signatures intéressantes en collisionneur, ce qui en rend l'étude pertinente. Un premier papier (Bharucha et al. [2018]) déjà disponible s'intéresse aux cas $n=3,5$ au LHC, et contraint les masses des représentations.

6.4 Références

- D. S. Akerib et al. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure. *Phys. Rev. Lett.*, 118(2) :021303, 2017. [81](#)
- E. Aprile et al. Physics reach of the XENON1T dark matter experiment. *JCAP*, 1604(04) : 027, 2016. [81](#)
- A. Bharucha, F. Brümmer, and N. Desai. Next-to-minimal dark matter at the LHC. 2018. [82](#)

Annexe A

Annexes

A.1 Figures annexes

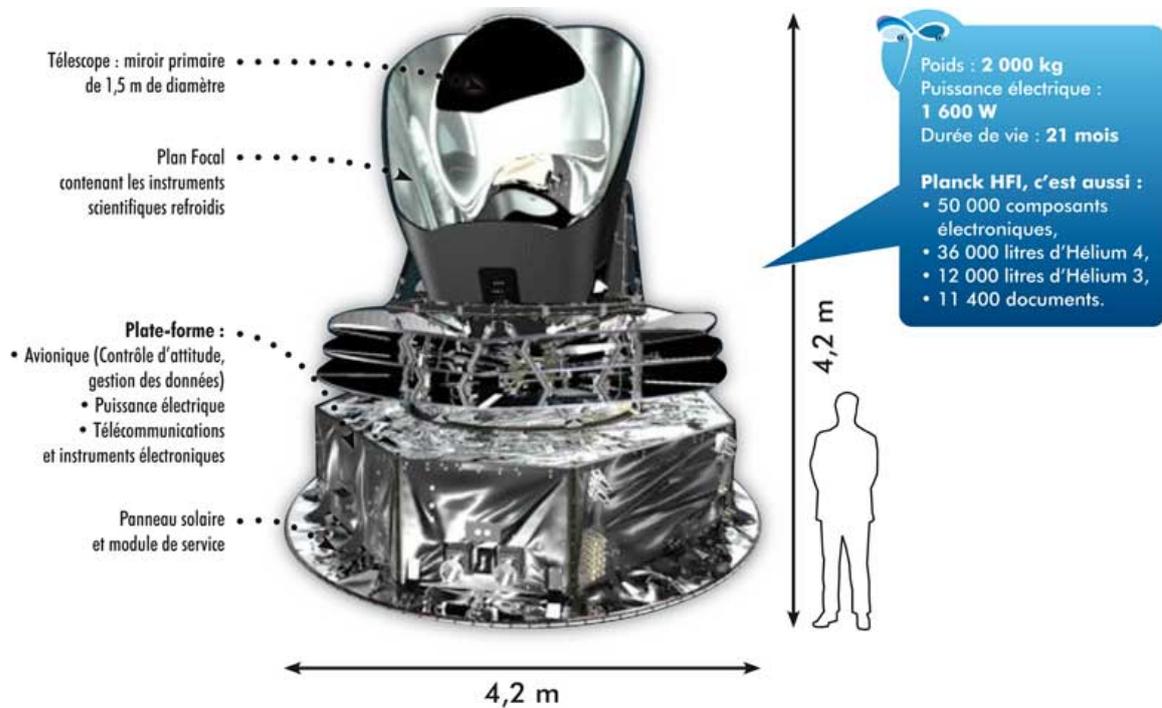


FIGURE A.1 – Illustration du satellite Planck, conçu pour observer le **CMB** sur tout le ciel. *Crédits : Planck-HFI France.*

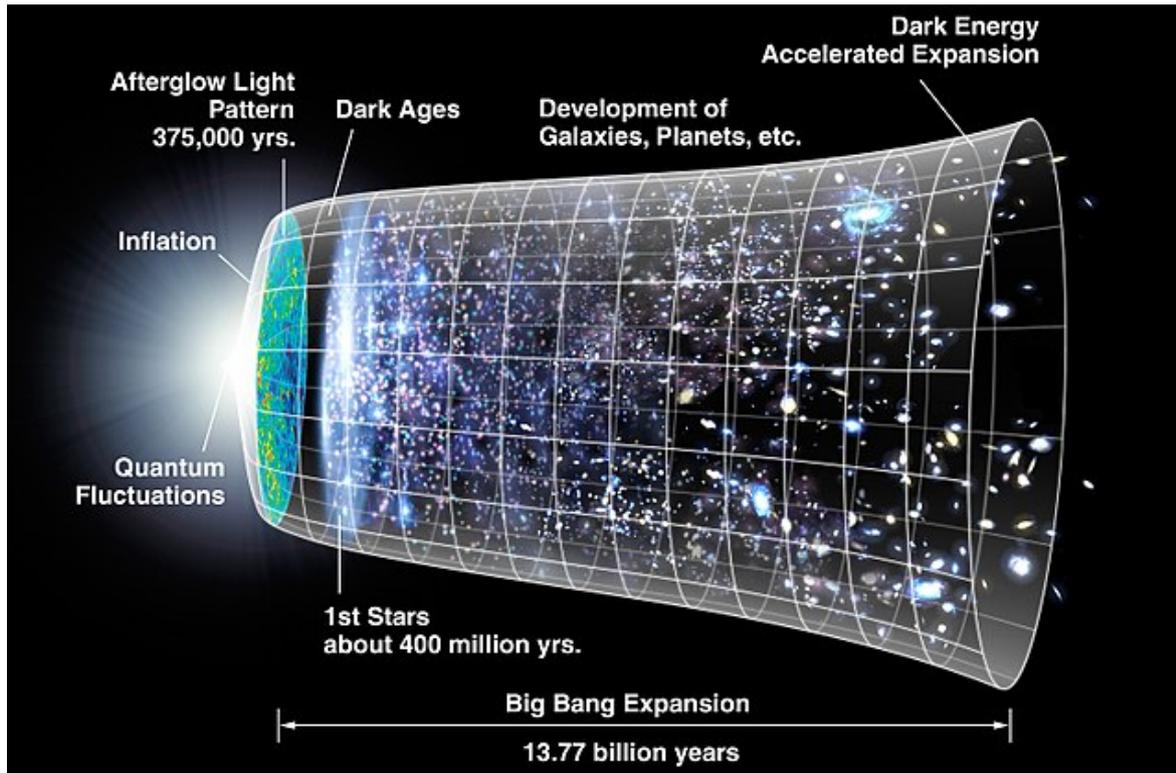


FIGURE A.2 – Illustration de l'évolution de l'Univers avec le modèle cosmologique standard.

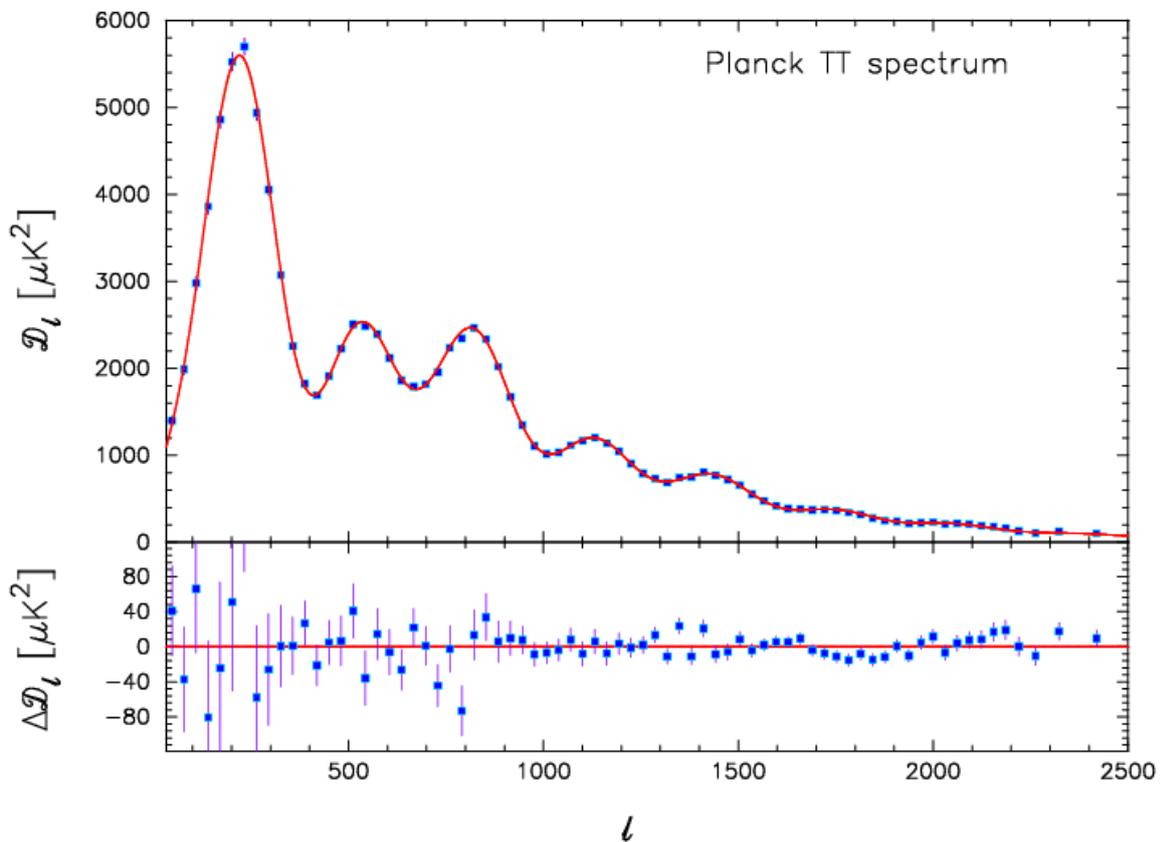


FIGURE A.3 – Spectre de puissance angulaire du CMB. Les données celles sont de Planck2013. La ligne rouge correspond à la prédiction théorique pour un modèle donné. L'information à retenir ici est que pour un modèle donné, on peut le comparer directement aux données. *Crédits : ESA/Planck Collaboration.*

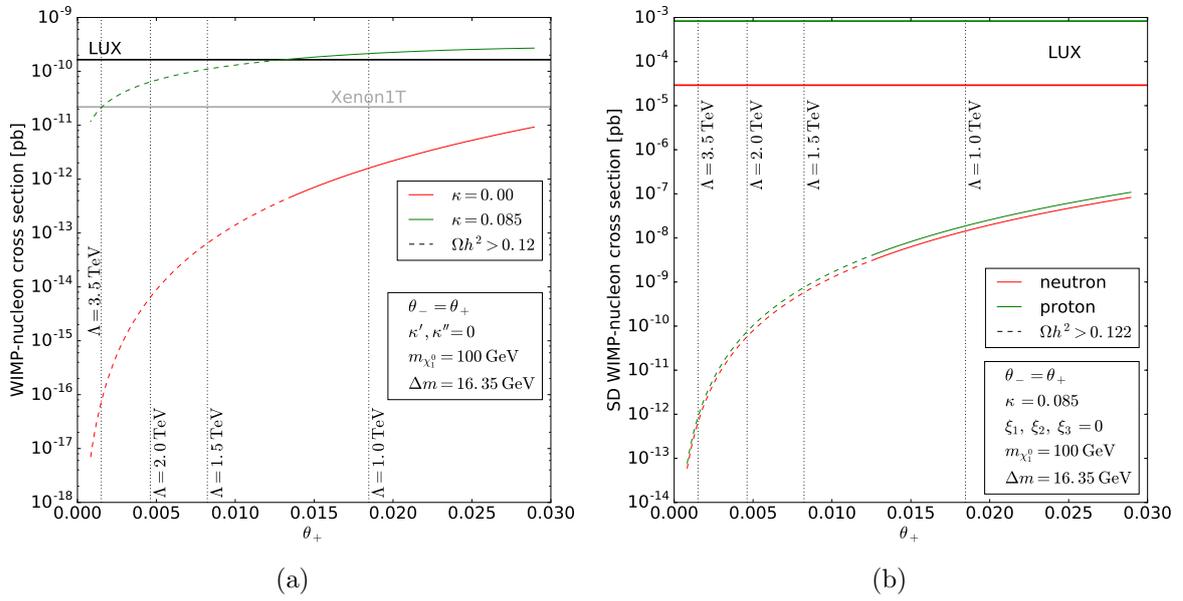


FIGURE A.4 – (a) Section efficace spin-indépendante **WIMP**-nucléon du système singlet-quadruplet, pour $m_{\chi_1^0} = 100\text{GeV}$ et une différence de masse de 16.35GeV , en fonction du mélange singlet-quadruplet. (b) Section efficace spin-dépendante **WIMP**-nucléon pour la même configuration que (a). On constate immédiatement que la limite supérieure sur σ_{SI} et beaucoup plus contraignante que celle sur σ_{SD} .

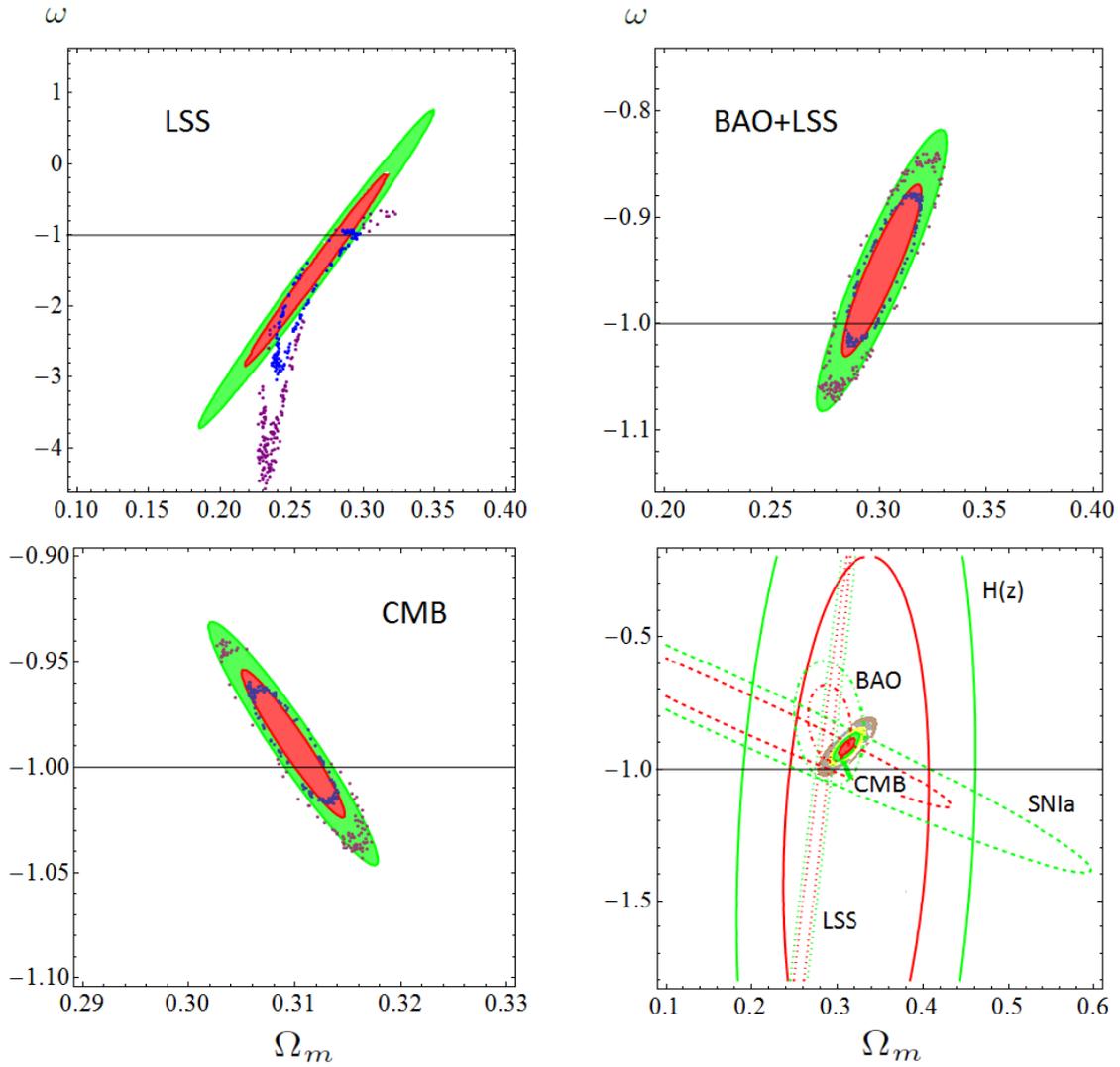


FIGURE A.5 – Résultats de mesures cosmologiques issues d'expériences sur avec les grandes structures avec les données de LSS (Large Scale Structure), sur l'oscillation acoustique des baryons (BAO) et du CMB. Le panel en bas à droite rassemble tous ces résultats indépendants et montre qu'il y bien une concordance. *Crédits : "First evidence of running cosmic vacuum : challenging the concordance model", des auteurs Solà, Joan et Gómez-Valent, Adria et de Cruz Pérez, Javier. 1602.02103.*

A.2 Tableaux annexes

Contribution (%)	Canal
9	$\chi^+ \chi^- \rightarrow W^+ W^-$
8	$\chi^+ \chi^{--} \rightarrow Z W^-$
8	$\chi^{++} \chi_2^0 \rightarrow W^+ W^+$
7	$\chi_2^0 \chi_2^0 \rightarrow W^+ W^-$
6	$\chi^+ \chi^+ \rightarrow W^+ W^+$
5	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow u \bar{d}$
5	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow c \bar{s}$
4	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow Z Z$
4	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow \gamma Z$
3	$\chi^+ \chi^{--} \rightarrow \gamma W^-$
3	$\chi^+ \chi^{--} \rightarrow \bar{u} d$
3	$\chi^+ \chi^{--} \rightarrow \bar{c} s$
2	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow Z W^+$
2	$\chi_2^0 \chi_1^0 \rightarrow W^+ W^-$
2	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow \nu_e e^+$
2	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow \nu_\mu \mu^+$
2	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow \nu_\tau \tau^+$
2	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow t \bar{b}$
1	$\chi^+ \chi_2^0 \rightarrow t \bar{b}$
1	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow d \bar{d}$
1	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow s \bar{s}$
1	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow b \bar{b}$
1	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow u \bar{u}$
1	$\chi^{++} \chi^{--} \rightarrow c \bar{c}$
1	$\chi^{++} \chi_1^0 \rightarrow W^+ W^-$

TABLEAU A.1 – Contributions relatives supérieures au pour-cent des canaux de co-annihilation dans le cas du singlet-quintuplet. Ici $m_{\chi_1^0}$ est fixé à 100 GeV, $m_{\chi_2^0}$ à 117.1 et κ à zéro de sorte que l'on retrouve la densité relique mesurée par Planck.

	Secteur sombre (impair sous \mathbb{Z}_2)	Angle(s) de mélange
$n = 3$	χ_1^0 (χ -like) χ_2^0, χ^\pm (ψ -like)	$\theta \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda v^2}{\Lambda(M - m)}$
$n = 4$	χ_1^0 (χ -like) $\chi_2^0, \chi_3^0, \chi_1^\pm, \chi_2^\pm, \chi^{\pm\pm}$ (ψ -like)	$\theta_\pm \simeq \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{(\lambda \pm \lambda') v^3}{(M \mp m) \Lambda^2}$
$n = 5$	χ_1^0 (χ -like) $\chi_2^0, \chi^\pm, \chi^{\pm\pm}$ (ψ -like)	$\theta \simeq \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^4}{\Lambda^3(M - m)}$

TABLEAU A.2 – Récapitulatif des secteurs sombres et des angles de mélanges pour les modèles triplet-singlet ($n = 3$), quadruplet-singlet ($n = 4$) et quintuplet-singlet ($n = 5$). La valeur de la [VEV](#) du Higgs v est de 246 GeV.

A.3 Corrections radiatives à une boucle des représentations électro-faibles

Dans cette annexe on s'intéresse aux représentations de $SU(2) \otimes U(1)$ et leur corrections radiatives à une boucle. Soit la représentation ψ appartenant à \mathbf{n}_Y , *i.e.* ψ est un n -plet de $SU(2)$ avec une hypercharge associée à $U(1)$ notée Y . Bien que dans nos modèles on s'intéresse uniquement aux représentations fermioniques, on va considérer ici des représentations fermioniques et bosoniques. Il serait dommage de se limiter uniquement aux fermions sachant que les outils de calculs développés dans cette annexe sont également utilisés dans le cas bosonique. De plus, les résultats obtenus pour dans le cas bosonique peuvent éventuellement servir pour une analyse de nos modèles dans un cadre bosonique, ou bien dans un contexte différent.

A.3.1 Lagrangien considéré

Seuls le terme cinétique et le terme de masse associé à la représentation ψ seront considérer dans le calcul des corrections radiatives à une boucle. Soit le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi & \text{pour une représentation fermionique,} \\ \frac{1}{2} [(D_\mu \bar{\psi})(D^\mu \psi) - m^2 \bar{\psi}\psi] & \text{pour une représentation bosonique,} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec le dérivée covariante donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig' B_\mu. \quad (\text{A.2})$$

Dans l'équation précédente, les W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) sont les bosons de jauge de $SU(2)$ et B_μ celui de $U(1)$. Les couplages g et g' sont les couplages respectivement associés à $SU(2)$ et $U(1)$. Les matrices T^a sont les générateurs de l'algèbre $SU(2)$.

Après la [EWSB](#), le dérivée covariante se réécrit

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{g}{c_W}(T^3 - s_W^2 Q)Z_\mu - ieQA_\mu, \quad (\text{A.3})$$

ou W^\pm , Z^0 et A^0 sont les bosons de jauge physiques. Les symboles c_W et s_W correspondent au cosinus et au sinus de l'angle de Weinberg, et Q est la charge électrique. On a la relation $Q = T_3 + Y$, ou Y est l'hypercharge associée à ψ et T_3 est l'isospin faible de la particule que l'on regarde. Enfin e est la charge électrique élémentaire, et T^\pm sont des combinaisons linéaires des matrices $T^{1,2}$.

La forme de l'Eq. (A.3) permet de voir immédiatement les interactions de la représentation ψ avec les bosons de jauge électro-faibles à travers la dérivée covariante. A une boucle, ces interactions vont générer un écart en masse entre les états du n -plet ψ .

Une autre manière d'écrire la dérivée covariante, qui nous sera utile pour la démonstration, est celle-ci :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig(W_\mu^1 T^1 + W_\mu^2 T^2) - ig_Z Z_\mu - ig_A A_\mu \quad \text{où} \quad \begin{cases} g_{Z,Q} = g \frac{(c_W^2 Q - Y)}{c_W} \\ g_{A,Q} = g s_W Q \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

On a simplement repris l'Eq. (A.2), ou l'on a substitué les bosons de jauges B_μ et W_μ^3 par leur expression en fonction des bosons de jauge physiques que sont le photon A_μ et Z_μ .

A.3.2 Résultats

Au niveau de l'arbre, tous les états du n -plet ψ ont la même masse m présente dans le terme de masse du Lagrangien vu dans l'Eq. (A.1). Cependant, à une boucle, les interactions avec les bosons de jauge vont générer un écart en masse entre les états du n -plet ψ . En effet, les composantes chargées deviennent plus lourdes, et ce d'autant plus que la charge électrique est grande. Les résultats des corrections radiatives à une boucle sont données par l'équation suivante :

$$\Delta_{m_Q - m_{Q'}}^{1b} = \frac{g^2 m}{16\pi^2} \left\{ (Q^2 - Q'^2) s_W^2 f\left(\frac{M_Z}{m}\right) + (Q - Q')(Q + Q' - 2Y) \left[f\left(\frac{M_W}{m}\right) - f\left(\frac{M_Z}{m}\right) \right] \right\},$$

où

$$\text{avec } f(t) = \begin{cases} t \left[-t + t^3 \ln(t) + (2 + t^2) \sqrt{4 - t^2} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - t^2}}{t}\right) \right], & \text{si } \psi \text{ fermion.} \\ \frac{-t}{2} \left[t^3 \ln(t) - (4 - t^2)^{\frac{3}{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - t^2}}{t}\right) + 6t \ln\left(\frac{m}{\mu} e^{-\frac{1}{3}}\right) \right], & \text{si } \psi \text{ boson.} \end{cases}$$

La majorité des notations a été définie à la Sec. A.3.1. Les masses M_Z et M_W ne sont rien d'autre que les masses respectivement associées aux bosons Z^0 et W^\pm . La quantité $\Delta_{m_Q - m_{Q'}}^{1b}$ est l'écart en masse à une boucle entre un premier état de ψ de charge électrique Q et un second état de ψ de charge électrique Q' , soit $\Delta_{m_Q - m_{Q'}}^{1b} = m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b}$, où l'indice $1b$ signifie une boucle.

On remarque que la formule ne donne pas de masse absolue, mais un décalage de masse des états chargés par rapport à une masse de référence que l'on prendra comme celle de l'état neutre de ψ . On choisit cette masse de sorte qu'elle soit égale à la masse de l'arbre m présente dans le Lagrangien dans l'Eq. (A.1).

La suite de cette annexe présente la démonstration du résultat présenté à la Sec. A.3.2. Il faut distinguer les deux cas. Une première partie Sec. A.3.3 est consacrée au cas fermionique, tandis qu'une seconde partie Sec. A.3.3 s'intéresse au cas bosonique. Une troisième est dernière partie Sec. A.3.4 quant à elle regroupe un ensemble d'outil mathématiques utiles pour la démonstration.

A.3.3 Démonstration

On va détailler le cas des représentations fermioniques. Les représentations électro-faibles étudiées dans ce manuscrit sont des fermions, ces dernières nous intéressent donc particulièrement. Néanmoins, le cas bosonique est intéressant en soit, et on peut tout à fait imaginer à l'avenir des modèles avec des bosons. C'est pourquoi seconde partie y sera consacrée. Cependant, vu que la démonstration est similaire sur de nombreux points, elle sera moins détaillée.

Cas fermionique

Soit $-i\Sigma(\not{p})$ la somme de l'ensemble des diagrammes irréductibles à une boucle, avec un même fermion en entrée et en sortie, *i.e.* correspondant aux deux pattes du diagramme, où lignes externes externes. Si m_0 est la masse à l'arbre du fermion correspondant aux lignes externes, alors le propagateur complet, *i.e.* le propagateur à une boucle, est donnée par

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}, \quad \text{où} \quad \Sigma(\not{p}) = \not{p} \Sigma_{\mathcal{K}}(p^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}(p^2). \quad (\text{A.5})$$

Les quantités $\Sigma_{\mathcal{K}}$ et $\Sigma_{\mathcal{M}}$ sont les fonctions de self-énergie, et correspondent respectivement à la correction de la fonction d'onde et de la masse. Comme le montre l'Eq. (A.5), le propagateur

possède un pôle. La masse physique, notée m , est définie comme se situant justement sur ce pôle. En équation cela donne

$$[\not{p} - m_0 - \mathbb{R}e \Sigma(\not{p})]_{\not{p}=m} = 0. \quad (\text{A.6})$$

En manipulant cette simple equation, il est aisé de voir que la masse physique m est solution de l'équation

$$m = \mathbb{R}e \left[\frac{m_0 + \Sigma_{\mathcal{M}}(m^2)}{1 - \Sigma_{\mathcal{K}}(m^2)} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Cette expression peut être simplifiée si l'on considère un développement perturbatif. En effet, la théorie quantique des champs est une théorie perturbative. Comme les couplages considérés sont petits devant l'unité, on écrit généralement les résultats sous forme de séries perturbatives données puissances des couplages. Ici, $\Sigma_{\mathcal{K}}$ et $\Sigma_{\mathcal{M}}$ sont des corrections à une boucle, ils sont alors proportionnels à une certaine puissance du couplage. On décide donc de développer l'Eq. (A.7) au premier ordre. On se retrouve alors avec l'équation

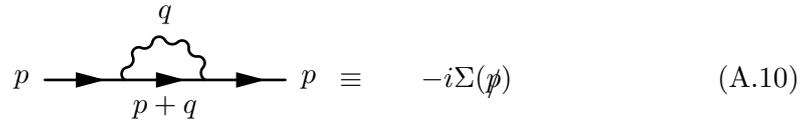
$$m = \mathbb{R}e[m_0 + \Sigma_{\mathcal{M}}(m^2) + m_0 \Sigma_{\mathcal{K}}(m^2)]. \quad (\text{A.8})$$

Cette equation n'est cependant pas d'une grande aide. En effet, la quantité m que l'on cherche apparait à la fois à gauche et à droite de l'égalité, et il est impossible de l'isoler. On procède donc par itération, la première étape étant de calculer la valeur de m à gauche en remplaçant les m à droite du égal tout simplement par la masse à l'arbre m_0 . Ce qui donne,

$$m = \mathbb{R}e[m_0 + \Sigma_{\mathcal{K}}(m_0^2) + m_0 \Sigma_{\mathcal{M}}(m_0^2)] = \mathbb{R}e[m_0 + \Sigma(m_0)]. \quad (\text{A.9})$$

En principe il faut réitérer ce processus jusqu'à ce que l'on converge. Cependant, pour le calcul analytique dans cette annexe, on va utiliser l'Eq. (A.9) pour évaluer la masse à une boucle.

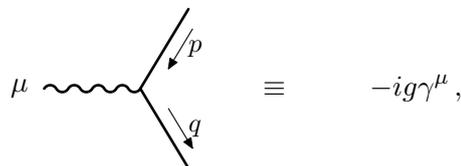
On va travailler avec les diagrammes de Feynman. On regarde le Lagrangien vu à l'Eq. (A.1) ou ψ est un fermion, *i.e.* de spin 1/2. A une boucle, seul le diagramme suivant contribue à a correction en masse des états de ψ .



$$p \longrightarrow \text{loop}(q) \longrightarrow p+q \equiv -i\Sigma(\not{p}) \quad (\text{A.10})$$

Les trait pleins et rectilignes représentent des lignes fermioniques associés à ψ . Les lignes ondulées quant à elles représentent les bosons de jauge, dont les interactions avec ψ proviennent directement de la dérivée covariante du terme cinétique.

Afin de pouvoir calculer les corrections à une boucle, il est nécessaire de connaître les equations des propagateurs fermioniques et des bosons de jauge, ainsi que l'expression des vertex. Ces dernières s'obtiennent grâce à la théorie quantique des champs, et s'appellent les règles de Feynman. Les trois quantités utiles pour ce calcul sont les suivantes :



$$\mu \text{ wavy line} \text{ vertex} \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} \equiv -ig\gamma^\mu,$$

$$\overline{p} \equiv \frac{i(\not{k} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mu \text{ --- } \underset{p}{\text{~~~~~}} \text{ --- } \nu \equiv \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - M^2 + i\epsilon}.$$

Ici m est la masse à l'arbre présente dans le Lagrangien. Les seconde et troisième lignes correspondent aux propagateurs du fermion ψ et aux propagateur des bosons de jauge. Enfin il n'y a qu'un seul type de vertex à considérer dans ce calcul, celui présenté à la première ligne. Avec ces trois "briques" élémentaires, on peut bel et bien reconstruire le diagramme A.10. Précisons que le couplage g associé au vertex correspond à l'intensité de l'interaction associée, à un facteur algébrique près. Sa valeur est cruciale puisqu'elle détermine s'il est justifié de pouvoir effectuer les calculs de manière perturbative, en terme de série en puissance de g . Dans notre cas, on s'intéresse uniquement aux interactions électro-faible, ce qui nous permet de le faire.

En appliquant les règles de Feynman (A.11) sur le diagramme (A.10), on obtient

$$-i\Sigma(\not{p}) = -g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + m)\gamma_\mu}{[(q+p)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]}, \quad (\text{A.12})$$

$$i.e. \quad \Sigma(\not{p}) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + m)\gamma_\mu}{[(q+p)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]}. \quad (\text{A.13})$$

Afin de poursuivre, on va utiliser la régularisation dimensionnelle. Cela consiste à abaisser artificiellement la dimension de l'intégrale, ce qui introduit deux paramètres ϵ et μ . On substitue à la quantité d^4 la quantité $\mu^\epsilon d^{4-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} d^4$. μ est appelé échelle de renormalisation, il maintient l'information sur la dimension initiale. ϵ est le paramètre qui code la dimension de la dérivée. Quoiqu'il en soit, à la fin on prend toujours la limite $\epsilon \rightarrow 0$ pour revenir au cas physique. Cette méthode astucieuse permet de simplifier les calculs. Le choix du paramètre μ peut sembler arbitraire, mais les quantités physiques, où mesurables, ne dépendent pas de μ .

Afin d'être consistant, il faut également faire les changements nécessaires sur les formules bien connues en dimension quatre. Lorsque que l'on passe de la dimension 4 à la dimension $4 - \epsilon$, on a

$$d^4l \rightarrow \mu^\epsilon d^{4-\epsilon}l \quad ; \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = 4 - \epsilon \quad ; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(2 - \epsilon)\gamma^\nu. \quad (\text{A.14})$$

Prenant tout cela en compte, en manipulant l'Eq. (A.13) et en utilisant la Sec A.3.4, on arrive à l'équation

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[m(4 - \epsilon) B_0(p^2, m^2, M^2) + \not{p}(2 + \epsilon) B_1(p^2, M^2, m^2) \right] \quad (\text{A.15})$$

En réécrivant l'équation précédente sous la même forme que l'Eq. (A.5), et en faisant particulièrement attention au fait que le produit de ϵ avec les termes en ϵ^{-1} contenus dans les fonctions B donnent des parties finies, on se retrouve avec

$$\Sigma(\not{p}) = \not{p} \Sigma_{\mathcal{K}}(p^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}(p^2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Sigma_{\mathcal{K}}(p^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} [2B_1(p^2, m^2, M^2) + 1] \\ \Sigma_{\mathcal{M}}(p^2) = \frac{mg^2}{16\pi^2} [4B_0(p^2, m^2, M^2) - 2] \end{cases}. \quad (\text{A.16})$$

L'équation ci-dessus est valable pour tout les diagrammes du type A.10, quelque soit le boson de masse M circulant dans la boucle, ou le fermion de masse m , et ayant un couplage g à chaque vertex. Dans notre cas, pour un état du n-plet ψ entrant donné, il faut comptabiliser tous les diagrammes à une boucle possibles.

Pour un état fermionique de charge Q , les boucles avec un photon A ou un boson Z sont uniques. En effet, comme l'état fermionique entrant possède une charge électrique Q , et comme la charge électrique des bosons A ou Z est nulle, le fermion présent dans la boucle est nécessairement l'état de ψ tel que la conservation de la charge soit respectée. C'est la seule possibilité. La valeur des couplage g au vertex est connue. C'est $g_{A,Q}$ ou $g_{Z,Q}$ de l'Eq. (A.4) selon que le bosons circulant dans la boucle soit le photon A ou le boson Z .

Pour ce qui est des boucles contenant des bosons W^\pm , on ne peut plus utiliser la conservation de la charge électrique. En effet, pour un même état de ψ entrant, le fermion présent dans la boucle n'est pas le même état de ψ si l'on considère un bosons W^+ ou un boson W^- . Il faut un moyen de comptabiliser toutes les boucles possibles. Des Eqs.(A.3) et (A.4), on constate que toutes les contributions de W^\pm sont comprises dans le terme du Lagrangien $ig(W_\mu^1 T^1 + W_\mu^2 T^2)$. Par conséquent, à une boucle tous les diagrammes avec un W sont comptabilisés à travers le couplage $g_{W,Q}$ donné par

$$g_{W,Q}^2 = g^2(T_1 + T_2)^2 = g^2(T_1^2 + T_2^2 + \{T_1, T_2\}) = g^2(T_1^2 + T_2^2). \quad (\text{A.17})$$

L'algèbre de SU(2) indique que l'anti-commutateur est nul. De plus on a la relation

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = C_R Id, \quad (\text{A.18})$$

où C_R est l'opérateur de Casimir et Id est l'identité dans l'espace des matrices de dimension $n \times n$ (ψ n-plet). En utilisant les équations ci-dessus avec le fait que $Q = T^3 + Y$, on obtient alors

$$g_{W,Q}^2 = g^2 [C_R Id - (Q - Y)^2]. \quad (\text{A.19})$$

Pour un état de ψ donnée, ce couplage prend en compte toutes les boucles possibles avec les bosons W .

Finalement, en regroupant tout ce qu'on a vu précédemment, pour un état donné de ψ de charge électrique Q , on doit prendre en compte les contributions des trois boson électro-faibles telles que $\Sigma(\not{p}) = \Sigma^A(\not{p}) + \Sigma^Z(\not{p}) + \Sigma^W(\not{p})$, où

$$\Sigma^\alpha(\not{p}) = \not{p} \Sigma_{\mathcal{K}}^\alpha(p^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}^\alpha(p^2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Sigma_{\mathcal{K}}^\alpha(p^2) = \frac{g_{\alpha,Q}^2}{16\pi^2} [2B_1(p^2, m^2, M_\alpha^2) + 1] \\ \Sigma_{\mathcal{M}}^\alpha(p^2) = \frac{m g_{\alpha,Q}^2}{16\pi^2} [4B_0(p^2, m^2, M_\alpha^2) - 2] \end{cases}, \quad (\text{A.20})$$

où α prend les valeurs A , Z et W . En revenant à l'Eq. (A.9), où la masse m joue le rôle de m_0 et m la masse à une boucle est maintenant notée m_Q^{1b} , on a finalement

$$m_Q^{1b} = m + \frac{m}{16\pi^2} \left(g_{A,Q}^2 \Sigma^A + g_{Z,Q}^2 \Sigma^Z + g_{W,Q}^2 \Sigma^W \right), \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\Sigma^\alpha = [2B_1(m^2, m^2, M_\alpha^2) + 1] + [4B_0(m^2, m^2, M_\alpha^2) - 2]. \quad (\text{A.22})$$

L'Eq. (A.21) donne la masse à une boucle du fermion de charge électrique Q appartenant au n-plet ψ . Évidemment il faut choisir un schéma de régularisation pour fixer les contre-terme. On choisi de prendre le schéma $\overline{\text{MS}}$, voir la Sec.A.3.4 pour plus de détails. Si on remplace les fonctions B par leur expression analytique présentées à la Sec.A.3.4, on voit que le résultat dépend de l'échelle de renormalisation μ . Pour s'en débarrasser, il faut regarder

des observables physiques. Typiquement dans notre cas ce sont les différences de masses qui vont être pertinentes. La différence de masses entre deux états de ψ de charge électrique Q et Q' est donnée par

$$m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b} = \frac{m}{16\pi^2} \left[(g_{A,Q}^2 - g_{A,Q'}^2) \Sigma^A + (g_{Z,Q}^2 - g_{Z,Q'}^2) \Sigma^Z + (g_{W,Q}^2 - g_{W,Q'}^2) \Sigma^W \right]. \quad (\text{A.23})$$

En remplaçant les définitions des couplages $g_{A,Q}^2, g_{Z,Q}^2$ et $g_{W,Q}^2$ par leur définitions vues aux Eqs. (A.4) et (A.19), on peut écrire

$$m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b} = \frac{mg^2}{16\pi^2} \left[(Q^2 - Q'^2) s_W^2 f\left(\frac{M_Z}{m}\right) + (Q - Q')(Q + Q' - 2Y) \left(f\left(\frac{M_W}{m}\right) - f\left(\frac{M_Z}{m}\right) \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

où f est la fonction telle que

$$f\left(\frac{M_\alpha}{m} = t\right) := [\Sigma^A - \Sigma^\alpha] = t \left[-t + t^3 \ln(t) + (2 + t^2) \sqrt{4 - t^2} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - t^2}}{t}\right) \right]. \quad (\text{A.25})$$

On a évalué l'expression analytique de $\Sigma^A - \Sigma^\alpha$ en utilisant la Sec.A.3.4. On a finalement retrouver la formule vu à la Sec.A.3.2 que l'on souhaité démontrer dans le cas fermionique.

Cas bosonique

Soit $-i\Sigma(p^2)$ la somme de l'ensemble des diagrammes irréductibles à une boucle, avec un même boson en entrée et en sortie, *i.e.* correspondant aux deux pattes du diagramme, où lignes externes. Si m_0 est la masse à l'arbre du boson correspondant aux lignes externes, alors le propagateur complet, *i.e.* le propagateur à une boucle, est donnée par

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}, \quad \text{où} \quad \Sigma(p^2) = p^2 \Sigma_{\mathcal{K}}(p^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}(p^2). \quad (\text{A.26})$$

Similairement au cas fermionique, la masse m à une boucle est donnée itérativement via l'équation

$$m^2 = \text{Re} \left[\frac{m_0^2 + \Sigma_{\mathcal{M}}(m^2)}{1 - \Sigma_{\mathcal{K}}(m^2)} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Avec les même arguments que pour le cas fermionique, la masse à une boucle sera donnée à la première itération avec la formule

$$m^2 = \text{Re}[m_0^2 + m_0^2 \Sigma_{\mathcal{K}}(m_0^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}(m_0^2)] = \text{Re}[m_0^2 + \Sigma(m_0^2)]. \quad (\text{A.28})$$

Du Lagrangien vu à l'Eq. (A.1), les deux diagrammes contribuant à la correction radiative en masse des états de ψ sont

Les lignes en pointillées représentent les bosons au sein du n-plet ψ , et les lignes ondulées les bosons de jauge. Comme pour les fermions, les interactions des bosons de ψ avec les bosons de jauge sont dues aux dérivées covariantes dans le terme cinétique.

Les règles de Feynman utiles pour l'évaluation des ces deux diagrammes sont ci-dessous.

Ici m est la masse à l'arbre présente dans le Lagrangien. Les vertex sont associés à un couplages g , qui dépend de l'algèbre et de la représentation ψ .

$$\begin{aligned}
 \text{---} p \text{---} &\equiv \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} & \text{~~~~} p \text{~~~~} &\equiv \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{c} \diagup p \\ \mu \text{~~~~} \diagdown q \end{array} &\equiv -ig(p+q)^\mu & \begin{array}{c} \mu \\ \diagdown \\ \diagup \nu \end{array} &\equiv ig^2 g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Avec les règles de Feynman, on évalue dans un premier temps $-i\Sigma_a$. Avec un peu de manipulation on obtient

$$-i\Sigma_a(p^2) = (-ig^2) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(2p+q)^2}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.29})$$

$$\Sigma_a(p^2) = g^2 \frac{1}{i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4p^2 + 4pq + q^2 + (2pq + p^2 - m^2 - 2pq - p^2 + m^2)}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.30})$$

$$\Sigma_a(p^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\Pi_A(p^2) + (3p^2 + m^2) \Pi_{B_0}(p^2) + 2 \Pi_{B_1}(p^2) \right] \quad (\text{A.31})$$

où l'on a défini

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_A(p^2) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{q^2 - M^2 + i\epsilon}, \\ \Pi_{B_0}(p^2) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]}, \\ \Pi_{B_1}(p^2) = \frac{1}{i\pi^2} p^\mu \cdot \int d^4q \frac{q_\mu}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon][q^2 - M^2 + i\epsilon]}. \end{array} \right. \quad (\text{A.32})$$

L'évaluation de $-i\Sigma_b$ est plus simple. On obtient

$$\Sigma_b(p^2) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4q \frac{g_\mu^\mu}{q^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.33})$$

L'étape suivante consiste employer la régularisation dimensionnelle. En appliquant les changements vu à l'Eq. (A.14), et en remarquant que $g_\mu^\mu \rightarrow 4 - \epsilon$ ($D = 4 - \epsilon$) dans Σ_b , on se retrouve avec

$$\Sigma_a(p^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[A(M^2) + (3p^2 + m^2)B_0(p^2, M^2, m^2) + 2p^2 B_1(p^2, M^2, m^2) \right], \quad (\text{A.34})$$

$$\Sigma_b(p^2) = -\frac{g^2}{16\pi^2} (4 - \epsilon) A(M^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} [-4A(M^2) + 2M^2]. \quad (\text{A.35})$$

La dernière égalité s'obtient en gardant uniquement la partie finie du produit de ϵ avec la fonction A, le reste étant nul puisque l'on prend la limite où ϵ tend vers zéro.

A ce stade, on connaît donc l'expression des deux diagrammes quelques soient les masses et les couplages associés aux vertex. Or, les couplages sont connues et sont les mêmes que pour les fermions. En effet ils ne dépendent que de la charge électrique et de l'hypercharge. Par conséquent on a tous les ingrédients pour continuer. Pour un état donné de ψ de charge électrique Q , on doit prendre en compte les contributions des trois boson électro-faibles, et des deux diagrammes a et b . On a $\Sigma(p^2) = \Sigma^A(p^2) + \Sigma^Z(p^2) + \Sigma^W(p^2)$, où

$$\Sigma^\alpha(p^2) = p^2 \Sigma_{\mathcal{K}}^\alpha(p^2) + \Sigma_{\mathcal{M}}^\alpha(p^2) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{\mathcal{K}}^\alpha(p^2) = \frac{g_{\alpha,Q}^2}{16\pi^2} [2B_1(p^2, M_\alpha^2, m^2) + 3B_0(p^2, M_\alpha^2, m^2)] \\ \Sigma_{\mathcal{M}}^\alpha(p^2) = \frac{g_{\alpha,Q}^2}{16\pi^2} [m^2 B_0(p^2, M_\alpha^2, m^2) - 3A(M_\alpha^2) + 2M_\alpha^2] \end{array} \right. , \quad (\text{A.36})$$

où α prend les valeurs A , Z et W . Les couplages $g_{A,Q}$, $g_{Z,Q}$ et $g_{W,Q}$ sont les mêmes que pour le cas fermionique. Leur équation sont respectivement Eq. (A.4) et Eq. (A.19). Comme pour le cas fermionique, on choisi le schéma de renormalisation $\overline{\text{MS}}$. Les contre-termes sont choisis de sorte qu'ils s'annulent avec les divergences, comme vu à l'Eq. (A.67). La masse à une boucle est alors donnée par

$$(m^{1b})_Q^2 = m^2 + \frac{1}{16\pi^2} \left(g_{A,Q}^2 \Sigma^A + g_{Z,Q}^2 \Sigma^Z + g_{W,Q}^2 \Sigma^W \right) \quad (\text{A.37})$$

avec

$$\Sigma^\alpha = m^2 [2\text{B}_1(m^2, M_\alpha^2, m^2) + 3\text{B}_0(m^2, M_\alpha^2, m^2)] + [m^2 \text{B}_0(m^2, M_\alpha^2, m^2) - 3\text{A}(M_\alpha^2) + 2M_\alpha^2]. \quad (\text{A.38})$$

La quantité intéressante est la différence entre les masses, où plutôt la différences entre le carré des masses. On a

$$(m_Q^{1b})^2 - (m_{Q'}^{1b})^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[(g_{A,Q}^2 - g_{A,Q'}^2) \Sigma^A + (g_{Z,Q}^2 - g_{Z,Q'}^2) \Sigma^Z + (g_{W,Q}^2 - g_{W,Q'}^2) \Sigma^W \right], \quad (\text{A.39})$$

que l'on réécrit sous la forme

$$(m_Q^{1b})^2 - (m_{Q'}^{1b})^2 = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[(Q^2 - Q'^2) s_W^2 \tilde{f} \left(\frac{M_Z}{m} \right) + (Q - Q')(Q + Q' - 2Y) \left(\tilde{f} \left(\frac{M_W}{m} \right) - \tilde{f} \left(\frac{M_Z}{m} \right) \right) \right], \quad (\text{A.40})$$

où la fonction f est définie comme

$$\tilde{f} \left(\frac{M_\alpha}{m} = t \right) := [\Sigma^A - \Sigma^\alpha]_{p^2=m^2} = m^2 \left(-t \left[t^3 \ln(t) - (4 - t^2)^{\frac{3}{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{4 - t^2}}{t} \right) + 6t \ln \left(\frac{m}{\mu} e^{-\frac{1}{3}} \right) \right] \right) \quad (\text{A.41})$$

L'expression analytique de \tilde{f} est évaluée grâce à la Sec. A.3.4. Pour retomber sur le résultat présenté dans le cas bosonique à la Sec. A.3.2, il reste une dernière étape. En effet, le résultat souhaité n'est pas la différence des masses au carrées, mais bien la différence des masses. Pour ce faire, il suffit de voir que l'on a

$$(m_Q^{1b})^2 - (m_{Q'}^{1b})^2 = (m_Q^{1b} + m_{Q'}^{1b})(m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b}) \Leftrightarrow m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b} = \frac{(m_Q^{1b})^2 - (m_{Q'}^{1b})^2}{m_Q^{1b} + m_{Q'}^{1b}}. \quad (\text{A.42})$$

Étant donné que les masses à l'ordre d'une boucle sont proches de celles à l'arbre, on peut faire l'approximation $m_Q^{1b} + m_{Q'}^{1b} \simeq 2m$. Ainsi, considérant cela avec l'Eq. (A.40), on se retrouve avec le résultat

$$m_Q^{1b} - m_{Q'}^{1b} = \frac{mg^2}{16\pi^2} \left[(Q^2 - Q'^2) s_W^2 f \left(\frac{M_Z}{m} \right) + (Q - Q')(Q + Q' - 2Y) \left(f \left(\frac{M_W}{m} \right) - f \left(\frac{M_Z}{m} \right) \right) \right], \quad (\text{A.43})$$

avec

$$f(t) := -\frac{t}{2} \left[t^3 \ln(t) - (4 - t^2)^{\frac{3}{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{4 - t^2}}{t} \right) + 6t \ln \left(\frac{m}{\mu} e^{-\frac{1}{3}} \right) \right]. \quad (\text{A.44})$$

On a terminé la démonstration.

A.3.4 Boite à outil

Definitions

- Soient les intégrales I_n définies de la manière suivante :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad I_n(t) = \int_0^1 dx x^n \ln \left(1 + \frac{1-x}{x^2} t^2 \right). \quad (\text{A.45})$$

Les expressions de I_0 , I_1 et I_2 sont données ci-dessous.

$$I_0(t) = t^2 \ln(t) + 2t \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \arctan \left(\frac{2}{t} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \right), \quad (\text{A.46})$$

$$I_1(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}(t^2 - 2) \ln(t) + t^3 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \arctan \left(\frac{2}{t} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \right), \quad (\text{A.47})$$

$$I_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{3}(t^2 - 3) \ln(t) + \frac{2}{3} t^3 (t^2 - 1) \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \arctan \left(\frac{2}{t} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \right). \quad (\text{A.48})$$

- Soit le paramètre Δ :

$$\Delta = (1 - x)m^2 + xM^2 - x(1 - x)p^2. \quad (\text{A.49})$$

- Soit la fonction

$$F(M^2) = M^2 \left[1 - \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{A.50})$$

et soient les intégrales F_n définies de comme :

$$F_n(p^2, m^2, M^2) = \int_0^1 dx x^n \ln \left(\frac{(1 - x)m^2 + xM^2 - x(1 - x)p^2}{\mu^2} \right) \quad (\text{A.51})$$

$$= \int_0^1 dx x^n \ln \left(\frac{\Delta}{\mu^2} \right). \quad (\text{A.52})$$

Les fonctions de Passarino-Veltman

On se place dans la métrique de Minkowski. On travaille en régularisation dimensionnelle de sorte que $\mu^\epsilon d^{4-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} d^4$, où μ est l'échelle de renormalisation et d^4 la dérivée dans l'espace des phases. On définit les fonctions suivantes :

$$A(M^2) = \frac{\mu^\epsilon}{i\pi^2} \int d^{4-\epsilon} k \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.53})$$

$$B_0(p^2, m^2, M^2) = \frac{\mu^\epsilon}{i\pi^2} \int d^{4-\epsilon} k \frac{1}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.54})$$

$$B_\mu(p^2, m^2, M^2) = \frac{\mu^\epsilon}{i\pi^2} \int d^{4-\epsilon} k \frac{k_\mu}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.55})$$

$$B_{\mu\nu}(p^2, m^2, M^2) = \frac{\mu^\epsilon}{i\pi^2} \int d^{4-\epsilon} k \frac{k_\mu k_\nu}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{A.56})$$

Ne pas confondre l'échelle de renormalisation μ avec l'indice de Lorenz. Ce dernier, également dénoté avec les lettres grecques, est indiqué avec un indice inférieur ou supérieur. Par exemple, les indices inférieurs de $B_{\mu\nu}$ sont des indices de Lorenz.

Des fonctions A , B_0 , B_μ et $B_{\mu\nu}$, on définit les fonctions B_1 , B_{21} et B_{22} comme ci-dessous.

$$B_\mu(p^2, m^2, M^2) = p_\mu B_1(p^2, m^2, M^2) \quad (\text{A.57})$$

$$B_{\mu\nu}(p^2, m^2, M^2) = p_\mu p_\nu B_{21}(p^2, m^2, M^2) + g_{\mu\nu} B_{22}(p^2, m^2, M^2) \quad (\text{A.58})$$

Lors des calculs, il peut être utile de voir que

$$B_0(p^2, M^2, m^2) = B_0(p^2, m^2, M^2), \quad (\text{A.59})$$

$$B_1(p^2, m^2, M^2) = \frac{1}{2p^2} \left[A(m^2) - A(M^2) - (p^2 + m^2 - M^2) B_0(p^2, m^2, M^2) \right]. \quad (\text{A.60})$$

Des ces deux dernières equations, on en déduit que

$$B_1(p^2, M^2, m^2) = -B_1(p^2, m^2, M^2) - B_0(p^2, m^2, M^2). \quad (\text{A.61})$$

Les fonctions de Passarino-Veltman sont définies car elles apparaissent dès lors que l'on calcul les diagrammes à boucles. Dans cette annexe, m et M sont les masses des particules circulant dans la boucle, et p est le carré du momentum de la particule associée aux lignes externes, sur couche de masse.

Afin d'évaluer les fonctions Passarino-Veltman, il est utile de les réécrire en fonction du paramètre Δ définie dans l'Eq (A.49). On montre alors que

$$A(M^2) = M^2 \tilde{\Delta} + F(M^2), \quad (\text{A.62})$$

$$B_0(p^2, m^2, M^2) = \tilde{\Delta} - F_0(p^2, m^2, M^2), \quad (\text{A.63})$$

$$B_1(p^2, m^2, M^2) = -\frac{1}{2} \tilde{\Delta} + F_1(p^2, m^2, M^2), \quad (\text{A.64})$$

$$B_{21}(p^2, m^2, M^2) = \frac{1}{3} \tilde{\Delta} - F_2(p^2, m^2, M^2), \quad (\text{A.65})$$

où

$$\tilde{\Delta} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi). \quad (\text{A.66})$$

Les fonctions F sont définies à la Sec. A.3.4. La quantité γ_E est la constante d'Euler. On rappelle également que l'on arrive à ce résultat avec la méthode dite de la régularisation dimensionnelle, et donc qu'il faut garder à l'esprit que ces égalités sont valables dans la limite où ϵ tend vers zéro.

A ce stade on a exprimé les fonctions de Passarino-Veltman qui apparaissent dans les calcul des boucles en terme de nouvelles fonctions F , qui sont bien plus simples à calculer puisque que l'intégrale ne porte plus que sur une variable x .

Schéma de renormalisation

Étant donné que les Eq. (A.63) à Eq. (A.65) sont valables pour $\epsilon \rightarrow 0$, les parties divergentes sont alors contenues dans $\tilde{\Delta}$. En effet il y a des termes proportionnels à l'inverse de ϵ . On choisi d'utiliser le schéma de régularisation minimal *bar*, noté $\overline{\text{MS}}$ pour *Minimal Subtraction*. Les contre-termes sont choisis de sorte qu'ils s'annulent avec les $\tilde{\Delta}$ qui contiennent les divergences. Ainsi le résultat ne contient plus de divergences. Autrement dit on a la correspondance suivante :

$$A(M^2) \xrightarrow{\overline{\text{MS}}} F(M^2), \quad B_0(M^2) \xrightarrow{\overline{\text{MS}}} -F_0(M^2), \quad (\text{A.67})$$

$$B_1(M^2) \xrightarrow{\overline{\text{MS}}} F_1(M^2), \quad B_{21}(M^2) \xrightarrow{\overline{\text{MS}}} F_2(M^2). \quad (\text{A.68})$$

De plus on à choisi un schéma de régularisation afin de se débarrasser des divergences. Il ne reste alors plus qu'à évaluer les fonctions F .

Expressions analytiques sur couche de masse

Le cas physique qui nous intéresse correspond à la situation on les particules des lignes externes sont sur couche de masse. On a donc

$$p^2 = m^2 \quad \rightarrow \quad \Delta = m^2 \left((1-x)^2 + x \frac{M^2}{m^2} \right). \quad (\text{A.69})$$

On peut alors vérifier les résultats suivants :

$$F_0(m^2, m^2, M^2) = F_0(m^2, M^2, m^2) = 2 - 2 \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) - I_0 \left(\frac{M}{m} \right), \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{cases} F_1(m^2, m^2, M^2) = -\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - I_1\left(\frac{M}{m}\right) + I_0\left(\frac{M}{m}\right) \\ F_1(m^2, M^2, m^2) = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) + I_1\left(\frac{M}{m}\right) \end{cases}, \quad (\text{A.71})$$

$$F_{21}(m^2, m^2, M^2) = \frac{11}{9} - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - I_2\left(\frac{M}{m}\right) + 2I_1\left(\frac{M}{m}\right) - I_0\left(\frac{M}{m}\right). \quad (\text{A.72})$$

Enfin, il se trouve que les résultats s'expriment comme une différence de fonctions B, ou l'une des masses M est nulle car elle correspond à la masse du photon. Il est donc utiles de voir que

$$B_0(m^2, m^2, 0) - B_0(m^2, m^2, M^2) = I_0\left(\frac{M}{m}\right), \quad (\text{A.73})$$

$$B_1(m^2, m^2, 0) - B_1(m^2, m^2, M^2) = I_1\left(\frac{M}{m}\right) - I_0\left(\frac{M}{m}\right), \quad (\text{A.74})$$

$$B_{21}(m^2, m^2, 0) - B_{21}(m^2, m^2, M^2) = I_2\left(\frac{M}{m}\right) - 2I_1\left(\frac{M}{m}\right) + I_0\left(\frac{M}{m}\right). \quad (\text{A.75})$$

A.4 Matrice de masse 3×3 : développement limité des valeurs propres

On va détailler dans cette annexe comment obtenir les valeurs propres de la matrice de masse \mathcal{M}_n , dans le cas où elle est de taille 3×3 (*i.e.* le cas du singlet-quadruplet dans ce manuscrit). On rappelle que, pour $v = 246$ GeV, on a

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} m & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^3}{\Lambda^2} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda' v^3}{\Lambda^2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda v^3}{\Lambda^2} & -\frac{\zeta_2 v^2}{2\Lambda} & M \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda' v^3}{\Lambda^2} & M & -\frac{\zeta_3 v^2}{2\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.76})$$

On cherche les valeurs propres, dans la limite où $v/\Lambda \ll 1$. On pose $\epsilon = v/\Lambda$, on a

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\lambda^{(\prime)} v^3}{\Lambda^2} = -\frac{\lambda^{(\prime)} v}{2\sqrt{6}} \epsilon^2 \quad \text{et} \quad -\frac{\zeta_{2,3} v^2}{2\Lambda} = -\frac{\zeta_{2,3} v}{2} \epsilon. \quad (\text{A.77})$$

Dans la suite, afin d'alléger les notations, on applique les changements

$$\frac{\lambda^{(\prime)} v}{2\sqrt{6}} \rightarrow \lambda^{(\prime)} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta_{2,3} v}{2} \rightarrow \zeta_{2,3}. \quad (\text{A.78})$$

Ces modifications ne changent évidemment rien à la physique, si ce n'est que les nouveaux *couplages* ont la dimension d'une masse. Cela permet de réécrire la matrice de masse \mathcal{M}_n plus simplement, comme étant une somme de matrices proportionnelles à des puissances de ϵ . En effet,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_0 + \epsilon \mathcal{M}_1 + \epsilon^2 \mathcal{M}_2 \quad (\text{A.79})$$

où

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda' \\ -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda' & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.80})$$

Soit maintenant $\mathcal{M}_n^{\text{diag}}$, la matrice diagonale des valeurs propres de \mathcal{M}_n , et \mathcal{N} la matrice de passage. On a l'égalité

$$\mathcal{N}^\top \cdot \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{N} = \mathcal{M}_n^{\text{diag}} \quad (\text{A.81})$$

On décompose \mathcal{N} et $\mathcal{M}_n^{\text{diag}}$ de la même façon que \mathcal{M}_n , *i.e.* en puissance de ϵ .

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \epsilon \mathcal{N}_1 + \epsilon^2 \mathcal{N}_2 + \epsilon^3 \mathcal{N}_3 + \epsilon^4 \mathcal{N}_4 + \mathcal{O}(\epsilon^5 \mathbb{1}_{3 \times 3}), \quad (\text{A.82})$$

$$\mathcal{M}_n^{\text{diag}} = \mathcal{M}_0^{\text{diag}} + \epsilon \mathcal{M}_1^{\text{diag}} + \epsilon^2 \mathcal{M}_2^{\text{diag}} + \epsilon^3 \mathcal{M}_3^{\text{diag}} + \epsilon^4 \mathcal{M}_4^{\text{diag}} + \mathcal{O}(\epsilon^5 \mathbb{1}_{3 \times 3}). \quad (\text{A.83})$$

A priori, il n'y a aucune raison d'arrêter le développement à l'ordre 4. Cependant, on souhaite obtenir les valeurs propres jusqu'à l'ordre de 4. On coupe donc les développements en ϵ à l'ordre 5. Dans la suite, on omet $\mathcal{O}()$ pour alléger les notations, cependant il faut garder à l'esprit que l'on va obtenir une valeur approchée des valeurs propres, valables dans la limite $\epsilon \ll 1$.

En développant l'équation A.81, puis en identifiant ordre par ordre les membres de parts et d'autre de l'égalité, on obtient une relation à chaque ordre. A l'ordre 0 on a

$$\text{Ordre 0 : } \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0^{\text{diag}}. \quad (\text{A.84})$$

Étant donné que \mathcal{M}_0 possède de nombreuses entrées nulles, il est particulièrement simple d'obtenir la matrice $\mathcal{M}_0^{\text{diag}}$ correspondante, ainsi que la matrice de passage \mathcal{N}_0 . On a

$$\mathcal{M}_0^{\text{diag}} = \text{Diag}(m, -M, M) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.85})$$

Il est à noter qu'une des valeurs propres est $-M$. La masse physique correspondante n'est évidemment pas négative, il faut prendre la valeur absolue, soit M dans ce cas.

On vient de résoudre notre problème à l'ordre 0. Passons maintenant à l'ordre 1.

$$\text{Ordre 1 :} \quad \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_1^{\text{diag}}. \quad (\text{A.86})$$

Il faut alors résoudre cette équation matricielle. Cependant, on connaît désormais l'ordre 0. Avec un peu de manipulation, et avec l'aide d'un logiciel tel que **Mathematica** dans mon cas, on arrive au résultat suivant.

$$\mathcal{M}_1^{\text{diag}} = \text{Diag}(0, -2M\Sigma, -2M\Sigma) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Theta}{\sqrt{2}} & \frac{\Theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\Theta}{\sqrt{2}} & \frac{-\Theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.87})$$

avec

$$\Sigma = \frac{\zeta_3 + \zeta_2}{4M} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{\zeta_3 - \zeta_2}{4M}. \quad (\text{A.88})$$

On a donc résolu notre problème jusqu'à l'ordre 1. Pour les ordres suivants, il faut réitérer la même méthodologie.

La suite de cette annexe présente les résultats en détails des ordres supérieurs, et n'est *a priori* pas d'un grand intérêt pour le lecteur. En effet, le principe est identique que pour les premiers ordres, mais avec des calculs beaucoup plus longs et fastidieux.

$$\begin{aligned} \text{Ordre 2 :} \quad \mathcal{M}_2^{\text{diag}} &= \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_1 \\ &+ \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_1 \\ &+ \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Connaissant l'ordre 0 et l'ordre 1, on peut résoudre l'équation ci-dessous. On obtient

$$\mathcal{M}_2^{\text{diag}} = \text{Diag}(0, -2M\Theta^2, 2M\Theta^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_- & -\theta_+ \\ \frac{\theta_+ - \theta_-}{\sqrt{2}} & \frac{\Theta^2}{2\sqrt{2}} & \frac{-\Theta^2}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\theta_+ + \theta_-}{\sqrt{2}} & \frac{-\Theta^2}{2\sqrt{2}} & \frac{-\Theta^2}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.90})$$

où

$$\theta_{\pm} = \frac{\lambda \pm \lambda'}{\sqrt{2}(M \mp m)}. \quad (\text{A.91})$$

$$\begin{aligned} \text{Ordre 3 :} \quad \mathcal{M}_3^{\text{diag}} &= \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_3 + \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_1 \\ &+ \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_0 \\ &+ \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_3^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

Grâce aux ordres précédents, on résout ce système matriciel et on trouve

$$\mathcal{M}_3^{\text{diag}} = \text{Diag}(0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 & (n_3)_{12} & (n_3)_{13} \\ (n_3)_{21} & \frac{-3\Theta^3}{2\sqrt{2}} & \frac{-3\Theta^3}{2\sqrt{2}} \\ (n_3)_{31} & \frac{-3\Theta^3}{2\sqrt{2}} & \frac{3\Theta^3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.93})$$

avec

$$\begin{aligned}
(n_3)_{12} &= \Theta \theta_+ \frac{M-m}{M+m} + \Sigma \theta_- \frac{2M}{M+m}, \\
(n_3)_{13} &= -\Theta \theta_- \frac{M+m}{M-m} - \Sigma \theta_+ \frac{2M}{M-m}, \\
(n_3)_{21} &= \left[2M \frac{\theta_+ + \theta_-}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} m \frac{\theta_+ - \theta_-}{\sqrt{2}} \right] \frac{\Theta M}{M^2 - m^2} \\
&\quad + \left[(\sqrt{2} M - 2m)\theta_+ (M+m)^2 + (\sqrt{2} M + 2m)\theta_- (M-m)^2 \right] \frac{\Sigma M}{M^2 - m^2} \\
(n_3)_{31} &= \left[-2M \frac{\theta_+ - \theta_-}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} m \frac{\theta_+ + \theta_-}{\sqrt{2}} \right] \frac{\Theta M}{M^2 - m^2} \\
&\quad + \left[(\sqrt{2} M - 2m)\theta_+ (M+m)^2 - (\sqrt{2} M + 2m)\theta_- (M-m)^2 \right] \frac{\Sigma M}{M^2 - m^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ordre 4 : } \mathcal{M}_4^{\text{diag}} &= \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_4 + \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_3 + \mathcal{N}_0^\top \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_2 \\
&\quad + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_3 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1^\top \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_1 \\
&\quad + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2^\top \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_0 \\
&\quad + \mathcal{N}_3^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_3^\top \cdot \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_4^\top \cdot \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}_0.
\end{aligned} \tag{A.94}$$

Une fois de plus, et la dernière dans notre cas, on peut résoudre ce système sachant tout des ordres inférieurs. Avec de la patience, on arrive aux résultats suivant :

$$\mathcal{M}_4^{\text{diag}} = \text{Diag}(m(\theta_+^2 + \theta_-^2) - M(\theta_+^2 - \theta_-^2), -M\theta_-^2 - m\theta_-^2 + 2\Theta^4 M, M\theta_+^2 - m\theta_+^2 - 2\Theta^4 M). \tag{A.95}$$

et

$$\mathcal{N}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_+^2}{2} - \frac{\theta_-^2}{2} & (n_4)_{12} & (n_4)_{13} \\ (n_4)_{21} & (n_4)_{22} & (n_4)_{23} \\ (n_3)_{31} & (n_4)_{32} & (n_4)_{33} \end{pmatrix}, \tag{A.96}$$

avec

$$\begin{aligned}
(n_4)_{12} &= \frac{\Theta^2}{2} \theta_- \frac{5M+m}{M+m} - 2\Theta \Sigma \theta_+ \frac{M(M-m)}{(M+m)^2} - 4\Sigma^2 \theta_- \frac{M^2}{(M+m)^2}, \\
(n_4)_{13} &= \frac{\Theta^2}{2} \theta_+ \frac{5M-m}{M-m} + 2\Theta \Sigma \theta_- \frac{M(M+m)}{(M-m)^2} - 4\Sigma^2 \theta_+ \frac{M^2}{(M-m)^2}, \\
(n_4)_{21} &= \frac{\zeta_2^2 \lambda m^3 + (\zeta_2 + \zeta_3)^2 \lambda' m^2 M + (\zeta_3^2 + 2\zeta_2 \zeta_3) \lambda m M^2 + \zeta_2 \zeta_3 \lambda' M^3}{(M-m)^3 (M+m)^3} \\
(n_4)_{22} &= -\frac{\theta_+ \theta_-}{\sqrt{2}} \frac{M-m}{2M} + \frac{\theta_-^2}{2\sqrt{2}} - \frac{11\Theta^4}{8\sqrt{2}}, \\
(n_4)_{23} &= \frac{\theta_+ \theta_-}{\sqrt{2}} \frac{M+m}{2M} - \frac{\theta_+^2}{2\sqrt{2}} + \frac{11\Theta^4}{8\sqrt{2}}, \\
(n_4)_{31} &= \frac{\zeta_3^2 \lambda' m^3 + (\zeta_2 + \zeta_3)^2 \lambda m^2 M + (\zeta_2^2 + 2\zeta_2 \zeta_3) \lambda' m M^2 + \zeta_2 \zeta_3 \lambda M^3}{(M-m)^3 (M+m)^3} \\
(n_4)_{32} &= -\frac{\theta_+ \theta_-}{\sqrt{2}} \frac{M-m}{2M} - \frac{\theta_-^2}{2\sqrt{2}} + \frac{11\Theta^4}{8\sqrt{2}}, \\
(n_4)_{33} &= -\frac{\theta_+ \theta_-}{\sqrt{2}} \frac{M+m}{2M} - \frac{\theta_+^2}{2\sqrt{2}} + \frac{11\Theta^4}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

En remettant tout ensemble, avec l'Eq. (A.82) et les matrices à chaque ordre, on a tout ce qu'il faut pour retrouver les valeurs propres jusqu'à l'ordre 4. On a également déterminé la matrice de passage \mathcal{N} , qui diagonalise \mathcal{M}_n à l'ordre 4.

A.5 Classification des opérateurs de dimensions supérieures

Dans cette annexe, on s'intéresse aux structures possibles des opérateurs de dimensions supérieures dans le cadre de notre modèle. Comme l'opérateur de mélange du système quintuplet-singlet est de dimension sept, on discutera des opérateurs effectifs jusqu'à la dimension sept. Cependant, l'étude complète de tels opérateurs étant un sujet en soi, on ne détaillera réellement que les opérateurs de dimension cinq, et une grande partie des opérateurs de dimensions six. Pour le reste, cette annexe est à considérer comme une feuille de route, une méthodologie à poursuivre.

Le point important que l'on abordera est que, pour une dimension donnée, les opérateurs ne sont pas tous indépendants les uns des autres. Mais avant cela, une première partie est consacrée à l'algèbre de groupe associée à $\text{SU}(2) \otimes \text{U}(1)$. Ensuite nous verrons une classification des opérateurs. Une dernière partie est la démonstration d'une formule utilisée lors de la manipulation des ces opérateurs.

A.5.1 Un peu d'algèbre

Afin d'être cohérent tout en restant le plus général possible, on redéfinit ici quelques notations.

La charge associée à $\text{U}(1)$ est l'hypercharge Y . Une représentation de $\text{SU}(2)$ est décrit par son isospin j , et par le nombre m tel que $-j \leq m \leq j$. Ainsi, une représentation de \mathbf{n}_Y est décrit par les trois nombres quantiques y , j et m . On rappelle que le nombre j peut prendre les valeurs entière et demi-entière positives. Définissons l'entier naturel n , tel que $n = 2j + 1$.

Représentations Après EWSB, la charge électrique est $Q = T_3 + Y$. Toute représentation de \mathbf{n}_Y peut alors être vue comme le n -plet contenant les états physiques ψ^Q , où la charge électrique se réécrit $Q = j - k + 1 + y$ avec $1 \leq k \leq n$. Prenons l'exemple du triplet d'hypercharge nulle, *i.e.* $n = 3$ ou $j = 1$ et $y = 0$. On a alors

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^0 \\ \psi^- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.97})$$

Générateurs Considérons des n -plet de $\text{SU}(2)$. Les générateurs $t^{a=1,2,3}$ sont des matrices de taille $n \times n$. Dans la base des états propres physiques, t^3 est choisie de sorte que $t^3|j, m\rangle = m|j, m\rangle$. On définit les matrices échelles t^+ et t^- telles que $t^\pm = t^1 \pm i t^2$. On montre alors que, pour $1 \leq k, l \leq n$,

$$(t^3)_{kl} = (j - l + 1) \delta_{k,l} \quad (\text{A.98})$$

$$(t^\pm)_{kl} = \sqrt{\left(2j - l + \frac{3 \pm 1}{2}\right) \left(l - \frac{1 \pm 1}{2}\right)} \delta_{k,l \mp 1} \quad (\text{A.99})$$

En fonction de n , les matrices $T_{a=1,2,3}$ sont

$$(t^1)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(n-l+1)(l-1)} \delta_{k,l-1} + \sqrt{l(n-l)} \delta_{k,l+1} \right) \quad (\text{A.100})$$

$$(t^2)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(n-l+1)(l-1)} \delta_{k,l-1} - \sqrt{l(n-l)} \delta_{k,l+1} \right) \quad (\text{A.101})$$

$$(t^3)_{kl} = \frac{1}{2} (n - 2l + 1) \delta_{k,l} \quad (\text{A.102})$$

Ici, le symbole δ est le symbole de Kronecker.

Relations utiles

$$\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{n}{12}(n^2 - 1) \delta_{ab} \quad (\text{A.103})$$

Si T est associée à la représentation m , alors pour $(1 \leq k, l \leq n)$ et $(1 \leq \kappa, \lambda \leq m)$,

$$\begin{aligned} (t^a)_{kl} (T^a)_{\kappa\lambda} &= \frac{1}{4}(n - 2l + 1)(m - 2\lambda + 1) \delta_{kl} \delta_{\kappa\lambda} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{(n - l + 1)(l - 1)\lambda(m - \lambda)} \delta_{k,l-1} \delta_{\kappa,\lambda+1} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{(m - \lambda + 1)(\lambda - 1)l(n - l)} \delta_{k,l-1} \delta_{\kappa,\lambda+1} \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Note : Dans le cas où $n = m = 2$, les générateurs sont les matrices de Pauli divisée par deux. On retrouve bien l'expression $4 (\tau^a)_{kl} (\tau^a)_{\kappa\lambda} = 2\delta_{k\lambda}\delta_{l\kappa} - \delta_{kl}\delta_{\kappa\lambda}$ déjà connue.

Pour n impair, on a automatiquement $(\psi_I (T^a)_J \psi^J) = 0$. Ce résultat est important, car dans le cas où n est impair, de nombreux opérateurs qu'il est possible d'écrire sont en fait nuls. Ainsi, comme on le voit dans la suite, le nombre d'opérateurs pour n impair est moindre que dans le cas où n est pair.

Pour tout n , $\psi_I = \mathcal{E}_{IJ} \psi^J$, où \mathcal{E}_{IJ} dépend de n , voir les Sec.3.3.4 et 3.3.5 pour plus de détails.

A.5.2 Lagrangien renormalisable

La théorie est décrite par le Lagrangien de L'Eq. (3.1), soit $\mathcal{L}_{\text{Théorie}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{DM}}$. Le SM est évidemment une théorie renormalisable, tous les termes \mathcal{L}_{SM} étant de dimension 4. On ne s'y intéressera pas d'avantage dans la suite.

Les termes contenus dans \mathcal{L}_{DM} peuvent quant à eux être scindés en deux catégories. Ceux de dimension quatre et donc renormalisables, et les terme de dimensions supérieures. Quoiqu'il en soit, chaque terme est invariant de jauge, et respecte la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 , sous laquelle les nouvelles particules χ et ψ sont impaires. On va ici donner les termes renormalisables contenu dans \mathcal{L}_{DM} .

n impair Pour n impair, notamment lorsque $n = 3$ ou $n = 5$, le Lagrangien renormalisable associé χ et ψ est

$$\mathcal{L}_{\text{DM}}^{(4)} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \left(\frac{1}{2} M \psi \psi + \frac{1}{2} m \chi \chi + \text{h.c.} \right), \quad (\text{A.105})$$

Avec ψ un fermion de Majorana se transformant dans \mathbf{n}_0 , et χ un singlet de Majorana. Les *equation du mouvement –ou Equation Of Movement– (EOM)* pour χ and ψ sont

$$\begin{cases} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = m \chi^\dagger \\ \partial_\mu (i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu) = -m \chi \end{cases} \quad \begin{cases} i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi = M \psi^\dagger \\ \partial_\mu (i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu) = -M \psi \end{cases} \quad (\text{A.106})$$

n pair Pour n pair, notamment $n = 4$, on a

$$\mathcal{L}_{\text{DM}}^{(4)} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{\psi} + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \left(M \psi \bar{\psi} + \frac{1}{2} m \chi \chi + \text{h.c.} \right), \quad (\text{A.107})$$

ici $(\psi, \bar{\psi}^\dagger)$ forme un spineur de Dirac se transformant dans $\mathbf{n}_{\frac{1}{2}}$. On a toujours χ singlet de Majorana. Les EOMs sont

$$\begin{cases} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = m \chi^\dagger \\ \partial_\mu (i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu) = -m \chi \end{cases} \quad \begin{cases} i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi = M \bar{\psi}^\dagger \\ i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{\psi} = M \psi^\dagger \end{cases} \quad \begin{cases} D_\mu (i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu) = -M \bar{\psi} \\ D_\mu (i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu) = -M \psi \end{cases} \quad (\text{A.108})$$

A.5.3 Opérateurs de dimensions supérieures

En plus des termes renormalisables, \mathcal{L}_{DM} contient également des opérateurs de dimension supérieure à quatre. Par exemple, on a les opérateurs de dimension cinq avec notamment $\mathcal{L}_{\text{quartic}}$. On veut dans cette annexe faire la liste, pour une dimension donnée, des opérateurs qu'il est possible d'écrire dans la mesure ou ces derniers respectent la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 et sont invariant de jauge. Avant de commencer, un opérateur à un statut particulier car sa dimension dépend de la valeur de n , autrement dit de la taille de la représentation ψ .

Opérateur de mélange Schématiquement on a

$$\mathcal{O}_{\text{mix}}^{(n+2)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Lambda^{n-2}} (\phi^\dagger \phi)^{\frac{n-1}{2}} \psi \chi + \text{h.c.} & (n \text{ odd}) \\ \frac{1}{\Lambda^{n-2}} (\phi^\dagger \phi)^{\frac{n-2}{2}} (\lambda \phi \chi \bar{\psi} - \lambda' \phi^\dagger \chi \psi + \text{h.c.}) & (n \text{ even}) \end{cases} \quad (\text{A.109})$$

Lorsque $n = 2$, cet opérateur est de dimension 4. Par conséquent il est renormalisable. Pour des valeurs supérieures à 2, on a un opérateur de dimension supérieure.

Pour rester le plus général possible dans les notation, indépendamment de la valeur de n , on se place dans la base des états physiques, et on note $d^{i\dots j}$ le tenseur à $n-1$ indices associés à la représentation ψ . Pour $n = 3$, ces tenseurs sont les matrices de Pauli divisée par deux, cf. Sec.3.3.3. Voir les sections 3.3.4 et 3.3.5 pour plus de détails dans le cas $n = 4$ ou $n = 5$, ainsi que pour voir la structure détaillée de ces opérateurs.

Les tenseurs d étant totalement symétriques, il n'y a qu'une façon indépendante de contracter ces derniers avec les doublets de Higgs. Par conséquent, il est redondant d'en inclure plus d'un dans le Lagrangien.

On viens de voir la notion de dépendance. En général, pour une théorie donnée, lorsque l'on fais la liste de tous les opérateurs effectifs de dimension n , ils ne sont pas tous indépendants les uns des autres. Cela signifie qu'il est possible, à partir d'un ou plusieurs de ces opérateurs, de retrouver les autres par des transformations. Il suffit donc d'inclure une base libre de ces opérateurs dans le Lagrangien pour prendre en compte tous les effets physiques, sans qu'il y ai d'informations superflues.

L'objet de cette annexe est donc d'écrire les opérateurs effectifs, puis de déterminer les dépendances éventuelles. On ne considère que les opérateurs faisant intervenir les nouvelles représentations χ et ψ , qui respectent la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 et l'invariance de jauge.

On rappelle que ψ a une hypercharge nulle lorsque n est impair. Pour n pair, ψ à une hypercharge de $+1/2$, donc $\bar{\psi}$ a une hypercharge de $-1/2$. Le doublet de Higgs quant à lui à une hypercharge de $+1/2$.

Dans la suite, on désignera par f un fermion, ϕ le doublet de Higgs standard et \mathcal{D} la dérivée. Le dimension d'un champ scalaire est de 1, celle d'un champs fermionique est de $3/2$ et la dérivée à une dimension de 1. Le **cut-off** de la théorie Λ correspond à une énergie, il est donc de dimension 1. Enfin on travaille avec des couplages sans dimension, ou de dimension 0. Pour connaitre la dimension d'un opérateur, on fais la somme des dimensions des éléments qui le compose au numérateur, puis on soustrait les somme des éléments du dénominateur. En résumé, si l'on désigne la dimension d'un objet comme étant celui-ci entre crochet, on a

$$[f] = \frac{3}{2} \quad , \quad [\phi] = 1 \quad , \quad [\mathcal{D}] = 1 \quad , \quad \text{et} \quad [\Lambda] = 1. \quad (\text{A.110})$$

Dans la suite on compte la dimension des opérateurs sans prendre en compte le **cut-off**. On le garde tout de même pour rappeler que l'on regarde des opérateurs effectifs. Sa présence, à une puissance donnée, permet de ramener la dimension des opérateurs effectifs à quatre.

Opérateurs de dimension 5

Type $f f \phi \phi$: Étant donné que les opérateurs respectent la symétrie \mathbb{Z}_2 sous laquelle seuls les nouveaux fermions χ et ψ sont impairs, ces derniers ne peuvent apparaître que par paire. On peut avoir $\chi \chi$, $\psi \psi$ où $\chi \psi$. Pour $n > 3$, la dernière possibilité est exclue car χ est un singlet. Si $n = 3$ on retrouve l'opérateur de mélange $\mathcal{O}_{\text{mix}}^{(5)}$. Les opérateurs restants qu'il est possible d'écrire sont

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda} (\chi \chi) (\phi^\dagger \phi) + \text{h.c.} \quad (\text{A.111})$$

For n odd :

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\Lambda} (\psi \psi) (\phi^\dagger \phi) + \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda} \epsilon_{a_1 b_1 \dots a_{n-2} b_{n-2}} \left(d_I^{ua_1 \dots a_{n-2}} \psi^I \phi_u^\dagger \right) \left(d_J^{xb_1 \dots b_{n-2}} \psi^J \epsilon_{xy} \phi^y \right) + \text{h.c.} \quad (\text{A.112})$$

For n even ($n \geq 4$) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda} (\bar{\psi} \psi) (\phi^\dagger \phi) + \frac{1}{\Lambda} (\bar{\psi}_I (t^a)_J \psi^J) (\phi_i^\dagger (\tau^a)_j^i \phi^j) + \frac{1}{\Lambda} (\psi_I (t^a)_J \bar{\psi}^J) (\phi_i^\dagger (\tau^a)_j^i \phi^j) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{\Lambda} (\bar{\psi}_I (t^a)_J \bar{\psi}^J) (\epsilon_{ij} \phi^j (\tau^a)_k^i \phi^k) + \frac{1}{\Lambda} (\psi_I (t^a)_J \psi^J) (\phi_i^\dagger (\tau^a)_j^i \epsilon^{jk} \phi_k^\dagger) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \epsilon_{a_1 b_1 \dots a_{n-2} b_{n-2}} \left(d_I^{ua_1 \dots a_{n-2}} \bar{\psi}^I \phi_u^\dagger \right) \left(d_J^{xb_1 \dots b_{n-2}} \psi^J \epsilon_{xy} \phi^y \right) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \epsilon_{a_1 b_1 \dots a_{n-2} b_{n-2}} \left(d_I^{ua_1 \dots a_{n-2}} \bar{\psi}^I \epsilon_{uv} \phi^v \right) \left(d_J^{xb_1 \dots b_{n-2}} \psi^J \phi_x^\dagger \right) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \epsilon_{a_1 b_1 \dots a_{n-2} b_{n-2}} \left(d_I^{ua_1 \dots a_{n-2}} \bar{\psi}^I \epsilon_{uv} \phi^v \right) \left(d_J^{xb_1 \dots b_{n-2}} \bar{\psi}^J \epsilon_{xy} \phi^y \right) + \text{h.c.} \\ & + \frac{1}{\Lambda} \epsilon_{a_1 b_1 \dots a_{n-2} b_{n-2}} \left(d_I^{ua_1 \dots a_{n-2}} \psi^I \phi_u^\dagger \right) \left(d_J^{xb_1 \dots b_{n-2}} \psi^J \phi_x^\dagger \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Il est à noter qu'ici on a naïvement écrit toutes les possibilités qui soient en accord avec les symétries du modèle. Cela ne signifie pas qu'ils soient indépendants.

Type $f f \mathcal{D} \phi$: Pour $n > 2$, il est impossible d'écrire un tel opérateur qui respecte à la fois la symétrie discrète et l'invariance de jauge.

Type $f f \mathcal{D} \mathcal{D}$: Les deux fermions doivent être impairs sous \mathbb{Z}_2 , car on ne regarde que les nouvelles représentations. De plus, pour être invariant de jauge les deux fermions doivent être dans la même représentation de $\text{SU}(2)$. Ainsi les opérateurs possibles sont

$$\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \chi \partial_\mu \partial^\mu \chi + \text{h.c.} \quad (\text{A.114})$$

et,

$$\begin{aligned} & D_\mu \psi D^\mu \psi + \psi D_\mu D^\mu \psi + \text{h.c.} \quad (\text{n impair}) \\ & \bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi + D_\mu D^\mu \bar{\psi} \psi + D_\mu \bar{\psi} D^\mu \psi + \text{h.c.} \quad (\text{n pair}) \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Remarquons que $\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi = TD - \chi \partial_\mu \partial^\mu \chi$, ou la *dérivée totale –ou Total Derivative– (TD)* n'est pas physique et peut être ignorée. Ainsi on ne garde que l'opérateur où les dérivés agissent sur le même champs. Il en est de même pour ψ avec n impair.

Pour n pair, on a $D_\mu \bar{\psi} D^\mu \psi = TD - \bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi$ et $\bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi = TD - D_\mu \bar{\psi} D^\mu \psi = TD + \bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi$, toutes ces écritures sont donc équivalentes puisque les **TD** ne sont pas physiques et peuvent être ignorées.

On vient de voir que plusieurs opérateurs *a priori* indépendants sont en fait équivalents. Il suffit de ne garder qu'un seul de ces opérateurs pour décrire toute la physique avec un minimum de paramètres (couplages) dans le Lagrangien.

On va maintenant s'intéresser à $\mathcal{O}_D = \bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi$ dans le cas n pair, mais il est très simple d'adapter ce qui suit pour tout n . On peut écrire

$$\mathcal{O}_D = \bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi = \bar{\psi}_\alpha g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \psi^\alpha = \bar{\psi}_\alpha g^{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha D_\mu D_\nu \psi^\beta. \quad (\text{A.116})$$

En utilisant les relations $g^{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha = (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)^\alpha_\beta + 2i (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta$, où $(\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta$ et $(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta = 2 g^{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha$, on réécrit

$$\mathcal{O}_D = i \bar{\psi}_\alpha (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta [D_\mu, D_\nu] \psi^\beta + \bar{\psi}_\alpha (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)^\alpha_\beta D_\mu D_\nu \psi^\beta. \quad (\text{A.117})$$

Connaissant la relation ci-dessous (voir Sec.A.5.5), on a introduit le commutateur des dérivées.

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g' Y B_{\mu\nu} - i g W_{\mu\nu}^i T^i. \quad (\text{A.118})$$

On considère ici la dérivée covariante agissant sur une représentation de \mathfrak{n}_Y , avec t^i les générateurs correspondants de $\text{SU}(2)$. On a alors

$$i \bar{\psi}_\alpha (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta [D_\mu, D_\nu] \psi^\beta = g' Y \bar{\psi}_\alpha (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \psi^\beta B_{\mu\nu} + g \bar{\psi}_\alpha (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta t^a \psi^\beta W_{\mu\nu}^a. \quad (\text{A.119})$$

Remarquons qu'en considérant l'égalité $\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} \sigma_{\rho\kappa}$, l'équation précédente peut se réécrire

$$i \bar{\psi}_\alpha (\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta [D_\mu, D_\nu] \psi^\beta = -i g' Y \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \tilde{B}_{\mu\nu} - i g \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} t^a \psi \tilde{W}_{\mu\nu}^a \quad (\text{A.120})$$

avec le tenseur dual \tilde{X} défini comme $\tilde{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} X_{\rho\kappa}$, où X peut être B ou W .

Le second terme de l'Eq. (A.117) se calcule avec la relation $(\sigma^\mu)^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} \bar{\sigma}_{\delta\gamma}$. On obtient

$$\bar{\psi}_\alpha (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)^\alpha_\beta D_\mu D_\nu \psi^\beta = \bar{\psi}_\alpha (\sigma^\mu)^{\alpha\gamma} (\bar{\sigma}^\nu)_{\gamma\beta} D_\mu D_\nu \psi^\beta = -\psi_\alpha i (\bar{\sigma}^\mu)^{\gamma\alpha} D_\mu \left(i (\bar{\sigma}^\nu)_{\gamma\beta} D_\nu \psi^\beta \right) \quad (\text{A.121})$$

Afin de simplifier les choses, on utilise les EOM vue à la Sec.A.108. On se retrouve alors avec $\bar{\psi}_\alpha (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)^\alpha_\beta D_\mu D_\nu \psi^\beta = M^2 \bar{\psi}_\alpha \psi^\alpha$. Ça n'est rien d'autre qu'un terme de masse (avec $M \sim M^2/\Lambda$). Par conséquent on retombe sur un opérateur déjà présent dans le Lagrangien. Donc ce terme est redondant.

Finalement, partant de \mathcal{O}_D , on obtient les deux opérateurs

$$g' Y \bar{\psi} (\sigma^{\mu\nu}) \psi B_{\mu\nu} + g \bar{\psi} (\sigma^{\mu\nu}) T^i \psi W_{\mu\nu}^i + \text{h.c.} \quad (\text{A.122})$$

On choisit de garder ces derniers en défaveur de $\bar{\psi} D_\mu D^\mu \psi$, car ils sont directement reliés à des quantités physiques mesurables, et donc plus naturels en ce sens.

Puisque qu'on vient de voir que les opérateurs de l'Eq. (A.122) sont équivalents à ceux du type $f f \mathcal{D} \mathcal{D}$, on en a terminé avec les opérateurs de dimensions 5.

Opérateurs de dimension 6

Type $f f \phi^3$: Il n'y a pas de tels opérateurs qui préservent les symétries de jauge et la symétrie discrète, excepté pour $n = 4$, où l'on retrouve l'opérateur de mélange $\mathcal{O}_{\text{mix}}^{(6)}$.

Type $f f \mathcal{D} \phi^2$: La dérivée ayant un indice de Lorentz, elle peut être contractée avec un $\bar{\sigma}$ comme pour les termes cinétiques. Si la dérivée agit sur l'un des fermions, en utilisant les **EOM** on voit facilement que l'on retombe sur des opérateurs du type $f f \phi^2$, qui ont déjà été étudié précédemment. Il est donc suffisant de ne considérer les opérateurs où la dérivée agit uniquement sur le scalaire ϕ .

Un utilisant les propriétés de la dérivée, et en ignorant les **TD**, on se ramène au termes de la forme $\phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi = \phi^\dagger \overrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi - \phi^\dagger \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi$. Cette expression est intéressante car elle est hermitienne.

On se retrouve alors avec des opérateurs du type $\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi$, que l'on multiplie par un facteur i de façon à avoir des coefficients de Wilson réels, exactement comme pour les termes cinétiques.

Enfin, en remplaçant χ par ψ , on peut toujours insérer les générateurs t^a , on obtient alors de nouveaux opérateurs invariants de jauge et qui respectent la symétrie discrète. On a donc $\chi^\dagger t^a \bar{\sigma}^\mu \chi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi$ with $\phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi = \phi^\dagger \overrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi - \phi^\dagger \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu \tau^a \phi$. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter le hermitien conjugué, comme pour le terme cinétique. En résumé on a

$$i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi, \quad (\text{A.123})$$

et

$$\begin{aligned} i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi + i \psi^\dagger t^a \bar{\sigma}^\mu \psi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu^a \phi & \quad (\text{n impair}), \\ i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi + i \psi^\dagger t^a \bar{\sigma}^\mu \psi \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu^a \phi & \quad (\text{n pair}), \\ i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi} \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi + i \bar{\psi}^\dagger t^a \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi} \phi^\dagger \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu^a \phi & \quad (\text{n pair}). \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Pour n pair, on peut également écrire les opérateurs

$$a \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi} (\epsilon_{ab} \phi^a \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \phi^b) + b \psi^\dagger T^a \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi} (\epsilon_{cd} \phi^c \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_\mu^a \phi^d) \quad (\text{A.125})$$

Type $f f \mathcal{D}^2 \phi$: Pour $n > 2$, on ne peut pas écrire de tels opérateurs qui soient invariants de jauge.

Type $f f f f$: On sait que $\chi \chi$ est invariant de jauge et respecte la symétrie \mathbb{Z}_2 . De même, les termes $\psi^\dagger \psi$ pour n impair respectent ces symétries. Pour n pair les combinaisons $\psi^\dagger \psi$, $\bar{\psi}^\dagger \bar{\psi}$ et $\psi \bar{\psi}$ respectent également ces symétries. On parlera de terme de type $\chi \chi$ et $\psi \psi$ pour simplifier.

Partant de ce constat, on peut donc combiner ces expressions entre elles, ou avec des terme du type $f f$ du **SM** pour former de tels opérateurs. Il ne faut pas non plus oublier les opérateurs avec les générateurs, qui restent invariant de jauge. Bref, il y a toute une famille de tels opérateurs.

Type $f f \mathcal{D}^3$: L'invariance de Lorentz nous enseigne que de tels opérateurs existent si et seulement si $f f$ se transforme comme un vecteur, *i.e.* $(\chi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \chi) \mathcal{D}_\rho B^{\rho\mu}$ ou $\mathcal{D}_\rho (\chi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \chi) B^{\rho\mu}$. Dans les cas, avec les **EOM**, on peut se ramener à des opérateurs du type $f f \mathcal{D}^2 H$, $f f \mathcal{D} \mathcal{D}$ (à un facteur de masse près) ou $f f f f$. Par conséquent il n'y a pas de nouvel opérateur indépendant à prendre en compte. On ne donne pas la liste de ces derniers car ce n'est pas intéressant pour notre étude, mais il faut savoir qu'ils existent.

De manière générale, ce sont des opérateurs de contact à quatres fermion, supprimé par le **cut-off** Λ élevé au carré. De telles interactions sont négligeables comparé aux interactions électro-faibles ou d'ordres inférieurs.

A.5.4 Opérateurs de dimension 7

On ne va pas détailler ici tous les opérateurs de dimensions 7. Cependant on peut remarquer que les quantités du type $\chi\chi$ et $\psi\psi$, qui sont invariantes de jauge et qui respectent la symétrie discrète \mathbb{Z}_2 , sont de dimension 3. Donc, n'importe quelle opérateur de dimension 4 multiplié par l'un de ces termes est de dimension 7 et respecte les symétries. Cela donne une idée de la quantité d'opérateurs que l'on peut écrire. Ces opérateurs sont supprimés par le [cut-off](#) au cube.

Pour $n = 5$, l'opérateur de mélange est de dimension sept. Néanmoins, c'est le seul que l'on considère dans notre modèle car c'est lui qui induit le mélange. Son impact est donc essentiel, contrairement aux autres opérateurs de dimensions sept, dont les effets sont *a priori* négligeables sur les quantités physiques qui nous intéressent.

A.5.5 Preuve de la relation $[D_\mu, D_\nu] = -i g X_{\mu\nu}^a T^a$

On considère la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - i g X_\mu^a T^a$, agissant sur la représentation ψ . On se place dans le contexte non-abélien. On a

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= \left[\left(\partial_\mu - i g X_\mu^a T^a \right) \left(\partial_\nu - i g X_\nu^b T^b \right) - \left(\partial_\nu - i g X_\nu^c T^c \right) \left(\partial_\mu - i g X_\mu^d T^d \right) \right] \psi \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi - g^2 [X_\mu^a T^a, X_\nu^b T^b]\psi - i g \left(\partial_\mu (X_\nu^b T^b \psi) + X_\mu^a T^a \partial_\nu \psi - \partial_\nu (X_\mu^l T^l \psi) - X_\nu^c T^c \partial_\mu \psi \right) \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi - i g \partial_\mu (X_\nu^a T^a) \psi + i g \partial_\nu (X_\mu^a T^a) \psi - g^2 [X_\mu^a T^a, X_\nu^b T^b] \psi. \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

Comme les dérivées commutent, le premier commutateur est nul. En factorisant l'expression par ψ on obtient,

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g \left(\partial_\mu (X_\nu^a T^a) - \partial_\nu (X_\mu^a T^a) - i g [X_\mu^a T^a, X_\nu^b T^b] \right). \quad (\text{A.127})$$

Étant donnée que les T^a sont des matrices constantes, on peut les sortir des dérivées. De plus, on peut simplifier d'avantage l'expression précédente en voyant que

$$[X_\mu^a T^a, X_\nu^b T^b] = X_\mu^a X_\nu^b [T^a, T^b] \quad (\text{A.128})$$

Il reste à évaluer le commutateur des générateurs. Or l'algèbre est bien connue, ce n'est rien d'autre que la constante de structure multipliée par un générateur, schématiquement parlant. Dans notre modèle on s'intéresse notamment aux représentations de $\text{SU}(2)$, écrivons $[T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} T^c$ par identification.

$$[X_\mu^b T^b, X_\nu^c T^c] = i X_\mu^b X_\nu^c \epsilon^{bca} T^a \quad (\text{A.129})$$

Finalement, on se retrouve avec

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g X_{\mu\nu}^a T^a \quad \text{with} \quad X_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a + g \epsilon^{abc} X_\mu^b X_\nu^c \quad (\text{A.130})$$

Quelques mots sur le cas non-abélien, qui en fait est plus simple. Considérons $U(1)$ avec la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu - i g' Y B_\mu$. On obtient

$$[D_\mu, D_\nu] = -i g' Y B_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (\text{A.131})$$

Pour terminer, considérons un cas plus général tel que $U(1) \times \text{SU}(2)$, où $D_\mu = \partial_\mu - i g' Y B_\mu - i g W_\mu^a T^a$. On obtient alors $[D_\mu, D_\nu] = -i g' Y B_{\mu\nu} - i g W_{\mu\nu}^a T^a$ avec la même démonstration. En effet, les termes croisés sont nuls puisque B et W commutent.

Annexe B

Liste des acronymes

- Alice** expérience sur un grand collisionneur d'ions –ou *A Large Ion Collider Experiment*–. 64
- ATLAS** dispositif instrumental toroïdal pour le LHC –ou *A Toroidal LHC ApparatuS*–. 2, 64
- BSM** au-delà du modèle standard –ou *Beyond the Standard Model*–. 3
- CERN** conseil Européen pour la Recherche Nucléaire. 64
- CMB** fond diffus cosmologique –ou *Cosmic Microwave Background*–. 14, 47–51, I, II, IV
- CMS** solénoïde compact à muons –ou *Compact Muon Solenoid*–. 2, 64
- DD** Détection Directe. ix, 8–10, 34, 47–49, 53, 55, 56, 58–61, 63, 68–71, 73–75, 81
- DI** Détection indirecte. 48, 49, 62, 63, 81
- EOM** equation du mouvement –ou *Equation Of Movement*–. XXII, XXV, XXVI
- ESA** Agence européenne spatiale –ou *European Space Agency*–. 50
- EWSB** Brisure de la symétrie électro-faible –ou *ElectroWeak Symmetry Breaking*–. 33, 36, 38, VII, XXI
- FCNC** Changement de saveur par courant neutre –ou *Flavour-Changing Neutral Currents*–. 34
- INFN** Institut national de physique nucléaire –ou *Istituto Nazionale di Fisica Nucleare*–. 59
- IR** InfraRouge. 4
- LHC** grand collisionneur de hadrons –ou *Large Hadron Collider*–. vii, 2, 7, 10, 28, 34, 47, 48, 54, 63, 64, 72, 80–82
- LHCb** expérience du LHC sur le quark beauté –ou *Large Hadron Collider beauty experiment*–. 64
- LSP** particule supersymétrique la plus légère –ou *Lightest Supersymmetric Particle*–. 6, 22, 24, 31
- MN** Matière Noire ou matière sombre –ou *Dark Matter*–. 8, 10, 14, 30–32, 57–59
- MSSM** modèle standard supersymétrique minimal –ou *Minimal Supersymmetric Standard Model*–. 3, 4, 6–10, 22–24, 30, 34, 35, 37–39, 51, 52, 62, 63, 75, 80
- SM** modèle standard –ou *Standard Model*–. 2–9, 15, 17, 19, 22, 23, 28–35, 38, 49, 51–53, 68, 69, 80, 81, XXII, XXVI

SURF complexe souterrain de recherche de Sanford –ou *Sanford Underground Research Facility*–. [59](#)

SUSY SUperSYmétrie. [5–9](#), [25](#), [27](#), [29–32](#), [34](#), [35](#), [38](#), [41](#), [51](#), [80](#)

TD dérivée totale –ou *Total Derivative*–. [XXIV](#), [XXVI](#)

UV UltraViolet. [3–5](#), [8](#), [31](#), [32](#), [35](#), [52–54](#), [69](#), [75](#), [80–82](#)

VEV valeur attendue du vide –ou *Vacuum Expectation Value*–. [7](#), [36](#), [41](#), [54](#), [VI](#)

WIMP particule massive interagissant faiblement –ou *Weakly Interacting Massive Particle*–. [9](#), [15](#), [25](#), [28](#), [29](#), [31](#), [48](#), [53](#), [55](#), [56](#), [59](#), [60](#), [62](#), [63](#), [68](#), [70](#), [71](#), [73–75](#), [80–82](#), [III](#)

Annexe C

Glossaire

bino-like Particule ayant les mêmes propriétés que le bino en supersymétrie. C'est un singlet fermionique sous $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. [31](#)

cf. Forme abrégée de l'expression latine "*confer*", qui signifie "*rapprocher*", "*joindre*" ou encore "*réunir*". On l'utilise pour faire référence à un passage, une équation ou autre.. [3–5](#), [8–10](#), [14](#), [20](#), [28](#), [29](#), [34](#), [52](#), [54](#), [61](#), [62](#), [68](#), [69](#), [72](#), [75](#), [81](#), [XXIII](#)

cut-off Échelle de coupure. Dans le cas d'une théorie effective, cette échelle correspond l'énergie au-delà de laquelle la théorie n'est plus valable. Le terme anglais correspondant est *cut-off*, et il sera utilisé de façon abusive dans ce manuscrit. [9](#), [31](#), [32](#), [34](#), [35](#), [37](#), [51–54](#), [68–71](#), [73–75](#), [80](#), [82](#), [XXIII](#), [XXVI](#), [XXVII](#)

e.g. Abréviation de la locution latine "*exempli gratia*". Elle signifie "*par exemple*". [15](#), [31](#), [63](#)

Ωh^2 Notation faisant référence, parfois abusivement, à la densité relique de la matière sombre. Voir le Chapitre [2](#). [9–11](#), [24](#), [25](#), [28–31](#), [33](#), [34](#), [48](#), [50](#), [52](#), [53](#), [61](#), [63](#), [68](#), [70](#), [71](#), [74](#), [75](#), [81](#)

i.e. Abréviation de l'expression latine "*Id est*". Elle signifie "*c'est-à-dire*". [3](#), [6](#), [14](#), [15](#), [17](#), [19](#), [21](#), [22](#), [25](#), [28](#), [30](#), [33](#), [36–38](#), [41](#), [43](#), [50](#), [52–54](#), [56–58](#), [61–63](#), [68](#), [71–73](#), [75](#), [VII–IX](#), [XII](#), [XVIII](#), [XXI](#), [XXVI](#)

LUX grande expérience souterraine au xénon –ou *Large Underground Xenon experiment*–. Voir luxdarkmatter.org. [55](#), [59](#), [61](#), [68](#), [69](#), [71](#), [73](#), [74](#), [81](#)

\mathbf{n}_Y Représentation de $SU(2) \otimes U(1)$. La représentation se transforme comme un n-plet de $SU(2)$ avec une hypercharge Y associée à $U(1)$. [31](#), [33](#), [34](#), [VII](#), [XXI](#)

PandaX expériences de particule et d'astrophysique au xénon –ou *Particle and Astrophysical Xenon Experiments*–. Voir pandax.sjtu.edu.cn. [61](#)

sparticule Une sparticule est une particule supersymétrique. Le "s" faisant référence à supersymétrie. Par exemple, le super-partenaire du quark est appelé squark. [6](#), [7](#)

$SU(2)$ Groupe spécial unitaire des matrices de degré 2. C'est le groupe des matrices unitaires à coefficients complexes de dimensions 2×2 et de déterminant 1. [2](#), [28](#), [29](#), [31](#), [33](#), [36](#), [38–42](#), [81](#), [VII](#), [XXI](#), [XXIV](#), [XXV](#), [XXVII](#)

$SU(3)$ Groupe spécial unitaire des matrices de degré 3. C'est le groupe des matrices unitaires à coefficients complexes de dimensions 3×3 et de déterminant 1. [2](#), [28](#), [31](#)

TPC Détecteur, en général cylindrique, permettant de déterminer la charge, la trajectoire d'une particule chargée, et son identification. [59](#)

U(1) Groupe unitaire de degré 1. Il est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication. [2](#), [28](#), [31](#), [36](#), [VII](#), [XXI](#), [XXVII](#)

XENON1T Expérience de détection directe. Comme son nom l'indique, elle utilise 1 tonne de xénon. Voir xenon1t.org. [55](#), [59](#), [61](#), [68](#), [71](#), [74](#), [81](#)

Annexe D

Liste des symboles

- σ Matrice(s) de Pauli. Elles sont au nombre de trois est indexées avec un indice associé à l'algèbre de $SU(2)$. [33](#)
- α_s Constante de couplage fort. À l'échelle électro-faible, sa valeur est de 0.1181. [2](#)
- G_F Constante de Fermi. Sa valeur est de $1.1663787 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. [2](#)
- α Constante de structure fine. Sa valeur est de $7.2973525664 \times 10^{-3}$. [2](#)
- c_W Cosinus de l'angle de Weinberg. Il est défini comme le rapport des masse des bosons W et Z .. [36](#), [VII](#)
- s_W Sinus de l'angle de Weinberg. [36](#), [VII](#)
- e Charge électrique élémentaire. Elle correspond à la charge électrique du proton, au à celle de l'électron avec le signe opposé. Sa valeur est $1.6021766208 \times 10^{-19} C$. [VII](#)
- δ_j^i Symbole mathématique, appelé *delta de Kronecker*. Il vaut 1 si $i = j$, zéro sinon.. [40](#), [XVI](#)
- \mathcal{L}_{SM} Lagrangien du modèle standard de la physique des particules. [32](#), [34](#)
- \mathcal{L}_{DM} Lagrangien du modèle lié à la nouvelle physique. [32](#)
- χ Singlet de jauge fermionique. [31](#), [33–35](#), [51](#), [52](#), [68](#), [80](#), [81](#), [XXII–XXIV](#)
- ψ Représentation fermionique se transformant dans la représentation n_Y de $SU(2) \otimes U(1)$. [31](#), [33–35](#), [39](#), [43](#), [51](#), [52](#), [69](#), [80](#), [81](#), [XXII–XXIV](#)
- ϕ Doublet de Higgs du modèle standard. [31](#), [33](#), [38](#)
- Z^0 Symbole du boson jauge Z . [28](#), [VII](#), [VIII](#)
- W^\pm Symbole des bosons jauge W^+ et W^- . [63](#), [VII](#), [VIII](#)
- A^0 Symbole du photon, vecteur de l'interaction électromagnétique. [VII](#)
- m Masse associée à la représentation χ . [31](#), [33](#), [34](#), [41](#), [52](#)
- M Masse associée à la représentation ψ . [31](#), [33](#), [41](#), [52](#), [72](#)
- M_Z Masse du boson jauge Z . Sa valeur est de $91,1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$. Voir [Particule Data Book](#). [28](#), [VIII](#)
- M_W Masse du boson jauge W . Sa valeur est de $80.387 \pm 0.016 \text{ GeV}$. Voir [Particule Data Book](#). [VIII](#)
- Λ Cut-off de la théorie. Au-delà de cette échelle la théorie n'est plus valable. [31–33](#), [35](#), [51–54](#), [62](#), [82](#)

Résumé Le Modèle Standard de la physique des particules est une théorie robuste à l'échelle électro-faible. Cependant, ce dernier possède des lacunes. Par exemple il ne permet pas d'expliquer la matière sombre, qui est une des problématiques majeures de la physique moderne. Près de 85% de la matière présente dans l'Univers n'est pas expliquée par le Modèle Standard. On l'appelle la matière sombre. Cette thèse présente une catégorie de modèles s'adressant à la problématique de la matière sombre. Ceux-ci s'appuient sur le paradigme du WIMP, qui nous enseigne qu'une particule neutre avec une section efficace électro-faible et une masse électro-faible explique à peu près l'abondance relique observée. Néanmoins, une analyse plus approfondie révèle que cette correspondance n'est en fait pas très précise puisque des masses multi-TeV pour la matière sombre sont nécessaires pour les modèles les plus simples, ce qui est 1-2 ordres de grandeur plus grand que l'échelle électro-faible. Cependant, avec un secteur sombre étendu, il est possible de maintenir la masse de la matière sombre proche de l'échelle électro-faible tout en gardant la densité relique observée. Ma thèse présente des modèles effectifs simples de matière sombre fermionique du type WIMP, où le candidat de matière sombre est issu du mélange entre un singlet du Modèle Standard et d'un n -plet de $SU(2) \times U(1)$. La particule de matière sombre est supposée avoir une masse de l'ordre de l'échelle électro-faible, et le mélange est généré par des opérateurs de dimensions supérieures impliquant le doublet de Higgs. Lorsque la symétrie électro-faible est brisée, le boson de Higgs acquiert sa valeur moyenne dans le vide et des matrices de masse non-diagonales sont générées dans le secteur sombre. Cela engendre un mélange entre les états du secteur sombre, et les états physiques ainsi que leur masse sont obtenus en diagonalisant les matrices de masse. Pour des valeurs appropriées des paramètres, il est toujours possible d'accommoder le mélange afin de reproduire la densité relique mesurée. On parle de "well-tempered mixing" ou mélange correctement ajusté en français. Afin de stabiliser la particule de matière sombre, on doit ajouter une symétrie sous laquelle le secteur sombre est impair et le Modèle Standard est pair. Pour n impair, le n -plet est un multiplet de Majorana d'hypercharge nulle. Pour n pair, on considère un bi-multiplet d'hypercharge opposée $\pm 1/2$ de sorte à ce qu'il forme un spineur de Dirac. On se focalise sur les contraintes liées à la densité relique et à la détection directe pour les configurations singlet-triplet, singlet-quadruplet et singlet-quintuplet. Notons que les contraintes de la détection indirecte sont moins fortes que celles issues de la détection directe. On impose une masse électro-faible pour la matière sombre afin qu'elle puisse être produite au LHC. Les résultats montrent qu'il est toujours possible de trouver un espace des paramètres, avec une masse électro-faible pour la matière sombre et redonnant la densité relique observée, qui passe les contraintes de détection directe et a fortiori indirecte. Dans la région de validité de la théorie effective, la détection directe est moins contraignante pour les grandes représentations du n -plet à cause du très faible mélange.

Abstract The Standard Model of particles physics is a well-tested theory at the electroweak scale. However this is not the end of the story. For instance, it does not solve the dark matter problem, which is one of the major issues of the modern physics. About 85% of the matter in the Universe is not describe by the Standard Model. It is called dark matter. This thesis presents a category of models responding to the dark matter problem. These models are based on the WIMP-paradigm, stating that a neutral particle with an electroweak cross-section and with an electroweak-scale mass roughly explains the observed relic abundance. Nevertheless, a closer look reveals that this correspondence is quantitatively not very precise since multi-TeV dark matter masses are required for the simplest models, which is 1-2 orders of magnitude larger than the electroweak scale. However, with an extended dark sector, it is possible to maintain the dark matter particle mass close to the electroweak scale and to keep the observed relic density. My thesis discloses simple effective models of fermionic WIMP dark matter, where the dark matter candidate is a mixture of a Standard Model singlet and an n -plet of $SU(2) \times U(1)$. The dark matter is assumed to be around the electroweak scale, and the mixing is generated by higher-dimensional operators involving the Higgs doublet. Upon electroweak symmetry breaking, the Higgs takes its vacuum expectation value and non diagonal mass matrices are generated for the dark matter sector. This causes mixing between dark matter sector states, and physical states and masses are obtained by diagonalising the mass matrices. For suitable parameters, it is always possible to adjust the mixing to reproduce the observed relic density. This is referred to as a well-tempered mixing. In order to stabilise the dark matter particle, we need to add a discrete symmetry under which the dark matter sector is odd and the Standard Model is even. For n odd, the n -plet is a Majorana multiplet with zero hypercharge. For n even, we consider a bi-multiplet with opposite hypercharges of $\pm 1/2$ such as to form a Dirac spinor. We focus on the observed relic density and the direct detection constraints for the singlet-triplet, singlet-quadruplet and singlet-quintuplet configurations. Note that bounds from indirect detection are less stringent than those from direct detection. We impose electroweak mass for the dark matter particle such that it could be produced by the LHC. Results show that it is always possible to find a choice of parameters reproducing the observed relic density with an electroweak dark matter mass which conforms to the direct and a fortiori indirect detection constraints. In the region of validity of the effective theory, direct detection is less constraining for higher representations of the n -plet due to the tiny mixing.